

А.А.Самарский
В.А.Гапактионов
С.П.Курдюмов
А.П.Михайлов

**Режимы
с обострением
в задачах
для квазилинейных
параболических
уравнений**

А.А.Самарский
В.А.Галактионов
С.П.Курдюмов
А.П.Михайлов

**Режимы
с обострением
в задачах
для квазилинейных
параболических
уравнений**



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.19
С 17
УДК 517.9

Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 480 с.

Рассматриваются неограниченно растущие за конечное время решения (режимы с обострением) квазилинейных уравнений параболического типа, описывающих процессы теплопроводности и горения в сплошных нелинейных средах: основное внимание уделяется эффекту локализации тепла.

Установлены условия возникновения неограниченных решений и изучено их асимптотическое поведение. Излагаются специальные методы исследования нелинейных параболических уравнений, изучаются свойства разностных схем для отдельных классов уравнений.

Проблематика книги тесно связана с широким кругом актуальных задач физики, биофизики, химии, биологии, которые сейчас интенсивно изучаются в рамках теории диссипативных структур и синергетики.

Для специалистов в области нелинейных уравнений математической физики, прикладной математики, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Ил. 89. Библиогр. 280 назв.

Рецензент член-корреспондент АН СССР *С. И. Пожарев*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава I. Некоторые предварительные сведения из теории квазилинейных параболических уравнений второго порядка	17
§ 1. Постановка основных задач. Теоремы сравнения	17
§ 2. Существование, единственность и условия ограниченности классического решения	21
§ 3. Обобщенные решения квазилинейных вырождающихся параболических уравнений	30
Комментарии и библиографические замечания	47
Глава II. О некоторых квазилинейных параболических уравнениях. Автомодельные решения и их асимптотическая устойчивость	49
§ 1. Краевая задача в полупространстве для уравнения теплопроводности. Понятие асимптотической устойчивости автомодельных решений	50
§ 2. Асимптотическая устойчивость фундаментального решения задачи Коши	57
§ 3. Асимптотическая устойчивость автомодельных решений уравнений нелинейной теплопроводности	63
§ 4. Квазилинейное уравнение теплопроводности в ограниченной области	70
§ 5. Уравнение быстрой диффузии. Краевая задача в ограниченной области	75
§ 6. Задача Коши для уравнения быстрой диффузии	76
§ 7. Условия эквивалентности различных квазилинейных уравнений теплопроводности	82
§ 8. Об уравнении теплопроводности с градиентной нелинейностью	90
§ 9. Задача Колмогорова — Петровского — Пяскупова .	92
§ 10. Автомодельные решения полулинейного параболического уравнения $u_t = \Delta u + u \ln u$	98
§ 11. Уравнение нелинейной теплопроводности с источником и стоком	103
§ 12. Локализация и эффект полного остывания в средах со стоками	105
§ 13. О структуре аттрактора полулинейного параболического уравнения с поглощением в \mathbb{R}^N	110
Комментарии и библиографические замечания	126

Глава III. Локализация (инерция) тепла	130
§ 1. Понятие локализации тепла	130
§ 2. Автомодельные решения с обострением	134
§ 3. «Инерция» тепла в средах с нелинейной теплопроводностью	141
§ 4. Эффективная локализация тепла	155
Комментарии и библиографические замечания	169
Глава IV. Нелинейное уравнение с источником. Режимы с обострением, локализация, асимптотическое поведение решений	171
§ 1. Три типа автомодельных режимов горения с обострением	172
§ 2. Об асимптотическом поведении неограниченных решений. Качественная теория нестационарного осреднения . . .	194
§ 3. Условия возникновения режимов с обострением. Глобально существующие решения при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$	206
§ 4. Доказательство локализации неограниченных решений при $\beta \geq \sigma + 1$, отсутствие локализации в случае $1 < \beta < \sigma + 1$	230
§ 5. Об асимптотической устойчивости неограниченных автомодельных решений	240
§ 6. Асимптотика неограниченных решений LS-режима вблизи сингулярной точки . . .	251
§ 7. Режимы с обострением, эффективная локализация для полунлинейных уравнений с источником	255
Комментарии и библиографические замечания. Проблемы	285
Глава V. Методы обобщенного сравнения решений различных нелинейных параболических уравнений и их приложения	289
§ 1. Условия критичности и теорема прямого сравнения решений	289
§ 2. Операторный (функциональный) метод сравнения решений параболических уравнений	296
§ 3. Условия ϕ -критичности . . .	302
§ 4. Локализация тепла в задачах для произвольных параболических уравнений нелинейной теплопроводности	305
§ 5. Об условиях отсутствия локализации тепла	318
§ 6. Некоторые подходы к определению условий неограниченности решений квазилинейных параболических уравнений	322
§ 7. Условия критичности и теорема сравнения разностных решений нелинейных уравнений теплопроводности	334
Комментарии и библиографические замечания	339
Глава VI. Приближенные автомодельные решения нелинейных уравнений теплопроводности и их применение к исследованию эффекта локализации	341
§ 1. Введение. Основные направления исследований	341
§ 2. Приближенные автомодельные решения в вырожденном случае	343
§ 3. Приближенные автомодельные решения в невырожденном случае. Поточечные оценки скорости сходимости	353
§ 4. Приближенные автомодельные решения в невырожденном случае. Интегральные оценки скорости сходимости	364
Комментарии и библиографические замечания. Проблемы	377

Глава VII. О некоторых других методах исследования неограниченных решений	379
§ 1. Об одном подходе к проблеме локализации неограниченных решений задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений	379
§ 2. О краевых задачах в ограниченных областях	394
§ 3. Параболическая система квазилинейных уравнений с источниками	410
§ 4. Об эффекте локализации горения в многокомпонентных средах	420
§ 5. О разностных схемах для квазилинейных параболических уравнений, допускающих режимы с обострением	441
Комментарии и библиографические замечания. Проблемы	462
Список литературы	464

ПРЕДИСЛОВИЕ

Квазилинейные параболические уравнения второго порядка и параболические системы квазилинейных уравнений лежат в основе математических моделей самых разнообразных явлений и процессов в механике, физике, технологии, биофизике, биологии, экологии и многих других областях знаний. Например, квазилинейное уравнение теплопроводности в определенных условиях описывает процессы электронной и ионной теплопроводности в плазме, адиабатическую фильтрацию газов и жидкостей в пористых средах, диффузию нейтронов и альфа-частиц; оно возникает при математическом моделировании процессов химической кинетики, различного рода биохимических реакций, процессов роста и миграции популяций и т. п.

Такое широкое распространение квазилинейных параболических уравнений объясняется прежде всего тем, что они выводятся из фундаментальных законов сохранения (энергии, массы, числа частиц и др.). Поэтому возможна ситуация, когда два физических процесса, не имеющих на первый взгляд ничего общего (например, теплопроводность в полупроводниках и процесс распространения магнитного поля в среде с конечной проводимостью), описываются одним и тем же нелинейным уравнением диффузии, только с различными числовыми параметрами.

В общем случае различие квазилинейных параболических уравнений, лежащих в основе математических моделей самых разнообразных процессов, заключается в характере зависимости коэффициентов уравнения (коэффициентов теплопроводности, переноса, мощности объемных источников и стоков энергии) от величин, определяющих состояние среды, т. е. от температуры, плотности, магнитного поля и т. д.

Вряд ли возможно охарактеризовать даже простым перечислением основные результаты, полученные в теории нелинейных параболических уравнений. Отметим лишь, что для широких классов уравнений решены принципиальные проблемы разрешимости и единственности решений различных краевых задач, подробно изучены дифференциальные свойства решений. Общие результаты теории позволяют анализировать с указанных позиций целые классы уравнений одного вида.

Что касается качественных, или конструктивных, исследований квазилинейных параболических уравнений, связанных с изу-

чением пространственно временной структуры решений (что особенно важно для практических приложений), то здесь также достигнуты значительные успехи. Работы такого плана были начаты советскими математиками и механиками. Были исследованы свойства большого числа частных автомодельных (инвариантных) решений различных нелинейных параболических уравнений, описывающих важные закономерности физических процессов в сплошных нелинейных диссипативных средах. Асимптотическая устойчивость многих из них означает, что эти частные решения простого вида могут описывать свойства, характерные для широкого множества решений нелинейных краевых задач. Это свидетельствует о возможности своеобразной классификации свойств семейств решений с помощью набора устойчивых частных решений, которая способна в какой-то степени играть роль «принципа суперпозиции» для нелинейных задач. Исследования такого типа породили целое направление в теории нелинейных эволюционных уравнений; и это привело к созданию качественной (конструктивной) теории нелинейных параболических задач*).

Оказалось, что с позиций конструктивных исследований каждая нелинейная параболическая задача обладает своей индивидуальностью и, вообще говоря, не может быть решена на основе единого подхода. Как правило, для подобного анализа даже отдельных и весьма частных свойств решений требуется целый спектр методов качественного исследования. Этот факт подчеркивает глубокую содержательность даже простейших модельных параболических задач, изучение которых позволяет выделить главные направления развития конструктивной теории.

Основные проблемы, возникающие при исследовании сложных реальных физических процессов, связаны в первую очередь с нелинейностью уравнений, лежащих в основе математической модели. Первое следствие нелинейности — отсутствие принципа суперпозиции, свойственного линейным однородным задачам. Это обеспечивает неисчерпаемость множества возможных направлений эволюции диссипативного процесса, а также определяет возникновение в сплошной среде дискретных пространственно временных масштабов. Они характеризуют свойства нелинейной среды, не зависящие от внешнего воздействия. Нелинейные диссипативные среды могут проявлять некоторую внутреннюю упорядоченность, которая характеризуется спонтанным возникновением в среде сложных диссипативных структур. В ходе эволюции происходит процесс самоорганизации.

Эти свойства проявляют даже простейшие нелинейные параболические уравнения и системы, что порождает ряд принципиальных проблем, возникающих на пути их конструктивного исследования. Принципы эволюции и пространственно временную «архитектуру» диссипативных структур целесообразно

*) Разумеется, такое разделение теории на общую и конструктивную части условно. Оба круга исследований тесно взаимосвязаны.

детально изучать на простых (но тем не менее все равно содержательных) модельных задачах, возникающих из сложных реальных математических моделей путем выделения основных механизмов, которые отвечают за рассматриваемый круг явлений.

Важно подчеркнуть, что развитие конструктивной теории нелинейных дифференциальных уравнений математической физики немыслимо без использования методологии математического моделирования на ЭВМ и вычислительного эксперимента. Выводы и результаты конструктивных теоретических исследований всегда полезно проверить в численных расчетах. Таково фактически внутреннее требование конструктивной теории; в особой степени это относится к результатам, непосредственно ориентированным на приложения.

Правильно организованный вычислительный эксперимент (и этому есть много примеров) позволяет не только проверить законность и реальность теоретических оценок, но и выделить тонкие эффекты и закономерности, определяющие новые направления развития теории. На наш взгляд, сложившийся в ходе проведения вычислительного эксперимента уровень понимания физического процесса, явления и даже свойств решений абстрактной эволюционной задачи не может быть достигнут в процессе чисто теоретического анализа.

Особое место в теории нелинейных уравнений занимает круг исследований неограниченных решений, или, как их по-другому называют, режимов с обострением (физический термин). Нелинейные эволюционные задачи, допускающие неограниченные решения, являются глобально (по времени) неразрешимыми: решения неограниченно возрастают в течение конечного промежутка времени. Долгое время их рассматривали в теории как некие экзотические примеры, пригодные разве что для установления степени оптимальности условий глобальной разрешимости как естественного «физического» требования. Хотя, отметим, что первые успешные попытки вывода условий неограниченности решений нелинейных параболических задач были предприняты более 20 лет назад. Тот факт, что такие «сингулярные» по времени решения имеют физический смысл, был известен еще раньше — это задачи теплового взрыва, процессы кумуляции ударных волн и др.

Новый импульс развитию теории неограниченных решений придали возможности приложений в различных областях, например самофокусировка световых пучков в нелинейных средах, нестационарные структуры в магнитной гидродинамике (T -слой), безударное сжатие в задачах газовой динамики. Число публикаций, в которых изучались неограниченные решения, в последнее десятилетие резко возросло.

Необходимо отметить, что в математическом исследовании неограниченных решений нелинейных эволюционных задач заметное предпочтение отдается вопросам общей теории: конструктивные исследования в этой области развиты еще недостаточно

широко. Сложившуюся ситуацию можно объяснить, с одной стороны, тем, что здесь традиционные вопросы общей теории еще далеки от завершения, а с другой стороны, возможно, тем, что конструктивное описание неограниченных решений требует принципиально новых подходов и фактически переориентации взглядов и теоретических представлений. Главное здесь, на наш взгляд, то, что общепринятая проблематика конструктивных исследований режимов с обострением еще не сложилась и широкому кругу специалистов в области нелинейных дифференциальных уравнений неизвестно, что можно ждать от неограниченных решений как в теоретическом плане, так и с точки зрения приложений, какие свойства нестационарных диссипативных процессов они описывают.

Свойства эти очень интересны и, можно сказать, парадоксальны, если трактовать их с позиций обычных взглядов на нестационарные диссипативные процессы.

В книге дается изложение некоторых математических аспектов теории режимов с обострением в сплошных нелинейных средах. Основные модели, на примере которых анализируются особенности режимов с обострением, составляют квазилинейное уравнение теплопроводности и некоторые параболические системы квазилинейных уравнений.

В основу книги легли результаты исследований, которые проводились около 15 лет в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР. За это время был открыт и изучен ряд уникальных эволюционных свойств неограниченных решений многих нелинейных краевых задач. С привлечением вычислительного эксперимента была подробно изучена пространственно-временная структура режимов с обострением, обнаружено единство характера их проявления в различных диссипативных средах. Проведенный цикл исследований определил проблематику и направление развития теории режимов с обострением в нелинейных эволюционных задачах, указал главные требования к теоретическим методам изучения неограниченных решений и, наконец, позволил выделить простейшие нелинейные модели теплопроводности и горения, которые характеризуют универсальные свойства режимов с обострением.

Данная книга посвящена изучению таких модельных задач, но еще раз подчеркнем, что многие наиболее общие эффекты свойственны неограниченным решениям нелинейных эволюционных уравнений разных типов. Это, в частности, относится к эффекту локализации режимов с обострением в сплошных нелинейных средах: неограниченное возрастание, например, температуры среды происходит лишь в конечной области, и, несмотря на наличие теплопроводности, тепло, сосредоточенное в этой области локализации, не распространяется в окружающее холодное пространство в течение всего времени существования режима.

Теория режимов с обострением в параболических задачах далеко не исчерпывается той проблематикой, которая отражена в

данной книге. Не будет преувеличением сказать, что исследования режимов с обострением в диссипативных средах сформулировали ряд принципиально новых проблем и задач для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. За рамками книги остались многие интересные результаты и выводы, которые пока не получили достаточного математического обоснования.

Одной из главных идей в теории диссипативных структур и теории нелинейных эволюционных уравнений являются представления о так называемых собственных функциях (с.ф.) нелинейной диссипативной среды как об универсальных характеристиках тех процессов, которые могут в ней устойчиво развиваться. Исследование архитектуры всего набора с.ф. нелинейной среды и одновременно условий их резонансного возбуждения дает возможность «управления» нелинейными диссипативными процессами за счет минимального энергетического воздействия.

Развитие режимов с обострением сопровождается возникновением в среде сложных, как правило, дискретных наборов с.ф. с разнообразной пространственно-временной структурой. Внутренней причиной такого усложнения организации нелинейной среды является локализация диссипативных процессов.

Проблема исследования с.ф. нелинейной диссипативной среды, которая естественно формулируется применительно к дифференциальным уравнениям соответствующей математической модели, тесно примыкает к фундаментальной проблеме установления законов термодинамической эволюции неравновесных открытых систем.

Связанные с этим вопросы сейчас интенсивно изучаются в рамках синергетики. В открытых термодинамических системах присутствуют источники и стоки энергии, определяющие вместе с механизмами диссипации характер ее эволюции, которая, вообще говоря, приводит систему в сложное устойчивое состояние, отличное от равновесного однородного. Последнее характерно для замкнутых изолированных систем (второе начало термодинамики).

Круг проблем, связанных с анализом тонкой структуры с.ф. нелинейных диссипативных сред, представляет собой следующий, более высокий (и, надо сказать, более трудный для исследования) уровень теории режимов с обострением.

Первые две главы книги являются вводными. В гл. I излагаются необходимые элементарные сведения из теории квазилинейных параболических уравнений второго порядка. Главу II, основу которой составляют результаты анализа большого числа конкретных задач, следует также рассматривать как вводную к методам исследования и подходам, которые будут систематически использоваться в дальнейшем. В этих главах даны необходимые понятия, связанные с неограниченными решениями и эффектами локализации тепла и процессов горения.

Главы III, IV посвящены исследованию эффекта локализации режимов с обострением в двух конкретных задачах для параболических уравнений со степенными нелинейностями. В последующих главах развиваются специальные методы исследования неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений общего вида, даны соответствующие приложения. После каждой главы помещаются комментарии, в которых можно найти необходимые библиографические ссылки и дополнительную информацию о близких результатах. Там же в некоторых случаях приводится краткий список наиболее интересных и важных с нашей точки зрения проблем, которые пока не решены и, более того, для решения которых пока не удалось выработать какого-либо подхода.

Глава III в основном посвящена исследованию краевой задачи в $(0, T) \times \mathbf{R}_+$ для уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью $u_t = (u^\sigma u_x)_x$, $\sigma = \text{const} > 0$, с заданным на границе $x = 0$ режимом с обострением: $u(t, 0) = u_1(t) > 0$, $u_1(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^- < \infty$.

В случае $\sigma > 0$ основное внимание уделяется анализу степенных режимов $u_1(t) = (T - t)^n$, где $n = \text{const} < 0$. Этому классу принадлежит «предельный» локализованный S-режим с обострением $u_1(t) = (T - t)^{-1/\sigma}$; локализацию теплового воздействия наглядно иллюстрирует простое автомодельное решение в разделяющихся переменных *):

$$u_\lambda(t, x) = (T - t)^{-1/\sigma} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{2/\sigma} \quad x_0 = \left[\frac{2(\sigma + 2)}{\sigma}\right]^{1/2} \quad (1)$$

В соответствии с (1) тепловые возмущения из области локализации $\{0 < x < x_0\}$ не проникают в окружающее холодное пространство, несмотря на неограниченный рост температуры внутри нее. В гл. III проводится подробное исследование локализованных ($n \geq -1/\sigma$) и нелокализованных ($n < -1/\sigma$) степенных граничных режимов, построены соответствующие автомодельные решения, исследовано асимптотическое поведение неавтомодельных решений краевой задачи, обсуждаются физические причины локализации тепла.

Несколько по-другому проводится анализ случая $\sigma = 0$ (линейное уравнение теплопроводности). Здесь локализованный S-режим экспоненциальный: $u_1(t) = \exp\{(T - t)^{-1}\}$. При этом поступающее с границы тепло эффективно локализовано в области $\{0 < x < 2\}$: $u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^-$, $0 < x \leq 2$ и $u(T^-, x) < \infty$ при всех $x > 2$. Исследование асимптотической стадии процесса нагрева проводится с помощью приближенных автомодельных решений, общие подходы к построению которых излагаются в гл. VI.

Глава IV содержит результаты исследования эффекта локализации процесса горения в задаче Куши для уравнения со сте-

*) Здесь $(z)_+ = \max\{z, 0\}$.

пейной нелинейностью: $u_t = \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u) + u^\beta$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, где $\sigma \geq 0$, $\beta > 1$ — постоянные. При $\sigma > 0$ исследование проводится в нескольких направлениях. Построены неограниченные автомодельные решения, которые описывают асимптотическую стадию развития режимов с обострением; определены условия глобальной неразрешимости задачи Коши, а также существования глобальных решений при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$; доказаны теоремы о локализации ($\beta \geq \sigma + 1$) и отсутствии локализации ($1 < \beta < \sigma + 1$) неограниченных решений.

Локализацию процесса горения в рамках данной модели иллюстрирует автомодельное решение (S-режим) при $\beta = \sigma + 1$, $N = 1$ в области $(0, T_0) \times \mathbb{R}$:

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-1/\sigma} \begin{cases} \left(\frac{2(\sigma + 1)}{\sigma(\sigma + 2)} \cos^2 \frac{\pi x}{L_S} \right)^{1/\sigma} & |x| < L_S/2, \\ 0, & |x| \geq L_S/2; \end{cases} \quad (2)$$

где $L_S = 2\pi(\sigma + 1)^{1/2}/\sigma$ — фундаментальная длина S-режима. Основная особенность этого решения состоит в том, что процесс горения целиком протекает в ограниченной области $\{|x| < L_S/2\}$; вне ее $u_A = 0$ в течение всего времени существования режима с обострением ($t \in (0, T_0)$).

Исследование пространственно временной структуры неограниченных решений опирается на специальное «сравнение» решения задачи Коши с соответствующим автомодельным решением (например, с (2)). Главная идея «сравнения» состоит в анализе числа точек пересечения $N(t)$ пространственных профилей двух различных решений: $u(t, x)$ и $u_A(t, x)$, имеющих один и тот же момент обострения. Тот факт, что $N(t)$ не превосходит числа пересечений, возникающих на параболической границе рассматриваемой области (и в ряде случаев не возрастает по t), является естественным следствием сильного принципа максимума для параболических уравнений. Оказывается, что при сравнении неограниченных решений с совпадающими временами существования $N(t)$ не может и сильно убывать; во всяком случае, если $N(0) > 0$, то, грубо говоря, $N(t) > 0$ при любых $t \in (0, T_0)$. В гл. IV используются теоремы сравнения типа $N(t) \leq 1$ и $N(t) \equiv 2$.

Подчеркнем, что для исследования конкретных свойств неограниченных решений не применима в обычной форме теорема сравнения по начальной функции. Причина в том, что мажорирование одного решения другим, например $u(t, x) \leq u_A(t, x)$ в $(0, T_0) \times \mathbb{R}$, как правило, означает, что решения $u \neq u_A$ имеют различные моменты обострения, и, следовательно, начиная с некоторого момента времени, такое сравнение теряет смысл.

В гл. IV рассматривается также случай полулинейного уравнения ($\sigma = 0$). Любопытные свойства проявляют при различных $\beta > 1$ неограниченные решения уравнения с «логарифмической» нелинейностью: $u_t = \Delta u + (1 + u) \ln^\beta(1 + u)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.

В гл. V доказываются теоремы сравнения решений различных нелинейных параболических уравнений, основанные на специальных поточечных оценках старшей пространственной производной одного из решений; даны приложения этой теории.

Идея такого сравнения состоит в следующем. В теории нелинейных параболических уравнений второго порядка

$$u_t = A(u), \quad (t, x) \in G = (0, T) \times \Omega, \quad (3)$$

где Ω — область в \mathbf{R}^N $A(u)$ — нелинейный эллиптический оператор второго порядка с гладкими коэффициентами, хорошо известен принцип сравнения его верхних и нижних решений. Пусть $u \geq 0$ и $v \geq 0$ — соответственно верхнее и нижнее решения уравнения (3), т. е.

$$u_t \geq A(u), \quad v_t \leq A(v) \quad \text{в } G, \quad (4)$$

и $u \geq v$ на ∂G , где ∂G — параболическая граница G . Тогда $u \geq v$ всюду в G .

Подобные утверждения часто называют леммами Нагумо. Систематическое конструктивное исследование нелинейных параболических уравнений началось именно с понимания того факта, что решение рассматриваемой задачи может быть довольно точно оценено сверху и снизу решениями соответствующих дифференциальных неравенств (4). Леммы типа Нагумо оптимальны в том смысле, что дальнейшее расширение сравнения различных функций u, v невозможно без использования дополнительной информации об их свойствах.

В неравенствах (4) фигурирует один и тот же оператор $A(u)$. Рассмотрим теперь ситуацию, когда необходимо найти условия сравнения решений $u^{(v)} \geq 0$ параболических уравнений

$$u_t^{(v)} = L^{(v)}(u^{(v)}, |\nabla u^{(v)}|, \Delta u^{(v)}), \quad (t, x) \in G, \quad v = 1, 2, \quad (5)$$

с различными эллиптическими операторами $L^{(1)} \neq L^{(2)}$, где $L^{(v)}(p, q, r)$ — гладкие функции своих аргументов. Параболическость уравнений означает, что

$$\frac{\partial}{\partial r} L^{(v)}(p, q, r) \geq 0, \quad p, q \in \mathbf{R}_+, \quad r \in \mathbf{R}. \quad (6)$$

Из обычной теоремы сравнения классических решений следует, что неравенство $u^{(2)} \geq u^{(1)}$ в G будет иметь место, если $u^{(2)} \geq u^{(1)}$ на ∂G и для всех $v \in C_{1,x}^{1,2}(G) \cap C(\bar{G})$

$$L^{(2)}(v, |\nabla v|, \Delta v) \geq L^{(1)}(v, |\nabla v|, \Delta v) \quad \text{в } G \quad (7)$$

(это утверждение эквивалентно лемме Нагумо). Последнее условие часто слишком обременительно и не позволяет сравнивать решения уравнений (5) с существенно различными операторами $L^{(v)}$.

Предположим теперь дополнительно, что $u^{(2)}$ — критическое решение:

$$u_t^{(2)} \geq 0 \quad \text{в } G, \quad (8)$$

и, следовательно, $L^{(2)}(u^{(2)}, |\nabla u^{(2)}|, \Delta u^{(2)}) \geq 0$ всюду в G . Параболичность уравнения при $\nu = 2$ позволяет, вообще говоря, разрешить последнее неравенство относительно $\Delta u^{(2)}$, и в результате получается искомая поточечная оценка старшей производной:

$$\Delta u^{(2)} \geq l_0^{(2)}(u^{(2)}, |\nabla u^{(2)}|) \quad \text{в } G. \quad (9)$$

Поэтому для сравнения $u^{(2)} \geq u^{(1)}$ в G достаточно проверить выполнение неравенства (7), но теперь не при произвольных ν , а только при тех функциях, которые удовлетворяют оценке (9).

Это накладывает следующие условия на операторы $L^{(\nu)}$ в (5):

$$\frac{\partial}{\partial r}(L^{(2)}(p, q, r) - L^{(1)}(p, q, r)) \geq 0, \quad L^{(1)}(p, q, l_0^{(2)}(p, q)) \leq 0.$$

Для квазилинейных уравнений $L^{(\nu)} = K^{(\nu)}(p, q)r + N^{(\nu)}(p, q)$ эти условия выглядят особенно просто: $K^{(2)} \geq K^{(1)}$, $K^{(1)}N^{(2)} \geq K^{(2)}N^{(1)}$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$.

Требование критичности (8) мажорирующего решения целиком зависит от краевых данных и часто легко проверяется.

Особые возможности открываются, если сравнивать не сами решения, а некоторые нелинейные функции от них; например, $u^{(2)} \geq E(u^{(1)})$ в G , где $E: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — гладкая, монотонно возрастающая функция. Ее удобно выбирать исходя из вида эллиптических операторов $L^{(\nu)}$ в (5). В гл. V рассматривается еще одна возможность развития теории сравнения; это вывод более общих поточечных оценок, которые возникают как следствие ψ -критичности задачи: $u_t^{(2)} - \psi(u^{(2)}) \geq 0$ в G , где ψ — гладкая функция.

В качестве приложений в гл. V получены условия локализации граничных режимов с обострением и ее отсутствия в краевых задачах для уравнений нелинейной теплопроводности общего вида (путем сравнения с автомодельными решениями уравнения $u_t = (u^\sigma u_x)_x$, $\sigma \geq 0$, подробно изученными в гл. III). На основе условий ψ -критичности выводятся признаки отсутствия глобальных решений квазилинейных параболических уравнений.

В гл. VI излагается другой подход к исследованию асимптотического поведения решений квазилинейных параболических уравнений. Там также идет речь о сопоставлении решений различных уравнений.

Как уже отмечалось выше, эффективный метод исследования нестационарных процессов нелинейной теплопроводности, описываемых, например, краевой задачей

$$u_t = A(u) = (k(u)u_x)_x, \quad t \in (0, T), \quad x > 0; \quad (10)$$

$$u(t, 0) = u_1(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-; \quad u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x > 0,$$

состоит в построении и анализе соответствующих автомодельных

или инвариантных решений. Однако подходящие частные решения существуют в весьма редких случаях, лишь при некоторых коэффициентах теплопроводности $k(u) \geq 0$ и граничных режимах $u(t, 0) = u_1(t) > 0$ в (10). С помощью развитой в гл. V теории обобщенного сравнения не всегда удастся выделить путем оценок снизу и сверху точную асимптотику решения. Во многом это связано с той же причиной — немногочисленностью инвариантных решений задачи (10).

В гл. VI исследование проводится с помощью приближенных автомодельных решений (п. а. р.), главной особенностью которых является то, что они не удовлетворяют уравнению, но тем не менее правильно описывают асимптотическое поведение решений рассматриваемой задачи.

В общей постановке построение п. а. р. проводится следующим образом. Эллиптический оператор A в уравнении (10), которое по предположению не имеет подходящего частного решения, раскладывается на сумму двух операторов:

$$A(u) \equiv B(t, u) + [A(u) - B(t, u)] \quad (11)$$

так, чтобы уравнение

$$u_t = B(t, u) \quad (12)$$

допускало инвариантное решение $u = u_a(t, x)$, порождаемое заданным граничным режимом: $u_a(t, 0) \equiv u_1(t)$. Но самое главное, чтобы на этом решении оператор $A - B$ в (11) был «много меньше» первого, т. е. в определенном смысле

$$\|A(u_a(t, \cdot)) - B(t, u_a(t, \cdot))\| \ll \|B(t, u_a(t, \cdot))\|$$

при $t \rightarrow T^-$. Это может обеспечить асимптотическую близость решения u_a уравнения (12) и решения исходной задачи.

В гл. VI на примере нескольких задач решаются две главные проблемы: 1) правильный выбор «определяющего» оператора B с указанными выше свойствами; 2) обоснование законности перехода к уравнению (12), т. е. доказательство сходимости в специальной норме $u(t, \cdot) \rightarrow u_a(t, \cdot)$ при $t \rightarrow T^-$. Оказалось, что определяющий оператор B может иметь вид, на первый взгляд никак не связанный с оператором A исходного уравнения. Например, обнаружен широкий класс краевых задач (10), п. а. р. которых удовлетворяют уравнению типа Гамильтона — Якоби:

$$(u_a)_t = \frac{k(u_a)}{u_a + 1} (u_a)_x^2 \equiv B(u_a). \quad (13)$$

Тем самым на асимптотической стадии процесса происходит «вырождение» исходного параболического уравнения (10) в уравнение первого порядка (13).

С помощью построенных семейств п. а. р. в гл. VI решается вопрос о локализации граничных режимов с обострением в произвольных нелинейных средах.

Значительное место в гл. VII занимает метод стационарных состояний для нелинейных параболических задач, удовлетворяющих принципу максимума.

Хорошо известно, что наличие у эволюционного уравнения $u_t = A(u)$ при $t > 0$, $u(0) = u_0$ стационарного решения $u = u_*$ ($A(u_*) = 0$) выделяет в пространстве начальных функций отвечающее ему множество притяжения \mathcal{M} : если $u_0 \in \mathcal{M}$, то $u(t, \cdot) \rightarrow u_*$ при $t \rightarrow \infty$. Это обеспечивает близость широкого множества нестационарных решений к u_* при больших t .

Для существенно нестационарных решений, например режимов с обострением: $\|u(t, \cdot)\| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^- < \infty$, стабилизация к u_* , разумеется, невозможна. Тем не менее, как показано в гл. VII, определенная «близость» таких решений, теперь уже к целому семейству стационарных состояний $\{U_\lambda\}$ (λ — параметр семейства), все же имеет место. На примере ряда задач установлено, что в непрерывном по λ семействе стационарных состояний $\{U_\lambda\}$, $A(U_\lambda) = 0$, содержатся в некотором «параметризованном» (в смысле зависимости $\lambda = \lambda(t)$) виде многие важные эволюционные свойства решений уравнения. Поскольку для использования метода необходима лишь самая общая информация, касающаяся семейства $\{U_\lambda\}$, этот факт позволяет описать довольно тонкие эффекты, связанные с развитием неограниченных решений.

Помимо этого в гл. VII проводится исследование режимов с обострением и глобальных решений краевых задач в ограниченной области для квазилинейных параболических уравнений с источником. В заключительном параграфе объектом исследования являются различные схемы для квазилинейного уравнения, допускающего неограниченные решения.

В первых двух вводных главах используется сквозная (по главам) нумерация теорем, предложений и вспомогательных утверждений. В последующих более специальных главах теоремы и леммы нумеруются по параграфам. В каждом параграфе применяется своя нумерация формул. Количество ссылок на формулы из других параграфов той же главы сведено до минимума; в тех же редких случаях, когда это необходимо, используется двойная нумерация формул, где первая цифра указывает на номер параграфа.

Авторы благодарны своим коллегам по работе В. А. Дородницыну, Г. Г. Еленину, Н. В. Змитренко, а также сотрудникам ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, кафедры прикладной математики МФТИ и кафедры вычислительных методов ВМиК МГУ, которые принимали активное участие в многочисленных обсуждениях результатов выполненного исследования. Мы также признательны С. И. Похожаеву и всем участникам руководимого им научного семинара МЭИ по нелинейным уравнениям за плодотворные обсуждения большинства результатов и критические замечания.

Авторы

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой вводной главе излагаются хорошо известные сведения из теории квазилинейных параболических уравнений второго порядка, которые будут использованы в дальнейшем при изложении некоторых специальных вопросов.

Основное назначение главы состоит в том, чтобы на сравнительно несложных примерах показать многообразие свойств решений нелинейных уравнений параболического типа и дать представление о методах исследования, которые будут применяться в следующих главах. Мы хотим особо подчеркнуть роль частных (автомодельных или инвариантных) решений рассматриваемых уравнений, которые описывают важные свойства нелинейных диссипативных процессов и являются тем «базисом», на основе которого можно в принципе описывать свойства широкого множества произвольных решений. Более полно эти представления реализованы в гл. VI.

В данной главе иллюстрируются примерами простейшие утверждения из теории квазилинейных параболических уравнений. Более подробное изложение некоторых из затронутых здесь вопросов можно найти в гл. II; развитию других результатов посвящены последующие главы.

§ 1. Постановка основных задач. Теоремы сравнения

1. Формулировка краевых задач и задачи Коши. В большинстве случаев мы будем иметь дело с квазилинейными параболическими уравнениями следующего вида: *уравнениями нелинейной теплопроводности*:

$$u_t = \mathbf{A}(u) = \nabla \cdot (k(u) \nabla u), \quad \nabla(\cdot) = \text{grad}_x(\cdot), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

либо с *уравнениями нелинейной теплопроводности с источником (стоком)*:

$$u_t = \mathbf{B}(u) = \nabla \cdot (k(u) \nabla u) + Q(u). \quad (2)$$

Здесь функция $k(u)$ имеет смысл коэффициента нелинейной теплопроводности, зависящей от температуры $u = u(t, x) \geq 0$. Коэффициент k будем считать неотрицательной и достаточно гладкой функцией: $k(u) \in C^2((0, \infty)) \cap C(\{0, \infty\})$.

Если $u > 0$ — достаточно гладкое решение, то (1) можно переписать в виде

$$u_t = A(u) \equiv k(u) \Delta u + k'(u) |\nabla u|^2, \quad (1')$$

где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2.$$

Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$u_t = A(u) \equiv \Delta \varphi(u), \quad (1'')$$

$$\varphi(u) = \int_0^u k(\eta) d\eta, \quad u \geq 0.$$

Функция $Q(u)$ в (2) описывает процесс тепловыделения или горения в среде с нелинейной теплопроводностью, если $Q(u) \geq 0$ при $u \geq 0$, и, наоборот, — поглощение тепла, если $Q(u) \leq 0$. Функцию $Q(u)$ мы также будем считать, если не оговорено противное, достаточно гладкой: $Q(u) \in C^1([0, \infty))$. В большинстве случаев предполагается, что горение (поглощение) в холодной среде отсутствует, т. е. $Q(0) = 0$.

В дальнейшем мы будем иметь дело в основном с первой краевой задачей и задачей Коши для уравнений (1), (2). *Первая краевая задача* состоит в определении функции $u(t, x)$, удовлетворяющей в $(0, T) \times \Omega$, где $T > 0$ — постоянная, Ω — область в \mathbb{R}^N (может быть, неограниченная) с гладкой границей $\partial\Omega$, рассматриваемому уравнению, а также начальному и краевому условиям:

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega; \quad u_0 \in C(\Omega), \quad \sup u_0 < \infty; \quad (3)$$

$$u(t, x) = u_1(t, x) \geq 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega; \quad (4)$$

$$u_1 \in C([0, T) \times \partial\Omega), \quad \sup u_1 < \infty.$$

Функцию $u_0(x)$ в (3) можно рассматривать как начальное температурное возмущение. Условие (4) описывает внешнее тепловое воздействие на границе $\partial\Omega$ рассматриваемой области. Условие $\sup u_0 < \infty$ в (3) играет существенную роль в том случае, когда Ω — неограниченная область. Решение задач (1), (3), (4) или (2) — (4) следует тогда искать также в классе функций, ограниченных равномерно по $x \in \bar{\Omega}$ при $t \in [0, T)$.

Помимо первой краевой задачи будем рассматривать *задачу Коши* в $(0, T) \times \mathbb{R}^N$ с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad u_0 \in C(\mathbb{R}^N), \quad \sup u_0 < \infty. \quad (5)$$

Решение задачи ищется в классе функций, ограниченных равномерно по $x \in \mathbb{R}^N$ при каждом $t \in [0, T)$.

При формулировке указанных задач опущены некоторые моменты, требующие дополнительного разъяснения. Во-первых, не сказано, в каком смысле решение $u(t, x)$ удовлетворяет уравне-

нию, а также краевому и начальному условиям. Этот вопрос решается просто, если искать *классическое решение* $u \in C_{ix}^{1,2}((0, T) \times \Omega) \cap C([0, T] \times \bar{\Omega})$, имеющее все производные, входящие в уравнение, и удовлетворяющее ему в обычном смысле. Естественно, для существования классического решения необходимо, чтобы было выполнено условие согласования краевой и начальной функций в первой краевой задаче:

$$u_0(x) = u_1(0, x), \quad x \in \partial\Omega.$$

В этом случае условия (3), (4) или (5) выполняются в обычном смысле.

Во-вторых, коэффициенты k , Q были определены только при $u \geq 0$. Поэтому постановка задач предполагает, что решение $u(t, x)$ является всюду неотрицательным. Последнее обеспечивается принципом максимума, который играет фундаментальную роль практически во всех аспектах теории нелинейных параболических уравнений.

2. Принцип максимума и теоремы сравнения. Принцип максимума характеризует своеобразную «монотонность» решений параболических уравнений по начальным и краевым функциям. Мы не будем останавливаться на изложении принципа максимума для линейных параболических уравнений, который служит основой доказательства аналогичных утверждений для нелинейных задач. Он подробно изложен во многих учебниках и книгах (см., например, [128, 165, 21, 259, 265, 144, 179, 229, 270]). Там же можно найти необходимые ограничения на гладкость и структуру границы $\partial\Omega$ (они особенно существенны, когда область Ω неограниченная). Поэтому перейдем к формулировке утверждений, относящихся к приведенным выше нелинейным задачам.

Утверждения такого рода объединяются под названием *принцип максимума*, поскольку имеют один и тот же «физический» смысл и доказываются приблизительно одними и теми же техническими приемами, которые будут неоднократно использоваться на протяжении всей книги.

Приведенные выше теоремы сравнения подробно доказываются, например, в [165, 259, 265]. Формулировки теорем даются для краевых задач, однако они без изменений переносятся и на случай задачи Коши.

Теорема 1. Пусть $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ — неотрицательные классические решения уравнения (2) в $(0, T) \times \Omega$, причем

$$u^{(2)}(0, x) \geq u^{(1)}(0, x), \quad x \in \Omega; \quad (6)$$

$$u^{(2)}(t, x) \geq u^{(1)}(t, x), \quad t \in [0, T), \quad x \in \partial\Omega. \quad (7)$$

Тогда

$$u^{(2)}(t, x) \geq u^{(1)}(t, x) \quad \text{в } [0, T) \times \Omega. \quad (8)$$

С физической точки зрения теорема легко объяснима. Действительно, чем больше начальное температурное возмущение и чем интенсивней граничный тепловой режим, тем температура в сре-

де должна быть больше. Доказательство теоремы основано на анализе «линейного» параболического уравнения для разности $z = u^{(2)} - u^{(1)}$ и фактически использует знакоопределенность производной Δz в точке экстремума функции z .

Непосредственным следствием теоремы 1 является следующее

Предложение 1. Пусть $Q(0) = 0$, и пусть $u(t, x)$ — классическое решение задачи (2) — (4). Тогда $u \geq 0$ в $[0, T) \times \Omega$.

Действительно, $u^{(1)} \equiv 0$ — решение уравнения (2). Тогда, полагая $u^{(2)} = u$, убеждаемся в справедливости условий (6), (7), и, следовательно, $u^{(2)} \geq u^{(1)} \equiv 0$ всюду в $[0, T) \times \Omega$.

Теорема сравнения позволяет сопоставить различные решения параболического уравнения и тем самым дает возможность с помощью какого-то одного фиксированного решения описать свойства широкого класса других решения. Однако то, что в теореме фигурируют только точные решения рассматриваемого уравнения, во многом ограничивает ее применимость.

Существенно расширяет возможности исследования нелинейных параболических уравнений другое утверждение [165, 21, 259, 272].

Теорема 2. Пусть в $[0, T) \times \bar{\Omega}$ определены классическое решение $u(t, x) \geq 0$ задачи (2) — (4), а также функции $u_{\pm}(t, x) \in C^{1,2}([0, T) \times \Omega) \cap C([0, T) \times \bar{\Omega})$, удовлетворяющие неравенствам

$$\partial u_{+}/\partial t \geq \mathbf{V}(u_{+}), \quad \partial u_{-}/\partial t \leq \mathbf{V}(u_{-}) \quad \text{в } (0, T) \times \Omega, \quad (9)$$

и, кроме того,

$$u_{-}(0, x) \leq u_{0}(x) \leq u_{+}(0, x), \quad x \in \Omega; \quad (10)$$

$$u_{-}(t, x) \leq u_{1}(t, x) \leq u_{+}(t, x), \quad t \in [0, T), \quad x \in \partial\Omega. \quad (11)$$

Тогда

$$u_{-} \leq u \leq u_{+} \quad \text{в } [0, T) \times \bar{\Omega}. \quad (12)$$

Подчеркнем, что речь идет о сравнении решения задачи не с другим решением того же уравнения, как в теореме 1, а с решениями соответствующих дифференциальных неравенств (9). Это расширяет возможности исследования свойств решений нелинейных параболических уравнений, так как найти подходящее решение дифференциального неравенства значительно проще, чем какое-либо точное решение параболического уравнения.

Функции u_{+} и u_{-} , удовлетворяющие неравенствам (9) — (11), называются соответственно *верхним решением* и *нижним решением* задачи (2) — (4).

Утверждения, аналогичные теоремам 1, 2, справедливы для нелинейных параболических уравнений второго порядка общего вида, в том числе для существенно нелинейных (не квазилинейных) уравнений

$$u_t = F(u, \nabla u, \Delta u, t, x), \quad (13)$$

где $F(p, q, r, t, x)$ — функция, непрерывная вместе с частными производными в $\mathbf{R}_{+} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times [0, T) \times \Omega$. Условие параболическости

уравнения здесь имеет вид

$$\partial F(p, q, r, t, x)/\partial r \geq 0. \quad (13')$$

Если в качестве F взять оператор, стоящий в уравнении (1) или (2), то условие (13') превращается в неравенство $k(p) \geq 0$, $p \geq 0$.

При некоторых дополнительных ограничениях на область Ω и ее границу сформулированные выше утверждения справедливы для второй краевой задачи, когда вместо (4) на $\partial\Omega$ задается условие, например, такого вида:

$$\partial u/\partial n = u_2(t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega; \quad u_2 \in C, \quad \sup u_2 < \infty, \quad (14)$$

где $\partial/\partial n$ — обозначение производной по направлению внешней нормали n к $\partial\Omega$. Условие (14) имеет смысл, если производные u_x непрерывны в $(0, T) \times \bar{\Omega}$. При этом возникает новое условие согласования:

$$\partial u_0(x)/\partial n = u_2(0, x), \quad x \in \partial\Omega,$$

и тогда можно говорить о классическом решении второй краевой задачи.

В этом случае в теореме 1 вместо неравенства (7) должно выполняться неравенство

$$\partial u^{(2)}/\partial n \geq \partial u^{(1)}/\partial n, \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega. \quad (14')$$

Поскольку произведение $k(u)\partial u/\partial n$ равно тепловому потоку на границе, то (14') имеет простой физический смысл. Соответственно в случае второй краевой задачи в теореме 2 неравенства (11) заменяются на неравенства

$$\partial u_-/\partial n \leq \partial u/\partial n \leq \partial u_+/\partial n, \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega \quad (15)$$

(при этом на верхнее и нижнее решения u_{\pm} накладываются дополнительные условия гладкости).

При соответствующих изменениях теоремы остаются справедливыми, когда на $\partial\Omega$ задаются более общие нелинейные краевые условия третьего рода, например

$$\partial u/\partial n = a(u, t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega, \quad (16)$$

где $a(u, t, x)$ — любая достаточно гладкая функция [165, 259].

§ 2. Существование, единственность и условия ограниченности классического решения

Вопросы существования и единственности решений краевых задач для уравнений нелинейной теплопроводности подробно изучены в известных работах [128, 165, 270], где используется широкий спектр методов исследования. Ниже мы рассмотрим некоторые важные ограничения на коэффициенты уравнений, необходимые для существования и единственности классического решения.

Нас особенно будут интересовать вопросы об условиях *глобальной разрешимости* краевых задач, когда решение $u(t, x)$ определено при всех $t \geq 0$, и, наоборот, об условиях *глобальной неразрешимости*, или *неразрешимости в целом*. Другими словами, когда локальное решение $u(t, x)$, определенное на некотором интервале $(0, T)$, может быть продолжено в область произвольных значений $t > 0$ и когда этого сделать нельзя. Локальная разрешимость (или разрешимость в малом) имеет место для широкого класса квазилинейных уравнений с достаточно гладкими коэффициентами без каких-либо существенных ограничений на характер нелинейности этих коэффициентов. Такие ограничения возникают при построении глобального решения.

Для уравнений с источником

$$u_t = \nabla \cdot (k(u) \nabla u) + Q(u) \quad (1)$$

проблема существования глобального решения эквивалентна проблеме его ограниченности в $\bar{\Omega}$ на произвольном интервале $(0, T)$.

Именно: глобальное решение определено и ограничено в $\bar{\Omega}$ при всех $t \geq 0$, неограниченное же решение определено в $\bar{\Omega}$ на конечном интервале $(0, T_0)$, причем

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_0^-} \sup_{x \in \bar{\Omega}} u(t, x) = \infty, \quad (2)$$

что делает невозможным его продолжение в область $t > T_0$.

Вопросы, связанные с потерей ограниченным решением необходимой гладкости, обсуждаются в § 3.

1. Условия локального существования классического решения. В настоящее время этот вопрос хорошо изучен [111, 128, 162, 165, 221]. Существование классического решения краевых задач и задачи Коши в малом при гладких краевых данных и необходимых условиях согласования имеет место для достаточно произвольных квазилинейных параболических уравнений с гладкими коэффициентами вида

$$u_t = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(u, \nabla u, t, x) u_{x_i x_j} + a(u, \nabla u, t, x), \quad (3)$$

если они являются *равномерно параболическими*. Последнее означает, что

$$\nu(p) \|r\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(p, q, t, x) r_i r_j \leq \mu(p) \|r\|^2 \quad (3')$$

при произвольных $t \in [0, T)$, $x \in \bar{\Omega}$, $p \geq 0$, $q, r \in \mathbf{R}^N$, где непрерывные функции $\nu(p)$, $\mu(p)$ строго положительны. Условие (3'), в частности, означает, что эллиптический оператор второго порядка в (3) невырождающийся и матрица $\|a_{ij}\|$ положительно определена. Локальная разрешимость установлена также и для широкого класса более общих нелинейных уравнений типа

(1.13) *) (см. [112, 199]). В этом случае условие равномерной параболичности имеет вид

$$v(p) \leq \partial F(p, q, r, t, x) / \partial \tau \leq \mu(p).$$

Для уравнений типа (1) условие равномерной параболичности выглядит особенно просто.

Предложение 2. Пусть функции $k(u)$, $Q(u)$ являются достаточно гладкими при $u \geq 0$, $Q(0) = 0$. Тогда при выполнении условия

$$k(u) \geq \varepsilon_0 = \text{const} > 0, \quad u > 0, \quad (4)$$

существует локальное классическое решение краевой задачи (1.2) — (1.4), причем, если $u_0 \neq 0$ в $\bar{\Omega}$ или $u_1(0, x) \neq 0$ на $\partial\Omega$, то $u(t, x) > 0$ в Ω при всех допустимых $t > 0$.

Неотрицательное решение равномерно параболического уравнения (1) является строго положительным всюду в своей области определения. Другими словами, в тепловых процессах, описываемых такими уравнениями, возмущения распространяются с бесконечной скоростью. Если, например, в задаче Коши непрерывная начальная функция $u_0 \neq 0$ финитная и, возможно, недифференцируемая, то все равно локальное решение является классическим при $t > 0$. Кроме того, при всех сколь угодно малых $t > 0$ функция $u(t, x)$ строго положительна в \mathbb{R}^N . При соответствующих ограничениях на коэффициенты уравнения в любой допустимой области $(0, T) \times \Omega$ она имеет производные по t и x высокого порядка.

При нарушении условия (4) при финитной функции u_0 решение задачи Коши также может быть финитным по x при всех $t > 0$ и в результате может не иметь в точках обращения решения в нуль производных по t и x даже первого порядка. Более подробно об обобщенных решениях вырождающегося уравнения (1) будет говориться в § 3, где указано необходимое и достаточное условие существования строго положительного (и тем самым классического) решения.

2. Условие глобальной ограниченности решения. Прежде всего отметим, что проблема ограниченности решения краевой задачи (1.1), (1.3), (1.4) для уравнения без источника ($Q = 0$) не возникает. Это непосредственно следует из теоремы 1 (§ 1). Полагая в ней

$$u^{(2)}(t, x) \equiv M = \text{const} \geq \max\{\sup u_0, \sup u_1\}, \quad (5)$$

$$u^{(1)}(t, x) \equiv u(t, x),$$

убеждаемся в справедливости условий (1.6), (1.7) и, следовательно, $u(t, x) \leq M$, т. е. u ограничено в $\bar{\Omega}$ при любых $t \in (0, T)$, $T > 0$ произвольное. То же самое, как нетрудно проверить, спра-

*) Указанным способом даются ссылки на формулы из предыдущих параграфов, в данном случае из § 1.

ведливо для уравнения (1) со стоком, когда $Q(u) \leq 0$ при всех $u \geq 0$. Для уравнения с источником дело обстоит по-другому.

Предложение 3. Пусть в уравнении (1) $Q(u) > 0$ при $u > 0$. Тогда условие

$$\int_1^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} = \infty \quad (6)$$

является необходимым и достаточным для глобальной ограниченности любого решения задачи (1.2)–(1.4).

Доказательство. Достаточность. Воспользуемся теоремой 1. Возьмем в качестве $u^{(2)}(t, x)$ пространственно однородное решение $u^{(2)}(t)$ уравнения (1):

$$\frac{du^{(2)}(t)}{dt} = Q(u^{(2)}(t)), \quad t > 0; \quad u^{(2)}(0) = M > 0, \quad (7)$$

где постоянная M удовлетворяет (5). Функция $u^{(2)}(t)$ определяется из равенства

$$\int_M^{u^{(2)}(t)} \frac{d\eta}{Q(\eta)} = t,$$

причем в силу (6) $u^{(2)}(t)$ определена при всех $t \in (0, \infty)$. Тогда из теоремы 1, полагая $u^{(1)} \equiv u$, получаем

$$u(t, x) \leq u^{(2)}(t), \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega,$$

т. е. u глобально ограничено.

Необходимость. Она вытекает из следующего простого примера.

Пример 1. Пусть в задаче Коши для (1.2)

$$u_0(x) \equiv m = \text{const} > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

и пусть (6) не выполняется, т. е.

$$\int_1^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} < \infty, \quad (8)$$

где $Q(u) > 0$ при $u > 0$. Решение задачи тогда является пространственно однородным: $u(t, x) \equiv u(t)$, где $u(t)$ удовлетворяет уравнению (7) и условию $u(0) = m$, т. е.

$$\int_m^{u(t)} \frac{d\eta}{Q(\eta)} \equiv t.$$

Отсюда видно, что $u(t)$ определено на конечном интервале изменения времени $(0, T_0)$, где

$$T_0 = \int_m^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} < \infty,$$

причем

$$u(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T_0^-.$$

В предложении 3 отражен один аспект проблемы неограниченности решения. В случае задач с конкретными краевыми условиями существование глобальной оценки сверху классического решения зависит от соотношения между коэффициентами k , Q и функциями, входящими в формулировку краевых условий, а также от пространственной структуры области Ω . В общей постановке проблема неограниченности является весьма сложной. Для некоторых классов задач эта проблема будет проанализирована в последующих главах (отдельные примеры приведены ниже).

Обратим внимание, что необходимое и достаточное условие (6) глобальной ограниченности всех классических решений возникает при анализе обыкновенного дифференциального уравнения. В примере 1 построено неограниченное решение, которое растет до бесконечности при $t \rightarrow T_0^-$ сразу во всем пространстве \mathbb{R}^n .

Что будет, если рассмотреть краевую задачу в ограниченной области Ω , причем на $\partial\Omega$ решение ограничено сверху равномерно по t ? Могут ли такие пространственно неоднородные решения быть неограниченными в смысле (2)? Следующий пример дает положительный ответ.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу для полулинейного уравнения

$$u_t = \Delta u + Q(u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $u(0, x) = u_0(x) \geq 0$ в Ω , $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, $u_0 \neq 0$ и

$$u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (10)$$

Обозначим через $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega) > 0$ первое (наименьшее) собственное значение задачи

$$\Delta \psi + \lambda \psi = 0, \quad x \in \Omega; \quad \psi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (11)$$

и через $\psi_1(x)$ первую собственную функцию, которая, как известно [129, 161], знакопостоянна в Ω . Пусть $\psi_1(x) > 0$ в Ω и

$$\|\psi_1\|_{L^1(\Omega)} \equiv \int_{\Omega} \psi_1(x) dx = 1. \quad (12)$$

Пусть $Q(u) - \lambda_1 u > 0$ при всех $u \geq \delta_0 = \text{const} > 0$ и, кроме того,

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta) - \lambda_1 \eta} < \infty \quad (13)$$

(отметим, что в том случае, когда $Q(u) \gg u$ при $u \rightarrow \infty$, это условие совпадает с (8)). Будем также считать, что $Q \in C^2(\mathbb{R}_+)$

является выпуклой функцией:

$$Q''(u) \geq 0, \quad u > 0. \quad (14)$$

Тогда при любых начальных функциях $u_0(x) \geq 0$ таких, что

$$E_0 = \int_{\Omega} u_0(x) \psi_1(x) dx \geq \delta_0,$$

решение задачи является неограниченным и существует в течение времени

$$T_0 \leq T_* = \int_{E_0}^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta) - \lambda_1 \eta} < \infty.$$

Для доказательства введем функцию

$$E(t) = \int_{\Omega} u(t, x) \psi_1(x) dx.$$

Тогда $E(0) = E_0$, причем, как следует из (9), $E(t)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_{\Omega} \Delta u(t, x) \psi_1(x) dx + \int_{\Omega} Q(u(t, x)) \psi_1(x) dx. \quad (15)$$

Интегрируя по частям, с учетом (10) и (11) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u(t, x) \psi_1(x) dx &= \int_{\Omega} u(t, x) \Delta \psi_1(x) dx = -\lambda_1 \int_{\Omega} u(t, x) \psi_1(x) dx = \\ &= -\lambda_1 E(t). \end{aligned}$$

Далее из неравенства Йенсена для выпуклых функций [167] получаем

$$\int_{\Omega} Q(u) \psi_1 dx \geq Q\left(\int_{\Omega} u \psi_1 dx\right) = Q(E)$$

(для выполнения этой оценки существенны ограничения $\psi_1 > 0$ в Ω и нормировка (12)), и поэтому из (15) следует неравенство $dE/dt \geq -\lambda_1 E + Q(E)$, $t > 0$; $E(0) = E_0 \geq \delta_0$.

Отсюда в сделанных предположениях $E(t) > E_0$ при всех $t > 0$, и, следовательно,

$$\int_{E_0}^{E(t)} \frac{d\eta}{Q(\eta) - \lambda_1 \eta} \geq t, \quad t > 0.$$

Поэтому в силу (13) $E(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_1^- \leq T_*$, а поскольку $E(t) \leq \sup_x u(t, x)$, то решение $u(t, x)$ удовлетворяет (2) при некотором $T_0 \leq T_1$ и является неограниченным.

Этот пример интересен тем, что рассматриваемая краевая задача при достаточно «малых» начальных функциях $u_0(x)$ имеет глобальное решение, определенное при всех $t > 0$ (см. гл. VII, § 2). При «больших» u_0 решение неограниченно возрастает при $t \rightarrow T_0^-$, $T_0 < \infty$. Может возникнуть вопрос: где, в какой части области Ω , оно обращается в бесконечность при $t \rightarrow T_0^-$? Эта проблема локализации неограниченных решений рассматривается в последующих главах.

Мы закончим обсуждение условий глобальной ограниченности решения одним элементарным примером второй краевой задачи.

Пример 3. Пусть Ω — ограниченная область, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $Q(u)$ — выпуклая при $u > 0$ функция, удовлетворяющая (8). Рассмотрим для (1) вторую краевую задачу с граничным условием теплоизоляции

$$\partial u / \partial n = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (16)$$

и начальным возмущением $u(0, x) = u_0(x) \geq 0$ в Ω . Покажем, что любое нетривиальное ($u \neq 0$) решение задачи является неограниченным.

В предположении достаточной гладкости решения проинтегрируем уравнение (1) по области Ω . Тогда, вводя обозначение энергии

$$H(t) = \int_{\Omega} u(t, x) dx, \quad t \geq 0,$$

после интегрирования по частям с учетом (16) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= \int_{\Omega} Q(u(t, x)) dx, \quad t > 0; \\ H(0) &= H_0 = \int_{\Omega} u_0(x) dx > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя неравенство Йенсена

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Q(u(t, x)) dx &\equiv \text{mes } \Omega \int_{\Omega} \frac{1}{\text{mes } \Omega} Q(u(t, x)) dx \geq \\ &\geq \text{mes } \Omega Q\left(\int_{\Omega} \frac{1}{\text{mes } \Omega} u(t, x) dx\right) \equiv \text{mes } \Omega Q\left(\frac{H(t)}{\text{mes } \Omega}\right), \end{aligned}$$

из (17) получаем неравенство

$$\frac{dH(t)}{dt} \geq \text{mes } \Omega Q\left(\frac{H(t)}{\text{mes } \Omega}\right), \quad t > 0.$$

Отсюда в силу (8) следует, что энергия $H(t)$ (и тем самым $u(t, x)$) определена и ограничена на конечном интервале $(0, T_1)$,

где

$$T_1 \leq T_* = \int_{H_0/\text{mes}\Omega}^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} < \infty,$$

и, следовательно, $\overline{\lim} \sup_x u(t, x) = \infty$, $t \rightarrow T_0^- \leq T_1$.

3. Об условиях единственности классического решения.

В предположении достаточной гладкости коэффициента Q в (1) локальное классическое решение всегда единственно. Это непосредственно следует из теоремы 1 § 1. Действительно, если предположить, что существуют два различных решения u^* и u_* уравнения (1), отвечающие одинаковым краевым условиям, то из теоремы 1, полагая сначала $u^{(1)} = u^*$, $u^{(2)} = u_*$, а затем меняя u^* и u_* местами, получаем, что одновременно $u^* \leq u_*$, $u^* \geq u_*$, т. е. $u^* \equiv u_*$.

Остается убедиться, насколько существенным является требование гладкости коэффициента Q , который является неотрицательной функцией. В случае стока тепла ($Q(u) < 0$, $u > 0$), как нетрудно проверить с помощью принципа максимума, единственность решения имеет место без каких-либо ограничений на характер гладкости $Q(u)$.

Итак, пусть непрерывная функция $Q(u)$ ($Q(0) = 0$; $Q(u) > 0$, $u > 0$) является недифференцируемой при $u = 0$, $Q \in C^1((0, \infty))$. Следующий пример показывает, к чему это может привести.

Пример 4. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u_t = \Delta u + u^\alpha, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (18)$$

где $\alpha \in (0, 1)$ — постоянная. Здесь $Q(u) = u^\alpha$, $Q(0) = 0$, $Q'(0^+) = \infty$. Пусть

$$u(0, x) = u_0(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (19)$$

Очевидно, что задача (18), (19) имеет тривиальное решение $u(t, x) \equiv 0$. Однако помимо этого она имеет бесконечное множество других пространственно однородных решений $u(t, x) \equiv u(t)$, которые удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u'(t) = u^\alpha(t), \quad t > 0; \quad u(0) = 0. \quad (20)$$

Решениями этой задачи будут функции

$$u(t) = v_\tau(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau, \\ (1 - \alpha)^{1/(1-\alpha)} (t - \tau)^{1/(1-\alpha)}, & t \geq \tau, \end{cases} \quad (21)$$

где $\tau \geq 0$ — произвольная постоянная.

Таким образом, здесь из-за недифференцируемости источника при $u = 0$ из нулевого начального возмущения (19) возникают

нетривиальные решения, одинаково растущие во всем пространстве. Отметим, что при $\alpha \in (0, 1)$ все функции $v_\tau(t)$ являются классическими решениями, так как $v_\tau \in C^1(\{0, \infty\})$.

Нетрудно проверить, что аналогичные нетривиальные решения задачи Коши можно построить в случае произвольных источников $Q(u) > 0$, $u > 0$, если

$$\int_0^1 \frac{d\eta}{Q(\eta)} < \infty. \quad (22)$$

Отсюда получаем условие

$$\int_0^1 \frac{d\eta}{Q(\eta)} = \infty, \quad (22')$$

по крайней мере *необходимое для единственности решения задачи Коши*.

Этот пример целиком основан на анализе пространственно однородных решений, удовлетворяющих обыкновенному дифференциальному уравнению. А если рассмотреть задачу с краевыми условиями, которые не давали бы возможности решению расти на границе? Оказывается, и в этом случае решение при отсутствии достаточной гладкости источника при $u = 0$ может быть неединственным.

Пример 5. Пусть Ω — ограниченная область, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, и $\lambda_1 > 0$, $\psi_1(x) > 0$ в Ω — соответственно первое собственное значение и отвечающая ему собственная функция задачи (11). Рассмотрим краевую задачу в $\mathbf{R}_+ \times \Omega$ для уравнения

$$u_t = \Delta u + \lambda_1 u + \psi_1^{1-\alpha}(x) u^\alpha, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (23)$$

с условиями

$$u(0, x) \equiv 0, \quad x \in \bar{\Omega}; \quad u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (24)$$

Пусть $\alpha \in (0, 1)$; тогда источник $\psi_1^{1-\alpha}(x) u^\alpha$, который зависит не только от решения u , но и от пространственной координаты x , является недифференцируемым по u при $u = 0^+$ всюду в Ω . Нетрудно проверить, что задача (23), (24) помимо тривиального решения $u \equiv 0$ имеет семейство решений

$$u(t, x) = v_\tau(t) \psi_1(x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega,$$

где $v_\tau(t)$ — функции, определяемые в (21).

В заключение отметим, что неединственность решения связана с конкретной постановкой задачи. Если, например, взять в задаче Коши для (18) начальную функцию $u_0(x) \geq \delta_0 > 0$ в \mathbf{R}^n , то ее решение будет классическим и единственным, поскольку в силу теоремы 2 решение будет удовлетворять условию $u(t, x) \geq \delta_0$ в

R^N . В области $u \geq \delta_0$ коэффициенты уравнения (18) достаточно гладкие, что гарантирует единственность решения. Аналогично, если в задаче (23), (24) $u_0 > 0$ в Ω , то ее решение также единственно.

§ 3. Обобщенные решения квазилинейных вырождающихся параболических уравнений

В этом параграфе рассматриваются уравнения (1.1), (1.2), которые не удовлетворяют условию равномерной параболичности. Как и выше, функции k и Q будем считать достаточно гладкими: $k \in C^2((0, \infty)) \cap C([0, \infty))$, $Q \in C^1([0, \infty))$ (последнее, как показано в § 2, необходимо для единственности решения), $k(u) > 0$ при $u > 0$, причём

$$k(0) = 0, \quad (1)$$

т. е. уравнение является вырождающимся. Формально это условие означает, что эквивалентное (1.1) уравнение второго порядка (1.1') вырождается при $u = 0$ в уравнение первого порядка (если $k'(0) \neq 0$ и $u(t, x)$ имеет две производные по x).

Прежде чем переходить к примерам, поясняющим некоторые свойства обобщенных решений, сделаем одно замечание. Когда мы имели дело с классическими решениями $u \in C_{tx}^{1,2}$, не было необходимости специально оговаривать непрерывность теплового потока $W(t, x) = -k(u(t, x)) \nabla u(t, x)$. Это условие, как и непрерывность самого решения (температуры), является естественным физическим требованием к постановке задачи. Здесь же нам придется постоянно следить за этим свойством обобщенных решений.

1. Примеры обобщенных решений (конечная скорость распространения возмущений, эффекты локализации граничных режимов с обострением и в средах со стоками).

Пример 6 (конечная скорость распространения возмущений). Рассмотрим уравнение (1.1) в одномерном случае:

$$u_t = (k(u) u_x)_x \quad (2)$$

и построим его частное автомодельное решение типа бегущей волны:

$$u_\lambda(t, x) = f_\lambda(\xi), \quad \xi = x - \lambda t, \quad (3)$$

где $\lambda > 0$ — скорость движения тепловой волны. Подставляя выражение (3) в (2), получаем для $f_\lambda(\xi) \geq 0$ уравнение

$$\frac{d}{d\xi} \left(k(f_\lambda) \frac{df_\lambda}{d\xi} \right) + \lambda \frac{df_\lambda}{d\xi} = 0,$$

или, что то же самое,

$$k(f_\lambda) \frac{df_\lambda}{d\xi} + \lambda f_\lambda = C. \quad (3')$$

Полагая $C = 0$ (чему это соответствует, будет ясно из

дальнейшего), получаем равенство

$$\frac{k(f_A)}{f_A} \frac{df_A}{d\xi} = -\lambda. \quad (4)$$

Предположим, что

$$\int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta < \infty, \quad (5)$$

и тем самым имеет смысл функция

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta, \quad u \geq 0; \quad \Phi(0) = 0. \quad (5')$$

Тогда из (4) следует, что

$$\Phi(f_A(\xi)) = -\lambda(\xi - \xi_0), \quad \xi \leq \xi_0 = \text{const.}$$

Пусть $\xi_0 = 0$; тогда

$$f_A(\xi) = \Phi^{-1}(-\lambda\xi), \quad \xi \leq 0,$$

где Φ^{-1} — функция, обратная к Φ (она существует в силу монотонности Φ ; см. (5')). Продолжим f_A в область $\{\xi > 0\}$ тождественным нулем; непрерывность теплового потока $k(f_A)f_A'$ в точке $\xi = 0$, как следует из (3') при $C = 0$, при этом не нарушится. В результате получаем следующее автомодельное решение:

$$u_A(t, x) = \Phi^{-1}[\lambda(\lambda t - x)_+], \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

где введено обозначение $(x)_+ = \{x, \text{ если } x \geq 0; 0, \text{ если } x < 0\}$.

Положим $T_0 = \Phi(\infty)/\lambda^2 \leq \infty$. Тогда (6) можно рассматривать как решение в $(0, T_0) \times \mathbb{R}_+$ первой краевой задачи для уравнения (2) с условиями

$$u(0, x) = 0, \quad x > 0; \quad u(t, 0) = \Phi^{-1}(\lambda^2 t), \quad 0 < t < T_0. \quad (7)$$

Таким образом, при выполнении условия (5) задача (2), (7) имеет решение с всюду непрерывным тепловым потоком, которое при каждом $t \in (0, T_0)$ является *финитным* по x :

$$u_A(t, x) \equiv 0, \quad x \geq \lambda t, \quad t \in (0, T_0).$$

Поэтому уравнение (2) описывает процессы с конечной скоростью распространения возмущений. В тех точках, где $u_A > 0$, решение задачи является классическим и может не иметь достаточной гладкости в точках фронта тепловой волны $x_\Phi(t) = \lambda t$, где оно обращается в нуль.

Для более детального исследования поведения решения в точках вырождения рассмотрим случай

$$k(u) = u^\sigma, \quad \sigma = \text{const} > 0.$$

Тогда $\Phi(u) = u^{\sigma+1}/\sigma$, $\Phi^{-1}(u) = (\sigma u)^{1/\sigma}$, $T_0 = \infty$, и решение типа

бегущей волны имеет особенно простой вид:

$$u_A(t, x) = [\sigma \lambda (\lambda t - x)_+]^{1/\sigma}, \quad t \geq 0, \quad x > 0. \quad (8)$$

Проверим еще раз, что тепловой поток в точках $x_\phi(t) = \lambda t$ является непрерывным. Действительно,

$$W(t, x) = -u_A^\sigma (u_A)_x = \sigma^{1/\sigma} \lambda^{(\sigma+1)/\sigma} [(\lambda t - x)_+]^{1/\sigma},$$

т. е. $W(t, x_\phi^+(t)) = W(t, x_\phi^-(t)) = W(t, x_\phi(t)) = 0$ при всех $t > 0$. В то же время, если $\sigma \geq 1$, то в точках вырождения $x = x_\phi(t)$ не

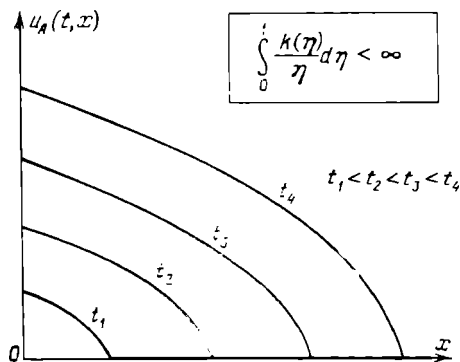


Рис. 1. Бегущая волна в случае конечной скорости распространения возмущений.

существует производных u_t , u_x , u_{xx} . В случае $\sigma \in [1/2, 1)$ производные u_t , u_x существуют, но не определена производная $u_{xx}(t, x_\phi(t))$. Если же $\sigma \in (0, 1/2)$, то u_t , u_x , u_{xx} существуют всюду (т. е. финитное решение (8) является классическим), однако в точках фронта нет производных высокого порядка.

Таковы основные дифференциальные свойства построенного обобщенного решения. Функция (8) в различные моменты времени схематически изображена на рис. 1. Это решение представ-

ляет собой тепловую волну, движущуюся по невозмущенному (нулевому) фону температуры со скоростью $\lambda \equiv dx_\phi(t)/dt$.

Условие (5) является необходимым и достаточным для существования финитного решения типа бегущей волны. Если оно нарушается, т. е.

$$\int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta = \infty, \quad (9)$$

то, как следует из (4), функция $f_A(\xi)$ строго положительная при всех допустимых $\xi \in \mathbb{R}$, и поэтому (3) представляет собой положительное классическое решение уравнения (2) (рис. 2).

Очевидно, что в случае $k(0) > 0$, т. е. при равномерной параболности уравнения (см. предложение 2, § 2), условие (9) выполнено. Однако среди коэффициентов $k(u)$, $k(0) = 0$, есть такие, для которых имеет место (9). Это справедливо, например, для функции $k(u) = |\ln u|^{-1}$, $u \in (0, 1/2)$; $k(u) > 0$ при $u \geq 1/2$. Тогда решение типа бегущей волны строго положительное и тем самым классическое. Более того, если $k(u) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, то u можно дифференцировать по t и x в области $(0, T_0) \times \mathbb{R}_+$ любое число раз.

Любопытно, что столь просто полученное условие (5) является не только достаточным, но и необходимым для конечной скорости распространения возмущений в процессах, описываемых уравнением (1.1).

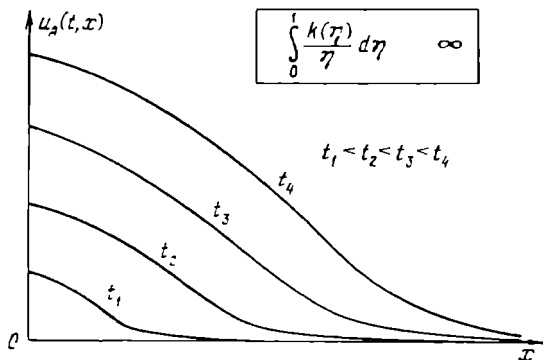


Рис. 2. Бегущая волна в случае бесконечной скорости распространения возмущений

Решение типа бегущей волны обладает еще одной уникальной возможностью: оно показывает на простом примере локализацию тепловых граничных режимов с обострением. Исследованию этого интересного эффекта в различных задачах посвящена значительная часть книги.

Пример 7 (локализация граничного режима с обострением). Пусть

$$k(u) = u \exp\{-u\}, \quad u \geq 0.$$

Тогда, как нетрудно проверить, решение (6) имеет следующий вид:

$$u_A(t, x) = \begin{cases} -\ln[1 - \lambda(\lambda t - x)], & 0 \leq x \leq \lambda t, \\ 0, & x > \lambda t, \end{cases} \quad (10)$$

причем оно определено на ограниченном интервале изменения времени $[0, T_0)$, где $T_0 = 1/\lambda^2$. Отвечающее (10) краевое условие при $x = 0$ имеет вид

$$u_A(t, 0) = u_1(t) = -\ln(1 - \lambda^2 t), \quad 0 < t < T_0, \quad (11)$$

и, следовательно, $u_1(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$. Однако, несмотря на неограниченный рост температуры на границе в режиме с обострением, возмущения проникают лишь на конечную глубину $L = 1/\lambda$, т. е. $u_A(t, x) = 0$ для всех $x \geq L$ в течение всего времени существования решения $t \in (0, T_0)$ (рис. 3). При этом всюду, за исключением граничной точки $x = 0$, решение ограничено сверху

равномерно по t :

$$u_A(t, x) \leq u_A(T_0^-, x) = \begin{cases} -\ln(\lambda x), & 0 < x < 1/\lambda, \\ 0, & x \geq 1/\lambda, \end{cases}$$

и растет до бесконечности за счет действия граничного режима с обострением в одной точке $x=0$. Предельная кривая $u = u_A(T_0^-, x)$ показана на рис. 3 жирной линией. Отметим разительное отличие этой останавливающейся тепловой волны от обычных температурных волн, изображенных на рис. 1, 2.

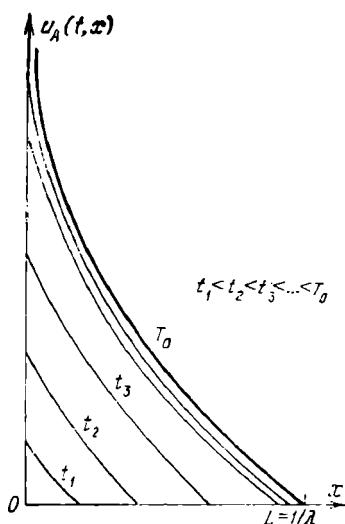


Рис. 3. Автомодельное решение (10) типа бегущей волны, локализованное в области $(0, 1/\lambda)$

Рассмотрим пример обобщенного решения уравнения теплопроводности в многомерном случае.

Пример 8. Найдем решение задачи Коши для уравнения со степенным коэффициентом

$$u_t = \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (12)$$

которое имеет постоянную энергию

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(t, x) dx = E_0 = \text{const} > 0 \quad (13)$$

(это решение типа мгновенного точечного источника).

Будем искать его в автомодельном виде:

$$u(t, x) = t^\alpha \theta(\xi), \quad \xi = x/t^\beta \in \mathbb{R}^N, \quad (14)$$

где α, β — постоянные, а $\theta(\xi) \geq 0$ — непрерывная функция. Подставляя (14) в (12), получаем следующее уравнение:

$$\alpha t^{\alpha-1} \theta - \beta t^{\alpha-1} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \xi_i = t^{\alpha(\sigma+1)-2\beta} \nabla_\xi \cdot (\theta^\sigma \nabla_\xi \theta). \quad (15)$$

Отсюда вытекает необходимость равенства $\alpha - 1 = \alpha(\sigma + 1) - 2\beta$; тогда временные множители в (15) можно сократить. Далее, используя тождество

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(t, x) dx \equiv \int_{\mathbb{R}^N} t^\alpha \theta \left(\frac{x}{t^\beta} \right) dx \equiv t^{\alpha+N\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \theta(\xi) d\xi$$

(предполагается, что $\theta \in L^1(\mathbb{R}^N)$), в силу (13) имеем $\alpha + N\beta = 0$. Отсюда получаем единственную пару значений параметров $\alpha = -N/(N\sigma + 2)$, $\beta = 1/(N\sigma + 2)$, т. е. искомое решение имеет вид

$$u(t, x) = t^{-N/(N\sigma+2)} \theta(\xi), \quad \xi = x/t^{1/(N\sigma+2)}. \quad (16)$$

Тогда, как следует из (15), функция $\theta \geq 0$ удовлетворяет квазилинейному эллиптическому уравнению

$$\nabla_{\xi} \cdot (c^{\sigma} \nabla_{\xi} \theta) + \frac{1}{N\sigma + 2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \xi_i + \frac{N}{N\sigma + 2} \theta = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}^N, \quad (17)$$

а также условию

$$\int_{\mathbf{R}^N} \theta(\xi) d\xi = E_0. \quad (18)$$

Пусть функция θ является *радиально симметричной*, т. е. зависит от одной координаты: $\theta = \theta(\eta)$, $\eta = |\xi| \geq 0$. Тогда уравнение (17) принимает вид

$$\frac{1}{\eta^{N-1}} (\eta^{N-1} \theta^{\sigma} \theta')' + \frac{1}{N\sigma + 2} \theta' \eta + \frac{N}{N\sigma + 2} \theta = 0, \quad \eta > 0, \quad (19)$$

причем в силу симметрии необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\theta^{\sigma} \theta'(0) = 0.$$

Уравнение (19) эквивалентно уравнению

$$(\eta^{N-1} \theta^{\sigma} \theta')' + \frac{1}{N\sigma + 2} (\theta \eta^N)' = 0, \quad \eta > 0.$$

Интегрируя его и полагая постоянную интегрирования равной нулю (последнее, как нетрудно проверить, необходимо для существования решения с требуемыми свойствами), приходим к уравнению первого порядка

$$\eta^{N-1} \theta^{\sigma} \theta' + \frac{1}{N\sigma + 2} \theta \eta^N = 0, \quad \eta > 0; \quad \theta^{\sigma} \theta'(0) = 0.$$

Его решения имеют вид

$$\theta(\eta) = \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma + 2)} (\eta_0^2 - \eta^2)_+ \right]^{1/\sigma} \quad \eta \geq 0. \quad (20)$$

Здесь η_0 — постоянная, которая определяется из условия (18):

$$\eta_0(E_0) = \left\{ \pi^{-N/2} \left[\frac{2(N\sigma + 2)}{\sigma} \right]^{1/\sigma} \frac{\Gamma(N/2 + 1 + 1/\sigma)}{\Gamma(1/\sigma + 1)} E_0 \right\}^{\sigma/(N\sigma + 2)}$$

Итак, искомое автомодельное решение с неизменной энергией имеет вид

$$u_{\lambda}(t, x) = t^{-N/(N\sigma + 2)} \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma + 2)} \left(\eta_0^2 - \frac{x^2}{t^{2/(N\sigma + 2)}} \right)_+ \right]^{1/\sigma} \quad (21)$$

При любом $t > 0$ оно финитно по x , а при $t \rightarrow 0^+$ стремится к δ -функции: $u_{\lambda}(t, x) \rightarrow E_0 \delta(x)$, $t \rightarrow 0^+$. Всюду, за исключением поверхности вырождения $\mathbf{R}_+ \times \{|x| = \eta_0 t^{1/(N\sigma + 2)}\}$, оно является классическим (и бесконечно дифференцируемым), а на поверхности фронта имеет непрерывный тепловой поток. Дифференциальные

свойства решения (21) такие же, как у частного решения типа бегущей волны, рассмотренного в примере 6. Поскольку уравнение (12) не меняется при замене t на $T + t$, где $T = \text{const} > 0$, то $u_A(t + T, x)$ также будет решением с постоянной энергией.

В следующем примере с помощью построенного решения анализируется любопытное свойство квазилинейного вырождающегося параболического уравнения со стоком.

Пример 9 (локализация тепловых возмущений в средах с поглощением). Рассмотрим уравнение

$$u_t = \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u) - \gamma u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (22)$$

где $\gamma > 0$ — постоянная. По сравнению с (12) в это уравнение добавлен линейный сток тепла. Посмотрим, как это сказывается на свойствах обобщенного решения.

Положим в уравнении (22)

$$u(t, x) = \exp\{-\gamma t\} v(t, x),$$

где v — новая неизвестная функция. Тогда уравнение для v принимает вид

$$\exp\{\gamma \sigma t\} v_t = \nabla \cdot (v^\sigma \nabla v), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Вводя новую независимую переменную (время)

$$\tau = \tau(t) \equiv \frac{1}{\gamma \sigma} [1 - \exp\{-\gamma \sigma t\}], \quad \tau \in \left[0, \frac{1}{\gamma \sigma}\right),$$

получаем для $v = v(\tau, x)$ рассмотренное выше уравнение

$$v_t = \nabla \cdot (v^\sigma \nabla v),$$

частное решение которого нам известно. Выбирая в качестве v , например, функцию $u_A(1 + \tau, x)$ (см. (21)) и проводя обратные преобразования, получаем следующее решение уравнения (22):

$u(t, x) =$

$$= \exp\{-\gamma t\} [g(t)]^{-N/(N\sigma+2)} \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma+2)} \left(\eta_0^2 - \frac{|x|^2}{[g(t)]^{2/(N\sigma+2)}} \right)_+ \right]^{1/\sigma},$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

где $g(t) = 1 + \tau(t)$. Это решение имеет поверхность вырождения

$$|x_\Phi(t)| = \eta_0 \left[1 + \frac{1 - \exp\{-\gamma \sigma t\}}{\gamma \sigma} \right]^{1/(N\sigma+2)}, \quad t \geq 0, \quad (23)$$

на которой тепловой поток непрерывен. Но не в этом его главная особенность.

Так же, как в примере 8, носитель обобщенного решения монотонно возрастает, однако здесь

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_\Phi(t)| = \eta_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma \sigma} \right)^{1/(N\sigma+2)} < \infty,$$

т. е. тепловые возмущения локализованы за счет действия стоков

энергии в ограниченной области пространства — в шаре радиусом L .

2. Определение и основные свойства обобщенного решения.

Рассмотренные в п. 1 примеры позволили выделить многие свойства обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений. Отметим еще раз, что обобщенное решение может не иметь всюду производных, входящих в уравнение, однако в точках вырождения оно обладает определенной регулярностью — тепловой поток непрерывен. Во всех других точках, где уравнение не вырождается (и, следовательно, равномерно параболично в некоторой их окрестности), решение, как следует ожидать, является классическим. Дадим определение обобщенного решения, которое учитывает указанные особенности.

Рассмотрим в $(0, T) \times \Omega$ первую краевую задачу (1.2) — (1.4) для уравнения с достаточно гладкими при $u > 0$ коэффициентами $k(u)$, $Q(u)$, причем k не удовлетворяет условию равномерной параболичности, т. е. $k(0) = 0$.

Определение. Неотрицательную непрерывную ограниченную функцию $u(t, x)$, удовлетворяющую краевым условиям (1.3), (1.4), будем называть *обобщенным решением задачи* (1.2) — (1.4), если существует обобщенная производная $\nabla\varphi(u) \equiv k(u)\nabla u$, суммируемая с квадратом в любой конечной области $\omega' \subset (0, T) \times \Omega$ и ограниченная в любой области вида $(\tau, T) \times \Omega$, $\tau = \text{const} \in (0, T)$, и если для любой непрерывно дифференцируемой в $(0, T) \times \Omega$ финитной функции $f(t, x)$, равной нулю при $(t, x) \in [0, T) \times \partial\Omega$ и при $t = T$, выполняется равенство

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(u \frac{\partial f}{\partial t} - k(u) \nabla u \cdot \nabla f + Q(u) f \right) dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) f(0, x) dx = 0. \quad (24)$$

Отметим, что равенство (24) на формальном уровне получается после умножения уравнения (1.2) на f и интегрирования по области $(0, T) \times \Omega$. При этом интегрирование по частям (по переменной x) будет законным, если функция $k(u)\nabla u$ непрерывна в Ω . Это требование не содержится в определении, где указаны более слабые ограничения на производную $\nabla\varphi(u)$ (существование в обобщенном смысле и условие $\nabla\varphi(u) \in L^2_{\text{loc}}((0, T) \times \Omega)$, при которых интегралы в (24) имеют смысл). Однако для широкого класса вырождающихся уравнений сформулированных ограничений достаточно, чтобы доказать непрерывность $k(u)\nabla u$ (об этом несколько подробнее сказано ниже).

Естественно, необходимость в определении решения в обобщенном смысле возникает в том случае, когда решение имеет в $(0, T) \times \Omega$ точки вырождения, где $u(t, x) = 0$. В противном случае, если, например, $u_0(x) > 0$ в $\bar{\Omega}$ и $Q(u) \geq 0$, то $u(t, x) > 0$ в $(0, T) \times \Omega$, и поэтому решение является классическим, так как уравнение в рассматриваемой области не вырождается.

Подробное исследование обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений проводилось в боль-

шом числе работ (см., например, [140, 149, 78, 20, 131]). Не останавливаясь на этом подробно, отметим одно важное обстоятельство. Как правило, обобщенное решение $u(t, x)$ уравнения с гладкими коэффициентами единственно и может быть получено как предел при $n \rightarrow \infty$ монотонной последовательности гладких ограниченных положительных решений $u_n(t, x)$ того же уравнения. В результате обобщенное решение в окрестности всех точек $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$, где $u > 0$, является классическим и теряет гладкость только на поверхности вырождения, отделяющей область $\{u > 0\}$ от области $\{u = 0\}$. Для доказательства непрерывности теплового потока $-k(u) \nabla u$ необходимо привлекать дополнительные технические приемы (см. например, [173]). Некоторую дополнительную информацию о дифференциальных и других свойствах обобщенных решений можно найти в комментариях к данной главе.

Ниже мы несколько подробнее остановимся на тех ограничениях, при которых необходимо рассматривать решение параболического уравнения в обобщенном смысле. Это будет сделано на примере нелинейного уравнения теплопроводности

$$u_t = \nabla (k(u) \nabla u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (25)$$

для которого рассматривается задача Коши с финитной начальной функцией

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad \varphi(u_0) \in C^1(\mathbb{R}^N), \quad (26)$$

так что

$$u_0(x) \equiv 0, \quad |x| > l = \text{const} > 0. \quad (27)$$

Сейчас мы снова вернемся к полученному в примере 6 условию финитности решения типа бегущей волны, которое обладает значительной общностью.

Предложение 4. Сходимость интеграла

$$\int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta < \infty \quad (28)$$

является необходимым и достаточным условием финитности по x решения задачи Коши (25) — (27).

Другими словами, если интеграл в (28) расходится, то $u(t, x) > 0$ в \mathbb{R}^N при всех $t > 0$. Доказательство этого утверждения основано на теоремах сравнения обобщенных решений, в принципе аналогичных приведенным в § 1. Вторая из них в обобщенном рассмотрении имеет некоторые особенности.

3. О теоремах сравнения обобщенных решений. Теорема 1 дословно переносится на случай обобщенных решений. В общем случае ее доказательство проводится на основе анализа интегральных тождеств типа (24) для решений $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ или с использованием сравнения последовательностей классических положительных решений $u_n^{(1)}$, $u_n^{(2)}$, которые сходятся соответственно к обобщенным решениям $u^{(1)}$, $u^{(2)}$.

Формулировку теоремы 2 необходимо изменить. В конкретных приложениях мы будем использовать следующий ее вариант.

Теорема 3. Пусть в $[0, T) \times \bar{\Omega}$ определены неотрицательное обобщенное решение краевой задачи (1.2) — (1.4), а также функции $u_{\pm} \in C([0, T) \times \bar{\Omega})$, $u_{\pm} \in C^{1,2}$ всюду в $(0, T) \times \bar{\Omega}$ вне конечного числа гладких непересекающихся поверхностей $(0, T) \times S_i(t)$, на которых функция $\nabla \Phi(u) \equiv k(u) \nabla u$ непрерывна. Пусть всюду в $(0, T) \times (\Omega \setminus \{x \in S_i(t)\})$ выполнены неравенства (1.9), а на параболической границе области $(0, T) \times \Omega$ — условия (1.10), (1.11). Тогда

$$u_- \leq u \leq u_+ \quad \text{в} \quad (0, T) \times \Omega. \quad (29)$$

Здесь новым элементом по сравнению с теоремой 2 фактически является лишь то, что обобщенные верхнее u_+ и нижнее u_- решения могут быть финитными, однако на поверхностях вырождения $(0, T) \times S_i(t)$ отвечающие им тепловые потоки должны быть непрерывными. Тем самым к функциям u_{\pm} предъявляются, грубо говоря, те же требования, что и к обобщенному решению задачи. Если в (1.9) заменить знаки неравенства на равенства (в $(0, T) \times (\Omega \setminus \{x \in S_i(t)\})$), то функции u_{\pm} будут просто различными обобщенными решениями уравнения (1.2).

4. Доказательство предложения 4 (о конечной скорости распространения возмущений) и некоторые его следствия. Достаточность условия (28) непосредственно вытекает из анализа автомодельных решений типа бегущей волны, проведенного в примере 6. Поместим ограниченную область $\omega = \text{supp } u_0$ в некоторый параллелепипед $P = \{|x_i| < l_0, i = 1, 2, \dots, N\}$ со сторонами, параллельными осям x_i , так, чтобы $\bar{\omega} \subset P$. Покажем, что скорость распространения возмущений вдоль i -го направления конечна. Так же как в примере 6, построим частное решение типа бегущей волны вида

$$u_A^i(t, x) = \theta(x_i - l_0 - \lambda t), \quad u_A^i(0, x) \equiv \theta(x_i - l_0) = 0$$

при $x_i = l_0$. Оно строго положительно в левой полукрестности $\{l_0 - \varepsilon < x_i < l_0\}$ плоскости $x_i = l_0$. Однако $\text{supp } u_0 \subset P$, поэтому найдется такое $\varepsilon > 0$, что $u_0(x) = 0$ при $x_i = l_0 - \varepsilon$. В силу непрерывности $u(t, x)$ при $x_i = l_0 - \varepsilon$ в течение некоторого времени $t \in (0, \tau)$ будет выполнено неравенство $u(t, x) \leq u_A^i(t, x)$, и в силу теоремы сравнения 1 $u(t, x) \leq u_A^i(t, x)$ в области $\{t \in (0, \tau), x_i > l_0 - \varepsilon\}$. Следовательно, $u(t, x)$ финитна по x вдоль произвольного направления x_i . По мере роста $\text{supp } u(t, x)$ параллелепипед P увеличивается, и повторяются те же рассуждения.

При доказательстве необходимости используется другое автомодельное решение уравнения (25):

$$u_{\lambda}(t, x) = f(\xi), \quad \xi = |x|/t^{1/2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (30)$$

где функция $f \geq 0$ удовлетворяет обыкновенному дифференциально-

ному уравнению

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} k(f) f')' + \frac{1}{2} f' \xi = 0, \quad \xi > 0. \quad (31)$$

Лемма. Условие (28) является необходимым и достаточным условием существования неотрицательного обобщенного решения уравнения (31), обращаемого в нуль в точке $\xi = \xi_0 > 0$, в которой тепловой поток $-\xi^{N-1} k(f) f'$ непрерывен.

Доказательство. Существование решения $f = f(\xi)$ такого, что $f(\xi_0) = 0$, $(k(f) f')(\xi_0) = 0$, $f(\xi) > 0$ при всех $\xi \in (0, \xi_0)$, устанавливается после сведения (31) в окрестности точки $\xi = \xi_0$ к эквивалентному интегральному уравнению относительно монотонно убывающей функции $\xi = \xi(f)$:

$$\xi(f) = \mathcal{M}(\xi)(f) = \xi_0 - \int_0^f \frac{2\xi^{N-1}(\eta) k(\eta) d\eta}{\int_0^\eta \xi^N(\zeta) d\zeta}, \quad f \geq 0. \quad (32)$$

Локальная разрешимость вытекает из теоремы Банаха о сжимающих отображениях. В том случае, когда интеграл в (28) расходится, решения с конечной точкой фронта $\xi = \xi_0$ не существует. Действительно, с одной стороны,

$$\lim_{f \rightarrow 0^+} \xi(f) = \xi_0 < \infty,$$

а с другой — из (32) получаем

$$\lim_{f \rightarrow 0^+} \xi(f) = \lim_{f \rightarrow 0^+} \mathcal{M}(\xi)(f) = \xi_0 - 2\xi_0^{-1} \lim_{f \rightarrow 0^+} \int_0^f \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta = -\infty.$$

В этом случае (31) имеет монотонное, строго положительное в \mathbf{R}_+ решение $f = f(\xi)$ такое, что $f(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ (см., например, [143, 181, 256]).

Необходимость условия (28) также доказывается с помощью теоремы сравнения 1. Пусть интеграл в (28) расходится. Покажем, что тогда $u(t, x) > 0$ в \mathbf{R}^N при любых $t > 0$. Возьмем указанное в лемме решение $f(\xi)$ уравнения (31) и положим

$$u^{(1)}(t, x) = f(|x|/t^{1/2}) > 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}. \quad (33)$$

Функция $f(\xi)$ может быть не определена при $\xi = 0$, но это не существенно. Для нас важно то, что в силу (33) $u^{(1)}(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0^+$ равномерно в любой области $\{|x| > \delta\}$, $\delta = \text{const} > 0$.

Пусть без ограничения общности $0 \in \text{supp } u_0$. Выберем $\delta > 0$ столь малым, что $\{|x| \leq \delta\} \subset \text{supp } u_0$. Тогда, очевидно, существует такое $\tau > 0$, что $u^{(1)}(t, x) < u(t, x)$ при $|x| = \delta$, $t \in (0, \tau)$.

Используем теперь тот факт, что решение задачи (25), (26) может быть получено в виде

$$u(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u_\varepsilon(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

где u_ε — классические положительные решения уравнения (25),

отвечающие начальным функциям $u_\varepsilon(0, x) = \varepsilon + u_0(x)$, $x \in \mathbf{R}^N$. Но, как нетрудно видеть, для любого $\varepsilon > 0$ всегда можно указать такое $t_\varepsilon \in (0, \tau)$ ($t_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0^+$), что $u^{(1)}(t, x) < u_\varepsilon(0, x)$ в $\{|x| > \delta\}$ при $t \in (0, t_\varepsilon]$, причем в силу построения семейства $\{u_\varepsilon\}$ имеем $u^{(1)}(t + t_\varepsilon, x) \leq u_\varepsilon(t, x)$ при $|x| = \delta$, $t \in (0, \tau - t_\varepsilon)$.

Следовательно, из теоремы сравнения 1 получаем неравенство $u^{(1)}(t + t_\varepsilon, x) \leq u_\varepsilon(t, x)$ при $x \in \mathbf{R}^N \setminus \{|x| \leq \delta\}$, $t \in (0, \tau - t_\varepsilon)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0^+$, получаем $u^{(1)}(t, x) \leq u(t, x)$ при $x \in \mathbf{R}^N \setminus \{|x| \leq \delta\}$, $t \in (0, \tau)$, что в силу (33) означает строгую положительность в \mathbf{R}^N решения задачи (25), (26) при всех сколь угодно малых $t > 0$. Этим завершается доказательство предложения 4.

Таким образом, при выполнении условия

$$\int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta = \infty \quad (34)$$

нет необходимости определять решение задачи (25), (26) для вырождающегося уравнения в обобщенном смысле: любое нетривиальное решение — строго положительное (и тем самым классическое). Естественно, это же будет справедливо и для любого уравнения (1.2) с источником.

Предложение 5. Пусть $Q(u) \geq 0$, $Q \in C^1([0, \infty))$ и коэффициент k удовлетворяет условию (34). Тогда, если $u_0(x) \neq 0$, то решение задачи Коши (1.2), (1.5) строго положительно в \mathbf{R}^N при любых допустимых $t > 0$.

Доказательство. В силу теоремы сравнения 3 обобщенное решение рассматриваемой задачи (обозначим его через $u^{(2)}(t, x)$) всюду не меньше решения $u \equiv u^{(1)}$ задачи Коши (25), (26) для уравнения без источника: $u^{(2)} \geq u^{(1)}$. Однако из предложения 4 следует, что $u^{(1)} > 0$ в \mathbf{R}^N при $t > 0$; следовательно, это справедливо и для $u^{(2)}$.

Для уравнения со стоком ситуация усложняется. Здесь, даже если $k(0) > 0$, решение $u(t, x)$ может быть финитным. Однако для этого действие стока при малых температурах $u > 0$ должно быть очень интенсивным и функция $Q(u)$ — недифференцируемой в нуле. В противном случае, как показывает следующий пример, решение все равно будет строго положительным и классическим.

Пример 10. Рассмотрим задачу Коши для полулинейного уравнения со стоком:

$$u_t = \Delta u - Q(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad (35)$$

с финитной начальной функцией $u_0(x) \neq 0$, $0 \leq u_0 \leq M$, $\text{supp } u_0 \subset \{|x| < l_0\}$. Пусть $Q(u) > 0$ при $u > 0$, $Q(0) = 0$ и $Q \in C^1([0, \infty))$. Покажем, что $u(t, x) > 0$ в \mathbf{R}^N при $t > 0$.

Прежде всего из теоремы 1 сразу получаем, что

$$0 \leq u(t, x) \leq M, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}^N.$$

Затем, учитывая ограничения на коэффициент Q , выводим, что $Q(u) \leq Cu$, $u \in [0, M]$; $C = \text{const} > 0$.

Тогда, сопоставляя на основе теоремы 3 решения уравнения (35) и уравнения

$$v_t = \Delta v - Cv, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

удовлетворяющие одному и тому же начальному условию, убеждаемся, что

$$u(t, x) \geq v(t, x) \quad \text{в } \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \quad (36)$$

Однако $v > 0$ при $t > 0$. Действительно, полагая

$$v = \exp\{-Ct\}w, \quad (37)$$

получаем для w уравнение теплопроводности $w_t = \Delta w$, $w(0, x) = u_0(x) \geq 0$ в \mathbf{R}^N , $u_0 \not\equiv 0$, и поэтому $w > 0$ в \mathbf{R}^N при $t > 0$. Из (37), (36) следует необходимый результат.

Следующий пример показывает, что в среде с интенсивными стоками тепловая волна может быть не только финитной, но и локализованной.

Пример 11. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности с поглощением в одномерной постановке:

$$u_t = u_{xx} - u^\alpha, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (38)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x > 0, \quad (39)$$

$$u(t, 0) = u_1(t) \geq 0, \quad t > 0, \quad (40)$$

где $\alpha \in (0, 1)$ — постоянная, т. е. функция $-u^\alpha$ недифференцируема при $u = 0$ (интенсивный сток). Пусть начальное возмущение u_0 финитно: $u_0(x) = 0$ при всех $x > l_0 > 0$, а внешнее тепловое воздействие ограничено: $u_1(t) \leq M < \infty$ при всех $t \geq 0$. Покажем, что в этих условиях решение всегда финитно (хотя $k(u) \equiv 1 > 0$) и, кроме того, локализовано в ограниченной области.

Оба этих утверждения доказываются путем сравнения решения задачи (38) — (40) со стационарным решением $v = v(x)$ того же уравнения

$$v_{xx} - v^\alpha = 0, \quad (41)$$

которое определяется следующим образом.

Фиксируем любое $l > 0$ и рассмотрим для (41) задачу Коши в области $\{0 < x < l\}$ с условиями

$$v(l) = 0, \quad v'(l) = 0. \quad (42)$$

Одно решение задачи (41), (42) тривиальное. Но, как нетрудно проверить, существует и другое, положительное на $(0, l)$ решение.

Всякое решение (41) удовлетворяет тождеству

$$\frac{1}{2} v_x^2 - \frac{1}{\alpha+1} v^{\alpha+1} = C_1,$$

где постоянная C_1 , как следует из (42), должна равняться нулю.

Тогда

$$v_x = -\sqrt{2/(\alpha + 1)} v^{(\alpha+1)/2},$$

и поэтому

$$\frac{2}{1-\alpha} v^{(1-\alpha)/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\alpha+1}} x + C_2.$$

Здесь постоянная C_2 , определяемая из первого условия (42), имеет вид $C_2 = l\sqrt{2/(\alpha + 1)}$, и, следовательно,

$$v(x) = \left[\frac{1-\alpha}{\sqrt{2(\alpha+1)}} (l-x) \right]^{2/(1-\alpha)}, \quad 0 < x < l.$$

По построению функция

$$w_l(x) = \left[\frac{1-\alpha}{\sqrt{2(\alpha+1)}} (l-x)_+ \right]^{2/(1-\alpha)} \quad x > 0, \quad (43)$$

является классическим стационарным решением уравнения (38) и имеет при $x > 0$ непрерывные производные u_x , u_{xx} (отметим, что в точке фронта $x = l$ производные более высокого порядка могут не существовать). Выберем теперь $l = l_* > 0$ столь большим, что $u_0(x) \leq w_{l_*}(x)$ при $x > 0$ и, кроме того,

$$w_{l_*}(0) = \left[\frac{1-\alpha}{\sqrt{2(\alpha+1)}} l_* \right]^{2/(1-\alpha)} > M.$$

Тогда $u_1(t) < w_{l_*}(0)$ при всех $t \geq 0$. Следовательно, в силу теоремы сравнения 1 справедлива оценка

$$u(t, x) \leq w_{l_*}(x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}_+.$$

Поэтому, во-первых, функция u финитна по x при всех $t > 0$ и, во-вторых, тепловые возмущения локализованы в области $\{x \in (0, l_*)\}$ в течение всего времени $t \in (0, \infty)$.

Подчеркнем, что эти свойства возможны только в случае $\alpha \in (0, 1)$; при $\alpha \geq 1$, как показывает пример 10, решение строго положительно при $t > 0$. Об этом же свидетельствует отсутствие в случае $\alpha \geq 1$ нетривиальных решений стационарной задачи (41), (42) с конечным $l > 0$.

5. Об условиях локального и глобального существования обобщенного решения. В целом здесь сохраняются все положения, сформулированные в п. 2 § 2 применительно к классическим решениям. Локальное существование обобщенного решения вытекает из возможности его построения как предела последовательности классических решений, определенных на конечном интервале $(0, T)$. Естественно, остается в силе и предложение 3, поскольку указанное в нем условие получено на основе анализа классических решений. Анализ неограниченных классических решений в примерах 2, 3 является корректным и в случае обобщенных решений. Рассмотрим следующий пример (в большей общности подобные задачи изучаются в гл. VII, § 2).

Пример 12. Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^N с гладкой границей $\partial\Omega$, $\sigma > 0$ — фиксированная постоянная. Рассмотрим для вырождающегося уравнения

$$u_t = \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u) + u^{\sigma+1}, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (44)$$

краевую задачу с условиями

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega; \quad u_0 \in C(\Omega), \\ u(t, x) &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (45)$$

Через $\psi_1(x) > 0$ в Ω , $\|\psi_1\|_{L^1(\Omega)} = 1$, обозначим первую собственную функцию задачи $\Delta\psi + \lambda\psi = 0$ в Ω , $\psi = 0$ на $\partial\Omega$, и через $\lambda_1 > 0$ — соответствующее собственное значение.

Покажем, что при $\lambda_1 < \sigma + 1$ всякое нетривиальное решение задачи существует только в течение конечного времени. Будем действовать так же, как в примере 2. Умножим скалярно в $L^2(\Omega)$ уравнение (44) на ψ_1 и, вводя обозначение $E(t) = (u(t, x), \psi_1(x))$, получаем

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{\Omega} \psi_1(x) \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u) dx + \int_{\Omega} \psi_1(x) u^{\sigma+1} dx. \quad (46)$$

Здесь, как и в случае классического решения, можно провести интегрирование по частям в первом члене в правой части (46).

Покажем, что

$$\int_{\Omega} \psi_1(x) \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u) dx = \frac{1}{\sigma+1} \int_{\Omega} u^{\sigma+1} \Delta \psi_1(x) dx. \quad (47)$$

Если $u_0 > 0$ в Ω , то $u(t, x)$ — классическое решение. Пусть $\text{supp } u_0 \subset \Omega$. Обозначим через $\partial\omega(t)$ поверхность вырождения уравнения (44) в данной задаче, т. е. границу носителя решения $\omega(t) \equiv \text{supp } u(t, x)$. Тогда $u(t, x) \equiv 0$ в $\Omega \setminus \omega(t)$, и по формуле Грина

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi_1 \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u) dx &\equiv \frac{1}{\sigma+1} \int_{\omega(t)} \psi_1 \Delta u^{\sigma+1} dx \equiv \\ &= \frac{1}{\sigma+1} \left\{ \int_{\omega(t)} \Delta \psi_1 u^{\sigma+1} dx + \int_{\partial\omega(t)} \psi_1 \frac{\partial u^{\sigma+1}}{\partial n_t} ds - \int_{\partial\omega(t)} \frac{\partial \psi_1}{\partial n_t} u^{\sigma+1} dx \right\}, \end{aligned} \quad (48)$$

где $\partial/\partial n_t$ — обозначение производной по направлению внешней нормали к $\partial\omega(t)$. Однако $u^{\sigma+1} = 0$ на $\partial\omega(t)$ и в силу непрерывности теплового потока $\partial u^{\sigma+1}/\partial n_t \equiv \nabla u^{\sigma+1} \cdot n_t = 0$ при $x \in \partial\omega(t)$. Поэтому два последних интеграла в (48) равны нулю, что приводит к равенству (47).

Надо сказать, что в проведенном анализе не рассматривался вопрос о регулярности поверхности вырождения $\partial\omega(t)$ (в частности, существование производной $\partial u^{\sigma+1}/\partial n_t$ на $\partial\omega(t)$); для отдельных классов уравнений эта проблема изучена весьма

полно (см. комментарий). В данном случае в этом нет необходимости; определение обобщенного решения предусматривает возможность интегрирования по частям и позволяет доказать равенство (47).

Используя (47) и учитывая, что $\Delta \psi_1 = -\lambda_1 \psi_1$ в Ω , из (46) получаем

$$\frac{dE}{dt}(t) = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\sigma + 1}\right) (u^{\sigma+1}, \psi_1), \quad t > 0. \quad (49)$$

Если $\lambda_1 < \sigma + 1$, то с помощью неравенства Йенсена ($u^{\sigma+1}$ выпуклая при $u \geq 0$ функция) приходим к оценке

$$\frac{dE}{dt} \geq \left(1 - \frac{\lambda_1}{\sigma + 1}\right) (u, \psi_1)^{\sigma+1} \equiv \left(1 - \frac{\lambda_1}{\sigma + 1}\right) E^{\sigma+1}, \quad t > 0.$$

Отсюда следует, что $E(t)$ (п тем самым $u(t, x)$) остается ограниченной в течение времени, не большего

$$T_* = \frac{\sigma + 1}{\sigma + 1 - \lambda_1} \frac{1}{\sigma} \left[\int_{\Omega} u_0(x) \psi_1(x) dx \right]^{-\sigma} < \infty,$$

т. е. существует $T_0 \in (0, T_*)$ такое, что $\limsup_x u(t, x) = \infty, t \rightarrow T_0^-$.

Отметим, что при $\lambda_1 \geq \sigma + 1$ из (49) вытекает ограниченность $E(t)$ при всех $t \geq 0$. Это можно расценить как свидетельство глобальной ограниченности решения (см. § 2 гл. VII).

В заключение приведем один простой пример неограниченного обобщенного решения, проявляющего свойство локализации тепла в нелинейных средах с объемным энерговыделением.

Пример 13. Уравнение

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^{\sigma+1}, \quad \sigma = \text{const} > 0,$$

имеет в области $(-\infty, T_0) \times \mathbf{R}$ следующее автомодельное решение в разделяющихся переменных:

$$u(t, x) = (T_0 - t)^{-1/\sigma} \theta_S(x) \equiv (T_0 - t)^{-1/\sigma} \begin{cases} \left(\frac{2(\sigma + 1)}{\sigma(\sigma + 2)} \cos^2 \frac{\pi x}{L_S} \right)^{1/\sigma} & |x| < L_S/2, \\ 0, & |x| \geq L_S/2, \end{cases} \quad 0 < t < T_0, \quad (50)$$

где $L_S = 2\pi(\sigma + 1)^{1/2}/\sigma$ и $T_0 > 0$ — произвольная постоянная.

Укажем основные особенности этого решения. Во-первых, оно фппитно по x и является обобщенным, в точках вырождения $x = \pm L_S/2$ тепловой поток непрерывен.

Во-вторых, это режим с обострением: $u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$ при любых $|x| < L_S/2$.

И в-третьих, его носитель $\text{supp } u(t, x) = \{|x| < L_S/2\}$ неизменен в течение всего времени существования решения. Оно локализовано, тепло из области локализации $\{|x| < L_S/2\}$ не проникает в окружающее холодное пространство (рис. 4) несмотря на то, что

во всех точках области локализации температура неограниченно возрастает при $t \rightarrow T_0^-$. Полуширина $x_{\text{ф}}(t) > 0$ этой интенсивно растущей тепловой структуры, т. е. координата точки, в которой $u(t, x_{\text{ф}}(t)) = u(t, 0)/2$, также не меняется со временем.

6. Примеры неединственности обобщенного решения. Очевидно, что требование на гладкость источника $Q \geq 0$ в уравнении (1.2), необходимое для однозначной разрешимости задачи Коши (см.

п. 3 § 2) в классе гладких функций, остается в силе и в обобщенной постановке. Пример 4 без изменений переносится на этот случай. Кроме того, нетрудно привести вырождающееся уравнение, построенное так же, как в примере 5, и имеющее в ограниченной области неединственное пространственно неоднородное решение.

Например, задача

$$u_t = \Delta u^{\sigma+1} + \lambda_1 u^{\sigma+1} + \psi_1^{(1-\alpha)/(\sigma+1)} u^\alpha,$$

$u = 0$ в Ω при $t = 0$ и в $\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega$; $\alpha \in (0, 1)$, $\sigma > 0$ — постоянные; другие обозначения те же, что и в примере 5 § 2, имеет семейство нетривиальных решений

$$u(t, x) = v_\tau(t) \psi_1^{1/(\sigma+1)}(x),$$

$$t > 0, \quad x \in \Omega.$$

Рассмотрим пример, который наглядно показывает, что при отсутствии условия единственности решения

перестают быть справедливыми теоремы сравнения обобщенных решений.

Пример 14. Фиксируем произвольное $\sigma \in (0, 1)$ и рассмотрим при $t > 0, x > 0$ уравнение

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^{1-\sigma}. \quad (51)$$

Здесь $Q(u) = u^{1-\sigma}$, так что $Q(0) = 0$, но $Q'(0^+) = \infty$. Найдём решение типа бегущей волны.

Полагая $u(t, x) = f_\lambda(\xi)$, $\xi = x - \lambda t$, $\lambda > 0$, получаем для $f_\lambda \geq 0$ уравнение

$$-\lambda f'_\lambda = (f_\lambda^\sigma f'_\lambda)' + f_\lambda^{1-\sigma},$$

которое при $\lambda > 2$ имеет два различных решения:

$$f_\lambda^\pm(\xi) = C_\pm [(1 - \xi)_+]^{1/\sigma},$$

$$C_\pm = \left(\sigma \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^{1/\sigma} > 0.$$

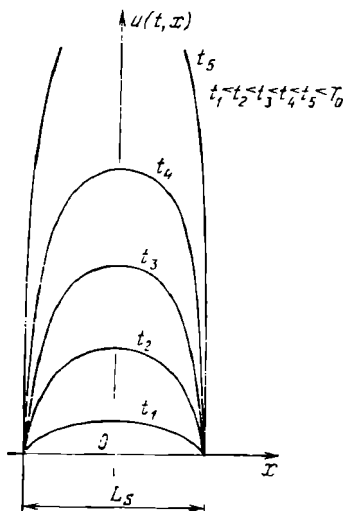


Рис. 4. Локализация процесса горения с обострением в S-режиме (автомодельное решение (50))

Таким образом, искомые автомодельные решения имеют вид

$$u^\pm(t, x) = C_\pm [(\lambda t - x)_+]^{1/\sigma}, \quad t > 0, \quad x > 0.$$

Сравним эти обобщенные решения с пространственно одно-родным решением (рис. 5)

$$u^*(t, x) = (\sigma t)^{1/\sigma}, \quad t \geq 0, \quad x > 0.$$

Во-первых, все они как решения краевой задачи в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ удовлетворяют одному и тому же начальному условию:

$$u^\pm(0, x) = u^*(0, x) \equiv 0, \quad x \geq 0.$$

Во-вторых, при $\lambda > 2$ граничные значения удовлетворяют неравенствам $u^*(t, 0) < u^-(t, 0) < u^+(t, 0)$, $t > 0$.

Тем не менее взаимное расположение этих решений на рис. 5 не подчиняется теореме сравнения. Отметим, что уже один факт существования двух решений u^\pm типа бегущей волны с одинаковыми скоростями движения и совпадающими фронтами, но отвечающих существенно различным по величине граничным режимам, противоречит физическим представлениям.

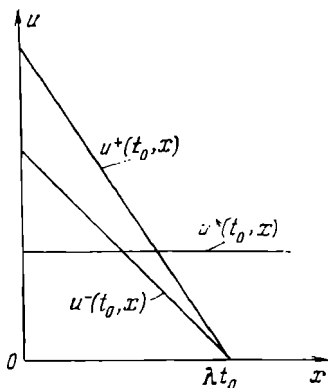


Рис. 5. Три различных решения уравнения (51), не подчиняющихся принципу максимума

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Необходимые библиографические ссылки к содержанию большей части § 1, 2 указаны в тексте. По поводу предложений 2, 3 в § 2 см. [128, 141, 165, 259]; ограничение (6) в § 2 совпадает с критерием Осгуда неограниченной продолжимости решений обыкновенного дифференциального уравнения (7) [160]. Результат, сформулированный в примере 2, впервые получен в [229]. По поводу примера 5 см. [229, 209]. Несединственность решения краевой задачи в ограниченной области для полулинейного уравнения с вогнутым по u источником доказана в [209] (см. также [208]). Автомодельное обобщенное решение из примера 8 построено в работах [86] ($N = 1$) и [8, 87], ($N \geq 1$ произвольное). Асимптотическая устойчивость автомодельного решения (21) из § 3 при $N = 1$ установлена в [227], и другим способом в [65]. Доказательство устойчивости в многомерном случае проведено в [205]. (качественные результаты ранее были получены, например, в [5, 85, 87]); см. также гл. II.

Локализованное решение в примере 9 взято из [133]. Определение обобщенного решения в и. 2 § 3 для вырождающегося уравнения общего вида без источника сформулировано в [140, 149, 150]. Там же доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений краевых задач и задач Коши. Для квазилинейных параболических уравнений с младшими членами такие теоремы доказаны, например, в [20, 102, 99, 106] (см. также [18, 26, 30, 78, 131, 151, 170, 177, 178, 191, 215, 240, 262, 263], где в ряде случаев рассматриваются более слабые обобщенные решения).

Дифференциальные свойства обобщенных решений уравнения $u_t = (u^{\sigma+1})_{xx}$, $\sigma > 0$, изучались в [173—175], где, в частности, установлена не-

прерывность теплового потока $-(u^{\sigma+1})_x$, получены некоторые результаты, относящиеся к свойствам кривых вырождения, и доказана гёльдеровость по x обобщенного решения с показателем $\nu = \min \{1, 1/\sigma\}$. Последнее влечет за собой непрерывность решения по Гёльдеру по t с показателем $\nu/2$ (см. [214, 109]).

В [198] при некоторых дополнительных предположениях показано, что показатель гёльдеровской непрерывности по t также равен ν (как следует из вида решения в примере 8, это оптимальный результат). В дальнейшем некоторые из этих результатов были обобщены на случай более общих вырождающихся уравнений [101, 106, 215, 232, 233]. Свойства поверхности вырождения уравнения $u_t = \Delta u^{\sigma+1}$ изучались в [175, 194, 195, 232], где показано, что начиная с некоторого момента времени она является дифференцируемой (многие из этих результатов суммированы в [204]; см. также [257]).

Несколько подробнее о свойствах обобщенных решений вырождающихся уравнений будет говориться в гл. II, III в комментариях к ним.

Достаточность условия (28) из § 3 в предложении 4 (наличия конечной скорости распространения возмущений) установлена в [140], для одномерного случая; см. также [13]. Необходимость при некоторых дополнительных ограничениях доказана в [100]. При доказательстве предложения 4 используется метод, который применялся в [256] в случае $N = 1$. По поводу теоремы 3 см. [102, 103, 106]. При изложении результата, сформулированного в примере 11, использовался подход [102] (сравнение со стационарным решением), где получены условия локализации в произвольных средах с объемным поглощением. Более подробно об эффекте локализации в средах со стоками см. в гл. II и в обзоре в [53]. При анализе параболического уравнения в примере 12 используется обобщение метода [229] на случай квазилинейных задач [25, 26, 30] (см. также [224], где тем же способом проводилось исследование квазилинейного уравнения другого вида). Локализованное неограниченное решение из примера 13 впервые построено в [92, 157] (см. гл. IV). Пример 14 взят из [27], где получены условия на $k(u)$, $Q(u)$, при которых параболическое уравнение общего вида допускает единственное автомодельное решение типа бегущей волны.

О НЕКОТОРЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

В настоящей главе, которая, как и предыдущая, является вводной, кратко излагаются результаты исследования отдельных квазилинейных параболических уравнений. Как следует из названия, один из главных методов исследования состоит в построении и анализе частных автомодельных (или в общем случае инвариантных) решений рассматриваемых задач.

На различных примерах мы постараемся показать, какое значение имеют эти частные решения для описания общих свойств решений параболических уравнений самого разнообразного вида. Здесь же дается представление о приближенных автомодельных решениях (п. а. р.) нелинейных уравнений параболического типа. Как самостоятельный метод исследования, построение п. а. р. будет широко использоваться в других главах.

Излагаемые результаты охватывают достаточно широкий спектр нелинейных уравнений. На сравнительно простых и часто хорошо известных примерах отражены многие идеи и методы исследования, которые более последовательно и подробно будут развиты в последующих главах.

Многие из рассматриваемых ниже проблем и задач подробно изучены; соответствующие ссылки даны в конце главы. Из всех результатов мы выбираем лишь те, которые, во-первых, являются конструктивными, т. е. дают возможность наглядно описать конкретные свойства решений задачи, и, во-вторых, что важно именно для вводной главы, могут быть сравнительно просто и в небольшом объеме доказаны по крайней мере на формальном уровне. Там, где это в полной мере не удается сделать, мы ограничиваемся краткими пояснениями к доказательству или обсуждаем только «физический смысл» результата, который содержит идеи строгого доказательства. В этой связи мы не стремимся к достаточной общности изложения; нередко даются другие доказательства известных фактов, которые, с нашей точки зрения, либо более наглядно выделяют «физическую сущность» явления, либо иллюстрируют математические методы исследования, применяемые в дальнейшем. Отметим, что на этом пути (в частности, с помощью автомодельного подхода) нередко удается получить более оптимальные и даже новые результаты.

Мы хотим особо выделить понятие асимптотической устойчивости автомодельных решений нелинейных параболических уравнений по отношению к возмущениям краевых условий задачи, а также по отношению к возмущениям самого уравнения. Авто-

модельные (инвариантные) решения являются не просто частными решениями, появляющимися по счастливому стечению обстоятельств. Во многих случаях они служат своеобразными «центрами притяжения» широкого множества решений данного уравнения, а также большого класса других параболических уравнений, полученных за счет «нелинейных возмущений» исходного. В каком смысле следует понимать слова «центр притяжения», будет ясно из дальнейшего изложения.

Конкретный вид автомодельных решений определяется из условий инвариантности уравнения относительно некоторых преобразований. В общем случае семейства инвариантных решений находятся путем групповой классификации уравнения, которая позволяет выделить все классы уравнений рассматриваемого вида, инвариантных относительно специальных групп преобразований (например, локальной группы Ли точечных преобразований или касательных преобразований Ли — Беклунда; см. [97, 139]).

Мы начнем с анализа простой линейной задачи; однако, как будет показано ниже, это исследование позволяет установить свойства решений целого семейства нелинейных задач.

§ 1. Краевая задача в полупространстве для уравнения теплопроводности. Понятие асимптотической устойчивости автомодельных решений

Рассмотрим задачу для линейного уравнения

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x > 0; \quad \sup u_0 < \infty, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u_1(t) > 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

Предполагается, что функция $u_0(x)$ Липшиц непрерывна в \mathbf{R}_+ . Здесь проводится анализ «безразмерного» уравнения (1) с коэффициентом теплопроводности $k_0 = 1$. Это нисколько не ограничивает общности результатов, так как перенормировкой времени $t \rightarrow k_0 t$ (или пространственной координаты $x \rightarrow k_0^{-1/2} x$) линейное уравнение $u_t = k_0 u_{xx}$, $k_0 = \text{const} > 0$, приводится к исходному. Тем самым в уравнении (1) переменные t, x также являются безразмерными величинами.

Как уже упоминалось, задача (1) — (3) моделирует процесс теплового воздействия на среду с постоянным коэффициентом теплопроводности. Наша цель — дать конкретное описание характера протекания процесса нагрева, определить закон движения тепловой волны, выяснить, как зависит ее глубина проникновения (полуширина) $x_{\text{эф}}(t)$ от времени* и каков пространственный профиль волны.

* Величина $x_{\text{эф}}(t)$ определяется в каждый момент времени $t > 0$ из равенства $u(t, x_{\text{эф}}(t)) = u(t, 0)/2$, т. е. это точка, в которой температура равна половине температуры на границе.

Решение сформулированной задачи выписывается в явном виде через тепловые потенциалы [128]:

$$u(t, x) = \frac{x}{2\pi^{1/2}} \int_0^t \exp\left\{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right\} \frac{u_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau + \\ + \frac{1}{2(\pi t)^{1/2}} \int_0^\infty \left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right\} \right] u_0(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Однако непосредственно выделить из (4) интересующие нас характеристики процесса не представляется возможным. Поэтому будем действовать другим способом.

1. Автомоделное решение. Рассмотрим граничный режим специального (степенного) вида:

$$u_1(t) = (1+t)^m, \quad t > 0, \quad (5)$$

где $m > 0$ — постоянная. При такой граничной функции уравнение (1) имеет подходящее автомоделное решение:

$$u_\lambda(t, x) = (1+t)^m \theta_\lambda(\xi), \quad \xi = x/(1+t)^{1/2}. \quad (6)$$

Подставляя решение (6) в (1), получаем для $\theta_\lambda(\xi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\theta_\lambda'' + \frac{1}{2} \theta_\lambda' \xi - m \theta_\lambda = 0, \quad \xi > 0. \quad (7)$$

Пусть

$$\theta_\lambda(0) = 1. \quad (8)$$

Тогда решение u_λ удовлетворяет краевому условию (3), (5). Учитывая условие ограниченности u_λ при $x \rightarrow \infty$ (см. (2)), потребуем выполнения неравенства $\theta_\lambda(\infty) < \infty$. Из уравнения (7) легко получить, что такое решение должно удовлетворять условию

$$\theta_\lambda(\infty) = 0. \quad (9)$$

Таким образом, проблема построения автомоделного решения (6) уравнения с частными производными свелась к краевой задаче (7)–(9) для значительно более простого обыкновенного дифференциального уравнения.

Решение задачи (7)–(9) существует, единственно, монотонно и строго положительно:

$$\theta_\lambda(\xi) = 2^{2m+1} \frac{\Gamma(1+m)}{\pi^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4}\right\} H_{-(2m+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad (10)$$

где $H_\nu(z)$ — функция Эрмита:

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty \exp\{-t^2 - 2zt\} t^{-(\nu+1)} dt \quad (11)$$

(специальная функция математической физики [137]). Функция

$\theta_A(\xi)$ быстро убывает при $\xi \rightarrow \infty$:

$$\theta_A(\xi) \sim \exp\{-\xi^2/4\}, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Построенное автомодельное решение (6) имеет простую пространственно-временную структуру. По виду решения легко определить зависимость от времени глубины проникновения (полуширины) тепловой волны:

$$x_{\text{эф}}^A(t) = \xi_{\text{эф}}(1+t)^{1/2}, \quad (13)$$

где постоянная $\xi_{\text{эф}} = \xi_{\text{эф}}(m)$ такова, что $\theta_A(\xi_{\text{эф}}) = \theta_A(0)/2 = 1/2$. Функция $\theta_A(\xi)$ характеризует при каждом $t > 0$ пространственную форму тепловой волны.

2. Сравнение с другими (неавтомодельными) решениями. В силу теоремы сравнения u_A мажорирует большое множество решений задачи (1)–(3).

Предложение 1. Пусть

$$u_1(t) \leq (1+t)^m, \quad t > 0; \quad u_0(x) \leq \theta_A(x), \quad x > 0. \quad (14)$$

Тогда решение задачи (1)–(3) удовлетворяет неравенству

$$u(t, x) \leq (1+t)^m \theta_A(x/(1+t)^{1/2}), \quad t > 0, \quad x > 0. \quad (15)$$

Тем самым при выполнении неравенств (14) мы имеем оценку сверху решения задачи, которая позволяет установить характер распределения в пространстве тепла, поступающего с границы. Пусть, например, граничный режим автомодельный:

$$u(t, 0) = (1+t)^m, \quad t > 0, \quad (16)$$

а начальное возмущение $u_0(x) \leq \theta_A(x)$ в \mathbf{R}_+ . Тогда в силу (15) $x_{\text{эф}}(t) \leq x_{\text{эф}}^A(t)$, т. е.

$$x_{\text{эф}}(t) \leq \xi_{\text{эф}}(m)(1+t)^{1/2}, \quad t > 0.$$

Неравенство (15) дает также определенную информацию и о пространственном профиле неавтомодельной тепловой волны.

3. Асимптотическая устойчивость автомодельного решения по отношению к возмущениям краевых данных. Рассмотрим другой аспект проблемы. Что будет, если ограничение на начальную функцию $u_0(x)$ в (14) не выполнены, например $u_0(x) \equiv 1$ в \mathbf{R}_+ (тогда в силу условия $\theta_A(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ неравенство $u_0(x) \leq \theta_A(x)$ не выполнено при всех достаточно больших $x > 0$). В этом случае автомодельное решение позволяет получить точные оценки пространственно-временной структуры тепловой волны, но, естественно, только при достаточно больших t . Ниже речь пойдет об асимптотической устойчивости автомодельного решения (6) по отношению к возмущениям начальной функции.

Пусть выполняется равенство (16). Введем в рассмотрение *автомодельное представление (автомодельную «обработку»)* решения задачи (1)–(3), определяемое в каждый момент времени

В соответствии с видом автомодельного решения (6):

$$\theta(t, \xi) = (1+t)^{-m} u(t, \xi(1+t)^{1/2}), \quad t > 0, \quad \xi > 0. \quad (17)$$

Это выражение устроено таким образом, что автомодельная обработка $u_A(t, x)$ дает в точности функцию $\theta_A(\xi)$.

Предложение 2. Пусть $u_1(t) = (1+t)^m, t > 0$. Автомодельное решение (6) асимптотически устойчиво по отношению к произвольным (ограниченным) возмущениям начальной функции: при любых $u_0(x)$

$$\begin{aligned} \|\theta(t, \cdot) - \theta_A(\cdot)\|_{C(\mathbb{R}_+)} &\equiv \sup_{\xi > 0} |\theta(t, \xi) - \theta_A(\xi)| = \\ &= O((1+t)^{-m}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Доказательство. Оно вытекает из принципа максимума. Положим $z = u - u_A$. Тогда z удовлетворяет уравнению

$$z_t = z_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

причем $z(t, 0) = 0, t > 0$, и $\sup_{x > 0} |z(0, x)| < \infty$. Из теоремы сравнения получаем

$$|z(t, x)| \leq M = \sup_{x > 0} |z(0, x)|, \quad t > 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$|\theta(t, \xi) - \theta_A(\xi)| \leq M(1+t)^{-m} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

при всех $\xi \geq 0$.

Таким образом, при любых начальных функциях решение задачи со степенным граничным режимом по истечении определенного времени становится весьма близким к автомодельному. Из (18) нетрудно вывести, например, асимптотически точное выражение глубины проникновения тепловой волны:

$$x_{\text{эф}}(t) = \xi_{\text{эф}}(m)t^{1/2} + o(t^{1/2}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (19)$$

которое при больших временах близко к автомодельному:

$$x_{\text{эф}}(t)/x_{\text{эф}}^A(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

При этом в силу (18) автомодельная функция $\theta_A(\xi)$ правильно характеризует профиль тепловой волны на развитой стадии процесса.

Этим не исчерпываются свойства построенного автомодельного решения. Оказывается, что оно является устойчивым и по отношению к малым возмущениям граничного режима. Общее утверждение об асимптотической устойчивости автомодельного решения (6) по отношению к возмущениям краевых данных выглядит следующим образом (оно доказывается так же, как предыдущее).

Предложение 3. Пусть

$$u_1(t)/(1+t)^m \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Тогда

$$\|\theta(t, \cdot) - \theta_A(\cdot)\|_{C(\mathbb{R}_+)} = O[\max\{t^{-m}, |1 - u_1(t)/t^m|\}] \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (21)$$

При выполнении (20) справедлива та же точная оценка (19) для глубины проникновения волны. Этот результат дает наглядное представление о характере протекания процесса нагрева при произвольных начальных возмущениях и граничных режимах, асимптотически близких в смысле (20) к степенной зависимости.

4. Асимптотическая устойчивость автомодельного решения по отношению к малым возмущениям уравнения. Покажем теперь, что пространственно-временная структура автомодельного решения сохранится при больших $t > 0$ в случае «малого нелинейного возмущения» исходного параболического уравнения теплопроводности.

Пусть достаточно гладкий коэффициент теплопроводности не является постоянным: $k = k(u) > 0$ при $u \geq 0$. Однако он близок к нему при больших температурах:

$$k(u) \rightarrow 1, \quad u \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Рассмотрим тот же процесс теплового воздействия, но на этот раз на нелинейную теплопроводящую среду:

$$u_t = (k(u)u_x)_x, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (23)$$

где $u(t, x)$ удовлетворяет краевым условиям (2), (3). Введем для удобства функцию

$$G_h(u) = \int_0^u [1 - k^{1/2}(\eta)]^2 d\eta, \quad u \geq 0.$$

Предложение 4. Пусть $u_1(t) = (1+t)^m$, $t > 0$; $u_0 \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $u_0(x)$ не возрастает по x и выполнено условие (22). Автомодельное решение (6) устойчиво по отношению к указанным возмущениям коэффициента теплопроводности, и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\theta(t, \cdot) - \theta_A(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 &\equiv \int_0^\infty [\theta(t, \xi) - \theta_A(\xi)]^2 d\xi = \\ &= O\left[(1+t)^{-2m-1/2} \max\left\{1, \int_0^t (1+\tau)^{m-1/2} G_h[(1+\tau)^m] d\tau\right\}\right] \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (24)$$

При выполнении условия (22) правая часть оценки (24) действительно стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, в чем нетрудно

убедиться, раскрывая неопределенности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t (1 + \tau)^{m-1/2} G_h [(1 + \tau)^m] d\tau}{(1 + t)^{2m+1/2}} =$$

$$= \frac{1}{2m + 1/2} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{G_h(s)}{s} = \frac{1}{2m + 1/2} \lim_{s \rightarrow \infty} (1 - k^{1/2}(s))^2 = 0.$$

Отметим, что сходимость $\theta(t, \cdot)$ к $\theta_\lambda(\cdot)$ при $t \rightarrow \infty$ в норме $L^2(\mathbf{R}_+)$ означает, в частности, поточечную сходимость почти всюду.

Доказательство. Функция $w = u - u_\lambda$ удовлетворяет в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ уравнению

$$w_t = [k(u)u_x - (u_\lambda)_x]_x, \quad (25)$$

причем $w(t, 0) \equiv 0$, $w(t, x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ (непосредственное следствие принципа максимума) и $w(0, \cdot) \in L^2(\mathbf{R}_+)$. Последнее обеспечивается требованием $u_0 \in L^2(\mathbf{R}_+)$; в силу (12) автомодельное решение $u_\lambda(t, \cdot)$ принадлежит $L^2(\mathbf{R}_+)$ при любых $m > 0$. Мы ограничимся формальным анализом уравнения (25).

Умножим скалярно в $L^2(\mathbf{R}_+)$ уравнение (25) на w и, убедившись, что это скалярное произведение имеет смысл, проведем в правой части интегрирование по частям, которое возможно в силу равномерной ограниченности производных u_x и $(u_\lambda)_x$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ и условия $w \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. В результате получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2 = -(w_x, k(u)u_x - (u_\lambda)_x).$$

Без труда проверяется справедливость тождества

$$\begin{aligned} -(u_x - (u_\lambda)_x)(k(u)u_x - (u_\lambda)_x) &= \\ &= -(k^{1/2}(u)u_x - (u_\lambda)_x)^2 + (1 - k^{1/2}(u))^2 u_x (u_\lambda)_x \equiv \\ &\equiv -(k^{1/2}(u)u_x - (u_\lambda)_x)^2 + \frac{\partial}{\partial x} G_h(u)(u_\lambda)_x, \end{aligned}$$

с помощью которого предыдущее равенство приводится к виду

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2 = -\|k^{1/2}(u)u_x - (u_\lambda)_x\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} G_h(u), (u_\lambda)_x \right).$$

В сделанных относительно $u_0(x)$ предположениях $u_x(t, x) \leq 0$ в \mathbf{R}_+ при всех $t > 0$ (следствие принципа максимума; см. § 1 гл. V). Учитывая теперь в последнем равенстве, что $(u_\lambda)_x < 0$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2 &\leq \left(\frac{\partial}{\partial x} G_h(u), (u_\lambda)_x \right) \leq \\ &\leq -\sup_x |(u_\lambda(t, x))_x| \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} G_h(u(t, x)) dx. \quad (26) \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$|(u_A(t, x))_x| \equiv (1+t)^{m-1/2} |\theta'_A(\xi)|,$$

причем $\sup |\theta'_A(\xi)| = q_A < \infty$. Тогда из (26) получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2 \leq q_A (1+t)^{m-1/2} G_k [(1+t)^m]. \quad (27)$$

Поскольку, как следует из (17),

$$\|w(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2 \equiv (1+t)^{2m+1/2} \|\theta(t, \cdot) - \theta_A(\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2,$$

из (27) непосредственно вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|\theta(t, \cdot) - \theta_A(\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2 &\leq \|u_0(\cdot) - \theta_A(\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2 (1+t)^{-2m-1/2} + \\ &+ 2q_A (1+t)^{-2m-1/2} \int_0^t (1+\tau)^{m-1/2} G_k [(1+\tau)^m] d\tau, \end{aligned}$$

которая совпадает с (24).

З а м е ч а н и е. Оценка (24) справедлива в случае достаточно произвольных (немонотонных по x) начальных функций $u_0 \in L^2(\mathbf{R}_+)$ таких, что $0 \leq u_0^- \leq u_0 \leq u_0^+$ в \mathbf{R}_+ , где u_0^\pm — монотонные функции, $u_0^\pm(0) = u_1(0)$. Тогда тем же способом выводятся оценки вида (24) автомодельных представлений $\theta^\pm(t, \xi)$ решений $u^\pm(t, x)$, удовлетворяющих начальным условиям $u^\pm|_{t=0} = u_0^\pm$ в \mathbf{R}_+ . Поэтому стабилизация $\theta(t, \xi) \rightarrow \theta_A(\xi)$ при $t \rightarrow \infty$ будет вытекать из неравенств $u^- \leq u \leq u^+$ (или, что то же самое, $\theta^- \leq \theta \leq \theta^+$) в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$.

Итак, автомодельное решение (6) правильно описывает при больших t свойства решений широкого класса квазилинейных параболических уравнений. При этом остается верной оценка (19) глубины проникновения тепловой волны, а функция $\theta_A(\xi)$ определяет ее пространственную форму при $t \rightarrow \infty$. По отношению к нелинейному уравнению (23) функция u_A будет приближенным автомодельным решением (u_A ему не удовлетворяет, но правильно описывает асимптотические свойства решения этого уравнения).

Таким образом, с помощью одного автомодельного решения (6) можно дать описание асимптотических свойств решений краевых задач, отвечающих различным краевым данным $u_0(x)$, $u_1(t)$ и различным уравнениям (в данном случае — с различными коэффициентами теплопроводности $k(u)$). Однако (4) допускает также другие автомодельные решения, например решение типа бегущей волны

$$u_A(t, x) = \exp\{t - x\}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (28)$$

для которого $u_1(t) = \exp\{t\}$. Нетрудно показать, что оно устойчиво по отношению к возмущениям начальной и граничной функций, а также к возмущениям уравнения, что позволяет асимпто-

тически точно решить другой класс краевых задач с граничными режимами экспоненциального вида.

В заключение отметим, что свойства автомодельных решений уравнения (1) (например, вида (6) или (28)) сохраняются и при более сильных возмущениях краевых режимов и уравнения по сравнению с указанными в (20) и (22) (см. § 4 гл. VI).

§ 2. Асимптотическая устойчивость фундаментального решения задачи Коши

В этом параграфе рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}; \quad u_0 \in C(\mathbf{R}), \quad (2)$$

где начальная функция u_0 обладает конечной энергией:

$$E_0 = \|u_0\|_{L^1(\mathbf{R})} < \infty, \quad E_0 > 0. \quad (3)$$

Тогда этим же свойством обладает решение задачи (1), (2) — его энергия не меняется со временем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) dx = E_0, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

В дальнейшем мы будем для простоты считать, что $u_0(x) = o(\exp\{-|x|^2\})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Ставятся те же вопросы: по каким законам происходит растекание начального теплового возмущения, как меняются со временем его амплитуда и ширина при $t \rightarrow \infty$?

Подчеркнем, что данная проблема в указанной постановке заметно отличается от рассмотренной в § 1. Здесь в отличие от краевой задачи не происходит «забывания» специфики начального возмущения, поскольку величина энергии E_0 в (4) (которая служит характеристикой функции u_0) играет существенную роль на асимптотической стадии процесса. Этот факт налагает дополнительные ограничения на методы исследования асимптотических свойств решения задачи (1), (2).

Уравнение (1) имеет в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ хорошо известное автомодельное (фундаментальное) решение:

$$u_A(t, x) = (1+t)^{-1/2} f_A(\xi), \quad \xi = x/(1+t)^{1/2}, \quad (5)$$

где

$$f_A(\xi) = \frac{E_0}{2\pi^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4}\right\}, \quad \xi \in \mathbf{R}. \quad (6)$$

Оно удовлетворяет закону сохранения (4).

Решение (5) реализуется лишь в том случае, когда начальная функция $u_0(x)$ также является автомодельной, т. е.

$$u_0(x) \equiv u_\Lambda(0, x) = \frac{E_0}{2\pi^{1/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4}\right\}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (7)$$

1. Устойчивость по отношению к возмущениям начальной функции. Анализ этой проблемы не очень сложен, поскольку существует представление решения задачи (1), (2) в виде теплового потенциала [128]:

$$u(t, x) = \frac{1}{2(\pi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4t}\right\} dy. \quad (8)$$

Для удобства введем в соответствии с пространственно-временной структурой решения (5) автомодельное представление решения задачи (1), (2):

$$f(t, \xi) = (1+t)^{1/2} u(t, \xi(1+t)^{1/2}), \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbf{R} \quad (9)$$

(подстановка решения (5) в (9) дает функцию $f_\Lambda(\xi)$).

Предложение 5. Автомодельное решение (5) устойчиво по отношению к произвольным возмущениям автомодельной начальной функции (7), оставляющим неизменной ее энергию: если выполнено (3), то имеет место поточечная сходимость:

$$f(t, \xi) \rightarrow f_\Lambda(\xi), \quad t \rightarrow \infty; \quad \xi \in \mathbf{R}. \quad (10)$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\xi = x/(1+t)^{1/2}$. Тогда с помощью (8) после элементарных преобразований получаем

$$f(t, \xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+t}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4}\right\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) \exp\left\{-\frac{\xi^2 + y^2 - 2\xi y(1+t)^{1/2}}{4t}\right\} dy.$$

Поскольку $u_0 \in L^1(\mathbf{R})$ удовлетворяет условию (3), интеграл в правой части стремится к E_0 при $t \rightarrow \infty$. Это означает выполнение (10).

Что следует из полученного результата? Во-первых, амплитуда теплового возмущения меняется при больших временах по закону

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} u(t, x) \simeq \frac{E_0}{2\pi^{1/2}} t^{-1/2}, \quad t \rightarrow \infty,$$

и соответственно ширина тепловой неоднородности

$$x_{\text{эф}}(t) \simeq 2(\ln 2)^{1/2} t^{1/2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

2. Устойчивость по отношению к нелинейным возмущениям уравнения. Здесь мы используем автомодельное решение (5) для

исследования нелинейного уравнения теплопроводности

$$u_t = (k(u)u_x)_x, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Поскольку в задаче Коши (1), (2) амплитуда решения $u_m(t) \equiv \sup_x u(t, x)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, асимптотические свойства решения $u(t, x)$ зависят от характера поведения коэффициента $k(u)$ при малых температурах $u > 0$.

Ниже будет установлена устойчивость автомодельного решения (5) уравнения теплопроводности по отношению к следующим возмущениям постоянного коэффициента: $k \in C^2((0, \infty)) \cap C(\{0, \infty\})$, $k(u) > 0$, $k'(u) > 0$ при $u > 0$,

$$[k(u)/k'(u)]' \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow 0, \quad (12)$$

и, кроме того,

$$\lim_{u \rightarrow 0} [k(\xi u)/k(u)] = 1, \quad \xi > 0. \quad (13)$$

Этим условиям удовлетворяет, например, коэффициент

$$k(u) = |\ln u|^{-\alpha}, \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad u \in (0, 1/2), \quad (14)$$

который существенно отличается при $u \rightarrow 0$ от коэффициента $k \equiv 1$. Тем не менее асимптотические свойства решения уравнения (11) можно описать с помощью фундаментального решения (5), преобразуя его специальным образом. Тем самым, проблема устойчивости автомодельного решения относительно нелинейных возмущений уравнения (1) рассматривается здесь в новой (по сравнению с § 1) постановке. Одновременно будет доказана устойчивость u_λ по отношению к малым возмущениям коэффициента теплопроводности, когда $k(u) \rightarrow 1$ при $u \rightarrow 0^+$

Помимо (14) всем условиям удовлетворяют также коэффициенты $k(u) = [|\ln |\ln u||]^{-\alpha}$, $\alpha > 0$; $k(u) = \exp\{-|\ln u|^\alpha\}$, $\alpha \in (0, 1)$, и т. п.

Уравнение (11) с произвольной пелипейностью не имеет автомодельного решения, описывающего «расплывание» начального возмущения в задаче Коши. Поэтому мы будем искать *приближенное автомодельное решение* u_a , которое не удовлетворяет уравнению (11):

$$u_a(t, x) = \frac{1}{\varphi(t)} f_A(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)}, \quad (15)$$

где $\varphi(t)$ — монотонно возрастающая положительная функция, $\varphi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, а $f_A(\xi)$ — функция (6) (именно через нее осуществляется связь п. а. р. с фундаментальным решением (5)). Функция u_a удовлетворяет закону сохранения энергии (3).

Главная проблема — определить функцию $\varphi(t)$ в (15), зависящую от поведения $k(u)$ при малых температурах. Она дает одновременно и закон падения амплитуды:

$$u_m(t) \simeq \frac{E_0}{\varphi(t)} \frac{1}{2\pi^{1/2}}, \quad t \rightarrow \infty,$$

и закон изменения ширины теплового возмущения:

$$x_{\text{эф}}(t) \simeq 2(\ln 2)^{1/2} \varphi(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Введем, как обычно, автомодельное представление решения задачи (11), (2)

$$\theta(t, \zeta) = \varphi(t) u(t, \zeta \varphi(t)).$$

Доказательство сходимости $\theta(t, \zeta)$ к $f_{\Lambda}(\zeta)$ (которая устанавливает близость асимптотических свойств решения задачи и п. а. р. (15)) удобно провести, рассматривая функции $u(t, \cdot)$ как элементы гильбертова пространства $h^{-1}(\mathbf{R})$. К нему относятся все функции $w \in L^1(\mathbf{R})$, удовлетворяющие условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 0, \quad \int_x^{\infty} w(y) dy \in L^2(\mathbf{R}), \quad (16)$$

$$\left| \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} w(y) dy \right| < \infty, \quad \left| \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^x w(y) dy \right| < \infty. \quad (17)$$

В этом пространстве обычным образом можно ввести скалярное произведение

$$(v, w)_{-1} = (v, (-d^2/dx^2)^{-1}w),$$

где функция $W = (-d^2/dx^2)^{-1}w$ является решением задачи $d^2W/dx^2 = -w$, $x \in \mathbf{R}$; $|W(\pm\infty)| < \infty$. Нетрудно проверить, что в силу (16) и (17) решение этой задачи существует. Через $\|\cdot\|_{h^{-1}(\mathbf{R})}$ обозначим норму в $h^{-1}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} \|w\|_{h^{-1}(\mathbf{R})} &= (w, w)_{-1}^{1/2} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \left[\left(-\frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} w \right](x) dx \right\}^{1/2} \equiv \\ &= \left\| \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} w \right\|_{L^2(\mathbf{R})} = \left\| \int_x^{\infty} w(y) dy \right\|_{L^2(\mathbf{R})}. \end{aligned}$$

Предложение 6. Пусть выполняются условия (12), (13), u_0 удовлетворяет (3), причем $u_0(\cdot) - f_{\Lambda}(\cdot) \in h^{-1}(\mathbf{R})$. Тогда $\varphi(t) = [1 + \mu^{-1}(t)]^{1/2}$ при всех достаточно больших $t > 0$, где через μ^{-1} обозначена функция, обратная к монотонно возрастающей функции

$$\mu(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{k[(1+\tau)^{-1/2}]} \simeq \frac{1+t}{k[(1+t)^{-1/2}]}, \quad t \rightarrow \infty.$$

При этом решение задачи (11), (2) сходится к п. а. р. (15):

$$\|\theta(t, \cdot) - f_{\Lambda}(\cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R})} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Сделаем в задаче (11), (2) преобразование $t \rightarrow \mu(t)$. Тогда *)

$$\varphi(\mu(t)) = (1+t)^{1/2},$$

и $u(\mu(t), x)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = \mu'(t) (k(u) u_x)_x.$$

При этом п. а. р. (15) преобразуется в функцию (5), т. е.

$$u_a(\mu(t), x) \equiv u_a(t, x) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Положим $w(t, x) = u(\mu(t), x) - u_a(\mu(t), x)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t, x) dx = 0, \quad t > 0$$

(так как u и u_a имеют по предположению одинаковые энергии) и $w \in h^{-1}(\mathbb{R})$ при всех $t \geq 0$. Функция w удовлетворяет уравнению

$$w_t = [\mu'(t) k(u) u_x - (u_a)_x]_x.$$

Умножая его скалярно на $(-d^2/dx^2)^{-1}w$ и производя справа интегрирование по частям, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{h^{-1}(\mathbb{R})}^2 = \left(\mu'(t) k(u) u_x - (u_a)_x, \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} w \right). \quad (18)$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} & (\mu'(t) k(u) u_x - (u_a)_x, (d/dx)^{-1} (u - u_a)) \equiv \\ & \equiv -\mu'(t) (F(u) - F(u_a), u - u_a) + ((\mu'(t) k(u_a) - 1) (u_a)_x, (d/dx)^{-1} w), \end{aligned}$$

где $F(u) = \int_0^u k(\eta) d\eta$. Поскольку первый член в правой части неположителен, оценивая второй с помощью неравенства Коши — Буняковского, из (18) получаем

$$\frac{d}{dt} \|w\|_{h^{-1}(\mathbb{R})} \leq \|[\mu'(t) k(u_a) - 1] (u_a)_x\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Отсюда (см. доказательство предложения 4)

$$\begin{aligned} \|w(t, \cdot)\|_{h^{-1}(\mathbb{R})} & \leq \|w(0, \cdot)\|_{h^{-1}(\mathbb{R})} + \\ & + (2q_A)^{1/2} \int_0^t (1+\tau)^{-1/2} H^{1/2} (f_A(0) (1+\tau)^{-1/2}; \tau) d\tau, \quad (19) \end{aligned}$$

$$q_A = \sup |f'_A(\xi)| < \infty,$$

*) Для доказательства достаточно, чтобы это равенство было выполнено при больших $t > 0$.

где функция H имеет вид

$$H(s; t) = \int_0^s (\mu'(t) k(\eta) - 1)^2 d\eta.$$

Учитывая, что

$$\|w(t, \cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R})} \equiv (1+t)^{1/4} \|\theta(\mu(t), \cdot) - f_A(\cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R})},$$

из (19) выводим оценку

$$\begin{aligned} \|\theta(\mu(t), \cdot) - f_A(\cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R})} &\leq (1+t)^{-1/4} \|w(0, \cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R})} + \\ &+ (2q_A)^{1/2} (1+t)^{-1/4} \int_0^t (1+\tau)^{-1/2} H^{1/2}(f_A(0)(1+\tau)^{-1/2}; \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Последовательно раскрывая в правой части возникающие неопределенности, с помощью равенства

$$\mu'(t) = 1/k[(1+t)^{-1/2}], \quad t \rightarrow \infty,$$

получаем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta(\mu(t), \cdot) - f_A(\cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R})}^2 &\leq \\ &\leq 32q_A \lim_{t \rightarrow \infty} (1+t)^{1/2} \int_0^{f_A(0)(1+t)^{-1/2}} [\mu'(t) k(\eta) - 1]^2 d\eta = \\ &= 32q_A \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{f_A(0)} \left\{ \frac{k[\zeta(1+t)^{-1/2}]}{k[(1+t)^{-1/2}]} - 1 \right\}^2 d\zeta = 0. \end{aligned}$$

Сходимость к п. а. р. вытекает из условия (13).

З а м е ч а н и е. Если в дополнение к (12), (13) потребовать выполнение условия $k(u)/k(uk^{1/2}(u)) \rightarrow 1$ при $u \rightarrow 0$, то справедливо асимптотически точное равенство

$$\varphi(t) \cong (1+t)^{1/2} k^{1/2} [(1+t)^{-1/2}], \quad t \rightarrow \infty.$$

Оно, в частности, имеет место для коэффициента (14).

П р и м е р 1. Пусть $k(u) = |\ln u|^{-\alpha}$ при малых $u > 0$, $\alpha = \text{const} > 0$. Условия (12), (13), как уже отмечалось, выполнены. Из предложения 6 в этом случае получаем

$$\varphi(t) \cong 2^{\alpha/2} t^{1/2} \ln^{-\alpha/2} t, \quad t \rightarrow \infty, \quad (21)$$

и поэтому п. а. р. (15), к которому сходится решение задачи (11), (2) (u_0 удовлетворяет (3)), имеет вид

$$u_a(t, x) \cong \left(2^{\alpha+2} \pi \frac{t}{\ln^\alpha t} \right)^{-1/2} E_0 \exp \left\{ - \frac{x^2}{2^{\alpha+2} t \ln^{-\alpha} t} \right\},$$

где $E_0 = \|u_0\|_{L^1(\mathbf{R})} < \infty$. Отсюда получаем оценку амплитуды

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} u(t, x) \cong u_a(t, 0) \cong (2^{\alpha+2} \pi)^{-1/2} E_0 (\ln^\alpha t/t)^{1/2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Оценку эффективной ширины тепловой неоднородности при больших временах дает (21).

В следующем параграфе мы переходим к анализу автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности.

§ 3. Асимптотическая устойчивость автомодельных решений уравнений нелинейной теплопроводности

Рассмотрим сначала встречавшийся в гл. I пример автомодельного решения, существующего при произвольных коэффициентах $k(u) \geq 0$.

1. Автомодельное решение с постоянной температурой на границе. На этом примере удобнее всего выделить одно из основных свойств автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности — асимптотическую устойчивость по отношению к возмущениям начальной функции.

Рассмотрим, как и в § 1, краевую задачу в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ для уравнения

$$u_t = (k(u) u_x)_x \quad (1)$$

($k(u) > 0$ при $u > 0$ — достаточно гладкая функция) с условиями

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x > 0; \quad u_0 \in C(\mathbf{R}_+), \quad (2)$$

$$u(t, 0) = 1, \quad t > 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) при произвольных $k(u)$ допускает автомодельное решение, удовлетворяющее условию (3):

$$u_A(t, x) = g_A(\zeta), \quad \zeta = x/(1+t)^{1/2}, \quad (4)$$

где $g_A(\zeta)$ — решение задачи

$$(k(g_A) g_A')' + \frac{1}{2} g_A' \zeta = 0, \quad \zeta > 0, \quad g_A(0) = 1, \quad g_A(\infty) = 0, \quad (5)$$

причем оно финитно или не финитно в зависимости от того, допускает ли уравнение (1) конечную скорость распространения возмущений или нет.

Далее ограничимся анализом случая, когда коэффициент k удовлетворяет условию конечной скорости распространения возмущений:

$$\int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta < \infty,$$

и в качестве $g_A(\zeta)$ возьмем финитное решение задачи (5). Функцию u_0 в (2) также будем считать финитной.

Наличие автомодельного решения вида (4) связано с инвариантностью уравнения (1) при произвольном $k(u)$ относительно преобразований $t \rightarrow t/\alpha$, $x \rightarrow x/\alpha^{1/2}$; $\alpha > 0$. Тем самым, если $u(t, x)$ — решение, то $u(t/\alpha, x/\alpha^{1/2})$ — также решение. Попробуем найти решение, инвариантное относительно данных преоб-

разовании, т. е. такое, что $u(t, x) \equiv u(t/\alpha, x/\alpha^{1/2})$ при всех $\alpha > 0$. Полагая в последнем равенстве $\alpha = t$, получаем $u(t, x) \equiv u(1, x/t^{1/2})$. Обозначая $u(1, \xi)$ через $g_A(\xi)$ и используя замену $t \rightarrow 1+t$, не меняющую уравнения, приходим к (4).

Очевидно, что (4) является решением исходной задачи (1) — (3) только в том случае, когда $u_0 \equiv u_A(0, x) = g_A(x)$. Ниже будет показано, что при любых возмущениях финитной начальной функции $u_0(x)$ асимптотическое поведение при больших t решения $u(t, x)$ описывается автомодельным решением u_A . Тем самым закон движения полуплоскости автомодельной температурной волны, определяемый из (4):

$$x_{\text{эф}}^A(t) = \xi_{\text{эф}}(1+t)^{1/2}, \quad t > 0 \quad (g_A(\xi_{\text{эф}}) = 1/2), \quad (6)$$

сохраняется при $t \rightarrow \infty$ для других решений уравнения (1). Поэтому скорость движения волны по характеру зависимости от времени одна и та же для всех уравнений (1) с достаточно произвольным коэффициентом теплопроводности. Формулы (6) при различных коэффициентах $k(u)$ отличаются друг от друга только величиной постоянной $\xi_{\text{эф}}$, которая, разумеется, зависит от вида $k(u)$.

Введем автомодельное представление решения задачи:

$$g(t, \xi) = u(t, \xi(1+t)^{1/2})$$

и покажем, что $g(t, \xi) \rightarrow g_A(\xi)$ при $t \rightarrow \infty$. Это гарантирует близость основных свойств решений $u(t, x)$ и $u_A(t, x)$ при больших t , в частности справедливость для $u(t, x)$ оценки (6) при $t \rightarrow \infty$. Асимптотическую устойчивость автомодельного решения в этом случае удобно доказать в норме пространства $h^{-1}(\mathbf{R}_+)$.

К гильбертову пространству $h^{-1}(\mathbf{R}_+)$ отнесем функции $v(x) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, удовлетворяющие условиям

$$\int_x^\infty v(y) dy \in L^2(\mathbf{R}_+), \quad \left| \int_0^\infty dx \int_x^\infty v(y) dy \right| < \infty. \quad (7)$$

Скалярное произведение в $h^{-1}(\mathbf{R}_+)$ имеет вид

$$(v, w)_{-1} = \int_0^\infty v(x) \left[\left(-\frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} w \right] (x) dx, \quad (8)$$

где через $W = (-d^2/dx^2)^{-1} w$ обозначено решение задачи

$$d^2 W/dx^2 = -w, \quad x > 0; \quad W(0) = 0, \quad |W(\infty)| < \infty.$$

Нетрудно проверить, что при выполнении (7) решение этой задачи существует и единственно:

$$W(x) = \int_0^x dy \int_y^\infty w(z) dz, \quad x \geq 0.$$

Норма в $h^{-1}(\mathbf{R}_+)$ определяется в соответствии с (8):

$$\|w\|_{h^{-1}(\mathbf{R}_+)} = (w, w)_{-1}^{1/2}$$

т. е.

$$\|w\|_{h^{-1}(\mathbf{R}_+)} \equiv \left\| \left(-\frac{d}{dx} \right)^{-1} w \right\|_{L^2(\mathbf{R}_+)} = \left\| \int_x^\infty w(y) dy \right\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}$$

В норме $h^{-1}(\mathbf{R}_+)$ сходимость $g(t, \cdot)$ к $g_A(\cdot)$ доказывается особенно просто (естественно, она имеет место и в более сильных нормах; см. библиографические замечания). Сходимость в $h^{-1}(\mathbf{R}_+)$ означает, в частности, поточечную сходимость почти всюду.

Предложение 7. Пусть $u_0(x)$ — финитная функция. Тогда

$$\|g(t, \cdot) - g_A(\cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R}_+)} = O((1+t)^{-3/4}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Функция $z = u - u_A$ удовлетворяет уравнению

$$z_t = [k(u)u_x - k(u_A)(u_A)_x]_x, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (9)$$

причем $z(t, 0) = 0$, $z(t, x)$ — финитная по x функция и $z(t, \cdot) \in h^{-1}(\mathbf{R}_+)$ при всех $t \geq 0$. Умножив уравнение (9) скалярно в $h^{-1}(\mathbf{R}_+)$ на z , после интегрирования по частям приходим к равенству

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_{h^{-1}(\mathbf{R}_+)}^2 = -(F(u) - F(u_A), u - u_A), \quad (10)$$

где

$$F(u) = \int_0^u k(\eta) d\eta$$

есть монотонно возрастающая функция. Поэтому $(F(u) - F(u_A), u - u_A) \geq 0$, и тогда из (10) получаем

$$\|z(t, \cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R}_+)} \leq \|z(0, \cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R}_+)} \equiv \|u_0(\cdot) - g_A(\cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R}_+)}$$

при всех $t > 0$. Поскольку в силу (4) и способа определения автомодельного представления $g(t, \xi)$ справедливо тождество

$$\|z(t, \cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R}_+)} \equiv (1+t)^{3/4} \|g(t, \cdot) - g_A(\cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R}_+)},$$

получаем искомую оценку скорости сходимости:

$$\|g(t, \cdot) - g_A(\cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R}_+)} \leq \|z(0, \cdot)\|_{h^{-1}(\mathbf{R}_+)} (1+t)^{-3/4}.$$

Об асимптотической устойчивости автомодельного решения (4) по отношению к возмущениям коэффициента k здесь, естественно, говорить не приходится, так как для каждого k существует свое решение типа (4).

2. Уравнение нелинейной теплопроводности со степенным коэффициентом. В этом пункте рассматриваются некоторые автомодельные решения краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения:

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x, \quad t > 0, \quad x > 0; \quad \sigma = \text{const} > 0, \quad (11)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x > 0; \quad u_0^{\sigma+1} \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad (12)$$

$$u(t, 0) = u_1(t) > 0, \quad t > 0, \quad (13)$$

где граничный режим является существенно нестационарным: $u_1(t)$ неограниченно возрастает при увеличении t . Некоторые примеры обобщенных автомодельных решений этой задачи рассматривались в предыдущей главе.

Предварительно заметим, что уравнение с коэффициентом теплопроводности $k(u) = k_0 u^\sigma$, где $k_0 > 0$ — постоянная, имеющая, вообще говоря, физическую размерность (в (11) предполагается, что $k_0 = 1$), приводится к безразмерному виду заменой $t \rightarrow k_0 t$.

2.1. Степенной граничный режим. Пусть так же, как в § 1,

$$u_1(t) = (1+t)^m, \quad t > 0; \quad m = \text{const} > 0.$$

Тогда уравнение (11) имеет автомодельное решение следующего вида:

$$u_\Lambda(t, x) = (1+t)^m \theta_\Lambda(\xi), \quad \xi = x/(1+t)^{(1+m\sigma)/2}, \quad (14)$$

что можно связать с его инвариантностью относительно преобразований

$$t \rightarrow t/\alpha, \quad x \rightarrow x/\alpha^{(1+m\sigma)/2}, \quad u \rightarrow \alpha^m u; \quad \alpha > 0 \quad (15)$$

(если u инвариантно, т. е. $u(t, x) \equiv \alpha^m u(t/\alpha, x/\alpha^{(1+m\sigma)/2})$), то, полагая $\alpha = t$, а затем делая замену $t \rightarrow 1+t$, приходим к выражению (14).

Функция $\theta_\Lambda \geq 0$ в (14) удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению, которое получается после подстановки выражения (14) в (11):

$$(\theta_\Lambda^\sigma \theta_\Lambda')' + \frac{1+m\sigma}{2} \theta_\Lambda' \xi - m\theta_\Lambda = 0, \quad \xi > 0, \quad (16)$$

причем, как следует из постановки исходной задачи и пространственно временной структуры решения (14), должны быть выполнены краевые условия

$$\theta_\Lambda(0) = 1, \quad \theta_\Lambda(\infty) = 0. \quad (17)$$

Обобщенное решение задачи (16), (17) существует, единственно и является фипитной функцией. В этом нетрудно убедиться, переходя от (16) к уравнению первого порядка (см. гл. III) или доказывая сначала локальную разрешимость уравнения вблизи точки вырождения и затем продолжая полученное решение вплоть до точки $\xi = 0$ («пристрелка» первого краевого

условия (17) проводится на основе преобразования подобия, составляющего неизменным уравнение (16)). При $m = 1/\sigma$ задача (16), (17) имеет очевидное обобщенное решение $\theta_A(\xi) = [(1 - \sigma^{1/2}\xi)_+]^{1/\sigma}$. В этом случае $u_A = (1+t)^{1/\sigma}\theta_A(\xi)$, $\xi = x/(1+t)$, и поэтому автомодельное решение есть не что иное, как бегущая волна, рассмотренная в примере 6 гл. I.

Глубина проникновения тепловой волны, описываемой автомодельным решением (14), зависит от времени:

$$x_{\text{эф}}^A(t) = \xi_{\text{эф}}(1+t)^{(1+m\sigma)/2}, \quad t > 0; \quad \theta_A(\xi_{\text{эф}}) = 1/2. \quad (18)$$

Волна движется с большей скоростью, чем в среде с постоянной теплопроводностью и тем же граничным режимом (§ 1), поскольку в (11) коэффициент теплопроводности — растущая функция температуры. С такой же скоростью движется фронт тепловой волны (точка, в которой u_A обращается в нуль) $x_{\text{ф}}^A(t) = \xi_{\text{ф}}(1+t)^{(1+m\sigma)/2}$, где $\xi_{\text{ф}} = \text{mes sup} \theta_A < \infty$. Схематически эволюция автомодельного процесса нагрева изображена на рис. 6. Траектория движения полуширины тепловой волны обозначена штриховой линией.

Так же как в § 1, это автомодельное решение асимптотически устойчиво по отношению к малым возмущениям функций $u_0(x)$, $u_1(t)$, $k(u)$, входящих в формулировку задачи (о технике доказательства таких утверждений см. в гл. VI, § 3, 4).

Поэтому формула (18) для полуширины асимптотически справедлива для широкого класса квазилинейных уравнений (1) с коэффициентами $k(u)$ нестепенного вида, близкими к u^σ при $u \rightarrow \infty$.

2. Экспоненциальный граничный режим. Другое асимптотически устойчивое автомодельное решение уравнения (11) существует в том случае, когда $u_1(t) = e^t$ при $t > 0$. Здесь u_A имеет вид

$$u_A(t, x) = e^t f_A(\eta), \quad \eta = x/\exp\{\sigma t/2\}. \quad (19)$$

Функция $f_A \geq 0$ удовлетворяет краевой задаче

$$(f_A' f_A') + \frac{\sigma}{2} f_A' \eta - f_A = 0, \quad \eta > 0, \quad f_A(0) = 1, \quad f_A(\infty) = 0, \quad (19')$$

разрешимость которой доказывается так же, как аналогичной задачи для степенных режимов. Характер движения тепловой волны здесь приблизительно такой же, как и на рис. 6, с той лишь разницей, что полуширина волны за счет более интенсивного экспоненциального граничного воздействия растет со

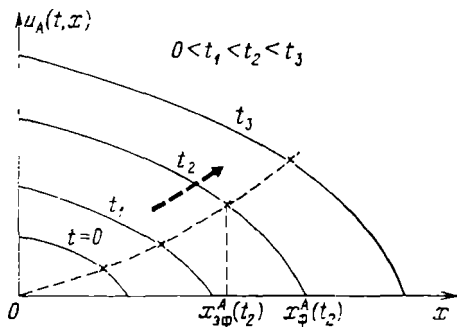


Рис. 6. Эволюция автомодельного решения (14) ($m > 0$, $\sigma > 1$)

временем быстрее степени:

$$x_{\text{ф}}^{\Delta}(t) = \eta_{\text{ф}} \exp\{\sigma t/2\}, \quad t > 0 \quad (f_A(\eta_{\text{ф}}) = 1/2).$$

За счет асимптотической устойчивости автомодельного решения (19) эта оценка имеет место при больших t для широкого класса неавтомодельных решений. То же самое относится к закону движения точки фронта тепловой волны:

$$x_{\text{ф}}^{\Delta}(t) = \eta_{\text{ф}} \exp\{\sigma t/2\}, \quad t > 0; \quad \eta_{\text{ф}} = \text{mes sup} f < \infty$$

(если возмущенное уравнение допускает конечную скорость распространения возмущений и $u_0(x)$ — финитная функция).

Анализ автомодельных решений выявляет естественную с физической точки зрения закономерность: чем выше интенсивность граничного режима, тем больше скорость движения возникающей температурной волны. Если режим степенной (решение (14)), то и глубина проникновения — степенная функция; если режим экспоненциальный (он при $t \rightarrow \infty$ интенсивнее любого степенного), то закон движения полуширины — экспоненциальная функция. Возникает вопрос: существуют ли такие граничные режимы, которым отвечают тепловые волны, движущиеся по более медленным законам? Они есть, причем одному из них соответствует простое автомодельное решение.

2.3. Степенной граничный режим с обострением. Локализация тепла. Пусть на границе $x=0$ задан закон изменения температуры в режиме с обострением:

$$u_1(t) = (T_0 - t)^{-1/\sigma}, \quad 0 < t < T_0, \quad (20)$$

где $0 < T_0 < \infty$ — постоянная (время обострения). Граничная функция в (20) возрастает до бесконечности в течение ограниченного промежутка времени: $u_1(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$. Этому режиму отвечает автомодельное решение уравнения (11) необычного вида — *остановившаяся тепловая волна*:

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-1/\sigma} [(1 - x/x_0)_+]^{2/\sigma}, \quad (21)$$

где $x_0 = [2(\sigma + 2)/\sigma]^{1/2}$. Положение точки фронта волны в (21) $x_{\text{ф}}(t) \equiv x_0$ не меняется в течение всего времени обострения $t \in (0, T_0)$, и тепловые возмущения из области локализации $x \in (0, x_0)$ не распространяются в окружающее холодное пространство, несмотря на то что всюду в области $(0, x_0)$ температура неограниченно возрастает при $t \rightarrow T_0^-$.

Примерное изображение такого процесса нагрева (локализация тепла в S-режиме) приведено на рис. 7, который показывает принципиальное отличие результатов воздействия на нелинейную среду граничного режима с обострением (20) по сравнению с обычными режимами (см. рис. 6). Глубина проникновения локализованной волны, так же как и положение точки фронта, не меняется со временем; как следует из (21), $x_{\text{ф}}^{\Delta}(t) \equiv x_0(1 - 2^{-\sigma/2})$, $0 < t < T_0$.

Автомодельное решение (21) асимптотически устойчиво. В гл. V будет показано, что эффект локализации тепловых граничных режимов с обострением существует в произвольных нелинейных средах, описываемых параболическими уравнениями теплопроводности общего вида.

Важно отметить, что не всякий граничный режим с обострением обеспечивает локализацию теплового воздействия. Например, если взять другой степенной режим:

$$u_1(t) = (T_0 - t)^n, \quad 0 < t < T_0, \quad (22)$$

где $n < -1/\sigma$ (в (20) $n = -1/\sigma$), то локализации нет. Режиму (22) отвечает автомодельное решение

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^n \theta_A(\xi), \quad (23)$$

$$\xi = x / (T_0 - t)^{(1+n\sigma)/2},$$

где $\theta_A \geq 0$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению. При $n < -1/\sigma$ функция $\theta_A(\xi)$ финитна, $\xi_\Phi = \text{mes sup} \theta_A < \infty$ (см. гл. III). Тогда, как следует из (23), точка фронта тепловой волны движется по закону

$$x_\Phi^\Delta(t) = \xi_\Phi (T_0 - t)^{(1+n\sigma)/2},$$

причем $x_\Phi^\Delta(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$.

Эволюция тепловой волны здесь в принципе не отличается от приведенной на рис. 6, однако нагрев всего полупространства $\{x > 0\}$ до сколь угодно большой температуры осуществляется за конечное время обострения ($u_A(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$ для всех $x \geq 0$). Граничный режим (22) при $n < -1/\sigma$ называется *HS-режимом с обострением*.

Напротив, если в (22) $n \in (-1/\sigma, 0)$, то это *LS-режим с обострением*, приводящий к локализации теплового воздействия. Более того, как видно из пространственно-временной структуры автомодельного решения (23) (которое существует при любых $n < 0$), неограниченное возрастание температуры при $t \rightarrow T_0^-$ наблюдается только в одной точке $x = 0$; всюду в полупространстве $\{x > 0\}$ она ограничена сверху равномерно по $t \in (0, T_0)$. Об этом, в частности, свидетельствует закон движения полуширины тепловой волны:

$$x_{\Phi}^\Delta(t) = \xi_{\Phi} (T_0 - t)^{(1+n\sigma)/2}, \quad t \in (0, T_0),$$

где постоянная $\xi_{\Phi} \in \mathbb{R}_+$ такова, что $\theta_A(\xi_{\Phi}) = 1/2$. Для $n \in (-1/\sigma, 0)$ имеем $x_{\Phi}^\Delta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow T_0^-$, т. е. полуширина (в определенном смысле — глубина проникновения) тепловой

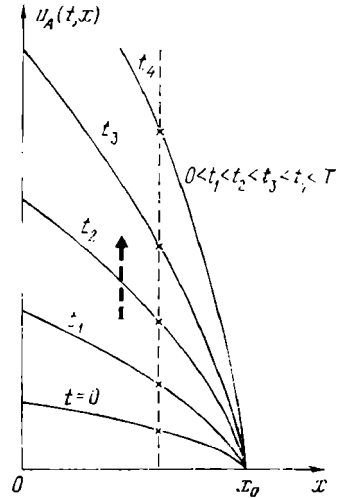


Рис. 7. Эволюция при $t \rightarrow T_0^-$ локализованного автомодельного решения (21) (S-режим с обострением)

волны в ходе процесса нагрева уменьшается вплоть до нуля. Подробный анализ эффекта локализации в краевых задачах для уравнений теплопроводности проводится в гл. III (для уравнения (11) при $\sigma \geq 0$) и в гл. V (для произвольных уравнений нелинейной теплопроводности).

Уравнение (11) имеет ряд других интересных автомодельных решений (см. библиографические замечания).

§ 4. Квазилинейное уравнение теплопроводности в ограниченной области

Здесь рассматриваются другие задачи для уравнения нелинейной теплопроводности в многомерном случае:

$$u_t = \Delta u^{\sigma+1}, \quad \sigma = \text{const} > 0. \quad (1)$$

Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть в Ω задано некоторое начальное температурное возмущение

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega; \quad u_0^{\sigma+1} \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega). \quad (2)$$

1. Краевая задача с условием Дирихле. Пусть на границе $\partial\Omega$ области Ω поддерживается нулевая температура:

$$u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (3)$$

что соответствует наличию оттока тепла с границы (тепловой процесс с адиабатическим условием «непротекания» на границе рассматривается в п. 2).

Очевидно, что $u(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ всюду в Ω , так как с границы тепло отводится. По какому закону будет эволюционировать начальное возмущение? С какой скоростью будет происходить процесс остывания?

На эти вопросы позволяет ответить анализ автомодельного решения, которое допускает уравнение (1):

$$u_A(t, x) = (T + t)^{-1/\sigma} f_A(x), \quad t > 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (4)$$

Здесь $T > 0$ — произвольная постоянная.

Подставляя это выражение в (1) и учитывая граничное условие, получаем для $f_A \geq 0$ следующую эллиптическую задачу:

$$\Delta f_A^{\sigma+1} + \frac{1}{\sigma} f_A = 0, \quad x \in \Omega; \quad f(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (5)$$

При любом $\sigma > 0$ она имеет единственное строго положительное в Ω решение (существование решения можно установить, например, путем построения верхнего и нижнего решений задачи; см. [168, 178]).

Оказывается, (4) устойчиво по отношению к произвольным ограниченными возмущениям начальной функции $u_0(x)$, т. е. при $t \rightarrow \infty$ выражение (4) правильно описывает эволюцию любого

температурного возмущения. Не останавливаясь на этом подробно, ограничимся доказательством простого утверждения.

Для описания асимптотики решения введем, как обычно, автомодельное представление решения задачи (1)–(3) по формуле

$$f(t, x) = (1+t)^{1/\sigma} u(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Устойчивость автомодельного решения (4) будет означать, что $f(t, x) \rightarrow f_A(x)$ в Ω при $t \rightarrow \infty$.

Предложение 8. Пусть начальная функция $u_0(x)$ в (2) такова, что

$$T_2^{-1/\sigma} f_A(x) \leq u_0(x) \leq T_1^{-1/\sigma} f_A(x), \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

где $0 < T_1 < T_2 < \infty$ — постоянные. Тогда

$$\|f(t, \cdot) - f_A(\cdot)\|_{C(\Omega)} = O(t^{-1}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Доказательство. Справедливость (8) следует из теоремы сравнения. Действительно, в силу (7)

$$(T_2 + t)^{-1/\sigma} f_A(x) \leq u(t, x) \leq (T_1 + t)^{-1/\sigma} f_A(x) \quad \text{в } \mathbf{R}_+ \times \Omega. \quad (9)$$

Отсюда непосредственно вытекает (8).

Таким образом, при выполнении условий (7) амплитуда температурного возмущения уменьшается по закону

$$\sup_{x \in \Omega} u(t, x) = \left(\sup_{x \in \Omega} f_A(x) \right) t^{-1/\sigma} + o(t^{-1/\sigma}), \quad t \rightarrow \infty,$$

причем максимальное значение температуры достигается там, где $f_A(x)$ имеет точку экстремума. Таким образом, в рамках предложения 8 эволюция теплового процесса при больших временах целиком определяется (через функцию $f_A(x)$) пространственной структурой области Ω и величиной показателя σ в коэффициенте теплопроводности $k(u) = (\sigma + 1)u^\sigma$.

Доказательство сходимости в случае произвольных $u_0 \neq 0$ в принципе проводится тем же способом. Надо установить, что по истечении конечного времени $t_0 > 0$ температурное распределение $u(t_0, x)$ будет удовлетворять (7), откуда вытекает оценка (8). Поясним последнее утверждение (приведенные ниже рассуждения иллюстрируют одно из применений условий критичности решений параболических уравнений, которые систематически используются в гл. V).

Пусть начальная функция $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, $u_0 \neq 0$, достаточно мала и финитна в Ω : $\text{supp } u_0 \subset \Omega$. Тогда оценка (7) снизу не выполнена ни при каком $T_2 > 0$, так как $f_A(x) > 0$ в Ω . Покажем, что устойчивость автомодельного решения в смысле (8) все же будет иметь место. Уравнение для автомодельного представления (6) имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \Delta f^{\sigma+1} + \frac{1}{\sigma} f, \quad \tau > 0, \quad x \in \Omega; \quad f = 0, \quad \tau > 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (10)$$

где введено новое «время» $\tau = \ln(1+t)$: $\mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$.

Поскольку $f_\lambda(x)$ удовлетворяет задаче (5), равенство (8) означает стабилизацию при $\tau \rightarrow \infty$ решения уравнения (10) к своему стационарному решению, которое, как уже отмечалось, является единственным. Пусть для простоты $0 \in \Omega$ и $0 \in \text{supp } u_0$. Рассмотрим семейство стационарных решений $v = v(r)$, $r = |x|$, уравнения (10):

$$\frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} (v^{\sigma+1})')' + \frac{1}{\sigma} v = 0, \quad (11)$$

удовлетворяющих при $r=0$ условиям $v'(0)=0$ (условие симметрии относительно точки $r=0$) и $v(0) = v_0 = \text{const} > 0$.

Решение этой задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (11) существует и строго положительно в некотором шаре $B_{r_0} = \{r < r_0\}$, где $r_0 = r_0(v_0) < \infty$, причем $v(r_0) = 0$. При этом $r_0(v_0) \rightarrow 0$ при $v_0 \rightarrow 0$ (см. § 3 гл. IV). Выберем величину v_0 столь малой, чтобы $B_{r_0} \subset \Omega$. Тогда утверждается, что решение уравнения (10) с начальной функцией

$$f(0, x) = v_0(|x|), \quad x \in B_{r_0}; \quad f(0, x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus B_{r_0}, \quad (12)$$

является критическим:

$$\partial f / \partial \tau \geq 0 \text{ в } \mathbf{R}_+ \times \Omega \cap \{x \in \Omega \mid f(\tau, x) > 0\}.$$

Это прямое следствие принципа максимума (см. гл. V).

Следовательно, функция $f(\tau, x)$ не убывает по τ всюду в Ω и, если v_0 мало, ограничена сверху стационарным решением $f_\lambda(x)$. Поэтому существует предел в каждой точке $x \in \Omega$: $f(\tau, x) \rightarrow f_*(x)$, $\tau \rightarrow \infty$. Далее на основе обычных рассуждений (см. § 5 гл. IV) доказывается, что предельная функция $f_*(x)$ обязана совпадать с единственным решением стационарной задачи (5).

Что касается произвольных, достаточно малых начальных возмущений $f(0, x)$, то под каждое из них можно «поместить» указанное критическое решение, которое в силу теоремы сравнения, стабилизируясь к стационарному, заставит сходиться к последнему любое другое решение, лежащее между ним и стационарным.

Итак, автомодельное решение дает информацию о поведении при больших временах широкого множества решений задачи практически при произвольных начальных возмущениях. Подчеркнем, что асимптотическая пространственно-временная структура решения задачи (1)–(3) самым существенным образом зависит от геометрии области Ω . Несколько иная ситуация имеет место в другой краевой задаче для уравнения (1).

2. Краевая задача с условием Неймана. Пусть теперь на границе задано условие непротекания тепла:

$$\partial u^{\sigma+1} / \partial n = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial \Omega, \quad (13)$$

где $\partial / \partial n$ — обозначение производной по направлению внешней нормали к $\partial \Omega$. Асимптотические свойства решения нетрудно

предсказать заранее, основываясь на физических представлениях о характере протекания диффузионных процессов. В силу условия адиабатичности (13) общая тепловая энергия в Ω сохраняется:

$$\int_{\Omega} u(t, x) dx \equiv \int_{\Omega} u_0(x) dx = E_c. \quad (14)$$

За счет диффузии все неоднородности начального возмущения будут постепенно разравниваться, и в конечном итоге при $t \rightarrow \infty$ температурное поле должно стабилизироваться к пространственно однородному состоянию. Его величина однозначно определяется из (14), и поэтому следует ожидать, что

$$u(t, x) \rightarrow \frac{1}{\text{mcs } \Omega} \int_{\Omega} u_0(x) dx = \bar{u}_{\text{ср}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Не останавливаясь подробно на доказательстве (15), дадим некоторые пояснения, используя только два стандартных тождества, которым удовлетворяет решение задачи (1), (2), (13). Первое из них получается после скалярного умножения в $L^2(\Omega)$ уравнения (1) на $u^{\sigma+1}$ и интегрирования по частям:

$$\frac{1}{(\sigma+2)} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{\sigma+2} = -\|\nabla u^{\sigma+1}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Второе выводится умножением уравнения на $(u^{\sigma+1})_t$ и последующим интегрированием получившегося равенства по t (см. § 2 гл. VII). В результате получаем

$$\frac{4(\sigma+1)}{(\sigma+2)^2} \int_0^t \|(u^{1+\sigma/2})_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla u^{\sigma+1}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \|\nabla u_0^{\sigma+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (17)$$

Переходя к пределу в (17) при $t \rightarrow \infty$, убеждаемся, что первый интеграл сходится, и, следовательно, существует предел

$$\|\nabla u^{\sigma+1}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow a_0 \geq 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Сопоставляя (18) с равенством (16), получаем, что $a_0 = 0$; в противном случае функция $\|u\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{\sigma+2} \geq 0$ при больших t принимает отрицательные значения.

Условие $a_0 = 0$ в (18) означает, что $u^{\sigma+1}(t, x)$ сходится к пространственно однородному состоянию почти всюду (на самом деле, учитывая достаточную регулярность обобщенного решения, всюду в Ω). Тогда закон сохранения энергии (14) гарантирует стабилизацию (15).

Нетрудно вывести оценку скорости стабилизации к среднему значению температуры.

Предложение 9. Справедлива оценка

$$u(t, \cdot) - \bar{u}_{cp} \|_{L^2(\Omega)}^2 \equiv \int_{\Omega} (u(t, x) - \bar{u}_{cp})^2 dx \leq K e^{-\nu t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (19)$$

где $K > 0$, $\nu > 0$ — постоянные, причем ν зависит только от σ , \bar{u}_{cp} и области Ω .

Доказательство. Умножим скалярно в $L^2(\Omega)$ уравнение (1) на u . Тогда после интегрирования по частям получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = -(\sigma + 1) \int_{\Omega} u^\sigma(t, x) |\nabla u(t, x)|^2 dx. \quad (20)$$

В силу стабилизации u к $\bar{u}_{cp} > 0$ при $t \rightarrow \infty$ найдется такое $t_* \geq 0$, что для любых $t > t_*$ выполняется неравенство $u(t, x) \geq \bar{u}_{cp}/2$ в Ω . Тогда, оценивая сверху правую часть (20), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq -(\sigma + 1) \left(\frac{\bar{u}_{cp}}{2}\right)^\sigma \int_{\Omega} |\nabla u(t, x)|^2 dx, \quad t > t_*. \quad (21)$$

Положим $u - \bar{u}_{cp} = w$ и подставим в (21) $u = \bar{u}_{cp} + w$. В силу (14)

$$\int_{\Omega} w(t, x) dx \equiv 0. \quad (22)$$

Тогда, учитывая, что $\nabla u \equiv \nabla w$ и

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\equiv \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (w^2 + \bar{u}_{cp}^2 + 2\bar{u}_{cp}w) dx = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} w^2 dx + \int_{\Omega} \bar{u}_{cp}^2 dx + 2\bar{u}_{cp} \int_{\Omega} w dx \right\} \equiv \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

из (21) выводится оценка

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq -2(\sigma + 1) \left(\frac{\bar{u}_{cp}}{2}\right)^\sigma \|\nabla w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (23)$$

Используя известное неравенство [161]

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \lambda_1 \|w\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

справедливое для любых функций $w \in H^1(\Omega)$, $\partial w / \partial n = 0$ на $\partial\Omega$, удовлетворяющих условию (22) (здесь $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega) > 0$ — первое собственное значение задачи $\Delta\psi + \lambda\psi = 0$, $x \in \Omega$; $\partial\psi / \partial n = 0$ на $\partial\Omega$), из (23) получаем

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq -2(\sigma + 1) \left(\frac{\bar{u}_{cp}}{2}\right)^\sigma \lambda_1 \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad t > t_*.$$

Отсюда

$$\|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|w(t_*)\|_{L^2(\Omega)}^2 \exp\{-2(\sigma+1)\lambda_1(\bar{u}_{cr}/2)^\sigma t\}, \quad t > t_*,$$

что совпадает с оценкой (19), где $K = \|w(t_*)\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty$ и $\nu = 2(\sigma+1)\lambda_1(\Omega)(\bar{u}_{cr}/2)^\sigma > 0$.

§ 5. Уравнение быстрой диффузии. Краевая задача в ограниченной области

В этом параграфе рассматриваются свойства решений квазилинейных параболических уравнений нелинейной теплопроводности с коэффициентом $k(u) > 0$, который неограниченно возрастает при $u \rightarrow 0$. Это так называемые *уравнения быстрой диффузии*. К ним относится уравнение со степенной нелинейностью

$$u_t = \Delta u^m, \quad (1)$$

где $0 < m < 1$ — постоянная (если, как обычно, положить $m = \sigma + 1$, то в этом случае $\sigma = m - 1 \in (-1, 0)$). Коэффициент теплопроводности $k(u) = mu^{m-1}$ неограниченно растет при $u \rightarrow 0$.

Название «быстрая диффузия» связано с тем, что за счет неограниченности коэффициента теплопроводности на невозмущенном (нулевом) фоне температуры тепловое возмущение распространяется из нагретой области в холодную гораздо быстрее, чем, скажем, в случае постоянной теплопроводности ($m = 1$ в (1)) и тем более в случае $m > 1$, когда имеет место конечная скорость распространения возмущений. Эта сверхвысокая скорость «рассасывания» теплового возмущения определяет ряд интересных свойств процесса, на которых мы кратко остановимся, используя в основном технику построения различных автомодельных решений уравнения (1).

Предварительно, поскольку ранее такие уравнения не встречались, отметим, что при $m \in (0, 1)$ решение краевой задачи и задачи Коши для (1) существует, единственно и подчиняется принципу максимума; в частности, справедливы теоремы сравнения. При этом всюду, где это не противоречит крайевым условиям, решение является строго положительным, и, следовательно, его можно считать классическим (см. библиографические замечания).

Рассмотрим для (1) краевую задачу в ограниченной области Ω ($\partial\Omega$ — ее гладкая граница) с условиями

$$u(0, x) = u_0(x) > 0, \quad x \in \Omega; \quad u_0 \in C(\bar{\Omega}), \quad (2)$$

$$u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3)$$

В данной задаче происходит *полное остывание за конечное время*. Весьма просто это доказывается с помощью построения автомодельного решения

$$u_\lambda(t, x) = [(T_0 - t)_+]^{1/(1-m)} p_\lambda(x), \quad T_0 = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Функция (4) такова, что $u_A \equiv 0$ при всех $t \geq T_0$. Отметим, что при $m \in (0, 1)$ производная $\partial u_A / \partial t$ не имеет разрыва при $t = T_0$, т. е. u_A является классическим решением. Подставляя выражение (4) в уравнение (1), с учетом краевых условий получаем для функции $p_A > 0$ эллиптическую задачу:

$$\Delta p_A^m + \frac{1}{1-m} p_A = 0, \quad x \in \Omega; \quad p_A = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (5)$$

Полагая $p_A^m = w_A$, приходим к уравнению

$$\Delta w_A + \frac{1}{1-m} w_A^\gamma = 0, \quad \gamma = \frac{1}{m} > 1, \quad (5')$$

с тем же краевым условием $w_A = 0$ на $\partial\Omega$.

Функция w_A существует не при всех $\gamma = 1/m$; если $N \geq 3$ и $\gamma \geq (N+2)/(N-2)$, то уравнение (5') имеет решения, строго положительные в \mathbb{R}^N , а для Ω — шара произвольного радиуса — решения с условием $w_A|_{\partial\Omega} = 0$ не существует (см. § 3 гл. IV). Наоборот, если $1 < \gamma < (N+2)/(N-2)_+$, то искомая автомодельная функция всегда найдется.

Однако для наших целей не обязательно, чтобы задача (5) была разрешимой. Мы будем использовать автомодельное решение (4) лишь для мажорантных оценок сверху решения задачи (1) — (3).

Предложение 10. Пусть $0 < m < 1$. Тогда при любой начальной функции u_0 в задаче (1) — (3) наступает полное остывание за конечное время: найдется такое $T_0 > 0$, что $u(t, x) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$ для всех $t \geq T_0$.

Доказательство. Если $m \in ((N-2)/(N+2), 1)$, $N \geq 3$, или $m \in (0, 1)$, $N < 3$, возьмем произвольную ограниченную область в Ω' такую, что $\bar{\Omega} \subset \Omega'$, и обозначим через $p_A(x)$ положительное в Ω' решение уравнения (5) с условием $p_A = 0$ на $\partial\Omega'$. Тогда, поскольку $\bar{\Omega} \subset \Omega'$, имеем $p_A > 0$ на $\partial\Omega$, и поэтому всегда можно указать такое $T_0 > 0$, что $u_0(x) \leq T_0^{1/(1-m)} p_A(x)$, $x \in \bar{\Omega}$. В силу теоремы сравнения получаем

$$0 \leq u(t, x) \leq [(T_0 - t)_+]^{1/(1-m)} p_A(x), \quad x \in \bar{\Omega},$$

и, следовательно, $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$, если $t \geq T_0$.

Если же $m \in (0, (N-2)/(N+2)]$, $N \geq 3$ ($\gamma = 1/m \geq (N+2)/(N-2)$) и краевая задача (5') может быть неразрешимой), возьмем в качестве $p_A(x)$ решение уравнения (5), строго положительное в \mathbb{R}^N . Тогда $p_A > 0$ на $\partial\Omega$ и можно провести те же рассуждения.

§ 6. Задача Коши для уравнения быстрой диффузии

Посмотрим, возможно ли полное остывание за конечное время в задаче Коши для уравнения быстрой диффузии

$$u_t = \Delta u^m, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad m \in (0, 1), \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad \sup u_0 < \infty. \quad (2)$$

Ситуация здесь более сложная, чем в случае краевой задачи в ограниченной области, однако и ее можно проанализировать с помощью автомодельных решений.

Предполагается, что $u_0(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Естественно, если последнее условие нарушено и, например, $u_0(x) \geq \delta > 0$ всюду в \mathbb{R}^N , то в силу теоремы сравнения $u(t, x) \geq \delta$ в \mathbb{R}^N для любых $t > 0$, т. е. полного остывания в принципе быть не может.

1. Условие полного остывания за конечное время. Рассмотрим автомодельные решения, описывающие процесс полного остывания в задаче Коши. Можно привести целое семейство таких решений:

$$u_\lambda(t, x) = [(T_0 - t)_+]^n p_\lambda(\xi), \quad \xi = x / [(T_0 - t)_+]^{[1+n(m-1)/2]}, \quad (3)$$

где $T_0 > 0$, $n > 1$ — постоянные. Подстановка (3) в (1) дает для $w_\lambda = p_\lambda^m > 0$ следующее эллиптическое уравнение:

$$\Delta w_\lambda - \frac{1+n(m-1)}{2} \nabla w_\lambda^{1/m} \cdot \xi + n w_\lambda^{1/m} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^N \quad (4)$$

Для наших целей достаточно рассмотреть радиально симметричные решения, зависящие от одной переменной $\eta = |\xi|$. Все они удовлетворяют краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\eta^{N-1}} (\eta^{N-1} w'_\lambda)' - \frac{1+n(m-1)}{2} (w_\lambda^{1/m})' \eta + n w_\lambda^{1/m} = 0, \quad \eta > 0, \quad (5)$$

$$w'_\lambda(0) = 0, \quad w_\lambda(\infty) = 0. \quad (6)$$

Эта задача (как, впрочем, и (4)) разрешима не при любых $m \in (0, 1)$, $n > 1$.

Лемма 1. Пусть $N \geq 3$, $0 < m < (N-2)/N$. Тогда при любом *)

$$n \geq [(N-2)/N - m]^{-1} \quad (7)$$

задача (5), (6) имеет бесконечное множество строго положительных в \mathbb{R}_+ решений.

Доказательство. Рассмотрим для (5) задачу Коши в \mathbb{R}_+ с условиями

$$w(0) = \mu, \quad w'(0) = 0, \quad (8)$$

где $\mu > 0$ — произвольная постоянная. Докажем, что всякое решение этой задачи определяет в сделанных предположениях искомую функцию w_λ . Локальная разрешимость задачи (5), (8) при малых $\eta > 0$ устанавливается из эквивалентного интегрального уравнения.

Покажем, что это локальное решение продолжимо на всю ось $\eta \in \mathbb{R}_+$ и удовлетворяет второму условию (6). Предварительно

*) Очевидно, что в этом случае $n > 1$, так что $(u_\lambda)_t$ при $t = T_0$ непрерывна и (3) — классическое решение в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$.

отметим, что решение задачи монотонно убывает по η , так как предположение о наличии в некоторой точке $\eta_m > 0$ минимума функции w ($w(\eta_m) > 0$, $w'(\eta_m) = 0$), как следует из вида уравнения (5), приводит к противоречию.

Пусть выполняется обратное, т. е. функция w обращается в нуль в некоторой точке $\eta = \eta_* > 0$, так что $w(\eta) > 0$ на $(0, \eta_*)$ и $w(\eta_*) = 0$. Очевидно, что $w'(\eta_*) \leq 0$. Интегрируя уравнение (5) с весом η^{N-1} по интервалу $(0, \eta_*)$, приходим к равенству

$$\eta_*^{N-1} w'(\eta_*) + C(N, m, n) \int_0^{\eta_*} w^{1/m}(\eta) \eta^{N-1} d\eta = 0, \quad (9)$$

где введено обозначение

$$C(N, m, n) = -\frac{N}{2} \left[n \left(\frac{N-2}{N} - m \right) - 1 \right];$$

$C(N, m, n) < 0$ при выполнении строгого неравенства в (7). Поэтому равенство (9) невозможно, так как его левая часть строго отрицательна.

Итак, $w(\eta)$ не может обращаться в нуль. Из уравнения (5) тогда следует, что $w(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$, т. е. w удовлетворяет крайевым условиям (6).

Если же в (7) имеет место равенство $n = [(N-2)/N - m]^{-1}$, то задача (5), (6) имеет решения вида

$$w_A(\eta) = \left[\frac{1-m}{2m[(N-2)-mN]} (\eta_0^2 + \eta^2) \right]^{-m/(1-m)}, \quad \eta \in \mathbf{R}_+, \quad (10)$$

где $\eta_0^2 > 0$ — произвольная постоянная.

Семейство автомодельных решений (3) позволяет с помощью теоремы сравнения получить условие на $u_0(x)$, достаточное для полного остывания за конечное время. Например, если $u_0(x) \leq \leq u_A(0, x)$ в \mathbf{R}^N , то $u(t, x) \leq u_A(t, x)$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ и, следовательно, $u(t, x) \equiv 0$ при всех $t \geq T_0$. Автомодельные решения (3) дают следующий закон движения полуширины затухающей тепловой волны:

$$|x_{\text{ф}}(t)| = \eta_{\text{ф}} [(T_0 - t)_+]^{[1+n(m-1)]/2}, \quad w_A^{1/m}(\eta_{\text{ф}}) = \frac{1}{2} w_A^{1/m}(0),$$

причем $1 + n(m-1) < 0$ при всех n , удовлетворяющих (7). Поэтому $|x_{\text{ф}}(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$, что правильно согласуется с указанной выше особенностью процесса быстрой диффузии: тепло со все увеличивающейся скоростью перетекает в бесконечно удаленные области, где бесконечно велик коэффициент теплопроводности.

Оптимальное условие на начальное возмущение $u_0(x)$, гарантирующее полное остывание, удобно сформулировать, опираясь на решение уравнения (4) специального вида. Нетрудно проверить,

что при $0 < m < (N - 2)_+ / N$ существует решение

$$p_A^*(\xi) = w_A^{1/m}(\eta) = \left[\frac{2mN}{1-m} \left(\frac{N-2}{N} - m \right) \right]^{1/(1-m)} |\xi|^{-2/(1-m)}, \quad \xi \neq 0.$$

Здесь $p_A^*(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow 0$, что, как видно из дальнейшего, несущественно. Этой функции отвечает полностью остывающее (всюду, за исключением точки $x = 0$) решение

$$u_A^*(t, x) = [(T_0 - t)_+]^{1/(1-m)} \left[\frac{2mN}{1-m} \left(\frac{N-2}{N} - m \right) \right]^{1/(1-m)} |x|^{-2/(1-m)},$$

$$x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}. \quad (11)$$

Выбирая в теореме сравнения в качестве мажорирующего решения (11), получаем

Предложение 11. Пусть $N \geq 3$, $0 < m < (N - 2)/N$ и начальная функция $u_0(x)$ такова, что

$$u_0(x) \leq K|x|^{-2/(1-m)}, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}; \quad K = \text{const} > 0. \quad (12)$$

Тогда существует такое $T_0 > 0$, что $u(t, x) \equiv 0$ в \mathbb{R}^N для всех $t \geq T_0$.

Следствие. При $0 < m < (N - 2)_+ / N$, вообще говоря, отсутствует закон сохранения энергии: если $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ и выполнено условие (12), то

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T_0^-, \quad (13)$$

т. е. $\|u(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \not\equiv \|u_0(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$.

Доказательство предложения 11. В силу условия (12) найдется $T_0 > 0$ такое, что $u_0(x) \leq u_A^*(0, x)$, $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Следовательно, из теоремы сравнения получаем $u(t, x) \leq u_A^*(t, x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, и поэтому $u(t, x) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ при $t = T_0$. Осталось доказать, что полное остывание наступает и в точке $x = 0$. Для этого достаточно заметить, что функция $u_A^*(t, x - x_0)$, где $x_0 \neq 0$ — произвольная точка \mathbb{R}^N , также является решением уравнения (1) в $\mathbb{R}_+ \times \{\mathbb{R}^N \setminus \{x = x_0\}\}$, и затем сравнить $u(t, x)$ с этим решением, используя аналогичные рассуждения.

Отметим, что наличие эффекта полного остывания обуславливает отсутствие непрерывной зависимости решения задачи Коши по отношению к малым возмущениям коэффициента u^m уравнения (1).

Пример 2. Положим

$$\varphi_k(u) = \min \{ku, u^m\}, \quad u \geq 0; \quad k = 1, 2,$$

Очевидно, что функции $\varphi_k(u)$ непрерывны при $u \geq 0$ и $\varphi_k(u) \rightarrow u^m$ при $k \rightarrow \infty$ для любых $u \geq 0$. При этом решение задачи Коши

$$(u_k)_t = \Delta \varphi_k(u_k), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

с начальным условием (2) при любом k существует и един-

ственно. Поскольку $\varphi'_k(u)$ не имеет сингулярности при $u=0$, обобщенные решения подчиняются закону сохранения энергии:

$$\int_{\mathbf{R}^N} u_k(t, x) dx = \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x) dx, \quad t \geq 0; \quad k = 1, 2,$$

(то, что $\varphi'_k(u)$ терпит разрыв при $u = k^{-1/(1-m)}$, не существенно; например, φ_k можно сгладить в малой окрестности точки разрыва производной). Поэтому в условиях предложения 11 (см. следствие) последовательность $u_k(t, x)$ не может сходиться в норме $L^1(\mathbf{R}^N)$ к $u(t, x)$ — решению исходной задачи (1), (2), отвечающей $k = \infty$.

2. Условие существования строго положительного решения. Покажем сначала, что при $m < (N-2)/N$, $N \geq 3$, не всякое начальное возмущение $u_0(x)$ такое, что $u_0(x) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$, обеспечивает полное остывание за конечное время. Это устанавливается построением других автомодельных решений уравнения (1) в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$, которые этим свойством не обладают:

$$u_A(t, x) = \exp\{-\alpha(T+t)\} g_A(\xi), \quad (14)$$

$$\xi = |x|/\exp\{\alpha(1-m)(T+t)/2\}, \quad T = \text{const} \geq 0,$$

где $\alpha > 0$. Тогда $u_A \rightarrow 0$ в \mathbf{R}^N при $t \rightarrow \infty$ и $u_A > 0$ всюду. Функция $g_A > 0$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} (g_A^m)')' + \frac{\alpha(1-m)}{2} (g_A)' \xi + \alpha g_A = 0, \quad \xi > 0, \quad (15)$$

$$g_A'(0) = 0, \quad g_A(\infty) = 0. \quad (16)$$

Точно так же, как в лемме 1 в п. 1, устанавливается, что эта задача имеет нетривиальные решения, если $m \leq (N-2)_+/N$, т. е. и в тех случаях, когда возможен эффект полного остывания за конечное время. Однако (14) строго положительны в \mathbf{R}^N при всех $t > 0$. В частности, если $m = (N-2)/N$ («критический» случай), то задача (15), (16) интегрируется до конца, и автомодельные решения имеют простой вид:

$$u_A(t, x) = e^{-\alpha t} \left[\frac{\alpha(1-m)^2}{4m} \left(\frac{|x|^2}{\exp\{\alpha(1-m)t\}} + \xi_0^2 \right) \right]^{-1/(1-m)} > 0, \quad (17)$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

$\xi_0^2 > 0$ — произвольная постоянная.

Таким образом, при $0 < m < (N-2)_+/N$ существует решение задачи Коши с полным остыванием (предложение 11) и без полного остывания. Любопытно сравнить, при каких начальных функциях u_0 реализуется тот или иной режим эволюции теплового возмущения. Определяя асимптотическое поведение решений задачи (15), (16) при $\xi \rightarrow \infty$, получаем следующее

Предложение 12. Пусть $N \geq 3$, $0 < m < (N-2)/N$ и начальная функция $u_0(x) > 0$ такова, что при всех достаточно больших $|x|$

$$u_0(x) \geq K|x|^{-2/(1-m)}[\ln|x|]^{1/(1-m)}, \quad K = \text{const} > 0. \quad (18)$$

Тогда $u(t, x) > 0$ в \mathbf{R}^N при всех $t > 0$.

Доказательство. При выполнении (18) всегда можно подобрать такие $\alpha > 0$ и $T \geq 0$ в (14), что $u_0(x) \geq u_\alpha(0, x)$ в \mathbf{R}^N , и тогда $u(t, x) \geq u_\alpha(t, x)$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$, что гарантирует строгую положительность решения (и отсутствие полного остывания). Это же неравенство позволяет оценить скорость падения амплитуды теплового возмущения — она не более чем экспоненциальная.

Отметим, что «границы» множеств (12) и (18) в пространстве начальных функций (в первом имеет место полное остывание, во втором его нет) очень близки и отличаются лишь слабо растущим логарифмическим множителем.

Покажем теперь, что ограничение $m \in (0, (N-2)_+/N)$ является существенным для наличия полного остывания за конечное время. Ниже приведены примеры положительных автомодельных решений, которые существуют при $m > (N-2)_+/N$ и подчиняются закону сохранения энергии. Будем искать их в виде (ср. (3))

$$u_\lambda(t, x) = (T+t)^l p_\lambda(\eta), \quad \eta = |x|/(T+t)^{1+l(m-1)/N} \quad (19)$$

где $l < 0$, $T > 0$ — постоянные. Здесь $u_\lambda > 0$ в \mathbf{R}^N при всех $t > 0$.

Подставляя (19) в уравнение (1), получаем для функции $w_\lambda = p_\lambda^m(\eta) > 0$ задачу

$$\frac{1}{\eta^{N-1}} (\eta^{N-1} w'_\lambda)' + \frac{1+l(m-1)}{2} (w_\lambda^{1/m})' \eta - l w_\lambda^{1/m} = 0, \quad \eta > 0, \quad (20)$$

$$w'_\lambda(0) = 0, \quad w_\lambda(\infty) = 0. \quad (21)$$

Нетрудно показать, что при выполнении условия $(N-2)_+/N < m < 1$ и любых $l \in [(N-2)/N - m]^{-1} < 0$ существует бесконечное множество функций $w_\lambda(\eta) > 0$, удовлетворяющих (20), (21) (см. доказательство леммы 1). В частном случае $l = -[m - (N-2)/N]^{-1}$ имеется автомодельное решение (19), представимое в явном виде:

$$u_\lambda(t, x) = (T+t)^{-N/[2+N(m-1)]} \left\{ \frac{(1-m)}{2m[mN - (N-2)]} \times \right. \\ \left. \times \left[\eta_0^2 + \frac{|x|^2}{(T+t)^{2/[mN - (N-2)]}} \right]^{-1/(1-m)} \right\} \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N \quad (22)$$

($\eta_0^2 = \text{const} > 0$). Оно существует при всех $(N-2)_+/N < m < 1$ и

обладает конечной энергией, которая сохраняется:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_A(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_A(0, x) dx \equiv \|p_A\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Автомодельное решение (22) — аналог решения типа мгновенного точечного источника энергии, которое для случая $m > 1$ (т. е. $\sigma = m - 1 > 0$) рассматривалось в примере 8 гл. I.

Итак, при $m > (N - 2)_+/N$ существуют решения с сохраняющейся конечной энергией. Другими словами, здесь поглощение тепла в бесконечно удаленных точках, как это было при $0 < m < (N - 2)_+/N$ (предложение 11), отсутствует. Более того, с помощью автомодельных решений (19), используя методику доказательства предложения 4 гл. I, нетрудно показать, что в этом случае полное остывание за конечное время отсутствует и всегда справедлив закон сохранения энергии (см. комментарий).

§ 7. Условия эквивалентности различных квазилинейных уравнений теплопроводности

Выше на ряде примеров была показана асимптотическая эквивалентность решений нелинейных параболических уравнений, отвечающих разным краевым данным, а также эквивалентность при $t \rightarrow \infty$ решений различных параболических уравнений, полученных за счет возмущений нелинейных операторов. Идея такой асимптотической эквивалентности (асимптотической устойчивости приближенных автомодельных решений) будет широко использоваться в дальнейшем.

Здесь мы остановимся на проблеме эквивалентности уравнений, понимаемой в строгом смысле. Существуют ли такие различные квазилинейные уравнения теплопроводности, которые приводятся друг к другу за счет некоторых преобразований? Другими словами, можно ли нелинейное уравнение теплопроводности с источником или стоком преобразовать в более простое уравнение, про решения которого многое известно? В общей постановке эта проблема изучается в рамках теории групп преобразований и известна как проблема Беклунда (о ее строгой постановке и конструктивных методах решения см. [97]).

По-настоящему нетривиальных и, можно сказать, «неочевидных» примеров строгой эквивалентности различных уравнений сравнительно немного. Поэтому их значение в систематическом исследовании свойств решений квазилинейных параболических уравнений в общем невелико. Хотя в некоторых случаях на этом пути достигается значительное упрощение задачи.

Ниже рассматриваются некоторые простые преобразования, устанавливающие эквивалентность различных уравнений. Мы не будем подробно анализировать структуру таких преобразований и обсуждать их конструктивную сторону: насколько просто можно восстановить решение одного уравнения по решению другого? С практической точки зрения последнее очень важно: часто

удобнее численно решить непосредственно само уравнение, чем с помощью численных методов реализовывать преобразование эквивалентности. В теоретическом плане эквивалентность уравнений может быть полезной для установления некоторых общих свойств решений.

В большинстве случаев мы будем иметь дело только с уравнением, не формулируя для него конкретной краевой задачи, и в связи с этим не будем обращать внимания на характер поведения коэффициентов уравнения. Последнее необходимо учитывать при постановке краевых задач.

1. Простейшие примеры. С одним уравнением, которое эквивалентным образом преобразуется в более простое, мы уже знакомы. Это квазилинейное уравнение с лишней сток: $u_t = \Delta u^{\sigma+1} - u$, которое заменами $u = e^{-t}v$, $e^{-\sigma t}dt = d\tau$ приводится к уравнению без стока: $v_t = \Delta v^{\sigma+1}$. На основе этих элементарных преобразований устанавливается локализация тепловых возмущений в нелинейных средах с объемным поглощением.

Рассмотрим еще один простой пример.

Пример 3. Полулинейное параболическое уравнение

$$u_t = \Delta u + \frac{E'(u)}{E(u)} |\nabla u|^2, \quad (1)$$

где $E: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, $E \in C^2$ — произвольная монотонная функция, заменой $v = E(u)$ сводится к линейному уравнению теплопроводности

$$v_t = \Delta v. \quad (2)$$

Рассмотрим более сложные преобразования.

Пример 4. Пусть $u = u(t, r)$, $r = |x|$ — решение нелинейного уравнения теплопроводности с источником:

$$u_t = \frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} u^\sigma u_r)_r + u^{\sigma+1}, \quad (3)$$

где $\sigma \neq -1$. Приведенные ранее примеры показывают, что решения уравнения с источником существенно отличаются по своим свойствам от решений уравнения нелинейной теплопроводности. Попробуем избавиться от источника в правой части (3), оставив там только оператор диффузии. Сделаем для этого преобразование:

$$y = \varphi(r), \quad u^{\sigma+1}(t, r) = \psi(r) v(t, y).$$

Тогда, как нетрудно проверить, для функции $v \geq 0$ получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} (\sigma + 1) \psi^{1/(\sigma+1)} (v^{1/(\sigma+1)})_t &= \psi \varphi'^2 v_{yy} + \\ &+ \frac{1}{r^{N-1}} [r^{N-1} \psi' \varphi' + (r^{N-1} \psi \varphi')'] v_y + \left[\frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} \psi')' + (\sigma + 1) \psi \right] v. \end{aligned} \quad (4)$$

Для того чтобы избавиться от младших членов в (4), положим

$$\frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1}\psi)' + (\sigma + 1)\psi = 0, \quad (5)$$

$$r^{N-1}\psi'\varphi' + (r^{N-1}\psi\varphi)' = 0. \quad (6)$$

Если функция ψ , удовлетворяющая (5), известна, то

$$\varphi(r) = \int \frac{dr}{r^{N-1}\psi^2(r)}. \quad (7)$$

В явном виде система (5), (6) решается, например, в случае $N=1$ (см. об этом ниже), а также при $N=3$, когда заменой $\psi(r) = \kappa(r)/r$ уравнение (5) приводится к виду

$$\kappa'' + (\sigma + 1)\kappa = 0.$$

В частности, если $\sigma + 1 < 0$, то при $N=3$

$$\psi(r) = \frac{1}{r} \exp\{\pm |\sigma + 1|^{1/2} r\},$$

$$\varphi(r) = \mp \frac{1}{2|\sigma + 1|^{1/2}} \exp\{\mp 2|\sigma + 1|^{1/2} r\}.$$

При выполнении условий (5), (6) уравнение для новой функции v принимает вид

$$(v^{1/(\sigma+1)})_t = \frac{\psi^{-(3\sigma+4)/(\sigma+1)}(r)}{r^{2(N-1)}(\sigma+1)} v_{yy}, \quad y = \varphi(r).$$

Полагая $v^{1/(\sigma+1)} = U$, получаем одномерное уравнение без источника:

$$U_t = \frac{\psi^{-(3\sigma+4)/(\sigma+1)}(r)}{r^{2(N-1)}} (U^\sigma U_y)_y. \quad (8)$$

Особенно просто оно выглядит в случае $N=1$, $\sigma = -4/3$. При этом легко решается система (5), (6). В результате получаем следующее

Предложение 13. В уравнении

$$u_t = (u^{-4/3}u_x)_x + u^{-1/3} \quad (9)$$

преобразование

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left\{\pm \frac{2x}{\sqrt{3}}\right\}, \quad u(t, x) = \exp\left\{\pm \frac{x}{\sqrt{3}}\right\} v(t, y) \quad (10)$$

устраняет источник в правой части, и функция v удовлетворяет уравнению

$$v_t = (v^{-4/3}v_y)_y. \quad (11)$$

Для уравнений общего вида

$$u_t = \Delta\varphi(u) + Q(u) \quad (12)$$

также существуют преобразования, устраняющие источник $Q(u)$;

однако при этом нарушается автономность получившегося эквивалентного уравнения.

Пример 5. Положим в (12) $u = E(t, v)$. Тогда получим для $v = v(t, x)$ новое уравнение:

$$E'_t + E'_v v_t = \Delta \varphi(E(t, v)) + Q(E(t, v)).$$

Функцию E выберем из условия $\partial E / \partial t = Q(E)$, т. е.

$$\int_{E(t, v)}^{E(\eta)} \frac{d\eta}{Q(\eta)} = t + c(v),$$

где $c(v)$ — произвольная функция. После такой замены получаем для v параболическое уравнение, коэффициенты которого зависят от переменной t :

$$v_t = \frac{1}{E'_v(t, v)} \Delta \varphi(E(t, v)). \quad (13)$$

Например, в случае уравнения со степенными коэффициентами

$$u_t = \Delta u^{\sigma+1} + u^\beta, \quad \sigma \geq 0, \quad \beta > 1, \quad (14)$$

которое будет с разных точек зрения анализироваться в последующих главах, преобразование E имеет вид

$$E(t, v) = [(\beta - 1)(c(v) - t)]^{-1/(\beta-1)}.$$

Функцию $c(v)$ удобно выбрать так, чтобы при $t = 0$ преобразование было тождественным: $E(0, v) \equiv v$. Это дает $c(v) = v^{1-\beta} / (\beta - 1)$, и окончательно

$$E(t, v) = [v^{1-\beta} - (\beta - 1)t]^{-1/(\beta-1)}.$$

Уравнение (13), эквивалентное (12), тогда имеет вид

$$v_t = v^\beta [v^{1-\beta} - (\beta - 1)t]^{\beta/(\beta-1)} \Delta \{ [v^{1-\beta} - (\beta - 1)t]^{-(\sigma+1)/(\beta-1)} \}.$$

Подобные преобразования оказываются весьма полезными при исследовании полулинейных параболических уравнений и будут использоваться в § 7 гл. IV.

2. «Линейное» уравнение $u_t = (u^{-2} u_x)_x$. Сейчас мы переходим к более сложным преобразованиям эквивалентности. Покажем, что уравнение нелинейной теплопроводности с коэффициентом $k(u) = u^{-2}$ эквивалентно линейному уравнению.

Пусть $u(t, x)$ — решение уравнения

$$u_t = (u^{-2} u_x)_x, \quad (15)$$

причем $u(t, x)$ — достаточно гладкая функция, отличная от нуля в рассматриваемой области. Фиксируем некоторую точку

(t_0, x_0) . Интегрируя (15) по x , получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0}^x u(t, y) dy = u^{-2}(t, x) u_x(t, x) - u^{-2}(t, x_0) u_x(t, x_0),$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{x_0}^x u(t, y) dy + \int_{t_0}^t u^{-2}(\tau, x_0) u_x(\tau, x_0) d\tau \right\} = u^{-2} u_x.$$

Обозначив выражение, стоящее в фигурных скобках, через

$$\varphi(t, x) = \int_{x_0}^x u(t, y) dy + \int_{t_0}^t u^{-2} u_x |_{(\tau, x_0)} d\tau$$

(отсюда следует, что $\varphi_x \equiv u$), получим новое параболическое уравнение относительно функции φ :

$$\partial\varphi/\partial t = (\varphi_x)^{-2} \varphi_{xx}. \quad (16)$$

Введем новые независимые переменные

$$\bar{x} = \varphi(t, x), \quad \bar{t} = t. \quad (17)$$

Разрешая первое равенство относительно x , получаем

$$x = \psi(\bar{t}, \bar{x}). \quad (18)$$

Выведем из (16) уравнение для функции ψ . Легко проверить, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\partial\psi}{\partial\bar{t}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}} \right)^{-1} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}} \right)^{-1} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{x}^2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}} \right)^{-3},$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}} \right)^{-1} \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial\bar{t}} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{x}^2} \right\} = 0.$$

Поскольку $(\psi_{\bar{x}})^{-1} \neq 0$ (что эквивалентно условию $u \neq 0$), $\psi(\bar{t}, \bar{x})$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\psi_{\bar{t}} = \psi_{\bar{x}\bar{x}}. \quad (19)$$

Нетрудно совершить обратное преобразование и показать, что решение уравнения (19) переходит в решение исходного нелинейного уравнения (15).

Пример 6. Рассмотрим фундаментальное решение уравнения теплопроводности (19):

$$\psi(\bar{t}, \bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\bar{t}}} \exp \left\{ -\frac{\bar{x}^2}{4\bar{t}} \right\}. \quad (20)$$

Равенства (18), (17) определяют искомую функцию

$$\varphi(t, x) = [-4t \ln(xt^{1/2})]^{1/2}.$$

Однако $u = \varphi_x$ — решение уравнения (15), т. е. фундаментальное решение (20) переходит в следующее решение «линейного» уравнения (15):

$$u(t, x) = -\frac{t^{1/2}}{x} [-\ln(xt^{1/2})]^{-1/2}$$

Оно имеет смысл при $xt^{1/2} \in (0, 1)$.

Уравнение с коэффициентом $k(u) = u^{-2}$ обладает другими интересными свойствами.

Пример 7. Рассмотрим «многомерное» уравнение

$$u_t = \frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} u^{-2} u_r)_r. \quad (21)$$

Нетрудно проверить, что те же преобразования

$$u(t, r) = r^{1-N} \varphi_r(t, r), \quad \bar{t} = t, \quad \bar{r} = \varphi(t, r); \quad r = \varphi(\bar{t}, \bar{r})$$

приводят (21) к виду

$$\psi_{\bar{t}} = \psi^{2(N-1)} \psi_{\bar{r}\bar{r}} + (N-1) \psi^{2N-3} \psi_{\bar{r}}^2. \quad (22)$$

При $N=1$ получаем линейное уравнение, при $N=2$ — уравнение

$$\psi_{\bar{t}} = \psi^2 \psi_{\bar{r}\bar{r}} + \psi \psi_{\bar{r}}^2 \equiv \psi(\psi \psi_{\bar{r}})_{\bar{r}}.$$

Заменой $\bar{u}(\bar{t}, \bar{r}) = \ln \psi$ последнее сводится к одномерному уравнению с экспоненциальной нелинейностью:

$$\bar{u}_{\bar{t}} = (e^{2\bar{u}} \bar{u}_{\bar{r}})_{\bar{r}}.$$

Если же $N \geq 3$, то, полагая $\bar{u} = \psi^{2-N}$, из (22) получаем уравнение

$$\bar{u}_{\bar{t}} = (\bar{u}^{\gamma_N} \bar{u}_{\bar{r}})_{\bar{r}},$$

где $\gamma_N = 2(N-1)/(2-N) < 0$.

3. Условия эквивалентности уравнений общего вида. Ниже с помощью тех же преобразований показано, что каждому уравнению теплопроводности отвечает эквивалентное уравнение с другим коэффициентом теплопроводности.

Предложение 14. Преобразование

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = \int_{x_0}^x u(t, y) dy + \int_{t_0}^t k(u(\tau, x_0)) u_x(\tau, x_0) d\tau, \quad (23)$$

$$\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) = 1/u(t, x) \quad (24)$$

переводит решение $u(t, x) \neq 0$ уравнения

$$u_t = (k(u) u_x)_x \quad (25)$$

в решение $\bar{u}(\bar{t}, \bar{x})$ уравнения

$$\bar{u}_t^- = \left(\frac{1}{u^2} k \left(\frac{1}{u} \right) \bar{u}_x^- \right)_{\bar{x}}. \quad (26)$$

Доказательство. Вычислим производные, входящие в уравнение (26). Из (24) следует, что

$$(\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}))_t^- \equiv \left(\frac{1}{u(t, x)} \right)_t = - \frac{u_t + u_x x_t^-}{u^2}. \quad (27)$$

Из второго равенства (23) вытекает, что

$$0 = u x_t^- + \int_{x_0}^x u_t(t, y) dy + k(u) u_x |_{(t, x_0)}. \quad (28)$$

Однако из уравнения (25) имеем

$$\int_{x_0}^x u_t(t, y) dy = k(u) u_x - k(u) u_x |_{(t, x_0)},$$

и, следовательно, (23) означает, что

$$x_t^- = -k(u) u_x / u.$$

Тогда из (27) получаем

$$\bar{u}_t^- = - \frac{u_t}{u^2} + \frac{k(u)}{u^3} u_x^2. \quad (29)$$

Далее, поскольку $x_x^- = 1/u$, легко вычисляются другие производные:

$$\bar{u}_x^- = \left(\frac{1}{u} \right)_{\bar{x}} = \left(\frac{1}{u} \right)_x x_x^- = - \frac{u_x}{u^3}, \quad (30)$$

$$\bar{u}_{xx}^- = - \frac{u_{xx} u - 3u_x^2}{u^5}. \quad (31)$$

Окончательно из (29) — (31) получаем

$$\bar{u}_t^- - \left(\frac{1}{u^2} k \left(\frac{1}{u} \right) \bar{u}_x^- \right)_{\bar{x}} \equiv - \frac{1}{u^2} [u_t - (k(u) u_x)_x] = 0,$$

что завершает доказательство.

Таким образом, уравнения с коэффициентами

$$k(u), \quad K(u) = \frac{1}{u^2} k \left(\frac{1}{u} \right) \quad (32)$$

эквивалентны. В случае функций степенного вида: $k(u) = u^\sigma$, эквивалентное уравнение имеет коэффициент $K(u) = u^{-(\sigma+2)}$, т. е. уравнения с коэффициентами $k_1(u) = u$, $k_2(u) = u^{\sigma^2}$ эквивалентны,

если

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -2. \quad (32')$$

Если $\sigma_1 = 0$, то в соответствии с (32') $\sigma_2 = -2$, и мы получаем известный результат об эквивалентности уравнения с $k(u) = u^{-2}$ липпейному уравнению теплопроводности.

Предложение 14 открывает новые возможности построения частных решений некоторых уравнений.

Пример 8. Уравнение

$$u_t = (e^u u_x)_x \quad (33)$$

обладает богатым набором симметрий. Например, оно инвариантно относительно преобразований

$$t \rightarrow t/\alpha, \quad x \rightarrow x, \quad u \rightarrow -\ln \alpha + u,$$

т. е. $-\ln \alpha + u(t/\alpha, x)$ есть решение уравнения, если функция $u(t, x)$ также ему удовлетворяет. Полагая здесь $\alpha = -t$, $t < 0$, и затем делая замену $t \rightarrow t - T_0$, $T_0 = \text{const} > 0$, получаем, что (33) имеет автомодельное решение

$$u_A(t, x) = -\ln(T_0 - t) + \theta_A(x), \quad 0 < t < T_0. \quad (34)$$

Подстановка (34) в (33) дает для функции $\theta_A(x)$ уравнение

$$(e^{\theta_A} \theta_A')' = 1,$$

т. е.

$$\theta_A(x) = \ln(x^2/2 + bx + c), \quad (35)$$

где b, c — произвольные постоянные.

Указанная выше эквивалентность (33) уравнению (см. (32))

$$\bar{u}_{\bar{t}} = \left(\frac{1}{\bar{u}^2} e^{1/\bar{u}} \bar{u}_{\bar{x}} \right)_{\bar{x}} \quad (36)$$

позволяет построить частное решение последнего. Пусть, например, $b = c = 0$ в (35). Тогда, как следует из (23), (24), решением уравнения (36) будет функция $\bar{u}(\bar{t}, \bar{x})$, определяемая неявным образом из равенств

$$\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) = \left\{ \ln \left[(T_0 - \bar{t})^{-1} \frac{\Psi(\bar{t}, \bar{x})}{2} \right] \right\}^{-1}$$

где функция $\Psi(\bar{t}, \bar{x})$ такова, что

$$\bar{x} = \int_0^{\Psi(\bar{t}, \bar{x})} \ln \left[(T_0 - t)^{-1} \frac{y^2}{2} \right] dy.$$

В заключение приведем условия эквивалентности более общих квазилинейных уравнений параболического типа.

Предложение 15. Уравнения

$$u_t = (k(u, u_x) u_x)_x, \quad \bar{u}_t = \left(\frac{1}{\bar{u}^2} k \left(\frac{1}{\bar{u}}, -\frac{\bar{u}_x}{\bar{u}^3} \right) \bar{u}_x \right)_x$$

эквивалентны. Преобразование (23), (24) переводит решение $u \neq 0$ первого из них в решение второго.

§ 8. Об уравнении теплопроводности с градиентной нелинейностью

В этом параграфе рассматриваются свойства обобщенных решений квазилинейных параболических уравнений, описывающих диффузию тепла в среде с коэффициентом теплопроводности, зависящим не от температуры, а от ее пространственной производной (градиента). Типичные примеры таких уравнений: в одномерном случае —

$$u_t = (|u_x|^\sigma u_x)_x, \quad (1)$$

в многомерном — уравнение

$$u_t = \nabla (|\nabla u|^\sigma \nabla u), \quad (2)$$

где $\sigma > 0$ — постоянная. Эти уравнения параболические и вырождающиеся; коэффициент теплопроводности $k = k(|\nabla u|) = |\nabla u|^\sigma \geq 0$ обращается в нуль там, где $\nabla u = 0$, в частности, в точках положительного экстремума функции $u = u(t, x) \geq 0$ или, например, в точках фронта тепловой волны, распространяющейся с конечной скоростью. Поэтому решения уравнений (1), (2) являются, вообще говоря, обобщенными.

Пример 9. Задача Коши для (2) в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ имеет решение

$$u_A(t, x) = A_{\sigma, N} (T + t)^{-N/[\sigma(N+1)+2]} \times \\ \times \left\{ \left[a^{(\sigma+2)/(\sigma+1)} - \left(\frac{|x|}{(T+t)^{1/[\sigma(N+1)+2]}} \right)^{(\sigma+2)/(\sigma+1)} \right]_+ \right\}^{(\sigma+1)/\sigma} \quad (3)$$

где

$$A_{\sigma, N} = \left(\frac{\sigma}{\sigma+2} \right)^{(\sigma+1)/\sigma} \left\{ \frac{1}{\sigma(N+1)+2} \right\}^{1/\sigma}$$

$T \geq 0$, $a > 0$ — произвольные постоянные. Это автомодельное решение типа мгновенного точечного источника энергии. Находится оно так же, как аналогичное решение для уравнения с $k(u) = u^\sigma$, обладающее неизменной энергией:

$$\int_{\mathbf{R}^N} u_A(t, x) dx \equiv \int_{\mathbf{R}^N} u_A(0, x) dx, \quad t > 0.$$

Решение (3) финитно в каждый момент времени: $u_A(t, x) = 0$ при всех $|x| \geq |x_\phi(t)| = a(T+t)^{1/[\sigma(N+1)+2]}$. Точками вырождения

для него являются $x=0$ (точка положительного максимума) и поверхность фронта $\{|x|=|x_\Phi(t)|\}$. Из (3) следует, что при $x=0$ не существует вторая производная $\Delta(u_A)$, однако произведение $|\nabla u_A|^\sigma \Delta u_A$ конечно, и тем самым при $x=0$ существует производная u_t , поскольку (2) эквивалентно уравнению

$$u_t = (\sigma + 1) |\nabla u|^\sigma \Delta u.$$

В точках фронта решения $|\nabla u_A| = 0$, $\Delta u_A(t, x) \sim (|x_\Phi| - |x|)^{(1-\sigma)/\sigma}$ при $|x| \rightarrow |x_\Phi|^-$. Поэтому, если $\sigma < 1$, то $\Delta u_A(t, x_\Phi) = 0$ ((3) — классическое решение при $x \neq 0$); если $\sigma = 1$, то $\Delta u_A(t, x_\Phi) \neq 0$, а если $\sigma > 1$, то $\Delta u_A = \infty$ при $|x| = |x_\Phi|^-$. В двух последних случаях Δu_A терпит на поверхности фронта разрыв соответственно первого и второго рода. Особо отметим, что во всех точках вырождения тепловой поток

$$W(t, x) \equiv -k \nabla u = -|\nabla u|^\sigma \nabla u$$

непрерывен. Это важное свойство обобщенного решения, которое учитывается при введении вместо уравнения (2) эквивалентного интегрального тождества. Обобщенные решения подчиняются принципу максимума, для них справедливы теоремы сравнения по крайвым данным.

Уравнение (2) описывает процессы с конечной скоростью распространения тепловых возмущений по любому постоянному фону температуры. Например, функция

$$u(t, x) = 1 + u_A(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

является решением, которое имеет конечный фронт на однородном (единичном) фоне.

Уравнение (1) — степенное уравнение по характеру нелинейности. Поэтому для него без труда могут быть построены автомодельные решения в полупространстве $\{x > 0\}$ с заданным при $x=0$ граничным режимом (см. § 3). Например, если $u(t, 0) = (1+t)^m$, $m > 0$, то соответствующее решение имеет вид

$$u_A(t, x) = (1+t)^m f_A(\xi), \quad \xi = x / (1+t)^{(1+m\sigma)/(\sigma+2)}.$$

Если же $u(t, 0) = e^t$, то

$$u_A(t, x) = e^t f_A(\xi), \quad \xi = x / \exp \left\{ \frac{\sigma}{\sigma+2} t \right\}.$$

Эти автомодельные решения являются асимптотически устойчивыми в указанном ранее смысле (см. § 1, 2).

Несколько подробнее мы рассмотрим решения, развивающиеся в режиме с обострением и описывающие эффект *локализации тепла*.

Пример 10. Пусть в краевой задаче для уравнения (1) в области $(0, T_0) \times \mathbb{R}_+$

$$u(t, 0) = 1 + (T_0 - t)^n, \quad 0 < t < T_0; \quad n < 0. \quad (4)$$

Соответствующее автомодельное решение имеет вид

$$u_A(t, x) = 1 + (T_0 - t)^n \theta_A(\xi), \quad \xi = x / (T_0 - t)^{(1+n)} \quad (5)$$

где функция $\theta_A \geq 0$ — обобщенное решение краевой задачи

$$\begin{aligned} (|\theta'_A|^{\sigma} \theta'_A)' - \frac{1+n\sigma}{\sigma+2} \theta'_A \xi + n \theta_A &= 0, \quad \xi > 0, \\ \theta_A(0) &= 1, \quad \theta_A(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В частном случае $n = -1/\sigma$ (S-режим с обострением) уравнение (6) легко интегрируется. Соответствующее автомодельное решение

$$\begin{aligned} u_A(t, x) &= 1 + (T_0 - t)^{-1/\sigma} \times \\ &\times [1 - x/x_0]^{(\sigma+2)/\sigma}, \quad (5') \\ x_0 &= \frac{\sigma+2}{\sigma} \left[\frac{2\sigma(\sigma+1)}{(\sigma+2)} \right]^{1/(\sigma+2)} \end{aligned}$$

представляет собой тепловую волну с неподвижной точкой фронта, локализованную в области $0 < x < x_0$ в течение всего времени действия граничного режима с обострением. Тепловые возмущения из области локализации не выходят, и однородный температурный фон при $x > x_0$ остается неизменным (рис. 8).

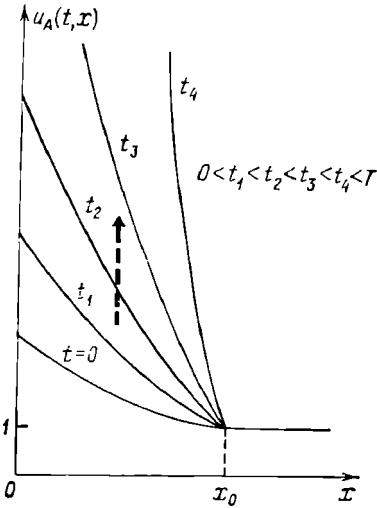


Рис. 8. Эволюция при $t \rightarrow T_0^-$ локализованного S-режима с обострением (5')

Пространственно временная структура автомодельного решения (5) указывает на то, что при $n < -1/\sigma$ действие режима с обострением не будет локализовано и $x_\phi(t) \sim (T_0 - t)^{(1+n\sigma)/(\sigma+2)} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$ (HS-режим), а в случае $n \in (-1/\sigma, 0)$ есть локализация тепла, причем температура растет до бесконечности только в точке $x=0$ (LS-режим). Эта классификация совпадает с указанной в § 3 для коэффициента теплопроводности $k = u^n$

§ 9. Задача Колмогорова — Петровского — Пискунова

С этого параграфа мы начнем анализ некоторых автомодельных решений квазилинейных параболических уравнений с дополнительным членом $Q(u)$ (источником или стоком) в правой части. Отдельные примеры приводились в гл. I.

Сначала мы рассмотрим автомодельные решения типа бегущих волн в активных средах с источником. Эта задача впервые и исчерпывающе в рассматриваемой ниже постановке была исследована в известной работе [107]. Она впоследствии породила

целую серию работ в этой области (см. комментарии), и поэтому данная задача получила свое название по именам авторов работы [107].

1. **Постановка задачи.** Рассматривается процесс диффузии

$$u_t = u_{xx} + Q(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

в среде с источником специального вида:

$$\begin{aligned} Q(0) = Q(1) = 0; \quad Q(u) > 0, \quad u \in (0, 1); \\ Q'(0) = \alpha > 0; \quad Q'(u) < \alpha, \quad u \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (2)$$

Примерное поведение функции $Q(u)$ указано на рис. 9. Из сформулированных ограничений на $Q(u)$ следует, что

$$Q(u) \leq \alpha u, \quad u \in [0, 1] \quad (3)$$

(это существенно для дальнейшего). Всем упомянутым условиям удовлетворяет, например, источник

$$Q(u) = \alpha u(1 - u), \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (4)$$

Для уравнения (1) рассматривается задача Коши с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad u_0(x) \leq 1, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (5)$$

Эта задача поставлена корректно. Хотя мы не определили функцию $Q(u)$ при $u < 0$ и $u > 1$, это не имеет значения, так как из (5) и теоремы сравнения следует, что $0 \leq u(t, x) \leq 1$. Действительно, $u_+ \equiv 1$ и $u_- \equiv 0$ — решения уравнения (1), а в силу (5) $u_- \leq u_0(x) \leq u_+$; следовательно, $u_- \leq u(t, x) \leq u_+$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

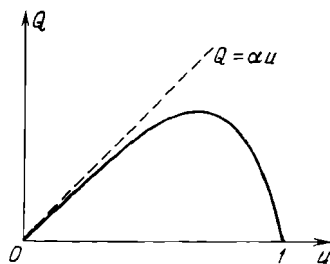


Рис. 9

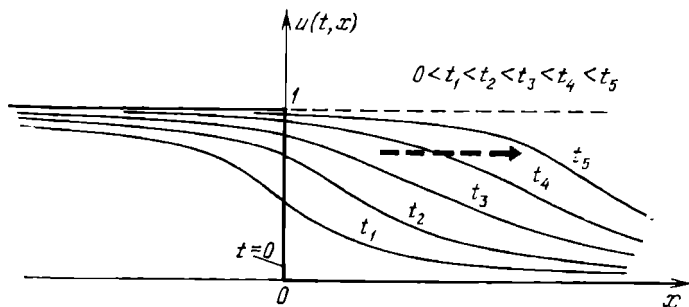


Рис. 10. Формирование тепловой волны в задаче (1), (6). Жирной линией выделена начальная функция

Рассмотрим теперь начальное возмущение элементарного вида (рис. 10):

$$u_0(x) \equiv 1, \quad x \leq 0; \quad u_0(x) \equiv 0, \quad x > 0. \quad (6)$$

Тогда, очевидно, вправо начнет движение температурная волна,

как это показано на рис. 10. По какому закону она движется? Каков ее пространственный профиль при больших временах?

В [107] было показано, что асимптотическое поведение решения задачи (1), (5) определяется автомодельным решением уравнения (1) типа бегущей волны:

$$u_A(t, x) = \theta_A(\xi), \quad \xi = x - \lambda t, \quad (7)$$

где $\lambda > 0$ — постоянная (скорость движения волны). Подстановка (7) в (1) дает обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\theta_A'' + \lambda \theta_A' + Q(\theta_A) = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}, \quad \theta_A(-\infty) = 1, \quad \theta_A(\infty) = 0. \quad (8)$$

Краевые условия здесь выбраны исходя из вида начальной функции (6).

Автомодельное уравнение (8) сводится к уравнению первого порядка. Нетрудно показать [107], что эта задача имеет решение при любых

$$\lambda \geq \lambda_0 = 2\sqrt{\alpha}. \quad (9)$$

При этом решение $\theta_A > 0$, отвечающее данному $\lambda \geq \lambda_0$, единственно с точностью до преобразования сдвига. Последнее существенно: если θ_A — решение, то $\theta_A(\xi + \xi_*)$, $\xi_* = \text{const}$ — также решение.

Возникает вопрос: какая скорость волны реализуется при начальном возмущении в виде «полочки» (6)? В [107] установлен принципиально важный результат: в задаче (1), (6) волна движется при больших t со скоростью $\lambda = \lambda_0$, т. е. минимальной из всех возможных. При других нефинитных $u_0(x)$ волна может двигаться при $t \rightarrow \infty$ со скоростью $\lambda > \lambda_0$. Если обозначить, как обычно, через $x_{\text{зф}}(t)$ глубину проникновения тепловой волны ($u(t, x_{\text{зф}}(t)) = 1/2$), то

$$dx_{\text{зф}}(t)/dt = 2\sqrt{\alpha} + o(1), \quad t \rightarrow \infty. \quad (10)$$

При этом профиль тепловой волны на асимптотической стадии эволюции совпадает с функцией $\theta_A^0(\xi)$ — решением задачи (8) при $\lambda = \lambda_0$. Это означает, что автомодельное представление решения исходной неавтомодельной задачи $\theta(t, \xi) = u(t, \xi + x_{\text{зф}}(t))$ сходится при $t \rightarrow \infty$ к некоторой функции $\theta_A^0(\xi)$, т. е.

$$\|\theta(t, \cdot) - \theta_A^0(\cdot)\|_{C(\mathbf{R})} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Ниже мы остановимся на некоторых простых вопросах, связанных с данной задачей, которые одновременно иллюстрируют методы исследования, используемые в дальнейшем.

2. Оценка сверху глубины проникновения волны.

Предложение 16. В задаче (1), (5), (6) для глубины проникновения волны справедлива оценка

$$x_{\text{зф}}(t) \leq 2\sqrt{\alpha}t - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \ln t + O(1), \quad t \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Доказательство. В силу условия (3) функция $v(t, x)$, удовлетворяющая уравнению

$$v_t = v_{xx} + \alpha v, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (13)$$

и тому же начальному условию (5), (6), является верхним решением уравнения (1) (теорема сравнения 2 гл. 1). Следовательно, $u(t, x) \leq v(t, x)$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$. Функция v без труда вычисляется (заменой $v = e^{\alpha t} w$ уравнение (13) сводится к уравнению теплопроводности для w):

$$u(t, x) \leq v(t, x) = \frac{e^{\alpha t}}{2\pi^{1/2}} \int_{x/t^{1/2}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{4}\right\} d\eta.$$

В силу этого неравенства искомая полуширина $x_{\text{об}}(t)$ не будет превосходить $s(t)$ — «полуширину» волны, отвечающую функции v , т. е. решение уравнения

$$\frac{1}{2} = \frac{e^{\alpha t}}{2\pi^{1/2}} \int_{s(t)/t^{1/2}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{4}\right\} d\eta. \quad (14)$$

Отсюда следует оценка (12).

Любопытно отметить, что точное значение $x_{\text{об}}(t)$ незначительно отличается от выражения, стоящего в правой части (12) (см. [210]):

$$x_{\text{об}}(t) = 2\sqrt{\alpha} t - \frac{3}{2\sqrt{\alpha}} \ln t + O(1), \quad t \rightarrow \infty. \quad (14')$$

3. Асимптотическая устойчивость бегущей волны. Покажем, что автомодельное решение (7) асимптотически устойчиво, причем не обязательно по отношению к малым возмущениям начальной функции $u_0(x)$.

Предложение 17. Пусть существует постоянная $\delta \in (0, 1)$ такая, что

$$Q(\delta u) \geq \delta Q(u), \quad u \in (0, 1) \quad (15)$$

(этому условию удовлетворяет источник (4)). Тогда решение задачи Коши для (1) с начальной функцией

$$u(0, x) = u_0(x) = \delta \theta_A^0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (16)$$

асимптотически сходится к автомодельной функции $\theta_A^0(\xi)$ в следующем смысле: существует постоянная ξ_0 такая, что

$$u(t, \xi + \lambda_0 t) - \theta_A^0(\xi + \xi_0) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (17)$$

при всех $\xi \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Оно основано на сформулированной ниже лемме (подобные утверждения в более общей постановке используются в гл. V). Предварительно перейдем от уравнения

(1) к уравнению для функции $\theta(t, \xi) = u(t, \xi + \lambda_0 t)$:

$$\theta_t = \theta_{\xi\xi} + \lambda_0 \theta_{\xi} + Q(\theta), \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbf{R}. \quad (18)$$

Начальная функция $\theta_0(\xi) = \theta(0, \xi)$ при таком преобразовании не меняется. Сравнение (18) с обыкновенным дифференциальным уравнением (8) показывает, что проблема асимптотической устойчивости автомодельного решения типа бегущей волны после преобразования сводится к исследованию устойчивости стационарных решений нового уравнения (18).

Лемма 2. В сделанных предположениях решение уравнения (18) критическое:

$$\theta_t(t, \xi) \geq 0, \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Доказательство. Функция $z = \theta_t$ удовлетворяет линейному параболическому уравнению

$$z_t = z_{\xi\xi} + \lambda_0 z_{\xi} + Q'(\theta)z, \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbf{R},$$

которое выводится из (18) дифференцированием по t . В силу достаточной гладкости θ и Q эта операция вполне законна, впрочем от требования $\theta \in C_{t\xi}^{2,1}$ можно отказаться (см. гл. V). Поэтому в силу принципа максимума $z(t, \xi) \geq 0$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, если это же неравенство выполнено в начальный момент времени, т. е.

$$z(0, \xi) = \theta_t(0, \xi) \geq 0, \quad \xi \in \mathbf{R}. \quad (19)$$

С учетом (18) и вида начальной функции $\theta_0(\xi) \equiv u_0(\xi) = \delta \theta_{\lambda}^0(\xi)$ получаем, что необходимо проверить справедливость неравенства

$$\theta_t(0, \xi) = (\theta_0)_{\xi\xi} + \lambda_0 (\theta_0)_{\xi} + Q(\theta_0) \equiv \delta (\theta_{\lambda}^{0''} + \lambda_0 \theta_{\lambda}^{0'}) + Q(\delta \theta_{\lambda}^0) \geq 0, \quad \xi \in \mathbf{R}. \quad (20)$$

Функция $\theta_{\lambda}^0(\xi)$ удовлетворяет уравнению (8) при $\lambda = \lambda_0$. Поэтому (20) эквивалентно неравенству

$$-\delta Q(\theta_{\lambda}^0(\xi)) + Q(\delta \theta_{\lambda}^0(\xi)) \geq 0, \quad \xi \in \mathbf{R},$$

которое справедливо в силу предположения (15).

Для завершения доказательства предложения 17 достаточно заметить, что функция $\theta(t, \xi)$ является неубывающей по t при всех $\xi \in \mathbf{R}$ и, кроме того, ограничена сверху:

$$\theta(t, \xi) \leq \theta_{\lambda}^0(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}, \quad (21)$$

так как это неравенство выполнено при $t = 0$ (см. (16), где $\delta \in (0, 1)$), а $\theta_{\lambda}^0(\xi)$ — решение уравнения (18).

Следовательно, при любом $\xi \in \mathbf{R}$ существует предел $\theta(t, \xi) \rightarrow \theta^*(\xi)$, $t \rightarrow \infty$. Переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$ в интегральном уравнении, эквивалентном (18), убеждаемся, что $\theta^*(\xi)$ является стационарным решением уравнения (18), т. е. решением задачи (8) при $\lambda = \lambda_0$. Оно, как упоминалось ранее, единственно с точностью до преобразования сдвига.

Замечание. Нетрудно оценить степень различия решения $u(t, x)$ и соответствующей предельной функции θ_A^0 , которая зависит от величины ξ_0 в (17) (т. е. от степени сдвига). Во-первых, в силу (21) $\xi_0 \geq 0$. Во-вторых, сопоставим асимптотики функции $\theta_A^0(\xi)$:

$$\theta_A^0(\xi) = C_0 \exp\{-\sqrt{\alpha}\xi\} + \quad \xi \rightarrow \infty,$$

и начальной функции

$$\theta_0(\xi) = \delta\theta_A^0(\xi) \equiv \delta C_0 \exp\{-\sqrt{\alpha}\xi\} + \quad \xi \rightarrow \infty$$

(здесь $C_0 > 0$ — постоянная). Учитывая, что в силу леммы 2 $\theta(t, \xi) \geq \theta_0(\xi)$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, получаем из неравенства $\theta_A^0(\xi + \xi_0) \geq \theta_0(\xi)$, или, что то же самое, из условия

$$C_0 \exp\{-\sqrt{\alpha}(\xi + \xi_0)\} \geq \delta C_0 \exp\{-\sqrt{\alpha}\xi\} \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty,$$

ограничение на величину ξ_0 сверху: $C_0 \exp\{-\sqrt{\alpha}\xi_0\} \geq \delta C_0$, т. е. $\xi_0 \leq -\alpha^{-1/2} \ln \delta$. Если $\delta > 0$ в (16) мало и тем самым $\theta_0(\xi)$ сильно отличается от $\theta_A^0(\xi)$, то отличие последней функции от предельной, к которой стремится $\theta(t, \xi)$ при $t \rightarrow \infty$, также может быть большим.

Подчеркнем, что начальная функция $u_0(x)$ в (16), с которой $u(t, x)$ стабилизируется к автомодельному решению, существенно отличается от (6): она нефинитна и (главное) $u_0(x) \rightarrow \delta < 1$ при $x \rightarrow -\infty$. Однако закон движения полуширины волны в этом случае ближе к автомодельному. Из (17) нетрудно получить, что $x_{\text{ш}}(t) = 2\sqrt{\alpha}t + O(1)$, $t \rightarrow \infty$ (ср. с (12')), где есть еще одно слагаемое, логарифмически растущее при $t \rightarrow \infty$).

В заключение отметим, что на основе доказательства предложения 17 в предположении критичности u_0 устанавливается стабилизация (17) к минимальной функции θ_A^0 без ограничения на источник $Q'(u) \leq \alpha$, $u \in (0, 1)$. В этой связи приведем примеры устойчивых автомодельных бегущих волн $u_A(t, x) = \theta_A^0(\xi)$, $\xi = x - \lambda_0 t$, которые могут быть выписаны в явном виде.

Если

$$Q(u) = u(1 - u^\nu)(1 + (\nu + 1)u^\nu), \quad u \in (0, 1); \quad \nu = \text{const} > 0,$$

то решением задачи (8) при $\lambda = \lambda_0 = 2\sqrt{\alpha} = 2$ будет функция

$$\theta_A^0(\xi) = [e^{-\nu\xi}/(1 + e^{-\nu\xi})]^{1/\nu}, \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Для источника «тригонометрического» вида

$$Q(u) = \pi^{-1} \sin(\pi u)(2 - \cos(\pi u)), \quad u \in (0, 1),$$

таким решением является

$$\theta_A^0(\xi) = \pi^{-1} \arccos [(e^{2\xi} - 1)/(1 + e^{2\xi})], \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

В обоих случаях $\theta_A^0 \simeq e^{-\xi} \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$.

§ 10. Автомодельные решения полулинейного параболического уравнения $u_t = \Delta u + u \ln u$

В этом параграфе рассматривается задача Коши для полулинейного уравнения специального вида:

$$u_t = \Delta u + u \ln u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad \sup u_0 < \infty. \quad (2)$$

Здесь функция $Q(u) = u \ln u$ является источником ($Q > 0$) при $u > 1$ и стоком ($Q < 0$) при малых температурах $u \in (0, 1)$.

Уравнение (1) интересно тем, что оно допускает широкое двухпараметрическое семейство автомодельных решений, которые позволяют подробно описать свойства решений задачи Коши и, в частности, определить условия асимптотической устойчивости его основного автомодельного решения (оно будет определено ниже в первую очередь).

Источник $Q(u) = u \ln u > 0$ при $u > 1$ удовлетворяет условию

$$\int_2^{\infty} \frac{du}{Q(u)} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta} = \infty.$$

Поэтому все решения задачи Коши являются глобальными, т. е. существуют при всех $t > 0$. Поскольку функция $Q(u)$ дифференцируема всюду, за исключением точки $u = 0$, в окрестности которой она является стоком, решение задачи существует, единственно и подчиняется принципу максимума. Кроме того, с помощью построенных ниже автомодельных решений нетрудно показать (по аналогии с доказательством предложения 4 гл. I), что всякое решение задачи Коши с $u_0(x) \neq 0$ строго положительно в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ и является классическим.

1. Однопараметрическое семейство автомодельных решений. Основное*) автомодельное решение в разделяющихся переменных будем искать в виде

$$u_A^*(t, x) = \psi_*(t) \theta_*(x), \quad \theta_*(x) = \exp\{-|x|^2/4\}. \quad (3)$$

Тогда из (1) получаем для функции $\psi_*(t) > 0$ уравнение

$$\psi_*'(t) = -\frac{N}{2} \psi_*(t) + \psi_*(t) \ln \psi_*(t), \quad t > 0,$$

откуда $\psi_*(t) = \exp\{B_0 e^t + N/2\}$ и

$$u_A^*(t, x) = \exp\{B_0 e^t + N/2\} \exp\{-|x|^2/4\}. \quad (4)$$

Здесь B_0 — произвольная постоянная.

*) Смысл, который вкладывается в слово «основное», будет ясен из дальнейшего.

Этому решению отвечает начальное возмущение

$$u_0(x) \equiv u_A^*(0, x) = \exp\{B_0 + N/2 - |x|^2/4\}, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (5)$$

Как следует из (4), если $B_0 > 0$, то $u_A^*(t, x)$ неограниченно возрастает в \mathbb{R}^N при $t \rightarrow \infty$; если же $B_0 < 0$, то $u_A^*(t, x) \rightarrow 0$ в \mathbb{R}^N при $t \rightarrow \infty$. Значению $B_0 = 0$ отвечает стационарное решение уравнения (1), не зависящее от времени:

$$u_s(x) = \exp\{N/2 - |x|^2/4\}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (6)$$

Итак, имеется три вида существенно отличающихся по своим свойствам автомодельных решений (4):

- 1) растущее решение ($B_0 > 0$);
- 2) затухающее решение ($B_0 < 0$);
- 3) стационарное решение ($B_0 = 0$).

Все эти решения реализуются при весьма ограниченном выборе начальных функций (5). Какова область притяжения каждого из трех видов основного автомодельного решения, при каких $u_0(x)$ имеет место тот или другой тип эволюции начального возмущения?

2. Двупараметрическое семейство автомодельных решений. На сформулированные вопросы можно частично ответить путем построения более широкого, чем (4), семейства автомодельных решений уравнения (1). Будем искать их в автомодельном виде (на этот раз переменные не разделяются, как в (3)):

$$u_A(t, x) = \psi(t) \theta_*(\xi), \quad \xi = |x|/\varphi(t), \quad \theta_*(\xi) = \exp\{-\xi^2/4\}. \quad (7)$$

Подстановка указанного выражения в (1) приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\psi(t)$, $\varphi(t)$:

$$\psi'(t) = -\frac{N}{2} \frac{\psi(t)}{\varphi^2(t)} + \psi(t) \ln \psi(t), \quad (8)$$

$$\frac{2\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\varphi^2(t)} - 1, \quad t > 0. \quad (9)$$

Последнее уравнение легко интегрируется:

$$\varphi(t) = (1 - a_0 e^{-t})^{1/2}, \quad t \geq 0, \quad (10)$$

где a_0 — постоянная, причем для того, чтобы (10) имело смысл при всех $t \geq 0$, необходимо выполнение неравенства $a_0 < 1$. Тогда (8) дает следующее выражение амплитуды автомодельного решения:

$$\psi(t) = \exp\left\{e^t \left[B_0 - \frac{N}{2a_0} \ln(1 - a_0 e^{-t}) \right]\right\}, \quad (11)$$

где B_0 — постоянная (та же, что и в (4)).

Построенное семейство решений (7) обладает свойствами 1)–3), однако в отличие от (4) оно является более широким — зависит от двух параметров a_0 , B_0 . Соответствующие начальные

функции имеют вид

$$u_0(x) \equiv u_A(0, x) = \exp \left\{ B_0 - \frac{N}{2a_0} \ln(1 - a_0) - \frac{|x|^2}{4(1 - a_0)} \right\}, \quad (12)$$

$$x \in \mathbb{R}^N.$$

При фиксированном B_0 однопараметрическое семейство этих начальных функций ($a_0 < 1$ — параметр) характеризует область притяжения каждого из трех видов основного автомодельного решения (4).

3. Условие стабилизации к стационарному решению. Рассмотрим случай $B_0 = 0$ в (12). Тогда, как следует из (7), соответствующее автомодельное решение сходится при $t \rightarrow \infty$ к основному автомодельному решению (4), т. е. в данном случае к стационарному решению (6). Из (10), (11) нетрудно вывести оценку скорости стабилизации к $u_S(x)$.

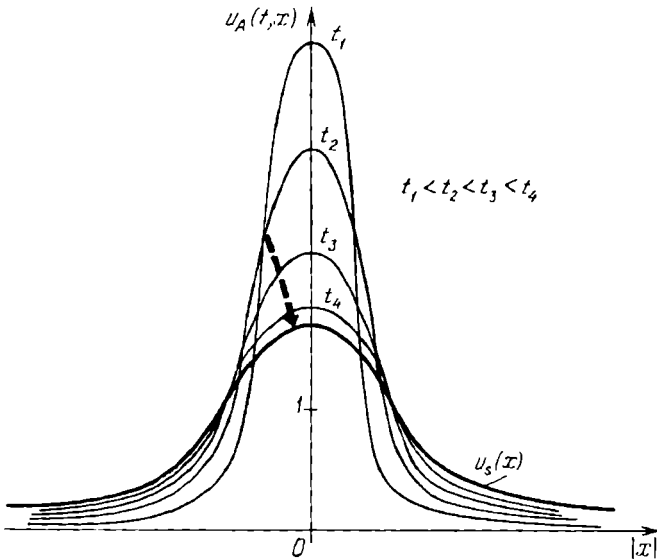


Рис. 11. Стабилизация при $t \rightarrow \infty$ автомодельного решения $u_A(t, x)$, $B_0 = 0$ к неустойчивому стационарному решению $u_S(x)$

При каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^N$ (при $B_0 = 0$)

$$\psi(t) = e^{N/2} + \frac{Na_0}{4} e^{N/2} e^{-t} + o(e^{-t}), \quad \varphi^2(t) = 1 - a_0 e^{-t}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Поэтому при больших t

$$u_A(t, x) = \exp \left\{ \frac{N}{2} - \frac{|x|^2}{4} \right\} \left[1 + \frac{a_0}{4} (N - |x|^2) e^{-t} \right] + o(e^{-t}).$$

Отсюда следует, что на любом компакте $K_L = \{|x| \leq L\}$ из \mathbf{R}^n

$$\|u_A(t, \cdot) - u_S(\cdot)\|_{C(K_L)} = O(e^{-t}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Процесс стабилизации к стационарному решению схематически изображен на рис. 11.

Таким образом, стационарное решение (6) устойчиво по отношению к возмущениям начальной функции, но не произвольно-го вида, а только к возмущениям, которые формируют автомодельные начальные функции (12) при $B_0 = 0$. При этом возмущения могут быть сколь угодно большими по амплитуде; см. рис. 11, где $u_A(t, 0)$ отличается от $u_S(0)$ в несколько раз.

Этот результат любопытен тем, что по отношению к произвольным, даже сколь угодно малым возмущениям стационарное решение u_S неустойчиво. Это показывает следующее простое утверждение.

Предложение 18. Пусть

$$u_0(x) = \delta u_S(x), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad (13)$$

где $\delta > 1$ — постоянная (отклонение от стационарного решения $\|u_0(\cdot) - u_S(\cdot)\|_{C(\mathbf{R}^N)} = (\delta - 1)e^{N/2}$ может быть сколь угодно мало, если δ близко к 1). Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = \infty, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad (14)$$

т. е. стабилизация к u_S отсутствует.

Доказательство. Возьмем в (5) произвольное $B_0 = B_0^+ \in \in (0, \ln \delta)$. Нетрудно проверить, что в этом случае

$$u_0(x) \equiv \delta u_S(x) \geq u_A^*(0, x), \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

и поэтому в силу теоремы сравнения

$$u(t, x) \geq u_A^*(t, x) \equiv \exp[B_0^+ e^t + N/2] \exp\{-|x|^2/4\} \rightarrow \infty, \\ t \rightarrow \infty \text{ в } \mathbf{R}^N$$

Этим завершается доказательство неустойчивости стационарного решения (6) сверху.

Аналогично устанавливается, что оно также неустойчиво в $C(\mathbf{R}^N)$ снизу; любой начальной функции (13) с постоянной $\delta \in (0, 1)$ отвечает затухающее решение: $u(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ в \mathbf{R}^N , т. е. стабилизация к u_S опять отсутствует. Доказывается это точно так же путем сравнения $u(t, x)$ с автомодельным решением (4), в котором $B_0 = B_0^- \in (\ln \delta, 0)$. Тогда $u(t, x) \leq u_A^*(t, x) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, в \mathbf{R}^N , так как $B_0^- < 0$.

Таким образом, семейство функций (12) при $B_0 = 0$ — множество притяжения неустойчивого стационарного решения в пространстве начальных функций. Подчеркнем, что оно неограничено в $C(\mathbf{R}^N)$.

4. Затухающие решения. Они имеют место, если $B_0 < 0$ в (12); тогда $u_A(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любых $x \in \mathbf{R}^N$. При этом из (10),

(11) видно, что $u_\Lambda(t, x)$ для больших t имеет практически ту же пространственно-временную структуру, что и основное автомодельное решение (4). Если быть более точным, то, вводя автомодельное представление решения (7) (автомодельную обработку, отвечающую основному решению (4)):

$$\theta(t, x) = \frac{u_\Lambda(t, x)}{\Psi(t)} \equiv \theta_* \left(\frac{|x|}{(1 - a_0 e^{-t})^{1/2}} \right), \quad (15)$$

убеждаемся, что

$$\|\theta(t, \cdot) - \theta_*(\cdot)\|_{C(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Здесь $\theta_*(x) \equiv u_\Lambda^*(t, x)/\psi_*(t)$ имеет смысл автомодельного представления основного автомодельного решения (4).

Эта оценка означает асимптотическую устойчивость основного решения по отношению к возмущениям вида (12) начальной функции (5).

5. Растущие решения. Как следует из (11), $u_\Lambda(t, x) \rightarrow \infty$ в \mathbb{R}^N при $t \rightarrow \infty$, если $B_0 > 0$ в (12). Вводя по той же формуле (15) автомодельное представление решений $u_\Lambda(t, x)$, нетрудно проверить, что все они (при любых $B_0 > 0$, $a_0 < 1$) сходятся в смысле (16) к основному автомодельному решению (4).

Важно выделить одну особенность. Выясним, по какому закону изменяется со временем эффективная полуширина растущей тепловой структуры $l_{\text{эф}}(t) = |x_{\text{эф}}(t)|$ такая, что $u_\Lambda(t, x_{\text{эф}}(t)) = \Psi(t)/2$. Используя явный вид функции u_Λ , получаем для полуширины выражение

$$l_{\text{эф}}^2(t) = 4 \ln 2 \cdot (1 - a_0 e^{-t}) \rightarrow 4 \ln 2, \quad t \rightarrow \infty,$$

т. е. при больших t она становится практически постоянной. Несмотря на это, решение $u_\Lambda(t, x)$ неограниченно растет во всем пространстве (ср. с примером 13 § 3 гл. I, где постоянство полуширины сочеталось с локализацией тепловой структуры в пространстве).

В заключение отметим, что возможность построения широкого семейства точных автомодельных решений, асимптотически совпадающих с основным («порождающим») решением, встречается очень редко. Порождающее решение часто удается выделить в рамках теории приближенных автомодельных решений (см. гл. VI).

З а м е ч а н и е. Семейство автомодельных решений типа (7) легко построить для уравнения

$$u_t = \Delta u - u \ln u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (17)$$

Тогда, учитывая, что функция $Q(u) = -u \ln u > 0$ при $u \in (0, 1)$ является источником и $Q(0) = Q(1) = 0$, получаем задачу, подобную рассматриваемой в § 9. Однако здесь $Q'(0^+) = \infty$; поэтому скорость движения тепловой волны не будет асимптотически постоянной.

Автомодельные решения уравнения (17) имеют вид

$$u_A(t, x) = \exp \left\{ e^{-t} \left[B_0 - \frac{N}{2a_0} \ln(a_0 e^t - 1) \right] - \frac{|x|^2}{4(a_0 e^t - 1)} \right\},$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (18)$$

где $B_0, a_0 > 1$ — постоянные. Пусть

$$B_0 - \frac{N}{2a_0} \ln(a_0 - 1) \leq 0.$$

Тогда, очевидно, $0 < u_A(0, x) \leq 1$ в \mathbb{R}^N , и, следовательно, в силу теоремы сравнения $u_A(t, x) \in (0, 1)$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ (это легко видеть непосредственно из (18)). В этом случае (18) представляет собой тепловую волну с практически постоянной (при $t \rightarrow \infty$) амплитудой, распространяющуюся по всем направлениям (рис. 12). Ее эффективная ширина имеет вид

$$|x_{\text{эф}}(t)| \simeq 2(a_0 \ln 2)^{1/2} e^{t/2}, \quad t \rightarrow \infty,$$

т. е. скорость движения волны экспоненциально растет при $t \rightarrow \infty$.

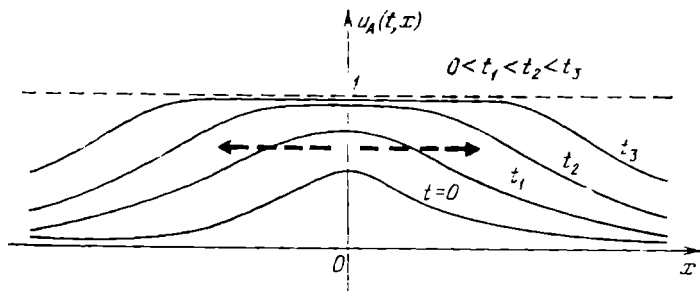


Рис. 12. Бегущая волна в задаче Коши для уравнения (17)

Что касается асимптотической устойчивости семейства (18), то при любых B_0 имеет место оценка

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} \left| u_A(t, \xi e^{t/2}) - \exp \left\{ -\frac{|\xi|^2}{4a_0} \right\} \right| = O(te^{-t}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Поэтому при больших t

$$u_A(t, x) \simeq \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4a_0 e^t} \right\},$$

так что здесь основным является другое автомодельное решение.

§ 11. Уравнение нелинейной теплопроводности с источником и стоком

Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^{\sigma+1} - u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \sigma > 0. \quad (1)$$

Оно отличается от встречавшегося ранее (пример 13 гл. I) до-

полнительным стоком $-u$. Это может существенно менять характер протекания процесса горения.

Будем искать автомодельные решения уравнения (1) в разделяющихся переменных:

$$u_A(t, x) = \psi(t)\theta(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Подстановка в (1) приводит к задаче

$$\frac{\psi'(t) + \psi(t)}{\psi^{\sigma+1}(t)} = \frac{(\theta^\sigma \theta')' + \theta^{\sigma+1}}{\theta} = -\lambda = \text{const}. \quad (2)$$

Положим для удобства $\lambda = -1/\sigma$. Тогда для функции $\theta(x)$

получается то же уравнение, что и для $\theta_S(x)$ в § 3 гл. I. Поэтому мы можем взять $\theta \equiv \theta_S$. Амплитуда решения $\psi(t)$ легко вычисляется из (2), и в результате приходим к семейству автомодельных решений

$$u_A(t, x) = e^{-t} \left(\frac{1}{\sigma} e^{-\sigma t} + C_0 \right)^{-1/\sigma} \theta_S(x), \quad (3)$$

где C_0 — постоянная. Каждому из них отвечает начальная функция

$$u_0(x) \equiv u_A(0, x) = (1/\sigma + C_0)^{-1/\sigma} \theta_S(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Отсюда вытекает необходимость ограничения $C_0 > -1/\sigma$.

При различных C_0 в (3) существует три вида автомодельных решений, различающихся по характеру пространственно временной эволюции. Если $C_0 = 0$, то (3) — стационарное решение (рис. 13):

$$u_S(x) \equiv \sigma^{1/\sigma} \theta_S(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Если $C_0 > 0$, то решение u_A затухает:

$$u_A(t, x) = C_0^{-1/\sigma} e^{-t} \theta_S(x) + o(e^{-t}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Эти решения расположены ниже стационарного на рис. 13, и их появление связано с наличием в (1) стока тепла, который при малых $u > 0$ является более мощным, чем источник.

Наоборот, если $C_0 \in (-1/\sigma, 0)$, т. е. начальная функция (4) расположена выше стационарного решения, то возникает режим

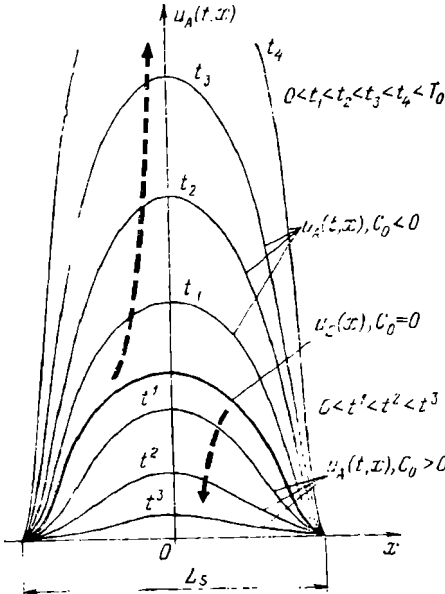


Рис. 13. Эволюция автомодельных решений (3) при $C_0 < 0$, $C_0 = 0$, $C_0 > 0$

с обострением:

$$u_A(t, x) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T_0^- = -\frac{1}{\sigma} \ln(-\sigma C_0) > 0$$

всюду в области локализации $|x| < \text{mes sup} \theta_s/2$. Возмущения из этой области не выходят, несмотря на бесконечный рост температуры внутри (см. рис. 13). Как следует из (3), решение u_A растет по степенному закону:

$$u_A(t, x) \simeq (T_0 - t)^{-1/\sigma} \theta_s(x). \quad (7)$$

Тем самым стационарное решение (5) является *неустойчивым*: малые отрицательные возмущения приводят к стабилизации к другому устойчивому стационарному решению $u_s \equiv 0$, положительные возмущения дают рост решения в режиме с обострением.

Отметим, что пространственные закономерности протекания тепловых процессов в данной нелинейной среде (горение или затухание) определяются через одну и ту же функцию $\theta_s(x)$; от типа процесса зависит лишь закон изменения амплитуды тепловой структуры. В этой среде существует и единый для этих процессов характерный пространственный масштаб — *фундаментальная длина* $L_s = \text{mes sup} \theta_s = 2\pi(\sigma + 1)^{1/2}/\sigma$.

§ 12. Локализация и эффект полного остывания в средах со стоками

Здесь более подробно, чем ранее, рассматриваются некоторые свойства решений нелинейного параболического уравнения

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x - u^\nu, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

где $\sigma > 0$, $\nu > 0$ — постоянные.

1. Локализации тепловых возмущений. С одним из важных свойств решений этого уравнения мы уже знакомы — это свойство локализации (§ 3 гл. I): если начальная функция $u_0(x)$ в задаче Коши финитная, то тепловые возмущения не распространяются при $t \rightarrow \infty$ далее определенной длины. Тем же способом, что и в примере 11 § 3 гл. I, доказывается более общее утверждение об условиях локализации решений задачи Коши для (1).

Предложение 19. Пусть $u_0(x)$ — финитная функция и $\nu < \sigma + 1$. Тогда существует такая постоянная $L > 0$, что $u(t, x) \equiv 0$ при всех $|x| > L$ для любых $t > 0$.

Этот результат переносится на случай произвольного числа пространственных переменных. Тот же анализ нетрудно провести для уравнения вида (1) с произвольными коэффициентами $k(u) \geq 0$, $Q(u) \leq 0$.

Условие локализации тепловых возмущений $\nu < \sigma + 1$ получается простым сравнением решения задачи Коши с подходящим стационарным решением, причем это условие является необходимым и достаточным. Об этом, в частности, говорит отсутствие нетривиальных стационарных решений при $\nu \geq \sigma + 1$, обращаю-

щихся в нуль в некоторой конечной точке вместе со своим тепловым потоком. К исследованию характера движения тепловых фронтов в отсутствии локализации мы вернемся немного позднее, а сейчас рассмотрим еще одно любопытное свойство решений уравнения (1).

2. Условие полного остывания за конечное время. Здесь этот эффект связан с наличием в пелинейной среде стоков тепла.

Предложение 20. Пусть $\nu < 1$, $\sup u_0 = M < \infty$. Тогда найдется $T_0 \leq T_* = M^{1-\nu}/(1-\nu)$ такое, что $u(t, x) \equiv 0$ в \mathbb{R} при всех $t \geq T_0$.

Доказательство. Сопоставим $u(t, x)$ с пространственно однородным решением $v(t)$ уравнения (1):

$$v'(t) = -v^\nu(t), \quad t > 0; \quad v(0) = M.$$

В силу теоремы сравнения $u(t, x) \leq v(t)$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Однако, как нетрудно проверить, $v(t) = 0$ при $t = T_*$, что завершает доказательство.

Из приведенных рассуждений вытекает, что в том случае, когда член $-u^\nu$ в уравнении заменен на произвольный сток $-Q(u)$ ($Q(u) > 0$ при $u > 0$), полное остывание наступает, если

$$\int_0^1 \frac{d\eta}{Q(\eta)} < \infty.$$

Этот же результат в силу теоремы сравнения справедлив в многомерном случае.

Есть основание ожидать, что асимптотическая стадия процесса полного остывания ($t \rightarrow T_0^-$) описывается автомодельными решениями:

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{1/(1-\nu)} f_A(\xi), \quad \xi = x/(T_0 - t)^{(\sigma+1-\nu)/[2(1-\nu)]} \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где $T_0 > 0$ — постоянная (время полного остывания) и $f_A(\xi) \geq 0$ удовлетворяет уравнению

$$(f_A^\sigma f_A')' - \frac{(\sigma+1)-\nu}{2(1-\nu)} f_A' \xi + \frac{1}{1-\nu} f_A - f_A^\nu = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2')$$

Можно показать, что нетривиальные решения этого обыкновенного дифференциального уравнения, удовлетворяющие условию $f_A \rightarrow 0$, $|\xi| \rightarrow \infty$, существуют (похожие задачи рассматриваются в § 1, 3 гл. IV). Тогда выражение (2) дает представление о характере протекания процесса остывания. Исследование асимптотической устойчивости этих автомодельных решений может быть проведено методами, которые применяются в § 4—6 гл. IV при анализе автомодельных решений с обострением (возникающие при этом трудности в общем имеют одну и ту же природу и связаны с «сингулярностью» рассматриваемых решений по времени).

Оба свойства — локализации и полного остывания — иллюстрирует следующий пример, который характеризует некоторые особенности движения тепловых фронтов в средах с объемными стоками.

Пример 11. Пусть $\sigma \in (0, 1)$. Рассмотрим в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ задачу Коши для уравнения

$$u_t = \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u) - u^{1-\sigma} \quad (3)$$

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ вся тепловая энергия сконцентрирована в точке $x = 0$, т. е. $u(0, x) \equiv 0$ в $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ и $u(0, 0) = \infty$. Это типичная постановка автомодельной задачи с минимумом количественных характеристик начального возмущения.

Решение задачи будем искать в виде

$$u_A(t, x) = \psi(t) \theta(\xi), \quad \xi = |x|/\varphi(t), \quad (4)$$

где $\psi(t) \geq 0$ и $\varphi(t) \geq 0$ — соответственно амплитуда и ширина тепловой структуры, а финитная функция $\theta(\xi) \geq 0$ имеет вид

$$\theta(\xi) = [(1 - \xi^2)_+]^{1/\sigma}, \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

По своим свойствам регулярности эта функция нас вполне устраивает: в точках фронта $\xi = \pm 1$ тепловой поток непрерывен.

Подставляя выражение (4) в исходное уравнение, получаем для функций ψ , φ систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{2(2+N\sigma)}{\sigma^2} + \frac{2\varphi\varphi'}{\sigma\psi^\sigma} - \frac{\varphi^2\psi'}{\psi^{\sigma+1}} &= 0, \\ \frac{4}{\sigma^2} - \frac{2\varphi\varphi'}{\sigma\psi^\sigma} - \frac{\varphi^2}{\psi^{2\sigma}} &= 0, \quad t > 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\psi(0) = \infty, \quad \varphi(0) = 0.$$

Полагая здесь $\varphi^2 = Y(t)$, $\psi^{-\sigma} = Z(t)$, приходим к системе

$$(YZ)' = \frac{2(2+N\sigma)}{\sigma}, \quad \frac{1}{\sigma} Y'Z + YZ^2 = \frac{4}{\sigma^2} \varphi$$

которая легко интегрируется.

Выпишем выражения амплитуды и полуширины тепловой структуры:

$$\begin{aligned} \psi^\sigma(t) &= a_0 t^{-N\sigma/(2+N\sigma)} (A - b_0 t^{2(1+N\sigma)/(2+N\sigma)})_+ \\ \varphi^2(t) &= c_0 t^{2/(2+N\sigma)} (A - b_0 t^{2(1+N\sigma)/(2+N\sigma)})_+. \end{aligned} \quad (4')$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_0 &= \left[\frac{2(2+N\sigma)}{\sigma} \right]^{-N\sigma/(2+N\sigma)} & c_0 &= \left[\frac{2(2+N\sigma)}{\sigma} \right]^{2/(2+N\sigma)} \\ b_0 &= \frac{\sigma^2}{4(1+N\sigma)} \left[\frac{2(2+N\sigma)}{\sigma} \right]^{2(1+N\sigma)/(2+N\sigma)} \end{aligned}$$

$A > 0$ — постоянная. Графики функций $\psi(t)$, $\varphi(t)$ схематически изображены на рис. 14.

Любопытно, что размеры носителя обобщенного решения (4) изменяются со временем немонотонно. На интервале $(0, t_*)$, где

$$t_* = \left[\frac{A}{(2 + N\sigma)b_0} \right]^{(2+N\sigma)/[2(1+N\sigma)]}$$

ширина структуры $\varphi(t)$ возрастает, затем поверхность теплового фронта начинает двигаться назад к началу координат $x=0$ и, наконец, в момент времени

$$t = T_0 = (A/b_0)^{(2+N\sigma)/[2(1+N\sigma)]}$$

функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ одновременно обращаются в нуль, т. е. наступает полное остывание.

Автомодельное решение (4) является локализованным: в любой момент времени диаметр носителя не превосходит $2\varphi(t_*)$.

3. О характере движения тепловой волны в отсутствие локализации. При $v \geq \sigma + 1$ в (1) финитное начальное возмущение не будет локализованным. Это связано с тем, что интенсивность поглощения при малых температурах недостаточна, чтобы остановить тепловую волну. Характер движения точки фронта в этих случаях определяется на основе анализа точных или приближенных автомодельных решений уравнения (1).

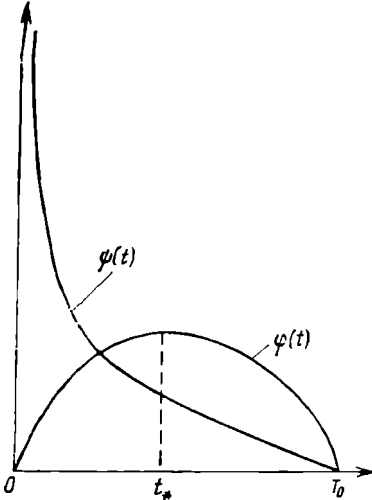


Рис. 14. Характер зависимости амплитуды $\psi(t)$ и полуширины $\varphi(t)$ локализованного решения (4), (4') от времени; $t = T_0$ — момент полного остывания

Если $v = \sigma + 1$, то (1) допускает автомодельное решение довольно необычного вида:

$$u_A(t, x) = (T + t)^{-1/\sigma} f(\eta), \quad \eta = x - \lambda \ln(T + t), \quad (6)$$

где $T \geq 1$, $\lambda > 0$ — постоянные. Функция $f(\eta) \geq 0$ удовлетворяет уравнению

$$(f^\sigma f)' + \lambda f' + \frac{1}{\sigma} f - f^{\sigma+1} = 0, \quad \eta \in \mathbf{R}. \quad (7)$$

Чтобы правильно сформулировать для этого уравнения краевые условия, рассмотрим такую аналогию с результатами § 9. Квазилинейное параболическое уравнение

$$v_\tau = (v^\sigma v_x)_x + \frac{1}{\sigma} v - v^{\sigma+1}, \quad \tau > 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

содержит в правой части функцию $Q(v) = v/\sigma - v^{\sigma+1} > 0$ при $v \in (0, \sigma^{-1/\sigma})$ и $Q(0) = Q(\sigma^{-1/\sigma}) = 0$. Поэтому для этого уравнения можно формально рассмотреть задачу Колмогорова — Петровско-

го — Пискунова и попытаться найти автомодельное решение типа бегущей волны $v(\tau, x) = f(\eta)$, $\eta = x - \lambda\tau$. Тогда функция $f \geq 0$ будет решением уравнения (7), и, следовательно, необходимо поставить краевые условия:

$$f(-\infty) = \sigma^{-1/\sigma}, \quad f(\infty) = 0. \quad (7')$$

Есть основания ожидать, что именно автомодельное решение (6), где f имеет конечную точку фронта, описывает асимптотику распространения температурной волны вправо (и влево, если сделать замену $\lambda \rightarrow -\lambda$) в задаче Коши для уравнения (1) при $v = \sigma + 1$. При этом возникает интересная проблема определения величины $\lambda > 0$, при которой задача (7), (7') имеет решение $f = 0$ при $\eta > 0$, $f > 0$ на $(-\infty, 0)$ и $f = f' = 0$ при $\eta = 0$.

Мы ограничимся выводом оценок размера носителя обобщенного решения задачи Коши при $v = \sigma + 1$, когда $u_0(x) = u(0, x)$ — финитная функция.

Во-первых, легко доказывается следующее утверждение: существуют такие постоянные $A > 0$ и $T \geq 1$, что

$$\text{mes sup} u(t, x) \leq A + \sigma^{-1} \ln(T + t), \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Для доказательства достаточно проверить, что функция

$$u_+ = (T + t)^{-1/\sigma} (1/2)^{1/\sigma} (-\eta)_+^{1/\sigma}, \quad \eta = \eta_0 + x - \sigma^{-1} \ln(T + t)$$

является верхним решением уравнения (1), и выбрать постоянные $T \geq 1$, $\eta_0 \in \mathbb{R}$ так, чтобы $u_0(x) \leq u_+(0, x)$ в \mathbb{R} . Отметим, что этот результат доказывает неразрешимость задачи (7), (7') ($f = 0$ при $\eta > 0$) в случае $\lambda > 1/\sigma$.

Во-вторых, имеет место оценка снизу: существуют такие постоянные $B > 0$, $\lambda \in (0, 1)$, что

$$\text{mes sup} u(t, x) \geq B + \lambda \ln(1 + t), \quad t \geq 0. \quad (8')$$

Доказательство проводится путем построения нижнего решения другого вида:

$$u_- = (1 + t)^{-1/\sigma} H (1 - \eta^2/a^2)_+^{1/\sigma}, \quad \eta = \eta_0 + x - \lambda \ln(1 + t),$$

где $H > 0$, $a > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ удовлетворяют некоторым неравенствам, в рамках которых они могут быть выбраны сколь угодно малыми. Поэтому существует такое $\eta_0 \in \mathbb{R}$, что $u_0(x) \geq u_-(0, x)$ в \mathbb{R} .

В силу последней оценки (8') финитные решения задачи Коши при $v = \sigma + 1$ не являются локализованными.

При $v > \sigma + 1$ асимптотическое поведение процесса описывается автомодельным решением обычного вида:

$$u_A = (T + t)^{-1/(v-1)} g_A(\xi), \quad \xi = |x| / (T + t)^{[v-(\sigma+1)]/[2(v-1)]}, \quad (9)$$

где функция $g_A \geq 0$ удовлетворяет задаче

$$(g'_A g_A)' + \frac{v-(\sigma+1)}{2(v-1)} g'_A \xi + \frac{1}{v-1} g_A - g_A^v = 0, \quad \xi > 0, \quad (10)$$

$$g'_A(0) = 0, \quad g_A(\infty) = 0.$$

Нетривиальное финитное обобщенное решение этой задачи существует при $\sigma + 1 < \nu < \sigma + 3$ (подобные задачи рассматриваются в гл. IV). В этом случае, пользуясь теоремой сравнения, из (9) получаем оценку носителя обобщенного решения:

$$|x_{\Phi}(t)| \sim t^{(\nu - (\sigma + 1)/[2(\nu - 1)])} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty,$$

т. е. в отличие от случая $\nu = \sigma + 1$ тепловая волна при $\nu > \sigma + 1$ движется по степенному закону (быстрее, чем в (8)). При этом (9) определяет, например, и закон изменения амплитуды решения со временем:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} u(t, x) \simeq g_A(0) t^{-1/(\nu - 1)}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Что касается случая $\nu > \sigma + 3$, то ситуация здесь более простая. Задача (10) финитного решения не имеет. При $\nu > \sigma + 3$ интенсивность теплового поглощения на фронте волны столь мала, что она не оказывает практического воздействия на скорость ее движения при больших t . В конечном итоге при $t \rightarrow \infty$ характер движения фронта не зависит от поглощения и определяется только диффузионным оператором, т. е. $u(t, x)$ в определенном смысле близко к решению уравнения $v_t = (v^\sigma v_x)_x$. Но для последнего известно автомодельное решение, которое описывает асимптотическую стадию растекания теплового возмущения (см. пример 8 гл. I). Поэтому $|x_{\Phi}(t)| \sim t^{1/(\sigma + 2)}$, $t \rightarrow \infty$, и, кроме того, $\sup_{x \in \mathbb{R}} u(t, x) \sim t^{-1/(\sigma + 2)}$ при $t \rightarrow \infty$.

Тепловые возмущения проникают со временем как угодно далеко, локализация отсутствует.

§ 13. О структуре аттрактора полулинейного параболического уравнения с поглощением в \mathbb{R}^N

В этом заключительном параграфе полнее, чем раньше, исследуется асимптотическое поведение решений задачи Коши для уравнения теплопроводности с поглощением в многомерном случае:

$$u_t = \Delta u - u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad \beta = \text{const} > 1, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0 \quad (\neq 0), \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad \sup u_0 < \infty. \quad (2)$$

Начальная функция u_0 равномерно Липшиц непрерывна в \mathbb{R}^N . Это — полулинейное уравнение ($\sigma = 0$), однако тот же анализ можно провести для более общего квазилинейного уравнения, рассматривавшегося в § 12.

Уравнение (1) — одно из немногих нелинейных параболических уравнений в \mathbb{R}^N с достаточно подробно изученным асимптотическим поведением решений при $t \rightarrow \infty$. В настоящее время существует весьма полное и в некоторых областях параметров исчерпывающее описание аттрактора задачи Коши для (1) как многообразия асимптотически устойчивых состояний (собствен-

ных функций нелинейной среды, с. ф.), каждому из которых отвечает свое множество притяжения \mathcal{W}^c в пространстве начальных функций. Более подробно о с. ф. нелинейной среды можно прочитать в гл. IV (см. [117, 53]).

Ниже в упрощенном виде дается описание структуры аттрактора уравнения (1), который определяет асимптотическое поведение решений задачи Коши при $t \rightarrow \infty$.

Давая в заключение вводной главы подробное исследование частной задачи (1), (2), мы преследуем две цели. Во-первых, это пример комплексного исследования довольно сложной нелинейной задачи. Оказывается, эволюция процесса теплопроводности с поглощением в данном случае может проходить при $t \rightarrow \infty$ самым разнообразным образом. В частности, мерой этого разнообразия служит тот факт, что аттрактор уравнения является бесконечномерным*).

И во-вторых, мы хотим особо отметить, сколь разительно отличаются друг от друга аттракторы нелинейного уравнения с поглощением (1) и уравнения с источником, допускающим неограниченные решения. Исследованию последнего посвящена значительная часть книги. Не вдаваясь в подробности, укажем главное различие.

Если, грубо говоря, уравнение с поглощением имеет практически во всех областях параметров «непрерывный» аттрактор, то в случае уравнения с источником аттрактор специальным образом «квантуется» и, по всей видимости, состоит из нескольких наборов дискретных состояний — собственных функций горения нелинейной диссипативной среды. Принципы построения дискретного аттрактора обсуждаются в гл. IV

Вернемся к задаче (1), (2). Первыми «претендентами» на роль элементов аттрактора уравнения являются, конечно, его автомодельные решения.

1. Автомодельные решения и условия их асимптотической устойчивости. Ниже для простоты рассмотрим радиально симметричные автомодельные решения уравнения (1) вида

$$u_A(t, x) = (T + t)^{-1/(\beta-1)} \theta_A(\xi), \quad \xi = |x|/(T + t)^{1/2}, \quad (3)$$

где $T \geq 0$ — постоянная, а функция $\theta_A \geq 0$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$A_R(\theta_A) \equiv \xi^{1-N} (\xi^{N-1} \theta_A')' + \frac{1}{2} \theta_A' \xi + \frac{1}{\beta-1} \theta_A - \theta_A^\beta = 0, \quad \xi > 0. \quad (4)$$

Оно имеет очевидное однородное решение

$$\theta_A(\xi) \equiv \theta_{II} = (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}, \quad \xi \geq 0. \quad (5)$$

Нас будут интересовать его нетривиальные решения, удовлетворяющие краевым условиям

$$\theta_A'(0) = 0, \quad \theta_A(\infty) = 0. \quad (6)$$

*) При $N > 1$; при $N = 1$ по крайней мере двумерным.

Формальный асимптотический анализ уравнения (4) при $\xi \rightarrow \infty$ (т. е. $\theta_\lambda \rightarrow 0$) дает возможные асимптотики решений задачи (4), (6): степенную

$$\theta_\lambda(\xi) = C\xi^{-2/(\beta-1)} + \quad \xi \rightarrow \infty; \quad C > 0, \quad (7)$$

или «экспоненциальную»

$$\theta_\lambda(\xi) = D\xi^{2/(\beta-1)-N} \exp\{-\xi^2/4\} + \quad \xi \rightarrow \infty; \quad D > 0. \quad (8)$$

Фактически (8) является предельным случаем (7) при $C = 0$.

1.1. Множества автомодельных функций $\{\theta_\lambda\}$ в случаях $\beta \geq 1 + 2/N$ и $\beta < 1 + 2/N$. Множества функций $\{\theta_\lambda\}$ в этих диапазонах изменения параметра β заметно отличаются друг от друга, что в конечном счете определяет различия в асимптотическом поведении решений задачи Коши (1), (2) при $\beta \geq 1 + 2/N$ и $\beta < 1 + 2/N$.

Предложение 21. Пусть $\beta \geq 1 + 2/N$. Тогда существует бесконечное множество решений задачи (4), (6) со степенной асимптотикой (7) и нет решений с экспоненциальной асимптотикой (8).

В случае $\beta \in (1, 1 + 2/N)$ существует бесконечный набор функций $\theta_\lambda(\xi)$ типа (7) и по крайней мере одно решение θ_λ экспоненциального вида (8).

Доказательство. Оно основано на построении подходящих верхних θ_+ и нижних θ_- решений задачи (4), (6). Будем сначала искать их в виде

$$\theta_\pm(\xi) = A_\pm (a_\pm^2 + \xi^2)^{-1/(\beta-1)}, \quad \xi \geq 0.$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} A_R(\theta_\pm) \equiv A_\pm (a_\pm^2 + \xi^2)^{-(2\beta-1)/(\beta-1)} & \left\{ \left(\frac{a_\pm^2 - 2N}{\beta-1} - A_\pm^{\beta-1} \right) a_\pm^2 + \right. \\ & \left. + \left[\frac{a_\pm^2 - 2N}{\beta-1} + \frac{4\beta}{(\beta-1)^2} - A_\pm^{\beta-1} \right] \xi^2 \right\}, \end{aligned}$$

и поэтому $A_R(\theta_+) \leq 0$ в R_+ (т. е. θ_+ — верхнее решение), если

$$A_+^{\beta-1} \geq \frac{a_+^2 - 2N}{\beta-1} + \frac{4\beta}{(\beta-1)^2}. \quad (9)$$

Соответственно $A_R(\theta_-) \geq 0$ в R_+ (θ_- — нижнее решение) в случае

$$a_-^2 > 2N, \quad A_-^{\beta-1} \leq \frac{a_-^2 - 2N}{\beta-1}. \quad (10)$$

Изменяя постоянные a_\pm , $A_\pm > 0$, удовлетворяющие (9), (10), можно подобрать бесконечное множество различных пар функций $\theta_+ \geq \theta_-$ в R_+ . Тогда, в соответствии с известным в теории эллиптических уравнений принципом, каждой паре $\{\theta_+, \theta_-\}$ отвечает по крайней мере одно положительное решение $\theta_\lambda(\xi)$ задачи (4), (6), причем $\theta_- \leq \theta_\lambda \leq \theta_+$ в R_+ .

Попробуем теперь найти θ_{\pm} экспоненциального вида:

$$\theta_{\pm}(\xi) = A_{\pm} \exp\{-\alpha_{\pm}\xi^2\}, \quad \xi \geq 0. \quad (11)$$

Тогда

$$A_{\mathbf{R}}(\theta_{\pm}) \equiv A_{\pm} \exp\{-\alpha_{\pm}\xi^2\} \left[\alpha_{\pm}(4\alpha_{\pm} - 1)\xi^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta - 1} - 2N\alpha_{\pm} - A_{\pm}^{\beta} \exp\{-\alpha_{\pm}\xi^2(\beta - 1)\} \right],$$

что дает следующие ограничения на величины постоянных α_{\pm} , $A_{\pm} > 0$:

$$\alpha_{+} < 1/4,$$

$$A_{+}^{\beta-1} \geq \left(\frac{1}{\beta-1} - 2N\alpha_{+} \right) \exp \left\{ \frac{\beta-1}{1-4\alpha_{+}} \left(\frac{1}{\beta-1} - 2N\alpha_{+} \right) \right\}, \quad (12)$$

$$\alpha_{-} = 1/4, \quad A_{-}^{\beta-1} \leq 1/(\beta-1) - N/2. \quad (13)$$

Из последнего неравенства следует, что нижнее решение вида (11) существует только при $\beta < 1 + 2/N$. В этом случае всегда можно выбрать, не нарушая (12), (13), постоянные α_{\pm} , A_{\pm} так, чтобы $\theta_{+} \geq \theta_{-}$ в \mathbf{R}_{+} , что доказывает существование при $\beta < 1 + 2/N$ функции $\theta_{\lambda}(\xi)$ с экспоненциальной асимптотикой.

Отсутствие такого решения при $\beta \geq 1 + 2/N$ устанавливает лемма, которая будет играть важную роль в дальнейшем. Предварительно сформулируем семейство задач Коши для уравнения (4):

$$A_{\mathbf{R}}(\theta) = 0, \quad \xi > 0; \quad \theta'(0) = 0, \quad \theta(0) = \mu, \quad (14)$$

где $\mu \in (0, \theta_{\mathbf{H}})$ — произвольный параметр (очевидно, что $\theta = \theta(\xi; \mu) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$ в случае $\mu > \theta_{\mathbf{H}}$). Естественно, если $\theta = \theta(\xi; \mu) > 0$ в \mathbf{R}_{+} при некотором μ и $\theta(\infty; \mu) = 0$, то решение $\theta(\xi; \mu)$ определяет некоторую автомодельную функцию $\theta_{\lambda}(\xi)$. Справедлива следующая

Лемма 3. Пусть $\beta \geq 1 + 2/N$. Тогда $\theta(\xi; \mu) > 0$ в \mathbf{R}_{+} при всех $\mu \in (0, \theta_{\mathbf{H}})$, причем θ не может иметь экспоненциальной асимптотики.

Доказательство. Умножим уравнение (14) на ξ^{N-1} и проинтегрируем его по интервалу $(0, \xi)$:

$$\xi^{N-1}\theta'(\xi) + \frac{1}{2}\theta(\xi)\xi^N = \int_0^{\xi} \eta^{N-1}\theta(\eta) \left[\frac{N}{2} - \frac{1}{\beta-1} + \theta^{\beta-1}(\eta) \right] d\eta. \quad (15)$$

При $\beta \geq 1 + 2/N$ ($N/2 - 1/(\beta-1) \geq 0$) правая часть этого равенства строго положительна. Если же $\theta(\xi_{*}) = 0$ ($\theta > 0$ на $(0, \xi_{*})$, $\xi_{*} < \infty$), то, очевидно, $\theta'(\xi_{*}) \leq 0$ и левая часть при $\xi = \xi_{*}$ не положительна, т. е. равенство (15) невозможно.

Второе утверждение леммы также вытекает из (15). Если θ имеет экспоненциальную асимптотику (как нетрудно показать, этим же свойством тогда обладает и производная θ'), то, пола-

гая $\xi = \infty$ в (15), аналогичным образом приходим к противоречию.

На рис. 15 схематически изображены функции $\theta = \theta(\xi; \mu)$ в случае $\beta \geq 1 + 2/N$ при различных значениях параметра $\mu \in (0, \theta_H)$. Из равенства (15) вытекает, что при $\beta \geq 1 + 2/N$ функция $\theta(\xi; \mu)$ монотонно возрастает по μ при $\xi \in \mathbf{R}_+$; так что различные кривые на рис. 15 пересекаться не могут.

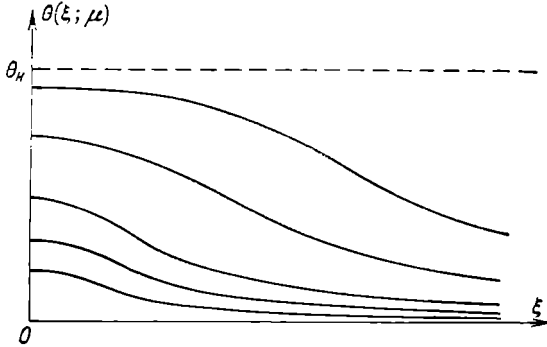


Рис. 15. Случай $\beta \geq 1 + 2/N$

В случае $\beta < 1 + 2/N$ функции $\theta(\xi; \mu)$ при различных μ ведут себя более разнообразно.

Лемма 4. Пусть $\beta \in (1, 1 + 2/N)$. Тогда найдется такое значение $\mu_1 \in (0, \theta_H)$, что при всех $\mu \in (0, \mu_1)$ решение задачи (14) обращается в нуль в некоторой точке $\xi = \xi_\mu < \infty$. При $\mu \in (\mu_1, \theta_H)$ существуют по крайней мере одно положительное решение θ с экспоненциальной асимптотикой и бесконечное множество решений, удовлетворяющих (7).

Доказательство. Второе утверждение доказано ранее. Справедливость первого устанавливается путем «линеаризации» уравнения (14) относительно тривиального решения $\theta \equiv 0$. Полагая $f_\mu(\xi) = \theta(\xi; \mu)/\mu$, получаем для новой функции f_μ уравнение

$$\mathbf{F}_R(f_\mu) \equiv \xi^{1-N} (\xi^{N-1} f'_\mu)' + \frac{1}{2} f'_\mu \xi + \frac{1}{\beta-1} f_\mu = \mu^{\beta-1} f_\mu^\beta \quad (16)$$

(очевидно, что $f_\mu(0) = 1$, $f'_\mu(0) = 0$) с малым параметром $\mu^{\beta-1}$ при нелинейном члене в правой части. Соответствующая линейная задача, отвечающая $\mu = 0$, имеет вид

$$\mathbf{F}_R(f_0) = 0, \quad \xi > 0; \quad f_0(0) = 1, \quad f'_0(0) = 0.$$

Заменой $\xi = 2(-\eta)^{1/2}$, $\eta < 0$, она сводится к краевой задаче для вырожденного гипергеометрического уравнения:

$$\eta f''_0 + \left(\frac{N}{2} - \eta \right) f'_0 - \frac{1}{\beta-1} f_0 = 0, \quad \eta < 0; \quad f_0(0) = 1,$$

все решения которого при $\beta < 1 + 2/N$ обращаются в нуль (см.,

например, [15]). В силу непрерывной зависимости решения уравнения (16) от $\mu^{\beta-1}$ это же справедливо для всех достаточно малых $\mu \in (0, \mu_1)$.

На рис. 16 показано примерное поведение решений задачи (14) при различных $\mu \in (0, \theta_H)$ в случае $\beta \in (1, 1 + 2/N)$.

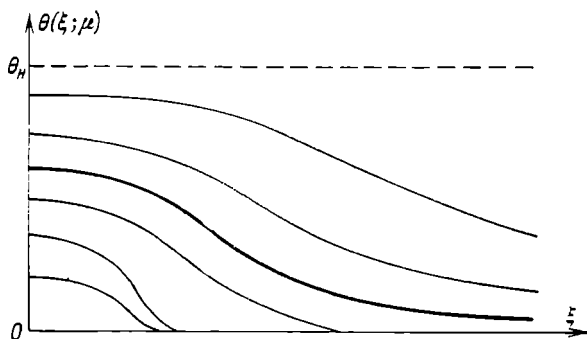


Рис. 16. Случай $\beta \in (1, 1 + 2/N)$. Жирной линией выделена функция $\theta_A(\xi) \equiv \theta(\xi; \mu_*)$ с «экспоненциальной» асимптотикой

В заключение приведем решение задачи (4), (6) при $\beta = 2$, представимое в явном виде:

$$\theta_A(\xi) = \frac{A_N}{(a_N + \xi^2)^2} + \frac{B_N}{a_N + \xi^2} > 0, \quad \xi \geq 0, \quad (17)$$

$$A_N = 48(- (N + 14) - 10(1 + N/2)^{1/2}), \quad B_N = 24(2 + (1 + N/2)^{1/2}), \\ a_N = 2(N + 14 + 10(1 + N/2)^{1/2}).$$

Оно имеет при $\xi \rightarrow \infty$ степенную асимптотику (7).

1.2. Устойчивость автомодельных решений. Основная проблема состоит в выделении в пространстве начальных функций областей притяжения, отвечающих каждой с.ф. рассматриваемой нелинейной задачи. В п. 1.1 автомодельные функции $\theta_A(\xi) > 0$ упорядочены за счет введения параметра $\mu = \theta_A(0) \in (0, \theta_H)$. Множество притяжения, отвечающее автомодельному решению (3), будем обозначать через \mathcal{W}_μ , а само решение u_A — через $u_A(t, x; T)$. Под асимптотической устойчивостью, как обычно, понимается сходимость автомодельного представления решения исходной задачи Коши (1), (2):

$$\theta_T(t, \xi) = (T + t)^{1/(\beta-1)} u(t, \xi (T + t)^{1/2}), \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (18)$$

к соответствующей функции $\theta_A = \theta(|\xi|; \mu)$. Величину $T \geq 0$ удобно определять по виду начальной функции $u_0 \in \mathcal{W}_\mu$. Очевидно, что нормировка (18) автомодельного решения (3) дает в точности функцию $\theta_A(\xi)$.

Вопрос об асимптотической устойчивости автомодельных решений очень просто решается в случае $\beta > 1 + 2/N$.

Предложение 22. При $\beta > 1 + 2/N$ множество притяжения \mathcal{W}_μ , отвечающее данному автомодельному решению (3), имеет вид

$$\mathcal{W}_\mu = \{u_0 \geq 0 \mid \exists T > 0: u_0(x) - T^{-1/(\beta-1)}\theta_A(|x|/T^{1/2}) = o(|x|^{-2/(\beta-1)}), |x| \rightarrow \infty\}. \quad (19)$$

Из предложения 21 следует, что данное множество притяжения определено оптимальным образом.

Доказательство. Пусть $u_0 \in \mathcal{W}_\mu$. Положим $w_0^+(x) = \max\{u_0(x), u_A(0, x; T)\}$, $w_0^-(x) = \min\{u_0(x), u_A(0, x; T)\}$ и через $w^\pm(t, x)$ обозначим решения уравнения (1), $w^\pm(0, x) = w_0^\pm(x)$ в \mathbb{R}^N . Очевидно, что $w^+ \geq u_A$, $w^- \leq u_A$, $w^- \leq u \leq w^+$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$. Функция $z^+ = w^+ - u_A \geq 0$ такова, что

$$z_t^+ = \Delta z^+ - (w^+)^{\beta-1} + u_A^{\beta-1} \leq \Delta z^+, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (20)$$

и поэтому

$$z^+(t, x) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{-\frac{|y|^2}{4t}\right\} z_0^+(x+y) dy. \quad (21)$$

В силу условия (19) $z_0^+(x) \leq \varphi(|x|)^{-1}$ в \mathbb{R}^N , где $\varphi(|x|) = o(|x|^{-2/(\beta-1)})$ при $|x| \rightarrow \infty$. Тогда из (21) получаем

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} z^+(t, x) = O\left(t^{-N/2} \int_0^\infty y^{N-1} \exp\left\{-\frac{y^2}{4t}\right\} \varphi(y) dy\right).$$

Отсюда после вывода аналогичной оценки $z^- = u_A - w^-$ получаем

$$\|\theta_T - \theta_A\|_{C(\mathbb{R}^N)} = O\left(t^{1/(\beta-1)} \int_0^\infty \eta^{N-1} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{4}\right\} \varphi(t^{1/2}\eta) d\eta\right), \quad (22)$$

причем, как нетрудно убедиться, правая часть стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Более простую оценку скорости сходимости можно получить при других ограничениях на u_0 . Например, из неравенств типа (21) следует, что в случае

$$u_0(x) - T^{-1/(\beta-1)}\theta_A(|x|/T^{1/2}) \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

имеет место оценка

$$\|\theta_T(t, \cdot) - \theta_A(\cdot)\|_{C(\mathbb{R}^N)} = O(t^{-N/2+1/(\beta-1)}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Любопытно, что из (19) вытекает единственность автомодельной функции θ_A с фиксированным главным членом в степенной асимптотике (7).

Как следует из оценок (22), данный метод доказательства устойчивости не проходит при $\beta \leq 1 + 2/N$. В этом случае (как, впрочем, и при любых $\beta > 1$) проблему асимптотической устойчивости можно частично решить, используя информацию о верхних θ_+ и нижних θ_- решениях уравнения (4).

Выпишем уравнение для автомодельного представления $\theta_T = \theta_T(\tau, \xi)$ в новом времени $\tau = \ln(1 + t/T)$:

$$\partial \theta_T / \partial \tau = A(\theta_T), \quad \tau > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (24)$$

$$\theta_T(0, \xi) = T^{1/(\beta-1)} u_0(T^{1/2} \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (25)$$

Здесь A — стационарный оператор:

$$A(\theta) \equiv \Delta_\xi \theta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \xi_i + \frac{1}{\beta-1} \theta - \theta^\beta. \quad (26)$$

Все функции $\theta_\lambda = \theta_\lambda(|\xi|)$ удовлетворяют уравнению $A(\theta_\lambda) = 0$ в \mathbb{R}^N . Таким образом, необходимо исследовать асимптотическую устойчивость стационарных решений уравнения (24). Важную роль играет

Лемма 5. Пусть θ_+ (θ_-) — какое-либо верхнее (нижнее) решение уравнения (4), т. е. $A_R(\theta_+) \leq 0$ ($A_R(\theta_-) \geq 0$) в \mathbb{R}^N . Тогда решение уравнения (24) с начальной функцией $\theta_T(0, \xi) = \theta_+(|\xi|)$ ($\theta_T(0, \xi) = \theta_-(|\xi|)$) является невозрастающим (неубывающим) по τ :

$$\partial \theta_T / \partial \tau \leq 0 \quad (\partial \theta_T / \partial \tau \geq 0), \quad \tau > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Доказательство. Оно основывается на принципе максимума. Действительно, функция $z = (\theta_T)_\tau$ удовлетворяет линейному параболическому уравнению, $z \leq 0$ в \mathbb{R}^N при $\tau = 0$ и т. д. Отметим, что нижнее решение θ_- в лемме 5 может и не быть гладким, достаточно, например, чтобы $\theta_- \in C^2$ всюду, где оно положительно. Таким образом, если радиально симметричная функция

$$\theta_T(0, \xi) = T^{1/(\beta-1)} u_0(T^{1/2} \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

является верхним или нижним решением уравнения (24), то $\theta_T(\tau, \xi)$ монотонно по τ , и, следовательно, существует такое решение $\theta_\lambda = \theta_\lambda(|\xi|)$ задачи (4), (6), что $\theta_T(\tau, \xi) \rightarrow \theta_\lambda(|\xi|)$ в \mathbb{R}^N при $\tau \rightarrow \infty$.

В общем случае проблема выделения множества притяжения тесно связана с задачей о классах единственности автомодельных функций $\theta_\lambda(|\xi|)$. Именно, справедливо

Предложение 23. Пусть θ_+ , $\theta_- \in C^2(\mathbb{R}^N)$ — соответственно верхнее и нижнее радиально симметричные решения уравнения (14), которым отвечает одна-единственная автомодельная функция $\theta_\lambda = \theta(|\xi|; \mu)$, $\theta_- \leq \theta_\lambda \leq \theta_+$ в \mathbb{R}^N . Тогда множество $\mathcal{H}_\mu = \{u_0 \geq 0 \mid \exists T > 0: \theta_-(|\xi|) \leq T^{1/(\beta-1)} u_0(T^{1/2} \xi) \leq \theta_+(|\xi|) \text{ в } \mathbb{R}^N\}$ принадлежит \mathcal{W}_μ .

В случае $\beta < 1 + 2/N$ важно отметить следующее асимптотическое свойство решений.

Лемма 6. Пусть $\beta \in (1, 1 + 2/N)$. Тогда, если $u_0 \neq 0$, то при некотором $T > 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta_T(\tau, \xi) \neq 0. \quad (27)$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $u_0(0) > 0$. Тогда, как следует из леммы 4, найдутся такие достаточно малые $T > 0$, $\mu > 0$, что

$$u_0(x) \geq T^{-1/(\beta-1)} \theta(|x|/T^{1/2}; \mu), \quad |x| < T^{1/2} \text{mes sup} \theta(|\xi|; \mu), \quad (28)$$

где $\theta(|\xi|; \mu)$ — решение задачи (14). Поэтому в силу принципа максимума (функция θ в (28) — нижнее решение уравнения (24))

$$u(t, x) \geq (T+t)^{-1/(\beta-1)} \theta(|x|/(T+t)^{1/2}; \mu), \\ t > 0, \quad |x| < (T+t)^{1/2} \text{mes sup} \theta(|\xi|; \mu);$$

и, следовательно,

$$\theta_T(\tau, \xi) \geq \theta(|\xi|; \mu) > 0, \quad |\xi| < \text{mes sup} \theta(|\xi|; \mu),$$

что гарантирует справедливость (27).

Это важный результат. Фактически (27) означает, что при $\beta \in (1, 1 + 2/N)$ асимптотическое поведение всех малых решений задачи Коши описывается именно автомодельными решениями типа (3). Как будет показано ниже, при $\beta \geq 1 + 2/N$ ситуация другая. Укажем еще одно любопытное свойство, которое вытекает из слобода доказательства леммы 6.

Предложение 24. При $\beta \in (1, 1 + 2/N)$ среди решений $\theta_A(|\xi|)$ задачи (4), (6) существует решение θ_A^* с экспоненциальной асимптотикой (8), которое является минимальным среди всех (в том числе и радиально несимметричных) решений эллиптического уравнения $A(\theta) = 0$ в \mathbf{R}^N в множестве притяжения \mathcal{W}_{μ_*} , $\mu_* = \theta_A^*(0)$, принадлежат все достаточно малые начальные функции u_0 , в частности множество

$$\mathcal{H}_{\mu_*} = \{u_0 \geq 0, u_0 \neq 0 \mid \exists T > 0: u_0(x) \leq T^{-1/(\beta-1)} \theta_A^*(|x|/T^{1/2}) \text{ в } \mathbf{R}^N\}.$$

Доказательство. Из леммы 5 следует, что решение задачи Коши (24), (25) с начальной функцией $\theta_T(0, \xi) = \theta(|\xi|; \mu)$, где $\theta(|\xi|; \mu)$ указана в доказательстве леммы 6, является критическим, т. е. $(\theta_T(\tau, \xi))_\tau \geq 0$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$. Поскольку $\theta_T(\tau, \xi)$ ограничена сверху (например, функцией $\theta_A(\xi)$) со степенной асимптотикой), то существует $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta_T(\tau, \xi) = \theta_A^*(\xi)$, и, очевидно,

θ_A^* имеет асимптотку (8). Монотонная стабилизация $\theta_T \rightarrow \theta_A^*$ при $\tau \rightarrow \infty$ обеспечивает минимальность θ_A^* среди всех решений уравнения $A(\theta) = 0$ в \mathbf{R}^N , а также включение $\mathcal{H}_{\mu_*} \subset \mathcal{W}_{\mu_*}$. Последнее вытекает из возможности построения оценки (28) при любых $u_0(x) \neq 0$.

2. Неавтономные собственные функции (приближенные автомодельные решения). Автомодельными решениями с пространственно-временным поведением (3) далеко не исчерпывается множество элементов аттрактора уравнения (1). Остальные элементы аттрактора представляют собой п. а. р., которые в отличие от точных решений (3) уравнению (1) не удовлетворяют.

2.1. Условия асимптотического вырождения процесса поглощения при $\beta > 1 + 2/N$. Возвращаясь к предложению 22. Полагая в (19) $\theta_\lambda = 0$, получаем множество притяжения

$$\mathscr{W}_0 = \{u_0 \geq 0 \mid u_0(x) = o(|x|^{-2/(\beta-1)}), |x| \rightarrow \infty\}. \quad (29)$$

Если $u_0 \in \mathscr{W}_0$, то $\theta_T(t, \xi) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\xi \in \mathbb{R}^N$. Интересно, что это одновременно доказывает известное утверждение (см. лемму 3) об отсутствии при $\beta > 1 + 2/N$ функций θ_λ с экспоненциальной асимптотикой.

Таким образом, в множестве \mathscr{W}_0 решение $u(t, x)$ эволюционирует по неавтономным законам. Асимптотическое поведение $u(t, x)$ при $u_0 \in \mathscr{W}_0$ определяется автомодельными решениями уравнения теплопроводности без поглощения:

$$u_t = \Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (30)$$

Если $u_0 \in \mathscr{W}_0$, то сток $-u^\beta$ становится несущественным при $t \rightarrow \infty$ по сравнению с диффузионным членом.

Нам понадобятся следующие автомодельные решения уравнения (30):

$$u_a(t, x; T) = (T+t)^{-1} f_a(\eta), \quad \eta = |x|/(T+t)^{1/2}. \quad (31)$$

Здесь $\gamma > 0$ — параметр; функция $f_a > 0$ удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned} \eta^{1-N} (\eta^{N-1} f_a')' + \frac{1}{2} f_a' \eta + \gamma f_a &= 0, \quad \eta > 0, \\ f_a'(0) &= 0, \quad f_a(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Хорошо известно [15, 137], что при $\gamma \in (0, N/2)$ эта задача имеет решение со степенной асимптотикой:

$$f_a(\eta) = M \eta^{-2\gamma} + o(\eta^{-2\gamma}), \quad \eta \rightarrow \infty; \quad M = \text{const} > 0. \quad (33)$$

Если $\gamma = N/2$, то единственным подходящим решением является

$$f_a(\eta) = f_a^*(\eta) = M \exp\{-\eta^2/4\}, \quad \eta \geq 0; \quad M > 0. \quad (34)$$

При $\gamma > N/2$ задача (32) не имеет положительных решений.

Пусть $u_0 \in \mathscr{W}_0$. Оказывается, автомодельные решения типа (33) определяют асимптотическое поведение почти всех решений $u(t, x)$ в случае $u_0 \notin L^1(\mathbb{R}^N)$, а решения с асимптотикой (34) — в случае $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Сначала рассмотрим случай $u_0 \notin L^1(\mathbb{R}^N)$, которому отвечают значения $\gamma < N/2$. Введем автомодельное представление решения

исходной задачи (1), (2):

$$f_T(t, \eta) = (T+t)^{\gamma} u(t, \eta(T+t)^{1/2}), \quad t > 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^N. \quad (35)$$

Предложение 25. Пусть $\beta > 1 + 2/N$ и

$$\beta(N-2) \leq N, \quad (36)$$

т. е. $\beta \in (1 + 2/N, \infty)$ при $N=1$ или $N=2$ и $\beta \in (1 + 2/N, N/(N-2)]$ при $N \geq 3$. Пусть существуют $\gamma \in (1/(\beta-1), N/2)$ и такие положительные постоянные T, M, A , что

$$u_0(\cdot) - u_a(0, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N), \quad (37)$$

$$u_0(x) \leq Au_a(0, x; T), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (37')$$

Тогда $\|f_T(t, \cdot) - f_a(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Положим $z = u_a - u$. Тогда

$$z_t = \Delta z + u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad z(0, x) \in L^1(\mathbb{R}^N). \quad (38)$$

Пусть $z^+ = \max\{0, z\} \geq 0$, $z^- = -\min\{0, z\} \geq 0$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$. Очевидно, что $\|z(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|z^+(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|z^-(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$, причем в силу (37) $z^\pm(0, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Из (38) прямо следует, что

$$\frac{d}{dt} \|z^+(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} u^\beta(t, x) dx, \quad \frac{d}{dt} \|z^-(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq 0. \quad (39)$$

Поскольку в силу (37') $u \leq Au_a$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, то из первой оценки (39) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|z^+(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &\leq A^\beta \int_{\mathbb{R}^N} u_a^\beta(t, x; T) dx = \\ &= (T+t)^{-\gamma\beta + N/2} A^\beta \|f_a\|_{L^\beta(\mathbb{R}^N)}^\beta, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что при $\gamma > 1/(\beta-1)$ и выполнении условия (36) имеет место включение $f_a \in L^\beta(\mathbb{R}^N)$ (см. (33)), и поэтому

$$\frac{d}{dt} \|z^+(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \text{const} \cdot (T+t)^{N/2 - \gamma\beta}, \quad t > 0.$$

Вторая оценка (39) означает, что $\|z^-(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \text{const}$ при $t > 0$. Учитывая теперь, что

$$\|z(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = (T+t)^{-\gamma + N/2} \|f_T(t, \cdot) - f_a(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

получаем оценку скорости сходимости:

$$\|f_T(t, \cdot) - f_a(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \begin{cases} O(t^{1-\gamma(\beta-1)}), & \gamma < (N+2)/(2\beta), \\ O(t^{\gamma-N/2} \ln t), & \gamma = (N+2)/(2\beta), \\ O(t^{\gamma-N/2}), & \gamma > (N+2)/(2\beta). \end{cases}$$

Следовательно, если $\gamma \in (1/(\beta-1), N/2)$, то $f_T \rightarrow f_a$ при $t \rightarrow \infty$ в $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Ограничение (36) на самом деле не является существенным, и от него можно избавиться, анализируя стабилизацию $f_T \rightarrow f_a$, $t \rightarrow \infty$ в норме $L^{p+1}(\mathbf{R}^N)$, где $p > 0$ — постоянная (выше рассматривался случай $p = 0$).

Теперь несколько слов о случае $u_0 \in \mathcal{W}_0 \cap L^1(\mathbf{R}^N)$, когда $\gamma = N/2$. Нетрудно вывести уравнение для автомодельного представления (35) при $\gamma = N/2$ в новом времени $\tau = \ln(1 + t/T)$:

$$\partial f_T / \partial \tau = \mathbf{B}(f_T) - (Te^\tau)^{1-N(\beta-1)/2} f_T^\beta, \quad \tau > 0, \quad \eta \in \mathbf{R}^N, \quad (40)$$

$$\mathbf{B}(f_T) \equiv \Delta_\eta f_T + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_T}{\partial \eta_i} \eta_i + \frac{N}{2} f_T.$$

Мы будем считать, что

$$f_T(0, \eta) \equiv T^{N/2} u_0(|\eta| T^{1/2}) \leq C \exp\{-|\eta|^2/4\}, \quad \eta \in \mathbf{R}^N,$$

где $C > 0$ — постоянная.

Из (40) в силу принципа максимума получаем

$$f_T(\tau, \eta) \leq C \exp\{-|\eta|^2/4\} \text{ в } \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N,$$

так что f_T равномерно ограничено. Дифференциальный оператор в (40) нетрудно привести к дивергентному виду после умножения обеих частей уравнения на $\exp\{|\eta|^2/4\}$:

$$\exp\left\{\frac{|\eta|^2}{4}\right\} \frac{\partial f_T}{\partial \tau} = \nabla_\eta \cdot \left(\exp\left\{\frac{|\eta|^2}{4}\right\} \nabla_\eta f_T \right) + \frac{N}{2} f_T \exp\left\{\frac{|\eta|^2}{4}\right\} - (Te^\tau)^{1-(\beta-1)N/2} f_T^\beta \exp\left\{\frac{|\eta|^2}{4}\right\},$$

из которого после скалярного умножения в $L^2(\mathbf{R}^N)$ на $(f_T)_\tau$ без труда выводится важная оценка:

$$\int_1^\infty \left\| \exp\left\{\frac{|\cdot|^2}{8}\right\} \frac{\partial}{\partial \tau} f_T(\tau, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 d\tau < \infty.$$

Она позволяет доказать, что всякий частичный предел $f_T(\tau, \eta) \rightarrow f_*(\eta)$ при $\tau \rightarrow \infty$ в $L^2(\mathbf{R}^N)$ является решением стационарного уравнения $\mathbf{B}(f_*) = 0$ в \mathbf{R}^N . Поскольку $f_T \leq C \exp\{-|\eta|^2/4\}$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$, то $f_* = f_a \equiv M \exp\{-|\eta|^2/4\}$ (см. (34)).

Тот факт, что предел $f_T(\tau, \eta) \rightarrow f_a(\eta)$ при $\tau = \tau_i \rightarrow \infty$ не зависит от выбора последовательности $\{\tau_i\}$, вытекает из своеобразной монотонности решения:

$$\frac{d}{d\tau} \|f_T(\tau, \cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \leq 0, \quad \tau > 0$$

(при этом учитывается, что функции $f_a \equiv M \exp\{-|\eta|^2/4\}$ монотонны по $M > 0$ в \mathbf{R}^N).

Остается убедиться, что $f_a \neq 0$ (т. е. $M > 0$). Это нетрудно сделать путем построения специального нижнего решения

уравнения (1):

$$-(t, x) = \psi(t) (T+t)^{-N/2} \exp\{-|x|^2/[4(T+t)]\}.$$

Легко проверить, что $(u_-)_t \leq \Delta u_- - u_-^\beta$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$, если

$$\psi'(t) \leq -\psi^\beta(t) (T+t)^{-N(\beta-1)/2}, \quad t > 0.$$

При $\beta > 1 + 2/N$ в качестве $\psi(t)$ можно взять функцию

$$\psi(t) = \psi_0 + A(T+t)^{-\varepsilon}, \quad t > 0; \quad \psi_0 > 0, \quad A > 0,$$

где $\varepsilon = N(\beta-1)/2 - 1$ и $\varepsilon A > (\psi_0 + AT^{-\varepsilon})^\beta$. Поэтому при соответствующих ограничениях на $u_0(x)$ имеем $u \geq u_-$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$, т. е. $f_T(\tau, \eta) > \psi_0 \exp\{-|\eta|^2/4\} > 0$ при любых $\tau > 0, \eta \in \mathbf{R}^N$.

2.2 Условия асимптотического вырождения процесса диффузии. Кратко охарактеризуем полученные выше результаты. Пусть

$$u_0(x) \sim |x|^{-\alpha}, \quad |x| \rightarrow \infty; \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (41)$$

Тогда ранее рассматривался случай $\alpha \geq 2/(\beta-1)$: $\alpha = 2/(\beta-1)$ — «резонансный» случай, при $\alpha > 2/(\beta-1)$, $\beta > 1 + 2/N$ происходит вырождение процесса поглощения. Таким образом, остается рассмотреть значения $\alpha < 2/(\beta-1)$ в (41).

Оказывается, в этом случае при $t \rightarrow \infty$ происходит вырождение диффузии, и в результате асимптотическое поведение $u(t, x)$ описывается автомодельными решениями уравнения первого порядка

$$u_t = -u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad (42)$$

которые удобно записать в виде

$$u_a(t, x) = (T+t)^{-1/(\beta-1)} f_a(\xi), \quad (43)$$

$$\xi = x/(T+t)^{1/(\alpha(\beta-1))} \in \mathbf{R}^N; \quad T = \text{const} > 0.$$

Подстановка (43) в (42) дает для функции $f_a \geq 0$ уравнение

$$\frac{1}{\alpha(\beta-1)} \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_a}{\partial \xi_i} \xi_i + \frac{1}{\beta-1} f_a - f_a^\beta = 0, \quad (44)$$

$$\xi \in \mathbf{R}^N, \quad f_a(\xi) \rightarrow 0, \quad |\xi| \rightarrow \infty.$$

Оно легко интегрируется, и общее решение задачи (44) выглядит следующим образом:

$$f_a(\xi) = \{(\beta-1) + G^{1-\beta}(\xi/|\xi|) |\xi|^{\alpha(\beta-1)}\}^{-1/(\beta-1)}, \quad \xi \in \mathbf{R}^N, \quad (45)$$

где $G(\omega) \geq 0$ — произвольная, достаточно гладкая функция, определенная на единичной сфере $S = \{\omega \in \mathbf{R}^N | |\omega| = 1\}$. Отметим, что в общем случае функции (45) не радиально симметричны.

Перейдем теперь к определению множества притяжения, соответствующего каждому п. а. р. (43). Ниже через

$$f_T(t, \xi) = (T+t)^{1/(\beta-1)} u(t, \xi(T+t)^{1/(\alpha(\beta-1))}) \quad (46)$$

обозначается автомодельное представление $u(t, x)$, определяемое в соответствии с (43).

Предложение 26. Пусть

$$\frac{(2-N)_+}{\beta-1} < \alpha < \min \left\{ \frac{2}{\beta-1}, N \right\} \quad (47)$$

и, кроме того, в (45)

$$G(\omega) > 0, \quad \omega \in S; \quad G(\omega) \in C^2(S).$$

Тогда существует $p > 0$ такое, что при любых начальных функциях u_0 , удовлетворяющих при некотором $T > 0$ условию $|u_0(\cdot) - u_a(0, \cdot)|^{(p+1)/2} \in H^1(\mathbf{R}^N)$, имеет место стабилизация $f_T(t, \cdot) \rightarrow f_a(\cdot)$ в $L^{p+1}(\mathbf{R}^N)$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Функция $z = u - u_a$ удовлетворяет в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ уравнению

$$z_t = \Delta z - zg(t, x) + h(t, x), \quad (48)$$

$$g(t, x) = \beta \int_0^1 (\eta u(t, x) + (1 - \eta) u_a(t, x))^{\beta-1} d\eta > 0,$$

$$h(t, x) = \Delta u_a(t, x).$$

По предположению $z(0, \cdot) \in L^{p+1}(\mathbf{R}^N)$, $\nabla |z(0, \cdot)|^{(p+1)/2} \in L^2(\mathbf{R}^N)$. Умножим скалярно в $L^2(\mathbf{R}^N)$ обе части (48) на $|z|^{p-1}z$. Тогда, используя естественные предположения относительно регулярности обобщенного решения линейного уравнения (48), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \|z\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)}^{p+1} &= - \frac{4p}{(p+1)^2} \|\nabla |z|^{(p+1)/2}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 + \\ &+ (|z|^{p-1}z, \Delta u_a) - (|z|^{p+1}, g) \leq (|z|^{p-1}z, \Delta u_a). \end{aligned} \quad (49)$$

Пусть выполняются условия

$$N - (\alpha + 2)(p + 1) < 0, \quad N + [\alpha(\beta - 1) - 2](p + 1) > 0. \quad (50)$$

Тогда, как нетрудно проверить, $\Delta_\varepsilon f_a \in L^{p+1}(\mathbf{R}^N)$. Используя неравенство Гёльдера

$$(|z|^{p-1}z, \Delta u_a) \leq \|z\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)}^p \|\Delta u_a\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)}$$

а также вытекающее из (43) тождество

$$\begin{aligned} \|\Delta u_a(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)} &\equiv (T+t)^\delta \|\Delta_\varepsilon f_a\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)} \\ \delta &= \frac{N - (\alpha + 2)(p + 1)}{\alpha(\beta - 1)(p + 1)} < 0, \end{aligned}$$

приходим от (49) к следующей оценке:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|z(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)} &\leq (T+t)^\delta m_a, \quad t > 0; \\ m_a &= \|\Delta_\varepsilon f_a\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)} < \infty. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)} &\equiv (T+t)^\varepsilon \|f_T(t, \cdot) - f_a(\cdot)\|_{L^{p+1}(\mathbf{R}^N)} \\ \varepsilon &= \frac{1}{\beta-1} \left[\frac{N}{\alpha(p+1)} - 1 \right], \end{aligned}$$

получаем окончательную оценку скорости сходимости:

$$\|f_T(t, \cdot) - f_a(\cdot)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} = \begin{cases} O(t^{\delta+1-\varepsilon}), & \delta > -1, \\ O(t^{-\varepsilon} \ln t), & \delta = -1, \\ O(t^{-\varepsilon}), & \delta < -1, \end{cases} \quad (51)$$

при $t \rightarrow \infty$. Потребуем в дополнение к (50), чтобы $\varepsilon > 0$, т. е.

$$N - \alpha(p+1) > 0. \quad (52)$$

Тогда, как нетрудно проверить, (51) обеспечивает стабилизацию f_T к f_a при $t \rightarrow \infty$, причем система неравенств (50), (52) совместна при выполнении условия (47).

2.3. П. а. р. при критическом значении параметра $\beta = 1 + 2/N$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. В этом случае возникает, пожалуй, самое необычное п. а. р.:

$$u_a(t, x) = [(T+t) \ln(T+t)]^{-N/2} g_* \left(\frac{x}{(T+t)^{1/2}} \right), \quad T > 1, \quad (53)$$

где функция $g_*(\xi) > 0$ будет определена ниже. Этому п. а. р. отвечает автомодельное представление

$$g_T(t, \xi) \equiv [(T+t) \ln(T+t)]^{N/2} u(t, \xi(T+t)^{1/2}). \quad (54)$$

Тот факт, что $u(t, x)$ при малых $u_0(x) > 0$ эволюционирует при $t \rightarrow \infty$ в соответствии с пространственно-временной структурой (53), вытекает из существования верхнего и нижнего решений уравнения (1) следующего вида:

$$u_-(t, x) = A [(T+t) \ln(T+t)]^{-N/2} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4(T+t)} \right\}, \quad (55)$$

$$A = \text{const} \in (0, (N/2)^{N/2}),$$

$$u_+(t, x) =$$

$$= H [(T+t) \ln(T+t)]^{-N/2} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4(T+t) [1 + a \ln^{-1}(T+t)]^2} \right\}, \quad (56)$$

$a = \text{const} > 0$, $H = H(a) > 0$ может быть сколь угодно большим. Это нетрудно проверить, подставляя указанные выражения в (1).

Можно показать, что при всех достаточно малых $u_0(x)$ (например, при $u_0 \sim \exp\{-|x|^2\}$, $|x| \rightarrow \infty$) по истечении конечного времени $t_1 > 0$ будет выполняться условие $u_- \leq u \leq u_+$ при $t = t_1$, $x \in \mathbb{R}^N$, и, следовательно, $u_- \leq u \leq u_+$ для любых $t \geq t_1$, $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда из (54) получаем оценку

$$A \exp \left\{ -\frac{|\xi|^2}{4} \right\} \leq g_T(t, \xi) \leq H \exp \left\{ -\frac{|\xi|^2}{4 [1 + a \ln^{-1}(T+t)]^2} \right\} \quad (57)$$

Следовательно, это же справедливо для возможной предельной функции g_* причем оценки имеют вид

$$A \exp \left\{ -|\xi|^2/4 \right\} \leq g_*(\xi) \leq H \exp \left\{ -|\xi|^2/4 \right\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (57')$$

Вид $g_*(\xi)$ уточняется с помощью уравнения, которому удовлетворяет автомодельное представление $g_T = g_T(\tau, \xi)$, $\tau = \ln(1 + t/T)$:

$$\frac{\partial g_T}{\partial \tau} = \Delta_{\xi} g_T + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial g_T}{\partial \xi_i} \xi_i + \frac{N}{2} g_T + \frac{1}{\tau + \ln T} \left(\frac{N}{2} g_T - g_T^{1+2/N} \right). \quad (58)$$

В силу равномерной ограниченности $g_T(\tau, \xi)$ (см. (57)) из последнего уравнения, которое приводится к дивергентному виду после умножения на $\exp\{|\xi|^2/4\}$, нетрудно получить ограниченность $\exp\{|\xi|^2/8\}(g_T)_{\tau}$ в $L^2((1, \infty) \times \mathbb{R}^N)$. Эта оценка позволяет произвести предельный переход $\tau \rightarrow \infty$ в (58), в результате которого для предельной функции $g_*(\xi)$ получаем стационарное уравнение

$$\mathbf{B}(g_*) \equiv \Delta_{\xi} g_* + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial g_*}{\partial \xi_i} \xi_i + \frac{N}{2} g_* = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

Следовательно,

$$g_*(\xi) = M \exp\{-|\xi|^2/4\}, \quad M = \text{const}, \quad (59)$$

причем в силу (57') $M \in [A, H]$.

Ниже мы ограничимся доказательством теоремы единственности предельной функции g_* .

Предложение 27. Пусть $\beta = 1 + 2/N$, $u_0 = u_0(|x|) \sim \exp\{-|x|^2\}$ при $|x| \rightarrow \infty$. Пусть $g_T(\tau, \xi) \rightarrow g_*(\xi)$, $\tau \rightarrow \infty$, равномерно на каждом компакте из \mathbb{R}^N . Тогда

$$g_*(\xi) = (N/2)^{N/2} (1 + 2/N)^{N^2/4} \exp\{-|\xi|^2/4\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N \quad (60)$$

Доказательство. В силу (59) нам необходимо только показать, что

$$M = (N/2)^{N/2} (1 + 2/N)^{N^2/4}. \quad (61)$$

Интегрируя (58) по \mathbb{R}^N , что можно делать в силу (57), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \|g_T(\tau, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &= \frac{1}{\tau + \ln T} G^*(g_T)(\tau) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\tau + \ln T} \left[\frac{N}{2} \|g_T(\tau, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} - \|g_T(\tau, \cdot)\|_{L^{1+2/N}(\mathbb{R}^N)}^{1+2/N} \right], \quad \tau > 1. \end{aligned} \quad (62)$$

Из (57) получаем, что $\|g(\tau, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ ограничена сверху равномерно по τ . Поэтому, как следует из (62), должен сходиться интеграл:

$$\left| \int_1^{\infty} \frac{G^*(g_T)(\tau)}{\tau + \ln T} d\tau \right| < \infty.$$

Поскольку в условиях теоремы $G^*(g_T)(\tau) \rightarrow G^*(g_*)$ при $\tau \rightarrow \infty$, получаем условие $\|g_*\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} > 0$ (см. (57')) и

$$G^*(g_*) \equiv \frac{N}{2} \|g_*\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} - \|g_*\|_{L^{1+2/N}(\mathbb{R}^N)}^{1+2/N} = 0,$$

откуда следуют (61), (60).

З а м е ч а н и е. Элементарный анализ поведения траекторий «обыкновенного дифференциального уравнения» (62) при $\tau \rightarrow \infty$ позволяет также доказать стабилизацию $g_T(\tau, \xi) \rightarrow g_*(\xi)$ в \mathbb{R}^N при $\tau \rightarrow \infty$, где g_* — функция (60).

В сформулированных условиях п. а. р. (53) удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \Delta u_a - \frac{N}{2} \frac{u_a}{(T+t) \ln(T+t)}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (63)$$

которое существенно отличается от исходного.

В заключение еще раз обратим внимание на любопытные трансформации, которые может претерпевать полулинейное параболическое уравнение (1) на асимптотической стадии. В зависимости от величины β и начальной функции $u_0(x)$ оно эквивалентно (в смысле п. а. р.) уравнениям трех типов: линейному уравнению без стока (30), уравнению первого порядка без диффузии (42) и, наконец, уравнению (63) с линейным стоком.

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

§ 1. Предварительные сведения, необходимые для вывода элементарных результатов пп. 1—3, содержатся в известных книгах [128, 165, 259] (см. также [21, 266, 270]). Предложение 4 доказано в [24]; см. также более общие утверждения в [65], и в § 4 гл. VI.

§ 2. По поводу предложения 5 см. [87, 85]. При изложении п. 2 мы следуем [65]. Другой способ доказательства утверждения, близкого по смыслу к предложению 6, дан в [227] (отметим, что в рамках метода [227] нельзя получить важную для приложений оценку скорости сходимости $\theta \rightarrow f_A$ при $t \rightarrow \infty$).

§ 3. Существование решения задачи (5) при весьма слабых ограничениях на коэффициент $k(u)$ установлено разными способами в [180, 181, 197]. При доказательстве *) предложена 7 применяется метод [65]; обоснование законности используемых преобразований можно найти в [258].

Автомодельные решения (14) в п. 2.1 впервые рассматривались в работах [9—11], где доказано существование и единственность решения задачи (16), (17) (позднее другим способом это же установлено в [216]). Асимптотическая устойчивость решений (14) по отношению к возмущениям начальной функции, граничного режима и уравнения (коэффициента $u^\sigma \rightarrow k(u)$) доказана в [24, 62]; см. об этом в гл. VI, где на основе подобных решений построены семейства п. а. р. уравнений нелинейной теплопроводности с нестепенными коэффициентами. Разрешимость задачи (19') и единственность f_A установлены в [8—11, 216]. Вопросы, связанные с асимптотической устойчивостью решения (19) и построенном соответствующем семействе п. а. р. широкого класса краевых задач, рассматриваются в [62] (эти же вопросы кратко затронуты в § 3 гл. VI). Локализованное автомодельное решение (21) исследовано в [159, 94, 156]. Его асимптотическая устойчивость

*) Другие оценки скорости сходимости получены, например, в [269, 255].

доказана в [24, 45] (см. § 4 гл. III), соответствующее семейство п. а. р. построено в [24, 62, 65] (§ 3, 4 гл. VI). Исследованию автомодельных решений (23) посвящена значительная часть гл. III, где можно найти дополнительную информацию и необходимые ссылки.

§ 4. Существование и единственность автомодельной функции f_λ в (5) различными способами установлены в [168, 178]. Оценка скорости сходимости (8) при произвольных начальных функциях $u_0 \neq 0$ получена в [178]. В п. 4 указан другой (как нам кажется, более простой) метод доказательства. Краевая задача с условием (13) подробно рассматривалась в [170], где анализировались также знакопеременные решения. Любопытно, что в последнем случае в отличие от предложения 9 возможна стабилизация $u(t, x)$ при $t \rightarrow \infty$ в специальной норме к пространственно неоднородной функции.

§ 5. Первые теоремы существования и единственности для уравнений типа быстрой диффузии весьма общего вида доказаны в [151] (случай $N = 1$), где обнаружен эффект полного остывания в краевой задаче на ограниченном интервале. Аналогичное исследование многомерного уравнения (1) при $m \in (0, 1)$ выполнено, например, в [176, 183, 191, 257]. В [183] указан способ доказательства полного остывания в краевой задаче (1) — (3).

Доказательство предложения 10 проводится другим способом. Асимптотическая устойчивость автомодельного решения (4) при некоторых ограничениях на $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ установлена в [187]. Отметим, что в рамках подхода, изложенного в [187], в процессе доказательства асимптотической устойчивости определяются условия стабилизации к неустойчивому стационарному решению квазилинейного параболического уравнения (такие задачи встречаются в § 5, 7 гл. IV).

§ 6. Здесь мы в основном следуем [57]. Первый результат о существовании эффекта полного остывания в задаче Коши (1), (2) получен в [183] в случае $0 < m < (N - 2)/N$, $N \geq 3$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$, $p > (1 - m)/(2N)$. Условия на u_0 в предложении 11 являются более слабыми. Вопрос об асимптотической устойчивости автомодельных решений (3), обладающих свойством полного остывания, остается открытым; метод [187], в случае задачи Коши в \mathbb{R}^N , по-видимому, не применим.

Пример 2 взят из [183]. Предложение 12 доказано в [57] путем построения строго положительного в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ нижнего решения задачи. Там же указан способ доказательства асимптотической устойчивости автомодельных решений (14) при $0 < m < (N - 2)_+/N$. Предложения 11, 12 весьма точно определяют границу между множествами начальных функций $\{u_0\}$, при которых существует или отсутствует полное остывание за конечное время. Отсутствие полного остывания при всех $m > (N - 2)_+/N$ доказано в [176] (см. об этом также в [257]).

§ 7. Элементарные преобразования $u \rightarrow E(u)$ (пример 3) будут использованы в § 2 гл. V при изложении специальной теории сравнения решений различных нелинейных параболических уравнений. Существенное упрощение уравнения (3) в примере 4 (правая часть (8) не зависит от r) достигается в случае $\sigma = -4/3$, $N = 1$, когда уравнение (9) инвариантно относительно пятипараметрической группы Ли точечных преобразований [72, 73]. По поводу преобразования (10) и о других свойствах решений уравнения (9) см. [126]. Об одном применении преобразования в примере 5 см. в § 7 гл. IV, а также в [206, 208, 42]. Возможность линеаризации уравнения (15) известна довольно давно (см. близкие результаты в [274, 172]).

Теоретико-групповые аспекты возможности линеаризации этого уравнения анализировались в [190]. (отметим, что (15) является единственным уравнением нелинейной теплопроводности $u_t = (k(u)u_x)_x$, инвариантным относительно нетривиальной группы Ли — Беклунда; см. [97, 190, 235]). Пример 6 взят из [190]. Пример 7 показывает новые свойства «многомерного» уравнения с коэффициентом $k(u) = u^{-2}$. Предложение 14 доказано в [193]; отметим, что здесь используются те же преобразования, что и в [190, 97]. Эквивалентность уравнений с $k_i(u) = u^{\sigma_i}$, $\sigma_1 + \sigma_2 + 2 = 0$, ранее установлена в [248]; тот же результат на основе групповых методов доказан в [97]. В примере 8 приведено новое частное решение уравнения (36), ко-

торое не может быть найдено с помощью известной групповой теории. Предложение 15 служит естественным обобщением результата [193].

§ 8. Теоремы существования и единственности решения вырождающихся уравнений типа (1) и (2) с младшими членами доказаны в [18, 131, 223, 276]*). Непрерывность модуля градиента решения (т. е. теплового потока) уравнения вида (2) установлена в [169]. Автомодельное решение (3) в примере 9 является частным случаем решений квазилинейного уравнения более сложного вида, построенных впервые в [8]. Заменой $u_x = v$ уравнение (1) сводится к рассматривавшемуся ранее уравнению $v_t = -(|v|^{\alpha})_{xx}$; поэтому все результаты по асимптотической устойчивости и п. а. р. без принципиальных изменений переносятся на случай градиентной целийности (это также относится к локализованному решению из примера 10).

§ 9. О некоторых обобщениях и развитии результатов работы [107] см. в [104, 105, 201, 210, 266, 267, 270]. Доказательство предложения 17 иллюстрирует технику вывода проточечных оценок решений параболических уравнений, а также один простейший метод сравнений решений различных уравнений; более сложные примеры приведены в гл. V.

§ 10. Семейства автомодельных решений (3) и (7) построены в [72, 73]; при изложении основных выводов используются результаты [74]. Сформулированный здесь результат о неустойчивости стационарного решения (6) и существовании отвечающего ему нетривиального множества притяжения служит иллюстрацией к исследованию, выполненному в § 5, 7 гл. IV (где фактически дается способ построения широкого множества притяжения неустойчивого стационарного решения квазилинейного параболического уравнения). Идея применения двухпараметрического семейства инвариантных решений (18) для исследования свойств бегущих волн в задаче Коши для (17) принадлежит В. А. Дородницыну.

§ 11. Однопараметрическое семейство решений (3), возможность построения которых из групповых соображений установлена в [72, 73], рассматривалось в [74].

§ 12. Первый пример локализованного решения в среде со стоками ($v = 1$ в (1)) построен в [133]; см. об этом подробнее в обзоре, помещенном в работе [53]. Более общее, чем предложение 19, утверждение доказано в [102]. Первое упоминание об эффекте полного остывания в среде с поглощением имеется в [151]; исследование условий проявления этого эффекта в случае уравнения общего вида проводилось в [102]. Для исследования асимптотической устойчивости автомодельных решений (2) и разрешимости задачи (2') применимы методы из § 1, 5 гл. IV. Частное решение уравнения (3) (пример 11) для случая $N = 1$ приведено в [106], его многомерный аналог построен в [134]. Результаты п. 3, относящиеся к оценкам величин носителя обобщенного решения, доказаны в [188], где приведены ссылки на ранние работы. Более подробные сведения о свойствах решений нелинейных уравнений теплопроводности со стоками можно найти в [102, 103, 106, 171, 189, 200, 218, 233] (см. обзор в [53]).

§ 13. При изложении всех результатов пп. 1 и 2.1 мы следовали [53]. Решение (17) найдено в [14].

Отметим, что всякое нетривиальное автомодельное решение (3) в случае $T = 0$ порождено сингулярной начальной функцией $u_0(x)$ следующего вида: если $1 < \beta < 1 + 2/N$ и $\theta_A(\xi)$ — решение типа (8), то $u_0(x) \simeq D'\delta^l(x)$, где $l = 2/N(\beta - 1) > 1$; если $\theta_A(\xi)$ имеет степенную асимптотику (7), то $u_0(x) = C|x|^{-2/(\beta-1)}$ в $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $C > 0$ — постоянная, указанная в (7). При $1 < \beta \leq 1 + 2/N$ все эти начальные функции не принадлежат $L^1(\mathbb{R}^N)$. Тем самым построенные автомодельные решения указывают, вероятно, оптимальную степень сингулярности, которая необходима для существования нетривиального решения задачи Коши.

Сделанные выше выводы правильно согласуются с результатами [192], где показано, что при $\beta \geq 1 + 2/N$ и $u_0(x) = \delta(x)$ нетривиальное решение не существует, т. е. $u \equiv 0$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ (обратим внимание, что при $\beta \geq 1 + 2/N$ нет автомодельного решения (3) с $\theta_A \neq 0$ вида (8)).

*) См. также приведенную там библиографию.

Более сильное, чем предложение 22, утверждение доказано в [228], где при $\beta > 1 + 2/N$ (случай $1 < \beta \leq 1 + 2/N$ не рассматривался) установлены существование и асимптотическая устойчивость бесконечномерного множества несимметричных автомодельных решений (3), $\xi = x/(T+t)^{1/2} \in \mathbb{R}^N$.

Метод работы [228] будет в дальнейшем использован в § 3 гл. IV. Обобщение предложения 25 на случай более произвольных начальных функций u_0 ($\beta > 1 + 2/N$) содержится в [228, 218], в [228] определены условия стабилизации $u(t, x)$ к автомодельным решениям вида (31), где $\eta = x(T+t)^{-1/2} \in \mathbb{R}^N$ и $f_a \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ($u^0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$); в [218] рассмотрен случай $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, тогда f_a всегда имеет вид (34).

Результаты из п. 2.2 изложены в [54]. Стабилизация $f_T \rightarrow f_a$, $t \rightarrow \infty$ в предложении 26, в частности, означает, что $t^{1/(\beta-1)}u(t, x) \rightarrow (\beta-1)^{-1/(\beta-1)}$, $t \rightarrow \infty$, для любого $x \in \mathbb{R}^N$. Этот результат ранее был получен в [218] (разумеется, он не дает представления о пространственной структуре теплового возмущения). Отметим, что в силу достаточной произвольности функции $G(\omega)$ в (45) множество асимптотически устойчивых п. а. р. (43) является бесконечномерным. Справедливость предложения 27 и всех необходимых для его доказательства вспомогательных утверждений установлена в [53]. Оценка сверху амплитуды решения задачи ранее обсуждалась в [218].

ЛОКАЛИЗАЦИЯ (ИНЕРЦИЯ) ТЕПЛА

Эта глава целиком посвящена исследованию неограниченных решений параболических уравнений. В ней изучаются режимы распространения тепла в сплошной среде, температура на границе которой изменяется в режиме с обострением. Рассматриваются случаи степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и постоянной теплопроводности. Исследование основано на анализе неограниченных автомодельных решений и не требует привлечения специальных математических методов.

Главное внимание уделяется изучению физических свойств граничных режимов с обострением. Подробно рассматриваются различные режимы распространения тепловых волн, выясняются условия проявления и физическая сущность эффекта локализации тепла, отражающего своеобразную инерционность сильно нестационарных диффузионных процессов. Анализ процессов теплопроводности проводится в размерном виде, что позволяет непосредственно использовать полученные результаты для вывода реальных физических оценок. Эти результаты применяются в гл. V, VI при изучении инерции тепла в средах с произвольными теплофизическими свойствами.

§ 1. Понятие локализации тепла

1. Граничный режим с обострением. Рассматривается одномерный процесс распространения тепла в среде, занимающей полупространство $\{x > 0\}$, с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры: $k = k(u) > 0$ при $u > 0$, $k(0) \geq 0$.

На границе $x = 0$ температура изменяется в режиме с обострением, т. е. обращается в бесконечность в некоторый конечный момент времени $t = T > 0$ (T — момент обострения).

Процесс описывается первой краевой задачей для квазилинейного параболического уравнения

$$u_t = (\varphi(u))_{xx} \equiv (k(u)u_x)_x, \quad k \in C^2((0, \infty)) \cap C(\{0, \infty\}) \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x > 0; \quad \sup u_0 < \infty, \quad \sup |[\varphi(u_0)]_x| < \infty \quad (2)$$

и граничным условием

$$u(t, 0) = u_1(t) > 0, \quad 0 < t < T; \quad u_1 \in C^1([0, T]); \quad u_1(t) \rightarrow \infty, \\ t \rightarrow T^-. \quad (3)$$

Выполнено условие согласования $u_1(0) = u_0(0)$.

Основная цель состоит в изучении поведения решения задачи при $t \rightarrow T^-$. При этом нас особенно будут интересовать условия локализации тепла — парадоксального свойства процесса теплопроводности, которое проявляется на асимптотической стадии режима с обострением.

2. Примеры локализации в крайних задачах.

Пример 1. Остановившаяся тепловая волна (см. § 3 гл. I). Рассмотрим задачу (1) — (3), где

$$k(u) = k_0 u^\sigma, \quad \sigma = \text{const} > 0, \\ k_0 = \text{const} > 0,$$

$$u_1(t) = A_S (T - t)^{-1/\sigma}, \\ t < T, \quad A_S = \text{const} > 0, \quad (4)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} A_S T^{-1/\sigma} (1 - x/x_S)^{2/\sigma}, & 0 < x \leq x_S, \\ 0, & x > x_S. \end{cases}$$

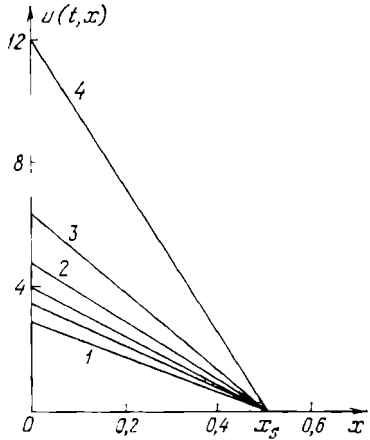


Рис. 17. Остановившаяся тепловая волна. Параметры: $\sigma = 2$, $n = -0,5$, $k_0 = 0,5$, $A_S = 0,354$, $x_S = 0,5$, $T = 1$: $1 - T - t = 1,25 \cdot 10^{-2}$; $2 - T - t = 5,3 \cdot 10^{-3}$; $3 - T - t = 2,9 \times 10^{-3}$; $4 - T - t = 9 \cdot 10^{-4}$.

Эта задача имеет решение в разделяющихся переменных:

$$u_S(t, x) = \begin{cases} A_S (T - t)^{-1/\sigma} (1 - x/x_S)^{2/\sigma}, & 0 < x \leq x_S, \\ 0, & x > x_S, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$x_S = [2k_0 A_S^\sigma (\sigma + 2)/\sigma]^{1/2}. \quad (6)$$

Укажем основные свойства решения (5), (6):

а) при $0 \leq x < x_S$ температура $u(t, x)$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow T^-$,

б) $u_S(t, x) = 0$ при всех $t \in (0, T)$ для любых $x \geq x_S$ (рис. 17); точка $x = x_S$, в которой температура и поток тепла равны нулю, является неподвижной границей, отделяющей нагретое вещество от холодного.

Процесс распространения тепла локализован в конечной области $0 < x < x_S$, несмотря на неограниченное нарастание температуры в этой области при $t \rightarrow T^-$.

Пример 2. Эффективная локализация в среде с постоянной теплопроводностью. Задача (1) — (3), где

$$k(u) = k_0 > 0; \quad u_1(t) = A_S \exp\{R_0(T-t)^{-1}\}, \quad R_0 = \text{const} > 0; \\ u_0(x) \equiv 0,$$

имеет решение

$$u(t, x) = \frac{x}{2\sqrt{k_0\pi}} \int_0^t \exp\left\{-\frac{x^2}{4k_0(t-\tau)}\right\} (t-\tau)^{-3/2} A_S \exp\{R_0(T-\tau)^{-1}\} d\tau \quad (7)$$

со следующими свойствами:

а) при

$$0 \leq x \leq x_S = 2(k_0 R_0)^{1/2} \quad (8)$$

температура стремится к бесконечности при $t \rightarrow T^-$;

б) при $x > x_S$ температура отлична от нуля и ограничена для всех $0 \leq t < T$ функцией

$$u(T^-, x) \equiv \lim_{t \rightarrow T^-} u(t, x) = \\ = \frac{A_S}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \left(\frac{x_S}{x} \right)^2 \right]^{-1/2} \int_{(x^2 - x_S^2)/(4k_0 T)}^{\infty} e^{-v} v^{-1/2} dv < \infty; \quad (9)$$

в) для любого $x_1 > x_S$ энергия

$$E(t, x_1) = \int_{x_1}^{\infty} u(t, \xi) d\xi < \text{const}, \quad t \in (0, T),$$

содержащаяся в области $\{x_1 \leq x < \infty\}$, ограничена.

Как и в примере 1, практически вся энергия локализована в конечной области $\{x < x_S = x_S(k_0, R_0)\}$. Отличие заключается в том, что температура правее точки x_S не равна нулю (рис. 18), но равномерно ограничена в течение всего процесса.

3. Определение локализации и его физическое содержание.

Определение 1. В задаче (1) — (3) имеет место *строгая локализация тепла*, если существует постоянная $l > 0$ такая, что $u(t, x) = 0$ всюду в $(0, T) \times (l, \infty)$.

Наименьшую из всех величин l будем называть *глубиной локализации* l^* , а множество $\{0 < x < l^*\}$ — *областью локализации*.

Это определение содержательно при выполнении двух требований:

а)
$$\int_0^1 \left[\frac{k(\xi)}{\xi} \right] d\xi < \infty,$$

что является необходимым и достаточным условием конечной

скорости распространения возмущений в процессах, описываемых уравнением (1) (см. § 3 гл. I). Тем самым определение 1 имеет смысл, например, при $k(u) = k_0 u^\sigma$, $\sigma > 0$ (но не применимо в случае среды с постоянной теплопроводностью $k \equiv k_0 > 0$).

б) $u_0(x) = 0$ при $x > l_0$, $l_0 < \infty$, т. е. функция $u_0(x)$ должна быть финитной (в среде существует область «холодного фона» начальной температуры).

Пример 1 демонстрирует локализацию тепла в строгом смысле, и в этом случае глубина локализации равна $l^* = x_s$ (см. (6)).

Определение 2. В задаче (1)–(3) имеет место *эффективная локализация тепла*, если множество $\omega_L = \{x > 0 \mid \overline{\lim}_{t \rightarrow T^-} u(t, x) = \infty\}$ ограничено.

Величину $L^* = \text{mes } \omega_L$ назовем *эффективной глубиной локализации*, а множество $\{0 < x < L^*\}$ — *областью эффективной локализации*.

В примере 2 имеет место локализация тепла в смысле определения 2 с эффективной глубиной $L^* = x_s$ (см. (8)).

Для большинства реальных физических задач функция $u(t, x)$ (температура) нигде в нуль не обращается; поэтому определение 2 более естественно.

Локализация (инерция) тепла дает возможность достижения любых температур и концентрации любого количества энергии в ограниченной части среды и удержания их в течение конечного времени практически без распространения из области локализации. Это необычное свойство процесса теплопроводности может быть использовано во многих приложениях.

Понятие локализации для сред без поглощения тепла имеет смысл лишь в случае граничных режимов с обострением. Если же в задаче (1), (2) вместо (3) задан граничный режим без обострения, т. е. $u(t, 0) = u_1(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то, как нетрудно показать, $u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ для всех $0 < x < \infty$, т. е. локализация отсутствует. Доказательство этого факта проводится путем сравнения $u(t, x)$ с автомодельными решениями уравнения (1) вида $u_\lambda(t, x) = \theta(x^2/t) \geq 0$, которые существуют при произвольных функциях $k(u)$ (см. § 3 гл. I).

Возможны два типа режимов распространения тепла, в которых существует локализация. Будем говорить, что имеет место

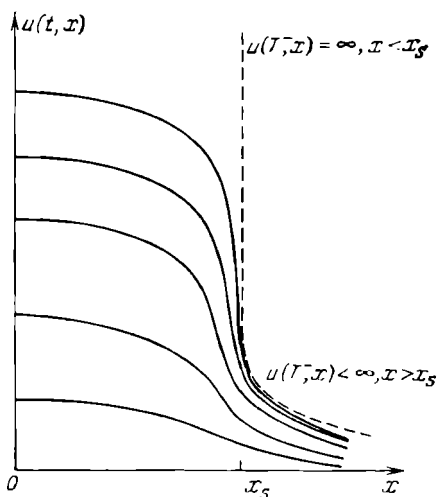


Рис. 18. К понятию эффективной локализации тепла

S-режим, если $L^* > 0$. Тогда температура и энергия в области локализации неограниченно возрастают при $t \rightarrow T^-$. Если $L^* = 0$, то реализуется *LS-режим*: $u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^-$ лишь на границе $x = 0$. Количество тепла, поступающее в область $(0, x)$:

$$E(t, x) = \int_0^x [u(t, \xi) - u_0(\xi)] d\xi, \quad 0 < x < \infty, \quad t \in (0, T)_\pm$$

в этом случае при $t \rightarrow T^-$ может быть как ограниченным, так и неограниченным.

Если же

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t, x) = \infty$$

для любого $x > 0$, то *локализация отсутствует* и осуществляется *HS-режим*.

В данной главе рассматривается случай $k(u) = k_0 u^\sigma$, $\sigma \geq 0$, $k_0 = \text{const} > 0$, и изучается эффект локализации тепла как в строгом (§ 2, 3), так и в эффективном смысле (§ 4). Между обоими определениями существует тесная связь, установленная в § 4.

§ 2. Автомодельные решения с обострением

1. Постановка задачи. В этом параграфе построены автомодельные решения задачи (1.1)–(1.3) в случае $k(u) = k_0 u^\sigma$, $\sigma > 0$. В сочетании с теоремами сравнения они дают эффективный аппарат исследования свойства локализации.

При $k(u) = k_0 u^\sigma$ уравнение (1.1) имеет степенные автомодельные решения, отвечающие граничным режимам с обострением:

$$u(t, 0) = u_1(t) = A_0(T - t)^n, \quad A_0 = \text{const} > 0, \quad n < 0.$$

Искомое автомодельное решение u_A удовлетворяет следующей задаче:

$$u_t = (k_0 u^\sigma u_x)_x, \quad -\infty < t < T, \quad x > 0, \quad (1)$$

$$u(-\infty, x) = 0, \quad x > 0, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = A_0(T - t)^n, \quad -\infty < t < T. \quad (3)$$

Ее решение имеет вид

$$u_A(t, x) = A_0(T - t)^n f(\xi), \quad (4)$$

где

$$\xi = \frac{x}{k_0^{1/2} A_0^{\sigma/2} (T - t)^{(1+n\sigma)/2}} \geq 0 \quad (5)$$

есть автомодельная координата. Поток тепла $W = -k(u)u_x$

представляется в виде

$$W(t, x) = A_0^{(\sigma+2)/2} \kappa_0^{1/2} (T-t)^{[-1+n(\sigma+2)]/2} \omega(\xi). \quad (6)$$

Здесь $f(\xi)$ и $\omega(\xi) = -f'(\xi)f'$ ($f' = df/d\xi$) суть безразмерные функции соответственно температуры и потока.

Функция $f(\xi) \geq 0$ определяется из уравнения

$$(f^{\sigma} f')' - [(1+n\sigma)/2] \xi f' + n f = 0, \quad 0 < \xi < \infty, \quad (7)$$

с краевыми условиями

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0. \quad (8)$$

Напомним, что в соответствии с физическим смыслом ищется неотрицательное, непрерывное решение задачи (7), (8), причем функция $\omega(\xi)$ должна быть непрерывной и ограниченной.

2. Построение автомобильных решений. Уравнение (7) допускает преобразование подобия

$$\tilde{\xi} = \alpha \xi, \quad \tilde{f}(\tilde{\xi}) = \alpha^{2/\sigma} f(\xi) \quad (9)$$

и с помощью замены

$$\eta = \ln \xi, \quad f(\xi) = \xi^{2/\sigma} \varphi(\eta) \geq 0, \quad \psi = \frac{d\varphi}{d\eta} = -\frac{2}{\sigma} \varphi + \xi^{-2/\sigma+1} f' \quad (10)$$

сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{1}{\varphi^{\sigma}} \left[\frac{2}{\sigma} \left(\frac{2}{\sigma} + 1 \right) \varphi^{\sigma+1} + \left(\frac{4}{\sigma} + 3 \right) \varphi^{\sigma} \psi + \right. \\ \left. + \sigma \varphi^{\sigma-1} \psi^2 - \frac{\varphi}{\sigma} - \frac{1+n\sigma}{2} \psi \right]. \quad (11)$$

Назовем фронтом точку $\xi_0 \in (0, \infty)$ такую, что $f(\xi) = 0$, $\xi \geq \xi_0$; $f(\xi) > 0$ при $\xi < \xi_0$. В плоскости (φ, ψ) фронту отвечает $\varphi = 0$; значение ψ заранее неизвестно. Поведение интегральных кривых уравнения (11) различно в случаях $1+n\sigma < 0$ и $1+n\sigma > 0$.

В окрестности линии $\varphi = 0$ интегральные кривые уравнения (11) имеют вид

$$\psi = A \varphi^{-\sigma} + \frac{1+n\sigma}{2} \varphi^{1-\sigma} + O(\varphi^{2-\sigma}), \quad A = \text{const}, \quad (12)$$

$$\psi = -\frac{2}{1+n\sigma} \varphi + O(\varphi^2). \quad (13)$$

Второму из условий (8) при $1+n\sigma < 0$ удовлетворяет единственная кривая (12) при $A = 0$ (лишь при таком выборе постоянной A поток тепла непрерывен в точке фронта). При $1+n\sigma > 0$ условию на фронте удовлетворяет кривая (13).

Тем самым, если решение существует, то оно единственно.

Из (10), (12), (13) получаем асимптотику решения в окрестности фронта: при $1 + n\sigma < 0$

$$f(\xi) = \left(-\frac{1+n\sigma}{2}\sigma\xi_\Phi\right)^{1/\sigma} (\xi_\Phi - \xi)^{1/\sigma} + \frac{1-n\sigma}{4(\sigma+1)} \left(-\frac{1+n\sigma}{2}\sigma\xi_\Phi\right)^{1/\sigma-1} (\xi_\Phi - \xi)^{1/\sigma+1} + \xi \rightarrow \xi_\Phi^-; \quad (14)$$

при $1 + n\sigma > 0$

$$f(\xi) = C\xi^{2n/(1+n\sigma)} + C_1\xi^{(2n-2)/(1+n\sigma)} + \xi \rightarrow \infty, \quad (15)$$

где $\xi_\Phi = \xi_\Phi(n, \sigma) < \infty$ — автомодельная координата фронта, $C = C(n, \sigma) > 0$, $C_1 = -C^{\sigma+1}[2n(2n+n\sigma-1)]/(1+n\sigma)^2 < 0$. Значения постоянных ξ_Φ , C в общем случае определяются численно.

На прямой $\psi = -\frac{2\varphi}{\sigma}$ выполнено неравенство $\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{2}{\sigma} + \frac{n\sigma}{2\varphi^\sigma} < -\frac{2}{\sigma}$, т. е. при увеличении φ интегральные кривые пересекают прямую $\psi = -2\varphi/\sigma$ с большим отрицательным наклоном, чем наклон самой прямой. Поскольку при $\varphi > 0$, $\psi < -2\varphi/\sigma$ нет изоклин бесконечности, то интегральные кривые из этой области не выходят. Искомая траектория (см. (12) при $A=0$ и (13)) лежит ниже прямой $\psi = -2\varphi/\sigma$, и поэтому можно ограничиться анализом уравнения (11) в области $\varphi > 0$, $\psi \leq -2\varphi/\sigma$.

Тогда из (10) следует, что $f'_\xi < 0$, $\xi < \xi_\Phi$, т. е. искомое решение является монотонно убывающей функцией (монотонность решения легко установить непосредственно из уравнения (7)). Точке границы $\xi = 0$ в плоскости φ , ψ соответствует $\varphi = \infty$, $\psi = -\infty$. В области $\varphi > 0$, $\psi < -2\varphi/\sigma$ существует единственное направление $\psi = -2\varphi/\sigma$, вдоль которого в точку $\varphi = \infty$, $\psi = -\infty$ входит пучок интегральных кривых

$$\psi = -\frac{2\varphi}{\sigma} + B\varphi^{-\sigma/2+1} + o(\varphi^{1-\sigma/2}), \quad (16)$$

где $B < 0$ — параметр пучка. Искомому решению отвечает некоторое значение $B^* = C_0(n, \sigma) < 0$.

Любой кривой в плоскости φ , ψ соответствует в плоскости ξ , f семейство подобных кривых, получаемых преобразованием (9); решение $f(\xi)$ отбирается с помощью первого из условий (8).

Интегрируя (16), с учетом (10) и (8) получаем первые члены асимптотики решения в окрестности $\xi = 0$:

$$f(\xi) = 1 + C_0(n, \sigma)\xi +$$

где $C_0(n, \sigma) = f'(0) < 0$ находится численно.

Выражение, стоящее в (11) в квадратных скобках, является квадратным трехчленом относительно величины ψ с неотрицательным дискриминантом. Поэтому (11) можно переписать в виде

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{1}{\varphi^\sigma\psi} [\psi - \psi^+(\varphi)] [\psi - \psi^-(\varphi)],$$

где $\psi = \psi^\pm(\varphi)$ — изоклины нуля уравнения. Непрерывная кри-

вая $\psi = \psi^-(\varphi)$ целиком лежит в области $\varphi \geq 0$, $\psi \leq -2\varphi/\sigma$. Изо-
 клина $\psi = \psi^+(\varphi)$ расположена выше линии $\psi = -2\varphi/\sigma$.

После того как изучены характер особых точек, соответствую-
 щих фронту и границе (другие особые точки несущественны),
 и поведение изоклин, не представля-
 ет труда полное построение поля
 интегральных кривых, в результате
 которого устанавливается существо-
 вание решения — траектории, соеди-
 няющей точку фронта с точкой гра-
 ницы.

На рис. 19 приведен «фазовый
 портрет» уравнения (11) для случая
 $1 + n\sigma > 0$. Жирной линией выделе-
 но искомое решение, штриховой —
 изоклина нуля $\dot{\psi} = \psi^-(\varphi)$. На рис. 20,
 21 даны результаты численного ре-
 шения задачи (7), (8) соответствен-
 но при $1 + n\sigma > 0$ и $1 + n\sigma < 0$.

Итак, решение задачи (7), (8)
 существует, единственно и монотон-
 но. При $1 + n\sigma < 0$ фронт решения
 находится в конечной точке. Если
 $1 + n\sigma > 0$, то $f(\xi) > 0$ для всех
 $0 < \xi < \infty$.

З а м е ч а н и е. В случае $n = -1/(\sigma + 2)$ уравнение (7) имеет
 первый интеграл $E = f'f' - f\xi'/(\sigma + 2)$, $E = \text{const}$. Легко устанавли-
 ваются существование, единственность и монотонность реше-
 ния при некотором $E = E(\sigma) \in (-\infty, 0)$.

3. Физические свойства решений. Решения уравнения (1) и
 уравнений подобного типа, описывающих процесс распростра-
 нения тепла от границы $x = 0$ в полупространство, обычно назы-
 вают *тепловыми волнами*.

Напомним некоторые понятия, связанные с тепловыми волна-
 ми (см. гл. I, II). *Фронтом* волны называется точка с коор-
 динатой $x_\Phi(t)$ такая, что

$$u(t, x) = 0, \quad x > x_\Phi(t); \quad u(t, x) > 0, \quad x < x_\Phi(t).$$

Величина $x_\Phi(t)$ определяет глубину проникновения тепла в среду.

Точка с координатой $x_{\Phi/2}(t)$ такой, что $u(t, x_{\Phi/2}(t)) = u(t, 0)/2$,
 называется точкой *полуширины* тепловой волны.

Для автономных решений из (5) имеем

$$x_\Phi(t) = \xi_\Phi k_0^{1/2} A_0^{\sigma/2} (T - t)^{(1+n\sigma)/2}, \quad (17)$$

$$x_{\Phi/2}(t) = \xi_{\Phi/2} k_0^{1/2} A_0^{\sigma/2} (T - t)^{(1+n\sigma)/2}, \quad (18)$$

где постоянная $\xi_{\Phi/2} > 0$ такова, что $f(\xi_{\Phi/2}) = 1/2$.

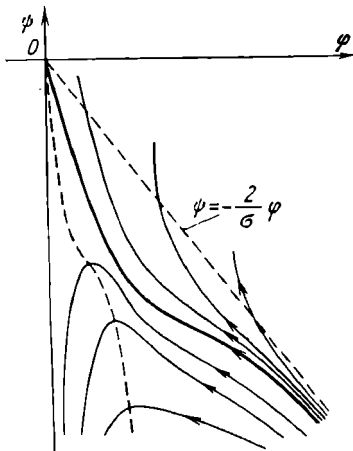


Рис. 19. Поле интегральных
 кривых уравнения (11) при
 $1 + n\sigma > 0$

Количество тепла, содержащееся в волне к моменту времени t , равно

$$E(t) = \int_0^{\infty} u(t, x) dx.$$

Для автомодельного решения получаем

$$E(t) = \frac{2\omega(0) A_0^{(\sigma+2)/2} k_0^{1/2}}{1+n(\sigma+2)} (T-t)^{[1+n(\sigma+2)]/2} \Big|_{-\infty}^t, \quad n \neq -\frac{1}{\sigma+2}, \quad (19)$$

где $\omega(0) = -f'(0) > 0$ (поток тепла на границе положителен).

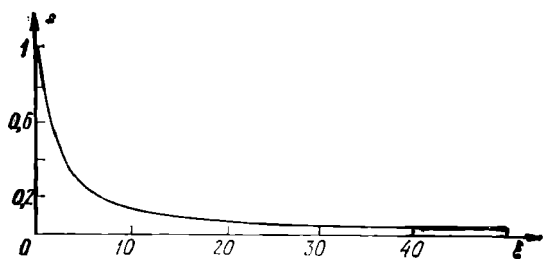


Рис. 20. Численное решение задачи (7), (8) при $\sigma = 2, n = -0,25$

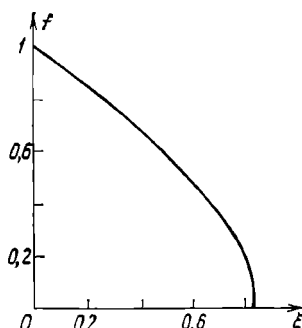


Рис. 21. Численное решение задачи (7), (8) при $\sigma = 2, n = -1$

В дальнейшем используется следующий факт. Для фиксированной координаты $0 < x_0 < \infty$ автомодельная координата $\xi = \xi(t, x_0)$ меняется со временем по закону (см. (5))

$$\xi(t, x_0) = x_0 / [k_0^{1/2} A_0^{\sigma/2} (T-t)^{(1+n\sigma)/2}], \quad (20)$$

т. е. $\xi(t, x_0) \rightarrow \infty, t \rightarrow T^-$, если $n > -1/\sigma$ и $\xi(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow T^-$, если $n < -1/\sigma$.

Перейдем к анализу физических свойств автомодельных решений.

В случае $n = -1/\sigma$ решение задачи (1)–(3) (S-режим) приведено в примере 1. Фронт тепловой волны и полуширина постоянны, $E(t) < \infty, t \in (-\infty, T)$ и $E(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^-$.

При $n < -1/\sigma$ решение характеризуется следующими свойствами.

1) Фронт волны находится в конечной точке $\xi_\Phi < \infty$, и в окрестности фронта справедлива асимптотика

$$u_A(t, x) = A_0 (T-t)^n f(\xi) = A_0 (T-t)^n \left[\frac{1+n\sigma}{2} \sigma \xi_\Phi (\xi - \xi_\Phi) \right]^{1/\sigma} + \dots$$

2) Глубина $x_\Phi(t)$ и эффективная глубина проникновения тепла $x_{\Phi\Phi}(t)$ неограниченно возрастают при приближении к моменту обострения. В пределе тепловая волна охватывает все пространство.

3) $E(t) < \infty$, $t \in (-\infty, T)$ и $E(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^-$.

4) $u_A(t, x_0)/u_A(t, 0) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow T^-$, т. е. в любой точке пространства температура с течением времени ведет себя практически так же, как на границе $x = 0$.

Таким образом, локализация тепла при $n < -1/\sigma$ отсутствует и реализуется HS-режим.

В некотором отношении HS-режим аналогичен режимам без обострения: влияние граничного закона существенно сказывается с течением времени на все более отдаленных участках среды (ср., например, с приведенными в п. 2 § 3 гл. II и в § 3 гл. I автомодельными решениями уравнения (1), соответствующими граничным режимам без обострения: $u(t, 0) = A_0 t^n$, $A_0 > 0$, $n > 0$, $t > 0$). Однако бесконечные значения температуры достигаются не при $t = \infty$, а в конечный момент обострения. HS-режим — «сверхбыстрый» способ нагрева среды (HS — от англ. higher — «выше», граничный режим при $t \rightarrow T^-$ является более «быстрым», чем в случае S-режима; рис. 22).

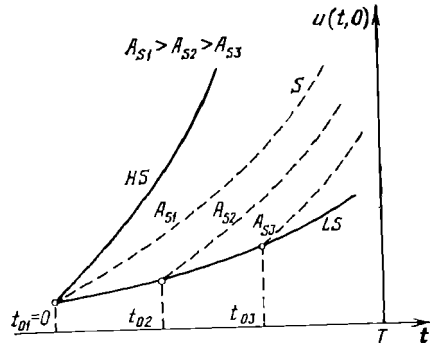


Рис. 22. Поле граничных режимов с обострением

Перечислим физические свойства автомодельных решений при $n > -1/\sigma$.

1) Как следует из (15), фронт волны находится в бесконечно удаленной точке *): $x_\phi(t) = \infty$, $t \in (-\infty, T)$. Этот результат заранее ясен из физических соображений. В самом деле, из (17) видно, что в предположении $\xi_\phi < \infty$ величина $x_\phi(t)$ стремилась бы к нулю при $t \rightarrow T^-$. Это означало бы сокращение размеров области, охваченной тепловой волной, что невозможно.

2) Полуширина уменьшается при $t \rightarrow T^-$ по закону (18). Поступающая в среду энергия сосредоточивается в уменьшающейся со временем области пространства. Решения такого типа будем называть *тепловой волной с сокращающимися эффективными размерами*.

3) Учитывая (20) и асимптотику (15), получаем для всех $x > 0$:

$$u_A(t, x) = \lim_{t \rightarrow T^-} = C \frac{A_0}{(k_0 A_0)^{n/(1+n\sigma)}} x^{2n/(1+n\sigma)} + C_1 \frac{A_0 x^{(2n-2)/(1+n\sigma)}}{(k_0 A_0)^{(n-1)/(1+n\sigma)}} (T-t) + \quad (21)$$

*) Этот результат не противоречит конечной скорости распространения тепла в среде с $k(u) = k_0 u^\sigma$, $\sigma > 0$, — от начала процесса до момента $t \in (-\infty, T)$ проходит бесконечное время.

$$W(t, x) = -C^{\sigma+1} \frac{2n}{1+n\sigma} A_0^{\sigma+1} k_0^{(1-n)/(1+n\sigma)} x^{(2n+n\sigma-1)/(1+n\sigma)} +$$

$$t \rightarrow T^-$$

т. е. автомодельное решение стремится снизу к предельной кривой. Наличие предельной кривой («следа» граничного режима в пространстве при $t = T^-$), ограничивающей рост тепловых величин в любой точке вещества, эквивалентно определению LS-режима и является важным его свойством (отсюда же следует сокращение полуширины в случае LS-режима).

4) Из (19) получаем следующее. При $-1/\sigma < n < -1/(\sigma + 2) = n_*$ величина энергии конечна: $E(t) < \infty$, $t \in (-\infty, T)$, и $E(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow T^-$, т. е. при $t \rightarrow T^-$ среде сообщается бесконечная энергия, сосредоточивающаяся в окрестности границы. При $n > n_*$ имеем $E(t) = \infty$, $t \in (-\infty, T)$, в окрестности фронта содержится бесконечная энергия. Однако $E(T^-) - E(t) < \infty$ для всех $t \in (-\infty, T]$, т. е. при приближении к моменту обострения в среду поступает конечное количество энергии. Наконец,

$$E(t) = \infty, \quad E(T^-) - E(t) = \infty, \quad t \in (-\infty, T)$$

в случае $n = n^*$

Итак, автомодельные решения при $n > -1/\sigma$ принадлежат классу LS-режимов (LS — от англ. lower — «ниже», граничный режим при $t \rightarrow T^-$ является более «медленным», чем в случае S-режима; рис. 22) и имеет место эффективная локализация тепла.

Замечание. Пусть на границе среды в режиме с обострением изменяется не температура, а поток тепла:

$$W(t, 0) \equiv -k_0 u^\sigma(t, 0) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = W_0 (T-t)^{n_1}, \quad n_1 < -1/2, \quad t < T. \quad (22)$$

Задача (1), (2) с условием (22) также имеет автомодельное решение:

$$u_A(t, x) = k_0^{-1/(\sigma+2)} W_0^{2/(\sigma+2)} (T-t)^{(2n_1+1)/(\sigma+2)} F(J),$$

$$J = k_0^{-1/(\sigma+2)} W_0^{-\sigma/(\sigma+2)} x (T-t)^{-(\sigma n_1 + \sigma + 1)/(\sigma+2)}$$

Функция $F(J) \geq 0$ удовлетворяет уравнению, сводящемуся к (7) заменой $n = (2n_1 + 1)/(\sigma + 2)$, и условиям $F(\infty) = 0$, $F^\sigma(0) F'(0) = 1$.

С учетом (9) для $F(J)$ имеем

$$F(J) = C_0^{-2/(\sigma+2)} f(\xi), \quad J = C_0^{-\sigma/(\sigma+2)} \xi, \quad C_0(n, \sigma) = -f'(0).$$

Тем самым автомодельные решения второй краевой задачи (1), (2), (22) выражаются через изученные решения и обладают аналогичными свойствами. При $n_1 < -(\sigma + 1)/\sigma$, $n_1 = -(\sigma + 1)/\sigma$ и $n_1 > -(\sigma + 1)/\sigma$ осуществляются HS-, S- и LS-режимы соответственно.

Анализ автомодельных решений с обострением — первый важный шаг в изучении эффекта локализации. Представления о трех типах тепловых волн, о «быстрых» и «медленных» режимах будут неоднократно использоваться в дальнейшем. Теоремы сравнения, выражающие непрерывную зависимость процесса теплопроводности от краевых данных, позволяют с помощью автомодельных решений разграничить между собой классы режимов с обострением, различающиеся по своим физическим свойствам.

§ 3. «Инерция» тепла в средах с нелинейной теплопроводностью

Здесь на основе автомодельных решений § 2 и теорем сравнения изучается действие граничных режимов с обострением на среду со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры: $k(u) = k_0 u^\sigma$, $\sigma > 0$. Физические причины «инерции» тепла обсуждаются при исследовании характера эволюции начального распределения температуры в задаче Коши. Изучается также локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности.

1. Класс граничных режимов, приводящих к локализации тепла.

Теорема 1. Пусть в задаче (1.1) — (1.3) краевые условия удовлетворяют неравенствам

$$u_0(x) \leq \begin{cases} A_S T^{-1/\sigma} (1 - x/x_S)^{2/\sigma}, & x \leq x_S, \\ 0, & x > x_S = (2k_0 A_S^\sigma (\sigma + 2)/\sigma)^{1/2}, \end{cases} \quad (1)$$

$$u_1(t) \leq A_S (T - t)^{-1/\sigma}, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

где $A_S > 0$ — некоторая постоянная. Тогда имеет место локализация тепла, причем справедливы оценки

$$l^* \leq x_S, \quad u(t, x) \leq u_S(t, x) = \begin{cases} A_S (T - t)^{-1/\sigma} (1 - x/x_S)^{2/\sigma}, & x \leq x_S, \\ 0, & x > x_S = (2k_0 A_S^\sigma (\sigma + 2)/\sigma)^{1/2} \end{cases} \quad (3)$$

В силу теоремы сравнения справедливость оценок (3) прямо вытекает из свойств автомодельного решения u_S .

Аutomодельный S-режим определяет класс «медленных» граничных законов, обеспечивающих локализацию тепла. Любопытно, что оценка (3) глубины локализации не зависит от времени действия граничного режима.

На рис. 23 приведена динамика волны нагрева в случае $u_0(x) \equiv 0$, $u_1(t) = A_0 (T - t)^{-1/\sigma}$. Полуширина волны (крестики) сначала увеличивается, затем стабилизируется. Фронт волны не проникает далее глубины локализации $l^* = x_S = 0,5$. Штриховой линией на рисунке показано решение (1.5).

Другое утверждение о локализации устанавливается с помощью построенных в § 2 автомодельных решений LS-режима. Рассмотрим сначала случай $u_0(x) = 0$ при $x > 0$.

Теорема 2. Если в задаче (1.1)–(1.3)

$$u_1(t) \leq A_0(T-t)^n, \quad 0 < t < T; \quad n = \text{const} \in (-1/\sigma, 0), \quad (4)$$

то осуществляется локализация тепла в LS-режиме и справедлива оценка

$$l^* \leq x_S = (2k_0 A_0^\sigma (\sigma + 2)/\sigma)^{1/2} T^{(1+n\sigma)/2}, \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t, x) \leq C(n, \sigma) (A_0 k_0^{-n})^{1/(1+n\sigma)} x^{2n/(1+n\sigma)}. \quad (6)$$

Доказательство. Так как $n > -1/\sigma$, из (4) следует (2) при некоторой постоянной A_S , т. е. мажорирование граничной функции автомодельным S-режимом. Для определения минимальной постоянной A_S в (2) потребуем, чтобы температура на границе в момент $t=0$ не превосходила граничного значения (рис. 22) решения (1.5):

$$u_1(0) \leq A_0 T^n = A_S T^{-1/\sigma}. \quad (7)$$

Учитывая, что $u_0(x) \equiv 0$, из теоремы 1 получаем факт локализации, а из (7) — оценку (5) глубины локализации.

Решение $u(t, x)$ при $x \geq 0$, $0 \leq t < T$ мажорируется сверху автомодельным решением $u_A(t, x)$ для LS-режима, соответствующим тем же параметрам σ, n, A_0, k_0 (это следует из (4) и условия $u_A(0, x) > u(0, x) \equiv 0$). Тогда из неравенства $u \leq u_A$ в $(0, T) \times \mathbf{R}_+$ следует оценка $u(t, x) \leq u_A(T^-, x)$, которая совпадает с (6); см. п. 3 § 2.

Теорема справедлива для любой финитной начальной

функции $u_0(x)$, поскольку всегда можно выбрать такую постоянную $A_S > 0$, что $u_0(x) \leq u_S(0, x)$ в \mathbf{R}_+ . Оценки (5), (6) при этом зависят не только от параметров граничного режима, но и от начальных данных.

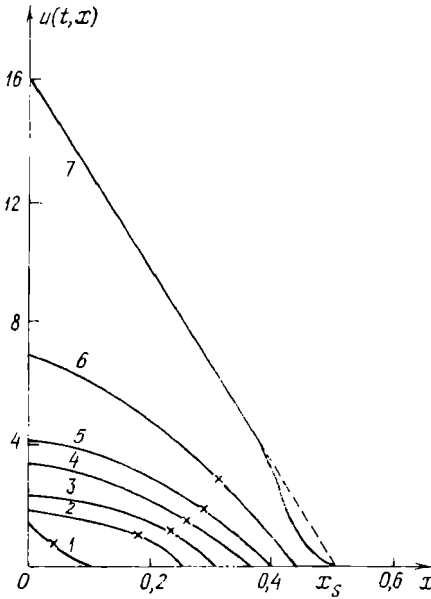


Рис. 23. Локализация тепла в случае граничного S-режима. Параметры: $\sigma = 2$, $n = -0.5$, $k_0 = 0.5$, $A_0 = 0.354$, $T = 0.1125$; $1 - T - t = 1.105 \cdot 10^{-1}$; $2 - T - t = 4.04 \cdot 10^{-2}$; $3 - T - t = 3.05 \cdot 10^{-2}$; $4 - T - t = 1.05 \cdot 10^{-2}$; $5 - T - t = 6.5 \cdot 10^{-3}$; $6 - T - t = 2.5 \cdot 10^{-3}$; $7 - T - t = 5 \cdot 10^{-4}$

Итак, при выполнении условия (4) имеет место локализация в LS-режиме, существует предельная кривая и полуширина волны нагрева сокращается. Так как граничный режим действует конечное время, то в отличие от автомодельного LS-режима (см. п. 3 § 2) тепловая волна имеет конечный фронт. Оценка величины l^* через глубину локализации мажорирующего S-режима зависит от полного времени процесса нагрева.

На рис. 24 приведены результаты численного решения задачи (1.1)–(1.3). Здесь $u_0(x) \equiv 0$ и граничный закон $u_1(t) = A_0(T-t)^n$ соответствует автомодельному LS-режиму. Полуширина тепловой волны сначала увеличивается, а затем начинает сокращаться. Решение ограничено предельной кривой (6) (штриховая линия), фронт волны не проникает далее $l^* \leq x_s = 0,87$.

2. Условия отсутствия локализации тепла.

Теорема 3. Если в задаче (1.1)–(1.3) граничный закон удовлетворяет неравенству

$$u_1(t) \geq A_0(T-t)^n, \quad 0 \leq t^* \leq t < T; \quad n < -1/\sigma, \quad (8)$$

то локализация отсутствует (HS-режим) и при $t \rightarrow T^-$ справедливы оценки

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t, x) = \infty \text{ всюду в } \mathbf{R}_+,$$

$$x_\Phi(t) \geq \xi_\Phi A_0^{1/2} (A_0^*)^{\sigma/2} (T-t)^{(1+n\sigma)/2} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-, \quad (9)$$

где $A_0^* > 0$ — некоторая постоянная.

Здесь $\xi_\Phi = \xi_\Phi(n, \sigma) > 0$ — безразмерная координата фронта соответствующего автомодельного HS-режима.

Доказательство. Покажем, что в сделанных предположениях $u \geq u_A$ в $(t^*, T) \times \mathbf{R}_+$, где $u_A = u_A(t, x; A_0^*)$ — некоторое нелокализованное автомодельное решение HS-режима (2.4), (2.5) при $A_0 = A_0^*$.

Пусть без ограничения общности $u(t^*, x) > 0$ на некотором интервале $(0, x^*)$, $x^* > 0$. Выберем величину $A_0 \equiv A_0^* > 0$ в

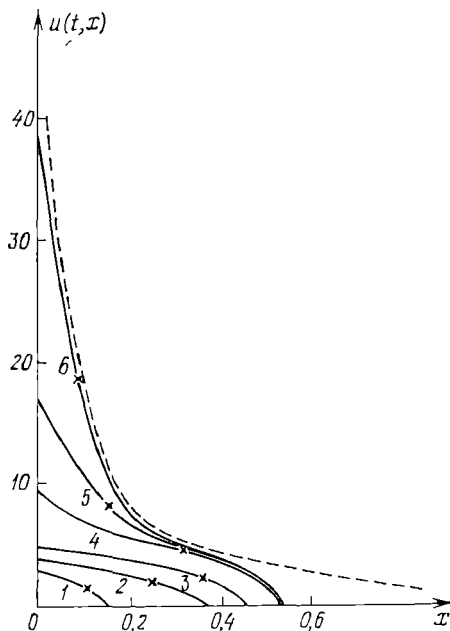


Рис. 24. Локализация тепла в LS-режиме. Параметры: $\sigma = 2$, $n = -0,25$, $k_0 = 0,5$, $A_0 = 1,06$, $T = 0,1125$: 1 — $T-t = 1,02 \cdot 10^{-1}$; 2 — $T-t = 3,1 \cdot 10^{-2}$; 3 — $T-t = 1,05 \cdot 10^{-2}$; 4 — $T-t = 3 \cdot 10^{-4}$; 5 — $T-t = 2,4 \cdot 10^{-5}$; 6 — $T-t = 1 \cdot 10^{-6}$.

автомодельном решении (2.4) при $n < -1/\sigma$ столь малой, что

$$u_A(t^*, x; A_0^*) \leq u(t^*, x), \quad x \geq 0. \quad (10)$$

Существование такой постоянной $A_0^* > 0$ вытекает из очевидных условий (см. (2.4), (2.5)): $u_A(t^*, x; A_0^*) \rightarrow 0$, $\text{supp } u_A(t^*, x; A_0^*) \rightarrow \{0\}$ при $A_0^* \rightarrow 0^+$

Тогда в силу (8), (10) и теоремы сравнения получаем $u(t, x) \geq u_A(t, x; A_0^*)$ в $(t^*, T) \times \mathbf{R}_+$, что доказывает (9).

Численное решение задачи (1.1)–(1.3) в случае $u_1(t) = A_0(T-t)^n$, $n < -1/\sigma$ (HS-режим) приведено на рис. 25.

Теоремы 1–3 позволяют классифицировать граничные законы с обострением и устанавливают важные свойства режимов распространения тепла. «Разделяющим» является закон, отвечающий автомодельному S-режиму.

Отметим, что если на границе среды задан рост в режиме с обострением не температуры, а потока тепла: $W(t, 0) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow T^-$, то при выполнении неравенств

$$W(t, 0) \leq W_0(T-t)^{-(\sigma+1)/\sigma},$$

$$W(t, 0) \leq W_0(T-t)^{n_1},$$

$$-(\sigma+1)/\sigma < n_1 < -1/2;$$

$$W(t, 0) \geq W_0(T-t)^{n_1},$$

$$n_1 < -(\sigma+1)/\sigma,$$

Рис. 25. Распространение тепла в HS-режиме. Параметры: $\sigma = 2$, $n = -1$, $k_0 = 0.5$, $A_0 = 0.12$, $T = 0.1125$, $u_0(x) = 0$, $x > 0$: $1 - T - t = 1.023 \cdot 10^{-1}$; $2 - T - t = 4.11 \cdot 10^{-2}$; $3 - T - t = 3.09 \cdot 10^{-2}$; $4 - T - t = 2.07 \cdot 10^{-2}$; $5 - T - t = 1.05 \cdot 10^{-2}$

справедливы соответственно аналоги теорем 1–3. Эти результаты следуют из свойств автомодельных решений с обострением в случае второй краевой задачи.

3. Физические причины локализации тепла. Класс температурных профилей, обладающих инерцией. Как показывают результаты п. 1, 2, локализация обусловлена не только быстротой процесса и связана с «внутренними» свойствами теплопроводной среды.

Рассмотрим эволюцию теплового возмущения в среде, не подвергающейся воздействию каких-либо граничных режимов, или задачу Коши для уравнения (1.1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (11)$$

Функция $u_0(x)$ финитная и $\text{supp } u_0 = (-x_0, x_0)$, $x_0 > 0$ — постоянная.

Определение. В задаче Коши (1.1), (11) имеет место локализация (инерция) тепла, если найдется такое $t_{\pi} > 0$, что $\sup u(t, x) = \sup u_0$ при всех $0 < t < t_{\pi}$.

Другими словами, первоначально заключенное в области $|x| < x_0$ тепло не распространяется в течение конечного времени локализации $t_{\pi} = t_{\pi}(\sigma, k_0; u_0)$. В следующей теореме выделен класс «инерционных» профилей температуры.

Теорема 4. Если начальное распределение температуры удовлетворяет условию

$$0 < u_0(x) \leq u_m(1 - |x|/x_0)^{2/\sigma}, \quad |x| < x_0, \quad (12)$$

то в задаче Коши (1.1), (11) существует локализация тепла и для времени локализации справедлива оценка

$$t_{\pi} \geq t^* = x_0^2 \sigma / [2k_0(\sigma + 2)u_m^{\sigma}]. \quad (13)$$

Доказательство. В силу принципа максимума

$$u(t, 0) \leq u_m, \quad t > 0. \quad (14)$$

Функция, стоящая в правой части (12), при $x > 0$ совпадает с начальными данными автомодельного решения $u_s(t, x)$ для S-режима (1.5), если в последнем положить $T = x_0^2 \sigma / [2k_0(\sigma + 2)u_m^{\sigma}]$, $A_s = [x_0^2 \sigma / [2k_0(\sigma + 2)]]^{1/\sigma}$ (при этом $x_s = x_0$, $u_s(0, 0) = u_m$).

Сравним решения $u(t, x)$ и $u_s(t, x)$ в $(0, T) \times \mathbb{R}_+$. Из (12), (14) имеем: $u(0, x) = u_0(x) \leq u_s(0, x)$ при $x \geq 0$ и $u(t, 0) \leq u_m \leq u_s(t, 0)$ при всех $0 < t < T$. Следовательно, по теореме сравнения

$$u(t, x) \leq u_s(t, x), \quad x \geq 0, \quad 0 < t < T$$

Отсюда, учитывая свойства решения u_s (см. (1.5)), получаем

$$u(t, x) = 0, \quad x \geq x_0, \quad 0 < t < T = t^*. \quad (15)$$

Аналогично доказывается, что

$$u(t, x) = 0, \quad x < -x_0, \quad 0 < t < t^*. \quad (16)$$

Объединяя (15) и (16), получаем: $u(t, x) = 0$ при $|x| > x_0$, $0 < t < t^*$, что завершает доказательство.

Итак, всегда существует класс распределений температуры, обладающих свойством локализации. Оценка (13) времени локализации зависит от параметров среды (k_0 , σ) и начального температурного профиля (параметров x_0 , u_m).

Эффект инерции тепла имеет простой физический смысл. Скорость роста температуры в любой точке среды определяется ее пространственным профилем в окрестности этой точки. Если профиль температуры в достаточной степени «вогнутый» (в случае $\sigma = 2$ вогнутость имеет обычный смысл), то температура не изменяется или слабо изменяется в течение некоторого времени в окрестности точек фронта $x = \pm x_0$.

Тем самым факт неподвижности теплового фронта зависит от поведения $u_0(x)$ в его малой окрестности, но, разумеется, полное время локализации определяется глобальной пространственной структурой начального возмущения (другими словами, «степенью вогнутости» его профиля всюду в $\text{supp } u_0$; это отражает оценка (12)).

Очевидно, что в среде без поглощения тепла вогнутый профиль температуры может существовать лишь конечное время*). Тепловая энергия поступает от горячих участков среды к менее нагретым, формируется «выпуклый» профиль температуры, и волна начинает двигаться.

В этом нетрудно убедиться, сопоставляя $u_0(x) \neq 0$ с функцией

$$\bar{u}(0, x) = \bar{u}_0(x) = \bar{u}_m(0) (1 - x^2/x_\Phi^2(0))_+^{1/\sigma}, \quad (17)$$

т. е. взятым в момент $t=0$ автомодельным решением уравнения (2.1)

$$\bar{u}(t, x) = \bar{u}_m(t) (1 - x^2/x_\Phi^2(t))_+^{1/\sigma}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} x_\Phi(t) &= C_1(\sigma) k_0^{1/(\sigma+2)} Q_0^{\sigma/(\sigma+2)} (t + t_0)^{1/(\sigma+2)}, \\ u_m(t) &= C_2(\sigma) k_0^{-1/(\sigma+2)} Q_0^{2/(\sigma+2)} (t + t_0)^{-1/(\sigma+2)} \end{aligned}$$

и C_1, C_2 — некоторые положительные постоянные. Это решение типа «мгновенного точечного источника» описывает эволюцию теплового возмущения энергии $Q_0 > 0$, выделившейся в точке $x=0$ при $t = -t_0 < 0$ (см. § 3 гл. I).

Выбирая величины t_0 и Q_0 так, чтобы $u_0(x) \geq \bar{u}_0(x)$ в \mathbf{R} , в силу теоремы сравнения получаем: $u(t, x) \geq \bar{u}(t, x)$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, и, следовательно, $\text{mes supp } u(t, x) \geq \text{mes supp } \bar{u}(t, x) \sim t^{1/(\sigma+2)} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Локализация в задаче Коши возможна лишь в течение конечного промежутка времени.

Начальная функция (17) является примером «выпуклого» профиля температуры, не обладающего свойством инерции. Здесь тепловая волна движется при всех $t > 0$. По теореме сравнения это же справедливо для начальных распределений $u_0(x)$, мажорирующих функцию (17), когда фронты возмущений $u_0(x)$ и $\bar{u}_0(x)$ совпадают.

На рис. 26, а приведены результаты численного расчета, иллюстрирующие теорему 4 в случае $u_0(x) = u_m(1 - |x|/x_0)^{2/\sigma}$. До момента $t = t^*$ тепло локализовано в области $(-x_0, x_0)$. С течением времени профиль температуры перестраивается на выпуклый и тепловая волна начинает двигаться. Эволюция первоначально выпуклого профиля температуры приведена на

*) Кратко рассмотренная в гл. I, II локализация тепловых возмущений, обусловленная присутствием в среде стоков тепла, имеет иную «физическую» природу. В частности, при наличии поглощения возможна локализация в течение любого времени.

рис. 26, б, где начальная функция имеет вид (17) (размер возмущений и количество содержащейся в них энергии в обоих случаях совпадают).

На рис. 26, в показана динамика «комбинированного» профиля: при $x > 0$ взято $u_0(x) = u_m(1 - x/x_0)_+^{2/\sigma}$, при $x < 0$ — функция (17). В результате правая часть локализована, слева же

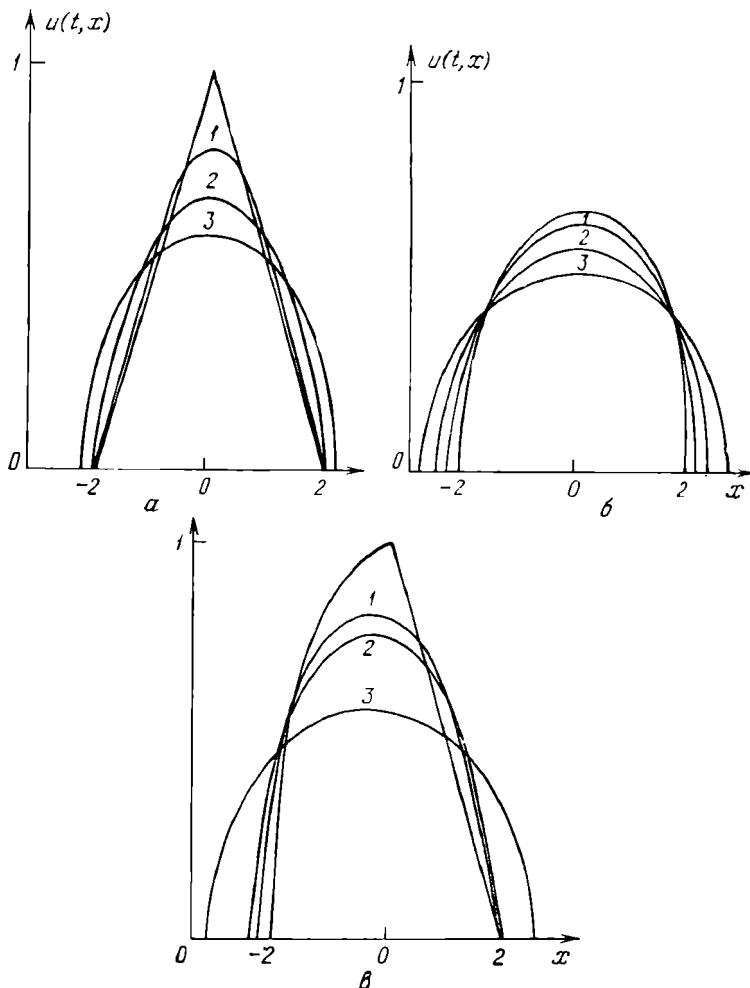


Рис. 26. Локализация тепла в задаче Коши. Параметры: $a - \sigma = x_0 = 2$, $k_0 = u_m = t^* = 1$: $1 - t = 0,25$, $2 - t = 1$, $3 - t = 2,5$; $b - \sigma = x_\Phi(0) = 2$, $k_0 = 1$, $\bar{u}_m(0) = 0,62$: $1 - t = 0,5$, $2 - t = 2$, $3 - t = 5$; $\sigma - \sigma = x_0 = 2$, $u_m = \bar{u}_m(0) = k_0 = 1$: $1 - t = 0,5$, $2 - t = 1$, $3 - t = 2$

фронт волны начинает двигаться сразу, т. е. в течение конечного времени происходит направленное распространение тепла.

Установленные свойства температурных профилей позволяют объяснить физическую природу эффекта локализации при действии на среду медленных режимов с обострением (п. 1). Граничные S- и LS-режимы проявляют инерционность процесса теплопроводности, создавая и поддерживая локализованные профили температуры. В S-режиме скорость поступления энергии в вещество так согласована со свойствами среды, что тепло распределяется по всему профилю (см. (1.5) и рис. 17). При более «медленном» подводе энергии тепло сосредоточивается в основном вблизи границы, профиль получается более «вогнутым» (ср. рис. 24 с рис. 23, 17) и реализуется LS-режим.

Формирование инерционных профилей происходит на глубине локализации, определяемой параметрами задачи.

С приближением тепловой волны к границе области локализации выпуклый распространяющийся профиль перестраивается на вогнутый, что хорошо видно на рис. 23, 24. С этого момента проявляется эффект локализации: размер нагреваемой области изменяется весьма незначительно, полуширина постоянна или сокращается, тепло не проникает за глубину локализации. Если после формирования инерционного профиля энергия перестает поступать (поток тепла на границе $x=0$ становится равным нулю), то тепловая волна в течение времени обострения первоначального граничного режима заметно не распространяется (см. рис. 26, а).

При нагреве вещества в более быстром темпе, чем в случае S-режима, образуется выпуклый профиль температуры (ср. рис. 25 с рис. 24, 23), область, занятая тепловой волной, увеличивается, локализация отсутствует, реализуется HS-режим.

Отметим, что действие граничных режимов без обострения всегда создает выпуклые профили и локализация отсутствует (см. замечание в п. 3 § 1).

Таким образом, эффект локализации тепла связан не только со скоростью протекания процесса. Соотношение между темпом нагрева среды и ее свойствами определяет характер формирующихся профилей температуры — инерционных или не обладающих этим свойством. Этот вывод справедлив в случае произвольных сред (см. гл. V), в том числе для сред с объемными источниками энергии (см. гл. IV).

4. Локализация тепла в многомерных задачах. «Тепловой кристалл». Основные свойства режимов с обострением в теплопроводных средах, установленные в пп. 1—3 для одномерных задач, справедливы в случае многих пространственных переменных. Метод исследования многомерных уравнений также основан на построении некоторых частных решений и применении теоремы сравнения.

Новый элемент по отношению к одномерной геометрии — форма области локализации тепла, которая может быть весьма неожиданной с точки зрения обычных представлений о диффузионных диссипативных процессах.

Проиллюстрируем сказанное на простых примерах. Прежде всего найдем частное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad (19)$$

представляющее собой многомерный аналог автомодельного S-режима. В уравнении (19) $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$ — пространственные координаты; $u = u(t, x) \geq 0$ — температура; $k(u) = k_0 u^\sigma$, $\sigma = \text{const} > 0$, — коэффициент теплопроводности.

Аналогично (1.5) ищем решение уравнения (19) в разделяющихся переменных:

$$u_s(t, x) = V(t)\theta(x). \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19), для функций $V(t)$, $\theta(x)$ получаем уравнение

$$\frac{1}{V^{\sigma+1}} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_0 \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = C > 0. \quad (21)$$

Отсюда

$$V(t) = A_S (T - t)^{-1/\sigma}, \quad A_S = (C\sigma)^{-1/\sigma}, \quad 0 < t < T < \infty, \quad (22)$$

т. е. искомое решение растет в режиме с обострением при $t \rightarrow T^-$ по такому же закону, как и в одномерном случае.

Эллиптическое уравнение (21) для функции θ имеет решение следующего вида:

$$\theta = \theta(\eta), \quad \eta = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i; \quad \alpha_i = \text{const} > 0; \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 = 1.$$

Тогда $\theta(\eta) \geq 0$ удовлетворяет одномерному уравнению

$$\frac{1}{\theta} \frac{d}{d\eta} \left(k_0 \theta^\sigma \frac{d\theta}{d\eta} \right) = \frac{A_S^- \sigma}{\sigma},$$

и, например,

$$\theta(\eta) = \left(1 - \frac{\eta}{x_S} \right)_+^{2/\sigma} \quad x_S = \left(2k_0 A_S^\sigma \frac{\sigma + 2}{\sigma} \right)^{1/2} \quad (23)$$

Поэтому искомое решение имеет вид

$$u_s(t, x) = A_S (T - t)^{-1/\sigma} \left(1 - \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i x_i}{x_S} \right)_+^{2/\sigma} \quad (24)$$

Это решение по своей пространственно-временной структуре аналогично одномерному. Его можно рассматривать как решение краевой задачи в $(0, T) \times \{x \in \mathbf{R}^N | x_i > 0, i = 1, \dots, N\}$ с соответствующими начальными и краевыми условиями.

Укажем основные свойства решения сначала в двумерной геометрии ($N = 2$). Граничная температура задана на осях x_1, x_2 ,

равна нулю при $x_1 \geq x_s/\alpha_1$, $x_2 \geq x_s/\alpha_2$ и растет в режиме с обострением при $0 \leq x_1 < x_s/\alpha_1$, $0 \leq x_2 < x_s/\alpha_2$. Несмотря на это, неограниченный рост температуры при $t \rightarrow T^-$ имеет место лишь в конечной области локализации — *треугольнике* с вершинами $(0, 0)$, $(x_s/\alpha_1, 0)$, $(0, x_s/\alpha_2)$. В остальной среде (при $\eta > x_s$) температура равна нулю для всех $0 \leq t < T$. Область локализации отделена неподвижным фронтом — отрезком прямой, соединяющей точки $(x_s/\alpha_1, 0)$, $(0, x_s/\alpha_2)$.

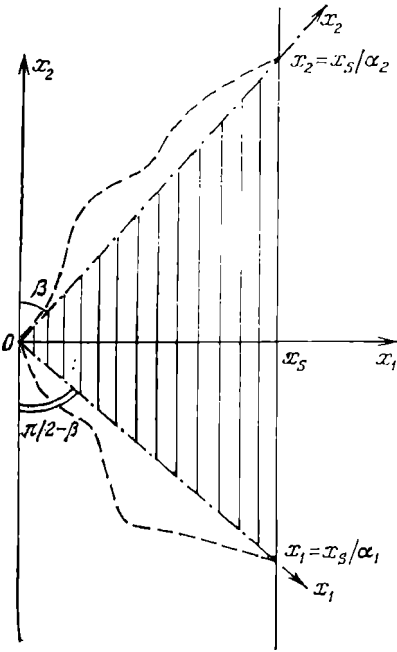


Рис. 27. Геометрическая интерпретация решения (24)

Решение (24) по аналогии с (1.5) можно назвать *многомерной остановившейся тепловой волной*.

Поясним связь построенного решения с одномерным (рис. 27):

$$u_s(t, x_1) = \begin{cases} A_s (T - t)^{-1/\sigma} (1 - x_1/x_s)^{2/\sigma}, & x_1 \leq x_s, \\ 0, & x_1 > x_s, \end{cases} \quad (25)$$

которое не зависит от других пространственных координат в плоскостях $x_1 = \text{const}$. На рис. 27 оси координат расположены таким образом, что ось x_3 перпендикулярна его плоскости.

Повернем оси x_1 , x_2 вокруг оси x_3 на некоторый угол $\beta \in (0, \pi/2)$ и рассмотрим решение (25) в треугольнике с вершинами в точках $(0, 0)$, $(x_s/\alpha_1, 0)$, $(0, x_s/\alpha_2)$; $\alpha_1 = \cos \beta$, $\alpha_2 = \sin \beta$. Внутри него температура зависит от (t, x_1, x_2) ; поэтому $u_s(t, x)$ можно рассматривать как решение двумерного ($N=2$) уравнения (19). Краевые условия и само решение легко вычисляются из (25) с учетом поворота осей x_1 , x_2 и совпадают

с (24). Трехмерное решение получается аналогично при дополнительном повороте оси x_3 . Указанным путем строятся многомерные остановившиеся тепловые волны в областях более сложной формы (штриховая линия на рис. 27). Краевые условия определяются из (25), если задана граница области.

Если граничный закон в многомерной задаче принадлежит классу медленных (мажорируемых граничным законом S-режима), то осуществляется локализация тепла и для решения и размера области локализации имеют место оценки сверху с помощью функции (24). На рис. 28 приведены результаты численного решения уравнения (19) при $N=2$ в области $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$ с нулевыми начальными данными и

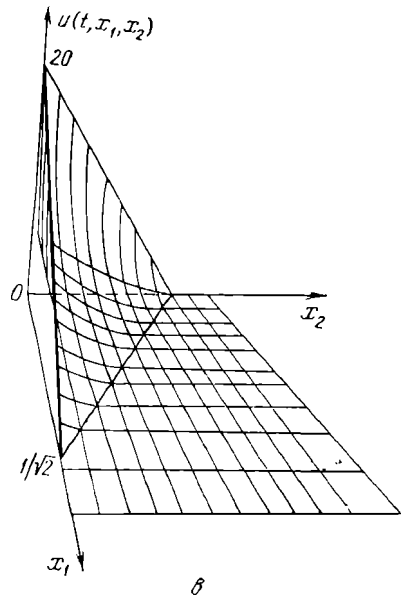
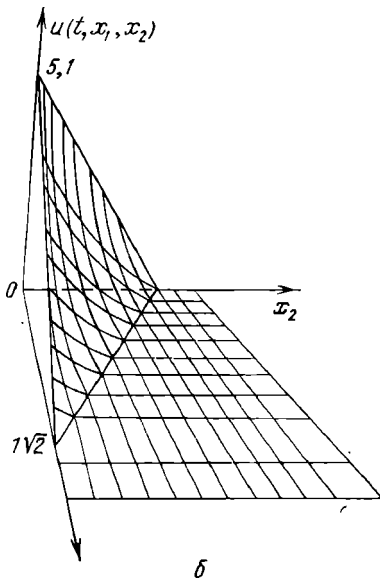
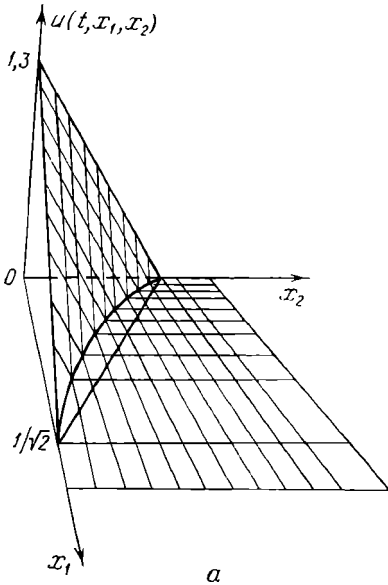


Рис. 28. LS-режим в двумерной геометрии. Параметры: $\sigma = 2$, $n = -0,25$, $k_0 = 1$, $A_0 = 0,5$, $T = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/\sqrt{2}$, $x_S = 1$: а — $T - t = 0,22$; б — $T - t = 9,1 \cdot 10^{-5}$; в — $T - t = 4 \cdot 10^{-7}$

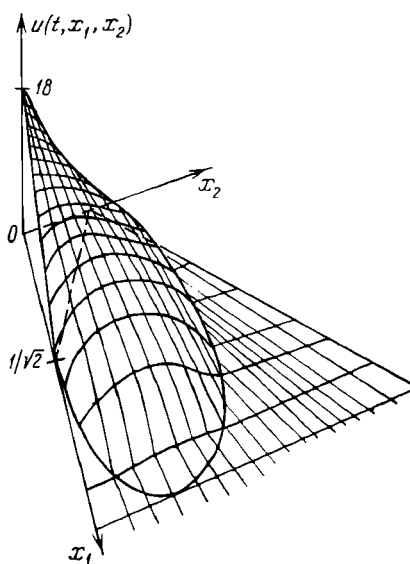
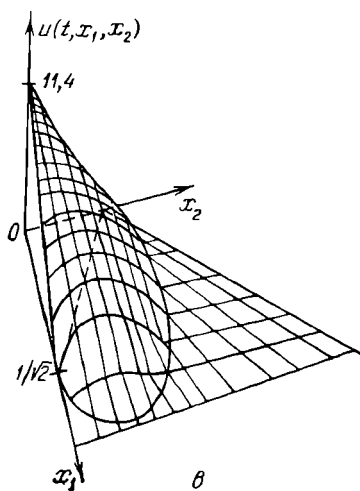
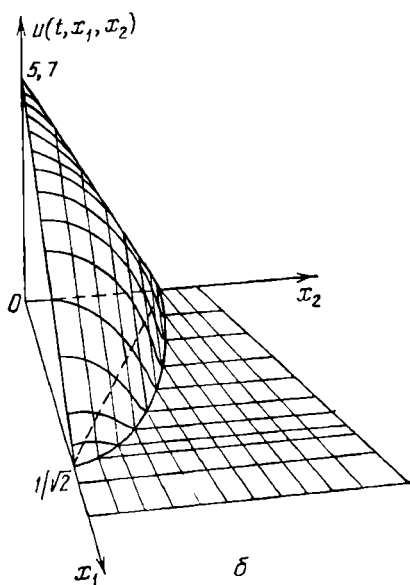
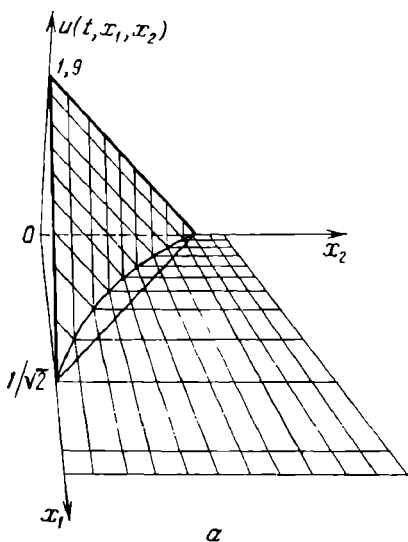


Рис. 29. NS-режим распространения тепла в двумерной геометрии. Параметры: $\sigma = 2$, $n = -1$, $k_0 = 1$, $A_0 = 0,5$, $T = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/\sqrt{2}$: а - $T - t = 0,27$; б - $T - t = 8,7 \cdot 10^{-2}$; в - $T - t = 4,3 \cdot 10^{-2}$; г - $T - t = 2,7 \cdot 10^{-2}$

граничными условиями

$$u(t, x_1, 0) = A_0 (1-t)^n (1 - \alpha_1 x_1/x_S)_+^{2/\sigma},$$

$$u(t, 0, x_2) = A_0 (1-t)^n (1 - \alpha_2 x_2/x_S)_+^{2/\sigma},$$

которые мажорируются граничными значениями решения (24) при $A_S = 0,5$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/\sqrt{2}$, $T = 1$. Область локализации — треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$. Результаты иллюстрируют локализацию тепла в LS-режиме, когда $n > -1/\sigma$. Тепловая волна при всех $0 < t < 1$ находится внутри области локализации мажорирующего S-режима, начиная с некоторого момента формируется вогнутый профиль температуры, эффективные размеры нагретой области сокращаются.

Так же как и в одномерной геометрии, при действии на среду быстрых режимов с обострением локализации отсутствует. На рис. 29 показана эволюция многомерного HS-режима с обострением при начальных и краевых условиях предыдущего расчета, но при $n < -1/\sigma$. Здесь формируется выпуклый профиль температуры, и тепло неограниченно распространяется в течение конечного времени обострения.

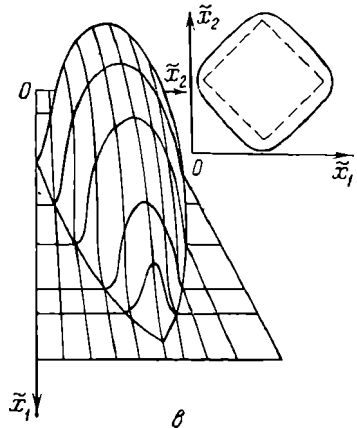
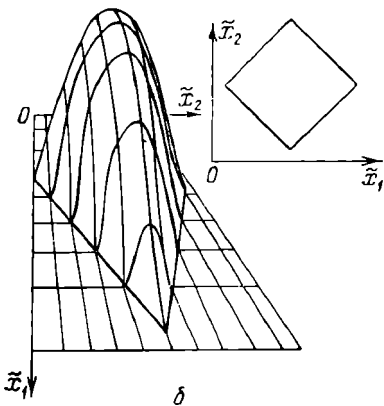
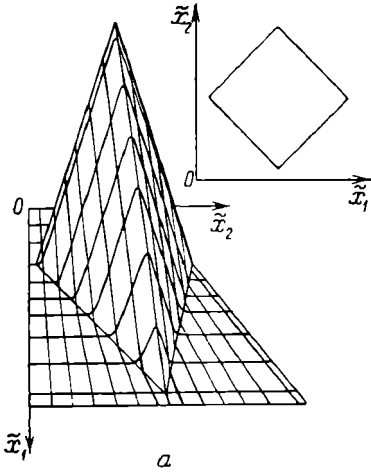


Рис. 30. Тепловой кристалл в двумерной геометрии. Параметры: $\sigma = 2$, $k_0 = 1$, $u_m = 0,5$, $x_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/\sqrt{2}$, $t^* = 1$: а — $t = 0$, $\max u(0, x_1, x_2) = 0,5$; б — $t = 0,8$, $\max u(t, x_1, x_2) = 0,24$; в — $t = 4$, $\max u(t, x_1, x_2) = 0,18$

Тем самым основные результаты и представления о действии граничных режимов с обострением на теплопроводную среду переносятся на многомерный случай. Отметим, что скорость нарастания температуры в S-режиме, разделяющем медленные и быстрые режимы с обострением, не зависит от размерности пространства, а определяется только свойствами среды.

Новым качеством многомерной геометрии является пространственная форма области локализации тепла, которая может быть достаточно разнообразной. Приведем соответствующие примеры.

Рассмотрим решение $u(t, x_1, x_2)$ задачи для уравнения (19) при $N=2$ в области $(0, T) \times \{x_1 > 0, x_2 > 0\}$ с начальной функцией (24) при $t=0$. На осях x_1, x_2 зададим нулевые потоки тепла: $k_0 u^\sigma u_{x_1} = 0$ при $x_2=0$, $k_0 u^\sigma u_{x_2} = 0$ при $x_1=0$, $t \in (0, T)$, т. е. энергия в среду не поступает.

Поскольку потоки тепла на границе, отвечающие автомодельному решению $u_s(t, x)$, положительны, то по теореме сравнения имеем $u(t, x) \leq u_s(t, x)$ в $(0, T) \times \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, и, следовательно,

$$u(t, x) = 0, \quad t \in (0, T), \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \geq x_s. \quad (26)$$

Кроме того, по построению $u(t, x) > 0$ при $t \in (0, T)$ и $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 < x_s$, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Решения уравнения (19) в пространственных областях $\{x_1 > 0, x_2 < 0\}$, $\{x_1 < 0, x_2 > 0\}$ и $\{x_1 < 0, x_2 < 0\}$ с аналогичными краевыми условиями обладают тем же свойством. Поэтому $u(t, x) = 0$ при $t \in (0, T)$ для всех $\alpha_1 |x_1| + \alpha_2 |x_2| \geq x_s$. Однако в силу симметрии все эти решения в соответствующих квадрантах совпадают с решением задачи Коши для уравнения (19) в $R_+ \times R^2$ с начальной функцией

$$u(0, x_1, x_2) = u_m [1 - (\alpha_1 |x_1| + \alpha_2 |x_2|) / x_0]_+^{2/\sigma}, \quad (27)$$

где $u_m = A_S T^{-1/\sigma}$, $x_0 = x_s = (2k_0 A_S^\sigma (\sigma + 2) / \sigma)^{1/2}$.

Итак, начальное распределение температуры (27) локализовано в ромбе $\alpha_1 |x_1| + \alpha_2 |x_2| \leq x_0$ в течение времени не меньше $t_n \geq t^* = \sigma x_0^2 / (2k_0 (\sigma + 2) u_m^\sigma)$. Оценка времени локализации аналогична формуле (13) для одномерной геометрии.

Проводя такие же построения для трехмерного случая, получаем, что начальное возмущение

$$u_0(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} u_m \left(1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{|x_i|}{x_0} \right)^{2/\sigma} & \sum_{i=1}^3 \alpha_i |x_i| \leq x_0, \\ 0, & \sum_{i=1}^3 \alpha_i |x_i| > x_0, \end{cases} \quad (28)$$

локализовано в течение конечного времени (t_n оценивается по аналогичной формуле) в октаэдре $\sum_{i=1}^3 \alpha_i |x_i| \leq x_0$.

В среде конечное время существует *тепловой кристалл* — октаэдр, сохраняющий свою форму. Внутри него температура отлична от нуля, на гранях и вне октаэдра равна нулю при всех $t \in (0, t_n)$.

Численная реализация двумерного аналога теплового кристалла приведена на рис. 30. Начальные данные — функция (27). Тепловая энергия конечное время локализована в квадрате. С течением времени внутри области происходит перестройка профиля температуры на вышуклый и начинается распространение тепла (ср. с рис. 26, а).

Функции (27), (28) с помощью теоремы сравнения определяют класс инерционных профилей температуры в многомерной геометрии. Распределение температуры локализовано, если для каждой точки его фронта можно указать функцию вида (27) или (28), мажорирующую это распределение при совпадении их фронтов. Этим способом нетрудно построить области локализации разнообразной формы (шар, эллипсоид и т. п.) и указать соответствующие начальные профили температуры.

§ 4. Эффективная локализация тепла

1. Независимость эффективной локализации от начального состояния. В § 2, 3 при изучении эффекта инерции тепла использовалось приближение «нулевого фона», начальная функция $u_0(x)$ считалась финитной.

Рассмотрим исходную задачу (1.1) — (1.3), в которой ограниченная непрерывная функция $u_0(x)$ произвольная. Локализация тепла в этом случае понимается в эффективном смысле.

Установим прежде всего связь между решениями $u^{(v)}$ ($v = 1, 2$) задачи (1.1) — (1.3), отвечающими разным постоянным начальным функциям $u_0^{(v)}(x) \equiv C^{(v)} = \text{const} \geq 0$ и одинаковым при $t \rightarrow T^-$ граничным режимам $u^{(v)}(t, 0) = u_1^{(v)}(t) > 0$, $t \in (0, T)$.

Лемма. Пусть $C^{(1)} \leq C^{(2)}$, функции $u_1^{(v)}(t)$ не убывают по $t \in (0, T)$ и существует такое $\tau \in (0, T)$, что

$$\begin{aligned} u_1^{(1)}(t) &= u_1^{(2)}(t) \equiv u_1(t), \quad t \in [\tau, T]; \\ u_1^{(1)} &\leq u_1^{(2)}, \quad t \in (0, \tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда

$$\Delta E(t) \equiv \Delta E^{(2)}(t) - \Delta E^{(1)}(t) \leq \Delta E(\tau), \quad t \in [\tau, T], \quad (2)$$

где

$$\Delta E^{(v)}(t) = \int_0^\infty [u^{(v)}(t, x) - C^{(v)}] dx \in [0, \infty), \quad t \in (0, T); \quad v = 1, 2.$$

Функции $\Delta E^{(v)}(t)$ имеют смысл энергии, поступившей в среду к моменту времени $t \in (0, T)$.

Доказательство. Предварительно отметим, что в силу принципа максимума $u^{(v)} \geq C^{(v)}$ в $(0, T) \times \mathbf{R}_+$, так что $\Delta E^{(v)}(t) \geq 0$. В сделанных предположениях уравнение (1.1) можно интегрировать по $(\tau, t) \times \mathbf{R}_+$, $t \in (\tau, T)$. Это вытекает из интегрального тождества для обобщенного решения при специальном выборе последовательности финитных пробных функций $f = f(x/\alpha) \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow \infty$ всюду в \mathbf{R}_+ , $|f'(\xi)| \leq 1$, и известной регулярности обобщенного решения (см. § 3 гл. I). Формальное интегрирование уравнения (1.1) по $(\tau, t) \times \mathbf{R}_+$ дает следующее:

$$\Delta E^{(v)}(t) - \Delta E^{(v)}(\tau) = - \int_{\tau}^t k[u^{(v)}(s, 0)] \frac{\partial u^{(v)}}{\partial x}(s, 0) ds \geq 0, \quad v = 1, 2$$

(подынтегральные выражения с точностью до знака представляют собой потоки тепла на границе). В силу (1) при всех $t \in [\tau, T)$ имеем

$$\Delta E(t) - \Delta E(\tau) = \int_{\tau}^t k[u_1(s)] \left[\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}(s, 0) - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}(s, 0) \right] ds. \quad (3)$$

По теореме сравнения $u^{(1)} \leq u^{(2)}$ в $(0, T) \times \mathbf{R}_+$. Поскольку $u^{(1)}(t, 0) = u^{(2)}(t, 0)$ при $t \in [\tau, T)$, получаем

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}(t, 0) \leq \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}(t, 0).$$

Следовательно, подынтегральное выражение в (3) неположительно, что эквивалентно (2).

Таким образом, при одинаковом режиме нагрева количество тепла, поступающее в первоначально более холодную среду, не меньше энергии, сообщаемой более горячей среде (если $\Delta E(\tau) \leq 0$).

Разумеется, эта лемма допускает обобщение на широкий класс начальных возмущений. Если $u_0^{(v)}$ отличны от постоянных, но, например,

$$u_0^{(1)} \leq u_0^{(2)}, \quad x > 0; \quad u_0^{(v)} \in L^1(\mathbf{R}_+), \quad [\varphi(u_0^{(v)})]_x \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (4)$$

то при выполнении условий (1) получим вместо (2) оценку:

$$0 \leq \int_0^{\infty} [u^{(2)} - u^{(1)}](t, x) dx \leq \int_0^{\infty} [u^{(2)} - u^{(1)}](\tau, x) dx, \quad (5)$$

или, другими словами, $\|u^{(2)}(t, \cdot) - u^{(1)}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}_+)}$ не возрастает по $t \in [\tau, T)$.

Доказанная лемма выражает своеобразную устойчивость в $L^1(\mathbf{R}_+)$ процесса распространения тепла по отношению к возмущениям начальной функции. На ее основе устанавливается

справедливость следующего утверждения о независимости глубины эффективной локализации от начальной функции.

Теорема 1. Пусть $u^{(v)}$ ($v=1, 2$) — решения задачи (1.1) — (1.3) с краевыми данными $u_0^{(v)}, u_1^{(v)}$ соответственно, причем выполняются условия (1) и, кроме того,

$$\begin{aligned} u_1(t) &\rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-, \\ [u_1^{(v)}(t)]' &\geq 0, \quad t \in [0, T]; \end{aligned} \quad (6)$$

$u_0^{(v)}(x)$ не возрастают по $x > 0$; $v=1, 2$. Пусть $u^{(1)}$ эффективно локализовано и глубина локализации равна $L^{(1)*}$. Тогда $u^{(2)}$ также локализовано, причем $L^{(2)*} = L^{(1)*}$.

Доказательство. Рассмотрим $\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}$ — решения задачи (1.1) — (1.3) с условиями $\bar{u}^{(1)}(0, x) \equiv 0, \bar{u}^{(2)}(0, x) \equiv C = \max\{\sup u_0^{(1)}, \sup u_0^{(2)}\} \equiv \max\{u_0^{(1)}(0), u_0^{(2)}(0)\}, \bar{u}^{(1)}(t, 0) \equiv \bar{u}^{(2)}(t, 0) \equiv u_1(t)$ при $t \in [\tau, T]$. Доопределим функции $\bar{u}^{(v)}(t, 0)$ в $[0, \tau]$ так, чтобы к решениям $\bar{u}^{(v)}$ была применима лемма и $\bar{u}^{(1)}(t, 0) \leq u_1^{(1)}(t), u_1^{(2)}(t) \leq \bar{u}^{(2)}(t, 0)$.

Из теоремы сравнения следует, что

$$\bar{u}^{(1)} \leq u^{(1)}, \quad u^{(2)} \leq \bar{u}^{(2)} \quad \text{в } (0, T) \times \mathbf{R}_+. \quad (7)$$

Применяя лемму к функциям $\bar{u}^{(v)}$, перепишем неравенство (2) при $C^{(1)} = 0, C^{(2)} = C$ в виде

$$\int_0^\infty \{\bar{u}^{(2)}(t, x) - C - \bar{u}^{(1)}(t, x)\} dx \leq \text{const}, \quad t \in [\tau, T].$$

Разбивая этот интеграл на сумму интегралов по $(0, x_0)$ и (x_0, ∞) , где $x_0 > L^{(1)*}$ — произвольная постоянная, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} \{\bar{u}^{(2)}(t, x) - \bar{u}^{(1)}(t, x)\} dx - \int_0^{x_0} C dx + \int_{x_0}^\infty \{\bar{u}^{(2)}(t, x) - C\} dx - \\ - \int_{x_0}^\infty \bar{u}^{(1)}(t, x) dx \equiv I_1 - I_2 + I_3 - I_4 \leq \text{const}, \quad t \in [\tau, T]. \end{aligned}$$

Докажем равномерную по $t \in [\tau, T]$ ограниченность интеграла I_3 . Поскольку в силу принципа максимума $\bar{u}^{(2)} \geq \bar{u}^{(1)}$ в $(0, T) \times \mathbf{R}_+$, то $I_1 \geq 0$. Далее, $I_2 = Cx_0$, и, следовательно, $I_3 \leq \text{const} + I_4$ при всех $t \in [\tau, T]$.

Рассмотрим интеграл I_4 . Поскольку решение $u^{(1)}$ локализовано и $x_0 > L^{(1)*}$, то существует такая постоянная $M > 0$, что $u^{(1)} \leq M$ в $(0, T) \times [x_0, \infty)$. В силу (7) это означает, что $\bar{u}^{(1)} \leq M$ в $(0, T) \times [x_0, \infty)$.

Тогда в силу теоремы сравнения $\bar{u}^{(1)} \leq u_A$ в $(0, T) \times (x_0, \infty)$, где $u_A(t, x) \equiv \theta((x-x_0)/t^{1/2})$ — автомодельное решение уравнения (1.4), удовлетворяющее условиям $u_A(0, x) = 0, x > x_0$;

$u_A(t, x_0) = M$, $t \in (0, T)$. По поводу существования и единственности решения $u_A \geq 0$ см. п. 4 в § 3 гл. I, а также комментарии к гл. I. При этом $\theta \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Итак,

$$\begin{aligned} I_4 &\equiv \int_{x_0}^{\infty} \bar{u}^{(1)}(t, x) dx \leq \int_{x_0}^{\infty} u_A(t, x) dx \equiv \\ &\equiv \int_{x_0}^{\infty} \theta \left(\frac{x - x_0}{t^{1/2}} \right) dx \equiv t^{1/2} \int_0^{\infty} \theta(\xi) d\xi \leq T^{1/2} \|\theta\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} < \infty \end{aligned}$$

при всех $t \in [\tau, T)$. Следовательно,

$$I_3 \equiv \int_{x_0}^{\infty} [\bar{u}^{(2)}(t, x) - C] dx \leq \text{const} \quad (8)$$

для любых $t \in [\tau, T)$. Отсюда непосредственно следует равномерная ограниченность $\bar{u}^{(2)}$ в $\{\tau, T\} \times (x_0, \infty)$. Действительно, в силу монотонности по $t \in (0, T)$ граничной функции $\bar{u}_1^{(2)}(t)$, во-первых, $\bar{u}^{(2)} \geq C$ (т. е. $I_3 \geq 0$) и, во-вторых, $\bar{u}^{(2)}(t, x)$ не возрастает по x при любых $t \in (0, T)$ (см. § 1, 2 гл. V). Поэтому для любого $x_1 > x_0$

$$I_3 \geq (x_1 - x_0) [\bar{u}^{(2)}(t, x_1) - C],$$

и, следовательно, предположение

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T^-} \bar{u}^{(2)}(t, x_1) = \infty$$

приводит к противоречию с (8).

В силу второго неравенства (7) получаем, что для любого $x_0 > L^{(1)*}$ существует такая постоянная $M > 0$, что $u^{(2)} \leq M$ в $(0, T) \times (x_0, \infty)$. Тем самым решение $u^{(2)}$ локализовано и $L^{(2)*} \leq L^{(1)*}$.

Меняя местами решения $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ и проводя аналогичные рассуждения, получаем противоположную оценку $L^{(1)*} \leq L^{(2)*}$, т. е. $L^{(1)*} = L^{(2)*}$, что завершает доказательство.

Рассмотрим теперь случай отсутствия локализации.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 решение $u^{(1)}$ не локализовано (НС-режим).

Тогда $u^{(2)}$ также не локализовано.

Доказательство. Если предположить обратное — $u^{(2)}$ локализовано, то в силу теоремы 1 $u^{(1)}$ также локализовано, что противоречит условиям.

Замечание. Указанные в (6) требования на краевые данные можно существенно ослабить. Фактически для справедливости утверждений теорем 1, 2 достаточно лишь выполнения первого условия (6) и равномерной ограниченности непрерывных начальных функций $u_0^{(v)}$.

Итак, свойства режимов с обострением при $t \rightarrow T^-$ практически не зависят от начального распределения температуры. Если некоторый граничный закон обеспечивает локализацию тепла (в строгом или эффективном смысле) при каком-то одном начальном условии, то локализация имеет место при любых других ограниченных начальных возмущениях. Сохраняется также глубина локализации, принадлежность к S- или LS-режиму.

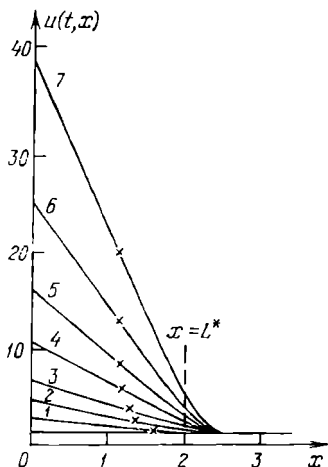


Рис. 31. Эффективная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. Параметры: $\sigma = 2$, $k_0 = 1$, $u_0(x) \equiv 1$, $A_S = T = 1$, $L^* = 2$: 1 — $T - t = 1,7 \cdot 10^{-1}$; 2 — $T - t = 5,48 \cdot 10^{-2}$; 3 — $T - t = 2,37 \cdot 10^{-2}$; 4 — $T - t = 8,14 \cdot 10^{-3}$; 5 — $T - t = 3,9 \cdot 10^{-3}$; 6 — $T - t = 1,58 \cdot 10^{-3}$; 7 — $T - t = 6,37 \cdot 10^{-4}$.

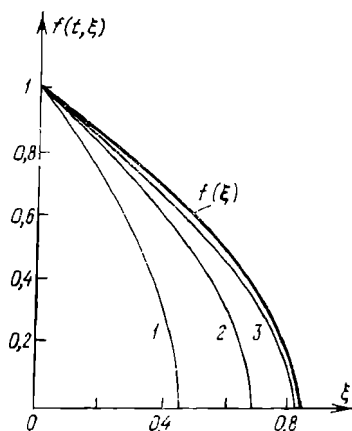


Рис. 32. «Выход» решения на автоматический NS-режим. Параметры: $\sigma = 2$, $n = -1$, $k_0 = 0,5$, $A_0 = 0,12$, $T = 1,12 \times 10^{-1}$: 1 — $T - t = 9,2 \cdot 10^{-3}$; 2 — $T - t = 6,15 \cdot 10^{-3}$; 3 — $T - t = 1,05 \cdot 10^{-3}$; $f(t, \xi) = \frac{u(t, \xi) (k_0 A_0^\sigma (T - t)^{1+n\sigma})^{1/2}}{A_0 (T - t)^n}$.

В частности, неизменны многие асимптотические свойства процессов распространения тепла в задаче (1.1) — (1.3), изученные в § 2, 3 для случая $k(u) = k_0 u^\sigma$ ($\sigma > 0$) и финитной функции $u_0(x)$. Например, справедлива

Теорема 3. Пусть в задаче (1.1) — (1.3)

$$k(u) = k_0 u^\sigma, \quad \sigma > 0, \quad \text{и} \quad u_1(t) = A_S (T - t)^{-1/\sigma}, \quad t \in (0, T).$$

Тогда решение эффективно локализовано, причем

$$L^* = (2k_0 A_S^\sigma (\sigma + 2)/\sigma)^{1/2}$$

На рис. 31 приведены результаты численного расчета, иллюстрирующие теорему 3.

Асимптотическая устойчивость автомодельных решений HS-, S- и LS-режимов доказана в гл. VI, где получены оценки скорости сходимости. Для примера на рис. 32 показан «выход» неавтомодельного решения на пространственно-временную структуру автомодельного HS-режима (жирная линия).

Не вводя точного критерия близости, отметим, что влияние начальных данных в области, охваченной тепловой волной, становится несущественным, если в среду поступила энергия, по крайней мере на порядок большая начальной. К примеру, для S-режима, когда характерный размер образующейся тепловой волны постоянен, выход на автомодельные закономерности происходит при росте температуры на границе примерно в 10 раз по сравнению с характерной начальной температурой. Этот факт отражен на рис. 31.

Таким образом, построенные в § 2 автомодельные решения с обострением являются устойчивыми асимптотиками тепловых процессов.

Аналоги теорем 1, 2 можно доказать для многомерных задач, а также в случае второй краевой задачи, когда на границе задан поток тепла (при этом неравенство (2) в лемме превращается в равенство).

Локализация тепла в среде или ее отсутствие определяются лишь видом граничного режима в отличие от ряда других эффектов нелинейной теплопроводности (например, конечной скорости распространения возмущений), для существования которых необходимы специальные начальные данные.

Полученные результаты расширяют сферу приложений изучаемых эффектов в различных физических ситуациях. Но возникает следующий вопрос: является ли инерция тепла свойством среды именно с нелинейной теплопроводностью $k(u) = k_0 u^\sigma$, $\sigma > 0$, или эффект локализации проявляется в произвольных средах? В частности, возможны ли различные режимы распространения тепла в среде, описываемой классическим уравнением теплопроводности?

2. Действие граничных режимов с обострением на среду с постоянными теплофизическими свойствами. Рассмотрим задачу о нагреве среды с постоянной теплопроводностью в режиме с обострением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < t < T, \quad x > 0, \quad (9)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x > 0, \quad (10)$$

$$u(t, 0) = u_1(t) \geq 0, \quad t \in [0, T); \quad u_1 \in C([0, T)); \quad (11)$$

$$u_1 \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-,$$

которая является частным случаем задачи (1.1)–(1.3). Для простоты начальная температура вещества взята равной нулю, что несущественно в силу принципа суперпозиции (см. также п. 1).

Возмущения в процессах, описываемых уравнением (9), распространяются с бесконечной скоростью, поэтому локализацию тепла следует понимать в эффективном смысле.

Решение задачи (9) — (11) выражается через потенциал двойного слоя:

$$u(t, x) = \frac{x}{2\sqrt{k_0\pi}} \int_0^t \exp\left\{-\frac{x^2}{4k_0(t-\tau)}\right\} \frac{u_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau. \quad (12)$$

Для определения условий локализации в задаче (9) — (11) совершим в (12) переход к пределу при $t \rightarrow T^-$:

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t, x) \equiv u(T^-, x) = \frac{x}{2\sqrt{k_0\pi}} \int_0^T \exp\left\{-\frac{x^2}{4k_0(T-\tau)}\right\} \frac{u_1(\tau)}{(T-\tau)^{3/2}} d\tau. \quad (13)$$

Из (13) видно, что наиболее интересным является класс «экспоненциальных» граничных режимов с обострением. Действительно, если

$$u_1(t) = A_S(T-t)^\nu \exp\{R_0(T-t)^{-1}\}, \quad R_0, A_S > 0, \quad (14)$$

то $u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^-$ для всех $x \in (0, x_S)$, где

$$x_S = 2\sqrt{k_0 R_0}. \quad (15)$$

При любых $x > x_S$ температура в момент $t = T^-$ ограничена:

$$u(T^-, x) = \frac{A_S x^{2\nu}}{2^{2\nu} \sqrt{\pi}} k_0^{-\nu} \left[1 - \left(\frac{x_S}{x}\right)^2\right]^{\nu-1/2} \times \\ \times \int_{(x^2-x_S^2)/(4k_0T)}^{\infty} e^{-u} u^{-\nu-1/2} du < \infty. \quad (16)$$

При $t = T^-$ в области $x > x_S$ ограничены также поток тепла и количество содержащейся в ней энергии. Параметр ν определяет характер изменения при $t \rightarrow T^-$ температуры и потока тепла в точке $x = x_S$: при $\nu > 1/2$ ($\nu > 3/2$) температура (поток тепла) ограничена в момент $t = T^-$, при $\nu \leq 1/2$ ($\nu \leq 3/2$) неограничена.

Решение (12), (14) — пример S-режима с обострением. Оно является аналогом остановившейся тепловой волны (15) в случае постоянной теплопроводности.

Из теоремы сравнения получаем, что для граничных режимов, мажорируемых функцией (14):

$$u_1(t) \leq A_S(T-t)^\nu \exp\{R_0(T-t)^{-1}\}, \quad t \in (0, T), \quad (17)$$

имеет место локализация тепла с глубиной $L^* \leq x_S$, и при $x > x_S$ решение ограничено для всех $0 < t < T$ предельной кривой (16). Условие (17) выделяет класс медленных граничных режимов

с обострением в рассматриваемой задаче. Если

$$u_1(t) \leq A_0(T-t)^\nu \exp\{R_0(T-t)^n\}, \quad 0 < t < T; \\ -1 < n \leq 0, \quad A_0 > 0 \quad (18)$$

(при $n=0$ полагаем $\nu < 0$), то интеграл (13) сходится при всех $x > 0$, и температура $u(t, x)$ обращается в бесконечность лишь в точке $x=0$. В остальном пространстве она ограничена:

$$u(T^-, x) \leq \frac{A_0 x^{2\nu}}{2^{2\nu} \sqrt{\pi}} k_0^{-\nu} \int_{x^2/(4k_0 T)}^{\infty} \exp\left\{-u + \frac{R_0 x^{2n}}{(4k_0)^n} u^{-n}\right\} u^{-\nu-1/2} du. \quad (19)$$

Таким образом, при выполнении условия (18) реализуется LS-режим с обострением.

Наконец, в случае быстрых режимов

$$u_1(t) \geq A_0(T-t)^\nu \exp\{R_0(T-t)^n\}, \quad 0 < t < T, \quad n < -1, \quad (20)$$

при всех $x > 0$ интеграл (13) расходится, $u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^-$ всюду в \mathbf{R}_+ и осуществляется HS-режим.

Итак, в среде с постоянными теплофизическими свойствами так же, как и в случае $k(u) = k_0 u^\sigma$ ($\sigma > 0$), существует три различных режима распространения тепла. Инерция тепла, появление конечной области локализации теплового процесса имеет место в однородной среде с бесконечной скоростью распространения возмущений.

Рассмотрим вопрос о локализации в многомерном случае. Здесь возможно построение областей локализации самой разнобразной формы, в частности областей с негладкой границей.

Решение уравнения теплопроводности ($k_0 = 1$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad 0 < t < T, \quad x_1 > 0, \quad -\infty < x_2 < \infty,$$

с условиями

$$u(0, x_1, x_2) \equiv 0; \quad u(t, 0, x_2) = \Phi(t, x_2) \geq 0, \quad t \in (0, T), \quad x_2 \in \mathbf{R},$$

где $\Phi(t, x_2) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^-$ для всех $x_2 \in E_0 \subseteq \mathbf{R}$, $E_0 \neq \emptyset$, представляется через двумерный тепловой потенциал:

$$u(t, x_1, x_2) = \\ = \frac{x_1}{4\pi} \int_0^t \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4(t-\tau)}\right\} \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2 - 2x_2 y}{4(t-\tau)}\right\} \Phi(\tau, y) dy.$$

Устремляя t к T^- , получаем предельное распределение температуры:

$$u(T^-, x_1, x_2) = \\ = \frac{x_1}{4\pi} \int_0^T \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4(T-\tau)}\right\} \frac{d\tau}{(T-\tau)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2 - 2x_2 y}{4(T-\tau)}\right\} \Phi(\tau, y) dy. \quad (21)$$

Пусть, например, граничный режим имеет вид

$$\Phi(t, x_2) = \exp\left\{\frac{x_2^2}{4(T-t)}\right\} \mu(t, x_2),$$

где

$$\mu(t, x_2) = \begin{cases} \exp\left\{\frac{2bx_2}{4(T-t)}\right\}, & 0 \leq x_2 \leq d = \text{const} > 0, \\ 0, & x_2 > d, \quad x_2 < 0, \end{cases}$$

и $b > 0$ — постоянная. Внутренний интеграл в (21) сходится при всех $x_2 \in \mathbf{R}$ и равен

$$I(x_2, \tau) = \begin{cases} \frac{2(T-\tau)}{x_2+b} \left[\exp\left\{\frac{(x_2+b)d}{2(T-\tau)}\right\} - 1 \right], & x_2 \neq -b, \\ d, & x_2 = -b. \end{cases}$$

Из (21) тогда получаем, что область локализации является множество

$$x_1^2 + (x_2 - d)^2 < d^2 + 2db, \quad x_1 > 0,$$

граница которого составлена из отрезка прямой и полуокружности. Внутри области локализации температура стремится к бесконечности при $t \rightarrow T^-$, вне ее — равномерно ограничена по времени.

Используя (21), нетрудно получить области локализации, границами которых служат все кривые второго порядка (парабола, эллипс, гиперболоа). Принцип суперпозиции позволяет комбинировать области, отвечающие разным граничным режимам, и получать в итоге области локализации с негладкими границами. На рис. 33 граница состоит из частей окружности и эллипса.

3. Асимптотическая стадия режимов с обострением в среде с постоянной теплопроводностью. На основе интегрального представления решения (12) задачи (9) — (11) трудно получить детальные характеристики асимптотической стадии процесса. Для этой цели мы воспользуемся построением автомодельных и приближенных автомодельных решений задачи. Рассмотрим два важных примера.

1. Граничные режимы степенного вида:

$$u_1(t) = A_0(T-t)^n, \quad 0 < t < T, \quad n < 0, \quad (22)$$

приводят к реализации LS-режима. Анализ задачи (9), (10), (22) проведем, используя автомодельные решения

$$u_A(t, x) = A_0(T-t)^n f_A(\xi), \quad \xi = x[k_0(T-t)]^{-1/2}, \\ -\infty < t < T, \quad x > 0.$$

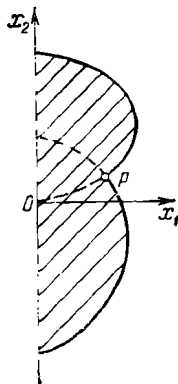


Рис. 33. Область локализации тепла (заштрихована) с негладкой границей (P — угловая точка)

Для функции $f_A(\xi)$ получаем тогда задачу

$$f_A'' - \frac{1}{2} f_A' \xi + n f_A = 0, \quad 0 < \xi < \infty, \quad f_A(0) = 1, \quad f_A(\infty) = 0,$$

которая имеет единственное положительное монотонное решение

$$f_A(\xi) = \frac{\Gamma(1/2 - n)}{\sqrt{\pi} \Gamma(-n)} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{\xi^2 s}{4}\right\} s^{-n-1} (1+s)^{n-1/2} ds, \quad 0 < \xi < \infty$$

Из принципа максимума следует, что разность между автомодельным и неавтомодельным решениями удовлетворяет оценке

$$0 \leq u_A(t, x) - u(t, x) \leq u_A(0, 0) = A_0 T^n. \quad (23)$$

Вводя «автомодельное представление» решения

$$f(t, \xi) = A_0^{-1} (T-t)^{-n} \times u(t, \xi [k_0 (T-t)]^{1/2}),$$

из (23) для всех $0 < t < T$ получаем оценку

$$f(t, \cdot) - f_A(\cdot) c_{(R_+)} \leq T^n (T-t)^{-n} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T^-$$

т. е. асимптотическую устойчивость автомодельного решения (результаты численного расчета см. на рис. 34). Устойчивость обеспечивает совпадение основных свойств решений $u(t, x)$ и $u_A(t, x)$ на асимптотической стадии.

Например, полуширина тепловой волны $x_{\text{эф}}(t)$, определяемая из уравнения

$$u(t, x_{\text{эф}}(t)) = \frac{1}{2} u(t, 0) \equiv \frac{1}{2} A_0 (T-t)^n, \quad t \rightarrow T^-,$$

в силу (23) удовлетворяет неравенствам

$$1/2 \leq f(t, x_{\text{эф}}(t)) / [k_0 (T-t)]^{1/2} \leq 1/2 + T^n (T-t)^{-n}. \quad (24)$$

Пусть $f_A^{-1}(1/2) = \xi_{\text{эф}} < \infty$, где f_A^{-1} — функция, обратная к $f_A(\xi)$ (она существует в силу монотонности $f_A(\xi)$). Тогда из (24)

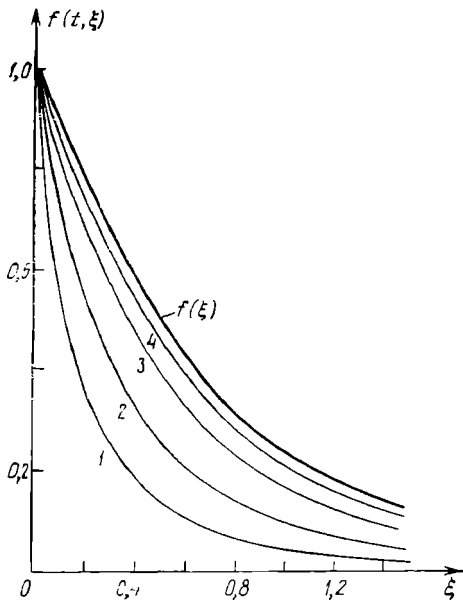


Рис. 34. «Выход» на автомодельный степенной LS-режим в среде с постоянной теплопроводностью. Параметры: $k_0 = 1$, $n = -0,5$, $A_0 = T = 1$: $1 - T - t = 0,77$; $2 - T - t = 0,70$; $3 - T - t = 0,55$; $4 - T - t = 0,41$

получаем закон изменения полуширины:

$$x_{\text{эф}}(t) = \xi_{\text{эф}}(T-t)^{1/2} + O[(T-t)^{-n+1/2}], \quad t \rightarrow T^-.$$

Аналогичный закон справедлив для величины $x_{\text{эн}}(t)$, определяемой из уравнения

$$W(t, x_{\text{эн}}(t)) = \frac{1}{2} W(t, 0), \quad 0 < t < T,$$

где $W(t, x)$ — поток тепла, т. е. $x_{\text{эн}}(t)$ — координата точки, по обе стороны которой распределяются равные количества поступающей в среду энергии.

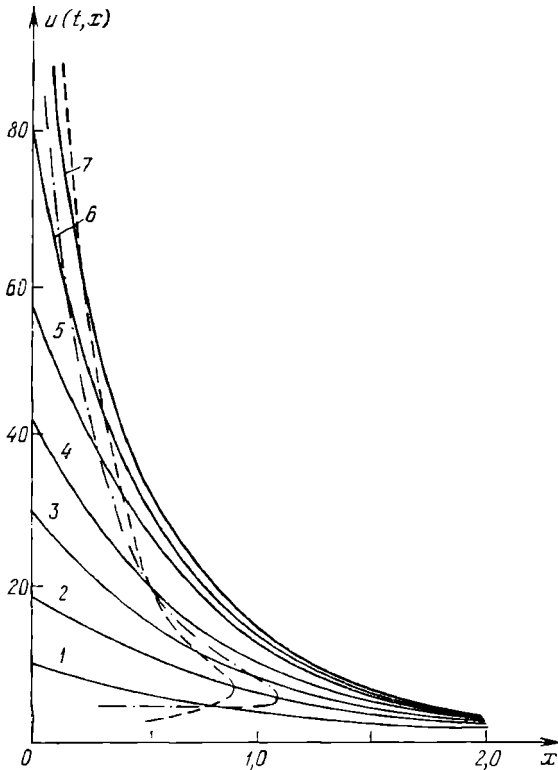


Рис. 35. Динамика степенного LS-режима в среде с постоянной теплопроводностью. Параметры: $k_0 = 1$, $A_0 = T = 1$: 1 — $T-t = 0,113$; 2 — $T-t = 5,8 \cdot 10^{-2}$; 3 — $T-t = 3,5 \cdot 10^{-2}$; 4 — $T-t = 2,3 \cdot 10^{-2}$; 5 — $T-t = 1,8 \cdot 10^{-2}$; 6 — $T-t = 1,2 \cdot 10^{-2}$; 7 — $T-t = 7 \cdot 10^{-3}$

На рис. 35 даны результаты численного решения задачи (9), (10), (22) при $n = -1$. Штриховой и штрихпунктирной линиями показаны траектории соответственно $x = x_{\text{эф}}(t)$ и $x_{\text{эн}}(t)$. Автономные закономерности устанавливаются при росте температуры на границе в 5—10 раз по сравнению с начальной (что близко к критерию установления для сред с $k(u) = k_0 u^\sigma$, $\sigma > 0$).

Вместе с тем между решениями $u(i, x)$ и $u_A(t, x)$ есть определенные различия. Асимптотика при $x \rightarrow \infty$ предельного распределения $u(t, x)$

$$u(T^-, x) = \frac{A_0 x^{2n}}{2^{2n} \sqrt{\pi}} k_0^{-n} \int_{x^2/(4k_0 T)}^{\infty} e^{-s} s^{-n-1/2} ds \quad (25)$$

является экспоненциальной в отличие от степенной асимптотики автомодельного решения

$$u_A(T^-, x) = \frac{A_0 x^{2n}}{2^{2n} \sqrt{\pi}} k_0^{-n} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) + \quad x \rightarrow \infty.$$

Это связано, естественно, с тем, что автомодельный профиль $u_A(T^-, x)$ формируется в течение бесконечного промежутка времени $t \in (-\infty, T)$.

2. Рассмотрим теперь асимптотическую стадию экспоненциальных граничных режимов с обострением:

$$u_i(t) = A_0 [\exp\{R_0(T-t)^n\} - 1], \quad 0 < t < T; \quad n < 0. \quad (26)$$

Выражение (26) отличается от (14) при $v=0$ на постоянную, что несущественно.

Задача (9), (10), (26) содержит по крайней мере два параметра с размерностью длины $[k_0(T-t)]^{1/2}$ и $[k_0 R_0^{-1/n}]^1$ и, следовательно, не имеет автомодельного решения. Мы покажем, что асимптотика решения задачи при $t \rightarrow T^-$ описывается автомодельными решениями некоторого «вырожденного» уравнения.

Они строятся следующим образом. Замена

$$V(t, x) = A_0 \ln[1 + u(t, x)/A_0] \quad (27)$$

приводит исходную задачу к виду

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k_0 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{k_0}{A_0} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \quad 0 < t < T, \quad x > 0, \quad (28)$$

$$V(t, 0) = A_0 R_0 (T-t)^n, \quad 0 < t < T, \quad (29)$$

$$V(0, x) = 0, \quad x > 0. \quad (30)$$

Если отбросить в уравнении (28) член со старшей производной, то мы придем к вырожденной задаче:

$$\frac{\partial V_a}{\partial t} = \frac{k_0}{A_0} \left(\frac{\partial V_a}{\partial x}\right)^2 \quad 0 < t < T, \quad x > 0,$$

$$V_a(t, 0) = A_0 R_0 (T-t)^n, \quad 0 < t < T,$$

которая имеет автомодельное решение

$$V_a(t, x) = A_0 R_0 (T-t)^n \theta_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(k_0 R_0)^{1/2} (T-t)^{(1+n)/2}}. \quad (31)$$

Функция $\theta_a(\xi) \geq 0$ удовлетворяет уравнению

$$(\theta'_a)^2 - \frac{1+n}{2} \theta'_a \xi + n\theta_a = 0, \quad \xi > 0; \quad \theta_a(0) = 1, \quad (32)$$

и всюду, где она положительна, определяется неявным образом из равенства

$$\left[\sqrt{\left(\frac{1+n}{4}\right)^2 - n\theta_a \xi^{-2}} - \frac{1+n}{4} \right]^{(1+n)/2} \left[\sqrt{\left(\frac{1+n}{4}\right)^2 - n\theta_a \xi^{-2}} + \frac{1-n}{4} \right]^{(1-n)/2} = \frac{(-n)^{1/2}}{\xi}. \quad (33)$$

В остальных точках полагаем $\theta_a(\xi) = 0$.

Свойства монотонной функции θ_a зависят от параметра n .

1) Если $-1 < n < 0$ (LS-режим), то $\theta_a(\xi) > 0$ при всех $\xi > 0$ и

$$\begin{aligned} \theta_a(\xi) &= C(n) \xi^{2n/(1+n)} + \quad \xi \rightarrow \infty; \\ C(n) &= -\frac{1+n}{2n} 2^{-2n/(1+n)} (-n)^{1/(1+n)}. \end{aligned}$$

2) При $n = -1$ (S-режим) решение имеет вид

$$\theta_a(\xi) = \begin{cases} (1 - \xi/2)^2, & 0 < \xi < 2, \\ 0, & \xi \geq 2. \end{cases}$$

3) В случае $n < -1$ (HS-режим) θ_a — финитная функция: $\theta_a(\xi) > 0$ при $0 \leq \xi < \xi_\Phi = 2(-n)^{n/2}(-1-n)^{-(1+n)/2}$, $\theta_a(\xi) = 0$ при всех $\xi \geq \xi_\Phi$, причем $\theta_a(\xi) = -[(1+n)/2]\xi_\Phi(\xi_\Phi - \xi) + o((\xi_\Phi - \xi))$ при $\xi \rightarrow \xi_\Phi^-$.

Во всех случаях $\theta'_a(0) = -(-n)^{1/2}$, $\theta''_a(\xi) > 0$ всюду, где $\theta_a > 0$, и $\theta''_a(\xi) \leq \theta''_a(0) = (1-n)/4$ при $\xi \in (0, \xi_\Phi)$.

Из свойств автомодельных решений и принципа максимума следует оценка (см. § 2 гл. VI)

$$\begin{aligned} -A_0 R_0 T^n \leq V(t, x) - V_a(t, x) \leq A_0 \|\theta''_a(\xi)\|_{C(0, \xi_\Phi)} \ln \frac{T}{T-t}, \\ t \in (0, T), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Тогда из (27) для решения исходной задачи получаем

$$\begin{aligned} A_0 \left[\exp \left\{ \frac{V_a(t, x)}{A_0} - R_0 T^n \right\} - 1 \right] \leq u(t, x) \leq \\ \leq A_0 T^{-(n-1)/4} (T-t)^{(n-1)/4} \exp \left\{ \frac{V_a(t, x)}{A_0} \right\}. \quad (34) \end{aligned}$$

Для автомодельного представления решения V :

$$\theta(t, \xi) = (A_0 R_0)^{-1} (T-t)^{-n} V(t, \xi (k_0 R_0)^{1/2} (T-t)^{(1+n)/2})$$

из предыдущих неравенств вытекает следующая оценка скорости

сходимости к приближенному автомодельному решению:

$$\|\theta(t, \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_{C(\mathbb{R}_+)} = O((T-t)^{-n} |\ln(T-t)|) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T^-. \quad (35)$$

Сходимость (35) в случае S-режима показывают результаты численного решения задачи (28)–(30), приведенные на рис. 36. Значительный рост температуры в основной части области локализации по сравнению с температурой при $x > x_s = 2(k_0 R_0)^{1/2}$

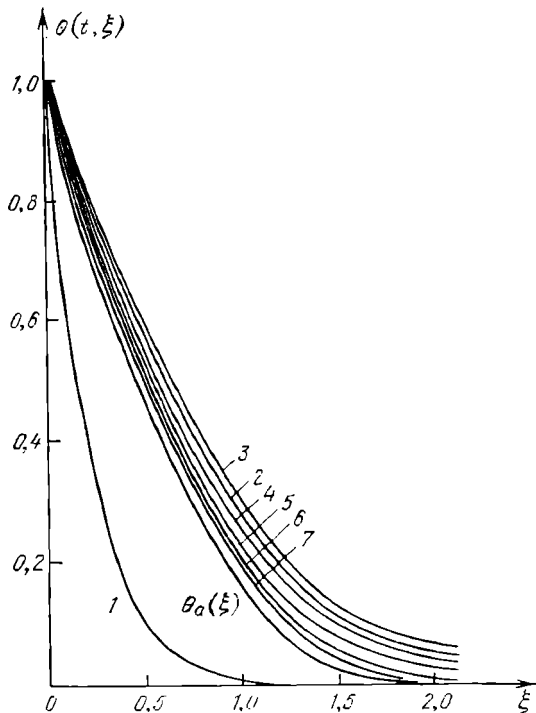


Рис. 36. Параметры: $n = -1$, $k_0 = 1$, $A_0 = R_0 = T = 1$, $x_s = 2$: 1 — $T - t = 0,95$; 2 — $T - t = 0,47$; 3 — $T - t = 0,2$; 4 — $T - t = 0,1$; 5 — $T - t = 5 \cdot 10^{-2}$; 6 — $T - t = 2,5 \cdot 10^{-2}$; 7 — $T - t = 1,2 \cdot 10^{-2}$

происходит, если температура на границе увеличивается в 10–20 раз.

Оценка (34) дает возможность провести детальный анализ развитой стадии процесса. Например, в S-режиме для всех $0 < x < x_s = 2(k_0 R_0)^{1/2}$ из (34) получаем при $t \rightarrow T^-$ оценки

$$A_0[\exp\{R_0(T-t)^{-1}(1-x/x_s)^2 - R_0 T^{-1}\} - 1] \leq u(t, x) \leq \\ \leq A_0 T^{1/2} (T-t)^{-1/2} \exp\{R_0(T-t)^{-1}(1-x/x_s)^2\},$$

откуда следует, что в области локализации температура изменяется по закону

$$u(t, x) \sim \exp\{R_0(T-t)^{-1}(1-x/x_s)^2\}, \quad 0 < x < x_s; \quad t \rightarrow T^-.$$

В случае HS-режима для любого $x > 0$ имеем

$$u(t, x) \sim \exp \{R_0(T-t)^n - x(-R_0n/k_0)^{1/2}(T-t)^{(n-1)/2}\}, \quad t \rightarrow T^-,$$

т. е. температура в любой точке пространства неограниченно возрастает, но в более медленном темпе, чем граничная температура.

С помощью (34) также нетрудно определить динамику развития процесса на асимптотической стадии:

$$\begin{aligned} x_{эф}(t) &= \ln 2 \left[\frac{k_0}{R_0(-n)} \right]^{1/2} (T-t)^{(1-n)/2} + O[(T-t)^{(3-n)/2}], \\ x_{эн}(t) &= \left[\frac{k_0}{R_0(-n)} \right]^{1/2} \frac{1-n}{4} (T-t)^{(1-n)/2} + O[(T-t)^{(3-n)/2}]. \end{aligned} \quad (36)$$

В отличие от среды со степенной нелинейностью здесь во всех случаях $x_{эф}(t) \rightarrow 0$, $x_{эн}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow T^-$, в том числе и в HS-режиме, когда температура неограниченно растет всюду в R_+ . Это, в частности, показывает, что сокращение полуширины не является признаком локализации режима в обострении. Отметим, что обычно используемая размерностная оценка полуширины температурного распределения $x_{эф}(t) \sim [k_0(T-t)]^{1/2}$ в данном случае неправильно описывает процесс на развитой стадии.

Итак, при действии на среду экспоненциальных граничных режимов с обострением (26) на развитой стадии происходит своеобразное вырождение параболического уравнения (9) в уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_0 \frac{(\partial u / \partial x)^2}{A_0 + u},$$

автомодельные решения которого дают главный член асимптотики решения при $t \rightarrow T^-$.

Функция (31) является приближенным автомодельным решением задачи (28)–(30). Общая теория п. а. р. параболических уравнений и ее приложения излагаются в гл. VI.

Выводы данной главы свидетельствуют об общем характере эффекта инерции тепла и показывают, что условия его проявления вполне реализуемы. Полученные здесь результаты будут использованы в гл. V, VI при исследовании граничных режимов с обострением в средах с достаточно произвольными теплофизическими свойствами.

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

§ 1. Автомодельное решение S-режима (5) построено в [159] (существование решений в разделяющихся переменных для уравнения (1) было известно раньше; см., например, [13]), где впервые изучена остановившаяся тепловая волна в краевой задаче; там же численно проверена ее асимптотическая устойчивость. Работа [159] стимулировала подробные исследования эффекта локализации в среде с нелинейной теплопроводностью [91,

113—115], где сформулированы основные понятия и определения. Подробный анализ локализованного решения из примера 2 проведен в [153, 154, 41].

§ 2. Три типа автомодельных режимов с обострением (S-, LS- и HS-режимы) изучались в [156, 94, 116, 55]. При изложении п. 2 мы следуем [55]; другим способом существование и единственность автомодельных решений доказаны в [216, 217].

§ 3. Теоремы об условиях существования локализации или ее отсутствии (пп. 1, 2) доказаны в [135]. Более подробное обсуждение физических причин локализации можно найти в [94, 116, 117]; там же анализируются возможности ее экспериментального исследования. Локализация в задаче Коши изучалась в [156, 94, 116]. Один интересный пример локализованной начальной функции построен ранее в [174], где найдено точное значение времени локализации, совпадающее с вычисленным в п. 3. Результаты п. 4 изложены в основном в [125, 142, 116].

Список работ, посвященных исследованию локальных свойств поверхности вырождения в задачах для квазилинейных параболических уравнений, приведен в комментариях к гл. I и II.

§ 4. Результаты п. 1 частично изложены в [45]. Исследование, проведенное в пп. 2, 3, опубликовано в [154, 153, 41].

Популярное изложение некоторых вопросов, связанных с эффектом локализации, можно найти в [95].

Возможные приложения изучаемых эффектов рассмотрены в [93, 158]. Режимы с обострением в сжимаемых средах с учетом различных физических процессов исследовались в [6, 68—71, 83, 88—90, 163, 253], более полную библиографию можно найти в [116, 117].

**НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ИСТОЧНИКОМ.
РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ, ЛОКАЛИЗАЦИЯ,
АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ**

Данная глава посвящена исследованию пространственно временной структуры и условий возникновения неограниченных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения со степенными нелинейностями:

$$u_t = \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u) + u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad (0.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad u_0^{\sigma+1} \in C^1(\mathbf{R}^N), \quad (0.2)$$

где $\sigma > 0$, $\beta > 1$ — постоянные.

Уравнение (0.1) описывает процессы с конечной скоростью распространения возмущений (см. § 3 гл. I). Поэтому, если u_0 — финитная функция, то $u(t, x)$ так же будет финитной по x при всех $0 < t < T_0$, где $T_0 \leq \infty$ — время существования решения. Основной вопрос, который рассматривается в § 1, 2, 4, состоит в определении условий локализации неограниченных решений.

Определение 1. Неограниченное решение задачи (0.1), (0.2) называется *локализованным (в строгом смысле)*, если множество

$$\Omega_L = \left\{ x \in \mathbf{R}^N \mid u(T_0^-, x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow T_0^-} u(t, x) > 0 \right\} \quad (3)$$

является ограниченным.

Множество Ω_L называется *областью локализации*. Ограниченность Ω_L , в частности, означает, что $u(t, x) \equiv 0$ в $\mathbf{R}^N \setminus \Omega_L$ при всех $0 \leq t < T_0$. Это следует из общих свойств решений параболического уравнения с источником. Локализованное в строгом смысле решение неограниченно возрастает при $t \rightarrow T_0^-$ в области $\omega_L = \{x \in \mathbf{R}^N \mid u(T_0^-, x) = \infty$ конечных размеров, отличной, вообще говоря, от Ω_L . Локализованные решения так же, как в случае граничной задачи (гл. III), удобно разделить на два класса: локализованные решения *S-режима*, для которых $0 < \text{mes } \omega_L < \infty$, и *LS-режима*, когда $\text{mes } \omega_L = 0$. В последнем случае решение $u(t, x)$ возрастает до бесконечности, например, в одной точке, а в остальных ограничено сверху равномерно по $t \in (0, T_0)$.

Определение 2. В задаче (0.1), (0.2) *локализация отсутствует*, если область Ω_L в (0.3) неограничена.

Нелокализованные неограниченные решения мы относим к классу *NS-режимов с обострением*. Процесс горения не является

локализованным, если тепловые возмущения при $t \rightarrow T_0^-$ проникают как угодно далеко. В ряде случаев условие, указанное в определении 2, эквивалентно требованию

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_0^-} u(t, x) = \infty, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

т. е. нелокализованное решение возрастает до бесконечности при $t \rightarrow T_0^-$ во всем пространстве.

В § 1, 2, 4 показано, что при $\beta \geq \sigma + 1$ в задаче существует локализация, причем случаю $\beta = \sigma + 1$ отвечает S-режим горения и случаю $\beta > \sigma + 1$ — LS-режим, а при $1 < \beta < \sigma + 1$ (HS-режим) локализация отсутствует. Это исследование проводится с помощью построения неограниченных автомодельных решений (§ 1), а также качественным методом осреднения (§ 2), который в некоторых диапазонах параметров устанавливает их асимптотическую устойчивость.

В § 3 доказываются различные утверждения об условиях возникновения неограниченных решений задачи (0.1), (0.2), а также устанавливается, что при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ она может быть глобально разрешимой, что подтверждает качественный вывод § 2.

Строгие результаты о существовании ($\beta \geq \sigma + 1$) и отсутствии ($1 < \beta < \sigma + 1$) локализации неограниченных решений при $N = 1$ приведены в § 4.

Следующий § 5 целиком посвящен исследованию асимптотической устойчивости автомодельных решений.

В § 6 показано, что при некоторых $u_0(x)$ в случае $\sigma + 1 < \beta \leq (\sigma + 1) \cdot N / (N - 2)_+$ в задаче (0.1), (0.2) развивается LS-режим с обострением, когда $\text{mes } \omega_L = 0$. Там же получены оценки $u(T_0^-, x)$ сверху и снизу в окрестности сингулярной точки, где $u(T_0^-, x) = \infty$.

В § 7 с указанных выше позиций изучается полулинейное уравнение (0.1) при $\sigma = 0$ с источником достаточно общего вида. Здесь, в частности, получены достаточные условия *эффективной локализации* режимов с обострением, т. е. ограниченности множества ω_L . Подробно анализируется эффект вырождения параболического уравнения $u_t = \Delta u + (1 + u) \ln^{\beta}(1 + u)$, $\beta > 1$, на асимптотической стадии эволюции режима с обострением. Асимптотика процесса горения описывается инвариантными решениями нелинейного уравнения первого порядка типа Гамильтона — Якоби. Такой эффект вырождения выше изучался в граничной задаче (см. § 4 гл. III).

§ 1. Три типа автомодельных режимов горения с обострением

Исследование довольно сложной нелинейной задачи (0.1), (0.2) удобно начать с анализа частных автомодельных решений уравнения (0.1). Здесь построены неограниченные автомодельные решения, пространственно-временная структура которых суще-

ственно различается в трех случаях: $1 < \beta < \sigma + 1$ (HS-режим с обострением), $\beta = \sigma + 1$ (S-режим; решение этого вида в одномерном случае рассматривалось в гл. I — пример 13 в § 3), $\beta > \sigma + 1$ (LS-режим). Хотя эти частные решения реализуются при некотором специальном выборе начальной функции $u_0(x)$, тем не менее анализ их пространственно временной структуры позволяет обоснованно судить о характере протекания процесса горения с обострением в общем случае (см. § 5). Кроме того, их можно применять для выяснения условий возникновения режимов с обострением, т. е. условий глобальной неразрешимости задачи Коши (см. § 3, 4). Они также используются при доказательстве локализации неограниченных решений в случае $\beta \geq \sigma + 1$.

Пространственно временная структура неограниченных автомодельных решений несет важную и практически исчерпывающую информацию об общих свойствах эволюции неограниченных решений уравнения (0.1). Поэтому не будет преувеличением назвать построенные частные решения *собственными функциями* (с. ф.) горения нелинейной диссипативной среды, отвечающей уравнению (0.1).

1. Формулировка автомодельных задач. При любых *) $\sigma > 0$ и $\beta > 1$ уравнение (0.1) имеет неограниченные автомодельные решения следующего вида:

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} \theta_A(\xi), \quad \xi = x/(T_0 - t)^m, \quad (1)$$

где

$$m = [\beta - (\sigma + 1)]/[2(\beta - 1)].$$

Здесь постоянная $T_0 > 0$ — время существования решения u_A , при $t \geq T_0$ решение (1), вообще говоря, не определено и амплитуда решения неограниченно возрастает при $t \rightarrow T_0^-$. Функция $\theta_A(\xi) \geq 0$ удовлетворяет в \mathbf{R}^N эллиптическому уравнению, которое получается после подстановки выражения (1) в (0.1):

$$\nabla_{\xi} (\theta_A^{\sigma} \nabla_{\xi} \theta_A) - m \nabla_{\xi} \theta_A \cdot \xi - \frac{1}{\beta-1} \theta_A + \theta_A^{\beta} = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}^N \quad (2)$$

Это уравнение имеет тривиальное решение $\theta_A \equiv 0$, а также пространственно однородное решение

$$\theta_A(\xi) \equiv \theta_H = (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}. \quad (3)$$

В соответствии с (1) этому решению отвечает процесс однородного по пространству (гомותרмического) горения в режиме с обострением.

Ниже мы ограничимся анализом радиально симметричных автомодельных решений:

$$\xi = r/(T_0 - t)^m, \quad r = |x|. \quad (4)$$

Тогда (2) превращается в обыкновенное дифференциальное

*) Случай $\sigma = 0$ рассматривается в § 7.

уравнение:

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta_A^\sigma \theta_A')' - m \theta_A' \xi - \frac{1}{\beta-1} \theta_A + \theta_A^\beta = 0, \quad \xi > 0. \quad (5)$$

Первый оператор можно записать в виде

$$(\theta_A^\sigma \theta_A')' + \frac{N-1}{\xi} 0_A^\sigma \theta_A',$$

и поэтому для того, чтобы решение θ_A было определено в \mathbf{R}^N , необходимо задать условие симметрии:

$$\theta_A'(0) = 0 \quad (\theta_A(0) > 0). \quad (6)$$

Кроме того, потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\theta_A(\infty) = 0. \quad (7)$$

В этом параграфе основное внимание уделяется исследованию задачи (5)–(7) и анализу свойств соответствующих радиально симметричных автомодельных решений (1).

Уравнение (5) является вырождающимся при $\theta_A = 0$; поэтому (5)–(7) допускает, вообще говоря, обобщенное решение, не имеющее в точках вырождения необходимой гладкости. Однако во всех случаях автомодельный тепловой поток $-\xi^{N-1} \theta_A^\sigma \theta_A'$ должен быть непрерывным (аналогично в случае уравнения (2) должна быть непрерывна в \mathbf{R}^N производная $\nabla \theta_A^{\sigma+1}$). Это, в частности, означает, что $\theta_A^\sigma \theta_A' = 0$ всюду, где $\theta_A = 0$.

Любое решение уравнения (5) можно рассматривать в области немонотонности как некоторые колебания относительно гомотермического решения $0 \equiv \theta_{II}$. Эта аналогия связана с тем, что максимум функции θ_A может достигаться только там, где $-\theta_A/(\beta-1) + \theta_A^\beta > 0$, т. е. при $\theta_A > \theta_{II}$, а минимум там, где $0 \leq \theta_A < \theta_{II}$.

2. Локализация горения в автомодельном S-режиме, $\beta = \sigma + 1$. В этом случае уравнение (2) принимает наиболее простой вид:

$$\frac{1}{\sigma+1} \Delta_\xi \theta_A^{\sigma+1} - \frac{1}{\sigma} \theta_A + \theta_A^{\sigma+1} = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}^N, \quad (8)$$

а соответствующая радиально симметричная задача (5)–(7) записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta_A^\sigma \theta_A')' - \frac{1}{\sigma} \theta_A + \theta_A^{\sigma+1} = 0, \quad \xi > 0, \quad (9)$$

$$\theta_A'(0) = 0 \quad (\theta_A(0) > 0), \quad \theta_A(\infty) = 0. \quad (10)$$

2.1. Случай $N = 1$. В одномерной геометрии уравнение (9) превращается в автономное и интегрируется. В частности, нетрудно получить следующее решение уравнения (9):

$$\theta_A(\xi) = \left(\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)} \cos^2 \frac{\pi \xi}{L_S} \right)^{1/\sigma} \quad \xi \geq 0, \quad (11)$$

где

$$L_S = \frac{2\pi}{\sigma} (\sigma + 1)^{1/2}. \quad (12)$$

При $\beta = \sigma + 1$, как следует из (1), $\xi \equiv x$; поэтому (1) представляет собой решение в разделяющихся переменных:

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-1/\sigma} \theta_A(x), \quad 0 < t < T_0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (13)$$

(функция θ_A при этом четным образом продолжается в область отрицательных значений x).

Решение (13) выглядит довольно необычно с точки зрения традиционных представлений о характере распространения тепла в средах с диффузией. Дело в том, что $\theta_A(x)$ в (11) — периодическая функция; она обращается в нуль в точках $x_k = (1/2 \pm k) L_S$ ($k = 0, 1, \dots$), причем тепловой поток $-\theta_A^\sigma \theta_A'$ является непрерывным: $\theta_A^\sigma \theta_A' \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_k$. Поэтому обобщенным решением задачи (9), (10) будет и функция θ_A , состоящая только из одной «волны» общего решения (11), а в остальных точках можно положить $\theta_A \equiv 0$.

Отсюда автомодельным решением является, в частности, функция

$$u_A(t, x) = \begin{cases} (T_0 - t)^{-1/\sigma} \left(\frac{2(\sigma + 1)}{\sigma(\sigma + 2)} \cos^2 \frac{\pi x}{L_S} \right)^{1/\sigma} & |x| < L_S/2, \\ 0, & |x| \geq L_S/2; \quad 0 < t < T_0. \end{cases} \quad (14)$$

Это элементарная тепловая структура автомодельного S-режима с обострением, локализованная в области $\{|x| < L_S/2\}$ в течение всего времени ее существования. Несмотря на неограниченное возрастание решения при $t \rightarrow T_0^-$ во всех точках области локализации $\{|x| < L_S/2\}$, тепловые возмущения в окружающее холодное пространство не проникают.

Величина L_S в (12) называется *фундаментальной длиной* S-режима горения нелинейной среды. Как показывают численные расчеты, практически при произвольных немонотонных начальных возмущениях неограниченное решение при $\beta = \sigma + 1$ обращается в бесконечность на множестве меры L_S . Если же $u_0(x) > 0$ на участке малой длины $\text{mes sup} u_0 < L_S$, то осуществляется локализация в строгом смысле на длине L_S . Кроме того, величина L_S характеризует максимальную длину распространения финитных тепловых возмущений в течение всего времени существования неограниченного решения (см. § 4).

Здесь приведены результаты двух численных расчетов. На рис. 37 показана эволюция начального возмущения $u_0(x)$ с небольшой энергией, распределенной в области малых размеров (меньших L_S). Отчетливо видно, что сначала тепловое возмущение расплывается до некоторой *резонансной (критической) длины*, лишь после этого, начиная с момента времени t_c , процесс го-

решения становится пятенсивным и при $t \rightarrow T_0^-$ протекает в соответствии с автомодельным решением (14).

На рис. 38 начальная энергия велика и занимает большую область, внутри которой $u_0(x)$ близка к пространственно однородному распределению $u_0 \equiv 1$. Фактически на рис. 38 показана неустойчивость пространственно однородного (гомотермического) решения в S-режиме.

В обоих случаях формируется неограниченная тепловая структура, которая развивается при $t \rightarrow T_0^-$ (T_0 — время существования структуры; для разных структур она разная) по автомодельным закономерностям, указанным в (14). В первом случае, как видно из рис. 37, решение строго локализовано на интервале длиной L_s . Во втором случае (см. рис. 38) строгой локализации нет, однако неограниченное возрастание решения происходит на фундаментальной длине L_s . Автомодельная обработка произвольного решения

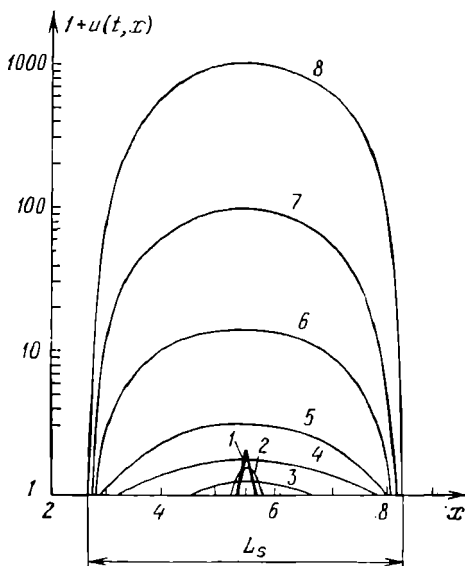


Рис. 37. Численная реализация S-режима. Параметры: $\sigma = 2$, $\beta = 3$, $N = 1$, $L_s = 2\pi(\sigma + 1)^{1/2}/\sigma \approx 5,44$; 1 — $t_1 = 0$; 2 — $t_2 = 7,92 \cdot 10^{-2}$; 3 — $t_3 = 19,6$; 4 — $t_4 = 73,0$; 5 — $t_5 = 74,9$; 6 — $t_6 = 74,951$; 7 — $t_7 = 74,9548$; 8 — $t_8 = 74,9551$

нестационарной задачи показывает, что ее решение при любых начальных данных в определенном смысле близко к соответствующему автомодельному решению (14), пространственно временная структура которого является фундаментальным свойством S-режима. Доказательство этого факта приведено в § 5.

При $N = 1$ существует счетное множество различных автомодельных решений, составленных из произвольного числа элементарных решений (14), которые в силу условия тепловой изолированности горят независимо друг от друга. Любую элементарную структуру можно удалить, причем это никак не скажется на характере эволюции соседних. Оказывается, конечный спектр автомодельных структур возможен и при $\beta > \sigma + 1$. Однако принцип суперпозиции — объединения элементарных структур в более сложные — в этом случае не столь прост (см. комментарий).

2.2. Многомерный случай, $N > 1$. Автомодельное решение S-режима существует в пространстве произвольной размерно-

сти $N > 1$. Однако здесь в отличие от одномерного случая нет немонотонных решений.

Теорема 1. При любых $N > 1$ существует финитное решение $\theta_A(\xi)$ задачи (9), (10). Функция θ_A всюду, где она положительна, является монотонно убывающей. Немонотонных решений задача не имеет.

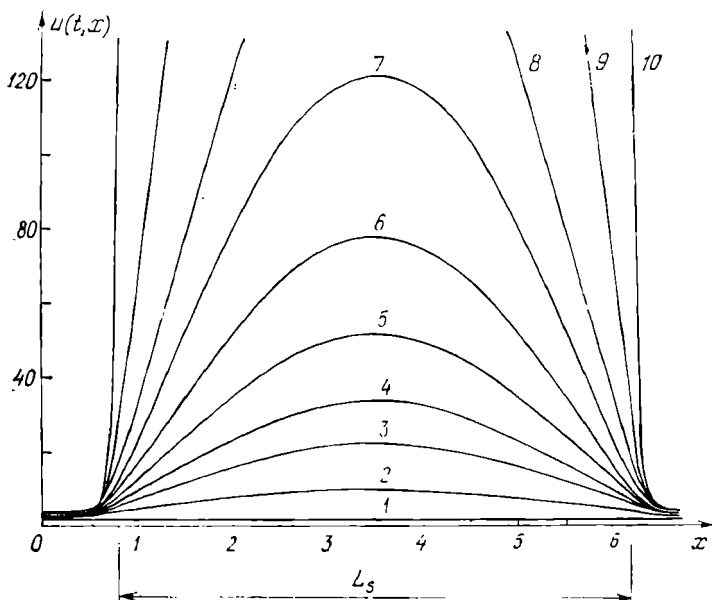


Рис. 38. Численная реализация S-режима. Параметры: $\sigma = 2$, $\beta = 3$, $N = 1$, $L_S \approx 5,44$: 1 — $t_1 = 0$; 2 — $t_2 = 0,43$; 3 — $t_3 = 0,4464$; 4 — $t_4 = 0,4484$; 5 — $t_5 = 0,4491$; 6 — $t_6 = 0,4495$; 7 — $t_7 = 0,44963$; 8 — $t_8 = 0,449699$; 9 — $t_9 = 0,449738$; 10 — $t_{10} = 0,449747$

Прежде всего отметим, что финитность любого возможного решения θ_A вытекает из анализа уравнения при малых $\theta_A > 0$ с помощью теорем о неподвижных точках непрерывных преобразований (предварительно (9) сводится к эквивалентному интегральному уравнению). Этот простой анализ дает единственно возможную асимптотику функции θ_A : она финитна, и если $\text{mes suppr } \theta_A = \xi_0 > 0$, то

$$\theta_A(\xi) = \left\{ \frac{\sigma}{2(\sigma+2)} (\xi_0 - \xi)^2 \right\}^{1/\sigma} (1 + \varepsilon(\xi)), \quad \xi < \xi_0 \quad (15)$$

($\theta_A(\xi) \equiv 0$ при всех $\xi \geq \xi_0$), где $\varepsilon(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \xi_0^-$

Для доказательства существования удобно рассмотреть наряду с (9), (10) семейство задач Коши для уравнения (9):

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} |\theta|^\sigma \theta')' - \frac{1}{\sigma} \theta + |\theta|^\sigma \theta = 0, \quad \xi > 0, \quad (16)$$

$$\theta(0) = \mu, \quad \theta'(0) = 0, \quad (17)$$

где $\mu > 0$ — постоянная. В тех точках, где $0 \geq 0$, уравнение (16) совпадает с (9). Необходимо подобрать такое значение $\mu = \theta_0 > 0$, чтобы решение задачи Коши (16), (17) $\theta = \theta(\xi; \mu)$ было неотрицательным при всех $\xi \geq 0$ и удовлетворяло второму условию

(10), т. е. $\theta(\infty; \mu) = 0$. Локальное существование и единственность решения задачи (16), (17) при всех достаточно малых $\xi > 0$ устанавливается на основе анализа эквивалентного интегрального уравнения с помощью теоремы Банаха о сжимающих отображениях.

Главный интерес представляет глобальный анализ свойств решений $\theta(\xi; \mu)$, который проводится ниже. Предварительно отметим, что всякое локальное решение $\theta(\xi; \mu)$ может быть продолжено на всю полуось $\xi \in \mathbf{R}_+$; при этом $\theta(\xi; \mu)$ может сходиться при $\xi \rightarrow \infty$ лишь к значениям 0 или $\pm \sigma^{-1/\sigma}$.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие леммы.
Лемма 1. Пусть

$$0 < \mu < \mu_* = \left[\frac{2(\sigma + 1)}{\sigma(\sigma + 2)} \right]^{1/\sigma} \quad (18)$$

Тогда $\theta(\xi; \mu) > 0$ при всех $\xi > 0$. Кроме того, при любых $\mu > \theta_H = \sigma^{-1/\sigma}$ решение является ограниченным в \mathbf{R}_+ :

$$|\theta(\xi; \mu)| < \mu, \quad \xi > 0. \quad (19)$$

Доказательство. Оно основано на тождестве, для вывода которого умножим (16) на $|\theta|^\sigma \theta'$ и проинтегрируем полученное равенство с учетом условий (17) по интервалу $(0, \xi)$. В результате получим

$$\frac{1}{2} (|\theta|^\sigma \theta')^2(\xi) + (N - 1) \int_0^\xi (|\theta|^\sigma \theta')^2(\eta) \frac{d\eta}{\eta} + \Phi(|\theta(\xi)|) = \Phi(\mu), \quad (20)$$

где

$$\Phi(\mu) = \frac{1}{2(\sigma + 1)} \mu^{2\sigma+2} - \frac{\mu^{\sigma+2}}{\sigma(\sigma + 2)}, \quad \mu \geq 0 \quad (21)$$

(примерный график этой функции изображен на рис. 39).

Из (20) следует, что $\Phi(|\theta(\xi)|) \leq \Phi(\mu)$ при всех $\xi > 0$ (равенство достигается в одном-единственном случае, когда $\theta = \theta_H$,

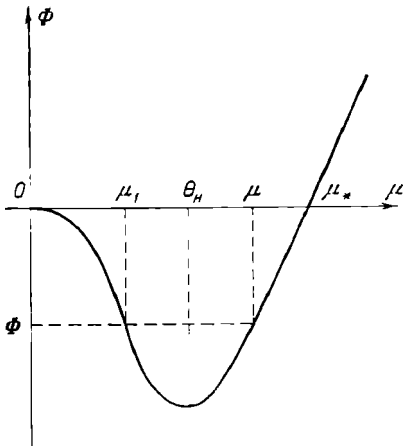


Рис. 39. Функция $\Phi(\mu)$ (см. (21)) при $\beta = \sigma + 1$

$\mu = \theta_{II}$). Таким образом, если $\mu < \mu_*$, то для решения задачи справедлива оценка

$$\mu_1 < \theta(\xi; \mu) < \mu, \quad \xi > 0, \quad \mu \neq \theta_{II},$$

где $\mu_1 > 0$ — второй (отличный от μ) корень уравнения $\Phi(\mu_1) = \Phi(\mu)$. Оценка (19) прямо следует из неравенства $\Phi(|\theta(\xi)|) < \Phi(\mu)$ при $\mu > \theta_{II}$.

З а м е ч а н и е. В силу (20) возможные колебания θ относительно гомотермического решения $\theta \equiv \theta_{II}$ являются затухающими, т. е. если $\xi_1 < \xi_2$ — точки максимума (минимума) функции $\theta \geq \theta_{II}$, то

$$\theta(\xi_1; \mu) > \theta(\xi_2; \mu) \quad (\theta(\xi_1; \mu) < \theta(\xi_2; \mu)). \quad (22)$$

Покажем теперь, что при некотором достаточно большом μ решение θ не является строго положительным.

Л е м м а 2. *Существует такое $\mu = \mu^* > \theta_{II}$, что решение задачи Коши (16), (17) обращается в нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть $\theta(\xi; \mu) > 0$ в R_+ при всех $\mu > \theta_{II}$. Задача (16), (17) эквивалентна интегральному уравнению

$$\varphi'(\xi) = (\sigma + 1) \xi^{1-N} \int_0^{\xi} \eta^{N-1} \left[\frac{1}{\sigma} |\varphi|^{-\sigma/(\sigma+1)} \varphi - \varphi(\eta) \right] d\eta, \quad \xi > 0, \quad (23)$$

где введено обозначение $\varphi(\xi) = |\theta|^\sigma \theta(\xi; \mu)$, $\varphi(0) = \mu^{\sigma+1}$. Положим $\psi_\mu(\xi) = \varphi(\xi)/\varphi(0) \equiv \varphi(\xi)/\mu^{\sigma+1}$. Тогда уравнение для ψ_μ примет вид

$$\psi'_\mu(\xi) = (\sigma + 1) \xi^{1-N} \int_0^{\xi} \eta^{N-1} \left[\frac{1}{\sigma} \mu^{-\sigma} |\psi_\mu|^{-\sigma/(\sigma+1)} \psi_\mu - \psi_\mu \right] d\eta, \quad \xi > 0, \quad (24)$$

причем в силу (19)

$$|\psi_\mu(\xi)| \leq 1, \quad \xi \geq 0; \quad \mu > \theta_{II}. \quad (25)$$

Кроме того, из (24) выводится оценка

$$|\psi'_\mu(\xi)| \leq \frac{\sigma+1}{\xi^{N-1}} \int_0^{\xi} \eta^{N-1} \left[\frac{1}{\sigma} \mu^{-\sigma} + 1 \right] d\eta \equiv \frac{\sigma+1}{N} \xi \left[1 + \frac{1}{\sigma} \mu^{-\sigma} \right], \quad \xi > 0. \quad (26)$$

Из (25) и (26) следует, что при любых $\mu > \theta_{II}$ функции ψ_μ и ψ'_μ равномерно ограничены на любом компакте $[0, \xi_m]$. Тогда из теоремы компактности Арцела — Асколи следует, что существует такая последовательность $\mu_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, что соответствующая последовательность $\psi_{\mu_k}(\xi)$ сходится равномерно на $[0, \xi_m]$ к некоторой функции $w(\xi)$. Уравнение для w получается из (24) предельным переходом $\mu = \mu_k \rightarrow \infty$ (сходимость $\psi' \rightarrow w'$ устанавли-

ливается после перехода от (24) к соответствующему интегральному уравнению). Оно имеет вид

$$w'(\xi) = -(\sigma + 1)\xi^{1-N} \int_0^\xi \eta^{N-1} w(\eta) d\eta, \quad \xi > 0; \quad w(0) = 1, \quad (27)$$

причем $w \in C([0, \infty)) \cap C^1(\mathbf{R}_+)$.

Учитывая теперь, что по предположению $\psi_\mu > 0$ в \mathbf{R}_+ при любых $\mu > \theta_H$, получаем $w(\xi) \geq 0$ в \mathbf{R}_+ . Однако в силу (27) $w(\xi)$ — строго убывающая функция, поэтому $w > 0$ в \mathbf{R}_+ . Это немедленно приводит к противоречию, поскольку задача (27) эквивалентна краевой задаче

$$w'' + \frac{N-1}{\xi} w' + (\sigma + 1)w = 0, \quad \xi > 0; \quad w'(0) = 0, \quad w(0) = 1,$$

решение которой $w = C_1 \xi^{(2-N)/2} J_{(N-2)/2}((\sigma + 1)^{1/2} \xi)$ ($C_1 > 0$ — постоянная, $J_{(N-2)/2}$ — функция Бесселя) обращается в нуль в точке $\xi = \xi_1 \equiv z_N^{(1)} / (\sigma + 1)^{1/2}$, где $z_N^{(1)} > 0$ — первый корень функции $J_{(N-2)/2}$.

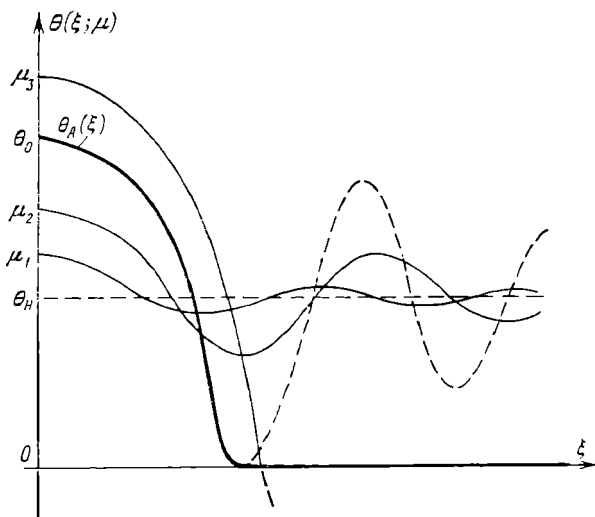


Рис. 40. Схематическое изображение кривых $\theta = \theta(\xi; \mu)$ — решений задачи (16), (17) — при различных $\mu > \theta_H$, $\beta = \sigma + 1$ (S-режим)

Свойства решений задачи (16), (17) проиллюстрированы на рис. 40. Значениям $\mu_1 > \theta_H$, $\mu_2 > \mu_1$ отвечают строго положительные в \mathbf{R}_+ решения $\theta(\xi; \mu)$ (лемма 1), значению $\mu_3 > \mu_2$ — решение $\theta(\xi; \mu_3)$, обращающееся в нуль (лемма 2). Поэтому может существовать такое $\mu = \theta_0 \in (\mu_2, \mu_3]$, при котором функция $\theta^{\sigma+1}(\xi; \theta_0)$ «касается» оси ξ в некоторой точке $\xi = \xi_0$, причем «касание» позволяет продолжить $\theta(\xi; \theta_0)$ в область $\xi > \xi_0$ тождественным нулем. В результате получается обобщенное решение исходной за-

дачи (9), (10) с непрерывным тепловым потоком $-\xi^{N-1}|\theta_A|^\sigma \theta'_A$, оно обозначено на рис. 40 жирной линией.

Но для того чтобы использовать указанные выше свойства решений $\theta(\xi; \mu)$, понадобится условие непрерывной зависимости $\theta(\xi; \mu)$ от параметра μ . Отметим, что в общем случае непрерывная зависимость отсутствует. Это наглядно показывает рис. 40.

Лемма 3. Пусть решение $\theta = \theta(\xi; \mu)$, $\mu_1 > 0$ таково, что на компакте $K = [0, \xi_m]$ нет точек, в которых $|\theta|^\sigma \theta' = (|\theta|^\sigma \theta')' = 0$. Тогда $\theta(\xi; \mu)$ и $(|\theta|^\sigma \theta')(\xi; \mu)$ непрерывным образом зависят от параметра μ в окрестности $\mu = \mu_1$ на K .

Доказательство. Рассмотрим уравнение (23), эквивалентное задаче (16), (17), при $\mu = \mu_1$. В подынтегральном выражении присутствует функция $|\varphi|^{-\sigma/(\sigma+1)}\varphi$, не дифференцируемая при $\varphi = 0$. Естественно, если $\theta(\xi; \mu_1) > 0$ на K , то непрерывная зависимость от μ имеет место. Пусть $\xi = \xi_1$ — первая точка, где $\theta(\xi; \mu_1) = 0$. По условию $(|\theta|^\sigma \theta)'(\xi_1; \mu_1) \neq 0$. Тогда непрерывная зависимость от μ есть на любых отрезках $[0, \xi_1 - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ — малая величина. В окрестности $\varphi \equiv 0$ оператор в правой части (23) не является сжимающим, однако недифференцируемый член $|\varphi|^{-\sigma/(\sigma+1)}\varphi$ на $(\xi_1 - \varepsilon, \xi_1 + \varepsilon)$ мал, и поэтому при продолжении решения $\theta(\xi; \mu)$, где $|\mu - \mu_1|$ — малая величина, в эту окрестность сохранится непрерывность производной $\varphi'(\xi)$ по ξ и μ и, конечно, самого решения $\varphi(\xi) \equiv (|\theta|^\sigma \theta)(\xi; \mu)$, которое продолжается единственным образом. Аналогично осуществляется продолжение $\theta(\xi; \mu)$ на весь компакт K , в процессе которого сохраняется непрерывная зависимость φ и φ' от μ в окрестности $\mu = \mu_1$.

Доказательство теоремы 1. Оно целиком основано на леммах 1—3. Введем множество $\mathcal{M} = \{\mu^0 > 0 \mid \theta(\xi; \mu) > 0 \text{ в } \mathbf{R}_+\}$ при всех $0 < \mu < \mu^0$. Из леммы 1 вытекает, что $\mathcal{M} \neq \{\mu^0 \leq \theta_N\}$. В силу леммы 2 \mathcal{M} ограничено сверху. Поэтому существует $\theta_0 = \sup \mathcal{M} < \infty$. Из леммы 3 тогда вытекает, что решение задачи (16), (17) при $\mu = \theta_0$ представляет собой искомую функцию θ_A , удовлетворяющую условиям (10) с асимптотикой (15). Монотонность любого неотрицательного решения задачи (9), (10) прямо следует из замечания к лемме 1.

3. Нелокализованные автомодельные решения HS-режима, $\beta < \sigma + 1$. Здесь тем же способом доказывается теорема о разрешимости автомодельной задачи (5) — (7) при $\beta \in (1, \sigma + 1)$. Непосредственный анализ уравнения показывает, что решением $\theta_A(\xi)$ может быть только финитная функция с асимптотикой в окрестности точки вырождения $\xi_0 = \text{mes sup} \theta_A$, отличной от (15):

$$\theta_A(\xi) = \left[\frac{(\sigma + 1 - \beta)\sigma}{2(\beta - 1)} \xi_0 (\xi_0 - \xi) \right]^{1/\sigma} (1 + \omega(\xi)), \quad (28)$$

где $\omega(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \xi_0^-$.

Теорема 2. При любых $1 < \beta < \sigma + 1$ существует финитное решение θ_A задачи (5), (7), строго убывающее всюду, где $\theta_A > 0$. Немонотонных решений задача не имеет. При $N = 1$ финитное решение θ_A единственно.

Кратко охарактеризуем основные моменты доказательства. Тождество, аналогичное (20), здесь имеет вид

$$\frac{1}{2} (|\theta|^{\sigma}\theta')^2(\xi) + (N-1) \int_0^{\xi} (|\theta|^{\sigma}\theta')^2(\eta) \frac{d\eta}{\eta} - \\ - m \int_0^{\xi} \eta (|\theta|^{\sigma}\theta'^2)(\eta) d\eta + \Phi(|\theta(\xi)|) = \Phi(\mu), \quad (29)$$

где функция

$$\Phi(\mu) = \frac{1}{\beta + \sigma + 1} \mu^{\beta + \sigma + 1} - \frac{1}{(\beta - 1)(\sigma + 2)} \mu^{\sigma + 2}, \quad \mu \geq 0,$$

имеет тот же вид, что и на рис. 39. Поэтому, учитывая, что $m = [\beta - (\sigma + 1)] / [2(\beta - 1)] < 0$, получаем $\Phi(|\theta(\xi)|) \leq \Phi(\mu)$; в частности, $\theta(\xi) > 0$ в \mathbf{R}_+ при всех

$$0 < \mu < \mu_* = \left[\frac{\beta + \sigma + 1}{(\beta - 1)(\sigma + 2)} \right]^{1/(\beta - 1)}$$

Отсюда также вытекает, что при любых $\mu > \theta_H = (\beta - 1)^{-1/(\beta - 1)}$ решение равномерно ограничено: $|\theta(\xi)| \leq \mu$ в \mathbf{R}_+ . Тем самым для случая $\beta < \sigma + 1$ доказан аналог леммы 1.

Для доказательства аналога леммы 2 задача (5), (17) (уравнение (5) предварительно продолжается в область отрицательных значений θ) после замены $\varphi = |\theta|^{\sigma}\theta$ сводится к интегральному уравнению

$$\varphi'(\xi) = m(\sigma + 1)\xi|\varphi|^{-\sigma/(\sigma+1)}\varphi + \\ + (\sigma + 1)\xi^{1-N} \int_0^{\xi} \eta^{N-1} \left[\left(\frac{1}{\beta - 1} - mN \right) |\varphi|^{-\sigma/(\sigma+1)} - |\varphi|^{[(1 - (\sigma + 1))/(\sigma + 1)]} \right] \varphi d\eta,$$

которое после преобразования

$$\psi_{\mu}(\xi) = \mu^{-(\sigma+1)}\varphi\left(\frac{\xi}{\mu^{[\beta - (\sigma+1)]/2}}\right) \quad (30)$$

принимает вид

$$\psi'_{\mu}(\xi) = m(\sigma + 1)\mu^{1-\beta}\xi|\psi_{\mu}|^{-\sigma/(\sigma+1)}\psi_{\mu} \quad (\sigma + 1)\xi^{1-N} \times \\ \times \int_0^{\xi} \eta^{N-1} \left[\left(\frac{1}{\beta - 1} - mN \right) \mu^{1-\beta} |\psi_{\mu}|^{-\sigma/(\sigma+1)} - |\psi_{\mu}|^{[\beta - (\sigma+1)]/(\sigma+1)} \right] \psi_{\mu} d\eta. \quad (30')$$

Отсюда так же, как при доказательстве леммы 2, получаем, что предположение $\psi_{\mu} > 0$ в \mathbf{R}_+ при любых $\mu > \theta_H$ приводит в силу теоремы компактности к существованию последовательности

$\{\mu_k\}$ такой, что $\psi_\mu \rightarrow w > 0$ при $\mu = \mu_k \rightarrow \infty$, причем $w(\xi)$ удовлетворяет задаче

$$w' = -(\sigma + 1) \xi^{1-N} \int_0^\xi \eta^{N-1} w^{\beta/(\sigma+1)}(\eta) d\eta, \quad \xi > 0; \quad w(0) = 1.$$

Она эквивалентна задаче

$$w'' + \frac{N-1}{\xi} w' + (\sigma + 1) w^{\beta/(\sigma+1)} = 0, \quad \xi > 0; \quad w'(0) = 0, \quad w(0) = 1, \quad (31)$$

решение которой обращается в нуль. Доказательство этого утверждения приведено в п. 4.1 § 3, где рассматривается случай произвольных $\beta > 1$, $\sigma \geq 0$. Завершается доказательство теоремы 2 так же, как в п. 2, с помощью утверждения, аналогичного лемме 3.

Единственность финитной автомодельной функции θ_λ , $N = 1$, будет доказана в § 5 на основе анализа квазилинейного уравнения с частными производными. Зависимость $\theta(\xi; \mu)$ от μ при $\beta < \sigma + 1$ в принципе такая же, как на рис. 40.

Убедившись в существовании подходящей функции $\theta_\lambda(\xi)$, укажем теперь основные свойства автомодельного решения (1) при $1 < \beta < \sigma + 1$. Это HS-режим горения с обострением, и неограниченное решение не является локализованным. Последнее прямо следует из изменения со временем радиуса носителя неограниченного решения u_λ в (4). Действительно, из (4) получаем следующее выражение для $|x_\Phi(t)|$ — радиуса сферического фронта распространяющейся тепловой волны:

$$|x_\Phi(t)| = \xi_0 (T_0 - t)^{1/(\beta - (\sigma + 1))}$$

В силу условия $\beta < \sigma + 1$ имеем $|x_\Phi(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$, т. е. тепловая волна за конечное время охватывает все пространство. Более того, из (1) нетрудно вывести, что в HS-режиме

$$u_\lambda(t, x) \rightarrow \infty \text{ в } \mathbb{R}^N, \quad t \rightarrow T_0^-. \quad (32)$$

Из (4) также выводится аналогичное выражение координаты полуширины пространственного профиля волны:

$$|x_{c\Phi}(t)| = \xi_* (T_0 - t)^{1/(\beta - (\sigma + 1))/[\Gamma^2(\beta - 1)]}, \quad 0 < t < T_0,$$

где $\xi_* > 0$ — корень уравнения $\theta_\lambda(\xi) = \theta_\lambda(0)/2$. В силу монотонности θ_λ величина ξ_* определяется единственным образом.

Оказывается, эти автомодельные закономерности сохраняются в случае достаточно произвольных начальных возмущений $u_0(x)$ в задаче (0.1), (0.2). Все неограниченные решения $u(t, x)$ при $\beta < \sigma + 1$ удовлетворяют (32) и не являются локализованными. Теорема об отсутствии локализации при $\beta < \sigma + 1$ доказана в § 4. Для примера на рис. 41 приведены результаты численного расчета задачи Коши (0.1), (0.2) при $N = 1$. Отчетливо видно, что

здесь в отличие от S-режима (см. рис. 37) тепловая волна при $t \rightarrow T_0^-$ движется со все увеличивающейся скоростью, захватывая и нагревая до бесконечной температуры все пространство $(-\infty < x < \infty)$.

4. Локализация в автомодельном LS-режиме горения с обострением, $\beta > \sigma + 1$. В этом пункте рассматриваются автомодельные решения при $\beta > \sigma + 1$, которые еще более ярко, чем в S-режиме, проявляют свойство локализации процессов диффузии

тепла и горения.

Рассмотрим краевую задачу (5)–(7) при $\beta > \sigma + 1$. Нетрудно показать, что в отличие от случаев $\beta = \sigma + 1$ (п. 2) и $\beta < \sigma + 1$ (п. 3) при $\beta > \sigma + 1$ нет финитных обобщенных решений, и θ_A имеет следующую асимптотику:

$$\theta_A(\xi) = C_A \xi^{-2/[\beta - (\sigma + 1)]} (1 + v(\xi)), \\ v(\xi) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (33)$$

где $C_A = C_A(\sigma, \beta, N) > 0$ — постоянная. Отсутствие точки $\xi =$

$= \xi_0 > 0$ такой, что $\theta_A(\xi_0) = 0$, $(\theta_A^2 \theta_A')(\xi_0) = 0$ и $\theta_A(\xi) > 0$ при $0 < \xi < \xi_0$, прямо следует из локального анализа уравнения (5) в левой полуокрестности $\xi = \xi_0$.

Ниже проводится доказательство существования простейшего монотонного решения задачи (5)–(7). Более сложные немонотонные решения (так называемые *собственные функции горения нелинейной среды*) подробно исследовались в [155, 92, 116, 117, 122, 81, 1, 2].

Как обычно, наряду с краевой задачей (5)–(7) рассмотрим семейство задач Коши для того же уравнения:

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} |\theta|^\sigma \theta')' - m \theta' \xi - \frac{1}{\beta-1} \theta + |\theta|^{\beta-1} \theta = 0, \quad \xi > 0, \quad (34)$$

$$\theta(0; \mu) = \mu, \quad \theta'_\xi(0; \mu) = 0; \quad m = \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta - 1)} > 0, \quad (35)$$

где $\mu > 0$ — постоянная. Покажем, что для некоторого μ решение $\theta = \theta(\xi; \mu) \geq 0$ удовлетворяет условию на бесконечности (7) и тем самым определяет искомого функцию θ_A . Отметим одну особенность решений задачи (34), (35). Ранее для случаев $\beta = \sigma + 1$ и $\beta < \sigma + 1$ было показано, что в классе всех решений $\theta(\xi; \mu)$ задачи Коши при различных $\mu > 0$ всегда существовало семейство строго положительных функций θ , колеблющихся относительно пространственно однородного (гомотермического) решения $\theta \equiv \theta_H$ (см. рис. 40). При этом колебания были затухающими и их амплитуда уменьшалась с ростом ξ , что обеспечивало строгую поло-

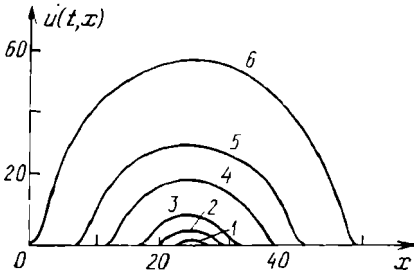


Рис. 41. Численная реализация NS-режима. Параметры: $\sigma = 2$, $\beta = 5/3$, $N = 1$: 1 — $t_1 = 0$; 2 — $t_2 = 1,63$; 3 — $t_3 = 2,030$; 4 — $t_4 = 2,320$; 5 — $t_5 = 2,410$; 6 — $t_6 = 2,505$

жительность этих решений. В случае $\beta > \sigma + 1$, когда $m > 0$, это, вообще говоря, не так.

Например, при $N = 1$ тождество (29) обеспечивает обратный эффект, т. е. если при некотором $\mu > 0$ существует колеблющееся относительно $\theta \equiv \theta_H$ решение $\theta = \theta(\xi; \mu) > 0$ и ξ_1, ξ_2 ($\xi_1 < \xi_2$) — какие-либо две точки максимума (минимума), то

$$\theta(\xi_1; \mu) < \theta(\xi_2; \mu) \quad (\theta(\xi_1; \mu) > \theta(\xi_2; \mu)). \quad (36)$$

Мы будем учитывать следующий легко устанавливаемый факт: если $\theta(\xi; \mu) \rightarrow s$ при $\xi \rightarrow \infty$ ($s \geq 0$), то $s = 0$ (для доказательства достаточно провести локальный анализ уравнения в окрестности $\xi = \infty$; см. [1, 2]).

4.1. Линеаризация относительно $\theta \equiv \theta_H$. Довольно точное представление о характере незатухающих колебаний при μ , достаточно близких к θ_H , дают решения $v(\xi)$ задачи, полученной за счет линеаризации исходной задачи относительно однородного решения $\theta \equiv \theta_H$.

Положим

$$\theta(\xi; \mu) = \theta_H + \varepsilon v(\xi), \quad \xi \geq 0; \quad \theta_H = (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}, \quad (37)$$

где $\varepsilon > 0$ — постоянная, играющая в дальнейшем роль малого параметра. Тогда после подстановки выражения (37) в (34), (35) получим для $v(\xi)$ следующую задачу:

$$\theta_H^\sigma \frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} v')' - m v' \xi + v = \varepsilon \Phi_\varepsilon(v), \quad \xi > 0, \quad (38)$$

$$v(0) = v, \quad v'(0) = 0. \quad (39)$$

Здесь $\Phi_\varepsilon(v): C^2 \rightarrow C$ — некоторый ограниченный квазилинейный оператор второго порядка. Граничные значения v в (39) и μ в (35) связаны равенством

$$\mu = \theta_H + \varepsilon v. \quad (37')$$

Из (38) вытекает, что в силу непрерывной зависимости решения уравнения от параметра при достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение $v(\xi)$ задачи (38), (39) близко к решению соответствующей линейной задачи:

$$\theta_H^\sigma \frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} y')' - m y' \xi + y = 0, \quad \xi > 0, \quad (40)$$

$$y(0) = v \neq 0, \quad y'(0) = 0. \quad (41)$$

В связи с этим рассмотрим задачу (40), (41) более подробно. Преобразование независимой переменной

$$\xi = \left(\frac{2\theta_H^\sigma}{m} \right)^{1/2} \eta^{1/2} \equiv \left[\frac{4(\beta-1)^{1-\sigma/(\beta-1)}}{\beta - (\sigma+1)} \right]^{1/2} \eta^{1/2} \quad (42)$$

приводит (40) к вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$\eta y''_{\eta\eta} + y'_\eta (c - \eta) - ay = 0, \quad \eta > 0; \quad y(0) = v, \quad (43)$$

где $c = N/2$, $a = -1/(2m) = -(\beta - 1)/[\beta - (\sigma + 1)]$. При этом второе краевое условие (41) принимает вид

$$\eta^{1/2} y'_\eta(\eta) |_{\eta=0} = 0.$$

Поэтому подходящим является решение (43) с ограниченной производной $y'_\eta(0)$. Оно дается всюду сходящимся рядом Кумера [15, 137]:

$$y(\eta) = v \left(1 + \frac{a}{c} \frac{\eta}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{\eta^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{\eta^3}{3!} + \dots \right), \quad (44)$$

который определяет вырожденную гипергеометрическую функцию

$$y(\eta) = v M(a, c, \eta) = v e^\eta \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} \int_0^1 e^{-\eta s} s^{c-a-1} (1-s)^{a-1} ds.$$

Функция (44) (и, следовательно, решение $y(\xi)$ задачи (40), (41)) является, вообще говоря, немонотонной. В тех случаях, когда

$$-a = (\beta - 1)/[\beta - (\sigma + 1)] = K, \quad (45)$$

где $K > 1$ — целое, функция $y(\eta)$ представляет собой полином степени K , поскольку ряд (44) обрывается на $(K+1)$ -м члене, причем известно (см. [15]), что он имеет при $\eta > 0$ ровно K «нулей». Последнее равенство имеет место, если

$$\beta = \beta_K = -\frac{1}{K-1} + \frac{K}{K-1}(\sigma + 1), \quad K = 2, 3, \quad (46)$$

(для удобства положим $\beta_1 = \infty$). Например, если $\beta = \beta_2 = 2\sigma + 1$, то

$$y(\eta) = v \left(1 - \frac{4}{N} \eta + \frac{4}{N(N+2)} \eta^2 \right), \quad \eta > 0,$$

и, следовательно, уравнение $y(\eta) = 0$ имеет два положительных корня:

$$\eta_0^\pm = [N + 2 \pm (2(N+2))^{1/2}]/2,$$

которым отвечают следующие нули решения $y(\xi)$ исходной задачи (40), (41):

$$\xi_0^\pm = 2 \sqrt{2} (2\sigma)^{-1/4} (\eta_0^\pm)^{1/2} > 0.$$

Формула (45) определяет число нулей (и тем самым характер немонотонности или можно сказать степень сложности) функции y при всех значениях $\beta > \sigma + 1$. Именно, при любых $\beta_{K+1} \leq \beta < \beta_K$ ($K = 1, 2, \dots$) функция $y(\xi)$ имеет ровно K нулей при $\xi > 0$ (см. [15], где приведены приближенные формулы для вычисления нулей и положения точек экстремума функции $y(\xi)$).

Объединяя рассмотренные случаи, получаем общую формулу числа нулей решения задачи (40), (41):

$$K = -[a], \quad a = -(\beta - 1)/[\beta - (\sigma + 1)] < 0, \quad (47)$$

справедливую для любых $\beta > \sigma + 1$. В силу (47) $K \geq 2^*$) при всех $\beta > \sigma + 1$, т. е. решение $y(\xi)$ всегда является немонотонным. Отметим, что колебания $y(\xi)$ относительно нуля являются незатухающими (это прямо следует из вида уравнения (40)).

Возвращаясь к исходной линеаризованной задаче (38), (39), получаем, что в силу непрерывной зависимости решения v на любом компакте от параметра $\varepsilon > 0$ в окрестности $\varepsilon = 0$ найдется такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, что при всех $|v| \leq 1$ функция $v(\xi)$ имеет при $\xi > 0$ не менее K ($K \geq 2$) нулей. Для исходной задачи (34), (35) это означает, что при любых $0 < \theta_{II} - \varepsilon < \mu < \theta_{II} + \varepsilon$ решение $\theta(\xi; \mu)$ имеет при $\xi \geq 0$ не менее K экстремумов. В частности, если $\theta_{II} < \mu < \theta_{II} + \varepsilon$, то существует не менее $[K/2]$ точек минимума и $K - [K/2]$ точек максимума, для которых справедливо (36).

4.2. Глобальные свойства решений $\theta(\xi; \mu)$. Итак, установлено поведение $\theta(\xi; \mu)$ при всех μ , близких к θ_{II} . Покажем теперь, что при достаточно больших μ функция $\theta(\xi; \mu)$ обращается в нуль в некоторой точке. Для этого можно использовать тот же метод, что и в случае $\beta \leq \sigma + 1$ (хотя в силу (36) здесь возникают некоторые дополнительные трудности). Однако при $N = 1$ этот результат можно получить значительно проще. В дальнейшем мы ограничимся весьма кратким анализом случая $N = 1$, излагая одновременно некоторые результаты, относящиеся к многомерному уравнению.

Лемма 4. Пусть $N = 1$, $\beta > \sigma + 1$. Тогда при всех

$$\mu \geq \mu^* = \left[\frac{\beta + \sigma + 1}{(\beta - 1)(\sigma + 2)} \right]^{1/(\beta - 1)} \quad (48)$$

решение $\theta = \theta(\xi; \mu)$ задачи (34), (35) обращается в нуль и не имеет в $\{\xi > 0 | \theta(\xi; \mu) > 0, 0 < \xi < \bar{\xi}\}$ точек экстремума (т. е. является строго убывающим).

Доказательство. Рассмотрим тождество (29), которое при $N = 1$ имеет вид

$$\frac{1}{2} (|\theta|^\sigma \theta')^2(\xi) - m \int_0^\xi \eta (|\theta|^\sigma (\theta')^2)(\eta) d\eta + \Phi(|\theta(\xi)|) = \Phi(\mu). \quad (49)$$

Здесь функция

$$\Phi(\mu) = \frac{1}{\beta + \sigma + 1} \mu^{\beta + \sigma + 1} - \frac{1}{(\beta - 1)(\sigma + 2)} \mu^{\sigma + 2}, \quad \mu \geq 0,$$

имеет тот же вид, что и в случае $\beta \leq \sigma + 1$ (см. рис. 39).

Предположим противное. Пусть, например, при выполнении (48) решение $\theta(\xi; \mu)$ имеет точку минимума при $\xi = \xi_* < \infty$, в ко-

* Обратим внимание, что в случае полулинейного уравнения ($\sigma = 0$) $K = 1$ при всех β . Этот вывод играет важную роль в § 7.

торой, естественно, $\theta < \theta_H$. Тогда, полагая в (49) $\xi = \xi_*$, в силу условия $m > 0$ получаем неравенство $\Phi(\theta(\xi_*)) > \Phi(\mu)$, и поэтому должно быть выполнено неравенство $\theta(\xi_*; \mu) > \mu > \theta_H$, что невозможно. Точно так же доказывается, что при $\mu \geq \mu^*$ функция $\theta(\xi; \mu)$ не является положительным решением в R_+ (т. е. случай $\xi_* = \infty$ также невозможен).

Аналогично из тождества (49) выводится

Следствие. *Всякое решение задачи (5) — (7) при $\beta > \sigma + 1$, $N = 1$ удовлетворяет оценке*

$$\theta_A(\xi) < \mu^* = \left[\frac{\beta + \sigma + 1}{(\beta - 1)(\sigma + 2)} \right]^{1/(\beta - 1)} \quad (50)$$

Доказательство. Пусть $\xi = \xi_*$ — точка абсолютного экстремума функции $\theta_A(\xi)$. Полагая в (49) последовательно $\xi = \infty$, $\xi = \xi_*$ и вычитая второе равенство из первого, получаем $\Phi(\theta_A(\xi_*)) < 0$, что обеспечивает (50).

Перейдем теперь к доказательству разрешимости задачи (5) — (7) при $\beta > \sigma + 1$, $N = 1$. Положим $\mathcal{N} = \{\mu > \theta_H \mid \text{существует компакт } K = [0, \xi_K] \text{ такой, что } \theta(\xi; \mu) > 0 \text{ на } K \text{ и имеет по крайней мере одну точку минимума на } K\}$. Тогда $\mathcal{N} \neq \emptyset$ (анализ линеаризованного уравнения) и \mathcal{N} ограничено сверху (лемма 4). Поэтому существует

$$\sup \mathcal{N} = \theta_0 \in (\theta_H, \infty). \quad (51)$$

Нетрудно видеть, что в силу выбора θ_0 функция $\theta(\xi; \theta_0)$, во-первых, не имеет при $\xi > 0$ точек минимума (это следует из непрерывной зависимости $\theta(\xi; \mu)$ от μ на любом компакте, где $\theta > 0$) и, во-вторых, не может обращаться в нуль (см. лемму 3). Тем самым $\theta(\xi; \theta_0)$ является положительным строго монотонным решением $\theta_A(\xi)$ задачи (5) — (7) при $\beta > \sigma + 1$, $N = 1$.

На рис. 42 показано примерное поведение функций $\theta(\xi; \mu)$ при различных значениях $\mu = \theta(0; \mu)$; жирной линией обозначено искомое решение $\theta_A(\xi)$, отвечающее $\mu = \theta_0 = \sup \mathcal{N}$.

Итак, доказана следующая

Теорема 3. *Пусть $\beta > \sigma + 1$, $N = 1$. Тогда задача (5) — (7) имеет строго монотонное положительное решение.*

Некоторые дополнительные свойства функции $\theta_A(\xi)$ будут указаны в п. 4.3, а также в § 6.

Замечание. Как упоминалось ранее, в теореме 3 указано простейшее автомодельное решение; на самом деле задача (5) — (7) имеет не менее $K' = K - 1$ (см. (47)) различных решений $\theta_A^1, \theta_A^2, \dots, \theta_A^{K-1}$. Каждое из них отличается от всех предыдущих большим числом точек экстремума. Среди них не менее $[K'/2]$ решений таких, что $\theta_A(0) < \theta_H$ ($\xi = 0$ — точка минимума), и не менее $K' - [K'/2]$ решений таких, что $\theta_A(0) > \theta_H$ ($\xi = 0$ — точка максимума). Доказательство существования этих решений проводится аналогично, в множество $\mathcal{N} \neq \emptyset$ включаются те μ , для которых соответствующая функция $\theta(\xi; \mu)$ имеет более слож-

ный пространственный профиль, чем искомое решение $\theta_A(\xi)$ (см. [1, 2]).

4.3. Многомерный случай, $N > 1$. Тем же способом, который применялся при доказательстве леммы 2, нетрудно показать, что справедливость утверждения, аналогичного лемме 4,

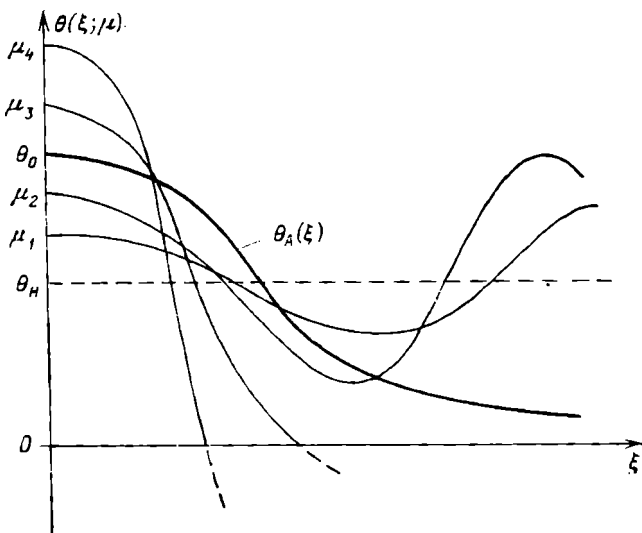


Рис. 42. Функции $\theta = \theta(\xi; \mu)$ при различных μ , $\beta > \sigma + 1$

зависит при $N > 1$ от свойств решения стационарного уравнения

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} |f|^\sigma f')' + |f|^{\beta-1} f = 0, \quad \xi > 0; \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0. \quad (52)$$

Действительно, переищем (30') в виде

$$\psi'_\mu(\xi) = -(\sigma + 1) \xi^{1-N} \int_0^\xi \eta^{N-1} |\psi_\mu|^{[\beta-(\sigma+1)]/(\sigma+1)} \psi_\mu d\eta + \mu^{1-\beta} G(\psi_\mu), \quad (53)$$

где $\psi_\mu(0) = 1$, $\psi'_\mu(0) = 0$ и $G(\psi_\mu)$ — ограниченный в C интегральный оператор:

$$G(\psi_\mu) = m(\sigma + 1) \xi |\psi_\mu|^{-\sigma/(\sigma+1)} \psi_\mu + (\sigma + 1) \xi^{1-N} \int_0^\xi \eta^{N-1} \left[\frac{1}{\beta-1} - mN \right] |\psi_\mu|^{-\sigma/(\sigma+1)} \psi_\mu d\eta,$$

который не является сжимающим в окрестности $\psi_\mu \equiv 0$.

В отличие от случая $\beta \leq \sigma + 1$ при $\beta' > \sigma + 1$ заранее ничего нельзя сказать об ограниченности ψ_μ и ψ'_μ на компакте, так как

возможные осцилляции $\theta(\xi; \mu)$ относительно $\theta \equiv \theta_H$ незатухающие (см. (36)). Поэтому будем использовать способ, основанный на непрерывной зависимости $\psi_\mu(\xi)$ от μ в окрестности $\mu = \infty$. При $\mu = \infty$ (53) формально превращается в уравнение

$$\psi'_\infty(\xi) = -(\sigma + 1) \xi^{1-N} \int_0^\xi \eta^{N-1} \psi_\infty^{[\beta - (\sigma+1)]/(\sigma+1)} \psi_\infty d\eta, \quad \xi > 0;$$

$$\psi_\infty(0) = 1, \quad \psi'_\infty(0) = 0,$$

и его решение совпадает с функцией $|f|^\sigma f(\xi)$, где $f(\xi)$ — решение задачи (52). В § 3 будет показано, что при любых $\beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$ функция $f(\xi)$ из (52) обращается в нуль в некоторой точке $\xi = \xi_* > 0$, причем $\psi'_\infty(\xi_*) < 0$. Поэтому на любом компакте $K_\varepsilon = [0, \xi_* - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, где $\psi_\infty > 0$, есть непрерывная зависимость $\psi_\mu(\xi)$ от μ в окрестности $\mu = \infty$, т. е. $\psi_\mu(\xi)$ близко к $\psi_\infty(\xi)$ на K_ε при всех достаточно больших $\mu > 0$. Фиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$. Тогда $\psi_\mu(\xi_* - \varepsilon) \rightarrow f^{\sigma+1}(\xi_* - \varepsilon)$, $\psi'_\mu(\xi_* - \varepsilon) \rightarrow (f^{\sigma+1}(\xi_* - \varepsilon))' < 0$ при $\mu \rightarrow \infty$. Но $G(\psi_\mu) = O(\|\psi_\mu\|_C^{1/(\sigma+1)}) \rightarrow 0$ при $\|\psi_\mu\|_C \rightarrow 0$. Поэтому для продолжения $\psi_\mu(\xi)$ из точки $\xi = \xi_* - \varepsilon$ в окрестность $\xi = \xi_*$ можно воспользоваться теоремой Шаудера о неподвижной точке. При этом за счет «малости» $G(\psi_\mu)$ производная $\psi'_\mu(\xi)$ меняется незначительно и в результате $\psi_\mu(\xi)$ обратится в нуль, если μ достаточно велико ($\mu^{1-\beta}$ малая величина). Этот факт позволяет доказать справедливость такого результата.

Теорема 4. Пусть $\sigma + 1 < \beta < \infty$ при $N = 1$ или $N = 2$ и $\sigma + 1 < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)$ при $N \geq 3$. Тогда задача (5) — (7) имеет строго положительное монотонное решение.

Замечание. В случае $\beta \geq (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$ решение $f(\xi)$ задачи (52) строго положительно в \mathbf{R}_+ (см. лемму 1 в § 3), и вопрос о существовании $\theta_\Lambda(\xi)$ остается открытым.

В дальнейшем нам понадобится следующее любопытное свойство автомодельной функции θ_Λ .

Теорема 5. Пусть $\sigma + 1 < \beta \leq (\sigma + 1)N/(N - 2)_+$ и $\theta_\Lambda(\xi)$ — произвольное решение задачи (5) — (7). Тогда

$$F(\xi) \equiv \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta - 1)} \theta'_\Lambda(\xi) \xi + \frac{1}{\beta - 1} \theta_\Lambda(\xi) > 0, \quad \xi \geq 0. \quad (54)$$

Неравенство (54) характеризует некоторые важные особенности неограниченного автомодельного решения (1), (4). Например, из него непосредственно вытекает

Следствие 1. При $\sigma + 1 < \beta \leq (\sigma + 1)N/(N - 2)_+$ решение $u_\Lambda(t, x)$ является критическим, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\Lambda(t, x) \equiv (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)-1} \left[m\theta'_\Lambda(\xi) \xi + \frac{1}{\beta-1} \theta_\Lambda(\xi) \right] > 0,$$

$$t \in (0, T_0), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad (55)$$

и поэтому при любых $t \in (0, T_0)$

$$u_A(t, x) < u_A(T_0^-, x) \equiv C_A |x|^{-2/[\beta - (\sigma+1)]}, \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}, \quad (56)$$

где $C_A = C_A(\sigma, \beta, N) > 0$ — постоянная в асимптотическом разложении (33).

Интегрируя неравенство (54), получаем следующую оценку, которая еще раз показывает строгую положительность $\theta_A(\xi)$ (она правильно отражает асимптотику функции θ_A при $\xi \rightarrow \infty$).

Следствие 2. Пусть $\sigma + 1 < \beta \leq (\sigma + 1)N/(N - 2)_+$. Тогда при всех $\xi \geq \xi_0 > 0$

$$\theta_A(\xi) \geq \theta_A(\xi_0) (\xi/\xi_0)^{-2/[\beta - (\sigma+1)]}$$

Доказательство теоремы 5. Перепишем уравнение (5) в виде

$$\theta_A^\sigma \left(\theta_A'' + \frac{N-1}{\xi} \theta_A' + \sigma \frac{\theta_A'}{\theta_A} \theta_A' \right) + \theta_A^\beta = F(\xi). \quad (57)$$

Пусть $F(\xi_1) \leq 0$, $\theta_A(\xi_1) > 0$, $\xi_1 \geq 0$. Тогда $\theta_A'(\xi_1) < 0$, и поэтому

$$\begin{aligned} F'(\xi_1) &= m\xi_1 \left[\theta_A''(\xi_1) + \frac{\beta - \sigma + 1}{\beta - (\sigma + 1)} \frac{\theta_A'(\xi_1)}{\xi_1} \right] \leq \\ &\leq m\xi_1 \left[\theta_A''(\xi_1) + \frac{1}{\xi_1} \left(N - 1 - \frac{2\sigma}{\beta - (\sigma + 1)} \right) \theta_A'(\xi_1) \right], \end{aligned}$$

так как $(\beta - \sigma + 1)/[\beta - (\sigma + 1)] \geq N - 1 - 2\sigma/[\beta - (\sigma + 1)]$ при $\sigma + 1 < \beta \leq (\sigma + 1)N/(N - 2)_+$.

Тогда из (57) получаем

$$\frac{\theta_A^\sigma(\xi_1)}{m\xi_1} F'(\xi_1) < F(\xi_1) \leq 0,$$

поскольку

$$\frac{\theta_A'}{\theta_A} \leq -\frac{1}{m(\beta - 1)} \frac{1}{\xi_1}.$$

Отсюда следует, что $F(\xi_1) < 0$, т. е. функция $F(\xi)$ убывает на некотором интервале $(\xi_1, \xi_1 + \delta)$, $\delta > 0$, где

$$\frac{\theta_A^\sigma(\xi)}{m\xi} F'(\xi) < F(\xi) < 0.$$

Поэтому $F(\xi) < 0$ при любых $\xi > \xi_1$. Но в силу (57) это также означает, что

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta_A^\sigma \theta_A')' + \theta_A^\beta < 0, \quad \xi > \xi_1; \quad \theta_A'(\xi_1) < 0.$$

Последнее в сделанных предположениях гарантирует, что функция $\theta_A(\xi)$ обращается в нуль в некоторой точке и, следовательно, не является решением задачи (5) — (7). Особенно просто

это устанавливается в случаях $N = 1, 2$, $\beta > \sigma + 1$; анализ случая $N \geq 3$ проводится тем же методом, что и при доказательстве леммы 1 в п. 4.1 § 3.

4.4. О свойствах автомодельного LS-режима. Выпишем еще раз формулу, выражающую зависимость полуширины автомодельной тепловой структуры от времени:

$$|x_{\text{эф}}(t)| = \xi_* (T_0 - t)^{[\beta - (\sigma + 1)] / [2(\beta - 1)]}, \quad 0 < t < T_0.$$

Отсюда получаем, что в LS-режиме ($\beta > \sigma + 1$) полуширина сокращается со временем и $|x_{\text{эф}}(T_0^-)| = 0$. Таким образом, интенсивное горение происходит во все сокращающейся центральной

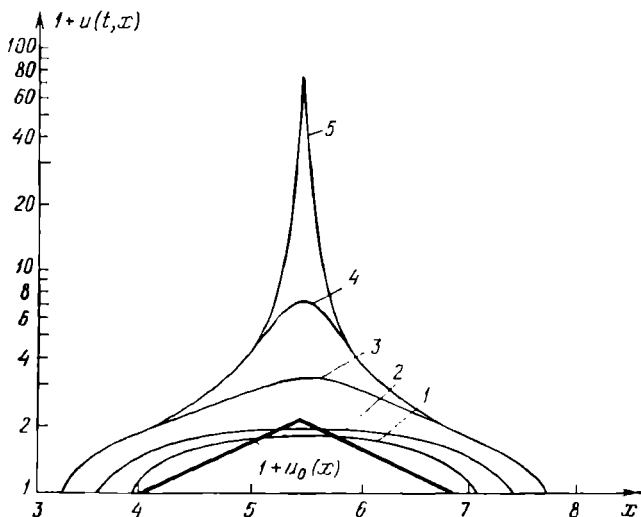


Рис. 43. Численная реализация LS-режима. Параметры: $\sigma = 2$, $\beta = 5$, $N = 1$: $1 - t_1 = 1,14$; $2 - t_2 = 2,34$; $3 - t_3 = 3,559$; $4 - t_4 = 3,5712$; $5 - t_5 = 3,5714$

области структуры. В результате режим с обострением развивается только в одной точке, во всем остальном пространстве температура ограничена сверху равномерно по t предельным распределением $u_A(T_0^-, x)$ (см. (56)).

Тем самым автомодельное решение эффективно локализовано. Однако о локализации в строгом смысле здесь говорить не приходится, так как $u_A(t, x)$ строго положительно в $(0, T_0) \times \mathbb{R}^N$. Численные расчеты показывают справедливость автомодельных оценок π , кроме того, свидетельствуют о существовании эффекта строгой локализации в LS-режиме (доказательство см. в § 4).

Один пример такого расчета приведен на рис. 43. Здесь $u_0(x)$ — финитная (неавтомодельная) функция. До момента времени $t = t_1$ начальное возмущение расплывается, затем достигает *резо-*

накской длины ($t = t_2$), после чего начинается интенсивный рост решения. Отчетливо видно, что при $t \rightarrow T_0^-$ горение происходит во все сужающейся центральной области структуры. При этом точки фронта $u(t, x)$ практически не двигаются и происходит локализация тепла на фундаментальной длине L_{LS} LS-режима.

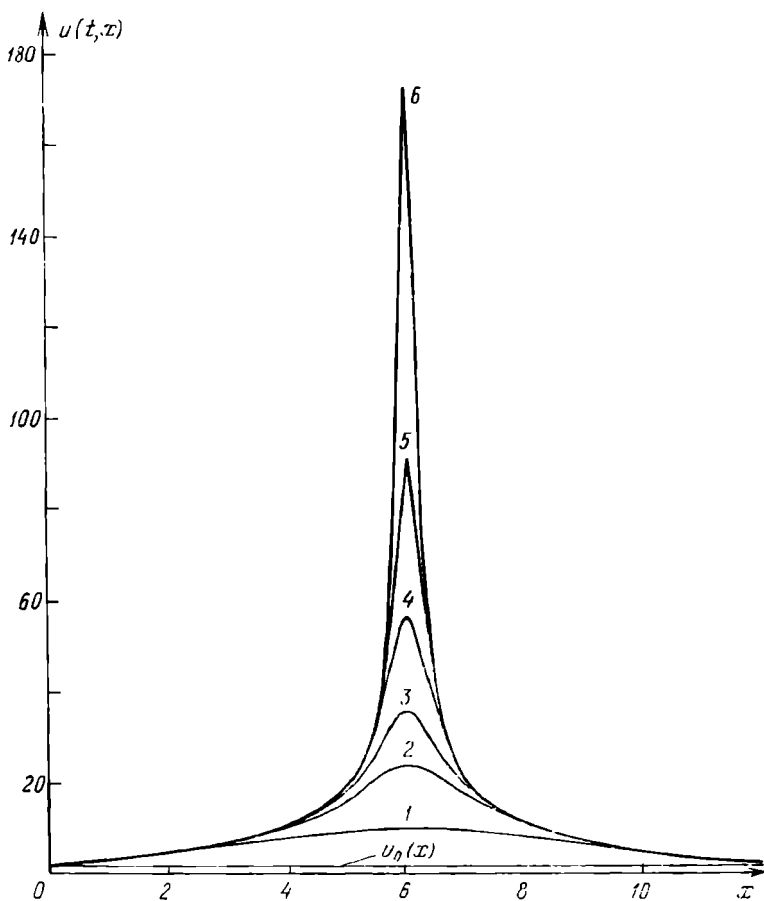


Рис. 44. Численная реализация LS-режима. Параметры: $\sigma = 2$, $\beta = 4$, $N = 1$; 1 — $t_1 = 0,2824$; 2 — $t_2 = 0,28358$; 3 — $t_3 = 0,28365$; 4 — $t_4 = 0,283674$, 5 — $t_5 = 0,283679$; 6 — $t_6 = 0,283681$

Подчеркнем, что здесь L_{LS} в отличие от S-режима зависит от вида начального возмущения $u_0(x)$.

На рис. 44 LS-режим, близкий при $t \rightarrow T_0^-$ к автомодельному, развивается из пространственно однородного начального возмущения $u_0(x) \equiv 1$ за счет неустойчивости гомотермического горения с обострением.

§ 2. Об асимптотическом поведении неограниченных решений. Качественная теория нестационарного осреднения

В этом параграфе обсуждаются вопросы, связанные с асимптотической устойчивостью автомодельных решений задачи:

$$A(u) = u_t - \nabla \cdot (u^{\sigma} \nabla u) - u^{\beta} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}^N; \quad u_0 \in C(\mathbf{R}^N), \quad u_0^{\sigma+1} \in H^1(\mathbf{R}^N), \quad (2)$$

Нас будет интересовать вопрос, при каких условиях неограниченное решение задачи $u(t, x)$ приобретает в области интенсивного горения пространственно-временную структуру, характерную для автомодельного решения:

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} \theta_A(\xi), \quad \xi = x/(T_0 - t)^m, \\ m = [\beta - (\sigma + 1)]/[2(\beta - 1)]. \quad (3)$$

Трудности анализа асимптотического поведения неограниченных решений связаны с быстротой протекания режима с обострением, который не является устойчивым относительно произвольных, даже бесконечно малых возмущений начальной функции $u_0(x)$.

Здесь излагаются результаты качественного анализа. Качественная теория позволяет получить ряд весьма тонких результатов, например выделить при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ семейство глобальных решений задачи (1), (2), которые отвечают достаточно малым начальным функциям $u_0(x)$. Одновременно устанавливается, что при $\beta \leq \sigma + 1 + 2/N$ нет глобальных решений $u \neq 0$. Эти результаты обосновываются в § 3.

Идея метода осреднения состоит в сведении задачи (1), (2) для уравнения в частных производных к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно некоторых параметров, характеризующих эволюцию во времени пространственного профиля тепловой структуры. В качестве таких параметров могут быть выбраны, например, амплитуда и полуширина структуры или амплитуда и положение фронта фититной по x радиально симметричной структуры. Последнее осреднение «амплитуда — положение фронта» позволяет, в частности, описать локализацию неограниченных решений в S- и LS-режимах и отсутствие локализации в HS-режиме.

1. Нестационарное осреднение «амплитуда — полуширина». Пусть начальная функция $u_0 \in L^1(\mathbf{R}^N)$ в (2) является фититной и элементарной в том смысле, что $u_0(x)$ имеет единственную точку максимума при $x = 0$. Будем считать $u_0(x)$ близкой к радиально симметричной функции. Тогда следует ожидать, что решение $u(t, x)$ также будет почти радиально симметричным и полуширина образующейся тепловой структуры будет приблизительно одной и той же по любому направлению. Исходя из этого, будем искать приближенное решение задачи (1), (2) в виде

$$u(t, x) = \psi(t) \theta(\xi), \quad \xi = (|x_1|/\varphi(t), \quad |x_N|/\varphi(t)), \quad (4)$$

где $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ — соответственно амплитуда и полуширина струк-

туры, зависящие от времени, а $\theta(\xi)$ — некоторая фиксированная финитная функция, монотонно убывающая по всем аргументам, причем $\theta(0) = 1$, $\theta^{\sigma+1} \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

По своему виду (4) совпадает с автомодельным решением (3), изученным в § 1, где конкретный вид функций $\psi(t)$, $\varphi(t)$ определялся после подстановки (4) в исходное уравнение (1). Поэтому автомодельное решение (3) удовлетворяет задаче (1), (2) лишь при некоторых специальных образом выбранных автомодельных начальных функциях $u_0(x)$.

В данном случае u_0 , вообще говоря, произвольная функция; поэтому мы не будем требовать, чтобы приближенное решение (4) удовлетворяло уравнению (1) в строгом смысле. Вместо этого потребуем, чтобы (4) удовлетворяло следующим двум интегральным равенствам *) (законам сохранения):

$$\int_{\mathbb{R}^N} A(u(t, x)) dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} A(u(t, x)) u(t, x) dx = 0, \quad t > 0. \quad (5)$$

После интегрирования по частям эти равенства принимают вид

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|u(t)\|_{L^{\beta}(\mathbb{R}^N)}^{\beta}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = - \int_{\mathbb{R}^N} u^{\sigma} |\nabla u|^2 dx + \|u(t)\|_{L^{\beta+1}(\mathbb{R}^N)}^{\beta+1}. \quad (7)$$

В первом равенстве, которое представляет собой уравнение энергии, отсутствует вклад диффузионного оператора, зато во втором есть вклады как от источника, так и от оператора диффузии.

Подстановка (4) в (6), (7) дает следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\psi(t)$, $\varphi(t)$:

$$\frac{d}{dt} [\psi(t) \varphi^N(t)] = \nu_1 \psi^{\beta}(t) \varphi^N(t), \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} [\psi^2(t) \varphi^N(t)] = -\nu_2 \psi^{\sigma+2}(t) \varphi^{N-2}(t) + \nu_3 \psi^{\beta+1}(t) \varphi^N(t), \quad (9)$$

где ν_1, ν_2, ν_3 — положительные постоянные:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} \theta^{\beta}(\xi) d\xi / \int_{\mathbb{R}^N} \theta(\xi) d\xi, \\ \nu_2 &= 2 \int_{\mathbb{R}^N} \theta^{\sigma} |\nabla \theta|^2 d\xi / \int_{\mathbb{R}^N} \theta^2 d\xi, \\ \nu_3 &= 2 \int_{\mathbb{R}^N} \theta^{\beta+1} d\xi / \int_{\mathbb{R}^N} \theta^2 d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

*) Вместо этих законов можно взять другие; например, вместо второго можно взять тождество $(A(u(t, x)), x) = 0$, а первое как самое простое оставить без изменения. Результаты последующего анализа от этого не изменятся.

При этом предполагается, что функция θ в (4) такова, что все эти выражения имеют смысл.

Систему (8), (9) нетрудно разрешить относительно производных:

$$\psi' = \frac{\psi^{\sigma+1}}{\varphi^2} [(v_3 - v_1) \psi^{\beta-(\sigma+1)} \varphi^2 - v_2], \quad (11)$$

$$\varphi' = \frac{\psi^\sigma}{N\varphi} [(2v_1 - v_3) \psi^{\beta-(\sigma+1)} \varphi^2 + v_2], \quad t > 0, \quad (12)$$

а от (11), (12) в свою очередь нетрудно перейти к одному уравнению:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -N \frac{\psi}{\varphi} \frac{a\psi^{\beta-(\sigma+1)}\varphi^2 - 1}{b\psi^{\beta-(\sigma+1)}\varphi^2 - 1}, \quad \psi > 0, \quad \varphi > 0, \quad (13)$$

где

$$a = (v_3 - v_1)/v_2, \quad b = (v_3 - 2v_1)/v_2. \quad (14)$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие $v_3 > 2v_1$, т. е.

$$a > 0, \quad b > 0. \quad (15)$$

Неравенства (15), вообще говоря, необходимы, чтобы система (11), (12) допускала семейство режимов с обострением.

Перейдем к анализу уравнения (13), которое описывает эволюцию амплитуды тепловой структуры в зависимости от изменения ее полуширины.

1.1. S-режим, $\beta = \sigma + 1$. В этом случае уравнение (13) выглядит особенно просто:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -N \frac{\psi}{\varphi} \frac{a\varphi^2 - 1}{b\varphi^2 - 1}, \quad \psi > 0, \quad \varphi > 0. \quad (16)$$

Оно легко интегрируется, и его общее решение имеет вид

$$C_0 = \psi^{-1} \varphi^{-N} \left| 1 - \frac{v_3 - 2v_1}{v_2} \varphi^2 \right|^{-Nv_1/[2(v_3 - 2v_1)]} \quad (17)$$

где $C_0 \geq 0$ — постоянная, определяемая начальными значениями: если $\psi(0) = \psi_0 > 0$ и $\varphi(0) = \varphi_0 > 0$, то

$$C_0 = \psi_0^{-1} \varphi_0^{-N} \left| 1 - \frac{v_3 - 2v_1}{v_2} \varphi_0^2 \right|^{-Nv_1/[2(v_3 - 2v_1)]}$$

где $\varphi_0^2 \neq v_2/(v_3 - 2v_1)$. Для того чтобы (17) соответствовало режимам с обострением, необходимо потребовать выполнения неравенства $v_3 > 2v_1$, т. е. обоих условий (15).

Мы имеем возможность проверить степень точности осреднения, используя приведенное в § 1 автомодельное решение уравнения (1) при $\beta = \sigma + 1$, $N = 1$:

$$u_A(t, x) = \begin{cases} (T_0 - t)^{-1/\sigma} \left(\frac{2(\sigma + 1)}{\sigma(\sigma + 2)} \cos^2 \frac{\pi x}{L_S} \right)^{1/\sigma} & |x| \leq L_S/2, \\ 0, & |x| > L_S/2; \quad 0 < t < T_0, \end{cases} \quad (18)$$

где $L_S = 2\pi(\sigma + 1)^{1/2}/\sigma$ — фундаментальная длина.

Учитывая специфическую структуру (18), положим

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \cos^{2/\sigma}(\pi\xi/2), & |\xi| < 1, \\ 0, & |\xi| \geq 1, \end{cases} \quad (19)$$

чему соответствуют амплитуда

$$\psi(t) = \left[\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)} \right]^{1/\sigma} (T_0 - t)^{-1/\sigma}, \quad (20)$$

а также полуширина

$$\varphi(t) = L_s/2. \quad (20')$$

Коэффициенты ν_1, ν_2, ν_3 для функции (19) имеют следующий вид:

$$\nu_1 = \frac{\sigma+2}{2(\sigma+1)}, \quad \nu_2 = \frac{\pi^2}{\sigma(\sigma+2)}, \quad \nu_3 = \frac{\sigma+4}{\sigma+2} \quad (21)$$

(подчеркнем, что здесь $\nu_3 > 2\nu_1$, т. е. неравенства (15) выполнены). Подстановка функций (20), (20') в уравнение (16) с коэффициентами (21) приводит к тождеству. Таким образом, автомодельное решение (18) описывается методом осреднения абсолютно точно.

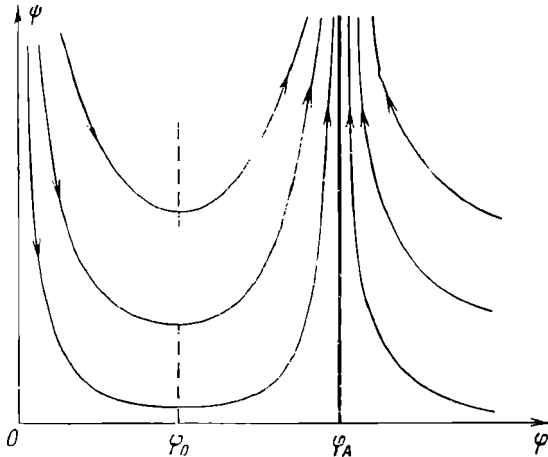


Рис. 45. Фазовая плоскость уравнения (16) ($\beta = \sigma + 1$, S-режим)

Наглядное представление о характере эволюции тепловой структуры (зависимости амплитуды от полуширины при различных начальных данных) дает поведение фазовых траекторий уравнения (16), схематически изображенных на рис. 45. Жирной линией на рисунке показана траектория

$$\varphi \equiv \varphi_A = \left(\frac{\nu_2}{\nu_3 - 2\nu_1} \right)^{1/2}$$

отвечающая автомодельному решению S-режима (она же есть

изоклина бесконечности уравнения (16)), штриховой линией показана изоклина нуля $\varphi = a^{-1/2} < \varphi_A$.

Этот рисунок, в частности, показывает, что при $\beta = \sigma + 1$ все решения в конечном счете обращаются в бесконечность за ограниченное время, причем по мере роста амплитуды $\psi(t)$ все траектории сходятся к автомодельной траектории: $\varphi(t) \rightarrow \varphi_A$, $t \rightarrow T_0^-$. С учетом последнего вывода из (11) при $\beta = \sigma + 1$ сразу получаем

$$\psi'(t) \simeq \psi^{\sigma+1}(t) v_1, \quad t \rightarrow T_0^-$$

т. е.

$$\psi(t) \simeq (\sigma v_1)^{-1/\sigma} (T_0 - t)^{-1/\sigma}, \quad t \rightarrow T_0^-$$

что совпадает с автомодельной зависимостью амплитуды структуры от времени (см. § 1). Если при $N = 1$ взять значение v_1 из (21), то получится выражение, в точности совпадающее с автомодельным (20).

В заключение отметим, что результаты численных расчетов находятся в хорошем соответствии с картиной фазовых траекторий, изображенной на рис. 45.

1.2. HS-режим, $\beta < \sigma + 1$. Получим сначала общее решение уравнения (13) при $\beta \neq \sigma + 1$. Положим $\psi^{\beta-(\sigma+1)} \varphi^2 = z(\varphi)$. Тогда от (13) переходим к уравнению в разделяющихся переменных:

$$\frac{dz}{d\varphi} \varphi = z \left[2 - N(\beta - \sigma - 1) \frac{az - 1}{bz - 1} \right], \quad (22)$$

общее решение которого при $\beta \neq \sigma + 1 + 2/N$ имеет вид

$$(\psi \varphi^N)^{-\frac{\beta-(\sigma+1)}{N[\beta-(\sigma+1)+2/N]}} \left| \psi^{\beta-(\sigma+1)} \varphi^2 - d \right|^\alpha = C_0, \quad (23)$$

где

$$d = \frac{v_2}{v_1} \left[\frac{v_3}{v_1} - \frac{\beta - (\sigma + 1 + 4/N)}{\beta - (\sigma + 1 + 2/N)} \right]^{-1} \quad (23')$$

$$\alpha = \frac{\beta - (\sigma + 1)}{N[\beta - (\sigma + 1 + 2/N)]^2} \left[\frac{v_3}{v_1} - \frac{\beta - (\sigma + 1 + 4/N)}{\beta - (\sigma + 1 + 2/N)} \right]^{-1}$$

Итак, пусть $\beta < \sigma + 1$. С помощью (23) нетрудно изобразить картину фазовых траекторий уравнения (13). На рис. 46 для удобства приведены изоклина нуля:

$$\psi = \psi_0(\varphi) = a^{-1/[\beta-(\sigma+1)]} \varphi^{-2/[\beta-(\sigma+1)]} \quad (24)$$

и изоклина бесконечности:

$$\psi = \psi_\infty(\varphi) = b^{-1/[\beta-(\sigma+1)]} \varphi^{-1} \quad (25)$$

Жирной линией показана сепаратриса:

$$\psi = \psi_S(\varphi) = d^{1/[\beta-(\sigma+1)]} \varphi^{-2/[\beta-(\sigma+1)]}, \quad (26)$$

которая является точным решением уравнения. В (23) ей отве-

чет постоянная $C_0 = 0$. При $\beta < \sigma + 1$ справедливы неравенства $\psi_{\infty}(\varphi) < \psi_s(\varphi) < \psi_0(\varphi)$, что определяет характер эволюции траекторий на рис. 46.

Таким образом, как видно из этого рисунка, в HS-режиме все траектории сходятся при $\psi \rightarrow \infty$ к сепаратрисе $\psi = \psi_s(\varphi)$, т. е.

$$\psi(t) \simeq d^{1/[\beta - (\sigma + 1)]} \varphi^{-2/[\beta - (\sigma + 1)]}(t), \quad t \rightarrow T_0^-. \quad (27)$$

Подставляя эту оценку в уравнения (11), (12), получаем, что на развитой стадии эволюции

$$\psi(t) \sim (T_0 - t)^{-1/(\beta - 1)}, \quad \varphi(t) \sim (T_0 - t)^{[\beta - (\sigma + 1)]/[2(\beta - 1)]}, \quad (28)$$

т. е. при $t \rightarrow T_0^-$ неограниченные решения приобретают пространственно временную структуру, близкую к автомодельной.

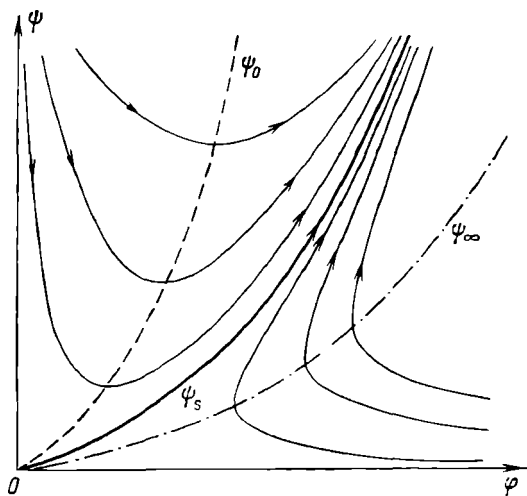


Рис. 46. Эволюция траекторий уравнения (13) в HS-режиме ($\beta < \sigma + 1$)

1.3. LS-режим, $\beta > \sigma + 1$. Как следует из выражения (23), при $\beta > \sigma + 1$ картины фазовых траекторий отличаются друг от друга в случаях $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 1 + 2/N$, $\beta = \sigma + 1 + 2/N$ и $\beta > \sigma + 1 + 2/N$.

Случай $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 1 + 2/N$ — неограниченные решения. На рис. 47 приведен фазовый портрет при $\beta \in (\sigma + 1, \sigma + 1 + 2/N)$. Здесь сепаратриса $\psi = \psi_s(\varphi)$ (см. (26)) лежит выше изоклин (24), (25). В процессе эволюции все траектории сходятся к сепаратрисе, т. е. справедливо асимптотическое равенство (27), и тем самым при $t \rightarrow T_0^-$ выполнены оценки (28). Таким образом, при $\beta < \sigma + 1 + 2/N$ все решения задачи являются неограниченными, и при $t \rightarrow T_0^-$ они развиваются по автомодельным законам.

Случай $\beta = \sigma + 1 + 2/N$ — неограниченные решения. При $\beta = \sigma + 1 + 2/N$ уравнение (22) принимает вид

$$\frac{dz}{d\varphi} \varphi = 2(b-a) \frac{z^2}{bz-1}.$$

Его общее решение определяется алгебраического соотношения

$$\psi^{\frac{1}{N} \left(2 - \frac{\nu_3}{\nu_1} \right)} \varphi^{1 - \frac{\nu_3}{\nu_2}} \exp \left\{ -\frac{\nu_2}{2\nu_1} \varphi^{-2} \psi^{-N} \right\} = C_0 > 0. \quad (29)$$

Фазовая плоскость уравнения (13) при $\beta = \sigma + 1 + 2/N$, как следует из (29), не имеет сепаратрисы. Поскольку $a > b$, то $\psi_0(\varphi) < \psi_\infty(\varphi)$, и примерное поведение траекторий в этом случае такое

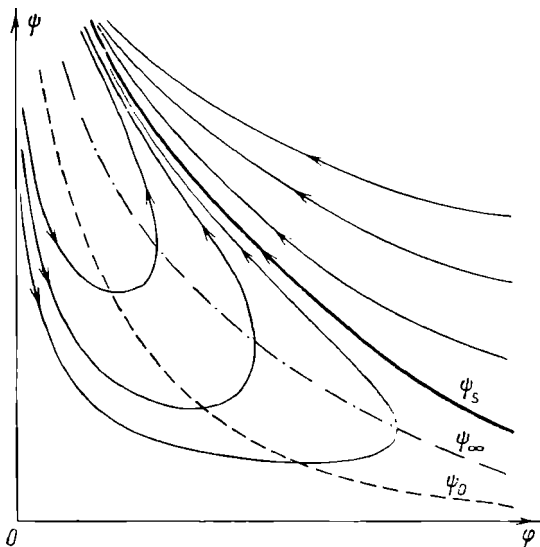


Рис. 47. Эволюция траекторий при $\beta \in (\sigma + 1, \sigma + 1 + 2/N)$ (LS-режим)

же, как на рис. 47, с той лишь разницей, что особая траектория ψ_s здесь отсутствует. Итак, при $\beta = \sigma + 1 + 2/N$, как и ранее, все траектории отвечают неограниченным решениям задачи, причем одновременно с возрастанием амплитуды $\psi(t)$ полуширина $\varphi(t)$ сокращается.

Выясним, каково асимптотическое поведение ψ , φ при $t \rightarrow T_0^-$. Из (29) или непосредственно из уравнения (13) легко получить, что при неограниченном возрастании решения связь ψ и φ определяется из приближенного равенства

$$\frac{d\psi}{d\varphi} \simeq -N \frac{\psi}{\varphi} \frac{a}{b}, \quad (30)$$

т. е.

$$\psi(\varphi) \simeq B_0 \varphi^{-Na/b}, \quad \varphi \rightarrow 0, \quad (30')$$

где $B_0 > 0$ — постоянная, зависящая от начальных условий. Зависимость (30') не является автомодельной, которой отвечает асимптотическое равенство (27), поскольку здесь

$$N \frac{a}{b} > \frac{2}{\beta - (\sigma + 1)} = N \quad (34)$$

(напомним, что $a > b$ в силу (14)).

Оценка (30') дает следующие асимптотические выражения амплитуды и полуширины тепловой структуры при $t \rightarrow T_0^-$:

$$\psi(t) \sim (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}, \quad \varphi(t) \sim (T_0 - t)^\alpha, \quad (32)$$

где

$$\alpha = \left[\frac{Na}{b} (\beta - 1) - 1 \right]^{-1} \equiv \left[\frac{a}{b} (N\sigma + 2) - 1 \right]^{-1}$$

Сравним (32) с автомодельными характеристиками (28). Амплитуда $\psi(t)$ является автомодельной (этому есть строгое объяснение; см. § 5), а полуширина $\varphi(t)$ ведет себя при $t \rightarrow T_0^-$ неавтомодельным образом, так как α , вообще говоря, отлично от показателя $[\beta - (\sigma + 1)]/[2(\beta - 1)] \equiv 1/(N\sigma + 2)$, который присутствует в (28). Возникает проблема: какое инвариантное или приближенное автомодельное решение описывает асимптотическую ($t \rightarrow T_0^-$) стадию процесса?

Таким образом, при $\beta = \sigma + 1 + 2/N$ можно в принципе ожидать появление неограниченных решений, которые на асимптотической стадии развиваются не по автомодельным законам. Отметим, что в (30') и (32) помимо неавтомодельного показателя содержится также существенная зависимость асимптотики решения от начальных данных (имеется в виду произвольная постоянная $B_0 > 0$ в (30'), различная для разных траекторий); напомним, что при $\beta < \sigma + 1 + 2/N$ все траектории сходились к автомодельной сепаратрисе (26) с фиксированной постоянной d , определяемой из (23').

Здесь необходимо подчеркнуть, что в рамках теории осреднения рассматриваются финитные решения $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbf{R}^N)$ для любых $t < T_0$. При $\beta > \sigma + 1$, как известно (см. § 1), автомодельные решения u_A не являются финитными, однако если $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 1 + 2/N$, то включение $u_A \in L^1(\mathbf{R}^N)$ все же имеет место, т. е. u_A обладают конечной энергией. Это, по-видимому, может обеспечить автомодельную асимптотику финитного решения. При $\beta = \sigma + 1 + 2/N$ (и тем более при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$) энергия u_A бесконечна*), и поэтому u_A может и не описывать асимптотику финитного решения с конечной энергией.

Вопрос об устойчивой пространственно-временной структуре неограниченного решения при $\beta > \sigma + 1$ вблизи момента обостре-

*) Это вытекает из характера асимптотики $\theta_A(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$ (см. § 1): $\theta_A(\xi) \simeq C_A \xi^{-2/(\beta - (\sigma + 1))}$.

ния в значительной мере остается открытым, хотя существование монотонного автомодельного решения u_A LS-режима с обострением установлено при любых $\sigma + 1 < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$ (см. § 1; очевидно, что критическое значение $\beta = \sigma + 1 + 2/N$ попадает в этот диапазон). Функцию $u_A(t, x)$ было бы естественным считать первым «претендентом» на роль устойчивой асимптотики вблизи момента обострения в LS-режиме. Тем более в S- и HS-режимах это на самом деле так (см. § 5).

Случай $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ — неограниченные решения. Здесь существует сепаратриса (26), причем на фазовой плоскости она расположена так:

$\psi_s(\varphi) < \psi_0(\varphi) < \psi_\infty(\varphi)$. Это определяет поведение траекторий на рис. 48. Асимптотика неограниченных решений при $t \rightarrow T_0^-$ здесь такая же, как в случае $\beta = \sigma + 1 + 2/N$, т. е. неавтомодельная (см. (30'), (32)).

Случай $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ — глобальные решения. Из рис. 48 видно, что при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ существуют такие начальные распределения, которым отвечают глобальные (не-

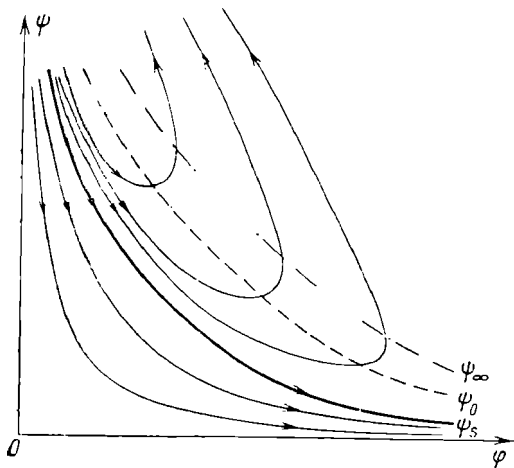


Рис. 48. LS-режим, $\beta > \sigma + 1 + 2/N$

обостряющиеся) решения. Соответствующие глобальные траектории лежат ниже сепаратрисы $\psi = \psi_s(\varphi)$. В процессе эволюции ($t \rightarrow \infty$) амплитуда глобальных решений стремится к нулю, а полуширина неограниченно возрастает (режим затухающего горения). Обоснованное построение семейств глобальных решений проводится в § 3.

Определим, по каким законам протекает этот режим затухающего горения. Прежде всего отметим, что сепаратрисе $\psi = \psi_s(\varphi)$ отвечает тепловое возмущение, для которого

$$\psi(t) \sim t^{-1/(\beta-1)} \quad \varphi(t) \sim t^{[\beta-(\sigma+1)]/[2(\beta-1)]}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (33)$$

В § 3 будет построено семейство глобальных автомодельных решений уравнения (1) с указанной в (33) пространственно временной структурой, так что сепаратриса $\psi = \psi_s(\varphi)$ является образом некоторого автомодельного решения.

Как ведут себя при $t \rightarrow \infty$ оставшиеся глобальные (неавтомодельные) траектории? Из (23) нетрудно получить, что для них

$$\psi(\varphi) \simeq D_0 \varphi^{-N}, \quad \varphi \rightarrow \infty, \quad (34)$$

постоянная D_0 , зависящая от начальных условий, имеет вид

$$D_0 = [C_0 d^{-\alpha}]^{\frac{N[\beta - (\sigma + 1 + 2/N)]}{\beta - (\sigma + 1)}} \quad (35)$$

Подстановка (34) в исходную систему (11), (12) дает следующую асимптотику глобальных решений:

$$\psi(t) \sim t^{-N/(N\sigma+2)}, \quad \varphi(t) \sim t^{1/(N\sigma+2)}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (36)$$

Очевидно, что зависимость (34) отвечает наличию закона сохранения энергии $(d/dt)(\psi(t)\varphi^N(t)) \simeq 0$ (см. (8)), т. е. глобальные решения при $t \rightarrow \infty$ в определенном смысле близки к автомодельным решениям нелинейного уравнения теплопроводности без источника:

$$u_t = \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (37)$$

(доказательство этого факта см. в § 3). Об этом же свидетельствует асимптотика (36) (автомодельное решение уравнения (37), удовлетворяющее (36), приведено в § 3 гл. I).

Таким образом, при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ сепаратриса, которой отвечают автомодельные решения, не являются устойчивой в классе как неограниченных, так и глобальных решений. Поэтому следует ожидать, что процесс горения развивается на асимптотической стадии по другим, неавтомодельным законам, причем, как показывает осреднение, вид предельной тепловой структуры зависит от начальных данных.

Таковы качественные особенности эволюции тепловой структуры, инициируемой элементарным начальным возмущением с конечной энергией. В рамках указанного способа осреднения амплитуда и полуширина довольно точно, как показывают численные расчеты, описывают поведение неограниченного решения в широком интервале изменения времени. При этом остается открытым вопрос о характере движения фронта тепловой волны и тем самым вопрос о локализации горения. Для этого ниже применяется другой метод осреднения.

2. Нестационарное осреднение «амплитуда — положение фронта волны». Пусть элементарное начальное возмущение $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ является радиально симметричным и финитным. Тогда $u = u(t, r)$, $r = |x|$, для всех $t \in (0, T_0)$. Приближенное решение будем искать в том же виде:

$$u(t, x) = \psi(t)\theta(\xi), \quad \xi = |x|/g(t), \quad (38)$$

где $\psi(t) > 0$ — амплитуда решения, а $g(t) > 0$ на этот раз не полуширина, а положение точки фронта решения (в симметричном случае фронтом является поверхность $|x| = g(t)$). Функция $\theta(\xi) \geq 0$ такова, что $\theta(\xi) > 0$ при $\xi \in [0, 1)$, $\theta(\xi) = 0$ при всех $\xi \geq 1$, $\theta(0) = 1$, $\theta'(0) = 0$, $\theta^{\sigma+1} \in H^1(0, 1)$.

В качестве первого уравнения для функций ψ , g выберем уравнение энергии:

$$\frac{d}{dt} [\psi(t) g^N(t)] = v_1 \psi^\beta(t) g^N(t), \quad t > 0. \quad (39)$$

Второе уравнение получим из известной формулы для скорости движения фронта тепловой волны (см. комментарий):

$$\frac{dg(t)}{dt} = - \lim_{|x| \rightarrow g^-(t)} \frac{\partial u(t, |x|) / \partial t}{\partial u(t, |x|) / \partial r}. \quad (40)$$

Отсюда с помощью исходного уравнения (1) получаем

$$\frac{dg(t)}{dt} = - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{r^{-(N-1)} (r^{N-1} u^\sigma u'_r)' + u^\beta}{u'_r},$$

и, наконец, раскрывая неопределенность в правой части, с учетом известных дифференциальных свойств решения $u(t, x)$ приходим к равенству

$$\frac{dg}{dt} = - \lim_{u \rightarrow 0} u^{\sigma-1} u'_r. \quad (41)$$

При выводе этого равенства предполагалось, что особенность решения вблизи фронта имеет степенной характер: $u(t, x) \sim (g(t) - |x|)_+^{1/\sigma}$. Поэтому наличие источника u^β в правой части уравнения никак не сказывается на конечной формуле (41).

Подставляя в (41) приближенное решение (38), получаем второе уравнение:

$$\frac{dg(t)}{dt} = v_4 \frac{\psi^\sigma(t)}{g(t)}, \quad t > 0, \quad (42)$$

где $v_4 = -(\theta^\sigma)'(1)/\sigma > 0$.

Искомая система уравнений для функций ψ , g получена. Разрешая (39) относительно $\psi'(t)$, перепишем ее в виде

$$\psi' = v_1 \psi^\beta - N v_4 \psi^{\sigma+1} g^{-2}, \quad (43)$$

$$g' = v_4 \psi^\sigma g^{-1}, \quad (44)$$

а затем перейдем к одному уравнению:

$$\frac{d\psi}{dg} = N \frac{\psi}{g} [\mu \psi^{\beta-(\sigma+1)} g^2 - 1], \quad g > 0, \quad (45)$$

которое описывает эволюцию амплитуды тепловой структуры в зависимости от положения ее фронта. Здесь $\mu = v_1/(N v_4)$ — постоянная.

Уравнение (45) намного проще полученного путем осреднения «амплитуда — полуширина». Выпишем его общее решение и кратко охарактеризуем основные свойства. Отметим, что (45) неприменимо в случае S-режима, когда $\beta = \sigma + 1$. Как известно из анализа автомодельных решений (см. § 1), асимптотика вблизи фронта здесь должна иметь вид $u \sim (g(t) - |x|)_+^{2/\sigma}$, т. е. в этом случае следует положить $(\theta^\sigma)'(1) = 0$, $v_4 = 0$. В результате из (42) получаем, что $g = \text{const}$, а (43) при $\beta = \sigma + 1$ превращается в

уравнение

$$\psi'(t) = v_1 \psi^{\sigma+1}(t), \quad t > 0.$$

Отсюда следует автомодельная зависимость от времени амплитуды локализованного неограниченного решения:

$$\psi(t) \sim (T_0 - t)^{-1/\sigma}, \quad t \rightarrow T_0^- \quad (46)$$

Для HS-режима ($\beta < \sigma + 1$) и LS-режима ($\beta > \sigma + 1$) уравнение (45) имеет смысл. Его общее решение при $\beta \neq \sigma + 1 + 2/N$ записывается следующим образом:

$$|\psi^{\beta-(\sigma+1)} g^2 - l_0|^{1/(\sigma+1-\beta)} \psi g^N = C_0, \quad (47)$$

где

$$l_0 = \frac{1}{\mu} \frac{\beta - (\sigma + 1 + 2/N)}{\beta - (\sigma + 1)}, \quad (48)$$

$C_0 \geq 0$ — постоянная, определяемая начальными значениями g_0 , ψ_0 . В случае $\beta = \sigma + 1 + 2/N$ вместо (47) приходим к выражению $\psi^{2/N} = [g^2 (C_0 - 2\mu \ln g)]^{-1}$,

$$C_0 = \text{const} > 0. \quad (49)$$

Схематическое поведение фазовых траекторий уравнения (45) для случаев $\beta < \sigma + 1$, $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 1 + 2/N$, $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ приведено соответственно на рис. 49—51. Штриховой линией на всех рисунках показана нетривиальная изоклина нуля: $\psi_0(\varphi) = \mu^{-1/[\beta-(\sigma+1)]} g^{-2/[\beta-(\sigma+1)]}$. При $\beta < \sigma + 1$, $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ уравнение (45) имеет особую траекторию — сепаратрису:

$$\psi = \psi_S(\varphi) = l_0^{1/[\beta-(\sigma-1)]} g^{-2/[\beta-(\sigma+1)]}, \quad (50)$$

которой отвечает $C_0 = 0$ в (47). При $\sigma + 1 < \beta \leq \sigma + 1 + 2/N$ из (48) получаем $l_0 \leq 0$, и поэтому сепаратрисы нет.

Укажем основные свойства решений. При $\beta < \sigma + 1$ (см. рис. 49) все траектории в процессе эволюции сходятся к сепаратрисе (50), что определяет асимптотический автомодельный режим:

$$\psi(t) \sim (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}, \quad g(t) \sim (T_0 - t)^{[\beta-(\sigma+1)]/[2(\beta-1)]}, \quad t \rightarrow T_0^-,$$

причем здесь $g(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$, т. е. локализация тепла при $\beta < \sigma + 1$ отсутствует.

При $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 1 + 2/N$ (см. рис. 50) каждая траектория имеет свою вертикальную асимптоту с координатой

$$g_* = C_0^{1/N} \frac{\beta - (\sigma + 1)}{\beta - (\sigma + 1 + 2/N)},$$

т. е. $g(t) \rightarrow g_*$, $t \rightarrow T_0^-$. Это означает локализацию тепла в области $|x| < g_*$. При этом амплитуда структуры растет по автомодельному

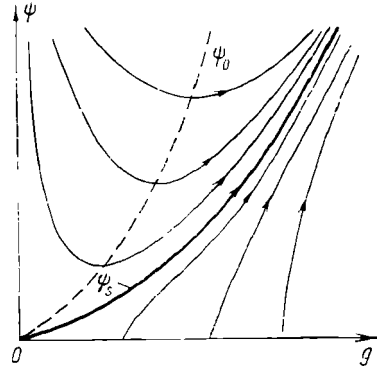


Рис. 49. Эволюция траекторий уравнения (45) в HS-режиме ($\beta < \sigma + 1$)

закону:

$$\psi(t) \sim (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}, \quad t \rightarrow T_0^- \quad (51)$$

Эти же выводы справедливы и для случаев $\beta = \sigma + 1 + 2/N$ и $\beta > \sigma + 1 + 2/N$, только в первом случае выражение для предельной глубины проникновения волны имеет вид $g_* = \exp\{C_0/(2\mu)\}$, что следует из (49).

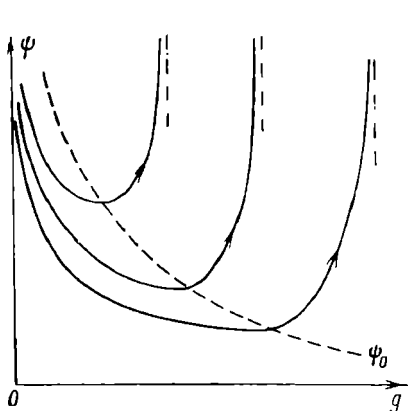


Рис. 50. LS-режим, $\beta \in (\sigma + 1, \sigma + 1 + 2/N)$

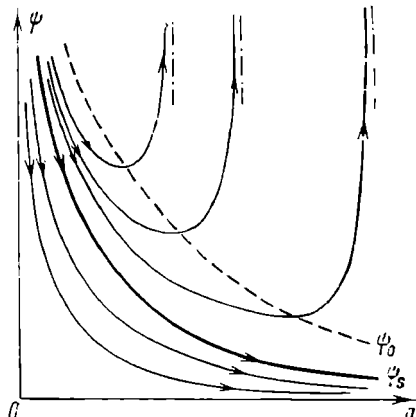


Рис. 51. LS-режим, $\beta > \sigma + 1 + 2/N$

В случае $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ (см. рис. 51) на фазовой плоскости существует сепаратриса (50), которая отделяет класс неограниченных траекторий от семейства глобальных решений. Как следует из (47), последние эволюционируют по закону

$$\psi(\varphi) \simeq F_0 g^{-N}, \quad F_0 = C_0 t_0^{-1/(\sigma+1-\beta)} > 0, \quad g \rightarrow \infty.$$

Из системы (43), (44) тогда получаем для глобальных решений асимптотические оценки

$$\psi(t) \sim t^{-N/(N\sigma+2)}, \quad g(t) \sim t^{1/(N\sigma+2)}, \quad t \rightarrow \infty,$$

характерные для автомодельных решений уравнения без источника (37), имеющих конечную энергию: $\|u(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \equiv \text{const}$.

§ 3. Условия возникновения режимов с обострением. Глобально существующие решения при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$

В этом параграфе обосновываются многие качественные выводы, полученные в § 2 и относящиеся к условиям неразрешимости в целом и глобальной разрешимости задачи Коши для уравнения со степенными нелинейностями

$$A(u) \equiv u_t - \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u) - u^\beta = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad u_0 \in C(\mathbb{R}^N), \quad u_0^{\sigma+1} \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (2)$$

Основной метод исследования — построение и анализ подходящих нижних и верхних решений уравнения (1).

1. **Построение неограниченных нижних решений.** Рассмотрим функцию *)

$$u_-(t, x) = (T - t)^{-1/(\beta-1)} \theta_-(\xi), \quad \xi = |x|/\zeta(t), \quad (3)$$

$$\theta_-(\xi) = A(1 - \xi^2/a^2)_+^{1/\sigma}, \quad 0 < t < T, \quad \xi > 0, \quad (4)$$

где $\zeta(t) = (T - t)^{[\beta - (\sigma + 1)]/[\Gamma(2(\beta - 1))]}$, A, a, T — положительные постоянные. Функция u_- эволюционирует при $t \rightarrow T^-$ в режиме с обострением в соответствии с автомодельными законами.

Определим условия, при которых она является неограниченным нижним решением уравнения (1). Как следует из теоремы 3 гл. I, для этого достаточно, чтобы всюду в $(0, T) \times \mathbb{R}_+$, за исключением поверхности вырождения $(0, T) \times \{|x| = a\zeta(t)\}$, выполнялось неравенство

$$\mathbf{A}(u_-) \equiv (u_-)_t - \frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} (u_-)^\sigma (u_-)_r)_r - (u_-)^\beta \leq 0,$$

которое после упрощений приводится к виду

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta'_- \theta'_-) - \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta - 1)} \theta'_- \xi - \frac{1}{\beta - 1} \theta_- + \theta_-^\beta \geq 0, \quad \xi \in (0, a), \quad (5)$$

где $(\cdot)' = (d/d\xi)(\cdot)$. В левой части получившегося неравенства стоит оператор автомодельного уравнения (1.5), что не удивительно, поскольку u_- и u_+ имеют одинаковую пространственно-временную структуру. Подставляя сюда функцию $\theta_-(\xi)$ из (4), после несложных преобразований получаем эквивалентное (5) неравенство:

$$\Phi_{\text{об}}(\Delta) \equiv m - n\Delta + A^{\beta-1} \Delta^{(\beta-1)/\sigma+1} \geq 0, \quad (6)$$

где

$$\Delta = (1 - \xi^2/a^2)_+, \\ m = \frac{4A^\sigma}{\sigma^2 a^2} + \frac{\beta - (\sigma + 1)}{(\beta - 1)\sigma}, \quad n = \frac{1}{\sigma} \left[1 + 2 \left(\frac{A^\sigma}{a^2} \right) \left(N + \frac{2}{\sigma} \right) \right].$$

Неравенство (6) должно быть выполнено при всех $\Delta \in (0, 1]$. Определим условия на величины A и a .

Во-первых, должно выполняться неравенство

$$\Phi_{\text{об}}(0) > 0,$$

из которого получаем ограничение $m > 0$, т. е.

$$\frac{4}{\sigma} \frac{A^\sigma}{a^2} > \frac{\sigma + 1 - \beta}{\beta - 1}. \quad (7)$$

Во-вторых, легко видеть, что при $m > 0$ неравенство (6) справедливо при всех $\Delta \in (0, \Delta^*)$, где $\Delta^* = m/n \in (0, 1)$. Отсюда

*) Здесь, как обычно, $(f)_+ = \max\{0, f\}$.

следует, что (6) будет выполнено для всех $\Delta \in (0, 1]$, если

$$m - n\Delta + A^{\beta-1} \Delta_*^{(\beta+\sigma-1)/\sigma} \geq 0, \quad \Delta \in (\Delta_*, 1),$$

что эквивалентно условию

$$A^{\beta-1} \geq (n - m) \Delta_*^{-(\beta+\sigma-1)/\sigma}.$$

Таким образом, второе неравенство, которое вместе с (7) обеспечивает выполнение (5), имеет вид

$$A^{\beta-1} \geq \left(\frac{1}{\beta-1} + \frac{2N}{\sigma} \frac{A^\sigma}{a^2} \right) \times \\ \times \left[\left[1 + 2 \left(N + \frac{2}{\sigma} \right) \frac{A^\sigma}{a^2} \right] \left[\frac{\beta - (\sigma + 1)}{\beta - 1} + \frac{4}{\sigma} \frac{A^\sigma}{a^2} \right] \right]^{(\beta+\sigma-1)/\sigma} \quad (8)$$

Система неравенств (7), (8) имеет решение (a, A) при всех $\sigma > 0$, $\beta > 1$. Действительно, при $\beta < \sigma + 1$ условие (7) накладывает ограничение на величину отношения A^σ/a^2 . Тогда, увеличивая A и a таким образом, чтобы A^σ/a^2 не уменьшалось, всегда можно достичь выполнения условия (8). При $\beta \geq \sigma + 1$ все значительно проще, так как (7) не учитывается. Тем самым установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть

$$u_0(x) \geq u_-(0, x) = T^{-1/(\beta-1)} \theta_- \left(\frac{|x|}{T^{[\beta-(\sigma+1)]/[2(\beta-1)]}} \right), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (9)$$

где $\theta_-(\xi) = A(1 - \xi^2/a^2)_+^{1/\sigma}$ и T, a, A — положительные постоянные, две последние из которых связаны соотношениями (7), (8). Тогда решение задачи Коши (1), (2) является неограниченным и существует в течение времени, не большего T .

Элементарный анализ нижнего решения (3) при $\beta < \sigma + 1$ приводит к следующему результату.

Следствие. Пусть $1 < \beta < \sigma + 1$, $u_0(x) \neq 0$. Тогда решение задачи является неограниченным.

Доказательство. Поскольку $u_0 \neq 0$, то существует такой шар $\{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| < \rho\}$, $\rho > 0$, в котором $u_0(x) \geq \varepsilon > 0$. Тогда, выбирая в (3), (4) величину T столь большой, чтобы выполнялись неравенства $AT^{-1/(\beta-1)} < \varepsilon$, $aT^{[\beta-(\sigma+1)]/[2(\beta-1)]} < \rho$, получаем $u_0(x) \geq u_-(0, x - x_0)$. Поэтому в силу теоремы 1 решение является неограниченным с временем обострения $T_0 \leq T_*$, где

$$T_* = \max \{ (A/\varepsilon)^{\beta-1}, (a/\rho)^{2(\beta-1)/(\sigma+1-\beta)} \}.$$

Более сильный результат будет получен ниже.

2. Отсутствие глобальных решений при $1 < \beta < \sigma + 1 + 2/N$.

Теорема 2. Пусть $\beta \in (1, \sigma + 1 + 2/N)$, $u_0(x) \neq 0$. Тогда решение задачи Коши (1), (2) является неограниченным.

Доказательство. Оно основано на сравнении решения $u(t, x)$ с известным автомодельным решением задачи Коши для

уравнения без источника

$$v_t = \nabla \cdot (v^\sigma \nabla v), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N. \quad (10)$$

Это решение в N -мерном случае имеет вид (см. § 3 гл. I)

$$v_A(t, x) = (T_1 + t)^{-N/(N\sigma+2)} f(\eta), \quad \eta = \frac{|x|}{(T_1 + t)^{1/(N\sigma+2)}}, \quad (11)$$

где

$$f(\eta) = B(\eta_0^2 - \eta^2)_+^{1/\sigma}, \quad B = \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma + 2)} \right]^{1/\sigma} \quad (12)$$

Здесь T_1, η_0 — произвольные положительные постоянные. Покажем, что в случае $\beta < \sigma + 1 + 2/N$ при любых $u_0 \neq 0$ решение $u(t, x)$ задачи (1), (2) по истечении конечного времени обязательно будет удовлетворять условию (9) теоремы 1 и поэтому является неограниченным. Стадию растекания начального возмущения, сопровождающегося падением со временем амплитуды пространственного профиля, мы будем описывать с помощью решения (11) уравнения (10), в котором не учитывается энерговыделение за счет горения (на большей части стадии растекания оно незначительно).

Пусть без ограничения общности $u_0(0) > 0$ и $u_0(x) \geq \epsilon > 0$ в некотором шаре $\{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| < \delta\}$. Выберем величину $\eta_0 = \eta_0(T_1)$ такой, чтобы $u_0(x) \geq v_A(0, x)$ в \mathbf{R}^N . Для этого достаточно, чтобы

$$B\eta_0^{2/\sigma} T_1^{-N/(N\sigma+2)} \leq \epsilon, \quad \eta_0 T_1^{1/(N\sigma+2)} \leq \delta \quad (13)$$

(при этом T_1 может быть произвольной).

Тогда в силу теоремы сравнения (см. гл. I)

$$u(t, x) \geq v_A(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N. \quad (14)$$

Покажем, что при $1 < \beta < \sigma + 1 + 2/N$ найдется такое t_1 , что при некотором T_1 функция $v_A(t_1, x)$ будет удовлетворять условию (9). Тогда в силу (14) оно будет справедливо и для решения $u(t_1, x)$. Условие $v_A(t_1, x) \geq u_-(0, x)$ в \mathbf{R}^N будет выполнено, если

$$(T_1 + t_1)^{-N/(N\sigma+2)} B\eta_0^{2/\sigma} \geq T^{-1/(\beta-1)} A, \quad (15)$$

$$\eta_0 (T_1 + t_1)^{1/(N\sigma+2)} \geq a T^{[\beta - (\sigma+1)]/[2(\beta-1)]} \quad (16)$$

(здесь A, a — произвольное решение неравенств (7), (8)).

Покажем, что система (15), (16) всегда разрешима относительно t_1, T , если $\beta < \sigma + 1 + 2/N$.

Пусть в (15) достигается равенство, т. е.

$$T_1 + t_1 = (B\eta_0^{2/\sigma}/A)^{(N\sigma+2)/N} T^{(N\sigma+2)/[N(\beta-1)]}. \quad (17)$$

При этом T_1 фиксировано, а T достаточно велико. Остается проверить, будет ли при достаточно больших T выполняться

неравенство (16), которое принимает вид

$$\eta_0 (B\eta_0^{2/\sigma}/A)^{1/N} T^{1/[N(\beta-1)]} \geq a T^{[\beta-(\sigma+1)]/[2(\beta-1)]},$$

или, что то же самое,

$$T^{\frac{1}{2(\beta-1)}\left[\beta-\left(\sigma+1+\frac{2}{N}\right)\right]} \leq \frac{1}{a} \left(\frac{B}{A}\right)^{1/N} \eta_0^{2/N\sigma+1}. \quad (18)$$

Очевидно, что в случае $\beta \in (1, \sigma + 1 + 2/N)$ оно выполняется при больших T , что завершает доказательство.

З а м е ч а н и е. В процессе доказательства фактически показано, что при $1 < \beta < \sigma + 1 + 2/N$ время обострения состоит из двух частей: $T_0 \leq t_1 + T$, где t_1 — время растекания начального возмущения практически без заметного энерговыделения до некоторого резонансного состояния, T — установленное в теореме 1 время интенсивного роста резонансного решения в режиме с обострением.

При $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ стадия растекания может длиться бесконечно долго, т. е. в этом случае возможны нетривиальные глобальные решения. Обоснованию этого вывода посвящен п. 3.

Проанализируем с помощью неравенств (13), (18) случай «критического» значения $\beta = \sigma + 1 + 2/N$.

С л е д с т в и е. Пусть $\beta = \sigma + 1 + 2/N$ и начальная функция такова, что $u_0(x) \geq \varepsilon$ в $\{|x| < \delta\}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, причем

$$\varepsilon \delta^N \geq A a^N, \quad (19)$$

где a , A удовлетворяют неравенству (8). Тогда решение задачи (1), (2) является неограниченным.

Поскольку произведение $\varepsilon \delta^N$ характеризует величину энергии начального возмущения, условие (19) означает, что при $\beta = \sigma + 1 + 2/N$ неограниченным является всякое решение с достаточно большой начальной энергией. Напомним, что качественные результаты § 2 указывают на то, что в этом случае все нетривиальные решения являются неограниченными. Об этом же свидетельствует аналогия с результатами, сформулированными в § 7 для полулинейного ($\sigma = 0$) уравнения.

В заключение этого пункта отметим, что в случае $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ анализ неравенств (15), (16) позволяет существенно расширить указанное в теореме 1 множество неустойчивости \mathcal{U} (если $u_0 \in \mathcal{U}$, то $u(t, x)$ является неограниченным). Множеству \mathcal{U} принадлежат не только резонансные начальные возмущения, при которых решение сразу растет в режиме с обострением (они указаны в теореме 1), но и те $u_0(x)$, которым отвечают неограниченные решения с первоначально падающей амплитудой.

3. Условия глобальной разрешимости задачи Коши при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$. Они будут получены с помощью построения ограниченных верхних решений u_+ , которые так же, как в п. 2, ищутся

в автомодельном виде:

$$u_+(t, x) = (T + t)^{-1/(\beta-1)} \theta_+(\xi), \quad \xi = |x| / (T + t)^{(\beta-(\sigma+1))/(\beta-1)}, \quad (20)$$

где $\theta_+(\xi) = A(1 - \xi^2/a^2)_+^{1/\sigma}$; $A, T, a > 0$ — постоянные.

Выбор функции (20) подсказан видом глобального автомодельного решения уравнения (1), рассматриваемого в п. 4. Учитывая, что $u_+(t, x)$ имеет непрерывную производную $\nabla u_+^{\sigma+1}$, заключаем, что (20) будет верхним решением, если $A(u_+) \geq 0$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \setminus \{\xi = a\}$, что дает неравенство (ср. (5))

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta_+^\sigma \theta_+')' + \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta - 1)} \theta_+' \xi + \frac{1}{\beta - 1} \theta_+ + \theta_+^\beta \leq 0, \quad \xi \neq a, \quad (21)$$

которое эквивалентно неравенству

$$F_{\sigma\beta}(\Delta) = m_* + n_* \Delta + A^{\beta-1} \Delta^{(\beta+\sigma-1)/\sigma} \leq 0, \quad \Delta \in (0, 1), \quad (22)$$

где

$$\Delta = (1 - \xi^2/a^2)_+, \\ m_* = \frac{4A^\sigma}{\sigma^2 a^2} - \frac{\beta - (\sigma + 1)}{(\beta - 1)\sigma}, \quad n_* = \frac{1}{\sigma} \left[1 - \frac{2A^\sigma}{a^2} \left(N + \frac{2}{\sigma} \right) \right].$$

Поскольку функция $F_{\sigma\beta}$ является выпуклой ($F_{\sigma\beta}'' \geq 0$), для выполнения (22) достаточно, чтобы $F_{\sigma\beta}(0) \leq 0$ и $F_{\sigma\beta}(1) \leq 0$. Отсюда получаем искомые ограничения на величины A, a : $m_* \leq 0, m_* + n_* + A^{\beta-1} \leq 0$ или

$$\frac{4}{\sigma^2} \frac{A^\sigma}{a^2} \leq \frac{\beta - (\sigma + 1)}{\sigma(\beta - 1)}, \quad (23)$$

$$A^{\beta-1} \leq \frac{2N}{\sigma} \frac{A^\sigma}{a^2} - \frac{1}{\beta - 1}. \quad (24)$$

Покажем, что только в случае $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ система неравенств (23), (24) имеет решение (при $\beta < \sigma + 1 + 2/N$ в силу теоремы 2 решений не должно быть). Из (24) вытекает необходимость ограничения $2NA^\sigma/(\sigma a^2) > 1/(\beta - 1)$, что вместе с (23) дает

$$\frac{2}{N\sigma(\beta - 1)} < \frac{4}{\sigma^2} \frac{A^\sigma}{a^2} \leq \frac{\beta - (\sigma + 1)}{\sigma(\beta - 1)}. \quad (25)$$

Величина A^σ/a^2 , удовлетворяющая (25), существует в том случае, если $2/[N\sigma(\beta - 1)] < [\beta - (\sigma + 1)]/[\sigma(\beta - 1)]$, что эквивалентно неравенству $[\beta - (\sigma + 1 + 2/N)]/[\sigma(\beta - 1)] > 0$. Отсюда возникает ограничение $\beta > \sigma + 1 + 2/N$. Тогда, изменяя величины A и a так, чтобы отношение A^σ/a^2 оставалось ограниченным и было заключено в пределах (25), за счет уменьшения величины A всегда можно добиться выполнения (24). Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ и при некотором $T > 0$ функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$u_0(x) \leq u_+(0, x) = T^{-1/(\beta-1)} \theta_+ \left(\frac{|x|}{T^{[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)}} \right), \quad (26)$$

$$x \in \mathbb{R}^N,$$

где $\theta_+(\xi) = A(1 - \xi^2/a^2)_+^{1/\sigma}$ и постоянные $A, a > 0$ удовлетворяют неравенствам (23), (24). Тогда задача Коши (1), (2) имеет глобальное решение, причем

$$u(t, x) \leq (T+t)^{-1/(\beta-1)} \theta_+ \left(\frac{|x|}{(T+t)^{[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)}} \right) \quad \forall \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \quad (27)$$

Замечание 1. Отсюда, в частности, следует такая оценка амплитуды решения:

$$\sup_x u(t, x) \leq A(T+t)^{-1/(\beta-1)} \quad t > 0.$$

Кроме того, с помощью (27) можно оценить диаметр $d(t)$ посетителя обобщенного решения: $d(t) \leq 2a(T+t)^{(\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)}$. Естественно, эти оценки совпадают с автомодельными.

Суммируя сформулированные в теоремах 1, 3 результаты, приходим к утверждению: при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ для всех больших начальных функций задача (1), (2) неразрешима в целом, при достаточно малых u_0 существует глобальное решение.

Замечание 2. В теореме 3 при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ в пространстве начальных функций выделено множество устойчивости \mathcal{W} задачи Коши (1), (2) такое, что включение $u_0 \in \mathcal{W}$ обеспечивает разрешимость задачи в целом. При этом $\mathcal{W} = \{u_0 \geq 0 \mid \exists T > 0: u_0(x) \leq u_+(0, x) \text{ в } \mathbb{R}^N\}$ содержит только финитные функции, а его «граница» состоит из однопараметрического ($T > 0$ — параметр) семейства также финитных функций. Это не означает, что глобальными могут быть только финитные решения. В п. 4 построено нефинитное множество устойчивости в случае $\beta > \sigma + 1 + 2/N$, граница которого состоит из нефинитных глобальных автомодельных решений уравнения (1).

4. Глобальные автомодельные решения при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$
Лемма о стационарных решениях. Этот пункт целиком посвящен исследованию одного частного класса глобальных решений уравнения (1) вида

$$u_A = u_A(t, x; T) = (T+t)^{-1/(\beta-1)} f_A(\xi), \quad (28)$$

$$\xi = x/(T+t)^m, \quad m = [\beta - (\sigma + 1)]/[2(\beta - 1)],$$

где $T > 0$ — произвольная постоянная.

После подстановки (28) в уравнение (1) для $f_A \geq 0$ получаем следующее эллиптическое уравнение:

$$\nabla_{\xi} \cdot (f_A^{\sigma} \nabla_{\xi} f_A) + m \nabla_{\xi} f_A \cdot \xi + \frac{1}{\beta - 1} f_A + f_A^{\beta} = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}^N, \quad (29)$$

$$f_A(\xi) \rightarrow 0, \quad |\xi| \rightarrow \infty,$$

которое отличается от уравнения, отвечающего автомодельным режимам с обострением, только знаками второго и третьего членов. Однако это существенным образом меняет свойства решения f_A по сравнению с θ_A в § 1.

Мы пока ограничимся исследованием радиально симметричных решений

$$f_A = f_A(\xi) \geq 0, \quad \xi = |x|/(T+t)^m \in \mathbf{R}_+, \quad (30)$$

которые, как следует из (29), удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} f_A^{\sigma} f_A') + m f_A' \xi + \frac{1}{\beta - 1} f_A + f_A^{\beta} = 0, \quad \xi > 0, \quad (31)$$

и краевым условиям

$$f_A'(0) = 0, \quad f_A(\infty) = 0 \quad (f_A(0) > 0). \quad (32)$$

Обобщенное решение f_A должно иметь непрерывный тепловой поток, т. е. если f_A — финитная функция, то $(f_A^{\sigma+1})'(\xi_0) = 0$ в точке вырождения $\xi_0 = \text{mes sup } f_A$.

Рассмотрим семейство задач Коши для того же уравнения:

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} f^{\sigma} f') + m f' \xi + \frac{1}{\beta - 1} f + f^{\beta} = 0, \quad \xi > 0, \quad (33)$$

$$f'(0) = 0, \quad f(0) = \mu > 0, \quad (34)$$

и подберем такие μ , что $f = f(\xi; \mu)$ удовлетворяет (32). Прежде чем переходить к формулировке основной теоремы, отметим два свойства решения f_A , которые непосредственно вытекают из вида уравнения (31).

Во-первых, $f_A(\xi)$ является монотонным, поскольку (31) не допускает точек минимума $\xi = \xi_m$ таких, что $f_A(\xi_m) > 0$, $f_A'(\xi_m) = 0$, $f_A''(\xi_m) \geq 0$. Поэтому при всех $\mu > 0$ любое монотонное классическое решение задачи (33), (34), определенное для малых $\xi \geq 0$, можно продолжить либо на всю ось $\xi \in \mathbf{R}_+$ (тогда оно является искомой функцией f_A), либо до тех пор, пока оно не обратится в нуль. Локальная разрешимость (33), (34) устанавливается путем анализа эквивалентного интегрального уравнения с помощью теоремы Банаха о сжимающих отображениях.

Во-вторых, анализ (31) при малых f_A показывает возможный вид асимптотик решения при $f_A \rightarrow 0$. Первая — асимптотика нефинитного решения:

$$f_A(\xi) = C \xi^{-2/[\beta - (\sigma+1)]} (1 + \varepsilon(\xi)); \quad \varepsilon(\xi) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (35)$$

где $C > 0$ — постоянная. Вторая — асимптотика финитного решения:

$$f_A(\xi) = \left[\frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta - 1)} \sigma \xi_0 (\xi_0 - \xi) \right]^{1/\sigma} (1 + \omega(\xi)),$$

$$\xi \rightarrow \xi_0^- = \text{mes sup} f_A < \infty, \quad (36)$$

где $\omega(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \xi_0^-$. Асимптотики (35), (36) имеют смысл при $\beta > \sigma + 1$. Отметим, что финитному решению (36) фактически отвечает постоянная $C = 0$ в (35), т. е. (35) переходит в (36) при $C = 0$.

Свойства различных решений задачи (31), (32) зависят от соотношения между параметрами β , σ и размерностью пространства N .

Теорема 4. Пусть $\beta > 1$, $\sigma > 0$. Тогда:

(а) если $\beta < \sigma + 1 + 2/N$, то задача (31), (32) не имеет неограниченного решения (т. е. при любых $\mu > 0$ функция $f(\xi; \mu)$ обращается в нуль в некоторой точке $\xi = \xi_*$ и $(f^{\sigma+1})'_\xi(\xi_*; \mu) \neq 0$);

(б) при всех $\beta > \sigma + 1 + 2/N$, если $N = 1, 2$, или $\sigma + 1 + 2/N < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)$, если $N \geq 3$, задача (31), (32) имеет по крайней мере одно финитное решение f_A и бесконечное множество строго положительных решений;

(в) если $\beta \geq (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)$, $N \geq 3$, то задача (31), (32) не имеет финитных решений. При любых $\mu > 0$ решение задачи Коши (33), (34) является строго положительным и удовлетворяет условию на бесконечности (32).

Вопрос о разрешимости автомодельной задачи при критическом значении $\beta = \sigma + 1 + 2/N$ остается открытым. Исходя из аналогии с результатами, полученными для случая $\sigma = 0$ (см. § 7), можно ожидать, что при $\beta = \sigma + 1 + 2/N$ все нетривиальные решения задачи (1), (2) являются неограниченными, и, следовательно, функции $f_A \geq 0$ в этом случае не существуют.

Доказательство. Утверждение (а) непосредственно следует из теоремы 2 о несуществовании нетривиальных глобальных решений задачи (1), (2) при $1 < \beta < \sigma + 1 + 2/N$. Действительно, если бы функция $f_A \geq 0$ существовала, то (28) представляла бы собой глобальное решение $u_A \neq 0$, которого, как установлено выше, быть не может.

Отметим одну особенность этого рассуждения. Здесь для исследования обыкновенного дифференциального уравнения привлекаются результаты анализа значительно более сложных уравнений в частных производных. Преимущество этого подхода в данном случае незначительно, поскольку (а) допускает другое простое доказательство; см. ниже. Однако в дальнейшем (при доказательстве (в)) такой подход дает заметное упрощение.

Тот же результат можно получить другим способом. В силу (35) при $\beta < \sigma + 1 + 2/N$ уравнение (31) можно интегрировать по интервалу $(0, \infty)$ с весом ξ^{N-1} . В результате после интегриро-

ваша по частям получим равенство

$$\int_0^{\infty} f_A^{\beta}(\eta) \eta^{N-1} d\eta = -\frac{N}{2(\beta-1)} \left(\sigma + 1 + \frac{2}{N} - \beta \right) \int_0^{\infty} f_A(\eta) \eta^{N-1} d\eta, \quad (37)$$

которое при $\beta < \sigma + 1 + 2/N$ не выполняется, так как справа стоит отрицательная величина (для вывода (37) необходима оценка $f_A'(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$, которую трудно получить из уравнения).

(б), (в). Доказательство этих утверждений опирается на установленные ниже свойства семейства стационарных решений исходного уравнения (1).

4.1. Лемма о стационарных решениях. Рассмотрим решения стационарного уравнения

$$\nabla \cdot (U^{\sigma} \nabla U) + U^{\beta} = 0 \quad (38)$$

при произвольных значениях $\sigma \geq 0$, $\beta > 0$. Для наших целей достаточно проанализировать семейство $\{U \geq 0\}$ радиально симметричных решений, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} U^{\sigma} U')' + U^{\beta} = 0, \quad r = |x| > 0. \quad (38')$$

Положим $U^{\sigma+1} = V$ и сделаем преобразование $r \rightarrow r(\sigma+1)^{1/2}$. Обозначим через V_{λ} решение следующей задачи:

$$\frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} V_{\lambda}')' + V_{\lambda}^{\alpha} = 0, \quad r = |x| > 0, \quad (39)$$

$$V_{\lambda}(0) = \lambda, \quad V_{\lambda}'(0) = 0, \quad (40)$$

где $\lambda > 0$ — постоянная (параметр семейства $\{V_{\lambda}\}$), $\alpha = \beta/(\sigma+1) > 0$.

Лемма 1. Пусть $\alpha > 0$. Тогда:

1) при любых $\alpha > 0$, если $N = 1, 2$, или $0 < \alpha < (N+2)/(N-2)$, если $N \geq 3$, задача (39), (40) не имеет решения $V_{\lambda} \geq 0$ в \mathbf{R}_+ (т. е. при любых $\lambda > 0$ функция V_{λ} обращается в нуль в конечной точке, в которой $V_{\lambda}' \neq 0$);

2) если $\alpha \geq (N+2)/(N-2)$ при $N \geq 3$, то при любых $\lambda > 0$ решение задачи определено и строго положительно в \mathbf{R}_+ , $V_{\lambda}(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Доказательство. Локальная разрешимость задачи доказывается после сведения (39), (40) к интегральному уравнению.

1) Рассмотрим сначала случай $N \leq 2$. Из (39) получаем

$$r^{N-1} V_{\lambda}'(r) = - \int_0^r \eta^{N-1} V_{\lambda}^{\alpha}(\eta) d\eta, \quad (41)$$

и, следовательно, при любых $r \geq 1$ (если предположить, что

$V_\lambda > 0$ всюду)

$$V'_\lambda(r) \leq -c_1 r^{1-N} \quad c_1 = \int_0^1 \eta^{N-1} V_\lambda^\alpha(\eta) d\eta > 0.$$

Отсюда

$$V_\lambda(r) \leq V_\lambda(1) - c_1 \int_1^r \eta^{1-N} d\eta, \quad r > 1,$$

т. е.

$$V_\lambda(r) \leq V_\lambda(1) - c_1(r-1) \quad (N=1),$$

$$V_\lambda(r) \leq V_\lambda(1) - c_1 \ln r \quad (N=2); \quad r > 1.$$

Это означает, что V_λ при $N \leq 2$ обращается в нуль, причем в силу (41) в этой точке $V'_\lambda(r) \neq 0$ (т. е. тепловой поток не может быть непрерывным).

Пусть теперь $N \geq 3$. Тогда из (41) в силу монотонности V_λ получаем

$$r^{N-1} V'_\lambda(r) < -V_\lambda^\alpha(r) \int_0^r \eta^{N-1} d\eta = -V_\lambda^\alpha(r) \frac{r^N}{N}. \quad (42)$$

Интегрируя это неравенство, выводим оценку: при $\alpha < 1$

$$V_\lambda(r) < \left[\lambda^{1-\alpha} - \frac{r^2}{2N} (1-\alpha) \right]^{1/(1-\alpha)}$$

и, следовательно, $V_\lambda(r)$ определена на интервале длины, не превосходящей $r_\lambda = [2N/(1-\alpha)]^{1/2} \lambda^{(1-\alpha)/2}$.

Отметим, что при $\alpha < 1$ функция V_λ монотонно зависит от граничного значения $\lambda = V_\lambda(0)$ (рис. 52).

При $\alpha = 1$ функция V_λ положительна на интервале $(0, z_N^{(1)})$, где $z_N^{(1)} > 0$ — первый корень функции Бесселя $J_{(N-2)/2}$.

Если же $\alpha > 1$, то из (42) вытекает «нефинитная» оценка

$$V_\lambda(r) < \left[\lambda^{1-\alpha} + \frac{r^2}{2N} (\alpha-1) \right]^{-1/(\alpha-1)} \quad r > 0, \quad (43)$$

по которой нельзя судить о возможности продолжения $V_\lambda(r) > 0$

в область больших значений r . Отсюда следует, что

$$V_\lambda(r) < \left(\frac{2N}{\alpha-1} \right)^{1/(\alpha-1)} r^{-2/(\alpha-1)}, \quad r > 0. \quad (43')$$

Предположим, что 1) не выполнено, и $V_\lambda > 0$ в \mathbb{R}_+ при некотором $\alpha < (N+2)/(N-2)$, $N \geq 3$. Тогда с помощью полученных

ниже тождеств придем к противоречию. Для вывода первого из них умножим (39) на $r^{N-1}V_\lambda$ и проинтегрируем равенство по интервалу $(0, r)$. В результате получим

$$-r^{N-1}V'_\lambda(r)V_\lambda(r) + \int_0^r \eta^{N-1}V_\lambda'^2(\eta) d\eta = \int_0^r \eta^{N-1}V_\lambda^{\alpha+1}(\eta) d\eta, \quad r > 0.$$

Поскольку $V'_\lambda(r) < 0$ и (по предположению) $V_\lambda > 0$, отсюда имеем

$$\int_0^\infty \eta^{N-1}V_\lambda'^2(\eta) d\eta \leq \int_0^\infty \eta^{N-1}V_\lambda^{\alpha+1}(\eta) d\eta < \infty, \quad (44)$$

причем ограниченность правого интеграла обеспечивается оценкой (43).

Умножим теперь (39) на $r^N V'_\lambda(r)$ и проинтегрируем по $(0, r)$. Это дает другое равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{r^N}{2} V_\lambda'^2(r) + \frac{r^N}{\alpha+1} V_\lambda^{\alpha+1}(r) = \\ & = \frac{N}{\alpha+1} \int_0^r \eta^{N-1} V_\lambda^{\alpha+1}(\eta) d\eta - \frac{N-2}{2} \int_0^r \eta^{N-1} V_\lambda'^2(\eta) d\eta, \quad r > 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Нетрудно видеть, что левая часть $p(r) \equiv r^N V_\lambda'^2(r)/2 + r^N V_\lambda^{\alpha+1}(r)/(\alpha+1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Действительно, из (45) в силу сходимости интегралов следует, что $p(r) \rightarrow p_0$, $r \rightarrow \infty$, а из сходимости интеграла $\int_0^\infty [p(\eta)/\eta] d\eta$, которая вытекает из (44), следует, что $p_0 = 0$. Переходя к пределу в (45) при $r \rightarrow \infty$, получаем

$$\frac{N-2}{2} \int_0^\infty \eta^{N-1} V_\lambda'^2 d\eta = \frac{N}{\alpha+1} \int_0^\infty \eta^{N-1} V_\lambda^{\alpha+1} d\eta,$$

что вместе с (44) дает неравенство $(N-2)/2 \geq N/(\alpha+1)$, т. е. $\alpha \geq (N+2)/(N-2)_+$, что приводит к противоречию.

2) Пусть выполнено противное и существует такое $\alpha > (N+2)/(N-2)_+$ (случай равенства будет рассмотрен особо), что при некотором $\lambda > 0$ решение V_λ обращается в нуль в некоторой точке $r_\lambda > 0$. Тогда $V_\lambda(r) \neq 0$ является решением краевой задачи для уравнения (39) на интервале $(0, r_\lambda)$ с условиями

$$V'_\lambda(0) = 0, \quad V_\lambda(r_\lambda) = 0. \quad (46)$$

Однако, как будет показано, задача (39), (46) не имеет решения. Для этого, так же как при доказательстве 1), умножим (39) скалярно сначала на $N\kappa_N r^{N-1} V_\lambda(r)$, а потом на $N\kappa_N r^N V'_\lambda(r)$, где κ_N — объем единичной сферы в \mathbf{R}^N . В результате после

интегрирования по частям с учетом условий (46) получим

$$\|V'_\lambda\|_{L^2}^2 = \|V_\lambda\|_{L^{\alpha+1}}^{\alpha+1} (L^p = L^p(\{|x| < r_\lambda\})), \quad (47)$$

$$\frac{N\kappa_N}{2} r_\lambda^N V_\lambda'^2(r_\lambda) + \frac{N-2}{2} \|V'_\lambda\|_{L^2}^2 - \frac{N}{\alpha+1} \|V_\lambda\|_{L^{\alpha+1}}^{\alpha+1} = 0. \quad (48)$$

Подставляя в (48) величину $\|V'_\lambda\|_{L^2}^2$ из (47), получаем равенство

$$N \frac{\kappa_N}{2} r_\lambda^N V_\lambda'^2(r_\lambda) = \frac{N-2}{2(\alpha+1)} \left[\frac{(N+2)}{(N-2)} - \alpha \right] \|V_\lambda\|_{L^{\alpha+1}}^{\alpha+1}, \quad (49)$$

которое, разумеется, при $\alpha > (N+2)/(N-2)_+$ не может быть выполнено.

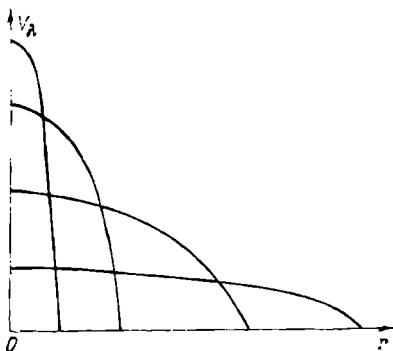


Рис. 53. Функции $V_\lambda(r)$ при $1 < \alpha < (N+2)/(N-2)_+$

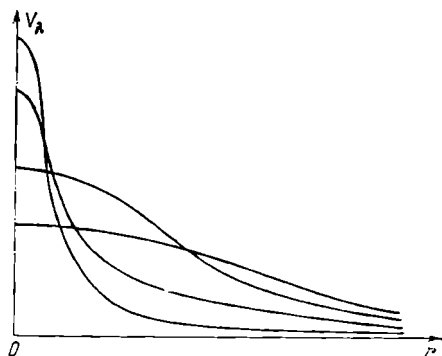


Рис. 54. Функции $V_\lambda(r)$ при $\alpha \geq (N+2)/(N-2)_+$

Наконец, при критическом значении $\alpha = (N+2)/(N-2)$ задача (39), (40) имеет при любом $\lambda > 0$ положительное решение

$$V_\lambda(r) = \left[\frac{N(N-2)\lambda^{2/(N-2)}}{N(N-2) + \lambda^{4/(N-2)}r^2} \right]^{(N-2)/2} \quad r \geq 0; \quad V_\lambda(0) = \lambda. \quad (50)$$

Неразрешимость краевой задачи в этом случае также следует из равенства (49), поскольку здесь $V'_\lambda(r_\lambda) \neq 0$ в силу (41).

З а м е ч а н и е. Возвращаясь к уравнению (38'), получаем, что при всех $\beta > 0$, $N = 1, 2$, или $0 < \beta < (\sigma+1)(N+2)/(N-2)$, $N \geq 3$, стационарных решений в \mathbf{R}_+ не существует. Напротив, при $\beta \geq (\sigma+1)(N+2)/(N-2)_+$ все его решения строго положительны.

На рис. 53, 54 показано примерное поведение функций $V = V_\lambda(r)$ при различных $\lambda > 0$ в финитном (рис. 53) и нефинитном (рис. 54) случаях. При $\alpha > 1$ (в отличие от $\alpha < 1$) нет монотонной зависимости $V_\lambda(r)$ от λ .

В заключение заметим, что утверждение, аналогичное только что доказанному, справедливо и в случае уравнения (39) с достаточно произвольным нелинейным членом $q(V)$ вместо V^α (см. § 1 гл. VII).

4.2. Доказательство утверждения (б) теоремы 4. Установим сначала справедливость одного простого утверждения, относящегося к утверждениям (б), (в).

Лемма 2. Пусть $\beta > \sigma + 1 + 2/N$. Тогда при всех

$$0 < \mu \leq \left\{ \frac{N}{2(\beta-1)} \left[\beta - \left(\sigma + 1 + \frac{2}{N} \right) \right] \right\}^{1/(\beta-1)} = \mu_1 \quad (51)$$

решение задачи (33), (34) является строго положительным в \mathbb{R}_+ (и, следовательно, имеет асимптотику (35)).

Доказательство. Перепишем равенство, полученное после интегрирования уравнения (33), умноженного на ξ^{N-1} , по интервалу $(0, \xi)$, следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi^{N-1} f^\sigma f' + m f \xi^N = \\ = \int_0^\xi \eta^{N-1} f(\eta) \left\{ \frac{N}{2(\beta-1)} \left[\beta - \left(\sigma + 1 + \frac{2}{N} \right) \right] - f^{\beta-1}(\eta) \right\} d\eta. \end{aligned} \quad (52)$$

В силу (51) и монотонности f правая часть строго положительна при $\xi > 0$. Предположим, что $f(\eta)$ обращается в нуль при $\xi = \xi_* \in \mathbb{R}_+$. Тогда $f^\sigma f'(\xi_*) \leq 0$, $f(\xi_*) = 0$ следовательно, левая часть (52) при $\xi = \xi_*$ неположительна, что приводит к противоречию.

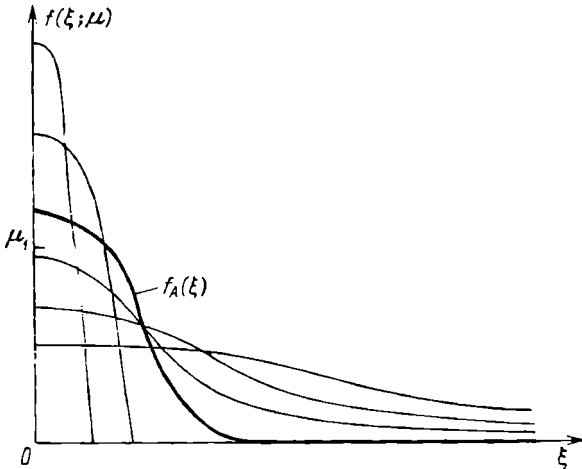


Рис. 55. Решения задачи (33), (34) при различных $\mu = f(0)$, случай $\sigma + 1 + 2/N < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$

Таким образом, справедливость второй части утверждения (б) установлена. Завершается его доказательство с помощью следующей леммы.

Лемма 3. Пусть $\beta > \sigma + 1 + 2/N$, если $N = 1, 2$, или $\sigma + 1 + 2/N < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)$, если $N \geq 3$. Тогда существует такое $\mu > 0$, что решение задачи (33), (34) обращается в нуль.

Доказательство проводится тем же способом, что и доказательство теоремы 4 в § 1 (см. также анализ случая $\beta < \sigma + 1$ в п. 3 § 1). В конечном счете предположение, противоположное лемме 3: при всех $\mu > 0$ решение задачи (33), (34) является строго положительным в \mathbf{R}_+ , приводит после предельного перехода к выводу о существовании строго положительного решения стационарной задачи (39), (40) при $\lambda = 1$, что невозможно в силу леммы 1.

Теперь, обозначая через \mathcal{M} множество всех $\mu^0 > 0$ таких, что $f(\xi; \mu) > 0$ в \mathbf{R}_+ при всех $0 < \mu < \mu^0$, получаем, что $\mathcal{M} \neq \emptyset$ (см. лемму 2) и \mathcal{M} ограничено сверху (см. лемму 3). Поэтому существует $\mu_* = \sup \mathcal{M} < \infty$, и стандартными методами устанавливается, что функция $f_A = f(\xi; \mu_*)$, отвечающая $\mu = \mu_*$, является решением задачи (31), (32) и имеет асимптотику (36).

На рис. 55 показаны некоторые кривые $f = f(\xi; \mu)$ при различных $\mu > 0$. Жирной линией обозначено финитное решение.

4.3. Доказательство утверждения (в) теоремы 4. Предварительно отметим, что строгая положительность всех симметричных решений стационарного уравнения (38) при $\beta \geq (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)$, $N \geq 3$ (лемма 1), в принципе, свидетельствует в пользу утверждения (в). Доказательство с помощью исследования обыкновенного дифференциального уравнения (31) связано с определенными трудностями. Поэтому оно проводится на основе одного любопытного свойства решений соответствующего уравнения в частных производных (1).

Так, предположим противное: пусть в условиях (в) существует такое $\mu > 0$, что $f(\xi; \mu)$ обращается в нуль. Отметим, что в силу леммы 2

$$\mu > \left\{ \frac{N}{2(\beta - 1)} \left[\beta - \left(\sigma + 1 + \frac{2}{N} \right) \right] \right\}^{1/(\beta - 1)}$$

Тогда так же, как при доказательстве (б), приходим к выводу о существовании нетривиального финитного решения $f_A(\xi) \geq 0$ задачи (31), (32) с асимптотикой (36). Этот вывод, как будет показано ниже, приводит к противоречию.

Мы получили, что при $\beta \geq (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$ задача Коши для уравнения (1) имеет (автомодельное) решение

$$u \equiv u_A(t, x) = (T + t)^{-1/(\beta - 1)} \theta_A \left(\frac{|x|}{(T + t)^{[\beta - (\sigma + 1)]/2(\beta - 1)}} \right), \quad (53)$$

обладающее конечной энергией

$$E(t) = \frac{1}{2(\sigma + 1)} \|\nabla u^{\sigma + 1}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 - \frac{\sigma + 1}{\beta + \sigma + 1} \|u\|_{L^{\beta + \sigma + 1}(\mathbf{R}^N)}^{\beta + \sigma + 1}. \quad (54)$$

Действительно, f_A является финитной, причем $f_A' \in C(\mathbf{R}_+)$, и нетрудно проверить, что $\nabla u^{\sigma + 1}(t) \in L^2(\mathbf{R}^N)$, $u(t) \in L^{\beta + \sigma + 1}(\mathbf{R}^N)$, т. е. $|E(t)| < \infty$ при всех $t > 0$. Функционалы типа энергии (54)

являются важными характеристиками решения задачи и будут неоднократно использоваться в дальнейшем (см. § 2 гл. VII).

Легко видеть, что $E(t)$ не возрастает. Действительно, используя уравнение (1), получаем

$$\begin{aligned} E'(t) &\equiv \left[\frac{1}{2(\sigma+1)} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u^{\sigma+1}|^2 dx - \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} \int_{\mathbf{R}^N} u^{\beta+\sigma+1} dx \right]' = \\ &= - \int_{\mathbf{R}^N} \left(\frac{1}{\sigma+1} \Delta u^{\sigma+1} + u^\beta \right) (u^{\sigma+1})_t dx = - \int_{\mathbf{R}^N} u_t (u^{\sigma+1})_t dx = \\ &= - \frac{4(\sigma+1)}{(\sigma+2)^2} \| (u^{1+\sigma/2})_t \|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 \leq 0. \quad (55) \end{aligned}$$

Введем для удобства функционал

$$G(t) = \| u^{1+\sigma/2} \|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 \equiv \int_{\mathbf{R}^N} u^{\sigma+2} dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} G'(t) &= (\sigma+2) \int_{\mathbf{R}^N} u^{\sigma+1} u_t dx = (\sigma+2) \int_{\mathbf{R}^N} u^{\sigma+1} \left(\frac{1}{\sigma+1} \Delta u^{\sigma+1} + u^\beta \right) dx = \\ &= -(\sigma+2) \frac{\beta+\sigma+1}{\sigma+1} \left[\frac{1}{\beta+\sigma+1} \| \nabla u^{\sigma+1} \|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 - \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} \| u \|_{L^{\beta+\sigma+1}(\mathbf{R}^N)}^{\beta+\sigma+1} \right]. \quad (56) \end{aligned}$$

Поскольку $\beta > \sigma + 1$, отсюда следует оценка

$$G'(t) \geq - \frac{(\sigma+2)(\beta+\sigma+1)}{\sigma+1} E(t), \quad t > 0. \quad (57)$$

Все выписанные выше преобразования корректны для функции (53).

Посмотрим теперь, какая энергия отвечает глобальному решению (53). Легко вычислить, что для него

$$\begin{aligned} E(t) &= (T+t)^{\frac{N-2}{2(\beta-1)}} \left[\beta - (\sigma+1) \frac{N+2}{N-2} \right] \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2(\sigma+1)} \| \nabla_{\xi} u^{\sigma+1}(\xi) \|_{L^2}^2 - \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} \| u \|_{L^{\beta+\sigma+1}}^{\beta+\sigma+1} \right\}. \quad (58) \end{aligned}$$

Покажем, что при $\beta \geq (\sigma+1)(N+2)/(N-2)$, $N \geq 3$, такой энергии у глобального решения быть не может. Для критического случая $\beta = (\sigma+1)(N+2)/(N-2)$ это очевидно. Из (58) следует, что $E(t) = \text{const}$, т. е. $E'(t) \equiv 0$, что противоречит (55), так как $u_t \neq 0$.

Пусть теперь $\beta > (\sigma+1)(N+2)/(N-2)_+$. Тогда из (58) получаем, что для строгого убывания энергии E (см. (55)) необходимо, чтобы $E(0) \leq 0$. Тогда $E(t) < 0$ при всех $t > 0$ (если $E(0) > 0$, то в силу (58) $E'(t) > 0$, что противоречит (55)).

Оказывается, полученное условие

$$E(t) < 0, \quad t > 0, \quad (59)$$

несовместимо с глобальным существованием решения.

Лемма 4. Пусть $u(t, x) \neq 0$ — финитное решение задачи Коши (1), (2), причем для него справедливо условие (59). Тогда $u(t, x)$ существует в течение конечного времени.

Доказательство. В сделанных предположениях можно считать, что $G(t) > 0$, $\|u^{\sigma+1}(t)\|_{L^2} \neq 0$ и $\|\nabla u^{\sigma+1}(t)\|_{L^2} \neq 0$ для всех $t > 0$. Отсюда в силу (55), (56) имеем $G'(t) > 0$, $E'(t) < 0$ и, кроме того, неравенство (57) является строгим:

$$G'(t) > -\frac{(\sigma+2)(\beta+\sigma+1)}{\sigma+1} E(t), \quad t > 0. \quad (60)$$

Из (55), (56), (60) с помощью неравенства Коши — Буияковского выводится следующая оценка:

$$\begin{aligned} -G(t)E'(t) &= \\ &= \frac{4(\sigma+1)}{(\sigma+2)^2} \|u^{1+\sigma/2}\|_{L^2}^2 \cdot \|(u^{1+\sigma/2})_t\|_{L^2}^2 \geq \frac{4(\sigma+1)}{(\sigma+2)^2} (u^{1+\sigma/2}, (u^{1+\sigma/2})_t)^2 = \\ &= \frac{4(\sigma+1)}{(\sigma+2)^2} \frac{G'(t)G(t)}{4} \geq -\frac{\beta+\sigma+1}{\sigma+2} G'(t)E(t), \end{aligned}$$

т. е.

$$GE' - \frac{\beta+\sigma+1}{\sigma+2} G'E \leq 0, \quad t > 0,$$

или, что то же самое,

$$(G^{(\beta+\sigma+1)/(\sigma+2)}/E)'(t) \geq 0, \quad t > 0.$$

Отсюда, учитывая, что $E(t) < 0$, получаем для всех $t \geq t_*$ > 0 оценку

$$G^{(\beta+\sigma+1)/(\sigma+2)}(t) \leq c_* E(t), \quad (61)$$

где $c_* = G^{(\beta+\sigma+1)/(\sigma+2)}(t_*)/E(t_*) < 0$. Из (6), (61) вытекает неравенство

$$G^{(\beta+\sigma+1)/(\sigma+2)}(t) \leq |c_*| |E(t)| \leq \frac{\sigma+1}{\sigma+2} \frac{|c_*|}{\beta+\sigma+1} G'(t), \quad t > t_*.$$

Из неравенства

$$G'(t) \geq \frac{\sigma+2}{\sigma+1} \frac{\beta+\sigma+1}{|c_*|} G^{(\beta+\sigma+1)/(\sigma+2)}(t), \quad t > t_*$$

следует, что функция $G(t) \equiv \|u^{1+\sigma/2}(t)\|_{L^2}^2$ не может быть ограниченной при всех $t > 0$, и существует такое

$$T_0 \leq t_* + \frac{\sigma+1}{(\beta-1)(\beta+\sigma+1)} |E(t_*)|^{-1} G(t_*) < \infty,$$

что $G(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$, т. е. решение $u(t, x)$ является неограниченным.

Таким образом, при $\beta \geq (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$ финитное решение u_A в (53) не может быть глобальным, т. е. в этом случае все решения (33), (34) являются строго положительными, что завершает доказательство утверждения (в) теоремы 4.

Проведенное исследование устанавливает определенное сходство между решениями уравнения (31) и стационарного уравнения (38'), которое ярко проявляется при достаточно больших значениях $\mu = f(0)$. Между ними есть и значительная разница, при небольших $\mu > 0$ важную роль играют младшие (линейные) члены уравнения (31). Следствием этого является существование в определенном интервале изменения β финитного решения $f_A(\xi)$. В случае стационарного уравнения (38') (см. п. 4.1) решение с выделенной асимптотикой существует лишь при одном значении $\beta = (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$.

4.4. О радиально несимметричных глобальных автомодельных решениях при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$. В этом пункте кратко обсуждается возможность построения несимметричных по x автомодельных решений типа (28), где $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Рассмотрим автомодельное решение (28) при $T = 0$:

$$u_A(t, x; 0) = t^{-1/(\beta-1)} f_A(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t^m}; \quad m = \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta - 1)} > 0. \quad (62)$$

Как следует из теоремы 4, при всех $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ существует автомодельная функция $f_A = f_A(|\xi|)$ в (62) со степенной асимптотикой.

Пусть ей отвечает постоянная $C = C_0 > 0$ в разложении (35). Тогда из (62) вытекает, что данное автомодельное решение u_A удовлетворяет начальному условию с сингулярной функцией

$$u_A(0, x; 0) = C_0 |x|^{-1/(\beta - (\sigma + 1))}, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}. \quad (63)$$

Эта особенность является интегрируемой при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$: $u_A(0, \cdot; 0) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Таким образом, при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ задача Коши (1), (63) имеет глобальное классическое решение $u = u_A(t, x; 0)$, которое является единственным (последнее вытекает из условия $u_A(0, \cdot; 0) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, см. об этом ниже).

Тем самым автомодельное решение (62) определяет «меру сингулярности» начальной функции $u_0(x)$, при которой задача Коши имеет глобальное ограниченное решение.

Но тогда из принципа максимума следует, что задача Коши является глобально разрешимой при всех меньших, чем в (63), начальных функциях:

$$u_0^*(x) = C |x|^{-2/[\beta - (\sigma + 1)]}, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad (64)$$

где $0 < C \leq C_0$. Обозначим это решение через $u^*(t, x)$. В силу принципа максимума $u^* \leq u_A$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ (так что u^* ограничено при $t > 0$), и поэтому u^* — единственное решение задачи Коши (1), (64) (т. к. $u_0^* \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, см. [228]).

Используем теперь тот факт, что уравнение (1) инвариантно относительно преобразования

$$u \rightarrow k^{1/(\beta-1)}u, \quad t \rightarrow kt, \quad x \rightarrow k^m x, \quad (65)$$

где $k > 0$ — произвольная постоянная. Поэтому $u^*(t, x)$ порождает целое семейство решений

$$u_h^*(t, x) = k^{1/(\beta-1)}u^*(kt, k^m x), \quad k > 0.$$

Однако начальное условие (64) также инвариантно относительно преобразований (65), и в силу единственности u^* при любых $k > 0$ должно выполняться равенство $u^* \equiv u_h^*$. Полагая здесь $k = 1/t$, приходим к выводу, что u^* есть не что иное, как автомодельное решение вида (62), где f_A удовлетворяет условию (35). Таким образом, из существования решения $f_A > 0$ задачи (31), (35) при $C = C_0 > 0$ вытекает существование других автомодельных функций f_A , которым отвечает произвольное $C \in (0, C_0)$ в (35).

Для построения радиально несимметричных автомодельных решений осталось сделать один шаг. Действительно, пигде не использовалось, что C в (64) — постоянная. Пусть теперь $C = C(x) \leq C_0$. Для того чтобы провести те же рассуждения, необходимо, чтобы функция $C(x)$ не изменялась при преобразованиях (65), т. е. $C(x) \equiv C(k^m x)$ при всех $k > 0$. Этому условию удовлетворяют функции вида

$$C = C(x/|x|), \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

где $C(\omega) \geq 0$ определена на единичной сфере $\{\omega \in \mathbb{R}^N \mid |\omega| = 1\}$.

Таким образом, если $0 \leq C(\omega) \leq C_0$, то начальная функция

$$u_A(0, x; 0) = C(x/|x|)|x|^{-2/[\beta-(\sigma+1)]}, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

определяет глобальное (и единственное) решение уравнения (1) при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$, которое представляет собой автомодельное решение вида (62). При этом функция $f_A(\xi) \geq 0$ удовлетворяет эллиптическому уравнению (29) и несимметричному по ξ условию на бесконечности:

$$f_A(\xi) \simeq C(\xi/|\xi|)|\xi|^{-2/[\beta-(\sigma+1)]}, \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (66)$$

Множество радиально несимметричных глобальных автомодельных решений (62) при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$, $N > 1$, является бесконечномерным, так как в (66) присутствует, вообще говоря, произвольная функция $C(\omega) \in [0, C_0]$, $C(\omega) \neq 0$. Асимптотическая устойчивость этих решений может быть исследована методами п. 6.

5. Нефинитное множество устойчивости. С помощью полученных в п. 4 результатов легко определить множество устойчивости \mathscr{W} задачи (1), (2) при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$, состоящее из нефинитных функций. Граница \mathscr{W} составлена из нефинитных глобальных автомодельных решений (28). При этом будем считать, что решение $u(t, x)$ подчиняется принципу максимума и монотонным образом зависит от начальной функции (см. § 3 гл. I).

Обозначим через \mathcal{F} множество нефинитных решений $f_A(\xi)$ задачи (31), (32); к \mathcal{F} , например, относятся все $f(\xi; \mu)$, указанные в лемме 2 ($\mathcal{F} \neq \emptyset$ при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$). Множество \mathcal{W} определено в следующем утверждении.

Теорема 5. Пусть $\beta > \sigma + 1 + 2/N$. Тогда существует нефинитное множество устойчивости \mathcal{W} задачи (1), (2):

$$\mathcal{W} = \{u_0(x) \geq 0 \mid \exists f_A \in \mathcal{F} \quad T \geq 0 = \text{const}: u_0(x) \leq T^{-1/(\beta-1)} f_A(|x|/T^{[\beta-(\sigma+1)]/(2/(\beta-1))})\}, \quad (67)$$

так что, если $u_0 \in \mathcal{W}$, то (1), (2) имеет глобальное решение.

Доказательство. В силу принципа максимума указанное в (67) ограничение на начальную функцию дает оценку решения:

$$u(t, x) \leq (T+t)^{-1/(\beta-1)} f_A(|x|/(T+t)^m), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

Следовательно, решение $u(t, x)$ глобально ограничено:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(t, x) \leq f_A(0) (T+t)^{-1/(\beta-1)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

6. Об асимптотическом поведении глобальных решений при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$. Выясним, какое отношение имеют глобальные автомодельные решения, построенные в п. 4, к асимптотическому поведению произвольных глобальных решений задачи Коши. Правильно ли частные решения (28) передают при больших t амплитуду, эффективную ширину и пространственный профиль затухающих тепловых структур, которые существуют при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$?

Ниже проводится исследование асимптотической устойчивости симметричных по x автомодельных решений (28); эти же методы применимы для анализа несимметричных решений u_A , возможность построения которых указана в п. 4.4.

Сначала будет показано, что на сформулированный вопрос можно ответить положительно, если $f_A(|\xi|)$ в (30) имеет степенную асимптотику (35). Справедливо, в частности, такое утверждение, где через $f_T(t, \xi)$ обозначено автомодельное представление решения задачи Коши (1), (2):

$$f_T(t, \xi) = (T+t)^{1/(\beta-1)} u(t, \xi(T+t)^m), \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

Теорема 6. Пусть $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ и автомодельная функция f_A в (30) такова, что

$$-\delta \equiv \frac{N}{2(\beta-1)} \left(\sigma + 1 + \frac{2}{N} - \beta \right) + \beta (f_A(0))^{\beta-1} < 0. \quad (68)$$

Тогда автомодельное решение (28) является асимптотически устойчивым в $L^1(\mathbb{R}^N)$ в следующем смысле: если при некотором $T > 0$

$$u_0(x) \leq u_A(0, x; T), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (69)$$

$$u_A(0, \cdot; T) - u_0(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N), \quad (69')$$

$$\|f_T(t, \cdot) - f_A(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = O(t^{-\delta}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (70)$$

З а м е ч а н и е. Неравенство (68) дает следующее ограничение на величину $f_A(0) = \sup f_A(|\xi|)$:

$$f_A(0) < \left\{ \frac{N}{2(\beta-1)\beta} \left[\beta - \left(\sigma + 1 + \frac{2}{N} \right) \right] \right\}^{1/(\beta-1)}$$

Из леммы 2 (см. п. 4.2) вытекает, что тогда $f_A(|\xi|) > 0$ в \mathbb{R}^N , и, следовательно, в рамках теоремы не следует асимптотическая устойчивость нефинитного автомодельного решения u_A . Отметим, что в силу (35) $u_A(t, \cdot; T) \notin L^1(\mathbb{R}^N)$ при любом $t > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формально оно проводится тем же способом, который применялся в § 13 гл. II. Пусть $z = u_A - u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ при каждом $t \geq 0$. В силу (69) $u \leq u_A$, т. е. $z \geq 0$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$. Из параболического уравнения для функции z вытекает, что

$$\frac{d}{dt} \|z(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq (z(t), a(u, u_A)), \quad t > 0,$$

где

$$a(u, u_A) = \beta \int_0^1 (\eta u_A + (1-\eta)u)^{\beta-1} d\eta \leq \beta (f_A(0))^{\beta-1} (T+t)^{-1}.$$

Поэтому

$$\|z(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = O\left(t^{\beta(f_A(0))^{\beta-1}}\right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (71)$$

Однако

$$\|z(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \equiv (T+t)^{\frac{N}{2(\beta-1)}} \left[\beta - \left(\sigma + 1 + \frac{2}{N} \right) \right] \|f_T - f_A\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \quad (72)$$

и из (71), (72) вытекает оценка (70), которая в силу (68) обеспечивает стабилизацию $f_T \rightarrow f_A$ при $t \rightarrow \infty$ в норме $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Теорема 6 устанавливает асимптотическую устойчивость нефинитных автомодельных решений в классе начальных функций (см. (69'))

$$u_0(x) \sim C|x|^{-2/(\beta-(\sigma+1))}, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (73)$$

Таким образом, если $u_0(x)$ удовлетворяет (73) (тогда $u_0 \notin L^1(\mathbb{R}^N)$) и данной начальной функции отвечает глобальное решение задачи Коши, то амплитуда и полуширина асимптотически точно оцениваются при $t \rightarrow \infty$ по формулам

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(t, x) \simeq t^{-1/(\beta-1)}, \quad |x_{3\Phi}(t)| \sim t^{[\beta-(\sigma+1)]/[2(\beta-1)]}, \quad (74)$$

Что будет, если (73) не выполнено? Например, в случае финитного начального возмущения $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$? Как следует из

теоремы 4, при $\sigma + 1 + 2/N < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$ существует финитное автомодельное решение u_λ вида (28), которое, казалось бы, и должно описывать асимптотическое поведение таких решений. Однако это не так. Это автомодельное решение в отличие от нефинитных решений в теореме 6 неустойчиво при $t \rightarrow \infty$. Асимптотику процесса затухающего горения в этом случае описывают автомодельные решения уравнения без источника:

$$v_t = \nabla \cdot (v^\sigma \nabla v), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (75)$$

т. е. процесс горения при больших временах является несущественным по сравнению с диффузией.

Подобная ситуация уже встречалась в § 13 гл. II. Поэтому мы не будем проводить исчерпывающего исследования и займемся анализом самого интересного (и, надо сказать, самого трудного в доказательстве) случая финитной начальной функции $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Будет показано, что глобальное решение задачи Коши (1), (2) в этом случае эволюционирует при $t \rightarrow \infty$ по законам, определяемым пространственно-временной структурой автомодельного решения уравнения (75) (см. § 3 гл. I):

$$v_\lambda(t, x; T, a) = (T + t)^{-N/(N\sigma+2)} g_\lambda(\eta; a), \quad \eta = x/(T + t)^{1/(N\sigma+2)}, \quad (76)$$

где $T > 0$ — произвольная постоянная, $g_\lambda(\eta; a) \geq 0$ удовлетворяет в \mathbb{R}^N уравнению

$$\mathbf{B}_\infty(g_\lambda) \equiv \nabla_\eta \cdot (g_\lambda^\sigma \nabla_\eta g_\lambda) + \frac{1}{N\sigma+2} \nabla_\eta g_\lambda \cdot \eta + \frac{N g_\lambda}{N\sigma+2} = 0 \quad (77)$$

и имеет вид

$$g_\lambda(\eta; a) = A_0 (a^2 - |\eta|^2)_+^{1/\sigma}, \quad A_0 = \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma+2)} \right]^{1/\sigma} \quad (78)$$

Здесь $a > 0$ — постоянная.

Для доказательства указанного факта введем в соответствии с (76) автомодельное представление решения $u(t, x)$ задачи (1), (2):

$$g_T(t, \eta) = (T + t)^{N/(N\sigma+2)} u(t, \eta(T + t)^{1/(N\sigma+2)}) \quad (79)$$

и выпишем уравнение, которому оно удовлетворяет:

$$(T + t) \frac{\partial g_T}{\partial t} = \mathbf{B}_t(g_T) \equiv \nabla_\eta \cdot (g_T^\sigma \nabla_\eta g_T) + \frac{1}{N\sigma+2} \nabla_\eta g_T \cdot \eta + \frac{N g_T}{N\sigma+2} + (T + t)^{-\nu} g_T^\beta, \quad t > 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^N, \quad (80)$$

$$g_T(0, \eta) = T^{N/(N\sigma+2)} u_0(\eta T^{1/(N\sigma+2)}) \equiv g_0(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^N \quad (81)$$

В (80) через ν обозначена постоянная $\nu = N[\beta - (\sigma + 1 + 2/N)] / (N\sigma + 2)$. При $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ она положительна, что существенно.

Покажем сначала, что в случае финитной функции $u_0(x)$ поведение глобальных решений задачи (1), (2) при $t \rightarrow \infty$ «под-

чиняется» (76). Во-первых, очевидно, что всякая функция (78) является нижним решением уравнения (80), поскольку

$$(T+t) \frac{\partial g_A}{\partial t} \equiv 0 \leq \mathbf{B}_t(g_A) \equiv (T+t)^{-\nu} g_A^\beta.$$

Таким образом, если $u_0(0) > 0$, то существуют такие постоянные $T > 0$, $a_- > 0$, что

$$u_0(x) \geq T^{-N/(N\sigma+2)} g_A(xT^{-1/(N\sigma+2)}; a_-) \quad \text{в } \mathbf{R}^N. \quad (82)$$

Следовательно, $g_T(t, \eta) \geq g_A(\eta; a_-)$ в \mathbf{R}^N при всех допустимых $t > 0$.

Остается построить похожее верхнее решение уравнения (80). Естественно, функции g_A для этого не годятся. Однако их легко подправить так, чтобы получились верхнее решение.

Лемма 5. Пусть $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ и

$$1 - \frac{\sigma}{\nu} A_0^{\beta-1} (a^2)^{(\beta-1)/\sigma} T^{-\nu} > 0. \quad (83)$$

Тогда функция

$$g_+(t, \eta) = [1 - b(T+t)^{-\nu}]^{1/\sigma} g_A(\eta/[1 - b(T+t)^{-\nu}]^{1/2}; a), \quad (84)$$

где $b = \sigma A_0^{\beta-1} (a^2)^{(\beta-1)/\sigma} / \nu$, является верхним решением уравнения (80).

Доказательство. Будем искать верхнее решение в виде $g_+ = \psi(t) g_A(\eta/\varphi(t); a)$. Тогда имеем $(T+t) \partial g_+ / \partial t \geq \mathbf{B}_t(g_+)$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \setminus \{|\eta| = a\varphi(t)\}$, если

$$(T+t) \frac{\psi'}{\psi} \geq \frac{2}{\sigma} \left(1 - \frac{a^2}{d}\right) \frac{1}{(N\sigma+2)} \left[1 - \frac{\psi^\sigma}{\varphi^2} + (N\sigma+2)(T+t) \frac{\varphi'}{\varphi}\right] + \\ + \frac{N}{N\sigma+2} \left(1 - \frac{\psi^\sigma}{\varphi^2}\right) + (T+t)^{-\nu} \psi^{\beta-1} A_0^{\beta-1} d^{(\beta-1)/\sigma}, \quad (85)$$

где $d = (a^2 - \xi^2)_+ \in (0, a^2]$.

Пусть $\varphi' \geq 0$, $\psi^\sigma = \varphi^2$ (это выполнено в (84)). Тогда справедливость (85) вытекает из такого неравенства:

$$(T+t) \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \geq (T+t)^{-\nu} \psi^{\beta-1}(t) A_0^{\beta-1} (a^2)^{(\beta-1)/\sigma}, \quad t \geq 0.$$

Полагая здесь $\psi^\sigma(t) = 1 - b(T+t)^{-\nu}$ (в силу (83) $\psi > 0$ в \mathbf{R}_+), убеждаемся, что g_+ — верхнее решение, если $b \geq \sigma A_0^{\beta-1} (a^2)^{(\beta-1)/\sigma} / \nu$.

Итак, если $u_0(x)$ — финитная функция и существуют такие постоянные $T > 0$, $a_+ > 0$, что

$$g_0(\eta) \leq (1 - bT^{-\nu})^{1/\sigma} g_A(\eta/(1 - bT^{-\nu})^{1/2}; a_+), \quad \eta \in \mathbf{R}^N, \quad (86)$$

где $b = \sigma A_0^{\beta-1} (a_+^2)^{(\beta-1)/\sigma} / \nu$, то в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$ выполнена оценка

$$g_T(t, \eta) \leq g_+(t, \eta) \quad (87)$$

(и, кстати, задача (80), (81) будет иметь глобальное решение). Суммируя полученные результаты, приходим к следующему выводу.

Теорема 7. Пусть $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ и функция $u_0(x)$ удовлетворяет условиям (82), (86). Тогда, если существует $g_T(\infty, \eta)$, то

$$g_A(\eta; a_-) \leq g_T(\infty, \eta) \leq g_A(\eta; a_+), \quad \eta \in \mathbb{R}^N. \quad (88)$$

Этот результат показывает, что эволюция глобальных финитных решений задачи Коши (1), (2) при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$ описывается автомодельными решениями (76) уравнения (75). Оценки (88), в частности, означают, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(t, x) \sim t^{-N/(N\sigma+2)}, \quad |x_{\text{эф}}(t)| \sim t^{1/(N\sigma+2)}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Напомним, что эти же выводы ранее получены на основе качественной теории нестационарного осреднения (см. § 2).

Что касается асимптотической устойчивости автомодельных решений (76), то здесь мы ограничимся доказательством одного простого утверждения.

Теорема 8. Пусть $N = 1$, $\beta > \sigma + 1 + 2/N \equiv \sigma + 3$ и $u_0(x)$ — финитная функция. Тогда в условиях теоремы 7 найдется такое $a \in [a_-, a_+]$, что

$$g_T(t, \eta) \rightarrow g_A(\eta; a), \quad t \rightarrow \infty,$$

почти всюду в \mathbb{R} .

Доказательство. Во-первых, в силу (88) задача Коши (80), (81) эквивалентна краевой задаче в некоторой ограниченной области $\Omega \supset [-a_+, a_+]$, $g_T = 0$ на $\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega$. Во-вторых, выводятся оценки

$$(g_T^{\sigma+1/2})_t \in L^2((1, \infty) \times \Omega), \quad g_T^{\sigma+1} \in L^\infty((1, \infty); H_0^1(\Omega))$$

путем скалярного умножения в $L^2((1, \infty) \times \Omega)$ обеих частей уравнения (80) на множитель

$$(T + t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sigma+1} g_T^{\sigma+1} + \frac{1}{\sigma+2} \int_0^\eta g_T(t, \zeta) \zeta d\zeta \right).$$

Эти оценки показывают, что ω -предельное множество $\omega(g_0) = \{g^*(\eta) \mid \exists t_n \rightarrow \infty: g_T^{\sigma+1}(t_n, \cdot) \rightarrow [g^*(\cdot)]^{\sigma+1} \text{ в } L^2(\Omega)\}$ состоит из «стационарных» решений уравнения (80) при $t = \infty$, т. е. $\mathbf{V}_\infty(g^*) = 0$. В силу (88) g^* — финитные функции, и, следовательно, $\omega(g_0) \equiv \{g_A(\eta; a), a \in [a_-, a_+]\}$. И наконец, независимость предельной функции $g^*(\eta)$ от выбора последовательности $t_n \rightarrow \infty$ вытекает из «монотонности» решения задачи (80), (81):

$$\frac{d}{dt} \|g_T(t)\|_{L^1(\Omega)} = (T + t)^{-(\nu+1)} \|g_T(t)\|_{L^1(\Omega)}^\beta > 0, \quad t > 0$$

(— $\|g_T(t)\|_{L^1(\Omega)}$ — функция Ляпунова), а также строгой монотонности по $a > 0$ выражения $\|g_A(\cdot; a)\|_{L^1(\Omega)}$.

З а м е ч а н и е. Нетрудно показать, что производная $(g_T^{\sigma+1})_\eta$ равномерно ограничена в $(1, \infty) \times \mathbb{R}$, так что стабилизация $g_T^{\sigma+1}(t, \cdot) \rightarrow g_A^{\sigma+1}(\cdot; a)$ при $t \rightarrow \infty$ является равномерной в \mathbb{R} .

§ 4. Доказательство локализации неограниченных решений при $\beta \geq \sigma + 1$, отсутствие локализации в случае $1 < \beta < \sigma + 1$

Полученные ранее результаты дают довольно полное представление об основных свойствах неограниченных решений рассматриваемой задачи Коши. Главная цель этого параграфа состоит в доказательстве локализации неограниченных финитных решений S-режима ($\beta = \sigma + 1$) и LS-режима ($\beta > \sigma + 1$) горения с обострением, а также отсутствия локализации HS-режима ($1 < \beta < \sigma + 1$). Одновременно будет получен ряд важных оценок эволюции носителя неограниченных решений. Применяющаяся здесь техника доказательства будет использована в § 5, где на ее основе решается вопрос описания асимптотической пространственно-временной структуры неограниченных решений при временах, близких к моменту обострения.

Мы будем рассматривать задачу Коши в одномерном случае:

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}; \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}; \quad u_0^{\sigma+1} \in C^1(\mathbf{R}), \quad (2)$$

где начальное возмущение $u_0(x) \not\equiv 0$ — финитная функция со связным носителем:

$$\omega(0) = \text{supp } u_0 \equiv \{x \in \mathbf{R} | u_0(x) > 0\} = (h_-(0), h_+(0)), \quad (3)$$

$$-\infty < h_-(0) < h_+(0) < \infty.$$

Тогда носитель обобщенного решения $u(t, x)$ при каждом $t > 0$ из интервала времени существования решения также является ограниченным и связным:

$$\omega(t) = \text{supp } u(t, x) = (h_-(t), h_+(t)), \quad (4)$$

$$-\infty < h_-(t) < h_+(t) < \infty.$$

Функции $h_-(t)$ и $h_+(t)$, определяющие в каждый момент времени положение точек фронта обобщенного решения (левого и правого), являются соответственно невозрастающей и неубывающей, так что длина носителя решения $\text{mes } \omega(t) \equiv h_+(t) - h_-(t)$ со временем не убывает. Нетрудно показать, что $h_\pm \in C([0, T_0))$.

Пусть $t = T_0(u_0) < \infty$ — время обострения решения задачи (1), (2). В первую очередь нас будет интересовать поведение функций $h_\pm(t)$ при $t \rightarrow T_0^-$. Оказывается, при $\beta \geq \sigma + 1$ функции $h_\pm(t)$ ограничены на $(0, T_0)$ и $|h_\pm(T_0^-)| < \infty$, что, как легко видеть, эквивалентно локализации неограниченного решения. И обратно, будет показано, что в случае $\beta \in (1, \sigma + 1)$ функции $h_\pm(t)$ неограничены и $h_\pm(t) \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow T_0^-$ (локализация отсутствует).

1. Локализация при $\beta = \sigma + 1$ (S-режим). Ниже будет доказано следующее самое общее утверждение:

Теорема 1 (о локализации). Пусть $\beta = \sigma + 1$. Тогда любое неограниченное решение задачи Коши (1), (2) локализовано,

причем

$$h_+(T_0^-) \leq h_+'(0) + L_S, \quad h_-(T_0^-) \geq h_-(0) - L_S \quad (5)$$

и, в частности,

$$\text{mes } \omega(T_0^-) \leq \text{mes } \omega(0) + 2L_S, \quad (5')$$

где $L_S = 2\pi(\sigma + 1)^{1/2}/\sigma$ — фундаментальная длина S-режима.

В дальнейшем будут доказаны и другие теоремы, уточняющие для специального вида начальных возмущений глубину проникновения тепловой волны.

Слово «неограниченное» в условии теоремы является, вообще говоря, лишним, поскольку, как показано в § 3, при всех $\beta \in (1, \sigma + 3)$, $N = 1$ любому $u_0 \neq 0$ отвечает неограниченное решение задачи Коши (1), (2).

Оценки (5) означают, что в S-режиме фронт тепловой волны за время обострения может продвинуться на длину, не большую фундаментальной L_S . Подчеркнем, что оценки (5), (5') не зависят от пространственной структуры и амплитуды начального возмущения $u_0(x)$, тем самым длина L_S действительно является фундаментальной (не зависящей от u_0) характеристикой нелинейной среды.

В § 1 приведен простой пример локализованного автомодельного неограниченного решения при $\beta = \sigma + 1$:

$$u_\lambda(t, x) = (T_0 - t)^{-1/\sigma} \theta_S(x), \quad 0 < t < T_0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (6)$$

где

$$\theta_S(x) = \begin{cases} \left(\frac{2(\sigma + 1)}{\sigma(\sigma + 2)} \cos^2 \frac{\pi x}{L_S} \right)^{1/\sigma} & |x| < L_S/2, \\ 0, & |x| \geq L_S/2, \end{cases} \quad (7)$$

длина носителя которого при всех $t \in (0, T_0)$ равна L_S .

Доказательство теоремы 1 основано на специальном сравнении решения $u(t, x)$ задачи (1), (2) с автомодельным решением (6), (7) (они имеют один и тот же момент обострения). Это же относится к аналогичным утверждениям в случае $\beta > \sigma + 1$.

1.1. Вспомогательная лемма. Доказательство локализации не может быть проведено путем непосредственного использования теорем сравнения решений параболического уравнения по начальным функциям (см. гл. I). Более того, такое сравнение (мажорирование одного решения другим) в случае режимов с обострением вообще не имеет смысла. Об этом свидетельствует следующее простое утверждение, которое служит основой доказательства всех теорем этого параграфа (оно справедливо при любых $\sigma > 0$, $\beta > 1$):

Лемма 1. Пусть $u(t, x)$, $v(t, x)$ — неограниченные решения уравнения (1), $u(0, x) = u_0(x)$, $v(0, x) = v_0(x)$ в \mathbf{R} , где u_0 , v_0 — неотрицательные непрерывные финитные функции. Пусть $\sup v_0 < \sup u_0$ и $u_0(x) \geq v_0(x)$ при всех $x \in \text{supp } v_0$. Тогда u , v

имеют различные моменты обострения:

$$T_0(u_0) < T_0(v_0). \quad (8)$$

Доказательство. По условию найдется такое $\tau > 0$, что $v(\tau, x) < u(\tau, x)$ при всех $x \in \text{supp } v(\tau, x)$ и $\text{supp } v(\tau, x) \subset \subset \text{supp } u(\tau, x)$. Поэтому существует $\tau_1 > 0$ такое, что $v(\tau + \tau_1, x) \leq u(\tau, x)$ в \mathbb{R} , и, следовательно, $v(t + \tau_1, x) \leq u(t, x)$ в \mathbb{R} для любых допустимых $t \geq \tau$. Это означает, что $T_0(u_0) \leq T_0(v_0) - \tau_1$, откуда следует (8).

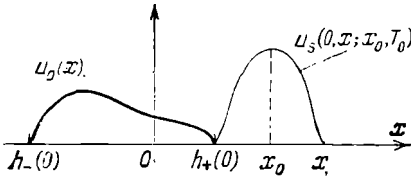


Рис. 56

1.2. Доказательство теоремы 1. Всюду в дальнейшем через $u_5(t, x; x_0, T_0)$ обозначим автомодельное решение (6), симметричное относительно точки $x = x_0$ ((6) симметрично относительно $x = 0$).

Докажем первое неравенство (5); справедливость второго устанавливается аналогично. Положим $x_0 = h_+(0) + L_S/2$ и рассмотрим другое решение: $v(t, x) = u_5(t, x; x_0, T_0)$, локализованное в области $|x - x_0| < L_S/2$ и имеющее тот же момент обострения $t = T_0$. Взаимное расположение $u_0(x)$ и $u_5(0, x; x_0, T_0)$ показано на рис. 56.

Докажем, что $h_+(t) \leq h_+(0) + L_S$, т. е. тепловая волна не может продвинуться далее точки правого фронта решения $v(t, x)$. Предположим противное. Пусть $t^* = \sup \{t > 0 | h_+(t) \leq h_+(0) + L_S\} < T_0$, т. е. $u(t, x_*) > 0$ при всех $t \in (t^*, T_0)$, где $x_* = h_+(0) + L_S$. Тогда есть два способа, с помощью которых точка фронта $x = h_+(t)$ может продвинуться дальше точки фронта $x \equiv x_*$ автомодельного решения u_5 . Первый из них изображен на рис. 57. Он, как будет показано ниже, противоречит принципу максимума: в процессе эволюции здесь не может возникнуть нового «пересечения» двух решений одного и того же параболического уравнения (см. § 5). Второй способ изображен на рис. 58 — он противоречит лемме 1. Приведем теперь краткие пояснения.

Рассмотрим произвольную левую полуокрестность $E_\delta = (x_* - \delta, x_*)$, $\delta \in (0, L_S)$, точки $x = x_*$. Функции u, v — решения уравнения (1), причем $u(t, x_*) = v(t, x_*) = 0$ для всех $t \in (0, t^*]$. Тогда из принципа максимума следует, что $u(t, x)$ может превзойти $v(t, x)$ в точке $x = x_*$ лишь после того, как станет больше $v(t, x)$ в ее левой полуокрестности E_δ .

Действительно, при любом $\delta \in (0, L_S)$ имеем $v(t, x_* - \delta) > 0$, $u_0(x) \equiv 0 < v(0, x)$ в E_δ , и поэтому

$$u(t, x_* - \delta) \leq v(t, x_* - \delta) \quad (9)$$

для всех достаточно малых t . Отсюда следует, что $u(t, x)$ не будет превосходить $v(t, x)$ в E_δ до тех пор, пока не нарушится (9). Таким образом, при любом $t_0 \in (t^*, T_0)$ имеем $\text{supp } v(t_0, x) \subset \subset \text{supp } u(t_0, x)$ (так как $u(t_0, x_*) > 0$), и, кроме того, $u(t_0, x) \geq$

$\triangleright v(t_0, x)$ при всех $x \in \text{supp } v(t_0, x) = \{|x - x_0| < L_S/2\}$. В силу леммы 1 это означает, что $u(t, x)$ и $v(t, x)$ имеют различные моменты обострения, что противоречит выбору функции v .

1.3. Теорема сравнения. Будем говорить, что решения $u(t, x) \geq 0$ и $v(t, x) \geq 0$ уравнения (1) *пересекаются* (по x) при

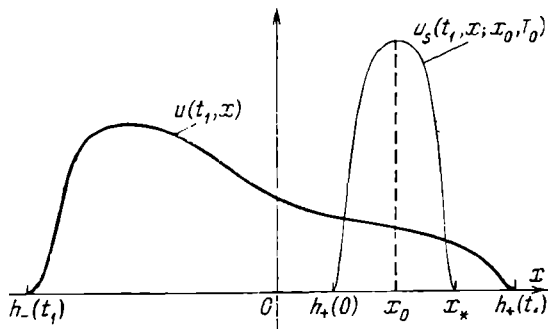


Рис. 57. Решения u, u_s при $t_1 \in (0, T_0)$. Такое взаимное расположение невозможно в силу принципа максимума

фиксированном $t = t_0 > 0$ на отрезке $I_0 = [x_0^-, x_0^+] \subset \mathbb{R}$, если $w(t_0, x) \equiv u(t_0, x) - v(t_0, x) = 0$ на I_0 и $w(t_0, x)$ не является знак-постоянной в любой ε -окрестности отрезка $I_0: \{x_0^- - \varepsilon < x < x_0^+ + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

Следующее весьма общее утверждение дает представление о теоремах сравнения решений, основанных на анализе числа их

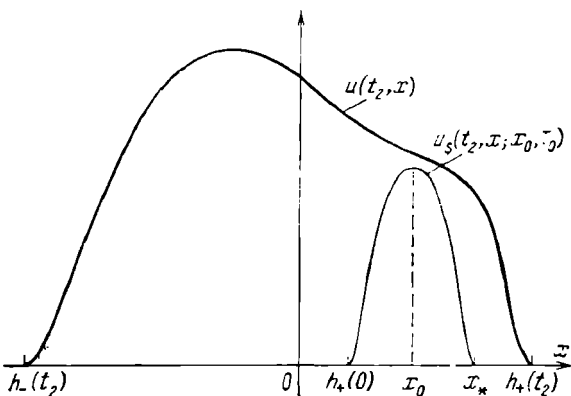


Рис. 58. Ситуация, невозможная в силу леммы 1

пространственных пересечений (полная формулировка теоремы сравнения приведена в § 5).

Предложение 1. Пусть $u(t, x), v(t, x)$ — неограниченные решения задачи Коши для уравнения (1) с одним и тем же моментом обострения $t = T_0 < \infty$, причем $u(0, x)$ — финитная функ-

ция, а $v(0, x) > 0$ в \mathbb{R} . Тогда $u(t, x)$ и $v(t, x)$ пересекаются по x при любых $t \in [0, T_0)$.

При доказательстве используются рассуждения из доказательства леммы 1.

Перейдем к более детальному исследованию зависимости характера движения фронта тепловой волны в S-режиме от пространственной структуры начальной возмущения $u_0(x)$.

1.4. Условие неизменности носителя неограниченного решения. Носитель (область локализации) автомодельного решения (6), (7) не меняется в течение всего времени его существования $t \in (0, T_0)$. Покажем, что кроме него существует много других (неавтомодельных) решений, которые

локализованы в области $\text{supp } u_0(x)$ их первоначального задания.

Теорема 2. Пусть $\beta = \sigma + 1$, $\text{mes } \text{supp } u_0 > L_s = 2\pi(\sigma + 1)^{1/2}/\sigma$ и $u(t, x)$ — неограниченное решение задачи (1), (2) с моментом обострения $t = T_0 < \infty$. Пусть u_0 удовлетворяет следующему условию: существует такое $\lambda_0 > 0$, что $u_s(0, x; x_0, \lambda_0) \leq u_0(x)$ в \mathbb{R} , где $x_0 =$

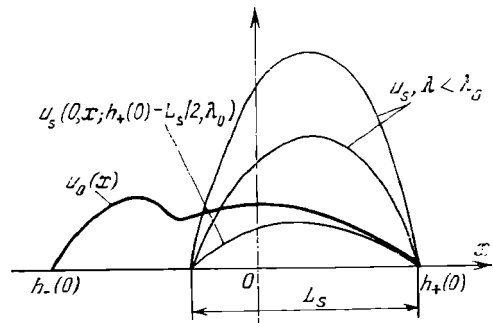


Рис. 59

$= h_+(0) - L_s/2$, а функции $u_0(x)$ и $u_s(0, x; x_0, \lambda)$ пересекаются только в одной точке при всех $0 < \lambda < \lambda_0$ (рис. 59). Тогда $h_+(t) \equiv h_+(0)$ для любых $t \in (0, T_0)$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $T_0 \leq \lambda_0$. Если $T_0 = \lambda_0$, то предположение о движении правого фронта с помощью леммы 1 приводит к противоречию. Поэтому достаточно рассмотреть случай $T_0 < \lambda_0$. Тогда при $t = 0$ существует такая точка $x^*(0) \in (h_+(0) - L_s, h_+(0))$, что $v(0, x) \equiv u_s(0, x; h_+(0) - L_s/2, T_0) > u_0(x)$ при всех $x \in (x^*(0), h_+(0))$ и $v(0, x) < u_0(x)$ для любых $x \in (h_+(0) - L_s, x^*(0))$ (т. е. $x = x^*(0)$ — точка пересечения $u_0(x)$ и $v(0, x)$).

Из принципа максимума (см. § 5) следует, что эта ситуация сохранится при всех $t \in (0, T_0)$, т. е. $u(t, x)$ и $v(t, x)$ имеют ровно одно пересечение, для определенности, в точке $x = x^*(t)$. Поэтому $v(t, x) > u(t, x)$ в левой полукрестности $(x^*(t), h_+(0))$ точки правого фронта. (Если это не так, то в силу леммы 1 u, v должны иметь по крайней мере две точки пересечения, что в сделанных предположениях невозможно.) Последнее неравенство означает, что $u(t, h_+(0)) = 0$ при всех $t \in (0, T_0)$, и, следовательно, $h_+(t) \equiv h_+(0)$.

Замечание. Любопытно отметить, что для неподвижности правой точки фронта в течение всего времени обострения необходимо нелокальное условие на характер поведения функции $u_0(x)$

в L_S -окрестности $(h_+(0) - L_S, h_+(0))$ точки фронта $x = h_+(0)$. При выполнении условия теоремы 2 поведение $u_0(x)$ в остальной части пространства никак не сказывается на том факте, что фронт решения неподвижен. Это еще раз подчеркивает универсальность такой характеристики нелинейной среды, как фундаментальная длина L_S , которая на этот раз выступает как своеобразный *радиус эффективного влияния* тепловых возмущений.

Накладывая на поведение $u_0(x)$ вблизи левой точки фронта $x = h_-(0)$ условие, аналогичное условию теоремы 2, получаем множество начальных возмущений $u_0(x)$, которые порождают неограниченные решения с неизменным носителем.

1.5. Условие локализации на фундаментальной длине L_S . Покажем, что при определенных условиях начальное возмущение с малым носителем $\text{mes supp } u_0 < L_S$ не может в течение времени обострения распространиться за пределы области $\{|x| < L_S/2\}$. При этом будем предполагать, что помимо (3) выполнены условия

$$u_0(-x) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}_+; \quad u_0(x) \text{ не возрастает при } x > 0. \quad (10)$$

Очевидно, что в этих условиях $u(t, -x) \equiv u(t, x)$, $u_x(t, x) \leq 0$ при $x \in (0, h_+(t))$ и $\sup_x u(t, x) \equiv u(t, 0)$.

Теорема 3. Пусть $\beta = \sigma + 1$, $\text{mes supp } u_0 < L_S$ и выполняется (10). Пусть, кроме того, существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $u_S(0, x; 0, \lambda_0) \geq u_0(x)$ в \mathbf{R} , а функции $u_0(x)$ и $u_S(0, x; 0, \lambda)$ пересекаются в двух точках при всех $\lambda > \lambda_0$ (рис. 60). Тогда $|h_{\pm}(t)| \leq L_S/2$ для любых $t \in (0, T_0(u_0))$ и, в частности,

$$\text{mes } \omega(T_0^-) \leq L_S. \quad (11)$$

Теорема доказывается аналогично предыдущим.

Таким образом, при выполнении (10) и условия теоремы 3 тепловая волна может двигаться в любом направлении, но суммарное расстояние, которое могут пройти тепловые возмущения за все время обострения, не превосходит:

$$L_S - \text{mes } \omega(0) \leq L_S. \quad (12)$$

Напомним, что в общем случае, как свидетельствует теорема 1, такое суммарное расстояние не превосходит $2L_S$ (см. (5')).

2. Локализация при $\beta > \sigma + 1$ (LS-режим). Основное утверждение о локализации в случае LS-режимов с обострением выглядит следующим образом:

Теорема 4 (о локализации в LS-режиме). Пусть $\beta > \sigma + 1$. Тогда неограниченное решение задачи (1), (2) со

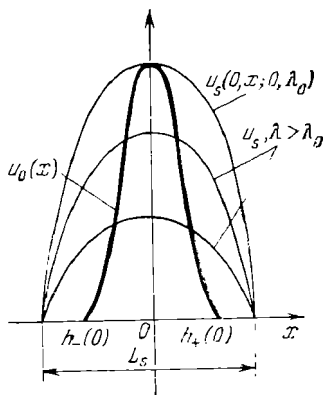


Рис. 60

временем обострения $T_0 = T_0(u_0) < \infty$ локализовано, причем

$$h_+(T_0^-) \leq h_+(0) + \xi^* T_0^m, \quad h_-(T_0^-) \geq h_-(0) - \xi^* T_0^m, \quad (13)$$

т. е.

$$\text{mes } \omega(T_0^-) \leq \text{mes } \omega(0) + 2\xi^* T_0^m < \infty, \quad (14)$$

где $m = [\beta - (\sigma + 1)] / [2(\beta - 1)] > 0$ и $\xi^* > 0$ — постоянная, зависящая только от σ, β .

Замечание. При $\beta = \sigma + 1$ имеем $m = 0$ и, как видно из дальнейшего, $\xi_* = L_S$, т. е. в случае $\beta = \sigma + 1$ данная теорема превращается в теорему 1.

Подчеркнем, что здесь в отличие от S-режима (теорема 1) «фундаментальная» длина LS-режима $L_{LS} = \text{mes } \omega(T_0^-)$ зависит через величину T_0 от начальной функции. Оценка сверху времени обострения $T_0 = T_0(u_0)$ в данной задаче получена в § 3.

2.1. Построение автомодельного нижнего решения. В § 1 показано, что при $\beta > \sigma + 1$ уравнение (1) не имеет локализованных автомодельных решений. Все построенные там автомодельные решения строго положительны и являются лишь эффективно локализованными ($u_A(t, x)$ неограниченно возрастают при $t \rightarrow T_0^-$ в одной точке $x = 0$, оставаясь равномерно по t ограниченными в $\mathbf{R} \setminus \{0\}$).

Однако, как легко проверить, лемма 1 будет справедливой, если в качестве $v(t, x)$ взять некоторое неограниченное нижнее решение уравнения (1). Оказывается, в LS-режиме можно построить автомодельное нижнее решение, которое является локализованным. Будем искать его в обычном виде:

$$u_A^-(t, x) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} \theta_-(\xi), \quad \xi = x/(T_0 - t)^m, \quad (15)$$

где $m = [\beta - (\sigma + 1)] / [2(\beta - 1)] > 0$ и функция $\theta_-(\xi) \geq 0$ удовлетворяет почти всюду в \mathbf{R} уравнению

$$(\theta_-^\sigma \theta_-')' - m \theta_-' \xi - \frac{1}{\beta-1} \theta_- + \theta_-^\beta = 0. \quad (16)$$

Лемма 2. При любых $\beta > \sigma + 1$ существует нетривиальное решение $\theta_-(\xi)$, удовлетворяющее (16) на некотором интервале $(-\xi^*, 0)$, $\xi^* > 0$, а также условиям

$$\theta_-(0) = 0, \quad (\theta_-^\sigma \theta_-')(0) = 0, \quad (17)$$

причем $\theta_-(\xi) > 0$ на $(-\xi^*, 0)$ и $\theta_-(\xi^*) = 0$.

Из (17) следует, что функция $\theta_-(\xi)$, совпадающая при $\xi \in (-\xi^*, 0]$ с функцией, указанной в лемме 2, и равная нулю при $\xi > 0$, является обобщенным решением уравнения (16) на $(-\xi^*, \infty)$. Тогда (15) — обобщенное неограниченное решение уравнения

) Здесь постоянная $\xi^ = \xi^*(\sigma, \beta)$ та же, что и в формулировке теоремы 4.

(1) в области $(0, T_0) \times (x_*(t), \infty)$ с подвижной левой границей $x_*(t) = -\xi^*(T_0 - t)^m$, на которой $u_{\Lambda}^-(t, x_*(t)) = 0$. Отсюда получаем, что (15) — локализованное решение: несмотря на неограниченный рост $u_{\Lambda}^-(t, x)$ в любой левой окрестности точки $x = 0$ при $t \rightarrow T_0^-$, фронт решения $x_f(t) \equiv 0$ неподвижен, и возмущения в область $x > 0$ не проникают (рис. 61).

Если теперь положить $\theta_-(\xi) \equiv 0$ при $\xi \leq -\xi^*$, то $u_{\Lambda}^-(t, x)$ будет неограниченным нижним решением уравнения (1) в $(0, T_0) \times \mathbb{R}$.

Доказательство леммы 2. Локальную разрешимость задачи (16), (17) при малых $|\xi|$ нетрудно установить, сводя ее к эквивалентному интегральному уравнению и применяя теорему Шаудера о неподвижной точке. Указанное в лемме свойство решения, продолженного в область больших отрицательных $\xi < 0$, прямо следует из результатов § 1 (см. (29) при $\beta > \sigma + 1, N = 1$).

2.2. Доказательство теоремы 4. Обозначим через $u_{\Lambda S}^-(t, x; x_0, T_0)$ функцию, которая в области $(0, T_0) \times \{-\xi^*(T_0 - t)^m < x - x_0 < 0\}$ совпадает с (15) ($\theta_-(\xi) \geq 0$

указана в лемме 2), и $u_{\Lambda S}^- \equiv 0$ вне этой области. Как уже отмечалось, $u_{\Lambda S}^-$ является в $(0, T_0) \times \mathbb{R}$ неограниченным нижним решением задачи Коши*), т. е. если $u_0(x) \geq u_{\Lambda S}^-(0, x; x_0, T_0)$ в \mathbb{R} , то $u(t, x) \geq u_{\Lambda S}^-(t, x; x_0, T_0)$ в \mathbb{R} при всех допустимых $t > 0$. Поэтому лемма 1 останется справедливой, если в качестве функции $v(t, x)$ взять $u_{\Lambda S}^-(t, x; x_0, T_0)$ (или другое нижнее решение подобного вида). Отметим, что в то же время в области $(0, T_0) \times (\mathbb{R} \setminus \{x = x_0 - \xi^*(T_0 - t)^m\})$ функция $u_{\Lambda S}^-$ удовлетворяет уравнению в обобщенном смысле. Все это позволяет провести сравнение решения $u(t, x)$ с $u_{\Lambda S}^-$ так же, как это делалось в предыдущем параграфе. В кратком изложении это выглядит следующим образом.

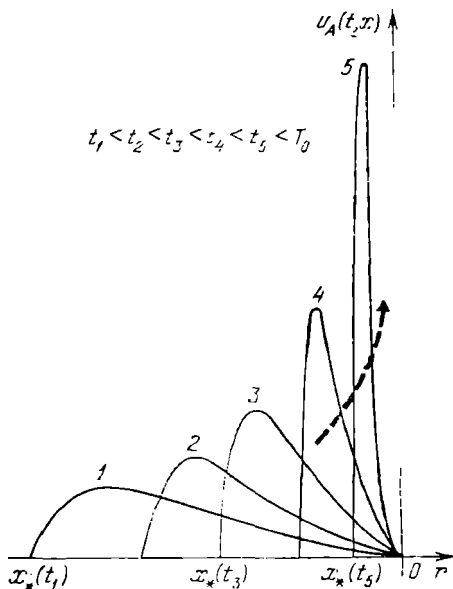


Рис. 61. Локализованное нижнее решение (15) при $\beta > \sigma + 1$ в различные моменты времени

*) Отметим, что этот факт удобно использовать для вывода условий неразрешимости в целом краевых задач для (1).

Докажем локализацию справа. Положим $x_0 = h_+(0) + \xi^* T_0^m$, $x_*(t) = x_0 - \xi^* (T_0 - t)^m$ (T_0 — время обострения $u(t, x)$). Тогда $u_0(x)$ и $u_{\text{LS}}^-(0, x; x_0, T_0)$ не пересекаются в $(x_*(0), \infty)$, и, очевидно, в процессе эволюции в $(x_*(t), \infty)$ может существовать лишь одно пересечение $u(t, x)$ и $u_{\text{LS}}^-(t, x; x_0, T_0)$ (если $u > u_{\text{LS}}^-$ при $x = x_*(t)$). Поэтому $u(t, x)$ станет больше $v = u_{\text{LS}}^-(t, x; x_0, T_0)$ в точке $x = x_0$ (в ней $v \equiv 0$) лишь после того, как оно будет по крайней мере не меньше $v(t, x)$ при всех $x < x_0$. Однако в силу леммы 1 это противоречит равенству моментов обострения u и нижнего решения v . Итак, $h_+(t) \leq x_0$, что совпадает с (13).

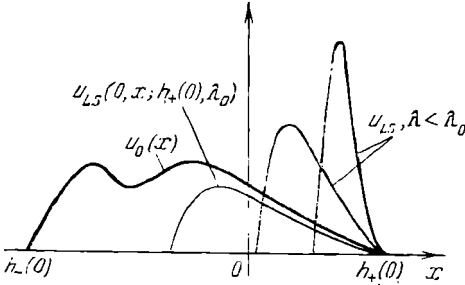


Рис. 62

В заключение приведем один результат, относящийся к случаю LS-режима и аналогичный теореме 2 по формулировке и методу доказательства.

2.3. Условие неподвижности точки фронта неограниченного решения.

Теорема 5. Пусть $\beta > \sigma + 1$ и функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию: существует такое $\lambda_0 > 0$, что $u_0(x) \geq u_{\text{LS}}^-(0, x; h_+(0), \lambda_0)$ в \mathbf{R} , а функции $u_0(x)$ и $u_{\text{LS}}^-(0, x; h_+(0), \lambda)$ пересекаются только в одной точке при всех $0 < \lambda < \lambda_0$. Тогда $h_+(t) \equiv h_+(0)$ при $t \in (0, T_0)$, где $T_0 < \infty$ — время обострения решения $u(t, x)$.

Графическая интерпретация условия теоремы приведена на рис. 62. В LS-режиме длина части носителя $\text{supp} u_0(x)$, которая в соответствии с условием теоремы оказывает влияние на факт неподвижности точки фронта $x = h_+(t) \equiv h_+(0)$, равна $\xi^* T_0^m$. В отличие от S-режима эта длина зависит от поведения начального возмущения $u_0(x)$ (через величину $T_0(u_0)$) фактически во всем пространстве.

3. Нелокализованные неограниченные решения HS-режима, $1 < \beta < \sigma + 1$. Отсутствие локализации решений задачи Коши в этом случае (все нетривиальные решения являются неограниченными; см. § 3) легко доказать методом стационарных состояний, который излагается в гл. VII. Там он используется при исследовании эффекта локализации в произвольных нелинейных средах.

Однако для уравнения (1) можно получить более точные результаты на основе сравнения решения $u(t, x)$ с автомодельным решением HS-режима u_A , построенным в § 1.

Теорема 6 (об отсутствии локализации в HS-режиме). Пусть $1 < \beta < \sigma + 1$ и выполнено условие (3). Тогда неограниченное решение задачи Коши (1), (2) не локализовано,

и если $t = T_0$ — момент обострения, то выполнены оценки

$$\begin{aligned} h_+(t) &\geq h_-(0) + \xi_0 [(T_0 - t)^m - T_0^m], \\ h_-(t) &\leq h_+(0) - \xi_0 [(T_0 - t)^m - T_0^m], \quad t \in (0, T_0), \end{aligned} \quad (18)$$

где $m = [\beta - (\sigma + 1)] / [2(\beta - 1)] < 0$, и поэтому $|h_{\pm}(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$. Постоянная $\xi_0 > 0$ в (18) зависит только от σ, β .

Неравенства (18) означают, что

$$\begin{aligned} \text{mes } \omega(t) &\equiv h_+(t) - h_-(t) \geq \\ &\geq \text{mes } \omega(0) + 2\xi_0 [(T_0 - t)^m - T_0^m] \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T_0^-. \end{aligned} \quad (19)$$

Доказательство. Оно аналогично доказательству предыдущих теорем; прямая связь имеется, например, со схемой доказательства теоремы 1. Выпишем неограниченное автомодельное решение уравнения (1) при $\beta < \sigma + 1$ (см. § 1):

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} \theta_A(\xi), \quad \xi = x / (T_0 - t)^m \in \mathbf{R}. \quad (20)$$

Функция $\theta_A(\xi)$ является финитной: $\text{mes } \text{supp } \theta_A(\xi) = 2\xi_0 < \infty$, где постоянная $\xi_0 > 0$ указана в правых частях (18).

Обозначим, как и ранее, через $u_{\text{HS}}(t, x; x_0, T_0)$ автомодельное решение (20), симметричное по x относительно точки $x = x_0$. Изложим кратко схему доказательства, например, второй оценки (18). Расположим $u_{\text{HS}}(0, x; x_0, T_0)$ по отношению к начальной функции $u_0(x)$ так, как это изображено на рис. 5б (при этом u_s на рисунке следует заменить на u_{HS}). Для этого следует положить $x_0 = h_+(0) + \xi_0 T_0^m$.

Взаимное расположение этих функций в принципе такое же, как при доказательстве теоремы 1. Однако общая структура доказательства в силу специфики оценок (18) (снизу, а не сверху, как во всех предыдущих теоремах) здесь несколько меняется.

При выбранном расположении носителей функций u_0 и $u_{\text{HS}}(0, x; x_0, T_0)$ ($\text{supp } u_0 \cap \text{supp } u_{\text{HS}}(0, x; x_0, T_0) = \emptyset$) число их пересечений в \mathbf{R} равно единице. В процессе эволюции оно не может возрасти. Поэтому число пересечений различных неограниченных решений $u(t, x)$ и $u_{\text{HS}}(t, x; x_0, T_0)$, имеющих один и тот же момент обострения $t = T_0(u_0) < \infty$, не превосходит единицы при всех $t \in (0, T_0)$. Это означает, что левый фронт автомодельного решения u_{HS} , который при каждом $t \in [0, T_0)$ находится в точке

$$x_{\bar{\phi}}(t) = x_0 - \xi_0 (T_0 - t)^m \equiv h_+(0) - \xi_0 [(T_0 - t)^m - T_0^m], \quad (21)$$

не сможет перегнуть точку левого фронта $x = h_-(t)$ решения $u(t, x)$. Если бы это случилось, то либо в некоторый момент $t = t_1$ времени возникли два пересечения $u(t, x)$ и $u_{\text{HS}}(t, x; x_0, T_0)$, что противоречит принципу максимума, либо при некотором $t_2 \in (0, T_0)$ сложилась ситуация, запрещенная леммой 1. Таким образом, $h_-(t) \leq x_{\bar{\phi}}(t)$. Учитывая (21), получаем вторую оценку (18), и этим завершается доказательство.

Итак, при любом финитном начальном возмущении фронты тепловой волны в NS-режиме движутся при $t \rightarrow T_0^-(u_0)$ по медленнее автомодельного закона:

$$|h_{\pm}(t)| \geq \xi_0 (T_0 - t)^{[\beta - (\sigma + 1)]/[2(\beta - 1)]}, \quad t \rightarrow T_0^-. \quad (22)$$

В следующем параграфе будет показано, что при $t \rightarrow T_0^-$ закон движения точек $x = h_{\pm}(t)$ асимптотически приближается к автомодельному, т. е. кроме (22) справедливо и «противоположное» неравенство.

Что касается эквивалентности при $1 < \beta < \sigma + 1$ условий $\{|h_{\pm}(t)| \rightarrow \infty, t \rightarrow T_0^-\}$ и $\{u(t, x) \rightarrow \infty \text{ в } \mathbf{R}, t \rightarrow T_0^-\}$, то подобные утверждения будут доказаны в § 1 гл. VII. Например, особенно просто доказывается

Теорема 7. Пусть $1 < \beta < \sigma + 1$ и выполнены условия (3), (10). Тогда $u(t, x) \rightarrow \infty$ в \mathbf{R} при $t \rightarrow T_0^-(u_0)$.

§ 5. Об асимптотической устойчивости неограниченных автомодельных решений

Выше уже обсуждались некоторые принципиальные трудности анализа пространственно-временной структуры неограниченных (сингулярных во времени) решений, которые всегда возникают, когда отсутствует устойчивость решений по отношению к малым возмущениям начальной функции. Поэтому в этом параграфе мы не будем стремиться к максимальной общности изложения, требующей значительных усилий, направленных на преодоление непринципиальных затруднений. На примере задачи Коши при $N = 1$ излагаются узловые моменты доказательства.

Предварительно для удобства дальнейшего изложения сформулируем в сжатой форме те методы сравнения неограниченных решений, которые использовались в § 4 при исследовании задачи Коши:

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}; \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}; \quad u_0 \in C(\mathbf{R}), \quad (2)$$

где $\text{supp } u_0 = (h_-(0), h_+(0))$, $u_0^{\sigma+1}$ — равномерно Липшиц непрерывна в \mathbf{R} ; $\text{supp } u(t, x) = (h_-(t), h_+(t))$.

1. О числе пересечений различных неограниченных решений (основная теорема сравнения). Пусть $u(t, x) \geq 0$, $v(t, x) \geq 0$ — заданные непрерывные функции. В § 4 введено понятие пересечения $u(t, x)$ и $v(t, x)$ по x на отрезке $I_0 = [x_0^-, x_0^+]$. Обозначим через $N(t)$ число различных пересечений $u(t, x)$ и $v(t, x)$ в \mathbf{R} при фиксированном $t > 0$, а через $N(0)$ число пересечений $u(0, x)$ и $v(0, x)$.

Предложение 1 (основная теорема сравнения). Пусть $u(t, x) \geq 0$, $v(t, x) \geq 0$ — различные неограниченные решения уравнения (1), имеющие один и тот же момент обострения $T_0 =$

$= T_0(u_0) = T_0(v_0)$ ($u_0 = u(0, x)$, $v_0 = v(0, x)$), причем $N(0) < \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Если $u(t_1, x) > v(t_1, x)$ при $x \in K$, где $0 \leq t_1 \leq t_2 < T_0$ и K — произвольный компакт из \mathbf{R} , причем $u > v$ на $[t_1, t_2] \times \partial K$, то u и v не имеют пересечений в K при любом $t \in [t_1, t_2]$ (другими словами, в данной ситуации пересечения внутри K образуются только за счет изменения знака разности $w = u - v$ на $[t_1, t_2] \times \partial K$).

2) Пусть $v_0 > 0$ в \mathbf{R} , u_0 — финитная функция. Тогда $N(t) \geq 2$ при всех $t \in [0, T_0)$ и $N(t)$ не возрастает по t (см. предложение 1 в § 4).

Пусть, кроме того, u_0, v_0 — финитные функции с односвязными носителями. Тогда:

$$3) \{t \in (0, T_0) \mid u(t, x) > v(t, x) \ \forall x \in \overline{\text{supp } v(t, x)}\} = \emptyset \quad (3)$$

(см. лемму 1 в § 4). Это же верно, если v — нижнее решение, удовлетворяющее уравнению в $(0, T_0) \times \text{supp } v(t, x)$ в обычном смысле (см. п. 2.2 в § 4);

4) если

$$\text{supp } u_0 \cap \text{supp } v_0 = \emptyset, \quad (4)$$

то $N(t) \leq 1$ при всех $t \in [0, T_0)$ (теорема 1 в § 4);

5) если

$$\text{supp } u_0 \cap \text{supp } v_0 \neq \emptyset, \quad (5)$$

то $N(t)$ не возрастает по $t \in (0, T_0)$.

Число пересечений $N(t)$ в точности равно числу изменений знака разности $w = u - v$ при $x \in \mathbf{R}$. В предположении аналитичности по x функций $u(t, x)$ и $v(t, x)$ (что естественно, например, для решений полулинейных параболических уравнений с аналитическими коэффициентами) всякое пересечение является изолированной по x точкой. Для псевдивержающихся параболических уравнений утверждение 1) предложения является естественным следствием сильного принципа максимума. Его можно переформулировать так [264]:

1') при каждом $t \in (t_1, t_2]$ число пересечений на компакте K различных решений u, v равномерно параболического уравнения не превосходит числа изменений знака разности $w = u - v$ на параболической границе области $(t_1, t) \times K$.

Распространение подобных утверждений на вырождающиеся уравнения основано на возможности аппроксимации (с сохранением числа пересечений) обобщенных решений сходящимися последовательностями строго положительных классических решений, на каждом из которых вырождающееся уравнение является равномерно параболическим.

2. Оценка амплитуды неограниченного решения снизу. Это самое простое следствие из теоремы сравнения.

Теорема 1. Пусть $\sigma \geq 0$, $\beta > 1$, $u(t, x)$ — неограниченное решение задачи Коши (1), (2). Тогда

$$\sup_x u(t, x) > \theta_H (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}, \quad t \in [0, T_0); \quad \theta_H = (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)} \quad (6)$$

где $T_0 = T_0(u_0)$ — время обострения.

Доказательство. Оценка (6) вытекает из утверждения 2) предложения 1, если в качестве $v(t, x)$ взять пространственно однородное решение уравнения (1) с тем же моментом обострения: $v = \theta_H (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}$. Неравенство $N(t) > 0$, $t \in [0, T_0)$, означает, что u и v всегда пересекаются, откуда сразу следует (6).

Отметим, что данную оценку нетрудно вывести непосредственно из уравнения (1).

3. Автомодельная обработка. Ограничения на вид начального возмущения. Автомодельные решения уравнения (1) имеют вид

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} \theta_A(\xi), \quad \xi = x / (T_0 - t)^m \in \mathbf{R}, \quad (7)$$

где функция $\theta_A(\xi) \geq 0$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\theta_A^\sigma \theta_A')' - m \theta_A' \xi - \frac{1}{\beta-1} \theta_A + \theta_A^\beta = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}. \quad (8)$$

В § 1 установлено, что при всех $\sigma > 0$, $\beta > 1$ оно имеет четное решение $\theta_A(\xi)$, которое является невозрастающим при $\xi \geq 0$. Мы будем исследовать асимптотическую устойчивость именно таких решений (при $\beta \geq \sigma + 1$ имеются и другие немонотонные решения $\theta_A(\xi)$).

В связи с этим введем следующие дополнительные ограничения на финитное начальное возмущение:

$$u_0(-x) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}; \quad \text{mes sup} u_0 = 2l_0 < \infty, \quad (9)$$

$$u_0(x) \text{ не возрастает при } x > 0. \quad (10)$$

Тогда $u(t, x)$ — неограниченное решение задачи (1), (2) — является четным по x , невозрастающим по x при $x \geq 0$ и $\sup_x u(t, x) = u(t, 0)$ для любых $t \in (0, T_0(u_0))$.

Введем в соответствии с (7) автомодельное представление $\theta(t, \xi)$ решения задачи (1), (2):

$$\theta(t, \xi) = (T_0 - t)^{1/(\beta-1)} u(t, \xi (T_0 - t)^m), \quad t \in (0, T_0), \quad \xi \in \mathbf{R}, \quad (11)$$

где $m = [\beta - (\sigma + 1)] / [2(\beta - 1)]$. Автомодельная обработка решения (7) дает в точности функцию $\theta_A(\xi)$.

Нас будет интересовать поведение $\theta(t, \xi)$ при $t \rightarrow T_0^-$. Асимптотическая устойчивость автомодельного решения (7) означает, что

$$\theta(t, \xi) \rightarrow \theta_A(\xi), \quad t \rightarrow T_0^-(u_0) \quad (12)$$

при достаточно широком множестве начальных функций

Отметим, что в сделанных предположениях (9), (10) предельная функция заведомо является четной и невозрастающей при $\xi > 0$. Тем самым здесь анализируется асимптотическая устойчивость элементарного по своей сложности (пространственной «архитектуре») автомодельного решения. Многие из сформулированных результатов переносятся на многомерный случай.

4. Асимптотическая устойчивость автомодельного решения при $\beta = \sigma + 1$ (S-режим). При выполнении (9), (10) единственным автомодельным решением, «претендующим» на то, чтобы быть асимптотически устойчивым, является следующее (§ 1):

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-1/\sigma} \theta_S(x), \quad 0 < t < T_0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (13)$$

где функция

$$\theta_S(x) = \begin{cases} \left(\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)} \cos^2 \frac{\pi x}{L_S} \right)^{1/\sigma} & |x| < L_S/2, \\ 0, & |x| \geq L_S/2 = \pi(\sigma+1)^{1/2}/\sigma, \end{cases} \quad (14)$$

удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\theta_S^\sigma \theta_S')' - \frac{1}{\sigma} \theta_S + \theta_S^{\sigma+1} = 0, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (15)$$

Автомодельная обработка в случае S-режима имеет особенно простой вид:

$$\theta(t, x) = (T_0 - t)^{1/\sigma} u(t, x); \quad T_0 = T_0(u_0) < \infty. \quad (16)$$

Теорема 2. Пусть $\beta = \sigma + 1$, выполняются условия (9), (10) и $T_0 < \infty$ — время обострения неограниченного решения задачи (1), (2). Тогда

$$\theta(t, x) \rightarrow \theta_S(x), \quad t \rightarrow T_0^-, \quad (17)$$

равномерно в \mathbf{R} , где $\theta_S(x)$ — функция (14).

Главная проблема, которая возникает при доказательстве (17), состоит в выводе оценок в $L^\infty(\mathbf{R})$ автомодельного представления (16), равномерных по $t \in (0, T_0)$. Оценка сверху гарантирует глобальную ограниченность $\theta(t, x)$, а снизу необходима для того, чтобы предельная функция $\theta(T_0^-, x)$ в (17) была нетривиальной. Это два самых существенных момента доказательства. Дело в том, что функция $\theta = \theta_S(x)$ является неустойчивым стационарным решением параболического уравнения, которому удовлетворяет автомодельное представление $\theta(t, x)$ (см. подобный пример в § 11 гл. II). Тем самым в процессе вывода (17) в пространстве начальных функций $\{\theta(0, x)\}$ выделяется множество притяжения, отвечающее неустойчивому стационарному решению. Подчеркнем, что подобная проблема исследования условий асимптотической устойчивости стационарных решений возникает именно при анализе сингулярных решений эволюционных задач, имеющих временную особенность.

4.1. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. В условиях теоремы 2 для всех $t \in [0, T_0)$ справедливы оценки

$$\text{supp } u(t, x) \subset [-l_0 - L_S, l_0 + L_S]; \quad (18)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} u(t, x) > \sigma^{-1/\sigma} (T_0 - t)^{-1/\sigma}; \quad (19)$$

существует такое $\theta_* > \sigma^{-1/\sigma}$, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} u(t, x) < \theta_* (T_0 - t)^{-1/\sigma}. \quad (20)$$

Более сильная, чем (19), «распределенная» в \mathbb{R} оценка снизу может быть выведена в рамках метода стационарных состояний (см. § 1 гл. VII).

Доказательство. Оценка (18) получена при доказательстве теоремы 1 в § 4. Неравенство (19) есть не что иное, как (6) при $\beta = \sigma + 1$.

Неравенство (20) вытекает из предложения 1 (утверждения 1), 3)). Выберем величину $\theta_* > \theta_H = \sigma^{-1/\sigma}$ столь большой, чтобы, во-первых, $\theta_* T_0^{-1/\sigma} > u_0(0)$, и, во-вторых, задача Коши для уравнения (15) при $x > 0$ с условиями

$$\theta(0) = \theta_*, \quad \theta'(0) = 0$$

имела решение $\theta = \theta(x)$, обращающееся в нуль в некоторой точке $x = x_*(\theta_*) > 0$. Это всегда возможно, что сразу следует из уравнения (15), которое интегрируется в квадратурах (см. лемму 2 в § 1). Положим $\theta(-x) = \theta(x)$ в $(-x_*, 0)$. Тогда $v(t, x) = (T_0 - t)^{-1/\sigma} \theta(x)$ — неограниченное решение в $(0, T_0) \times (-x_*, x_*)$.

Легко проверяется, что $x_*(\theta_*) \rightarrow \pi/[2(\sigma+1)^{1/2}]$ и $(\theta^{\sigma+1})_x(x_*) \rightarrow -\infty$ при $\theta_* \rightarrow \infty$. Поскольку $u_0^{\sigma+1}$ равномерно Липшиц непрерывна, можно выбрать $\theta_* > 0$ столь большой, что при выполнении (9), (10) начальная функция u_0 либо вообще не пересекается с $v(0, x)$ в $(-x_*, x_*)$ (т. е. $N(0) = 0$), либо пересекается ровно в двух точках, которые расположены симметрично относительно $x = 0$ ($N(0) = 2$). Тогда в силу теоремы сравнения $N(t) \leq 2$ при всех $t \in (0, T_0)$.

Покажем, что $u(t, 0) \equiv \sup_x u \leq \sup_x v \equiv v(t, 0)$ (это сразу дает оценку (20)). Если $u(t_1, 0) > v(t_1, 0)$ при некотором $t_1 \in (0, T_0)$, то $u(t_1, x) > v(t_1, x)$ в $(-x_*, x_*) \equiv \text{supp } v$. Действительно, если это не так, то $u(t_1, x) = 0$ при $x = \pm x_*$ (так как $N(t_1) \leq 2$), и это равенство имеет место при $t \in [0, t_1]$. Следовательно, $N(0) = 0$, и в силу утверждения 1) $N(t_1) = 0$, что невозможно.

Итак, $u(t_1, x) > v(t_1, x)$ в $(-x_*, x_*)$. Если $\text{supp } v(t_1, x) \subset \text{supp } u(t_1, x)$, то получаем противоречие с утверждением 3). Если же $\text{supp } u(t_1, x) = (-x_*, x_*)$, то, немного увеличивая значение θ_* и уменьшая тем самым $2x_* = \text{mes supp } \theta$, приходим к предыдущей ситуации.

4.2. Доказательство теоремы 2. а) Уравнение для функции $\theta(t, x)$. Без труда проверяется, что автомодельное представление (16) удовлетворяет задаче Коши

$$(T_0 - t)\theta_t = (\theta^\sigma \theta_x)_x - \frac{1}{\sigma} \theta + \theta^{\sigma+1}, \quad 0 < t < T_0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (21)$$

$$\theta(0, x) = \theta_0(x) \equiv T_0^{1/\sigma} u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (22)$$

Полагая в (21) $\tau = -\ln(1 - t/T_0): [0, T_0) \rightarrow [0, \infty)$, получаем эквивалентное уравнение:

$$\theta_\tau = (\theta^\sigma \theta_x)_x - \frac{1}{\sigma} \theta + \theta^{\sigma+1}, \quad \tau > 0, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (23)$$

Начальное условие (22) при этом не изменится.

Сопоставляя (23) с «автомодельным» обыкновенным дифференциальным уравнением (15), убеждаемся, что в новых обозначениях исследование асимптотической устойчивости неограниченного автомодельного решения S-режима эквивалентно анализу асимптотической устойчивости нетривиального стационарного решения (14) уравнения (23). Важно отметить, что при произвольных начальных возмущениях $\theta_0(x) \geq 0$, когда величина T_0 в (22) выбрана «неправильно» и не равна времени обострения решения $u(t, x)$, задача (23), (22) может иметь как неограниченные $(\sup_x \theta(\tau, x) \rightarrow \infty \text{ при } \tau \rightarrow \tau_0^- < \infty)$, так и глобальные решения, которые стабилизируются при $\tau \rightarrow \infty$ к тривиальному стационарному решению $\theta \equiv 0$. Другими словами, стационарное решение (14) неустойчиво по отношению к сколь угодно малым возмущениям. Доказательство этого факта дано в § 11 гл. II.

б) *Оценки функции* $\theta(\tau, x)$. В условиях теоремы (при «правильном» выборе величины $T_0 = T_0(u_0)$ в (22)) задача Коши (23), (22) всегда имеет глобальное решение, которое стабилизуется к функции (14). Основой доказательства служат оценки (18)–(20), которые в новых обозначениях принимают такой вид.

Следствие леммы 1. В условиях теоремы 2

$$\sup \theta(\tau, x) \subset [-l_0 - L_S, l_0 + L_S], \quad L_S = 2\pi(\sigma + 1)^{1/2}/\sigma; \quad (24)$$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \theta(\tau, x) > \sigma^{-1/\sigma}; \quad (25)$$

$$\theta(\tau, x) < \theta_* \quad (26)$$

при всех $\tau \geq 0, x \in \mathbf{R}$.

Отсюда непосредственно вытекает

Лемма 2. Пусть выполняются условия (9), (10) и $T_0 = T_0(u_0)$. Пусть Ω — область в \mathbf{R} такая, что $(-l_0 - L_S, l_0 + L_S) \subset \subset \Omega$. Тогда

$$\theta^{1+\sigma/2} \in L^\infty(\mathbf{R}_+; L^2(\Omega)), \quad (27)$$

$$(\theta^{1+\sigma/2})_\tau \in L^2(\mathbf{R}_+; L^2(\Omega)), \quad (28)$$

$$\theta^{\sigma+1} \in L^\infty(\mathbf{R}_+; H_0^1(\Omega)). \quad (29)$$

Доказательство. В силу (25) $\theta = 0$ на $\partial\Omega$ при любых $\tau \geq 0$. Умножая уравнение (23) скалярно в $L^2(\Omega)$ на $(\theta^{\sigma+1})_\tau$, после интегрирования получившегося уравнения по τ приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{4(\sigma+1)}{(\sigma+2)^2} \int_0^\tau \|(\theta^{1+\sigma/2})_\tau(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2(\sigma+1)} \|(\theta^{\sigma+1})_x(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ & \quad + \frac{\sigma+1}{\sigma(\sigma+2)} \|\theta(\tau)\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{\sigma+2} = \frac{1}{2} \|\theta(\tau)\|_{L^{2(\sigma+1)}(\Omega)}^{2(\sigma+1)} + \\ & \quad + \frac{1}{2(\sigma+1)} \|(\theta_0^{\sigma+1})_x\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\theta_0\|_{L^{2(\sigma+1)}(\Omega)}^{2(\sigma+1)} + \frac{\sigma+1}{\sigma(\sigma+2)} \|\theta_0\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{\sigma+2}, \\ & \qquad \qquad \qquad \tau > 0. \quad (30) \end{aligned}$$

В силу (26) правая часть (30) ограничена сверху, откуда вытекают оценки (27)–(29) (подробности см. в § 2 гл. VII).

в) *Предельный переход* $\tau \rightarrow \infty$. Итак, задача Коши (23), (22) эквивалентна краевой задаче с условием

$$\theta(\tau, x) = 0, \quad \tau \geq 0, \quad x \in \partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega, \quad (22')$$

причем оценка (26) обеспечивает ее глобальную разрешимость.

Стабилизация $\theta(\tau, x)$ в слабом смысле*) к стационарному решению при $\tau = \tau_i \rightarrow \infty$ следует из оценок (27)–(29), которые обеспечивают ограниченность последовательности $\theta_{\tau_i}^{\sigma+1}(\tau, x) = \theta^{\sigma+1}(\tau + \tau_i, x)$, $n = 1, 2, \dots$, в $H^1((0, 1) \times \Omega)$ (см. § 2 гл. VII). В силу компактности вложения $H^1 \subset L^2$ и оценки (28) это позволяет выбрать из любой последовательности $n_i \rightarrow \infty$ такую подпоследовательность (которую мы также обозначим через n_i), что $\theta_{\tau_i}^{\sigma+1}(\tau, x) \rightarrow \bar{\theta}^{\sigma+1}(x)$ при $n_i \rightarrow \infty$ в $L^2((0, 1) \times \Omega)$.

Предельный переход в уравнении (23) осуществляется с использованием оценки (29), а также того факта, что (23), (22') допускает функцию Ляпунова

$$V(\theta)(\tau) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2(\sigma+1)} (\theta^{\sigma+1})_x^2 + \frac{\sigma+1}{\sigma(\sigma+2)} \theta^{\sigma+2} - \frac{1}{2} \theta^{2\sigma+2} \right\} dx,$$

которая не возрастает по τ на любых решениях задачи. С помощью формальных выкладок получаем

$$\frac{d}{d\tau} V(\theta)(\tau) \leq - \frac{4(\sigma+1)}{(\sigma+2)^2} \int_{\Omega} (\theta^{(\sigma+2)/2})_\tau^2 dx \leq 0.$$

Стабилизация в $C(\Omega)$ следует из более сильных оценок; методом Бернштейна нетрудно показать, что $|(\theta^{\sigma+1}(\tau, x))_x| \leq \text{const} < \infty$ всюду в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$. В силу (26) это означает, что эволюционная траектория $\{\theta^{\sigma+1}(\tau, x) | \tau > 0\}$ компактна в $C(\Omega)$.

*) См. примеры анализа вырождающихся уравнений в [177, 247, 268].

Итак, $\theta(\tau, x) \rightarrow \bar{\theta}(x)$ при $\tau = \tau_i \rightarrow \infty$, где $\bar{\theta}$ — некоторое стационарное решение уравнения (23), причем $\bar{\theta} \in C_0(\bar{\Omega})$. Тогда, во-первых, (25) означает, что $\bar{\theta} \neq 0$, и, во-вторых, в силу (9), (10) $\bar{\theta}(x)$ — четная и невозрастающая при $x > 0$ функция. Учитывая теперь, что θ — финитная функция (в силу (24) $\text{supp } \bar{\theta} \subset \subset [-l_0 - L_s, l_0 + L_s]$), из единственности стационарного решения $\theta_s \neq 0$ (см. п. 2 § 1) получаем $\bar{\theta}(x) = \theta_s(x)$. Стабилизация $\theta(\tau, x)$ к $\theta_s(x)$ при $\tau \rightarrow \infty$ (т. е. по любой последовательности $\tau_i \rightarrow \infty$) также вытекает из единственности стационарного решения $\bar{\theta} = \theta_s(x)$ с пужными свойствами. Этим завершается доказательство.

Приведем следствие из (17).

Следствие. В условиях теоремы 2 $u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$ в любой точке области $x \in (-L_s/2, L_s/2)$.

Таким образом, внутри «фундаментальной» области локализации $\{|x| < L_s/2\}$ нетривиальное решение задачи (1), (2), где $\beta = \sigma + 1$ и u_0 удовлетворяет (9), (10), неограниченно возрастает при $t \rightarrow T_0^-$. При этом условие (17) не запрещает неограниченный рост решения вне области локализации, который должен протекать со скоростью $o((T_0 - t)^{-1/\sigma})$, т. е. медленнее, чем по автомодельному закону.

В численных расчетах наблюдался более сильный эффект: практически при любых непоптонных начальных возмущениях $u_0(x)$ в процессе эволюции в окрестности точки экстремума $u_0(x)$ формировалась тепловая структура, которая при $t \rightarrow T_0^-$ эволюционировала как автомодельное решение (13), (14), причем вне области локализации решение было ограничено сверху равномерно по $t \in (0, T_0)$ (см., например, рис. 37). Любопытно, что один из подобных оптимальных результатов можно получить, объединяя теорему 2 и теорему 3 в § 4.

Теорема 3. Пусть $\beta = \sigma + 1$, $\text{mes } \text{supp } u_0 < L_s$ и выполняются условия (9), (10) и условие теоремы 3 в § 4. Тогда $u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$ ($u_0 < \infty$ во всех точках области локализации $\omega(T_0^-) = \{|x| < L_s/2\}$ и $u(t, x) \equiv 0$ всюду в $[0, T_0) \times \{|x| \geq L_s/2\}$). При этом горение во всех точках $x \in \mathbb{R}$ асимптотически приближается к автомодельному:

$$(T_0 - t)^{1/\sigma} u(t, x) \rightarrow \theta_s(x), \quad t \rightarrow T_0^-. \quad (31)$$

Доказательство. Из теоремы 3 в § 4 следует, что $u \equiv 0$ в $[0, T_0) \times \{|x| \geq L_s/2\}$, а из теоремы 2 (см. (17)) вытекает (31), и, следовательно, $u(t, x) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow T_0^-$ в $\{|x| < L_s/2\}$.

5. Асимптотическая устойчивость автомодельных решений HS-режима, $1 < \beta < \sigma + 1$. Здесь исследование проводится так же, как в случае S-режима.

Теорема 4. Пусть $1 < \beta < \sigma + 1$, выполняются условия (9), (10) и $T_0 = T_0(u_0) < \infty$ — время обострения решения задачи (1),

(2). Тогда равномерно в \mathbf{R}

$$\theta(t, \xi) \rightarrow \theta_A(\xi), \quad t \rightarrow T_0^-,$$

где $\theta_A(\xi) \neq 0$ — единственное финитное решение уравнения (8).

Существование финитной функции θ_A установлено в теореме 2 в п. 3 § 1; единственность будет доказана ниже. Основа доказательства (как и в случае S-режима) — оценки носителя и амплитуды неограниченного решения.

Лемма 3. В условиях теоремы 4 для всех $t \in [0, T_0]$

$$\text{supp } u(t, x) \subset [-l_0 - \xi_0 T_0^m - \xi_0 (T_0 - t)^m, l_0 + \xi_0 T_0^m + \xi_0 (T_0 - t)^m], \quad (32)$$

где $\xi_0 = \text{mes}\{\xi > 0 | \theta_A(\xi) > 0\} < \infty$, $m = [\beta - (\sigma + 1)] / [2(\beta - 1)] < 0$;

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} u(t, x) > (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)} (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}; \quad (33)$$

существует такая постоянная $\theta_* > \theta_H$, что

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} u(t, x) < \theta_* (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}. \quad (34)$$

Доказательство. Оценка (33) установлена в теореме 1, неравенство (34) выводится тем же методом, который использовался в лемме 1 при анализе S-режима. Существование подходящего для этого нижнего неограниченного решения $v(t, x)$ установлено в § 1. Величину θ_* при этом всегда можно выбрать такой, что $u_0(x)$ и $v(0, x)$ не пересекаются. Оценка (32) длины носителя вытекает из утверждений 1), 3) предложения 1 (используется та же схема рассуждений, что и при доказательстве теоремы 1 в § 4).

Замечание. В процессе доказательства леммы 3 установлен более сильный результат: при $1 < \beta < \sigma + 1$ и любой начальной финитной функции $u_0(x)$ справедливы оценки

$$\text{mes supp }_{\pm} u(t, x) = \xi_0 (T_0 - t)^m + O(1), \quad t \rightarrow T_0^-, \quad (32')$$

где $\text{supp }_{+} u(t, x) = \{x > 0 | u(t, x) > 0\}$, $\text{supp }_{-} u(t, x) = \{x < 0 | u(t, x) > 0\}$.

Покажем, что (32') обеспечивают справедливость следующего важного утверждения (которое не удалось доказать в § 1, основываясь на анализе обыкновенного дифференциального уравнения):

Следствие. Пусть $1 < \beta < \sigma + 1$. Тогда финитное решение уравнения (8) является четным и единственным.

Доказательство. Если $\theta_A(\xi) \neq 0$ — некоторое финитное решение уравнения (8), то соответствующее автомодельное решение u_A (см. (7)) удовлетворяет условию

$$\text{mes supp }_{\pm} u_A(t, x) = (T_0 - t)^m \text{mes supp }_{\pm} \theta_A(\xi);$$

поэтому в силу (32') $\text{supp }_{+} \theta_A = \text{supp }_{-} \theta_A = \xi_0$. Уравнение (8) ин-

вариантно относительно преобразования $\xi \rightarrow -\xi$ и, как нетрудно проверить путем локального анализа, допускает единственное нетривиальное продолжение в область $\{\xi < \xi_0\}$ из точки $\xi = \xi_0$, где $\theta_A^{\sigma+1}(\xi_0) = (\theta_A^{\sigma+1})'(\xi_0) = 0$. Поэтому $\theta_A(\xi)$ — четное решение. Если же существует два различных финитных решения θ_A^1 и θ_A^2 , то (32') обеспечивает равенство их носителей, и, следовательно, $\theta_A^1 \equiv \theta_A^2$, что завершает доказательство.

Из леммы 3 вытекают следующие оценки автомодельного представления (11):

$$\begin{aligned} & \supp \theta(\tau, \xi) \subset \\ & \subset [-\xi_0 - (l_0 + \xi_0 T_0^m) T_0^{-m} \exp\{m\tau\}, \xi_0 + (l_0 + \xi_0 T_0^m) T_0^{-m} \exp\{m\tau\}], \end{aligned} \quad (35)$$

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}} \theta(\tau, \xi) > \theta_H = (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}, \quad (36)$$

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}} \theta(\tau, \xi) < \theta_*; \quad \tau = -\ln(1 - t/T_0) \in [0, \infty). \quad (37)$$

Отметим, что из (35) и оценок из теоремы 6 в § 4 вытекает, что

$$\text{mes}[\supp \theta(\tau, \xi) \setminus (-\xi_0, \xi_0)] \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (35')$$

Рассмотрим теперь эквивалентную краевую задачу:

$$\theta_\tau = (\theta^\sigma \theta_\xi)_\xi - m\theta_\xi \xi - [1/(\beta - 1)]\theta + \theta^\beta, \quad \tau > 0, \quad \xi \in \Omega, \quad (38)$$

$$\theta(0, \xi) = \theta_0(\xi) \equiv T_0^{1/(\beta-1)} u_0(\xi T_0^m), \quad \xi \in \Omega, \quad (39)$$

$$\theta(\tau, \xi) = 0, \quad \tau > 0, \quad \xi \in \partial\Omega. \quad (40)$$

Здесь Ω — некоторая ограниченная область в \mathbf{R} , причем $\supp \theta(\tau, \xi) \subset \Omega$ при любых $\tau \geq 0$ (такая Ω существует в силу (35)). Оценка (37) обеспечивает глобальную разрешимость задачи, а (36) при наличии легко выводимой равномерной в $[1, \infty) \times \mathbf{R}$ оценки $(\theta^{\sigma+1})'_\xi$ запрещает стабилизацию при $\tau \rightarrow \infty$ к тривиальному стационарному решению $\theta \equiv 0$. Поэтому стабилизация $\theta(\tau, \xi) \rightarrow \theta_A(\xi)$ при $\tau \rightarrow \infty$ к единственному нетривиальному стационарному решению при наличии асимптотически точной оценки носителя (35') вытекает из существования у задачи (38) — (40) функции Ляпунова. Она может быть получена на основе общего подхода [16, 84] (в явном виде ее выписать нельзя). При ее построении используются свойства решений стационарного уравнения (8), «продолженного» в область $\{\theta < 0\}$. Важную роль при этом играет оценка (35'), показывающая, что анализ стабилизации достаточно провести в ограниченной по ξ множестве.

Замечание. При выводе (32), (33) условия (9), (10) не использовались. Покажем, что справедливость (34) (или, что то же самое, (37)) при $1 < \beta < \sigma + 1$ так же имеет место без этих ограничений. Действительно, рассмотрим решение $\theta(\xi; \mu)$ стационарного уравнения (38) при $\xi > 0$, удовлетворяющее условиям $\theta(0; \mu) = \mu > 0$, $\theta'_\xi(0; \mu) = 0$. Из анализа, проведенного

при доказательстве теоремы 2 в п. 3 § 1, следует, что существуют такие достаточно большие $\mu > 0$, что $\theta(\xi; \mu)$ обращается в нуль в некоторой точке $\xi = \xi_\mu$. При этом $\xi_\mu \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \infty$. Выберем величину $\mu > 0$ столь большой, чтобы $\Omega \subset (-\xi_\mu, \xi_\mu)$ и $\theta_0(\xi) \leq \theta(|\xi|; \mu)$ в Ω . Тогда в силу принципа максимума $\theta(\tau, \xi) \leq \theta(|\xi|; \mu)$ в $\mathbf{R}_+ \times \Omega$, т. е. задача (38)–(40) глобально разрешима и справедлива оценка (37). Тем самым доказано следующее общее утверждение:

Предложение 2. Пусть $1 < \beta < \sigma + 1$, $u_0(x)$ — произвольная финитная функция и $T_0 = T_0(u_0) < \infty$ — время существования решения задачи Коши (1), (2). Тогда при всех $t \in [0, T_0)$ справедливы оценки

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} u(t, x) > (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)} (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)};$$

существует такое $\theta_* > 0$, что $\sup_{x \in \mathbf{R}} u(t, x) < \theta_* (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}$;

$$\text{mes supp } u(t, x) = 2\xi_0 (T_0 - t)^{[\beta - (\sigma+1)]/[2(\beta-1)]} + O(1), \quad t \rightarrow T_0^-$$

Сформулированные оценки позволяют доказать теорему 4 в случае произвольной финитной начальной функции u_0 .

6. Об устойчивости автомодельного LS-режима, $\beta > \sigma + 1$. При $\beta > \sigma + 1$ автомодельные функции $\theta_\lambda(\xi)$ (отметим, что их, вообще говоря, существует несколько) строго положительны в \mathbf{R} (см. § 1). Автомодельное представление (11) финитно по ξ , однако при $t \rightarrow T_0^-$ размеры носителя неограниченно возрастают:

$$\text{mes supp } \theta(t, \xi) \sim (T_0 - t)^{-[\beta - (\sigma+1)]/[2(\beta-1)]} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T_0^-$$

Не представляет труда установить в предположениях (9), (10) равномерную ограниченность $\theta(t, \xi)$, при $\beta > \sigma + 1$ справедлива оценка (34) и, следовательно, (37). Это делается так же, как в случае $\beta \leq \sigma + 1$, с использованием результатов § 1 (см. лемму 4). В силу теоремы 1 справедлива и оценка снизу (36), т. е. если $\theta(\tau, \xi) \rightarrow \bar{\theta}(\xi)$ при $\tau \rightarrow \infty$, то $\bar{\theta} \neq 0$.

Однако при анализе поведения $\theta(\tau, \xi)$ при $\tau = -\ln(1 - t/T_0) \rightarrow \infty$ возникает следующая трудность. В отличие от S- и NS-режимов здесь пока ничто не запрещает стабилизацию $\theta(\tau, \xi)$ при $\tau \rightarrow \infty$ к пространственно-однородному решению*) $\bar{\theta}(\xi) \equiv (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}$ уравнения (38). Это означало бы, что асимптотическое развитие процесса с обострением идет по неавтомодельным законам. Достаточные условия нетривиальности предельной функции $\bar{\theta}$ ($\bar{\theta} \neq (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}$) дает теорема 5, где через $\theta_\lambda(\xi) > 0$ обозначено элементарное решение уравнения (8), построенное в теореме 3 в § 1.

Теорема 5. Пусть $\beta > \sigma + 1$, выполнены условия (9), (10), $T_0 = T_0(u_0) < \infty$ — время обострения неограниченного решения задачи (1), (2) и, кроме того, начальная функция $u_0(x)$ такова,

*) Это имеет место, например, в случае $\sigma = 0$ (см. комментарий).

что $T_0^{1/(\beta-1)}u_0(\xi T_0^m)$ пересекается с функцией $\theta_A(\xi)$ ровно в двух точках и $T_0^{1/(\beta-1)}u_0(0) > \theta_A(0)$. Тогда справедлива оценка

$$u(t, 0) > \theta_A(0) (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}, \quad t \in [0, T_0). \quad (41)$$

Доказательство. В ситуации, изображенной на рис. 63, справедливость оценки (41) вытекает из утверждения 2) предложения 1. Действительно, рассматривая неограниченные решения $u(t, x)$ и $v(t, x) \equiv u_A(t, x)$, получаем, что $N(0) = 2$.

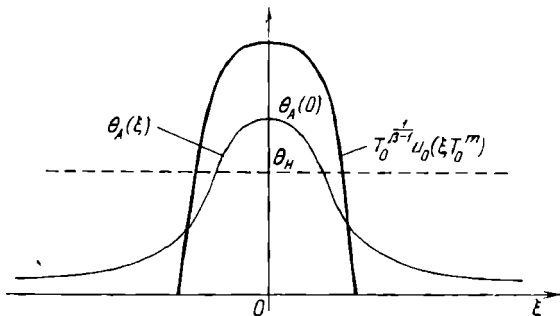


Рис. 63

Поскольку всегда $N(t) > 0$ и функции u, v четные по x , то $N(t) = 2$ для всех $t \in [0, T_0)$. Это означает, что

$$\sup_x u \equiv u(t, 0) > \sup_x v(t, x) \equiv u_A(t, 0),$$

откуда следует (41).

В условиях теоремы 5 $\theta(\tau, 0) > \theta_A(0) > (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}$ при всех $\tau \geq 0$, и, следовательно, $\bar{\theta}(\xi) \neq \theta_N$. В § 6 будет получена поточечная оценка, запрещающая стабилизацию $\theta(\tau, \xi)$ к пространственно однородному решению.

Таким образом, главная трудность, которая возникает при доказательстве стабилизации $\theta(\tau, \cdot)$ к $\theta_A(\cdot)$ при $\tau \rightarrow \infty$, связана с отсутствием теоремы единственности автомодельной функции θ_A простейшего вида.

§ 6. Асимптотика неограниченных решений LS-режима вблизи сингулярной точки

Этот параграф целиком посвящен доказательству эффективной локализации неограниченных решений задачи Коши (0.1), (0.2) при $\beta > \sigma + 1$. Ниже будет показано, что при определенных ограничениях на $u_0(x)$ и величину β процесс горения в LS-режиме с обострением приводит к неограниченному возрастанию температуры при $t \rightarrow T_0^- < \infty$ только в одной сингулярной точке, т. е. $\text{mes } \omega_L \equiv \text{mes } \{x \in \mathbb{R}^N \mid u(T_0^-, x) = \infty\} = 0$ (см. рис. 43, 44). Напомним, что таким свойством обладают неограниченные автомо-

дельные решения LS-режима, существование которых установлено в § 1 при всех $\sigma + 1 < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$. Здесь будут рассматриваться неавтономные решения.

Введем класс финитных начальных функций $u_0 = u_0(|x|)$, для которых, как будет показано, $\text{mes } \omega_L = 0$. В качестве u_0 мы сначала будем брать функции $U = U(|x|; U_0)$, удовлетворяющие стационарному уравнению

$$\frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} U^\sigma U')' + U^\beta = 0, \quad r = |x| > 0, \quad (1)$$

$$U'_r(0; U_0) = 0, \quad U(0; U_0) = U_0, \quad U_0 = \text{const} > 0.$$

При $\beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$, как показано в п. 4.1 § 3, $U(|x|; U_0)$ обращается в нуль в некоторой точке $r = r_0(U_0) > 0$. Положим $U(|x|; U_0) \equiv 0$ при $|x| \geq r_0(U_0)$.

Пусть $\sigma + 1 < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$. Рассмотрим задачу Коши:

$$u_t = \nabla (u^\sigma \nabla u) + u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2)$$

$$u(0, x) = U(|x|; U_0), \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad U_0 > 0. \quad (3)$$

Тогда $u = u(t, |x|)$ монотонно убывает по $|x|$ и является неограниченным: $u(t, 0) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^- < \infty$ (см. теорему 3 в § 6 гл. V и замечание к ней). Кроме того, финитное по x решение является критическим:

$$u_t(t, x) \geq 0, \quad (t, x) \in (0, T_0) \times \{x \in \mathbb{R}^N | u(t, x) > 0\}; \quad (4)$$

см. § 2 гл. V. Это, в частности, означает, что при каждом $x \in \mathbb{R}^N$ существует предел (конечный или бесконечный)

$$u(T_0^-, x) = \lim_{t \rightarrow T_0^-} u(t, x).$$

Наша цель состоит в доказательстве того факта, что $u(T_0^-, x) < \infty$ в $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Оценка $u(T_0^-, x)$ снизу довольно просто устанавливается с помощью метода стационарных состояний. Следующее утверждение будет доказано в § 1 гл. VII в случае достаточно произвольных $u_0 = u_0(|x|)$.

Теорема 1. Пусть $\sigma \geq 0$, $\sigma + 1 < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$. Тогда

$$u(T_0^-, x) > C_* |x|^{-2/[\beta - (\sigma + 1)]}, \quad (5)$$

$$C_* = \left\{ \frac{2N}{\beta - (\sigma + 1)} \left[\frac{\beta - (\sigma + 1)}{\beta} \right]^{\beta/(\sigma + 1)} \right\}^{1/[\beta - (\sigma + 1)]}$$

при всех достаточно малых $|x| > 0$.

Вывод оценки $u(T_0^-, x)$ сверху, которая устанавливает справедливость равенства $\text{mes } \omega_L = 0$ и сам факт эффективной локализации, осуществляется на основе сравнения $u(t, x)$

с автомодельным решением

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} \theta_A(\xi), \quad \xi = |x|/(T_0 - t)^m, \quad (6)$$

где $m = [\beta - (\sigma + 1)] / [2(\beta - 1)]$ (существование функций $\theta_A(\xi) > 0$ установлено в теореме 4 в § 1). Решение (6) является эффективно локализованным; в частности, при $\sigma + 1 < \beta \leq (\sigma + 1) \times N / (N - 2)_+$ (теорема 5 в § 1)

$$\frac{\partial u_A(t, x)}{\partial t} > 0, \quad t \in (-\infty, T_0) \times \mathbf{R}^N; \quad (7)$$

$$u_A(t, x) < u_A(T_0^-, x) \equiv C_A |x|^{-2/[\beta - (\sigma + 1)]}, \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}. \quad (8)$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. Пусть $\sigma > 0$, $\sigma + 1 < \beta \leq (\sigma + 1)N / (N - 2)_+$. Тогда решение задачи (2), (3) удовлетворяет оценке

$$u(t, x) \leq u(T_0^-, x) < C_A |x|^{-2/[\beta - (\sigma + 1)]}, \quad t \in (0, T_0), \quad x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}. \quad (9)$$

Замечание. Из (5), (9) непосредственно следует оценка $C_A > C_*$, где C_A — постоянная в асимптотическом разложении автомодельной функции $\theta_A(\xi) \sim C_A \xi^{-2/[\beta - (\sigma + 1)]}$, $\xi \rightarrow \infty$ (см. п. 4 § 1).

Докажем сначала вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $u = u(t, |x|)$ и $u_A = u_A(t, |x|)$ имеют один и тот же момент обострения $t = T_0 < \infty$. Тогда функции $u_0 \equiv u(T_0; U_0)$ и $u_A(0, r)$ пересекаются по $r = |x|$ ровно в одной точке.

Доказательство. Функции $u_0(r)$ и $u_A(0, r)$ обязаны пересекаться, поскольку соответствующие неограниченные решения имеют одинаковые моменты обострения и u_0 — финитная функция (см. предложение 1 § 5).

Докажем теперь, что

$$u_A(0, r) > U(r; \lambda), \quad r > 0; \quad 0 < \lambda \leq u_A(0, 0). \quad (10)$$

Очевидно, что отсюда будет следовать условие $U(0; U_0) > u_A(0, 0)$; в противном случае $u(t, r)$ и $u_A(t, r)$ будут иметь различные моменты обострения. Неравенства, подобные (10), в более общем случае выводятся в § 1 гл. VII. Ниже кратко обсуждается основная идея доказательства.

Фиксируем $\lambda \in (0, u_A(0, 0)]$. Автомодельное решение (6) определено в \mathbf{R}^N при всех $t \in (-\infty, T_0)$, причем $u_A \rightarrow 0$, $(u_A)_r \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$ равномерно на каждом компакте из \mathbf{R}^N . Поэтому существует такое $t_0 \leq 0$, что $u_A(t_0, |x|)$ пересекается с $U(r; \lambda)$ только в одной точке при $r > 0$. Однако u_A и $U(r; \lambda)$ — классические решения уравнения (2) в $(t_0, T_0) \times \{|x| < r_0(\lambda)\}$, причем $u_A > U = 0$ при $r = r_0(\lambda)$. Следовательно, количество пересечений u_A и U с ростом t не может увеличиваться, и поэтому в момент времени $t = t_* \leq 0$, когда $u_A(t_*, 0) = U(0; \lambda)$, будет выполнено неравенство $u_A(t_*, r) > U(r; \lambda)$, $r > 0$. В силу (7) отсюда вытекает (10).

Итак, $U(0; U_0) > u_A(0, 0)$ и функции $U(r; U_0)$ и $u_A(0, r)$ пересекаются. Покажем, что имеется ровно одно пересечение. Пусть это не так и существует большее количество пересечений. Рассмотрим семейство стационарных решений $\{U(r; \lambda)\}$. При всех $\lambda < u_A(0, 0)$ функции $U(r; \lambda)$ и $u_A(0, r)$ не пересекаются (см. (10)). Очевидно, что при больших $\lambda > 0$ имеется только одно пересечение (это следует из известных свойств функций $U(r; \lambda)$ при $\beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$; см. § 3). Поэтому в силу непрерывной зависимости $U(r; \lambda)$ от λ найдется такое $\lambda = \lambda_* > 0$, что кривые $u = U(r; \lambda_*)$ и $u = u_A(0, r)$ на плоскости (u, r) касаются в некоторой точке $r = r_* > 0$, причем в точке касания $u_A = U$, $u'_A = U'_r$, $u''_A \leq U''_{rr}$. Но тогда $(\partial/\partial t)u_A(0, r_*) \leq 0$, а это противоречит (7).

Следующая лемма является прямым следствием леммы 1 и предложения 1 § 5.

Лемма 2. В условиях леммы 1 $u(t, r)$ и $u_A(t, r)$ при каждом $t \in [0, T_0)$ пересекаются ровно в одной точке при $r > 0$, и, следовательно,

$$u(t, 0) > u_A(t, 0), \quad t \in [0, T_0).$$

Доказательство теоремы 2. Предположим, что в некоторой точке $t = t_* < T_0$, $r = r_* > 0$ неравенство (9) нарушено. Тогда в силу (4)

$$u(t, r_*) \geq C_A r_*^{-2/[\beta - (\sigma + 1)]}, \quad t_* < t < T_0. \quad (11)$$

Пусть $u_A(t, x)$ имеет тот же момент обострения, что и $u(t, x)$. Сравним эти функции, рассматривая их как решения краевых задач для (2) в области $(t_*, T_0) \times \omega_*$, где $\omega_* = \{|x| < r_*\}$, $\partial\omega_*$ — граница ω_* . Из (8), (11) имеем

$$u_A(t, x) < C_A |x|^{-2/[\beta - (\sigma + 1)]} \leq u(t, x) \text{ в } (t_*, T_0) \times \partial\omega_*. \quad (12)$$

Из леммы 2 непосредственно следует, что

$$u_A(t_*, x) < u(t_*, x), \quad x \in \omega_*. \quad (13)$$

Но тогда u , u_A имеют различные моменты обострения (см. аналогичные по смыслу утверждения в § 4). Действительно, из (12), (13) следует, что существует такое $\tau \in (0, T_0 - t_*)$, что $u_A(t_* + \tau, x) \leq u(t_*, x)$ в $\bar{\omega}_*$. В силу (12) и принципа максимума это означает, что $u_A(t + \tau, x) \leq u(t, x)$ в $(t_*, T_0 - \tau) \times \omega_*$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \rightarrow (T_0 - \tau)^-$, получаем неравенство $u_A(T_0^-, x) \leq u(T_0 - \tau, x)$ в ω_* , что невозможно, так как $u_A(T_0^- 0) = \infty$, $u(T_0 - \tau, 0) < \infty$.

Из теорем 1, 2 прямо следует

Теорема 3. 1) Пусть

$$\sigma + 1 + 2/N \leq \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+.$$

Тогда при любых фиксированных $p \geq [\beta - (\sigma + 1)]N/2 \geq 1$,

$\varepsilon > 0$ решение задачи (2), (3) удовлетворяет условию

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^p(\{|x| < \varepsilon\})} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T_0^-. \quad (14)$$

2) Пусть $\sigma + 1 + 2/N < \beta \leq (\sigma + 1)N/(N - 2)_+$. Тогда при любых $1 \leq p < [\beta - (\sigma + 1)]N/2$, $\varepsilon > 0$ и всех $t \in (0, T_0)$ справедлива оценка

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^p(\{|x| < \varepsilon\})} < \left[2 \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}\right]^{1/p} C_A \left(N - \frac{2p}{\beta - (\sigma + 1)}\right)^{-1/p} \varepsilon^{N/p - 2/[\beta - (\sigma + 1)]} < \infty. \quad (15)$$

Отметим два основных требования на $u_0 = u_0(|x|)$, при которых справедлива оценка (9). Во-первых, u_0 — критическая функция, т. е. $u_t \geq 0$ почти всюду в $(0, T_0) \times \mathbf{R}^N$, и, во-вторых, $u_0(|x|)$ пересекается с $u_A(0, |x|)$ ($u_A(t, |x|)$ имеет тот же момент обострения $t = T_0 < \infty$) только в одной точке $r = |x| > 0$. Что касается первого требования, то здесь особых проблем не возникает. Семейство критических $u_0(|x|)$ помимо финитных функций $U(|x|; U_0)$ из (1) включает в себя, например, гладкие функции вида

$$u_0(|x|) = A(a^2 + |x|^2)^{-1/(\beta - (\sigma + 1))}, \quad x \in \mathbf{R}^N; \quad A > 0, \quad a^2 > 0.$$

Легко проверяется, что $\nabla \cdot (u_0^\beta \nabla u_0) + u_0^\beta \geq 0$ в \mathbf{R}^N , если $A^{\beta - (\sigma + 1)} \geq 2N/[\beta - (\sigma + 1)]$ (этого достаточно для критичности классического решения; см. § 1 гл. V). Помимо этого критическими являются функции $u_0(x) = A \exp\{-\alpha|x|^2\}$, если

$$A^{\beta - (\sigma + 1)} \geq 2\alpha N \exp\left\{[\beta - (\sigma + 1)] \frac{N}{2(\sigma + 1)}\right\}, \quad \alpha > 0.$$

Однако при других, отличных от $U(|x|; U_0)$ критических начальных функциях $u_0(x)$ довольно сложно решается вопрос о числе пересечений по $|x|$ функции $u(t, |x|)$ и автомодельного решения $u_A(t, |x|)$ с тем же моментом обострения.

§ 7. Режимы с обострением, эффективная локализация для полулинейных уравнений с источником

Этот параграф посвящен исследованию неограниченных, а также некоторых классов глобальных решений задачи Коши для полулинейных параболических уравнений вида

$$u_t = \Delta u + Q(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}^N; \quad u_0 \in C(\mathbf{R}^N), \quad \sup u_0 < \infty, \quad (2)$$

описывающих процесс горения в среде с постоянным коэффициентом теплопроводности $k(u) \equiv 1$. Предполагается, что $Q(u) > 0$

для $u > 0$ и при всех $s > 0$

$$F(s) = \int_s^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} < -\infty, \quad (3)$$

причем $F(0) = \infty$ (последнее необходимо для единственности решения задачи Коши; см. § 2 гл. I).

Уравнение (1) с источником описывает процессы с бесконечной скоростью распространения возмущений, и если $u_0 \neq 0$, то $u(t, x) > 0$ всюду, где решение определено. Поэтому локализация тепла в строгом смысле, как это было в § 1, 4, здесь невозможна и необходимо использовать понятие *эффективной локализации*. Исследование будет идти в двух направлениях: во-первых, выясняются условия возникновения неограниченных решений и, во-вторых, определяются условия их локализации (или отсутствия локализации).

Основные результаты будут получены на основе методов, многие из которых специально ориентированы на анализ полулинейных уравнений типа (1). Последнее связано, в частности, с возможностью обращения оператора $(\partial/\partial t - \Delta)$, в результате чего задача (1), (2) сводится к интегральному уравнению достаточно простого вида.

1. **Один общий результат об отсутствии глобальных решений.** Мы начнем исследование с вывода условий неограниченности решений задачи (1), (2) с произвольным источником $Q(u)$. Большим преимуществом полулинейного уравнения (1) по сравнению с квазилинейным является, в частности, то, что решение соответствующего уравнения без источника:

$$v_t = \Delta v, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad v(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (4)$$

выписывается в виде теплового потенциала

$$v(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{-\frac{|y|^2}{4t}\right\} u_0(x+y) dy. \quad (5)$$

Оказывается, можно наглядно сопоставить решение задачи (4) с решением исходной задачи (1), (2).

Пусть $E(p, \tau)$ — некоторая достаточно гладкая монотонно возрастающая по $p \geq 0$ функция, $E(p, \tau) \geq 0$ при всех допустимых $p \geq 0$, $\tau \geq 0$; $E(0, \tau) = 0$ и $E(p, 0) \equiv p$. Функция E введена для операторного (функционального) сравнения решений уравнений (1) и (4). В результате замены

$$u(t, x) = E(U(t, x), t) \quad (6)$$

уравнение (1) применительно к новой функции U принимает вид

$$U_t = \Delta U + \frac{E''_{UU}}{E'_U} |\nabla U|^2 + \frac{Q(E) - E'_t}{E'_U}, \quad (7)$$

причем $U(0, x) = u_0(x)$ в \mathbb{R}^N в силу тождества $E(p, 0) \equiv p$. Тогда,

сопоставляя (7) с линейным уравнением (4), в силу принципа максимума (см. § 1 гл. I) получаем, что для сравнения их решений, т. е. для выполнения неравенства

$$U(t, x) \geq v(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

достаточно, чтобы функция $E(p, \tau)$ удовлетворяла условиям

$$E''_{pp}(p, \tau) \geq 0, \quad Q(E(p, \tau)) - E'_\tau(p, \tau) \geq 0. \quad (8)$$

Лемма 1. Пусть $Q(u)$ — выпуклая в \mathbb{R}_+ функция, т. е.

$$Q''(u) \geq 0, \quad u > 0. \quad (9)$$

Тогда

$$E(p, \tau) = F^{-1}(F(p) - \tau), \quad (10)$$

где F^{-1} — обратная к (3) функция, является решением системы неравенств (8).

Доказательство. Функция (10) превращает второе неравенство (8) в тождество. Занимем первое в эквивалентном виде:

$$F''(p) + Q'(F^{-1}(F(p) - \tau))F'^2(p) \geq 0.$$

При $\tau = 0$ оно выполнено. Поэтому его справедливость при $\tau > 0$ ($\tau < F(p)$) вытекает из выпуклости Q и монотонности F .

Оператор (10) является тождественным при $\tau = 0$.

Лемма 2. Пусть $Q(u)$ — выпуклая функция. Тогда для решения задачи (1), (2) имеет место оценка снизу

$$u(t, x) \geq F^{-1}[F(v(t, x)) - t], \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (11)$$

где $v(t, x)$ определяется из (4).

Поскольку F — убывающая функция, неравенство (11) эквивалентно такому:

$$F(v(t, x)) - F(u(t, x)) \geq t, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (12)$$

В случае степенного источника $Q(u) = u^\beta$, $\beta > 1$, имеем $F(s) = s^{1-\beta}/(\beta-1)$ и (12) принимает вид

$$v^{1-\beta}(t, x) - u^{1-\beta}(t, x) \geq (\beta-1)t. \quad (13)$$

Эти неравенства удобно использовать для определения условий глобальной неразрешимости задачи Коши (1), (2).

Теорема 1. Пусть $Q''(u) \geq 0$ при $u > 0$ и существует предел

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s^{1+2/N}}{Q(s)} = v < \infty. \quad (14)$$

Тогда при любых начальных функциях таких, что

$$\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} > [2\pi N v]^{N/2}, \quad (15)$$

задача Коши (1), (2) не имеет глобального решения.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $F^{-1}(0) = \infty$. Поэтому из (12) непосредственно следует, что $u(t, x)$ является

неограниченным, если найдутся такие $t_* > 0$ и $x_* \in \mathbb{R}^N$, что $F(v(t_*, x_*)) - t_* \leq 0$, или, что то же самое,

$$F(v(t_*, x_*))/t_* \leq 1. \quad (16)$$

Положим $x_* = 0$. Из (5) в предположении $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ получаем

$$v(t, 0) \simeq (4\pi t)^{-N/2} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \quad t \rightarrow \infty,$$

и поэтому, раскрывая неопределенность в выражении $F(v(t, 0))/t$ при $t \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(v(t, 0))}{t} = 2\pi N \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{-2/N} \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s^{1+2/N}}{Q(s)} = 2\pi N \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{-2/N} v.$$

Отсюда в силу (15) для указанных начальных функций выполнено (16) при $x_* = 0$ и некотором достаточно большом t_* , что влечет за собой неограниченность решения задачи (1), (2).

Следствие. Пусть $v = 0$ в (14). Тогда при любых $u_0 \neq 0$ решение задачи (1), (2) является неограниченным.

В случае $v > 0$ теорема 1 определяет некоторую минимальную начальную энергию, необходимую для развития режима с обострением: $E_{\min} = (2\pi N v)^{N/2}$. На самом деле при $v \in \mathbb{R}_+$ во многих случаях все нетривиальные решения задачи являются неограниченными. В дальнейшем это будет показано на примере степенного источника $Q(u) = u^\beta$. Отметим, что с помощью неравенства (16) можно определить условия глобальной неразрешимости и при $v = \infty$ (когда выводы теоремы в какой-то мере свидетельствуют о возможности существования некоторого класса глобальных решений).

2. Уравнение со степенной нелинейностью $u_t = \Delta u + u^\beta$. Здесь проводится подробное исследование неограниченных и глобальных решений задачи Коши для уравнения со степенным источником:

$$\begin{aligned} \Delta(u) &\equiv u_t - \Delta u - u^\beta = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) &= u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad \beta > 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Некоторые из результатов аналогичны полученным в § 3 для квазилинейных уравнений; поэтому мы приводим их без доказательства. Отметим, что из теоремы 1 сразу следует неограниченность всех решений $u(t, x) \neq 0$ при $\beta \in (1, 1 + 2/N)$. Поэтому глобально существующие решения возможны лишь при $\beta \geq 1 + 2/N$ (на самом деле при $\beta = 1 + 2/N$ их также нет).

Исследование задачи (17) мы начнем с построения неограниченных нижних и глобальных верхних решений, которые дают конкретные условия локальной или глобальной разрешимости задачи.

2.1. Об условиях глобальной неразрешимости задачи. Построение неограниченных нижних решений задачи (17) позволяет определить точную оценку сверху времени суще-

ствования решения, которая в силу специфики доказательства теоремы 1 не была там получена.

Рассмотрим в $(0, T) \times \mathbb{R}^N$ функцию

$$u_-(t, x) = (T-t)^{-1/(\beta-1)} \theta_-(\xi), \quad \xi = |x|/(T-t)^{1/2}. \quad (18)$$

Пусть $\theta_- \in C^2([0, \infty))$, $\theta'_-(0) = 0$. Для того чтобы функция (18) была нижним решением уравнения (17), достаточно выполнения неравенства $A(u_-) \leq 0$ в $(0, T) \times \mathbb{R}^N$. Подстановка (18) в (17) дает следующее условие:

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta'_-)' - \frac{1}{2} \theta'_- \xi - \frac{1}{\beta-1} \theta_- + \theta_-^\beta \geq 0, \quad \xi > 0. \quad (19)$$

Функцию θ_- будем искать в виде $\theta_-(\xi) = A \exp\{-\alpha \xi^2\}$, где $A > 0$, $\alpha > 0$ — постоянные.

Тогда из (19) получаем неравенство

$$\alpha(4\alpha + 1) \xi^2 + A^{\beta-1} \exp\{\alpha(1-\beta)\xi^2\} \geq 2\alpha N + 1/(\beta-1). \quad (20)$$

Легко видеть, что оно выполнено при любых

$$\xi \geq \xi_* = \left[\frac{2\alpha N + 1/(\beta-1)}{\alpha(4\alpha + 1)} \right]^{1/2}$$

а для того, чтобы (20) было справедливо при оставшихся $\xi \in [0, \xi_*)$, достаточно выполнения неравенства

$$A^{\beta-1} \exp\{\alpha(1-\beta)\xi_*^2\} \geq 2\alpha N + 1/(\beta-1). \quad (21)$$

Теорема 2. Пусть начальная функция u_0 в (17) такова, что

$$u_0(x) \geq T^{-1/(\beta-1)} A \exp\{-\alpha|x|^2 T^{-1}\}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

где T , α , A — положительные постоянные, причем α , A удовлетворяют неравенству (21). Тогда решение задачи (17) существует в течение времени, не большего T .

Для удобства сформулируем непосредственное следствие из теоремы 1.

Теорема 3. Пусть $1 < \beta < 1 + 2/N$, $u_0 \neq 0$. Тогда решение задачи (17) является неограниченным.

Этот результат нетрудно получить тем же, что и в § 3, п. 2, способом, составляя семейство нижних решений (18) со сколь угодно малым фундаментальным решением уравнения теплопроводности. В случае $\beta < 1 + 2/N$ эта процедура сравнительно проста. При критическом значении $\beta = 1 + 2/N$ сделать это значительно труднее, и поэтому построение неограниченного нижнего решения удобно проводить итерационным способом, как это делается при доказательстве следующего утверждения:

Теорема 4. Пусть $\beta = 1 + 2/N$, $u_0 \neq 0$. Тогда задача (17) не имеет глобального решения.

Доказательство. Проведем его для случая $N = 2$, когда $\beta = 1 + 2/N = 2$. Этим же способом с небольшими изменениями проводится доказательство при произвольных N .

Прежде всего заметим, что для любой начальной функции $u_0 \neq 0$ всегда найдутся такие постоянные t_0, A_0, α_0 , что $u(t, x) \geq A_0 \exp\{-\alpha_0|x|^2\}$ в \mathbb{R}^2 . Поэтому в силу теоремы сравнения доказательство достаточно провести для функций вида

$$u_0(x) = A_0 \exp\{-\alpha_0|x|^2\}, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (22)$$

Задача Коши (17), (22) при $N=2, \beta=2$ эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$u(t, x) = \mathbf{P}(u) \equiv (4\pi t)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\} u_0(y) dy + \\ + \int_0^t [4\pi(t-\tau)]^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}\right\} (u(\tau, y))^2 dy d\tau. \quad (23)$$

Составим рекуррентную функциональную последовательность

$$U_1(t, x) = \mathbf{P}(0); \quad U_{n+1}(t, x) = \mathbf{P}(U_n(t, x)), \quad n = 1, 2,$$

Из (23) непосредственно следует, что для любого n

$$u(t, x) \geq U_n(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Поэтому, если $\{U_n\}$ расходится хотя бы в одной точке, то исходная задача не имеет глобального решения. Покажем, что это действительно так.

Прежде всего имеем

$$U_1(t, x) = \mathbf{P}(0) = v_1(t)E(t, x),$$

где $v_1(t) = A_0/(1+4\alpha_0 t)$, $E(t, x) = \exp\{-\alpha_0|x|^2/(1+4\alpha_0 t)\}$. Оценим теперь другие члены последовательности.

Докажем по индукции, что

$$U_n(t, x) \geq \sum_{k=1}^n v_k(t) E^k(t, x), \quad n = 2, 3, \quad (24)$$

где функции $v_k \geq 0$ будут определены ниже (v_1 нам уже известна). Из (23) без труда получаем

$$U_{n+1}(t, x) \geq v_1 E + \\ + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^2} [4\pi(t-\tau)]^{-1} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}\right\} \left(\sum_{k=1}^n v_k(\tau) E^k(\tau, y)\right)^2 dy \geq \\ \geq v_1 E + \sum_{k=1}^n \int_0^t \sum_{l=1}^k v_l(\tau) v_{k+1-l}(\tau) d\tau \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^2} [4\pi(t-\tau)]^{-1} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}\right\} E^{k+1}(\tau, y) dy. \quad (25)$$

Внутренние интегралы по пространственным переменным легко

вычисляются для каждого $k = 1$, n и равны

$$\frac{1 + 4\alpha_0 \tau}{1 + 4(k+1)\alpha_0 t - 4k\alpha_0 \tau} \exp \left\{ -\frac{(k+1)\alpha_0 |x|^2}{1 + 4(k+1)\alpha_0 t - 4k\alpha_0 \tau} \right\} \geq \\ \geq \frac{1 + 4\alpha_0 \tau}{(k+1)(1 + 4\alpha_0 t)} E^{k+1}(t, x).$$

Поэтому из (25) следует оценка

$$U_{n+1}(t, x) \geq \\ \geq v_1 E + \sum_{k=1}^n \frac{E^{k+1}(t, x)}{(k+1)(1 + 4\alpha_0 t)} \int_0^t \sum_{l=1}^k v_l(\tau) v_{k+1-l}(\tau) (1 + 4\alpha_0 \tau) d\tau,$$

т. е. в (24) можно положить

$$v_{k+1}(t) = \frac{1}{(k+1)(1 + 4\alpha_0 t)} \int_0^t \sum_{l=1}^k v_l(\tau) v_{k+1-l}(\tau) (1 + 4\alpha_0 \tau) d\tau. \quad (26)$$

Покажем, что отсюда следуют такие неравенства:

$$v_k(t) \geq \frac{k}{6^{k-1}(1 + 4\alpha_0 t)} \left(\frac{A_0}{4\alpha_0} \right)^k 4\alpha_0 \ln^{k-1}(1 + 4\alpha_0 t). \quad (27)$$

Для $k=1$ эта оценка верна. Пусть она справедлива для всех $1 \leq k \leq M$, и докажем, что (27) имеет место для $k=M+1$. Из (26) получаем

$$v_{M+1}(t) \geq \frac{1}{(M+1)(1 + 4\alpha_0 t)} \left(\frac{A_0}{4\alpha_0} \right)^{M+1} (4\alpha_0)^2 \times \\ \times \int_0^t \frac{\ln^{M-1}(1 + 4\alpha_0 \tau)}{1 + 4\alpha_0 \tau} \cdot 6^{-M+1} d\tau \sum_{l=1}^M l(M+1-l). \quad (28)$$

Нетрудно проверить, что $\sum_{l=1}^M l(M+1-l) = M(M+1)(M+2)/6 > > M(M+1)^2/6$, и тогда из неравенства (28) непосредственно следует (27) при $k=M+1$.

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ получаем неравенство:

$$u(t, x) \geq \frac{A_0 E(t, x)}{1 + 4\alpha_0 t} \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}, \quad (29)$$

где $z = z(t, x) = \frac{A_0 E(t, x)}{24\alpha_0} \ln(1 + 4\alpha_0 t) > 0$. Однако ряд в (29) расходится при $z=1$, например при $x=0$ ($E(t, 0)=1$), $t=t_*$, где

$$\frac{A_0}{24\alpha_0} \ln(1 + 4\alpha_0 t_*) = 1,$$

т. е.

$$t_* = \frac{1}{4\alpha_0} \left(\exp \left\{ \frac{24\alpha_0}{A_0} \right\} - 1 \right).$$

Поэтому решение задачи с начальной функцией вида (22) существует в течение времени, не большего t_* .

Суммируя ряд в (29), нетрудно получить конкретный вид предполагаемого «нижнего» решения $u_-(t, x)$, которое построено итерационной процедурой для критического случая $\beta = 1 + 2/N$, $N = 2$. Оно имеет довольно необычную пространственно-временную структуру:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\geq u_-(t, x) = \\ &= \frac{A_0}{1 + 4\alpha_0 t} \exp \left\{ -\frac{\alpha_0 |x|^2}{1 + 4\alpha_0 t} \right\} \left\{ 1 - \frac{A_0}{24\alpha_0} \exp \left\{ -\frac{\alpha_0 |x|^2}{1 + 4\alpha_0 t} \right\} \ln(1 + 4\alpha_0 t) \right\}^{-2} \\ &0 < t < t_*, \quad x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Итак, если $1 < \beta \leq 1 + 2/N$, все нетривиальные решения задачи (17) являются неограниченными.

2.2. Время существования элементарных возмущений. Конкретные оценки сверху времени существования неограниченных решений можно получить с помощью выведенного в п. 1 неравенства (13), которое в степенном случае принимает вид

$$\int_{\mathbb{R}^N} \exp \left\{ -\frac{|y|^2}{4t} \right\} u_0(x + y) dy \geq M t^{N/2 - 1/(\beta - 1)}, \quad (30)$$

где $M = (4\pi)^{N/2} (\beta - 1)^{-1/(\beta - 1)}$. Если это неравенство выполнено в некоторой точке (t_*, x_*) , то неограниченное решение существует в течение времени, не большего t_* .

Пусть $u_0(x)$ представляет собой элементарное возмущение: $u_0(x) = \delta > 0$ при всех $|x| < a < \infty$, $u_0(x) \equiv 0$ при $|x| \geq a$. Используя оценку $\exp \{-|y|^2/(4t)\} \geq (1 - |y|^2/(4t))_+$, получаем для интеграла в (30) оценку снизу

$$I(t, x) \geq \int_{|y| < l(t)} \left(1 - \frac{|y|^2}{4t} \right) u_0(x + y) dy, \quad l(t) = \min \{a, 2t^{1/2}\}. \quad (31)$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае можно положить $x_* = 0$. Предположим сначала, что $t_* > a^2/4$. Тогда $l(t_*) = a$, и верхняя граница времени существования решения определяется из уравнения

$$\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} - \frac{M_1}{t} = M t^{N/2 - 1/(\beta - 1)}, \quad M_1 = \frac{a^{N+2} \pi^{N/2}}{2\Gamma(N/2)(N+2)} \delta.$$

Для некоторых β это уравнение можно решить точно.

Например, при $\beta = 1 + 2/N$

$$t_* = \frac{M_1}{\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} - M}, \quad \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} > M.$$

Эта формула верна, если $t_* > a^2/4$, т. е.

$$M < \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < 4M_1/a^2 + M.$$

Если $\beta = (4 + N)/(2 + N)$, то

$$t_* = \frac{M + M_1}{\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}, \quad \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \frac{4}{a^2} (M + M_1).$$

Отметим, что эта оценка показывает, что при $\beta = (4 + N)/(2 + N) < 1 + 2/N$ решения, отвечающие элементарным начальным возмущениям со сколь угодно малой энергией, являются неограниченными. Это же относится к случаю $\beta = (3 + N)/(N + 1)$, когда

$$t_* = \left\{ \frac{M}{2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}} + \left[\left(\frac{M}{2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}} \right)^2 + M_1 \right]^{1/2} \right\}^2$$

(при этом должно быть $t_* > a^2/4$, т. е. энергия $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ должна быть не слишком велика). Эта оценка верна, например, если $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq 2M/a$.

Рассмотрим теперь случай $t^* \leq a^2/4$. Тогда $l(t) = 2t^{1/2}$ в (31), и решение неравенства (30) имеет вид

$$t^* = \left[\frac{M}{M_2 \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}} \right]^{\beta-1} M_2 = \frac{2^{N+1}}{(N+2) a^N}.$$

Оценка $T_0 \leq t_*$ справедлива, если $t^* \leq a^2/4$, т. е. если

$$\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \geq \frac{M}{M_2} \left(\frac{a^2}{4} \right)^{-1/(\beta-1)}$$

2.3. О глобальных решениях при $\beta > 1 + 2/N$. Будем искать ограниченное верхнее решение уравнения (17) в виде

$$u_+(t, x) = (T + t)^{-1/(\beta-1)} \theta_+(\xi), \quad \xi = |x|/(T + t)^{1/2}, \quad (32)$$

где $\theta_+(\xi) = A \exp(-\alpha \xi^2)$ и T, A, α — положительные постоянные. Подстановка (32) в условие $\Lambda(u_+) \geq 0$ дает неравенство, которое приводится к виду

$$\alpha(4\alpha - 1)\xi^2 + A^{\beta-1} \exp\{\alpha(1 - \beta)\xi^2\} \leq 2\alpha N - 1/(\beta - 1), \quad \xi \in \mathbf{R}_+. \quad (33)$$

Отсюда вытекают ограничения на параметры A и α . Во-первых, правая часть (33) должна быть положительной, т. е.

$$\alpha > \frac{1}{2N(\beta - 1)}. \quad (34)$$

Во-вторых,

$$A \leq \left(2\alpha N - \frac{1}{\beta - 1}\right)^{1/(\beta - 1)} \quad \alpha \leq \frac{1}{4}, \quad (35)$$

причем из этих неравенств следует ограничение $\beta > 1 + 2/N$. Тем самым доказана

Теорема 5. Пусть $\beta > 1 + 2/N$ и начальная функция u_0 такова, что

$$u_0(x) \leq T^{-1/(\beta - 1)} A \exp\{-\alpha|x|^2 T^{-1}\}, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad (36)$$

где T , A , α — постоянные, две последние из которых удовлетворяют неравенствам (34), (35). Тогда задача (17) имеет глобальное решение, причем

$$u(t, x) \leq (T + t)^{-1/(\beta - 1)} A \exp\left\{-\frac{\alpha|x|^2}{T + t}\right\} \quad \forall \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \quad (37)$$

В заключение отметим, что построенное здесь множество устойчивости \mathscr{W} состоит из функций u_0 , экспоненциально убывающих в соответствии с (36) при $|x| \rightarrow \infty$. Так же как в пп. 4, 5 § 3, при $\beta > 1 + 2/N$ можно построить другое множество \mathscr{W} — с более слабым (степенным) убыванием $u_0(x)$ на бесконечности. Граница \mathscr{W} в этом случае состоит из глобальных автомодельных решений уравнения (17), которые рассматриваются в п. 2.5.

2.4. Эффективная локализация неограниченных решений. LS-режимы горения. В этом пункте мы переходим к описанию конкретных свойств неограниченных решений задачи (17) — их пространственно-временной структуры при временах, близких к моменту обострения. Фундаментальным свойством режимов с обострением, не зависящим от специфики начальных функций, является свойство локализации. Уравнение (17) описывает процессы с бесконечной скоростью распространения возмущений, поэтому так же, как в случае краевой задачи для уравнения теплопроводности без источника (см. § 4 гл. III), введем определение эффективной локализации горения.

Определение. Неограниченное решение задачи Коши (17) называется *эффективно локализованным*, если оно стремится к бесконечности при $t \rightarrow T_0^-$ ($T_0 < \infty$ — время существования решения) на ограниченном множестве

$$\omega_L = \{x \in \mathbf{R}^N \mid u(T_0^-, x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow T_0^-} u(t, x) = \infty\},$$

которое называется *областью локализации*.

Если же ω_L — неограниченная область (например, $\omega_L = \mathbf{R}^N$), то эффективная локализация отсутствует.

В дальнейшем эффективно локализованный процесс горения мы будем называть просто локализованным. В одномерном случае удобно ввести *глубину локализации*

$$L_T = \text{mes}\{x \in \mathbf{R} \mid u(T_0^-, x) = \infty\}$$

(т. е. L_T — размер области, в которой решение неограниченно возрастает при $t \rightarrow T_0^-$; рис. 64). Если $u(t, x)$ обращается в бесконечность в одной точке, то $L_T = 0$, что отвечает LS-режиму горения с обострением.

Эволюция неограниченных решений задачи (17) при любых $\beta > 1$, как правило, идет именно в LS-режиме, и $u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$ на множестве ω_L меры нуль. Об этом, например, свидетельствуют оценки, полученные в теореме 2, в которой построены неограниченные нижние решения, развивающиеся как раз в LS-режиме. И конечно, этот вывод подтверждают численные расчеты. На рис. 65 приведены результаты одного из них. Отчетливо видно, что в процессе обострения возникает тепловая структура со все сокращающейся полушириной и ярко выделенной единственной точкой максимума по x пространственно-го профиля.

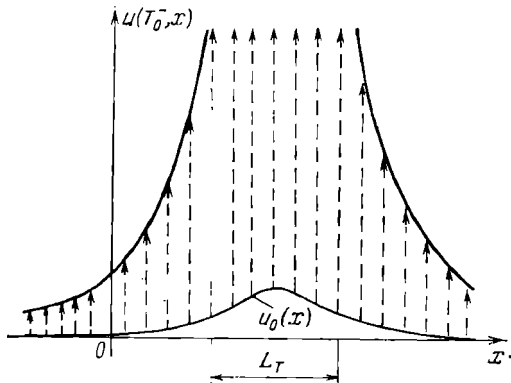


Рис. 64. Эффективная локализация (L_T — глубина локализации)

Рассмотрим вопрос о пространственно-временной структуре неограниченных решений при временах, близких к моменту обострения. Для этого по аналогии с квазилинейным случаем (§ 1) можно рассмотреть автомодельные неограниченные решения

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} \theta_A(\xi), \quad \xi = |x| / (T_0 - t)^{1/2}, \quad (38)$$

где функция $\theta_A(\xi) > 0$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta_A')' - \frac{1}{2} \theta_A' \xi - \frac{1}{\beta-1} \theta_A + \theta_A^\beta = 0, \quad \xi > 0; \quad (39)$$

$$\theta_A'(0) = 0, \quad \theta_A(\infty) = 0. \quad (40)$$

Если предположить, что автомодельное решение u_A описывает характерные свойства LS-режимов с обострением, то амплитуда решения $u_m(t)$ и полуширина симметричной области интенсивного горения $l_{\text{эф}}(t)$ могут быть оценены при $t \rightarrow T_0^-$ по формулам

$$u_m(t) \equiv \sup_x u(t, x) \sim (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}, \quad l_{\text{эф}}(t) \sim (T_0 - t)^{1/2}. \quad (41)$$

Однако есть одно существенное отличие от квазилинейного случая.

Предложение 1. Пусть $N=1$. Тогда при любых $\beta > 1$ задача (39), (40) не имеет решения $\theta_A(\xi) > 0$.

Для случая $\beta=3$ оно доказано в [222], для произвольных $\beta > 1$ его справедливость установлена в [3] (см. также [1, 2], где $1 < \beta < 3$). В процессе доказательства (см. [3]) устанавливается,

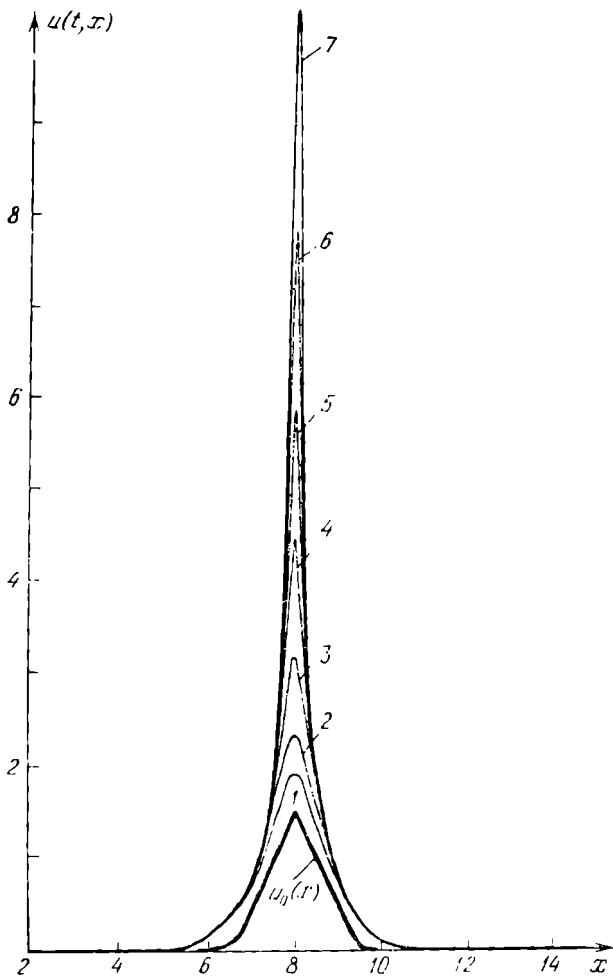


Рис. 65. Результаты численного решения задачи (17) при $\beta=4$: 1 — $t_1 = 0,236$; 2 — $t_2 = 0,269$; 3 — $t_3 = 0,291$; 4 — $t_4 = 0,299$; 5 — $t_5 = 0,3006$; 6 — $t_6 = 0,3018$; 7 — $t_7 = 0,3022$

что всякое решение уравнения (39) в области $\{\xi > \xi_0 \geq 0\}$ с условиями

$$\theta(\xi_0) = \mu > \theta_H = (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}, \quad \theta'(\xi_0) = 0 \quad (42)$$

обращается в нуль в некоторой точке $\xi = \xi_1 > \xi_0$ и монотонно

па (ξ_0, ξ_1) . Тем самым (39), (42) не имеет немонотонных положительных решений, имеющих точку минимума. Напомним, что при доказательстве теоремы 3 п. 4 § 1 существенно использовалась немонотонность решений.

Уместно вспомнить, что проведенный там анализ автомодельного уравнения (39), линеаризованного относительно гомотермического решения $\theta = (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}$, показывает, что оно не имеет немонотонных решений.

Отметим, что это рассуждение справедливо указывает на отсутствие нетривиальных решений задачи (39), (40) при любых $1 < \beta \leq (N+2)/(N-2)_+$ [211]. Поэтому при таких значениях β асимптотическая эволюция неограниченных решений подчиняется неавтомодельным законам. В отличие от (41) полуширина области горения изменяется при $t \rightarrow T_0^-$ по закону $l_{\phi}(t) \sim (T_0 - t)^{1/2} |\ln(T_0 - t)|^{1/2}$ (см. комментарии).

В случае $\beta > (N+2)/(N-2)_+$ задача (39), (40) может иметь нетривиальные решения. Тогда решение (38) эволюционирует при $t \rightarrow T_0^-$ в согласии с автомодельными закономерностями (41).

Пример. Пусть $\beta = 2$. Тогда при всех $N \in (6, 16)$ (отметим, что здесь $\beta > 1 + 2/N$) существует решение задачи (39), (40)

$$\theta_A(\xi) = A_N/(a_N + \xi^2)^2 + B_N/(a_N + \xi^2), \quad (43)$$

где a_N, A_N, B_N — положительные постоянные:

$$a_N = 2[10(1 + N/2)^{1/2} - (N + 14)],$$

$$A_N = 48[10(1 + N/2)^{1/2} - (N + 14)], \quad B_N = 24[(1 + N/2)^{1/2} - 2].$$

Отсутствие автомодельных решений при $N = 1$ требует существенной переработки схемы доказательства эффективной локализации неограниченных решений.

2.5. Доказательство эффективной локализации в одномерном случае. Итак, задача (39), (40) при $N = 1$ решения не имеет. Однако (39) допускает решения $\theta_A(\xi)$ с асимптотикой

$$\theta_A = \theta_*(\xi) = C\xi^{-2/(\beta-1)}(1 + \omega(\xi)), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (44)$$

где $\omega(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ и $C > 0$ — постоянная. Фиксируем некоторое $C = C_*$ в (44) и продолжим его в область достаточно малых ξ . Тогда, очевидно, найдется такое $\xi = \xi_* < 0$, что $\theta_*(\xi_*) = 0$ (рис. 66). (Тот факт, что $\theta_*(\xi)$ имеет такой вид, вытекает из предложения 1.) Положим теперь $\theta_*(\xi) \equiv 0$ при $\xi < \xi_*$ и введем в рассмотрение нижнее решение уравнения (17):

$$u_*(t, x) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}\theta_*(\xi), \quad \xi = x/(T_0 - t)^{1/2}, \quad (45)$$

$$0 < t < T_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функция u_* обращается в бесконечность при $t \rightarrow T_0^-$ только в одной точке и при $x > 0$ является критической: $(u_*)_t > 0$.

Следовательно (см. теорему 5 § 1),

$$u_*(t, x) < u_*(T_0^-, x) \equiv C_* x^{-2/(\beta-1)}, \quad x > 0. \quad (46)$$

При доказательстве локализации мы будем следовать идеям, изложенным в § 6. Поскольку u_* не является решением в $(0, T_0) \times \mathbf{R}$, с помощью этого подхода в общем случае не удается доказать, что $u(T_0^-, x) = \infty$ только в одной точке. Поэтому мы сначала определим условия ограниченности области локализации ω_L .

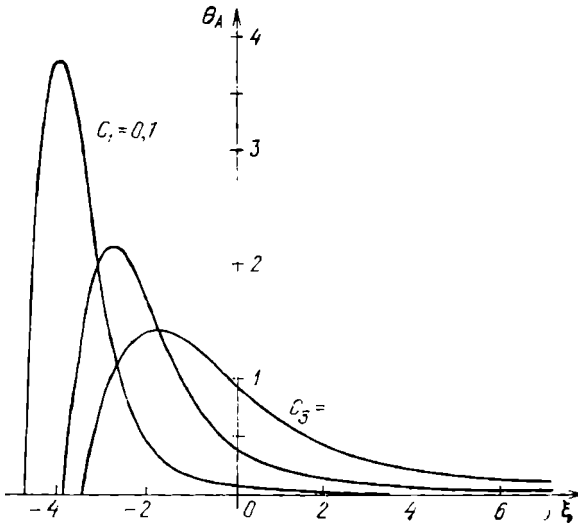


Рис. 66. Различные функции $\theta_A(\xi)$ с асимптотикой (44), $\beta = 2$

Прежде всего необходимо выделить достаточно широкое множество критических начальных функций $u_0(x)$ таких, что $u_i(t, x) \geq 0$ в $(0, T_0) \times \mathbf{R}$, где $T_0 < \infty$ — время существования неограниченного решения задачи (17). В качестве $u_0 \geq 0$ можно взять решения стационарного уравнения $u_0'' + u_0^\beta = 0$ (см. § 6). Кроме того, легко проверить, что функции вида

$$u_0(x) = A \exp\{-\alpha|x|^2\}, \quad x \in \mathbf{R}; \quad A > 0, \quad \alpha > 0 \quad (47)$$

будут критическими (т. е. $u_0'' + u_0^\beta \geq 0$ в \mathbf{R} ; см. § 1 гл. V), если

$$A^{\beta-1} \geq 2\alpha \exp\{(\beta-1)/2\}.$$

Помимо этого, критическими будут функции

$$u_0(x) = A(a^2 + |x|^2)^{-1/(\beta-1)}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (47')$$

где $A^{\beta-1} \geq 2/(\beta-1)$, $a^2 > 0$ — произвольное.

Существенно расширяет множество критических функций u_0 следующая

¹ Лемма 3. Пусть $u_0^{(1)}, u_0^{(2)}$ — гладкие критические начальные функции. Тогда $u_0^{(3)} = u_0^{(1)} + u_0^{(2)}$ — также критическая функция.

Доказательство опосредовано на очевидном неравенстве

$$(u_0^{(1)} + u_0^{(2)})'' + (u_0^{(1)} + u_0^{(2)})^\beta \geq [u_0^{(1)''} + (u_0^{(1)})^\beta] + [u_0^{(2)''} + (u_0^{(2)})^\beta]. \quad (48)$$

Это неравенство доказывает критичность суммы критических начальных функций и в том случае, когда они финитны и $u_0^{(i)} \in C^2(|x \in \mathbb{R} | u_0^{(i)} > 0|)$. Кроме того, критической является функция $\max\{u_0^{(1)}, u_0^{(2)}\}$. Доказательство этих утверждений можно провести, например, путем аппроксимации критических функций равномерно сходящейся последовательностью гладких критических функций.

Очевидно также, что если $u_0(x)$ — критическая функция, то $u_0(x - x_0)$ — также критическая функция при любом $x_0 \in \mathbb{R}$. Поэтому, используя различные функции (47) и (47'), можно получить широкое семейство немонотонных критических функций.

Следующее утверждение доказано в более общем виде в § 6 гл. V.

Лемма 4. Пусть $u_0(x) \neq 0$ — критическая начальная функция задачи (17), $N = 1$. Тогда решение $u(t, x)$ существует в течение конечного времени.

Теперь мы можем перейти к исследованию локализации неограниченных решений.

Теорема 6. Пусть $N = 1$, $\beta > 1$, функция $u_0 \neq 0$ в задаче Коши (17) является критической, $u_0(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ монотонно и

$$u_0(x) < (C_* - \varepsilon) |x|^{-2/(\beta-1)} \quad (49)$$

при всех достаточно больших $|x| > l = \text{const} > 0$, где $\varepsilon \in (0, C_*)$ — постоянная. Пусть $T_0 < \infty$ — время обострения решения. Тогда множество ω_L ограничено.

Доказательство. Воспользуемся методом доказательства теоремы 2 в § 6. Покажем, что ω_L ограничено справа. Обозначим через $u_*(t, x; x_0)$ нижнее решение (45) с тем же моментом обострения $t = T_0 < \infty$, обращающееся в бесконечность при $t \rightarrow T_0^-$ в точке $x = x_0 \in \mathbb{R}$ (для (45) это имеет место в точке $x = 0$). Выберем теперь величину x_0 столь большой, чтобы $u_0(x)$ и $u_*(0, x; x_0)$ пересекались ровно в одной точке (либо вообще не пересекались, если $u_0(x)$ финитна справа); взаимное расположение этих функций см. на рис. 67.

В силу (49) и (44) это всегда можно сделать. Тогда, как следует из (46), $u_*(t, x; x_0) < u_*(T_0^-, x; x_0) = C_*(x - x_0)^{-2/(\beta-1)}$ при всех $t \in (0, T_0)$ и $x > x_0$. Поэтому критическое решение $u(t, x)$ не может иметь при $t \in (0, T_0)$ пересечений с функцией $C_*(x - x_0)^{-2/(\beta-1)}$ в области $x > x_0$, поскольку возникновение такого пересечения влечет за собой различие моментов обострения функций $u(t, x)$ и $u_*(t, x; x_0)$, рассматриваемых как решения

краевых задач в ограниченной по x области. За подробностями мы отсылаем к доказательству теоремы 2 в § 6.

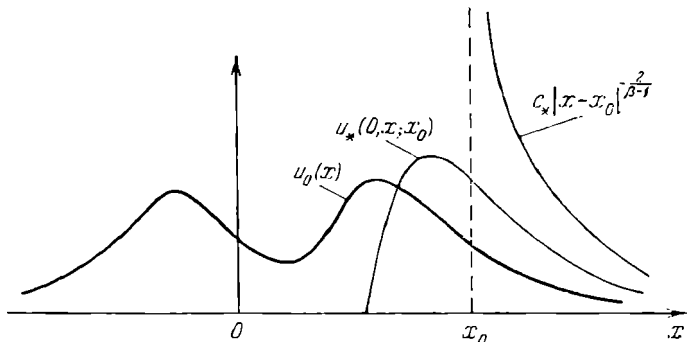


Рис. 67

Приведем в качестве примера одно утверждение, в котором на основе сравнения с автомодельным решением (38), (43) устанавливается оптимальное условие $\text{mes } \omega_L = 0$.

Теорема 6'. Пусть $\beta = 2$, $N \in (6, 16)$, начальная функция $u_0 = u_0(|x|)$ в (17) является критической и $T_0 = T_0(u_0) < \infty$. Пусть $u_0(0) > T_0^{-1/(\beta-1)} \theta_A(0)$, где θ_A — функция (43), и, кроме того, $u_0(|x|)$ и $T_0^{-1/(\beta-1)} \theta_A(|x| T_0^{-1/2})$ пересекаются по $r = |x|$ ровно в одной точке. Тогда всюду в $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

$$u(T_0^-, x) \equiv \lim_{t \rightarrow T_0^-} u(t, x) < B_N |x|^{-2/(\beta-1)},$$

где $B_N = 24[(1 + N/2)^{1/2} - 2]$.

В условиях теоремы 6' существует только одна сингулярная точка, в окрестности которой возникает не более, чем степенная сингулярность. Доказательство этого утверждения полностью повторяет доказательство теоремы 2 § 6. Необходимо, правда, проверить, существуют ли функции u_0 , удовлетворяющие условиям теоремы.

2.6. о пространственно временной структуре глобальных решений. При $\beta > 1 + 2/N$ задача (17) имеет глобальные решения, определенные при всех $t > 0$ (см. теорему 5). Ниже мы кратко остановимся на анализе глобальных автомодельных решений:

$$u_A(t, x) = (T + t)^{-1/(\beta-1)} f_A(\zeta), \quad \zeta = |x| / (T + t)^{1/2}, \quad (50)$$

где f_A удовлетворяет задаче

$$\frac{1}{\zeta^{N-1}} (\zeta^{N-1} f_A')' + \frac{1}{2} f_A' \zeta + \frac{1}{\beta-1} f_A + f_A^\beta = 0, \quad \zeta > 0, \quad (51)$$

$$f_A'(0) = 0, \quad f_A(\infty) = 0.$$

Исследование задачи (51) проводится теми же методами, что и в квазилинейном случае (см. п. 4 § 3). Поэтому мы ограничимся только формулировкой основного результата. Отметим, что (51) допускает решения $f_A(\xi)$ с асимптотикой при $\xi \rightarrow \infty$ только двух видов: степенного

$$f_A(\xi) \simeq C_1 \xi^{-2/(\beta-1)}, \quad \xi \rightarrow \infty; \quad C_1 > 0; \quad (52)$$

или «экспоненциального»

$$f_A(\xi) \simeq C_2 \xi^\alpha \exp\{-\xi^2/4\}, \quad \xi \rightarrow \infty; \quad C_2 > 0, \quad (53)$$

где $\alpha = N[1 + 2/N - \beta]/(\beta - 1)$. Асимптотика общего решения уравнения (51) при $\xi \rightarrow \infty$ получается в результате суперпозиции (52) и (53):

$$f_A(\xi) = [C_1 \xi^{-2/(\beta-1)} + \dots] + [C_2 \xi^\alpha \exp\{-\xi^2/4\} + \dots],$$

где $C_1 \geq 0, C_2 \geq 0$ — постоянные.

Теорема 7. Пусть $\beta > 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\beta \leq 1 + 2/N$, то задача (51) не имеет положительного решения;

2) если $1 + 2/N < \beta < \infty$ при $N = 1$ и $N = 2$ или $1 + 2/N < \beta < (N + 2)/(N - 2)$ при $N \geq 3$, то задача (51) имеет бесконечное множество решений с асимптотикой (52), которым отвечают достаточно малые значения $\mu = f_A(0) > 0$, и по крайней мере одно решение с экспоненциальной асимптотикой (53);

3) если $\beta \geq (N + 2)/(N - 2)$, $N \geq 3$, то при любом значении $\mu = f_A(0) > 0$ решение $f_A(\xi)$ строго положительно в \mathbf{R}_+ и имеет асимптотику (52).

Так же как в § 3, можно построить бесконечномерное множество радиально несимметричных автомодельных решений вида (50), где $\xi = x/(T + t)^{1/2} \in \mathbf{R}^N$ и $f_A > 0$ удовлетворяет соответствующему эллиптическому уравнению в \mathbf{R}^N . На это, в частности, указывает и тот факт, что при $|\xi| \rightarrow \infty$ в радиально симметричном случае имеется двухпараметрическое семейство подходящих асимптотик. Например, в одномерном случае это свидетельствует о существовании функций $f_A(\xi) > 0$, которые не являются четными.

Исследование асимптотической устойчивости автомодельных решений (50) проводится так же, как в § 3. Именно, если функция $f_A(\xi)$ достаточно мала ($f_A(0) < \{N[\beta - (1 + 2/N)]/[2\beta(\beta - 1)]\}^{1/(\beta-1)}$) и имеет степенную асимптотику (52), то соответствующее автомодельное решение (50) устойчиво в $L^1(\mathbf{R}^N)$ при $t \rightarrow \infty$. Если же f_A удовлетворяет (53), то $u_A(t, x)$ неустойчиво, и асимптотическое поведение глобальных решений с достаточно «малыми» $u_0(x)$ описывается при $\beta > 1 + 2/N$ автомодельными решениями уравнения без источника $v_t = \Delta v$. В частности, если $u_0 \in L^1(\mathbf{R}^N)$, то $u(t, x)$ эволюционирует при $t \rightarrow \infty$ в соответствии с пространственно временной структурой фундаментального решения уравнения теплопроводности.

3. Об уравнении с «логарифмической» нелинейностью $u_t = \Delta u + (1+u) \ln^\beta(1+u)$. Предыдущие результаты свидетельствуют о том, что неограниченные решения уравнения со степенной нелинейностью развиваются в LS-режиме и локализованы в эффективном смысле в области нулевой меры (неограниченно возрастают, например, только в одной точке). Тогда возникает вопрос: возможны ли для полулинейного уравнения HS- и S-режимы горения с обострением?

Все три типа неограниченных решений допускает при различных значениях параметра $\beta > 1$ уравнение (1) с нестепенной нелинейностью

$$V(u) \equiv u_t - \Delta u - (1+u) \ln^\beta(1+u) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (54)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (55)$$

Здесь $\beta > 1$, и поэтому выполнено необходимое условие (3) возникновения режимов с обострением. Уравнение (54) обладает рядом необычных свойств; в частности, будет показано, что асимптотическое поведение его неограниченных решений описывается инвариантными решениями уравнения первого порядка типа Гамильтона — Якоби. Это своеобразное вырождение уравнения по своему характеру аналогично вырождению в краевой задаче для уравнения теплопроводности с экспоненциальными граничными режимами (см. § 4 гл. III). Эта аналогия определяет вид источника в (54).

3.1. Условие глобальной неразрешимости задачи Коши. Источник $Q(u)$ в уравнении (54) ведет себя при $u \rightarrow 0^+$ как u^β . Поэтому из теоремы 1 в п. 1 следует, что при $\beta < 1 + 2/N$ все решения задачи (54), (55) являются неограниченными. Для вывода более детальных оценок мы используем нижние (и верхние) решения уравнения (54), которые кроме всего прочего позволяют обоснованно судить о структуре неограниченных решений на развитой стадии эволюции.

Построение неограниченных нижних решений удобно провести для преобразованного уравнения. Введем вместо $u(t, x)$ новую функцию $U(t, x) = \ln[1 + u(t, x)] \geq 0$. Тогда для U получаем задачу Коши:

$$D(U) \equiv U_t - \Delta U - |\nabla U|^2 - U^\beta = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad (56)$$

$$U(0, x) = U_0(x) = \ln[1 + u_0(x)] \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (57)$$

Нижнее решение уравнения (56) мы определяем в соответствии с автомодельным решением вырожденного уравнения, в котором по сравнению с (56) исключен член ΔU (см. об этом в следующем пункте). Положим

$$U_- (t, x) = (T - t)^{-1/(\beta-1)} g(\xi), \quad \xi = |x| / (T - t)^{(\beta-2)/(2(\beta-1))}, \quad (58)$$

где $T > 0$ — постоянная и $g(\xi) = A(a^2 - \xi^2)_+$, $A > 0$, $a > 0$. После

подстановки (58) в неравенство $D(U_-) \leq 0$ получим неравенство

$$(T-t)^{1/(\beta-1)} \frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} g')' + g'^2 - \frac{\beta-2}{2(\beta-1)} g' \xi - \frac{1}{\beta-1} g + g^\beta \geq 0, \quad (59)$$

которое должно быть выполнено при всех $\xi \geq 0$ и $0 < t < T$

Подставляя сюда конкретный вид функции g , получаем, что (59) будет справедливо, если

$$-\left[2NT^{1/(\beta-1)} + \frac{a^2}{\beta-1}\right] + \xi^2(4A+1) + A^{\beta-1}(a^2 - \xi^2)^\beta \geq 0, \quad 0 \leq \xi \leq a. \quad (60)$$

Это неравенство имеет место, например, при следующих условиях:

$$T^{1/(\beta-1)} \leq \frac{2a^2}{N} \left[A - \frac{2-\beta}{4(\beta-1)} \right], \quad (61)$$

$$2NT^{1/(\beta-1)} + \frac{a^2}{\beta-1} \leq A^{\beta-1} \left[a^2 - \frac{2NT^{1/(\beta-1)} + a^{2/(\beta-1)}}{4A+1} \right]^\beta \quad (62)$$

Нетрудно видеть, что для любого $T > 0$ найдутся такие A, a , что (61), (62) выполнены. Тогда, возвращаясь к решению исходной задачи $u = e^u - 1$, получаем такое утверждение:

Теорема 8. Пусть начальная функция u_0 такова, что

$$u_0(x) \geq \exp\{T^{-1/(\beta-1)}A[a^2 - |x|^2T^{-(\beta-2)/(\beta-1)}]_+\} - 1, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (63)$$

где постоянные T, A, a удовлетворяют (61), (62). Тогда решение задачи (54), (55) существует в течение времени, не большего T .

3.2. Достаточные условия глобальной разрешимости задачи Коши. Покажем, что при $\beta > 1 + 2/N$ уравнение (56) имеет ограниченные верхние решения

$$U_+(t, x) = (T+t)^{-1/(\beta-1)} p(\eta), \quad \eta = |x|/(T+t)^{1/2}, \quad (64)$$

где $T > 0$ — постоянная. Неравенство $D(U_+) \geq 0$ тогда принимает вид

$$\frac{1}{\eta^{N-1}} (\eta^{N-1} p')' + (T+t)^{-1/(\beta-1)} (p')^2 + \frac{1}{2} p' \eta + \frac{1}{\beta-1} p + p^\beta \leq 0, \quad \eta > 0,$$

и в случае $p(\eta) = A \exp\{-\alpha\eta^2\}$ будет заведомо выполнено, если

$$-2\alpha N + \frac{1}{\beta-1} + \alpha(4\alpha-1)\eta^2 + 4\alpha^2 A T^{-1/(\beta-1)} \eta^2 \exp\{-\alpha\eta^2\} + A^{\beta-1} \exp\{-\alpha(\beta-1)\eta^2\} \leq 0, \quad \eta > 0.$$

Для этого достаточно, чтобы

$$\frac{1}{2N(\beta-1)} < \alpha \leq \frac{1}{4}, \quad \frac{4\alpha T^{-1/(\beta-1)}}{e} \leq 2\alpha N - \frac{1}{\beta-1} - A^{\beta-1}. \quad (65)$$

При этом из (65) вытекает необходимость ограничения $1/[2N(\beta-1)] < 1/4$, т. е. известное условие $\beta > 1 + 2/N$.

Теорема 9. Пусть $\beta > 1 + 2/N$. Тогда при любых начальных функциях

$$u_0(x) \leq \exp \{T^{-1/(\beta-1)} A \exp \{-\alpha |x|^2 T^{-1}\}\} - 1, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

где положительные постоянные T , A , α удовлетворяют условиям (65), задача (54), (55) имеет глобальное решение, причем

$$u(t, x) \leq \exp \{(T+t)^{-1/(\beta-1)} A \exp \{-\alpha |x|^2 (T+t)^{-1}\}\} - 1, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (66)$$

3.3. Неограниченные приближенные автомодельные решения (п. а. р.). Теперь мы подробнее остановимся на исследовании пространственно временной структуры неограниченных решений задачи (54), (55). Прежде всего отметим, что точных автомодельных или инвариантных решений ни (54), ни эквивалентное ему уравнение (56) не имеют. Однако при построении нижних решений (58) уравнения (56) мы убедились, что вклад члена ΔU в неравенство (59) (в (59) ему соответствует первый член $(T-t)^{1/(\beta-1)} \xi^{1-N} (\xi^{N-1} g')'$) является исчезающе малым. Таким образом, по аналогии с результатами § 4 гл. III вторая производная ΔU на асимптотической стадии эволюции становится не существенной по сравнению с другими членами уравнения. Поэтому следует ожидать, что решение задачи в определенном смысле близко к решению нелинейного уравнения первого порядка типа Гамильтона — Якоби:

$$V_t = |\nabla V|^2 + V^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (67)$$

которое получается из (56) отбрасыванием «малого» члена ΔU . Более простое уравнение (67) имеет неограниченное автомодельное решение, которое мы будем называть п. а. р. исходного уравнения (56) и обозначать через U_a . Оно, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$U_a(t, x) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} \theta_a(\xi), \quad \xi = x / (T_0 - t)^{(\beta-2)/[2(\beta-1)]}, \quad (68)$$

где функция $\theta_a(\xi)$ всюду, где она положительна, удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial \theta_a}{\partial \xi_i} \right)^2 - \frac{\beta-2}{2(\beta-1)} \frac{\partial \theta_a}{\partial \xi_i} \xi_i \right] - \frac{1}{\beta-1} \theta_a + \theta_a^\beta = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^N \quad (69)$$

Для остальных $\xi \in \mathbb{R}^N$ полагаем $\theta_a(\xi) = 0$. Отметим, что (69) имеет пространственно однородное решение $\theta_a = \theta_N = (\beta-1)^{-1/(\beta-1)}$. Радиально симметричная функция $\theta_a(\xi)$, $\xi = |\xi|$, удовлетворяет такой задаче:

$$(\theta'_a)^2 - \frac{\beta-2}{2(\beta-1)} \theta'_a \xi - \frac{1}{\beta-1} \theta_a + \theta_a^\beta = 0, \quad \xi > 0; \quad (70)$$

$$\theta'_a(0) = 0, \quad \theta_a(\infty) = 0. \quad (71)$$

Второе краевое условие в (71) указано для удобства; функция

$\theta_a \geq 0$ может не иметь достаточной гладкости, и если $\theta_a(\xi_*) = 0$, то мы полагаем $\theta_a = 0$ в (ξ_*, ∞) .

Лемма 5. При любых $\beta > 1$ существует (обобщенное) решение $\theta_a \geq 0$ задачи (70), (71), причем

$$\theta_a(\zeta) = (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)} - \frac{1}{4(\beta-1)} \zeta^2 + o(\zeta^2), \quad \zeta \rightarrow 0. \quad (72)$$

Это решение является убывающим и принадлежит C^2 всюду, где оно положительно. При $1 < \beta \leq 2$ решение финитно, при $\beta > 2$ строго положительно в \mathbf{R}_+ .

Локальная разрешимость задачи устанавливается путем сведения (70), (71) к эквивалентному интегральному уравнению. Монотонность решения, удовлетворяющего (72), непосредственно вытекает из вида уравнения. Если $1 < \beta < 2$, то из (70) также получаем

$$\theta_a'^2 - \frac{\theta_a}{\beta-1} + \theta_a^\beta = \frac{\beta-2}{2(\beta-1)} \theta_a' \zeta \geq 0, \quad \zeta > 0.$$

Отсюда

$$\theta_a' \leq - \left[\theta_a \left(\frac{1}{\beta-1} - \theta_a^{\beta-1} \right) \right]^{1/2} \quad \theta_a(0) = \theta_H.$$

Интегрируя это неравенство, получаем оценку сверху решения θ_a через неполную бета-функцию и, в частности, оценку носителя:

$$\text{mes supp } \theta_a < \pi^{1/2} (\beta-1)^{-\beta/[2(\beta-1)]} \frac{\Gamma(1/[2(\beta-1)])}{\Gamma(\beta/[2(\beta-1)])} < \infty. \quad (73)$$

При $\beta = 2$ уравнение (70) интегрируется, и его решение представимо в явном виде:

$$\theta_a(\zeta) = \begin{cases} \cos^2(\zeta/2), & \zeta \leq \pi, \\ 0, & \zeta > \pi. \end{cases} \quad (74)$$

В одномерном случае это решение определяет фундаментальную длину $L_S = 2\pi$ S-режима. Если же $\beta > 2$, то, как следует из (70),

$$-\frac{\beta-2}{2(\beta-1)} \theta_a' \zeta - \frac{1}{\beta-1} \theta_a = -\theta_a'^2 - \theta_a^\beta \leq 0. \quad (75)$$

Если $\theta_a(\zeta_1) > 0$, $\zeta_1 > 0$, то отсюда получаем

$$\theta_a(\zeta) \geq \theta_a(\zeta_1) \left(\frac{\zeta}{\zeta_1} \right)^{-2/(\beta-2)} \quad \zeta > \zeta_1.$$

Тем самым при $\beta > 2$ решение строго положительно в \mathbf{R}_+ .

Отметим также, что искомое решение θ_a при всех $\beta > 1$ не меньше, чем убывающее решение задачи без источника:

$$f'^2 - \frac{\beta-2}{2(\beta-1)} f' \zeta - \frac{1}{\beta-1} f = 0, \quad \zeta > 0; \quad f(0) = \theta_H,$$

которое подробно рассматривалось в § 4 гл. III. Там было показано, что функция $f(\zeta) \geq 0$ определяется из некоторого алгебраи-

ческого равенства, что позволяет вывести оценки $\theta_a(\zeta)$ снизу. Отсюда, например, в случае $1 < \beta < 2$ получаем

$$\text{mes sup } \theta_a > \text{mes sup } f = 2 \left(\frac{2-\beta}{\beta-1} \right)^{(2-\beta)/[2(\beta-1)]}.$$

Весьма наглядное представление о качественных свойствах решения θ_a дает приведенное на рис. 68, 69 изображение поля

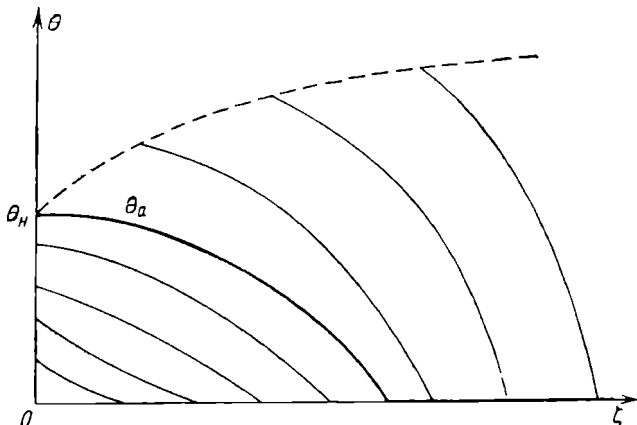


Рис. 68. Решения уравнения (76) при $1 < \beta < 2$

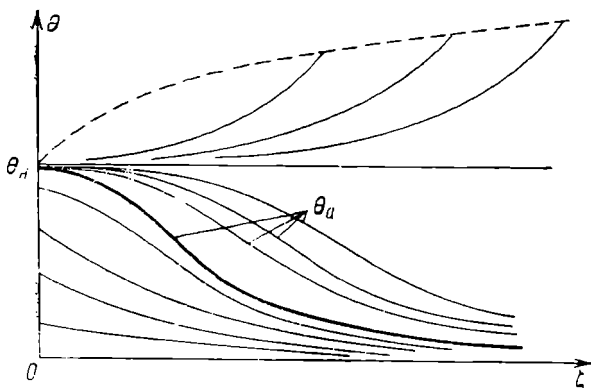


Рис. 69. Решения уравнения (76) при $\beta > 2$. Решение задачи (70), (71) неединственно

интегральных кривых уравнения

$$\theta' = \frac{\beta-2}{4(\beta-1)} \zeta - \left\{ \left[\frac{\beta-2}{4(\beta-1)} \right]^2 \zeta^2 + \frac{1}{\beta-1} \theta - \theta^\beta \right\}^{1/2} \quad (76)$$

которое эквивалентно уравнению (70). Жирной линией обозначено решение $\theta_a \geq 0$ с асимптотикой (72), удовлетворяющее условиям (71).

■ Здесь необходимо отметить, что при $\beta > 2$ помимо решения вида (72) существует пучок подходящих положительных решений с другой асимптотикой:

$$\theta_a(\xi) \simeq (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)} - C\xi^{(2(\beta-1))/(\beta-2)}, \quad \xi \rightarrow 0; \quad C = \text{const} > 0, \quad (72')$$

который изображен на рис. 69. Численные расчеты задачи (56), (57) указывают на то, что пространственно временная структура п. а. р. (68) верно передает асимптотические свойства неограниченных решений, однако остается неясным, какая из функций (72) или (72') реализуется в LS-режиме при $t \rightarrow T_0^-$.

Законность проведенного выше «усечения» уравнения (56) и перехода к уравнению первого порядка (67) проверялась в серии численных расчетов, которые показали асимптотическую сходимость неограниченного решения задачи (56), (57) к п. а. р. (68). В ходе численного расчета автомодельное представление решения $U(t, x)$ определялось по формуле

$$\theta(t, \xi) = \theta_a(0) \frac{U(t, \xi \| U \|_{C_x}^{(2-\beta)/2} \cdot \theta_a^{(\beta-2)/2}(0))}{\| U \|_{C_x}}, \quad (77)$$

где $\| U \|_{C_x} = \sup_x U(t, x)$, $\theta_a(0) = (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}$.

Как обычно, в представлении (77) заложена пространственно временная структура п. а. р. (68), и если $u(t, x)$ развивается по его законам, то должно быть выполнено предельное равенство

$$\lim_{\| U \|_{C_x} \rightarrow \infty} \theta(t, \xi) = \theta_a(\xi). \quad (78)$$

Подчеркнем, что в данном случае обычную автомодельную нормировку, как, например, в § 4 гл. III, численно осуществить довольно трудно, поскольку здесь заранее не известен момент обострения решения.

Сходимость в смысле (78) к п. а. р. (68) с достаточно произвольных начальных функций численно установлена для различных $\beta \in (1, 2]$. При $\beta > 2$ (LS-режим), как мы знаем, автомодельная функция $\theta_a = \theta_a(|\xi|)$ в (68) определяется единственным образом. Для примера (рис. 70) приведены результаты автомодельной обработки (77) решения задачи (56), (57) при $\beta = 2$, когда θ_a имеет наиболее простой вид; см. (74). Отчетливо проявляется сходимость (78) при росте решения всего в 10–20 раз.

3.4. Три типа неограниченных решений. Из (68) следует, что пространственно временная структура п. а. р. зависит от знака разности $\beta - 2$. Так, если $\beta < 2$, то $U_a(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$ сразу во всем пространстве; это HS-режим, и локализация отсутствует. Таким образом, найдено полулинейное уравнение с неограниченными HS-решениями (напомним, что уравнение $u_t = \Delta u + u^\beta$ таких решений не допускало). На рис. 71 приведены результаты численного решения одномерной задачи

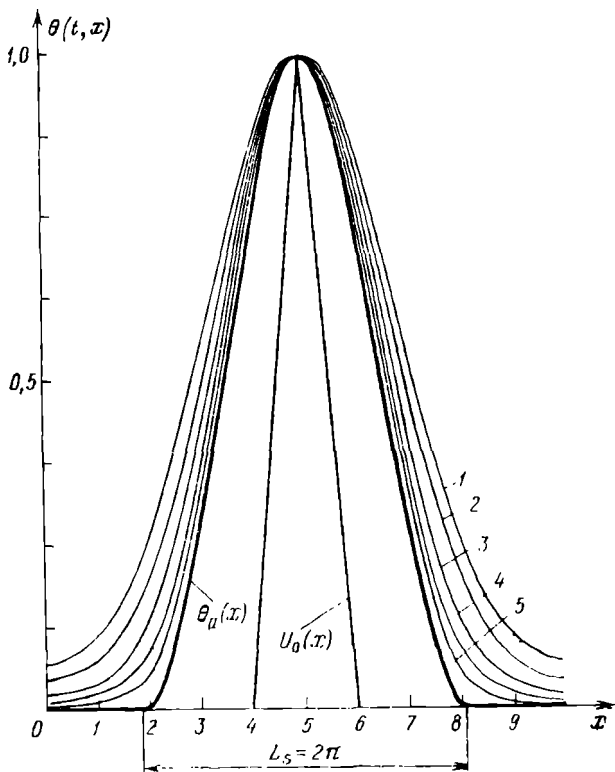


Рис. 70. Численная проверка асимптотической устойчивости в смысле (78) п. а. р. (68) при $\beta = 2$ ($\xi \equiv x$)
 $N = 1$: 1 — $t_1 = 2,82$; 2 — $t_2 = 3,03$; 3 — $t_3 = 3,12$; 4 —
 $t_4 = 3,16$; 5 — $t_5 = 3,18$

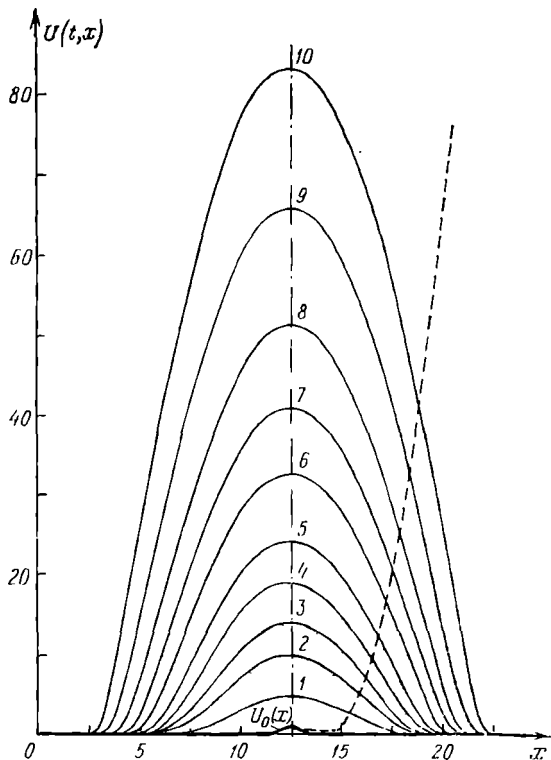


Рис. 71. Численное решение задачи (56), (57) при $\beta = 1,35$ (HS-режим), $N = 1$: 1 — $t_1 = 2,10$; 2 — $t_2 = 2,87$; 3 — $t_3 = 3,00$; 4 — $t_4 = 3,11$; 5 — $t_5 = 3,19$; 6 — $t_6 = 3,28$; 7 — $t_7 = 3,34$; 8 — $t_8 = 3,40$; 9 — $t_9 = 3,45$; 10 — $t_{10} = 3,51$

(56), (57) при $\beta < 2$, которые находятся в хорошем соответствии с (68); в частности, это касается характера изменения амплитуды и полуширины решения.

При $\beta = 2$, как следует из (68) и численных результатов, горение происходит в S-режиме, когда $u(t, x)$ возрастает до бесконечности на ограниченном множестве. В случае симметричного

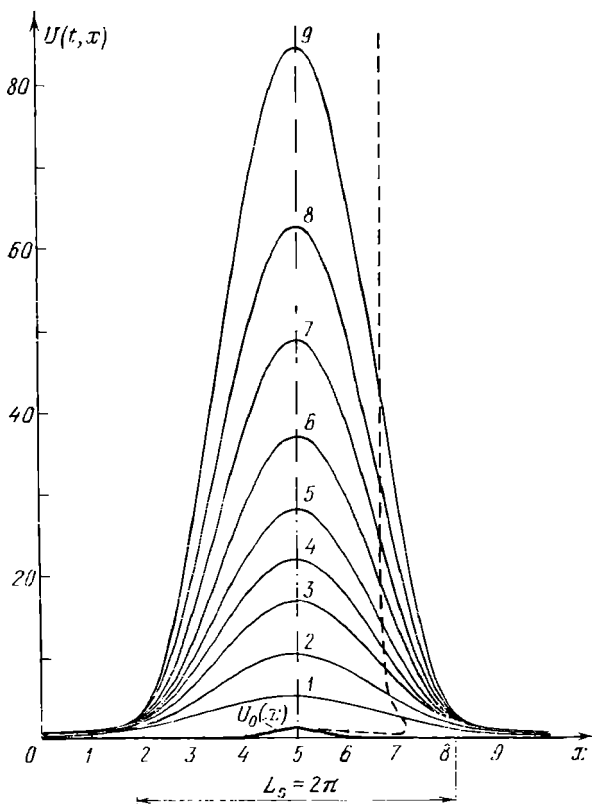


Рис. 72. Численное решение задачи (56), (57) при $\beta = 2$ (S-режим), $N = 1$: 1 — $t_1 = 3,007$; 2 — $t_2 = 3,107$; 3 — $t_3 = 3,142$; 4 — $t_4 = 3,156$; 5 — $t_5 = 3,165$; 6 — $t_6 = 3,173$; 7 — $t_7 = 3,179$; 8 — $t_8 = 3,183$; 9 — $t_9 = 3,187$

элементарного возмущения область локализации S-режима представляет собой носитель функции (74): $\omega_1 = \{|x| < \pi\}$. В одномерном случае это интервал длиной $L_s = 2\pi$ (рис. 72); автомодельная обработка этого расчета приведена на рис. 70. Если области локализации, отвечающие разным возмущениям, не пересекаются, то горение внутри них при $t \rightarrow T_0^-$ происходит независимо (рис. 73).

Если $\beta > 2$, то (68) обеспечивает неограниченное возрастание решения только в одной точке. Это локализованный LS-режим

горения; конкретный пример его реализации приведен на рис. 74. Хорошо видно, что всюду, за исключением одной сингулярной точки, решение $U(t, x)$ задачи (56), (57) ограничено сверху равномерно по t некоторым предельным распределением $U(T_0^-, x) < \infty, x \neq 3$.

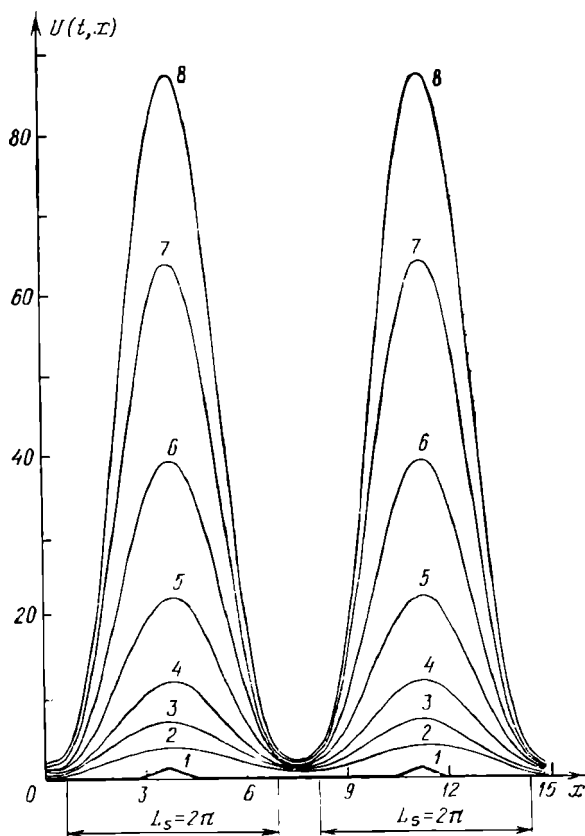


Рис. 73. Независимое горение тепловых структур при $\beta = 2$ (S-режим), $N = 1$: 1 — $t_1 = 0$; 2 — $t_2 = 2,915$; 3 — $t_3 = 3,026$; 4 — $t_4 = 3,079$; 5 — $t_5 = 3,115$; 6 — $t_6 = 3,133$; 7 — $t_7 = 3,1421$; 8 — $t_8 = 3,1459$

На рисунках штриховой линией выделена траектория движения полуширины $x_{\Phi}(t)$ тепловой структуры, горение которой инициируется заданием одного и того же начального возмущения. Сначала амплитуда решения $U(t, x)$ падает и полуширина увеличивается, что отвечает процессу расплывания нерезонансного возмущения, а затем, когда развивается режим с обострением, $x_{\Phi}(t)$ начинает изменяться в соответствии с п. а. р. (68): $x_{\Phi}(t) \sim (T_0 - t)^{(\beta-2)/[2(\beta-1)]}, t \rightarrow T_0^-$. В частно-

сти, при $\beta = 2$ (S-режим) полуширина стабилизируется, что отчетливо видно на рис. 72.

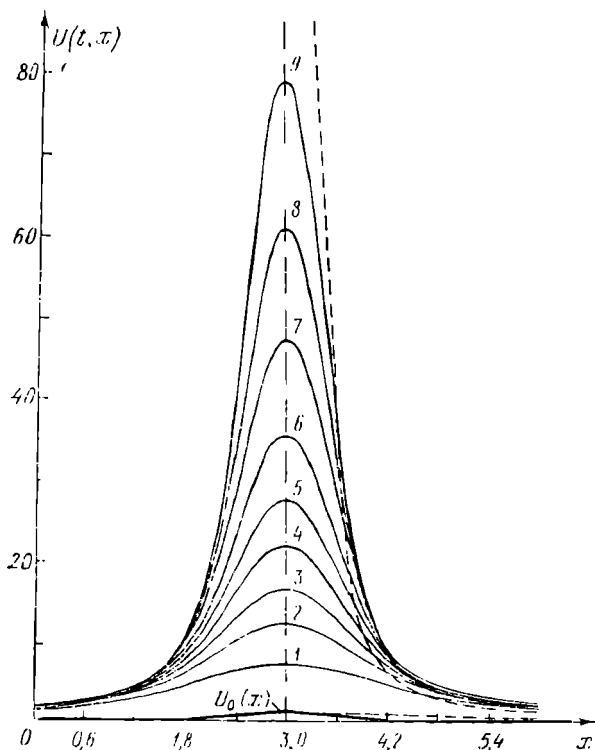


Рис. 74. Численное решение задачи (56), (57) при $\beta = 2,50$ (LS-режим), $N = 1$: 1 — $t_1 = 4,257$; 2 — $t_2 = 4,275$; 3 — $t_3 = 4,280$; 4 — $t_4 = 4,283$; 5 — $t_5 = 4,285$; 6 — $t_6 = 4,286$; 7 — $t_7 = 4,2873$; 8 — $t_8 = 4,2879$; 9 — $t_9 = 4,2883$

Сформулированные выводы об устойчивости п. а. р. подтверждаются качественной теорией нестационарного осреднения. Так же как в § 2, приближенное решение $U_*(t, x)$ будем искать в виде $U_*(t, x) = \psi(t) \mu(\xi)$, $\xi = x/\varphi(t)$; $t > 0$, $\xi \in \mathbf{R}^N$, и потребуем, чтобы U_* удовлетворяло законам сохранения:

$$\int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{D}(U_*) dx = 0, \quad \int_{\mathbf{R}^N} U_* \mathbf{D}(U_*) dx = 0.$$

Тогда приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуды $\psi(t)$ и полуширины $\varphi(t)$ тепловой структуры:

$$\begin{aligned} (\psi \varphi^N)' &= \nu_1 \psi^2 \varphi^{N-2} + \nu_2 \psi^6 \varphi^N, \\ (\psi^2 \varphi^N)' &= -\nu_3 \psi^2 \varphi^{N-2} + \nu_4 \psi^3 \varphi^{N-2} + \nu_5 \psi^{6+1} \varphi^N, \end{aligned} \quad (79)$$

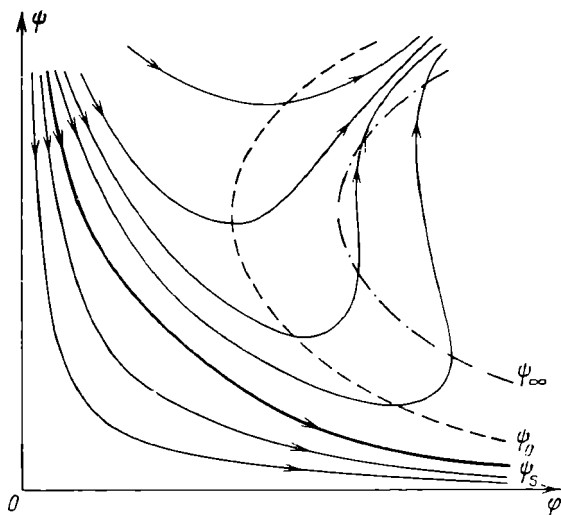


Рис. 75. Интегральные траектории уравнения (80) при $\beta \in (1, 2)$, $\beta > 1 + 2/N$

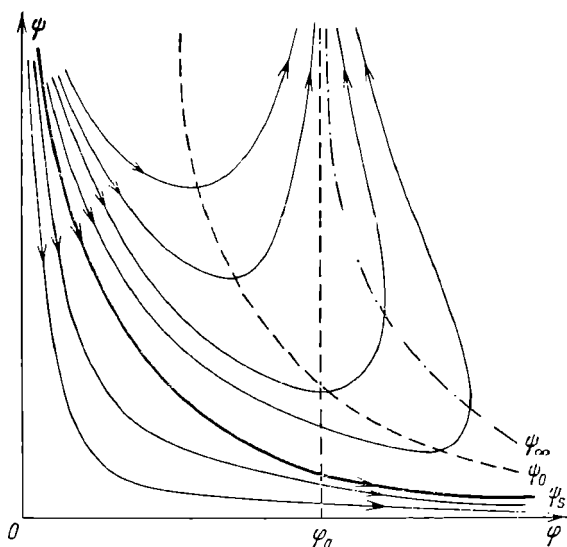


Рис. 76. Интегральные траектории уравнения (80) при $\beta = 2$ (случай $\beta > 1 + 2/N$ при $N > 2$), $\varphi_a = (b_2/a_2)^{1/2}$

где v_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) — некоторые функционалы от μ (конкретный вид их легко восстанавливается). От системы переходим к одному уравнению:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -N \frac{\psi}{\varphi} \left\{ \frac{a_1 \psi^{\beta-1} \varphi^2 - b_1 \psi - 1}{a_2 \psi^{\beta-1} \varphi^2 - b_2 \psi - 1} \right\}, \quad \psi > 0, \quad \varphi > 0, \quad (80)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — некоторые постоянные, которые, исходя из естественных требований к характеру поведения фазовых траекторий, мы будем считать положительными.

Уравнение (80) более сложное, чем то, которое рассматривалось в § 2. Главное отличие фактически заключается в следующем: (80) содержит три независимых критических значения параметра β , которые «управляют» общей структурой фазовой плоскости. Во-первых, это $\beta = 2$; критерий $\beta \geq 2$ определяет существование или отсутствие локализации неограниченных решений (в случаях $\beta \geq 2$ и $\beta < 2$ поведение интегральных кривых совершенно различно). Во-вторых, критическое значение $\beta = 1 + 2/N$; при $\beta < 1 + 2/N$ уравнение (80) не имеет глобальных траекторий, а при $\beta > 1 + 2/N$, наоборот, существуют траектории, которым отвечают глобальные решения исходной задачи. И в третьих, это $\beta = 2 + 2/N$. При больших амплитудах ψ можно пренебречь постоянными слагаемыми в числителе и знаменателе (80); в результате получается приближенное равенство

$$\frac{d\psi}{d\varphi} \simeq -N \frac{\psi \left\{ \frac{a_1 \psi^{\beta-2} \varphi^2 - b_1}{a_2 \psi^{\beta-2} \varphi^2 - b_2} \right\},$$

которое совпадает с рассмотренным в § 2 при $\sigma = 1$. Поэтому картина поведения траекторий зависит от условия $\beta \geq \sigma + 1 + 2/N \equiv 2 + 2/N$. При $\beta < 2 + 2/N$ все неограниченные траектории сходятся к «сепаратрисе», порожденной п. а. р. (68):

$$\begin{aligned} \psi &\simeq \varphi^{-2/(\beta-2)}, \quad \psi \rightarrow \infty; \\ \psi(t) &\sim (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}, \quad \varphi(t) \sim (T_0 - t)^{(\beta-2)/[2(\beta-1)]} \end{aligned} \quad (81)$$

при $t \rightarrow T_0^-$. Если же $\beta \geq 2 + 2/N$, то асимптотика неограниченных решений при $t \rightarrow T_0^-$ неавтономельна (см. § 2).

Большинство из этих результатов находится в правильном качественном согласии со сделанными ранее выводами. Оценки (81) дают, кроме того, и количественные совпадения при $1 < \beta < 2 + 2/N$, которые служат дополнительным свидетельством в пользу корректности построения неограниченных п. а. р. (68).

На рис. 75—77 приведено схематическое изображение поля интегральных кривых уравнения (80) соответственно в случаях $1 < \beta < 2$ (HS-режим горения с обострением), $\beta = 2$ (S-режим) и $\beta > 2$ (LS-режим). На всех трех рисунках параметры β, N подобраны таким образом, что, во-первых, $\beta > 1 + 2/N$ и тем самым имеется класс глобальных траекторий и, во-вторых, $\beta < 2 + 2/N$, т. е. неограниченные траектории ведут себя в соответствии с (81). Через ψ_s обозначена сепаратриса, отделяющая семейства глобальных и неограниченных траекторий, ψ_0 и ψ_∞ — изоклины соответственно нуля и бесконечности.

Итак, локализация неограниченных решений задачи (56), (57) имеет место при $\beta = 2$ (S-режим) и $\beta > 2$ (LS-режим), а при $\beta < 2$ она отсутствует. Разумеется, эта классификация не изменится, если мы перейдем к исходной задаче (54), (55). По-

лагая $u_a = \exp\{U_a\} - 1$, получаем выражение для п. а. р. уравнения (54)

$$u_a(t, x) = \exp\{(T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}\theta_a(\xi)\} - 1, \quad (82)$$

$$\xi = |x|/(T_0 - t)^{(\beta-2)/[2(\beta-1)]}.$$

Нетрудно убедиться, что оно удовлетворяет следующему нелинейному уравнению первого порядка типа Гамильтона — Якоби:

$$\partial u_a / \partial t = |\nabla u_a|^2 / (1 + u_a) + (1 + u_a) \ln^\beta(1 + u_a). \quad (83)$$

Отметим, что в исходных переменных t, x, u эволюционные характеристики процесса горения с обострением выглядят по-другому. В частности, из (82) нетрудно получить выражение для

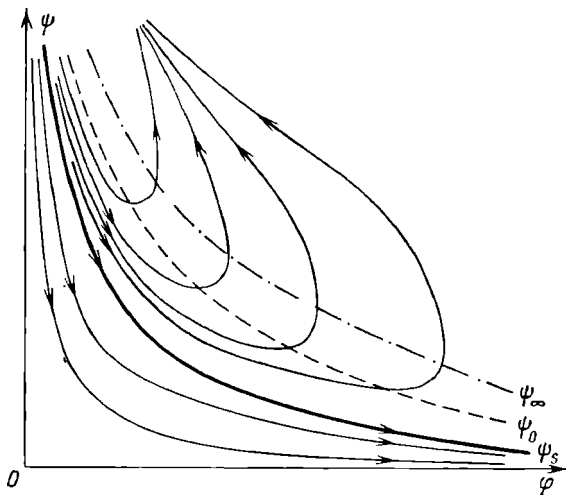


Рис. 77. Интегральные траектории уравнения (80) при $\beta > 2$ (случай $1 + 2/N < \beta < 2 + 2/N$)

зависимости от времени полуширины структуры $l_{\text{дф}}(t)$: при всех $\beta > 1$

$$l_{\text{дф}}(t) \sim (T_0 - t)^{1/2} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T_0^-. \quad (84)$$

В этом смысле три типа горения с обострением не различаются. В то же время при $\beta < 2$ решения не локализованы, и $u_a(t, x) \rightarrow \infty$ в \mathbf{R}^N , $t \rightarrow T_0^-$. Напротив, при $\beta \geq 2$ решения локализованы. Оценка (84) справедлива во всех случаях. Поэтому при численной реализации исходной задачи (54), (55) отличие HS-от S- и LS-режимов достаточно отчетливо может проявляться при большом росте амплитуды неограниченного решения (на десятки или даже сотни порядков). Логарифмическое преобразование $U = \ln(1 + u)$ позволяет устранить это неудобство (см. рис. 71, 72, где для идентификации режима достаточно роста амплитуды примерно в 5—10 раз).

3.5. О глобальных п. а. р. При $\beta > 1 + 2/N$ существуют глобальные п. а. р. задачи (54), (55). Как следует из методики построения ограниченных верхних решений в теореме 9, здесь на асимптотической стадии следует исключить из уравнения (56) член $|\nabla U|^2$. Поэтому глобальные п. а. р. U_a удовлетворяют параболическому уравнению

$$\partial U_a / \partial t = \Delta U_a + U_a^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

асимптотические свойства решений которого хорошо известны; см. п. 2.6.

Переходя к первоначальному обозначению, получаем для глобального п. а. р. $u_a = \exp\{U_a\} - 1$ следующее параболическое уравнение:

$$\partial u_a / \partial t = \Delta u_a - |\nabla u_a|^2 / (1 + u_a) + (1 + u_a) \ln^\beta(1 + u_a). \quad (85)$$

Таким образом, уравнение (54) обладает любопытным свойством: асимптотическое поведение его неограниченных и глобальных решений описывается существенно отличающимися друг от друга нелинейными уравнениями разных порядков (83) и (85).

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ. ПРОБЛЕМЫ

Первые качественные и численные результаты исследования неограниченных решений задачи (0.1), (0.2) получены в [155, 157, 92, 80, 79, 117, 124]. Там же проводился предварительный анализ неограниченных автомодельных решений и впервые сформулированы понятия локализации режимов с обострением в теплопроводных средах с объемным энерговыделением.

§ 1. Численные примеры эволюции S-, HS- и LS-режимов с обострением частично взяты из [92, 79, 157]. Идея описания немонотонности функций $\theta_A(\xi)$ при $\beta > \sigma + 1$ вблизи гомотермического решения путем линеаризации уравнения высказана в [155, 80] (см. также [81, 116, 117], где приведено много примеров численного построения семейств решений $\{\theta_A\}$ при различных $\sigma > 0$ и $\beta > \sigma + 1$, $N = 1$). Эта идея затем была реализована в [1, 2], где доказано существование конечного набора автомодельных функций $\theta_A(\xi)$ LS-режима при $N = 1$ (техника [1, 2], заметно отличается от использованной в § 1).

§ 2. Идея методов нестационарного осреднения принадлежит авторам работы [82]; см. об этом методе также в [80, 81, 117]. Отметим, что простота, конструктивность и достаточная надежность метода позволяют успешно применять его в ряде других задач, например при исследовании нелинейной задачи лазерной термохимии [17]. Есть основания рассматривать его как один из вариантов метода радиально-сферического расслоения функционального пространства (в отличие от метода сферического расслоения [147, 148]).

§ 3. При изложении пп. 1—3 мы в основном следуем [44]. Отметим, что при $\sigma = 0$ теорема 2 дает давно известный результат [206, 131] (это же относится и к теореме 3), хотя, конечно, метод доказательства в квазилинейном случае принципиально иной, чем в мультилинейном.

Утверждения п. 4 для случая $\sigma = 0$ получены в [219]. Основа доказательства леммы 1 — известное неравенство [144, 145], схема доказательства взята из [219]. Семейство решений (50) найдено в [242], где рассматривалось уравнение $\Delta u - u^{(N+2)/(N-2)} = 0$. Существование семейства связано с инвариантностью эллиптического уравнения относительно некоторого конформного преобразования; см. библиографию в [97], а также [96]. Рассуждения в п. 4.4, поясняющие возможность построения несимметричных

глобальных автомодельных решений при $\beta > \sigma + 1 + 2/N$, используют идею работы [228]. Результаты пп. 5, 6 получены на основе методов [30, 32, 53].

§ 4. Доказательство локализации неограниченных решений при $\beta \geq \sigma + 1$ в одномерном случае проведено в [34]. При изложении п. 3 используются результаты [35].

§ 5. Утверждение 1) (или 1') из предложения 1 — естественное следствие сильного принципа максимума для параболических уравнений и известно сравнительно давно [264] (см. также [244, 252]). По поводу других утверждений см. [34, 35]. Подробное доказательство подобных теорем сравнения можно найти в [59]; там же приведены более тонкие теоремы, устанавливающие характер пространственных пересечений различных решений параболических уравнений.

Всюду в § 5 речь идет об определении множества притяжения \mathscr{W} неустойчивого стационарного решения. В случае уравнения (23) оно имеет вид $\mathscr{W} = \{\theta_0 = T_0^{1/\sigma} u_0(x), \text{ где } u_0 \geq 0 \text{ удовлетворяет (9), (10) и } T_0 < \infty — \text{ время обострения решения задачи (1), (2), } \beta = \sigma + 1 \text{ с данной начальной функцией } u_0\}$. Любопытно, что \mathscr{W} является неограниченным и содержит функции θ_0 , отличающиеся от $\theta_S(x)$ в \mathbb{R} на сколь угодно большую величину. Важно отметить, что \mathscr{W} — бесконечномерное множество, но, разумеется, не плотное в L^2 .

Сейчас получено сравнительно мало законченных результатов исследования структуры множества притяжения неустойчивых стационарных решений нелинейных параболических уравнений. Укажем в этой связи на работы [225, 49, 58, 59, 211, 251]; результаты [187] (уравнение быстрой диффузии в ограниченной области) обсуждаются в комментариях к гл. II. Исследованию асимптотической устойчивости обычных (без точек «сингулярности» по времени) решений параболических уравнений посвящено большое число работ; см., например, [16, 21, 49, 53, 62, 84, 104, 105, 170, 171, 177—179, 189, 205, 218, 221, 227, 228, 247, 263, 266, 268] и приведенную там библиографию. Чаще всего в этом случае возникает проблема выделения множества притяжения, которое содержит некоторую окрестность стационарного решения (т. е. является плотным). В [49] получены условия асимптотической устойчивости неограниченных автомодельных решений квазилинейных уравнений с источником, для которых формулировались красивые задачи в ограниченной области с подвижными границами. Последнее обеспечивало асимптотическую устойчивость соответствующих стационарных решений. Отметим, что оценка (20) (или (26)), которая играет принципиальную роль при доказательстве теоремы 2 о стабилизации, имеет место без ограничений типа (9), (10) на фиксированную функцию $u_0(x)$ (см. [35, 59]).

§ 6. Приведенные здесь результаты содержатся в [36, 28]. Утверждение 1 в теореме 3, относящееся к полулинейному уравнению при $\sigma = 0$, $p > (\beta - 1)N/2$, доказано в [278] (см. также [182, 221] и комментарии к гл. VII).

§ 7. При изложении большей части п. 1 и пп. 2.1—2.3 мы следуем [42]. Неравенство (12) ранее другим способом установлено в [206, 208], где также доказана теорема 1. Теорема 3 доказана в [206] (см. об этом в [131, 234]). Теорема 4 для случая $N = 1$ и $N = 2$ доказана в [220]; обобщение метода [220], который используется в п. 2.1, на произвольные $N \geq 1$ дано в [179, 234]. Справедливость предложения 1 при $\beta = 3$ установлена в [222]; случай произвольных $\beta \in (1, \infty)$ рассматривался в [3, 2]. Решение (43) построено в [49] с использованием результата [14], где аналогичное по структуре решение найдено применительно к уравнению (39) со стоком $-\theta^2$ ($\beta = 2$) вместо источника.

В условиях предложения 1 автомодельное представление $\theta(t, \xi) \equiv \equiv (T_0 - t)^{1/(\beta-1)} u(t, \xi(T_0 - t)^{1/2})$ для широкого класса $u_0(x)$ стабилизируется при $t \rightarrow T_0^-$ на всяком множестве вида $\{|x| < c(T_0 - t)^{1/2}\}$ к единственному негравитальному решению $0_{II} \equiv (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}$ уравнения (39) в \mathbb{R} [58, 59]. Основное место в доказательстве стабилизации занимает вывод оценки сверху неограниченного решения $u(t, x)$. В [59] оценка $u(t, x) \leq \leq \mu_* (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}$ в $(0, T_0) \times \mathbb{R}$ получена при следующих ограничениях

на пачальную функцию u_0 : $\sup u_0 < \infty$, u_0 — равномерно Липшиц непрерывна в \mathbf{R} ; эти условия являются более слабыми, чем в [279, 280]. Результаты [59], а также [58], получены за счет применения специальных теорем сравнения различных решений u и v , основанных на анализе не только зависимости от времени числа их пространственных пересечений, но и характера пересечений (например, в [59] при некоторых ограничениях доказана теорема типа: если $w(t_0, x_0) \equiv u(t_0, x_0) - v(t_0, x_0) = 0$, то $w_x(t_0, x_0) \neq 0$). Эти теоремы обладают значительной общностью; они справедливы для широкого класса квазилинейных (вырождающихся) параболических уравнений, в том числе в многомерном случае, $u = u(t, |x|)$.

Отметим, что при наличии оценок $u(t, x)$ снизу и сверху стабилизация $\theta(t, \xi) \rightarrow \theta_{II}$, равномерная на каждом компакте из \mathbf{R} , вытекает из результатов [211], где также рассмотрен многомерный случай. В [211] установлено, что в этих условиях стабилизация имеет место при любых $1 < \beta \leq (N+2)/(N-2)_+$, что связано с отсутствием нетривиальных решений $\theta(\xi) \equiv \theta_{II}$ эллиптического уравнения $\Delta_{\xi} \theta - (1/2) \nabla_{\xi}^2 \theta - \theta(\beta-1) + \theta^{\beta} = 0$, $\xi \in \mathbf{R}^N$ (при $\theta = \theta(|\xi|)$ оно переходит в (39)), если $1 < \beta \leq (N+2)/(N-2)_+$. Последнее доказано в [211] путем вывода специальных неравенств типа [144, 145].

Более тонкий качественный анализ показывает, что пространственно временная структура $u(t, x)$ при $t \rightarrow T_0^-$ описывается п. а. р. вида $f_a(t, \eta) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} f_*(\eta)$, $\eta = x/(T_0 - t)^{1/2} |\ln(T_0 - t)|^{1/2}$, где функция $f_*(\eta) > 0$ удовлетворяет в \mathbf{R} уравнению первого порядка: $-f/\eta/2 - f/(\beta-1) + f^{\beta} = 0$, $f(\pm \infty) = 0$. Оно имеет целый спектр нетривиальных решений $f(\eta) = (\beta - 1 + C\eta^2)^{-1/(\beta-1)}$, $C = \text{const} > 0$.

Из требования аналитичности соответствующего представления

$$f(t, \eta) = (T_0 - t)^{1/(\beta-1)} u(t, \eta(T_0 - t)^{1/2} |\ln(T_0 - t)|^{1/2})$$

в точке $t = T_0$, $\eta = 0$ вытекает, что при $t \rightarrow T_0^-$ реализуется одно решение из семейства $\{f\}$; ему отвечает $C = C_* = (\beta - 1)^2/(4\beta)$ и имеет место стабилизация $f(t, \eta) \rightarrow f_*(\eta)$, $t \rightarrow T_0^-$, что проверялось в численных расчетах. Указанные выводы при $\beta = 3$ сделаны в [222] (где есть некоторые результаты для $N = 2$); анализ произвольных $\beta > 1$ проведен в [58, 59].

Теорема 6 доказана в [58]. В [59] установлено, что от требования критичности решения ($u_t \geq 0$ в $(0, T_0) \times \mathbf{R}$) можно отказаться. В [59] его устраняет следующий весьма общий результат: существует такая постоянная $M_h > 0$, что если $u(t_0, x_0) > M_h$, то $u_t(t, x_0) \geq 0$ при всех $t \in [t_0, T_0)$. В работе [279] при весьма жестких ограничениях на $u_0(x)$ и величину $\beta > 2$ установлено, что неограниченное решение $u = u(t, |x|)$ уравнения (17), $N = 1$ ($x \in (-R, R)$, $u(t, \pm R) = 0$), удовлетворяет условию $\text{mes } \omega_L = 0$, т. е. $u(T_0^-, x) = \infty$ только в одной точке. Теорема 7 взята из [219]. Все результаты п. 3 содержатся в [42, 32, 153]. Доказательство сходимости некоторых классов глобальных решений уравнений теплопроводности с источником к п. а. р., удовлетворяющим нелинейным уравнениям типа Гамильтона — Якоби, можно найти в [51]. Устойчивость неограниченных п. а. р. в п. 3 пока не доказана.

Вопросы, связанные с тонкой структурой неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений, здесь подробно не рассматриваются. В этой связи укажем на работы [80, 81, 116—120, 122, 124, 155] (см. также § 3, 4 гл. VII). Многомерные несимметричные собственные функции нелинейных эллиптических задач, возникающих при построении неограниченных автомодельных решений, пока исследованы только численно [122, 124]. Они могут иметь разнообразную пространственно временную структуру, например область локализации в виде «звезды» [122]. Групповой анализ многомерных уравнений нелинейной теплопроводности с источником проводился в [75—77]. Общие представления о роли собственных функций нелинейных силовых сред в математической физике развиты в [116, 117, 123]. По поводу приложений см. [116, 93, 158].

Интересные свойства проявляют также неограниченные решения другого параболического уравнения со степенными нелинейностями:

$$u_t = \nabla \cdot (|\nabla u|^{\sigma} \nabla u) + u^{\beta}; \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1; \quad u = u(t, x) \geq 0.$$

Условия неограниченности решений красовой задачи получены, например, в [276, 239] (см. обзор в [48]). Задача Коши рассматривалась в [33], где показано, что при $\beta \in (1, \sigma + 1 + (\sigma + 2)/N)$ все нетривиальные решения $u \neq 0$ являются неограниченными, а при $\beta > \sigma + 1 + (\sigma + 2)/N$ существует класс малых глобальных решений. Там же показано, что при $\beta \geq \sigma + 1$ неограниченные решения локализованы, а при $1 < \beta < \sigma + 1$ локализация отсутствует. Свойство локализации при $\beta = \sigma + 1$ (S-режим) иллюстрирует построение в [33] автомодельное решение в разделяющихся переменных: $u_A = (T_0 - t)^{-1/\theta} \theta(x) > 0$ при $|x| < L_S/2$, $\theta = 0$ при $|x| \geq L_S/2$, где L_S — фундаментальная длина S-режима: $L_S = \pi(\sigma + 1)^{1/(\sigma + 2)} [\sigma \sin(\pi/(\sigma + 2))]^{-1}$. Тонкая структура локализованных автомодельных решений при $\beta > \sigma + 1$ (I.S-режим) $u_A = (T_0 - t)^{-1/(\beta - 1)} \theta(\xi)$, $\xi = x/(T_0 - t)^m$, $m = [\beta - (\sigma + 1)]/[(\sigma + 2)(\beta - 1)]$, изучалась в [47, 56], где рассматривалась эллиптическая задача для функции $\theta(\xi) \geq 0$:

$$\nabla \cdot (|\nabla \theta|^{\sigma} \nabla \theta) - m \nabla \theta \cdot \xi - \frac{1}{\beta - 1} \theta + \theta^{\beta} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

Показано, что даже в симметричном случае $\theta = \theta(|\xi|)$ она имеет довольно сложный спектр решений, состоящий, грубо говоря, из четырех семейств: трех дискретных (двух счетных) и одного дискретно-непрерывного.

1. (§ 1) Доказать, что число положительных решений задачи (5)–(7) при $1 < \beta < (\sigma + 1)N/(N - 2)_+$ конечно. Верны ли предсказания процедуры линеаризации в п. 4.1?

2. (§ 1) Доказать существование решений автомодельной задачи (5)–(7) при $\beta \geq (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$.

3. (§ 1) Доказать существование радиально несимметричных решений эллиптического уравнения (2) в \mathbb{R}^N при $\beta > \sigma + 1$, $\sigma > 0$, $N > 1$ (при $\sigma = 0$, $1 < \beta \leq (N + 2)/(N - 2)_+$ их нет [211]). Определить число и пространственную структуру таких решений (качественные и численные исследования выполнены в [122]).

4. (§ 3) Доказать отсутствие глобальных решений $u \neq 0$ задачи Коши (1), (2) при критическом значении $\beta = \sigma + 1 + 2/N$ (известно, что для $\sigma = 0$ это верно [220, 179]).

5. (§ 4) Доказать локализацию неограниченных решений задачи Коши для $u_t = \nabla \cdot (u^{\sigma} \nabla u) + u^{\beta}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, при $\beta \geq \sigma + 1$, $\sigma > 0$ в случае произвольных начальных функций u_0 . Можно ли вывести, как в одномерном случае (§ 4), оценку $\supp u(T_0^-, x)$ через $\supp u_0$ и время существования решения?

6. (§ 4) Доказать эффективную локализацию в случае $\beta \geq \sigma + 1$ при произвольных (нефинитных) $u_0(x) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$.

7. (§ 5) Доказать асимптотическую устойчивость неограниченных автомодельных решений LS-режима, $\beta > \sigma + 1$.

8. (§ 7) Доказать, что в задаче (17) область локализации при широком выборе начальных функций $u_0(x)$ состоит из дискретного набора точек (и в частности, $\text{mes}\{x \in \mathbb{R}^N \mid u(T_0^-, x) = \infty\} = 0$).

9. (§ 7) Обосновать предложенную на качественном уровне в [222, 58] асимптотику неограниченных решений задачи (17) $u(t, x) \approx (T_0 - t)^{-1/(\beta - 1)} \times f_*(x/(T_0 - t)^{1/2} |\ln(T_0 - t)|^{1/2})$ при $t \rightarrow T_0^-$.

10. (§ 7) Доказать эффективную локализацию неограниченных решений задачи Коши для $u_t = \Delta u + (1 + u) \ln^{\beta}(1 + u)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, при $\beta \geq 2$ и ее отсутствие в случае $1 < \beta < 2$.

11. (§ 7) Определить условия, при которых асимптотическое поведение неограниченных решений задачи (54), (55) описывается вырожденными ш. а. р. вида (68).

**МЕТОДЫ ОБОБЩЕННОГО СРАВНЕНИЯ РЕШЕНИЙ
РАЗЛИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

В этой главе доказаны теоремы сравнения решений различных нелинейных параболических уравнений, основанные на специальных поточечных оценках старшей пространственной производной мажорирующего решения через младшие производные. Вывод таких оценок осуществляется в условиях критичности задачи (§ 1, 2). В § 3 рассматриваются более общие условия ψ -критичности. В § 4, 5 на основе операторного варианта теоремы сравнения изучается эффект локализации тепла в средах с произвольным коэффициентом теплопроводности. В § 6 результаты § 1—3 применяются для изучения неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений. В § 7 получены условия критичности разностных решений и на их основе доказана теорема прямого сравнения решений разностных нелинейных схем для различных уравнений нелинейной теплопроводности.

**§ 1. Условия критичности
и теорема прямого сравнения решений**

1. Постановка краевой задачи и задачи Коши. Пусть Ω — произвольная область (не обязательно ограниченная) в \mathbb{R}^N с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим для нелинейного параболического уравнения

$$u_t = A(u) = L(u, |\nabla u|, \Delta u) \quad (1)$$

(здесь $|\nabla u| = |\text{grad}_x u|$) краевую задачу в $\omega_T = (0, T) \times \Omega$ с условиями

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(t, x) = u_1(t, x) \geq 0, \quad 0 < t < T, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3)$$

Будем считать, что $u_0(x) \rightarrow 0$, $u_1(t, x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ и $u(t, x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ для любых $0 < t < T$. Задача (1) — (3) включает в себя как частный случай задачу Коши (при этом фактически $\Omega = \mathbb{R}^N$).

Функция $L(p, q, r)$ в (1) определена и один раз непрерывно дифференцируема по всем аргументам, причем $\partial L / \partial r > 0$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, что означает параболическость уравнения.

Будем также предполагать, что существует вещественная функция $r = l(p, q, Y)$, удовлетворяющая тождеству

$$L(p, q, l(p, q, Y)) \equiv Y, \quad (p, q, Y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}. \quad (4)$$

Функция l дифференцируема по всем аргументам в силу гладкости L . Из (4) вытекает справедливость следующих тождеств:

$$L_1(p, q, l(p, q, Y)) + L_3(p, q, l(p, q, Y))l_1(p, q, Y) \equiv 0, \\ L_3(p, q, l(\cdot))l_3(\cdot) \equiv 1, \quad (5)$$

$$L_2(p, q, l(\cdot)) + L_3(p, q, l(\cdot))l_2(\cdot) \equiv 0$$

(здесь и далее используются обозначения $L_1 = \partial L / \partial p$, $l_1 = \partial l / \partial p$, $L_2 = \partial L / \partial q$, $L_3 = \partial L / \partial r$ и т. д.).

Положим

$$l_0(p, q) = l(p, q, 0). \quad (6)$$

В силу (4) функция l_0 удовлетворяет тождеству

$$L(p, q, l_0(p, q)) \equiv 0, \quad (p, q) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+. \quad (4')$$

Указанным выше требованиям удовлетворяет, например, квазилинейный оператор

$$\mathbf{A}(u) = K(u, |\nabla u|)\Delta u + N(u, |\nabla u|), \quad (7)$$

где $K(p, q) > 0$, $N(p, q)$ — заданные достаточно гладкие функции. В этом случае

$$l(p, q, Y) = [Y - N(p, q)] \frac{1}{K(p, q)}, \quad l_0(p, q) = -\frac{N(p, q)}{K(p, q)}. \quad (8)$$

Для оператора нелинейной теплопроводности с источником

$$\mathbf{A}(u) = \nabla \cdot (k(u)\nabla u) + Q(u) \equiv k(u)\Delta u + k'(u)|\nabla u|^2 + Q(u), \\ k > 0, \quad (9)$$

аналогичные выражения имеют вид

$$l(p, q, Y) = [Y - k'(p)q^2 - Q(p)] \frac{1}{k(p)}, \\ l_0(p, q) = -\left[\frac{k'(p)}{k(p)} \right] q^2 - \frac{Q(p)}{k(p)}. \quad (10)$$

Будем предполагать, что в ω_r существует положительное классическое решение задачи (1) — (3), причем оно единственно.

Всюду в дальнейшем считаются выполненными следующие ограничения на функцию L :

а) условие параболичности оператора \mathbf{A} : $\partial L / \partial r > 0$;

б) существуют функции l , l_0 , удовлетворяющие тождествам (4), (4') соответственно.

2. Условия критичности задачи.

Определение. Задачу (1) — (3) и ее решение $u(t, x)$ будем называть *критическими*, если всюду в ω_r выполняется неравенство

$$u_t(t, x) \geq 0. \quad (11)$$

Условие (11) будет использовано для вывода поточечной оценки старшей пространственной производной (лапласиана) решения $\Delta u(t, x)$ через младшие производные $|\nabla u(t, x)|$ и $u(t, x)$. Действительно, в силу (1) условие (11) эквивалентно неравенству

$$L(u(t, x), |\nabla u(t, x)|, \Delta u(t, x)) \geq 0 \quad \text{в } \omega_T. \quad (11')$$

Однако $L_3(p, q, r) > 0$, и поэтому неравенство (11') можно разрешить относительно Δu .

Это приводит к оценке

$$\Delta u(t, x) \geq l_0(u(t, x), |\nabla u(t, x)|) \quad \text{в } \omega_T. \quad (12)$$

В частности, для оператора (7) получаем

$$\Delta u \geq -\frac{N(u, |\nabla u|)}{k(u, |\nabla u|)} \quad \text{в } \omega_T, \quad (13)$$

а для оператора (9)

$$\Delta u \geq -\left[\frac{k'(u)}{k(u)}\right] |\nabla u|^2 - \frac{Q(u)}{k(u)} \quad \text{в } \omega_T. \quad (14)$$

Поточечные оценки типа (12) — (14) служат основой предлагаемого ниже подхода к сравнению решений различных параболических уравнений.

Предположим пока для простоты, что $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $u_1 \in C_{ix}^{1,0}([0, T) \times \partial\Omega)$, $u \in C_{ix}^{2,4}(\omega_T) \cap C_{ix}^{1,2}(\bar{\omega}_T)$. Это позволяет дифференцировать уравнение (1) один раз по t в ω_T .

Теорема 1. *Для критичности задачи (1) — (3) необходимо и достаточно, чтобы*

$$A(u_0) \equiv L(u_0, |\nabla u_0|, \Delta u_0) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

$$\partial u_i(t, x) / \partial t \geq 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega. \quad (16)$$

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна. Докажем достаточность. Положим $u_i(t, x) = z$ в ω_T . Тогда $L(u, |\nabla u|, \Delta u) = z$, и поэтому $\Delta u = l(u, |\nabla u|, z)$. Из (1) следует, что функция z удовлетворяет в ω_T уравнению

$$z_t = L_1(u, |\nabla u|, l(u, |\nabla u|, z))z + L_2(u, |\nabla u|, l(u, |\nabla u|, z))(\nabla u \nabla z / |\nabla u|) + L_3(u, |\nabla u|, l(u, |\nabla u|, z))\Delta z. \quad (17)$$

Здесь $\nabla u \nabla z$ — скалярное произведение двух векторов, полученное в результате дифференцирования: $|\nabla u|_t = (\nabla u \nabla z) / |\nabla u|$. Это уравнение формально является линейным однородным параболическим с ограниченными коэффициентами, что обеспечивает достаточной гладкостью решения $u(t, x)$ и функции L . Поэтому в силу принципа максимума (см. § 1 гл. I) $z \geq 0$ всюду в области ω_T , коль скоро $z \geq 0$ на ее параболической границе $\gamma_T = \{(t \in (0, T), x \in \partial\Omega) \cup (t = 0, x \in \Omega)\}$. Этим завершается доказательство.

В дальнейшем неравенства (15), (16) будем называть *условиями критичности* краевых данных задачи (1) — (3).

З а м е ч а н и е 1. Как следует из теоремы, критичность задачи не накладывает каких-либо ограничений на параболический оператор уравнения (1) (если он не зависит в явном виде от переменной t), а целиком определяется свойствами краевых данных. Для оператора более общего вида

$$A(u) = L(u, |\nabla u|, \Delta u; t, x)$$

аналогичное утверждение перестает быть справедливым.

Нетрудно убедиться, следуя доказательству теоремы 1, что в этом случае для критичности задачи нужно дополнительно потребовать выполнения следующего неравенства:

$$\frac{\partial}{\partial t} L(p, q, r; t, x)|_{r=l_0(p, q; t, x)} \geq 0, \quad (18)$$

$$(p, q) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \quad (t, x) \in \omega_\tau.$$

Например, если

$$A(u) = \nabla \cdot [k(u; t) \nabla u] + Q(u; t),$$

то условие (18) записывается следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2 k}{\partial t \partial p} - \frac{\partial k}{\partial p} \frac{\partial k}{\partial t} \frac{1}{k} \right) q^2 + \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial k}{\partial t} \frac{Q}{k} \geq 0.$$

За счет независимости изменения величин p и q оно распадается на два неравенства:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{k'_p(p; t)}{k(p; t)} \right] \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{Q(p; t)}{k(p; t)} \right] \geq 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Покажем, что ограничение на гладкость решения u , используемое при доказательстве, можно существенно ослабить. При естественном предположении, что $u \in C_{tx}^{1,2}(\omega_T) \cap \cap C(\overline{\omega_T})$, доказательство проводится так же с той лишь разницей, что вместо функции $z = u_t(t, x)$ рассматривается разностная производная

$$z(t, x) = \frac{1}{\tau} [u(t + \tau, x) - u(t, x)], \quad (t, x) \in \omega_{T-\tau},$$

где $\tau \in (0, T)$ — фиксированная постоянная.

Тогда для z аналогичным образом выводится параболическое уравнение вида (17). Что касается краевых данных, то в этом случае при выполнении тех же условий (15), (16) при $(t, x) \in \in (0, T - \tau) \times \partial\Omega$ имеем

$$z(t, x) = \frac{1}{\tau} [u_1(t + \tau, x) - u_1(t, x)] \geq 0.$$

Далее, при $t = 0$

$$z(0, x) = [u(\tau, x) - u_0(x)]/\tau, \quad x \in \Omega.$$

Однако функция $v(t, x) \equiv u_0(x)$ в силу (15) является нижним решением уравнения (1) и при этом $v = u_1(0, x) \leq u_1(t, x)$ на

$\partial\Omega$. Тем самым $u \geq v$ на γ_τ , и, следовательно, $u(t, x) \geq v(t, x) = u_0(x)$ в ω_τ . Последнее равносильно тому, что $z(0, x) \geq 0$ в Ω при любых $\tau \in (0, T)$.

Итак, функция z удовлетворяет параболическому уравнению в $\omega_{\tau-\tau}$ и $z \geq 0$ на параболической границе $\gamma_{\tau-\tau}$. Тогда $z \geq 0$ в $\omega_{\tau-\tau}$, и отсюда следует, что при всех $(t, x) \in \omega_\tau$

$$u_t(t, x) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} \geq 0.$$

Разумеется, исходя из этого способа доказательства, можно заменить условие (16) на более слабое: $u_t(t, x)$ не убывает по t на $\partial\Omega$. Можно также ослабить требование на гладкость начальной функции $u_0(x)$.

3. Теорема прямого сравнения решений. Рассмотрим в ω_τ краевые задачи для двух различных параболических уравнений ($\nu = 1, 2$):

$$u_t^{(\nu)} = A^{(\nu)}(u^{(\nu)}) = L^{(\nu)}(u^{(\nu)}, |\nabla u^{(\nu)}|, \Delta u^{(\nu)}); \quad (19)$$

$$u^{(\nu)}(0, x) = u_0^{(\nu)}(x) \geq 0, \quad x \in \Omega; \quad u_0^{(\nu)} \in C(\Omega); \quad (20)$$

$$u^{(\nu)}(t, x) = u_1^{(\nu)}(t, x), \quad 0 < t < T, \quad x \in \partial\Omega; \quad (21)$$

$$u_1^{(\nu)} \in C([0, T) \times \partial\Omega).$$

Функции $L^{(\nu)}(p, q, r)$ будем считать достаточно гладкими. Так же, как в п. 1, через $l^{(2)}(p, q, Y)$ ($l_0^{(2)} = l^{(2)}(p, q, 0)$) обозначим решение уравнения

$$L^{(2)}(p, q, l^{(2)}) = Y, \quad (p, q, Y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}.$$

Пусть в ω_τ существуют положительные классические решения рассматриваемых задач и $u^{(2)} \geq u^{(1)}$ на γ_τ . В следующем утверждении даны достаточные условия прямого сравнения решений задач (19)–(21), при которых $u^{(2)} \geq u^{(1)}$ всюду в ω_τ . Подчеркнем, что речь идет о сравнении решений существенно отличающихся друг от друга уравнений.

Теорема 2. Пусть $u^{(2)} \geq u^{(1)}$ на γ_τ , т. е.

$$\begin{aligned} u_0^{(2)}(x) &\geq u_0^{(1)}(x), \quad x \in \Omega, \\ u_1^{(2)}(t, x) &\geq u_1^{(1)}(t, x), \quad 0 < t < T, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть, кроме того, решение задачи (19)–(21) при $\nu = 2$ является критическим (это означает, что $u_t^{(2)} \geq 0$ в ω_τ) и при всех $(p, q, r) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ выполняются неравенства

$$\frac{\partial}{\partial r} [L^{(2)}(p, q, r) - L^{(1)}(p, q, r)] \geq 0, \quad (23)$$

$$L^{(1)}(p, q, l_0^{(2)}(p, q)) \leq 0. \quad (24)$$

Тогда $u^{(2)} \geq u^{(1)}$ всюду в ω_τ .

Доказательство. Положим $u^{(2)} - u^{(1)} = z$. Функция z удовлетворяет в ω_τ уравнению

$$z_t = L^{(2)}(u^{(2)}, |\nabla u^{(2)}|, \Delta u^{(2)}) - L^{(1)}(u^{(2)} - z, |\nabla u^{(2)} - \nabla z|, \Delta u^{(2)} - \Delta z), \quad (25)$$

причем в силу (22) $z \geq 0$ на γ_τ . Проводя линейризацию правой части (25) относительно функции z и ее производных, получим для z линейное параболическое уравнение с ограниченными коэффициентами:

$$z_t - L_3^{(1)}(u^{(2)}, |\nabla u^{(2)}|, v_3) \Delta z - L_2^{(1)}(u^{(2)}, |\nabla v_2|, \Delta u^{(2)}) (\nabla v_2 \cdot \nabla z) / |\nabla v_2| - L_1^{(1)}(v_1, |\nabla u^{(2)}|, \Delta u^{(2)}) z = L^{(2)}(u^{(2)}, |\nabla u^{(2)}|, \Delta u^{(2)}) - L^{(1)}(u^{(2)}, |\nabla u^{(2)}|, \Delta u^{(2)}), \quad (26)$$

где ограниченные гладкие функции v_j , $j = 1, 2, 3$ (некоторые средние значения), зависят от решений $u^{(1)}, u^{(2)}$.

Рассмотрим правую часть (26). В силу критичности решения $u^{(2)}$ выполняется поточечная оценка (см. п. 2)

$$\Delta u^{(2)} \geq l_0^{(2)}(u^{(2)}, |\nabla u^{(2)}|) \text{ в } \omega_\tau. \quad (27)$$

Условие (23) означает, что функция $L^{(2)}(p, q, r) - L^{(1)}(p, q, r)$ является неубывающей по третьему аргументу. Поэтому с помощью (27) получаем

$$A^{(2)}(u^{(2)}) - A^{(1)}(u^{(2)}) \geq L^{(2)}(u^{(2)}, |\nabla u^{(2)}|, l_0^{(2)}(u^{(2)}, |\nabla u^{(2)}|)) - L^{(1)}(u^{(2)}, |\nabla u^{(2)}|, l_0^{(2)}(u^{(2)}, |\nabla u^{(2)}|)).$$

Однако по определению $L^{(2)}(p, q, l_0^{(2)}(p, q)) \equiv 0$. Отсюда в силу (24)

$$A^{(2)}(u^{(2)}) - A^{(1)}(u^{(2)}) \geq -L^{(1)}(u^{(2)}, |\nabla u^{(2)}|, l_0^{(2)}(u^{(2)}, |\nabla u^{(2)}|)) \geq 0.$$

Поэтому из (26) получаем, что

$$z_t - L_3^{(1)} \Delta z - L_2^{(1)} \frac{(\nabla v_2 \cdot \nabla z)}{|\nabla v_2|} - L_1^{(1)} z \geq 0$$

всюду в ω_τ . Поскольку $z \geq 0$ на γ_τ , в силу принципа максимума заключаем, что $z \geq 0$ в ω_τ , т. е. $u^{(2)} \geq u^{(1)}$ всюду в рассматриваемой области.

Посмотрим, какой вид принимают условия сравнения (23), (24) в случае параболических операторов конкретного вида.

Пример 1. Неравенство (23) зависит, вообще говоря, от трех переменных: p, q, r . Однако для квазилинейных операторов вида

$$A^{(v)}(u^{(v)}) = K^{(v)}(u^{(v)}, |\nabla u^{(v)}|) \Delta u^{(v)} + N^{(v)}(u^{(v)}, |\nabla u^{(v)}|), \quad v = 1, 2,$$

оно, так же как (24), зависит только от p, q . Неравенства (23), (24) в этом случае имеют вид

$$K^{(2)}(p, q) - K^{(1)}(p, q) \geq 0, \quad K^{(2)}(p, q) N^{(1)}(p, q) - K^{(1)}(p, q) N^{(2)}(p, q) \leq 0. \quad (28)$$

Пример 2. Для уравнения целипейной теплопроводности с источником

$$u_i^{(v)} = \nabla \cdot (k^{(v)}(u^{(v)}) \nabla u^{(v)}) + Q^{(v)}(u^{(v)}) \quad (29)$$

условия (28) за счет независимости изменения p и q в последнем из них запишутся следующим образом:

$$k^{(2)}(p) - k^{(1)}(p) \geq 0, \quad (30)$$

$$k^{(2)'}(p) k^{(1)}(p) - k^{(1)'}(p) k^{(2)}(p) \geq 0, \quad (31)$$

$$Q^{(2)}(p) k^{(1)}(p) - Q^{(1)}(p) k^{(2)}(p) \geq 0. \quad (32)$$

Неравенству (31) можно придать более компактный вид:

$$[k^{(2)}(p)/k^{(1)}(p)]' \geq 0. \quad (31')$$

Пример 3. Пусть функции $v^{(v)}$ удовлетворяют уравнениям

$$v_i^{(v)} = \mathbf{B}^{(v)}(v^{(v)}) \equiv a^{(v)}(v^{(v)}) \Delta v^{(v)} + b^{(v)}(v^{(v)}), \quad v = 1, 2. \quad (33)$$

Условия сравнения (23), (24) (или (28)) решений уравнений (33) имеют вид

$$a^{(2)}(p) - a^{(1)}(p) \geq 0, \quad (34)$$

$$b^{(2)}(p) a^{(1)}(p) - b^{(1)}(p) a^{(2)}(p) \geq 0$$

и выглядят значительно проще, чем (30) — (32) (по крайней мере они не содержат производных от входящих в них функций);

В то же время уравнения (29) в результате простых преобразований приводятся к виду (33). Действительно, положим

$$H^{(v)}(p) = \int_0^p k^{(v)}(\eta) d\eta, \quad p > 0, \quad v = 1, 2,$$

и через $h^{(v)}(p)$ обозначим функции, обратные к $H^{(v)}$, так что $H^{(v)}(h^{(v)}(p)) \equiv p$ ($h^{(v)}$ существуют по крайней мере для всех не слишком больших p в силу монотонности $H^{(v)}$; последнее обеспечивается условиями $k^{(v)} > 0$).

Сделаем теперь в уравнениях (29) замену

$$u^{(v)} = h^{(v)}(v^{(v)}), \quad v = 1, 2. \quad (35)$$

Тогда, учитывая, что $k^{(v)}(h^{(v)}(p)) h^{(v)'}(p) \equiv 1$, получаем для функций $v^{(v)}$ уравнения

$$v_i^{(v)} = k^{(v)}(h^{(v)}(v^{(v)})) \Delta v^{(v)} + Q^{(v)}(h^{(v)}(v^{(v)})) k^{(v)}(h^{(v)}(v^{(v)})), \quad v = 1, 2,$$

которые совпадают с (33), если в последних положить

$$a^{(v)}(p) = k^{(v)}(h^{(v)}(p)), \quad (36)$$

$$b^{(v)}(p) = Q^{(v)}(h^{(v)}(p)) k^{(v)}(h^{(v)}(p)).$$

Из (35) следует, что неравенство $v^{(2)} \geq v^{(1)}$ эквивалентно неравенству

$$H^{(2)}(u^{(2)}) \geq H^{(1)}(u^{(1)}) \quad \text{в } \Omega_\tau. \quad (37)$$

В результате получаем, что при выполнении условий

$$k^{(2)}(h^{(2)}(p)) - k^{(1)}(h^{(1)}(p)) \geq 0, \quad (38)$$

$$Q^{(2)}(h^{(2)}(p)) - Q^{(1)}(h^{(1)}(p)) \geq 0, \quad p > 0, \quad (39)$$

а также других условий теоремы 2, в частности неравенства

$$H^{(2)}(u^{(2)}) \geq H^{(1)}(u^{(1)}) \quad \text{на } \gamma_r, \quad (40)$$

справедливо (37).

Условиям сравнения (38), (39) можно придать такой вид:

$$k^{(2)}(p) - k^{(1)}[h^{(1)}(H^{(2)}(p))] \geq 0, \quad (38')$$

$$Q^{(2)}(p) - Q^{(1)}[h^{(1)}(H^{(2)}(p))] \geq 0, \quad p > 0. \quad (39')$$

Неравенство (37) при этом можно записать следующим образом:

$$u^{(2)} \geq h^{(2)}[H^{(1)}(u^{(1)})] \quad \text{в } \omega_r. \quad (37')$$

Таким образом, сравнивая не сами решения $u^{(v)}$ уравнений (29), а некоторые нелинейные функции от них (см. (37) или (37')), удалось добиться значительного упрощения условий сравнения: вместо трех неравенств (30)–(32) осталось только два — (38), (39) или (38'), (39'). Такой (обобщенный) метод сравнения мы называем *операторным* или *функциональным*. Более подробно он будет рассматриваться в следующем параграфе.

Замечание. Нетрудно видеть, что условия сравнения (30)–(32) будут выполнены тогда и только тогда, когда функции $k^{(1)}$ и $Q^{(1)}$ представимы в виде

$$k^{(1)}(p) = k^{(2)}(p)[1 + \mu(p)]^{-1}, \\ Q^{(1)}(p) = Q^{(2)}(p)[1 + \mu(p)]^{-1}[1 + \nu(p)]^{-1},$$

где μ, ν — произвольные гладкие неотрицательные функции, причем μ — неубывающая функция.

§ 2. Операторный (функциональный) метод сравнения решений параболических уравнений

В этом параграфе доказывается более общая, чем в § 1, теорема сравнения решений различных нелинейных параболических уравнений. Изложение проводится на примере вырождающихся уравнений, которые, как известно (см. § 3 гл. I), могут не иметь классического решения. Более подробно мы рассмотрим одномерное уравнение, хотя все результаты справедливы для уравнений со многими независимыми переменными (соответствующие примеры приводятся ниже).

1. Условия критичности решений вырождающихся параболических уравнений. Рассмотрим в $\omega_r = (0, T) \times \mathbb{R}_+$ краевую задачу

$$u_t = (k(u)u_x)_x \equiv (\varphi(u))_{xx}, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x > 0; \quad \sup u_0 < \infty, \quad \sup |[\varphi(u_0)]_x| < \infty, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u_1(t) > 0, \quad 0 < t < T. \quad (3)$$

Пусть уравнение (1) является вырождающимся при $u = 0$, т. е. $k(0) = 0$, и $k \in C^2(\mathbf{R}_+) \cap C([0, \infty))$. Решение задачи является классическим в $P_r[u] = \{(t, x) \in \omega_r \mid u(t, x) > 0\}$ и может не иметь в $S_T[u] = \bar{P}_T[u] \setminus P_T[u] \setminus \partial\omega_T$ (точках вырождения) всех производных, входящих в (1). При этом функция $k(u(t, x))u_x(t, x)$ является непрерывной по x в \mathbf{R}_+ при любых фиксированных $t \in (0, T)$.

Так же как в § 1, задачу (1) — (3) и ее решение будем называть критическими, если $u_i(t, x) \geq 0$ всюду в $P_r[u]$.

1.1. Ниже для удобства будем считать, что $u_0 \in C^2$ всюду, где $u_0 > 0$, и $u_i \in C^1([0, T])$ (эти ограничения можно существенно ослабить). В указанных предположениях справедлива следующая

Теорема 1. Для критичности задачи (1) — (3) необходимо и достаточно, чтобы

$$(k(u_0)u_0')' \geq 0, \quad x \in \{x > 0 \mid u_0(x) > 0\}, \quad (4)$$

$$u_1'(t) \geq 0, \quad 0 < t < T \quad (5)$$

Доказательство. Докажем достаточность условий (4), (5). Предварительно заметим, что критическая, ограниченная в $\bar{\mathbf{R}}_+$ начальная функция $u_0(x)$ является невозрастающей в \mathbf{R}_+ . Действительно, в силу (4) она не может достигать в \mathbf{R}_+ положительного максимума. Предположим, что в некоторой точке $x^* \in \mathbf{R}_+$, где $u_0(x^*) > 0$, она является возрастающей, т. е. $u_0'(x^*) > 0$. Тогда $u_0(x) > 0$, $u_0'(x) > 0$ при всех $x > x^*$, и из (4) получаем

$$k(u_0(x))u_0'(x) \geq k(u_0)u_0' \big|_{x=x^*} > 0, \quad x > x^*.$$

Поэтому при всех $x > x^*$

$$\int_{u_0(x^*)}^{u_0(x)} k(\eta) d\eta \geq k(u_0)u_0' \big|_{x=x^*} (x - x^*),$$

т. е. $u_0(x)$ неограниченно возрастает при $x \rightarrow \infty$, что противоречит предположению $u_0 \in C(\bar{\mathbf{R}}_+)$ ($\sup u_0 < \infty$).

Итак, начальная функция u_0 является невозрастающей, и мы вправе заключить, что множество точек вырождения $S_T[u]$ состоит только из одной кривой $(0, T) \times \{x = \xi(t)\}$, причем

$$k(u(t, \xi(t)))u_x(t, \xi(t)) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (6)$$

Функция $x = \xi(t)$ является неубывающей и непрерывной в $[0, T]$ (см., например, [175, 232, 257]).

Справедливость теоремы 1 можно установить несколькими способами. Ниже кратко излагается одно из доказательств, при котором существенным образом используются свойства (6) и предположение, что $u \in C^{2,4}(P_r[u])$.

Положим $z = u_i \equiv (k(u)u_x)_x$. Функция z удовлетворяет в $P_r[u]$ формально линейному параболическому уравнению

$$z_t = [k(u)z]_{xx}. \quad (7)$$

Тогда $z(0, x) \geq 0$ в $\{0 < x < \xi(0)\}$ в силу (4), и, как следует из (5), можно считать, что $z(t, 0) \geq 0$ при $t \in (0, T)$. Остается проверить, что, грубо говоря, $z \geq 0$ вблизи кривой $(0, T) \times \{x = \xi(t)\}$ — правой боковой границы $P_r[u]$. Это прямо следует из равенства $z = (k(u)u_x)_x$. Интегрируя это равенство по малому интервалу $(\xi(t) - \epsilon, \xi(t))$, $\epsilon > 0$ (нетрудно проверить законность этой операции), в силу (6) получаем

$$\int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t)} z(t, x) dx = -(\varphi(u))_x|_{(t, \xi(t)-\epsilon)}, \quad \varphi(u) \equiv \int_0^u k(\eta) d\eta. \quad (6')$$

Поскольку $\varphi(u(t, x)) > 0$ на $(\xi(t) - \epsilon, \xi(t))$ и $(\varphi(u(t, x)))_x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \xi^-(t)$, всегда можно указать такое сколь угодно малое $\epsilon > 0$, что $(\varphi(u))_x < 0$ в точке $(t, \xi(t) - \epsilon)$, и, следовательно,

$$\int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t)} z(t, x) dx > 0.$$

Поэтому в любой сколь угодно малой левой полукрестности точки $x = \xi(t)$ найдется такое $x_*(t) \in (\xi(t) - \epsilon, \xi(t))$, что $(t, x) > 0$.

Функция z является классическим решением уравнения (7) в области $(0, T) \times \{0 < x < x_*(t)\}$, причем $z \geq 0$ на ее параболической границе. Тогда в силу сильного принципа максимума (см. [165]) $z \geq 0$ во всех внутренних точках области $(0, T) \times \{0 < x < x_*(t)\}$. Учитывая, что $\epsilon > 0$ может быть сколь угодно малым, получаем, что $z \equiv u_t \geq 0$ в $P_r[u]$.

Замечание 1. Нетрудно показать, что в качестве множества $(0, T) \times \{x = x_*(t)\}$ в доказательстве теоремы может быть выбрана непрерывная кривая. Более того, в условиях теоремы $u_t > 0$ в некоторой окрестности $(0, T) \times \{\xi(t) - \delta < x < \xi(t)\}$ (см. [232]).

Замечание 2. Тем же способом можно показать, что в условиях теоремы 1

$$u_x(t, x) \leq 0 \quad \text{в } P_r[u]. \quad (8)$$

Отметим, что функции $z = u_t$ и $z = u_x$ удовлетворяют в $P_r[u]$ одному и тому же линейному параболическому уравнению (7).

1.2. Утверждение, подобное теореме 1, справедливо для более общего, чем (1), вырождающегося параболического уравнения

$$u_t = \nabla \cdot (k(u) \nabla u) + Q(u) \equiv \Delta \varphi(u) + Q(u), \quad (9)$$

где $Q \in C^1(\{0, \infty\})$, $Q(0) = 0$ — заданная функция. Пусть Ω — произвольная область в \mathbf{R}^N с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим, например, для уравнения (9) краевую задачу (или задачу Коши, если $\Omega = \mathbf{R}^N$) с условиями

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (10)$$

$$u(t, x) = 0, \quad 0 < t < T, \quad x \in \partial\Omega. \quad (11)$$

Для наших целей достаточно следующего, далеко не оптимального по требованиям к $u_0(x)$ утверждения о критичности решения задачи (9) — (11).

Теорема 2. Пусть $Q \in C^1([0, \infty))$, $Q(0) = 0$ и $Q'(u) \geq 0$ при $u > 0$. Пусть область $\Omega_0 = \text{supp } u_0 \subset \Omega$ имеет гладкую границу $\partial\Omega_0$ и $u_0 \in C^2(\Omega_0) \cap C(\bar{\Omega})$. Тогда для критичности $u(t, x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta\varphi(u_0) + Q(u_0) \geq 0, \quad x \in \Omega_0. \quad (12)$$

Доказательство. Мы будем исходить из того, что обобщенное решение $u(t, x)$ может быть получено как предел при $\epsilon \rightarrow 0^+$ последовательности строго положительных классических решений u_ϵ уравнения (9) в $\omega_\tau = (0, T) \times \Omega$ с условиями $u_\epsilon(0, x) = u_{\epsilon 0}(x) \equiv \varphi^{-1}(\varphi(u_0) + \epsilon) \rightarrow u_0$ равномерно в Ω при $\epsilon \rightarrow 0^+$, $u_\epsilon = \varphi^{-1}(\epsilon)$ на $(0, T) \times \partial\Omega$. Фиксируем достаточно малое $\tau > 0$ и рассмотрим функцию $z_\epsilon(t, x) = [u_\epsilon(t + \tau, x) - u_\epsilon(t, x)]/\tau$, которая удовлетворяет в $\omega_{\tau-\tau}$ линейному параболическому уравнению

$$(z_\epsilon)_t = \Delta(az_\epsilon) + bz_\epsilon,$$

где через a, b обозначены гладкие функции

$$a = \int_0^1 \varphi'(\eta u_\epsilon(t + \tau, x) + (1 - \eta) u_\epsilon(t, x)) d\eta,$$

$$b = \int_0^1 Q'(\eta u_\epsilon(t + \tau, x) + (1 - \eta) u_\epsilon(t, x)) d\eta.$$

При этом $z_\epsilon = 0$ на $[0, T - \tau] \times \partial\Omega$.

Рассмотрим функцию $z_\epsilon(0, x) \equiv [u_\epsilon(\tau, x) - u_{\epsilon 0}(x)]/\tau$ в Ω . Поскольку в силу принципа максимума $u_\epsilon \geq \varphi^{-1}(\epsilon)$ в ω_τ (напомним, что $Q(u) \geq 0$ при всех $u \geq 0$), то для любых $x \in \Omega \setminus \Omega_0$ имеем $z_\epsilon(0, x) \equiv [u_\epsilon(\tau, x) - \varphi^{-1}(\epsilon)]/\tau \geq 0$. Далее, рассмотрим функцию $v(t, x)$ — классическое решение уравнения (9) в $(0, T) \times \Omega_0$ с условиями $v(0, x) = u_{\epsilon 0}(x)$ в Ω_0 , $v = \varphi^{-1}(\epsilon)$ на $(0, T) \times \partial\Omega_0$. Оно является критическим, так как в силу (12)

$$\Delta\varphi(u_{\epsilon 0}) + Q(u_{\epsilon 0}) \equiv \Delta\varphi(u_0) + Q(\varphi^{-1}(\varphi(u_0) + \epsilon)) \geq \\ \geq \Delta\varphi(u_0) + Q(u_0) \geq 0 \text{ в } \Omega_0,$$

и, следовательно, $v(t, x) \geq v(0, x)$ в $(0, T) \times \Omega_0$. Из теоремы сравнения тогда получаем $u_\epsilon \geq v \geq u_{\epsilon 0}(x)$ в $(0, T) \times \Omega_0$. Поэтому $z_\epsilon(0, x) \geq 0$ в Ω_0 при любых $\tau \in (0, T)$.

Итак, $z_\epsilon \geq 0$ на параболической границе области $\omega_{\tau-\tau}$, и в силу принципа максимума $z_\epsilon \geq 0$ в $\omega_{\tau-\tau}$. Отсюда предельным переходом $\epsilon \rightarrow 0^+$ и $\tau \rightarrow 0^+$ получаем, что $u(t, x)$ не убывает по t в ω_τ и, следовательно, $u_t \geq 0$ в $P_\tau[u]$. Необходимость условия (12) очевидна.

2. Теорема операторного сравнения решений. Возможности операторного метода сравнения мы продемонстрируем сначала на примере относительно простых уравнений. Полученная при этом

теорема сравнения будет использована в § 4 при исследовании эффекта локализации граничных режимов с обострением.

Рассмотрим в ω_τ две крайние задачи для различных (вырождающихся) параболических уравнений ($\nu = 1, 2$):

$$u_t^{(\nu)} = [k^{(\nu)}(u^{(\nu)}) u_x^{(\nu)}]_x \equiv (\varphi^{(\nu)}(u^{(\nu)}))_{xx}; \quad (13)$$

$$u^{(\nu)}(0, x) = u_0^{(\nu)}(x) \geq 0, \quad x > 0, \quad (14)$$

$$u^{(\nu)}(t, 0) = u_1^{(\nu)}(t) > 0, \quad 0 < t < T. \quad (15)$$

Пусть функции, входящие в формулировку задач (13)–(15), удовлетворяют всем требованиям, предъявленным в п. 1 к функциям k, u_0, u_1 при постановке задачи (1)–(3), и в ω_τ существуют неотрицательные обобщенные решения рассматриваемых задач.

Введем в рассмотрение функцию $E(p)$, дважды непрерывно дифференцируемую при всех $p > 0$, причем $E(0) = 0$, $E(\infty) = \infty$ и $E'(p) > 0$ при $p > 0$. Последние условия означают, что E осуществляет взаимно однозначное отображение $\bar{\mathbf{R}}_+ \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+$. Поэтому в \mathbf{R}_+ определено обратное преобразование $E^{-1}(p)$, удовлетворяющее всем требованиям, предъявленным к функции E .

Пусть $u^{(2)} \geq E^{-1}(u^{(1)})$ на γ_τ . Задача операторного (функционального) сравнения решений $u^{(2)}$ и $u^{(1)}$ состоит в определении условий, при которых $u^{(2)} \geq E^{-1}(u^{(1)})$ всюду в ω_τ . В следующем утверждении для этого используются поточечные оценки старшей производной мажорирующего решения, вытекающие из его критичности.

Теорема 3. Пусть $u^{(2)} \geq E^{-1}(u^{(1)})$ на γ_τ , т. е.

$$\begin{aligned} u_0^{(2)}(x) &\geq E^{-1}(u_0^{(1)}(x)), \quad x \in \mathbf{R}_+, \\ u_1^{(2)}(t) &\geq E^{-1}(u_1^{(1)}(t)), \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть, кроме того, решение задачи (13)–(15) при $\nu = 2$ является критическим и при всех $p > 0$ выполнены неравенства

$$k^{(2)}(p) - k^{(1)}(E(p)) \geq 0, \quad (17)$$

$$[k^{(2)}(p)/k^{(1)}(E(p))E'(p)]' \geq 0. \quad (18)$$

Тогда $u^{(2)} \geq E^{-1}(u^{(1)})$ всюду в ω_τ .

Доказательство. Положим $E^{-1}(u^{(1)}) = V^{(1)}$. Функция $V^{(1)}$ удовлетворяет в ω_τ уравнению

$$\begin{aligned} \dot{V}_t^{(1)} &= L^{(1)}(V^{(1)}, |V_x^{(1)}|, V_{xx}^{(1)}) \equiv \\ &\equiv k^{(1)}(E(V^{(1)}))V_{xx}^{(1)} + \frac{[k^{(1)}(E(V^{(1)}))E'(V^{(1)})]'}{E'(V^{(1)})}(V_x^{(1)})^2, \end{aligned} \quad (19)$$

причем в силу (16) $u^{(2)} \geq V^{(1)}$ на γ_τ . Решение $u^{(2)}(t, x)$ уравнения

$$u_t^{(2)} = L^{(2)}(u^{(2)}, |u_x^{(2)}|, u_{xx}^{(2)}) \equiv k^{(2)}(u^{(2)})u_{xx}^{(2)} + k^{(2)'}(u^{(2)})(u_x^{(2)})^2 \quad (20)$$

является критическим, т. е. $u_t^{(2)} \geq 0$ в $P_\tau[u^{(2)}]$, что обеспечивает

всюду в $P_T[u^{(2)}]$ поточечную оценку

$$u_{xx}^{(2)} \geq - \frac{k^{(2)'}(u^{(2)})}{k^{(2)}(u^{(2)})} (u_x^{(2)})^2. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что неравенства (17), (18) являются условиями прямого сравнения решений параболических уравнений (19), (20) при наличии оценки (21) (см. теорему 2 § 1).

Воспользуемся тем, что обобщенные решения задач (13) — (15) могут быть получены как пределы при $k \rightarrow \infty$ последовательностей классических строго положительных и ограниченных решений $\{u_k^{(v)}\}$ соответствующих уравнений. Нетрудно убедиться, что монотонно убывающие с ростом k последовательности бесконечно дифференцируемых функций $\{u_k^{(2)}(0, x)\}$ и $\{u_k^{(2)}(t, 0)\}$, которые сходятся соответственно к функциям $u_0^{(2)}(x)$ и $u_1^{(2)}(t)$, могут быть выбраны критическими.

Существование последовательности $\{u_k^{(2)}(t, 0)\}$ с нужными свойствами очевидно. Что касается начальной функции, то эта проблема сводится к аппроксимации кусочно гладкой выпуклой функции $U_0^{(2)}(x) = \varphi^{(2)}(u_0^{(2)}(x)) ((U_0^{(2)})'' \geq 0$ всюду, где $U_0^{(2)} > 0$) последовательностью гладких выпуклых положительных функций $\{\varphi^{(2)}(u_k^{(2)}(0, x))\}$, равномерно отделенных от нуля. Разумеется, это всегда можно сделать.

При построении аппроксимирующих гладких решений $\{u_k^{(v)}\}$ нетрудно добиться того, чтобы $u_k^{(2)} \geq V_h^{(1)} = E^{-1}(u_k^{(1)})$ на γ_τ при любых $k = 1, 2, \dots$. Функции $u_k^{(2)}$ являются критическими и удовлетворяют неравенству (21). Поэтому в силу теоремы 2 $u_k^{(2)} \geq V_h^{(1)}$ всюду в ω_τ при каждом $k = 1, 2, \dots$. Отсюда предельным переходом $k \rightarrow \infty$ получаем, что $u^{(2)} \geq V^{(1)}$ в ω_τ .

Следствие. Пусть функция E такова, что

$$k^{(1)}(E(p)) = k^{(2)}(p), \quad p > 0, \quad (22)$$

и $u^{(2)} \geq E^{-1}(u^{(1)})$ на γ_τ . Пусть, кроме того, выполняется условие

$$E''(p) \leq 0, \quad p > 0. \quad (23)$$

Тогда $u^{(2)} \geq E^{-1}(u^{(1)})$ всюду в ω_τ .

Неравенство (23) эквивалентно следующему:

$$\left[\frac{k^{(2)'}(k^{(2)-1}(p))}{k^{(1)'}(k^{(1)-1}(p))} \right]' \geq 0 \quad (k^{(v)'}(p) \neq 0, p > 0). \quad (23')$$

Отметим, что в условиях следствия нет предположения о критичности $u^{(2)}$. Справедливость неравенства $u^{(2)} \geq E^{-1}(u^{(1)}) \equiv V^{(1)}$ в ω_τ вытекает из непосредственного сопоставления уравнений (19) и (20). Первое из них можно записать в виде

$$V_t^{(1)} = (k^{(2)}(V^{(1)}) V_x^{(1)})_x + \frac{k^{(2)}(V^{(1)}) E''(V^{(1)})}{E'(V^{(1)})} (V_x^{(1)})^2,$$

откуда при выполнении (23) следует, что $V^{(1)}$ — нижнее решение задачи (13) — (15) при $\nu = 2$, и поскольку $u^{(2)} \geq V^{(1)}$ на γ_τ , то $u^{(2)} \geq V^{(1)}$ всюду в ω_τ .

При доказательстве теоремы 3 использовалась возможность аппроксимации критической начальной функции $u_0^{(2)}(x)$ последовательностью положительных гладких критических функций. В этом предположении (см. теорему 2) теорема сравнения справедлива в случае краевых задач для параболических уравнений с источником:

$$u_t^{(\nu)} = \nabla \cdot (k^{(\nu)}(u^{(\nu)}) \nabla u^{(\nu)}) + Q^{(\nu)}(u^{(\nu)}), \quad \nu = 1, 2, \quad (24)$$

где $Q^{(\nu)} \in C^1([0, \infty))$ — заданные функции.

Теорема 4. Пусть $u^{(2)} \geq E^{-1}(u^{(1)})$ на γ_τ , и пусть решение $u^{(2)}$ является критическим, т. е. $u_t^{(2)}(t, x) \geq 0$ в $P_\tau[u^{(2)}]$. Пусть, кроме того, при всех $p > 0$ выполняются неравенства

$$k^{(2)}(p) - k^{(1)}(E(p)) \geq 0, \quad (25)$$

$$(k^{(2)}(p) / [k^{(1)}(E(p)) E'(p)])' \geq 0, \quad (26)$$

$$Q^{(2)}(p) k^{(1)}(E(p)) - Q^{(1)}(E(p)) k^{(2)}(p) / E'(p) \geq 0. \quad (27)$$

Тогда $u^{(2)} \geq E^{-1}(u^{(1)})$ всюду в ω_τ .

При доказательстве теоремы уравнение для функции $V^{(1)} = E^{-1}(u^{(1)})$ удобно записать в виде

$$V_t^{(1)} = \nabla \cdot [k^{(1)}(E) \nabla V^{(1)}] + \frac{k^{(1)}(E) E''}{E'} |\nabla V^{(1)}|^2 + \frac{Q^{(1)}(E)}{E'}. \quad (28)$$

Тогда неравенства (25) — (27) являются условиями прямого сравнения решений уравнений (24) при $\nu = 2$ и (28) (см. теорему 2 § 1).

С помощью принципа максимума без труда проверяется справедливость следующего простейшего варианта операторной теоремы сравнения:

Следствие. Пусть функция E такова, что выполняется равенство (22), и пусть $u^{(2)} \geq E^{-1}(u^{(1)})$ на γ_τ . Пусть, кроме того, при всех $p > 0$

$$E''(p) \leq 0, \quad Q^{(2)}(p) \geq Q^{(1)}(E(p)) / E'(p).$$

Тогда $u^{(2)} \geq E^{-1}(u^{(1)})$ в ω_τ .

§ 3. Условия ψ -критичности

В этом параграфе дается одно из возможных обобщений понятия критичности решения и выводится новый класс поточечных оценок старшей производной решения квазилинейного параболического уравнения через младшие. Эти результаты могут быть использованы для доказательства более общих теорем сравнения решений различных уравнений и имеют, кроме того, другие области приложения.

1. Определение ψ -критической задачи. Пусть Ω — ограниченная область в \mathbf{R}^N с гладкой границей $\partial\Omega$. В этом параграфе мы будем рассматривать красивую задачу для квазилинейного параболического уравнения:

$$u_t = A(u) = \nabla \cdot (k(u) \nabla u) + Q(u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega; \quad (2)$$

$$u(t, x) = 0, \quad 0 < t < T, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3)$$

Для простоты будем предполагать, что положительное в ω_T решение задачи (1) — (3) является классическим.

Пусть задана некоторая функция $\psi(p)$, дважды непрерывно дифференцируемая при $p > 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi \in C([0, \infty))$.

Определение. Задачу (1) — (3) и ее решение назовем ψ -критическими (по отношению к заданной функции ψ), если всюду в ω_T выполняется неравенство

$$u_t(t, x) - \psi(u(t, x)) \geq 0. \quad (4)$$

В соответствии с определением в § 1 нуль-критическую задачу (т. е. ψ -критическую при $\psi \equiv 0$) будем называть просто критической. Из неравенства (4) вытекают более общие, чем в § 1, поточечные оценки старшей пространственной производной решения через младшие:

$$\Delta u \geq -\frac{k'(u)}{k(u)} |\nabla u|^2 + \frac{\psi(u) - Q(u)}{k(u)} \quad \text{в } \omega_T. \quad (5)$$

Использование оценок типа (5) с достаточно произвольной функцией ψ расширяет возможности прямого и операторного методов сравнения.

2. Достаточные условия ψ -критичности задачи. Пусть $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $u \in C_{ix}^{2,4}(\omega_T) \cap C_{ix}^{1,2}(\bar{\omega}_T)$. Отметим, что требование на гладкость решения в ω_T (и отчасти на начальную функцию u_0) можно в принципе ослабить. В сделанных предположениях справедлива

Теорема 1. Для ψ -критичности задачи (1) — (3) достаточно, чтобы начальная функция u_0 удовлетворяла условию

$$A(u_0(x)) - \psi(u_0(x)) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

и при всех $p > 0$ выполнялись неравенства

$$[(k\psi)' / k]'(p) \geq 0, \quad (7)$$

$$[k'\psi^2 - Q^2(k\psi/Q)'](p) \geq 0. \quad (8)$$

Неравенство (8) можно записать в более компактном виде:

$$\psi^2(p) \left[\frac{1}{k} \left(\frac{Q}{\psi} - 1 \right) \right]'(p) \geq 0, \quad p > 0. \quad (8')$$

Отметим, что (8') имеет смысл и для тех значений $p > 0$, при которых $\psi(p) = 0$ (соответственно (8) определено там, где $Q = 0$).

Доказательство. Положим $z = u_t - \psi(u)$. Из (6) и условия $\psi(0) = 0$ следует, что $z \geq 0$ на γ_τ . Используя равенства

$$u_t = z + \psi(u), \quad \Delta u = \frac{1}{k(u)} \{z + \psi(u) - Q(u) - k'(u) |\nabla u|^2\}, \quad (9)$$

нетрудно получить параболическое уравнение, которому удовлетворяет функция z :

$$\begin{aligned} z_t - k(u) \Delta z - 2k'(u) \nabla u \cdot \nabla z - \\ - z \left\{ \frac{k'(u)}{k(u)} z + \frac{k'(u)}{k(u)} (2\psi(u) - Q(u)) + Q'(u) + k(u) \left[\frac{k'(u)}{k(u)} \right]' |\nabla u|^2 \right\} = \\ = \left\{ k'(u) \psi^2(u) - Q^2(u) \left[\frac{k(u) \psi(u)}{Q(u)} \right]' \right\} \frac{1}{k(u)} + k(u) \left[\frac{k(u) \psi(u)}{k(u)} \right]' |\nabla u|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для вывода этого уравнения достаточно заметить, что $z_t = u_{tt} - \psi'(u) u_t$, а затем определить из уравнения (1) производную u_{tt} , производя упрощения с помощью равенств (9).

Условия (7), (8) гарантируют неотрицательность правой части уравнения (10), что в силу принципа максимума обеспечивает неотрицательность функции $z = u_t - \psi(u)$ в ω_τ , коль скоро $z \geq 0$ на γ_τ .

З а м е ч а н и е 1. Условия ψ -критичности оператора \mathbf{A} в случае $\psi \equiv M = \text{const} < 0$ имеют следующий вид: $(k'/k)' \leq 0$, $[(Q/M - 1)/k]' \geq 0$. Они выполнены, например, при $k(u) = (1+u)^\sigma$, $\sigma > 0$ и $Q \equiv 0$. Поэтому решение уравнения $u_t = \nabla \cdot ((1+u)^\sigma \nabla u)$, удовлетворяющее условиям (2), (3), обладает следующей особенностью:

$$u_t(t, x) \geq \inf_{x \in \Omega} u_t(0, x) \equiv \inf_{x \in \Omega} \{ \nabla \cdot ((1+u_0)^\sigma \nabla u_0) \}(x),$$

т. е. при $t > 0$ решение не может убывать по t быстрее, чем это было в начальный момент времени.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $\psi(p) > 0$ при $p > 0$. Тогда из (4) следует, что всюду в ω_τ решение ψ -критической задачи связано с начальной функцией следующим образом:

$$\int_{u_0(x)}^{u(t,x)} \frac{d\eta}{\psi(\eta)} \geq t, \quad 0 < t < T \quad (11)$$

Это неравенство дает поточечную оценку решения снизу (см. применение подобных оценок в § 6).

З а м е ч а н и е 3. Как отмечалось ранее, требование гладкости $u \in C^{2,4}(\omega_\tau) \cap C^{1,2}(\bar{\omega}_\tau)$ можно ослабить, если доказательство сначала провести для функции

$$z(t, x) = \frac{1}{\tau} [u(t + \tau, x) - u(t, x)] - \psi(u(t, x)), \quad \tau \in (0, T),$$

а затем перейти в неравенстве $z \geq 0$ в $\omega_{\tau-\tau}$ к пределу при $\tau \rightarrow 0^+$.

З а м е ч а н и е 4. Теорема 1 справедлива в случае обобщенных решений задачи (1) — (3). Если, например, воспользоваться регуляризацией из доказательства теоремы 2 § 2, то в предположении $\varphi(u_0) \in C^2(\bar{\Omega})$, $\Delta\varphi(u_0) + Q(u_0) \geq \psi(u_0)$ в Ω , для начальных функций $u_{\varepsilon 0} = \varphi^{-1}(\varphi(u_0) + \varepsilon) \geq \varphi^{-1}(\varepsilon)$ в Ω получим

$$\Delta\varphi(u_{\varepsilon 0}) + Q(u_{\varepsilon 0}) - \psi(u_{\varepsilon 0}) \equiv \Delta\varphi(u_0) + Q(u_{\varepsilon 0}) - \psi(u_{\varepsilon 0}) \geq \\ \geq Q(u_{\varepsilon 0}) - Q(u_0) - [\varphi(u_{\varepsilon 0}) - \varphi(u_0)] = o(1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ в Ω . При этом $(u_{\varepsilon})_t - \psi(u_{\varepsilon}) \equiv -\psi(\varphi^{-1}(\varepsilon)) = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ на $(0, T) \times \partial\Omega$. Поэтому при выполнении неравенств (7), (8) в силу принципа максимума получим, что

$$(u_{\varepsilon})_t - \psi(u_{\varepsilon}) \geq \inf_{\gamma_T} \{(u_{\varepsilon})_t - \psi(u_{\varepsilon})\} = o(1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ в ω_T . Отсюда, осуществляя предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0^+$, выводим неравенство $u_t - \psi(u) \geq 0$ в $P_T[u]$.

Доказательство можно провести и другим способом. Рассмотрим, например, случай радиально симметричных решений $u = u(t, r)$, $r = |x|$. Пусть $P_T[u] = (0, T) \times \{0 \leq |x| < \zeta(t)\}$. Так же как при доказательстве теоремы 1 § 2, используем условие непрерывности производной: $(\varphi(u))'_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \zeta^-(t)$. Тогда можно выделить в $P_T[u]$ подмножество $(0, T) \times \{0 \leq r < r_*(t)\}$ такое, что, во-первых, $r_*(t) \in (\zeta(t) - \varepsilon, \zeta(t))$ для всех $t \in (0, T)$ и, во-вторых, $u_t - \psi(u) \geq -\delta$ в точке $(t, r_*(t))$, где $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ могут быть сколь угодно малы. При выводе последнего неравенства значение $r = r_*(t)$ выбирается из условия $u_t(t, r_*(t)) > 0$, а оценка $u_t - \psi(u) \geq -\delta$ при $r = r_*(t)$ вытекает из условий $r_*(t) \in (\zeta(t) - \varepsilon, \zeta(t))$, $\psi(0) = 0$. Поэтому анализ, проведенный при доказательстве теоремы 1, показывает, что в силу принципа максимума $z \equiv u_t - \psi(u) \geq -\delta$ во внутренних точках множества $(0, T) \times \{0 \leq r < r_*(t)\}$. Отсюда, устремляя ε и δ к нулю, получаем, что $z \geq 0$ в $P_T[u]$.

З а м е ч а н и е 5. Без особых затруднений доказательство теоремы 1 переносится на случай задачи Коши. При этом $u_0(x)$ должна быть такой, чтобы $z = u_t - \psi(u) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ для всех $t \in (0, T)$. При ограничениях, указанных в замечании 4, это же справедливо в том случае, когда u — финитное обобщенное решение задачи Коши.

§ 4. Локализация тепла в задачах для произвольных параболических уравнений нелинейной теплопроводности

Основным содержанием этого параграфа является доказательство существования эффекта локализации в средах с произвольной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры. Почти столь же общий результат об отсутствии локализации будет получен в § 5.

Доказательство этих утверждений проводится на основе теоремы операторного сравнения, сформулированной в § 2. Другой подход к исследованию эффекта локализации тепла в произвольных средах дан в гл. VI.

1. Постановка задачи. Мы будем рассматривать в $\omega_T = (0, T) \times \mathbf{R}_+$, $T < \infty$, первую крайнюю задачу для вырождающегося параболического уравнения:

$$u_t = (k(u)u_x)_x \equiv (\varphi(u))_{xx}; \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}_+; \quad u_0 \in C(\mathbf{R}_+), \quad \sup u_0 < \infty; \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u_1(t) > 0, \quad 0 < t < T; \quad u_1 \in C([0, T)), \quad (3)$$

где граничная функция $u_1(t)$ изменяется в режиме с обострением:

$$u_1(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-. \quad (4)$$

Функция $k(u)$ (коэффициент теплопроводности) является достаточно гладкой: $k \in C^2(\mathbf{R}_+) \cap C([0, \infty))$ и положительной при $u > 0$, $k(0) = 0$. Кроме того, будем считать выполненным неравенство

$$\int_0^1 \frac{k(u)}{u} du < \infty, \quad (5)$$

которое является необходимым и достаточным условием конечной скорости распространения возмущений в процессах, описываемых уравнением (1) (см. § 3 гл. I). Также предполагаем, что $k'(u) > 0$ при всех достаточно малых $u > 0$. Начальную функцию $u_0(x)$ считаем финитной, что в силу (5) обеспечивает финитность по x решения задачи (1)–(3) при каждом $0 < t < T$. Пусть, кроме того, $\sup |\varphi(u_0)|_x < \infty$.

В сделанных предположениях в $\omega_\tau = (0, \tau) \times \mathbf{R}_+$, $\tau < T$, существует единственное неотрицательное обобщенное решение задачи (1)–(3).

Напомним (см. § 1 гл. III), что по определению в задаче (1)–(3) с заданным на границе режимом с обостренным существует локализация тепла, если найдется такая постоянная $l^* < \infty$, что

$$\text{mes sup} u(t, x) \leq l^*, \quad 0 \leq t < T. \quad (6)$$

Минимально возможная величина l^* в (6) называется глубиной локализации.

Если же $\text{mes sup} u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^-$, то локализация тепла в задаче отсутствует (при этом тепловая волна прогревает до бесконечно большой температуры все полупространство $x > 0$).

В этом параграфе решается следующая задача: установить по заданному (достаточно произвольному) коэффициенту теплопроводности $k(u)$ в уравнении (1) классы граничных режимов с обострением $\{u_1(t)\}$, приводящих к локализации тепла.

Для этого используется метод обобщенного сравнения решений различных параболических уравнений (см. § 2).

2. Достаточные условия локализации тепла. Основным результатом этого пункта является

Теорема 1. Пусть коэффициент теплопроводности $k(u)$ при некотором $\alpha = \text{const} > 0$ удовлетворяет условию

$$[k^\alpha]'(0) < \infty. \quad (7)$$

Тогда найдутся граничные режимы с обострением, приводящие к локализации тепла в задаче (1) — (3).

Таким образом, факт существования эффекта локализации не зависит от характера поведения $k(u)$ при $u \rightarrow \infty$. Разумеется, вид граничного режима с обострением, приводящего к локализации, в первую очередь определяется характером изменения коэффициента теплопроводности при больших температурах. Точные оценки классов локализованных граничных режимов с обострением будут получены ниже.

2.1. Сначала мы рассмотрим случай неограниченных коэффициентов k , когда

$$k(u) \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow \infty. \quad (8)$$

В этом случае исследование эффекта локализации будет проводиться на основе операторного сравнения решений уравнения (1) и уравнения со степенной нелинейностью

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x, \quad (9)$$

где $\sigma > 0$ — постоянная.

Операторным методом будут сравниваться решение задачи (1) — (3) и решение уравнения (9) в разделяющихся переменных (S-режим):

$$u_{(\sigma)}(t, x) = (T - t)^{-1/\sigma} (1 - x/x_0)_+^{2/\sigma}, \quad x_0 = [2(\sigma + 2)/\sigma]^{1/2} \quad (10)$$

Это решение подробно изучено в гл. III, § 2, 3. Оно наглядно демонстрирует свойство локализации тепла. При этом $l^* = x_0$. Отметим, что функция $u_{(\sigma)}$ является критической, поскольку $(\partial/\partial t)u_{(\sigma)}(t, x) \geq 0$ почти всюду в ω_τ .

Определим по заданному коэффициенту теплопроводности k в (1), какие функции (операторы) E обеспечивают выполнение в ω_τ неравенства $u_{(\sigma)}(t, x) \geq E^{-1}(u(t, x))$, если оно выполнено на γ_τ . Как следует из теоремы 3 § 2, для этого необходимо найти хотя бы при одном $\sigma > 0$ решение $E(p)$ системы обыкновенных дифференциальных неравенств:

$$p^\sigma - k(E(p)) \geq 0, \quad p > 0, \quad (11)$$

$$\left[\frac{p^\sigma}{k(E(p)) E'(p)} \right]' \geq 0, \quad p > 0. \quad (12)$$

Напомним, что отображение $E: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ должно быть взаимно однозначным и монотонным, т. е. $E'(p) > 0$ при $p > 0$, $E(0) = 0$, $E(\infty) = \infty$.

Неравенства (11), (12) прямо следуют из условий сравнения (17), (18) теоремы 3 § 2, если в них положить $k^{(1)}(u) = k(u)$, $k^{(2)}(u) = u^\sigma$.

В следующем утверждении даны достаточные условия разрешимости системы неравенств (11), (12).

Лемма 1. Пусть при некотором $\alpha > 0$ коэффициент теплопроводности $k(u)$ удовлетворяет условию (7). Тогда при любых $0 < \sigma \leq \sigma_0 = 1/\alpha$ существует решение E системы неравенств (11), (12).

Доказательство. Положим для удобства $E^{-1} = H$. Тогда неравенства (11), (12) принимают вид

$$k(p) \leq H^\sigma(p), \quad p > 0, \quad (11')$$

$$\left[\frac{k(p)}{H^\sigma(p) H'(p)} \right]' \leq 0, \quad p > 0. \quad (12')$$

Положим

$$\frac{k(p)}{H^\sigma(p) H'(p)} \equiv \frac{1}{\omega(p)}, \quad p > 0.$$

Тогда, очевидно, неравенство (12') выполнено, если

$$\omega(p) > 0, \quad \omega'(p) \geq 0, \quad p > 0. \quad (13)$$

Функция $H(p)$ имеет следующий вид:

$$H(p) = \left[(1 + \sigma) \int_0^p k(\eta) \omega(\eta) d\eta \right]^{1/(\sigma+1)} \quad p > 0. \quad (14)$$

В силу условия (7) и предположения $\sigma \leq \sigma_0$ имеем

$$[k^{1/\sigma}]'(0) = \frac{1}{\sigma\alpha} \{ [k^{1/\sigma-\alpha} [k^\alpha]'](0) < \infty.$$

Поэтому всегда можно найти гладкую функцию $\omega(p)$, удовлетворяющую неравенствам (13), такую, что

$$\omega(p) \geq [k^{1/\sigma}(p)]', \quad p > 0, \quad (15)$$

поскольку выражение, стоящее в правой части, ограничено при всех $p \geq 0$.

Подставим в (14) произвольную функцию ω , удовлетворяющую условиям (13), (15), и покажем, что построенный указанным способом оператор (14) является решением системы неравенств (11'), (12'). Действительно, (11') в новых обозначениях принимает вид

$$\int_0^p k(\eta) ([k^{1/\sigma}(\eta)]' - \omega(\eta)) d\eta \leq 0$$

и в силу (15) выполняется при всех $p > 0$.

Далее, из (14) непосредственно следует, что $H(0) = 0$, $H'(p) > 0$ при $p > 0$ (последнее обеспечивается первым условием

(13)). Кроме того, из (14) с помощью (15) получаем

$$H(p) \geq \left[(1 + \sigma) \int_0^p k(\eta) [k^{1/\sigma}(\eta)]' d\eta \right]^{1/(1+\sigma)} \equiv k^{1/\sigma}(p).$$

Отсюда в силу (8) $H(\infty) = \infty$.

Итак функция $H: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, определяемая равенством (14), удовлетворяет системе (11'), (12'). Поэтому $E = H^{-1}: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ является решением исходной системы (11), (12).

Замечание 1. Нетрудно видеть, что утверждение леммы остается справедливым без ограничения (8) на коэффициент k , поскольку никаких условий на характер роста функции $\omega(p)$ (за исключением (13), (15)) в процессе доказательства не возникает. Поэтому всегда можно выбрать функцию ω таким образом, чтобы интеграл в правой части (14) неограниченно возрастал при $p \rightarrow \infty$, что обеспечивает выполнение равенства $H(\infty) = \infty$, или, что то же самое, $E(\infty) = \infty$.

Замечание 2. Покажем, что из (7) вытекает справедливость условия (5). Действительно, в силу (7) найдется такая постоянная $M > 0$, что $k(u) \leq Mu^{1/\alpha}$ при всех $0 \leq u \leq 1$, и поэтому

$$\int_0^1 \frac{k(u)}{u} du \leq M\alpha < \infty.$$

Отметим, что существуют коэффициенты k , при которых условие (7) не выполняется ни при каких $\alpha > 0$ и система (11), (12) решения не имеет. Это относится, например, к коэффициенту k , который при $u \in (0, \epsilon]$, $\epsilon < 1$, имеет вид $k(u) = (-\ln u)^\mu$, где $\mu < -1$ — постоянная. В то же время условие (5) конечной скорости распространения возмущений выполнено.

Отметим также, что разрешимость системы неравенств (11), (12), которая определяет условия локализации тепла в рассматриваемой задаче, зависит только от характера поведения коэффициента теплопроводности $k(u)$ при малых $u \rightarrow 0^+$.

Из способа доказательства леммы 1 непосредственно вытекает

Следствие. Пусть выполняется условие (8) и существует такая постоянная $\alpha > 0$, что

$$[k^\alpha(p)]'' \geq 0, \quad p > 0. \quad (16)$$

Тогда $E(p) = k^{-1}(p^{1/\alpha})$, где k^{-1} — функция обратная к k (k^{-1} существует в силу монотонности k ; последнее следует из (16)), является решением системы (11), (12) при $\sigma = 1/\alpha$.

Теперь на основе леммы 1 и теоремы операторного сравнения из § 2 можно сформулировать достаточные условия локализации тепла в задаче (1)–(3).

Теорема 2. Пусть коэффициент теплопроводности $k(u)$ при некотором $\alpha > 0$ удовлетворяет условию (7), и E — некоторое решение системы неравенств (11), (12), отвечающее фиксиро-

ванному $\sigma \in (0, 1/\alpha]$. Пусть, кроме того, краевые условия задачи (1) — (3) удовлетворяют неравенствам

$$u_0(x) \leq E \left[T^{-1/\sigma} \left(1 - \frac{x}{x_0} \right)_+^{2/\sigma} \right], \quad x > 0; \quad (17)$$

$$u_1(t) \leq E [(T-t)^{-1/\sigma}], \quad 0 < t < T. \quad (18)$$

Тогда всюду в ω , $u(t, x) \leq E [u_{(0)}(t, x)]$, где $u_{(0)}$ определено в (10). Поэтому в задаче (1) — (3) существует локализация тепла с глубиной $l^* \leq x_0$.

Замечание. В § 4 гл. III показано, что решение задачи для уравнения (9) с граничным режимом $u(t, 0) = (T-t)^{-1/\sigma}$, $t \in (0, T)$, и начальной функцией $u(0, x) \in C(\mathbb{R}_+)$ является ограниченным равномерно по $t \in (0, T)$ при всех $x > x_0 = [2(\sigma+2)/\sigma]^{1/2}$. Используя этот результат, нетрудно показать, что сформулированное в теореме ограничение (17) на $u_0(x)$ не является существенным: при выполнении всех остальных условий для локализации тепла в задаче (1) — (3) достаточно, чтобы $u_0(x)$ была финитной функцией. Метод доказательства подобного рода утверждений будет дан ниже.

Сформулированный в теореме 2 результат доказывает теорему 1 в случае неограниченных коэффициентов теплопроводности k , удовлетворяющих (8).

Рассмотрим теперь конкретные случаи применения теоремы 2 (все указанные ниже коэффициенты удовлетворяют условию конечной скорости распространения возмущений).

Пример 1. Пусть $k(u) = u^2/[1 + \mu(u)]$, $\sigma > 0$, где $\mu(u)$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условиям $\mu(u) \geq 0$, $\mu'(u) \geq 0$, $u > 0$.

В этом случае одним из решений системы неравенств (11), (12) будет тождественное преобразование $E(p) \equiv p$. Это эквивалентно применению теоремы прямого сравнения решений уравнений (1), (9) (см. теорему 2 § 1 и рассмотренный там пример 1). Поэтому в силу теоремы 2 в задаче (1) — (3) с краевыми условиями, удовлетворяющими неравенствам

$$u_0(x) \leq u_{(0)}(0, x), \quad x \in \mathbb{R}_+; \quad u_1(t) \leq (T-t)^{-1/\sigma} \quad 0 < t < T,$$

существует локализация тепла с глубиной $l^* \leq x_0 = [2(\sigma+2)/\sigma]^{1/2}$.

Пример 2. Пусть $k(u) = [e^u - 1]^\lambda$, где $\lambda > 0$ — фиксированная постоянная. В этом случае при $\alpha = 1/\lambda$ выполняется неравенство (16), и поэтому решением системы неравенств (11), (12) ($\sigma = \lambda$) является преобразование

$$E(p) = k^{-1}(p^\lambda) = \ln(1+p), \quad p > 0.$$

Тогда из теоремы 2 заключаем, что краевые условия, удовлетворяющие неравенствам

$$u_0(x) \leq \ln[1 + u_{(0)}(0, x)], \quad x \in \mathbb{R}_+; \\ u_1(t) \leq \ln[1 + (T-t)^{-1/\lambda}], \quad 0 < t < T,$$

обеспечивают существование локализации тепла в задаче (1) — (3) с глубиной $l^* \leq [2(\lambda + 2)/\lambda]^{1/2}$ (отметим, что при этом $u(t, x) \leq \ln[1 + u_{(1)}(t, x)]$ всюду в ω_T).

Пример 3. Рассмотрим коэффициент $k(u) = u \exp\{u^2\}$, который удовлетворяет условию (16) при $\alpha = 1$. Поэтому преобразование $E(p) = k^{-1}(p)$ является искомым, и при выполнении неравенств (17), (18) в задаче (1) — (3) существует локализация тепла с глубиной $l^* \leq \sqrt{6}$. Оценим асимптотическое поведение при $t \rightarrow T^-$ граничного режима, приводящего к локализации. Поскольку

$$k^{-1}(u) \simeq \ln^{1/2} u - \frac{1}{4} \frac{\ln \ln u}{\ln^{1/2} u}, \quad u \rightarrow \infty,$$

для локализации тепла в задаче (1) — (3) достаточно, чтобы

$$u_1(t) \leq |\ln(T - t)|^{1/2} - \frac{1}{4} \frac{\ln |\ln(T - t)|}{|\ln(T - t)|^{1/2}}, \quad t \rightarrow T^-$$

Пример 4. Пусть $k(u) = \exp\{e^u - 1\} - 1$. Здесь искомым оператором E , отвечающим $\sigma = 1$, будет

$$E(p) = k^{-1}(p) = \ln[1 + \ln(1 + p)],$$

и поэтому, если $u_0(x) \leq E[u_{(1)}(0, x)]$ в \mathbb{R}_+ и

$$u_1(t) \leq \ln\{1 + \ln[1 + (T - t)^{-1}]\}, \quad 0 < t < T,$$

то в задаче (1) — (3) существует локализация тепла с глубиной $l^* \leq \sqrt{6}$.

С помощью методов теории п. а. р. (см. гл. VI) можно показать, что полученные в примерах 2—4 оценки локализованных граничных режимов с обострением являются оптимальными и не могут быть улучшены.

Рассмотрим теперь пример, для которого это не так.

Пример 5. Пусть $k(u) = \ln^\lambda(1 + u)$, $\lambda > 0$ — фиксированная постоянная. В этом случае условие (7) выполнено, например, при $\alpha = 1/\lambda$, и поэтому из леммы 1 получаем, что при любых $\sigma \in (0, \lambda]$ существует решение системы неравенств (11), (12). Следуя доказательству леммы 1, построим искомое преобразование E .

Фиксируем произвольное $\sigma \in (0, \lambda]$. Неравенство (15) эквивалентно неравенству

$$\omega(p) \geq \frac{\lambda}{\sigma} \frac{\ln^{\lambda/\sigma-1}(1+p)}{1+p}, \quad p > 0. \quad (19)$$

Функция, стоящая в правой части, ограничена сверху величиной

$$C_{\lambda\sigma} = \frac{\Gamma_\lambda}{\sigma} \left(\frac{\lambda}{\sigma} - 1\right)^{\lambda/\sigma-1} \exp\left\{1 - \frac{\lambda}{\sigma}\right\}, \quad \sigma < \lambda, \quad C_{\lambda\lambda} = 1.$$

Отсюда с учетом условий (13) заключаем, что для достижения максимального порядка роста $E(p)$ при $p \rightarrow \infty$ (и тем самым максимально допустимого порядка роста граничных режимов с

обострением $u_1(t) \leq E[(T-t)^{-1/\sigma}]$ при $t \rightarrow T^-$ необходимо положить $\omega(p) \equiv C_{\lambda\sigma}$ в (14). Напомним, что $H = E^{-1}$, и поэтому, чем медленнее растет $H(p)$ при $p \rightarrow \infty$, тем быстрее растет функция $E(p)$.

Итак, из (14) при $\sigma \in (0, \lambda]$ получаем

$$H(p) \equiv E^{-1}(p) = \left[(1 + \sigma) C_{\lambda\sigma} \int_0^p \ln^\lambda(1 + \eta) d\eta \right]^{1/(\sigma+1)}$$

Отсюда

$$E^{-1}(p) \simeq a_{\lambda\sigma} (p \ln^\lambda p)^{1/(\sigma+1)}, \quad a_{\lambda\sigma} = [(1 + \sigma) C_{\lambda\sigma}]^{1/(1+\sigma)},$$

$$E(p) \simeq a_{\lambda\sigma}^{-(1+\sigma)} (1 + \sigma)^{-\lambda} p^{1+\sigma} \ln^{-\lambda} p$$

при достаточно больших p .

Из теоремы 2 заключаем, что в рассматриваемой задаче к локализации приводит действие любых граничных режимов с обострением, удовлетворяющих при $t \rightarrow T^-$ условию

$$u_1(t) \leq E[(T-t)^{-1/\sigma}] \simeq a_{\lambda\sigma}^{-(1+\sigma)} [\sigma/(\sigma+1)]^\lambda (T-t)^{-(1+\sigma)/\sigma} |\ln(T-t)|^{-\lambda}. \quad (20)$$

Напомним, что здесь величина параметра $\sigma \in (0, \lambda]$ может быть произвольной. В частности, уменьшая σ , получаем, что локализованными являются любые степенные граничные режимы с обострением

$$u_1(t) = (T-t)^n, \quad 0 < t < T; \quad n = \text{const} < 0. \quad (21)$$

Однако правая часть (20) корректного перехода к пределу при $\sigma \rightarrow 0^+$ не допускает (в том числе потому, что оценка $l^* \leq x_0 = [2(\sigma+2)/\sigma]^{1/2}$ при $\sigma = 0^+$ теряет смысл), и поэтому указанным путем точную границу локализованных режимов с обострением получить не удастся.

Такая граница будет установлена в § 2 гл. VI с помощью построения приближенных автомодельных решений рассматриваемого уравнения. Ей отвечает функция экспоненциального вида

$$u_1(t) = \exp\{(T-t)^{-1/(1+\lambda)}\}, \quad 0 < t < T,$$

что в общем согласуется с фактом произвольности показателя $n < 0$ в семействе локализованных режимов (21).

2.2. Рассмотрим случай ограниченных коэффициентов k . Без потери общности будем считать, что

$$k(p) \leq 1, \quad p > 0. \quad (22)$$

В § 4 гл. III изучалось действие граничных режимов с обострением на среду с постоянными теплофизическими свойствами, диффузия тепла в которой описывается линейным уравнением

$$v_t = v_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbf{R}_+; \quad (23)$$

$v(0, x) \equiv 0$ (что несущественно в силу принципа суперпозиции).

Было, в частности, показано, что граничный режим с обострением

$$v(t, 0) = \exp \{(T - t)^{-1}\}, \quad 0 < t < T, \quad (24)$$

приводит к эффективной локализации тепла с глубиной $L^* = 2$. Это означает, что $v(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^-$ для всех $0 \leq x \leq 2$, а при $x > 2$ решение ограничено сверху равномерно по $t \in (0, T)$:

$$v(t, x) < v(T^-, x) = \pi^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{2}{x} \right)^2 \right]^{-1/2} \int_{(x^2-4)/(4T)}^{\infty} e^{-\eta} \eta^{-1/2} d\eta < \infty. \quad (25)$$

Этот результат будет использован при операторном сравнении решений уравнений (1) и (23); условия сравнения — неравенство (22) и неравенство

$$[k(E(p))E'(p)]' \leq 0, \quad p > 0 \quad (26)$$

(последнее эквивалентно (12) при $\sigma = 0$).

Полагая $H = E^{-1}$, перепишем (26) в виде

$$[H'(p)/k(p)]' \geq 0, \quad p > 0.$$

Отсюда

$$E^{-1}(p) \equiv H(p) = \int_0^p k(\eta) \omega(\eta) d\eta, \quad p > 0, \quad (27)$$

где $\omega(p)$ — произвольная ограниченная функция, удовлетворяющая (13) и условию

$$\int_0^{\infty} k(\eta) \omega(\eta) d\eta = \infty. \quad (28)$$

Ограничение (28) обеспечивает выполнение условия $E(\infty) = \infty$.

Из (27) следует, что в случае

$$\int_0^{\infty} k(\eta) d\eta = \infty \quad (28')$$

для достижения максимального порядка роста $E(p)$ (или минимального $E^{-1}(p)$) при $p \rightarrow \infty$ необходимо потребовать ограниченности в \mathbf{R}_+ неубывающей функции ω , например положить $\omega \equiv 1$.

Итак, при выполнении условий (13), (28) оператор E в (27) обеспечивает сравнение решений уравнений (1) и (23). Без ограничения общности можно рассмотреть только случай $u_0 \equiv 0$ в \mathbf{R}_+ . Тогда, поскольку краевое условие (24) является критическим, из теоремы операторного сравнения (см. § 2) заключаем, что граничный режим с обострением

$$u_1(t) \leq E \{ \exp \{(T - t)^{-1}\} \}, \quad 0 < t < T, \quad (29)$$

приводит к эффективной локализации тепла в задаче (1) — (3) с

глубиной $L^* \leq 2$, причем

$$u(t, x) < E[v(T^-, x)], \quad 0 < t < T, \quad x > 2. \quad (30)$$

В следующей теореме производится «переход» от эффективной локализации к локализации тепла в строгом смысле.

Теорема 3. Пусть в задаче (1)–(3) $u_0 \equiv 0$ и граничный режим с обострением удовлетворяет условию (29), где $E: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ — решение системы неравенств (22), (26). Тогда в задаче существует локализация тепла и найдется такая постоянная $l^* > 0$, что

$$u(t, x) = 0 \quad \text{в } (0, T) \times \{x > l^*\}. \quad (31)$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $x^* > 2$. Тогда, как следует из (30), $u(t, x^*) < E[v(T^-, x^*)] < \infty$ при любых $0 < t < T$, и поэтому в силу теоремы сравнения решений параболических уравнений (см. § 1, 3 гл. I) функция $u(t, x)$ всюду в $(0, T) \times \{x > x^*\}$ не превосходит решения задачи

$$U_t = (k(U)U_x)_x, \quad 0 < t < T, \quad x > x^*, \quad (32)$$

$$U(0, x) = 0, \quad x > x^*; \quad U(t, x^*) = E[v(T^-, x^*)], \quad 0 < t < T.$$

Решение этой задачи является автомодельным (см. § 3 гл. II) и имеет вид $U(t, x) = f(\xi)$, где $\xi = (x - x^*)/t^{1/2}$. Функция f определяется из следующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} (k(f)f')' + \frac{1}{2}f'\xi &= 0, \quad \xi > 0; \\ f(0) &= E[v(T^-, x^*)], \quad f(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Существование решения задачи (33) при любых конечных $f(0) > 0$ установлено в [180, 197] (см. § 3 гл. I). Там же показано, что при выполнении условия (5) функция $f(\xi)$ является финитной, т. е. $f(\xi) = 0$ при всех $\xi \geq \xi_0$ (величина $\xi_0 = \xi_0(x^*) < \infty$ зависит от выбора $x^* > 2$).

Итак, всюду в $(0, T) \times \{x > x^*\}$ выполнено неравенство

$$u(t, x) \leq U(t, x) = f\left(\frac{x - x^*}{t^{1/2}}\right).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} \text{mes sup } u(t, x) &\leq x^* + \text{mes sup } U(t, x) = \\ &= x^* + \xi_0(x^*)t^{1/2} < x^* + \xi_0(x^*)T^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, в задаче (1)–(3) существует локализация тепла в смысле (6), причем для глубины локализации справедлива оценка

$$l^* \leq \inf_{x^* > 2} \{x^* + \xi_0(x^*)T^{1/2}\} < \infty, \quad (34)$$

что завершает доказательство.

Замечание. В § 4 гл. III показано, что возможен обратный «переход» — от локализации в строгом смысле (при финитной функции $u_0(x)$) к эффективной локализации (когда $u_0 \in C(\mathbb{R}_+)$ — произвольная функция). Он осуществляется на основе вывода специальной энергетической оценки разности двух решений уравнения (1), отвечающих одному и тому же граничному условию.

Отметим, что в теореме 3 ограничение (7) на коэффициент теплопроводности не накладывается — достаточно лишь выполнения условия конечной скорости распространения возмущений. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 6. Пусть $k(u) = 2\pi^{-1} \operatorname{arctg} u$. Условие (22) при этом выполнено (справедливо также неравенство (5)). Тогда, полагая $\omega \equiv 1$ в (27), получаем

$$E^{-1}(p) = \int_0^p k(\eta) d\eta = p + \frac{2}{\pi} p \left[\operatorname{arctg} p - \frac{\pi}{2} \right] - \frac{1}{\pi} \ln(1 + p^2) \simeq \\ \simeq p - \frac{2}{\pi} \ln p$$

при достаточно больших p . Отсюда $E(p) \simeq p + \frac{2}{\pi} \ln p$, $p \rightarrow \infty$, и в силу теоремы 3 заключаем, что к локализации с глубиной (34) приводят граничные режимы, удовлетворяющие при $t \rightarrow T^-$ оценке

$$u_1(t) \leq E \{ \exp \{ (T-t)^{-1} \} \} \simeq \exp \{ (T-t)^{-1} \} + \frac{2}{\pi} (T-t)^{-1}.$$

Пример 7. Рассмотрим коэффициент $k(u) = u[1 + 2u \ln(1 + u)]^{-1}$. Условие (22) здесь выполнено, поскольку $2u \ln(1 + u) \geq \geq 2u^2/(1 + u)$ при всех $u > 0$, и, следовательно,

$$k(u) \leq u[1 + 2u^2/(1 + u)]^{-1} \equiv u(1 + u)[1 + u(1 + 2u)]^{-1} < 1$$

при любых $u > 0$. Справедливо также равенство (28'). Тогда из (27) при $\omega \equiv 1$ имеем

$$E^{-1}(p) = \int_0^p \frac{\eta d\eta}{1 + 2\eta \ln(1 + \eta)} \simeq \frac{1}{2} \frac{p}{\ln p}, \quad p \rightarrow \infty.$$

Отсюда $E(p) \simeq 2p \ln p$ при больших p , и поэтому локализованные являются граничные режимы

$$u_1(t) \leq E \{ \exp \{ (T-t)^{-1} \} \} \simeq 2(T-t)^{-1} \exp \{ (T-t)^{-1} \}, \quad t \rightarrow T^-.$$

Пример 8. Пусть $k(u) = 2u/(1 + u^2)$. В этом случае выполнены условия (22), (28'). Полагая $\omega \equiv 1$ в (27), получаем $E^{-1}(p) = \ln(1 + p^2)$, $E(p) = (e^p - 1)^{1/2}$. Отсюда любой граничный режим вида

$$u_1(t) \leq [\exp \{ \exp \{ (T-t)^{-1} \} \} - 1]^{1/2} \simeq \exp \left\{ \frac{1}{2} \exp \{ (T-t)^{-1} \} \right\}, \\ t \rightarrow T^-,$$

приводит к локализации в строгом смысле с глубиной (34) (и к эффективной локализации с $L^* \leq 2$).

Оценки локализованных граничных режимов с обострением, установленные в примерах 7, 8, не оптимальны. Точные оценки для этих случаев будут получены в гл. VI.

Пример 9. Пусть $k(u) = u/(1+u^3)$. Условие (28') здесь не имеет места. Выбирая $\omega(p) = p$ (условия (13) выполнены), из (27) получаем

$$E^{-1}(p) = \frac{1}{3} \ln(1+p^3), \quad E(p) = (e^{3p} - 1)^{1/3} \simeq e^p, \quad p \rightarrow \infty,$$

и поэтому локализованными являются режимы

$$u_1(t) \leq \exp\{\exp\{(T-t)^{-1}\}\}, \quad t \rightarrow T^-.$$

Полагая теперь $\omega(p) \simeq p/\ln p$ при $p \rightarrow \infty$ (условия (13) также справедливы), из (27) получаем

$$E^{-1}(p) \simeq \ln \ln p, \quad E(p) \simeq \exp\{e^p\}, \quad p \rightarrow \infty,$$

и к локализации приводят режимы с обострением

$$u_1(t) \leq \exp\{\exp\{\exp\{(T-t)^{-1}\}\}\}, \quad t \rightarrow T^-.$$

В качестве ω можно взять также функцию $\omega(p) \simeq p/[\ln p(\ln \ln p)]$ при $p \rightarrow \infty$ и т. д.

Действуя указанным способом, получаем, что в рассматриваемом случае локализованными являются все граничные режимы с обострением вида

$$u_1(t) \leq \exp\{\exp \dots \{\exp\{(T-t)^{-1}\}\} \dots\}, \quad t \rightarrow T^-,$$

с произвольным конечным числом экспонент в правой части.

В § 2 гл. VI будут получены результаты, свидетельствующие о том, что при выполнении условия

$$\int_1^{\infty} \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta < \infty \quad (35)$$

все граничные режимы с обострением являются локализованными. Нетрудно видеть, что коэффициент k из примера 9 удовлетворяет условию (35).

3. Эффективная локализация тепла. Все результаты предыдущего пункта применимы для исследования эффективной локализации тепла.

Решение задачи (1)–(3), развивающееся в режиме с обострением, называется *эффективно локализованным*, если оно неограниченно возрастает при $t \rightarrow T^-$ на множестве конечной меры:

$$L^* = \text{mes}\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \overline{\lim}_{t \rightarrow T^-} u(t, x) = \infty\} < \infty \quad (36)$$

(L^* — глубина локализации).

В этом определении отсутствует требование финитности начальной функции $u_0(x)$; необходимо лишь, чтобы она была огра-

ической в R_+ . Кроме того, здесь нет необходимости в выполнении (5) — условия конечной скорости распространения возмущений.

Для исследования эффективной локализации нетрудно переформулировать теоремы 2, 3, а также результаты, получаемые в примерах 1—9. При этом исследование неограниченных коэффициентов $k(u)$ проводится на основе метода операторного сравнения с помощью выводов § 4 гл. III. Тогда для глубины эффективной локализации получаем оценку $L^* \leq [2(\sigma + 2)/\sigma]^{1/2}$, где $\sigma \in (0, 1/\alpha]$ — параметр в системе неравенств (11), (12).

Случай ограниченных коэффициентов k анализируется так же, как и в п. 2. Отметим, что указанные в примерах 6—9 граничные режимы с обострением приводят к эффективной локализации с глубиной $L^* \leq 2$.

Пример 10. Пусть $k(u) = 1/(1+u)$. Полагая $\omega \equiv 1$ в (27), получаем $E(p) = e^p - 1$. Отсюда граничные режимы

$$u_1(t) \leq \exp\{\exp\{(T-t)^{-1}\}\}, \quad t \rightarrow T^-,$$

приводят к эффективной локализации с глубиной $L^* \leq 2$ (оценка сверху локализованных граничных режимов здесь не является оптимальной, см. § 2 гл. VI).

4. Локализация тепла в задаче Коши. Решение задачи Коши для уравнения (1) с финитной начальной функцией

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in R; \quad u_0 \in C(R), \quad u_0 \neq 0, \quad (37)$$

называется *локализованным*, если его носитель неподвижен в течение конечного времени, т. е. существует такое $T^* \in (0, \infty)$, что

$$\supp u(t, x) = \supp u_0(x), \quad 0 < t < T^* \quad (38)$$

(при этом, естественно, считается выполненным условие (5)).

Хорошо известно (см. комментарии), что факт неподвижности точки фронта обобщенного решения уравнения (1) определяется характером асимптотики начальной функции вблизи нее. Однако величина времени локализации T^* , имеющая важный физический смысл, зависит от «глобальной» пространственной структуры функции $u_0(x)$. Эта зависимость отражена в сформулированной ниже теореме.

Теорема 4. Пусть коэффициент k при некотором $\alpha > 0$ удовлетворяет условию (7), и E — некоторое решение системы неравенств (11), (12), отвечающее фиксированному $\sigma \in (0, 1/\alpha]$. Пусть u_0 удовлетворяет неравенствам

$$0 < u_0(x) \leq E [u_m (1 - |x|/x_m)_+^{2/\sigma}], \quad x \in R,$$

где u_m, x_m — фиксированные положительные постоянные. Тогда решение задачи Коши (1), (37) локализовано в области $\{|x| < x_m\}$, и для времени локализации справедлива оценка $T^* \geq \geq \sigma x_m^2 / [2u_m^\sigma (\sigma + 2)]$.

Справедливость сформулированного утверждения выводится из теоремы 2 с помощью приема, использовавшегося в § 3 гл. III при аналогичном исследовании уравнения (9). Для иллюстрации теоремы 4 рассмотрим

Пример 11. Пусть $k(u) = e^u - 1$. В этом случае решением системы неравенств (11), (12) при $\sigma = 1$ будет функция $E(p) = \ln(1 + p)$. Тогда из теоремы 4 получаем, что решение, порождаемое начальной функцией

$$u_0(x) = \ln \{1 + u_m(1 - |x|/x_m)_+\}, \quad x \in \mathbf{R},$$

локализовано в области $\{|x| < x_m\}$ в течение времени, не меньшего, чем $x_m^2/(6u_{..})$.

§ 5. Об условиях отсутствия локализации тепла

1. **Постановка задачи.** Так же как и в § 4, будем рассматривать в ω_T первую краевую задачу для вырождающегося параболического уравнения:

$$u_t = (k(u)u_x)_x, \quad (1)$$

$$u(0, x) \equiv 0, \quad x \in \mathbf{R}_+; \quad u(t, 0) = u_1(t) > 0, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

где граничная функция $u_1 \in C^1([0, T])$, $u_1' \geq 0$ изменяется при $t \rightarrow T^-$ в режиме с обострением.

Пусть выполняются все ограничения, накладываемые на функцию $k(u)$ в п. 1 § 4. В частности, выполняется условие конечной скорости распространения возмущений:

$$\int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta < \infty. \quad (3)$$

В задаче (1), (2) локализация тепла отсутствует, если

$$\text{mes sup} u(t, x) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-, \quad (4)$$

т. е. тепловые возмущения проникают при $t \rightarrow T^-$ как угодно далеко от границы $x = 0$.

Отметим, что (4) эквивалентно условию

$$u(t, x) \rightarrow \infty \text{ в } \mathbf{R}_+, \quad t \rightarrow T^- \quad (5)$$

(справедливость этого утверждения устанавливается методом, который используется при доказательстве теоремы 3 § 4).

2. **Достаточные условия отсутствия локализации тепла.** Обозначим через $u_{(\sigma)}(t, x)$ решение уравнения со степенной нелинейностью

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x, \quad \sigma = \text{const} > 0, \quad (6)$$

удовлетворяющее краевому условию

$$u_{(\sigma)}(t, 0) = (T - t)^n, \quad 0 < t < T; \quad n = \text{const} < -1/\sigma, \quad (7)$$

$$u_{(\sigma)}(0, x) \in C(\mathbf{R}_+).$$

В § 2, 3 гл. III показано, что функция $u_{(\sigma)}$ не является локализованной и существует такая постоянная $a_0 > 0$, что

$$\text{mes supp } u_{(\sigma)}(t, x) \geq a_0(T-t)^{(1+\sigma)/2} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-. \quad (8)$$

Этот результат будет использован при сравнении решений уравнений (6) и (1). Всяду в дальнейшем будем считать выполненными условия

$$k'(u) > 0, \quad u > 0; \quad k(\infty) = \infty. \quad (9)$$

Условия отсутствия локализации в случае ограниченных коэффициентов $k(u)$ будут получены другим способом в гл. VI.

Пусть задан произвольный коэффициент $k \in C^2(\mathbb{R}_+) \cap C([0, \infty))$, удовлетворяющий условиям (3), (9). Определим, какие функции E обеспечивают операторное сравнение решения $u_{(\sigma)}$ уравнения (6) с решением исходной задачи (1), (2), т. е. выполнение всюду в ω неравенства $u(t, x) \geq E^{-1}[u_{(\sigma)}(t, x)]$.

Учитывая, что решение $u(t, x)$ является критическим, из теоремы 3 § 2 получаем, что для этого необходимо найти решение $E(p): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ системы обыкновенных дифференциальных неравенств

$$k(p) - E^\sigma(p) \geq 0, \quad p > 0, \quad (10)$$

$$\left[\frac{k(p)}{E^\sigma(p) E'(p)} \right]' \geq 0, \quad p > 0. \quad (11)$$

Эти неравенства совпадают с условиями сравнения (17), (18) теоремы 3 § 2, если в последних положить $k^{(1)}(u) = u^\sigma$, $k^{(2)}(u) = k(u)$. Достаточные условия разрешимости системы (10), (11) дает следующая

Лемма 1. Пусть выполняются условия (9) и существует такая постоянная $\alpha > 0$, что

$$[k^\alpha]'(0) > 0. \quad (12)$$

Пусть, кроме того, функция $[k^\alpha]''(u)$ имеет при $u > 0$ лишь конечное число нулей. Тогда при $\sigma = 1/\alpha$ существует решение E системы неравенств (10), (11).

Доказательство. Положим $k(p)/[E^\sigma(p)E'(p)] = 1/\omega(p)$. Неравенство (11) будет выполнено, если

$$\omega(p) > 0, \quad \omega'(p) \leq 0, \quad p > 0. \quad (13)$$

При этом

$$E(p) = \left[(1 + \sigma) \int_0^p k(\eta) \omega(\eta) d\eta \right]^{1/(1+\sigma)}$$

Неравенство (10) тогда принимает вид

$$\int_0^p k(\eta) \{ [k^{1/\sigma}(\eta)]' - \omega(\eta) \} d\eta \geq 0, \quad p > 0. \quad (14)$$

Предположение (12) при $\alpha = 1/\sigma$ обеспечивает возможность построения функции $\omega(p)$, удовлетворяющей условиям (13) и неравенству $\omega(p) \leq [k^{1/\sigma}]'(p)$ для всех достаточно малых $p > 0$.

Второе условие леммы означает, что функция $[k^{1/\sigma}]'(p)$ монотонна при всех достаточно больших $p > p_* > 0$ (разумеется, это условие не оптимально). Поэтому существует $\lim_{p \rightarrow \infty} [k^{1/\sigma}]'(p) = \kappa$, и если $\kappa > 0$, то при $p > p_*$ можно положить $\omega(p) = \inf_{p \in (0, p_*)} \{[k^{1/\sigma}]'(p)\}$.

Если же $\kappa = 0$, то полагаем $\omega(p) = [k^{1/\sigma}]'(p)$ при $p > p_*$. В обоих случаях такое продолжение функции $\omega(p)$ в область больших значений $p > 0$ с сохранением условий (13), (14) позволяет добиться равенства $E(\infty) = \infty$.

З а м е ч а н и е. Существуют такие коэффициенты k , для которых условие (12) не выполняется ни при каких $\alpha > 0$. Это относится, например, к функции $k(u) = \exp\{-u^\nu\}$, $\nu = \text{const} < 0$.

Из способа доказательства леммы вытекает

С л е д с т в и е. Пусть выполняются условия (9) и существует такая постоянная $\alpha > 0$, что

$$[k^\alpha(p)]'' \leq 0, \quad p > 0. \quad (15)$$

Тогда функция $E(p) = k^\alpha(p)$ является решением системы неравенств (10), (11) при $\sigma = 1/\alpha$.

Нетрудно видеть, что при выполнении (9), (15) функция k осуществляет взаимно однозначное и монотонное отображение $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Поэтому преобразование $E = k^\alpha$ обладает теми же свойствами.

На основе леммы 1 и теоремы операторного сравнения формулируется

Т е о р е м а 1. Пусть $k(\infty) = \infty$ и, кроме того, при некотором $\alpha > 0$ выполняется условие (12). Пусть E — решение системы неравенств (10), (11) при $\sigma = 1/\alpha$. Тогда, если при достаточно больших $t < T$

$$u_n(t) \geq E^{-1}[(T-t)^n], \quad n = \text{const} < -1/\sigma, \quad (16)$$

то в задаче (1), (2) отсутствует локализация тепла, $u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^-$ всюду в \mathbf{R}_+ и существует такая постоянная $\bar{a}_0 > 0$, что

$$\text{mes sup} u(t, x) \geq \bar{a}_0(T-t)^{(1+n\sigma)/2} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-. \quad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно основано на сравнении в $(\tau, T) \times \mathbf{R}_+$ решения $u(t, x)$ задачи (1), (2) с $v_\nu \equiv v_{\nu(\sigma)}(t, x\nu^{-\sigma/2})$ — автомодельным решением уравнения (6). Постоянные $\tau \in (0, T)$, $\nu > 0$ подбираются из условия $u(\tau, x) \geq v_\nu(\tau, x)$ в \mathbf{R}_+ . Поскольку $v_\nu(\tau, x) \rightarrow 0$ и $\text{supp } v_\nu(\tau, x) \rightarrow \{0\}$ при $\nu \rightarrow 0^+$, этого всегда можно добиться. Тогда из неравенства $u \geq E^{-1}(v_\nu)$ в $(\tau, T) \times \mathbf{R}_+$ вытекает утверждение теоремы, причем в (17) $\bar{a}_0 = a_0\nu^{\sigma/2}$, где $a_0 = a_0(n, \sigma) > 0$ — постоянная в (8).

П р и м е р 1. Пусть $k(u) = u^\sigma [1 + \mu(u)]$, $\sigma > 0$, где $\mu \in C^2(\mathbf{R}_+)$ удовлетворяет условиям $\mu \geq 0$, $\mu' \geq 0$. В этом случае одним из решений системы (10), (11) будет $E(p) \equiv p$, что эквивалентно применению теоремы прямого сравнения решений уравнений (6) и (1) (см. теорему 2 § 1). Из теоремы 1 тогда получаем, что

граничные режимы $u_1(t) \geq (T-t)^n$, $t \rightarrow T^-$, где $n < -1/\sigma$, приводят к отсутствию локализации тепла.

Пример 2. Рассмотрим коэффициент $k(u) = \ln^{\lambda}(1+u)$, где $\lambda > 0$ — фиксированная постоянная. Тогда при $\alpha = 1/\lambda$ выполняется условие (15), и поэтому решением системы неравенств (10), (11), отвечающим $\sigma = 1/\alpha = \lambda$, будет функция

$$E(p) = k^{1/\lambda}(p) \equiv \ln(1+p), \quad E^{-1}(p) = e^p - 1.$$

Таким образом, локализация тепла в задаче (1), (2) отсутствует, если

$$u_1(t) \geq \exp\{(T-t)^n\} - 1, \quad t \rightarrow T^-, \quad (18)$$

где $n < -1/\lambda$. При этом найдется постоянная $\bar{a}_0 > 0$ такая, что

$$\text{mes sup} u(t, x) \geq \bar{a}_0 (T-t)^{(1+n\lambda)/2} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-. \quad (19)$$

Пример 3. Пусть $k(u) = \ln[1 + \ln(1+u)]$. Поскольку $k''(u) \leq 0$ в \mathbf{R}_+ , искомым оператором является функция

$$E(p) = k(p), \quad E^{-1}(p) = \exp\{e^p - 1\} - 1,$$

которая удовлетворяет системе (10), (11) при $\sigma = 1$. Отсюда граничные режимы

$$u_1(t) \geq \exp\{\exp\{(T-t)^n\} - 1\} - 1, \quad t \rightarrow T^-, \quad (20)$$

при $n < -1$ приводят к отсутствию локализации тепла:

$$\text{mes sup} u(t, x) \geq \bar{a}_0 (T-t)^{(1+n)/2} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-. \quad (21)$$

Оценки снизу нелокализованных граничных режимов с обострением, установленные в примерах 2, 3, не являются оптимальными. В § 2 гл. VI с помощью построения п. а. р. рассматриваемых уравнений будут установлены точные оценки таких режимов. В частности, будет показано, что в примере 2 локализация отсутствует при любых $n < -1/(1+\lambda)$ в (18) и в отличие от (19)

$$\text{mes sup} u(t, x) \geq b_0 (T-t)^{[1+n(1+\lambda)]/2} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-,$$

где $b_0 > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от n, λ .

В примере 3 к отсутствию локализации приводят более слабые, чем (20), граничные режимы с обострением вида

$$u_1(t) \geq \exp\{(T-t)^n |n \ln(T-t)|^{-1}\}, \quad t \rightarrow T^-, \quad (22)$$

где $n < -1$, причем при некотором $\bar{a}_0 = \bar{a}_0(n) > 0$ выполняется оценка (21). Подчеркнем, что предельные показатели в указанных нелокализованных граничных режимах $n = -1/(1+\lambda)$ в (18) и $n = -1$ в (22) являются точными и не могут быть заменены на большие.

Пример 4. Пусть $k(u) = ue^u$. Условие (12) в этом случае выполнено при любых $\alpha \in (0, 1]$ (отметим, что (15) не имеет места ни при каких $\alpha > 0$). Поэтому из леммы 1 следует, что при любых $\sigma = 1/\alpha \geq 1$ существует подходящее решение системы неравенств (10), (11). Положим, например, $\sigma = 1$. Тогда усло-

вия (13), (14) будут выполнены при $\omega \equiv 1$, и преобразование E имеет вид

$$E(p) = \left[2 \int_0^p \eta e^{\eta} d\eta \right]^{1/2} \simeq [2pe^p]^{1/2}, \quad p \rightarrow \infty.$$

Отсюда $E^{-1}(p) \simeq 2 \ln p - \ln(4 \ln p)$ при больших p , и поэтому к отсутствию локализации приводят режимы с обострением

$$u_1(t) \geq 2 \ln [(T-t)^{-1}] - \ln \{4 \ln [(T-t)^{-1}]\}, \quad t \rightarrow T^-.$$

§ 6. Некоторые подходы к определению условий неограниченности решений квазилинейных параболических уравнений

Здесь результаты § 1—3 применяются для вывода условий глобальной неразрешимости квазилинейных параболических уравнений вида

$$u_t = \nabla \cdot (k(u) \nabla u) + Q(u) \equiv \Delta \varphi(u) + Q(u), \quad (1)$$

где k, Q — достаточно гладкие неотрицательные функции, причем $Q(u) > 0$ при $u > 0$ и $Q(0) \geq 0$.

Для уравнения (1) рассматриваются две задачи: краевая задача при $t > 0, x \in \Omega$ (Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^N с гладкой границей $\partial\Omega$) с условиями

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega; \quad u_0 \in C(\bar{\Omega}), \quad (2)$$

$$u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (3)$$

и задача Коши с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad u_0 \in C(\mathbb{R}^N). \quad (2')$$

Предполагается, что функция Q удовлетворяет неравенству

$$\int_1^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} < \infty, \quad (4)$$

которое, как известно (см. § 2, гл. I), является необходимым условием существования неограниченных решений рассматриваемых задач. В дальнейшем будут широко использоваться результаты исследования уравнения со степенными нелинейностями

$$u_t = \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u) + u^\beta, \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1, \quad (5)$$

полученные в § 3 гл. IV.

1. Метод, основанный на ψ -критичности задачи. Рассмотрим краевую задачу (1)—(3). Решение задачи называется ψ -критическим, если всюду в рассматриваемой области

$$u_t(t, x) - \psi(u(t, x)) \geq 0. \quad (6)$$

Достаточные условия ψ -критичности задачи (1)—(3) получены в теореме 1 § 3, и в предположении достаточной регуляр-

ности решения имеют вид (также предполагается, что $\psi \in C^2((0, \infty)) \cap C([0, \infty))$, $\psi(0) = 0$, $u_0 \in C^2(\Omega)$):

$$A(u_0) \equiv \nabla \cdot (k(u_0) \nabla u_0) + Q(u_0) \geq \psi(u_0), \quad x \in \Omega; \quad (7)$$

$$[(k\psi)' / k]'(p) \geq 0, \quad p > 0, \quad (8)$$

$$[k'\psi^2 - Q^2(k\psi/Q)'](p) \geq 0, \quad p > 0. \quad (9)$$

Используем неравенство (6) для определения условий неограниченности решения задачи. Пусть функция ψ положительна в \mathbf{R}_+ и

$$\int_1^{\infty} \frac{d\eta}{\psi(\eta)} < \infty. \quad (10)$$

Тогда, если решение задачи является ψ -критическим, то, как следует из (6), функция $u_m(t) = \max_{x \in \Omega} u(t, x)$ при всех $t > 0$ будет не меньше решения $Y(t)$ следующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dY}{dt}(t) - \psi(Y(t)) = 0, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$Y(0) = u_m(0) = \max_{x \in \Omega} u_0(x) > 0. \quad (12)$$

В силу (10) функция $Y(t)$ определена на ограниченном интервале $(0, t^*)$, где

$$t^* = \int_{u_m(0)}^{\infty} \frac{d\eta}{\psi(\eta)} < \infty. \quad (13)$$

Отсюда следует, что исходная задача (1) — (3) не имеет глобального решения и найдется такое $T_0 \leq t^*$, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_0^-} \max_{x \in \Omega} u(t, x) = \infty. \quad (14)$$

В качестве u_0 можно взять любое нетривиальное неотрицательное решение краевой задачи для квазилинейного эллиптического уравнения

$$\nabla \cdot (k(u_0) \nabla u_0) + Q(u_0) = \psi(u_0), \quad x \in \Omega; \quad u_0|_{\partial\Omega} = 0. \quad (15)$$

В одномерном случае это уравнение интегрируется в квадратурах, что позволяет достаточно подробно описать пространственную структуру его решений (см. п. 2). При $N \geq 2$ исследование условий разрешимости задачи (15) представляет собой самостоятельную и достаточно сложную проблему (см. § 3 гл. IV).

Укажем еще одно применение неравенства (6). Если выполнено (10), то из (6) вытекает следующая оценка сверху неограниченного решения (она выводится интегрированием (6) по (t, T_0) , где T_0 — время существования неограниченного

решения):

$$\int_{u(t,x)}^{\infty} \frac{d\eta}{\psi(\eta)} \geq T_0 - t, \quad t \in (0, T_0), \quad x \in \Omega. \quad (16)$$

Пример 1. Пусть $k(p) \equiv 1$ и функция Q является выпуклой: $Q''(p) \geq 0$ при всех $p > 0$. Тогда в качестве ψ можно взять $\psi(p) = \nu Q(p)$, где $\nu \in (0, 1)$ — постоянная. Действительно, неравенства (8), (9) выполняются, а в силу (4) справедливо (10). В качестве начальной функции $u_0(x)$, удовлетворяющей (7), возьмем решение краевой задачи

$$\Delta u_0 + (1 - \nu)Q(u_0) = 0, \quad x \in \Omega; \quad u_0|_{\partial\Omega} = 0. \quad (17)$$

Эта задача не всегда имеет нетривиальное решение. Например, если $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, является звездной областью относительно некоторой точки (в частности, выпуклой) и $Q(u) = u^\beta$, то при $\beta \geq (N+2)/(N-2)$ решение не существует (см. § 3 гл. IV). В то же время в случае областей кольцеобразной формы $\Omega = \{0 < a < |x| < b < \infty\}$ решение существует при любых $\beta > 1$ (см. комментарий).

Итак, пусть начальная функция u_0 удовлетворяет (17). Тогда, как следует из (13), решение задачи неограниченно возрастает в течение времени, не большего

$$t^* = \nu^{-1} \int_{u_m(0)}^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} < \infty; \quad u_m(0) = \max u_0.$$

Отметим, что $\psi(p) = \nu Q(p)$ удовлетворяет неравенству (9) также в случае произвольных невозрастающих коэффициентов k (когда $k'(p) \leq 0$ при $p > 0$).

Посмотрим теперь, что дает оценка (16). Пусть решение — ψ -критическое по отношению к функции $\psi(p) = \nu Q(p)$, $\nu \in (0, 1)$. Тогда

$$\int_{u(t,x)}^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} \geq \nu(T_0 - t) \quad \text{в } (0, T_0) \times \Omega.$$

В частности, 1) если $Q(u) = u^\beta$, $\beta > 1$, то

$$u(t, x) \leq [\nu(\beta - 1)]^{-1/(\beta-1)} (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)};$$

2) если $Q(u) = (1+u) \ln^\beta(1+u)$, $\beta > 1$ ($Q'' \geq 0$ в \mathbb{R}_+), то

$$u(t, x) \leq \exp \{ [\nu(\beta - 1)]^{-1/(\beta-1)} (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} \} - 1;$$

3) если $Q(u) = e^u$, то

$$u(t, x) \leq \ln [\nu^{-1} (T_0 - t)^{-1}], \quad t \in (0, T_0).$$

Все оценки по характеру зависимости от $T_0 - t$ являются точными. Это устанавливается путем сравнения $u(t, x)$ с пространственно однородным решением v : $v'(t) = Q(v(t))$, $v(T_0^-) = \infty$.

В силу теоремы сравнения из § 5 гл. IV $u(t, x)$ обязано пересекаться с $v(t)$ при любом $t \in (0, T_0)$, и, следовательно, $\inf_x u(t, x) > v(t)$ в $(0, T_0)$, что дает следующие оценки амплитуды снизу:

- 1) $\sup_x u > (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)} (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}$;
- 2) $\sup_x u > \exp \{(\beta - 1)^{-1/(\beta-1)} (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}\} - 1$;
- 3) $\sup_x u > \ln [(T_0 - t)^{-1}]$, $t \in (0, T_0)$.

Рассмотрим два примера вырождающихся параболических уравнений (возможность вывода условий ψ -критичности обобщенных решений указана в § 3).

Пример 2. Рассмотрим уравнение (5) при $\beta > \sigma + 1$. Положим $\psi(p) = \nu p^\alpha$, где $\nu > 0$, $\alpha \in (1, \beta - \sigma)$ — постоянные. Неравенства (8) и (9), которые приводятся соответственно к виду $(\alpha - 1)(\alpha + \sigma) \geq 0$ и $\sigma\nu - (\alpha + \sigma - \beta)p^{\beta-\alpha} \geq 0$, выполнены. Поскольку $\alpha > 1$, справедливо и условие (10). Выбирая начальную функцию в виде $u_0 = [(\sigma + 1)v_0]^{1/(\sigma+1)}$, где $v_0 \neq 0$ — решение задачи $\Delta v_0 + [(\sigma + 1)v_0]^{\beta/(\sigma+1)} - \nu [(\sigma + 1)v_0]^{\alpha/(\sigma+1)} = 0$ в Ω , $v_0 = 0$ на $\partial\Omega$, получаем, что для некоторого $T_0 \leq t^* = [\max u_0]^{1-\alpha} / \sqrt[\alpha]{\nu(\alpha - 1)}$ выполняется (14).

Пример 3. Пусть уравнение (1) имеет вид

$$u_t = \nabla [\ln(1 + u) \nabla u] + (1 + u) \ln^\beta(1 + u), \quad (18)$$

где $\beta > 2$ — постоянная. Возьмем $\psi(p) = \nu(1 + p) \ln^\alpha(1 + p)$, $\nu > 0$, $\alpha \in (1, \beta - 1)$ (при $\alpha > 1$ интеграл в (10) сходится). Условия (8) и (9) принимают соответственно вид $\alpha^2 - 1 \geq 0$ и $\nu - (\alpha + 1 - \beta) \ln^{\beta-\alpha}(1 + p) \geq 0$ и в силу предположения $\alpha \in (1, \beta - 1)$ выполнены при $p > 0$. Поэтому, если u_0 удовлетворяет неравенству (7), то решение задачи становится неограниченным по истечении времени T_0 , не большего

$$t^* = \{\ln[1 + \max u_0]\}^{1-\alpha} / [\nu(\alpha - 1)] < \infty.$$

Между результатами примеров 2, 3 существует тесная связь. Сделаем в уравнении (18) замену $u = e^v - 1$. Тогда функция U удовлетворяет уравнению

$$U_t = \nabla \cdot (U \nabla U) + U^\beta + U |\nabla U|^2, \quad (19)$$

которое отличается от уравнения (5) при $\sigma = 1$ дополнительным неотрицательным членом $U |\nabla U|^2$ в правой части. Поэтому решение уравнений (19) и (5) при $\sigma = 1$ связаны соотношением $U(t, x) \geq u(t, x)$, если оно выполняется при $t = 0$ (здесь мы фактически пользуемся простейшим вариантом теоремы операторного сравнения). Это рассуждение позволяет вывести условия неограниченности решения одного уравнения из аналогичных условий для другого (см. п. 3).

2. О неограниченных решениях задачи Коши с критической начальной функцией. В этом пункте показано, что критичность решения широкого класса уравнений (1) часто приводит к глобальной неразрешимости задачи Коши.

Начальная функция и решение задачи (1), (2') называются *критическими*, если $u_t \geq 0$ в $P_T[u]$. Тем самым u не убывает по t в $(0, T) \times \mathbb{R}^N$. Как следует из результатов § 2 для критичности решения, вообще говоря, достаточно, чтобы начальная функция удовлетворяла неравенству

$$\nabla \cdot (k(u_0) \nabla u_0) + Q(u_0) \geq 0, \quad x \in \{x \in \mathbb{R}^N | u_0(x) > 0\}. \quad (20)$$

В частности, критической функцией будет любое неотрицательное решение краевой задачи

$$\nabla \cdot (k(u_0) \nabla u_0) + Q(u_0) = 0, \quad x \in \Omega; \quad u_0|_{\partial\Omega} = 0 \quad (21)$$

($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — произвольная ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$), продолженное нулем в $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

В том случае, когда Ω является шаром, все радиально симметричные решения задачи (21) могут быть определены из уравнения

$$(k(u_0) u_0')' + \frac{N-1}{r} k(u_0) u_0' + Q(u_0) = 0, \quad r = |x| > 0, \quad (22)$$

и краевых условий

$$u_0(0) = u_m, \quad u_0'(0) = 0, \quad (23)$$

где $u_m > 0$ — произвольная постоянная.

В одномерном случае уравнение (22) интегрируется, и решение задачи (22), (23) имеет вид

$$u_0(x) = X_{kQ}^{-1}(x), \quad (24)$$

где X_{kQ}^{-1} — функция, обратная к

$$X_{kQ}(s) = \int_s^{u_m} \frac{k(\eta) d\eta}{\left[2 \int_{\eta}^{u_m} k(\zeta) Q(\zeta) d\zeta \right]^{1/2}}, \quad s \in (0, u_m). \quad (25)$$

Отсюда следует, что функция (24) определена и строго положительна при всех $|x| < r_0(u_m)$, где

$$r_0(u_m) = \frac{1}{2} \operatorname{mes} \operatorname{supp} u_0 = X_{kQ}(0). \quad (26)$$

Равенства (24) — (26) дают представление о характере зависимости пространственной структуры критической начальной функции u_0 от величины ее максимума u_m и коэффициентов k, Q .

При произвольных $N \geq 1$ уравнение (22) интегрируется, например, если $Q(u) = v\varphi(u)$, $v = \text{const} > 0$, где

$$\varphi(u) = \int_0^u k(\eta) d\eta, \quad u > 0. \quad (27)$$

Тогда заменой $u_0 \rightarrow \varphi(u_0)$ оно сводится к линейному уравнению, решением которого является функция $r^{(2-N)/2} J_{(N-2)/2}(v^{1/2}r)$, где $J_{(N-2)/2}$ — функция Бесселя.

Перейдем к изложению основных результатов. Фиксируем произвольное $R > 0$. Обозначим через Ω_R шар $\{|x| < R\}$ и введем в рассмотрение положительную в Ω_R функцию

$$\psi_R(x) = C_0 r^{(2-N)/2} J_{(N-2)/2}(\lambda^{1/2}r), \quad (28)$$

где

$$\lambda = [z_N^{(1)}/R]^2 \quad (29)$$

и $z_N^{(1)}$ — первый (наименьший) положительный корень функции Бесселя $J_{(N-2)/2}$. Постоянную $C_0 > 0$ определим из условия $\|\psi_R\|_{L^1(\Omega_R)} = 1$. Нетрудно проверить, что $\psi_R(x)$ является решением задачи

$$\Delta\psi_R + \lambda\psi_R = 0 \text{ в } \Omega_R, \quad \psi_R = 0 \text{ на } \partial\Omega_R. \quad (30)$$

Положим $\psi_R = 0$ в $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_R$.

Рассмотрим функцию

$$H_R(t) = (u(t, x), \psi_R) \equiv \int_{\Omega_R} u(t, x) \psi_R(x) dx. \quad (31)$$

Умножая скалярно в $L^2(\Omega_R)$ обе части уравнения (1) на ψ_R и считая для простоты функцию $H_R(t)$ дифференцируемой по t , получаем равенство

$$dH_R/dt = (\Delta\varphi(u), \psi_R) + (Q(u), \psi_R), \quad t > 0. \quad (32)$$

Лемма 1. При всех допустимых $t > 0$

$$(\Delta\varphi(u), \psi_R) \geq -\lambda(\varphi(u), \psi_R). \quad (33)$$

Доказательство. В том случае, когда решение $u > 0$ является классическим, справедливость (33) проверяется непосредственно. Действительно, применяя формулу Грина, получаем

$$(\Delta\varphi(u), \psi_R) = (\varphi(u), \Delta\psi_R) + \int_{\partial\Omega_R} \left(\psi_R \frac{\partial\varphi(u)}{\partial n} - \varphi(u) \frac{\partial\psi_R}{\partial n} \right) ds, \quad (34)$$

где $\partial/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega_R$. Однако $\psi_R = 0$, $\partial\psi_R/\partial n \leq 0$ на $\partial\Omega_R$ (последнее вытекает из положительности ψ_R в Ω_R). Поэтому из (34) и с учетом (30) получаем

$$(\Delta\varphi(u), \psi_R) \geq (\varphi(u), \Delta\psi_R) = -\lambda(\varphi(u), \psi_R).$$

Если же u — обобщенное решение, то оценка (33) вытекает из условия $u \in C_{ix}^{1,2}(\{u > 0\})$, $\nabla\varphi(u) = 0$ всюду, где $u = 0$. Дадим краткие пояснения.

Пусть $S(t) \equiv \text{supp } u(t, x)$ — ограниченная область. Положим $\omega(t) = \Omega_R \cap S(t)$, $\partial\omega(t)$ — граница $\omega(t)$. Тогда $\partial\omega(t) = \Gamma_R \cup \Gamma_t$, где $\Gamma_R \subset \partial\Omega_R$, $\Gamma_t \equiv \partial S(t)$ (отметим, что свободная граница $\partial S(t)$ является достаточно регулярной; см. [195, 204]). Применяя формулу Грина, получаем

$$(\Delta\varphi(u), \psi_R) = (\varphi(u), \Delta\psi_R) + \int_{\Gamma_R} \left(\psi_R \frac{\partial\varphi(u)}{\partial n} - \varphi(u) \frac{\partial\psi_R}{\partial n} \right) ds + \\ + \int_{\Gamma_t} \left(\psi_R \frac{\partial\varphi(u)}{\partial n} - \varphi(u) \frac{\partial\psi_R}{\partial n} \right) ds. \quad (35)$$

Поскольку $\psi_R = 0$, $\partial\psi_R/\partial n \leq 0$ на Γ_R и $\varphi(u) = \partial\varphi(u)/\partial n = 0$ на Γ_t , то

$$\int_{\Gamma_R} (\cdot) ds \geq 0, \quad \int_{\Gamma_t} (\cdot) ds = 0.$$

Из (35) получаем (33).

Оценивая правую часть (32) с помощью (33), приходим к неравенству

$$dH_R/dt \geq -\lambda(\varphi(u), \psi_R) + (Q(u), \psi_R), \quad t > 0, \quad (36)$$

которое является основой дальнейшего исследования.

Лемма 2. Пусть функция Q удовлетворяет условию (4), а также неравенству

$$Q''(u) \geq 0, \quad u > 0, \quad (37)$$

и существует постоянная $\mu > 0$ такая, что

$$\varphi(u) \leq \mu Q(u) \quad \text{в } \mathbf{R}_+. \quad (38)$$

Тогда решение задачи Коши (1), (2') является неограниченным и существует в течение времени, не большего

$$t^* = \min_{R > z_N^{(1)} \mu^{1/2}} \left\{ \frac{R^2}{R^2 - z_N^{(1)2} \mu} \int_{H_R(0)}^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} \right\} < \infty. \quad (39)$$

Доказательство. Выберем постоянную $R > z_N^{(1)} \mu^{1/2}$ такой, чтобы $H_R(0) > 0$ (это всегда можно сделать, если $u_0 \neq 0$). В силу (38) из неравенства (36) получаем

$$\frac{dH_R}{dt} \geq \frac{R^2 - z_N^{(1)2} \mu}{R^2} (Q(u), \psi_R), \quad t > 0. \quad (40)$$

Отсюда с помощью неравенства Йенсена для выпуклых функций [167] $(Q(u), \psi_R) \geq Q[(u), \psi_R] = Q(H_R)$ (напомним, что

$\|\Psi u\|_{L^1(\Omega_R)} = 1$) выводим оценку

$$\frac{dH_R}{dt} \geq \frac{R^2 - z_N^{(1)2}\mu}{R^2} Q(H_R), \quad t > 0.$$

Из этой оценки в свою очередь получаем

$$\int_{H_R(0)}^{H_R(t)} \frac{d\eta}{Q(\eta)} \geq \frac{R^2 - z_N^{(1)2}\mu}{R^2} t, \quad t > 0.$$

Отсюда $H_R(t)$ неограничена на $(0, t^*]$, что в силу оценки $H_R(t) \leq \max_{x \in \Omega} u(t, x)$ обеспечивает выполнение (14).

Теорема 1. Пусть выполняются условия (4), (37) и существуют постоянные $\mu > 0$, $h > 0$ такие, что при всех $u > h$ справедливо неравенство (38). Пусть начальная функция u_0 является критической, причем $u_0(x) \geq h$ при всех $|x| \leq a$, где постоянная $a > 0$ такая, что

$$1 - \mu [z_N^{(1)}/a]^2 > 0. \quad (41)$$

Тогда решение задачи Коши (1), (2') существует в течение времени, не большего

$$t^* = \frac{a^2}{a^2 - z_N^{(1)2}\mu} \int_{H_0(0)}^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} < \infty. \quad (42)$$

Доказательство. В силу критичности начальной функции выполняется неравенство $u(t, x) \geq h$ при всех $|x| \leq a$ и допустимых $t > 0$. Возьмем $R = a$. Тогда $\Phi(u) \leq \mu Q(u)$ всюду в Ω_a . Поэтому, как следует из (40), справедливо неравенство

$$\frac{dH_a}{dt} \geq \frac{a^2 - z_N^{(1)2}\mu}{a^2} (Q(u), \psi_a), \quad t > 0,$$

которое в силу (41) обеспечивает глобальную неразрешимость задачи (см. доказательство леммы 2).

Более сильный, чем теорема 1, результат мы получим для случая $N = 1$. При этом будем считать выполненным условие

$$\int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta < \infty, \quad (43)$$

которое обеспечивает финитность по x решения задачи, если $\text{mes sup } u_0 < \infty$ (см. § 3 гл. I).

Обозначим через

$$v_\Lambda(t, x) = f(\zeta), \quad \zeta = x/t^{1/2} \quad (44)$$

автомодельное решение уравнения

$$v_t = (k(v)v_x)_x, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (45)$$

удовлетворяющее условиям

$$v_\lambda(t, 0) = u_m, \quad v_\lambda(t, \infty) = 0; \quad t > 0 \quad (46)$$

(здесь $u_m > 0$ — фиксированная постоянная).

Функция $f(\xi)$ определяется из следующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$(k(f)f')' + \frac{1}{2} f' \xi = 0, \quad \xi > 0; \quad (47)$$

$$f(0) = u_m, \quad f(\infty) = 0,$$

где $f' = df/d\xi$. Существование и единственность решения задачи (47) в случае достаточно произвольных коэффициентов k установлены в [180, 181, 197]. Там же показано, что при выполнении (43) функция $f(\xi)$ является финитной: $\xi_0 = \text{mes sup} f < \infty$ и во всех точках, где она положительна, является строго убывающей. Последнее обеспечивает существование точки $\xi = \xi_m \in \mathbf{R}_+$ такой, что $f(\xi_m) = u_m/2$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (4), (37), (43) и функция Q/φ является неубывающей, т. е.

$$Q'(u)\varphi(u) - Q(u)k(u) \geq 0, \quad u > 0. \quad (48)$$

Пусть начальная функция u_0 является критической*), причем $\max u_0(x) = u_m > 0$. Тогда решение задачи Коши (1), (2') при $N = 1$ существует в течение времени, не большего

$$t^* = 2 \frac{\varphi(u_m/2)}{Q(u_m/2)} \left(\frac{z_N^{(1)}}{\xi_m} \right)^2 + 2 \int_{u_m/2}^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} < \infty. \quad (49)$$

Доказательство. Пусть для определенности $\sup u_0$ достигается при $x = 0$, т. е. $u_0(0) = u_m$. Тогда в силу критичности начальной функции выполняется неравенство $u(t, 0) \geq u_m$ при всех допустимых $t > 0$. Сопоставляя уравнения (1) (при $N = 1$) и (45), убеждаемся, что

$$u(t, x) \geq f(|x|/t^{1/2}) \quad (50)$$

всюду в области существования решения рассматриваемой задачи Коши. Справедливость этого вывода вытекает из принципа максимума; при этом учитываются условия (46) и предположение (43), а также используется тот факт, что $v_\lambda(t, |x|) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0^+$ всюду в $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Положим $h_m = u_m/2$, $\mu_m = \varphi(h_m)/Q(h_m)$. Тогда в силу (48) при всех $u \geq h_m$ выполняется неравенство (38) при $\mu = \mu_m$. Из (50) получаем, что при любых $t \geq t_1^*$, где

$$t_1^* = 2 \frac{\mu_m}{\xi_m^2} z_N^{(1)2} = 2 \frac{\varphi(u_m/2)}{Q(u_m/2) \xi_m^2} z_N^{(1)2}, \quad (51)$$

*) Без ограничения общности можно считать, что u_0 определяется по формуле (24). Нетрудно показать, что (24) является минимальной среди всех критических начальных функций, отвечающих одному и тому же максимуму $u_m > 0$.

на отрезке $|x| \leq a_m = \zeta_m(t_1^*)^{1/2}$ выполняется неравенство $u(t, x) \geq h_m = u_m/2$. Указанный выбор постоянных h_m, μ_m, a_m обеспечивает выполнение условия (41) (здесь $\mu_m(z_N^{(1)}/a_m)^2 = 1/2 < 1$). Это в силу теоремы 1 гарантирует неограниченное возрастание функции $H_{a_m}(t_1^* + t)$ по истечении времени, не большего

$$t_2^* = \frac{a_m^2}{a_m^2 - \mu_m^2 N^{(1)2}} \int_{H_{a_m}(t_1^*)}^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} \leq 2 \int_{u_m/2}^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} < \infty \quad (52)$$

(при выводе последнего неравенства используется очевидная оценка $H_{a_m}(t_1^*) > u_m/2$). Суммируя (51) и (52), приходим к необходимому результату.

Условиям теоремы 2 удовлетворяют, например, коэффициенты уравнения (5) при $\beta \geq \sigma + 1$ (возникновение этого ограничения связано с (48)). Однако известно (см. § 3 гл. IV), что при $1 < \beta < \sigma + 3$ все неотрицательные решения задачи Коши (5), (2') в случае $N = 1$ являются неограниченными. Отсюда вытекает

Теорема 3. Пусть начальная функция $u_0 \neq 0$ задачи (5), (2') при $\beta > 1, N = 1$ является критической. Тогда задача не имеет глобального решения.

Эта теорема допускает обобщение на многомерную задачу (5), (2') при условии, что $1 < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$. Коротко охарактеризуем метод доказательства.

Если $u_0(x)$ — финитная критическая начальная функция, то предположение о том, что $u(t, x)$ — глобальное решение, приводит к следующему выводу: $u(t, x) \rightarrow \infty$ в \mathbf{R}^N при $t \rightarrow \infty$. Если это не так, то существуют две возможности: либо $u(t, x)$ ограничено равномерно по t в \mathbf{R}^N ; либо $u(t, x)$ стабилизируется снизу при $t \rightarrow \infty$ к сингулярному стационарному решению $u_*(x)$, определенному, например, в $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$, и $\bar{u}_*(0) = \infty$ (такие решения существуют при $\beta > (\sigma + 1)N/(N - 2)_+$; см. [213, 226]). Первое предположение в силу монотонности $u(t, x)$ по t приводит на основе стандартных рассуждений к выводу о стабилизации снизу $u(t, x)$ при $t \rightarrow \infty$ к стационарному решению $u_*(x) > 0$ в \mathbf{R}^N , которое при $\beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$ не существует. (Для случая $u_* = u_*(|x|)$ это установлено в § 3 гл. IV; отсутствие несимметричных по $|x|$ решений уравнения $\Delta u_*^{\sigma+1} + u_*^\beta = 0$ в \mathbf{R}^N для указанных значений β доказано в [213].)

Второе предположение сводится к первому. Оно означает, что $u \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ только в одной точке $x = 0$. Однако $u(t, x) < \bar{u}_*(x)$ в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$, так как $u_t > 0$ в $P_\infty[u]$ в силу принципа максимума [165] ($z = u_t > 0$ в окрестности любой точки, где уравнение для z является равномерно параболическим). Поэтому существует такое $x_0 \in \mathbf{R}^N$, что $u(t, x) \leq \bar{u}_*(x + x_0)$, и, следовательно, $u(t, 0) \leq \bar{u}_*(x_0) < \infty$ для всех $t > 0$, т. е. решение u равномерно ограничено в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N$.

Итак, если u — глобальное финитное критическое решение, то $u \rightarrow \infty$ в \mathbb{R}^N при $t \rightarrow \infty$. Поэтому рано или поздно $u(t, x)$ будет удовлетворять условиям теоремы 1 (случай $\beta \geq \sigma + 1$) и в конце концов станет неограниченным. При $1 < \beta < \sigma + 1$ всякое решение $u \neq 0$ задачи Коши для (5) является неограниченным (см. § 3 гл. IV).

3. Применение теорем обобщенного сравнения. В этом пункте неограниченные решения уравнения (1) изучаются на основе сравнения с различными решениями уравнения (5), свойства которых подробно изучены в § 3 гл. IV.

Введем для удобства функцию

$$U_{\sigma\beta}(t, x; T) = (T - t)^{-1/(\beta-1)} A [1 - |x|^2 (T - t)^{-[\beta-(\sigma+1)]/(\beta-1)}/a^2]_+^{1/\sigma}, \\ 0 \leq t < T, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1, \quad (53)$$

где T, a, A — некоторые положительные постоянные, две последние из которых связаны соотношениями

$$\frac{4}{\sigma} \frac{A^\sigma}{a^2} > \frac{\sigma + 1 - \beta}{\beta - 1},$$

$$A^{\beta-1} \geq \left(\frac{1}{\beta-1} + \frac{2N}{\sigma} \frac{A^\sigma}{a^2} \right) \left\{ \frac{1 + 2(N+2/\sigma) A^\sigma/a^2}{[|\beta - (\sigma+1)|/(\beta-1) + 4A^\sigma/(a^2)]} \right\}^{(\beta+\sigma-1)/\sigma} \quad (54)$$

В § 3 гл. IV показано (теорема 1), что при выполнении неравенств (54) функция (53) является неограниченным нижним решением уравнения (5). Мы будем использовать тот факт, что при $1 < \beta < \sigma + 1 + 2/N$ все нетривиальные решения задачи Коши (5), (2') являются неограниченными (теорема 2 § 3 гл. IV).

3.1. Сначала мы используем теорему прямого сравнения решений (теорема 2 § 1).

Теорема 4. Пусть коэффициенты k, Q в (1) удовлетворяют при всех $u > 0$ неравенствам

$$k(u) \geq u^\sigma, \quad (k(u)/u^\sigma)' \geq 0, \quad Q(u) \geq u^{\beta-\sigma} k(u), \quad (55)$$

где $\sigma > 0, \beta \in (1, \sigma + 1 + 2/N)$ — фиксированные постоянные. Пусть начальная функция $u_0 \neq 0$ в (2') является критической. Тогда задача Коши (1), (2') не имеет глобального решения.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$u_t = \nabla \cdot (ue^{u^2} \nabla u) + u^\beta e^{u^2}, \quad \beta > 1. \quad (56)$$

Нетрудно видеть, что условия (55) при $\sigma = 1$ выполнены. Тогда, как следует из теоремы 4, в случае $1 < \beta < 2(N+1)/N$ любая критическая начальная функция $u_0 \neq 0$ порождает неограниченное решение задачи.

Рассмотрим подробнее задачу (56), (2') при $N = 1$. Здесь

$$\varphi(u) \equiv \int_0^u k(\eta) d\eta = \frac{1}{2} (e^{u^2} - 1), \quad u > 0.$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \text{sign} \{[Q/\Phi]'(u)\} &= \text{sign} [\beta u^{\beta-1} (e^{u^2} - 1) - 2u^{\beta+1}] \geq \\ &\geq \text{sign} [(\beta - 2) u^{\beta+1}] = \text{sign} (\beta - 2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $\beta \geq 2$ выполняется неравенство (48), и тогда на основе теоремы 2 заключаем, что при $N = 1$ любое решение задачи (56), (2'), отвечающее критической начальной функции (определяемой, например, по формуле (24)), является неограниченным.

3.2. Ниже при исследовании задачи Коши (1), (2') применяется метод операторного сравнения в том виде, в котором он изложен в следствии к теореме 4 § 2. Следующее утверждение доказывается с использованием результатов, полученных в § 3 гл. IV.

Теорема 5. Пусть существует монотонно возрастающая функция $E: \bar{R}_+ \rightarrow \bar{R}_+$ такая, что

$$E''(u) \leq 0, \quad u > 0; \quad (57)$$

$$\begin{aligned} k(u) &= [E(u)]^\sigma, \quad Q(u) \geq [E(u)]^\beta / E'(u), \quad u > 0; \quad (58) \\ \sigma &> 0, \quad \beta > 1. \end{aligned}$$

Тогда: 1) если $1 < \beta < \sigma + 1 + 2/N$ и $u_0 \neq 0$, то задача Коши (1), (2') не имеет глобального решения*);

2) если

$$u_0(x) \geq E^{-1}\{U_{\sigma\beta}(0, x; T)\}, \quad x \in R^N, \quad (59)$$

при некотором $T < \infty$ (здесь E^{-1} — функция, обратная к E), то решение задачи существует в течение времени $T_0 \leq T$, причем при всех $0 < t < T_0$ справедлива оценка

$$u(t, x) \geq E^{-1}\{U_{\sigma\beta}(t, x; T)\}, \quad x \in R^N \quad (60)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 5. Пусть $E(u) = \ln(1 + u)$. Условие (57) выполнено, и функциями k, Q , удовлетворяющими (58), являются, например, коэффициенты уравнения

$$u_t = \nabla \cdot (\ln^\sigma(1 + u) \nabla u) + (1 + u) \ln^\beta(1 + u). \quad (61)$$

Поэтому при $1 < \beta < \sigma + 1 + 2/N$ все нетривиальные решения этого уравнения являются неограниченными. В случае $\beta \geq \sigma + 1 + 2/N$ решение будет неограниченным при выполнении неравенства (59), которое здесь имеет вид

$$u_0(x) \geq \exp\{U_{\sigma\beta}(0, x; T)\} - 1, \quad x \in R^N$$

В § 7 гл. IV показано, что для $\sigma = 0, \beta > 1 + 2/N$ при достаточно малых начальных функциях u_0 уравнение (61) имеет глобальные решения.

*) В этом случае для времени существования решения справедлива оценка сверху, полученная в теореме 2 § 3 гл. IV.

Более подробные сведения о неограниченных решениях уравнения типа (61) получены в § 7 гл. IV на основе другого подхода.

Пример 6. Пусть теперь $E(u) = u/\ln(e^2 + u)$. Нетрудно проверить, что E является монотонно возрастающей и вогнутой в \mathbf{R}_+ функцией. Тогда условиям (58) будут удовлетворять функции

$$k(u) = u^\sigma / \ln^\sigma(e^2 + u), \quad Q(u) \geq 2u^p \ln^{1-p}(e^2 + u).$$

Поэтому задача Коши для уравнения (1) с такими коэффициентами в случае $1 < \beta < \sigma + 1 + 2/N$, $u_0 \neq 0$ не имеет решения в целом.

В качестве других функций $E: \bar{\mathbf{R}}_+ \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+$, удовлетворяющих (57), можно рассмотреть, например, $E(u) = u^{1/2} \ln(e^4 + u)$, $E(u) = \exp\{\ln^{1/2}(1 + u)\} - 1$ и т. п.

§ 7. Условия критичности и теорема сравнения разностных решений нелинейных уравнений теплопроводности

В этом параграфе показано, что установленные ранее утверждения о критичности и теорема сравнения без принципиальных изменений переносятся на случай разностных решений тех же параболических уравнений, т. е. решений неявных разностных схем, построенных на основе дивергентной (консервативной) аппроксимации параболического оператора. Это свидетельствует о совпадении довольно тонких свойств теплового процесса и правильно построенной разностной аппроксимации. Этот факт для нас является принципиальным, поскольку на всех этапах исследования нелинейных процессов теплопроводности и горения широко используются численные методы. Целям этого исследования служит теория сравнения решений различных параболических уравнений. Поэтому важным является тот факт, что этой теорией можно пользоваться почти столь же свободно на уровне разностных решений.

Ниже изложение ведется на примере нелинейного уравнения теплопроводности

$$u_t = (\varphi(u))_{xx}, \quad (1)$$

для которого будет рассматриваться краевая задача в $(0, T) \times (0, l)$, где T, l — фиксированные положительные постоянные, с условиями

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in [0, l]; \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u_1(t) \geq 0, \quad u(t, l) = u_2(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Неотрицательная функция $\varphi \in C^2(\mathbf{R}_+) \cap C([0, \infty))$ является строго возрастающей: $\varphi'(u) > 0$ при $u > 0$, $\varphi(0) = 0$. Функции u_0, u_1, u_2 считаются достаточно гладкими, $u_0(0) = u_1(0)$, $u_0(l) = u_2(0)$.

Введем сетку по пространству $\omega_h = \{x_k = kh, h > 0; k = 1, 2, M-1; hM = l\}$ и (неравномерную) сетку по времени ω_τ , по-

рождаемую системой временных интервалов $\{\tau_j, j = 0, 1, \dots, N; \sum \tau_j = T\}$. Через

$$u_{0h} = u_0(kh), \quad 0 < k < M,$$

$$u_{i\tau} = u_i \left(\sum_{j=0}^n \tau_j \right), \quad 0 \leq n \leq N, \quad i = 1, 2,$$

будем обозначать сеточные функции, совпадающие с $u_0(x)$ и $u_i(t)$ в узлах сеток ω_h и ω_τ соответственно.

Поставим в соответствие задаче (1)–(3) неявную (нелинейную) разностную схему:

$$(v_k)_t \equiv \frac{\hat{v}_k - v_k}{\tau_j} = (\varphi(\hat{v}_k))_{xx}, \quad (t, x) \in \omega_{\tau h} = \omega_\tau \times \omega_h; \quad (4)$$

$$v_k^0 = u_{0h} \geq 0, \quad x \in \omega_h; \quad v_0^0 = u_0(0), \quad v_M^0 = u_0(l); \quad (5)$$

$$\hat{v}_0 = u_{1\tau} \geq 0, \quad \hat{v}_M = u_{2\tau} \geq 0, \quad t \in \omega_\tau. \quad (6)$$

Здесь введены обычные [152] в теории разностных схем обозначения: $\hat{v}_k = v_k^{j+1}$, $v_k = v_k^j$ — искомая сеточная функция, $(v_k)_{xx} = (v_k - v_{k-1})/h$, $(v_k)_x = (v_{k+1} - v_k)/h$ — операторы разностного дифференцирования, так что

$$\rho_h(\hat{v}_{k-1}, \hat{v}_k, \hat{v}_{k+1}) \equiv (\varphi(\hat{v}_k))_{xx} = \frac{1}{h^2} [\varphi(\hat{v}_{k-1}) - 2\varphi(\hat{v}_k) + \varphi(\hat{v}_{k+1})]. \quad (7)$$

Задача (4)–(6) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений. Вопросы существования и единственности решения полученной разностной задачи рассматриваются в § 5 гл. VII. Итерационные методы решения подобных нелинейных разностных задач подробно рассмотрены в [152].

Будем предполагать, что решение разностной задачи (4)–(6) определено всюду в $\omega_{\tau h}$, причем на каждом j -м шаге по времени система уравнений разрешима при всех $0 < \tau \leq \tau_j$. Также считаем, что в некотором классе сеточных функций v_k^{j+1} , близких к v_k^j , соответствие $\tau \rightarrow v_k^{j+1}$ является взаимно однозначным и непрерывным в $C(\omega_h)$ и $v_k^{j+1} \rightarrow v_k^j$ при $\tau \rightarrow 0^+$ в ω_h . Последнее требование естественно; два предыдущих условия не являются обременительными и выполнены в более общей ситуации (см. § 5 гл. VII).

1. Принцип максимума. Обозначим через $\partial\omega_{\tau h}$ параболическую границу $\omega_{\tau h}$, т. е. $\partial\omega_{\tau h} = \{t = 0, x \in \omega_h\} \cup \{t \in \omega_\tau, x = 0\} \cup \{t \in \omega_\tau, x = l\}$, $\omega_h = \{x = kh, k = 0, \dots, M\}$. В следующей лемме (она неоднократно используется в дальнейшем) получены ограничения на разностную аппроксимацию параболического оператора, при которых решение задачи не может принимать отрицательных значений, т. е. подчиняется слабому принципу максимума.

Лемма 1. Пусть сеточная функция z_k^j является решением задачи

$$(z_k)_t \equiv \frac{\widehat{z}_k - z_k}{\tau_j} = \theta_h(\widehat{z}_{k-1}, \widehat{z}_k, \widehat{z}_{k+1}) \quad \text{в } \omega_{\tau h}, \quad (8)$$

где непрерывная в $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ функция $\theta_h(a, b, c)$ такова, что

$$\theta_h(a, b, c) \geq \theta_h(b, b, b) \geq 0, \quad a \geq b, \quad c \geq b. \quad (9)$$

Пусть $z_k^j \geq 0$ на $\partial\omega_{\tau h}$. Тогда $z_k^j \geq 0$ всюду в $\omega_{\tau h}$.

Доказательство. Пусть $J = \max |j| z_k^i \geq 0, x \in \omega_h; 0 \leq i \leq j < N$. Тогда найдется $x \in \omega_h$ (точка отрицательного минимума по x в ω_h) такая, что $z_k^{J+1} < 0, z_{k-1}^{J+1} \geq z_k^{J+1}, z_{k+1}^{J+1} \geq z_k^{J+1}$. Поэтому из (8) с учетом (9) получаем

$$\frac{z_k^{J+1} - z_k^J}{\tau_j} = \theta_h(z_{k-1}^{J+1}, z_k^{J+1}, z_{k+1}^{J+1}) \geq \theta_h(z_k^{J+1}, z_k^{J+1}, z_k^{J+1}) \geq 0. \quad (10)$$

Отсюда $z_k^{J+1} \geq z_k^J$, а это противоречит выбору величины J .

Следствие. Решение задачи (4)–(6) удовлетворяет слабому принципу максимума: $v_k^j \geq 0$ в $\omega_{\tau h}$. Если $v_k^0 > 0$ в ω_h , то $v_k^j > 0$ в $\omega_{\tau h}$.

Доказательство. Рассмотрим сеточное уравнение

$$(z_k)_t \equiv \frac{\widehat{z}_k - z_k}{\tau_j} = \theta_h(\widehat{z}_{k-1}, \widehat{z}_k, \widehat{z}_{k+1}) \equiv (\psi(\widehat{z}_k))_{\overline{x x}}, \quad (t, x) \in \omega_{\tau h} \quad (11)$$

с краевыми условиями (5), (6), где $\psi(v) = \varphi(|v|) \text{sign } v$. Без труда проверяется, что для этой задачи выполнены все условия леммы 1, так что $z_k^j \geq 0$ всюду в $\omega_{\tau h}$. Однако уравнение (11) при $\widehat{z}_k \geq 0$ совпадает с (4), поэтому в силу единственности решения (см. § 5 гл. VII) $v_k^j \equiv z_k^j \geq 0$ в $\omega_{\tau h}$. Справедливость второго утверждения прямо следует из анализа уравнения (10) с правой частью (11).

2. Достаточные условия критичности разностного решения.

Определение. Решение задачи (4)–(6) будем называть критическим, если при всех $t \in \omega_\tau$

$$\widehat{v}_k - v_k \geq 0, \quad x \in \omega_h. \quad (12)$$

В случае задачи (4)–(6) теорема о критичности решения практически не отличается от своего дифференциального аналога в § 1.

Теорема 1. Критичность решения задачи (4)–(6) обеспечивается неравенствами

$$(\varphi(u_{0h}))_{\overline{x x}} > 0, \quad x \in \omega_h; \quad (13)$$

$$u_1'(t) \geq 0, \quad u_2'(t) \geq 0, \quad t \in [0, T]. \quad (14)$$

Разумеется, (14) можно заменить условиями неубывания функций $u_i(t)$ ($i = 1, 2$).

Доказательство. Положим $\hat{z}_k = (\hat{v}_k - v_k)/\tau_j$. Тогда \hat{z}_k является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\hat{z}_k - z_k}{\tau_j} &= \theta_h(\hat{z}_{k-1}, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\tau_j} [\rho_h(v_{k-1} + \tau_j \hat{z}_{k-1}, v_k + \tau_j \hat{z}_k, v_{k+1} + \tau_j \hat{z}_{k+1}) - \rho_h(v_{k-1}, v_k, v_{k+1})], \end{aligned} \quad (t, x) \in \omega_{\tau h}; \quad (15)$$

$$z_k^0 = \rho_h(v_{k-1}^0, v_k^0, v_{k+1}^0), \quad x \in \omega_h; \quad z_0^0 = z_M^0 = 0; \quad (16)$$

$$\hat{z}_0 = \frac{\hat{u}_{1\tau} - u_{1\tau}}{\tau_j}, \quad \hat{z}_M = \frac{\hat{u}_{2\tau} - u_{2\tau}}{\tau_j}, \quad t \in \omega_\tau. \quad (17)$$

Для определения начальной функции в (16) введен дополнительный фиктивный временной слой с номером $j = -1$: $\tau_{-1} > 0$, $v_k^{-1} = v_k^0 - \tau_{-1} \rho_h(v_{k-1}^0, v_k^0, v_{k+1}^0)$ в ω_h .

Пусть $J = \max\{j \mid z_k^j > 0, x \in \omega_h; 0 \leq i \leq j\} < N$. Поскольку $z_k^J > 0$ в ω_h , из (4) получаем, что $(\varphi(v_k^J))_{xx} \equiv z_k^J > 0$ в ω_h . Рассмотрим уравнение (15) при $j = J$. По предположению $\hat{z}_k \tau_j = \hat{v}_k - v_k \rightarrow 0$ при $\tau_j \rightarrow 0^+$ в $C(\omega_h)$. Следовательно, найдется такое $\tau_j > 0$, что $\tau_j \hat{z}_k = 0$ для некоторого $x \in \omega_h$ и $\tau_j \hat{z}_{k\pm 1} \geq 0$ ($\tau_j > 0$ в силу условия $(\varphi(v_k))_{xx} > 0$ в ω_h). Тогда из уравнения (15), (7) приходим к противоречию, поскольку его правая часть $\theta_h(\hat{z}_{k-1}, 0, \hat{z}_{k+1})$ неотрицательна в силу условий $\varphi'(u) > 0$ при $u > 0$, $\hat{z}_{k\pm 1} \geq 0$.

3. Теорема сравнения. Рассмотрим в $\omega_{\tau h}$ две разностные задачи, соответствующие краевым задачам ($\nu = 1, 2$) для различных нелинейных параболических уравнений с операторами типа (1):

$$(v_k^{(\nu)})_t = \mathcal{L}_h^{(\nu)} \hat{v}_k^{(\nu)} \equiv (\varphi^{(\nu)}(\hat{v}_k^{(\nu)}))_{xx}; \quad (18)$$

$$v_k^{(\nu)0} = u_0^{(\nu)} > 0, \quad x \in \omega_h; \quad (19)$$

$$\hat{v}_0^{(\nu)} = \hat{u}_{1\tau}^{(\nu)} \geq 0, \quad \hat{v}_M^{(\nu)} = \hat{u}_{2\tau}^{(\nu)} \geq 0, \quad t \in \omega_\tau. \quad (20)$$

Следующее утверждение вполне аналогично теореме сравнения, сформулированной в § 1. Однако по способу доказательства они существенно различаются.

Теорема 2. Пусть

$$v_k^{(2)0} > v_k^{(1)0}, \quad x \in \omega_h; \quad u_i^{(2)}(t) \geq u_i^{(1)}(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

и краевые условия задачи при $\nu = 2$ являются критическими:

$$\mathcal{L}_h^{(2)} v_k^{(2)0} \equiv (\varphi^{(2)}(v_k^{(2)0}))_{xx} > 0, \quad x \in \omega_h;$$

$$u_i^{(2)'}(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2.$$

Пусть при всех $p > 0$

$$\varphi^{(2)'}(p) - \varphi^{(1)'}(p) \geq 0, \quad (22)$$

$$[\varphi^{(2)'}(p)/\varphi^{(1)'}(p)]' \geq 0. \quad (23)$$

Тогда $\widehat{v}_k^{(2)} > \widehat{v}_k^{(1)}$ в ω_{th} .

Доказательство. Полагая $\widehat{z}_k = \widehat{v}_k^{(2)} - \widehat{v}_k^{(1)}$, получаем для этой сеточной функции задачу

$$\frac{\widehat{z}_k - z_k}{\tau_j} = \theta_h(\widehat{z}_{k-1}, \widehat{z}_k, \widehat{z}_{k+1}) \equiv \mathcal{L}_h^{(2)}\widehat{v}_k^{(2)} - \mathcal{L}_h^{(1)}\widehat{v}_k^{(1)},$$

причем в силу (21) $\widehat{z}_k \geq 0$ на $\partial\omega_{th}$ и $z_k^0 > 0$ в ω_h . Применяя метод доказательства теоремы 1, получаем, что $z_k > 0$ в ω_h , если $\theta_h(\widehat{z}_{k-1}, 0, \widehat{z}_{k+1}) \geq 0$, где $\widehat{z}_{k\pm 1} \geq 0$ (здесь введены обозначения $\widehat{z}_k = z_k^{J+1}$, $J = \max\{j \mid z_k^j > 0 \text{ в } \omega_h; 0 \leq i \leq j\}$).

Поскольку

$$\theta_h(\widehat{z}_{k-1}, 0, \widehat{z}_{k+1}) \geq \theta_h(0, 0, 0) \equiv \mathcal{L}_h^{(2)}\widehat{v}_k^{(2)} - \mathcal{L}_h^{(1)}\widehat{v}_k^{(2)},$$

теорема будет доказана, если

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_h^{(2)}\widehat{v}_k^{(2)} - \mathcal{L}_h^{(1)}\widehat{v}_k^{(2)} \equiv \frac{1}{h^2} \{ \varphi^{(2)}(\widehat{v}_{k-1}^{(2)}) - \varphi^{(1)}(\widehat{v}_{k-1}^{(2)}) + \\ & + \varphi^{(2)}(\widehat{v}_{k+1}^{(2)}) - \varphi^{(1)}(\widehat{v}_{k+1}^{(2)}) - 2[\varphi^{(2)}(\widehat{v}_k^{(2)}) - \varphi^{(1)}(\widehat{v}_k^{(2)})] \} \geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Из критичности решения $\widehat{v}_k^{(2)}$ следует, что в ω_{th} выполняется неравенство

$$\mathcal{L}_h^{(2)}\widehat{v}_k^{(2)} = \frac{1}{h^2} [\varphi^{(2)}(\widehat{v}_{k-1}^{(2)}) + \varphi^{(2)}(\widehat{v}_{k+1}^{(2)}) - 2\varphi^{(2)}(\widehat{v}_k^{(2)})] \geq 0.$$

Поэтому

$$\widehat{v}_k^{(2)} \leq (\varphi^{(2)})^{-1} \left(\frac{\varphi^{(2)}(\widehat{v}_{k-1}^{(2)}) + \varphi^{(2)}(\widehat{v}_{k+1}^{(2)})}{2} \right), \quad (25)$$

где $(\varphi^{(2)})^{-1}$ — функция, обратная к $\varphi^{(2)}$.

Поскольку $\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}$ не убывает в \mathbf{R}_+ (см. (22)), с помощью (25) получаем

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(\widehat{v}_k^{(2)}) - \varphi^{(1)}(\widehat{v}_k^{(2)}) & \leq \frac{1}{2} [\varphi^{(2)}(\widehat{v}_{k-1}^{(2)}) + \varphi^{(2)}(\widehat{v}_{k+1}^{(2)})] - \\ & - \varphi^{(1)} \left((\varphi^{(2)})^{-1} \left(\frac{1}{2} (\varphi^{(2)}(\widehat{v}_{k-1}^{(2)}) + \varphi^{(2)}(\widehat{v}_{k+1}^{(2)})) \right) \right). \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (24), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h^{(2)}\widehat{v}_k^{(2)} - \mathcal{L}_h^{(1)}\widehat{v}_k^{(2)} & \geq \frac{2}{h^2} \left\{ \varphi^{(1)} \left((\varphi^{(2)})^{-1} \left(\frac{\varphi^{(2)}(\widehat{v}_{k-1}^{(2)}) + \varphi^{(2)}(\widehat{v}_{k+1}^{(2)})}{2} \right) \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} [\varphi^{(1)}(\widehat{v}_{k+1}^{(2)}) + \varphi^{(1)}(\widehat{v}_{k-1}^{(2)})] \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Введем обозначения $\varphi^{(2)}(\widehat{v}_{k\pm 1}^{(2)}) = w_{k\pm 1}$. Тогда последнее неравенство запишется в виде

$$\mathcal{L}_h^{(2)}\widehat{v}_k^{(2)} - \mathcal{L}_h^{(1)}\widehat{v}_k^{(2)} \geq \frac{2}{h^2} \left\{ \varphi^{(1)} \left((\varphi^{(2)})^{-1} \left(\frac{w_{k-1} + w_{k+1}}{2} \right) \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\varphi^{(1)} \left((\varphi^{(2)})^{-1} (w_{k-1}) \right) + \varphi^{(1)} \left((\varphi^{(2)})^{-1} (w_{k+1}) \right) \right] \right\}. \quad (27)$$

Однако неравенство (23) обеспечивает выпуклость вверх функции $\varphi^{(1)}((\varphi^{(2)})^{-1}(p))$, так как

$$[\varphi^{(1)}((\varphi^{(2)})^{-1}(p))]'' = [\varphi^{(2)'}(\eta)]^{-1} [\varphi^{(1)'}(\eta)/\varphi^{(2)'}(\eta)]' \leq 0,$$

где $\eta = (\varphi^{(2)})^{-1}(p)$. Поскольку $f((\eta_1 + \eta_2)/2) \geq [f(\eta_1) + f(\eta_2)]/2$ для любой выпуклой вверх функции $f(\eta)$ и любых $\eta_1, \eta_2 > 0$, то правая часть (27) является неотрицательной, что завершает доказательство.

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Результаты § 1, а также п. 1 § 2 подробно изложены в работах [39, 40, 43]. Доказанные здесь теоремы сравнения, основанные на специальных точечных оценках старшей пространственной производной мажорирующего решения, можно рассматривать как обобщения известных утверждений о соотношениях между верхними и нижними решениями уравнений или систем уравнений параболического типа (см., например, [165, 21, 259, 270]). Ранее теоремы о критичности решений полулинейных параболических уравнений использовались в [21, 265, 266]. Условия критичности обобщенного решения одного квазилинейного уравнения нелинейной теплопроводности получены в [132]. Отдельные теоремы сравнения решений квазилинейных параболических уравнений специального вида, при доказательстве которых использовалась информация о знаке второй пространственной производной одного из решений, встречались в [232]. Несколько позднее работ [39, 40, 43] в [185] тем же способом установлена справедливость теоремы сравнения решений параболических уравнений с операторами (33), где $b^{(2)} \equiv 0$ (см. § 1); условие сравнения тогда принимает вид первого неравенства (34).

Теорема операторного сравнения, частными случаями которой являются теоремы 3, 4 § 2, сформулированная для достаточно произвольных нелинейных параболических уравнений и использующая оценки, вытекающие из ψ -критичности мажорирующего решения, доказана в [22, 23] (в [23], изложение ведется на примере квазилинейных уравнений с источниками).

Достаточные условия ψ -критичности решения рассматриваемых задач (теорема 1 § 3) с одной пространственной переменной получены в [22, 23]. В работе [22] в случае задачи Коши анализировались зависимости $\psi = \psi(u, u_x)$ (постановка задачи Коши позволяет определить знак функции $z(0, x) = u_t(0, x) - \psi(u_0(x), u_0'(x))$). Впоследствии понятие, аналогичное ψ -критичности, было введено в работах [271, 272], где, в частности, даны некоторые приложения к исследованию неограниченных решений.

Большинство результатов, полученных в § 4, 5, содержится в работах [38, 46]. Другой подход к исследованию эффекта локализации применяется в гл. VI. Теорема 4 § 4 о локализации тепла в задаче Коши доказана в [38]. Условия неподвижности в течение конечного времени точки фронта обобщенных решений уравнений с $k(u)$ нестепенного вида изучались в [232]. При $k(u) = u^\sigma$, $\sigma > 0$, такое исследование проводилось в [103, 106, 194]; для многомерного уравнения некоторые результаты в этом направлении получены в [195]. Там же (см., кроме того, [257]) изучались некоторые свойства поверхности вырождения, отвечающей произвольному обобщенному ре-

шению задачи Коши для уравнения $u_t = \Delta u^{\sigma+1}$. Большинство из этих результатов с общих позиций анализируется в книге [204].

Метод исследования неограниченных решений параболических уравнений с источниками (п. 1 § 6), основанный на условиях ψ -критичности задачи, предложен в [25, 30]. При доказательстве утверждений, сформулированных в п. 2, используется метод (в терминологии [238] — метод собственных функций), который также применялся для аналогичного исследования краевых задач в ограниченных областях для полулинейных ($k(u) \equiv 1$) [229, 238], квазилинейных [25, 26, 30, 224, 246], параболических уравнений и систем [52].

Доказательство теорем 1—3 § 6, в которых используется новый элемент — критичность начальной функции, проведено в [25, 32]. Результаты п. 3 § 6 частично отражены в [42]. О других методах исследования неограниченных решений см. гл. IV, VII. Краткий обзор результатов исследования неограниченных решений нелинейных эволюционных задач содержится в [48, 146, 238].

Результаты § 7 являются частным случаем утверждений, доказанных в [31], где критичность разностных решений установлена для параболических уравнений общего вида $u_t = L(u, u_x, u_{xx})$. В [31] содержатся также теоремы сравнения решений неявных разностных схем для различных уравнений типа $u_t^{(v)} = L^{(v)}(u^{(v)}, u_{xx}^{(v)})$.

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ
ЭФФЕКТА ЛОКАЛИЗАЦИИ**

§ 1. Введение. Основные направления исследований

В этой главе излагается один общий подход к исследованию асимптотического поведения решений квазилинейных параболических уравнений

$$u_t = (k(u)u_x)_x; \quad k(u) > 0, \quad u > 0, \quad (1)$$

где $k \in C^2((0, \infty)) \cap C([0, \infty))$. Для этого уравнения будет рассматриваться краевая задача в $\omega_T = (0, T) \times \mathbb{R}_+$, $T < \infty$, с начальным условием $u(0, x) = u_0(x) \geq 0$ в \mathbb{R}_+ и граничным законом $u(t, 0) = u_1(t) > 0$, $t \in (0, T)$, изменяющимся в режиме с обострением:

$$u_1(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-. \quad (2)$$

Нас будут интересовать асимптотические свойства решения рассматриваемой задачи, проявляющиеся при временах, достаточно близких к моменту обострения $t = T^-$, и в особенности те ограничения на $u(t, 0) \equiv u_1(t)$, при которых в задаче существует или отсутствует локализация тепла (понимаемая в строгом или эффективном смысле; см. § 1 гл. III).

Такое исследование мы хотим провести в случае достаточно произвольных граничных режимов $u_1(t)$, а также для широкого класса коэффициентов $k(u)$.

Как уже неоднократно упоминалось (см. гл. I—III), эффективный метод изучения подобных задач состоит в построении и анализе подходящих автомодельных или каких-либо других инвариантных решений уравнения (1), удовлетворяющих некоторым обыкновенным дифференциальным уравнениям. Эти частные решения имеют простую пространственно-временную структуру, определяющую вид граничного условия $u(t, 0) = u_1(t)$, и дают необходимую информацию об асимптотическом развитии процесса. Довольно подробные сведения об инвариантных решениях уравнения (1) даны в гл. I—III.

Однако, как показывает групповая классификация уравнения (1), проведенная в [138, 139], общее число решений этого уравнения, инвариантных относительно группы Ли точечных преобразований, сравнительно невелико. Более общие преобразования Ли — Беклунда не дают существенного расширения класса ин-

вариантных решений; новые возможности здесь появляются лишь при $k(u) = (1+u)^{-2}$ (см. [97, 190, 235]). При $k(u)$ нестепенного ($k(u) \neq u^\sigma$, $\sigma = \text{const}$) и неэкспоненциального ($k(u) \neq e^u$) вида уравнение (1) допускает только два вида нетривиальных инвариантных решений: $u_A(t, x) = f_A(x/(1+t)^{1/2})$ и $u_A(t, x) = f_A(x-t)$.

Из них только второе в случае, когда интеграл $\int_1^\infty (k(\eta)/\eta) d\eta$ является сходящимся, порождается граничным режимом с обострением. Уравнения (1) со степенной или экспоненциальной нелинейностью допускают другие, интересные с нашей точки зрения, инвариантные решения (см. § 3 гл. II).

Наличие у отдельных параболических уравнений вида (1) более широкого класса инвариантных решений во многом стимулировало развитие специальной теории сравнения решений различных нелинейных параболических уравнений (см. гл. V). Однако выводимые в рамках теории сравнения оценки решения уравнения (1) общего вида часто являются заниженными или завышенными и тем самым не позволяют точно описать асимптотическую стадию эволюции решения. С помощью доказанных в гл. V теорем сравнения не всегда удается выделить оценками снизу и сверху узкий «коридор» эволюции решения во времени (достаточно узкий для того, чтобы можно было говорить о правильно установленном асимптотическом поведении решения). Во многом это связано с немногочисленностью инвариантных решений уравнения (1).

В данной главе для определения асимптотического поведения решений уравнения (1) используются приближенные автомодельные решения (п. а. р.), которые, хотя и не удовлетворяют уравнению (1), тем не менее правильно описывают асимптотические свойства его решений. В дальнейшем в каждом из параграфов излагается свой метод построения п. а. р. Главная проблема при этом состоит в выделении основного (можно сказать, определяющего) оператора в правой части уравнения, который является доминирующим на развитой стадии эволюции граничного режима с обострением. Особенно любопытны с этой точки зрения результаты § 2, где выделен класс коэффициентов $\{k(u)\}$, при которых определяющим является оператор первого порядка, и в конечном итоге асимптотика теплового процесса описывается инвариантными решениями уравнения типа Гамильтона — Якоби.

Следует особо отметить, что каждое нетривиальное автомодельное решение уравнения нелинейной теплопроводности (1) является, как правило, асимптотически устойчивым по отношению к малым возмущениям не только краевых условий, что в общем довольно естественно, но и к малым возмущениям самого уравнения (т. е. возмущениям коэффициента $k(u)$ относительно соответствующих инвариантных зависимостей). Надо сказать, что термин «малый» в последнем случае не следует понимать буквально, поскольку часто п. а. р., полученное из некоторого инвари-

антного решения в результате малого возмущения $k(u)$, совершенно на него не похоже.

В соответствии с [62—65] множество достаточно «регулярных» асимптотик неограниченно растущих решений уравнения (1) разбивается по характеру роста $k(u)$ при больших u на три класса, каждый из которых в свою очередь состоит из трех подклассов, упорядоченных по виду граничных функций $\{u_i(t)\}$. Первый класс — $k(u)$ «слаболинейного» вида — рассматривается в § 2, второй класс — $k(u)$ «близок» к степенной зависимости — рассматривается в § 3. В § 4 излагается другой способ построения, быть может, не столь широких семейств п. а. р.; однако это исследование приводит к любопытным общим выводам.

В этой главе мы не рассматриваем третий класс — нелинейность $k(u)$ близка к экспоненциальной зависимости, поскольку при анализе асимптотической устойчивости соответствующих п. а. р. необходимо рассматривать краевую задачу в ограниченной области с подвижными границами [64], и, следовательно, это исследование не применимо при изучении эффекта локализации тепла в полупространстве.

Вопросы, связанные с построением п. а. р., отвечающих обычным граничным режимам без обострения: $u_i(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, здесь не рассматриваются. По этому поводу см. работы [62—65]; в последней проведена классификация таких п. а. р. на «плоскости краевых задач».

§ 2. Приближенные автомодельные решения в вырожденном случае

1. Постановка задачи. Рассмотрим первую краевую задачу:

$$u_t = (k(u)u_x)_x, \quad (t, x) \in \omega_T = (0, T) \times \mathbf{R}_+, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}_+; \quad u_0 \in C(\mathbf{R}_+), \quad \sup u_0 < \infty, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u_1(t) > 0, \quad 0 \leq t < T; \quad (3)$$

$$u_1(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-; \quad u_1 \in C^1([0, T)).$$

Функцию u_1 в (3) будем считать монотонно возрастающей.

В этом параграфе для широкого класса уравнений (1) с нестепенными нелинейностями будут построены п. а. р., удовлетворяющие некоторым квазилинейным уравнениям первого порядка.

Построение п. а. р. будет проводиться при следующих ограничениях на коэффициент k : $k'(u) \neq 0$ при $u > 0$,

$$[k(s)/k'(s)]' \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{k(\eta)}{\eta + 1} d\eta = \infty. \quad (5)$$

Условие (5) накладывает ограничение снизу на характер поведения функции $k(u)$ при больших u , а условие (4) — ограниче-

ния снизу и сверху. В частности, из (4) следует, что при любом $\alpha > 0$ и всех достаточно больших $s > 0$ справедливы оценки

$$s^{-\alpha} < k(s) < s^{\alpha}. \quad (4')$$

В дальнейшем нам понадобится функция E , определяемая из равенства

$$\int_0^{E(s)} \frac{k(\eta)}{\eta + 1} d\eta = s, \quad s \geq 0. \quad (6)$$

Функция E является положительной и строго возрастающей в \mathbf{R}_+ , $E \in C^3((0, \infty)) \cap C([0, \infty))$, $E(0) = 0$ и $E(\infty) = \infty$ (последнее обеспечивается условием (5)). Поэтому E осуществляет взаимно однозначное отображение $\mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, и существует $E^{-1}: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ — монотонная функция, обратная к E .

Определим для всех $u > 0$ функцию

$$p_k(u) = \max_{\eta \in [0, u]} k(E(\eta)); \quad (7)$$

из (4) следует, что

$$p_k(u)/u \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty \quad (8)$$

(этот результат нам понадобится в дальнейшем).

Некоторые характерные коэффициенты k , удовлетворяющие условиям (4), (5), указаны в табл. 1. Там же приведены главные члены асимптотических разложений функций $E(u)$ в (6) при больших u . Они нужны для определения конкретного вида п. а. р.

Таблица 1

$k(u) =$	$E(u) \approx$
$\exp\{\ln^\alpha(1+u)\}, 0 < \alpha < 1$	$\exp\left\{\ln^{1/\alpha} u \left(1 + \frac{\alpha-1}{\alpha^2} \frac{\ln \ln u}{\ln u}\right)\right\}$
$\ln^\alpha(1+u), \alpha > 0$	$\exp\{[(1+\alpha)u]^{1/(1+\alpha)}\}$
$\ln[1 + \ln(1+u)]$	$\exp\{u/\ln u\}$
1	e^u
$\{1 + \ln[1 + \ln(1+u)]\}^{-1}$	$\exp\{u \ln u\}$
$\{1 + \ln^\alpha(1+u)\}^{-1}, 0 < \alpha < 1$	$\exp\{[(1-\alpha)u]^{1/(1-\alpha)}\}$
$\{1 + \ln(1+u)\}^{-1}$	$\exp\{e^u\}$
$\{1 + \ln(1+u)\}^{-1} \{1 + \ln[1 + \ln(1+u)]\}^{-1}$	$\exp\{\exp\{e^u\}\}$

Мы покажем, что с точки зрения исследования эффекта локализации наиболее интересными являются следующие граничные режимы с обострением:

$$u(t, 0) = u_1(t) = E[(T-t)^\alpha], \quad 0 < t < T, \quad (3')$$

где $n < 0$ — фиксированная постоянная. Поскольку $E(\infty) = \infty$, функция (3') является режимом с обострением.

2. Формальное определение п. а. р. Ниже будет установлено, что в сделанных предположениях решение задачи (1) — (3') асимптотически сходится в специальной норме к точному инвариантному решению u_a следующего уравнения первого порядка (уравнения типа Гамильтона — Якоби):

$$u_t = \frac{k(u)}{u+1} (u_x)^2, \quad (t, x) \in \omega_T. \quad (9)$$

Функция u_a является п. а. р. исходного уравнения (1) и имеет вид

$$u_a(t, x) = E[(T-t)^n \theta_a(\xi)], \quad \xi = x/(T-t)^{(1+n)/2}. \quad (10)$$

Неотрицательная функция θ_a является решением краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, которое получается после подстановки выражения (10) в (9):

$$\begin{aligned} (\theta'_a)^2 - \frac{1+n}{2} \xi \theta'_a + n \theta_a &= 0, \quad \xi > 0, \\ \theta_a(0) &= 1, \quad \theta_a(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Существование и единственность решения задачи (11) установлены в § 4 гл. III. Там же изучены его свойства, в частности получены оценки

$$\begin{aligned} \theta''_a(\xi) &\geq 0, \quad \xi \in [0, \xi_0]; \\ q_n = \max_{\xi \in [0, \xi_0]} \theta''_a(\xi) &= (1-n)/4 < \infty, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\xi_0 = \text{mes sup } \theta_a$, причем $\xi_0 = \infty$ при $n \in (-1, 0)$ (т. е. $\theta_a > 0$ в \mathbf{R}_+), $\xi_0 = 2$ при $n = -1$ и $\xi_0 = 2(-n)^{n/2}(-1-n)^{-(1+n)/2}$ при $n < -1$. При $n = -1$ решением задачи (11) является функция

$$\theta_a(x) = (1-x/2)_+^2, \quad x \geq 0 \quad (13)$$

(в этом случае $\xi \equiv x$). В силу условия $\theta_a(0) = 1$ функция (10) удовлетворяет (3').

Обозначим через $\theta(t, \xi)$ автомодельное представление решения задачи (1) — (3'), определяемое в соответствии с пространственно-временной структурой п. а. р. (10):

$$\theta(t, \xi) = (T-t)^{-n} E^{-1}[u(t, \xi(T-t)^{(1+n)/2})], \quad (t, \xi) \in \omega_T. \quad (14)$$

3. Теорема о сходимости к п. а. р. Покажем, что автомодельное представление решения рассматриваемой задачи сходится при $t \rightarrow T^-$ к $\theta_a(\xi)$, что обеспечивает близость решения $u(t, x)$ к п. а. р. (10). Тем самым устанавливается асимптотическая сходимость нестационарных решений уравнений разных порядков — параболического (1) и типа Гамильтона — Якоби (9). Физическая причина такого своеобразного вырождения исходного уравнения в случае $k(u) \equiv 1$ обсуждалась в § 4 гл. III. Такой же анализ нетрудно провести для $k(u)$ общего вида.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (4), (5). Тогда автомодельное представление (14) решения задачи (1)–(3') при $n \in [-1, 0)$ сходится при $t \rightarrow T^-$ к функции $\theta_a(\xi)$ — решению задачи (11), причем справедлива оценка

$$\|\theta(t, \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_{C(\mathbf{R}_+)} \equiv \sup_{\xi \in \mathbf{R}_+} |\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)| = \\ = O\left((T-t)^{-n} \int_0^t \frac{p_k [(T-\tau)^n]}{T-\tau} d\tau\right) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T^- \quad (15)$$

Доказательство. Введем в ω_T новые функции U, U_a по формулам $U = E^{-1}(u), U_a = E^{-1}(u_a)$. Подставляя $u = E(U)$ и $u_a = E(U_a)$ соответственно в (1) и (9), получаем уравнения

$$U_t = k[E(U)]U_{xx} + U_x^2, \quad (16)$$

$$(U_a)_t = (U_a)_{xx}. \quad (17)$$

Положим $U(t, x) - U_a(t, x) = z(t, x)$. Функция z , как следует из (16), (17), удовлетворяет параболическому уравнению

$$z_t = k[E(U)]z_{xx} + k[E(U)](U_a)_{xx} + z_x(U_x + (U_a)_x) \quad (18)$$

и краевым условиям

$$z(0, x) = E^{-1}[u_0(x)] - T^n \theta_a(x/T^{(1+n)/2}), \\ x \in \mathbf{R}_+; \quad z(t, 0) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (19)$$

В дальнейшем мы будем анализировать решение уравнения (18) с помощью принципа максимума. Для обоснования законности его применения сделаем одно замечание.

Обобщенное решение $u(t, x)$ (и, следовательно, $U(t, x)$) вырождающегося уравнения (1) может не иметь гладкости, необходимой для формального применения принципа максимума (см. § 1 гл. I). Однако функцию $u(t, x)$ ($U(t, x)$) можно представить в виде предела при $k \rightarrow \infty$ последовательности гладких положительных в ω_T решений $u_k \in C_{tx}^{1,2}(\omega_T)$ ($U_k \in C_{tx}^{1,2}(\omega_T)$).

При $n = -1$ функция $U_a \equiv (T-t)^{-1}(1-x/2)_+^2$ также не имеет необходимой гладкости: $U_a \notin C_{tx}^{1,2}(\omega_T)$ (но, что очень важно, $U_a \in C^1(\omega_T)$). Поэтому мы будем использовать тот факт, что неотрицательное обобщенное решение уравнения первого порядка (17) может быть получено как предел при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ последовательности классических положительных решений U_a^ε параболических уравнений

$$(U_a^\varepsilon)_t = (U_a^\varepsilon)_{xx} + \varepsilon (U_a^\varepsilon)_{xx}, \quad \varepsilon > 0, \quad (20)$$

с теми же, что и для U_a , краевыми условиями [108, 111]. При этом в силу включения $U_a \in C^1(\omega_T)$ выполняется равномерная по $\varepsilon \in (0, 1)$ оценка $|(U_a^\varepsilon)_{xx}| \leq \text{const}$ в $(\delta, \tau) \times \mathbf{R}_+, 0 < \delta < \tau < T$ — постоянные (это важно для доказательства сходимости к п. а. р.).

Последовательность функций $z_k^\varepsilon = U_k - U_a^\varepsilon \in C_{tx}^{1,2}(\omega_T)$ равномерно сходится при $k \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0^+$ к функции z на каждом

ограниченном множестве $\omega'_\tau \subset \omega_\tau = (0, \tau) \times \mathbb{R}_+$, $\tau \in (0, T)$. Исходя из всего сказанного, будем формально считать функцию $z(t, x)$ достаточно гладкой. При этом неявно предполагаем, что необходимые оценки сначала выводятся применительно к гладким функциям $z_k^\varepsilon(t, x)$ и конечный результат получается предельным переходом при $k \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (Отметим, что видоизменение уравнения (20) по сравнению с (17) вносит в уравнение для функции z_k^ε дополнительный член, не существенный при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ для окончательной оценки (15).)

Итак, пусть $z \in C_{tx}^{1,2}(\omega_\tau) \cap C(\bar{\omega}_\tau)$. Тогда из уравнения (18) в силу теоремы сравнения заключаем, что $\max_x z(t, x) \leq z^+(t)$, $\min_x z(t, x) \geq z^-(t)$, где гладкие функции $z^\pm(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$dz^+/dt \leq \sup_x k [E(U(t, x))] \sup_x (U_a)_{xx}(t, x), \quad (21)$$

$$dz^-/dt \geq 0, \quad 0 < t < T, \quad (22)$$

причем $z^+(0) = \max_x z(0, x) < \infty$, $z^-(0) = \min_x z(0, x) > -\infty$.

При выводе (22) учитывается первое неравенство (12). Используя обозначение (7) и конкретный вид функции $U_a \equiv (T-t)^n \theta_a(\xi)$, получаем

$$\sup_x k [E(U)] = \sup_{s \in [0, (T-t)^n]} k [E(s)] = p_k [(T-t)^n],$$

$$\sup_x (U_a)_{xx} = (T-t)^{-1} \max_{\xi \geq 0} \theta_a''(\xi) = (T-t)^{-1} q_n, \quad t \rightarrow T^-$$

Подставляя эти равенства в (21), (22), выводим для $t \rightarrow T^-$ оценки

$$\frac{dz^+}{dt} \leq q_n \frac{p_k [(T-t)^n]}{T-t}, \quad \frac{dz^-}{dt} \geq 0.$$

Отсюда в силу неравенства

$$\|\theta(t, \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_C \leq (T-t)^{-n} \max\{z^+(t), |z^-(t)|\}, \quad 0 < t < T,$$

вытекает справедливость оценки (15).

Остается убедиться в сходимости θ к θ_a при $t \rightarrow T^-$. Раскрывая неопределенность в правой части (15), с учетом (8) получаем

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|\theta(t, \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_C \leq \lim_{t \rightarrow T^-} \frac{q_n}{-n} \frac{p_k [(T-t)^n]}{(T-t)^n} = 0.$$

Теорема 1 позволяет определить асимптотически точно зависимость от времени глубины проникновения тепловой волны. Из оценки сходимости (15) следует, что $x_{\text{эф}}(t)$ удовлетворяет при $t \rightarrow T^-$ равенству $u_a(t, x_{\text{эф}}(t)) \simeq 1/(2E[(T-t)^n])$.

Отсюда, используя конкретный вид п. а. р. $u_a(t, x)$ (см. (10)), получаем

$$x_{0\Phi}(t) \simeq (T-t)^{(1+n)/2} \theta_a^{-1} \left[\frac{E^{-1} [E[(T-t)^n]/2]}{(T-t)^n} \right], \quad t \rightarrow T^- \quad (23)$$

Здесь θ_a^{-1} — функция, обратная к θ_a (θ_a^{-1} существует на интервале $(0, 1)$ в силу монотонности θ_a).

Потребуем дополнительно, чтобы

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k(s/2)}{k(s)} = 1. \quad (24)$$

Тогда, как нетрудно проверить, $E^{-1}(E(s)/2)/s \rightarrow 1$, $s \rightarrow \infty$. Учитывая, что $\theta_a^{-1}(\xi) \simeq (1-\xi)/(-n)^{1/2}$ при малых $\xi > 0$, из (23) выводим следующую оценку глубины проникновения тепловой волны:

$$x_{0\Phi}(t) \simeq \frac{(T-t)^{(1+n)/2}}{(-n)^{1/2}} \left[1 - \frac{E^{-1} [E[(T-t)^n]/2]}{(T-t)^n} \right], \quad (25)$$

которая справедлива при всех t , достаточно близких к T^- .

Рассмотрим отдельно случай $n < -1$. При $n < -1$ функция $(U_a)_x$ имеет разрыв первого рода в точке «фронта» $x_0(t) = \xi_0(T-t)^{(1+n)/2}$, так что $U_a \in C(\omega_T)$. Поэтому при доказательстве сходимости к п. а. р. при $n < -1$ возникают дополнительные трудности. Ниже получена оценка скорости сходимости (15) при $n < -1$ для случая $k(u) \equiv 1$, когда $E(s) = \exp s - 1$, и, следовательно, автомодельное представление (14) имеет вид

$$\theta(t, \xi) = (T-t)^{-n} \ln [1 + u(t, \xi(T-t)^{(1+n)/2})]. \quad (14')$$

Теорема 1' Пусть $k(u) \equiv 1$. Тогда при любых $n < 0$ справедлива следующая оценка скорости сходимости к п. а. р.:

$$\|\theta(t, \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_{C(\mathbb{R}_+)} = O[(T-t)^{-n} |\ln(T-t)|], \quad t \rightarrow T^- \quad (15')$$

Доказательство. Случай $n \in [-1, 0)$ рассмотрен в теореме 1. Отметим, что (15) совпадает с (15') при $k \equiv 1$, поскольку $p_k(u) \equiv 1$ (см. (7)).

Итак, пусть $n < -1$ и без ограничения общности $u_0(x) \equiv 0$. Тогда решение задачи (1) — (3') имеет вид

$$u(t, x) = \frac{x}{2\pi^{1/2}} \int_0^t \exp \left\{ -\frac{x^2}{4(t-\tau)} \right\} [\exp \{(T-\tau)^n\} - 1] (t-\tau)^{-3/2} d\tau.$$

Главная проблема состоит в оценке $u(t, x)$ на поверхности слабого разрыва п. а. р. (10) $x_0(t) = \xi_0(T-t)^{(1+n)/2}$, на которой п. а. р. $u_a \equiv 0$ и не имеет нужной гладкости. Полагая в последнем равенстве $x = \xi_0(T-t)^{(1+n)/2}$ и проводя замену переменной под знаком интеграла $(T-t)(t-\tau)^{-1} = s$, приходим к следующей оценке:

$$u(t, x_0(t)) \leq \frac{\xi_0}{2\pi^{1/2}} \lambda^{n/2} \int_0^\infty \exp \{-\lambda^n P_n(s)\} s^{-1/2} ds,$$

где введено обозначение $\lambda = T - t \rightarrow 0^+$, $t \rightarrow T^-$ и через $P_n(s)$ обозначена функция $\xi_0^2 s / 4 - (1+s)^n s^{-n}$.

Без труда проверяется, что $P_n(s)$ неотрицательна именно при $\xi_0 = 2(-n)^{n/2}(-1-n)^{-(n+1)/2}$. Поэтому указанный выше интеграл сходится и стремится к нулю при $\lambda \equiv T - t \rightarrow 0^+$. Отсюда $u(t, x_0(t)) = o((T-t)^{n/2})$ и тем самым $U(t, x_0(t)) = O[|\ln(T-t)|]$ при $t \rightarrow T^-$. Поскольку $u_x(t, x) \leq 0$ (см. § 2 гл. V), эта оценка имеет место всюду в $\{x \geq x_0(t)\}$. В области $\{0 < x < x_0(t)\}$, где $U_a \in C^\infty$, применим метод доказательства теоремы 1, что в сумме дает оценку (15') скорости сходимости к п. а. р.

4. Достаточные условия отсутствия локализации.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (4), (5). Тогда в задаче (1) — (3') при $n < -1$ локализация отсутствует и решение неограниченно возрастает при $t \rightarrow T^-$ всюду в \mathbf{R}_+ , причем

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{E^{-1}(u(t, x))}{(T-t)^n} \geq 1, \quad x \in \mathbf{R}_+. \quad (26)$$

Если уравнение (1) допускает конечную скорость распространения возмущений и $\text{mes sup} u_0 < \infty$, то для величины носителя решения справедлива оценка

$$x_*(t) \equiv \text{mes sup} u(t, x) \geq (T-t)^{(1+n)/2} (\xi_0 - \varepsilon(t)), \quad 0 < t < T, \quad (27)$$

где $\xi_0 = \text{mes sup} \theta_a = 2(-n)^{n/2}(-1-n)^{-(1+n)/2}$, и неотрицательная функция $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow T^-$. Если $k \equiv 1$, то в силу теоремы 1' в (26) имеет место точное равенство.

Доказательство. Обозначим через $\bar{u}(t, x)$ решение задачи (1), (3') в $(0, T) \times (0, x_0(t))$, $x_0(t) = \xi_0 (T-t)^{(1+n)/2}$ с условиями $\bar{u}(t, x_0(t)) \equiv 0$, $\bar{u}(0, x) \leq u_0(x)$ в $(0, x_0(0))$. Поскольку $u(0, x_0(t)) \geq 0$ в $(0, T)$, в силу теоремы сравнения $u \geq \bar{u}$ в $(0, T) \times (0, x_0(t))$. Но $u_a \in C_{tx}^{1,2}((0, T) \times (0, x_0(t)))$, $u_a(t, x_0(t)) \equiv 0$, поэтому так же как при доказательстве теоремы 1 убеждаемся, что $\bar{\theta}(t, \xi) \rightarrow \theta_a(\xi)$ при $t \rightarrow T^-$ в $C((0, \xi_0))$ с оценкой (15) (здесь $\bar{\theta}(t, \xi)$ — автомодельное представление (14) решения \bar{u}). Отсюда справедливость теоремы 2 вытекает из неравенства $u \geq \bar{u}$ в $(0, T) \times (0, x_0(t))$; при выводе (27) используется разложение

$$\theta_a(\xi) \simeq -\frac{1+n}{2} \xi_0 (\xi_0 - \xi), \quad \xi \rightarrow \xi_0^- \quad (28)$$

Теорема 2 дает достаточные условия отсутствия локализации в задаче (1) — (3'). К сожалению, аналогичный результат о существовании локализации при $n \geq -1$ с помощью теоремы 1 установить нельзя. В случае $n = -1$ мы можем доказать такое утверждение:

Теорема 3. Пусть выполняются условия (4), (5). Тогда решение задачи (1) — (3') при $n = -1$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{E^{-1}(u(t, x))}{(T-t)^{-1}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)_+, \quad x \in \mathbf{R}_+. \quad (29)$$

Замечание. Если $n \in (-1, 0)$ в (3'), то $E^{-1}[u(t, x)] = o((T-t)^n)$, $t \rightarrow T^-$ в \mathbf{R}_+ .

Соотношение (29), которое вытекает из (15) и (13) для $\theta_a(\xi)$ при $n = -1$, означает, что $u(t, x)$ неограниченно возрастает для всех $x \in (0, 2)$, причем $u(t, x) \simeq E[(T-t)^{-1}(1-x/2)_+^2]$ при $t \rightarrow T^-$. Если же $x \geq 2$, то $u(t, x) = o(E[(T-t)^{-1}])$, $t \rightarrow T^-$, что, однако, не гарантирует равномерной ограниченности решения. В то же время очевидно, что п. а. р. (10) (которое правильно описывает асимптотическое поведение решения задачи) при $n \geq -1$ является локализованным. В случае $k(u) \equiv 1$ локализация решения задачи (1) — (3') при $n \geq -1$ доказана в § 4 гл. III на основе анализа теплового потенциала. Все сказанное выше, а также результаты проведенных численных расчетов, свидетельствуют о том, что при $n \geq -1$ решение задачи (1) — (3') является локализованным.

5. Примеры. Рассмотрим другие примеры.

Пример 1 (ср. пример 2 § 5 гл. V). Пусть $k(u) = \ln^\lambda(1+u)$, $\lambda > 0$ — постоянная. Условия (4), (5) выполнены. Преобразование E в (6) имеет вид (см. табл. 1) $E(u) = \exp\{[(1+\lambda)u]^{1/(1+\lambda)}\} - 1$, и поэтому, полагая $n_\lambda = n/(1+\lambda)$ в (3'), получаем

$$u_1(t) = \exp[(1+\lambda)^{1/(1+\lambda)}(T-t)^{n_\lambda}] - 1, \quad 0 < t < T. \quad (30)$$

Этому граничному режиму с обострением отвечает п. а. р.

$$u_a(t, x) = \exp[(1+\lambda)^{1/(1+\lambda)}(T-t)^{n_\lambda} \theta_a^{1/(1+\lambda)}(\xi)] - 1, \quad (31)$$

где $\xi = x/(T-t)^{[1+(1+\lambda)n_\lambda]/2}$.

Из теоремы 1 следует, что при $n \in [-1, 0)$ автомодельное представление (14) сходится при $t \rightarrow T^-$ к функции θ_a и справедлива оценка

$$\|\theta(t, \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_C = O((T-t)^{-n_\lambda}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T^-$$

Из структуры п. а. р. (31) видно, что при $n_\lambda < -1/(1+\lambda)$ локализация в задаче отсутствует, причем $u(t, x) \sim \exp[(T-t)^{n_\lambda}]$, $t \rightarrow T^-$, при любых $x \in \mathbf{R}_+$. Рассматриваемое уравнение (1) описывает процессы с конечной скоростью распространения возмущений. Поэтому при $n_\lambda < -1/(1+\lambda)$ размеры носителя решения можно оценить по формуле (27).

При $n_\lambda \geq -1/(1+\lambda)$ п. а. р. (31) являются локализованными. В частности, в случае $n_\lambda = -1/(1+\lambda)$ (S-режим) справедливо следующее асимптотически точное при $t \rightarrow T^-$ равенство (см. теорему 3):

$$u(t, x) \simeq \exp[(1+\lambda)^{1/(1+\lambda)}(T-t)^{-1/(1+\lambda)}(1-x/2)_+^{2/(1+\lambda)}] - 1.$$

Укажем теперь зависимость от времени глубины проникновения тепловой волны:

$$x_{\text{эф}}(t) \simeq \frac{(1+\lambda)^{\lambda/(1+\lambda)} \ln 2}{(-n_{\lambda}(1+\lambda))^{1/2}} (T-t)^{[1+n_{\lambda}(\lambda-1)]/2} \quad t \rightarrow T^-.$$

Отсюда следует, что в случае $\lambda \leq 1$ при $n_{\lambda} \in [-(1+\lambda)^{-1}, 0)$ в (30) глубина проникновения волны уменьшается до нуля при $t \rightarrow T^-$. Этот вывод справедлив и для граничного HS-режима, нагревающего до бесконечной температуры все полупространство \mathbf{R}_+ (см. § 4 гл. III). При $\lambda = 1$ характер поведения $x_{\text{эф}}(t)$ практически не зависит от параметра n : $x_{\text{эф}}(t) = O((T-t)^{1/2})$, $t \rightarrow T^-$.

Последние выводы подтверждают тот факт, что сокращения полуширины, вообще говоря, недостаточно для локализации.

Пример 2 (ср. пример 3 § 5 гл. V). Рассмотрим уравнение (1) с коэффициентом $k(u) = \ln[1 + \ln(1+u)]$. Поскольку здесь $E(u) \simeq \exp\{u/\ln u\}$ при $u \rightarrow \infty$, из теоремы 2 получаем, что граничный режим с обострением

$$u_1(t) \simeq \exp\{(T-t)^n / |n \ln(T-t)|\}, \quad t \rightarrow T^-, \quad (32)$$

приводит при $n < -1$ к отсутствию локализации, причем

$$\text{mes sup} u(t, x) \geq \xi_0 (T-t)^{(1+n)/2} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T^-.$$

Если же $n \geq -1$, то п. а. р. являются локализованными. Граничному S-режиму ($n = -1$) отвечает п. а. р. следующего вида:

$$u(t, x) \simeq u_a(t, x) \simeq \exp \left\{ \frac{(T-t)^{-1}}{|\ln(T-t)|} \frac{[(1-x/2)_+]^2}{\left\{ 1 + 2 \frac{\ln[(1-x/2)_+]}{|\ln(T-t)|} \right\}^2} \right\},$$

$$t \rightarrow T^-, \quad 0 < x < 2.$$

Из соотношения (25) следует, что в рассматриваемой задаче ($n \geq -1$) полуширина уменьшается при $t \rightarrow T^-$:

$$x_{\text{эф}}(t) \simeq (-n)^{-1/2} (T-t)^{(1-n)/2} \ln |\ln(T-t)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T^-.$$

Пример 3. Пусть

$$k(u) = [1 + \ln(1+u)]^{-1}. \quad (33)$$

В этом случае $E(u) = \exp\{e^u - 1\} - 1$, поэтому, как следует из теоремы 2, граничный режим

$$u_1(t) = \exp\{\exp\{(T-t)^n\} - 1\} - 1 \quad (34)$$

при $n < -1$ обеспечивает неограниченное возрастание решения задачи (1), (2), (34) всюду в \mathbf{R}_+ . Если же $n \geq -1$, то следует ожидать, что в задаче существует локализация тепла (по крайней мере это свойство проявляют соответствующие п. а. р.).

Пример 4. Пусть коэффициент теплопроводности имеет вид

$$k(u) = \frac{3 \ln^2 [1 + \ln(1 + u)]}{1 + \ln(1 + u)}.$$

Условия (4), (5) в этом случае выполнены, и функция E , определяемая равенством (6), имеет вид

$$E(u) = \exp \{ \exp \{ u^{1/3} \} - 1 \} - 1.$$

Поэтому к отсутствию локализации в рассматриваемой задаче приводит действие граничных режимов с обострением

$$u_1(t) = \exp \{ \exp \{ (T - t)^n \} - 1 \} - 1$$

при $n < -1/3$. При $n \geq -1/3$ п. а. р. являются локализованными.

6. Условие локализации произвольных граничных режимов с обострением. При построении п. а. р. в вырожденном случае существенным образом использовалось условие (5). Если же интеграл в (5) сходится:

$$a_k = \int_0^{\infty} \frac{k(\eta)}{\eta + 1} d\eta < \infty, \quad (35)$$

то функция E в (6) определена на ограниченном интервале $(0, a_k)$, и тем самым E^{-1} равномерно ограничена в \mathbb{R}_+ . Поэтому не имеет смысла рассматривать семейство граничных режимов с обострением (3'), и п. а. р. типа (10) здесь не существует.

Для того чтобы подробнее разъяснить смысл ограничения (5), рассмотрим

Пример 5. Пусть в уравнении (1) коэффициент имеет вид:

$$k(u) = [1 + \ln(1 + u)]^{-1} [1 + \ln(1 + \ln(1 + u))]^{-1} \times \dots \\ \dots \times [1 + \ln(1 + \dots + \ln(1 + u)) \dots]^{-1}, \quad u > 0. \quad (36)$$

В каждой последующей квадратной скобке число логарифмов \ln увеличивается на один. Пусть в последней скобке используется M логарифмов, т. е. (36) состоит из M сомножителей (при $M = 1$ коэффициент (36) совпадает с функцией (33)).

Преобразование E определяется из соотношения (6):

$$E(u) = \exp \{ \exp \{ \dots \{ e^u - 1 \} \dots \} - 1 \} - 1,$$

где в правой части используется $M + 1$ экспонент. Поэтому из теоремы 2 заключаем, что граничный режим

$$u_1(t) = E[(T - t)^n] = \\ = \exp \{ \exp \{ \dots \{ \exp \{ (T - t)^n \} - 1 \} \dots - 1 \} - 1, \quad 0 < t < T, \quad (37)$$

при $n < -1$ не является локализованным. Сопоставление (36) и (37) показывает, что увеличение числа логарифмов в последней квадратной скобке в (36) приводит к тому, что для реализации

HS-режима без локализации необходимы все более быстрые (все сильнее растущие при $t \rightarrow T^-$) режимы с обострением. При $M \rightarrow \infty$ мощность этих режимов не имеет (в определенном смысле) ограничения сверху. В то же время с ростом M интеграл (5) расходится все «медленнее». Таким образом, по мере того как достигается выполнение условия (35), происходит неограниченное увеличение мощности минимальных граничных режимов, приводящих к отсутствию локализации и неограниченному возрастанию решения во всем пространстве.

При выполнении условия (5) возможны все типы граничных режимов с обострением: HS-, S- и LS-режимы (при ограничении (4) это фактически установлено в теоремах 1, 2). Если же $k(u)$ удовлетворяет (35), то нелокализованный HS-режим, по-видимому, не существует. Есть основание ожидать, что справедливо следующее утверждение (это гипотеза):

При выполнении условия

$$\int_1^{\infty} \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta < \infty \quad (38)$$

любой граничный режим с обострением в задаче (1)–(3') приводит к локализации.

Отметим, что сходимость интеграла в (38) обеспечивает принадлежность инвариантного решения типа бегущей волны к классу режимов с обострением (см. пример 7 § 3 гл. I).

Условию (38) удовлетворяют, например, следующие коэффициенты: $k(u) = e^{-u}$; $k(u) = (1+u)^{-\sigma}$, $\sigma > 0$;

$$k(u) = [1 + \ln(1+u)]^{-\lambda}; \quad k(u) = [1 + \ln(1+u)]^{-1} \times \\ \times [1 + \ln\{1 + \ln(1+u)\}]^{-\lambda}, \quad \lambda > 1.$$

§ 3. Приближенные автомодельные решения в невырожденном случае. Поточечные оценки скорости сходимости

В этом параграфе рассматриваются невырожденные п. а. р. уравнения нелинейной теплопроводности, отвечающие заданным на границе $x=0$ режимам с обострением. В отличие от вырожденных п. а. р. в § 2 они удовлетворяют (при других условиях на коэффициент теплопроводности) параболическому уравнению второго порядка.

Основные предположения и формальное определение п. а. р. Как и ранее, будем рассматривать в $\omega_T = (0, T) \times \mathbb{R}_+$ первую краевую задачу:

$$u_t = A(u) = (k(u)u_x)_x, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}_+; \quad u_0 \in C(\mathbb{R}_+), \quad \sup u_0 < \infty, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u_1(t) > 0, \quad t \in (0, T); \quad u_1 \in C^2([0, T]), \quad (3)$$

где растущая в режиме с обострением функция u_1 в (3) считается монотонно возрастающей.

Введем необходимые ограничения на коэффициент $k(u) \in C^3(0, \infty) \cap C([0, \infty))$. Будем считать, что $k'(u) > 0$ при $u > 0$, $k(0) = 0$, $k(\infty) = \infty$. Функция k осуществляет взаимно однозначное монотонное отображение $\mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, и поэтому определена k^{-1} : $\mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ — функция, обратная к k .

Положим

$$\Phi_k(u) = [k(s)/k'(s)]' \Big|_{s=k^{-1}(u)}. \quad (4)$$

Основное условие на коэффициент k состоит в следующем: существует постоянная $\sigma \in \mathbf{R}_+$ такая, что *

$$\Phi_k(u) \rightarrow 1/\sigma, \quad u \rightarrow \infty. \quad (5)$$

В табл. 2 приведены некоторые коэффициенты k , удовлетворяющие условию (5). Во всех случаях постоянная $\gamma > 0$ выбирается достаточно большой. В правом столбце таблицы указаны

Таблица 2

$k(u) =$	$k^{-1}(u) =$
$u^\sigma \ln^\alpha \ln(\gamma + u)$	$u^{1/\sigma} \ln^{-\alpha/\sigma} \ln u$
$u^\sigma \ln^\alpha(\gamma + u)$	$\sigma^{\alpha/\sigma} u^{1/\sigma} \ln^{-\alpha/\sigma} u$
$u^\sigma \exp\{\ln^\alpha(\gamma + u)\}, \quad 0 < \alpha < 1$	$u^{1/\sigma} \exp\{-\sigma^{-(\alpha+1)} \ln^\alpha u\}$
$u^\sigma \exp\left\{\frac{\ln(\gamma + u)}{\ln^\alpha \ln(\gamma + u)}\right\}, \quad \alpha > 0$	$u^{1/\sigma} \exp\left\{-\sigma^{-2} \frac{\ln u}{\ln^\alpha \ln u}\right\}$

главные члены асимптотических разложений функции $k^{-1}(u)$ при $u \rightarrow \infty$.

Нам будет удобно записать краевое условие (3) следующим образом:

$$u(t, 0) = u_1(t) = k^{-1}(\psi^\sigma(t)), \quad t \in (0, T), \quad (3')$$

где $\psi(t)$ — гладкая монотонно возрастающая функция, $\psi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^-$.

П. а. р. u_a задачи (1) — (3') будем искать в виде

$$u_a(t, x) = k^{-1}[\psi^\sigma(t) \theta_a^\sigma(\xi)], \quad \xi = x/\varphi(t), \quad (6)$$

где неизвестные функции $\theta_a(\xi)$, $\varphi(t)$ определяются из условий сходимости решения $u(t, x)$ к п. а. р. $u_a(t, x)$. Предполагается, что $\theta_a(0) = 1$, поэтому п. а. р. (6) удовлетворяет краевому условию (3').

Проделаем некоторые предварительные выкладки. Положим

$$U_a(t, x) = k(u_a(t, x)) \equiv \psi^\sigma(t) \theta_a^\sigma(\xi). \quad (7)$$

* При $\sigma = 0^+$ соотношение (5) эквивалентно равенству $\Phi_k(\infty) = \infty$. Этот случай анализировался в § 2.

Функция U_a удовлетворяет уравнению

$$(U_a)_t = \sigma (\psi^{\sigma-1} \psi') (t) \theta_a^\sigma (\xi) - \left(\psi^\sigma \frac{\Phi'}{\Phi} \right) (t) \xi \frac{d\theta_a^\sigma (\xi)}{d\xi}, \quad (8)$$

или, что то же самое, уравнению

$$(U_a)_t = \sigma \left(\frac{\psi'}{\psi} \right) (t) U_a - \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right) (t) x \frac{\partial U_a}{\partial x}. \quad (8')$$

Введем еще одно обозначение:

$$U(t, x) = k(u(t, x)), \quad (t, x) \in \omega_T. \quad (9)$$

Для U получаем уравнение

$$U_t = D_\sigma(U) + [\Phi_k(U) - 1/\sigma] U_x^2, \quad (10)$$

где

$$D_\sigma(U) = UU_{xx} + \frac{1}{\sigma} U_x^2. \quad (11)$$

Отметим, что $U_a(t, 0) \equiv U(t, 0) = \psi^\sigma(t)$ при $t \in (0, T)$. В дальнейшем уравнение для разности $z = U - U_a$ анализируется с помощью принципа максимума и будут получены условия, при которых

$$\|\theta^\sigma(t, \cdot) - \theta_a^\sigma(\cdot)\|_{C(\mathbb{R}_+)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T^-, \quad (12)$$

где через $\theta(t, \xi)$ обозначено автомодельное представление решения задачи (1) — (3')

$$\theta(t, \xi) = \frac{1}{\psi(t)} U^{1/\sigma}(t, \xi \varphi(t)) \equiv \frac{1}{\psi(t)} k^{1/\sigma}(u(t, \xi \varphi(t))), \quad t \in (0, T), \quad \xi \geq 0. \quad (13)$$

Условие сходимости (12) обеспечивает совпадение свойств решения рассматриваемой задачи и п. а. р. (6) при $t \rightarrow T^-$. Функция $\varphi(t)$ тогда с точностью до постоянного множителя определяет зависимость от времени глубины проникновения тепловой волны $x_{\varphi}(t)$.

В сделанных выше предположениях построение п. а. р. проводится на основе точных автомодельных решений уравнения со степенной нелинейностью:

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x \quad (14)$$

(здесь постоянная $\sigma > 0$ та же, что и в условии (5)). Нам понадобятся два типа автомодельных решений уравнения (14) (см. § 3 гл. II):

$$\text{I. } u_A(t, x) = (T - t)^n \theta_A(\xi), \quad \xi = x / (T - t)^{(1+n\sigma)/2}, \quad t \in (0, T); \quad n = \text{const} < 0; \quad (15)$$

$$\text{II. } u_A(t, x) = e^t \theta_A(\xi), \quad \xi = x / \exp\{\sigma t / 2\}, \quad t > 0. \quad (16)$$

Здесь функции $\theta_A(\xi) \geq 0$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые получаются после

подстановки $u_a(t, x)$ в (14):

$$\text{I.} \quad (\theta_a^\sigma \theta_a')' - \frac{1+n\sigma}{2} \theta_a' \xi + n\theta_a = 0, \quad \xi > 0; \quad (17)$$

$$\text{II.} \quad (\theta_a^\sigma \theta_a')' + \frac{\sigma}{2} \theta_a' \xi - \theta_a = 0, \quad \xi > 0, \quad (18)$$

а также краевым условиям

$$\theta_a(0) = 1, \quad \theta_a(\infty) = 0. \quad (19)$$

В сделанных предположениях на $k(u)$ способ построения п. а. р. в каждом конкретном случае зависит от вида граничного режима (3).

1. Приближенные автомодельные решения типа I. В этом пункте строятся п. а. р. задачи (1) — (3') с функцией θ_a , удовлетворяющей уравнению (17). Задача (17), (19) подробно изучена в § 2 гл. III, где показано, что при любых $n < 0$ ее решение существует и единственно. При $n < -1/\sigma$ функция θ_a является финитной: $\xi_0 = \text{mes sup} \theta_a < \infty$, а при $n \in (-1/\sigma, 0)$ имеем $\theta_a(\xi) > 0$ всюду в \mathbf{R}_+ , причем

$$\theta_a(\xi) = C \xi^{2n/(1+n\sigma)} + \quad \xi \rightarrow \infty; \quad C = C(n, \sigma) = \text{const} > 0. \quad (20)$$

В случае $n = -1/\sigma$ решение выписывается в явном виде:

$$\theta_a(\xi) = \left[\left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right)_+ \right]^{2/\sigma} \quad \xi > 0; \quad \xi_0 = \left[\frac{2(\sigma+2)}{\sigma} \right]^{1/2} \quad (21)$$

Для доказательства сходимости к п. а. р. нам понадобится Лемма 1. Пусть θ_a — решение задачи (17), (19). Тогда

$$q_n = \sup_{\xi \in [0, \xi_0]} \frac{d^2 \theta_a^\sigma}{d\xi^2}(\xi) < -n\sigma, \quad \xi_0 = \text{mes sup} \theta_a. \quad (22)$$

Замечание. При $n = -1/\sigma$ имеем (см. (21)) $q_n = 2/\xi_0^2 = \sigma/(\sigma+2) < (1/\sigma)\sigma = 1$.

Доказательство. Положим $g_a(\xi) = \theta_a^\sigma(\xi)$. Функция g_a удовлетворяет уравнению

$$g_a g_a'' + \frac{1}{\sigma} (g_a')^2 - \frac{1+n\sigma}{2} g_a' \xi + n\sigma g_a = 0. \quad (23)$$

Предположим, что найдется точка $\xi = \xi^* \in \mathbf{R}_+$ такая, что $g_a''(\xi^*) = -n\sigma$. Покажем, что это приводит к противоречию.

Рассмотрим сначала случай $n < -1/\sigma$. Тогда $\theta_a(\xi) \equiv 0$ при $\xi \geq \xi_0 = \text{mes sup} g_a$, причем $(g_a^{1/\sigma} g_a')(\xi_0) = 0$. Нетрудно показать с помощью теоремы Банаха о сжимающих отображениях, что при $\xi \rightarrow \xi_0^-$ имеет место разложение

$$g_a(\xi) \equiv \theta_a^\sigma(\xi) = -\frac{1+n\sigma}{2} \sigma \xi_0 (\xi_0 - \xi) + \frac{1-n\sigma}{4(\sigma+1)} \sigma (\xi_0 - \xi)^2 + \quad (24)$$

Отсюда $g_a''(\xi_0^-) = (1-n\sigma)\sigma/[2(\sigma+1)] < -n\sigma$. Поэтому $\xi^* < \xi_0$,

т. е. $g_a(\xi^*) > 0$. Тогда, полагая в (23) $\xi = \xi^*$, получаем

$$g_a'(\xi^*) = \sigma \frac{1+n\sigma}{2} \xi^*. \quad (25)$$

Перепишем (23) в эквивалентном виде:

$$(g_a^{1/\sigma} g_a')' - \frac{1+n\sigma}{2} g_a^{1/\sigma-1} g_a' \xi + n\sigma g_a^{1/\sigma} = 0, \quad \xi > 0. \quad (26)$$

Интегрируя обе части этого уравнения по интервалу (ξ^*, ξ_0) , получаем

$$-g_a^{1/\sigma}(\xi^*) \left[g_a'(\xi^*) - \sigma \frac{1+n\sigma}{2} \xi^* \right] + \sigma \left(\frac{1+n\sigma}{2} + n \right) \int_{\xi^*}^{\xi_0} g_a^{1/\sigma}(\eta) d\eta = 0, \quad (27)$$

Отсюда, учитывая (25), приходим к противоречию, поскольку

$$\int_{\xi^*}^{\xi_0} g_a^{1/\sigma}(\eta) d\eta > 0.$$

Пусть теперь $n > -1/\sigma$. Тогда $g_a > 0$ в \mathbf{R}_+ и $g_a''(\infty) = 0$. Необходимо рассмотреть два случая. Первый случай: $n \in (-1/\sigma, -1/(\sigma+2))$, когда $g_a^{1/\sigma} \in L^1(\mathbf{R}_+)$ (см. асимптотику (20)). К противоречию здесь приводит интегрирование уравнения (26) по (ξ^*, ∞) . Второй случай: $n \geq -1/(\sigma+2)$. Тогда, интегрируя (26) от $\xi = 0$ до $\xi = \xi^*$, с учетом (25) получаем равенство

$$\frac{\sigma(\sigma+2)}{2} \left(n + \frac{1}{\sigma+2} \right) \int_0^{\xi^*} g_a^{1/\sigma}(\eta) d\eta = g_a'(0),$$

которое в силу условий $n \geq -1/(\sigma+2)$, $g_a'(0) < 0$ не может быть выполнено.

Теорема 1. Пусть выполняется условие (5) и функция ψ в (3') удовлетворяет условию

$$(\psi/\psi')'(t) \rightarrow \frac{1}{n}, \quad t \rightarrow T^-; \quad n = \text{const} \in [-1/\sigma, 0). \quad (28)$$

Тогда задача (1)–(3') имеет п. а. р. (6), где

$$\varphi(t) = [-n(\psi^{\sigma+1}/\psi')(t)]^{1/2}, \quad t \in (0, T), \quad (29)$$

функция $\theta_a(\xi)$ является решением задачи (17), (19), и справедливо предельное равенство (12).

Проведем некоторые предварительные выкладки и посмотрим, какому уравнению удовлетворяет п. а. р. (6) в условиях теоремы 1. Из (17) следует, что

$$\theta_a^\sigma = -\frac{1}{n\sigma} \theta_a^\sigma \frac{d^2 \theta_a^\sigma}{d\xi^2} - \frac{1}{n\sigma^2} \left(\frac{d\theta_a^\sigma}{d\xi} \right)^2 + \frac{1+n\sigma}{2n\sigma} \frac{d\theta_a^\sigma}{d\xi} \xi. \quad (30)$$

Подставляя это равенство в (8), выводим для функции U_a уравнение

$$(U_a)_t = -\frac{1}{n} (\psi^{\sigma-1} \psi') (t) \theta_a^\sigma \frac{d^2 \theta_a^\sigma}{d\xi^2} - \frac{1}{n\sigma} (\psi^{\sigma-1} \psi') (t) \left(\frac{d\theta_a^\sigma}{d\xi} \right)^2 + \\ + \frac{1+n\sigma}{2n} (\psi^{\sigma-1} \psi') (t) \frac{d\theta_a^\sigma}{d\xi} \xi - \left(\psi^\sigma \frac{\varphi'}{\varphi} \right) (t) \frac{d\theta_a^\sigma}{d\xi} \xi.$$

Полагая теперь $\theta_a^\sigma = U_a / \psi^\sigma$, $\xi = x/\varphi$, получаем

$$(U_a)_t = -\frac{1}{n} \left(\frac{\psi' \varphi^2}{\psi^{\sigma+1}} \right) (t) D_\sigma (U_a) + G(t) (U_a)_{xx},$$

где $G(t) = [\ln(\psi'/\varphi)]'(t)$, $l = (1+n\sigma)/(2n)$, а D_σ — оператор (11). Однако в силу выбора функции φ (см. (29)) $-\frac{1}{n} \left(\frac{\psi' \varphi^2}{\psi^{\sigma+1}} \right) (t) \equiv \equiv 1$. Поэтому уравнение для U_a имеет вид

$$(U_a)_t = D_\sigma(U_a) + G(t) (U_a)_{xx}. \quad (31)$$

Полагая в соответствии с (7) $U_a = k(u_a)$, получаем, что в условиях теоремы п. а. р. (6) удовлетворяет уравнению

$$(u_a)_t = A(u_a) + \left[\frac{1}{\sigma} - \Phi_h(k(u_a)) \right] k'(u_a) (u_a)_{xx}^2 + G(t) (u_a)_{xx}, \quad (32)$$

которое отличается от исходного (1) двумя дополнительными членами в правой части.

З а м е ч а н и е. Любопытно отметить, что для эквивалентного п. а. р. можно вывести другое уравнение. Например, из (17) следует равенство (здесь $n \neq -1/\sigma$)

$$\frac{d\theta_a^\sigma}{d\xi} \xi = \frac{2}{1+n\sigma} \left[\theta_a^\sigma \frac{d^2 \theta_a^\sigma}{d\xi^2} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{d\theta_a^\sigma}{d\xi} \right)^2 \right] + \frac{2n\sigma}{1+n\sigma} \theta_a^\sigma.$$

Подставляя его в (8), выводим для функции U_a уравнение

$$(U_a)_t = -\frac{2}{1+n\sigma} \left(\frac{\varphi \varphi'}{\psi^\sigma} \right) (t) D_\sigma (U_a) + \frac{2n\sigma}{1+n\sigma} \left(\ln \frac{\psi'}{\varphi} \right)' (t) U_a, \quad l = \frac{1+n\sigma}{2n}. \quad (33)$$

Если вместо (29) определить функцию $\varphi(t)$ так, чтобы

$$-\frac{2}{1+n\sigma} \left(\frac{\varphi \varphi'}{\psi^\sigma} \right) (t) \equiv 1,$$

то, полагая в (33) $U_a = k(u_a)$, получаем для п. а. р. (6) еще одно уравнение:

$$(u_a)_t = A(u_a) + \\ + \left[\frac{1}{\sigma} - \Phi_h(k(u_a)) \right] k'(u_a) (u_a)_{xx}^2 + \frac{k(u_a)}{k'(u_a)} \frac{2n\sigma}{1+n\sigma} \left(\ln \frac{\psi'}{\varphi} \right)' (t),$$

которое отличается как от (32), так и от исходного уравнения (1). В дальнейшем мы будем использовать только уравнение (32).

Доказательство теоремы 1. Положим $z = U - U_a$ в ω_T , $\in C(\omega_T)$. Тогда, как следует из (10), (31), функция z удовлетворяет в ω_T параболическому уравнению

$$z_t = \mathcal{L}_1 z + \mathcal{L}_2 z + \mathcal{M}(t, x) + \mathcal{N}(t, x; z). \quad (34)$$

Вдесь \mathcal{L}_1 — линейный эллиптический оператор, полученный за счет преобразования разности $D_c(U) - D_c(U_a)$:

$$\mathcal{L}_1 z = Uz_{xx} + \frac{1}{\sigma}(U_x + (U_a)_x)z_x; \quad \mathcal{L}_2 z = (U_a)_{xx}z; \quad (35)$$

\mathcal{M} — функция следующего вида:

$$\mathcal{M}(t, x) = -G(t)(U_a(t, x))_{xx}; \quad (36)$$

\mathcal{N} — нелинейный оператор:

$$\mathcal{N}(t, x; z) = [\Phi_h(U_a + z) - 1/\sigma]((U_a)_x + z_x)^2. \quad (37)$$

При этом $z(t, 0) = 0$, $M_0 = \sup |z(0, x)| < \infty$.

Ниже будут получены оценки функции z в ω_T снизу и сверху путем построения пространственно однородных нижних и верхних решений уравнения (34).

Итак, пусть выполняется условие (5). Тогда существует непрерывная функция $H(u)$:

$$-H(u) \leq \Phi_h(u) - 1/\sigma \leq H(u), \quad u > 0, \quad (38)$$

причем

$$H(u) > 0 \quad \text{и} \quad H(u) \text{ не возрастает при } u > 0, \quad (39)$$

$$H(u) \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty. \quad (40)$$

Получим оценку $z(t, \cdot)$ сверху. Оценка снизу имеет тот же вид. Как следует из вида оператора \mathcal{N} , функция z удовлетворяет неравенству

$$z_t \leq \mathcal{L}z + \mathcal{M} + \mathcal{N}_0(t, x; z), \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2,$$

где \mathcal{N}_0 имеет вид

$$\mathcal{N}_0(t, x; z) = H(U_a + z)((U_a)_x + z_x)^2.$$

Учитывая, что в силу предположений (39), (40) $H(U_a + z) \leq H(z)$ при всех $z \geq 0$, нетрудно показать, что функция z является нижним решением уравнения

$$z_t^+ = \mathcal{L}z^+ + \mathcal{M} + H(z^+)((U_a)_x + z_x^+)^2$$

в области $\{z^+ \geq 0\}$. Поэтому $z \leq z^+$ ($z^+ \geq 0$) в ω_T , если это же неравенство выполнено при $t = 0$ и на границе $(0, T) \times \{x = 0\}$.

Очевидно, что функция z^+ в свою очередь является нижним решением параболического уравнения

$$w_t^+ = \mathcal{L}_1 w^+ + w^+ \sup_x (U_a)_{xx} + \sup_x |\mathcal{M}| + H(w^+)(w_x^+ + 2(U_a)_x)w_x^+ + H(w^+) \sup_x (U_a)_{xx}^2, \quad w^+ > 0 \text{ в } \omega_T.$$

Решение этого уравнения в силу обычной теоремы сравнения по крайевым данным (см. § 1 гл. I) может быть оценено через пространственно однородное решение $w(t)$.

Суммируя все сказанное, приходим к следующей оценке:

$$|z(t, x)| \leq w(t) \quad \text{в } \Omega_T, \quad (41)$$

где функция w удовлетворяет краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dw}{dt} = w \sup_x (U_a)_{xx} + \sup_x |M| + H(w) \sup_x (U_a)_x^2, \quad t \in (0, T); \quad (42)$$

$$w(0) = M_0 \equiv \sup_x z(0, x) < \infty.$$

Учитывая конкретный вид функции U_a (см. (7)), а также (29), нетрудно видеть, что при $n \in [-1/\sigma, 0)$

$$\begin{aligned} \sup_x (U_a)_{xx} &\equiv \frac{\psi^\sigma(t)}{\varphi^2(t)} \sup_x |[\theta_a^\sigma(\xi)]'| = \frac{q_n}{-n} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}; \\ \sup_x |M| &\equiv |G(t)| \sup_x |(U_a)_x| = p_n |G(t)| \psi^\sigma(t), \\ p_n &= \sup_x |\xi(\theta_a^\sigma)'| < \infty; \\ \sup_x (U_a)_x^2 &= \frac{r_n}{-n} \frac{\psi^{2\sigma}(t)}{\varphi^2(t)} \equiv \frac{r_n}{-n} \psi^{\sigma-1}(t) \psi'(t), \\ r_n &= \sup_x [(\theta_a^\sigma)']^2 < \infty. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (42) имеет вид

$$\frac{dw}{dt} = \frac{q_n}{-n} \frac{\psi'}{\psi} w + p_n \psi^\sigma |G| + \frac{r_n}{-n} \psi^{\sigma-1} \psi' H(w). \quad (43)$$

Поскольку в силу (41) при всех $t \in (0, T)$

$$\|\theta^\sigma(t, \cdot) - \theta_a^\sigma(\cdot)\|_C \equiv \frac{1}{\psi^\sigma(t)} \sup_x |z(t, x)| \leq \frac{w(t)}{\psi^\sigma(t)}, \quad (44)$$

для доказательства предельного равенства (12) достаточно проверить, что $w(t)/\psi^\sigma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow T^-$.

Из (43) нетрудно получить оценку функции $w(t)$, например, на интервале $(T/2, T)$. Для оценки последнего (нелинейного) члена в правой части (43) воспользуемся неравенством

$$\frac{dw}{dt} \geq \frac{q_n}{-n} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} w,$$

из которого следует, что при всех $t \in (T/2, T)$

$$w(t) \geq M_1 [\psi(t)]^{q_n/(-n)}, \quad M_1 = w(T/2) [\psi(T/2)]^{-q_n/(-n)}.$$

Поэтому в силу условий (39), (40) выполняется неравенство

$$\frac{dw}{dt} \leq \frac{q_n}{-n} \frac{\psi'}{\psi} w + p_n \psi^\sigma |G| + \frac{r_n}{-n} \psi^{\sigma-1} \psi' H(M_1 \psi^{q_n/(-n)}).$$

Следовательно, для любых $t \in (T/2, T)$

$$\begin{aligned}
 w(t) &\leq M_1 \psi^{q_n/(-n)}(t) + P_n \psi^{q_n/(-n)}(t) \int_{T/2}^t \psi^{\sigma - q_n/(-n)}(\tau) |G(\tau)| d\tau + \\
 &+ \frac{r_n}{-n} \psi^{q_n/(-n)}(t) \int_{T/2}^t \psi^{\sigma - 1 - q_n/(-n)}(\tau) \psi'(\tau) H(M_1 \psi^{q_n/(-n)}(\tau)) d\tau \equiv \\
 &\equiv I_1(t) + I_2(t) + I_3(t).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим отношение

$$\begin{aligned}
 0 < w(t)/\psi^\sigma(t) &= I_1(t)\psi^{-\sigma}(t) + I_2(t)\psi^{-\sigma}(t) + I_3(t)\psi^{-\sigma}(t) \equiv \\
 &\equiv J_1(t) + J_2(t) + J_3(t).
 \end{aligned}$$

В силу леммы 1 $q_n < -n\sigma$, и поэтому

$$J_1(t) \equiv M_1 [\psi(t)]^{q_n/(-n) - \sigma} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T^-$$

Рассмотрим выражение $J_2(t)$. Последовательно раскрывая возникающие при $t \rightarrow T^-$ неопределенности и учитывая при этом конкретный вид функции $G(t)$, а также условия (28), (29), получаем (здесь $C > 0$ — некоторые постоянные)

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow T^-} J_2(t) &= C \lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\psi}{\psi'} |G| = \\
 &= C \lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\psi}{\psi'} \left| l \frac{\psi'}{\psi} - \frac{\varphi'}{\varphi} \right| = C \lim_{t \rightarrow T^-} \left| l - \frac{\varphi'}{\varphi} \frac{\psi}{\psi'} \right| = \\
 &= C \lim_{t \rightarrow T^-} \left| l - \frac{1}{2} \left\{ \sigma + \left[\frac{\psi}{\psi'} \right]' \right\} \right| = C \left| l - \frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{1}{n} \right) \right| = 0.
 \end{aligned}$$

Аналогично в силу (40)

$$\lim_{t \rightarrow T^-} J_3(t) = C \lim_{t \rightarrow T^-} H(M_1 \psi^{q_n/(-n)}(t)) = C \lim_{u \rightarrow \infty} H(u) = 0.$$

Итак, $w(t)/\psi^\sigma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow T^-$, что, как показывает (44), обеспечивает выполнение (12). Этим завершается доказательство.

Замечание. При $n < -1/\sigma$ функция $(\theta_a^\sigma)_\xi$ в силу (24) имеет разрыв в точке $\xi = \xi_0$, т. е. U_a не имеет гладкости, необходимой для доказательства на основе использованного выше метода. В этом случае при тех же условиях сходимости к п. а. р. легко устанавливается для $\bar{u}(t, x)$ — решения задачи (1), (3') в области $(0, T) \times (0, x_0(t))$ (в ней $U_a \in C_{tx}^{1,2}$) с условием $\bar{u}(t, x_0(t)) \equiv 0$ на подвижной правой границе $x_0(t) \equiv \xi_0 \varphi(t)$. Тогда, используя оценку (22), которая справедлива при любых $n < 0$, получаем ту же оценку скорости сходимости $\bar{\theta}^\sigma(t, \xi) \rightarrow \theta_a^\sigma(\xi)$ при $t \rightarrow T^-$ в $C((0, \xi_0))$. Из нее вытекает отсутствие локализации в исходной задаче (1) — (3') при $n < -1/\sigma$ и, в частности, оценка снизу размеров носителя не локализованного решения (см. доказательство теоремы 2 в § 2).

В табл. 3 приведены функции $\varphi(t)$, отвечающие некоторым граничным режимам (3'), в которых ψ удовлетворяют условию (28). Свойства указанных п. а. р. существенно зависят от соотношения между величинами n и σ . Так, при $n < -1/\sigma$ полуширина п. а. р. неограниченно возрастает при $t \rightarrow T^-$, т. е. решение задачи (1)–(3') не является локализованным (HS-режим). Напротив, если $n > -1/\sigma$, то п. а. р. возрастает до бесконечности только в одной точке $x = 0$, что свидетельствует о локализации решения (LS-режим). При $n = -1/\sigma$ могут существовать как локализованные, так и нелокализованные решения.

Рассмотрим случай $n = -1/\sigma$ подробнее. Легко видеть, что условию (28) здесь удовлетворяет функция

$$\psi(t) = (T - t)^{-1/\sigma}. \quad (45)$$

При этом в (29) $\varphi(t) \equiv 1$, т. е. полуширина постоянна (S-режим).

Таблица 3

$\psi(t) =$	$\varphi(t) \approx$
$(T - t)^n \ln^\alpha \ln[2 + (T - t)^{-1}]$	$(T - t)^{(1+n\sigma)/2} \ln^{\alpha\sigma/2} \ln(T - t) $
$(T - t)^n \ln^\alpha [2 + (T - t)^{-1}]$	$(T - t)^{(1+n\sigma)/2} \ln(T - t) ^{\alpha\sigma/2}$
$(T - t)^n \exp\left\{ \begin{array}{l} \ln^\alpha [(T - t)^{-1}], \\ 0 < \alpha < 1 \end{array} \right\}$	$(T - t)^{(1+n\sigma)/2} \exp\left\{ \frac{\sigma}{2} \ln(T - t) ^\alpha \right\}$
$(T - t)^n \exp\left\{ \frac{\ln[(T - t)^{-1}]}{\ln^\alpha \ln[2 + (T - t)^{-1}]} \right\},$ $\alpha > 0$	$(T - t)^{(1+n\sigma)/2} \exp\left\{ \frac{\sigma}{2} \frac{ \ln(T - t) }{\ln^\alpha \ln(T - t) } \right\}$

Таким образом, при выполнении условия (5) S-режиму в исходной задаче соответствует закон

$$u(t, 0) = k^{-1} [(T - t)^{-1}], \quad t \in (0, T). \quad (46)$$

Тогда п. а. р. представимо в явном виде:

$$u_a(t, x) = k^{-1} [(T - t)^{-1} (1 - x/x_0)_+^2], \quad x_0 = [2(\sigma + 2)/\sigma]^{1/2}.$$

Пример 1. Пусть уравнение (1) имеет вид

$$u_t = \left[\frac{u^\sigma}{\ln^\delta (\gamma + u)} u_x \right]_x, \quad (47)$$

где $\delta \neq 0$, $\gamma > 1$ — постоянные, и пусть в задаче (1)–(3)

$$u_1(t) = (T - t)^n \ln^\alpha [1 + (T - t)^{-1}], \quad t \in (0, T); \quad \alpha = \text{const} \neq 0. \quad (48)$$

Тогда, как следует из (3'), этому граничному режиму отвечает функция

$$\psi(t) = k^{1/\sigma} (u_1(t)) \simeq (-n)^{-\delta/\sigma} (T - t)^n \ln^{\alpha - \delta/\sigma} [(T - t)^{-1}], \quad t \rightarrow T^-,$$

удовлетворяющая условию (28). Поэтому в силу теоремы 1 режиму (48) отвечает п. а. р. с полушириной

$$\varphi(t) \simeq (-n)^{-\delta/2} (T-t)^{(1+n\sigma)/2} |\ln(T-t)|^{(\alpha\sigma-\delta)/2}, \quad t \rightarrow T^-.$$

В частности, при $n = -1/\sigma$ этот закон имеет вид*)

$$\varphi(t) \simeq (\sigma)^{\delta/2} |\ln(T-t)|^{(\alpha\sigma-\delta)/2}, \quad t \rightarrow T^-.$$

Отсюда при $\alpha > \delta/\sigma$ получаем $\varphi(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow T^-$, т. е. решение неограниченно возрастает во всем пространстве (HS-режим). Если $\alpha < \delta/\sigma$, то $\varphi(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow T^-$, и п. а. р. локализовано (LS-режим). При $\alpha = \delta/\sigma$ реализуется S-режим; решение имеет при $t \rightarrow T^-$ постоянную (ненулевую) полуширину. Подставляя в (48) $n = -1/\sigma$, $\alpha = \delta/\sigma$, получаем, что в случае уравнения (47) граничным S-режимом с обострением является

$$u_1(t) = (T-t)^{-1/\sigma} \ln^{\delta/\sigma} [1 + (T-t)^{-1}], \quad t \in (0, T).$$

2. Приближенные автомодельные решения типа II. Ниже построены п. а. р. задачи (1), (3'), рассматриваемой в некоторой области $(0, T) \times (0, x_0(t))$, $x_0(t) \equiv \xi_0 \varphi(t) > 0$ с дополнительным краевым условием на подвижной правой границе $u(t, x_0(t)) \equiv 0$. Здесь в п. а. р. (6) функция θ_a удовлетворяет задаче (18), (19) и является финитной функцией: $\text{mes sup} \theta_a = \xi_0 < \infty$ (см. § 3 гл. II).

Лемма 2. Пусть θ_a — решение задачи (18), (19). Тогда

$$q_1 = \sup_{\xi \in (0, \xi_0)} \frac{d^2 \theta_a^\sigma}{d\xi^2}(\xi) < \sigma.$$

При доказательстве леммы, которое аналогично доказательству предыдущей, используется асимптотическое разложение

$$\theta_a^\sigma = \frac{\sigma^2 \xi_0}{2} (\xi_0 - \xi) + \frac{\sigma^2}{4(\sigma+1)} (\xi_0 - \xi)^2 + \dots, \quad \xi \rightarrow \xi_0^-$$

Отсюда, в частности, получаем, что $(\theta_a^\sigma)''(\xi_0^-) = \sigma^2/[2(\sigma+1)] < \sigma$.

Теорема 2. Пусть выполняется условие (5) и функция ψ в (3') удовлетворяет условию

$$[\psi/\psi']'(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T^-. \quad (49)$$

Тогда существует п. а. р. (6), где

$$\varphi(t) = \{(\psi^{\sigma+1}/\psi')(t)\}^{1/2}, \quad t \in (0, T),$$

функция $\theta_a(\xi)$ является решением задачи (18), (19), и $\theta^\sigma(t, \xi) \rightarrow \theta_a^\sigma(\xi)$ при $t \rightarrow T^-$ в $C((0, \xi_0))$.

Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства предыдущей теоремы.

*) Отметим, что лишь в случае $\delta = 0$ (когда (47) превращается в уравнение со степенной нелинейностью) и $\alpha = 2/\sigma$ выражение для полуширины $\varphi(t) \simeq |\ln(T-t)|$, $t \rightarrow T^-$, может быть получено на основе анализа точного автомодельного решения [62, 138].

Легко проверить, что при выполнении условия (49) $\varphi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^-$. Поэтому в условиях теоремы граничные режимы с обострением (3') являются НС-режимами.

Пример 2. Пусть в задаче для уравнения (47)

$$u_1(t) = \exp\{(T-t)^n\}, \quad t \in (0, T); \quad n < 0.$$

Тогда функция

$$\psi(t) = k^{1/\sigma} [u_1(t)] = (T-t)^{-n\sigma/\sigma} \exp\{(T-t)^n\}$$

удовлетворяет условию (49). Поэтому для полуширины решения получаем оценку

$$\varphi(t) \simeq (-n)^{-1/2} (T-t)^{[1-n(\delta+1)]/2} \exp\left\{\frac{\sigma}{2} (T-t)^n\right\}, \quad t \rightarrow T^-.$$

§ 4. Приближенные автомодельные решения в невырожденном случае. Интегральные оценки скорости сходимости

В этом параграфе излагается другой метод построения п. а. р. задачи

$$u_t = (k(u)u_x)_x, \quad (t, x) \in \omega_T, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}_+; \quad u_0 \in C(\mathbb{R}_+), \quad \sup u_0 < \infty, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u_1(t) > 0, \quad u_1'(t) > 0, \quad t \in (0, T). \quad (3)$$

Во всех рассматриваемых ниже случаях доказательство сходимости проводится путем вывода некоторых интегральных оценок разности между $u(t, x)$ и соответствующим п. а. р. Проведенное исследование фактически устанавливает «законы трансформации» известных инвариантных решений уравнения (1) при $k = u^\sigma$, $\sigma = \text{const} \geq 0$ в результате преобразования коэффициента теплопроводности $u^\sigma \rightarrow k(u)$.

1. Приближенные автомодельные решения уравнений, близких к линейному. В этом пункте будут построены п. а. р. уравнения (1) с коэффициентом k , удовлетворяющим условиям

$$k \in C^2((0, \infty)) \cap C([0, \infty)); \quad k(u) > 0, \quad k'(u) > 0, \quad u > 0; \quad (4)$$

$$(k/k')'(u) \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Некоторые функции k , удовлетворяющие (4), (5), приведены в табл. 4.

Будет показано, что при специальном выборе функций $u_1(t)$ п. а. р. задачи (1)–(3) могут быть построены на основе автомодельных решений линейного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}. \quad (6)$$

Данный подход отличается от применяемого в § 2, где при выполнении условия (5) п. а. р. определялись на основе инвариантных решений уравнения первого порядка $u_t = k(u)u_x^2/(u+1)$. Отметим, что здесь рассматриваются более общие коэффициенты

$k(u) =$	
$\ln^\alpha \ln(3+u),$	$\alpha > 0$
$\ln^\alpha(3+u),$	$\alpha > 0$
$\ln(3+u) \ln^\alpha \ln(3+u),$	$\alpha > 0$
$\exp\{\ln^\alpha(1+u)\},$	$0 < \alpha < 1$
$\exp\left\{\frac{\ln(1+u)}{\ln^\alpha \ln(3+u)}\right\},$	$\alpha > 0$

$k(u)$, поскольку нет необходимости в ограничении (2.5), которое существенно использовалось в § 2.

Нам понадобятся два типа автомодельных решений уравнения (6):

$$I. u_\Lambda(t, x) = (T-t)^n f_1(\xi), \quad \xi = x/(T-t)^{1/2}, \\ t \in (0, T); \quad n < 0; \quad (7)$$

$$II. u_\Lambda(t, x) = e^t f_2(x), \quad t > 0. \quad (8)$$

Предполагается, что $f_i(0) = 1, f_i(\infty) = 0, i = 1, 2$. Уравнения для функций f_i получаются после подстановки выражений (7), (8) в (6). Без труда проверяется, что

$$f_1(\xi) = \frac{\Gamma(1/2-n)}{\pi^{1/2}\Gamma(-n)} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{\xi^2 s}{4}\right\} s^{-n-1} (1+s)^{n-1/2} ds, \quad f_2(x) = e^{-x}.$$

В каждом случае п. а. р. u_a задачи (1) — (3) ищется в виде

$$u_a(t, x) = u_1(t) \theta_a(\xi), \quad \xi = x/\varphi(t), \quad (9)$$

где неотрицательные и достаточно гладкие функции $\theta_a(\xi), \varphi(t)$ необходимо определить. Полагая $\theta_a(0) = 1$, получаем, что п. а. р. (9) удовлетворяет краевому условию (3).

Обозначим через $\theta(t, \xi)$ автомодельное представление решения задачи:

$$\theta(t, \xi) = \frac{1}{u_1(t)} u(t, \xi\varphi(t)), \quad \xi \in \mathbf{R}_+. \quad (10)$$

Покажем, что при специальном выборе функций u_1, θ_a, φ имеет место сходимость $\theta(t, \xi)$ к $\theta_a(\xi)$ при $t \rightarrow T^-$, что обеспечивает асимптотическую близость решения $u(t, x)$ к п. а. р. $u_a(t, x)$.

При доказательстве сформулированных ниже утверждений предполагается, что $u(t, \cdot) \in L^2(\mathbf{R}_+)$ при всех $t \in [0, T)$ (норма в $L^2(\mathbf{R}_+)$ обозначается через $\|\cdot\|_2$). Кроме того, не ограничивая общности, начальную функцию $u_0(x)$ будем считать невозрастающей в \mathbf{R}_+ . Тогда в силу монотонности граничного режима этим же свойством обладает решение $u(t, x)$ (см. § 2 гл. V).

Лемма 1. Пусть коэффициент k удовлетворяет условиям (4), (5). Тогда:

1) $k(u)$ растет при $u \rightarrow \infty$ медленнее любой степенной функции — для любого $\alpha > 0$ при всех достаточно больших $u > 0$ выполнены неравенства

$$k(u) < u^\alpha, \quad k'(u) < u^{\alpha-1}; \quad (11)$$

2) $k''(u) < 0$ при всех достаточно больших $u > 0$;

3) для любого $\xi \in (0, 1)$

$$k(\xi u)/k(u) \rightarrow 1, \quad u \rightarrow \infty. \quad (11')$$

Доказательство. Утверждение 1) прямо следует из (5). Вогнутость $k(u)$ при $u \rightarrow \infty$ (утверждение 2)) вытекает из соотношения

$$(k/k')'(u) \equiv 1 - k''(u)k(u)/[k'(u)]^2 \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow \infty.$$

Для доказательства утверждения 3) воспользуемся формулой конечных приращений: $k(u) = k(\xi u) + k'(\xi)u(1 - \xi)$, где $\xi \in (\xi u, u)$. Отсюда

$$k(\xi u)/k(u) = [1 + k'(\xi)u(1 - \xi)/k(\xi u)]^{-1}$$

Однако в силу 2) $k'(\xi) < k'(\xi u)$ при больших $u > 0$, и поэтому

$$\left[1 + \frac{k'(\xi u) \xi u (1 - \xi)}{k(\xi u) \xi}\right]^{-1} < \frac{k(\xi u)}{k(u)} < 1,$$

что завершает доказательство (11'), так как

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{k'(\xi u)}{k(\xi u)} \xi u \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{k(s)/k'(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{k(s)}{k'(s)} \right)' \right]^{-1} = 0.$$

1.1. Приближенные автомодельные решения типа I.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (4), (5) и при всех t , достаточно близких к T^- ,

$$u_1(t) = (T - \mu^{-1}(t))^n, \quad (12)$$

где $n < -1/4$ — постоянная и $\mu^{-1}: [0, T) \rightarrow [0, T)$ — обратная к монотонной функции

$$\mu(t) = T - \int_t^T \frac{d\tau}{k[(T - \tau)^n]} \rightarrow T^-, \quad t \rightarrow T^-. \quad (12')$$

Тогда существует п. а. р. (9), где

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (T - \mu^{-1}(t))^{1/2}, \quad t \rightarrow T^-, \\ \theta_a(\xi) &\equiv f_1(\xi), \end{aligned} \quad (13)$$

причем

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|\theta(t, \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_2 = 0. \quad (14)$$

Конкретный вид оценки скорости сходимости $\theta(t, \xi)$ к $\theta_a(\xi)$ будет получен в процессе доказательства теоремы. Неограниченность и монотонность функции (12), (12') при $t \rightarrow T^-$ вытекают из леммы 1.

В ряде случаев можно выписать асимптотически точное выражение граничного режима (12), (12'). Например, если

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k(s)}{k(s/k^n(s))} = 1$$

(этому условию удовлетворяют коэффициенты из строк с первой по третью табл. 4 и четвертой, если $\alpha \in (0, 1/2)$), то, как нетрудно показать,

$$\begin{aligned} u_1(t) &\simeq (T-t)^n k^n [(T-t)^n], \\ \varphi(t) &\simeq (T-t)^{1/2} k^{1/2} [(T-t)^n], \quad t \rightarrow T^-. \end{aligned}$$

Ограничение $n < -1/4$ на параметр в (12) можно связать с необходимостью включения $\theta_a \equiv f_1 \in L^2(\mathbf{R}_+)$. Поскольку

$$f_1(\xi) \simeq \frac{\Gamma(1/2-n)}{2^{2n}\pi^{1/2}} \xi^{2n}, \quad \xi \rightarrow \infty,$$

при $n \in [-1/4, 0)$ оно не имеет места.

Доказательство теоремы 1. Определим гладкую монотонную функцию μ $[0, T) \rightarrow [0, T)$ так, чтобы

$$u_1(\mu(t)) = (T-t)^n, \quad t \rightarrow T^- \quad (15)$$

Тогда функция $u(\mu(t), x)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = \mu'(t) (k(u) u_x)_x \quad (1')$$

и в силу (12) краевому условию

$$u(\mu(t), 0) = (T-t)^n, \quad t \rightarrow T^-. \quad (15')$$

Поскольку, как следует из (12), (13), $\varphi(t) = [u_1(t)]^{1/(2n)}$, равенство (15) также означает, что $\varphi(\mu(t)) = (T-t)^{1/2}$, $t \rightarrow T^-$, и поэтому при $t \rightarrow T^-$

$$\begin{aligned} u_a(\mu(t), x) &= (T-t)^n \theta_a(\xi), \quad \xi = x/(T-t)^{1/2}, \\ \theta(\mu(t), \xi) &= (T-t)^{-n} u(\mu(t), \xi (T-t)^{1/2}). \end{aligned}$$

Отметим, что $u_a(\mu(t), x)$ в точности совпадает с автомодельным решением (7) уравнения (6).

Положим $w(t, x) = u(\mu(t), x) - u_a(\mu(t), x)$. Тогда в сделанных предположениях $w(t, 0) = 0$, $w(t, x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и $w(t, \cdot) \in L^2(\mathbf{R}_+)$ при $t \rightarrow T^-$. Умножая скалярно обе части уравнения

$$w_t = [\mu'(t) k(u) u_x - (u_a)_x]_x \quad (16)$$

на функцию w , после интегрирования по частям получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t, \cdot)\|_2^2 = -(\mu'(t) k(u) u_x - (u_a)_{xx} w_x). \quad (17)$$

Обозначим через $G(s; t)$ функцию

$$G(s; t) = \int_0^s \{[\mu'(t)k(\eta)]^{1/2} - 1\}^2 d\eta, \quad s > 0, \quad t \in (0, T). \quad (18)$$

Используя тождество

$$\begin{aligned} (\mu'(t)k(u)u_x - (u_a)_x)(u_x - (u_a)_x) &\equiv \\ &\equiv \{[\mu'(t)k(u)]^{1/2}u_x - (u_a)_x\}^2 - (u_a)_x[G(u; t)]_x, \end{aligned}$$

из (17) выводим оценку

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_2^2 \leq ((u_a)_x, [G(u; t)]_x). \quad (19)$$

Поскольку $(u_a)_x < 0$ и по предположению $u_x \leq 0$ в ω_T , правая часть не превосходит

$$\begin{aligned} - \sup_x |(u_a)_x(\mu(t), x)| \int_0^\infty [G(u(\mu(t), x); t)]_x dx &\equiv \\ &\equiv q_a (T-t)^{n-1/2} G((T-t)^n; t), \quad t \rightarrow T^-, \end{aligned}$$

где $q_a = \max |\theta'_a(\xi)| < \infty$. Тогда получаем, что при всех $t \in (t_*, T)$, где $t_* < T$ достаточно близко к T^- ,

$$\begin{aligned} \|w(t, \cdot)\|_2^2 &\leq \|w(t_*, \cdot)\|_2^2 + \\ &+ 2q_a \int_{t_*}^t (T-\tau)^{n-1/2} G((T-\tau)^n; \tau) d\tau, \quad t_* < t < T. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью легко проверяемого равенства

$$\|w(t, \cdot)\|_2^2 = (T-t)^{2n+1/2} \|\theta(\mu(t), \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_2^2, \quad t_* < t < T,$$

получаем

$$\begin{aligned} \|\theta(\mu(t), \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_2^2 &\leq (T-t)^{-2n-1/2} \|w(t_*, \cdot)\|_2^2 + \\ &+ 2q_a (T-t)^{-2n-1/2} \int_{t_*}^t (T-\tau)^{n-1/2} G((T-\tau)^n; \tau) d\tau. \quad (20) \end{aligned}$$

Покажем, что правая часть этого неравенства стремится к нулю при $t \rightarrow T^-$. Первый член стремится к нулю в силу предположения $n < -1/4$. Рассмотрим второй член. Учитывая, что $\mu'(t) = 1/[k((T-t)^n)]$ при $t \rightarrow T^-$, и раскрывая неопределенность в (20), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T^-} \|\theta - \theta_a\|_2^2 &\leq - \frac{2q_a}{2n+1/2} \times \\ &\times \lim_{t \rightarrow T^-} (T-t)^{-n} \int_0^{(T-t)^n} \{[\mu'(t)k(\eta)]^{1/2} - 1\}^2 d\eta. \quad (21) \end{aligned}$$

В результате замены переменной $\eta = (T - t)^n \xi$ правая часть последнего неравенства приводится к виду

$$-\frac{2q_a}{2n + 1/2} \lim_{t \rightarrow T^-} \int_0^1 \left\{ \left[\frac{k(\xi(T-t)^n)}{k((T-t)^n)} \right]^{1/2} - 1 \right\}^2 d\xi. \quad (22)$$

Поскольку $k(u)$ возрастает, подынтегральное выражение ограничено равномерно по $\xi \in (0, 1)$ при $t \rightarrow T^-$ и в силу (11') стремится к нулю при $t \rightarrow T^-$ для любого $\xi \in (0, 1)$. Это доказывает справедливость (14), причем (20) дает оценку скорости сходимости к п. а. р.

В условиях теоремы 1 имеем $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow T^-$. Поэтому структура п. а. р. (9) указывает на то, что решение $u(t, x)$ неограниченно возрастает при $t \rightarrow T^-$ только в одной точке $x = 0$. Это свидетельствует о локализации в рассматриваемой задаче, причем (12) является LS-режимом с обострением.

Пример 1. Пусть в (1) $k(u) = \ln^\alpha(2+u)$, $\alpha > 0$ (см. табл. 4). Тогда, как следует из (12), (13), граничный режим

$$u_1(t) \simeq (-n)^{\alpha n} (T-t)^n |\ln(T-t)|^{\alpha n}, \quad t \rightarrow T^-,$$

приводит к возникновению тепловой волны, полуширина которой уменьшается при $t \rightarrow T^-$ по закону

$$x_{\text{эф}}(t) \simeq (-n)^{\alpha/2} \xi^* (T-t)^{1/2} |\ln(T-t)|^{\alpha/2}.$$

Постоянная $\xi^* \in \mathbb{R}_+$ такова, что $f_1(\xi^*) = 1/2$.

1.2. Приближенные автомодельные решения типа II.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (4), (5) и, кроме того,

$$\int_0^\infty \frac{d\eta}{k(e^\eta)} < \infty. \quad (23)$$

Пусть при всех t , достаточно близких к T^- ,

$$u_1(t) = \exp\{\mu^{-1}(t)\}, \quad (24)$$

где $\mu^{-1}: (0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$ — обратная к монотонно возрастающей функции $\mu(\tau): \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, T)$, определяемой при достаточно больших τ по формуле

$$\mu(\tau) = T - \int_\tau^\infty \frac{d\eta}{k(e^\eta)}. \quad (25)$$

Тогда $\varphi(t) \equiv 1$, $\theta_a(x) \equiv f_2(x) = e^{-x}$ и справедливо равенство (14).

Доказательство. Оно практически не отличается от доказательства теоремы 1. Устанавливается справедливость

следующей оценки:

$$\|\theta(\mu(t), \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_2^2 \leq \|u(t_*, \cdot) - u_a(t_*, \cdot)\|_2^2 e^{-2t} + 2e^{-2t} \int_{t_*}^t e^\tau \left[\int_0^{\tau} \{[\mu'(\tau)k(\eta)]^{1/2} - 1\}^2 d\eta \right] d\tau, \quad t_* < t < T. \quad (26)$$

Отсюда в силу леммы 1

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|\theta(t, \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_2^2 \leq \lim_{t \rightarrow T^-} \int_0^1 \left\{ \left[\frac{k(u_1(t)\xi)}{k(u_1(t))} \right]^{1/2} - 1 \right\}^2 d\xi = 0. \quad (27)$$

(Чтобы из (26) получить (27), достаточно воспользоваться равенством (25) и, учитывая (24), сделать обратное преобразование $\mu(t) \rightarrow t$.)

В условиях теоремы 2 п. а. р. (9) имеет вид

$$u_a(t, x) = \exp\{\mu^{-1}(t) - x\},$$

причем $u_a(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^-$ в \mathbf{R}_+ . Из теоремы 2 тогда следует, что этим же свойством обладает решение $u(t, x)$, т. е. в рассматриваемой задаче локализация тепла отсутствует и граничный режим с обострением (24) является HS-режимом.

С другой стороны, граничный закон (24) приводит к возникновению тепловой волны с постоянной (при $t \rightarrow T^-$) полушириной: $\varphi(t) \equiv 1$. При этом условии (23) обеспечивает принадлежность таких граничных законов к классу режимов с обострением. В [65] показано, что расходимость интеграла (23):

$$\int_0^\infty \frac{d\eta}{k(e^\eta)} = \infty,$$

приводит к тому, что решения с постоянной полушириной порождаются граничными режимами без обострения, определенными при всех $t > 0$. При этом п. а. р. определяется по той же формуле (9). Оно реализуется в случае $u_1(t) = \exp\{\mu^{-1}(t)\}$, где через μ^{-1} обозначена функция, обратная к

$$\mu(t) = \int_0^t \frac{d\eta}{k(e^\eta)}, \quad t > 0.$$

Тогда, если $\varphi \equiv 1$ и $\theta_a \equiv e^{-x}$ в (9), то $\theta(t, \cdot) \rightarrow \theta_a(\cdot)$ в $L^2(\mathbf{R}_+)$ при $t \rightarrow \infty$, где $\theta(t, \xi)$ — автомодельное представление (10).

Таким образом, неравенство (23), которое можно привести к эквивалентному виду:

$$\int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta k(\eta)} < \infty, \quad (28)$$

является необходимым и достаточным условием того, что тепловая волна с постоянной глубиной проникновения возникает под

действием граничного режима с обострением. Конкретный вид этого режима определяется формулами (24), (25).

Условию (23) (или, что то же самое, (28)) удовлетворяют коэффициенты k четвертой и пятой строк табл. 4, а при $\alpha > 1$ — также второй и третьей строк.

Для иллюстрации возможностей теоремы 2 рассмотрим

Пример 2. Пусть $k(u) = \ln(1+u) \ln^2 \ln(3+u)$. Условие (23) здесь выполнено, и, как следует из (25),

$$\begin{aligned} \mu(\tau) &\simeq T - 1/\ln \tau, & \tau \rightarrow \infty; \\ \mu^{-1}(t) &\simeq \exp\{(T-t)^{-1}\}, & t \rightarrow T^-. \end{aligned}$$

Поэтому граничный режим с обострением

$$u_1(t) \simeq \exp\{\exp\{(T-t)^{-1}\}\}$$

порождает решение с постоянной при $t \rightarrow T^-$ (я ненулевой) полушириной.

2. Приближенные автомодельные решения уравнений с коэффициентами почти степенного вида. В этом пункте рассматриваются уравнения (1) с коэффициентами k , удовлетворяющими условию

$$(k/k')'(u) \rightarrow 1/\sigma, \quad u \rightarrow \infty; \quad \sigma = \text{const} > 0 \quad (29)$$

(при $\sigma = 0^+$ (29) совпадает с (5)). Будем также считать выполненными следующие условия:

$$\frac{k(\xi u)}{\xi^\sigma} \text{ не убывает по } \xi \in (0, 1) \text{ при любом } u > 0, \quad (30)$$

$$\frac{k(\xi u)}{\xi^\sigma k(u)} \rightarrow 1 \text{ при } u \rightarrow \infty \text{ для любого } \xi \in (0, 1). \quad (30')$$

Всем указанным требованиям удовлетворяют, например, коэффициенты $k(u) = u^\alpha \ln^\alpha(1+u)$, $\alpha > 0$; $k(u) = u^\alpha \exp\{\ln^\alpha(1+u)\}$, $0 < \alpha < 1$; $k(u) = u^{\sigma+1/\ln \ln(\sigma+u)}$

П. а. р. задачи (1) — (3) в этом случае строятся на основе двух типов инвариантных решений уравнения со степенной нелинейностью

$$u_1 = (u^\sigma u_x)_x \quad (31)$$

(здесь постоянная $\sigma > 0$ та же, что и в условии (29)), которые имеют вид

$$A. \quad u_A(t, x) = (T-t)^n g_1(\xi), \quad \xi = x/(T-t)^{(1+n\sigma)/2}, \\ t \in (0, T); \quad n < 0; \quad (32)$$

$$B. \quad u_A(t, x) = e^t g_2(\xi), \quad \xi = x/\exp\{\sigma t/2\}, \quad t > 0. \quad (33)$$

Функции g_1 , g_2 , удовлетворяющие краевым условиям $g_i(0) = 1$, $g_i(\infty) = 0$, $i = 1, 2$, определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных после подстановки выражений u_A в (31) (см. § 3).

В каждом из рассматриваемых случаев п. а. р. будем искать в виде (9) и через $\theta(t, \xi)$ обозначим соответствующее автомодельное представление (10) решения $u(t, x)$ исходной задачи.

Сходимость $\theta(t, \cdot)$ к $\theta_a(\cdot)$ при $t \rightarrow T^-$ будет определяться в норме пространства $h^{-1}(\mathbf{R}_+)$. Все функции $u \in L^1(\mathbf{R}_+)$, удовлетворяющие условиям

$$\int_x^\infty u(y) dy \in L_2(\mathbf{R}_+), \quad \left| \int_0^\infty dx \int_x^\infty u(y) dy \right| < \infty,$$

принадлежат гильбертову пространству $h^{-1}(\mathbf{R}_+)$.

Скалярное произведение в $h^{-1}(\mathbf{R}_+)$ имеет вид

$$(u, v)_{h^{-1}(\mathbf{R}_+)} = \int_0^\infty u(x) \left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} v \right] (x) dx,$$

где через $V = (-\partial^2/\partial x^2)^{-1}v$ обозначено решение задачи

$$\partial^2 V / \partial x^2 = -v, \quad x > 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$V(0) = 0, \quad |V(\infty)| < \infty$$

(легко проверить, что в сделанных предположениях на функции из $h^{-1}(\mathbf{R}_+)$ решение этой задачи существует). Через $\|u\|_{-1}$ обозначим норму в $h^{-1}(\mathbf{R}_+)$:

$$\|u\|_{-1} = (u, u)_{h^{-1}(\mathbf{R}_+)}^{1/2}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\|u\|_{-1} = \left\| \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1} u \right\|_2 \equiv \left\| \int_x^\infty u(y) dy \right\|_2.$$

В дальнейшем будем считать, что $u_0 \in h^{-1}(\mathbf{R}_+)$, $u(t, \cdot) \in h^{-1}(\mathbf{R}_+)$ при всех $t \in (0, T)$. Отметим, что последнее имеет место для финитного обобщенного решения $u \in C_{ix}^{1,2}(P_T[u])$, $P_T[u] = \{t \in (0, T), x \in \mathbf{R}_+ | u(t, x) > 0\}$, обладающего непрерывной производной $k(u)u_x$.

Без труда проверяется справедливость следующего утверждения, которое понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 2. Пусть функция $k \in C^2((0, \infty))$ удовлетворяет условию (29) и $\alpha \in (0, \sigma]$ — произвольная постоянная. Тогда при всех достаточно больших $u > 0$ выполняются неравенства

$$u^{\sigma-\alpha} < k(u) < u^{\sigma+\alpha}, \quad u^{\sigma-1-\alpha} < k'(u) < u^{\sigma-1+\alpha}. \quad (34)$$

2.1. Приближенные автомодельные решения типа А.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (29), (30), (30') и при всех t , достаточно близких к T^- ,

$$u_1(t) = (T - \mu^{-1}(t))^n, \quad (35)$$

где $n < -3/(3\sigma + 4)$ — постоянная и $\mu^{-1}: [0, T] \rightarrow [0, T]$ — функция, обратная к

$$\mu(t) = T - \int_t^T \frac{(T-\tau)^{n\sigma} d\tau}{k[(T-\tau)^n]} \rightarrow T^-, \quad t \rightarrow T^-. \quad (35')$$

Тогда задача (1) — (3) имеет п. а. р. (9), где

$$\varphi(t) = (T - \mu^{-1}(t))^{(1+n\sigma)/2}, \quad t \rightarrow T^-, \quad (36)$$

функция $\theta_a(\xi)$ совпадает с $g_1(\xi)$ в (32) и

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|\theta(t, \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_{-1} = 0. \quad (37)$$

Монотонность и неограниченность функции $u_1(t)$ в (35) при $t \rightarrow T^-$ вытекают из леммы 2.

Ограничение $n < -3/(3\sigma + 4)$ в (35) связано с условием $\theta_a \equiv g_1 \in h^{-1}(\mathbf{R}_+)$. Поскольку (см. § 2 гл. III)

$$g_1(\xi) \simeq C\xi^{2n/(1+n\sigma)}, \quad \xi \rightarrow \infty; \quad C > 0,$$

при $n \in [-3/(3\sigma + 4), 0)$ это включение не имеет места.

Доказательство теоремы 3. Сделаем в (1) преобразование $t \rightarrow \mu(t)$, где монотонная гладкая функция μ определяется в (15). Функция $u(\mu(t), x)$ тогда удовлетворяет уравнению (1') и краевому условию (15'). При этом в силу (15), (35), (36)

$$\varphi(\mu(t)) = (T - t)^{(1+n\sigma)/2}, \quad t \rightarrow T^-,$$

и, как нетрудно убедиться, при всех t , достаточно близких к T^- ,

$$\begin{aligned} u_a(\mu(t), x) &= (T - t)^n \theta_a(\xi), \quad \xi = x / (T - t)^{(1+n\sigma)/2}, \\ \theta(\mu(t), \xi) &= (T - t)^{-n} u(\mu(t), \xi (T - t)^{(1+n\sigma)/2}). \end{aligned}$$

В силу равенства $\theta_a \equiv g_1$ п. а. р. $u_a(\mu(t), x)$ при $t \rightarrow T^-$ в точности совпадает с (32) — автомодельным решением уравнения (31).

Функция $w(t, x) = u(\mu(t), x) - u_a(\mu(t), x)$ удовлетворяет уравнению

$$w_t = [\mu'(t) k(u) u_x - u_a^\sigma(u)_{xx}]_x, \quad (38)$$

причем $w(t, 0) = 0$, $w(t, x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, $w(t, \cdot) \in h^{-1}(\mathbf{R}_+)$ при $t \rightarrow T^-$. Умножая скалярно (38) на $(-\partial^2/\partial x^2)^{-1} w$, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t, \cdot)\|_{-1}^2 = \left(\mu'(t) [F(u)]_{xx} - \frac{1}{\sigma+1} (u_a^{\sigma+1})_{xx} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} w \right), \quad (39)$$

где

$$F(u) = \int_0^u k(\eta) d\eta, \quad u \geq 0.$$

Правую часть (39) запишем в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \mu'(t) \left([F(u) - F(u_a)]_{xx}, \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} w \right) + \\ + \left(\mu'(t) [F(u_a)]_{xx} - \frac{1}{\sigma+1} (u_a^{\sigma+1})_{xx}, \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} w \right) = \\ = -\mu'(t) (F(u) - F(u_a), u - u_a) + \\ + (u_a)_x [\mu'(t) k(u_a) - u_a^\sigma], \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1} w. \quad (40) \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что $(F(u) - F(u_a), u - u_a) \geq 0$, и применяя для оценки последнего члена в (40) неравенство Коши — Буяковского, из (39) получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{-1}^2 \leq \|w\|_{-1} \|(u_a)_x [\mu'(t) k(u_a) - u_a^\sigma]\|_2.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \|w\|_{-1} \leq \|(u_a)_x [\mu'(t) k(u_a) - u_a^\sigma]\|_2. \quad (41)$$

Оценим правую часть этого неравенства:

$$\begin{aligned} \|(u_a)_x [\mu'(t) k(u_a) - u_a^\sigma]\|_2 = \\ = \left\{ \int_0^\infty (u_a)_x^2 [\mu'(t) k(u_a) - u_a^\sigma]^2 dx \right\}^{1/2} = \left\{ \int_0^\infty u_a^\sigma (u_a)_x [\Phi(u_a; t)]_x dx \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Здесь через $\Phi(s; t)$ обозначена функция

$$\Phi(s; t) = \int_0^s \left[\mu'(t) \frac{k(\eta)}{\eta^\sigma} - 1 \right]^2 \eta^\sigma d\eta, \quad s > 0, \quad t \in (0, T).$$

Учитывая монотонность по x функции u_a , окончательно имеем

$$\begin{aligned} \|(u_a)_x [\mu'(t) k(u_a) - u_a^\sigma]\|_2 \leq \\ \leq \left\{ -\sup_x |u_a^\sigma (u_a)_x| \int_0^\infty [\Phi(u_a; t)]_x dx \right\}^{1/2} \\ = q_a^{1/2} (T-t)^{[n(\sigma+2)-1]/4} \Phi^{1/2} [(T-t)^n; t], \quad t \rightarrow T^-, \end{aligned}$$

где $q_a = \max |\theta_a^\sigma d\theta_a/d\xi| < \infty$.

Из (41) получаем тогда следующую оценку, справедливую для всех $t \in (t_*, T)$, достаточно близких к T^- :

$$\begin{aligned} \|w(t, \cdot)\|_{-1} \leq \|w(t_*, \cdot)\|_{-1} + \\ + q_a^{1/2} \int_{t_*}^t (T-\tau)^{[n(\sigma+2)-1]/4} \Phi^{1/2} ((T-\tau)^n; \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\|w(t, \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_{-1} = (T-t)^{n+3(1+n\sigma)/4} \|\theta(\mu(t), \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_{-1},$$

из последнего неравенства выводим оценку

$$\|\theta(\mu(t), \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_{-1} \leq \|w(t_*, \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_{-1} (T-t)^{-\frac{3\sigma+4}{4} \left[n + \frac{3}{3\sigma+4} \right]} + \\ + q_a^{1/2} (T-t)^{-n-\frac{3}{4}(1+n\sigma)} \int_{t_*}^t (T-\tau)^{\frac{n(\sigma+2)-1}{4}} \Phi^{1/2}((T-\tau)^n; \tau) d\tau.$$

Отсюда, учитывая, что $n < -3/(3\sigma+4)$, и раскрывая неопределенность в правой части, получаем

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|\theta - \theta_a\|_{-1}^2 \leq \frac{q_a}{[n+3(1+n\sigma)/4]^2} \lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\Phi((T-t)^n; t)}{(T-t)^{n(\sigma+1)}}.$$

Из (35') следует, что

$$\mu'(t) = \frac{(T-t)^{n\sigma}}{k[(T-t)^n]}, \quad t \rightarrow T^-,$$

и поэтому

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|\theta - \theta_a\|_{-1}^2 \leq \frac{q_a}{[n+3(1+n\sigma)/4]^2} \lim_{t \rightarrow T^-} \int_0^1 \left\{ \frac{k(\xi(T-t)^n)}{\xi^{\sigma k}((T-t)^n)} - 1 \right\}^2 \xi^{\sigma} d\xi.$$

В силу (30) подынтегральное выражение ограничено равномерно по $\xi \in (0, 1)$ при $t \rightarrow T^-$. Тогда из (30') вытекает справедливость (37).

Замечание. При рассматриваемых в теореме 3 коэффициентах k и граничных режимах п. а. р. уравнения (1) построены в § 3 другим способом.

Нетрудно вывести из (35), (36) точные оценки пространственно-временной структуры п. а. р. Пусть $k(u) = u^{\sigma} \kappa(u)$, где функция $\kappa(u) > 0$ растет при $u \rightarrow \infty$ слабее любой степенной функции. Тогда при выполнении условия

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\kappa(s)}{\kappa(s/\kappa^n(s))} = 1$$

функции $u_1(t)$, $\varphi(t)$ в (35), (36) могут быть асимптотически точно оценены по формулам

$$u_1(t) \simeq \{(T-t)^{(1-n\sigma)} k[(T-t)^n]\}^n, \\ \varphi(t) \simeq \{(T-t)^{(1-n\sigma)} k[(T-t)^n]\}^{(1+n\sigma)/2}, \quad t \rightarrow T^-.$$

Воспользуемся доказанной теоремой для изучения эффекта локализации тепла. Пространственно-временная структура п. а. р. (9), определяемая равенствами (35), (36), указывает на то, что свойства решения рассматриваемой задачи зависят от соотношения между величинами σ и n .

Если $n < -1/\sigma$ в (35), то $\varphi(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow T^-$, и поэтому решение неограниченно возрастает при $t \rightarrow T^-$ во всем полупространстве $\{x > 0\}$ (HS-режим, локализация отсутствует).

Если $n > -1/\sigma$, то $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow T^-$ (LS-режим), что говорит о локализации режима.

Значению $n = -1/\sigma$ отвечает предельное локализованное п. а. р. (S-режим), причем в силу тождества $\varphi \equiv 1$ оно обладает постоянной при $t \rightarrow T^-$ полушириной, отличной от нуля. Подставляя $n = -1/\sigma$, получаем для граничного S-режима выражение

$$u_1(t) \simeq \{(T-t)^2 k[(T-t)^{-1/\sigma}]\}^{-1/\sigma}, \quad t \rightarrow T^-,$$

или, что то же самое,

$$u_1(t) \simeq k^{-1}[(T-t)^{-1}], \quad t \rightarrow T^-,$$

где через k^{-1} обозначена функция, обратная к k . Асимптотическая эквивалентность двух последних выражений вытекает из условия (29). П. а. р. в этом случае имеет весьма простой вид:

$$u_a(t, x) = u_1(t) \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)_+^{2/\sigma} \quad x_0 = \left[\frac{2(\sigma+2)}{\sigma}\right]^{1/2}$$

Пример 3. Пусть $k(u) = u^\sigma \ln(2+u)$. Тогда из (35) получаем, что предельным локализованным S-режимом здесь является

$$u_1(t) \simeq \{\sigma(T-t)^{-1} |\ln(T-t)|^{-1}\}^{1/\sigma}, \quad t \rightarrow T^-,$$

причем он порождает решение с постоянной при $t \rightarrow T^-$ полушириной.

2.2 Приближенные автомодельные решения типа Б.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (29), (30), (30') и, кроме того,

$$\int_0^\infty \frac{e^{\sigma\eta}}{k(e^\eta)} d\eta < \infty. \quad (42)$$

Пусть при всех t , достаточно близких к T^- ,

$$u_1(t) = \exp\{\mu^{-1}(t)\}, \quad (43)$$

где $\mu^{-1}: (0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$ — обратная к монотонно возрастающей функции $\mu(\tau): \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, T)$, определяемой при достаточно больших $\tau > 0$ по формуле

$$\mu(\tau) = T - \int_0^\infty \frac{e^{\sigma\eta}}{k(e^\eta)} d\eta. \quad (44)$$

Тогда

$$\varphi(t) = \exp\left\{\frac{\sigma}{2} \mu^{-1}(t)\right\}, \quad t \rightarrow T^-, \quad (45)$$

$\theta_s(\xi) \equiv g_2(\xi)$ и справедливо равенство (37).

В процессе доказательства теоремы, которое аналогично доказательству предыдущей, устанавливается справедливость

Следующей оценки

$$\begin{aligned} \theta(\mu(t), \cdot) - \theta_a(\cdot) \|_{-1} &\leq \|w(t_{**}, \cdot)\|_{-1} \exp\left\{-t\left(1 + \frac{3\sigma}{4}\right)\right\} + \\ &+ q_a^{1/2} \exp\left\{-t\left(1 + \frac{3\sigma}{4}\right)\right\} \int_{t_*}^t \exp\left\{\frac{\tau}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right)\right\} \times \\ &\times \left\{\int_0^{\tau} \left[\mu'(\tau) \frac{k(\eta)}{\eta^\sigma} - 1\right]^2 \eta^\sigma d\eta\right\}^{1/2} d\tau, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда в силу равенства

$$\mu'(t) = \frac{e^{\sigma t}}{k(e^t)}, \quad t \rightarrow \infty,$$

и предположений (30), (30') вытекает нужный результат:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T^-} \|\theta(t, \cdot) - \theta_a(\cdot)\|_{-1}^2 &\leq \\ &\leq \frac{q_a}{(1 + 3\sigma/4)^2} \lim_{t \rightarrow T^-} \int_0^1 \left[\frac{k(u_1(t)\xi)}{\xi^\sigma k(u_1(t))} - 1 \right]^2 \xi^\sigma d\xi = 0. \end{aligned}$$

Замечание. При выполнении условия, противоположного (42):

$$\int_0^\infty \frac{e^{\sigma\eta}}{k(e^\eta)} d\eta = \infty,$$

решение, полученное из автомодельного решения типа Б путем «трансформации» коэффициента $u^\sigma \rightarrow k(u)$, определено при всех $t > 0$, т. е. не является режимом с обострением [65].

Из теоремы 4 непосредственно следует, что в сделанных предположениях граничный закон (43) приводит к отсутствию локализации тепла, т. е. является HS-режимом.

Пример 4. Рассмотрим коэффициент $k(u) = u^\sigma \ln^2(1 + u)$. Условие (42) выполнено, и поэтому из (44) получаем

$$\mu^{-1}(t) \simeq (T - t)^{-1}, \quad t \rightarrow T^-.$$

Отсюда граничный режим

$$u_1(t) \simeq \exp\{(T - t)^{-1}\}, \quad t \rightarrow T^-,$$

порождает тепловую волну, движущуюся по закону

$$x_{эф}(t) \simeq \xi^* \Phi(t) = \xi^* \exp\left\{\frac{\sigma}{2}(T - t)^{-1}\right\}, \quad t \rightarrow T^-; \quad g_2(\xi^*) = \frac{1}{2}.$$

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ. ПРОБЛЕМЫ

При изложении результатов § 2 мы в основном следуем [24, 63]. Первые исследования с помощью вырожденных п. а. р. уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ проводились в [41, 153, 154] (см. § 4 гл. III). Приложения этой теории к исследованию эффекта локализации тепла (теорема 2, п. 4)

содержатся в [46]. Теоремы § 3 доказаны в [62], отдельные, менее общие результаты получены ранее в [24]. Результаты § 4 изложены в [65, 24].

Надо сказать, что в настоящее время существует мало примеров по-настоящему нетривиальных п. а. р. уравнений нелинейной теплопроводности. В этой связи отметим работу [227], в которой построены п. а. р. задачи Коши для $u_t = (k(u)u_x)_x$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}$, с нестепенным коэффициентом. Близкий результат установлен в [65] другим методом, где также выведена оценка скорости сходимости к п. а. р. (в рамках метода [227] она не может быть получена).

1. (§ 2) Доказать, что локализация вырожденных п. а. р. (10) при $n \geq -1$ влечет за собой локализацию решения исходной задачи (1)–(3') (для случая $k \equiv 1$ это доказано в [41, 153, 154]; см. § 4 гл. III).

2. (§ 2) Доказать утверждение о локализации произвольных граничных режимов с обострением при выполнении условия (38).

3. (§ 3) Доказать, что в условиях теоремы 1 при $n \geq -1/\sigma$ решения задачи (1)–(3') локализованы (при $n < -1/\sigma$ п. а. р. не локализованы, что влечет отсутствие локализации в исходной задаче).

**О НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ
НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ**

В этой главе проводится исследование неограниченных решений различных нелинейных параболических задач. В § 1 изучается характер асимптотики неограниченных решений квазилинейного параболического уравнения с источником вблизи момента обострения. Получено близкое к оптимальному условие отсутствия локализации.

В § 2 исследуется краевая задача в ограниченной области.

В § 3, 4 рассматриваются параболические системы квазилинейных уравнений, допускающие неограниченные решения.

Большинство результатов получено на основе единого подхода — *метода стационарных состояний*. Он основан на анализе специального семейства стационарных решений, удовлетворяющих рассматриваемому уравнению или системе уравнений почти всюду (поэтому их удобно называть состояниями, подчеркивая тем самым, что они не являются стационарными решениями в обычном смысле).

Установлено, что в семействе стационарных состояний содержатся в некоторой параметризованной форме многие важные эволюционные свойства решений нестационарной задачи. Подчеркнем, что метод применим к задачам с достаточно произвольными нелинейностями, когда никаких подходящих устойчивых автомодельных или инвариантных решений задача не допускает.

В § 5 в основном проводится исследование нелинейной (невязной) разностной схемы для уравнения $u_t = (u^{\sigma+1})_{xx} + u^{\beta}$. Самым интересным здесь является случай $\beta \geq \sigma + 1$, когда разностная задача допускает неограниченные решения.

**§ 1. Об одном подходе к проблеме локализации
неограниченных решений задачи Коши
для квазилинейных параболических уравнений**

Этот параграф целиком посвящен исследованию эффекта локализации неограниченных решений задачи Коши для параболического уравнения с источником общего вида:

$$u_t = \nabla \cdot (k(u) \nabla u) + Q(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2)$$

где, как обычно, $k \geq 0$, $Q \geq 0$ — известные, достаточно гладкие функции; $\nabla(\cdot) = \text{grad}_x(\cdot)$. Основной вопрос, который здесь рас-

смагивается, состоит в определении условий на коэффициенты k, Q , при которых неограниченные решения задачи не являются локализованными.

Неограниченное решение задачи (1), (2) называется *локализованным*, если оно возрастает до бесконечности при $t \rightarrow T_0^- < \infty$ на ограниченном множестве из \mathbf{R}^N , т. е. область локализации

$$\omega_L = \left\{ x \in \mathbf{R}^N \mid u(T_0^-, x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow T_0^-} u(t, x) = \infty \right\} \quad (3)$$

является ограниченной. Функция $u(T_0^-, x)$ называется *предельным распределением* (п.р.) решения. Если же ω_L неограничена (например, $\omega_L = \mathbf{R}^N$), то *локализация в задаче отсутствует*.

Ранее, в гл. IV, эффект локализации весьма подробно изучен на примере уравнения со степенными нелинейностями

$$u_t = \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u) + u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N; \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1, \quad (4)$$

на основе специального анализа его автомодельных решений. Показано, что при $\beta < \sigma + 1$ локализация отсутствует, а при $\beta \geq \sigma + 1$ все неограниченные решения локализованы. Уравнение (1) общего вида подобных автомодельных решений не имеет, и поэтому развитые в гл. IV методы сравнения здесь не применимы.

В данном параграфе предложен подход к определению достаточных условий отсутствия локализации в случае уравнения (1) с произвольными (нестепенными) коэффициентами k, Q и проводится исследование структуры п.р. неограниченных решений. Этот метод охватывает также случай $T_0 = \infty$, когда $\sup_x u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому мы не будем особо обращать внимание

на условие $\int_0^\infty \frac{d\eta}{Q(\eta)} < \infty$, которое, как известно, является необходимым условием существования неограниченных решений (см. § 2 гл. I).

Метод исследования основан на построении однопараметрического семейства $\{U\}$ стационарных решений уравнения (1):

$$\nabla \cdot (k(U) \nabla U) + Q(U) = 0. \quad (5)$$

Фактически будет показано, что семейство $\{U\}$ содержит в себе многие эволюционные свойства решений нестационарного уравнения (1), которые специальным образом параметризованы. В общем это утверждение довольно естественно, поскольку основной частью уравнения (1) является именно стационарный оператор, в котором содержатся все нелинейные члены, отвечающие за эволюцию решения.

В § 3 (и частично в § 4) этим методом анализируется параболическая система квазилинейных уравнений и одновременно с исследованием эффекта локализации неограниченных решений задачи Коши определяются условия глобальной разрешимости

Краевой задачи в ограниченной области. Развитые представления позволяют дать общую формулировку метода стационарных состояний исследования нелинейных параболических задач, подчиняющихся принципу максимума.

В дальнейшем мы будем считать функцию $Q(u)$ монотонно возрастающей, а также предполагать, что $\varphi(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$,

где $\varphi(u) \equiv \int_0^u k(\eta) d\eta$. Через φ^{-1} ниже обозначается обратная к φ

функция. Что касается решения задачи (1), (2), то мы будем предполагать, что оно существует, единственно и при всех $0 < t < T_0 = T_0(u_0) \leq \infty$ принадлежит $C_{tx}^{1,2}$ всюду, где $u > 0$, причем $k(u) \forall u$ непрерывна по x в R^N для всех $t \in (0, T_0)$.

1. Построение семейства стационарных решений. Нас будут интересовать свойства ограниченных неотрицательных симметричных решений U уравнения (5). Каждое из них всюду, где оно положительно, удовлетворяет задаче

$$\frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} (\varphi(U))')' + Q(U) = 0, \quad r = |x| > 0, \quad (6)$$

$$U(0; U_0) = U_0, \quad U_r'(0; U_0) = 0; \quad (7)$$

в остальных точках для удобства полагаем $U \equiv U(|x|; U_0) = 0$. Здесь $U_0 > 0$ — произвольная постоянная (параметр семейства $\{U(|x|; U_0)\}$).

Локальная разрешимость задачи (6), (7) при малых $r > 0$ вытекает из анализа эквивалентного интегрального уравнения

$$\varphi(U(r; U_0)) = \varphi(U_0) - \int_0^r \xi^{1-N} d\xi \int_0^\xi \eta^{N-1} Q(U(\eta; U_0)) d\eta, \quad r > 0. \quad (8)$$

Отсюда следуют продолжимость решения и его строгая монотонность по r в области $\{r > 0 | U > 0\}$.

Получим сначала оценку U снизу. Очевидно, что $(r^{N-1} \times (\varphi(U))')' \geq -Q(U_0) r^{N-1}$ при $r > 0$. Интегрируя дважды это неравенство по $(0, r)$, получаем следующую оценку:

$$U(r; U_0) \geq U_-(r; U_0) = \varphi^{-1} \left[\varphi(U_0) \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)_+ \right], \quad (9)$$

$$r_0 = \left[2N \frac{\varphi(U_0)}{Q(U_0)} \right]^{1/2}, \quad r \geq 0.$$

Для вывода оценки U сверху воспользуемся соотношением

$$r^{N-1} (\varphi(U))' = - \int_0^r \eta^{N-1} Q(U) d\eta \leq - \frac{r^N}{N} Q(U), \quad r > 0.$$

Интегрируя его от 0 до r , получаем такую оценку:

$$U(r; U_0) \leq G^{-1} \left(\frac{r^2}{2N} + G(U_0) \right) < G^{-1} \left(\frac{r^2}{2N} \right), \quad r > 0, \quad (10)$$

где G^{-1} — функция, обратная к

$$G(u) = \int_u^{\infty} \frac{k(\eta) d\eta}{Q(\eta)} < \infty, \quad u > 0.$$

В частном случае при $Q(u) = \mu\varphi(u)$, $\mu = \text{const} > 0$, решение U представимо в явном виде:

$$U(r; U_0) = \varphi^{-1}[c_N(U_0)r^{(2-N)/2}J_{(N-2)/2}(\mu^{1/2}r)] \quad (11)$$

при $0 < r < z_N^{(1)}\mu^{-1}$ где $z_N^{(1)} > 0$ — первый корень функции Бесселя $J_{(N-2)/2}$, $c_N(U_0) = \varphi(U_0)\Gamma(N/2)(2\mu^{-1/2})^{(N-2)/2}$.

Основные свойства стационарных решений уравнения (4) со степенными нелинейностями

$$\frac{1}{r^{N-1}}(r^{N-1}U^\sigma U')' + U^\beta = 0, \quad r > 0, \quad (12)$$

указаны в § 3 гл. IV. Отметим, что они существенно зависят от соотношения между параметрами σ , β , N . В частности, при $N \geq 3$, $\beta \geq (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)$ задача (12), (7) имеет в \mathbf{R}^N строго положительные решения (в остальных случаях они финитны). При нестепенных k , Q также возможны ограниченные решения задачи (6), (7), определенные и строго положительные в \mathbf{R}^N . Последнее, например, имеет место, если (см. [144])

$$\frac{N-2}{2N}uQ(\varphi^{-1}(u)) > \int_0^u Q(\varphi^{-1}(\eta)) d\eta, \quad u > 0; \quad N > 2 \quad (12')$$

(доказательство этого факта такое же, как в случае степенных коэффициентов; см. § 3 гл. IV).

Нам также понадобятся условия на k , Q , при которых функции $U(|x|; U_0)$ финитны в \mathbf{R}^N (т. е. не являются стационарными решениями в \mathbf{R}^N). Так же как в § 3 гл. IV, устанавливается, что при $N = 1$ или $N = 2$ функции $U(|x|; U_0)$ финитны, а в случае $N \geq 3$ в предположении неотрицательности U выводится оценка снизу

$$U(r; U_0) \geq \varphi^{-1}(c/r^{N-2}), \quad r > 1, \quad c = \text{const} > 0. \quad (9')$$

Сопоставление (9') с (10) при больших $r > 0$ дает следующее достаточное условие финитности произвольной функции $U(|x|; U_0)$:

$$N = 1, 2 \quad \text{или} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi^{N/(N-2)}(s)}{Q(s)} = 0 \quad \text{при} \quad N \geq 3. \quad (12'')$$

Для уравнения (12) этот критерий дает ограничение $\beta < (\sigma + 1)N/(N - 2)_+$ и фактически является условием отсутствия решений $U > 0$ в окрестности $r = \infty$.

В одномерном случае уравнение (6) интегрируется в квадратах, и решение задачи определяется из соотношения

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{U(r; U_0)}^{U_0} \frac{k(\eta) d\eta}{\left\{ \int_{\eta}^{U_0} k(\xi) Q(\xi) d\xi \right\}^{1/2}}. \quad (13)$$

Оно строго положительно при $0 \leq r < x_0(U_0)$, где

$$x_0(U_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{U_0} \frac{k(\eta) d\eta}{\left\{ \int_{\eta}^{U_0} k(\xi) Q(\xi) d\xi \right\}^{1/2}}.$$

В дальнейшем мы будем считать выполненными следующие условия на начальную функцию: $u_0 = u_0(|x|)$ — финитная функция, $\varphi(u_0)$ равномерно Липшиц непрерывна в \mathbf{R}^N , $u_0(r_1) \leq u_0(r_2)$ при всех $0 \leq r_2 \leq r_1 < \infty$. Тогда решение $u(t, x)$ является радиально симметричным и в силу принципа максимума не возрастающим по $|x|$ при всех $t \in (0, T_0)$. Тем самым $\sup_x u(t, x) \equiv u(t, 0)$.

2. Достаточные условия отсутствия локализации.

Теорема 1. Пусть решение задачи (1), (2) является неограниченным и

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} [\varphi(s)/Q(s)] = \infty. \quad (14)$$

Тогда $u(t, x)$ не локализовано и $u(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$ всюду в \mathbf{R}^N .

Таким образом, при выполнении (14) в задаче Коши реализуется NS-режим горения с обострением.

Замечание 1. Условие (14) будет заведомо выполнено, если

$$k(s)/Q'(s) \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Замечание 2. Для одномерного ($N = 1$) случая достаточное условие отсутствия локализации можно сформулировать следующим образом:

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \int_0^s \frac{k(\eta) d\eta}{\left\{ \int_{\eta}^s k(\xi) Q(\xi) d\xi \right\}^{1/2}} = \infty, \quad s \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Замечание 3. Применительно к уравнению (4) условие (14) (или (16)) принимает вид $s^{\sigma+1-\beta} \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Поэтому в случае $\beta < \sigma + 1$ неограниченные решения задачи Коши (4), (2) не являются локализованными (при $N = 1$ этот результат был получен в § 4 гл. IV).

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма 1. Пусть существует такое $U_0^* > 0$, что в условиях теоремы 1 справедливо неравенство

$$u_0(x) \leq U(|x|; U_0^*), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (17)$$

Тогда найдется такое $t_0 = t_0(U_0^*) \in [0, T_0)$, что при всех $t \in (t_0, T_0)$

$$u(t, x) \geq U(|x|; U_0^*) \text{ в } \mathbb{R}^N. \quad (18)$$

Доказательство. Мы воспользуемся теоремой сравнения из § 5 гл. IV (о «невозрастании» числа пространственных пересечений различных решений параболического уравнения). Прежде всего отметим, что из (17), в частности, следует, что U — финитная функция. В противном случае, если U — стационарное решение в \mathbb{R}^N , то в силу принципа максимума $u \leq U$ в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, т. е. $u(t, x)$ заведомо не является неограниченным.

Итак, $\text{supp } U \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область. В силу (17) число пространственных пересечений (по r) $u_0(r)$ и $U(r; U_0^*)$ в $\omega(U_0^*) = \text{supp } U(r; U_0^*)$ равно нулю. Пусть $N(t)$ — число пересечений по $r = |x|$ в $\omega(U_0^*)$ различных решений $u(t, r)$ и $U(r; U_0^*)$ уравнения (1). По теореме сравнения (см. § 5 гл. IV) $N(t)$ не превосходит числа изменений знака разности $w = u - U$ на параболической границе области $(0, t) \times \omega(U_0^*)$. По условию $N(0) = 0$ ($w \leq 0$ при $t = 0$ в $\bar{\omega}(U_0^*)$). Если $u > 0$ в $(0, T_0) \times \mathbb{R}^N$, то $w > 0$ на $(0, t) \times \partial\omega(U_0^*)$, и, следовательно, $N(t) \leq 1$. Если же (1) допускает конечную скорость распространения возмущений, то в силу известного свойства параболического уравнения с источником $\text{supp } u(t_1, r) \subset \text{supp } u(t_2, r)$ при $t_1 \leq t_2$, т. е. $N(t) \leq 1$ при всех $t \in [0, T_0)$.

Очевидно, что найдется такое $t_* \in (0, T_0)$, что $u(t_*, x) > 0$ на $\partial\omega(U_0^*)$. В противном случае, если $u \equiv 0$ на $(0, T_0) \times \partial\omega(U_0^*)$, (17) будет означать равномерную ограниченность u в $(0, T_0) \times \omega(U_0^*)$: $u \leq U$

Тогда $u(t, x) > 0$ на $\partial\omega(U_0^*)$ при всех $t \in (t_*, T_0)$. Выберем теперь такое $t_0 \in [t_*, T_0)$, что $u(t_0, 0) > U_0^*$ (это всегда возможно, так как по предположению $\lim_{t \rightarrow T_0^-} u(t, 0) = \infty$, $t \rightarrow T_0^-$).

Покажем, что $N(t_0) = 0$. Действительно, $u(t_0, r) - U(r; U_0^*) \geq > 0$ при $x = 0$ и $x \in \partial\omega(U_0^*)$. Поэтому в интервале $\omega(U_0^*)$ может быть только четное число пересечений $u(t_0, r)$ и $U(r; U_0^*)$. Однако, как было установлено ранее, $N(t_0) \leq 1$. Следовательно, $N(t_0) = 0$, т. е. $u(t_0, r) \geq U(r; U_0^*)$ в \mathbb{R}^N . В силу принципа максимума это неравенство будет выполнено при всех $t \in (t_0, T_0)$.

Доказательство теоремы 1. Из (9) следует, что при выполнении (14) $U(|x|; U_0) \rightarrow \infty$ в \mathbb{R}^N по некоторой последовательности $U_0^k \rightarrow \infty$. Поэтому добиться выполнения (17) можно

при любой финитной функции $u_0(|x|)$. Тогда, производя в (18) предельный переход $U_0^* = U_0^k \rightarrow \infty$, заключаем, что при любых $x \in \mathbb{R}^N$

$$\lim_{t \rightarrow T_0^-} u(t, x) \geq \lim_{U_0^k \rightarrow \infty} U(|x|; U_0^k) = \infty,$$

т. е. решение неограниченно возрастает при $t \rightarrow T_0^-$ сразу во всем пространстве.

Из способа доказательства теоремы 1 непосредственно вытекает справедливость следующих следствий (они показывают, каким образом пространственная структура семейства стационарных состояний $\{U\}$ описывает эволюционные свойства решений нестационарной задачи).

Следствие 1. Пусть (1) описывает процессы с конечной скоростью распространения возмущений. Тогда в условиях теоремы 1 для диаметра $D(t)$ носителя $\text{supp}_x u(t, x)$ решения справедлива оценка

$$D(t) \geq 2 \sqrt{2N} \left[\frac{\varphi(u(t, 0))}{Q(u(t, 0))} \right]^{1/2} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T_0^-$$

Полуширина $r_{\text{эф}}(t)$ структуры может быть оценена снизу по формуле

$$r_{\text{эф}}(t) \geq \sqrt{2N} \left\{ \frac{\varphi(u(t, 0))}{Q(u(t, 0))} \left[1 - \frac{\varphi(u(t, 0)/2)}{\varphi(u(t, 0))} \right] \right\}^{1/2}$$

В случае уравнения (4), $\beta < \sigma + 1$ эти оценки имеют вид

$$D(t) \geq \frac{2 \sqrt{2N}}{\sqrt{\sigma+1}} [u(t, 0)]^{(\sigma+1-\beta)/2} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T_0^-;$$

$$r_{\text{эф}}(t) \geq \frac{\sqrt{2N}}{\sqrt{\sigma+1}} [u(t, 0)]^{(\sigma+1-\beta)/2} (1 - 2^{-(\sigma+1)})^{1/2}$$

и хорошо согласуются с автомодельными закономерностями (см. § 1 гл. IV).

Следствие 2. Пусть в условиях теоремы 1 существует такое $U_0^* > 0$, что $u_0(|x|) \leq U(|x|; U_0)$ в \mathbb{R}^N при всех $U_0 \geq U_0^*$. Пусть $u(t_*, 0) = U_0^*$. Тогда $u(t, 0) \geq 0$ на (t_*, T_0) .

Доказательство. Фиксируем произвольное $U_0 \geq U_0^*$ и положим $t_1 = \inf \{t \in (0, T_0) \mid u(t, x) > 0 \text{ на } \partial\omega(U_0)\}$ и $t_0 = \inf \{t \in (0, T_0) \mid u(t, 0) > U_0\}$. В силу принципа максимума $t_1 \leq t_0$. Покажем, что $u(t_0, x) \geq U(|x|; U_0)$ в \mathbb{R}^N . Действительно, если это не так, то найдется такое $t' > t_0$, что $u(t', 0) > U_0$, $u(t', x) > 0$ на $\partial\omega(U_0)$, $u(t', x)$ и $U(|x|; U_0)$ имеют в интервале $\omega(U_0)$ по крайней мере два пересечения. Это противоречит условию $N(t') \leq 1$ (см. доказательство леммы 1).

Итак, $u(t_0, x) \geq U(|x|; U_0)$ в \mathbb{R}^N . Но тогда $u(t, x) \geq U(|x|; U_0)$ в $(t_0, T_0) \times \mathbb{R}^N$, и поэтому $u(t_0, 0) \geq 0$. В силу произвольности выбора $U_0 \geq U_0^*$ это доказывает сформулированное утверждение.

3. О некоторых свойствах локализованных решений. Итак, необходимым условием локализации неограниченных решений задачи (1), (2) является следующее:

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \varphi(s)/Q(s) < \infty. \quad (19)$$

В этом случае семейство $\{U\}$ стационарных состояний позволяет определить некоторые особенности поведения предельного распределения $u(T_0^-, x)$.

Все последующие результаты опираются на лемму, которая доказывается тем же методом, что и предыдущая.

Лемма 2. Пусть $u(t, x)$ — неограниченное решение задачи (1), (2), причем начальная функция u_0 такова, что при всех достаточно больших $U_0 > U_0^*$ функции $u_0(|x|)$ и $U(|x|; U_0)$ пересекаются (по $|x|$) не более чем в одной точке. Тогда при всех достаточно малых $r = |x| > 0$ справедлива оценка

$$u(T_0^-, x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow T_0^-} u(t, x) \geq \sup_{U_0 > U_0^*} U(|x|; U_0). \quad (20)$$

Неравенство (20) позволяет оценить снизу размеры (диаметр ω_L) области локализации (3) и особенности поведения $u(T_0^-, x)$ вблизи сингулярной точки. В частности, из леммы 2 и (11) вытекает

Теорема 2. Пусть $Q(u) \equiv \mu \varphi(u)$, где $\mu = \text{const} > 0$. Тогда неограниченное решение задачи (1), (2) не может быть локализовано в шаре с диаметром, меньшим

$$D_* = 2z_N^{(1)} \mu^{-1/2}. \quad (21)$$

Для доказательства достаточно проверить, что функции (11) удовлетворяют условиям леммы 2. Поэтому из (20) для функций из (11) получаем

$$u(T_0^-, x) \geq \sup_{U_0 > U_0^*} U(|x|; U_0) = \infty, \quad 0 \leq |x| < z_N^{(1)} \mu^{-1/2}.$$

Приведем для примера более сильный результат, который справедлив в одномерном случае.

Теорема 2' Пусть $N = 1$ и выполнены условия

$$\int_1^{\infty} Q(\eta) k(\eta) d\eta = \infty, \quad (21')$$

$$l_* = 2x_0(\infty) \equiv 2 \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} x_0(s) < \infty.$$

Тогда, если $u(t, x)$ является неограниченным, то $\text{mes } \omega_L \equiv \text{mes } \{x \in \mathbf{R} \mid u(T_0^-, x) = \infty\} \geq l_*$.

Доказательство. Из (6), (7) при $N = 1$ получаем, что для любого фиксированного $U_* \in (0, U_0)$ в тех точках $x = x_*$,

где $U(|x|; U_0) = U_*$, справедливо равенство

$$\left[\frac{d}{dx} \varphi(U(|x_*|; U_0)) \right]^2 = 2 \int_{U_*}^{U_0} Q(\eta) k(\eta) d\eta \rightarrow \infty, \quad U_0 \rightarrow \infty.$$

Поэтому в силу равномерной Липшиц непрерывности $\varphi(u_0)$ при всех достаточно больших U_0 функции $u_0(|x|)$ и $U(|x|; U_0)$ пересекаются по $r = |x|$ в $\omega(U_0) = \text{supp } U(|x|; U_0)$ не более чем в одной точке. Тогда так же, как при доказательстве леммы 1, получаем, что $u(T_0^-, |x|) \geq U(|x|; U_0)$ в $\omega(U_0)$ при всех достаточно больших $U_0 > 0$ и, в частности, $\text{mes } \omega_L \geq 2x_0(U_0)$.

Разумеется, эта теорема справедлива и в том случае, когда $l_* = \infty$ в (21').

Теперь рассмотрим случай, когда

$$\sup_{U_0 > 0} U(|x|; U_0) < \infty, \quad |x| > 0. \quad (22)$$

Это условие свидетельствует о том, что локализованное решение обращается в бесконечность при $t \rightarrow T_0^-$ лишь в одной точке, т. е. представляет собой LS-режим с обострением. Тогда лемма 2 позволяет оценить снизу асимптотику поведения $u(T_0^-, x)$ при $|x| \rightarrow 0^+$ и определить характер изменения при $t \rightarrow T_0^-$ полуширины локализованной структуры.

Отметим, что в силу (9) локализация решения в LS-режиме возможна в том случае, когда

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{Q(s)} \int_0^s k(\eta) d\eta = 0. \quad (23)$$

В одномерном случае ($N = 1$) необходимое условие возникновения LS-режима выглядит следующим образом:

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} x_0(s) = 0. \quad (23')$$

При выполнении условия (23) (или (23')) семейство кривых $\{U = U(r; U_0)\}$ при всех или достаточно больших U_0 допускает на плоскости $\{r, U\}$ построение монотонных огибающих, которые касаются кривых $U = U(r; U_0)$.

Выберем максимальную непрерывную ветвь $r = F_0(U)$ (рис. 78). Необходимо рассмотреть два случая.

1) Огибающая $r = F_0(U) \geq 0$ касается кривой $U(r; u_0(0))$ в некоторой точке $r^0 > 0$ (см. рис. 78). В этом случае положим

$$G(x) = \begin{cases} F_0^{-1}(|x|), & |x| < r^0, \\ U(|x|; u_0(0)), & |x| \geq r^0, \end{cases}$$

где F_0^{-1} — функция, обратная к F_0 (в точках, где F_0^{-1} не определена, полагаем $F_0^{-1} = \infty$).

2) Огибающая $r = F_0(U) \geq 0$ не имеет общих точек с кривой $U = U(r; u_0(0))$, кривая $U = F_0^{-1}(r)$ определена для всех $0 < r < r^*$ и касается в точке $r = r^*$ некоторой кривой $U = U(r; U_0^*)$. Тогда полагаем

$$G(x) = \begin{cases} F_0^{-1}(|x|), & |x| < r^*, \\ U(|x|; U_0^*), & |x| \geq r^*. \end{cases}$$

Из леммы 2 непосредственно следует

Теорема 3. Пусть выполняется условие (23) (или (23')), и решение $u(t, x)$ является неограниченным. Пусть при всех

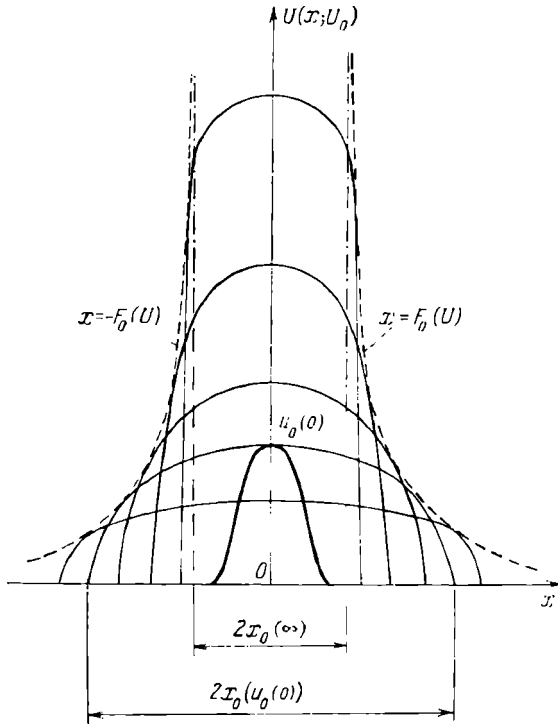


Рис. 78. Пример построения семейства функций $\{U\}$ и огибающих в S-режиме ($0 < x_0(\infty) < \infty$). Жирной линией выделена начальная функция $u_0(x)$; $N = 1$

$U_0 \geq U_0^* = u_0(0)$ функции $u_0(|x|)$ и $U(|x|; U_0)$ пересекаются (по $r = |x|$) не более чем в одной точке. Тогда

$$u(T_0^-, x) \geq G(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (24)$$

Оценка (24) дает возможность определить степень сингулярности предельного распределения $u(T_0^-, x)$ в окрестности точки

$r = 0$, в которой решение $u(t, x)$ неограниченно возрастает при $t \rightarrow T_0^-$. Для этого удобно воспользоваться оценкой (9) стационарных состояний $U(r; U_0)$, которую перепишем в виде

$$\varphi(U(r; U_0)) \geq \varphi(U_-(r; U_0)) \equiv \varphi(U_0)(1 - r^2/r_0^2)_+, \quad (25)$$

$$r \geq 0; r_0 = \left[2N \frac{\varphi(U_0)}{Q(U_0)} \right]^{1/2}$$

Предварительно приведем более простое утверждение, непосредственно вытекающее из оценки (25) и леммы 2. Оно имеет такой вид: *в условиях леммы 2 для всех $t < T_0$, достаточно близких к моменту обострения $t = T_0$, справедлива оценка*

$$u(t, x) \geq U_-(|x|; u(t, 0)), \quad |x| \geq 0. \quad (26)$$

Доказательство (26) проводится также, как в леммах 1, 2; отметим, что подобные утверждения неоднократно использовались в § 4–6 гл. IV. Из последнего неравенства непосредственно следует

Теорема 4. *В условиях теоремы 3 справедлива оценка*
 $\|\varphi(u(t, \cdot))\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \geq$

$$\geq \frac{4(2\pi N)^{N/2}}{N(N+2)\Gamma(N/2)} \frac{[\varphi(u(t, 0))]^{1+N/2}}{[Q(u(t, 0))]^{N/2}}, \quad t \rightarrow T_0^- \quad (27)$$

Из этой оценки, например, вытекает условие, при котором $\|\varphi(u(t, \cdot))\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ неограниченно возрастает при $t \rightarrow T_0^-$:

$$\varphi^{1+2/N}(s)/Q(s) \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty.$$

Разумеется, с помощью (26) можно получать другие интегральные оценки неограниченных решений. Однако в случае произвольных φ, Q они выглядят слишком громоздко. Для некоторых частных случаев такие оценки получены ниже.

Покажем, как из (26) выводятся поточечные оценки $u(T_0^-, x)$. Положим $L(r) = \varphi(G(r))$, где $G = G(r)$ — огибающая семейства стационарных решений $\{U(r; U_0)\}$ (см. теорему 3):

$$G(|x|) = \sup_{U_0 > 0} U(|x|; U_0), \quad |x| > 0.$$

Тогда, если $G_* = G_*(r)$ — огибающая семейства кривых $\{U_-(r; U_0)\}$ в (25), то очевидно, что $L_*(r) \equiv \varphi(G_*(r)) < L(r)$ при $r > 0$.

Функция $L_*(r)$ определяется из системы равенств

$$L_*(r) = \varphi(U_-(r; U_0)), \quad L'_*(r) = [\varphi(U_-(r; U_0))]'_r, \quad (28)$$

где $U_0 > 0$ — параметр. Эта система эквивалентна такой системе:

$$L_*(r) = \varphi(U_0) - Q(U_0) \frac{r^2}{2N}, \quad L'_*(r) = -Q(U_0) \frac{r}{N}, \quad r < r_0.$$

Отсюда после исключения параметра U_0 получаем дифференциальное уравнение для огибающей $L_* = L_*(r)$:

$$L_*(r) = \varphi \left[Q^{-1} \left(-\frac{NL'_*(r)}{r} \right) \right] + \frac{r}{2} L'_*(r). \quad (28')$$

Оно имеет смысл при всех достаточно малых $r > 0$ (здесь Q^{-1} — функция, обратная к Q).

Нас интересует монотонно убывающее решение уравнения (28'), удовлетворяющее условию $L_*(0^+) = \infty$. Особенно просто такое решение вычисляется в случае степенных коэффициентов φ , Q уравнения (4), когда (28') принимает вид

$$L_*(r) = (\sigma + 1)^{-1} \left(-\frac{NL'_*(r)}{r} \right)^{(\sigma+1)/\beta} + \frac{r}{2} L'_*(r), \quad r > 0. \quad (29)$$

Теорема 5. Пусть $\sigma + 1 < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$, и $T_0 < \infty$ — время обострения решения задачи Коши (4), (2). Тогда при всех достаточно малых $|x| > 0$ справедлива оценка

$$u(T_0^-, x) > G_*(r) \equiv [(\sigma + 1)L_*(r)]^{1/(\sigma+1)} = C_* |x|^{-2/[\beta - (\sigma+1)]}, \quad (29')$$

где

$$C_* = \left\{ \frac{2N}{\beta - (\sigma + 1)} \left[\frac{\beta - (\sigma + 1)}{\beta} \right]^{\beta/(\sigma+1)} \right\}^{1/[\beta - (\sigma+1)]}$$

Если $\beta \geq (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$, то эта оценка справедлива для всех критических начальных функций u_0 (т. е. таких, что $u(t, x)$ не убывает по t в $(0, T_0) \times \mathbb{R}^N$).

Доказательство. Легко проверить, что в случае уравнения (4) справедливо равенство

$$U(|x|; U_0) = U_0 U(U_0^{1/(\beta - (\sigma+1)/2} |x|; 1), \quad U_0 > 0.$$

При $\beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$ функция $U(|x|; 1)$ финитна; поэтому $\sup U(|x|; U_0) \rightarrow \{0\}$ при $U_0 \rightarrow \infty$. Следовательно, в этом случае выполнены условия леммы 2. Тогда из (20), учитывая, что $\sup U(|x|; U_0) > G_*(|x|)$ в $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, и вычисляя конкретный вид функции $L_*(|x|)$ из (29), получаем (29').

Пусть теперь $\beta \geq (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$. Тогда $U > 0$ в \mathbb{R}^N . Фиксируем произвольное $U_0 > U_0^* = 2u_0(0)$ и рассмотрим шар $B = \{|x| < r_0\}$, где $r_0 > 0$ таково, что $U(r_0; U_0) = U_0/2$. Тогда, если $N(t)$ — число пересечений по $r = |x|$ в B функций $u(t, |x|)$ и $U(|x|; U_0)$, то $N(0) = 0$, и в силу монотонности $u(t, r_0)$ по t на ∂B получаем, что $N(t) \leq 1$ при всех $t \in (0, T_0)$. Следовательно, имеет место (20) (см. доказательство леммы 1), и, определяя L_* из (29), приходим к (29').

Замечание 1. При $\beta \geq (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$ условие критичности u_0 можно заменить требованием на u_0 , указанным в лемме 2.

Замечание 2. Для уравнения (4) можно выписать точное выражение огибающей $G = G(|x|)$ семейства функций $\{U\}$, которое по характеру зависимости от $|x|$ совпадает с (29'): $G(|x|) = C|x|^{-2/(\beta - (\sigma + 1))}$, где $C = C(\sigma, \beta, N)$ — постоянная, причем $C > C_*$.

Об оптимальности оценки (29') говорит сопоставление характера сингулярности $u(T_0^-, x)$ с оценкой сверху, выведенной в § 6 гл. IV путем сравнения с автомоделным решением.

Неравенство (29') позволяет вывести ряд других оценок неограниченных решений уравнения (4).

Теорема 6. Пусть выполняются условия теоремы 5. Тогда при всех $p \geq [\beta - (\sigma + 1)]N/2$

$$\int_{B_\epsilon} u^p(t, x) dx \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T_0^-, \quad (29'')$$

где $B_\epsilon = \{|x| < \epsilon\}$ — шар произвольного радиуса $\epsilon > 0$.

Как следует из результатов § 6 гл. IV, ограничение $p \geq [\beta - (\sigma + 1)]N/2$ является необходимым и достаточным условием выполнения (29'') при достаточно произвольных $u_0 = u_0(|x|)$, если дополнительно потребовать, чтобы $\beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$.

Рассмотрим еще один простой пример. Пусть

$$\varphi(u) = e^{\sigma u}, \quad Q(u) = e^{\beta u},$$

где $\sigma \geq 0$, $\beta > \sigma$ — постоянные (при $\beta < \sigma$ решение не может быть локализовано, что следует из теоремы 1). Здесь уравнение для огибающей $L_*(r)$ имеет следующий вид:

$$L_*(r) = \left(-\frac{NL'_*(r)}{r} \right)^{\sigma/\beta} + \frac{r}{2} L'_*(r), \quad r \rightarrow 0^+$$

Отсюда получаем

$$L_*(r) = \left[\frac{\beta - \sigma}{\beta} \left(\frac{2\sigma N}{\beta - \sigma} \right)^{\sigma/\beta} \right]^{\beta/(\beta - \sigma)} r^{-2\sigma/(\beta - \sigma)}, \quad r \rightarrow 0^+$$

Легко проверить, что в этом случае $\sup U(|x|; U_0) \rightarrow \{0\}$ при $U_0 \rightarrow \infty$; поэтому в силу теоремы 3 имеем

$$u(T_0^-, x) > G_*(r) \equiv \frac{1}{\sigma} \ln [L_*(r)] = \\ = -\frac{2}{\beta - \sigma} \ln |x| + \frac{\beta}{\sigma(\beta - \sigma)} \ln \left[\frac{\beta - \sigma}{\beta} \left(\frac{2\sigma N}{\beta - \sigma} \right)^{\sigma/\beta} \right]$$

при всех достаточно малых $|x| > 0$. Соответствующая интегральная характеристика неограниченных решений имеет такой вид:

$$\int_{B_\epsilon} \exp \{ \gamma u(t, x) \} dx \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T_0^-,$$

при любых $\gamma \geq (\beta - \sigma)N/2$.

Используя изложенную выше схему, основанную на анализе сингулярных решений обыкновенного дифференциального уравнения (28'), нетрудно получить оценки снизу предельного распределения $u(T_0^-, x)$ в случае достаточно произвольных $\varphi(u)$, $Q(u)$.

4. О необходимых и достаточных условиях локализации. В предыдущих пунктах сформулирован критерий локализации неограниченных решений задачи Коши, определяющий условия возникновения HS-, S- и LS-режимов с обострением в произвольных полинейных средах.

Для удобства мы сформулируем этот критерий еще раз. Итак, все зависит от величины

$$D_* = \sup \left\{ r \mid \sup_{U_0 > 0} U(r; U_0) = \infty \right\}.$$

Если $D_* = \infty$, то локализации нет (теорема 1, HS-режим). Если $D_* \in \mathbf{R}_+$, то возможна локализация только в S-режиме (в области ненулевого диаметра).

Наконец, если $D_* = 0$, то, по-видимому, следует ожидать появления LS-режима.

Особенно просто критерий локализации выглядит в случае $N=1$: $x_0(\infty) = \infty$ — HS-режим, $x_0(\infty) \in \mathbf{R}_+$ — S-режим и $x_0(\infty) = 0$ — LS-режим (рис. 79; $x_0(\infty)$ вычисляется из (21')). При этом зависимость $x_0(U_0)$ определяет и некоторые эволюционные свойства неограниченных решений (см. следствие 1 теоремы 1).

Как показывают многочисленные оценки, полученные с помощью построения приближенных автомодельных решений, а также результаты численных расчетов, условие $D_* < \infty$ действительно влечет за собой локализацию неограниченных решений при произвольных коэффициентах k , Q , не принадлежащих некоторому классу слаболинейных функций (речь о нем пойдет ниже).

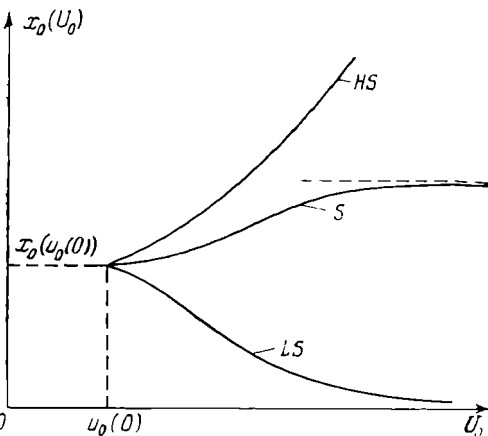


Рис. 79. Классификация неограниченных решений на основе критерия $0 \leq x_0(\infty) \leq \infty$ ($N=1$)

В случае уравнения (4) критерий приводит к верному результату: при $\beta \geq \sigma + 1$ существует локализация (при $\beta = \sigma + 1$, $D_* \in \mathbf{R}_+$ — S-режим, при $\beta > \sigma + 1$ — LS-режим), а при $\beta < \sigma + 1$ решения не локализованы (см. § 4 гл. IV). Рассмотрим более сложные примеры. Мы ограничимся анализом случая $N=1$.

Пример 1. Пусть $k(u) = u^\sigma \ln^\mu(2+u)$, $Q(u) = u^{\sigma+1} \ln^\nu(2+u)$, где $\sigma > 0$, μ, ν — постоянные. Тогда, как нетрудно убедиться, при больших U_0

$$x_0(U_0) \simeq (\ln^{(\mu-\nu)/2} U_0) \frac{\pi}{2\sqrt{\sigma+1}}.$$

Отсюда видно, что при $\mu > \nu$ в задаче отсутствует локализация (HS-режим), при $\mu \leq \nu$ она существует, причем $\text{mes } \omega_L \geq \pi/\sqrt{\sigma+1}$, если $\mu = \nu$ (S-режим), и $\text{mes } \omega_L = 0$, если $\mu < \nu$ (LS-режим).

Пример 2. Пусть $k(u) = (1+u)^\alpha e^{\sigma u}$, $Q(u) = (1+u)^\beta e^{\beta u}$, $\sigma \geq 0$, $\beta > 0$, μ, ν — постоянные. В этом случае при $U_0 \rightarrow \infty$

$$x_0(U_0) \simeq U_0^{(\mu-\nu)/2} \exp\left\{\frac{\sigma-\beta}{2} U_0\right\} \left[\frac{\pi}{2(\sigma+\beta)}\right]^{1/2} \frac{\Gamma(\sigma/(\beta+\sigma))}{\Gamma(1/2 + \sigma/(\beta+\sigma))}.$$

Отсюда при $\sigma > \beta$ или $\sigma = \beta$, $\mu > \nu$ имеет место HS-режим, при $\sigma = \beta$, $\mu = \nu$ — S-режим и при $\sigma < \beta$ или $\sigma = \beta$, $\mu < \nu$ — LS-режим.

Что касается класса слабонелинейных функций k, Q , в котором критерий локализации $D_* < \infty$ (или $x_0(\infty) < \infty$, если $N = 1$) перестает быть справедливым, то характерными его представителями является семейство функций

$$k = k(u), \quad Q = Q_\alpha(u) \equiv \frac{u+1}{k(u)} \left\{ \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta+1} d\eta \right\}^\alpha \quad (30)$$

где $\alpha = \text{const} > 1$ и коэффициент $k(u)$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty \frac{k(\eta)}{\eta+1} d\eta = \infty, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{k(u)}{k'(u)} \right]' = \infty. \quad (31)$$

Особенностью неограниченных решений уравнения (1) из указанного класса *) является то, что их структура описывается п. а. р., удовлетворяющими нелинейному уравнению первого порядка [42, 51, 153]

$$v_t = \frac{k(v)}{v+1} |\nabla v|^2 + Q_\alpha(v), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (32)$$

Эти п. а. р. при $\alpha \geq 2$ являются локализованными (при $\alpha = 2$ имеет место S-режим и $\text{diam } \omega_L = 2\pi$), а при $\alpha < 2$ локализация отсутствует. В то же время нетрудно проверить, что критерий локализации $D_* < \infty$ здесь не применим. Например, если $k \equiv 1$, $Q = (1+u) \ln^\beta(1+u)$, то при $\beta > 1$ имеем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{Q(s)} \int_0^s k(\eta) d\eta = 0,$$

*) Отметим, что в этом классе находится уравнение (1) при $k(u) \equiv 1$, $Q(u) = (1+u) \ln^\beta(1+u)$, подробно рассмотренное в § 7 гл. IV (там же приводится способ построения п. а. р.).

что указывает на наличие LS-режима горения (критерий $0 \leq \leq x_0(\infty) \leq \infty$, $N=1$ приводит к тому же выводу). Правильный анализ подобного случая проведен ниже.

Пример 3. Пусть $k(u) = \ln^\sigma(1+u)$, $Q(u) = (\sigma+1)^{-1}(1+u) \times \times \ln^\beta(1+u)$, $\sigma \geq 0$, $\beta > 1$, $\gamma = (\beta + \sigma)/(\sigma + 1)$. Условия (30), (31) выполняются, если положить $\alpha = (\beta + \sigma)/(\sigma + 1)$. Отсюда локализация существует при $\beta \geq \sigma + 2$ (т. е. $\alpha \geq 2$), а при $\beta < \sigma + 2$ она отсутствует (для случая $\sigma = 0$ справедливость этого результата показана в § 7 гл. IV).

В заключение отметим, что существует непосредственная связь между свойством локализации и глобальной разрешимостью краевой задачи для уравнения (1) в ограниченной области.

§ 2. О краевых задачах в ограниченных областях

В этом параграфе более подробно, чем в гл. V, рассматриваются режимы с обострением, возникающие в ограниченной области. Необходимость такого исследования определяется рядом физических обстоятельств (связанных, например, с учетом потерь тепла на границе области горения). При исследовании краевых задач возникает целый ряд новых моментов и особенностей, которых не было в случае задачи Коши.

Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^N с гладкой границей $\partial\Omega$. Ниже для квазилинейного параболического уравнения рассматривается первая краевая задача

$$u_t = \Delta \varphi(u) + Q(u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega; \quad u_0 \in C(\Omega), \quad \varphi(u_0) \in H_0^1(\Omega), \quad (2)$$

$$u(t, x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3)$$

На неотрицательные функции φ , Q накладываются обычные ограничения. В частности, требуется, чтобы было выполнено необходимое условие возникновения режимов с обострением:

$$\int_1^\infty \frac{d\eta}{Q(\eta)} < \infty. \quad (4)$$

Краевое условие (3) моделирует отток тепла из области Ω , в которой протекают процессы диффузии и горения. Разумеется, величина потерь через границу зависят от интенсивности горения внутри Ω .

Возникают следующие вопросы. При каких условиях на коэффициенты k , Q , начальное возмущение $u_0 \neq 0$ и пространственную структуру области Ω горение в задаче (1) — (3) происходит в режиме с обострением? И наоборот, когда задача имеет глобальное решение, определенное при всех $t > 0$? Другими словами, необходимо выяснить, при каких условиях тепловые потери на границе способны «погасить» процесс интенсивного горения и при каких условиях этого не происходит?

Для удобства дальнейшего изложения введем в пространстве начальных функций $\{u_0 \geq 0 | u_0 \in C(\bar{\Omega}), \quad \varphi(u_0) \in H_0^1(\Omega)\}$ два

множества: устойчивости \mathscr{W} и неустойчивости \mathscr{V} , определив их следующим образом: если $u_0 \in \mathscr{W}$, то существует глобальное решение; если же $u_0 \in \mathscr{V}$, то задача (1) — (3) неразрешима в целом. Ниже предложены методы конструктивного описания множеств \mathscr{W} , \mathscr{V} . Другими способами структура множества неустойчивости \mathscr{V} анализировалась в § 6 гл. V.

1. Уравнение со степенными нелинейностями. В этом пункте рассматривается задача для уравнения (1) специального вида:

$$u_t = \Delta u^{\sigma+1} + u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \Omega; \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1, \quad (5)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega; \quad u(t, x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (6)$$

Предполагается, что $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, $u_0^{\sigma+1} \in H_0^1(\Omega)$. В (5) коэффициент теплопроводности $k(u) = u^\sigma / (\sigma + 1)$ приводится к привычному для нас виду $k(u) = u^\sigma$ преобразованием пространственных координат $x \rightarrow x / (\sigma + 1)^{1/2}$.

Будет показано, что свойства решений задачи (5), (6) существенно зависят от соотношения между величинами σ и β : при переходе величины β через значение $\beta = \sigma + 1$ структура множеств \mathscr{V} , \mathscr{W} резко меняется. Отметим, что критическое значение $\beta = \sigma + 1$ является критическим и в случае задачи Коши для (5) (правда, по другой причине, связанной с эффектом локализации). Связь между локализацией в задаче Коши и структурой множеств \mathscr{V} , \mathscr{W} в краевой задаче для того же уравнения будет обсуждаться в следующих пунктах.

При формулировке излагаемых ниже утверждений используется тот факт, что решение задачи, сформулированной для параболического уравнения, допускающего отрицательные значения температуры:

$$u_t = \Delta(|u|^\sigma u) + q(u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (5')$$

$$q(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ u^\beta, & u \geq 0 \end{cases}$$

((5') тождественно совпадает с (5), если $u \geq 0$), подчиняется слабому принципу максимума. Поэтому $u(t, x) \geq 0$ почти всюду (п. в.) в Ω для всех допустимых $t > 0$, если $u_0(x) \geq 0$ п. в. в Ω . Исследование задачи (5), (6) естественным образом разбивается на три случая.

1.1. Глобальная разрешимость при $\beta < \sigma + 1$.

Теорема 1. Пусть $\beta < \sigma + 1$. Тогда задача (5), (6) имеет глобальное решение, причем для всех $T > 0$

$$u^{1+\sigma/2} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \frac{\partial}{\partial t} u^{1+\sigma/2} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (7)$$

$$u^{1+\sigma} \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (8)$$

Замечание 1. Из (7) следует, что отображение $u^{1+\sigma/2}: [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ является непрерывным (после, быть может, изменения на множестве меры нуль), так что начальное условие (6) имеет смысл.

Замечание 2. При $\beta < \sigma + 1$ множество неустойчивости \mathcal{U} является пустым, т. е. граничные потери тепла не позволяют сформироваться режиму с обострением.

Доказательство теоремы проводится путем построения глобального решения методом Галёркина с использованием базиса $\{w_j\}$ в $H_0^1(\Omega)$, составленного из собственных функций задачи

$$\Delta w_j + \lambda_j w_j = 0, \quad x \in \Omega; \quad w_j \in H_0^1(\Omega), \quad j = 1, 2, \quad (9)$$

Собственные значения λ_j можно расположить в порядке их возрастания. Тогда значение $\lambda_1 > 0$ простое, и отвечающая ему собственная функция $w_1(x) > 0$ в Ω . Величину λ_1 можно оценить снизу по формуле [128, 129]

$$\lambda_1 \geq \{\kappa(N)\}^{-2} \{\text{mes } \Omega\}^{-2/N}, \quad (10)$$

$$\kappa(1) = \frac{1}{\pi}, \quad \kappa(2) = 2, \quad \kappa(N) = \frac{2(N-1)}{N-2}, \quad N \geq 3. \quad (10')$$

В частном случае, когда Ω является шаром: $\Omega = \{|x| < R\}$,

$$\lambda_1 = [z_N^{(1)}/R]^2, \quad (11)$$

где $z_N^{(1)}$ — наименьший положительный корень функции Бесселя $J_{(N-2)/2}$.

Лемма 1 [128, 129]. Пусть функция $v(x)$ такова, что $|v|^\sigma v \in H_0^1(\Omega)$. Тогда справедлива оценка

$$\|v\|_{L^{\beta+\sigma+1}(\Omega)} \leq C_1 \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|v|^\sigma v) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/[2(\sigma+1)]} \quad (12)$$

где $\beta > 1$ — произвольное при $N = 1, 2$ и $\beta \in (1, (\sigma+1)(N+2)/(N-2))$ при $N \geq 3$. Постоянная C_1 вычисляется по формуле

$$C_1 = \left\{ K(N, \sigma, \beta) (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{N} \frac{\beta - (\sigma+1)}{2(\beta+\sigma+1)}} \right\}^{\frac{1}{\sigma+1}}$$

где $K(N, \sigma, \beta) = \kappa(N)$ для $N = 1$ и $N \geq 3$, $K(2, \sigma, \beta) = 3/2$ при $\beta \in (1, 2(\sigma+1)]$ и $K(2, \sigma, \beta) = (\beta + \sigma + 1)/[2(\sigma+1)]$ при $\beta > 2(\sigma+1)$. Если $\beta = \sigma + 1$, то имеет место неравенство

$$\|v\|_{L^{2(\sigma+1)}(\Omega)} \leq (\lambda_1)^{-1/[2(\sigma+1)]} \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|v|^\sigma v) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/[2(\sigma+1)]} \quad (13)$$

Доказательство теоремы 1. Будем искать при каждом целом $m > 0$ приближенное решение задачи u_m в виде

$$u_m(t, x) = \left| \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j \right|^{-\sigma/(\sigma+1)} \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, \quad (14)$$

где неизвестные функции $g_{jm} \in C^1([0, T])$ определим из системы уравнений (здесь и далее символом ' обозначается дифференцирование по t)

$$(u'_m, w_j) + (\nabla(|u_m|^\sigma u_m), \nabla w_j) = (q(u_m), w_j), \quad 1 \leq j \leq m, \quad (15)$$

в начальных условиях

$$u_m(0) = u_{0m}; \quad |u_{0m}|^\sigma u_{0m} \rightarrow u_0^{\sigma+1} \text{ в } H_0^1(\Omega), \quad m \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Локальная разрешимость задачи (15), (16) следует из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (нетрудно показать, что систему (15) всегда можно разрешить относительно производных g'_{jm}). Ниже будут получены априорные оценки, которые гарантируют существование приближенного решения u_m при любых m на отрезке $[0, T]$ произвольной длины.

Умножим каждое уравнение (15) на g'_{jm} , просуммируем полученные равенства по j от 1 до m , а затем окончательное выражение проинтегрируем по t . Тогда получим

$$\begin{aligned} & \frac{4(\sigma+1)}{(\sigma+2)^2} \int_0^t \| |u_m(s)|^{\sigma/2} u_m(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m(t)|^\sigma u_m(t)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} - \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} \int_\Omega \Phi(u_m(t, x)) dx = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{0m}|^\sigma u_{0m}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} - \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} \int_\Omega \Phi(u_{0m}(x)) dx, \quad (17) \end{aligned}$$

где $\Phi(u) = (\max\{0, u\})^{\beta+\sigma+1}$.

Используя теперь оценку (12) и неравенство Юнга, отсюда выводим следующие неравенства (c в дальнейшем обозначает различные положительные постоянные, не зависящие от m):

$$\begin{aligned} & \frac{4(\sigma+1)}{(\sigma+2)^2} \int_0^t \| |u_m|^{\sigma/2} u_m \|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m|^\sigma u_m) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \leq \\ & \leq c + \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} \| u_m \|_{L^{\beta+\sigma+1}(\Omega)}^{\beta+\sigma+1} \leq \\ & \leq c + C_1^{\beta+\sigma+1} \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m|^\sigma u_m) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{(\beta+\sigma+1)/[2(\sigma+1)]} \leq \\ & \leq c + \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m|^\sigma u_m) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}. \quad (17') \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функции $(|u_m|^{\sigma/2} u_m)'$ ограничены в $L^2(0, T; L^2(\Omega))$; $|u_m|^{\sigma/2} u_m$ — в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$; $|u_m|^\sigma u_m$ — в $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$; $(|u_m|^\sigma u_m)'$ — в $L^2(0, T; L^1(\Omega))$. В частности, получаем, что $|u_m|^\sigma u_m$ принадлежит ограниченному множеству, например, в $W_1^1(0, T; W_1^1(\Omega))$.

Кроме (17) нам понадобится еще одно тождество, для вывода которого умножим каждое уравнение (15) на g_{jm} , просуммируем все равенства по j от 1 до m , а затем обе части выражения

проинтегрируем по t . В результате получим

$$\frac{1}{\sigma+2} \| |u_m|^{\sigma/2} u_m \|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{\sigma+2} \| |u_{0m}|^{\sigma/2} u_{0m} \|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m|^\sigma u_m) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} ds = \int_0^t \int_{\Omega} \Phi(u_m(s, x)) dx ds. \quad (18)$$

Из полученных выше оценок следует, что $|u_m|^{\sigma/2} u_m$ ограничены в $H^1(\omega_T)$ ($\omega_T = (0, T) \times \Omega$). Однако вложение $H^1(\omega_T)$ в $L^2(\omega_T)$ компактно [161, 131], и поэтому из последовательности u_m можно выделить такую подпоследовательность u_ν , что $|u_\nu|^{\sigma/2} u_\nu \rightarrow |u|^{\sigma/2} u$ в $L^2(\omega_T)$ и п. в. Отсюда в силу других оценок заключаем, что $q(u_\nu) \rightarrow q(u)$ слабо в $L^2(\omega_T)$. Положим $A(u) = -\Delta(|u|^\sigma u)$. Тогда, как нетрудно убедиться, $A(u_m)$ ограничены в $L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Отсюда можно заключить, что $A(u_\nu) \rightarrow \chi$ *-слабо в $L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Доказательство равенства $\chi = A(u)$ проводится так же, как в [131], с использованием (18). Осуществляя теперь предельный переход, с помощью обычных рассуждений получаем, что u является глобальным обобщенным решением и удовлетворяет включениям (7), (8). В заключение отметим, что включение (8) позволяет установить и слабый принцип максимума (о технике этого доказательства см. [276, 30]). Этим завершается доказательство теоремы 1.

Нетрудно показать, что в условиях теоремы 1 глобальное решение $u \neq 0$ стабилизируется при $t \rightarrow \infty$ к стационарному решению $U > 0$ в Ω , $\Delta U^{\sigma+1} + U^\beta = 0$ в Ω , $U = 0$ на $\partial\Omega$ (существование и единственность нетривиальной функции U установлены, например, в [168, 178]). Стабилизация $u^{\sigma+1}(t, \cdot)$ к $U^{\sigma+1}$ в $L^2(\Omega)$ при $t \rightarrow \infty$ вытекает из существования функции Ляпунова

$$J(u)(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u^{\sigma+1}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} \int_{\Omega} u^{\beta+\sigma+1}(t, x) dx, \quad (19)$$

которая не возрастает на эволюционных траекториях $\{u(t, \cdot), t > 0\}$, п. в частности, включения $(u^{1+\sigma/2}, \cdot) \in L^2(\mathbf{R}_+ \times \Omega)$ (см. оценку (17'), где c не зависит от T). (Последнее означает, что норма $\|(u^{1+\sigma/2}, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2$ «мала» в окрестности $t = \infty$, и этого, в принципе, достаточно для доказательства стабилизации к единственному стационарному решению $U \neq 0$, $U_t \equiv 0$.) Стабилизация к тривиальному решению: $u^{\sigma+1} \rightarrow 0$ в $L^2(\Omega)$ при $t \rightarrow \infty$ невозможна; это устанавливается, например, теми же рассуждениями, которые использовались при доказательстве предложения 8 § 4 гл. II.

1.2. Случай $\beta = \sigma + 1$.

Теорема 2. Пусть $\beta = \sigma + 1$. Тогда, если область Ω такова, что $\lambda_1 > 1$, то задача (5), (6) имеет глобальное решение, удовлетворяющее включениям (7), (8), причем

$$\|u(t)\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)} = O(t^{-1/\sigma}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Если же $\lambda_1 < 1$, то при любых $u_0(x) \neq 0$ задача (5), (6) не имеет решения в целом*), и найдется такое $T_0 \in (0, T_*]$, где

$$T_* = \left\{ (1 - \lambda_1) \sigma \|w_1\|_{L^1(\Omega)}^{-\sigma} (u_0, w_1)^\sigma \right\}^{-1} < \infty, \quad (21)$$

что $(u(t), w_1) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$

Доказательство. Установим сначала справедливость первой части теоремы. Применяя к ранее выведенному равенству (17) оценку (13), получаем

$$\frac{4(\sigma + 1)}{(\sigma + 2)^2} \int_0^t \| |u_m|^{\sigma/2} u_m' \|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} (1 - \lambda_1^{-1}) \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m|^\sigma u_m) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \leq c. \quad (22)$$

Отсюда в силу условия $\lambda_1 > 1$ функции $(|u_m|^{\sigma/2} u_m)'$ ограничены в $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $|u_m|^\sigma u_m$ — в $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Из (18) аналогичным образом получаем

$$\frac{1}{\sigma + 2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{\sigma+2} \leq - (1 - \lambda_1^{-1}) \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m(t)|^\sigma u_m(t)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}. \quad (23)$$

Отсюда, в частности, следует, что функции u_m ограничены в $L^\infty(0, T; L^{\sigma+2}(\Omega))$, $|u_m|^\sigma u_m$ — в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Применяя к правой части выведенного неравенства оценку (13) и неравенство Гельдера, получаем

$$\frac{1}{\sigma + 2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{\sigma+2} \leq - (\lambda_1 - 1) (\text{mes } \Omega)^{-\sigma/(\sigma+2)} \|u_m(t)\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{2(\sigma+1)},$$

и поэтому

$$\|u_m(t)\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)} \leq \left\{ \|u_{0m}\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{-\sigma} + \sigma (\text{mes } \Omega)^{-\sigma/(\sigma+2)} (\lambda_1 - 1) t \right\}^{-1/\sigma}$$

Предельный переход $m = \mu \rightarrow \infty$ совершается так же, как при доказательстве теоремы 1. При этом из последнего неравенства вытекает оценка (20).

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Проинтегрируем равенство (15) при $j=1$, $\beta = \sigma + 1$ по интервалу $(0, t)$ и перейдем к пределу при $m = \mu \rightarrow \infty$. В результате получаем

$$(u(t), w_1) = (u_0, w_1) + (1 - \lambda_1) \int_0^t (u^{\sigma+1}(s), w_1) ds. \quad (23')$$

Используя неравенство Гельдера $(u^{\sigma+1}, w_1) \geq \|w_1\|_{L^1(\Omega)}^{-\sigma} (u, w_1)^{\sigma+1}$,

*) Локальная разрешимость задачи в этом случае будет установлена ниже.

приходим к такой оценке:

$$E(t) \equiv (u(t), w_1) \geq (u_0, w_1) + (1 - \lambda_1) \|w_1\|_{L^1(\Omega)}^{-\sigma} \int_0^t E^{\sigma+1}(s) ds.$$

Отсюда следует, что $E(t) \geq F(t)$ п.в., где $F(t)$ — решение задачи

$$F'(t) = (1 - \lambda_1) \|w_1\|_{L^1(\Omega)}^{-\sigma} F^{\sigma+1}(t), \quad t > 0; \quad F(0) = (u_0, w_1)_t$$

и поэтому

$$E(t) \geq F(t) \equiv \left\{ \sigma (1 - \lambda_1) \|w_1\|_{L^1(\Omega)}^{-\sigma} (T_* - t) \right\}^{-1/\sigma} \rightarrow \infty$$

при $t \rightarrow T_*^-$.

З а м е ч а н и е. Как следует из (10), условие глобальной разрешимости $\lambda_1 > 1$ будет заведомо выполнено, если $\text{mes } \Omega < [\kappa(N)]^{-N}$, т. е. для достаточно «малых» областей Ω .

Рассмотрим отдельно случай $\lambda_1 = 1$, $\beta = \sigma + 1$. Тогда из (22), (23) следует, что $(|u_m|^{\sigma/2} u_m)'$ и $|u_m|^{\sigma/2} u_m$ ограничены в $L^2(\omega_T)$. Этих оценок, однако, недостаточно для предельного перехода.

Глобальную разрешимость задачи в этом случае нетрудно установить, например, на основе обычной теоремы сравнения. Действительно, функция $U_\alpha(x) = \alpha w_1^{1/(\sigma+1)}(x)$ при любом $\alpha > 0$ — стационарное решение задачи $\Delta U_\alpha^{\sigma+1} + U_\alpha^{\sigma+1} = 0$ в Ω , $U_\alpha = 0$ на $\partial\Omega$. Поэтому, если $u_0 \leq U_\alpha$ в Ω , то $u \leq U_\alpha$ в $\mathbf{R}_+ \times \Omega$.

Любопытно, что, хотя краевая задача имеет континуум стационарных решений $\{U_\alpha = \alpha w_1^{1/(\sigma+1)}, \alpha > 0\}$, асимптотически устойчиво лишь одно из них и $u^{\sigma+1} \rightarrow \alpha_*^{\sigma+1} w_1(x)$ в $L^2(\Omega)$ при $t \rightarrow \infty$, где $\alpha_* = (u_0, w_1) \left(\int_{\Omega} w_1^{(\sigma+2)/(\sigma+1)} dx \right)^{-1}$. Это вытекает из

тождества $(u(t), w_1) \equiv (u_0, w_1)$ п.в. (см. (23') при $\lambda_1 = 1$) [263].

1.3. Случай $\beta > \sigma + 1$. Это наиболее интересный случай; здесь существуют непустые множества устойчивости \mathcal{W}^o и неустойчивости \mathcal{Y}^o . В дальнейшем мы будем считать, что $\beta > \sigma + 1$ при $N = 1, 2$ и $\beta \in (\sigma + 1, (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2))$ при $N \geq 3$. Сначала будет доказана теорема о локальной разрешимости задачи.

Теорема 3. Пусть $\sigma + 1 \leq \beta < \sigma + 1 + 2(\sigma + 2)/N$. Тогда существует такая постоянная $T_* > 0$, что на отрезке $[0, T_*]$ задача (5), (6) имеет решение, удовлетворяющее включениям (7), (8).

Доказательство опирается на следующую лемму [128, 129].

Лемма 2. Пусть функция v такова, что $|v|^\sigma v \in H_0^1(\Omega)$. Тогда для любых $\beta > 1$ при $N = 1, 2$ и $1 < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)$ при $N \geq 3$ справедлива оценка

$$\|v\|_{L^{\beta+\sigma+1}(\Omega)} \leq C_2 \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|v|^\sigma v) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{\nu} \|v\|_{L^{\sigma+2\nu(\sigma+1)}(\Omega)}^{1-2\nu(\sigma+1)}.$$

есы $v = N(\beta - 1) / \{(\beta + \sigma + 1)[2(\sigma + 2) + N\sigma]\}$, $C_2 = \{1 + (\sigma + 2) / 2(\sigma + 1)\}^{2v}$ при $N = 1$, 2 и $C_2 = [2(N - 1) / (N - 2)]^{2v}$ при $N \geq 3$.

Доказательство теоремы 3. Воспользуемся леммой 2:

$$\int_{\Omega} \Phi(u_m(t, x)) dx \leq C_2^{\beta + \sigma + 1} \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m|^{\sigma} u_m) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{v_1} \|u_m\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{v_2},$$

$$v_1 = \frac{N(\beta - 1)}{2(\sigma + 2) + N\sigma}, \quad v_2 = \frac{\beta(2 - N) + (\sigma + 1)(N + 2)}{2(\sigma + 2) + N\sigma} (\sigma + 2) > 0, \quad (24)$$

причем в силу ограничения $\beta < (\sigma + 1) + 2(\sigma + 2) / N$ имеем $v_1 < 1$. Последнее позволяет применить к правой части (24) неравенство Юнга, в результате чего приходим к такой оценке:

$$\int_{\Omega} \Phi(u_m(t, x)) dx \leq \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m|^{\sigma} u_m) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} + c \|u_m\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{v_2/(1-v_1)} \quad (25)$$

Подставляя ее в предварительно продифференцированное равенство (18), получаем

$$\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{\sigma+2} \leq c \|u_m(t)\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{v_2/(1-v_1)}.$$

Отсюда следует, что u_m ограничены в $L^{\infty}(0, T_*; L^{\sigma+2}(\Omega))$, если только $T_* > 0$ не слишком велико. Тогда из (17) и (25) следует, что функции $(|u_m|^{\sigma/2} u_m)'$ ограничены в $L^2(0, T_*; L^2(\Omega))$, $|u_m|^{\sigma} u_m$ — в $L^{\infty}(0, T_*; H_0^1(\Omega))$, и этим завершается доказательство.

Данная теорема приведена в качестве иллюстрации как пример доказательства локальной разрешимости задачи на основе минимального математического аппарата. При этом в теореме 3 появляется несущественное ограничение сверху на величину β . При построении локального решения как предела монотонной последовательности классических положительных решений такое ограничение не возникает. Равномерная ограниченность последовательности классических решений в некоторой области вида $(0, T_*) \times \Omega$ вытекает из сравнения каждого из них с пространственно однородным решением (см. § 1, 2 гл. I).

Последовательности строго положительных классических решений u_{ϵ} , монотонно стремящихся к u при $\epsilon \rightarrow 0^+$, можно построить различными способами. Например, в качестве u_{ϵ} можно взять решения исходного уравнения (5) с другими краевыми условиями: $u_{\epsilon} = \epsilon + u_0$ при $t = 0$ в Ω ; $u_{\epsilon} = \epsilon$ на $(0, T) \times \partial\Omega$. Тогда $u_{\epsilon} \geq \epsilon$ в $(0, T) \times \Omega$, и, следовательно, на всяком решении u_{ϵ} уравнение (5) является равномерно параболическим. Можно поступить по-другому: оставить краевые условия без изменения и ввести регуляризацию в уравнение, заменив в (5) оператор $\Delta u^{\sigma+1}$ на $\Delta(u^2 + \epsilon^2)^{(\sigma+1)/2}$. Априорные оценки, гарантирующие, в частности, сходимость u_{ϵ} к u при $\epsilon \rightarrow 0^+$, выводятся практически тем же способом.

Перейдем теперь к построению множества устойчивости \mathscr{W} . Предварительно докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 3. Пусть $|v(x)|^\sigma v(x) \in H_0^1(\Omega)$. Положим

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v) - \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} b(v),$$

где

$$a(v) = \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|v|^\sigma v) \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad b(v) = \int_{\Omega} \Phi(v(x)) dx.$$

Тогда справедливо неравенство

$$d = \inf_{\substack{|v|^\sigma v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda v) > 0. \quad (26)$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что

$$J(\lambda v) = \frac{1}{2} \lambda^{2(\sigma+1)} a(v) - \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} \lambda^{\beta+\sigma+1} b(v);$$

поэтому с помощью оценки (12) получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda v) &= \\ &= J \left[v \left(\frac{a(v)}{b(v)} \right)^{1/(\beta-(\sigma+1))} \right] \equiv \frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta+\sigma+1)} \left[\frac{(a(v))^{\beta+\sigma+1}}{(b(v))^{2(\sigma+1)}} \right]^{1/(\beta-(\sigma+1))} \geq \\ &\geq \frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta+\sigma+1)} C_1^{-\frac{2(\sigma+1)(\beta+\sigma+1)}{\beta-(\sigma+1)}} > 0. \end{aligned}$$

Введем множество

$$\mathscr{W} = \{v \mid |v|^\sigma v \in H_0^1(\Omega); 0 \leq J(\lambda v) < d, \lambda \in [0, 1]\}. \quad (27)$$

Отличительное свойство этого множества, вытекающее из способа его построения, отражает

Лемма 4. Справедливо равенство $\mathscr{W} = \mathscr{W}_* \cup \{0\}$, где

$$\mathscr{W}_* = \{v \mid |v|^\sigma v \in H_0^1(\Omega), a(v) - b(v) > 0, J(v) < d\}.$$

Доказательство. Пусть $v \in \mathscr{W}$, $v \neq 0$. Тогда

$$\sup_{\lambda > 0} J(\lambda v) = J \left[v \left(\frac{a(v)}{b(v)} \right)^{1/(\beta-(\sigma+1))} \right] \geq d,$$

и поэтому $a(v)/b(v) > 1$, откуда $v \in \mathscr{W}_*$. С другой стороны, пусть $v \in \mathscr{W}_*$. Тогда

$$\sup_{\lambda \in (0,1)} J(\lambda v) = J(v) < d,$$

откуда $v \in \mathscr{W}$

Некоторые другие важные свойства множества \mathscr{W} дает

Лемма 5. Величина d в (26) является конечной, множество \mathscr{W} ограничено и содержится в шаре

$$\left\{ v \mid |v|^\sigma v \in H_0^1(\Omega), a(v) \leq \frac{2(\beta+\sigma+1)}{\beta-(\sigma+1)} d \right\}.$$

Доказательство. В сделанных предположениях краевая задача

$$\Delta v_\nu + \nu v_\nu^{\beta/(\sigma+1)} = 0 \text{ в } \Omega; \quad v_\nu = 0 \text{ на } \partial\Omega$$

имеет положительное в Ω решение при некотором $\nu \in \mathbf{R}_+$ (см. [144]). (Более того, такое решение существует при любых $\nu > 0$; его положительность вытекает из постановки соответствующей вариационной задачи, см. [147, 202, 241].)

Положим $\nu = \nu_\nu^{1/(\sigma+1)}$. Тогда $\nu^{\sigma+1} \in H_0^1(\Omega)$ и

$$d \leq J \left\{ \nu \left[\frac{a(\nu)}{b(\nu)} \right]^{1/[\beta-(\sigma+1)]} \right\}.$$

Отсюда в силу равенства $a(\nu) - \nu b(\nu) = 0$ получаем

$$d \leq J(\nu^{1/[\beta-(\sigma+1)]}) = \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta + \sigma + 1)} a(\nu) \nu^{2(\sigma+1)/[\beta-(\sigma+1)]} < \infty.$$

Пусть $\nu \in \mathcal{W}$, $\nu \neq 0$. Тогда в силу леммы 4 $a(\nu) - b(\nu) > 0$, и, следовательно,

$$d > J(\nu) = \frac{1}{2} a(\nu) - \frac{\sigma + 1}{\beta + \sigma + 1} b(\nu) \geq \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta + \sigma + 1)} a(\nu).$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы о глобальной разрешимости задачи.

Теорема 4. Пусть $\beta > \sigma + 1$ при $N = 1, 2$, $\sigma + 1 < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)$ при $N \geq 3$. Пусть начальная функция u_0 в (6) такова, что $u_0 \in \mathcal{W}$. Тогда при любых $T > 0$ существует обобщенное решение задачи (5), (6), удовлетворяющее включениям (7), (8) и принадлежащее \mathcal{W} при всех $t \geq 0$ (\mathcal{W} — замыкание \mathcal{W} на множестве $\{v \mid |v|^\sigma v \in H_0^1(\Omega)\}$).

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущих теорем, решение задачи строится методом Галёркина. Тогда аналогичное (17) тождество можно записать в виде

$$\frac{4(\sigma + 1)}{(\sigma + 2)^2} \int_0^t \| |u_m(s)|^{\sigma/2} u_m(s) \}' \|_{L^2(\Omega)}^2 ds = J(u_{0m}) - J(u_m(t)). \quad (28)$$

Отсюда непосредственно следует, что $u_m \in \mathcal{W}$ при всех $t > 0$ и достаточно больших m , поскольку по предположению $u_0 \in \mathcal{W}$, $J(u_0) < d$ и $|u_{0m}|^\sigma u_{0m} \rightarrow u_0^{\sigma+1}$ в $H_0^1(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда в силу леммы 4 $a(u_m(t)) \geq b(u_m(t))$, и поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{4(\sigma + 1)}{(\sigma + 2)^2} \int_0^t \| |u_m(s)|^{\sigma/2} u_m(s) \}' \|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \\ & + \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta + \sigma + 1)} \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_m(t)|^\sigma u_m(t)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \leq J(u_{0m}) < c. \end{aligned}$$

Таким образом, функции $\{|u_m|^{\sigma/2} u_m\}'$ ограничены в $L^2(\omega_T)$, $|u_m|^{\sigma} u_m$ — в $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$. Далее теорема доказывается так же, как предыдущие.

Итак, при $\beta \in (\sigma + 1, (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+)$ задача имеет глобальное решение, если начальная функция достаточно мала. Отметим, что асимптотическое поведение глобальных решений $u(t) \in \overline{\mathcal{W}}$ здесь совсем другое, чем в случае $\beta \in (1, \sigma + 1]$. Дело в том, что всякое стационарное решение $U > 0$ задачи $\Delta U^{\sigma+1} + U^\beta = 0$ в Ω , $U = 0$ на $\partial\Omega$ неустойчиво (по поводу существования и единственности U см. [144, 147, 202, 212, 241]). Это легко показать, например, в том случае, когда область Ω звездная относительно $x = 0$.

Действительно, в этом случае функция $U_\alpha = \alpha U(\alpha^m x)$, $m = [\beta - (\sigma + 1)]/2 > 0$ при любом $\alpha > 0$ — стационарное решение в области $\Omega_\alpha = \{\alpha^m x \in \Omega\}$. Если $\alpha \in (0, 1)$, то очевидно, что $\overline{\Omega} \subset \Omega_\alpha$ и $\sup_{\Omega_\alpha} U_\alpha < \sup_{\Omega} U$. Поэтому, если в исходной задаче $u_0 \leq U_\alpha$ в Ω ,

то в силу принципа максимума $u \leq U_\alpha$ в $\mathbf{R}_+ \times \Omega$. Следовательно, u не может стабилизироваться к U при $t \rightarrow \infty$, хотя разность $u_0 - U$ в $C(\overline{\Omega})$ при $\alpha \rightarrow 1^-$ может быть сколь угодно мала. Аналогично, выбирая $\alpha > 1$, можно доказать неустойчивость стационарного решения сверху.

Нетрудно показать, используя лемму 4, что при выполнении условия $u_0 \in \mathcal{W}$ функция $u(t, x)$ стабилизируется при $t \rightarrow \infty$ к тривиальному стационарному решению $U \equiv 0$. Действительно, если $u_0 \in \mathcal{W}$, то в силу (28) при $m \rightarrow \infty$ имеем $J(u(t)) \leq J(u_0) < d$. Однако если $U \neq 0$, то $J(U) \geq d$, и стабилизация u к U при $t \rightarrow \infty$ невозможна.

Покажем теперь, что в задаче (5), (6) при $\beta > \sigma + 1$ все достаточно большие начальные функции u_0 принадлежат множеству неустойчивости \mathcal{W} (здесь это исследование проводится методом, отличным от применяемого в § 6 гл. V).

Теорема 5. Пусть $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 1 + 2(\sigma + 2)/N$ и

$$J(u_0) < 0, \quad \|u_0\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)} > 0. \quad (29)$$

Тогда задача (5), (6) не имеет решения в целом, и найдется такое $T_0 \in (0, T_*]$, где

$$T_* = \frac{\beta + \sigma + 1}{(\beta - 1)[\beta - (\sigma + 1)]} (\text{mes } \Omega)^{(\beta-1)/(\sigma+2)} \|u_0\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{1-\beta} < \infty,$$

что

$$\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|u(t)\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)} = \infty.$$

Доказательство. Напомним, что ограничение $\beta < \sigma + 1 + 2(\sigma + 2)/N$ гарантирует локальную разрешимость задачи. Покажем, что u не может быть определено при любых $t > 0$. Из (28) предельным переходом получаем, что $J(u(t)) \leq J(u_0)$ п. в.,

и, следовательно,

$$a(u(t)) < \frac{2(\sigma+1)}{\beta+\sigma+1} b(u(t)) \quad \text{п. в. в } \mathbf{R}_+.$$

Тогда из (18) при $m = \infty$ выводим следующее неравенство:

$$\|u(t)\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{\sigma+2} \geq \|u_0\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{\sigma+2} + (\sigma+2) \frac{\beta - (\sigma+1)}{\beta + \sigma + 1} (\text{mes } \Omega)^{(1-\beta)/(\sigma+2)} \int_0^t \|u(s)\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{\beta+\sigma+1} ds, \quad t > 0. \quad (30)$$

При выводе этого неравенства мы воспользовались оценкой

$$\|u(t)\|_{L^{\beta+\sigma+1}(\Omega)}^{\beta+\sigma+1} \geq (\text{mes } \Omega)^{(1-\beta)/(\sigma+2)} \|u(t)\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{\beta+\sigma+1}.$$

Учитывая, что $\|u_0\|_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{\sigma+2} > 0$, в силу (29) из (30) получаем необходимый результат.

Отметим, что условие (29) неограниченности решения задачи в определенном смысле противоположно условию включения $u_0 \in \mathcal{W}$ (см. (27)).

2. Уравнения произвольного вида. В этом пункте рассматривается задача (1) — (3) с коэффициентами $\varphi(u)$, $Q(u)$ достаточно произвольного вида, причем $Q(u)$ удовлетворяет (4). Основной вопрос — это анализ структуры множества \mathcal{W} , которая исследуется двумя различными методами. В п. 2.3 анализируется множество неустойчивости.

2.1. Условия глобальной разрешимости при произвольных начальных функциях ($\mathcal{V} = \emptyset$). Вывод глобальных интегральных оценок решения. Здесь так же, как в предыдущем пункте, используется метод Галёркина. Основное условие на коэффициенты $\varphi(u)$, $Q(u)$, гарантирующее существование глобального решения, состоит в следующем: найдутся такие положительные постоянные M_1 , M_2 , что выполняется неравенство

$$Q(s) \leq M_1 + M_2 \varphi(s), \quad s \geq 0, \quad (31)$$

причем

$$M_2 < \lambda_1. \quad (31')$$

Для простоты будем также предполагать, что

$$\varphi'(u)/[1 + \varphi^2(u)] \leq M_3 = \text{const} > 0 \quad \text{при } u \geq 0. \quad (32)$$

Введем для удобства функцию

$$\psi(s) = \int_0^s [\varphi'(\eta)]^{1/2} d\eta, \quad s \geq 0.$$

Теорема 6. Пусть выполняются условия (31), (32). Тогда при любых $T > 0$ существует обобщенное решение задачи (1) — (3), причем $u(t, x) \geq 0$ п. в. в Ω при любых фиксированных $t \geq 0$,

и выполнены включения

$$\psi(u) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \frac{\partial}{\partial t} \psi(u) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (33)$$

$$\varphi(u) \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (34)$$

Замечание 1. Условие (34), которое играет определяющую роль, будет заведомо выполнено, если

$$Q(s)/\varphi(s) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Замечание 2. Если в (1) положить $\varphi(s) \equiv Q(s)$, то (31) выполняется при $M_2 = 1$ ($M_1 = 0$). Поэтому (31') выполнено, если $\lambda_1 > 1$. Таким образом, в этом случае существование глобального решения зависит только от области Ω (указанная ситуация реализуется для уравнения (5) при $\beta = \sigma + 1$).

Сформулированная теорема доказывается методом Галёркина практически так же, как теорема 1. Устанавливается, что приближенное решение $u_m(t)$ удовлетворяет при любом $T > 0$ включениям (33), (34). Условие (32) позволяет тогда показать, что $(\varphi(u_m))_t$ ограничены в $L^2(0, T; L^1(\Omega))$; эта оценка необходима для предельного перехода (см. примеры подобного анализа квазилинейных уравнений общего вида в [30, 240]).

В процессе доказательства теоремы 6 (и теоремы 1) можно вывести наглядные и важные с практической точки зрения интегральные оценки глобальных решений в различных нормах. В частности, сформулированные выше леммы позволяют это сделать по крайней мере для уравнения (5). Более наглядные поточечные оценки в норме $C(\Omega)$ будут получены вместе с условиями глобальной разрешимости другим методом. Отметим, что построение множества устойчивости \mathcal{W} в случае уравнения (1) общего вида тем способом, который применялся в п. 1.3, требует весьма громоздких выкладок и определенных усилий. Значительно проще это сделать методом сравнения.

2.2. Анализ с помощью семейства стационарных решений. Здесь излагается иное, чем в § 1, применение метода стационарных состояний, который используется для определения условий глобальной разрешимости задачи. При этом нам не понадобятся какие-либо предварительные результаты, поскольку все необходимое содержится в § 1.

В дальнейшем для простоты считаем, что локальное решение задачи (1)–(3) существует, принадлежит $C_{tx}^{1,2}$ всюду, где оно положительно, и имеет при всех допустимых $t > 0$ непрерывную производную $\nabla_x \varphi(u(t, x))$. Тогда решение подчиняется принципу максимума и непрерывным монотонным образом зависит от начальной функции; в частности, при этом справедлива теорема сравнения решений уравнения (1). Доказательство этих утверждений проводится путем построения обобщенного решения как предела последовательности классических строго положительных решений уравнения (1). В дальнейшем предполагается, что $\varphi(u_0) \in C^1(\Omega)$.

Пусть $\{U\}$ — семейство радиально симметричных стационарных решений уравнения (1) (см. (1.6), (1.7)). Нам понадобится лишь одна оценка (1.9):

$$U(r; U_0) \geq U_-(r; U_0) = \varphi^{-1} \left[\varphi(U_0) (1 - r^2/r_0^2)_+ \right],$$

$$r_0 = \left[2N \frac{\varphi(U_0)}{Q(U_0)} \right]^{1/2} \quad (36)$$

Здесь $U_0 > 0$ — параметр семейства, $r = |x|$. Отметим, что в некоторых частных случаях, например при $N = 1$ или $Q(u) \equiv \mu\varphi(u)$, можно использовать точные равенства, полученные в § 1.

Теорема 7. *В сделанных предположениях множество устойчивости задачи (1) — (3) содержит множество*

$$\mathscr{W} = \{u_0 \geq 0 \mid \exists U_0 > 0: \Omega \subseteq \text{supp } U(r; U_0), u_0(x) \leq U(r; U_0) \text{ в } \Omega\}. \quad (37)$$

Доказательство. Оно основано на принципе максимума. Действительно, если $u_0 \in \mathscr{W}$, то в силу способа построения \mathscr{W} при всех $t \geq 0$ будет выполняться неравенство $u(t, x) \leq U(r; U_0)$, $x \in \Omega$, поскольку $U(r; U_0) \geq 0$ на $\partial\Omega$. Последнее следует из условия $\Omega \subseteq \text{supp } U(r; U_0)$.

Отметим, что (37) позволяет описать структуру начальных функций из \mathscr{W} . В частности, выбор величины U_0 в (37) определяет максимальную амплитуду глобального решения $\sup_{x \in \Omega} u(t, x) \leq U_0$, $t > 0$. Величина U_0 существенным образом зависит от геометрических размеров начального возмущения: чем оно «шире», тем больше должна быть величина параметра U_0 , иначе функция $u_0(x)$ не будет мажорироваться сверху в Ω стационарным решением $U(r; U_0)$. Неравенство (36) позволяет достаточно наглядно оценить характер этой зависимости.

Следствие 1. Пусть

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} [\varphi(s)/Q(s)] = \infty. \quad (38)$$

Тогда задача (1) — (3) имеет глобальное решение при любых начальных функциях.

Действительно, при выполнении (38) в силу (36) имеем $U(r; U_0) \rightarrow \infty$ по некоторой последовательности $U_0 = U_0^k \rightarrow \infty$ в \mathbb{R}^N . Поэтому при любых областях Ω и функциях $u_0(x)$ найдется такое $U_0^k > 0$, что $u_0(x) \leq U(r; U_0^k)$ в $\bar{\Omega}$, что в силу принципа максимума обеспечивает ограниченность решения равномерно по t . Для уравнения (5) этот случай реализуется при $\beta < \sigma + 1$.

Следствие 2. Пусть

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} [\varphi(s)/Q(s)] = \mu = \text{const} > 0. \quad (39)$$

Тогда, если $\bar{\Omega}$ принадлежит шару радиусом $(2N\mu)^{1/2}$, то задача (1) — (3) имеет глобальное решение при любых начальных функциях.

Это утверждение прямо следует из (36). Кроме того, из (36) вытекает

Следствие 3. Пусть

$$\varphi(s)/Q(s) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \quad (40)$$

Тогда, если $\supp U(r; U_0) \rightarrow \{0\}$ при $U_0 \rightarrow \infty$, то множество \mathcal{W} , определяемое из (37), является ограниченным в $C(\Omega)$. Если же $\supp U(r; U_0) = \mathbb{R}^N$ при всех достаточно больших $U_0 > 0^*$, то \mathcal{W} содержит функции $u_0(x)$, сколь угодно большие по норме в $C(\Omega)$.

Отметим, что именно в случае (40) есть основания ожидать появления неограниченных решений при достаточно больших начальных функциях $u_0(x)$, которые не принадлежат множеству устойчивости (37).

2.3 Анализ неограниченных решений с помощью метода собственных функций. Этот метод близок к тому, который применялся в п. 2 § 6 гл. V. Так же как и метод, основанный на условиях ψ -критичности (см. § 6 гл. V), его удобно использовать при анализе неограниченных решений краевых задач в ограниченных областях.

Введем некоторые ограничения на функции, образующие уравнение (1). Функции φ , Q будем считать выпуклыми в \mathbb{R}_+ . Функцию $P(s) = Q(\varphi^{-1}(s))$ также будем считать выпуклой, а $s/P(s)$ — невозрастающей в \mathbb{R}_+ . Эти условия можно записать в виде

$$\varphi''(s) \geq 0, \quad Q''(s) \geq 0, \quad (41)$$

$$Q''(s)\varphi'(s) - Q'(s)\varphi''(s) \geq 0, \quad (42)$$

$$Q'(s)\varphi(s) - Q(s)\varphi'(s) \geq 0, \quad s > 0. \quad (43)$$

Всем неравенствам удовлетворяют, например, коэффициенты уравнения (5) при $\beta \geq \sigma + 1$. Именно при таких значениях параметров, как показано выше, возможны неограниченные решения задачи (5), (6).

Как обычно, через $w_1(x)$ обозначим положительную в Ω собственную функцию задачи (9), отвечающую минимальному собственному значению $\lambda_1 > 0$. Функцию w_1 выберем такой, чтобы $\|w_1\|_{L^1(\Omega)} = 1$.

Основной результат сформулирован в следующей теореме, где введено обозначение

$$E_0 = \int_{\Omega} w_1(x) u_0(x) dx.$$

Теорема 8. Пусть выполняются условия (41) — (43) и функция u_0 в (2) такова, что

$$\lambda_1 \varphi(E_0) < Q(E_0). \quad (44)$$

Тогда задача (1) — (3) не имеет решения в целом, и найдется

*) Эта возможность реализуется, например, при выполнении условия (1.12').

такое $T_0 \leq T_*$, где

$$T_* = \frac{Q(E_0)}{Q(E_0) - \lambda_1 \varphi(E_0)} \int_{E_0}^{\infty} \frac{d\eta}{Q(\eta)} < \infty,$$

то

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_0^-} \sup_{x \in \Omega} u(t, x) = \infty. \quad (45)$$

Доказательство. Положим

$$E(t) = (u(t, x), w_1(x)) \equiv \int_{\Omega} u(t, x) w_1(x) dx.$$

Тогда $E(0) = E_0$. Далее, так же как в п. 2 § 6 гл. V, получаем для $E(t)$ равенство

$$dE(t)/dt = -\lambda_1(w_1, \varphi(u)) + (w_1, Q(u)), \quad t > 0, \quad (46)$$

которое будем в дальнейшем исследовать.

В силу (42) из неравенства Йенсена для выпуклых функций имеем оценку $(w_1, Q(u)) \equiv (w_1, P(\varphi(u))) \geq P[(w_1, \varphi(u))]$, с помощью которой из (46) получаем

$$\frac{dE}{dt} \geq P[(w_1, \varphi(u))] \left\{ 1 - \lambda_1 \frac{(w_1, \varphi(u))}{P[(w_1, \varphi(u))]} \right\}. \quad (47)$$

Однако функция $s/P(s)$ является невозрастающей в \mathbf{R}_+ (см. (43)), и поэтому в силу выпуклости φ , а следовательно, и неравенства Йенсена $(w_1, \varphi(u)) \geq \varphi[(w_1, u)] = \varphi(E)$, имеем $(w_1, \varphi(u))/P[(w_1, \varphi(u))] \leq \varphi(E)/Q(E)$. Тогда из (47) получаем, что

$$\frac{dE}{dt} \geq P[(w_1, \varphi(u))] \left[1 - \lambda_1 \frac{\varphi(E)}{Q(E)} \right]. \quad (48)$$

Из (48), (43), (44) заключаем, что $E'(t) \geq 0$, т. е. $E(t) \geq E_0$. Тогда из (48) и неравенства Йенсена следует, что $E'(t) \geq Q(E(t))[1 - \lambda_1 \varphi(E_0)/Q(E_0)]$. Отсюда получаем, что функция $E(t)$ не может быть ограниченной при всех $t \in (0, T_*)$ и существует $T_1 \leq T_*$ такое, что $E(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_1^-$. Поскольку $E(t) \leq \int_{\Omega} u(t, x)$, отсюда прямо следует (45), что завершает доказательство.

Сделаем одно замечание. Если $\varphi \equiv Q$, то условие (44) принимает вид $\lambda_1 < 1$. Тем самым решение становится неограниченным при любых начальных функциях $u_0(x) \neq 0$. Напомним, что если $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega) > 1$, то краевая задача всегда разрешима в целом (см. теорему 6).

В заключение отметим, что для описания асимптотического поведения неограниченных решений краевой задачи (1) — (3) применимы практически все результаты из § 1, относящиеся к анализу S- и LS-режимов с обострением. В частности, для задачи

со степенными нелинейностями (5), (6) справедливы теоремы 5, 6 § 1, а также результаты из § 6 гл. IV. Все они позволяют достаточно точно определить характер сингулярности предельного распределения $u(T_0^-, x)$.

§ 3. Параболическая система квазилинейных уравнений с источниками

Данный параграф посвящен исследованию свойств решений параболической системы двух квазилинейных уравнений нелинейной теплопроводности с источниками:

$$u_t = \Delta u^{v+1} + v^p, \quad (1)$$

$$v_t = \Delta v^{\mu+1} + u^q. \quad (2)$$

Здесь $\mu > 0$, $\nu > 0$, $p \geq 1$, $q \geq 1$ — постоянные. Эта система описывает процессы диффузии тепла и горения в двухкомпонентных сплошных средах с нелинейной теплопроводностью и объемным энерговыделением. Функции u , v можно трактовать как температуры взаимодействующих друг с другом компонентов некоторой горючей смеси. Нас особо будут интересовать условия возникновения неограниченных решений, а также условие их локализации в задаче Коши.

Отметим, что в (1), (2) входят сразу четыре параметра, и поэтому, несмотря на степенной вид нелинейности, система при произвольных μ , ν , p , q не допускает построения автомодельных решений, которые, как известно, позволяют эффективно описывать асимптотическое поведение неограниченных решений, в частности свойство локализации режимов с обострением.

Сначала будем рассматривать первую краевую задачу для системы (1), (2):

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0, x) = v_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u(t, x) = v(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (4)$$

где Ω — ограниченная область в \mathbf{R}^N с гладкой границей $\partial\Omega$; u_0 , v_0 — ограниченные непрерывные функции, $u_0^{1+\nu} \in H_0^1(\Omega)$, $v_0^{1+\mu} \in H_0^1(\Omega)$. Сначала будут определены условия ее неразрешимости в целом. Затем с помощью подхода, основанного на анализе семейства стационарных решений системы, во-первых, определим ограничения на параметры задачи, при которых она всегда глобально разрешима при произвольных начальных функциях u_0 , v_0 , и, во-вторых, установим условие отсутствия эффекта локализации режимов с обострением в задаче Коши для (1), (2).

Оказывается, многое здесь зависит от знака лишь одного параметра $m = pq - (1 + \mu)(1 + \nu)$. Если $m < 0$, то краевая задача имеет только глобально ограниченные решения (режимы с обострением не возникают) и в задаче Коши неограниченные решения не локализованы. Этот результат, по-видимому, оптимален, т. е. неравенство $m < 0$ является необходимым и достаточным условием существования обоих этих эффектов.

В этом параграфе изучаются лишь самые общие свойства решений системы (1), (2). Более детальное численное исследование подобных систем уравнений проводится в § 4, где также рассматриваются автомодельные решения, которые существуют при некоторых ограничениях на параметры задачи.

1. Условия отсутствия глобальных решений краевой задачи при $p \geq 1 + \mu$, $q \geq 1 + \nu$. Ниже при указанных значениях параметров в пространстве начальных функций выделяется множество неустойчивости \mathcal{U} такое, что включение $\{u_0, v_0\} \in \mathcal{U}$ влечет за собой неразрешимость задачи (1)–(4) в целом. Последнее означает, что существует конечное время обострения $T_0 < \infty$ и

$$\lim_{t \rightarrow T_0^-} (\|u^{p+1}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v^{q+1}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2) = \infty. \quad (5)$$

Отметим, что формально в соответствии с (5) неограниченно возрастать при $t \rightarrow T_0^-$ может одна из функций u или v . Хотя, конечно, из-за «перепутанного» расположения источников в (1), (2) функции u , v могут обращаться в бесконечность лишь одновременно.

При доказательстве сформулированных ниже утверждений будем предполагать, что локальное решение краевой задачи удовлетворяет естественным включениям

$$\begin{aligned} \{u^{1+\nu/2}\}_t, \{v^{1+\mu/2}\}_t &\in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ u^{\nu+1}, v^{\mu+1} &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad T < T_0. \end{aligned} \quad (6)$$

В предположении ограниченности u , v их нетрудно вывести методом Галёркина. Без труда также устанавливается справедливость слабого принципа максимума, так что если u , v ограничены в $(0, T) \times \Omega$, то $u \geq 0$, $v \geq 0$ п. в. в Ω , $0 < t < T$.

1.1. Вывод системы обыкновенных дифференциальных неравенств. Обозначим через $w_1(x) > 0$ в Ω и $\lambda_1 > 0$ соответственно первую собственную функцию и отвечающее ей первое (наименьшее) собственное значение задачи

$$\Delta w + \lambda w = 0, \quad x \in \Omega; \quad w|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7)$$

Функцию w_1 выберем таким образом, чтобы

$$\|w_1\|_{L^1(\Omega)} = 1. \quad (8)$$

Скалярно умножая в $L^2(\Omega)$ обе части уравнений (1), (2) на w_1 и интегрируя получившиеся выражения по t , получаем систему равенств

$$(u(t), w_1) - (u_0, w_1) = -\lambda_1 \int_0^t (u^{\nu+1}(s), w_1) ds + \int_0^t (v^p(s), w_1) ds, \quad (9)$$

$$(v(t), w_1) - (v_0, w_1) = -\lambda_1 \int_0^t (v^{\mu+1}(s), w_1) ds + \int_0^t (u^q(s), w_1) ds. \quad (10)$$

Введем обозначения

$$a_0 = (u_0, w_1) \geq 0, \quad b_0 = (v_0, w_1) \geq 0 \quad (11)$$

и положим

$$P(t) = (u^{v+1}(t), w_1)^{1/(v+1)}, \quad R(t) = (v^{\mu+1}(t), w_1)^{1/(\mu+1)}. \quad (12)$$

Из неравенства Гёльдера и (8) следует, что

$$\begin{aligned} (u(t), w_1) &\leq (u^{v+1}(t), w_1)^{1/(v+1)} = P(t), \\ (v(t), w_1) &\leq (v^{\mu+1}(t), w_1)^{1/(\mu+1)} = R(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Кроме того, учитывая, что $p \geq 1 + \mu$, $q \geq 1 + v$, получаем

$$(v^p(t), w_1) \geq R^p(t), \quad (u^q(t), w_1) \geq P^q(t). \quad (14)$$

Используя обозначения (11), (12) и оценки (13), (14), заключаем, что решение задачи (1)–(4) удовлетворяет при всех допустимых $t > 0$ системе неравенств

$$P(t) - a_0 \geq -\lambda_1 \int_0^t P^{v+1}(s) ds + \int_0^t R^p(s) ds, \quad (15)$$

$$R(t) - b_0 \geq -\lambda_1 \int_0^t R^{\mu+1}(s) ds + \int_0^t P^q(s) ds. \quad (16)$$

Рассмотрим наряду с (15), (16) следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$d\bar{P}/dt = -\lambda_1 \bar{P}^{v+1} + \bar{R}^p, \quad (17)$$

$$d\bar{R}/dt = -\lambda_1 \bar{R}^{\mu+1} + \bar{P}^q, \quad t > 0. \quad (18)$$

Пусть функции \bar{P} , \bar{R} удовлетворяют условиям

$$\bar{P}(0) = a_0 \geq 0, \quad \bar{R}(0) = b_0 \geq 0. \quad (19)$$

Непосредственное сопоставление (15), (16) с задачей (17)–(19) показывает, что при всех допустимых t выполнены неравенства

$$P(t) \geq \bar{P}(t), \quad R(t) \geq \bar{R}(t). \quad (20)$$

Таким образом, система уравнений (17), (18) в силу (20) позволяет определить условия, при которых функции $P(t)$, $R(t)$ не могут быть одновременно ограниченными при всех $t > 0$, т. е. $\lim \max \{P(t), R(t)\} = \infty$, $t \rightarrow T_0^- < \infty$. Последнее в силу неравенств

$$P(t) \leq \|u^{v+1}\|_{L^2(\Omega)}^{1/(v+1)} \|w_1\|_{L^2(\Omega)}^{1/(v+1)},$$

$$R(t) \leq \|v^{\mu+1}\|_{L^2(\Omega)}^{1/(\mu+1)} \|w_1\|_{L^2(\Omega)}^{1/(\mu+1)}$$

обеспечивает выполнение (5).

1.2. Случай $p = 1 + \mu$, $q = 1 + v$.

Теорема 1. Пусть $p = 1 + \mu$, $q = 1 + v$ и $u_0 + v_0 \neq 0$ в Ω . Пусть, кроме того, область Ω такова, что

$$\lambda_1 < 1. \quad (21)$$

Тогда задача (1)–(4) не имеет глобального решения, и при некотором $T_0 < \infty$ выполняется условие (5).

Доказательство. Положим $E(t) = \bar{P}(t) + \bar{R}(t)$. Складывая уравнения (17) и (18) при $p = 1 + \mu$, $q = 1 + \nu$, получаем, что E удовлетворяет уравнению

$$dE/dt = (1 - \lambda_1)[\bar{P}^{1+\nu} + \bar{R}^{1+\mu}], \quad t > 0, \quad (22)$$

причем по предположению $E(0) = (u_0 + v_0, w_1) > 0$.

Необходимо рассмотреть два случая.

а) Пусть $\mu = \nu$. Тогда, используя неравенство

$$1 + \xi^{1+\nu} \geq 2^{-\nu}(1 + \xi)^{1+\nu}, \quad \xi \geq 0, \quad (23)$$

с учетом (21) из (22) получаем

$$dE/dt \geq (1 - \lambda_1)2^{-\nu}[\bar{P} + \bar{R}]^{1+\nu} \equiv (1 - \lambda_1)2^{-\nu}E^{1+\nu}, \quad t > 0.$$

Отсюда следует существование момента времени $t = T_0 \leq T_*$, где

$$T_* = \frac{2^\nu}{\nu(1 - \lambda_1)} E^{-\nu}(0) < \infty,$$

такого, что $E(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$. Следовательно, решение краевой задачи является неограниченным в смысле (5).

б) Пусть $\mu \neq \nu$ и для определенности $\mu > \nu$. Тогда, используя неравенство Юнга

$$\bar{R}^{1+\mu} \geq \varepsilon \bar{R}^{1+\nu} - \varepsilon^{(\mu+1)/(\mu-\nu)} A_0,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная и

$$A_0 = \frac{\mu - \nu}{\mu + 1} \left(\frac{1 + \nu}{1 + \mu} \right)^{(1+\nu)/(\mu-\nu)} > 0,$$

из (22) получаем

$$dE/dt \geq (1 - \lambda_1)[\bar{P}^{1+\nu} + \varepsilon \bar{R}^{1+\nu}] - (1 - \lambda_1)A_0 \varepsilon^{(\mu+1)/(\mu-\nu)}. \quad (24)$$

Пусть $\varepsilon \leq 1$. Тогда из (24) с помощью (23) выводим такую оценку:

$$dE/dt \geq (1 - \lambda_1)\varepsilon 2^{-\nu}E^{1+\nu} - (1 - \lambda_1)\varepsilon^{(\mu+1)/(\mu-\nu)}A_0. \quad (25)$$

Положим

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \min \{1, [2^{-\nu-1}E^{1+\nu}(0)/A_0]^{(\mu-\nu)/(1+\nu)}\}.$$

Тогда при всех $E \geq E(0)$ правая часть (25) положительна, и поэтому $E(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$, где $T_0 \leq T_*$,

$$T_* = \frac{2^\nu}{\varepsilon_0(1 - \lambda_1)} \int_{E(0)}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^{1+\nu} - 2^\nu A_0 \varepsilon_0^{(\mu+1)/(\mu-\nu)}} < \infty.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае множество неустойчивости \mathcal{U} совпадает со всем пространством $\{u_0, v_0 | u_0 + v_0 \neq 0\}$.

Этот же результат нетрудно получить другим способом. На рис. 80 приведено схематическое изображение поля интегральных кривых эквивалентного системе (17), (18) уравнения первого порядка:

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{R}} = \frac{\tilde{R}^{1+\mu} - \lambda_1 \tilde{P}^{1+\nu}}{\tilde{P}^{1+\nu} - \lambda_1 \tilde{R}^{1+\mu}}, \quad \tilde{P} > 0, \quad \tilde{R} > 0, \quad (26)$$

в случае $\lambda_1 < 1$, $\mu > \nu$. Штриховой линией указана изоклина нуля \tilde{P}_0 : $\tilde{P} = [\lambda_1^{-1} \tilde{R}^{1+\mu}]^{1/(1+\nu)}$, штрихпунктирной — изоклина бесконечности \tilde{P}_∞ : $\tilde{P} = [\lambda_1 \tilde{R}^{1+\mu}]^{1/(1+\nu)}$. Жирной линией выделена особая траектория — сепаратриса \tilde{P}_s : $\tilde{P} = \tilde{P}_s(\tilde{R})$. При больших \tilde{R}

$$\tilde{P}_s(\tilde{R}) = \lambda_1^{1/(1+\nu)} \tilde{R}^{(1+\mu)/(1+\nu)} + \frac{1 - \lambda_1^2}{\lambda_1} \frac{\tilde{R}}{1 + \mu} + \quad (27)$$

С изменением времени (направление эволюции траекторий указано стрелками) все интегральные кривые собираются в пучок, располагающийся во все сужающейся окрестности сепаратрисы \tilde{P}_s , что в силу (27) обеспечивает неограниченное возрастание функций $\tilde{P}(t)$, $\tilde{R}(t)$ в течение конечного времени.

Для сравнения на рис. 81 приведено поле интегральных кривых того же уравнения (26), но в случае $\lambda_1 > 1$. Здесь функции \tilde{P} , \tilde{R} ограничены при всех $t > 0$ и, более того, $\tilde{P}(t)$, $\tilde{R}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Это в какой-то степени свидетельствует о глобальной разрешимости задачи (доказательство проведено в п. 3).

1.3. Случай $p > 1 + \mu$, $q > 1 + \nu$. Пусть по-прежнему $E(t) = \tilde{P}(t) + \tilde{R}(t)$. Из (17), (18) следует, что

$$dE/dt = -\lambda_1 [\tilde{P}^{\nu+1} + \tilde{R}^{\mu+1}] + \tilde{R}^p + \tilde{P}^q, \quad t > 0. \quad (28)$$

С помощью неравенства Юнга оценим \tilde{P}^q , \tilde{R}^p :

$$\tilde{P}^q \geq (1 + \lambda_1) \tilde{P}^{\nu+1} - A_0, \quad \tilde{R}^p \geq (1 + \lambda_1) \tilde{R}^{\mu+1} - B_0,$$

где A_0 , B_0 — постоянные:

$$A_0 = \frac{q - (\nu + 1)}{\nu + 1} \left[\frac{(\nu + 1)(1 + \lambda_1)}{q} \right]^{q/[q - (\nu + 1)]}$$

$$B_0 = \frac{p - (\mu + 1)}{\mu + 1} \left[\frac{(\mu + 1)(1 + \lambda_1)}{p} \right]^{p/[p - (\mu + 1)]}$$

Из (28) тогда получим

$$dE/dt \geq \tilde{P}^{\nu+1} + \tilde{R}^{\mu+1} - C_0, \quad t > 0; \quad C_0 = A_0 + B_0. \quad (29)$$

Если $\mu = \nu$, то из (29) с помощью (23) выводим неравенство

$$dE/dt \geq 2^{-\nu} E^{\nu+1} - C_0, \quad t > 0. \quad (30)$$

Если же $\mu \neq \nu$, то, полагая для определенности $\mu > \nu$, из (29) с помощью оценки

$$\tilde{R}^{\mu+1} \geq \tilde{R}^{\nu+1} - D_0, \quad D_0 = \frac{\mu - \nu}{\mu + 1} \left(\frac{\nu + 1}{\mu + 1} \right)^{(\nu+1)/(\mu-\nu)}$$

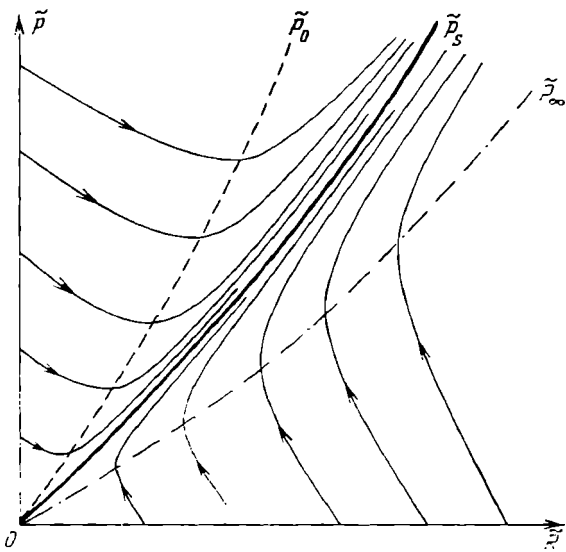


Рис. 80. Фазовая плоскость в случае $p = 1 + \mu$, $q = 1 + \nu$, $\lambda_1 < 1$

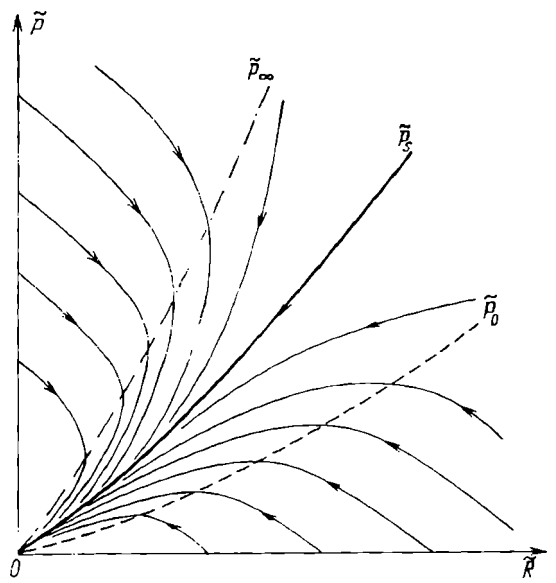


Рис. 81. Фазовая плоскость в случае $p = 1 + \mu$, $q = 1 + \nu$, $\lambda_1 > 1$

получаем

$$dE/dt \geq 2^{-\nu} E^{\nu+1} - (C_0 + D_0), \quad t > 0. \quad (31)$$

Легко видеть, что правая часть этого неравенства допускает предельный переход $\mu \rightarrow \nu^+$, т. е. при $\mu = \nu$ оно совпадает с (30). Тем самым доказана

Теорема 2. Пусть $p > 1 + \mu$, $q > 1 + \nu$ и для определенности $\mu \geq \nu$. Пусть начальные функции u_0, v_0 таковы, что

$$E(0) = (u_0 + v_0, w_1) > 2^{\nu/(\nu+1)} (C_0 + D_0)^{1/(1+\nu)}. \quad (32)$$

Тогда задача (1)–(4) не имеет глобального решения, и при некотором $T_0 \leq T_*$, где

$$T_* = 2^\nu \int_{E(0)}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^{1+\nu} - 2^\nu (C_0 + D_0)} < \infty,$$

выполняется условие (5).

Разумеется, функциями u_0, v_0 , удовлетворяющими условию (32), не исчерпывается все множество неустойчивости \mathcal{U} Теорема 2, хотя в ней и указана оценка сверху для T_0 , не использует всей информации, заложенной в системе (17), (18). Более полное и наглядное представление о множестве \mathcal{U} дает анализ поля интегральных кривых уравнения

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{R}} = \frac{\tilde{R}^p - \lambda_1 \tilde{P}^{\nu+1}}{\tilde{P}^q - \lambda_1 \tilde{R}^{\mu+1}}, \quad \tilde{P} > 0, \quad \tilde{R} > 0, \quad (33)$$

эквивалентного этой системе.

Оно схематически изображено на рис. 82, где выделены изо-клины нуля \tilde{P}_0 : $\tilde{P} = [\lambda_1^{-1} \tilde{R}^p]^{1/(\nu+1)}$, бесконечности \tilde{P}_∞ : $\tilde{P} = [\lambda_1 \tilde{R}^{\mu+1}]^{1/q}$ и жирными линиями — сепаратрисы $A - B$, $C - D$. К множеству неустойчивости \mathcal{U} относятся все точки $\{\tilde{P}, \tilde{R}\} = \{(u_0, w_1), (v_0, w_1)\}$, расположенные выше сепаратрисы $A - B$. Лежащие здесь траектории сходятся при $\tilde{P}, \tilde{R} \rightarrow \infty$ к сепаратрисе $C - D$, что обеспечивает неограниченное возрастание функций $\tilde{P}(t), \tilde{R}(t)$ в течение конечного времени.

Отметим, что поведение интегральных кривых, лежащих ниже сепаратрисы $A - B$, указывает на наличие у рассматриваемой задачи множества устойчивости \mathcal{W} . Здесь оно характеризуется тем, что $\tilde{P}(t), \tilde{R}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Обоснованное построение множества \mathcal{W} проводится в п. 2.

З а м е ч а н и е. При выводе системы уравнений (17), (18) использовались ограничения $p \geq 1 + \mu$, $q \geq 1 + \nu$ (см. (14)). Тем не менее фазовая плоскость системы (17), (18) правильно отражает характерное поведение решения исходной задачи (1)–(4) при произвольных значениях параметров. Нетрудно убедиться, что вид фазовой картины зависит от знака единственного параметра $m = pq - (1 + \mu)(1 + \nu)$, что правильно согласуется с результатами, полученными в дальнейшем.

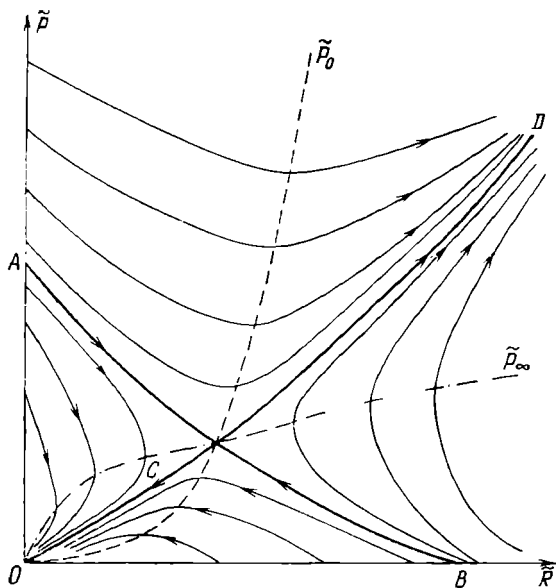


Рис. 82. Фазовая плоскость в случае $p > 1 + \mu$, $q > 1 + \nu$

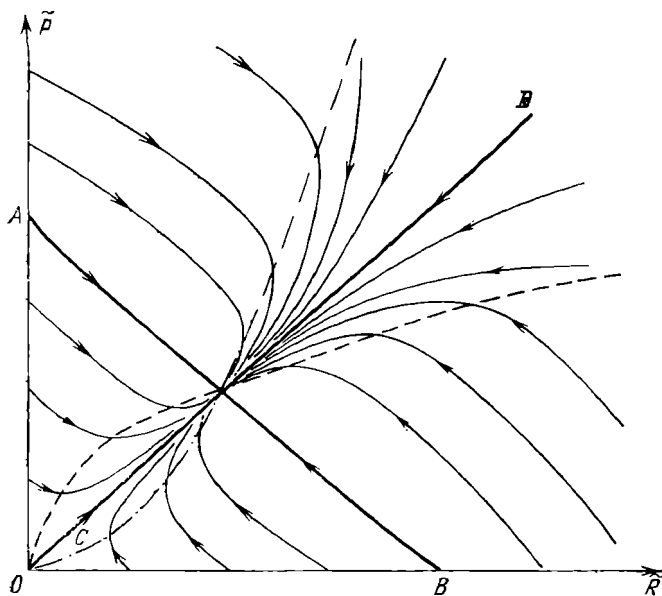


Рис. 83. Фазовая плоскость в случае $pq < (1 + \mu)(1 + \nu)$

а) Если $m = 0$, т. е. $pq = (1 + \mu)(1 + \nu)$, то неразрешимость в целом и глобальная разрешимость задачи при произвольных u_0, v_0 имеют место соответственно в случаях $\lambda_1 < 1$ и $\lambda_1 > 1$; фазовые портреты системы для этих двух случаев совпадают с изображенными на рис. 80, 81 (см. п. 3).

б) Если $m > 0$, т. е. $pq > (1 + \mu)(1 + \nu)$, то, как следует из анализа системы (17), (18), существуют непустые множества устойчивости и неустойчивости (см. рис. 82 и п. 2).

в) В случае $m = pq - (1 + \mu)(1 + \nu) < 0$ фазовая плоскость принимает вид, изображенный на рис. 83. Здесь нет траекторий, которым бы отвечали неограниченные решения, т. е. множество устойчивости может совпадать со всем пространством начальных функций (см. п. 3).

Отметим, что методом Галёркипа, который применялся в § 2 при исследовании параболических уравнений, указанные выше результаты в полном объеме получить не удастся. Грубо говоря, при использовании этой техники вывода априорных оценок решения «управляющий» параметр $m = pq - (1 + \mu)(1 + \nu)$ не возникает. Например, условие глобальной разрешимости системы при произвольных u_0, v_0 представляет собой два неравенства: $p < 1 + \mu$, $q < 1 + \nu$. Разумеется, эта область параметров гораздо уже, чем (оптимальное) множество $pq < (1 + \mu)(1 + \nu)$.

2. Множество устойчивости при $pq > (1 + \mu)(1 + \nu)$. В дальнейшем будем считать, что функции u, v принадлежат $C_{tx}^{1,2}$ всюду, где они положительны, и имеют в Ω непрерывные производные $\nabla u^{1+\nu}$, $\nabla v^{1+\mu}$ (довольно естественные предположения; см. § 3 гл. I). Тогда решение задачи подчиняется принципу максимума и монотонно зависит от начальных функций.

Множество устойчивости будет определено двумя способами. При реализации первого из них возникают некоторые (как потом будет показано, несущественные) ограничения на параметры задачи; этот анализ позволяет рассмотреть довольно любопытные свойства стационарных решений задачи (1), (2), (4).

2.1. Стационарное решение. Пусть $pq > (1 + \mu)(1 + \nu)$. Рассмотрим функции U, V — решение стационарной системы уравнений (1), (2), которую для удобства запишем в виде

$$\Delta(|U|^\nu U) + |V|^{p-1} V = 0, \quad (34)$$

$$\Delta(|V|^\mu V) + |U|^{q-1} U = 0, \quad x \in \Omega \quad (35)$$

(очевидно, что при положительных U, V эта система совпадает с исходной). Функции U, V удовлетворяют условиям

$$U(x) = 0, \quad V(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (36)$$

Сделаем замены $|U|^\nu U \rightarrow U$, $|V|^\mu V \rightarrow V$. Тогда для новых функций U, V получим задачу

$$\Delta U + |V|^{q-1} V = 0, \quad \Delta V + |U|^{p-1} U = 0, \quad x \in \Omega, \quad (37)$$

$$U = V = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (38)$$

Вдесь введены обозначения $\alpha = p/(\mu + 1)$, $\beta = q/(v + 1)$ (отметим, что $\alpha\beta > 1$). Выражая из первого уравнения $V = -|\Delta U|^{1/\alpha-1}\Delta U$ и подставляя во второе, приходим к следующей задаче для функции U :

$$-\Delta(|\Delta U|^{1/\alpha-1}\Delta U) + |U|^{\beta-1}U = 0, \quad x \in \Omega, \quad (39)$$

$$U = \Delta U = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (40)$$

Условия разрешимости этой задачи можно получить, например, на основе метода сферического расслоения [147, 148]. Конечный результат будет таков.

Лемма 1. Пусть $1/\alpha < \beta < \infty$ при $N \leq 2(1 + 1/\alpha)$ и

$$\frac{1}{\alpha} < \beta < \left[\frac{N}{\alpha} + 2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right] \left[N - 2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right]^{-1} \quad N > 2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right). \quad (41)$$

Тогда задача (39), (40) имеет классическое решение $U \in C^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$, причем $U > 0$ в Ω .

В сделанных предположениях задача (39), (40) имеет счетное множество различных нетривиальных обобщенных решений [147]. Неотрицательность в Ω одного из них вытекает из постановки соответствующей вариационной задачи. Строгая положительность в Ω неотрицательного решения устанавливается с помощью эквивалентного интегрального уравнения, полученного в результате обращения оператора $-\Delta(|\Delta U|^{1/\alpha-1}\Delta U)$:

$$U(x) - \int_{\Omega} G(x, y) \left\{ \left| \int_{\Omega} G(y, z) (|U|^{\beta-1}U)(z) dz \right|^{\alpha-1} \times \right. \\ \left. \times \int_{\Omega} G(y, z) (|U|^{\beta-1}U)(z) dz \right\} dy = 0. \quad (42)$$

Здесь G — функция Грина оператора $-\Delta U$, $U = 0$ на $\partial\Omega$ (напомним, что $G > 0$ в $\Omega \times \Omega$).

Мы вправе заключить, что U является классическим (положительным) в Ω решением [129, 145, 186]. Тогда функция

$$V = -|\Delta U|^{1/\alpha-1}\Delta U \equiv \int_{\Omega} G(x, y) U^{\beta}(y) dy \quad (43)$$

также является положительной в Ω , принадлежит $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет (35) в обычном смысле.

Важно отметить, что ограничение (41) действительно является существенным, что показывает следующее

Предложение 1. Пусть область Ω является звездной относительно точки $x = 0$. Пусть выполняется противоположное (41) неравенство: $N > 2(1 + 1/\alpha)$ и

$$\beta > [N/\alpha + 2(1 + 1/\alpha)] [N - 2(1 + 1/\alpha)]^{-1}. \quad (44)$$

Тогда задача (39), (40) не имеет нетривиального неотрицательного решения.

Доказательство. Следуя [144, 145], умножим скалярно в $L^2(\Omega)$ обе части уравнения (39) на функцию $w(x) = \sum_{i=1}^N x_i U_{x_i}$. Тогда, учитывая краевые условия, с помощью формулы Грина получаем

$$\begin{aligned} 0 &= -(\Delta(|\Delta U|^{1/\alpha-1} \Delta U), w) + (U^\beta, w) = \\ &= -(|\Delta U|^{1/\alpha-1} \Delta U, \Delta w) - \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial}{\partial n} (|\Delta U|^{1/\alpha-1} \Delta U) ds - \\ &\quad - \frac{N}{\beta+1} \|U\|_{L^{\beta+1}(\Omega)}^{\beta+1}, \end{aligned} \quad (45)$$

где $\partial/\partial n$ — обозначение производной по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$.

Нетрудно убедиться, что

$$w(x) \leq 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} (|\Delta U|^{1/\alpha-1} \Delta U)(x) \geq 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Это следует из звездности Ω относительно $x=0$, краевых условий (40), а также предположений $U \geq 0$, $\Delta U \leq 0$ (см. (43)) в Ω . Поэтому

$$- \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial}{\partial n} (|\Delta U|^{1/\alpha-1} \Delta U) ds \geq 0, \quad (46)$$

и тогда из (45) с помощью легко проверяемого тождества

$$-(|\Delta U|^{1/\alpha-1} \Delta U, \Delta w) \equiv \left(\frac{N}{1+1/\alpha} - 2 \right) \|\Delta U\|_{L^{1+1/\alpha}(\Omega)}^{1+1/\alpha}$$

получаем неравенство

$$\left(\frac{N}{1+1/\alpha} - 2 \right) \|\Delta U\|_{L^{1+1/\alpha}(\Omega)}^{1+1/\alpha} - \frac{N}{\beta+1} \|U\|_{L^{\beta+1}(\Omega)}^{\beta+1} \leq 0. \quad (47)$$

С другой стороны, из (39) после скалярного умножения на U и интегрирования по частям имеем

$$\|U\|_{L^{\beta+1}(\Omega)}^{\beta+1} = \|\Delta U\|_{L^{1+1/\alpha}(\Omega)}^{1+1/\alpha},$$

и поэтому (47) означает, что должно выполняться неравенство

$$\left(\frac{N}{1+1/\alpha} - 2 - \frac{N}{\beta+1} \right) \|\Delta U\|_{L^{1+1/\alpha}(\Omega)}^{1+1/\alpha} \leq 0. \quad (48)$$

Однако при выполнении (44) левая часть (48) неотрицательна, и, следовательно, единственным подходящим решением может быть только функция $U \equiv 0$.

Отметим, что сильный принцип максимума в этом случае дает строгое неравенство в (46) и, значит, в (48), так что данное предложение справедливо, когда в (44) имеет место равенство.

2.2. Семейство стационарных решений. Пусть U — положительное в Ω решение задачи (39), (40), указанное

в лемме 1. Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получаем, что функции

$$U_1(x) = U^{1/(1+\nu)}(x), \quad V_1(x) = V^{1/(1+\mu)}(x)$$

являются решением задачи (34) — (36).

Пусть область Ω является звездной относительно точки $x = 0$ (т. е. из условия $x \in \Omega$ следует, что $ax \in \Omega$ при любых $a \in (0, 1)$). Петрудно видеть, что семейство функций

$$\begin{aligned} U_a(x) &= a^{2(p+\mu+1)/(pq-(\nu+1)(\mu+1))} U_1(ax), \\ V_a(x) &= a^{2(q+\nu+1)/(pq-(\nu+1)(\mu+1))} V_1(ax), \end{aligned} \quad (49)$$

где $a \in (0, 1)$ — произвольная постоянная (параметр семейства), удовлетворяет уравнениям (34), (35) и строго положительно в областях Ω_a с границей $\partial\Omega_a = \{x | ax \in \partial\Omega\}$, причем $U_a = V_a = 0$ на $\partial\Omega_a$. Отметим, что $\Omega \subset \Omega_a$ при любых $a \in (0, 1)$, так что $U_a > 0$, $V_a > 0$ на $\partial\Omega$.

Теперь с помощью семейства (49) мы можем определить множество устойчивости \mathscr{W} задачи (1) — (4).

2.3. Множество устойчивости при $pq > (1 + \mu)(1 + \nu)$.

Теорема 3. Пусть $p > 1$, $q > 1$ и, кроме того,

$$\frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{p} < q < \infty \quad \text{при} \quad N \leq 2 \left(1 + \frac{\mu + 1}{p} \right),$$

$$\frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{p} < q < (1 + \nu) \frac{N(1 + \mu)/p + 2(1 + (1 + \mu)/p)}{N - 2(1 + (1 + \mu)/p)}$$

$$\text{при} \quad N > 2 \left(1 + \frac{\mu + 1}{p} \right). \quad (50)$$

Тогда существует непустое множество устойчивости $\mathscr{W} = \{(u_0, v_0) | u_0 \geq 0, v_0 \geq 0; \exists a \in (0, 1): u_0 \leq U_a, v_0 \leq V_a \text{ в } \Omega\}$, так что если $(u_0, v_0) \in \mathscr{W}$, то задача (1) — (4) имеет глобальное (ограниченное) решение.

Доказательство. Справедливость теоремы следует из принципа максимума. В сделанных предположениях относительно гладкости решения всюду в $\mathbf{R}_+ \times \bar{\Omega}$ выполняются неравенства $u \leq U_a$, $v \leq V_a$, где величина параметра $a \in (0, 1)$ выбрана из условия $u_0 \leq U_a$, $v_0 \leq V_a$ в Ω .

Замечание. Условия $p > 1$, $q > 1$ фактически связаны с требованием единственности решения задачи. Есть основание ожидать, что последнее имеет место при выполнении лишь одного условия $pq \geq 1$ (по крайней мере, при $pq \geq 1$ пространственно однородная задача $u' = v^p$, $v' = u^q$, $t > 0$; $u(0) = v(0) = 0$ имеет только тривиальное решение; если же $pq < 1$, то существуют и нетривиальные решения).

2.4. Другой способ построения множества устойчивости. Покажем теперь, что непустое множество устойчивости \mathscr{W} существует при выполнении лишь одного требования $pq > (1 + \mu)(1 + \nu)$ без ограничения типа (50).

Предварительно рассмотрим один пример, который отчасти поясняет, почему отсутствие положительного стационарного решения задачи не является столь существенным.

Пример. Пусть $N > 4$, $p = 1 + \mu$, $q = (1 + \nu)(N + 4)/(N - 4)$, т. е. условие (50) не выполнено. При указанных значениях параметров $\alpha = 1$, $\beta = (N + 4)/(N - 4) > 1$, и поэтому крайняя задача (39), (40) может не иметь решения. Однако в этом случае уравнение (39)

$$-\Delta^2 U + |U|^{(N+4)/(N-4)-1} U = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad N > 4,$$

имеет строго положительное решение

$$U(x) = C_N(a)/(a^2 + |x|^2)^{(N-4)/2} > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

где $C_N(a) = [a^4 N(N-4)(N^2-4)]^{(N-4)/8}$, $a > 0$ — произвольная постоянная.

Очевидно, что построенное на его основе семейство положительных стационарных решений исходной системы (34), (35)

$$U_a(x) = [C_N(a)]^{1/(1+\nu)} / (a^2 + |x|^2)^{(N-4)/[2(1+\nu)]},$$

$$V_a(x) \equiv [-\Delta U(x)]^{1/(1+\mu)} =$$

$$= \frac{[2C_N(a)(N-4)]^{1/(1+\mu)} (Na^2/2 + |x|^2)^{1/(1+\mu)}}{(a^2 + |x|^2)^{N/[2(1+\mu)]}} \quad (51)$$

можно использовать для построения множества \mathscr{W} , поскольку $U_a > 0$, $V_a > 0$ в Ω . Оно будет иметь почти такой же вид: $\mathscr{W} = \{(u_0, v_0) | u_0 \geq 0, v_0 \geq 0; \exists a > 0: u_0 \leq U_a, v_0 \leq V_a \text{ в } \Omega\}$.

Отметим, что семейство положительных в \mathbf{R}^N функций (51) аналогичным образом определяет множество устойчивости задачи Коши для системы (1), (2).

Нетрудно показать, что при всех значениях β , парующих условие (41) ($\alpha = p/(\mu + 1)$, $\beta = q/(\nu + 1)$), система (34), (35) имеет семейство решений, строго положительных в \mathbf{R}^N . Например, из предложения 1 (п. 2.1) прямо следует, что в этом случае всюду положительным будет любое радиально симметричное решение (см. п. 4.1 § 3 гл. IV). С помощью такого семейства стационарных решений в \mathbf{R}^N легко определяется множество устойчивости \mathscr{W} . Однако мы поступим по-другому.

На самом деле для определения \mathscr{W} в краевой задаче достаточно убедиться только в локальной разрешимости системы (34), (35), например при достаточно малых $|x|$. Справедливо следующее простое утверждение, которое неоднократно используется в дальнейшем.

Лемма 2. При произвольных $p, q, \mu, \nu > 0$ система (34), (35) имеет в шаре $\omega_1 = \{x | |x| < \sqrt{2N}\}$ строго положительное радиально симметричное монотонно убывающее решение $U_1(r)$, $V_1(r)$, $r = |x|$, удовлетворяющее условиям

$$U(0) = V(0) = 1, \quad U'(0) = V'(0) = 0. \quad (52)$$

При этом справедливы оценки

$$U_1(r) \geq \left(1 - \frac{r^2}{2N}\right)^{1/(\nu+1)} \quad V_1(r) \geq \left(1 - \frac{r^2}{2N}\right)^{1/(\mu+1)} \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2N}. \quad (53)$$

Локальная разрешимость и указанные свойства функций U_1 , V_1 вытекают из эквивалентного задачи интегрального уравнения

$$U^{\nu+1}(r) = 1 - \int_0^r \frac{d\rho}{\rho^{N-1}} \int_0^\rho \zeta^{N-1} d\zeta \left[1 - \int_0^\zeta \frac{d\eta}{\eta^{N-1}} \int_0^\eta \xi^{N-1} U^q(\xi) d\xi \right]^{p/(\mu+1)}$$

к которому применяется теорема Банаха о сжимающих отображениях.

Функции $U_1(r)$, $V_1(r)$ определяют в соответствии с (49) однопараметрическое семейство стационарных решений системы (1), (2). Положим $\omega_a = \{x | ax \in \omega_1\}$. Тогда U_a , V_a при любых $a > 0$ определены и строго положительны в ω_a . Теперь мы можем определить множество устойчивости без дополнительных ограничений на параметры задачи.

Теорема 4. Пусть $pq > (1 + \mu)(1 + \nu)$. Тогда задача (1) — (4) имеет непустое множество устойчивости

$$\mathscr{W} = \{(u_0, v_0) | u_0 \geq 0, v_0 \geq 0; \exists a > 0: \Omega \subseteq \omega_a; u_0 \leq U_a, v_0 \leq V_a \text{ в } \Omega\}. \quad (54)$$

Используя оценки (53), можно указать более узкое, чем (54), но очень наглядное множество устойчивости:

$$\begin{aligned} \mathscr{W}' &= \{(u_0, v_0) | u_0 \geq 0, v_0 \geq 0; \exists a > 0: \Omega \subseteq \{x | |x| < \sqrt{2N}/a\}; \\ u_0(x) &\leq a^{2(p+\mu+1)/m} \left(1 - \frac{a^2|x|^2}{2N}\right)^{1/(\nu+1)} \\ v_0(x) &\leq a^{2(q+\nu+1)/m} \left(1 - \frac{a^2|x|^2}{2N}\right)^{1/(\mu+1)} \text{ в } \Omega; \\ m &= pq - (\mu + 1)(\nu + 1) > 0\}. \end{aligned} \quad (55)$$

3. Условия глобальной разрешимости краевой задачи при $pq \leq (1 + \mu)(1 + \nu)$. Как и раньше, основной аппарат — анализ семейства стационарных решений.

3.1. Случай $pq < (1 + \mu)(1 + \nu)$.

Теорема 5. Пусть $pq < (1 + \mu)(1 + \nu)$, $p > 1$, $q > 1$. Тогда краевая задача (1) — (4) имеет глобальное (равномерно по t ограниченное) решение при произвольных начальных функциях u_0 , v_0 .

Доказательство. Нам понадобится единственное свойство функций U_a , V_a из семейства (49) (U_1 , V_1 определены в лемме 2): $U_a \rightarrow \infty$, $V_a \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow 0^+$ в \mathbb{R}^N . Это означает, что множество устойчивости (54) (или (55)) охватывает все пространство начальных функций. Другими словами, в случае любой ограниченной области Ω при произвольных $u_0, v_0 \in C(\bar{\Omega})$ всегда можно указать такое $a > 0$, что, во-первых, $\bar{\Omega} \subset \omega_a = \{x | ax \in \omega_1\}$

и, во-вторых, $u_0(x) \leq U_a(x)$, $v_0(x) \leq V_a(x)$ в Ω . Тогда, поскольку $U_a > 0$, $V_a > 0$ на $\partial\Omega$ (т. е. всегда $u < U_a$, $v < V_a$ на $\partial\Omega$), в силу принципа максимума заключаем, что $u \leq U_a$, $v \leq V_a$ в $\mathbf{R}_+ \times \bar{\Omega}$, и тем самым решение ограничено сверху равномерно по t .

3.2. Случай $pq = (1 + \mu)(1 + \nu)$. Здесь ситуация совсем другая: существование решения задачи (1)–(4) в целом зависит от разрешимости системы стационарных уравнений (34), (35) с условиями (36). Ниже доказан следующий простой (но не оптимальный по виду допустимых областей Ω) результат.

Теорема 6. Пусть $pq = (1 + \mu)(1 + \nu)$, $p > 1$, $q > 1$, и пусть диаметр D_Ω области Ω удовлетворяет условию

$$D_\Omega < \sqrt{2N}. \quad (56)$$

Тогда задача (1)–(4) имеет глобальное решение при любых начальных функциях u_0, v_0 .

Доказательство. При $pq = (1 + \mu)(1 + \nu)$ функции (49) не определены. В этом случае существует семейство стационарных решений

$$U_a(x) = aU_1(r) > 0, \quad V_a(x) = a^{q/(q+1)}V_1(r) > 0, \quad x \in \omega_1, \quad (57)$$

где $a > 0$ — параметр, функции U_1, V_1 определены в лемме 2. Отсюда непосредственно следует, что

$$U_a(x) \rightarrow \infty, \quad V_a(x) \rightarrow \infty \quad \text{в } \omega_1 \quad \text{при } a \rightarrow \infty. \quad (57')$$

Условие (56) означает, что область Ω можно поместить в шар радиуса $\sqrt{2N}$. Без ограничения общности будем считать, что $\bar{\Omega} \subset \omega_1$. Но тогда в силу (57') для любых $u_0, v_0 \in C(\bar{\Omega})$ найдется такое достаточно большое $a > 0$, что $u \leq U_a$, $v \leq V_a$ в Ω при $t = 0$, и, поскольку $\bar{\Omega} \subset \omega_1$ (т. е. $U_a, V_a > 0$ на $\partial\Omega$), эти неравенства остаются справедливыми при всех $t > 0$.

З а м е ч а н и е. По-видимому, необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (37), (38) при $\alpha\beta = 1$ является неравенство $\lambda_1 > 1$. Существование положительного решения задачи (37), (38), как показывает доказательство теоремы 6, влечет за собой глобальную разрешимость краевой задачи (1)–(4) при $pq = (1 + \mu)(1 + \nu)$ практически при любых u_0, v_0 . Отметим, что это же условие $\lambda_1 > 1$ было ранее получено на качественном уровне в п. 1.

4. О локализации неограниченных решений задачи Коши. Оказывается, пространственная структура семейства стационарных решений содержит информацию о довольно тонком свойстве неограниченных решений задачи Коши для системы (1), (2) — свойстве локализации.

Неограниченное решение задачи Коши для (1), (2) с финитными начальными функциями

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0, x) = v_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}^N; \quad (58)$$

$$u_0, v_0 \in C(\mathbf{R}^N), \quad u_0^{v+1} \in H_0^1(\mathbf{R}^N), \quad v_0^{u+1} \in H_0^1(\mathbf{R}^N),$$

Будем называть *локализованным*, если при всех $t \in [0, T)$, где $T_0 < \infty$ — время существования решения, функции $u(t, x)$, $v(t, x)$ отличны от нуля внутри некоторого шара $\{|x| < L < \infty\}$ [L не зависит от t] и тождественно равны нулю при $|x| \geq L$.

Если же при $t \rightarrow T_0^-$ (т. е. по мере возрастания решения до бесконечности) возмущения проникают как угодно далеко от точки $x = 0$, то *локализация* в задаче Коши *отсутствует*.

Мы не будем здесь определять условия, при которых решение задачи Коши является неограниченным, поскольку главная цель в другом. Это можно сравнительно просто сделать, например, путем построения, как в § 3 гл. IV, неограниченных нижних решений системы. Отметим, что все результаты, полученные в п. 1 (теоремы 1, 2), относятся также к задаче Коши, так как всякое неограниченное решение краевой задачи в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является нижним решением задачи Коши.

Эффект локализации в задаче Коши для систем уравнений в ряде случаев удобно изучать с помощью построения автомодельных решений (см. § 4). Однако такие решения существуют не при всех значениях параметров. Так, для системы (1), (2) автомодельные решения возможны лишь при $v(p+1) = \mu(q+1)$. Кроме того, вопрос о существовании и тем более асимптотической устойчивости неограниченных автомодельных решений систем уравнений остается в значительной степени открытым.

4.1. Основной результат (условие возникновения HS-режима с обострением). С помощью анализа семейства стационарных решений удастся получить достаточное условие отсутствия локализации в задаче Коши, которое, по-видимому, является необходимым.

Теорема 7. Пусть $pq < (1+\mu)(1+\nu)$, $p > 1$, $q > 1$. Тогда любое неограниченное решение задачи Коши (1), (2), (58) не является локализованным.

Замечание. Из сравнения с пространственно однородными решениями системы (1), (2), удовлетворяющими уравнениям

$$u' = v^p, \quad v' = u^q, \quad t > 0, \quad (59)$$

вытекает, что необходимым условием существования неограниченных решений задачи Коши является неравенство $pq > 1$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\lim \max \{u(t, 0), v(t, 0)\} = \infty$, $t \rightarrow T_0^- < \infty$. Рассмотрим семейство стационарных решений (49), где U_a, V_a определены в лемме 2. В силу условия $pq < (1+\mu)(1+\nu)$ функции $U_a, V_a \rightarrow \infty$ в \mathbb{R}^n при $a \rightarrow 0^+$. Поэтому можно указать такое $a_0 \in (0, 1)$, что при всех $a \in (0, a_0]$ имеем $\text{supp}(u_0 + v_0) \subset \omega_a$, $u_0 \leq U_a$, $v_0 \leq V_a$ в ω_a .

Фиксируем произвольное $a \in (0, a_0]$. Тогда, как следует из принципа максимума, решение $u(t, x), v(t, x)$ не может превзойти функции U_a, V_a в ω_a до тех пор, пока $u \leq U_a, v \leq V_a$ на $\partial\omega_a$ (и тем самым пока $\text{supp}(u+v) \subset \omega_a$). Поэтому в силу неограни-

чепости решения u, v при любых $a \in (0, a_0]$ существует такое $t_a < T_0$, что $\text{supp} [u(t_a, x) + v(t_a, x)] \not\subset \omega_a$. Отсюда предельным переходом $a \rightarrow 0^+$ получаем пужный результат.

Аналогично устанавливается справедливость такого утверждения:

Теорема 8. Пусть $pq < (1 + \mu)(1 + \nu)$, $p > 1$, $q > 1$, начальные функции u_0, v_0 являются радиально симметричными и невозрастающими по $r = |x|$. Тогда, если решение задачи Коши (1), (2), (58) является неограниченным, то при любых фиксированных $x \in \mathbb{R}^N$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow T_0^-} \max \{u(t, x), v(t, x)\} = \infty,$$

т. е. хотя бы одна из функций u или v возрастает до бесконечности при $t \rightarrow T_0^-$ сразу во всем пространстве.

Таким образом, при $m = pq - (1 + \mu)(1 + \nu) < 0$ неограниченные решения проявляют черты HS-режима горения с обострением.

Мы имеем возможность дать конкретные оценки амплитуды и размера носителя обобщенного решения задачи при $m < 0$. В кратком изложении их вывод выглядит следующим образом.

Выишем простое гомотермическое решение, удовлетворяющее уравнениям (59). При $pq > 1$ оно развивается в режиме с обострением:

$$u_m(t) = C_1(T_0 - t)^{-(p+1)/(pq-1)}, \quad v_m(t) = C_2(T_0 - t)^{-(q+1)/(pq-1)},$$

$$0 < t < T_0 < \infty, \quad (60)$$

где

$$C_1 = [(q+1)^p(p+1)/(pq-1)^{p+1}]^{1/(pq-1)},$$

$$C_2 = [(q+1)(p+1)^q/(pq-1)^{q+1}]^{1/(pq-1)}.$$

Воспользуемся тем, что для системы уравнений (1), (2), подчиняющейся принципу максимума, справедливо положение о «пересечении» хотя бы в одном компоненте неограниченных решений, имеющих один и тот же момент обострения (см. § 4, 5 гл. IV). Сравним на этой основе решение задачи Коши и строго положительное неограниченное решение (60).

Лемма 3. Пусть $T_0 < \infty$ — время обострения неограниченного решения задачи (1), (2), (58). Тогда при любом $t \in [0, T_0)$ либо

$$\max_x u(t, x) \geq C_1(T_0 - t)^{-(p+1)/(pq-1)}, \quad (61)$$

либо

$$\max_x v(t, x) \geq C_2(T_0 - t)^{-(q+1)/(pq-1)}. \quad (62)$$

Сопоставляя теперь u, v в каждый момент времени с семейством (49) стационарных решений (U_1, V_1 взяты из леммы 2) так, как это делалось при доказательстве теоремы 7, приходим к оценке носителя неограниченного решения.

Теорема 9. Пусть $pq < (1 + \mu)(1 + \nu)$ и T_0 — время обострения неограниченного решения задачи Коши (1), (2), (58), где финитные начальные функции являются радиально симметричными: $u_0 = u_0(r)$, $v_0 = v_0(r)$, $r = |x|$. Тогда при каждом t , достаточно близком к T_0^- , либо

$$\text{mes suppr } u(t, r) > \sqrt{2NC_1}^{-\frac{m}{2(p+\mu+1)}} (T_0 - t)^{\frac{m(p+1)}{2(p+\mu+1)(pq-1)}}, \quad (63)$$

либо

$$\text{mes suppr } v(t, r) > \sqrt{2NC_2}^{-\frac{m}{2(q+\nu+1)}} (T_0 - t)^{\frac{m(q+1)}{2(q+\nu+1)(pq-1)}}. \quad (64)$$

Очевидно, при $m = pq - (1 + \mu)(1 + \nu) < 0$, $pq > 1$ оценки (63), (64) в соответствии с теоремой 7 гарантируют возникновение HS-режима с обострением при $t \rightarrow T_0^-$: $\text{mes suppr } (u + v)$ растет до бесконечности при $t \rightarrow T_0^-$.

4.2. Об S- и LS-режимах. В случае $m \geq 0$ условие $U_a, V_a \rightarrow \infty$ в R^N при $a \rightarrow 0^+$ не выполняется, и тем самым утверждения теорем 7, 8 не имеют места. Следует ожидать, что при $m \geq 0$ неограниченные решения локализованы.

При этом в случае $m > 0$, когда решения из семейства (49) растут до бесконечности при $a \rightarrow \infty$ только в одной точке $x = 0$ (что свойственно LS-режиму), функции U_a, V_a позволяют оценить снизу характер сингулярности неограниченного решения при $t \rightarrow T_0^-$ в этой точке (см. § 1).

Если же $m = 0$, то семейство стационарных решений (57) неограниченно возрастает при $a \rightarrow \infty$ по крайней мере при всех $x \in \omega_1$ (S-режим). В этом случае справедливо, например, следующее утверждение, в котором дается оценка фундаментальной области локализации S-режима. Доказывается оно так же, как теорема 7.

Теорема 10. Пусть $pq = (1 + \mu)(1 + \nu)$, $p > 1$, $q > 1$. Пусть начальные функции u_0, v_0 являются радиально симметричными, невозрастающими по $r = |x|$ и, кроме того, $\text{supp}(u_0 + v_0) \subset \subset \omega_1$. Тогда, если решение задачи Коши (1), (2), (58) является неограниченным, то

$$\lim_{t \rightarrow T_0^-} \max \{u(t, x), v(t, x)\} = \infty$$

всюду в ω_1 .

Другими словами, неограниченное решение задачи Коши при $pq = (1 + \mu)(1 + \nu)$ не может быть локализовано в шаре с радиусом, меньшим $\sqrt{2N}$.

4.3. Сравнение с автомоделными результатами. Интересно сопоставить результаты с качественными выводами, полученными на основе построения неограниченных автомоделных решений задачи Коши для (1), (2).

Пусть

$$\nu(p + 1) = \mu(q + 1), \quad pq > 1; \quad (65)$$

последнее при выполнении (65) эквивалентно неравенству $q > v/\mu$. Тогда, как нетрудно убедиться, уравнения (1), (2) допускают неограниченные автомодельные решения вида

$$u_{\Delta}(t, x) = (T_0 - t)^{-(p+1)/(pq-1)} \theta(\xi), \quad (66)$$

$$v_{\Delta}(t, x) = (T_0 - t)^{-(q+1)/(pq-1)} f(\xi), \quad (67)$$

$$\xi = \frac{x}{(T_0 - t)^n}, \quad n = \frac{q\mu - v(\mu + 1)}{2(q\mu - v)} \equiv \frac{1}{2} \left[1 - \frac{v(p+1)}{pq-1} \right], \quad (68)$$

$$0 < t < T_0 < \infty, \quad x \in \mathbf{R}^N$$

Функции $\theta \geq 0$, $f \geq 0$ удовлетворяют следующей эллиптической системе уравнений, которая получается после подстановки (с учетом (65)) выражений (66), (67) в (1), (2):

$$\Delta_{\xi} \theta^{v+1} - n \nabla_{\xi} \theta \cdot \xi - \frac{\mu}{q\mu - v} \theta + f^p = 0, \quad (69)$$

$$\Delta_{\xi} f^{\mu+1} - n \nabla_{\xi} f \cdot \xi - \frac{v}{q\mu - v} f + \theta^q = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Пусть эта система имеет в \mathbf{R}^N нетривиальное решение, удовлетворяющее условиям $\theta(\xi) \rightarrow 0$, $f(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. Тогда, как следует из вида автомодельной координаты ξ в (68), локализация решения u_{Δ} , v_{Δ} или ее отсутствие зависит от знака параметра $l = q\mu - v(\mu + 1)$. Критическое значение $l = 0$ (т. е. $q = v(\mu + 1)/\mu$ — S-режим), $\xi \equiv x$ и (66), (67) — решение в разделяющихся переменных) делит область изменения параметров задачи на две части. При $l \geq 0$ автомодельное решение локализовано ($l > 0$, т. е. $q > v(\mu + 1)/\mu$ — LS-режим), а при $l < 0$ локализация отсутствует, причем $u_{\Delta}(t, x)$, $v_{\Delta}(t, x) \rightarrow \infty$ в \mathbf{R}^N при $t \rightarrow T_0^-$ (HS-режим).

Сопоставим автомодельное критическое значение

$$q_* = (\mu + 1) v/\mu \quad (70)$$

с критическим значением

$$(pq)_* = (1 + \mu)(1 + v), \quad (71)$$

которое дает метод стационарных состояний. Из (65) в силу (70) имеем $p_* = \mu(q_* + 1)/v - 1 \equiv \mu(v + 1)/v_*$ и поэтому $p_* q_* = (1 + \mu)(1 + v)$, что в точности совпадает с (71).

Таким образом, в «автомодельной области» значений параметров сформулированное в теоремах 7, 8 условие отсутствия локализации $pq < (1 + \mu)(1 + v)$ является не только достаточным, но и необходимым. По-видимому, этот вывод остается в силе и без выполнения автомодельного условия (65).

Обратим внимание на то, что закон роста амплитуды автомодельного неограниченного решения (66), (67) по характеру зависимости от t совпадает с правыми частями оценок (61), (62), полученными путем сравнения с гомотермическим решением (60).

Важно отметить (и этот факт еще раз подчеркивает определенную оптимальность результатов, вытекающих из метода стационарных состояний), что более тонкие оценки размеров носителя решения (63), (64) в HS-режиме ($m < 0$) также в точности совпадают с автомодельными. Без труда проверяется, что при выполнении условия (65) справедливы равенства

$$\frac{m(p+1)}{2(p+\mu+1)(pq-1)} = \frac{m(q+1)}{2(q+\nu+1)(pq-1)} = n,$$

где n — показатель в выражении (68) автомодельной координаты ξ , которая определяет закон движения фронтов автомодельных тепловых волн, формирующихся по каждому компоненту в HS-режиме.

§ 4. Об эффекте локализации горения в многокомпонентных средах

Данный параграф, который можно рассматривать как продолжение предыдущего, посвящен качественному и численному исследованию процессов горения с обострением в многокомпонентных средах. Большинство из указанных здесь свойств неограниченных решений квазилинейных параболических систем уравнений пока не получило строгого обоснования.

Ниже рассматриваются две различные системы уравнений. Основное внимание будет уделено тем свойствам решений, которые не имеют аналогов в теории режимов с обострением, развитой ранее для одного квазилинейного параболического уравнения. При этом обсуждаются также вопросы, связанные с эффективностью автомодельного метода исследования.

Оказывается, не всегда неограниченные автомодельные решения, которые удается построить для систем со степенными нелинейностями, «ответственны» за асимптотическую стадию развития режимов с обострением. Бывает так, что асимптотическая эволюция процесса горения описывается автомодельными решениями совсем других уравнений, т. е. возникают п. а. р.

1. Система уравнений с источниками. Здесь рассматривается параболическая система квазилинейных уравнений, которая является обобщением системы, изученной в § 3. Удобно записать ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_t &= k_1 (u^{\sigma_1} u_x)_x + q_1 u^{\beta_1} v^{\gamma_2}, \\ v_t &= k_2 (v^{\sigma_2} v_x)_x + q_2 v^{\beta_2} u^{\gamma_1}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\sigma_i > 0$, $\beta_i \geq 1$, $\gamma_i \geq 1$ ($i = 1, 2$) — фиксированные безразмерные параметры. Число положительных постоянных k_i , q_i , имеющих размерность, можно уменьшить за счет перенормировки $t \rightarrow t_0 t$, $x \rightarrow x_0 x$, $u \rightarrow U_0 u$, $v \rightarrow V_0 v$.

Если $\delta = \sigma_2[\beta_1 - (\gamma_1 + 1)] - \sigma_1[\beta_2 - (\gamma_2 + 1)] \neq 0$, то таким способом можно вообще избавиться от размерных постоянных в

системе, полагая

$$t_0 = q_1^{-1} U_0^{1-\beta_1} V_0^{-\gamma_2}, \quad x_0 = k_1^{1/2} U_0^{\sigma_1/2} t_0,$$

$$U_0 = \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^{\sigma_2/\delta} \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{(\gamma_2+1-\beta_2)/\delta} \quad V_0 = \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^{\sigma_1/\delta} \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{(\gamma_1+1-\beta_1)/\delta}$$

Если же $\delta = 0$, то любые три из постоянных можно сделать равными единице; в системе остается лишь один безразмерный параметр, например

$$k = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^{\sigma_1/(\gamma_1+1-\beta_1)} \quad \gamma_1 + 1 - \beta_1 \neq 0.$$

Поэтому вместо (1) мы будем рассматривать эквивалентную систему

$$u_t = (u^{\sigma_1} u_x)_x + u^{\beta_1} v^{\gamma_2}, \quad (2)$$

$$v_t = k (v^{\sigma_2} v_x)_x + v^{\beta_2} u^{\gamma_1}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

где $k = 1$, если $\delta \neq 0$, и $k > 0$ произвольное, если $\delta = 0$. Для (2), (3) ставится задача Коши:

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0, x) = v_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (4)$$

где u_0, v_0 — ограниченные финитные функции.

1.1. Анализ пространственно однородных решений. Прежде всего необходимо выяснить, при каких условиях возможны неограниченные решения. Это можно сделать, рассматривая пространственно однородные решения задачи, которые не зависят от x и удовлетворяют уравнениям

$$u'(t) = u^{\beta_1}(t) v^{\gamma_2}(t), \quad v'(t) = v^{\beta_2}(t) u^{\gamma_1}(t), \quad t > 0, \quad (5)$$

$$u(0) = u_0 > 0, \quad v(0) = v_0 > 0. \quad (6)$$

Пусть $\alpha_i = \gamma_i + 1 - \beta_i \neq 0$ ($i = 1, 2$). Тогда система имеет первый интеграл:

$$\frac{u^{\alpha_1}}{\alpha_1} - \frac{v^{\alpha_2}}{\alpha_2} = C_0 \equiv \frac{u_0^{\alpha_1}}{\alpha_1} - \frac{v_0^{\alpha_2}}{\alpha_2}, \quad t > 0, \quad (7)$$

с помощью которого она сводится к двум автономным уравнениям:

$$u'(t) = u^{\beta_1} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} u^{\alpha_1} - \alpha_2 C_0 \right)^{\gamma_2/\alpha_2} \quad (8)$$

$$v'(t) = v^{\beta_2} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} v^{\alpha_2} + \alpha_1 C_0 \right)^{\gamma_1/\alpha_1} \quad t > 0. \quad (9)$$

Отсюда сразу вытекают условия возникновения режимов с обострением по каждому компоненту. Если, например, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, то для возникновения режима с обострением по u доста-

точно, чтобы $\beta_1 + \alpha_1 \gamma_2 / \alpha_2 > 1$. Это неравенство эквивалентно условию $-\gamma_1 \gamma_2 + (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) < 0$, что в данном случае выполнено (так как $\beta_i < 1 + \gamma_i$). Аналогично проверяется, что при $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ имеет место режим с обострением по второму компоненту v . Из тождества (7) следует, что моменты обострения $u(t)$ и $v(t)$, определяемые из уравнений (8), (9), совпадают.

Любопытная ситуация складывается, когда α_1 и α_2 имеют разные знаки, например $\alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0$. Здесь, как видно из (7), $C_0 > 0$ и, поскольку $\beta_2 > 1 + \gamma_2 > 1$, по v развивается режим с обострением: $v(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^- < \infty$. Функция $u(t)$ при этом остается ограниченной: $u(t) \rightarrow (\alpha_1 C_0)^{1/\alpha_1}, t \rightarrow T_0^-$. Еще более разнообразным может быть характер протекания гомотермического горения в случае $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$.

Постоянная C_0 в (7) может иметь любой знак. При $C_0 = 0$ уравнения (8), (9) дают режимы с обострением по обоим компонентам. Если $C_0 < 0$, то $u(t)$ развивается в режиме с обострением, а $v(t)$ ограничена. В случае $C_0 > 0$ — наоборот.

Таким образом, при $\alpha_1 < 0$ (или $\alpha_2 < 0$) характер горения компонентов u, v может протекать по существенно различным законам: один растет в режиме с обострением, а другой ограничен.

1.2. Автомодельные решения. Введем обозначения

$$m_i = \alpha_i / p, \quad p = (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) - \gamma_1 \gamma_2.$$

При выполнении условий

$$\delta = \sigma_1(\gamma_2 + 1 - \beta_2) - \sigma_2(\gamma_1 + 1 - \beta_1) = 0, \quad (10)$$

$$m_1 < 0, \quad m_2 < 0 \quad (11)$$

система (2), (3) допускает неограниченные автомодельные решения следующего вида:

$$\begin{aligned} u_A(t, x) &= (T_0 - t)^{m_1} \theta(\xi), & v_A(t, x) &= (T_0 - t)^{m_2} f(\xi), \\ \xi &= x / (T_0 - t)^n, & n &= (m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + 2) / 4, \end{aligned} \quad (12)$$

где функции $\theta \geq 0, f \geq 0$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\theta^{\sigma_1} \theta')' - n \theta' \xi + m_1 \theta + \theta^{\beta_1} f^{\gamma_2} &= 0, \\ k (f^{\sigma_2} f')' - n f' \xi + m_2 f + f^{\beta_2} \theta^{\gamma_1} &= 0, \quad \xi \in \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (13)$$

и обычным краевым условиям: $\theta(\xi), f(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Как следует из (12), многие свойства автомодельных решений, проявляющиеся при $t \rightarrow T_0^- < \infty$, зависят от знака параметра n .

Если $n < 0$, то по обоим компонентам развивается HS-режим с обострением, который не локализован, причем $u_A, v_A \rightarrow \infty$ в \mathbf{R} , $t \rightarrow T_0^-$.

Наоборот, в случае $n \geq 0$ неограниченные решения локализованы; если $n > 0$ (LS-режим), то u_A, v_A неограниченно возрастают при $t \rightarrow T_0^-$ в одной точке $x = 0$.

При $n = 0$ развивается S-режим с обострением; функции u_A, v_A в (12) представляют собой решение в разделяющихся переменных и поэтому неограниченно возрастают при $t \rightarrow T_0^-$ соответственно на фундаментальных длинах: $L_\theta = \text{mes suppr } \theta$, $L_f = \text{mes suppr } f$. Области локализации каждого из компонентов,

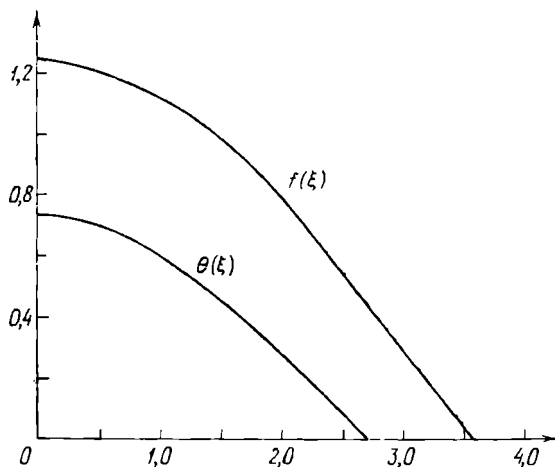


Рис. 84. Автомоделные функции S-режима ($n = 0$); $\sigma_1 = 1,5$, $\sigma_2 = 2$, $\beta_1 = 1,9$, $\beta_2 = 1,6$, $\gamma_1 = 1,05$, $\gamma_2 = 0,8$, $k = 1$

вообще говоря, различны. Для примера на рис. 84 приведены пространственные профили функций $\theta(\xi)$, $f(\xi)$ в случае S-режима. Здесь $L_\theta < L_f$.

Численное исследование показывает, что при $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ автомоделное решение S-режима единственно и устойчиво (в норме специальной автомоделной обработки, см. § 2, 5 гл. IV). При достаточно произвольных начальных данных в процессе эволюции на ограниченном участке среды формируется устойчивая диссипативная структура, причем каждый компонент эффективно локализован на своей фундаментальной длине L_θ или L_f .

Пример такого выхода на автомоделный S-режим с обострением приведен на рис. 85. Начальные возмущения $u_0(x)$, $v_0(x)$ заданы несимметрично. Поэтому сначала в среде возникают две тепловые волны по u, v ($t = t_1$, $t = t_2$), которые в момент времени $t = t_3$ пересекаются и затем порождают тепловую структуру ($t = t_4$), эволюционирующую по законам автомоделного S-режима.

При $\alpha_1 < 0$ (или $\alpha_2 < 0$), когда характер гомотермического горения компонентов может существенно различаться, автомоделные решения не реализуются. Как правило, в численных

расчетах один из компонентов при $t \rightarrow T_0^-$ нарастает в режиме с обострением, а второй остается ограниченным при $t = T_0^-$. Тем самым автомодельные решения с согласованным горением компонентов представляют собой своеобразную неустойчивую границу, разделяющую множества решений с различными (несогласованными) законами горения u и v .

1.3. Общий случай. Возникает вопрос, что будет в общем случае, когда условие (10) существования автомодельных

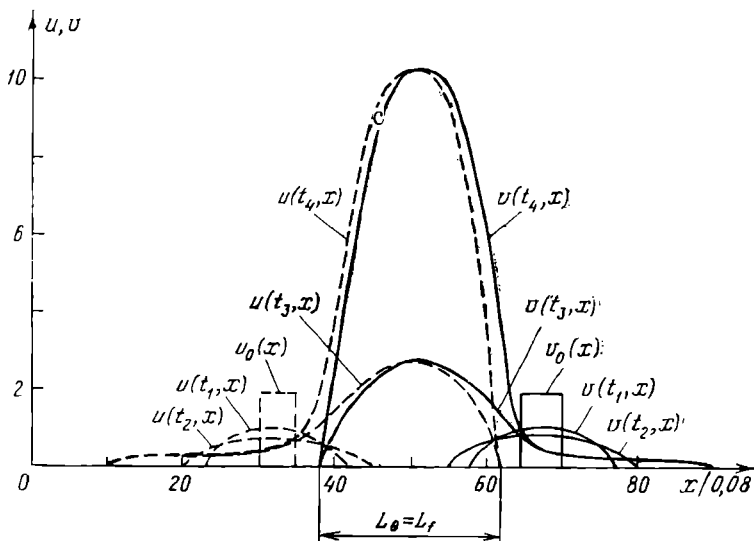


Рис. 85. Формирование автомодельной структуры S-режима после взаимодействия концентрационных волн в среде: $\beta_1 = \beta_2 = 2$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$, $k = 1$; $t_1 = 0,272$, $t_2 = 0,672$, $t_3 = 0,7812$, $t_4 = 0,7823$

решений не выполнено? Во-первых, численные эксперименты показали, что при $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ (т. е. $\beta_1 < 1 + \gamma_1$, $\beta_2 < 1 + \gamma_2$) всегда возникают режимы с обострением по обоим компонентам.

Во-вторых, при нарушении автомодельного условия (10) процессы горения компонентов протекают, вообще говоря, несогласованно и могут существенно различаться. Например, возможен случай, когда горение первого компонента происходит в LS-режиме с обострением (неограниченный рост на множестве меры нуль, локализация), а горение второго компонента развивается в HS-режиме, и область его горения охватывает при $t \rightarrow T_0^-$ все пространство. Пример такого расчета приведен на рис. 86. Возможны и другие ситуации, когда по u имеет место S-режим, а по v — HS-режим с обострением. Или же оба компонента развиваются в HS-режиме, но с разными скоростями распространения температурных волн по u , v .

Выпишем в заключение для общего случая достаточные (и, по-видимому, необходимые) условия отсутствия локализации

неограниченных решений задачи, т. е. возникновения HS-режима по крайней мере по одному компоненту. Нетрудно проверить, что уравнения (2), (3) допускают следующее однопараметрическое семейство стационарных решений:

$$U_a(x) = a^{2\epsilon_1/m} U_1(ax), \quad V_a(x) = a^{2\epsilon_2/m} V_1(ax). \quad (14)$$

Здесь $a > 0$ — произвольная постоянная; U_1, V_1 — какое-либо

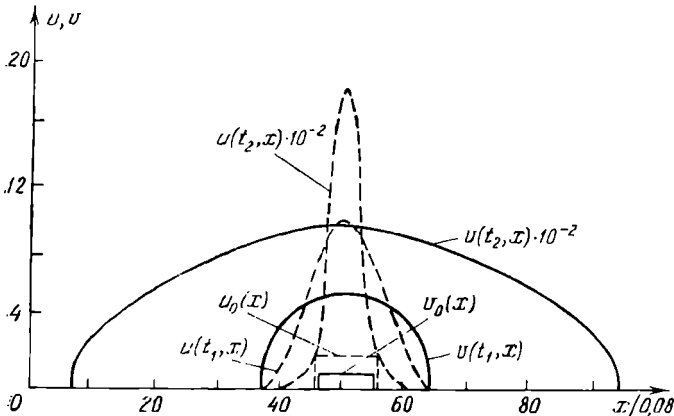


Рис. 86. Смешанный режим горения с обострением (LS- по первому компоненту, HS- по второму): $\beta_1 = \beta_2 = 1,5$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1,5$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 3$, $k = 1$; $t_1 = 0,0745$, $t_2 = 0,0771$

стационарное решение, например подобное тому, которое построено в лемме 2 § 3;

$$m = \gamma_1 \gamma_2 - [\beta_1 - (\sigma_1 + 1)][\beta_2 - (\sigma_2 + 1)],$$

$$\epsilon_i = 1 + \gamma_i + \sigma_i - \beta_i, \quad i = 1, 2.$$

Следует ожидать, что от знаков именно этих параметров зависит многое в асимптотическом поведении неограниченных решений. В частности, элементарный анализ (в соответствии с методом стационарных состояний) семейства (14) при малых $a > 0$ приводит к следующему результату.

Предложение 2. Пусть $\beta_i > 1$, $\gamma_i > 1$ и $\epsilon_i/m < 0$, $\epsilon_2/m < 0$, $m \neq 0$. Тогда всякое неограниченное решение задачи (2), (3), (4) не является локализованным.

2. Система уравнений, в которой учитывается процесс выгорания. Ниже рассматривается задача Коши для системы уравнений

$$u_t = (k_0 u^\sigma u_x)_x + q_0 v^\nu u^\beta,$$

$$v_t = -p_0 v^\nu u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Она описывает процесс горения нелинейной среды с объемным выделением энергии при учете уменьшения плотности вещества за счет его выгорания ($v = v(t, x) \geq 0$ — плотность горючего вещества). Здесь $\beta > 1$, $\nu > 0$, $\epsilon > 0$ — фиксированные без-

размерные параметры; k_0, q_0, p_0 — положительные постоянные, имеющие размерность. Во втором уравнении не учитывается диффузия вещества, что на самом деле не влияет на окончательные выводы.

От постоянных k_0, q_0, p_0 легко избавиться путем изменения масштабов по независимым и зависимым переменным t, x, u, v . Поэтому в дальнейшем рассматривается система в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} u_t &= (u^\alpha u_x)_x + v^\nu u^\beta, \\ v_t &= -v^\nu u^\varepsilon, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть процесс горения инициируется заданием начального теплового возмущения и некоторой начальной концентрации горючего вещества:

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0, x) = v_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (16)$$

Заметим, что при $\nu = 0$ (ν — порядок химической реакции горения) связь между уравнениями системы (15) отсутствует и распределение температуры $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению, изученному в предыдущих главах.

Предстоит выяснить, как учет фактора выгорания влияет на асимптотическую стадию развития режимов с обострением в нелинейной среде, при каких условиях возможна локализация горения. Любопытно, что в данном случае неограниченные автомодельные решения, вообще говоря, не дают правильного описания асимптотической эволюции режимов с обострением. На причинах этого мы остановимся позднее.

2.1. Неограниченные автомодельные решения. Большим достоинством системы (15) является то, что практически при любых значениях параметров она допускает автомодельные решения:

$$\begin{aligned} u_\Lambda(t, x) &= (T_0 - t)^{-1/\alpha} \theta(\xi), \\ v_\Lambda(t, x) &= (T_0 - t)^{1\beta - (\varepsilon+1)/\alpha} f(\xi), \quad \alpha = \varepsilon\nu + (1 - \nu)(\beta - 1) \neq 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$(18)$$

где ξ — автомодельная координата:

$$\xi = x / (T_0 - t)^{(\alpha - \sigma)/(2\alpha)}. \quad (19)$$

Если учитывать диффузию по второму компоненту, то в системе возникает еще одна размерностная постоянная, и автомодельные решения будут существовать при некотором дополнительном ограничении на параметры.

Аutomодельные представления температуры $\theta(\xi) \geq 0$ и плотности $f(\xi) \geq 0$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(\theta^\sigma \theta')' - \frac{\alpha - \sigma}{2\alpha} \theta' \xi - \frac{1}{\alpha} \theta + f^\nu \theta^\beta = 0, \quad (20)$$

$$- \frac{\alpha - \sigma}{2\alpha} f' \xi + \frac{\beta - (\varepsilon + 1)}{\alpha} f - f^\nu \theta^\varepsilon = 0, \quad \xi \in \mathbf{R}, \quad (21)$$

и краевых условий

$$\theta(\infty) = 0, \quad f(\infty) < \infty, \quad (22)$$

которые имеют простой физический смысл.

Из (17) вытекает условие возникновения режима с обострением при $t \rightarrow T_0^- < \infty$:

$$\alpha = \epsilon\nu + (1 - \nu)(\beta - 1) > 0. \quad (23)$$

Концентрация ν_λ в (18) не может возрасти со временем. Поэтому необходимо второе ограничение на параметры

$$\beta > \epsilon + 1. \quad (24)$$

Классификацию автомодельных решений проведем, как обычно, по характеру изменения со временем области интенсивного горения (полуширины), размеры которой, как следует из (19), зависят от времени по закону

$$x_{\text{зф}}(t) \sim (T_0 - t)^{(\alpha - \sigma)/(2\alpha)}, \quad 0 < t < T_0. \quad (25)$$

Поэтому возможны три случая: а) если $\alpha < \sigma$, то $x_{\text{зф}}(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow T_0^-$, и к моменту обострения волна горения охватывает все пространство (HS-режим с обострением); б) если $\alpha = \sigma$, то $x_{\text{зф}}(t) \equiv \text{const} > 0$, и область интенсивного горения не меняется со временем (S-режим); в) если $\alpha > \sigma$, то $x_{\text{зф}}(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow T_0^-$, область интенсивного горения уменьшается со временем и неограниченный рост температуры наблюдается лишь в одной точке $x = 0$ (LS-режим).

Мы не будем подробно останавливаться на анализе системы обыкновенных дифференциальных уравнений (20), (21), в этом нет необходимости. Отметим лишь, что в S-режиме ($\alpha = \sigma$) она сильно упрощается; при $\nu < 1$ (21) превращается в равенство

$$f(\xi) = \left[\frac{\sigma(1-\nu)}{\sigma-\epsilon} \right]^{1/(1-\nu)} [\theta(\xi)]^{\epsilon/(1-\nu)}, \quad (26)$$

а первое уравнение (20) принимает вид

$$(\theta^\sigma \theta')' - \frac{1}{\sigma} \theta + a^2 \theta^{(\sigma+1-\nu)/(1-\nu)} = 0, \quad a^2 = \left[\frac{\sigma(1-\nu)}{\sigma-\epsilon} \right]^{\nu/(1-\nu)}, \quad (26')$$

и легко интегрируется. Функция $\theta(\xi)$ определяется из квадратуры

$$\int_0^{\theta^{\sigma/2}} \frac{dz}{[1 - b^2 z^2/(1-\nu)]^{1/2}} = \left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \right]^{1/2} (\xi_0 - \xi)_+, \quad \xi > 0, \quad (27)$$

$$b^2 = a^2 \frac{\sigma(\sigma+2)(1-\nu)}{\sigma + (1-\nu)(\sigma+2)}.$$

Таким образом, $\theta(\xi)$, $f(\xi)$ — финитные функции; размеры носителя определяют фундаментальную длину S-режима:

$$L_S \equiv 2\xi_0 = \left[\frac{2\pi(\sigma + 2)}{\sigma} \right]^{1/2} \frac{\Gamma(1/2 - \nu/2)}{\Gamma(1 - \nu/2)} (1 - \nu) \times \\ \times \left[\frac{\sigma - \varepsilon}{\sigma(1 - \nu)} \right]^{\nu/2} \left[\frac{\sigma + (1 - \nu)(\sigma + 2)}{\sigma(\sigma + 2)(1 - \nu)} \right]^{(1-\nu)/2}. \quad (28)$$

Естественно, при $\nu = 0$, $\varepsilon = 0$ это равенство определяет фундаментальную длину в среде без выгорания: $L_S = 2\pi(\sigma + 1)^{1/2}/\sigma$ (см. § 1 гл. IV).

2.2. Об асимптотическом поведении режимов с обострением. Указанные выше неограниченные автомодельные решения являются структурно неустойчивыми, т. е. их пространственно-временная (согласованная по обоим компонентам) эволюция не наблюдается в численных расчетах.

На рис. 87 представлены результаты численного расчета уравнений (15) при значениях параметров, формально отвечающих S-режиму ($\alpha = \sigma$). Начальные функции отличны от нуля на длине $2L_S$, где (см. (28))

$$L_S = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} \simeq 5,205.$$

Максимумы начальных распределений соответствуют автомодельному решению (26), (27), растущему в режиме с обострением с временем обострения $T_0^A = 1$. Однако пространственные профили $u_0(x)$ и $v_0(x)$ не являются автомодельными. В результате за счет избыточного (по отношению к автомодельному) задания $v_0(x)$ для развития режима с обострением по температуре достаточно лишь части энергии начального распределения $v_0(x)$. Это отчетливо видно на рис. 87, б. Поэтому процесс выгорания вещества стабилизируется на асимптотической стадии развития режима с обострением по u , и при $t \rightarrow T_0^-$ (реальное значение времени обострения равно $T_0 = 0,525 < T_0^A$) плотность $v(t, x)$ существенно не меняется в области интенсивного горения.

Таким образом, при $t \rightarrow T_0^-$ уравнение для концентрации выпадает, и асимптотика температурного режима с обострением описывается одним уравнением

$$u_t = (u^s u_x)_x + Q_0 u^{\beta}, \quad (29)$$

где Q_0 — постоянная, равная $(\bar{v}(T_0^-, x))^{\nu}$ — среднему значению предельной плотности в области интенсивного горения. Но при данных значениях параметров $\beta > \sigma + 1$, и, следовательно, уравнение (29) обеспечивает развитие обычного LS-режима, что отчетливо наблюдается на рис. 87, а. И вообще, возмущенный в большую сторону по температуре и плотности S-режим вырождается при $t \rightarrow T_0^-$ в автомодельный (по отношению к (29)) LS-режим, поскольку из неравенства $\sigma > \varepsilon$, всегда справедливого для S-режима ($\alpha = \sigma$), следует, что $\beta > \sigma + 1$ в (29).

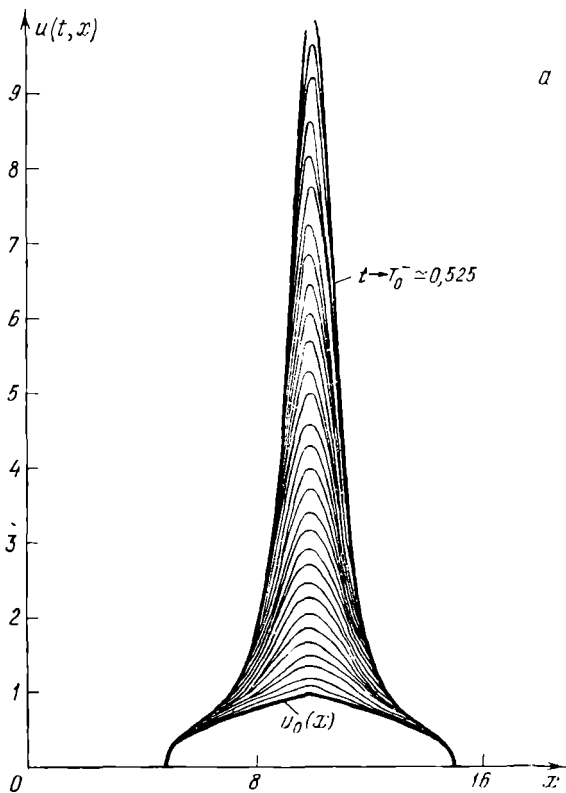
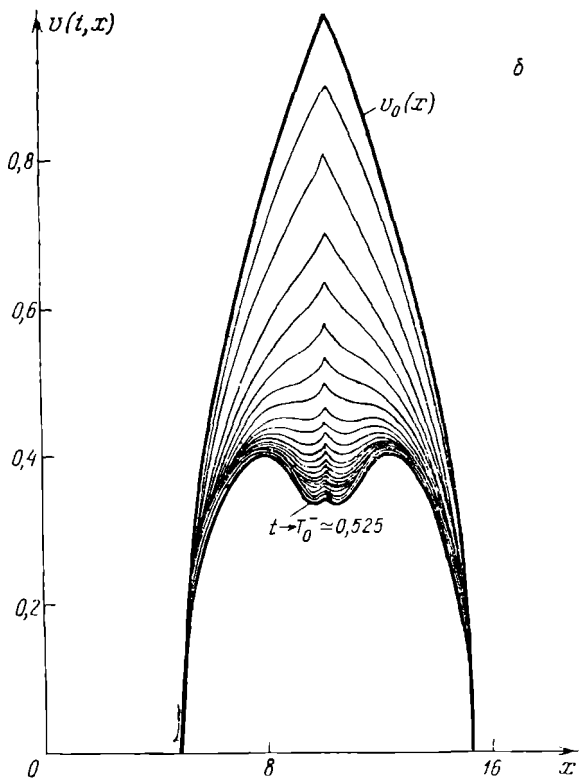


Рис. 87. Расчет уравнений (15) в S-режиме при $\sigma = 2$, $\beta = 4$, $\varepsilon =$
понижт



$\nu = 1, \nu = 0.5 (\alpha = \sigma)$: а — первый компонент, б — второй ком-

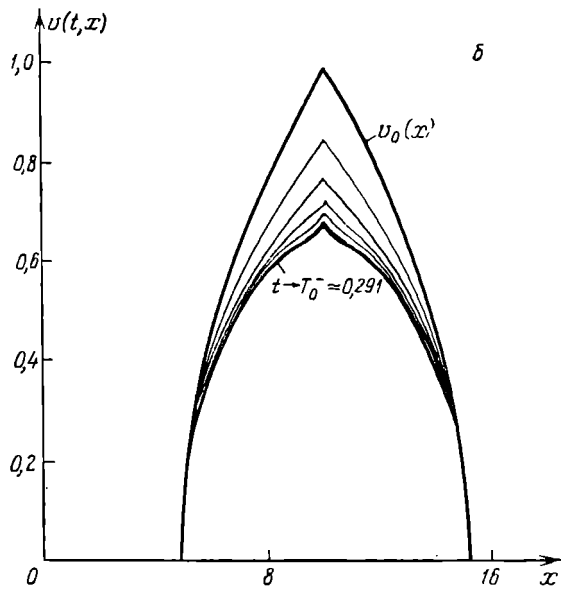
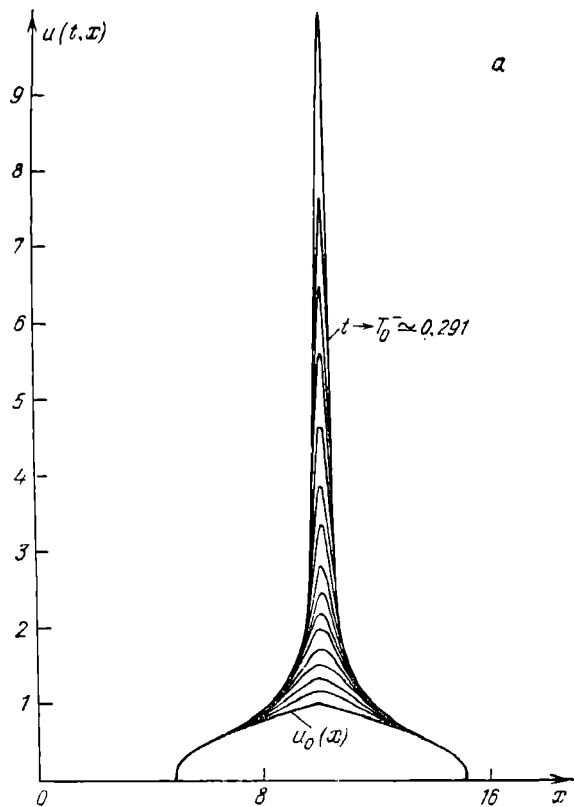


Рис. 88. Расчет уравнений (15) в LS-режиме при $\sigma=2$, $\beta=6$, $\varepsilon=1$, $\nu=0,5$ ($\alpha > \sigma$): *а* — первый компонент, *б* — второй компонент

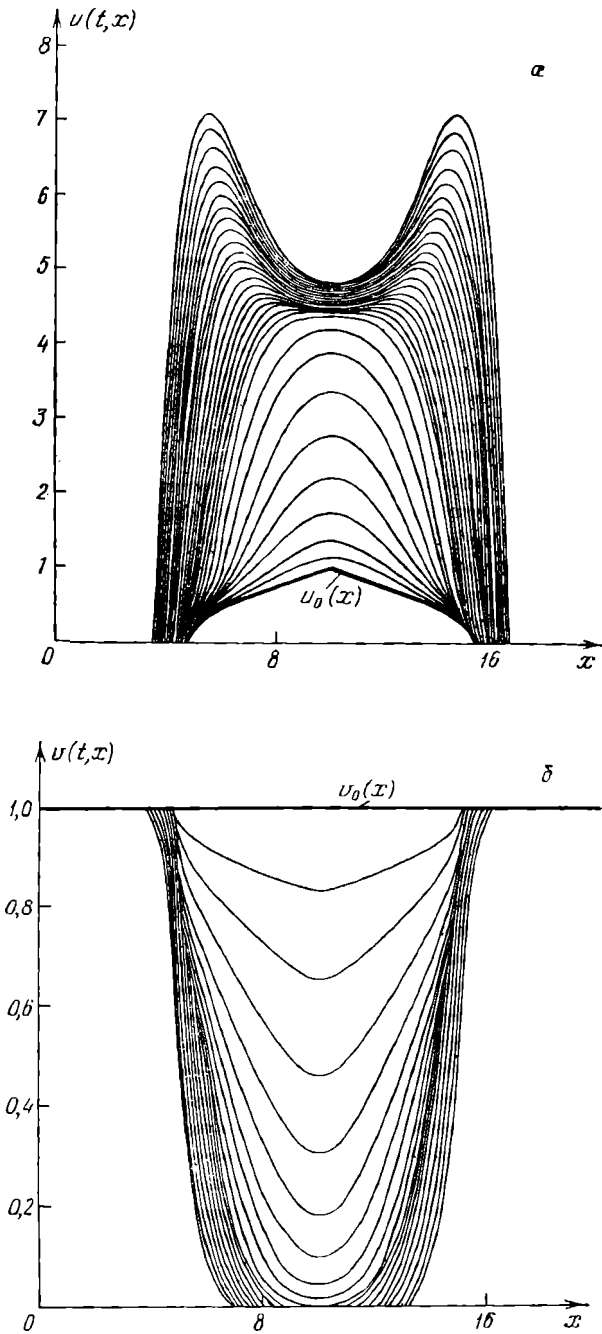


Рис. 89. Расчет уравнений (15) в HS-режиме при $\sigma = 2$, $\beta = 3$, $\varepsilon = 1$, $\nu = 0,5$ ($\alpha < \sigma$): а — первый компонент, б — второй компонент

Если же в S-режиме ($\alpha = \sigma$) задать профили начальных распределений, заниженные по отношению к автомодельным, то это чаще всего приводит к преждевременному выгоранию всей начальной массы вещества и в среде прекращается выделение энергии. В результате температура не развивается в режиме с обострением и удовлетворяет уравнению без источника:

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x. \quad (30)$$

Таким образом, автомодельные решения (17), (18) служат неустойчивой границей между широкими классами решений «вырожденных» уравнений (29) и (30).

В LS-режиме (по отношению к (15), $\alpha > \sigma$) начальные функции, заниженные по сравнению с автомодельными, приводят к развитию LS-режима, отвечающего $\beta > \sigma + 1$ в (29). На рис. 88 приведены результаты расчета LS-режима с начальными данными S-режима, представленными на рис. 87. При $t \rightarrow T_0^- = 0,291$ плотность стабилизируется и температура растет в LS-режиме ($\beta = 6 > \sigma + 1 = 3$ в (29)).

Для HS-режима ($\alpha < \sigma$) эти начальные данные являются заниженными по отношению к автомодельным. Как видно из рис. 89, заниженным является и постоянный фон плотности $v_0(x) \equiv 1$. Поэтому сначала происходит быстрое выгорание вещества в области отличной от нуля начальной температуры, а затем в окружающее пространство с большой плотностью распространяются две тепловые волны, которые за счет более интенсивного выделения энергии при больших температурах развиваются в режиме с обострением ($T_0 = 1,72$).

§ 5. О разностных схемах для квазилинейных параболических уравнений, допускающих режимы с обострением

Значительное место в проведенном исследовании режимов с обострением занимают результаты численной реализации рассматриваемых нестационарных задач. В данном параграфе изучаются свойства разностных схем для квазилинейного параболического уравнения со степенными нелинейностями с одной пространственной переменной:

$$u_t = (u^{\sigma+1})_{xx} + u^\beta. \quad (1)$$

Здесь, как обычно, $\sigma > 0$ и $\beta > 1$ — постоянные.

Для (1) рассматривается краевая задача в области $\{t > 0, x \in (0, l)\}$, $l = \text{const} > 0$, с условиями

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad 0 < x < l; \quad u_0^{\sigma+1} \in H_0^1(0, l), \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Полученные здесь результаты дают некоторое представление о проблемах, которые возникают при численной реализации режимов с обострением. Основное внимание уделяется исследова-

нию неявных (нелинейных) разностных схем, которые в силу ряда своих преимуществ [152] по сравнению с явными схемами использовались во всех численных расчетах. Ниже рассматриваются такие классические вопросы теории разностных схем, как условия разрешимости схемы на временном слое, условия глобальной разрешимости разностной задачи, условия сходимости разностного решения к решению исходной дифференциальной задачи.

Большое внимание уделяется вопросу об условиях отсутствия глобального решения, т. е. возникновения разностных режимов с обострением. С этим связаны два других довольно необычных свойства неявной схемы: если решение интенсивно растет, то в некоторый момент времени может случиться так, что на временном слое либо решение станет неединственным, либо оно может вообще не существовать, т. е. схема перестанет быть разрешимой.

Все эти свойства (неограниченность, неединственность и несуществование решения) возможны в случае $\beta \geq \sigma + 1$, когда разностный оператор, отвечающий правой части (1), не является коэрцитивным. При $1 < \beta < \sigma + 1$ и достаточно малых шагах по времени всегда существует решение в целом, причем оно единственно.

Многие из полученных результатов справедливы для разностных схем в случае уравнений типа (1) с достаточно произвольными нелинейностями.

В конце параграфа кратко рассматриваются явные (линейные) схемы; анализируется слабый принцип максимума и установлены условия неограниченности разностного решения.

Введем равномерную сетку по пространству ω_h с шагом $h = 1/(M + 1)$, где $M > 0$ — целое число, систему временных интервалов $\{\tau_j\}$, $\tau_{j+1} \leq \tau_j$, и соответствующую сетку по времени ω_τ . Всюду, за исключением п. 1.4, сетку ω_τ считаем конечной и равномерной: $\tau_j \equiv \tau = T/(N + 1)$, $0 \leq j \leq N$, $N > 0$ — целое, $T > 0$ — постоянная (в п. 1.4 $\tau_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и ω_τ — неравномерная сетка). Обозначим через H_h множество сеточных функций $v_h = \{v_i; v_0 = v_{M+1} = 0, v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, M\}$.

1. **Неявная (нелинейная) разностная схема.** Следуя [152], поставим в соответствие задаче (1) — (3) неявную разностную схему

$$(\hat{u} - u)/\tau_j = (\hat{u}^{\sigma+1})_{xx} + \hat{u}^{\beta}, \quad (t, x) \in \omega_\tau \times \omega_h, \quad (4)$$

$$u^0 = u_{0h} \geq 0, \quad x \in \omega_h; \quad \hat{u} \in H_h, \quad t \in \omega_\tau, \quad (5)$$

где введены обычные обозначения: $\hat{u} = u_h^{j+1}$, $u = u_h^j$ — искомая сеточная функция, определенная на дискретном множестве $\omega_{\tau, h} = \omega_\tau \times \omega_h$; $(v)_{xx} = (v_{h-1} - 2v_h + v_{h+1})/h^2$ — обозначение оператора разностного дифференцирования второго порядка, u_{0h} — проекция $u_0(x)$ на ω_h .

При формулировке задачи (4), (5) и всех последующих результатов учитывается, что разностное решение \hat{u} является не-

отрицательным (в противном случае не определена операция возведения в произвольную степень). Это одна из особенностей неявных схем для параболических уравнений. Легко проверить, что схема

$$(\hat{u} - u)/\tau_j = (|\hat{u}|^\sigma \hat{u})_{\bar{x}x} + (\max\{0, \hat{u}\})^\beta, \quad (t, x) \in \omega_{\tau, h}, \quad (6)$$

тождественно совпадающая с (4) при $\hat{u} \geq 0$, не может допускать при любых τ_j, h отрицательных значений \hat{u} , если $u \geq 0$ в ω_h (более того, $\hat{u} > 0$ в ω_h , коль скоро $u \neq 0$). Это следует из анализа (6) в точке достижения функцией \hat{u} отрицательного минимума по x (см. § 7 гл. V). Аналогичный слабый принцип максимума имеет место для дифференциальной задачи (см. § 2).

Введем необходимые разностные функциональные пространства. Пространство сеточных функций $V_h = \{v_i | i = 0, 1, \dots, M+1, v_0 = v_{M+1} = 0\}$ снабжается скалярным произведением и нормой:

$$(v_h, w_h)_h = h \sum_{i=1}^M v_i w_i, \quad |v_h|_{h,2} = (v_h, v_h)_h^{1/2}. \quad (7)$$

Нормы в сеточных аналогах пространств $L^q(0, l)$, $q \geq 1$, и $H_0^1(0, l)$ имеют соответственно вид

$$|v_h|_{h,q} = \left(h \sum_{i=1}^M |v_i|^q \right)^{1/q}$$

$$\|v_h\|_{h,2} = \left(h \sum_{i=0}^M \left| \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right|^2 \right)^{1/2}$$

Через $\|\cdot\|_{h,2}^*$ обозначим норму, дуальную $\|\cdot\|_{h,2}$ относительно скалярного произведения (7):

$$\|v_h\|_{h,2}^* = \sup_{\substack{w_h \in V_h \\ w_h \neq 0}} \frac{|(v_h, w_h)_h|}{\|w_h\|_{h,2}}$$

Справедливо равенство

$$\|(v_h)_{\bar{x}x}\|_{h,2}^* = \|v_h\|_{h,2}, \quad v_h \in V_h. \quad (8)$$

В сеточном аналоге пространства $C(0, l)$ норма имеет вид

$$|v_h|_C = \max_{1 \leq i \leq M} |v_i|, \quad v_h \in V_h.$$

Введем операторы продолжения p_h, q_h , полагая, что $p_h v_h$ — непрерывная функция, линейная на каждом интервале $(ih, (i+1)h)$, причем $p_h v_h(ih) = v_i$ ($i = 0, 1, \dots, M+1$); $q_h v_h$ — кусочно постоянное доопределение сеточной функции $v_h \in V_h$, которое при всех $ih < x < (i+1)h$ равно v_i . Очевидно, что $p_h v_h \in H_0^1(0, l)$, $q_h v_h \in L^q(0, l)$, причем

$$\|q_h v_h\|_{L^q(0, l)} = |v_h|_{h,q}, \quad \|p_h v_h\|_{H_0^1(0, l)} = \|v_h\|_{h,2}.$$

Аналогичным образом для сеточных функций $v_{\tau, h}$, определенных в узлах сетки $\omega_{\tau, h}$, введем оператор продолжения q_{τ} по формулам $q_{\tau} p_h v_{\tau, h} = p_h v_h^{j+1}$, $q_{\tau} q_h v_{\tau, h} = q_h v_h^{j+1}$ при всех $j\tau < t < (j+1)\tau$, $j = 0, 1, \dots, N$ (сетка ω_{τ} при этом считается равномерной).

Обозначим [152] через

$$\lambda_1^h = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l}, \quad (9)$$

$$\psi_h(x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi h/(2l))}{h} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad (10)$$

соответственно первое (наименьшее) собственное значение и первую собственную функцию разностной задачи

$$(\psi_h)_{xx} + \lambda \psi_h = 0, \quad x \in \omega_h; \quad \psi_h \in V_h. \quad (11)$$

Функция ψ_h в (10) выбрана таким образом, что $|\psi_h|_{h,1} = 1$. Заметим, что $\psi_h(x) > 0$ в ω_h .

Мы пачнем с вопроса о разрешимости схемы на временном слое, т. е. о существовании и свойствах оператора перехода [152] с одного временного слоя на следующий. В дальнейшем через A_0, A_1, \dots обозначаются различные постоянные, не зависящие от τ, h .

1.1. Достаточные условия разрешимости разностной схемы на фиксированном временном слое.

1. Сначала будет показано, что при $\beta < \sigma + 1$, а также в случае $\beta = \sigma + 1$, $\lambda_1^h > 1$ (последнее накладывает ограничение сверху на длину отрезка $[0, l]$; см. (9)) схема (4) разрешима относительно сеточной функции \hat{u} при любых величинах τ . Для этого нам понадобится следующее утверждение, которое является разностным аналогом леммы 1 § 2 (см. [131, 152]).

Лемма 1. Для любой функции $v_h \in H_h$ справедливы оценки

$$|v_h|_{h,2}^{2(\sigma+1)} \leq \frac{1}{\lambda_1^h} \|v_h^{\sigma+1}\|_{h,2}^2, \quad (12)$$

$$|v_h|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1} \leq A_0 \|v_h^{\sigma+1}\|_{h,2}^{(\beta+\sigma+1)(\sigma+1)}, \quad A_0 = l^{1+(\beta+\sigma+1)/[2(\sigma+1)]}. \quad (13)$$

Рассмотрим непрерывный оператор $P_h: \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^M$:

$$P_h(\hat{u}) = \{(\hat{u}_k - u_k)/\tau - (\hat{u}_k^{\sigma+1})_{xx} - \hat{u}_k^{\beta}\}, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (14)$$

Существование корня уравнения $P_h(\hat{u}) = 0$ означает разрешимость схемы (4).

Пусть сначала $1 < \beta < \sigma + 1$. Тогда

$$(P_h(\hat{u}), \hat{u}^{\sigma+1})_h = \frac{1}{\tau} (\hat{u} - u, \hat{u}^{\sigma+1})_h + \|\hat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 - |\hat{u}|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1}. \quad (15)$$

Используя неравенство (13), а также легко проверяемую оценку

$$(\xi - \eta) \xi^{\sigma+1} \geq \frac{1}{\sigma+2} (\xi^{\sigma+2} - \eta^{\sigma+2}), \quad \xi, \eta \in \mathbf{R}_+, \quad (16)$$

из (15) получаем

$$(P_h(\hat{u}), \hat{u}^{\sigma+1})_h > -\frac{1}{\sigma+2} \frac{1}{\tau} |u|_{h, \sigma+2}^{\sigma+2} - |\hat{u}|_{h, \beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1} + A_1 |\hat{u}|_{h, \beta+\sigma+1}^{2(\sigma+1)},$$

$$A_1 = l^{-(\beta+3\sigma+3)/(\beta+\sigma+1)}.$$

Второй член в правой части оценим с помощью неравенства Юнга. В результате получим

$$|\hat{u}|_{h, \beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1} \leq \frac{A_1}{2} |\hat{u}|_{h, \beta+\sigma+1}^{2(\sigma+1)} + A_2,$$

$$A_2 = \frac{\sigma+1-\beta}{2(\sigma+1)} \left[\frac{\beta+\sigma+1}{A_1(\sigma+1)} \right]^{(\beta+\sigma+1)/(\sigma+1-\beta)},$$

и тогда окончательная оценка принимает вид

$$(P_h(\hat{u}), \hat{u}^{\sigma+1})_h > \frac{A_1}{2} |\hat{u}|_{h, \beta+\sigma+1}^{2(\sigma+1)} - \left(A_2 + \frac{1}{\sigma+2} \frac{1}{\tau} |u|_{h, \sigma+2}^{\sigma+2} \right). \quad (17)$$

Отсюда в силу теоремы Брауэра о неподвижной точке непрерывного оператора в конечномерном пространстве (см., например, [131]) заключаем, что уравнение $P_h(\hat{u}) = 0$ имеет в шаре

$$|\hat{u}|_{h, \beta+\sigma+1}^{2(\sigma+1)} < \frac{2}{A_1} \left(A_2 + \frac{1}{\sigma+2} \frac{1}{\tau} |u|_{h, \sigma+2}^{\sigma+2} \right) \quad (18)$$

по крайней мере одно решение. Вне этого шара решений не существует, поскольку там, как следует из (17), $(P_h(\hat{u}), \hat{u}^{\sigma+1})_h > 0$.

Перейдем к анализу случая $\beta = \sigma + 1$. Тогда из (15), (12) имеем

$$(P_h(\hat{u}), \hat{u}^{\sigma+1})_h > (\lambda_1^h - 1) |\hat{u}|_{h, 2(\sigma+1)}^{2(\sigma+1)} - \frac{1}{\sigma+2} \frac{1}{\tau} |u|_{h, \sigma+2}^{\sigma+2}.$$

Отсюда при $\lambda_1^h > 1$ уравнение $P_h(\hat{u}) = 0$ имеет по крайней мере одно решение \hat{u} такое, что

$$|\hat{u}|_{h, 2(\sigma+1)}^{2(\sigma+1)} < \frac{1}{(\lambda_1^h - 1)(\sigma+2)\tau} |u|_{h, \sigma+2}^{\sigma+2}. \quad (19)$$

Тем самым доказана

Теорема 1. Пусть $\beta < \sigma + 1$ или $\beta = \sigma + 1$, $\lambda_1^h > 1$. Тогда при любых $\tau > 0$ существует по крайней мере одно решение $\hat{u} \in H_h$ схемы (4), принадлежащее множествам (18) или (19), причем вне указанных множеств решений нет.

Как показывают оценки, полученные в п. 1.5, в условиях теоремы 1 разностная схема (4) при достаточно малых $\tau > 0$ имеет единственное решение.

2. При $\beta > \sigma + 1$ или $\beta = \sigma + 1$, $\lambda_1^h \leq 1$ параболический оператор схемы (4) не является коэрцитивным, т. е. теорема Брауэра, где используется коэрцитивность оператора, не применима, и теорема 1 перестает быть справедливой. Поэтому мы будем искать при достаточно малых τ решение \hat{u} , близкое к u .

Положим $\hat{u} - u = \hat{z}$ и введем непрерывный оператор $F_h: \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^M$:

$$F_h(\hat{z}) = \{\tau [(\hat{z}_k + u_k)^{\sigma+1}]_{\bar{x}x} + \tau (\hat{z}_k + u_k)^\beta, k = 1, 2, \dots, M\}.$$

Наличие у оператора F_h неподвижной точки означает разрешимость схемы (4). Справедлива очевидная оценка

$$|F_h(\hat{z})|_C \leq (|u|_C + |\hat{z}|_C)^\beta \tau + \frac{2}{h^2} (|u|_C + |\hat{z}|_C)^{\sigma+1} \tau.$$

Отсюда F_h переводит множество $X_{C_0} = \{\hat{z} | |\hat{z}|_C \leq C_0\}$ в себя (здесь $C_0 > 0$ — произвольная постоянная), если

$$\tau \leq \frac{C_0}{(|u|_C + C_0)^\beta + 2h^{-2} (|u|_C + C_0)^{\sigma+1}}. \quad (20)$$

Поэтому в силу теоремы Шаудера о неподвижной точке [165] справедлива

Теорема 2. Пусть выполняется условие (20). Тогда схема (4) имеет решение $\hat{u} \in H_h$, причем $|\hat{u} - u|_C \leq C_0$.

Замечание. Полагая $C_0 = |u|_C$ в (20), получаем следующую оценку практически максимально возможного шага по времени $\tau_{\text{раз}}$, при котором схема разрешима на данном слое:

$$\tau_{\text{раз}} \cong (2^\beta |u|_C^{\beta-1} + 2^{\sigma+2} |u|_C^\sigma h^{-2})^{-1}. \quad (21)$$

Ниже будет показано, что эта оценка по характеру зависимости $\tau_{\text{раз}}$ от $|u|_C$ является неулучшаемой. Она имеет принципиальное значение при достаточном больших $|u|_C$, когда решение развивается в режиме с обострением. В классе равномерно ограниченных $|u|_C$ из (21) получаем обычную для параболических уравнений оценку $\tau_{\text{раз}} = O(h^2)$ при $h \ll 1$ (см. [152]).

1.2. Об условиях неединственности разностного решения. Покажем, что при $\beta \geq \sigma + 1$ и достаточно малых τ неявная схема (4) имеет помимо малого решения, построенного в теореме 2, еще одно, большое решение, которое лежит вблизи корня $\hat{U} = \tau^{-1/(\beta-1)}$ разностного уравнения

$$\hat{U}/\tau = \hat{U}^\beta. \quad (22)$$

Оно совпадает с исходным, если в последнем не учитывать член $(\hat{u}^{\sigma+1})_{\bar{x}x}$ и положить $u \equiv 0$. Второе решение таково, что $|\hat{U}|_C \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow 0$.

Положим $\hat{z} = \hat{u} - \tau^{-1/(\beta-1)}$ и определим непрерывный оператор $G_h: \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^M$:

$$G_h(\hat{z}) = \{\tau (\hat{z}_k + \tau^{-1/(\beta-1)})^\beta + \tau [(\hat{z}_k + \tau^{-1/(\beta-1)})^{\sigma+1}]_{\bar{x}x} - \tau^{-1/(\beta-1)} + u_k - \hat{z}_k, k = 1, 2, \dots, M\}.$$

Существование корня уравнения $G_h(\hat{z}) = 0$ означает разрешимость схемы (4).

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} (G_h(\widehat{z}), \widehat{z})_h &= ((\widehat{z} + \tau^{-1/(\beta-1)})^\beta - \tau^{-\beta/(\beta-1)}, \widehat{z})_h \tau + \\ &+ \tau \left[(\widehat{z} + \tau^{-1/(\beta-1)})^{\sigma+1} \right]_{xx}, \widehat{z})_h + (u, \widehat{z})_h - |\widehat{z}|_{h,2}^2 = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 - |\widehat{z}|_{h,2}^2 \end{aligned}$$

на сфере $|\widehat{z}|_{h,2} = a_0 > 0$. Очевидно, что $|\widehat{z}|_c \leq a_0 h^{-1/2}$, и поэтому, положив

$$\eta_0 = a_0 h^{-1/2} \tau^{1/(\beta-1)}, \quad (23)$$

получим

$$\begin{aligned} I_2 &\geq -|\widehat{z}|_{h,2} \left| (\widehat{z} + \tau^{-1/(\beta-1)})_{xx}^{\sigma+1} \right|_{h,2} \tau \geq \\ &\geq -\tau^{[\beta-(\sigma+2)]/(\beta-1)} \frac{2a_0}{h^2} (1 + \eta_0)^{\sigma+1} l^{1/2}, \\ I_3 &\geq -|\widehat{z}|_{h,2} |u|_{h,2} = -a_0 |u|_{h,2}. \end{aligned}$$

Для оценки члена I_1 воспользуемся неравенством

$$\eta \left[(1 + \eta)^\beta - 1 \right] \geq \frac{\beta+1}{2} \eta^2, \quad (24)$$

которое справедливо для любых $\beta > 1$, $|\eta| \leq C_*$, где $C_* = C_*(\beta) > 0$ — некоторая постоянная. Тогда, выбирая величину τ столь малой, чтобы

$$\eta_0 = a_0 h^{-1/2} \tau^{1/(\beta-1)} \leq C_*(\beta), \quad (25)$$

с учетом (24) получаем

$$I_1 \geq \frac{\beta+1}{2} |\widehat{z}|_{h,2}^2 = \frac{\beta+1}{2} a_0^2.$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} (G_h(\widehat{z}), \widehat{z})_h &\geq \\ &\geq \frac{\beta-1}{2} a_0 \left\{ a_0 - \frac{2}{\beta-1} \left[|u|_{h,2} + \frac{2}{h^2} \tau^{[\beta-(\sigma+2)]/(\beta-1)} (1 + C_*(\beta))^{\sigma+1} l^{1/2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Отсюда $(G_h(\widehat{z}), \widehat{z})_h \geq 0$ при всех

$$\begin{aligned} \widehat{z}|_{h,2} = a_0 = \\ = \frac{2}{\beta-1} \left[|u|_{h,2} + \tau^{[\beta-(\sigma+2)]/(\beta-1)} \frac{2}{h^2} (1 + C_*(\beta))^{\sigma+1} l^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Остается убедиться в совместности при малых τ условий (25), (26). Подставляя в (25) величину a_0 из (26), имеем

$$\begin{aligned} \eta_0 = \frac{2}{\beta-1} h^{-1/2} |u|_{h,2} \tau^{1/(\beta-1)} + \frac{4}{\beta-1} h^{-5/2} \times \\ \times [1 + C_*(\beta)]^{\sigma+1} l^{1/2} \tau^{[\beta-(\sigma+1)]/(\beta-1)}, \end{aligned} \quad (27)$$

откуда $\eta_0 \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, если $\beta > \sigma + 1$, т. е. условие (25) не противоречит (26) при малых τ . Тем самым доказана

Теорема 3. Пусть $\beta > \sigma + 1$. Тогда при достаточно малых τ разностная схема (4) помимо решения, построенного в теореме 2, имеет еще одно решение. Если $\beta = \sigma + 1$, то этот вывод справедлив при (см. (27))

$$\frac{4}{\sigma} h^{-5/2} [1 + C_*(\sigma + 1)]^{\sigma+1} l^{1/2} < C_*(\sigma + 1).$$

К счастью, второе (большое) разностное решение, не имеющее физического смысла, неустойчиво, и корректный алгоритм решения неявной схемы [152] дает сходимость только к пужному решению. Тут же можно отметить, что в любой сколь угодно малой окрестности решения $\hat{U} = \tau^{-1/(\beta-1)}$ оператор $F_k(\hat{z}) = \tau(\hat{z}_k + \tau^{-1/(\beta-1)})^\beta - \tau^{-1/(\beta-1)}$, $k = 1, 2, \dots, M$ не является сжимающим, и, значит, решение \hat{U} не может быть получено методом последовательных приближений. Это свидетельствует о его неустойчивости.

1.3. Об условиях несуществования разностного решения. Вторым проявлением некорректности оператора схемы (4) при $\beta \geq \sigma + 1$ является то, что она вообще может быть неразрешимой локально (т. е. на данном слое).

Для определения условий несуществования решения воспользуемся оценкой

$$(\hat{u}^{\sigma+1})_{xx} \geq -\frac{2}{h^2} \hat{u}^{\sigma+1}, \quad x \in \omega_h,$$

с учетом которой из (4) выводим неравенство

$$\hat{u} \geq u + \tau \hat{u}^{\sigma+1} (\hat{u}^{\beta-(\sigma+1)} - 2/h^2), \quad (28)$$

которому должна удовлетворять функция \hat{u} всюду в ω_h .

Ясно, что достаточно проверить выполнение этого неравенства в точке достижения $\max u$, т. е. определить условия, при которых неравенство

$$\xi \geq |u|_c + \tau \xi^{\sigma+1} (\xi^{\beta-(\sigma+1)} - 2/h^2) \quad (29)$$

не имеет решения в \mathbf{R}_+ .

Рассмотрим сначала случай $\beta = \sigma + 1$. Тогда (29) принимает вид

$$\xi \geq |u|_c + \tau \xi^{\sigma+1} (1 - 2/h^2), \quad \xi \in \mathbf{R}_+,$$

и, как нетрудно убедиться, не имеет решения, если

$$h^2 > 2, \quad \tau > \tau^* = \frac{\sigma^\sigma}{(\sigma+1)^{\sigma+1}} |u|_c^{-\sigma} \left(1 - \frac{2}{h^2}\right)^{-1} \quad (30)$$

Пусть теперь $\beta > \sigma + 1$. Воспользовавшись неравенством Юнга

$$\xi^{\sigma+1} \leq \frac{h^2}{4} \xi^\beta + \varepsilon, \quad \xi \in \mathbf{R}_+,$$

$$\varepsilon = \frac{\beta - (\sigma + 1)}{\beta} \left[\frac{4(\sigma + 1)}{\beta h^2} \right]^{(\sigma+1)/[\beta - (\sigma+1)]},$$

получим, что (29) не имеет решений, если всюду в \mathbf{R}_+

$$\xi < |u|_C - \frac{2\tau}{h^2} \varepsilon + \frac{\tau}{2} \xi^\beta.$$

Отсюда получаем условие неразрешимости схемы при $\beta > \sigma + 1$:

$$|u|_C > \frac{2\varepsilon}{h^2} \tau + \frac{\beta-1}{\beta} \left(\frac{2}{\beta\tau} \right)^{1/(\beta-1)}. \quad (31)$$

Теорема 4. Пусть $\beta = \sigma + 1$. Тогда при выполнении условий (30) схема (4) не имеет решения. В случае $\beta > \sigma + 1$ решение не существует при выполнении (31).

Неравенства (30), (31) дают весьма точные оценки величины шага по времени, при которых никакой итерационный процесс решения неявной схемы (4) не будет сходящимся (по той простой причине, что разностное решение не существует). Эти оценки можно использовать в реальных численных расчетах. В связи с этим рассмотрим (31) более подробно.

Положим

$$a_0 = \frac{2|\beta - (\sigma + 1)|}{\beta} \left[\frac{4(\sigma + 1)}{\beta} \right]^{(\beta+1)/[\beta - (\sigma+1)]} \quad b_0 = \frac{\beta-1}{\beta} \left(\frac{2}{\beta} \right)^{1/(\beta-1)}$$

Тогда (31) принимает вид

$$|u|_C \geq a_0 \tau (h^2)^{-\beta/[\beta - (\sigma+1)]} + b_0 \tau^{-1/(\beta-1)}$$

и выполняется, например, в случае

$$|u|_C = \beta a_0 d_0 (h^2)^{-1/[\beta - (\sigma+1)]}, \quad d_0 = \left[\frac{b_0}{a_0(\beta-1)} \right]^{\beta/(\beta-1)} \quad (32)$$

$$\tau = \tau_{\text{нераз}} = d_0 (h^2)^{(\beta-1)/[\beta - (\sigma+1)]}. \quad (33)$$

В то же время условие (21) разрешимости схемы при выборе величины $|u|_C$ из (32) принимает вид

$$\begin{aligned} \tau_{\text{раз}} &= f_0 (h^2)^{(\beta-1)/[\beta - (\sigma+1)]}, \\ f_0 &= [2^\beta (\beta a_0 d_0)^{\beta-1} + 2^{\sigma+2} (\beta a_0 d_0)^\sigma]^{-1} \end{aligned} \quad (33')$$

и в точности совпадает с (33) по характеру зависимости от шага пространственной сетки. Отсюда заключаем, что условие (21) разрешимости схемы при $\beta > \sigma + 1$ является неулучшаемым при больших $|u|_C$ (когда, например, разностное решение является неограниченным).

1.4. О неограниченных разностных решениях. Перейдем к определению условий неразрешимости в целом разностной задачи (4), (5) при $\beta \geq \sigma + 1$ *). Напомним, что сетка по времени здесь неравномерна: $\tau_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и $\sum_{j=0}^{\infty} \tau_j = T_0 < \infty$, где T_0 — время существования решения.

*) Как будет показано в п. 1.5, при $\beta < \sigma + 1$ так же, как в дифференциальном случае (§ 2), неограниченных решений не существует.

Для доказательства неограниченности решения будет использоваться метод, который применялся ранее в § 2, а также в § 6 гл. V.

1. Положим

$$E^{(j+1)} \equiv \hat{E} = (\hat{u}, \psi_h)_h, \quad t \in \omega_\tau, \quad (34)$$

где ψ_h — первая собственная функция (10) задачи (11). Скалярно умножая систему уравнений (4) на ψ_h , получаем цепочку равенств

$$\frac{\hat{E} - E}{\tau_j} = -\lambda_1^h (\hat{u}^{\sigma+1}, \psi_h)_h + (\hat{u}^\beta, \psi_h)_h, \quad t \in \omega_\tau, \quad (35)$$

$$E^{(0)} = E_0 = (u_{0h}, \psi_h)_h,$$

при выводе которой учитывалось, что $((\hat{u}^{\sigma+1})_{\bar{x}x}, \psi_h)_h = (\hat{u}^{\sigma+1}, (\psi_h)_{\bar{x}x})_h = -\lambda_1^h (\hat{u}^{\sigma+1}, \psi_h)_h$.

В силу нормировки $\psi_h > 0$ справедливо неравенство Гёльдера

$$(\hat{u}^\beta, \psi_h)_h = ((\hat{u}^{\sigma+1})^{\beta/(\sigma+1)}, \psi_h)_h \geq (\hat{u}^{\sigma+1}, \psi_h)_h^{\beta/(\sigma+1)},$$

с учетом которого из (35) получаем

$$\frac{\hat{E} - E}{\tau_j} \geq (\hat{u}^{\sigma+1}, \psi_h)_h^{\beta/(\sigma+1)} \left[1 - \lambda_1^h (\hat{u}^{\sigma+1}, \psi_h)_h^{(\sigma+1-\beta)/(\sigma+1)} \right].$$

Отсюда, еще раз применяя неравенство Гёльдера $(\hat{u}^{\sigma+1}, \psi_h)_h \geq (\hat{u}, \psi_h)_h^{\sigma+1}$, выводим неравенство

$$\frac{\hat{E} - E}{\tau_j} \geq (\hat{u}^{\sigma+1}, \psi_h)_h^{\beta/(\sigma+1)} \left(1 - \frac{\lambda_1^h}{\hat{E}^{\beta - (\sigma+1)}} \right). \quad (36)$$

Пусть величина E_0 такова, что

$$\mu_0 = 1 - \lambda_1^h E_0^{\sigma+1-\beta} > 0. \quad (37)$$

Тогда из (36) заключаем, что $\hat{E} > E$ в ω_τ при достаточно малых τ_j , $j = 0, 1$, и поэтому

$$\frac{\hat{E} - E}{\tau_j} \geq \hat{E}^\beta \left[1 - \frac{\lambda_1^h}{E_0^{\beta - (\sigma+1)}} \right] = \mu_0 \hat{E}^\beta, \quad t \in \omega_\tau. \quad (38)$$

Поскольку

$$|\hat{u}|_C = \max_{1 \leq k \leq M} \hat{u}_k \geq \hat{E}, \quad t \in \omega_\tau, \quad (39)$$

для определения условий неограниченности решения задачи (4), (5) необходимо найти такую систему $\{\tau_j\}$ временных интервалов, чтобы $\sum \tau_j = T_0 < \infty$ и из (38) следовало условие $E^{(j)} \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$. Тогда в силу (39) разностное решение будет расти в режиме с обострением, т. е. $|u^j|_C \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$.

Пусть

$$\tau_j = A\rho^{-\alpha j}, \quad j = 0, 1, \quad (40)$$

где $A > 0$, $\alpha > 0$, $\rho > 1$ — постоянные. Тогда

$$T_0 = A\rho^\alpha / (\rho^\alpha - 1) < \infty. \quad (41)$$

Определим условия на A , α , ρ , при которых

$$E^{(j)} \geq E_0 \rho^j, \quad j = 0, 1,$$

Для этого достаточно, чтобы

$$E_0 \rho^j + \tau_j \mu_0 E_0^\beta \rho^{\beta j} \geq E_0 \rho^{j+1}, \quad j = 0, 1, \quad (42)$$

Подставляя в (42) величины τ_j из (40), после упрощений получаем условие $1 + A\mu_0 E_0^{\beta-1} \rho^{j(\beta-\alpha-1)} \geq \rho$, $j = 0, 1$. Это условие будет выполнено, если

$$\alpha = \beta - 1, \quad \rho = 1 + A\mu_0 E_0^{\beta-1}. \quad (43)$$

Таким образом, доказана

Теорема 5. Пусть $\beta \geq \sigma + 1$ и начальная функция u_{0h} в (5) такова, что справедливо (37). Пусть разностная задача (4), (5) разрешима на последовательности шагов по времени (40), где постоянные A , α , ρ удовлетворяют (43). Тогда решение существует в течение времени (41), причем

$$|u^j|_c \geq E_0 \rho^j \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty.$$

Замечание. В § 2 показано, что в дифференциальном случае рассматриваемая задача имеет при $\beta = \sigma + 1$ неограниченные решения, если $\lambda_1^0 = (\pi/l)^2 < 1$. Если же $\lambda_1^0 > 1$, то она разрешима в целом. Из условия (37), которое при $\beta = \sigma + 1$ принимает вид $\lambda_1^h < 1$, и легко проверяемого неравенства $\lambda_1^h < \lambda_1^0$ (см. (9)) тогда заключаем, что разностная задача может иметь неограниченные решения, в то время как дифференциальная задача глобально разрешима. Это происходит, когда длина отрезка l такова, что $\lambda_1^0 > 1$, но $\lambda_1^h < 1$.

Выведенное при доказательстве теоремы 5 неравенство (38) можно использовать для анализа проблемы неразрешимости схемы на фиксированном временном слое. Например, из (38) легко получить следующие более точные, чем (30), условия неразрешимости схемы на j -м слое в случае $\beta = \sigma + 1$:

$$\lambda_1^h < 1, \quad \tau \geq \tau_* = (E^{(j)})^{-\sigma} \frac{\sigma^\sigma}{(\sigma + 1)^{\sigma+1} (1 - \lambda_1^h)}.$$

Первое является оптимальным, поскольку при $\lambda_1^h > 1$ решение всегда существует (см. теорему 1).

Приведем одно любопытное следствие, которое имеет дифференциальный аналог (см. § 3 гл. IV).

Следствие. Пусть $\beta \in [\sigma + 1, \sigma + 3)$ и задана функция $u_0(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}_+$. Фиксируем произвольное $h > 0$. Тогда при до-

статочно больших M найдется такой набор шагов по времени $\{\tau_j\}$, удовлетворяющий условию $T_0 = \sum \tau_j < \infty$, что решение разностной задачи (4), (5) при $l = (M+1)h$ и $u_{0h} \neq 0$ является неограниченным. Если $|u_{0h}|_{h,1} > 2$ при некотором M , то аналогичный вывод имеет место и в случае $\beta = \sigma + 3$.

Доказательство. При больших l для величины μ_0 в (37) справедлива оценка

$$\mu_0 \approx 1 - (|u_{0h}|_{h,1}/2)^{\sigma+1-\beta} (\pi/l)^{\sigma+3-\beta}.$$

Отсюда в сделанных предположениях $\mu_0 > 0$ при достаточно больших l , что в силу теоремы 5 обеспечивает неразрешимость задачи (4), (5) в целом.

2. В заключение приведем пример неограниченного решения разностной задачи (4), (5), представленного в явном виде. Он, в частности, показывает, что указанное в теореме 5 требование разрешимости задачи на последовательности шагов по времени (40) не является слишком обременительным.

Пусть $\beta = \sigma + 1$. Так же как в дифференциальном случае (см. § 1 гл. IV), будем искать разностное решение задачи в разделяющихся переменных:

$$u_h^j = S^j \theta_h, \quad (t, x) \in \omega_\tau \times \omega_h. \quad (44)$$

Подставляя u_h^j в (4), для сеточных функций S^j , θ_h получаем следующие задачи:

$$\frac{\widehat{S} - S}{\tau_j} = \frac{1}{\sigma} \widehat{S}^{\sigma+1}, \quad t \in \omega_\tau; \quad (45)$$

$$(\theta^{\sigma+1})_{xx} + \theta^{\sigma+1} = \frac{1}{\sigma} \theta, \quad x \in \omega_h, \quad \theta \in H_h. \quad (46)$$

Пусть задана система временных интервалов (40), где $\rho > 1$, $\alpha = \sigma$. Тогда решением задачи (45) будет функция

$$S^j = \rho^j, \quad j = 0, 1, \dots, A = \sigma \rho^{-(\sigma+1)} (\rho - 1). \quad (47)$$

Решение задачи (46) построим в частном случае $\sigma = 2$. Фиксируем произвольное целое $M > 0$ и положим $h = 2 \sin \{3\pi/[2(M+1)]\}$. В этом случае длина отрезка равна

$$l_h = \frac{3\pi h}{2} \left(\arcsin \frac{h}{2} \right)^{-1} \quad 0 < h \leq 2. \quad (48)$$

Тогда, как нетрудно убедиться, решение задачи (46) имеет вид

$$\theta_k = \left\{ 2 \left[3 \left(1 - \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{a_h h}{2} \right) \right]^{-1} \right\}^{1/2} \sin(a_h k h), \\ k = 0, 1, \dots, M+1, \quad (49)$$

где $a_h = \pi/l_h$.

Функции (47), (49) определяют в соответствии с (44) неограниченное разностное решение задачи (4), (5) при $\sigma = 2$, $\beta = 3$,

$l = l_h$, которое возрастает до бесконечности во всех точках ω_h , сохраняя свою пространственную структуру. При $h \rightarrow 0$ разностное решение (49) сходится к решению соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения (см. § 1 гл. IV):

$$\theta(x) = (3/4)^{1/2} \sin(x/3), \quad 0 < x < l_0 = 3\pi. \quad (50)$$

Длина носителя этого решения l_0 определяет фундаментальную длину нелинейной среды. Разностная фундаментальная длина (48) слабо отличается при $h \ll 1$ от $l_0 = 3\pi$. При больших h отличие может быть значительным, например $l_h = 9$ при $h = 1$, $l_h = 6$ при $h = 2$.

Отметим, что сеточная функция (49) не является проекцией на ω_h решения (50) — дифференциального аналога задачи (46) при $\sigma = 2$, хотя и имеет похожую структуру. Это отличие еще более значительно в случае $\sigma = 1$, когда уравнение (46) также имеет простое решение:

$$\theta_k = A_h \sin^2(b_h k h) + B_h, \quad k = 0, 1, \dots, M+1,$$

где

$$b_h = \frac{1}{2h} \arcsin \frac{h}{2}, \quad 0 < h \leq 2; \quad A_h = \frac{1}{\kappa_h} [2(2\kappa_h - 1)]^{1/2},$$

$$B_h = \frac{1}{2\kappa_h} \{1 - [2(2\kappa_h - 1)]^{1/2}\}, \quad \kappa_h = 1 - \frac{2}{h^2} \left[1 - \left(1 - \frac{h^2}{4}\right)^{1/2}\right],$$

которое, однако, краевым условиям не удовлетворяет и строго положительно. Только в пределе при $h \rightarrow 0$, когда $\kappa_h \rightarrow 3/4$, $B_h \rightarrow 0$, функция θ_k является решением дифференциальной задачи при $l \geq 4\pi$.

Теперь мы переходим к вопросам глобальной разрешимости разностной задачи и сходимости разностного решения при τ , $h \rightarrow 0$ к обобщенному решению дифференциальной задачи (1) — (3). Необходимо рассмотреть два случая.

1.5. Глобальная разрешимость и предельный переход при $\beta \leq \sigma + 1$. Напомним, что сетка ω_τ далее считается равномерной.

Теорема 6. Пусть $\beta < \sigma + 1$. Тогда при достаточно малых τ разностная задача имеет единственное глобальное ограниченное решение. Если $\beta = \sigma + 1$, то аналогичное утверждение справедливо при дополнительном предположении

$$\lambda_1^h = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} > 1. \quad (51)$$

В случаях $\beta < \sigma + 1$ и $\beta = \sigma + 1$, $\lambda_1 > 1$ разностное решение сходится при τ , $h \rightarrow 0$ к обобщенному решению дифференциальной задачи (1) — (3), построенному в теореме 2 § 2.

Нам понадобятся следующие леммы, первая из которых проверяется непосредственно. Вторая из них доказана в [131, 152].

Лемма 2. При всех $\xi, \eta \in \mathbf{R}_+$ выполнено неравенство

$$(\xi^{\sigma+1} - \eta^{\sigma+1}) \xi^\beta \leq \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} (\xi^{\beta+\sigma+1} - \eta^{\beta+\sigma+1}) + \\ + C_1 [\max\{\xi, \eta\}]^{\beta-1} (\xi^{1+\sigma/2} - \eta^{1+\sigma/2})^2, \quad (52)$$

где $C_1 = C_1(\sigma, \beta) > 0$ — постоянная.

Лемма 3. Для любой сеточной функции $v_h \in H_h$

$$|v_h|_C \leq A_3 \|v_h^{\sigma+1}\|_{h,2}^{\sigma+1}, \quad A_3 = l^{1/2(\sigma+1)}. \quad (53)$$

Доказательство теоремы 6. Фиксируем произвольное $T > 0$.

1) Рассмотрим сначала случай $\beta < \sigma + 1$. В силу теоремы 1 схема (4) для $\beta < \sigma + 1$ разрешима при любых τ , т. е. функция \hat{u} определена всюду в $\omega_{\tau, h}$. Нам понадобятся оценки разностного решения.

Скалярно умножая обе части (4) на $\hat{u}^{\sigma+1}$ и используя при этом очевидное неравенство

$$(\xi - \eta) \xi^{\sigma+1} \geq \frac{1}{\sigma+2} (\xi^{\sigma+2} - \eta^{\sigma+2}), \quad \xi, \eta \in \mathbf{R}_+,$$

получаем

$$\frac{1}{\sigma+2} \frac{1}{\tau} (|\hat{u}|_{h,\sigma+2}^{\sigma+2} - |u|_{h,\sigma+2}^{\sigma+2}) + \|\hat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 \leq |\hat{u}|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1}. \quad (54)$$

Правую часть этого неравенства оценим с помощью (13) и неравенства Юнга, учитывая при этом, что $\beta < \sigma + 1$. В результате выводим неравенство

$$|\hat{u}|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1} \leq \frac{1}{2} \|\hat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 + A_4, \quad (55)$$

$$A_4 = \frac{\sigma+1-\beta}{2(\beta+\sigma+1)} \left[\frac{\sigma+1}{A_0(\beta+\sigma+1)} \right]^{2(\sigma+1)/[\beta-(\sigma+1)]},$$

и тогда из (54) получаем

$$\frac{1}{\sigma+2} \frac{1}{\tau} |\hat{u}|_{h,\sigma+2}^{\sigma+2} + \frac{1}{2} \|\hat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 \leq A_4 + \frac{1}{\tau} \frac{1}{\sigma+2} |u|_{h,\sigma+2}^{\sigma+2}. \quad (56)$$

Отсюда следуют оценки

$$\max_{0 \leq j < N} |u^{j+1}|_{h,\sigma+2}^{\sigma+2} \leq A_4 T (\sigma+2) + |u_{0h}|_{h,\sigma+2}^{\sigma+2} \leq A_5 \quad (57)$$

и в силу (53) неравенство

$$\max_{0 \leq j < N} |w^{j+1}|_C \leq A_3 \left(2A_4 + \frac{2}{\tau} \frac{1}{\sigma+2} A_6 \right)^{1/[2(\sigma+1)]}. \quad (58)$$

Для вывода других оценок умножим скалярно (4) на $(\hat{u}^{\sigma+1} - u^{\sigma+1})/\tau$ и воспользуемся неравенством (52), а также неравенством $(\xi^{\sigma+1} - \eta^{\sigma+1})(\xi - \eta) \geq C_2(\xi^{1+\sigma/2} - \eta^{1+\sigma/2})^2$ при всех

$\xi, \eta \in \mathbf{R}_+$, где $C_2 = C_2(\sigma) > 0$ — постоянная. В результате получим

$$C_2 \left| \frac{\widehat{u}^{1+\sigma/2} - u^{1+\sigma/2}}{\tau} \right|_{h,2}^2 \leq -\frac{1}{2\tau} (\|\widehat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 - \|u^{\sigma+1}\|_{h,2}^2) + \\ + \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} \frac{1}{\tau} (|\widehat{u}|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1} - |u|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1}) + \\ + C_1 \tau [\max\{|\widehat{u}|_C, |u|_C\}]^{\beta-1} \left| \frac{\widehat{u}^{1+\sigma/2} - u^{1+\sigma/2}}{\tau} \right|_{h,2}^2. \quad (59)$$

При выводе (59) использовалось также неравенство

$$((\widehat{u}^{\sigma+1})_{xx}, \widehat{u}^{\sigma+1} - u^{\sigma+1})_h \leq -(\|\widehat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 - \|u^{\sigma+1}\|_{h,2}^2)/2$$

(поскольку $\xi(\xi - \eta) \geq (\xi^2 - \eta^2)/2$ при любых $\xi, \eta \in \mathbf{R}_+$).

Выберем N столь большим, т. е. величине $\tau = T/(N+1)$ столь малой, чтобы $C_1 \tau [\max\{|\widehat{u}|_C, |u|_C\}]^{\beta-1} \leq C_2/2$ при всех $0 \leq j \leq N$. Для этого, как следует из (58), достаточно, чтобы

$$\tau \left(2A_4 + \frac{2}{\tau} \frac{1}{\sigma+2} A_5 \right)^{(\beta-1)/[2(\sigma+1)]} \leq \frac{C_2}{2C_1} A_3^{1-\beta} \quad (60)$$

При $\beta < \sigma+1$ это всегда можно сделать. Тогда, суммируя неравенства (59) по всем j от 0 до N и применяя неравенство Юнга, получаем

$$\frac{C_2}{2} \sum_{j=0}^N \tau \left| \frac{\widehat{u}^{1+\sigma/2} - u^{1+\sigma/2}}{\tau} \right|_{h,2}^2 + \frac{1}{2} \|(u^{N+1})^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 \leq \\ \leq \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} |u^{N+1}|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1} + \frac{1}{2} \|u_{0h}^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 - \\ - \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} |u_{0h}|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1} \leq \frac{1}{4} \|(u^{N+1})^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 + A_6$$

(при выводе последнего неравенства использовалась оценка (13)). Отсюда вытекают оценки

$$\sum_{j=0}^N \tau \left| \frac{\widehat{u}^{1+\sigma/2} - u^{1+\sigma/2}}{\tau} \right|_{h,2}^2 \leq A_7, \quad (61)$$

$$\max_{0 \leq j \leq N} \|(u^{j+1})^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 \leq A_8. \quad (62)$$

Таким образом, ограничение (60) на величину шага по времени τ обеспечивает глобальную ограниченность разностного решения задачи (4), (5) при $\beta < \sigma+1$. Отметим, что из (62) в силу (53) следует оценка

$$\max_{0 \leq j \leq N} |u^{j+1}|_C \leq A_9. \quad (63)$$

Покажем теперь, что в случае

$$\tau < A_9^{1-\beta}/\beta \quad (64)$$

решение является единственным. Пусть \hat{u}_1, \hat{u}_2 — два решения задачи. Тогда из (4) имеем $\hat{u}_1 - \hat{u}_2 = \tau (\hat{u}_1^{\sigma+1} - \hat{u}_2^{\sigma+1})_{xx} + \tau (\hat{u}_1^\beta - \hat{u}_2^\beta)$. Скалярно умножая это равенство на $\hat{u}_1^{\sigma+1} - \hat{u}_2^{\sigma+1}$, получаем

$$\begin{aligned} (\hat{u}_1 - \hat{u}_2, \hat{u}_1^{\sigma+1} - \hat{u}_2^{\sigma+1})_h &= \\ &= -\tau \|\hat{u}_1^{\sigma+1} - \hat{u}_2^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 + \tau (\hat{u}_1^\beta - \hat{u}_2^\beta, \hat{u}_1^{\sigma+1} - \hat{u}_2^{\sigma+1})_h \leq \\ &\leq \tau \beta [\max\{|\hat{u}_1|_C, |\hat{u}_2|_C\}]^{\beta-1} (\hat{u}_1 - \hat{u}_2, \hat{u}_1^{\sigma+1} - \hat{u}_2^{\sigma+1})_h. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (63), (64) заключаем, что $(\hat{u}_1 - \hat{u}_2, \hat{u}_1^{\sigma+1} - \hat{u}_2^{\sigma+1})_h = 0$, т. е. $\hat{u}_1 \equiv \hat{u}_2$.

Для доказательства законности предельного перехода нам понадобится еще одна оценка. Из (4) имеем

$$\|(\hat{u} - u)/\tau\|_{h,2}^* \leq \|(\hat{u}^{\sigma+1})_{xx}\|_{h,2}^* + \|\hat{u}^\beta\|_{h,2}^*.$$

Отсюда, учитывая равенство (8), с помощью (62) получаем

$$\max_{0 < j < N} \|(u^{j+1} - u^j)/\tau\|_{h,2}^* \leq A_{10}. \quad (65)$$

Введем для удобства обозначение

$$\nabla_{\tau} q_{\tau} v_{\tau h} = (v_h^{j+1} - v_h^j)/\tau, \quad j\tau \leq t \leq (j+1)\tau.$$

Из (57), (61), (62), (65) с помощью результатов работы [260] получаем следующие оценки: функции $q_{\tau} p_h (u^j)^{\sigma+1}$ ограничены в $L^\infty(0, T; H_0^1(0, l))$ и в $L^\infty(0, T; L^{(\sigma+2)/(\sigma+1)}(0, l))$; $q_{\tau} q_h (u^j)^{\sigma+1} - v$ в $L^\infty(0, T; L^{(\sigma+2)/(\sigma+1)}(0, l))$; $q_{\tau} q_h (u^j)^{1+\sigma/2} - v$ в $L^\infty(0, T; L^2(0, l))$; $\nabla_{\tau} q_{\tau} q_h (u^j)^{1+\sigma/2} - v$ в $L^2(0, T; L^2(0, l))$; $q_{\tau} p_h u^j - v$ в $L^\infty(0, T; L^{\sigma+2}(0, l))$; $\nabla_{\tau} q_{\tau} p_h u^j - v$ в $L^\infty(0, T; H^{-1}(0, l))$; $[q_{\tau} p_h (u^j)^{\sigma+1}]_{xx} - v$ в $L^\infty(0, T; H^{-1}(0, l))$; $q_{\tau} q_h (u^j)^\beta - v$ в $L^\infty(0, T; L^1(0, l))$; $q_h (u^{N+1}) - v$ в $L^{\sigma+2}(0, l)$. Этих оценок достаточно для перехода на основе теоремы компактности [78] к пределу при $\tau, h \rightarrow 0$ (с подробностями можно познакомиться в [131, 260]).

В результате запово доказывается существование глобального обобщенного решения задачи (1) — (3) при $\beta < \sigma + 1$, удовлетворяющего включениям, указанным в теореме 1 § 2. Отметим, что в дополнение к ним получаем $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(0, l))$.

2) Рассмотрим случай $\beta = \sigma + 1$. Применяя для оценки правой части (54) при $\beta = \sigma + 1$ неравенство (12), получаем

$$\frac{1}{\sigma+2} \frac{1}{\tau} |\hat{u}|_{h, \sigma+2}^{\sigma+2} + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^h}\right) \|\hat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 \leq \frac{1}{\sigma+2} \frac{1}{\tau} |u|_{h, \sigma+2}^{\sigma+2}. \quad (66)$$

Отсюда (см. (51)) вытекает справедливость оценки (58) при $A_4 = 0$ и неравенства

$$\|\hat{u}^{\sigma+1}\|_{h,2}^2 \leq \frac{1}{\sigma+2} \frac{1}{\tau} \frac{\lambda_1^h}{\lambda_1^h - 1} |u_{0h}|_{h, \sigma+2}^{\sigma+2} \leq \frac{A_{11}}{\tau}.$$

Сделаем τ столь малой величиной, чтобы (см. (60))

$$\tau^{(\sigma+2)/[2(\sigma+1)]} \leq \frac{C_2}{2C_1} A_3^{-\sigma} A_{11}^{-\sigma/[2(\sigma+1)]}$$

Тогда, как нетрудно убедиться, выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \frac{C_2}{2} \sum_{j=0}^N \tau \left| \frac{\widehat{u}^{1+\sigma/2} - u^{1+\sigma/2}}{\tau} \right|_{h,2}^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^h} \right) \| (u^{N+1})^{\sigma+1} \|_{h,2}^2 &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} (\| u_{0h}^{\sigma+1} \|_{h,2}^2 - |u_{0h}|_{h,2}^{2(\sigma+1)}), \end{aligned}$$

из которого вытекают оценки (61)–(63). Последующий анализ проводится так же, как в случае $\beta < \sigma + 1$.

Таким образом, в случае $\beta < \sigma + 1$ или $\beta = \sigma + 1$, $\lambda_1^h > 1$ ни при каком измельчении сетки по времени (разумеется, ее можно взять и неравномерной) разностные режимы с обострением не возникают, что совпадает со сделанными в § 2 выводами относительно дифференциальной задачи. Эта аналогия еще более четко прослеживается в случае $\beta > \sigma + 1$.

1.6. Разностное множество устойчивости и предельный переход при $\beta > \sigma + 1$. Здесь будет показано, что при $\beta > \sigma + 1$ можно построить разностное множество устойчивости \mathscr{W}_h , которое по своей структуре вполне аналогично дифференциальному, рассмотренному в § 2. Его мы далее будем обозначать через \mathscr{W}_0 , подчеркивая тем самым, что это \mathscr{W}_h при $h = 0^+$.

Определим для всех $v_h \in H_h$ функционал

$$J_h(v_h) = \frac{1}{2} a_h(v_h) - \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} b_h(v_h),$$

где $a_h(v_h) = \| v_h^{\sigma+1} \|_{h,2}^2$, $b_h(v_h) = |v_h|_{h,\beta+\sigma+1}^{\beta+\sigma+1}$. С помощью леммы 1 без труда доказывается (см. лемму 3 § 2)

Лемма 4. Пусть $\beta > \sigma + 1$. Тогда справедливо неравенство

$$d_h = \inf_{\substack{v_h \in H_h \\ v_h \neq 0}} \sup_{\lambda > 0} J_h(\lambda v_h) > \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta + \sigma + 1)} l^{-[\beta + \sigma(\sigma + 1)]/[\beta - (\sigma + 1)]} > 0.$$

Теперь мы можем определить разностное множество устойчивости \mathscr{W}_h (которое в силу леммы 4 не является пустым):

$$\mathscr{W}_h = \{v_h | v_h \in H_h, 0 \leq J_h(\lambda v_h) < d_h, \lambda \in [0, 1]\}. \quad (67)$$

Из способа построения \mathscr{W}_h вытекает следующая (см. лемму 4 § 2)

Лемма 5. Справедливо равенство $\mathscr{W}_h^* = \mathscr{W}_h^* \cup \{0\}$, где

$$\mathscr{W}_h^* = \{v_h | v_h \in H_h, a_h(v_h) - b_h(v_h) > 0, J_h(v_h) < d_h\}.$$

Сформулируем основное утверждение этого пункта.

Теорема 7. Пусть $\beta > \sigma + 1$ и $u_{0h} \in \mathscr{W}_h$. Тогда при достаточно малых τ разностная задача (4), (5) имеет глобальное ре-

шение, принадлежащее \mathscr{W}_h при всех $t \in \omega_\tau$, причем такое решение единственно. Если, кроме того, $u_0 \in \mathscr{W}_0$, то при $\tau, h \rightarrow 0$ разностное решение сходится к обобщенному решению исходной дифференциальной задачи, построенному в теореме 4 § 2.

Замечание. В условиях теоремы 7 никакое измельчение шага τ (который сам по себе должен быть достаточно малым) не приводит к неограниченности разностного решения. Таким образом, как следует из теоремы 7, неравенство (37) не может быть выполнено, если $u_{0h} \in \mathscr{W}_h$, т. е.

$$1 - \lambda_1^h(u_{0h}, \psi_h)_h^{\sigma+1-\beta} \leq 0, \quad u_{0h} \in \mathscr{W}_h.$$

Это неравенство служит дополнительной характеристикой разностного множества устойчивости \mathscr{W}_h .

Доказательство теоремы 7. Оно во многом повторяет доказательство «дифференциальной» теоремы 4 § 2. Если $u_{0h} \in \mathscr{W}_h$, то в силу леммы 5 получаем $a_h(u_{0h}) - b_h(u_{0h}) > 0$, и, следовательно,

$$J_h(u_{0h}) = \frac{1}{2} a_h(u_{0h}) - \frac{\sigma+1}{\beta+\sigma+1} b_h(u_{0h}) \geq \frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta+\sigma+1)} a_h(u_{0h}).$$

Поэтому из (53) следует, что

$$|u_{0h}|_C \leq A_3 \left[\frac{2(\beta+\sigma+1)}{\beta-(\sigma+1)} J_h(u_{0h}) \right]^{1/[2(\sigma+1)]} \leq A_{12},$$

т. е. \mathscr{W}_h ограничено в $C(\omega_h)$.

Покажем, что условие

$$\tau \leq \frac{\min\{1, C_2/(2C_1)\}}{(1+A_{12})^\beta + 2h^{-2}(1+A_{12})^{\sigma+1}} \quad (68)$$

обеспечивает разрешимость схемы (4) на каждом слое.

Сделаем первый шаг по времени. Из теоремы 2 (см. условие (20) при $C_0 = 1$) следует, что при ограничении (68) схема разрешима. Поскольку в силу (68) $|u^1|_C \leq |u^0|_C + 1 \leq A_{12} + 1$, то

$$\tau [\max\{|u^1|_C, |u^0|_C\}]^{\beta-1} \leq C_2/(2C_1),$$

и, следовательно, из (59) получаем неравенство

$$\frac{C_2}{2} \left| \frac{(u^1)^{1+\sigma/2} - (u^0)^{1+\sigma/2}}{\tau} \right|_{h,2}^2 \leq \frac{1}{\tau} [J_h(u^0) - J_h(u^1)]. \quad (69)$$

Докажем, что $u^1 \in \mathscr{W}_h$. Действительно, пусть $u^1 \notin \mathscr{W}_h$. Тогда, поскольку $u^1 \rightarrow u^0$ при $\tau \rightarrow 0$ (см. доказательство теоремы 2) и $u^0 \in \mathscr{W}_h$, найдется такое $\tau = \tau_*$, удовлетворяющее (68), что $u^1 \in \delta\mathscr{W}_h$. В силу (67) это означает, что $J_h(u^1) = d_h$. Отсюда получаем противоречие с (69), поскольку по предположению $J_h(u^0) < d_h$.

Итак, $u^1 \in \mathscr{W}_h$. Тогда из леммы 5 получаем, что $a_h(u^1) > b_h(u^1)$. Оценивая с помощью этого неравенства второй член

из правой части (69), имеем

$$\frac{C_2}{2} \left| \frac{(u^1)^{1+\sigma/2} - (u^0)^{1+\sigma/2}}{\tau} \right|_{h,2}^2 + \frac{1}{\tau} \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta + \sigma + 1)} \| (u^1)^{\sigma+1} \|_{h,2}^2 \leq \frac{1}{\tau} J_h(u^0).$$

Отсюда

$$\frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta + \sigma + 1)} \| (u^1)^{\sigma+1} \|_{h,2}^2 \leq J_h(u^0),$$

и, следовательно, $|u^1|_c \leq A_{12}$. Последнее обеспечивает законность совершения следующего шага по времени с ограничением (68) на величину τ и т. д.

Таким образом, при выполнении условия (68) разностная задача имеет глобальное решение $\hat{u} \in \mathscr{W}_h$, $|\hat{u}|_c \leq A_{12}$ при всех $0 < j \leq N$ и, кроме того,

$$\frac{C_2}{2} \sum_{j=0}^N \tau \left| \frac{\hat{u}^{1+\sigma/2} - u^{1+\sigma/2}}{\tau} \right|_{h,2}^2 + \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta + \sigma + 1)} \| \hat{u}^{\sigma+1} \|_{h,2}^2 \leq J_h(u_{0h}).$$

Единственность при $\tau < \beta^{-1} A_{12}^{1-\beta}$ равномерно ограниченного решения $u \in \mathscr{W}_h$ доказывается так же, как в теореме 6.

Построенное разностное решение удовлетворяет оценкам, которые позволяют произвести предельный переход $\tau, h \rightarrow 0$. При этом необходимо лишь заметить, что в случае $u_0 \in \mathscr{W}_0$ включение $u_{0h} \in \mathscr{W}_h$ справедливо при всех достаточно малых $h > 0$. В результате устанавливается существование глобального обобщенного решения задачи (1)–(3), принадлежащего $\overline{\mathscr{W}}_0$ при всех $t > 0$.

В заключение отметим, что в силу оценки (21) для глобальной разрешимости разностной задачи в множестве \mathscr{W}_h достаточно, чтобы $\tau = O(h^2)$ при $h \ll 1$. Ограничение на величину τ типа (68) существенно, слишком большие шаги по времени могут рано или поздно «выбросить» решение из \mathscr{W}_h , и тем самым оно станет неограниченным. Необходимое для этого измельчение шагов τ_j автоматически проделает применяемый итерационный алгоритм, когда в действие вступит теорема 4 (о несуществовании решения).

2. Явная (линейная) разностная схема. Ниже мы кратко остановимся на исследовании неограниченных решений явной разностной схемы для задачи (1)–(3):

$$(\hat{u} - u)/\tau_j = (u^{\sigma+1})_{xx} + u^\beta, \quad (t, x) \in \omega_\tau \times \omega_h, \quad (70)$$

$$u^0 = u_{0h} \geq 0, \quad x \in \omega_h; \quad \hat{u} \in H_h, \quad t \in \omega_\tau. \quad (71)$$

Главное отличие этой схемы от неявной заключается в том, что «эллиптический» оператор в правой части (70) вычисляется через значения сеточной функции u не на следующем, как в (4), временном слое, а через значения с текущего слоя. Поэтому, естественно, проблема разрешимости схемы (70), (71) не возникает. Мы не будем подробно останавливаться на сравнительном анализе достоинств и недостатков той и другой схем (ранее об

этом немного говорилось). Такой анализ подробно проведен в [152].

Рассмотрим один принципиальный вопрос о том, когда решение явной схемы (70), (71) является неотрицательным для любой начальной функции $u_0(x) \geq 0$, $x \in \omega_h$, т. е. когда решение подчиняется слабому принципу максимума. Если этого нет, то (70) может не иметь смысла (в (70) присутствует операция возведения в произвольную степень). Оказывается, в некоторых случаях ($\beta < \sigma + 1$) слабого принципа максимума вообще нет, а при $\beta \geq \sigma + 1$ для его существования необходимо весьма обременительное ограничение на τ_j , h .

2.1. Слабый принцип максимума. Сетку здесь считаем равномерной, $\tau_j \equiv \tau$.

Теорема 8. При $\beta < \sigma + 1$ слабый принцип максимума не справедлив. Если $\beta = \sigma + 1$, то необходимым и достаточным условием его существования является неравенство $h^2 \geq 2$. В случае $\beta > \sigma + 1$ таким условием является следующее:

$$\tau \leq F_0 (h^2)^{(\beta-1)/[\beta-(\sigma+1)]}, \quad F_0 = \frac{\beta-1}{2[\beta-(\sigma+1)]} \left(\frac{\beta-1}{2\sigma} \right)^{-\sigma/[\beta-(\sigma+1)]} \quad (72)$$

Доказательство. Мы исходим из того, что необходимым и достаточным условием неотрицательности \hat{u} при любой $u \geq 0$ в ω_h является требование неотрицательности всюду в R_+ функции

$$P_\lambda(\xi) = \xi + \tau \xi^\beta - 2\lambda \xi^{\sigma+1}, \quad \lambda = \tau/h^2, \quad (73)$$

которое вытекает из вида разрешенного относительно \hat{u} равенства (70): $\hat{u}_k = P_\lambda(u_k) + \lambda(u_{k-1}^{\sigma+1} + u_{k+1}^{\sigma+1})$, если положить $u_{k-1} = u_{k+1} = 0$ при некотором $0 < k < M$ (такая ситуация возможна, например, в начальный момент времени). Простой анализ функции (73) приводит к сделанным в теореме выводам.

Отметим, что неравенство (72) по характеру зависимости τ от h напоминает условие (33') разрешимости неявной схемы на слое при $\beta > \sigma + 1$. Однако здесь есть большая разница: если (33') необходимо лишь на развитой стадии эволюции режима с обострением ($|u|_c$ велико), то без (72), вообще говоря, просто нельзя начинать счет. Естественно, при некоторых начальных функциях u_{0k} условие (72) может и не понадобиться.

2.2. О неограниченных разностных решениях явной схемы. Здесь мы рассмотрим условия возникновения разностных режимов с обострением в задаче (70), (71) при $\beta \geq \sigma + 1$. Для этих целей можно использовать метод собственных функций, который применялся в п. 1.4, причем для явной схемы он много проще.

Ниже анализ проводится другим методом. В дальнейшем считаем сетку ω_τ равномерной, $\tau_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, $T_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \tau_j < \infty$.

Пусть максимум начальной функции $u_{0k} \neq 0$ — значение $|u_{0k}|_c$ — достигается в некоторой точке $x \in \omega_h$. Легко видеть, что

в этой точке значение сеточной функции w^{j+1} следующим образом оценивается через w^j :

$$w^{j+1} \geq w^j + \tau_j \left[(w^j)^\beta - \frac{2}{h^2} (w^j)^{\sigma+1} \right], \quad t \in \omega_{\tau_1}, \quad (74)$$

$$w^0 = |u_{0h}|_C > 0.$$

При этом мы считаем, что $u \geq 0$ в $\omega_\tau \times \omega_h$ (см. теорему 8).

Из (74) нетрудно вывести условие неограниченности решения. Запишем (74) в таком виде:

$$w^{j+1} \geq w^j + \tau_j (w^j)^\beta \left[1 - \frac{2}{h^2} (w^j)^{\sigma+1-\beta} \right], \quad t \in \omega_\tau. \quad (75)$$

Пусть начальная функция u_{0h} такова, что

$$\mu_0 = 1 - \frac{2}{h^2} |u_{0h}|_C^{\sigma+1-\beta} > 0. \quad (76)$$

Тогда из (75) непосредственно следует, что $w^{j+1} > w^j$ при всех $j = 0, 1, \dots$, и поэтому из (75) имеем

$$w^{j+1} \geq \mu_0 \tau_j (w^j)^\beta, \quad t \in \omega_\tau. \quad (77)$$

Остается подходящим образом выбрать величины шагов τ_j . Положим, например,

$$\tau_j = \frac{q}{\mu_0} (w^j)^{1-\beta}, \quad j = 0, 1, \quad q = \text{const} > 1. \quad (78)$$

Тогда (77) примет вид

$$w^{j+1} \geq q w^j, \quad j = 0, 1, \quad w^0 = |u_{0h}|_C.$$

Отсюда сразу получаем

$$w^j \geq |u_{0h}|_C q^j, \quad j = 0, 1, \quad (79)$$

т. е. $w^j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$.

Покажем, что это действительно разностный режим с обострением. В силу (78), (79) для времени существования разностного режима получаем оценку

$$T_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \tau_j = \frac{q}{\mu_0} \sum_{j=0}^{\infty} (w^j)^{1-\beta} \leq$$

$$\leq \frac{q}{\mu_0} |u_{0h}|_C^{1-\beta} \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(1-\beta)} = \frac{|u_{0h}|_C^{1-\beta}}{\mu_0} \frac{q^\beta}{q^{\beta-1} - 1} < \infty. \quad (80)$$

Итак, выполнение (76) обеспечивает принадлежность u_{0h} к разностному множеству неустойчивости \mathcal{V}_h .

Теорема 9. Пусть $\beta \geq \sigma + 1$ и выполняется условие (76). Тогда существует такой набор шагов по времени $\{\tau_j\}$, определяемый из (78), что решение явной схемы (70), (71) является неограниченным и для времени существования справедлива оценка (80).

Отметим, что для реализации режима с обострением в явной схеме необходим выбор малых шагов по времени. Например, в рамках указанного подхода для величины τ_0 (первого шага) выводится такая оценка: при выполнении (76) справедливо неравенство

$$|u_{0h}|_C > (2/h^2)^{1/[\beta-(\sigma+1)]},$$

и поэтому из (78) получаем

$$\begin{aligned} \tau_0 = \frac{q}{\mu_0} |u_{0h}|_C^{1-\beta} &< \frac{q}{\mu_0} 2^{(1-\beta)/[\beta-(\sigma+1)]} (h^2)^{(\beta-1)/[\beta-(\sigma+1)]} = \\ &= O[(h^2)^{(\beta-1)/[\beta-(\sigma+1)]}], \quad h \ll 1. \end{aligned} \quad (81)$$

Разумеется, в соответствии с (78), (79) последующие шаги будут еще меньше. Эта оценка совпадает по характеру зависимости τ_0 от h с оптимальным неравенством (33'), гарантирующим разрешимость соответствующей неявной схемы. Таким образом, для реализации режима с обострением по явной схеме, несмотря на всю ее внешнюю простоту, все равно необходимо считать σ очень малым шагом. Причина этого ясна: из (70) непосредственно следует, что счет с большими шагами никогда не приводит к режиму с обострением. Это, например, выполняется в случае равномерной сетки ω_τ . Отметим также, что ограничение типа (81) необходимо для выполнения слабого принципа максимума (см. теорему 8).

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ. ПРОБЛЕМЫ

§ 1. При изложении результатов § 1 мы в основном следуем работам [28, 32, 36, 58, 59] (в [36] содержится сжатое изложение результатов исследования одномерного уравнения). Отдельные результаты § 1 получены ранее в [25]. Теорема 6 при $\sigma = 0$, $p > (\beta - 1)N/2$, $p \geq 1$ и более произвольных начальных функциях доказана другим методом в [278] (см. также теоремы 3.2, 3.3 в [182]). Отметим, что в [278, 182] существенным образом использовалась полулинейная структура уравнения (4) при $\sigma = 0$, т. е. возможность обращения линейного оператора $\partial/\partial t - \Delta$ и сведения задачи к эквивалентному интегральному уравнению. Поэтому метод [278] не применим в квазилинейном случае, когда $\varphi'(u) \neq \text{const}$. Теорема 6 в случае $\sigma = 0$, $N = 1$ и произвольных $u_0(x)$ доказана в [59]; там же определено точное выражение огибающей к семейству $\{U(r); U_0\}$ в теореме 5: $u(T_0^-, x) \geq G(r) = C_0 |x|^{-2/(\beta-1)}$, где $C_0 > C_*$ — постоянная. Отдельные классы уравнений с коэффициентами типа (30), (31) изучались в [32, 42, 153] (см. § 7 гл. IV). В наиболее общем виде вырожденные п. а. р. подобных квазилинейных уравнений рассматривались в [51].

§ 2. Теоремы из п. 1 доказаны в [26, 30]. Ранее подобная задача рассматривалась на основе другого подхода в [277], где, однако, получены не вполне оптимальные результаты. Основные утверждения из п. 2.1 содержатся в [25, 30] (близкие по общности результаты получены в [240]). Большинство выводов из п. 2.2 можно найти в [30]. Обобщение метода вопулости для исследования неограниченных решений параболических уравнений и систем уравнений с данным типом нелинейности выполнено в [29]. Впоследствии условия возникновения неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений были установлены в [246, 240]. В [246] для этого использовался метод собственных функций, подобный [25, 30] (см. теорему 8 § 2); в [240] применялся тот же подход, что и в [29]. Подробное исследование краевой задачи для квазилинейного уравнения $u_t = \psi(u)u_{xx} + \varphi(u)$ в одномерном случае ранее было выполнено в [224], где, в частно-

сти, использовался один вариант метода собственных функций. Краткий обзор литературы по неограниченным решениям можно найти в [48].

§ 3. Большинство результатов § 3 содержится в [52] (см. также [48]). Общая характеристика метода стационарных состояний для нелинейных эволюционных параболических задач дана в [50]. Там же приведены другие примеры.

§ 4. Численные и качественные результаты п. 1 взяты из [121, 127]. Исследование, вышележащее в п. 2, проведено в [37].

§ 5. Все основные утверждения § 5 доказаны в [60, 61]. Исследование неограниченных решений явных разностных схем для полулинейного ($\sigma = 0$) уравнения разными методами проводилось в [249, 250].

Результаты § 3 и предложение из § 4 основаны на выводах [52, 50]. Отметим, что практически оптимальный результат о глобальной разрешимости красной задачи при $pq < (1 + \mu)(1 + \nu)$ (теорема 5 § 3), полученный методом стационарных состояний, трудно установить с помощью обычных способов вывода априорных оценок, например тех, которые используются в методе Галёркина. Об этом говорит анализ, проведенный в [48], а также, например, результаты [243], где получены ограничения типа $p < 1 + \mu$, $q < 1 + \nu$. Они естественны для одного уравнения (см. § 2) и характеризуют в общем легко объяснимое соотношение интенсивностей процессов теплопроводности и горения, необходимое для возникновения тепловых возмущений с конечной амплитудой. Эти условия, как показано в § 3, далеко не оптимальны для систем уравнений.

1. (§ 1) Дать описание класса коэффициентов $\{k, Q\}$, при которых условие отсутствия локализации (16) (при $N = 1$) является не только достаточным, но и необходимым (для случая $k(u) = u^\alpha$, $Q(u) = u^\beta$, $\beta \geq \sigma + 1$, $\sigma > 0$ это сделано в [34]).

2. (§ 1) Вывести оценку сверху $u(T_0^-, x)$ типа (29') в теореме 5 для произвольных начальных функций $u_0(x)$ (для частного класса u_0 это сделано в [36]).

3. (§ 1) Доказать локализацию неограниченных решений уравнения (1) с коэффициентами (30) при $\alpha \geq 2$ (в случае $k(u) \equiv 1$, $Q(u) = (1 + u) \ln^2(1 + u)$, $\beta \geq 2$, это проверялось численно; см. § 7 гл. IV).

4. (§ 2) Определить условия, при которых поведение неограниченных решений краевой задачи (5), (6) при $t \rightarrow T_0^-(u_0) < \infty$, $\beta \in (\sigma + 1, (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+)$ описывается автомодельными решениями, построенными в § 1 гл. IV. Исследовать асимптотическое поведение неограниченных решений задачи при $\beta \geq (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$ (отметим, что в этом случае появляется особый класс глобальных решений; см. [251]).

5. (§ 3) Можно ли построить семейство решений уравнения (39) в R^N при критическом значении параметра $\beta = [N/\alpha + 2(1 + 1/\alpha)]/[N - 2(1 + 1/\alpha)]$, $\alpha \neq 1$, подобное тому, которое приведено в примере в п. 2.4 для полулинейного случая $\alpha = 1$, $\beta = (N + 4)/(N - 4)$?

6. (§ 3) Определить условия локализации финитных неограниченных решений задачи Коши для системы (1), (2). Достаточно ли для этого, чтобы $m = pq - (1 + \mu)(1 + \nu) \geq 0$?

7. (§ 3) Какое п. а. р. описывает асимптотическое поведение неограниченных решений задачи Коши для системы (1), (2) в тех случаях, когда она не имеет автомодельных решений?

8. (§ 3) Определить условия разрешимости эллиптической системы (69). Что представляет собой все множество ее решений при различных значениях параметров (некоторые численные результаты приведены в [121, 127]).

9. (§ 4) Найти условия локализации неограниченных решений задачи (15), (16).

10. (§ 5) Являются ли локализованными неограниченные разностные решения явной схемы (70), (71) при $\beta \geq \sigma + 1$ в случае «финитной» начальной функции $u_{0h} \geq 0$ (т. е. может ли быть так, что $\{x \in \omega_h \mid u(T_0^-, x) = \infty\} \neq \omega_h$)? Неявная схема этим асимптотическим свойством не обладает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адьютов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П. Исследование автомоделных структур в иллинейной среде.—Преприит / ИПМ АН СССР.—М., 1982.— № 108.— 28 с.
2. Адьютов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П. Автомоделные тепловые структуры с сокращающейся полушириной // Дифференц. уравнения.— 1983.— Т. 19, № 7.— С. 1107—1114.
3. Адьютов М. М., Лепин Л. А. Отсутствие обостряющихся автомоделных структур в среде с источником при постоянной теплопроводности // Дифференц. уравнения.— 1984.— Т. 20, № 7.— С. 1279—1281.
4. Адьютов М. М., Михайлов А. П. Неограниченные инвариантные решения квазилинейного параболического уравнения, обладающие свойством самофокусировки // ЖВМ и МФ.— 1985.— Т. 25, № 7.— С. 1031—1038.
5. Андрианкин Э. И., Рыжов О. С. Распространение тепловой волны, близкой к сферической // ДАН СССР.— 1957.— Т. 115, № 5.— С. 882—885.
6. Ануфриева М. А., Демидов М. А., Михайлов А. П., Степанова В. В. Режимы с обострением в задачах газовой динамики // Математические модели, аналитические и численные методы в теории переноса.— Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР.— 1982.— С. 19—25.
7. Бабиц А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности // УМН.— 1983.— Т. 38, вып. 4.— С. 133—187.
8. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ.— 1952.— Т. 16, вып. 1.— С. 67—78.
9. Баренблатт Г. И. Подобие, автомоделность, промежуточная асимптотика.— Л.: Гидрометеониздат, 1978.— 208 с.
10. Баренблатт Г. И. Об одном классе точных решений плоской одномерной задачи нестационарной фильтрации газа в пористой среде // ПММ.— 1953.— Т. 17, вып. 6.— С. 739—742.
11. Баренблатт Г. И. О предельных автомоделных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя // ПММ.— 1954.— Т. 18, вып. 4.— С. 409—414.
12. Баренблатт Г. И. Об автомоделных решениях задачи Коши для нелинейного параболического уравнения нестационарной фильтрации газа в пористой среде // ПММ.— 1956.— Т. 20, вып. 6.— С. 761—763.
13. Баренблатт Г. И., Вишик М. И. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // ПММ.— 1956.— Т. 20, вып. 3.— С. 411—417.
14. Бартман А. Б. Распад плазмы при оптическом пробое газов // Тезисы докладов V Всесоюзного совещания по нерезонансному взаимодействию оптического излучения с веществом.— Л.: Изд-во ГОИ, 1981.— С. 264—265.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I.— М.: Наука, 1973.— 294 с.
16. Белоносов В. С., Зеленяк Т. И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений.— Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1976.— 155 с.

17. Бункин Ф. В., Галактионов В. А., Кириченко Н. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об одной нелинейной задаче лазерной термоядерной химии // ДАН СССР.— 1984.— Т. 279, № 4.— С. 838—842.
18. Вишик М. И. О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков // Мат. сб.— 1962.— Т. 59 (доп.).— С. 289—325.
19. Волосевич П. П., Дегтярев Л. М., Курдюмов С. П. и др. Процесс сверхвысокого сжатия вещества и иницирование термоядерной реакции мощным импульсом лазерного излучения // Физика плазмы.— 1976.— Т. 2, № 6.— С. 883—897.
20. Вольперт А. И., Худяев С. И. О задаче Коши для квазилинейных вырождающихся уравнений второго порядка // Мат. сб.— 1969.— Т. 78, № 3.— С. 374—396.
21. Вольперт А. И., Худяев С. И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики.— М.: Наука, 1975.— 395 с.
22. Галактионов В. А. Условия φ -критичности и методы сравнения решений параболических уравнений.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1979.— № 151.— 31 с.
23. Галактионов В. А. Два метода сравнения решений параболических уравнений // ДАН СССР.— 1980.— Т. 251, № 4.— С. 832—835.
24. Галактионов В. А. О приближенных автомодельных решениях уравнений типа нелинейной теплопроводности // Дифференц. уравнения.— 1980.— Т. 16, № 9.— С. 1660—1676.
25. Галактионов В. А. Некоторые свойства решений квазилинейных параболических уравнений.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1981.— № 16.— 28 с.
26. Галактионов В. А. Об одной краевой задаче для нелинейного параболического уравнения $u_t = \Delta u^{\sigma+1} + u^{\beta}$ // Дифференц. уравнения.— 1981.— Т. 17, № 5.— С. 836—842.
27. Галактионов В. А. О некоторых свойствах бегущих волн в среде с нелинейной теплопроводностью и источником тепла // ЖВМ и МФ.— 1981.— Т. 21, № 4.— С. 980—989.
28. Галактионов В. А. Об условиях локализации неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений // ДАН СССР.— 1982.— Т. 264, № 5.— С. 1035—1040.
29. Галактионов В. А. Об условиях отсутствия глобальных решений одного класса квазилинейных параболических уравнений // ЖВМ и МФ.— 1982.— Т. 22, № 2.— С. 322—338.
30. Галактионов В. А. О несуществовании и существовании глобальных решений краевых задач для квазилинейных параболических уравнений // ЖВМ и МФ.— 1982.— Т. 22, № 6.— С. 1369—1385.
31. Галактионов В. А. Условия критичности и теоремы сравнения разностных решений нелинейных параболических уравнений // ЖВМ и МФ.— 1983.— Т. 23, № 1.— С. 109—118.
32. Галактионов В. А. О неразрешимых в целом задачах Коши для квазилинейных параболических уравнений // ЖВМ и МФ.— 1983.— Т. 23, № 5.— С. 1072—1087.
33. Галактионов В. А. Об условиях несуществования в целом и локализации решений задачи Коши для одного класса нелинейных параболических уравнений // ЖВМ и МФ.— 1983.— Т. 23, № 6.— С. 1341—1354.
34. Галактионов В. А. Доказательство локализации неограниченных решений нелинейного параболического уравнения $u_t = (u^{\sigma} u_x)_x + u^{\beta}$ // Дифференц. уравнения.— 1985.— Т. 21, № 1.— С. 15—23.
35. Галактионов В. А. Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейного параболического уравнения $u_t = (u^{\sigma} u_x)_x + u^{\sigma+1}$ // Дифференц. уравнения.— 1985.— Т. 21, № 7.— С. 1126—1134.
36. Галактионов В. А. Асимптотика неограниченных решений нелинейного уравнения $u_t = (u^{\sigma} u_x)_x + u^{\beta}$ вблизи «сингулярной» точки // ДАН СССР.— 1986.— Т. 288, № 6.— С. 1293—1297.
37. Галактионов В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Влияние выгорания на локализацию горения и образо-

- вание структур в нелинейной среде.—Препринт / ИПМ АН СССР.—М., 1979.— № 27.— 37 с.
38. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Метастабильная локализация возмущений в задачах для уравнений типа нелинейной теплопроводности.—Препринт / ИПМ АН СССР.—М., 1979.— № 181.— 33 с.
 39. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. О сравнении решений параболических уравнений // ДАН СССР.— 1979.— Т. 248, № 3.— С. 586—589.
 40. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Сравнение решений параболических уравнений на основе априорных поточечных оценок старшей производной.—Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1979.— № 21.— 60 с.
 41. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Действие граничных режимов с обострением на среду с постоянной теплопроводностью.—Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1979.— № 28.— 76 с.
 42. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений.—Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1979.— № 161.— 30 с.
 43. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений // ЖВМ и МФ.— 1979.— Т. 19, № 6.— С. 1451—1461.
 44. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t = \nabla(u^\alpha \nabla u) + u^\beta$ // ДАН СССР.— 1980.— Т. 252, № 6.— С. 1362—1364.
 45. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Асимптотическая стадия режимов с обострением и эффективная локализация тепла в задачах нелинейной теплопроводности // Дифференц. уравнения.— 1980.— Т. 16, № 7.— С. 1196—1204.
 46. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Локализация тепла в нелинейных средах // Дифференц. уравнения.— 1981.— Т. 17, № 10.— С. 1826—1841.
 47. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Посашков С. А., Самарский А. А. Об одной нелинейной эллиптической задаче со сложным спектром решений // ЖВМ и МФ.— 1986.— Т. 26, № 3.— С. 398—407.
 48. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об одной параболической системе квазилинейных уравнений. I // Дифференц. уравнения.— 1983.— Т. 19, № 12.— С. 2123—2140.
 49. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об асимптотической устойчивости инвариантных решений нелинейных уравнений теплопроводности с источником // Дифференц. уравнения.— 1984.— Т. 20, № 4.— С. 614—632.
 50. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. О методе стационарных состояний для нелинейных эволюционных параболических задач // ДАН СССР.— 1984.— Т. 278, № 6.— С. 1296—1300.
 51. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. О приближенных автомодельных решениях одного класса квазилинейных уравнений теплопроводности с источником // Мат. сб.— 1984.— Т. 124, № 2.— С. 163—188.
 52. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об одной параболической системе квазилинейных уравнений. II // Дифференц. уравнения.— 1985.— Т. 21, № 9.— С. 1544—1559.
 53. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об асимптотических «собственных функциях» задачи Коши для одного нелинейного параболического уравнения // Мат. сб.— 1985.— Т. 126, № 4.— С. 435—472.
 54. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. О новом классе асимптотических «собственных функций» задачи Коши для

- одного нелинейного параболического уравнения // ЖВМ и МФ.— 1985.— Т. 25, № 12.— С. 1833—1839.
55. Галактионов В. А., Михайлов А. П. Об одной автомодельной задаче для уравнения нелинейной теплопроводности.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1977.— № 53.— 37 с.
 56. Галактионов В. А., Посашков С. А. Об одной «линеаризованной» нелинейной эллиптической задаче, возникающей в теории режимов с обострением.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1985.— № 10.— 25 с.
 57. Галактионов В. А., Посашков С. А. Об уравнении «быстрой диффузии» в R^N // ДАН СССР.— 1986.— Т. 287, № 3.— С. 539—542.
 58. Галактионов В. А., Посашков С. А. Уравнение $u_t = u_{xx} + u^p$. Локализация, асимптотическое поведение неограниченных решений.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1985.— № 97.— 30 с.
 59. Галактионов В. А., Посашков С. А. Новые варианты использования сильного принципа максимума для параболических уравнений и некоторые их приложения.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1985.— № 167.— 28 с.
 60. Галактионов В. А., Самарский А. А. О разностных решениях одного класса квазилинейных параболических уравнений. I // ЖВМ и МФ.— 1983.— Т. 23, № 3.— С. 646—659.
 61. Галактионов В. А., Самарский А. А. О разностных решениях одного класса квазилинейных параболических уравнений. II // ЖВМ и МФ.— 1983.— Т. 23, № 4.— С. 831—838.
 62. Галактионов В. А., Самарский А. А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I // Мат. сб.— 1982.— Т. 118, № 3.— С. 292—322.
 63. Галактионов В. А., Самарский А. А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. II // Мат. сб.— 1982.— Т. 118, № 4.— С. 435—455.
 64. Галактионов В. А., Самарский А. А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. III // Мат. сб.— 1983.— Т. 120, № 1.— С. 3—21.
 65. Галактионов В. А., Самарский А. А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. IV // Мат. сб.— 1983.— Т. 121, № 2.— С. 131—155.
 66. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // УМН.— 1959.— Т. 14, № 2.— С. 87—158.
 67. Глеспедорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.— М.: Мир, 1973.— 280 с.
 68. Демидов М. А., Клоков Ю. А., Михайлов А. П. Безударное сжатие конечной массы газа плоским поршнем при произвольном распределении энтропии.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1984.— № 151.— 28 с.
 69. Демидов М. А., Михайлов А. П. Условия проявления эффекта локализации газодинамических процессов.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1985.— № 9.— 28 с.
 70. Демидов М. А., Михайлов А. П. Эффекты локализации и образования структур при сжатии конечной массы газа в режиме с обострением // ПММ.— 1986.— Т. 50, вып. 1.— С. 119—127.
 71. Демидов М. А., Михайлов А. П., Степанова В. В. Локализация и структуры при сжатии газа в режиме с обострением // ДАН СССР.— 1985.— Т. 281, № 1.— С. 41—46.
 72. Дородницын В. А. Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1979.— № 57.— 31 с.
 73. Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // ЖВМ и МФ.— 1982.— Т. 22, № 6.— С. 1393—1400.
 74. Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. О некоторых инвариантных решениях уравнения теплопроводности с источником.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1980.— № 31.— 24 с.

75. Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях.—Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1982.— № 79.— 24 с.
76. Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р. Групповые свойства уравнения анизотропной теплопроводности с источником.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1982.— № 134.— 20 с.
77. Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения.— 1983.— Т. 19, № 7.— С. 1215—1223.
78. Дубинский Ю. А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях // Мат. сб.— 1965.— Т. 67, № 4.— С. 609—642.
79. Еленин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Инерция тепла и диссипативные структуры // Изучение гидродинамической неустойчивости численными методами.— М.: ИПМ АН СССР, 1980.— С. 5—27.
80. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1977.— № 106.— 80 с.
81. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде // ЖВМ и МФ.— 1983.— Т. 23, № 2.— С. 380—390.
82. Еленин Г. Г., Плехотников К. Э. Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1977.— № 91.— 29 с.
83. Жданов С. К., Трубников Б. А. Оптимальное сжатие плазмы в z - и θ -пинче // Письма в ЖЭТФ.— 1975.— Т. 24, вып. 6.— С. 371—373.
84. Зеленяк Т. И. О стабилизации решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка с одной пространственной переменной // Дифференц. уравнения.— 1968.— Т. 4, № 1.— С. 34—45.
85. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И. Об асимптотических свойствах автомодельных решений уравнений нестационарной фильтрации газа // ДАН СССР.— 1958.— Т. 118, № 4.— С. 671—674.
86. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сб., посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе.— М.: Изд-во АН СССР.— 1950.— С. 61—71.
87. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.— 686 с.
88. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы в задачах z - и θ -пинча.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1974.— № 19.— 70 с.
89. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы // ДАН СССР.— 1974.— Т. 218, № 6.— С. 1306—1309.
90. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. N - и S -режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением // ПМТФ.— 1977, № 1.— С. 3—23.
91. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Особенности нелинейного скина // Сб. аннотаций докладов II Междунар. конф. по теории плазмы (Киев, 1974 г.).— Киев: Наукова думка, 1974.— С. 148.
92. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов с обострением.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1976.— № 74.— 67 с.
93. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Локализация термоядерного горения в плазме с элект-

- тронной теплопроводностью // Письма в ЖЭТФ.— 1977.— Т. 26, вып. 9.— С. 620—624.
94. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Метастабильная локализация тепла в среде с пеллициной теплопроводностью и условия проявления ее в эксперименте.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1977.— № 103.— 67 с.
 95. Змитренко Н. В., Михайлов А. П. Инерция тепла / Сер. Математика, кибернетика.— М.: Знание, 1982.— 64 с.
 96. Ибрагимов Н. Х. К групповой классификации дифференциальных уравнений второго порядка // ДАН СССР.— 1968.— Т. 183, № 2.— С. 174—177.
 97. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике.— М.: Наука, 1983.— 280 с.
 98. Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б. Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли — Беклунда // Функцион. анализ и его прил.— 1980.— Т. 14, вып. 1.— С. 25—36.
 99. Калашников А. С. Задача Коши в классе растущих функций для уравнения типа нестационарной фильтрации // Вести. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1963.— № 6.— С. 17—27.
 100. Калашников А. С. Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с бескопечной скоростью распространения возмущений // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1972.— № 6.— С. 45—49.
 101. Калашников А. С. О дифференциальных свойствах обобщенных решений уравнений типа нестационарной фильтрации // Вести. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1974.— № 1.— С. 62—68.
 102. Калашников А. С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением // ЖВМ и МФ.— 1974.— Т. 14, № 4.— С. 891—905.
 103. Калашников А. С. О влиянии поглощения на распространение тепла в среде теплопроводностью, зависящей от температуры // ЖВМ и МФ.— 1976.— Т. 16, № 3.— С. 689—697.
 104. Капель Я. И. О стабилизации решений задачи Коши для уравнений, встречающихся в теории горения // Мат. сб.— 1962.— Т. 59 (доп.).— С. 245—288.
 105. Капель Я. И. О стабилизации решений уравнений теории горения при финитных начальных функциях // Мат. сб.— 1964.— Т. 65, № 3.— С. 398—413.
 106. Кершнер Р. О некоторых свойствах обобщенных решений квазилинейных выражающихся параболических уравнений // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae.— 1978.— Т. 32, № 3—4.— С. 301—330.
 107. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ.— 1937.— Т. 1, № 6.— С. 1—26.
 108. Кружков С. Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка и некоторые задачи для квазилинейных параболических уравнений // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1964.— № 6.— С. 65—74.
 109. Кружков С. Н. Результаты о характере непрерывности решений параболических уравнений и некоторые их применения // Мат. заметки.— 1969.— Т. 6, № 1.— С. 97—108.
 110. Кружков С. Н. О задаче Коши для некоторых классов квазилинейных параболических уравнений // Мат. заметки.— 1969.— Т. 6, № 3.— С. 295—300.
 111. Кружков С. Н. Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— М.: Изд-во МГУ, 1979.— № 5.— С. 217—272.
 112. Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка.— М.: Наука, 1985.— 376 с.
 113. Курдюмов С. П. О физике плазмы с перегретой неустойчивостью // Материалы объединенного семинара по вычислительной физике (Сухуми, 1973 г.).— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1976.— С. 165—178.

114. Курдюмов С. П. Локализация тепла в нелинейных средах.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1976.— № 39.— 21 с.
115. Курдюмов С. П. Нелинейные процессы в плотной плазме // Докл. II Междупар. конф. по теории плазмы (Киев, 1974 г.).— Киев: Наук. думка, 1976.— С. 278—287.
116. Курдюмов С. П. Локализация диффузионных процессов и возникновение структур при развитии в диссипативной среде режимов с обострением: Дис. на соискание учен. степ. докт. физ.-мат. наук.— М.: ИПМ АН СССР, 1979.
117. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики.— М.: Наука, 1982.— С. 217—243.
118. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Устойчивость собственных функций и эффекты переноса в неоднородной диссипативной среде.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1980.— № 16.— 27 с.
119. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Согласованные режимы горения в одной диссипативной среде с переносом.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1980.— № 125.— 28 с.
120. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горящей среде // ДАН СССР.— 1980.— Т. 251, № 3.— С. 587—591.
121. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных двухкомпонентных средах с объемными источниками // ДАН СССР.— 1981.— Т. 258, № 5.— С. 1084—1088.
122. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А. Архитектура многомерных тепловых структур // ДАН СССР.— 1984.— Т. 274, № 5.— С. 1071—1075.
123. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы / Сер. Математика, кибернетика.— М.: Знание, 1983.— 64 с.
124. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А. Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах // ДАН СССР.— 1980.— Т. 251, № 4.— С. 836—839.
125. Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Плехотников К. Э. Локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности. Тепловой «кристалл».— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1977.— № 22.— 50 с.
126. Курдюмов С. П., Посашков С. А., Синило А. В. О инвариантных решениях уравнения теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, допускающим наиболее широкую группу преобразований.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1984.— № 110.— 28 с.
127. Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Нестационарные диссипативные структуры в двухкомпонентных средах.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1981.— № 19.— 27 с.
128. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.
129. Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М.: Наука, 1973.— 576 с.
130. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде.— М.— Л.: ГИТТЛ, 1947.
131. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 587 с.
132. Лихт М. К. О распространении возмущений в задачах, связанных с вырождающимися квазилинейными уравнениями параболического типа // Дифференц. уравнения.— 1966.— Т. 2, № 7.— С. 953—957.
133. Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности // ЖВМ и МФ.— 1972.— Т. 12, № 4.— С. 1048—1054.

134. Мартинсон Л. К. Распространение тепловой волны в нелинейной среде с поглощением // ПМТФ.— 1979.— № 4.— С. 36—39.
135. Михайлов А. П. Метастабильная локализация тепловых возмущений в среде с нелинейной теплопроводностью.— Препринт / ИПМ АН СССР.— М., 1977.— № 64.— 37 с.
136. Михайлов А. П., Степанова В. В. Локализация газодинамических процессов и структуры при адиабатическом сжатии вещества в режиме с обострением // ПММ.— 1984.— Т. 48, вып. 6.— С. 921—928.
137. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики.— М.: Наука, 1984.— 349 с.
138. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности // ДАН СССР.— 1959.— Т. 125, № 3.— С. 492—495.
139. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 399 с.
140. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу-Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1958.— Т. 22, № 5.— С. 667—704.
141. Олейник О. А., Кружков С. Н. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными // УМН.— 1961.— Т. 16, вып. 5.— С. 115—155.
142. Илохотников К. Э. Локализация тепла и фундаментальная длина в двумерных задачах нелинейной теплопроводности // Тр. МФТИ. Сер. Астрофизика и прикл. мат.— 1977.— С. 349—353.
143. Подубаринова-Кочина П. Я. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении, встречающемся в теории фильтрации // ДАН СССР.— 1948.— Т. 63, № 6.— С. 623—627.
144. Похожаев С. И. О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ // ДАН СССР.— 1965.— Т. 165, № 1.— С. 36—39.
145. Похожаев С. И. О собственных функциях квазилинейных эллиптических задач // Мат. сб.— 1970.— Т. 82, № 2.— С. 192—212.
146. Похожаев С. И. Вопросы отсутствия решений нелинейных краевых задач // Тр. Всесоюз. конф. по уравн. с частн. произв., посв. 75-летию акад. И. Г. Петровского.— М.: Изд-во МГУ, 1978.— С. 200—203.
147. Похожаев С. И. Об одном подходе к нелинейным уравнениям // ДАН СССР.— 1979.— Т. 247, № 6.— С. 1327—1331.
148. Похожаев С. И. О периодических решениях некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1980.— Т. 16, № 1.— С. 109—116.
149. Сабина Е. С. О задаче Коши для уравнения нестационарной фильтрации газа с многими независимыми переменными // ДАН СССР.— 1961.— Т. 136, № 5.— С. 1034—1037.
150. Сабина Е. С. Об одном классе нелинейных вырождающихся параболических уравнений // ДАН СССР.— 1962.— Т. 143, № 4.— С. 794—797.
151. Сабина Е. С. Об одном классе квазилинейных параболических уравнений, не разрешимых относительно производной по времени // Сиб. мат. журн.— 1965.— Т. 6, № 5.— С. 1074—1100.
152. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.— 656 с.
153. Самарский А. А. О новых методах исследования асимптотических свойств параболических уравнений // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1981.— Т. 158.— С. 153—162.
154. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Локализация процессов диффузии и средах с постоянными свойствами // ДАН СССР.— 1979.— Т. 247, № 2.— С. 349—353.
155. Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко И. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Горение нелинейной среды в виде сложных структур // ДАН СССР.— 1977.— Т. 237, № 6.— С. 1330—1333.
156. Самарский А. А., Змитренко И. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью // ДАН СССР.— 1975.— Т. 223, № 6.— С. 1344—1347.

157. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. И. Теплонос структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла // ДАН СССР.— 1976.— Т. 227, № 2.— С. 321—324.
158. Самарский А. А., Курдюмов С. П. Нелинейные процессы в плотной плазме и их роль в проблеме лазерного УТС // Тр. кафедры волновой и газовой динамики мех.-мат. ф-та МГУ.— 1979.— № 3.— С. 18—28.
159. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн // ЖВМ и МФ.— 1963.— Т. 3, № 4.— С. 703—719.
160. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. II.— М.: ИЛ, 1954.— 415 с.
161. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.— 255 с.
162. Соболевский П. Е. Уравнения параболического типа в банаховом пространстве // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1961.— Т. 10.— С. 297—350.
163. Станюкович К. И. Неустойчившиеся движения сплошной среды.— М.: ГИТТЛ, 1955.— 804 с.
164. Филиппов А. Ф. Об условиях существования решения квазилинейного параболического уравнения // ДАН СССР.— 1961.— Т. 141, № 3.— С. 568—570.
165. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа.— М.: Мир, 1968.— 427 с.
166. Хажеп Г. Синергетика.— М.: Мир, 1980.— 404 с.
167. Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г. Неравенства.— М.: ИЛ, 1948.— 456 с.
168. Alikakos N. D. L^p bounds of solutions of reaction-diffusion equations // Comm. Partial Differ. Equat.— 1979.— V. 4.— P. 827—868.
169. Alikakos N. D., Evans L. C. Continuity of the gradient for weak solutions of a degenerate parabolic equation // J. Math. Pures et Appl.— 1983.— V. 62.— P. 253—268.
170. Alikakos N. D., Rostamian R. Large time behaviour of solutions of Neumann boundary value problem for the porous medium equation // Indiana Univ. Math. J.— 1981. V. 30.— P. 749—785.
171. Alikakos N. D., Rostamian R. Stabilization of solutions of the equation $\partial u/\partial t = \Delta \Phi(u) - \beta(u)$ // Nonlinear Anal., Theory, Meth. Appl.— 1982.— V. 6.— P. 637—647.
172. Ames W. F. Nonlinear partial differential equations in engineering. V. I, II.— N. Y.: Acad. Press, 1965.
173. Aronson D. G. Regularity properties of flows through porous media // SIAM J. Appl. Math.— 1969.— V. 17.— P. 461—467.
174. Aronson D. G. Regularity properties of flows through porous media: a counterexample // SIAM J. Appl. Math.— 1970.— V. 19.— P. 299—307.
175. Aronson D. G. Regularity properties of flows through porous media: the interface // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1970.— V. 37.— P. 1—10.
176. Aronson D. G., Benilan P. Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans \mathbb{R}^n // C. R. Acad. Sci. Paris.— 1979.— Ser. 1, T. 288.— P. 103—105.
177. Aronson D., Crandall M., Peletier L. A. Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem // Nonlinear Anal., Theory, Meth. Appl.— 1982.— V. 6.— P. 1001—1022.
178. Aronson D. G., Peletier L. A. Large time behaviour of solutions of the porous medium equation in bounded domains // J. Differ. Equat.— 1981.— V. 39.— P. 378—412.
179. Aronson D. G., Weinberger H. F. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics // Advances in Math.— 1978.— V. 30.— P. 33—76.
180. Atkinson F. V., Peletier L. A. Similarity profiles of flows through porous media // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1971.— V. 42.— P. 369—379.
181. Atkinson F. V., Peletier L. A. Similarity solutions of the nonlinear diffusion equation // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1974.— V. 54.— P. 373—392.

182. Ball J. M. Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations // *Quart. J. of Math.*—1977.—V. 28.—P. 473—486.
183. Benilan P., Crandall M. G. The continuous dependence on φ of solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$ // *Indiana Univ. Math. J.*—1981.—V. 30.—P. 161—177.
184. Benilan P., Crandall M. G., Pierre M. Solutions of the porous medium equation in R^n under optimal conditions on initial values // *Indiana Univ. Math. J.*—1984.—V. 33.—P. 51—87.
185. Benilan P., Diaz J. I. Comparison of solutions of nonlinear evolution problems with different nonlinear terms // *Israel J. Math.*—1982.—V. 42.—P. 241—257.
186. Berger M. S. *Nonlinearity and functional analysis (Lecture on nonlinear problems in mathematical analysis)*.—N. Y.: Acad. Press, 1977.—412 p.
187. Berryman J. G., Holland C. J. Stability of the separable solution for fast diffusion // *Arch. Ration. Mech. Anal.*—1980.—V. 74.—P. 379—388.
188. Bertsch M., Kersner R., Peletier L. A. Sur le comportement de la frontière libre dans une équation en théorie de la filtration // *C. R. Acad. Sci. Paris.*—1982.—Ser. 1, T. 295.—P. 63—66.
189. Bertsch M., Nanbu T., Peletier L. A. Decay of solutions of a degenerate nonlinear diffusion equation // *Nonlinear Anal., Theory, Meth. Appl.*—1982.—V. 6.—P. 539—554.
190. Bluman G., Kumei S. On the remarkable nonlinear diffusion equation $(\partial/\partial x)[a(u+b)^{-2}(\partial u/\partial x)] - (\partial u/\partial t) = 0$ // *J. Math. Phys.*—1980.—V. 21.—P. 1019—1023.
191. Brezis H., Crandall M. G. Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$ // *J. Math. Pures et Appl.*—1979.—V. 58.—P. 153—163.
192. Brezis H., Friedman A. Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions // *J. Math. Pures et Appl.*—1983.—V. 62.—P. 73—97.
193. Burgan J. R., Munier A., Feix M. R., Fijalkow E. Homology and the nonlinear heat differential equation // *SIAM J. Appl. Math.*—1984.—V. 44.—P. 11—18.
194. Caffarelli L., Friedman A. Regularity of the free boundary for the one-dimensional flow of gas in a porous medium // *Amer. J. Math.*—1979.—V. 101.—P. 1193—1218.
195. Caffarelli L. A., Friedman A. Regularity of the free boundary of a gas flow in an n -dimensional porous medium // *Indiana Univ. Math. J.*—1980.—V. 29.—P. 361—391.
196. Clarke J. S., Fisher H. N., Mason R. J. Laser-driven implosion of spherical DT target to thermonuclear burn conditions // *Phys. Rev. Lett.*—1973.—V. 30.—P. 89—94.
197. Craven A. H., Peletier L. A. Similarity solutions for degenerate quasilinear parabolic equations // *J. Math. Anal. Appl.*—1972.—V. 38.—P. 73—81.
198. DiBenedetto E. Regularity results for the porous media equation // *Ann. Mat. Pura ed Appl.*—1979.—V. 121.—P. 249—262.
199. Da Prato G., Grisvard P. Equations d'évolution abstraites non linéaires de type parabolique // *Ann. Mat. Pura ed Appl.*—1979.—V. 120.—P. 329—396.
200. Evans L. C., Knerr B. F. Instantaneous shrinking of the support of nonnegative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities // *Illinois J. of Math.*—1979.—V. 23.—P. 153—166.
201. Fife P. C. *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems.*—Berlin: Springer, 1979.—380 p.
202. Figueiredo D., Lions P.-L., Nussbaum R. D. A priori estimates and existence results for semilinear elliptic equations // *J. Math. Pures et Appl.*—1982.—V. 61.—P. 41—63.

203. Friedman A. Remarks on nonlinear parabolic equations // Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics.— Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc.— 1965.— P. 3—23.
204. Friedman A. Variational principles and free-boundary problems.— N. Y.: A Wiley — Interscience Publication, 1982.— 702 p.
205. Friedman A., Kamin S. The asymptotic behavior of gas in an n -dimensional porous medium // Trans. Amer. Math. Soc.— 1980.— V. 262.— P. 551—563.
206. Fujita H. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.— 1966.— Sect. IA, V. 13.— P. 109—124.
207. Fujita H. On the nonlinear equations $\Delta u + e^u = 0$ and $\partial v / \partial t = \Delta v + e^v$ // Bull. Amer. Math. Soc.— 1969.— V. 75.— P. 132—135.
208. Fujita H. On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations // Proc. Symp. in Pure Math. 18, Amer. Math. Soc.— 1969.— P. 105—113.
209. Fujita H., Watanabe S. On the uniqueness and nonuniqueness of solutions of initial value problems for some quasi-linear parabolic equations // Comm. Pure and Appl. Math.— 1968.— V. 21.— P. 631—653.
210. Gartner J. Location of wave front for the multidimensional $K - P - P$ equation and brownian first exit densities // Math. Nachr.— 1982.— V. 105.— P. 317—351.
211. Giga Y., Kohn R. V. Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations // Comm. Pure and Appl. Math.— 1985.— V. 38.— P. 297—319.
212. Gidas B., Ni W.-M., Nirenberg L. Symmetry and related properties via the maximum principle // Commun. Math. Phys.— 1979.— V. 68.— P. 209—243.
213. Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations // Comm. Pure and Appl. Math.— 1981.— V. 34.— P. 525—598.
214. Gilding B. H. Hölder continuity of solutions of parabolic equations // J. London Math. Soc. (2).— 1976.— V. 13.— P. 103—106.
215. Gilding B. H. Properties of solutions of an equation in the theory of infiltration // Arch. Ration. Mech. Anal.— 1977.— V. 65.— P. 203—225.
216. Gilding B. H., Peletier L. A. On a class of similarity solutions of the porous media equation // J. Math. Anal. Appl.— 1976.— V. 55.— P. 351—364.
217. Gilding B. H., Peletier L. A. On a class of similarity solutions of the porous media equation. II // J. Math. Anal. Appl.— 1977.— V. 57.— P. 522—538.
218. Gmira A., Veron L. Large time behavior of the solution of a semilinear parabolic equation in \mathbb{R}^N // J. Diff. Equat.— 1984.— V. 53.— P. 258—276.
219. Haraux A., Weissler F. B. Non-uniqueness for a semilinear initial value problem // Indiana Univ. Math. J.— 1982.— V. 31.— P. 167—189.
220. Hayakawa K. On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations // Proc. Japan Acad.— 1973.— V. 49.— P. 503—505.
221. Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations // Lecture Notes in Mathematics. V. 840.— Berlin — N. Y.: Springer — Verlag, 1981.— 348 p.
222. Hocking L. M., Stewartson K., Stuart J. T. A non-linear instability burst in plane parallel flow // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 51.— P. 705—735.
223. Ishii H. Asymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations // J. Differ. Equat.— 1977.— V. 26.— P. 291—319.
224. Itaya N. A note on the blowup-nonblowup problems in nonlinear parabolic equations // Proc. Japan Acad.— 1979.— Ser. A, V. 55.— P. 241—244.

225. Ito M. The conditional stability of stationary solutions for semilinear parabolic differential equations // *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.*—1978.—Sect. IA, V. 25.—P. 263—275.
226. Joseph D. D., Lundgren T. S. Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources // *Arch. Ration. Mech. Anal.*—1973.—V. 49.—P. 241—269.
227. Kamin S. Similar solutions and the asymptotics of filtration equations // *Arch. Ration. Mech. Anal.*—1976.—V. 60.—P. 171—183.
228. Kamin S., Pelletier L. A. Large time behavior of solutions of the heat equation with absorption.—Preprint / *Math. Inst. Univ. Leiden.*—Leiden.—1983.—№ 25.
229. Kaplan S. On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations // *Comm. Pure and Appl. Math.*—1963.—V. 16.—P. 305—330.
230. Kazdan J. L., Warner F. W. Remarks on some quasilinear elliptic equations // *Comm. Pure and Appl. Math.*—1975.—V. 28.—P. 567—597.
231. Keller J. B. On solutions of $\Delta u = f(u)$ // *Comm. Pure and Appl. Math.*—1957.—V. 10.—P. 503—510.
232. Knerr B. F. The porous medium equation in one dimension // *Trans. Amer. Math. Soc.*—1977.—V. 234.—P. 381—415.
233. Knerr B. F. The behavior of the support of solutions of the equations of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension // *Trans. Amer. Math. Soc.*—1979.—V. 249.—P. 409—424.
234. Kobayashi K., Siraó T., Tanaka H. On the growing up problems for semilinear heat equations // *J. Math. Soc. Japan.*—1977.—V. 29.—P. 407—424.
235. Kumei S., Bluman G. W. When nonlinear differential equations are equivalent to linear differential equations // *SIAM J. Appl. Math.*—1982.—V. 42.—P. 1157—1173.
236. Lacey A. A. The spatial dependence of supercritical reacting systems // *IMA J. Appl. Math.*—1981.—V. 27.—P. 71—84.
237. Levine H. A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$ // *Arch. Ration. Mech. Anal.*—1973.—V. 51.—P. 371—386.
238. Levine H. A. Nonexistence of global weak solutions to some properly and improperly posed problems of mathematical physics: The method of unbounded Fourier coefficients // *Math. Ann.*—1975.—V. 244.—P. 205—220.
239. Levine H. A., Payne L. E. Nonexistence of global weak solutions for classes of nonlinear wave and parabolic equations // *J. Math. Anal. Appl.*—1976.—V. 55.—P. 329—334.
240. Levine H. A., Sacks P. E. Some existence and nonexistence theorems for solutions of degenerate parabolic equations // *J. Differ. Equat.*—1984.—V. 52.—P. 135—161.
241. Lions P. L. On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations // *SIAM Review.*—1982.—V. 24.—P. 441—467.
242. Loewner C., Nirenberg L. Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations // *Contributions to Analysis.*—N. Y.: Acad. Press, 1974.—P. 245—272.
243. Maddalena L. Existence of global solution for reaction—diffusion systems with density dependent diffusion // *Nonlinear Anal., Theory, Meth. Appl.*—1984.—V. 8.—P. 1384—1394.
244. Matano H. Nonincrease of the lap-number of a solution for a one-dimensional semilinear parabolic equation // *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.*—1982.—Sect. IA, V. 29.—P. 401—441.
245. Marshak R. E. Effect of radiation on shock wave behavior // *Phys. Fluids.*—1958.—V. 1.—P. 24—29.
246. Morro A., Straughan B. Highly unstable solutions to completely nonlinear diffusion problems // *Nonlinear Anal., Theory, Meth. Appl.*—1983.—V. 7.—P. 231—237.
247. Mottoni D., Schiaffino A., Tesci A. Attractivity properties of non-negative solutions for a class of nonlinear degenerate parabolic problems // *Ann. Math. Pura ed Appl.*—1984.—V. 136.—P. 35—48.

248. Munier A., Burgan J. R., Gutierrez J., Fijalkow E., Feix M. R. Group transformations and the nonlinear heat diffusion equation // *SIAM J. Appl. Math.*—1984.—V. 40.—P. 191—207.
249. Nakagawa T. Blowing up of finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$ // *Appl. Math. and Optimiz.*—1976.—V. 2.—P. 338—350.
250. Nakagawa T., Ushijima T. Finite element analysis of the semi-linear heat equation of blow-up type // *Topics in Numer. Anal.*—1977.—V. 3.—P. 275—291.
251. Ni W.-M., Sacks P. E., Tavantzis J. On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear parabolic equations // *J. Differ. Equat.*—1984.—V. 54.—P. 97—120.
252. Ni W.-M., Sacks P. The number of peaks of positive solutions of semi-linear parabolic equations // *SIAM J. Math. Anal.*—1985.—V. 16.—P. 460—471.
253. Nuckolls I., Wood L., Thiessen A., Zimmerman G. Laser compression of matter to super-high densities. VIII Internat. Quant. Electr. Conf. Montreal, May 1972 // *Nature.*—1972.—V. 239.—№ 5368.—P. 139—142.
254. Pao C. V. Asymptotic stability and non-existence of global solutions for a semi-linear parabolic equation // *Pacific J. Math.*—1979.—V. 84.—P. 191—197.
255. Peletier L. A. Asymptotic behavior of solutions of the porous media equation // *SIAM J. Appl. Math.*—1971.—V. 21.—P. 542—551.
256. Peletier L. A. A necessary and sufficient condition for the existence of an interface in flows through porous media // *Arch. Ration. Mech. Anal.*—1974.—V. 56.—P. 183—190.
257. Peletier L. A. The porous media equation // *Applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences.*—Boston—Melbourne: Pitman, 1981.—P. 229—241.
258. Pimbley G. H. Wave solutions travelling along quadratic path for the equation $(\partial u / \partial t) - (k(u)u_x)_x = 0$ // *Quart. Appl. Math.*—1977.—V. 35.—P. 129—138.
259. Protter M. H., Weinberger H. F. Maximum principles in differential equations. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice—Hall, 1967.—350 p.
260. Raviart P. A. Sur la résolution de certaines équations paraboliques non linéaires // *J. Funct. Anal.*—1970.—V. 5.—P. 299—328.
261. Redheffer R., Walter W. Comparison theorems for parabolic functional inequalities // *Pacific J. Math.*—1979.—V. 85.—P. 447—470.
262. Sacks P. E. The initial and boundary value problem for a class of degenerate parabolic equations // *Comm. Part. Differ. Equat.*—1983.—V. 8.—P. 693—733.
263. Sacks P. E. Global behavior for a class of nonlinear evolution equations // *SIAM J. Math. Anal.*—1985.—V. 16.—P. 233—250.
264. Sattinger D. H. On the total variation of solutions of parabolic equations // *Math. Ann.*—1969.—V. 183.—P. 78—92.
265. Sattinger D. H. Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems // *Indiana Univ. Math. J.*—1972.—V. 21.—P. 979—1000.
266. Sattinger D. Topics in stability and bifurcation theory. Lecture Notes in Mathematics, V. 309.—Berlin—N. Y.: Springer—Verlag, 1973.—190 p.
267. Sattinger D. H. On the stability of waves of non-linear parabolic systems // *Advances in Math.*—1976.—V. 22.—P. 312—355.
268. Schatzman M. Stationary solutions and asymptotic behavior of a quasilinear degenerate parabolic equations // *Indiana Univ. Math. J.*—1984.—V. 33.—P. 1—29.
269. Serrin J. Asymptotic behaviour of velocity profiles in the Prandtl boundary layer theory // *Proc. Roy. Soc.*—1967.—V. A 209—P. 491—507.
270. Smoller J. Shock waves and reaction-diffusion equations.—N. Y.: Acad. Press, 1983.—423 p.
271. Sperb R. P. Growth estimates in diffusion-reaction problems // *Arch. Ration. Mech. Anal.*—1981.—V. 75.—P. 127—145.

272. Sperb R. P. Maximum principles and their applications.— N. Y.: Acad. Press, 1981.— 221 p.
273. Stokes A. N. Intersections of solutions of nonlinear parabolic equations // J. Math. Anal. Appl.— 1977.— V. 60.— P. 721—727.
274. Storm M. L. Heat conduction in simple metals // J. Appl. Phys.— 1951.— V. 22.— P. 940—951.
275. Sugitani S. On nonexistence of global solutions for some nonlinear integral equations // Osaka J. of Math.— 1975.— V. 12.— P. 45—51.
276. Tsutsumi M. Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations // Publ. Res. Inst. Math. Sci.— 1972/1973.— V. 8.— P. 211—229.
277. Tsutsumi M. Existence and nonexistence of global solutions of the first boundary value problem for a certain quasilinear parabolic equation // Funkcialaj Ekvacioj.— 1974.— V. 17.— P. 13—24.
278. Weissler F. B. Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p // Indiana Univ. Math. J.— 1980.— V. 29.— P. 79—102.
279. Weissler F. B. Single point blow-up for a semilinear initial value problem // J. Differ. Equat.— 1984.— V. 55.— P. 204—224.
280. Weissler F. B. An L^∞ blow-up estimate for a nonlinear heat equation // Comm. Pure and Appl. Math.— 1985.— V. 38.— P. 291—295.

*Александр Андреевич Самарский,
Виктор Александрович Галактионов,
Сергей Павлович Курдюмов,
Александр Петрович Михайлов*

**РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ В ЗАДАЧАХ
ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ**

Редактор *С. А. Посашков*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *И. Ш. Ахсельрод*
Корректор *Н. Д. Дорохова*

ИБ № 12383

Сдано в набор 12.09.86. Подписано к печати
15.06.87. Т-10358. Формат 60×90^{1/16}. Бумага тип.
№ 1. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая.
Усл. печ. л. 30. Усл. кр.-отт. 30. Уч.-изд.
л. 31,96. Тираж 3350 экз. Заказ № 377. Це-
на 5 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск, 77, Станиславского, 25

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Лепинский проспект, 15

Готовится к печати в 1987 году

Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами.

Во многих актуальных задачах акустики, электродинамики, оптики, обработки изображений, распознавания образов и других областях науки и техники часто приходится проводить вычисления с теплицевыми и близкими к ним матрицами. Потребности практики требуют для решения этих задач разработки высокоэффективных численных методов, а также создания специализированных параллельных вычислительных систем, обеспечивающих возможность работы в режиме реального времени. Обо всех этих вопросах идет речь в настоящей книге.

Для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников в области прикладной математики и информатики.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Готовится к печати в 1987 году

Маслов В. П. Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. Эволюция диссипативных структур.

Диссипативные структуры, введенные И. Пригожиным, являются основными объектами молодой, бурно развивающейся области науки — синергетики. Речь идет на самом деле о некоторых локализованных (или «почти» локализованных в определенном смысле) в пространстве решениях модельных задач. Эти решения распространяются во времени, медленно меняя свою структуру. Ими описываются такие различные явления, как распространение пламени, процессы роста плесени, рост кристалла, движение капли на наклонной плоскости, эволюция роци и т. д. Таким образом, с точки зрения естествознания такого рода решения не менее интересны, чем солитоны.

В книге предлагается конструктивный подход к изучению эволюции диссипативных структур, основанный на построении асимптотических решений квазилинейных параболических уравнений. Задача при этом сводится к решению некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, что, как правило, оказывается проще, чем исследование исходного уравнения в частных производных. В книге рассмотрены модели конкретных физических и химических процессов и проведено сравнение асимптотических решений с решениями, полученными с помощью ЭВМ.

Материал книги может быть использован специалистами в области информатики, прикладной математики, химии, биологии.