Т. АЗЛАРОВ
Ҳ. МАНСУРОВ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ

2

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги ниверситетларнинг ва педагогика институтларининг талабалари учун дарслик сифатида рухсат этган

Қайта ишланган иккинчи нашри

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»
1995

22.161
А 36

Т а қ р и з ч и л а р: Самарқанд давлат университети математик анализ кафедраси, ЎзРФА мухбир аъзоси, физика-математика фанлари доктори, профессор *А. С. Саъдуллаев*, физика-математика фанлари доктори, профессор *Х. Р. Латипов*

Муҳаррир: *А. Ҳакимжонова*

ISBN 5-640-01507-1

А $\dfrac{1602070000-05}{М\ 351\ (04)\quad 95}$ 95

СЎЗ БОШИ

Ушбу дарслик 1993 йили нашр этилган «Математик анализ, 1-қисм» китобимизнинг давоми бўлиб, мазкур курснинг қолган анъанавий мавзуларини ўз ичига олади. Дарсликни ёзишдаги асосий қоидаларимиз 1-қисмга ёзилган сўз бошида келтирилган, 2-қисмни тайёрлаш жараёнида улар деярли ўзгаргани йўқ. Фақат қуйидаги мулоҳазаларимизни қўшимча қилишни лозим топамиз.

Дарслик кўп ўзгарувчили функциялар ва уларнинг дифференциал ҳисоби баёнидан бошланади. Маълумки, бир ўзгарувчили ва кўп ўзгарувчили функциялар учун дифференциал ҳисоб масалаларининг қўйилиши ва ечилиши орасида ўхшашликлар ва тафовутлар бор. Биз ана шу ўхшашликлар ва тафовутларни бутун дифференциал ҳисоб давомида яққолроқ таъкидлашга ҳаракат қилдик.

Баъзи мавзуларга одатдагидан кўпроқ эътибор берилиб, улар жуда батафсил баён қилинди (масалан, каррали ва такрорий лимитлар, функционал қаторларнинг текис ва нотекис яқинлашувчилиги ва ҳоказо). Бу ўринда шу мавзуларнинг мавжуд адабиётларда етарлича ёритилмаганлигини ҳисобга олдик.

Айни пайтда баъзи мавзуларга, масалан, каррали интеграллар, сирт интеграллари, эгри чизиқли интеграллар мавзуларига одатдагидан камроқ эътибор берилиб, улар қисқароқ баён этилди. Шуни ҳам айтиш кераккки, эгри чизиқ, сирт, жисм каби тушунчалар геометрия курсларида тўла баён этилишини ҳисобга олиб, биз уларнинг математик анализ курси учун зарур бўлган ўринларинигина келтирдик. Юқоридаги интеграллар тушунчаларининг киритилиши ва ўрганилиши жараёни бир-бирига ўхшаш бўлганлиги учун ҳам уларга кам ўрин ажратдик.

Дарсликнинг илмий ва методик жиҳатдан яхшиланишига ўз ҳиссаларини қўшганликлари учун профессорлар А. С. Саъдуллаев, . Р. Латипов, доцентлар М. Зохиров, Э. Х. Яқубов, Б. Наимжонов, . Ворисов, Р. Ғанихўжаевларга, шунингдек, уни нашрга тайёрлашда атнашган А. Умаров (ТошДУ) га миннатдорчилик билдирамиз.

Дарсликдаги камчиликларни бартараф этишга ва унинг сифатини яхшилашга қаратилган фикр ва мулоҳазаларини билдирган ўртоқларга ўз миннатдорчилигимизни билдирамиз.

Муаллифлар

КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР, УЛАРНИНГ ЛИМИТИ, УЗЛУКСИЗЛИГИ

«Математик анализ» курсининг 1-қисмида бир ўзгарувчили функциялар батафсил ўрганилди.

Математика, физика, техника ва фаннинг бошқа турли тармоқларида шундай функциялар учрайдики, улар кўп ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади. Масалан, доиравий цилиндрнинг ҳажми

$$V = \pi \cdot r^2 h \tag{12.1}$$

икки ўзгарувчи: r — радиус ҳамда h — баландликка боғлиқ.

Ток кучи

$$I = \frac{E}{R} \tag{12.2}$$

ҳам икки ўзгарувчи: E — электр юритувчи куч ва R — қаршиликнинг функцияси бўлади. Бунда цилиндрнинг ҳажми (12.1) формула ёрдамида бир-бирига боғлиқ бўлмаган r ва h ўзгарувчиларнинг қийматларига кўра, ток кучи (12.2) формула ёрдамида бир-бирига боғлиқ бўлмаган E ва R ўзгарувчиларнинг қийматларига кўра топилади. Шунга ўхшаш мисолларни жуда кўплаб келтириш мумкин*. Бинобарин, кўп ўзгарувчили функцияларни юқоридагидек чуқурроқ ўрганиш вазифаси туғилади.

Кўп ўзгарувчили функциялар назариясида ҳам бир ўзгарувчили функциялар назариясидагидек, функция ва унинг лимити, функциянинг узлуксизлиги ва ҳоказо каби тушунчалар ўрганилади. Бунда бир ўзгарувчили функциялар ҳақидаги маълумотлардан муттасил фойдаланиб борилади.

Маълумки, бир ўзгарувчили функцияларни ўрганишни уларнинг аниқланиш тўпламларини (соҳаларини) ўрганишдан бошлаган эдик. Кўп ўзгарувчили функцияларни ўрганишни ҳам уларнинг аниқланиш тўпламларини (соҳаларини) баён этишдан бошлаймиз.

1-§. R^m фазо ва унинг муҳим тўпламлари

1. R^2, R^3 фазолар. Ихтиёрий иккита A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси билан танишган эдик (қаралсин 1-қисм, 1-боб, 1-§). Энди A ва B тўпламлар деб R тўпламни олайлик: $A = B = \boldsymbol{R}$. Унда

$$A \times B = R \times R = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R, \ x_2 \in \boldsymbol{R}\}$$

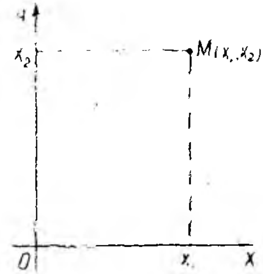
бўлади.

---

* Сирасини айтганда, аслида табиатда, фан тармоқларида, кундалик ҳаётда деярли ҳамма вақт кўп ўзгарувчили функцияларни учратамиз. Аммо, биз аввал соддалик учун бир ўзгарувчили функцияларни муфассал ўрганган эдик ва математик анализнинг асосий масалаларини шу содда ҳол учун тушуниб етган эдик.

Ушбу

$$\{(x_1,\ x_2):\ x_1 \in R,\ x_2 \in R\}$$



1-чизма

тўплам R^2 *тўплам* деб аталади. Равшанки, R^2 тўплам элементлари жуфтликлар бўлади. Улар шу тўплам *нуқталари* деб юритилади. Одатда R^2 тўпламнинг нуқтаси битта ҳарф, масалан $(x_1,\ x_2) \in R^2$ нуқта x орқали белгиланади: $x = (x_1,\ x_2)$. Бунда x_1 ва x_2 сонлар x нуқтанинг мос равишда *биринчи* ва *иккинчи координаталари* дейилади.

Агар $x = (x_1,\ x_2) \in R^2$, $y = (y_1,\ y_2) \in R^2$ нуқталар учун $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ бўлса, у ҳолда $x=y$ деб аталади.

Текисликда тўғри бурчакли Oxy Декарт координаталар системасини олайлик. Ox ўқда (абсцисса ўқида) x_1 ўзгарувчининг қийматлари, Oy ўқда (ордината ўқида) эса x_2 ўзгарувчининг қийматлари жойлашган бўлсин. У ҳолда $(x_1,\ x_2)$ жуфтлик текисликда координаталари x_1 ва x_2 бўлган $M(x_1,\ x_2)$ нуқтани ифодалайди (1-чизма).

Ҳақиқий сонлар тўплами R билан тўғри чизиқ нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилгани каби (қаралсин, 1-қисм, 2-боб, 10-§) R^2 тўплам нуқталари билан текислик нуқталари орасида ҳам ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин. Бу эса R^2 тўпламнинг геометрик тасвирини текислик деб қараш имконини беради. Юқорида R^2 тўпламнинг элементларини нуқта деб аталганининг боиси ҳам шундадир. Аналитик геометрия курсида келтирилганидек, R^2 тўпламда (текисликда) икки нуқта орасидаги масофа тушунчасини киритиш мумкин. $x = (x_1,\ x_2) \in R^2$, $y = (y_1,\ y_2) \in R^2$ бўлсин.

12.1-таъриф. Ушбу

$$\rho(x,\ y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

миқдор $x = (x_1,\ x_2)$, $y = (y_1,\ y_2)$ нуқталар орасидаги *масофа* деб аталади. Киритилган $\rho(x,\ y)$ масофа қуйидаги хоссаларга эга (бунда $\forall\ x,\ y,\ z \in R^2$):

1°. $\rho(x,\ y) \geqslant 0$ ва $\rho(x,\ y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

2°. $\rho(x,\ y) = \rho(y,\ x)$.

3°. $\rho(x,\ z) \leqslant \rho(x,\ y) + \rho(y,\ z)$.

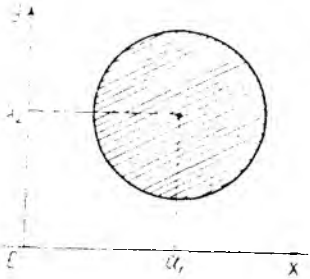
Бу хоссаларнинг исботи кейинги пунктда (умумий ҳолда) келтирилади.

Одатда R^2 тўплам R^2 *фазо (икки ўлчовли Евклид фазоси)* деб аталади.

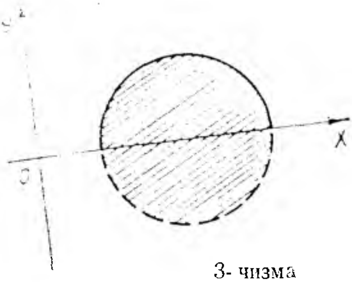
Энди R^2 фазонинг келгусида тез-тез учраб турадиган баъзи бир муҳим тўпламларини келтирамиз.

R^2 фазонинг $a = (a_1,\ a_2)$ нуқтасини ҳамда мусбат r сонни олайлик. Қуйидаги

$$\{(x_1,\ x_2) \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leqslant r^2\}, \tag{12.3}$$



2- чизма



3- чизма

$$\{(x_1,\ x_2) \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\} \qquad (12.4)$$

тўпламлар мос равишда *доира* ҳамда *очиқ доира* деб аталади. Бунда a нуқта *доира маркази*, r эса *доира радиуси* дейилади. Ушбу

$$\{(x_1,\ x_2) \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2\}$$

тўплам *айлана* дейилади. Бу айлана (12.3) ва (13.4) доираларининг чегараси бўлади a нуқта айлана *маркази* ва r эса айлана *радиуси* дейилади.

(12.3) тўпламнинг геометрик тасвири 2- чизмада ифодаланган.

(12.3) тўпламда (доирада) доира чегараси шу тўпламга тегишли бўлади, (12.4) тўпламда эса (очиқ доирада) доира чегараси (12.4) тўпламга тегишли бўлмайди.

Очиқ доира ҳамда бу доира чегарасининг баъзи бир нуқталаридан иборат бўлган тўпламларни тузиб ҳам қараш мумкин. Масалан, 3- чизмада очиқ доира ҳамда унинг чегарасининг юқори ярим текисликда жойлашган нуқталаридан иборат тўплам келтирилган.

Масофа таърифидан фойдаланиб, доира ҳамда очиқ доираларни мос равишда қуйидаги

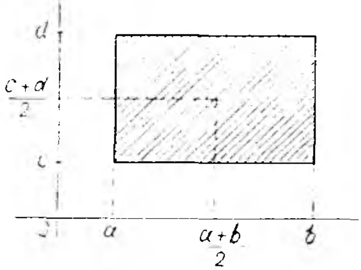
$$\{x \in R^2 : \rho(x,\ a) \leq r\}, \quad (12.3') \qquad \{x \in R^2 : \rho(x,\ a) < r\} \quad (12.4')$$

тўпламлар деб ҳам қараш мумкин.

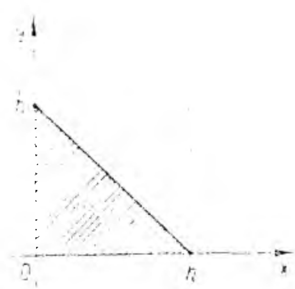
$a,\ b,\ c,\ d$ — ҳақиқий сонлар ва $a < b,\ c < d$ бўлсин. Қуйидаги

$$\{(x_1,\ x_2) \in R^2\colon\ a \leq x_1 \leq b,\ c \leq x_2 \leq d\}, \qquad (12.5)$$

$$\{(x_1,\ x_2) \in R^2\colon\ a < x_1 < b,\ c < x_2 < d\} \qquad (12.6)$$



4- чизма



5- чизма

тўпламлар, мос равишда *тўғри тўртбурчак* ҳамда *очиқ тўғри тўртбурчак* деб аталади. Бу (12.5) тўплам 4-чизмада Oxy текисликдаги штрихланган соҳа сифатида тасвирланган.

Ушбу $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \in R^2$ нуқта (12.5) ва (12.6) *тўғри тўртбурчакнинг маркази* дейилади.

R^2 фазонинг ушбу

$$\{(x_1, x_2) \in R^2: x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0, x_1 + x_2 \leqslant h\} \qquad (12.7)$$

нуқталаридан иборат тўплам (*икки ўлчовли*) *симплекс* деб аталади, бунда h — мусбат сон. Симплекс (simplex) лотинча сўз бўлиб, у содда деган маънони англатади. (12.7) тўпламнинг геометрик тасвири 5-чизмада ифодаланган.

Энди R^3 фазо тушунчаси билан танишамиз. R^3 фазо ҳам юқоридаги R^2 фазо каби таърифланади. Иккита тўпламнинг Декарт кўпайтмаси каби ихтиёрий учта A, B, C тўпламнинг ҳам Декарт кўпайтмаси тушунчаси киритилади. Хусусан $A = B = C = R$ бўлганда

$$A \times B \times C = R \times R \times R = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 \in R, x_2 \in R, x_3 \in R\}$$

бўлади.

Ушбу

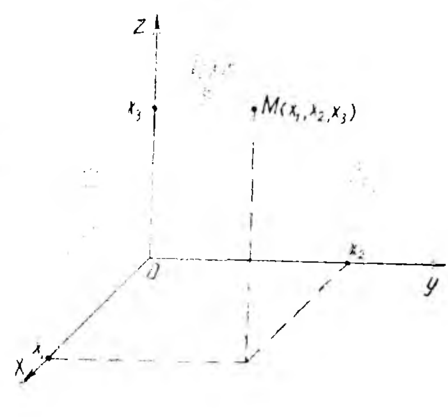
$$\{(x_1, x_2, x_3): x_1 \in R, x_2 \in R, x_2 \in R\}$$

тўплам R^3 *тўплам* деб аталади.

R^3 тўпламнинг элементи (x_1, x_2, x_3) учлик шу тўплам *нуқтаси* дейилади ва уни, одатда битта ҳарф, масалан, x орқали белгиланади: $x = (x_1, x_2, x_3)$. Бунда x_1, x_2 ва x_3 сонлар x нуқтанинг мос равишда *биринчи*, *иккинчи* ва *учинчи координаталари* дейилади.

Агар $x = (x_1, x_2, x_3,)$ ва $y = (y_1, y_2, y_3)$ нуқталар учун $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ бўлса, у ҳолда $x = y$ деб аталади.

Фазода тўғри бурчакли $Oxyz$ Декарт координаталар системасини олайлик. Ox ўқда x_1 ўзгарувчининг қийматлари, Oy ўқда x_2 ўзгарувчининг қийматлари ва Oz ўқда x_3 ўзгарувчининг қийматлари жойлашган бўлсин. У ҳолда (x_1, x_2, x_3) учлик фазода координаталари x_1, x_2 ва x_3 бўлган M нуқтани ифодалайди (6-чизма).



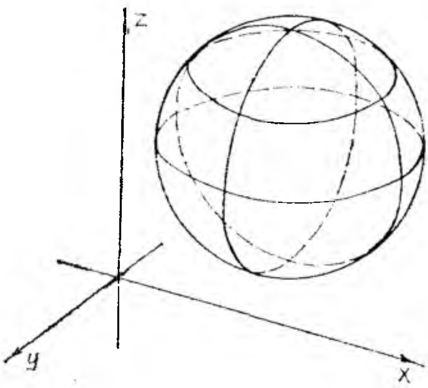
6- чизма

R^3 тўпламда ихтиёрий $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ нуқталарни олайлик. Ушбу

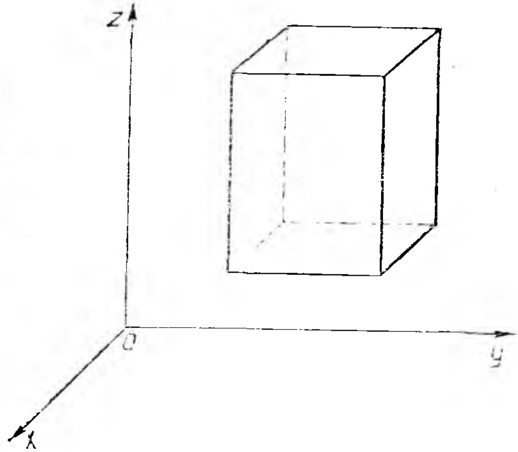
$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

миқдор x ва y нуқталар орасидаги *масофа* деб аталади. Шу тарзда аниқланган масофа қуйидаги хосаларга эга (бунда $\forall\ x, y, z \in R^3$):

1°. $\rho(x, y) \geqslant 0$ ва $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.



7- чизма



8- чизма

2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

3°. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Бу хоссаларнинг исботи 2-пунктда (умумий ҳолда) келтирилади.

Юқорида келтирилган R^3 тўплам R^3 *фазо (уч ўлчовли Евклид фазоси)* деб аталади.

Энди R^3 фазонинг муҳим тўпламларини келтирамиз.

R^3 фазонинг $a = (a_1, a_2, a_3)$ нуқтасини ҳамда мусбат r сонни олайлик. Қуйидаги

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \leqslant r^2\}, \qquad (12.8)$$

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 < r^2\} \qquad (12.9)$$

тўпламлар мос равишда *шар* ҳамда *очиқ шар* деб аталади. Бунда a нуқта *шар маркази*, r эса *шар радиуси* дейилади. Ушбу

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2\}$$

тўплам *сфера* дейилади. Бу сфера (12.8), (12.9) шарларнинг чегараси бўлади a нуқта сфера *маркази* ва r эса сфера *радиуси* дейилади.

Юқорида келтирилган (12.8) тўпламнинг геометрик тасвири 7-чизмада ифодаланган.

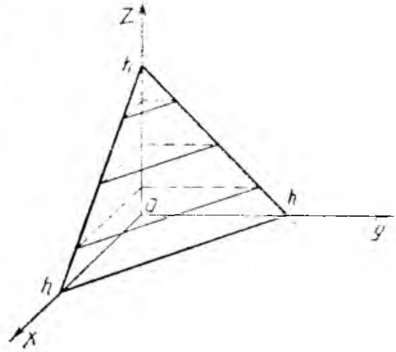
Демак, (12.8) тўпламда (шарда) шар чегараси шу тўпламга тегишли бўлади, (12.9) тўпламда эса (очиқ шарда) шар чегараси (12.9) тўпламга тегишли бўлмайди.

R^3 фазодаги масофа тушунчасидан фойдаланиб, шар ва очиқ шарларни мос равишда ушбу

$$\{x \in R^3 : \rho(x, a) \leqslant r\}, \quad (12.8') \qquad \{x \in R^3 : \rho(x, a) < r\} \quad (12.9')$$

тўпламлар сифатида ҳам аниқлаш мумкин.

Ушбу
$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: a \leqslant x_1 \leqslant b,\ c \leqslant x_2 \leqslant d,$
$l \leqslant x_3 \leqslant s\}$,
$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: a < x_1 < b,\ c < x_2 < d,$
$l < x_3 < s\}$
тўпламлар (бунда a, b, c, d, l, s — ҳақиқий сонлар) мос равишда *параллелепипед* ҳамда *очиқ параллелепипед* деб аталади. Юқорида келтирилган параллелепипед 8-чизмада тасвирланган.



9- чизма

Ушбу
$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,$
$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant h\}$
тўплам *(уч ўлчовли) симплекс* дейилади, бунда $h > 0$ — ўзгармас сон. Бу тўплам 9-чизмада тасвирланган.

2. R^m ф а з о. m та A_1. $A_2, \ldots, A_m$ тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси иккита A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмасига ўхшаш таърифланади. Агар $A_1 = A_2 = \ldots = A_m = R$ бўлса, у ҳолда

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m = R \times R \times \ldots \times R = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m): x_1 \in R,\ x_2 \in R, \ldots, x_m \in R\}$$

бўлади. Ушбу

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_m): x_1 \in R,\ x_2 \in R, \ldots, x_m \in R\}$$

тўплам R^m *тўплам* деб аталади. R^m тўпламнинг элементи $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ шу *тўплам нуқтаси* дейилади ва у одатда битта ҳарф билан белгиланади: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Бунда $x_1, x_2, \ldots, x_m$ сонлар x нуқтанинг мос равишда *биринчи*, *иккинчи*, ..., *m-координаталари* дейилади.

Агар $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in R^m$ нуқталар учун $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2 \ldots, x_m = y_m$ бўлса, у ҳолда $x = y$ деб аталади.

R^m тўпламда ихтиёрий $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ нуқталарни олайлик.

Ушбу

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_m - x_m)^2} =$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i)^2} \qquad (12.10)$$

миқдор x ва y нуқталар орасидаги *масофа* деб аталади. Бундай аниқланган масофа қуйидаги хоссаларга эга (бунда $\forall\ x, y, z \in R^m$):

1°. $\rho(x, y) \geqslant 0$ ва $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
3°. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Бу хоссаларни исботлайлик. (12.10) муносабатдан $\rho(x, y)$ миқдорнинг ҳар доим манфий эмаслигини кўрамиз. Агар $\rho(x, y)=0$ бўлса, унда $y_1-x_1=0,\ y_2-x_2=0,\ \ldots,\ y_m-x_m=0$ бўлиб, $x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ \ldots,\ x_m=y_m$, яъни $x=y$ бўлади. Аксинча $x=y$, яъни $x_1=y_1$, $x_2=y_2,\ \ldots,\ x_m=y_m$ бўлса, у ҳолда яна (12.10) дан $\rho(x, y)=0$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса 1°-хоссани исботлайди. (12.10) муносабатдан

$$\rho(x, y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\ldots+(y_m-x_m)^2}=$$
$$=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_m-y_m)^2}=\rho(y, x)$$

бўлади.

Масофанинг 3°-хоссаси ушбу

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}b_i^2} \tag{12.11}$$

тенгсизликка асосланиб исботланади, $a_1, a_2, \ldots, a_m;\ b_1, b_2, \ldots, b_m$ — ихтиёрий ҳақиқий сонлар. Аввало шу тенгсизликнинг тўғрилигини кўрсатайлик. Равшанки, $\forall\ x\in R$ учун

$$\sum_{i=1}^{m}(a_ix+b_i)^2\geqslant 0.$$

Бундан x га нисбатан квадрат учҳаднинг манфий эмаслиги

$$\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^2\right)x^2+\left(2\sum_{i=1}^{m}a_i\ b_i\right)x+\sum_{i=1}^{m}b_i^2\geqslant 0$$

келиб чиқади. Демак, бу квадрат учҳад иккита турли ҳақиқий илдизга эга бўлмайди. Бинобарин, унинг дискриминанти

$$-\sum_{i=1}^{m}a_i^2\sum_{i=1}^{m}b_i^2+\left[\sum_{i=1}^{m}a_i\ b_i\right]^2\leqslant 0$$

бўлиши керак. Бундан эса

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\ b_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{m}b_i^2}$$

бўлиб,

$$\sum_{i=1}^{m}a_i^2+\sum_{i=1}^{m}b_i^2+2\sum_{i=1}^{m}a_i\ b_i\leqslant\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_i^2}\right]^2+$$
$$+\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{m}b_i^2}\right]^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{m}b_i^2}$$

бўлади. Кейинги тенгсизликдан эса

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}b_i^2} \tag{12.11}$$

бўлиши келиб чиқади. Одатда (12.11) тенгсизлик *Коши — Буняковский тенгсизлиги* деб аталади.

Ихтиёрий $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m \in R^m$, $z=(z_1, z_2, \ldots, z_m) \in R^m$ нуқталарни олиб, улар орасидаги масофани (12.10) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(y_i-x_i)^2},$$

$$\rho(y, z)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(z_i-y_i)^2}, \tag{12.12}$$

$$\rho(x, z)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(z_i-x_i)^2}.$$

Энди Коши — Буняковский тенгсизлиги (12.11) да

$$a_i=y_i-x_i,\ b_i=z_i-y_i \ (i=1, 2, 3, \ldots, m)$$

деб олсак, унда

$$a_i+b_i=z_i-x_i \ (i=1, 2, 3, \ldots, m)$$

бўлиб,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(z_i-x_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(y_i-x_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(z_i-x_i)^2}$$

бўлади. Юқоридаги (12.12) муносабатларни эътиборга олиб, топамиз:

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z).$$

Бу эса 3°-хоссани исботлайди. Одатда 3°-хосса билан ифодаланадиган тенгсизлик *учбурчак тенгсизлиги* (учбурчак бир томонининг узунлиги қолган икки томон узунликлари йиғиндисидан катта эмаслигини эътиборга олиб) деб юритилади*.

R^m тўплам R^m *фазо (m ўлчовли Евклид фазоси)* деб аталади. Энди R^m фазонинг баъзи бир муҳим тўпламларини келтирамиз.

Бирор $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in R^m$ нуқта ва $r>0$ сонни олайлик. Қуйидаги

$$\{x=(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+ (x_m-a_m)^2 \leqslant r^2\}, \tag{12.13}$$

$$\{x=(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+ (x_m-a_m)^2 < r^2\}, \tag{12.14}$$

яъни

$$\{x \in R^m : \rho(x, a) \leqslant r\}, \tag{12.13'}$$

$$\{x \in R^m : \rho(x, a) < r\} \tag{12.14'}$$

---

*R^m фазонинг ихтиёрий иккита x, y ($x \in R^m$, $y \in R^m$) нуқталари учун 1° — 3°-шартларни қаноатлантирувчи функцияларни кўплаб топиш мумкин, яъни x, y нуқталар орасида «масофа» тушунчасини турлича киритиш мумкин (бу ҳақда 14-боб, 1-§ га қаранг).

тўпламлар мос равишда *шар* ҳамда *очиқ шар* деб аталади. Бунда a нуқта шар *маркази*, r эса шар *радиуси* дейилади.

Ушбу

$$\{x = (x_1, x_2 \ldots, x_m) \in R^m : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + \\ + (x_m - a_n)^2 = r^2\},$$

яъни

$$\{x \in R^m : \rho(x, a) = r\}$$

тўплам *сфера* деб аталади. Бу сфера (12.13) ва (12.14) тўпламларнинг чегараси бўлади.

Ушбу

$$\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \ldots, \\ a_m \leqslant x_m \leqslant b_m\}$$

$$\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2, < b_2, \ldots, \\ a_m < x_m < b_m\}$$

тўпламлар (бунда $a_1, a_2, \ldots, a_m; b_1, b_2, \ldots, b_m$ — ҳақиқий сонлар) мос равишда *параллелепипед* ҳамда *очиқ параллелепипед* деб аталади.

Ушбу

$$\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_m \geqslant 0, x_1 + x_2 + \\ + \ldots + x_m \leqslant h\}$$

тўплам *(m-ўлчовли) симплекс* деб аталади, бунда h — мусбат сон.

Юқорида келтирилган тўпламлар тез-тез ишлатилиб турилади. Улар ёрдамида муҳим тушунчалар, жумладан атроф тушунчаси таърифланади.

3. R^m фазода очиқ ва ёпиқ тўпламлар. Бирор $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқта ҳамда $\varepsilon > 0$ сонни олайлик.

12.2-таъриф. Маркази x^0 нуқтада, радиуси ε га тенг бўлган очиқ шар x^0 нуқтанинг *сферик атрофи (ε-атрофи)* дейилади ва $U_\varepsilon(x^0)$ каби белгиланади:

$$U_\varepsilon(x^0) = (x \in R^m : \rho(x, X^0) < \in\}. \tag{12.15}$$

Нуқтанинг бошқача атрофи тушунчасини ҳам киритиш мумкин.

12.3-таъриф. Ушбу

$$\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1 + \ldots, \\ x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m)\} \tag{12.16}$$

очиқ параллелепипед x^0 нуқтанинг *параллелепипедиал атрофи* деб аталади ва $\widetilde{U}_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x^0)$ каби белгиланади.

Хусусан $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_m = \delta$ бўлса, (12.16) очиқ параллелепипед кубга айланади ва уни $\widetilde{U}_\delta(x^0)$ каби белгиланади.

Шундай қилиб, R^m фазода нуқтанинг икки хил атрофига таъриф берилди.

12.1-лемма. *$x^0 \in R^m$ нуқтанинг ҳар қандай $U_\varepsilon(x^0)$ сферик атрофи олинганда ҳам ҳар доим x^0 нуқтанинг шундай $\overline{U}_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x^0)$ параллелепипедиал атрофи мавжудки, бунда*

$$\overline{U}_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x^0) \subset U_\varepsilon(x^0)$$

бўлади.

Шунингдек, x^0 нуқтанинг ҳар қандай $\overline{U}_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x^0)$ параллелепипедиал атрофи олинганда ҳам ҳар доим шу нуқтанинг шундай $U_\varepsilon(x^0)$ сферик атрофи мавжудки, бунда

$$U_\varepsilon(x^0) \subset \overline{U}_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x^0)$$

бўлади.

Исбот. $x^0 \in R^m$ нуқтанинг сферик атрофи

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \varepsilon\}$$

берилган бўлсин. Бундаги $\varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\delta > 0$ сонни оламиз. Сўнг x^0 нуқтанинг ушбу

$$\overline{U}_\delta(x^0) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m: \quad x_1^0 - \delta < x_1 < x_1^0 +, \ldots,$$
$$x_m^0 - \delta < x_m < x_m^0 + \delta\}$$

параллелепипедиал атрофини тузамиз.

$x \in \overline{U}_\delta(x^0)$ бўлсин. Унда $|x_i - x_i^0| < \delta$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$ бўлиб,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \delta^2} = \delta\sqrt{m}$$

бўлади. Юқоридаги $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ тенгсизликни эътиборга олиб топамиз:

$$\rho(x, x^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2} < \varepsilon.$$

Демак, $\rho(x, x^0) < \varepsilon$. Бу эса $x \in U_\varepsilon(x^0)$ эканини билдиради. Шундай қилиб,

$$\forall\, x \in \overline{U}_\delta(x^0) \Rightarrow x \in U_\varepsilon(x^0),$$

яъни

$$\overline{U}_\delta(x^0) \subset U_\varepsilon(x^0)$$

бўлади.

$x^0 \in R^m$ нуқтанинг

$$\overline{U}_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x^0) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^n: x_1^0 - \delta_1 < x_1 < < x_1^0 + \delta_1, \ldots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

параллелепипедиал атрофи берилган бўлсин. Унда

$$\varepsilon = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$$

ни олиб x^0 нуқтанинг сферик атрофи

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in R^m: \rho(x, x^0) < \varepsilon\}$$

ни тузамиз.

$x \in U_\varepsilon(x^0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\rho(x, x^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - x_i^0)^2} < \varepsilon \leqslant \delta_i, \ (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

бўлади. Демак,

$$|x_i - x_i^0| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - x_i^0)^2} < \delta_i, \ (i = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

Бундан эса $x \in \overline{U}_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x^0)$ бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$\forall x \in U(x^0) \Rightarrow x \in \overline{U}_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x^0)$$

яъни

$$U_\varepsilon(x^0) \subset \overline{U}_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}(x^0)$$

бўлади. Лемма исбот бўлди.

R^m фазода бирор G тўплам берилган бўлсин: $G \subset R^m$. Агар $x^0 \in G$ нуқтанинг шундай бирор ε-атрофи $U_\varepsilon(x^0)$ мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг барча нуқталари шу G тўпламга тегишли бўлса ($U_\varepsilon(x^0) \subset G$), у ҳолда x^0 нуқта G тўпламнинг *ички нуқтаси* деб аталади.

Мисоллар. 1. Очиқ шар

$$A = \{x \in R^m: \rho(x, a) < r\}$$

нинг барча нуқталари унинг ички нуқтаси бўлади. Буни исботлайлик. $\forall x^0 \in A$ нуқтани олиб, ушбу $\delta = r - \rho(x^0, a)$ тенглик билан аниқланадиган δ сонини оламиз. Равшанки, $\delta > 0$ бўлади. Маркази x^0 нуқтада, радиуси δ бўлган

$$U_\delta(x^0) = \{x \in R^m: \rho(x, x^0) < \delta\}$$

очиқ шар x^0 нуқтанинг сферик атрофи бўлиб, юқоридаги A тўпламнинг қисми бўлади. Ҳақиқатан ҳам. $\forall x \in U_\delta(x^0) \Rightarrow \rho(x, x^0) < \delta$ бўлиб, масофанинг 3°-хоссасига кўра

$$\rho(x, a) \leqslant \rho(x, x^0) + \rho(x^0, a) < \delta + \rho(a, x^0) = r$$

бўлади. Демак, $\forall x \in U_\delta(x^0) \Rightarrow x \in A$. Бу эса $U_\delta(x^0) \subset A$ эканлигини билдиради. Бундан A очиқ шарнинг ҳар бир нуқтаси ички нуқта эканлиги келиб чиқади.

2. Ушбу

$$C = A \cup \{(r,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ (0,\ r,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ \ldots,\ (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ r)\}$$

тўпламнинг нуқталари орасида унинг ички нуқтаси бўлмаган нуқталар бор. Масалан, $(r,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in C$ нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon((r,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0))$ $(\varepsilon > 0)$ сферик атрофини олганимизда ҳам, унга тегишли бўлган $\left(r + \frac{\varepsilon}{2},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0\right)$ нуқта C тўпламга тегишли бўлмайди.

12.4-таъриф. Тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлса, бундай тўплам *очиқ тўплам* деб аталади.

Масалан, очиқ шар очиқ тўплам бўлади.

R^m фазода бирор F тўплам ва бирор x^0 нуқта берилган бўлсин: $F \subset R^m$, $x_0 \in R^m$.

12.5-таъриф. Агар x^0 нуқтанинг исталган сферик атрофи $U_\varepsilon(x^0)$ да F тўпламнинг x^0 дан фарқли камида битта нуқтаси топилса, x^0 нуқта F тўпламнинг *лимит нуқтаси* деб аталади.

Ушбу $R^m \setminus \{x \in R^m : \rho(0,\ x) \leqslant \varepsilon\}$ очиқ тўплам ∞ «нуқта» нинг *атрофи* дейилади $(0 = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0))$.

Қаралаётган x^0 нуқтанинг ўзи F га тегишли бўлиши ҳам, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин (қуйидаги 1-мисолга қаранг).

F тўпламнинг барча лимит нуқталаридан ташкил топган тўплам F тўпламнинг *ҳосилавий тўплами* дейилади ва F' каби белгиланади.

Ушбу $F \cup F'$ тўплам F тўпламнинг *ёпилмаси* дейилади ва у $\overline{F}$ каби белгиланади:

$$\overline{F} = F \cup F'.$$

Мисоллар. 1. Қуйидаги

$$A = \{x \in R^m : \rho(x,\ x^0) < r\}.$$

очиқ шарни қарайлик. Бу тўплам учун шу тўпламнинг барча нуқталари ҳамда ушбу

$$\{x \in R^m : \rho(x,\ x^0) = r\}$$

сферанинг ҳамма нуқталари лимит нуқта бўлади. Демак, A нинг ҳосилавий тўплами

$$A' = \{x \in R^m : \rho(x,\ x_0) \leqslant r\},$$

A нинг ёпилмаси $\overline{A} = A \cup A' = A'$ бўлади.

2. Шар

$$E = \{x \in R^m : \rho(x,\ x^0) \leqslant r\}$$

нинг барча нуқталари шу тўпламнинг лимит нуқталаридир. Бунда

$$E' = E,\ \overline{E} = E$$

бўлади.

12.6-таъриф. $F \subset R^m$ тўпламнинг барча лимит нуқталари шу тўпламга тегишли бўлса, F *ёпиқ тўплам* деб аталади.

Бу ҳолда $F' \subset F$, $F \cup F' = \overline{F} = F$.

Шар

$$E = \{x \in R^m : \rho(x,\ x^0) \leqslant r\}$$

ёпиқ тўплам бўлади, чунки $E = \overline{E}$.

Бирор $M \subset R^m$ тўпламни қарайлик. Равшанки, $R^m \setminus M$ айирма M тўпламни R^m тўпламга тўлдирувчи тўплам бўлади (қаралсин 1-қисм, 1-боб, 1-§).

12.7-таъриф. Агар x^0 $(x^0 \in R^m)$ нуқтанинг исталган $U_\varepsilon(x^0)$ атрофида ҳам M тўпламнинг, ҳам $R^m \setminus M$ тўпламнинг нуқталари бўлса, x^0 нуқта M тўпламнинг *чегаравий нуқтаси* деб аталади. M тўпламнинг барча чегаравий нуқталаридан иборат тўплам M тўпламнинг *чегараси* дейилади ва уни одатда $\partial(M)$ каби белгиланади.

Бу тушунча ёрдамида ёпиқ тўпламни қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

12.8-таъриф. Агар F $(F \subset R^m)$ тўпламнинг чегараси шу тўпламга тегишли, яъни $\partial(F) \subset F$ бўлса, F *ёпиқ тўплам* деб аталади.

Ёпиқ тўпламнинг юқорида келтирилган 12.6- ва 12.8-таърифлари эквивалент таърифлардир.

Бирор $M \subset R^m$ тўплам берилган бўлсин.

12.9-таъриф. Агар R^m фазода шундай шар

$$U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r\}, \quad (0 = (0, 0, \ldots, 0))$$

топилсаки, $M \subset U^0$ бўлса, у холда M *чегараланган тўплам* деб аталади.

Маълумки, бирор $E \subset R$ тўплам берилган бўлиб, шундай ўзгармас p сони топилсаки, $\forall x \in E$ учун $|x| < p$, яъни E тўпламнинг барча элементлари $(-p, p)$ интервалда жойлашса, E чегараланган тўплам деб аталар эди. Юқорида келтирилган таъриф $m = 1$ бўлганда худди шу таърифнинг ўзи бўлади.

R^m фазодаги шар, параллелепипед, симплекслар чегараланган тўпламлардир.

Ушбу

$$D^i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0\}$$

тўплам чегараланмаган тўплам бўлади, чунки R^m да ҳар қандай

$$U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r\}$$

шар олинганда ҳам ҳар доим D тўпламда шундай нуқта, масалан, $(a_1, 0, 0, \ldots, 0)$ нуқта $(a_1 > r)$ топиладики, бу нуқта U^0 тўпламга тегишли бўлмайди.

Маълумки,

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} (a \leq t \leq b), \tag{12.17}$$

яъни $\{x(t), y(t)\}$ система (тўплам) R^2 фазода,

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} (a \leq t \leq b), \tag{12.18}$$

яъни $\{x(t), y(t), z(t)\}$ система (тўплам) R^3 фазода эгри чизиқни ифодалар эди, бунда $x(t)$, $y(t)$, ҳамда $z(t)$ — $[a, b]$ сегментда узлуксиз функциялар. Хусусан, $x = \alpha_1 t + \beta_1$, $y = \alpha_2 t + \beta_2$, $z = \alpha_3 t + \beta_3$ $(-\infty < t < +\infty)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3$ — ҳақиқий сонлар ва α_1,

α_2, α_3 ларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси нолга тенг эмас) бўлганда (12.17) ва (12.18) система мос равишда R^2 ва R^3 фазоларда тўғри чизиқлар бўлади. Ана шу тушунчаларга ўхшаш, R^m фазода ҳам эгри чизиқ ҳамда тўғри чизиқ тушунчалари киритилади.

Фараз қилайлик, $x_1(t)$, $x_2(t)$, . . ., $x_m(t)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

Ушбу

$$\{(x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_m(t))\}\ (a \leqslant t \leqslant b) \tag{12.19}$$

система ёки нуқталар тўплами R^m фазода *эгри чизиқ* деб аталади. Хусусан, $x_1 = \alpha_1 t + \beta_1$, $x_2 = \alpha_2 t + \beta_2$, . . . , $x_m = \alpha_m t + \beta_m$ $(-\infty < t < +\infty$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ — ҳақиқий сонлар ва $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси нолга тенг эмас) бўлганда (12.19) система R^m фазода *тўғри чизиқ* дейилади. R^m фазода ихтиёрий иккита $x' = (x_1' = , \ldots, x_m')$ ва $x'' = (x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$ нуқтани олайлик. Бу нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ қуйидаги

$$\{(x_1' + t\,(x_1'' - x_1'),\ x_2' + t\,(x_2'' - x_2'),\ \ldots,\ x_m' + t\,(x_m'' - x_m'))\}$$
$$(-\infty < t < +\infty) \tag{12.20}$$

система билан ифодаланади. Бунда $t = 0$ ва $t = 1$ бўлганда R^m фазонинг мос равишда x' ва x'' нуқталари ҳосил бўлиб, $0 \leqslant t \leqslant 1$ бўлганда (12.20) система R^m фазода x' ва x'' нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси бўлади.

R^m фазода чекли сондаги тўғри чизиқ кесмаларини бирин-кетин бирлаштиришдан ташкил топган чизиқ *синиқ чизиқ* деб аталади.

$M \subset R^m$ тўплам берилган бўлсин.

12.10-таъриф. Агар M тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтасини бирлаштирувчи шундай синиқ чизиқ топилсаки, у M тўпламга тегишли бўлса, M *боғламли тўплам* деб аталади.

Мисоллар. 1. R^m фазодаги параллелепипед, шар, симплекслар боғламли тўпламлар бўлади.

2. R^m фазонинг иккита x' ва x'' нуқталаридан ташкил топган $\{x', x''\}$ тўплам $(\{x', x''\} \subset R^m)$ боғламли тўплам бўлмайди, чунки бу нуқталарни бирлаштирувчи синиқ чизиқ $\{x', x''\}$ тўпламга тегишли эмас.

12.11-таъриф. Агар $M \subset R^n$ тўплам очиқ ҳамда боғламли тўплам бўлса, у *соҳа* деб аталади.

R^m фазодаги очиқ параллелепипед, очиқ шар, очиқ симплекслар R^m фазодаги соҳалар бўлади.

2-§. R^m фазода кетма-кетлик ва унинг лимити

Натурал сонлар тўплами N ва R^m фазо берилган бўлиб, f ҳар бир n $(n \in N)$ га R^m фазонинг бирор муайян $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \in R^m$ нуқтасини мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$f: N \to R^m \text{ ёки } n \to x^{(n)} = (x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots,\ x_m^{(n)}).$$

Бу акслантиришни қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$1 \to x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}),$$
$$2 \to x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)}),$$
$$3 \to x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \ldots, x_m^{(3)}),$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$n \to x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}).$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$f: N \to R^m$ акслантиришнинг тасвирлари (образлари) дан тузилган

$$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots \tag{12.21}$$

тўплам *кетма-кетлик* деб аталади ва у $\{x^{(n)}\}$ каби белгиланади. Ҳар бир $x^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ни *кетма-кетликнинг ҳади* дейилади. Демак, (12.21) кетма-кетлик ҳадлари R^m фазо нуқталаридан иборат.

Шуни таъкидлаш керакки, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг мос координаталаридан тузилган $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, $\ldots$, $\{x_m^{(n)}\}$ лар сонли кетма-кетликлар бўлиб, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликни шу m та кетма-кетликнинг (маълум тартибдаги) биргаликда қаралиши деб ҳисоблаш мумкин.

Кетма-кетликларга мисоллар келтирайлик.

1. $x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) : (1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \ldots$
2. $x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, 0\right) : (1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, 0\right), \ldots$
3. $x^{(n)} = \left(0, \frac{1}{n}\right) : (0, 1), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{3}\right), \ldots$
4. $x^{(n)} = ((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1}) : (1, 1), (-1, -1), (1, 1), \ldots$
5. $x^{(n)} = (1, n) : (1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots$

Бу келтирилган кетма-кетликлар R^2 фазо нуқталаридан ташкил топган кетма-кетликлардир.

1. Кетма-кетликнинг лимити. Энди (12.21) кетма-кетликнинг лимити тушунчасини киритамиз. R^m фазода кетма-кетликнинг лимити тушунчаси ҳақиқий сонлар кетма-кетлигининг лимити тушунчасига ўхшаш киритилади.

R^m фазода бирор

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots \tag{12.21}$$

кетма-кетлик ҳамда $a = (a_1, a_2, \ldots, x_m) \in R^m$ нуқта берилган бўлсин.

12.12-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon \tag{12.22}$$

тенгсизлик бажарилса, a нуқта $\{x^{(n)}\}$ *кетма-кетликнинг лимити* деб аталади ва

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \text{ ёки } n\to\infty \text{ да } x^{(n)}\to a$$

каби белгиланади.

1-§ да келтирилган a нуқтанинг ε-атрофи таърифини эътиборга олиб, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимитини қуйидагича ҳам таърифласа бўлади.

12.13-таъриф. Агар a нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(a)$ атрофи олинганда ҳам, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлса, a $\{x^{(n)}\}$ *кетма-кетликнинг лимити* деб аталади.

Агар (12.21) кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у *яқинлашувчи кетма-кетлик* деб аталади.

Лимит таърифидаги шартни қаноатлантирувчи a мавжуд бўлмаса, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас дейилади, кетма-кетликнинг ўзи эса *узоқлашувчи* деб аталади.

Шунга эътибор бериш керакки, кетма-кетликнинг лимити таърифидаги ε ихтиёрий мусбат сон бўлиб, изланаётган n_0 $(n_0\in N)$ эса шу ε га (ва, табиийки, қаралаётган кетма-кетликка) боғлиқ равишда топилади.

Мисоллар. 1. R^m фазода ушбу $\{x^{(n)}=\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетликнинг лимити $a=(0, 0, \ldots, 0)$ бўлиши кўрсатилсин. $\forall\,\varepsilon>0$ сонни олайлик. Шу ε га кўра $n_0=\left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right]+1$ ни топамиз. Натижада барча $n>n_0$ учун

$$\rho\,(x^{(n)}, a)=\rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right), (0, 0, \ldots, 0)\right)=\frac{\sqrt{m}}{n}<\frac{\sqrt{m}}{n_0}=\frac{\sqrt{m}}{\left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right]+1}<$$

$<\varepsilon$ бўлади. Демак, таърифга кўра,

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)=(0, 0, \ldots, 0)=a$$

бўлади.

2. Қуйидаги $\{x^{(n)}\}=\{((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1})\}$;

$$(1, 1), (-1, -1), (1, 1), (-1, -1), \ldots$$

кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмаслиги кўрсатилсин. Тескарисини фараз қилайлик, яъни берилган кетма-кетлик лимитга эга ва у $a=(a_1, a_2)$ га тенг бўлсин. Лимит таърифига кўра $\forall\,\varepsilon>0$, жумладан $\varepsilon=1$ учун шундай $n_0\in N$ топиладики, барча $n>n_0$ учун

$$\rho\,((1, 1), (a_1, a_2))<\varepsilon,\ \rho\,((-1, -1), (a_1, a_2))<\varepsilon$$

бўлади. Бу эса ушбу

$$2\sqrt{2}=\rho\,((-1, -1), (1, 1))\leqslant\rho\,((-1, -1), (a_1\ a_2))+$$
$$+\rho\,((a_1, a_2), (1, 1))<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon=2$$

зиддиятга олиб келади. Бунга сабаб қаралаётган кетма-кетликнинг лимитга эга дейилишидир. Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

R^m фазода $\{x^{(n)}=\{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик берилган бўлиб, у $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ лимитга эга бўлсин. У ҳолда лимит таърифига кўра, $\forall \varepsilon>0$ берилганда ҳам, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг бирор n_0-ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари a нуқтанинг

$$U_\varepsilon(a)=\{x\in R^m : \rho(x, a)<\varepsilon\}$$

сферик атрофига тегишли бўлади. Бу сферик атроф ушбу бобнинг 1-§ даги 12.1-леммага мувофиқ шу a нуқтанинг $\widetilde{U}_\varepsilon(a)$ параллелепипедиал атрофининг қисми бўлади:

$$U_\varepsilon(a)\subset\widetilde{U}_\varepsilon(a).$$

Демак, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг ўша n_0-ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари a нуқтанинг $\widetilde{U}_\varepsilon(a)$ атрофида ётади, яъни барча $n>n_0$ учун

$$x^{(n)}\in\widetilde{U}_\varepsilon(a)=\{(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in R^m : a_1-\varepsilon<x_1<a_1+$$

$$+\varepsilon, \ldots, a_m-\varepsilon<x_m<a_m+\varepsilon\}$$

бўлади. Бундан эса, барча $n>n_0$ учун

$$a_1-\varepsilon<x_1^{(n)}<a_1+\varepsilon,$$
$$a_2-\varepsilon<x_2^{(n)}<a_2+\varepsilon,$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_m-\varepsilon<x_m^{(n)}<a_m+\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall \varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $n_0\in N$ топиладики, барча $n>n_0$ учун

$$|x_1^{(n)}-a_1|<\varepsilon, \ |x_2^{(n)}-a_2|<\varepsilon, \ \ldots, \ |x_m^{(n)}-a_m|<\varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)}=a_1,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)}=a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\lim_{n\to\infty} x_m^{(n)}=a_m$$

эканлигини билдиради.

Шундай қилиб, R^m фазода $\{x^{(n)}\}=\{(x_1^{(n)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг лимити $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликнинг координаталаридан ташкил топган сонлар кетма-кетликлари $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, $\ldots$, $\{x_m^{(n)})\}$ ҳам лимитга эга бўлиб, улар мос равишда a нуқтанинг $a_1, a_2, \ldots, a_m$ координаталарига тенг.

Демак,

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \Rightarrow \begin{cases} \lim x_1^{(n)} = a_1, \\ \lim x_2^{(n)} = a_2, \\ \dots\dots\dots \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m. \end{cases} \tag{11.23}$$

Энди R^m фазода кетма-кетликнинг координаталаридан ташкил топган $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, . . . , $\{x_m^{(n)}\}$ сонлар кетма-кетликлари лимитга эга бўлиб, уларнинг лимитлари мос равишда $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ нуқта координаталари $a_1, a_2, \dots, a_m$ ларга тенг бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = a_2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\lim_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m.$$

Лимит таърифига асосан, $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ га кўра шундай $n_0^{(1)} \in N$ топиладики, барча $n > n_0^{(1)}$ учун

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

шундай $n_0^{(2)} \in N$ топиладики, барча $n > n_0^{(2)}$ учун

$$|x_2^{(n)} - a_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

ва ҳоказо, шундай $n_0^{(m)} \in w$ топиладики, барча $n > n_0^{(m)}$ учун

$$|x_m^{(n)} - a_m| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

бўлади. Агар $n_0 = \max\,\{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(m)}\}$ деб олсак, унда барча $n > n_0$ учун бир йўла

$$|x_i^{(n)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

тенгсизликлар бажарилади. У ҳолда

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i^{(n)} - a_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \varepsilon$$

бўлиб, ундан

$$\rho\,(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$$

эканини билдиради.

Демак, $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик координаталаридан ташкил топган $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \ldots, \{x_m^{(n)}\}$ сонлар кетма-кетликларининг лимитлари мос равишда $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ нуқта координаталари $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ларга тенг бўлса, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити юқоридаги таъриф маъносида шу a нуқта бўлади:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_2^{(n)} = a_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a. \tag{12.24}$$

Юқоридаги (12.23) ва (12.24) муносабатлардан

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_2^{(n)} = a_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m \end{array}\right.$$

эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб қуйидаги теоремага келамиз:

12.1-теорема. *R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in R^m$ га интилиши*

$$x^{(n)} \to a \ (n \to \infty \text{ да})$$

учун $n \to \infty$ да бир йўла

$$x_1^{(n)} \to a_1,$$
$$x_2^{(n)} \to a_2,$$
$$\ldots\ \ldots$$
$$x_m^{(n)} \to a_m$$

бўлиши зарур ва етарли.

Юқоридаги 2-мисолда қаралган $\{((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1})\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмаслиги ушбу теоремадан дарров келиб чиқади.

Бу теорема R^m фазода кетма-кетликнинг лимитини ўрганишни сонли кетма-кетликларнинг лимитини ўрганишга келтирилишини ифодалайди. Маълумки, «Математик анализ» курсининг 1-қисм, 3-бобида сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити батафсил ўрганилган. Шуни эътиборга олиб, биз қуйида R^m фазода кетма-кетликлар лимитлари назариясининг баёнида асосий фактларнигина келтириш, уларнинг айримларинигина исботлаш билан чегараланамиз.

Юқорида исбот этилган теорема ҳамда яқинлашувчи сонлар кетма-кетлигининг хоссаларидан R^m фазода яқинлашувчи кетма-кетликнинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади.

R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

1°. Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унинг лимити ягонадир.

Кейинги хоссани келтиришдан аввал, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлиги тушунчаси билан танишамиз.

Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг барча ҳадларидан тузилган тўплам чегараланган бўлса, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик *чегараланган кетма-кетлик* деб аталади.

R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлсин. Таърифга кўра (12.9-таъриф) шундай шар $U^0 = \{x \in R^m : \rho(x, 0) < r\}$ топиладики, $\forall n \in N$ учун $x^{(n)} \in U^0$ бўлади. Демак,

$$\rho(x^{(n)}, 0) < r.$$

Кейинги тенгсизликдан эса

$$|x_1^{(n)}| < r, \ |x_2^{(n)}| < r, \ \dots, \ |x_m^{(n)}| < r \quad (\forall n \in N)$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлса, бу кетма-кетликнинг координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири ҳам чегараланган бўлар экан.

Энди $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири чегараланган бўлсин. Сонлар кетма-кетлигининг чегараланганлиги таърифига кўра (1-қисм, 3-боб, 2-§) шундай $C_1, C_2, \dots, C_m$ ўзгармас сонлар топиладики, $\forall n \in N$ учун

$$|x_1^{(n)}| < C_1,$$
$$|x_2^{(n)}| < C_2,$$
$$\dots \quad \dots$$
$$|x_m^{(n)}| < C_m$$

бўлади. Агар $C = \max\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ деб олсак. $|x_k^{(n)}| < C$ ($k = 1, 2, 3, \dots, m$) бўлиб, ундан $\forall n \in N$ учун

$$\rho(x^{(n)}, 0) < C\sqrt{m}$$

бўлишини топамиз. Бу эса $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлигини билдиради.

Шундай қилиб, $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \dots,\ x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг чегараланганлигидан $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлиги келиб чиқар экан.

Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

12.2-теорема. *R^m фазода $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \dots,\ x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг чегараланган бўлиши учун бу кетма-кетлик координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$, ..., $\{x_m^{(n)}\}$ сонлар кетма-кетликларининг ҳар бирининг чегараланган бўлиши зарур ва етарли.*

Масалан, R^2 фазода $\left(\left\{\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right\}\right)$ $(n = 1,\ 2,\ \dots)$ кетма-кетлик чегараланган бўлади, чунки бу кетма-кетлик координаталаридан иборат кетма-кетликларнинг ҳар бири чегаралангандир. R^2 фазода $\{(n,\ n)\}$ $(n = 1,\ 2,\ \dots)$ кетма-кетлик чегараланмаган кетма-кетлик.

Юқорида келтирилган $(1,\ 1),\ (-1,\ -1),\ (1,\ 1),\ (-1,\ -1),\ \dots$ кетма-кетлик ҳам чегараланган кетма-кетлик бўлади. Бу мисолдан кўринадики, чегараланган кетма-кетликлар лимитга эга бўлиши ҳам, лимитга эга бўлмаслиги ҳам мумкин экан.

2°. Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у чегараланган бўлади.

Яқинлашувчи кетма-кетликлар устида арифметик амалларни ўрганишдан аввал R^m фазо элементлари устида бажариладиган амалларни келтирамиз.

R^m фазонинг иккита $a = (a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_m)$, $b = (b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_m)$ нуқтасини олайлик.

R^m фазонинг $(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \dots,\ a_m + b_m)$ нуқтаси a ва b нуқталар *йиғиндиси* деб аталади ва $a + b$ каби белгиланади: $a + b = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_1,\ \dots,\ a_m + b_m)$.

R^m фазонинг $(\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \dots,\ \alpha a_m)$ (α — ҳақиқий сон) нуқтаси α ҳақиқий сон билан $a \in R^m$ нуқта *кўпайтмаси* деб аталади ва αa каби белгиланади: $\alpha a = (\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \dots,\ \alpha a_m)$. R^m фазонинг a ва b нуқталари орасидаги айирма $a + (-1) \cdot b$ кўринишда аниқланади ва $a - b$ каби белгиланади: $a - b = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ \dots,\ a_m - b_m)$. Шундай қилиб, R^m фазо нуқталари устида қўшиш, айириш ва R^m фазо нуқтасини ҳақиқий сонга кўпайтириш амаллари киритилди.

R^m фазода иккита $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \dots,\ x_m^{(n)})\}$, $\{y^{(n)}\} = \{(y_1^{(n)},\ y_2^{(n)},\ \dots,\ y_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Ушбу

$$\{(x_1^{(n)} + y_1^{(n)},\ x_2^{(n)} + y_2^{(n)},\ \dots,\ x_m^{(n)} + y_m^{(n)})\}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

кетма-кетлик $\{x^{(n)}\}$ ва $\{y^{(n)}\}$ *кетма-кетликлар йиғиндиси* деб аталади ва $\{x^{(n)} + y^{(n)}\}$ каби белгиланади. $\{x^{(n)}\}$ ва $\{y^{(n)}\}$ *кетма-кетликлар айирмаси* эса қуйидаги

$$\{(x_1^{(n)} - y_1^{(n)},\ x_2^{(n)} - y_2^{(n)},\ \dots,\ x_m^{(n)} - y_m^{(n)})\}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

кетма-кетлик сифатида аниқланади ва $\{x^{(n)} - y^{(n)}\}$ каби белгиланади.

R^m фазодаги $\{(\alpha x_1^{(n)}, \alpha x_2^{(n)}, \ldots, \alpha x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик α *сон билан* $\{x^{(n)}\}$ *кетма-кетлик кўпайтмаси* деб аталади ва $\{\alpha x^{(n)}\}$ каби белгиланади.

3°. Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити $a\,(a\in R^m)$ бўлса, у ҳолда $\{\alpha x^{(n)}\}$ (αR) кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб, бу кетма-кетликнинг лимити αa га тенг бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha x^{(n)} = \alpha a = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} x^{(n)}.$$

4°. Агар $\{x^{(n)}\}$ ҳамда $\{y^{(n)}\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг лимити мос равишда a ва b бўлса, у ҳолда $\{x^{(n)} \pm y^{(n)}\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб, бу кетма-кетликнинг лимити $a \pm b$ га тенг бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} (x^{(n)} \pm y^{(n)}) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} x^{(n)} \pm \lim y^{(n)}.$$

5°. Агар a нуқта $M\,(M \subset R^m)$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, у ҳолда M тўплам нуқталаридан a га интилувчи $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик $(x^{(n)} \in M,\ n = 1,\ 2,\ \ldots)$ ажратиш мумкин.

Маълумки, a нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, a нинг ҳар бир $U_\varepsilon(a)$ атрофида $(\forall\, \varepsilon > 0)$ M тўпламнинг чексиз кўп нуқталари бўлади.

Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлиги $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ ни олиб, a нуқтанинг

$$U_{\frac{1}{n}}(a) = \left\{x \in R^m : \rho(x,\ a) < \frac{1}{n}\right\}$$

атрофини тузамиз. Бу a нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлгани учун a нуқтанинг $U_1(a)$ атрофида M тўпламнинг a дан фарқли нуқталари бўлади. Уларнинг бирини $x^{(1)}$ деб оламиз. Энди a нуқтанинг $U_{\frac{1}{2}}(a)$ атрофини қарайлик. Бу атрофда ҳам M тўпламнинг a дан фарқли нуқталари бўлади. Улардан $x^{(1)}$ га тенг бўлмаган бирини олиб, уни $x^{(2)}$ дейлик. Бу жараённи давом эттириб, n-қадамда a нуқтанинг $U_{\frac{1}{n}}(a)$ атрофи олинса, бу атрофда ҳам M тўпламнинг a дан фарқли нуқталари бўлади. Улардан $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}$ нуқталарнинг ҳар бирига тенг бўлмаганини олиб, уни $x^{(n)}$ билан белгилаймиз. Яна бу жараённи давом эттираверамиз. Натижада M тўплам нуқталаридан $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(n)},\ \ldots$$

ажралади. Бу кетма-кетлик учун

$$\rho(x^{(n)},\ a) < \frac{1}{n} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

бўлгани сабабли, $n \to \infty$ да $x^{(n)} \to a$ бўлиши келиб чиқади.

2. **Коши теоремаси (яқинлашиш принципи).** Аввал айтиб ўтганимиздек, кетма-кетликнинг қачон лимитга эга бўлишини аниқлаш лимитлар назариясининг муҳим масалаларидан бири.

Юқорида келтирилган 12.1-теорема, R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлиши бу кетма-кетлик ҳадлари координаталаридан ташкил топган сонли кетма-кетликларнинг яқинлашувчи бўлиши орқали ифодаланишини кўрсатади.

Аввало, бу ерда ҳам фундаментал кетма-кетлик тушунчаси билан танишамиз.

R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

12.14-таъриф. Агар $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$, $p > n_0$ лар учун

$$\rho(x^{(p)}, x^{(n)}) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x^{(n)}\}$ *фундаментал кетма-кетлик* деб аталади.

Мисоллар. 1. R^2 фазода ушбу $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлади. Ҳақиқатан,

$$\rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)^2} =$$

$$= \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right| \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right)\sqrt{2}.$$

Агар $\forall\ \varepsilon > 0$ сонга кўра n_0 натурал сонни

$$n_0 = \left[\frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon}\right] + 1$$

деб олсак, у ҳолда барча $n > n_0$, $p > n_0$ лар учун

$$\rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)\right) < \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0}\right)\sqrt{2} < \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ \varepsilon = \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Демак, берилган кетма-кетлик фундаменталдир.

2. R^2 фазода қуйидаги $\{(x_n, 0)\}$; $x_n = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ кетма-кетлик фундаментал бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, бу кетма-кетлик учун, масалан, $n > p$ да

$$\rho((x_p, c(x_n, 0)) = \sqrt{(x_n - x_p)^2} = (x_n - x_p) =$$

$$= \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \ldots + \frac{1}{n} > \frac{n-p}{n}$$

бўлиб, $n = 2p$ бўлганда эса

$$\rho((x_p, 0), (x_n, 0)) > \frac{1}{2}$$

эканлиги келиб чиқади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг фундаментал эмаслигини кўрсатади.

Фараз қилайлик, $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\}$ фундаментал кетма-кетлик бўлсин. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$, $p > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, x^{(p)}) < \varepsilon$$

бўлади. Бу тенгсизликни қуйидагича

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i^{(n)} - x_i^{(p)})^2} < \varepsilon$$

ёзиб, ундан

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(p)}| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бу эса $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}, \ldots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири фундаментал кетма-кетликлар (қаралсин, 1- қисм, 2- боб, 10- §) эканлигини билдиради. Шундай қилиб, R^m фазода

$$\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, \{x_m^{(n)})\}$$

кетма-кетликнинг фундаментал бўлишидан бу кетма-кетлик координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}, \ldots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг фундаментал бўлиши келиб чиқар экан.

Энди $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}, \ldots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири фундаментал бўлсин. Уҳолда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ га кўра шундай $n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \ldots, n_0^{(m)}$ натурал сонлар топиладики,

барча $n > n_0^{(1)}$, $p > n_0^{(1)} \Rightarrow |x_1^{(n)} - x_1^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$,

барча $n > n_1^{(2)}$, $p > n_0^{(2)} \Rightarrow |x_2^{(n)} - x_2^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$,

. . . .

барча $n > n_0^{(m)}$, $p > n_0^{(m)} \Rightarrow |x_m^{(n)} - x_m^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$

бўлади. Агар $n_0 = \max\{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \ldots, n_0^{(m)}\}$ деб олсак, унда барча $n > n_0$, $p > n_0$ учун бир йўла

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

тенгсизликлар бажарилади. Натижада

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_1^{(n)} - x_i^{(p)})^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\rho(x^{(n)}, x^{(p)}) < \varepsilon$$

Бу эса $\{x^{(n)}\}$ фундаментал кетма-кетлик эканини билдиради.

Натижада қуйидаги теоремага келамиз:

12.3-теорема. R^m *фазода* $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\}$ *кетма-кетлик фундаментал бўлиши учун бу кетма-кетлик координаталаридан иборат* $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \ldots, x_m^{(n)}\}$ *кетма-кетликларнинг ҳар бирининг фундаментал бўлиши зарур ва етарли.*

Юқоридаги 12.1 ва 12.3-теоремалардан R^m фазода $\{x^n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчилиги ҳақида қуйидаги теорема келиб чиқади.

12.4-теорема. $\{x^n\}$ *кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун у фундаментал бўлиши зарур ва етарли.*

Бу теорема *Коши теоремаси* ёки *яқинлашиш принципи* деб аталади.

3. Ичма-ич жойлашган шарлар принципи. «Математик анализ» курсининг 1-қисми, 3-боб, 8-§ да ҳақиқий сонлар тўплами R нинг тўлиқлигига асосланган ичма-ич жойлашган сегментлар принципи қараб ўтилган эди. Шунга ўхшаш принцип R^m фазода ҳам ўринлидир ва ундан келгусида биз кўп марта фойдаланамиз.

Марказлари $a^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_m^n) \in R^m$ нуқталарда, радиуслари $r_n \in R_+ (n = 1, 2, \ldots)$ бўлган ушбу

$$S_1 = S_1(a^{(1)}, r_1) = \{x \in R^m : \rho(x, a^{(1)}) \leqslant r_1\},$$
$$S_2 = S_2(a^{(2)}, r_2) = \{x \in R^m : \rho(x, a^{(2)}) \leqslant r_2\},$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$S_n = S_n(a^{(n)}, r_n) = \{x \in R^m : \rho(x, a^{(n)}) \leqslant r_n\},$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

шарлар берилган бўлсин. Агар қуйидаги

$$S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\{S_n\}$ *ичма-ич жойлашган шарлар кетма-кетлиги* деб аталади.

12.5-теорема. R^m *фазода ичма-ич жойлашган шарлар кетма-кетлиги* $\{S_n\}$ *берилган бўлсин. Агар* $n \to \infty$ *да шар радиуслари* r_n *нолга интилса, яъни*

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0$$

бўлса, у ҳолда барча шарларга тегишли бўлган $a\,(a \in R^m)$ *нуқта мавжуд ва ягонадир.*

Исбот: $\{S_n\}$ — R^m фазода ичма-ич жойлашган шарлар кетма-кетлиги бўлсин. Бу шар марказлари $a^{(n)}$ $(a^{(n)} \in R^m, n = 1, 2, \ldots)$ дан $\{a^{(n)}\}$ кетма-кетлик тузайлик. Равшанки, $a^{(n)} \in S_n$. Агар $p > n$ бўлса, унда $S_n \supset S_p$ бўлганлигидан $a^{(p)} \in S_n$ бўлади. Модомики, $a^{(n)} \in S_n$, $a^{(p)} \in S_n$ экан, унда

$$\rho(a^{(n)}, a^{(p)}) \leqslant 2_{rn}$$

бўлади. Теореманинг шартига кўра, $n \to \infty$ да $r_n \to 0$ дан ва юқоридаги тенгсизликдан $\{a^{(n)}\}$ — фундаментал кетма-кетлик эканлиги келиб чиқади. Коши теоремасига асосан бу кетма-кетлик лимитга эга. Биз уни a билан белгилайлик:

$$\lim_{n\to\infty} a^{(n)} = a.$$

Ихтиёрий $S_n (n = 1, 2, \ldots)$ шарни олайлик. Бу шар $\{a^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадларини ўз ичига олади (ошиб борса, $\{a^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг чекли сондаги $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n-1)}$ ҳадларигина S_n шарга тегишли бўлмаслиги мумкин). Демак, a нуқта S_n нинг лимит нуқтаси ва S_n ёпиқ тўплам бўлгани учун $a\in S_n (n = 1, 2, \ldots)$ бўлади. Шундай қилиб, a нуқтанинг барча шарларга тегишли эканлигини кўрсатдик. Энди бундай a нуқтанинг ягоналигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, a нуқтадан фарқли барча шарларга тегишли бўлган b нуқта ҳам бор бўлсин: $b\in S_n (n = 1, 2, \ldots)$ $b\neq a$. Масофа хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\rho(a, b)\leqslant \rho(a, a^{(n)}) + \rho(a^{(n)}, b)\leqslant 2\cdot r_n.$$

Бундан эса $n\to\infty$ да $r_n\to 0$ бўлгани учун

$$\rho(a, b) = 0,$$

яъни $a = b$ бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

4. Қисмий кетма-кетликлар. Больцано — Вейерштрасс теоремаси. R^m фазода $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots \quad (x^{(n)}\in R^m, n = 1, 2, \ldots)$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетликнинг $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ $(n_1 > n_2 < \ldots < n_k < \ldots, n_k\in N, k = 1, 2, \ldots)$ номерли ҳадларидан ташкил топган ушбу

$$x^{(n_1)}, x^{(n_2)}, \ldots, (x^{(n_k)}, \ldots, (x^{(n_k)}\in R^m)$$

кетма-кетлик $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг *қисмий кетма-кетлиги* деб аталади ва $\{x^{(n_k)}\}$ каби белгиланади. Масалан, R^2 фазода қуйидаги

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \ldots, \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right), \ldots$$

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}\right), \left(\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^2}\right), \ldots, \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right), \ldots$$

кетма-кетликлар

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \ldots, \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \ldots$$

кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари бўлади.

Равшанки, битта, кетма-кетликдан жуда кўп турлича қисмий кетма-кетликлар ажратиш мумкин.

12.6-теорема. *Агар $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити $a (a\in R^m)$ бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликнинг ҳар қандай қисмий $\{x^{(n_k)}\}$ кетма-кетлиги ҳам яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити ҳам a га тенг бўлади.*

Бу теореманинг исботи кетма-кетликнинг лимити таърифидан бевосита келиб чиқади.

12.1-эслатма. Кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги лимити мавжуд бўлишидан берилган кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$(1,\ 1),\ (-1,\ -1),\ (1,\ 1),\ (-1,\ -1),\ \ldots,\ ((-1)^{n+1},\ (-1)^{n+1}),\ \ldots$$

кетма-кетликнинг

$$(1,\ 1),\ (1,\ 1),\ \ldots,\ (1,\ 1),\ \ldots$$
$$(-1,\ -1),\ (-1,\ -1),\ \ldots,\ (-1,\ -1),\ \ldots$$

қисмий кетма-кетликлари лимитга эга (улар мос равишда (1, 1) ва (—1, —1) нуқталарга тенг) бўлган ҳолда берилган $\{((-1)^{n+1},\ (-1)^{n+1})\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Демак, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлмаган ҳолда унинг қисмий кетма-кетликлари лимитга эга бўлиши мумкин экан.

12.7-теорема (Больцано—Вейерштрасс теоремаси.) *Ҳар қандай чегараланган кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.*

Исбот. $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots,\ x_m^{(n)})\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлсин. Таърифга кўра шундай шар $\{x \in R^m : \rho(x,\ 0) \leqslant r\}$ топиладики, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг барча ҳадлари шу шарда ётади.

Агар ушбу

$$\{x \in R^m : \rho(x,\ 0) \leqslant r\} \subset \widetilde{U}_r(0)$$

муносабатни эътиборга олсак, у ҳолда барча n лар учун

$$-r \leqslant x_i^{(n)} \leqslant r,\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

бўлиши топилади. Бу эса $\{x_1^{(n)}\},\ \{x_2^{(n)}\},\ \ldots,\ \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бирининг чегараланганлигини билдиради.

1-қисм, 3-бобда келтирилган Больцано — Вейерштрасс теоремасига кўра $\{x_1^{(n)}\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик $\{x_1^{(n_{k_1})}\}$ ни ажратиш мумкин. Натижада, биринчи координатаси яқинлашувчи бўлган ушбу

$$\{(x_1^{(n_{k_1})},\ x_2^{(n_{k_1})},\ \ldots,\ x_m^{(n_{k_1})})\}$$

қисмий кетма-кетликка келамиз.

Энди $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ кетма-кетликни қарайлик. Бу кетма-кетлик ҳам чегараланган. Яна Больцано — Вейерштрасс теоремасига кўра $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ дан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик $\{x_2^{(n_{k_2})}\}$ ни ажратиш мумкин. Натижада, биринчи ва иккинчи координаталари яқинлашувчи бўлган

$$\{(x_1^{(n_{k_2})},\ x_2^{(n_{k_2})},\ \ldots,\ x_m^{(n_{k_2})})\}$$

қисмий кетма-кетлик ҳосил бўлади.

Юқоридаги жараённи давом эттира бориб, m қадамдан кейин, барча координаталари яқинлашувчи бўлган ушбу

$$\{(x_1^{(n_{k_m})},\ x_2^{(n_{k_m})},\ \ldots,\ x_m^{(n_{k_m})})\} = \{x^{(n_{k_m})}\}$$

қисмий кетма-кетликка эга бўламиз. Равшанки бу кетма-кетлик $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги бўлади. Иккинчи томондан, 12.1-теоремага кўра $\{x^{(n_{k_m})}\}$ яқинлашувчи кетма-кетлик бўлади. Теорема исботланди.

3- §. Кўп ўзгарувчили функция ва унинг лимити

Дастлабки тушунчалар қаторида (1-қисм, 1-боб, 3-§) ихтиёрий E тўпламни F тўпламга акслантириш ($\Phi: E \to F$) тушунчаси келтирилган эди. Сўнг $E = N$, $F = R$; $E = R$, $F = R$ ва $E = N$, $F = R^m$ деб ушбу

$$f: N \to R\,(f: n \to x_n;\ n \in N,\ x_n \in R),$$
$$\varphi: R \to R\,(\varphi: x \to y;\ x \in R,\ y \in R),$$
$$\psi: N \to R^m\,(\psi: n \to (x_1, x_2, \ldots, x_m);\ n \in N,\ (x_1, x_2, \ldots x_m) \in R^m)$$

акслантиришларга эга бўлдик. Бу акслантиришлар мос равишда сонлар кетма-кетлиги, функция ҳамда R^m фазо нуқталари кетма-кетлиги тушунчаларига олиб келди. Сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити 1-қисмнинг 3-бобида, функция ва унинг лимити 1-қисмнинг 4-бобида, R^m фазо нуқталари кетма-кетлиги ва унинг лимити эса ушбу бобнинг 2-§ да батафсил баён этилди.

Энди $E = R^m$, $F = R$ деб $f: R^m \to R$ акслантиришни қараймиз. Бу кўп ўзгарувчили функция тушунчасига олиб келади.

1. Функция. Бирор M ($M \subset R^m$) тўплам берилган бўлсин.

12.15-таъриф.. Агар M тўпламдаги ҳар бир $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нуқтага бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий сон y ($y \in R$) мос қўйилган бўлса, M тўпламда *кўп ўзгарувчили (m та ўзгарувчили) функция берилган (аниқланган)* деб аталади ва уни

$$f: (x_1, x_2, \ldots, x_m) \to y \text{ ёки } y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad (12.25)$$

каби белгиланади. Бунда M — *функциянинг берилиши (аниқланиш) тўплами*, $x_1, x, \ldots, x_m$ эркли ўзгарувчилар — *функция аргументлари*, y эрксиз ўзгарувчи — $x_1, x_1, \ldots, x_m$ ўзгарувчиларнинг *функцияси* дейилади.

$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нуқта битта x билан белгиланишини эътиборга олиб, бундан кейин деярлик ҳамма вақт $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ўрнига x ни ишлатаверамиз. Унда юқоридаги (12.25) белгилашлар қуйидагича ёзилади.

$$f: x \to y \text{ ёки } y = f(x)\,(x \in R^m,\ y \in R).$$

Функциянинг берилиш тўпламидан олинган $x^0 \in M$ нуқтага мос келувчи y_0 сон $y = f(x)$ функциянинг $x = x^0$ нуқтадаги *хусусий қиймати* деб аталади

Мисоллар. 1. f — R^m фазодаги ҳар бир x нуқтага шу нуқта координаталари квадратларининг йиғиндисини мос қўювчи қоида, яъни

$$f: x \to x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2$$

бўлсин. Бу ҳолда $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2$ функция ҳосил бўлади. Бу функция $M = R^m$ тўпламда берилган.

2. f — ҳар бир $x \in M = \{x \in R^m : \rho(x, 0) \leqslant 1\}$ нуқтага ушбу

$$x \to \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_m^2}$$

қоида билан битта ҳақиқий сонни мос қўйсин. Бу ҳолда ҳам кўп ўзгарувчили

$$y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_m^2}$$

функцияга эга бўламиз. Равшанки, бу функция M тўпламда берилган.

$f(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. x ўзгарувчи M тўпламда ўзгарганда функциянинг мос қийматларидан иборат $\{f(x): : x \in M\}$ тўплам *функция қийматлари тўплами (функциянинг ўзгариш соҳаси)* деб аталади. Юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисида функциянинг қийматлари тўплами $[0, +\infty)$, иккинчисида эса $[0,1]$ сегментдан иборатдир.

Шуни яна бир бор таъкидлаймизки, кўп ўзгарувчили (m та ўзгарувчили) функцияларда функциянинг берилиш тўплами R^m фазодаги тўплам бўлиб бу функция қийматлари тўплами эса ҳақиқий сонларнинг қисм тўпламидан иборатдир.

R^{m+1} фазонинг (x, y) $(x \in R^m,\ y = f(x) \in R)$ нуқталаридан иборат ушбу

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) : x \in R^m,\ f(x) \in R\}$$

тўплам $y = f(x)$ *функция графиги* деб аталади.

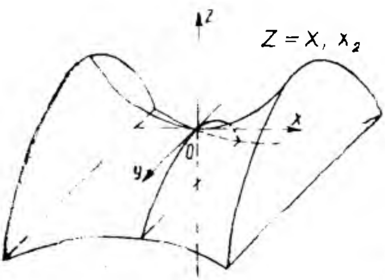
Масалан, $m = 2$ бўлганда (R^2 фазода)

$$y = x_1 \cdot x_2,\ y = x_1^2 + x_2^2,$$

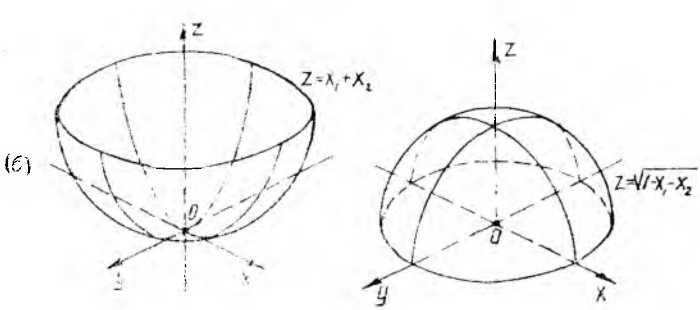
$$y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

функциялар графиги мос равишда R^3 фазода гиперболик параболоид, айланма параболоид ҳамда юқори ярим сфералардан иборатдир (10-чизма).

$M \subset R^m$ тўпламда $y = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция берил-



(а)



(б)

10- чизма

ган бўлиб, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ларнинг ҳар бири $T \subset R^k (k \in N)$ тўпламда берилган функциялар бўлсин:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\
x_2 &= \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x_m &= \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k).
\end{aligned}
$$

Бунда $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ ўзгарувчи $T \subset R^k$ тўпламда ўзгарганда уларга мос $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нуқта $M \subset R^m$ тўпламда бўлсин. Натижада y ўзгарувчи $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ўзгарувчи орқали $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ ўзгарувчиларнинг функцияси бўлади:

$$t \to x \to y$$
$$((t_1, t_2, \ldots, t_k) \to (x_1, x_2, \ldots, x_m) \to y.$$
$$y = f(x(t)) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k).$$

Бу функция *мураккаб функция* ёки $f(x)$ ҳамда $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *функциялар суперпозицияси* деб аталади.

Элементар функциялар устида қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш амаллари ҳамда функциялар суперпозицияси ёрдамида кўп ўзгарувчили элементар функциялар ҳосил қилинади. Ушбу

$$y = e^{x_1 \cdot x_2 \ldots x_m}, \quad y = \ln \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_m},$$
$$y = \sin(x_1 \cdot x_2) + \sin(x_2 \cdot x_3) + \ldots + \sin(x_{m-1} \cdot x_m)$$

функциялар шулар жумласидандир.

$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. Агар бу функция қийматлари тўплами

$$Y = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in M\}$$

юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, яъни шундай ўзгармас C (ўзгармас P) сон топилсаки, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in M$ учун

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \leqslant C \, (f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geqslant P)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция M тўпламда *юқоридан (қуйидан) чегараланган* деб аталади, акс ҳолда, яъни ҳар қандай катта мусбат S сон олинганда ҳам, M тўпламда шундай $(x_1^0, x_1^0, \ldots, x_m^0)$ нуқта топилсаки,

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) > S \, (f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) < -S)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция M тўпламда *юқоридан (қуйидан) чегараланмаган* деб аталади.

Агар $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция M тўпламда ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, функция шу тўпламда *чегараланган* дейилади.

Масалан, $M = R^2 \setminus \{(0,0)\}$ да берилган

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$

функция шу M тўпламда қуйидан чегараланган, аммо юқоридан чегараланмагандир: $Y = (0, \infty)$.

2. Функциянинг лимити. R^m фазода бирор M тўплам олайлик. a нуқта ($a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$) шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. У ҳолда M тўпламнинг нуқталаридан a га интилувчи турли $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)} \in M$, $x^{(n)} \neq a$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетликлар тузиш мумкин:

$$\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = a.$$

Энди шу M тўпламда бирор $y = f(x)$ функция берилган бўлсин.

12.16-таъриф (Гейне таърифи). Агар M тўпламнинг нуқталаридан тузилган, a га интилувчи ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ ($x^{(n)} \neq a$, $n = 1, 2, \dots$) кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b (чекли ёки чексиз) лимитга интилса, b $f(x)$ *функциянинг* a *нуқтадаги* (*ёки* $x \to a$ *даги*) *лимити** деб аталади ва у

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ ёки } x \to a \text{ да } f(x) \to b$$

каби белгиланади.

Функция лимитини бошқача ҳам таърифлаш мумкин.

12.17-таъриф. (Коши таърифи) Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундан $\delta > 0$ топилсаки, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in M$ нуқталарда

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг a *нуқтадаги* ($x \to a$ даги) *лимити* деб аталади.

12.18-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ топилсаки, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in M$ нуқталарда

$$|f(x)| > \delta \quad (f(x) > \varepsilon; \ f(x) < -\varepsilon)$$

бўлса, $f(x)$ функциянинг a *нуқтадаги* ($x \to a$ *даги*) *лимити* ∞ ($+\infty$; $-\infty$) дейилади.

Шундай қилиб функциянинг лимити икки хил таърифланади. Бу таърифлар эквивалент таърифлардир. Бунинг исботи 1-қисм, 4-боб, 3-§ да келтирилган бир ўзгарувчили функция лимити таърифларининг эквивалентлигининг исботи кабидир.

Юқоридаги $\lim\limits_{x \leftarrow a} f(x) = b$ ёки $x \to a$ да $f(x) \to b$ белгилашларни $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ҳамда

$$x \to a \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_m \to a_m \end{array} \right.$$

---

* Биз қуйида кўп ўзгарувчили функция учун лимитлар тушунчаси бошқача киритилиши ҳам мумкинлигини кўрамиз. Улардан фарқ этиш учун, баъзан, бу лимит каррали лимит деб ҳам аталади.

эканлигини эътиборга олиб, қуйидагича

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \cdots\\ x_m\to a_m}} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = b \qquad \text{ёки} \quad \left.\begin{matrix} x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \cdots\cdots\\ x_m\to a_m\end{matrix}\right| \text{ да } f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\to b$$

ёзса ҳам бўлади.

R^m фазода бирор M тўплам берилган бўлиб, ∞ эса шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу M тўпламда $y=f(x)$ функция берилган.

12.19-таъриф (Гейне таърифи). Агар M тўпламнинг нуқталаридан тузилган ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик учун $x^{(n)}\to\infty$ да мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b га интилса, b $f(x)$ *функциянинг* $x\to\infty$ *даги лимити* деб аталади ва

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

каби белгиланади.

12.20-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ топилсаки, ушбу $\rho(x, 0)>\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x\in M$ нуқталарда

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

тенгсилик бажарилса, b $f(x)$ *функциянинг* $x\to\infty$ *даги лимити* деб аталади ва

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

каби белгиланади.

Шуни таъкидлаш лозимки, функция лимити тушунчаси киритилишида лимити қаралаётган нуқтада функциянинг берилиши (аниқланиши) шарт эмас.

12.2-эслатма. Юқорида функция лимитига берилган Гейне таърифининг моҳияти, ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ $(x^{(n)}\neq a,\ n=1, 2, \ldots, x^{(n)}\to a)$ кетма-кетлик учун мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг лимити олинган $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликка боғлиқ бўлмаслигидадир.

Мисоллар 1. Ушбу

$$f(x)=f(x_1, x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1\cdot x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, & \text{агар } x_1^2+x_2^2>0 \text{ бўлса},\\ 0, & \text{агар } x_1^2+x_2^2=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функциянинг $x=(x_1, x_2)\to(0, 0)$ (яъни $x_1\to 0$, $x_2\to 0$) даги лимити ноль эканлиги кўрсатилсин. Бу функция R^2 тўпламда берилган бўлиб, $(0, 0)$ нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси.

а) Гейне таърифи бўйича: $(0, 0)$ нуқтага интилувчи ихтиёрий $x^{(n)}=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})\to(0, 0)$ (яъни $x_1^{(n)}\to 0$, $x_2^{(n)}\to 0$) $(x^{(n)}\neq 0, 0))$ кетма-кетлик оламиз. Унда мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик учун қуйидагича

$$(x^{(n)})=f(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}=)\ \frac{x_1^{(n)}\cdot x_2^{(n)}}{\sqrt{(x_1^{(n)})^2+(x_2^{(n)})^2}}=\sqrt{\frac{x_1^{(n)}\cdot x_2^{(n)}}{(x_1^{(n)})^2+(x_2^{(n)})^2}}\cdot\sqrt{x_1^{(n)}x_2^{(n)}}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_1^{(n)}\, x_2^{(n)}}$$

бўлиб, $x_1^{(n)} \to 0$, $x_2^{(n)} \to 0$ да

$$\lim_{n\to(0,\,0)} f(x^{(n)}) = 0$$

бўлади- Демак.

$$\lim_{x\to(0,\,0)} f(x) = \lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} \frac{x_1\cdot x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = 0;$$

б) Коши таърифи бўйича: $\forall\, \varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta = 2\varepsilon$ деб олинса, у ҳолда $0 < \rho(x,\, 0) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x нуқталарда

$$f(x) - | \, 0 = \left|\frac{x_1\cdot x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right| = \frac{|x_1|\cdot|x_2|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2} = \frac{1}{2}\rho(x.\, 0) < \frac{1}{2}\delta = \varepsilon$$

е нгсизлик ўринли бўлади. Бу эса

$$\lim_{x\to(0,\,0)} f(x) = \lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} \frac{x_1\cdot x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = 0$$

эканлигини билдиради.

2) Қуйидаги

$$f(x) = f(x_1,\, x_2) = \frac{x_1^2\cdot x_2^2}{x_1^2\cdot x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

функциянинг $x = (x_1,\, x_2) \to (0,\, 0)$ яъни $x_1 \to 0$, $x_2 \to 0$) даги лимитининг мавжуд эмаслиги кўрсатилсин. Бу функция ҳам $R^2\setminus\{(0,\ 0)\}$ тўпламда бўлиб, $(0,\, 0)$ нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси.

$(0.\ 0)$ нуқтага интилувчи иккита

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right) \to (0,\ 0),$$

$$(\bar{x}^{(n)}) = \left(\frac{1}{n},\ -\frac{1}{n}\right) \to (0,\ 0)$$

кетма-кетликлар олинса, улар учун мос равишда

$$f(x^{(n)}) = \frac{\dfrac{1}{n^4}}{\dfrac{1}{n^4}} = 1 \to 1.$$

$$f\,\bar{x}^{(n)} = \frac{\dfrac{1}{n^4}}{\dfrac{1}{n^4} + \dfrac{4}{n^2}} = 0 \to 0$$

бў ади. Бу эса $x \to (0,\ 0)$ да берилган функциянинг лимити мавжуд эмаслигини билдиради.

3. Чексиз кичик ва чексиз катта функциялар. 1-қисмнинг 3-боби, 4-§ ҳамда 5-§ ларида чексиз кичик ва чексиз катта миқдорлар тушунчалари, 4-бобнинг 7-§ ида эса чексиз катта ва чексиз кичик функциялар тушунчалари киритилиб, улар кўрсатилган параграфларда ўрганилган эди.

Худди шундай тушунчалар кўп ўзгарувчили функцияларга нисбатан ҳам киритилиши мумкин. Уларни ўрганиш эса бир ўзгарувчили функция ҳолидагига ўхшаш бўлганлигини эътиборга олиб, чексиз кичик ҳамда чексиз катта кўп ўзгарувчили функциялар ҳақидаги маълумотларни санаб ўтиш билан кифояланамиз.

Бирор $\alpha(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $a (a \in R^m)$ нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

12.21-таъриф. Агар $x \to a$ да $\alpha(x)$ нинг лимити ноль, яъни

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$$

бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ функция $x \to a$ да *чексиз кичик функция* деб аталади.

Берилган $f(x)$ функция $x \to a$ да чекли b лимитга эга бўлиши учун

$$\alpha(x) = f(x) - b$$

чексиз кичик функция бўлиши зарур ва етарли.

Бунинг исботи функциянинг лимити ҳамда чексиз кичик функциянинг таърифларидан келиб чиқади.

Шундай қилиб, $x \to a$ да $f(x)$ функция b лимитга эга бўлса, бу функцияни ҳар доим

$$f(x) = b + \alpha(x)$$

кўринишида ифодалаш мумкин, бунда $\alpha(x)$ — чексиз кичик функция.

Чексиз кичик функциялар қуйидаги хоссаларга эга.

Фараз қилайлик, $\beta(x)$ функция ҳам шу M тўпламда берилган бўлсин.

1° Агар $x \to a$ да $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар чексиз кичик функциялар бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси $\alpha(x) + \beta(x)$ функция ҳам чексиз кичик функция бўлади.

2°. Агар $x \to a$ да $\alpha(x)$ чексиз кичик функция бўлиб, $\beta(x)$ функция эса чегараланган функция бўлса, у ҳолда уларнинг кўпайтмаси $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ ҳам чексиз кичик функция бўлади.

12.22-таъриф. Агар M тўпламда берилган $\gamma(x)$ функция учун

$$\lim_{x \to a} \gamma(x) = \infty$$

бўлса, $\gamma(x)$ функция $x \to a$ да *чексиз катта функция* деб аталади.

3°. Агар $x \to a$ да $\alpha(x)$ функция чексиз кичик $(\alpha(x) \neq 0)$ функция бўлса, $\frac{1}{\alpha(x)}$ функция $x \to a$ да чексиз катта функция бўлади.

4°. Агар $x \to a$ да $\gamma(x)$ функция чексиз катта функция бўлса, $\frac{1}{\gamma(x)}$ функция $x \to a$ да чексиз кичик функция бўлади.

4. Лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари. Чекли лимитга эга бўлган кўп ўзгарувчили функциялар ҳам чекли лимитга эга бўлган бир ўзгарувчили функцияларнинг хоссаларига (қаралсин, 1-қисм, 4-боб, 4-§) ўхшаш хоссаларга эга. Уларнинг исботи худди бир ўзгарувчили функциялар хоссаларининг исботи кабидир. Шуни эътиборга олиб, биз қуйида чекли лимитга эга бўлган кўп ўзгарувчили функцияларнинг хоссаларини исботсиз келтирамиз.

Бирор $M \subset R^n$ тўпламда $f(x)$ функция берилган бўлиб, a $(a \in R^m)$ нуқта шу M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1°. Агар

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

мавжуд бўлиб, $b > p$ $(b < q)$ бўлса, a нуқтанинг етарли кичик атрофидаги $x \in M$ $(x \neq a)$ нуқталарда $f(x) > p (f(x) < q)$ бўлади. Хусусан, $b \neq 0$ бўлса, у ҳолда a нуқтанинг етарлича кичик атрофида $f(x) \neq 0$ бўлади.

2° Агар

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

мавжуд бўлса, a нуқтанинг етарли кичик атрофидаги $x \in M$ $(x \neq a)$ нуқталарда $f(x)$ функция чегараланган бўлади.

Энди M да иккита $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар берилган бўлсин.

3°. Агар

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = b_1, \ \lim_{x \to a} f_2(x) = b_2$$

бўлиб, a нуқтанинг $U_\delta(a)$ атрофидаги барча x нуқталарда $(x \in M \cap \cap U_\delta(a)$ $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ бўлса, у ҳолда $b_1 \leqslant b_2$ бўлади.

4°. Агар a нуқтанинг $U_\delta(a)$ атрофидаги $x \in M \cap U_\delta(a)$ нуқталарда

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$$

бўлиб, $x \to a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга ҳамда

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} f_2(x) = b$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

бўлади.

5°. Агар $x \to a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга бўлса, $f_1(x) \pm f_2(x)$ функциялар лимитга эга бўлади ва

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \pm \lim_{x \to a} f_2(x).$$

6°. Агар $x \to a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга бўлса, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ функция ҳам лимитга эга бўлади ва

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_1(x).$$

7°. Агар $x \to a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга бўлиб, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) \neq 0$ бўлса, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ функция ҳам лимитга эга бўлади ва

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)}.$$

12.3-эслатма. Бир ўзгарувчили функциялардагидек, $x \to a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар йиғиндиси, кўпайтмаси ва нисбатидан иборат бўлган фунцияларнинг лимитга эга бўлишидан бу функцияларнинг ҳар бирининг лимитга эга бўлиши келиб чиқавермайди.

12.4-эслатма. Агар $x \to a$ да 1) $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг ҳар бирининг лимити ноль (ёки чексиз) бўлса, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ифода; 2) $f_1(x) \to 0$, $f_2(x) \to \infty$ бўлганда $f_1(x) \cdot f_2(x)$ ифода ва ниҳоят 3) $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ турли ишорали чексиз лимитга эга бўлганда $f_1(x) + f_2(x)$ йиғинди мос равишда $\frac{0}{0}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмасликларни ифодалайди.

Агар $x \to a$ да 1) $f_1(x) \to 0$, $f_2(x) \to 0$ бўлса, 2) $f_1(x) \to 1$, $f_2(x) \to \infty$ бўлса, 3) $f_1(x) \to \infty$, $f_2(x) \to 0$ бўлса, у ҳолда $[f_1(x)]^{f_2(x)}$ мос равишда 0^0, 1^∞, ∞^0 кўринишдаги аниқмасликларни ифодалайди. Бундай аниқмасликлар бир ўзгарувчили функцияларда қаралганидек, $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциянинг ўз лимитларига интилиш характерига қараб очилади.

5. Такрорий лимитлар. Биз юқорида $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ нуқтадаги лимити

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \left(\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = b \right)$$

билан танишдик. Демак, функциянинг лимити, унинг аргументлари x_1, x_2, $\ldots$, x_m ларнинг бир йўла, мос равишда $a_1, a_2, \ldots, a_m$ сонларга интилгандаги лимитидан иборатдир.

Кўп ўзгарувчили функциялар учун (уларгагина хос бўлган) бошқа формадаги лимит тушунчасини ҳам киритиш мумкин.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $a = (a_1, a_2 \ldots, a_m)$ нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин, Бу функциянинг $x_1 \to a_1$ даги (бошқа барча ўзгарувчиларни тайинлаб) лимити

$$\lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

ни қарайлик. Равшанки, бу лимит, биринчидан бир ўзгарувчили функция лимитининг ўзгинаси, иккинчидан у $x_2, x_3, \ldots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ:

$$\lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_m).$$

Сўнг $\varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_m)$ функциянинг $x_2 \to a_2$ даги (бошқа барча ўзгарувчиларини тайинлаб) лимити

$$\lim_{x_2 \to a_2} \varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_m) = \varphi_2(x_3, x_4, \ldots, x_m)$$

ни қарайлик.

Юқоридагидек бирин-кетин $x_3 \to a_3$, $x_4 \to a_4, \ldots, x_m \to a_m$ да лимитга ўтиб

$$\lim_{x_m \to a_m} \lim_{x_{m-1} \to a_{m-1}} \ldots \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу лимит $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *функциянинг такрорий лимити* деб аталади.

Демак, функциянинг такрорий лимити, унинг аргументлари $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ларнинг ҳар бирининг бирин-кетин мос равишда $a_1, a_2 \ldots, a_m$ сонларга интилгандаги лимитидан иборат.

Худди юқоридагидек, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ аргументлари мос равишда $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ ларга интилгандаги такрорий лимити

$$\lim_{x_{i_k} \to a_{i_k}} \ldots \lim_{x_{i_1} \to a_{i_1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

ни ҳам қараш мумкин.

Шуни ҳам айтиш керакки, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция аргументлари $x_1, x_2, \ldots, x_m$ лар мос равишда $a_1, a_2, \ldots, a_m$ сонларга турли тартибда интилганда функциянинг турли такрорий лимитлари ҳосил бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу параграфнинг 2- пунктида келтирилган

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг лимити

$$\lim_{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0}} f(x_1, x_2) = 0$$

бўлишини кўрсатган эди. Бу функциянинг такрорий лимитлари мавжуд ва улар ҳам 0 га тенг. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0, \quad \lim_{x_2 \to 0} \lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2) = 0.$$

Шунингдек,

$$\lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0, \quad \lim_{x_1 \to 0} \lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2) = 0.$$

Демак, берилган функциянинг такрорий лимитлари мавжуд ва улар бир-бирига тенг бўлиб, бу такрорий лимитлар функциянинг (каррали) лимитига тенг бўлади.

2. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2}, & \text{агар } x_1 + 3x_2 \neq 0 \text{ бўлса.} \\ 0, & \text{агар } x_1 + 3x_2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг такрорий лимитлари қуйидагича:

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{x_2 \to 0} \lim_{x_1 \to 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x_2 \to 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = 2, \quad \lim_{x_1 \to 0} \lim_{x_2 \to 0} \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2} = 2.$$

Демак, берилган функциянинг такрорий лимитлари мавжуд бўлиб. уларнинг бири $-\frac{1}{3}$ га. иккинчиси эса 2 га тенг.

Бироқ $x = (x_1, x_2) \to (0, 0)$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг (каррали) лимити мавжуд эмас. Чунки (0, 0) нуқтага интилувчи иккита

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0, 0),$$

$$\bar{x}^{(n)} = \left(\frac{5}{4}, \frac{4}{n}\right) \to (0, 0)$$

кетма-кетликлар олинса улар учун мос равишда

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{6}{n}, \frac{4}{n}\right) = \frac{6}{17} \to \frac{6}{17}$$

бўлади. Бу эса $(x_1, x_2) \to (0, 0)$ да берилган функциянинг (каррали) лимити мавжуд эмаслигини билдиради.

3. Қуйидаги

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

функциянинг такрорий лимитлари

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0, \quad \lim_{x_2 \to 0} \lim_{x_1 \to 0} \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0,$$

$$\lim_{x_2 \to 0} \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0, \quad \lim_{x_1 \to 0}, \lim_{x_2 \to 0} \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0$$

бўлади. Демак, берилган функциянинг такрорий лимитлари мавжуд ва улар бир-бирига тенг экан. Биз юқорида бу функциянинг $(x_1, x_2) \to (0, 0)$ да (каррали) лимити мавжуд эмаслигини кўрсатган эдик.

4. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 \sin\dfrac{1}{x_1}, & \text{агар } x_1 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0 & \text{, агар } x_1 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция учун

$$\lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2) = x_1 \quad \lim_{x_1 \to 0} \lim_{x_2 \to 0} (x_1, x_2) = 0$$

бўлиб, $\lim\limits_{x_2 \to 0} \lim\limits_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2)$ — мавжуд эмас. Демак, берилган функциянинг битта такрорий лимити мавжуд бўлиб, иккинчи такрорий лимити эса мавжуд эмас. Аммо

$$|f(x_1, x_2)-0|=\left|x_1+x_2\sin\frac{1}{x_1}\right|\leqslant|x_1|+|x_2|\ (x_1\neq 0)$$

муносабатдан $(x_1, x_2)\to(0, 0)$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг (каррали) лимити мавжуд ва

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} f(x_1, x_2)=0$$

бўлиши келиб чиқади.

5. Қуйидаги

$$f(x_1, x_2)=(x_1+x_2)\cdot\sin\frac{1}{x_1}\cdot\sin\frac{1}{x_2}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг $x_1\to 0$ даги лимити мавжуд эмас. Чунки нолга интилувчи иккита

$$x_1^{(n)}=\frac{1}{n\pi}\to 0,\ \overline{x}_1^{(n)}=\frac{2}{(4\pi+1)\pi}\to 0\ (n\to\infty)$$

кетма-кетликлар олинса, улар учун мос равишда ($x_2\neq 0$ да)

$$f\left(\frac{1}{n\pi}, x_2\right)\to 0,\quad f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}, x_2\right)\to x_2\cdot\sin\frac{1}{x^2}$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{x_2\to 0} f(x_1\ x_2)$$

ҳам мавжуд бўлмайди. Аммо

$$|f(x_1, x_2)-0|=\left|(x_1+x_2)\sin\frac{1}{x_1}\sin\frac{1}{x_2}\right|\leqslant|x_1|+|x_2|$$

тенгсизликдан $(x_1, x_2)\to(0, 0)$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг (каррали) лимити мавжуд ва

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} f(x_1, x_2)=0$$

бўлишини топамиз.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, функциянинг бирор нуқтада каррали лимитининг мавжуд бўлишидан, унинг шу нуқтада такрорий лимитининг мавжуд бўлиши ва аксинча, функциянинг бирор нуқтада такрорий лимитларининг мавжуд бўлишидан, унинг шу нуқтада каррали лимитининг мавжуд бўлиши келиб чиқавермас экан. Ундан ташқари функциянинг такрорий лимитлари бир-бирига ҳар доим тенг бўлавермас экан.

Биз қуйида функциянинг каррали ва такрорий лимитлари орасидаги боғланиш ҳамда уларнинг маълум шартларда ўзаро тенглиги ҳақидаги теоремани исботлаймиз.

$f(x_1, x_2)$ функция $M=\{(x_1, x_2)\in R^2: |x_1-x_1^0|<a_1,\ |x_2-x_2^0|<a_2\}$ тўпламда берилган бўлсин.

12.8-теорема. *Агар* 1) $(x_1, x_2)\to(x_1^0, x_2^0)$ да $f(x_1, x_2)$ *функциянинг каррали лимити мавжуд*:

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_1^0}} f(x_1, x_2)=b,$$

2) ҳар бир тайинланган x_1 да қуйидаги

$$\lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) = \varphi(x_1)$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2)$$

такрорий лимит ҳам мавжуд бўлиб,

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) = b$$

бўлади.

Исбот. $f(x_1, x_2)$ функция $(x_1, x_2) \to (x_1^0, x_2^0)$ да каррали

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0}} f(x_1, x_2) = b$$

лимитга эга бўлсин. Лимитнинг таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, ушбу

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 \colon |x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta\} \subset M$$

тўпламнинг барча (x_1, x_2) нуқталари учун

$$|f(x_1, x_2) - b| < \varepsilon \tag{12.26}$$

бўлади. Энди теореманинг 2) шартини эътиборга олиб, x_1 ўзгарувчининг $|x_1 - x_1^0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматини тайинлаб, $x_2 \to x_2^0$ да (12.26) тенгсизликда лимитга ўтиб

$$|\varphi(x_1) - b| \leqslant \varepsilon$$

ни топамиз. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x_1 - x_1^0| < \delta$ бўлганда $|\varphi(x_1) - b| \leqslant \varepsilon$ бўлади. Бу эса

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \varphi(x_1) = b$$

бўлишини билдиради. Кейинги муносабатдан

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x^2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) = b$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Қуйидаги теорема худди шунга ўхшаш исботланади.

12.9-теорема. *Агар* 1) $(x_1, x_2) \to (x_1^0, x_2^0)$ *да* $f(x_1, x_2)$ *функциянинг каррали лимити мавжуд:*

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0}} f(x_1, x_2) = b,$$

2) *ҳар бир тайинланган x_2 да қуйидаги*

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2) = \psi(x_2)$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2)$$

такрорий лимит ҳам мавжуд бўлиб,

$$\lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2) = b$$

бўлади.

12.1-натижа. Агар бир вақтда юқоридаги 12.8- ва 12.9-теоремаларнинг шартлари бажарилса, у ҳолда

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0}} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2)$$

бўлади.

Биз икки ўзгарувчили функциянинг каррали ва такрорий лимитлари орасидаги боғланишни ифодаловчи теоремаларни келтирдик.

Худди юқоридагидек $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ ўзгарувчилари бўйича

$$\lim_{\substack{x_{i_1} \to \overset{0}{x}_{i_1} \\ x_{i_2} \to \overset{0}{x}_{i_2} \\ \cdots\cdots \\ x_{i_k} \to \overset{0}{x}_{i_k}}} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

каррали ҳамда

$$\lim_{x_{i_1} \to \overset{0}{x}_{i_1}} \lim_{x_{i_2} \to \overset{0}{x}_{i_2}} \ldots \lim_{x_{i_k} \to \overset{0}{x}_{i_k}} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

такрорий лимитлари ва улар орасидаги боғланишни қараш мумкин.

6. Коши теоремаси (яқинлашиш принципи). Энди кўп ўзгарувчили функция лимитининг мавжудлиги ҳақида умумий теорема келтирамиз.

R^m фазода M тўплам берилган бўлиб, $a (a \in R^m)$ унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ функция берилган.

12.23-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, ушбу $0 < \rho(\bar{x}, a) < \delta$, $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x ва $\bar{x} (x \in M, \bar{x} \in M)$ нуқталарда

$$|f(\bar{x}) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция учун a нуқтада *Коши шарти бажарилади* дейилади.

12.10-теорема (Коши теоремаси). *$f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга бўлиши учун a нуқтада Коши шартининг бажарилиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. $x \to a$ да $f(x)$ функция чекли лимит

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

га эга бўлсин. Таърифга биноан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x (x \in M)$ нуқталарда

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

жумладан $0 < \rho(\bar{x}, a) < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Бу тенгсизликлардан

$$|f(\bar{x}) - f(x)| \leqslant |f(\bar{x}) - b| + |f(x) - b| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шартининг бажарилишини кўрсатади.

Етарлилиги. $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шарти бажарилсин, яъни $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, ушбу $0 < \rho(x, a) < \delta$, $0 < \rho(\bar{x}, a) < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x ва $\bar{x} (x, \bar{x} \in M)$ нуқталарда

$$|f(\bar{x}) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлсин. Бу ҳолда $f(x)$ функция $x \to a$ да чекли лимитга эга бўлишини кўрсатамиз.

a нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси. Шунинг учун M тўпламнинг нуқталаридан $\{x^{(n)}\} (x^{(n)} \neq a,\ n = 1, 2, \dots)$ кетма-кетлик тузиш мумкинки, бунда

$$\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = a$$

бўлади. Лимитнинг таърифига биноан, юқорида келтирилган $\delta > 0$ га кўра, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$, $p > n_0$ учун $0 < \rho(x^{(n)}, a) < \delta$, $0 < \rho(x^{(p)}, a) < \delta$ бўлади. Бу тенгсизликларнинг бажарилишидан эса, шартга кўра:

$$|f(x^{(p)}) - f(x^{(n)})| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\{f(x^{(n)})\}$ — фундаментал кетма-кетлик. 2-§ да келтирилган 12.4-теоремага кўра $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи. Бу кетма-кетликнинг лимитини b билан белгилайлик:

$$\lim_{n \to \infty} f(x^{(n)}) = b.$$

Энди M тўпламнинг нуқталаридан тузилган ва a нуқтага интилувчи ихтиёрий $\{\bar{x}^{(n)}\}$ кетма-кетлик

$$\bar{x}^{(n)} \to a\,(\bar{x}^{(n)} \neq a,\ n = 1,\ 2, \ldots)$$

олинганда ҳам мос $\{f(\bar{x}^{(n)})\}$ кетма-кетлик (у юқорида кўрсатганимизга биноан яқинлашувчи бўлади) ҳам ўша b га интилишини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, $\bar{x}^{(n)} \to a\,(\bar{x}^{(n)} \neq a,\ n = 1,\ 2,\ \ldots)$ бўлганда

$$f(\bar{x}^{(n)}) \to b'$$

бўлсин.

$\{x^{(n)}\}$, $\{\bar{x}^{(n)}\}$ кетма-кетлик ҳадларидан ушбу

$$x^{(1)},\ \bar{x}^{(1)},\ x^{(2)},\ \bar{x}^{(2)}, \ldots,\ x^{(n)},\ \bar{x}^{(n)}, \ldots$$

кетма-кетликни тузайлик. Равшанки, бу кетма-кетлик $a\,(a \in R^m)$ га интилади. У ҳолда

$$f(x^{(1)}),\ f(\bar{x}^{(1)}),\ f(x^{(2)}),\ f(\bar{x}^{(2)}),\ ) \ldots,\ f(x^{(n)}),\ f(x^{(n)}), \ldots \qquad (12.27)$$

кетма-кетлик чекли лимитга эга. Уни b^* орқали белгилайлик. Агар $\{f(x^{(n)})\}$ ва $\{f(\bar{x}^{(n)})\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири (12.27) кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$f(x^{(n)}) \to b^*,\quad f(\bar{x}^{(n)}) \to b^*$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$b^* = b = b'.$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шартининг бажарилишидан M тўплам нуқталаридан тузилган ва a га интилувчи ҳар қандай $\{f(x^{(n)}\}\,(x^{(n)} \neq a,\quad n = 1,\ 2, \ldots)$ кетма-кетлик олинганда ҳам, мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик битта сонга интилишини топдик. Бу эса функция лимитининг Гейне таърифига кўра $f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

12.5-эслатма. Коши шарти ва Коши теоремаси $x \to \infty$ да ҳам юқоридагига ўхшаш ифодаланади ва исбот этилади.

4- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг узлуксизлиги

1. Функция узлуксизлиги таърифлари. $M \subset R^m$ тўпламда $f(x) = f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m)$ функция берилган бўлиб, $a \in M$ $(a = (a_1,\ a_2, \ldots, a_m))$ нуқта эса M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

12.24-таъриф. Агар $x \to a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \left(\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1,\ x_2, \ldots, x_m) = f(a_1,\ a_2, \ldots, a_m) \right) (*)$$

бўлса, $f(x)$ функция *a нуқтада узлуксиз деб* аталади.

Мисол. Ушбу

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1\cdot x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\cdot \text{ агар } x_1^2+x_2^2\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 0 \quad, \text{ агар } x_1^2+x_2^2=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг ихтиёрий $(x_1^0, x_2^0)\neq(0,0)$ нуқтада узлуксиз бўлишини функция лимитининг хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0}} f(x_1, x_2)=\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0}}\frac{x_1\cdot x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=\frac{x_1^0\cdot x_2^0}{\sqrt{(x_1^0)^2+(x_2^0)^2}}=f(x_1^0, x_2^0).$$

Ушбу бобнинг 3-§ да келтирилган мисолга кўра

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} f(x_1. x_2)=\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\frac{x_1\cdot x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=0=f(0,0)$$

бўлиб, ундан берилган функциянинг (0. 0) нуқтада ҳам узлуксиз эканлиги келиб чиқади. Демак, қаралаётган функция R^2 тўпламда узлуксиз.

Шундай қилиб функциянинг узлуксизлиги унинг лимити орқали таърифланар экан. Функциянинг лимити эса ўз навбатида Гейне ва Коши таърифларига эга. Шуни эътиборга олиб, функция узлуксизлигининг Гейне ва Коши таърифларини келтириш мумкин.

12.25-таъриф (Гейне таърифи). Агар $M\subset R^m$ тўпламнинг нуқталаридан тузилган. $a(a\in M)$га интилувчи ҳар қандай $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам, мос $\{f(x^{(n)})\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт $f(a)$ га интилса, $f(x)$ функция *а нуқтада узлуксиз* деб аталади.

12.26-таъриф (Коши таърифи) Агар $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ топилсаки, ушбу $\rho(x, a)<\delta$ тенсизликни қаноатлантирувчи барча $x\in M$ нуқталарда

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция *а нуқтада узлуксиз* деб аталади,

Атроф тушунчаси ёрдамида функциянинг узлуксизлигини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

12. 27-таъриф. Агар $\forall\varepsilon>0$ сон учун, шундай $\delta>0$ топилсаки, барча $x\in U_\delta(a)\cap M$ нуқталарда $f(x)$ функциянинг қийматлари $f(x)\in U_\varepsilon(f(a))$ бўлса, яъни

$$x\in U_\delta(a)\cap M\Rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(fa))$$

бўлса, $f(x)$ функция *а нуқтада узлуксиз* деб аталади.

$f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ нуқтада узлуксизлигини функция орттирмаси ёрдамида ҳам таърифлаш мумкин.

Функция аргументларининг орттирмалари

$$\Delta x_1=x_1-a_1,\ \Delta x_2=x_2-a_2, \ldots, \Delta x_m=x_m-a_m$$

га мос ушбу

$$f(x)-f(a)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)-f(a_1, a_2, \ldots, a_m)=$$
$$=f(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2, \ldots, a_m+\Delta x_m)-f(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

айирма $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги *тўлиқ орттирмаси* деб аталади ва Δf ёки $\Delta f(a)$ каби белгиланади:

$$\Delta f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_m + \Delta x_m) - f(a, a_2, \ldots, a_m).$$

Қуйидаги

$$f(a_1 + \Delta x_1, a_2, \ldots, a_m) - f(a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

$$f(a_1\ a_2 + \Delta x_2, a_3, \ldots, a_m) - f(a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

айирмалар $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги хусусий орттирмалари дейилади ва улар мос равишда $\Delta_{x_1} f$, $\Delta_{x_2} f$, $\ldots$, $\Delta_{x_m} f$ каби белгиланади.

Юқоридаги (*) лимит муносабатдан топамиз:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0.$$

Натижада (*) тенглик қуйидаги

$$\lim_{x=a \to 0} \Delta f(a) = 0, \text{ яъни } \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta f(a) = 0$$

кўринишга келади. Демак, $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги узлуксизлиги

$$\lim_{x-a \to 0} \Delta f(a) = 0 \quad \left(\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta f(a) = 0 \right)$$

каби ҳам таърифланиши мумкин экан.

12.28-таъриф. Агар $f(x)$ функция $M(M \subset R^m)$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция шу *M тўпламда узлуксиз* деб аталади.

Биз юқорида келтирган кўп ўзгарувчили функцияларнинг узлуксизлиги уларнинг барча ўзгарувчилари бўйича узлуксизлигини, яъни бир йўла узлуксизлигини ифодалайди.

Аввалгидек $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. Берилган функциянинг бирор $x_k (k=1,2, \ldots, m)$ аргументидан бошқа барча аргументларини тайинлаб, бу x_k аргументга Δx_k орттирма берайлик, бунда $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) \in M$ бўлсин. Натижада $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция ҳам

$$\Delta_{x_k} f = f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

$(k=1,2, \ldots, m)$ хусусий орттирмага эга бўлади.

Агар $\Delta x_k \to 0$ да функциянинг хусусий орттирмаси $\Delta_{x_k} f$ ҳам нолга интилса, яъни

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} f = 0$$

бўлса, $f(x_1\ x_2, \ldots, x_m)$ функция $(x_1 x_2, \ldots, x_m)$ нуқтада x_k ўзгарувчиси бўйича узлуксиз деб аталади. Одатда функциянинг бундай узлуксизлиги, унинг ҳар бир ўзгарувчиси бўйича *хусусий узлуксизлиги* деб аталади.

Демак, кўп ўзгарувчили функциянинг ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксизлиги, бир ўзгарувчили функция узлуксизлигининг худди ўзи экан.

Агар $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in M$ нуқтада бир йўла) узлуксиз бўлса, функция шу нуқтада ҳар бир ўзгарувчиси бўйича ҳам хусусий узлуксиз бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in M$ нуқтада узлуксиз бўлсин. Таърифга кўра

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta f = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_m \to 0}} [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)] = 0$$

бўлади.

Хусусан,

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{k-1} = \Delta x_{k+1} = \ldots = \Delta x_m = 0, \ \Delta x_k \neq 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m)$$

бўлганда

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} f = \lim_{\Delta x_k \to 0} [f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0) -$$
$$- f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)] = 0$$

бўлади. Бу эса берилган функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтада $x_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлишини билдиради.

12.6-эслатма. $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг бирор нуқтада ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлишидан унинг шу нуқтада (бир йўла) узлуксиз бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{2x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ бўлса}, \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг ҳар бир ўзгарувчиси бўйича узлуксиз бўлишини кўрсатамиз. Равшанки, $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$. Ихтиёрий $(x_1, x_2) \in R^2$ нуқта олиб, унда x_2 ўзгарувчини тайинлаймиз.

Агар $x_2 \neq 0$ ва $x_1 \to x_1^0 \neq 0$ бўлса,

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \to x_1^0} \frac{2x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{2x_1^0 \cdot x_2}{(x_1^0)^2 + x_2^2} = f(x_2^0, x_2)$$

бўлади.

Агар $x_2 = 0$ ва $x_1 \to x_1^0 \neq 0$ бўлса,

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, 0) = 0 = f(x_1^0, 0)$$

бўлади.

Агар $x_2 = 0$ ва $x_1 \to x_1^0 = 0$ бўлса,

$$\lim_{x_1 \to 0} f(x_1, 0) = 0 = f(0, 0)$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2).$$

Бу эса берилган $f(x_1, x_2)$ функция x_1 ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз эканлигини билдиради. Берилган функциянинг x_2 ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз бўлиши худди шунга ўхшаш кўрсатилади. Демак, $f(x_1, x_2)$ функция ҳар бир ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз. Бироқ, бу функция $(0, 0)$ нуқтада узлуксиз эмас. Бу нуқтада функция ҳатто лимитга эга эмаслигини кўрсатайлик. Ҳақиқатан ҳам, $(0, 0)$ нуқтага интиладиган қуйидаги иккита $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ ва $\left\{\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ кетма-кетликлар:

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0, 0) \quad (n \to \infty)$$

$$\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0, 0) \quad (n \to \infty)$$

олинганда, уларга мос келадиган функция қийматларидан иборат $\left\{f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ ва $\left\{f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ кетма-кетликлар учун

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1 \to 1, \quad f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{4}{5} \to \frac{4}{5}$$

бўлади.

Биз юқорида кўп ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг ҳар бир x_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксизлиги тушунчаси билан танишдик. $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ ўзгарувчилари бўйича узлуксизлиги худди шунга ўхшаш таърифланади.

12.29-таъриф. Агар $x \to a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд бўлмаса, ёки

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

ёки функциянинг лимити мавжуд, чекли бўлиб,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \neq f(a)$$

бўлса, унда функция *а нуқтада узилишга эга* деб аталади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2, & \text{агар } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция R^2 тўпламда берилган бўлиб, унинг (0, 0) нуқтадаги лимити

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} f(x_1, x_2) = 0 \neq f(0, 0) = 1$$

бўлади. Демак, берилган функция (0, 0) нуқтада узилишга эга.

2. Ушбу бобнинг 1-§ ида келтирилган

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{агар } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция узилишга эга, чунки

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} f(x_1, x_2) = \lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = +\infty.$$

3. Қуйидаги

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2 - 1}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 \neq 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция $\{(x_1, x_2) \in R^2;\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узилишга эга бўлади, чунки $(x_1, x_2) \to (x_1^0, x_2^0)$ $(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 = 1$ да $f(x_1, x_2)$ функциянинг чекли лимити мавжуд эмас.

4. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{2x_1 - x_2}{x_1 + 3x_2}, & \text{агар } x_1 + 3x_2 \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x_1 + 3x_2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция (0, 0) нуқтада узилишга эга, чунки $(x_1, x_2) \to (0, 0)$ да берилган функциянинг лимити мавжуд эмас (қаралсин 41-бет).

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, $f(x_1, x_2)$ функция текисликнинг муайян нуқталарида ёки текисликдаги бирор чизиқнинг барча нуқталарида (яъни чизиқ бўйлаб) узилиши мумкин экан.

2. Узлуксиз функциялар устида арифметик амаллар. Мураккаб функциянинг узлуксизлиги. Энди узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбатининг узлуксизлиги масаласини ўрганамиз.

12.11-теорема. *Агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг ҳар бири $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, улар $a \in M$ нуқтада узлуксиз бўлса,*

$$f_1(x) \pm f_2(x),\ f_1(x) \cdot f_2(x) \text{ ҳамда } \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\ (f_2(a) \neq 0)$$

функциялар ҳам шу нуқтада узлуксиз бўлади.

Исбот. Бу теореманинг исботи, аслида лимитга эга бўлган функциялар устида арифметик амаллар ҳақидаги маълумотлардан (ушбу бобнинг 3-§ даги 5°, 6° ва 7°-хоссалар) бевосита келиб чиқади. Уни лимитга эга бўлган функциянинг хоссалари (3-§ даги 1° ва 2°-хоссалар) ҳамда берилган функциянинг нуқтада узлуксизлигидан фойдаланиб ҳам исботлаш мумкин. Биз қуйида икки функция нисбатининг узлуксиз бўлишини кўрсатамиз. $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциянинг ҳар бири a нуқтада узлуксиз бўлиб, $f_2(a) \neq 0$ бўлсин. Равшанки, $x \to a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар мос равишда $f_1(a)$, $f_2(a)$ лимитларга эга:

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = f_1(a), \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = f_2(a) \quad (f_2(a) \neq 0).$$

У ҳолда ушбу бобнинг 3-§ идаги 2°-хоссага кўра, a нуқтанинг етарлича кичик атрофи $U_{\delta_1}(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < \delta_1\}$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар чегараланган бўлади:

$$m_1 < f_1(x) < M_1, \quad m_2 < f_2(x) < M_2, \quad x \in U_{\delta_1}(a),$$

бунда m_1, M_1 ва m_2, M_2 — ўзгармас сонлар. Иккинчи томондан $f_2(a) \neq$ $\neq 0$ бўлганлиги сабабли 3-§ даги 1°-хоссага кўра шу a нуқтанинг етарли кичик атрофи $U_{\delta_2}(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) < \delta_2\}$ да $f_2(x) \neq 0$ бўлади.

Энди ушбу

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} \quad (x \in U_{\delta_2}(a))$$

айирмани қарайлик. Уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{f_1(x)}{f_2(a)\, f_2(x)} [f_2(a) - f_2(x)] + \frac{1}{f_2(a)} [f_1(x) - f_1(a)].$$

Агар $\delta' = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ деб олсак, унда $\forall x \in U_{\delta'}(a)$ учун

$$\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)}\right| \leqslant \left|\frac{M_1}{m_2 \cdot f_2(a)}\right| \cdot |f_2(x) - f_2(a)| + $$
$$+ \frac{1}{|f_2(a)|} |f_1(x) - f_1(a)| \tag{12.28}$$

бўлади.

$f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг a нуқтада узлуксизлигига асосан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{|f_2(a)|}{2} \cdot \varepsilon$ га кўра шундай $\delta'' > 0$ топиладики, $\forall x \in U_{\delta''}(a)$ учун

$$|f_1(x) - f_1(a)| < \frac{|f_2(a)|}{2} \varepsilon, \tag{12.29}$$

шунингдек, ўша $\varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\left|\frac{m_2 \cdot f_2(a)}{M_1}\right| \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta''' > 0$ топиладики, $\forall x \in U_{\delta'''}(a)$ учун

$$|f_2(x) - f_2(a)| < \left|\frac{m_2 \cdot f_2(a)}{M_1}\right| \frac{\varepsilon}{2} \tag{12.30}$$

бўлади. Агар $\delta = \min\{\delta', \delta'', \delta'''\}$ деб олинса, унда $\forall x \in U_\delta(a)$ учун юқоридаги (12.28), (12.29) ва (12.30) муносабатлар бир йўла ўринли бўлиб, натижада ушбу

$$\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(a)}{f_2(a)}\right| < \varepsilon$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ функциянинг a нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради.

Худди шу йўл билан теореманинг қолган қисмлари ҳам исботланади.

12.7-эслатма. Иккита функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбати узлуксиз бўлишидан, бу функцияларнинг ҳар бирининг узлуксиз бўлиши келиб чиқавермайди.

Мисол. Ушбу $D=\{(x_1, x_2)\in R^2: |x_1|\leqslant 1, |x_2|\leqslant 1\}\subset R^2$ квадратни олиб, унинг рационал нуқталари (яъни ҳар иккала координаталари рационал сон бўлган нуқталари) тўпламини D_p билан белгилаймиз. Бу D тўпламда қуйидаги

$$f_1(x_1, x_2)=\begin{cases}1, & \text{агар } (x_1, x_2)\in D_p \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2)\in D\setminus D_p \text{ бўлса}\end{cases}$$

ҳамда

$$f_2(x_1, x_2)=\begin{cases}-1, & \text{агар } (x_1, x_2)\in D_p \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2)\in D\setminus D_p \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияларни қарайлик. Бу функциялар йиғиндиси $f_1(x_1, x_2)+f_2(x_1. x_2)=0$ $(\forall (x_1. x_2)\in D)$ бўлиб, у шу тўпламда узлуксиз бўлса-да, $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ функцияларнинг ҳар бири D да узлуксиз эмас.

Юқорида келтирилган теорема қўшилувчилар ҳамда кўпайтувчилар сони ихтиёрий чекли бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

Энди мураккаб функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремани келтирамиз.

Фараз қилайлик, $M\subset R^m$ тўпламда $y=f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция берилган бўлиб, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ларнинг ҳар бири $T\subset R^k$ $(k\in N)$ тўпламда берилган функциялар бўлсин:

$$x_1=\varphi_1(t)=\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k),$$
$$x_2=\varphi_2(t)=\varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_m=\varphi_m(t)=\varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k).$$

Биз $t=(t_1, t_2, \ldots, t_k)\in T$ бўлганда унга мос $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in M$ деб қараймиз. Бу функциялар ёрдамида

$$y=f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k))=$$
$$=\Phi(t_1. t_2, \ldots, t_k)=\Phi(t)$$

мураккаб функцияни тузамиз (қаралсин, 33-бет).

12.12-теорема. *Агар* $\varphi_i(t)=\varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ *функцияларнинг ҳар бири* $t^0=(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ *нуқтада узлуксиз бўлиб,* $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *функция эса* $t^0=(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ *нуқтага мос* $x^0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ $(x_1^0=\varphi_1(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0),\ x_2^0=\varphi_2(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)\ldots$

$$\ldots)=\varphi_m(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0))$$

нуқтада узлуксиз бўлса, $y = \Phi(t) = \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ мураккаб функция $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз бўлади.

Исбот. $x_i = \varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ функция $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз бўлсин.

$T \subset R^k$ тўпламда $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ нуқтага интилувчи ихтиёрий

$$\{t^{(n)}\} = \{(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)})\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

кетма-кетликни олайлик. У ҳолда узлуксизликнинг Гейне таърифига кўра

$$\left.\begin{array}{l} t_1^{(n)} \to t_1^0 \\ t_2^{(n)} \to t_2^0 \\ \ldots\ldots \\ t_k^{(n)} \to t_k^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^{(n)} = \varphi_1(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)}) \to \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0) = x_1^0, \\ x_2^{(n)} = \varphi_2(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)}) \to \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0) = x_2^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m^{(n)} = \varphi_m(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)}) \to \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0) = x_m^0 \end{array}$$

бўлади.

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтада узлуксиз. У ҳолда яна Гейне таърифига кўра

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(n)} \to x_1^0 \\ x_2^{(n)} \to x_2^0 \\ \ldots\ldots \\ x_m^{(n)} \to x_m^0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \to f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$$

бўлади. Демак, $t_1^{(n)} \to t_1^0$, $t_2^{(n)} \to t_2^0, \ldots, t_k^{(n)} \to t_k^0$ да

$$f(\varphi_1(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)}), \varphi_2(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)}), \ldots, \varphi_m(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_k^{(n)})) \to$$
$$\to f(\varphi_1(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0), \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0), \ldots, \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)).$$

Бу эса $y = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k)) = \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ функциянинг $(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

5-§. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари

Биз қуйида кўп ўзгарувчили узлуксиз функцияларнинг хоссаларини келтирамиз. Бунда бир ўзгарувчили узлуксиз функцияларнинг хоссалари тўғрисидаги маълумотлардан тўла фойдалана борамиз.

Кўп ўзгарувчили узлуксиз функциялар ҳам бир ўзгарувчили узлуксиз функцияларнинг хоссалари каби хоссаларга эга.

1. Нуқтада узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари (локал хоссалари). $f(x)$ функция M $(M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлсин, M тўпламдан бирор x^0 нуқта олиб, бу нуқтанинг шу тўпламга тегишли бўлган етарли кичик атрофини қарайлик. $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз бўлсин. Бундай $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги хоссаларини (локал хоссаларини) ўрганамиз.

1°. Агар $f(x)$ функция $x^0 \in M$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофида функция чегараланган бўлади.

Исбот. Функция узлуксизлиги таърифига кўра

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)$$

бўлиб, ундан $f(x)$ функцияни x^0 нуқтада чекли лимитга эга эканлиги келиб чиқади. Чекли лимитга эга бўлган функциянинг хоссаларидан (қаранг, 38- бет) эса, $f(x)$ функцияни x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофида чегараланганлигини топамиз.

2°. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз бўлиб, $f(x^0)>0$ ($f(x^0)<$ <0) бўлса, x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги x нуқталарда $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксизлиги таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топиладики, барча $x \in U_\delta(x^0) \cap M$ нуқталар учун

$$f(x^0) - \varepsilon < f(x) < f(x^0) + \varepsilon$$

бўлади.

Бу ерда $\varepsilon = f(x^0) > 0$ (агар $f(x^0) < 0$ бўлса, $\varepsilon = -f(x^0)$) деб олсак, фикримизнинг тасдиғига эга бўламиз.

Демак, $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз ва $f(x^0) \neq 0$ бўлса, x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги x нуқталарда функция қийматларининг ишораси $f(x^0)$ нинг ишораси билан бир хил бўлар экан:

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x^0).$$

3°. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз бўлса, x^0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги $x' \in M$, $x'' \in M$ нуқталар учун

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада узлуксизлигига асосан, $\forall \varepsilon>0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, барча $x \in U_\delta(x^0)$ нуқталар учун

$$|f(x) - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. Жумладан, $x' \in U_\delta(x^0)$, $x'' \in U_\delta(x^0)$ нуқталар учун ҳам

$$|f(x') - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |f(x'') - f(x^0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Кейинги тенгсизликлардан эса $|f(x') -$ $- f(x'')| < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади.

2. Тўпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари (глобал хоссалари). Энди $M \subset R^m$ тўпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссаларини (глобал хоссаларини), аниқроғи $f(x)$ функция қийматларидан иборат $\{f(x) : x \in M\}$ тўпламнинг хоссаларини ўрганамиз.

12.13-теорема (Больцано — Кошининг биринчи теоремаси). $y = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *функция боғламли** $M \subset R^m$ *тўпламда берилган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция тўпламнинг иккита* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *ва* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *нуқтасида ҳар хил ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда шундай* $c = (c_1, c_2, \ldots c_m) \in M$ *нуқта топиладики, бу нуқтада функция нолга айланади:*

$$f(c) = f(c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0.$$

Исбот. Аниқлик учун $f(a) = f(a_1, a_2, \ldots, a_m) < 0$, $f(b) = f(b_1, b_2, \ldots, b_m) > 0$ бўлсин. $M \subset R^m$ боғламли тўплам бўлгани учун бу a ва b нуқталарини бирлаштирувчи ва M тўпламда ётувчи синиқ чизиқ топилади. Бу синиқ чизиқ учлари бўлган нуқталарда $f(x)$ функциянинг қийматларини ҳисоблаб борамиз. Бунда икки ҳол юз беради:

1) Синиқ чизиқ учларининг бирида $f(x)$ функция нолга айланади. Бу ҳолда синиқ чизиқнинг шу учини теоремадаги c нуқта деб олинса, $f(c) = 0$ бўлиб, теорема исботланади.

2) Синиқ чизиқ учларида $f(x)$ функция нолга айланмайди. Бу ҳолда синиқ чизиқнинг шундай кесмаси топиладики, унинг учларида $f(x)$ функциянинг қийматлари ҳар хил ишорали бўлади. Синиқ чизиқнинг худди шу учларининг бирини $a' = (a_1', a_2', \ldots, a_m')$ билан, иккинчи, учини эса $b' = (b_1', b_2', \ldots, b_m')$ билан белгиласак, унда

$$f(a') = f(a_1', a_2', \ldots, a_m') < 0,$$

$$f(b') = f(b_1', b_2', \ldots, b_m') > 0$$

бўлади. Синиқ чизиқнинг бу кесмасининг тенгламаси ушбу

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1' + t(b_1' - a_1'), \\ x_2 &= a_2' + t(b_2' - a_2'), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_m &= a_m' + t(b_m' - a_m') \end{aligned}$$

$(0 \leqslant t \leqslant 1)$ кўринишда ёзилади.

Агар ўзгарувчи $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in M$ нуқтани синиқ чизиқнинг шу кесмаси бўйичагина ўзгаради деб олинадиган бўлса, у ҳолда $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ кўп ўзгарувчили функция қуйидагича

$$F(t) = f(a_1' + t(b_1' - a_1'), a_2' + t(b_2' - a_2'), \ldots, a_m' + t(b_m' - a_m'))$$

битта t ўзгарувчининг мураккаб функцияси бўлиб қолади. Мураккаб функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремага кўра $F(t)$ функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиздир. Иккинчи томондан $t = 0$ ва $t = 1$ да бу функция турли ишорали қийматларга эга:

$$F(0) = f(a_1', a_2', \ldots, a_m') < 0,$$

$$F(1) = f(b_1', b_2', \ldots, b_m') > 0.$$

Шундай қилиб, $F(t)$ функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз ва шу сег-

* Боғламли тўплам таърифини 1- §, 17- бетдан қаранг.

ментнинг четки нуқталарида ҳар хил ишорали қийматларга эга .У ҳолда 1-қисм, 5-боб, 7-§ даги 5.5-теоремага кўра, (0, 1) интервалда шундай t_0 нуқта топиладики,

$$F(t_0)=0$$

бўлади. Демак,

$$F(t_0)=f(a_1'+t_0(b_1'-a_1'),\ a_2'+t_0(b_2'-a_2),\ \ldots,\ a_m'+t_0(a_m'-a_m'))=0.$$

Агар

$$c_1=a_1'+t_0(b_1'-a_1'),$$
$$c_2=a_2'+t_0(b_2'-a_2').$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$c=a_m'+t_0(b_m'-a_m')$$

деб олсак, равшанки, $c=(c_1, c_2, \ldots, c_m)\in M$ ва $f(c)=f(c_1, c_2, \ldots, c_m)=0$ бўлади. Бу юқорида келтирилган теоремани исботлайди.

Қуйидаги теорема ҳам шунга ўхшаш исботланади.

12.14-теорема (Больцано — Кошининг иккинчи теоремаси). $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *функция боғламли* $M\subset R^m$ *тўпламда берилган ва узлуксиз бўлиб, M тўпламнинг иккита* $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *ва* $b=(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *нуқтасида* $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$ *бўлсин. A билан B орасида ҳар қандай C сон олинса ҳам, M тўпламда шундай* $c=(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ *нуқта топиладики,*

$$f(c)=f(c_1, c_2, \ldots, c_m)=C$$

бўлади.

12.15-теорема (Вейерштрасснинг биринчи теоремаси). *Агар $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ $M\subset R^n$ тўпламда берилган ва узлуксиз бўлса, функция шу M тўпламда чегараланган бўлади.*

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпламда узлуксиз бўлса ҳам, у шу тўпламда чегараланмаган бўлсин. У ҳолда $\forall n\in N$ учун шундай $x^{(n)}\in M$ нуқта топиладики,

$$|f(x^{(n)})|>n \tag{12.31}$$

бўлади. Бундай нуқталардан $\{x^{(n)}\}$, $x^{(n)}\in M$ $(n=1, 2, \ldots)$ кетма-кетлик тузамиз. Модомики, M тўплам чегараланган экан, унда $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик ҳам чегаралангандир. Больцано — Вейерштрасс теоремасига (ушбу бобнинг 2-§ ига) кўра $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи бўлган $\{x^{(n_k)}\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин: $\{x^{(x_k)}\}\to x^0$ $(k\to\infty)$. M ёпиқ тўплам бўлгани учун $x^0\in M$ бўлади. $f(x)$ функциянинг M тўпламда узлуксиз эканлигидан эса

$$f(x^{(n_k)})\to f(x^0)$$

бўлиши келиб чиқади, натижада бир томондан (12.31) муносабатга кўра

$$|f(x^{(n_k)})|>n_k.$$

яъни $f(x^{(n_k)})\to\infty$ $(k\to\infty$ да) бўлса, иккинчи томондан $f(x^{(n_k)})\to f(x^0)$ бўлиб қолди. Бундай зиддият $f(x)$ функцияни M тўпламда чегараланмаган деб олиниши оқибатида келиб чиқди. Демак, $f(x)$ функция M тўпламда чегараланган. Теорема исбот бўлди.

12.16-теорема (Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси). *Агар $f(x)$ функция чераланган ёпиқ $M \subset R^m$ тўпламда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у шу тўпламда ўзининг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эришади.*

Бу теореманинг исботи 1-қисм, 5-боб, 7-§ даги 5.8-теореманинг исботи кабидир. Уни исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

6-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг текис узлуксизлиги. Кантор теоремаси

Ушбу параграфда кўп ўзгарувчили функциянинг текис узлуксизлиги тушунчасини киритамиз ва уни батафсил ўрганамиз.

$f(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин.

12.30-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун, шундай $\delta > 0$ топилсаки, M тўпламнинг $\rho(x', x'') < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' $(x' \in M,\ x'' \in M)$ нуқталарида

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция M *тўпламда текис узлуксиз функция* деб аталади.

Функциянинг текис узлуксизлиги таърифидаги $\delta > 0$ сон $\varepsilon > 0$ гагина боғлиқ бўлади. Табиийки, агар $f(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда текис узлуксиз бўлса, у шу тўпламда узлуксиз бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

функциянинг $D = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ тўпламда текис узлуксиз бўлиши кўрсатилсин.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олиб, унга кўра топиладиган $\delta > 0$ сонни $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ деб олсак, у ҳолда

$$\rho(x', x'') = \rho((x_1', x_2'), (x_1'', x_2'')) = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2} < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall (x_1', x_2') \in D$, $\forall (x_1'', x_2'') \in D$ нуқталар учун

$$|f(x_1', x_2') - f(x_1'', x_2'')| = |(x_1')^2 + (x_2')^2 - [(x_1'')^2 + (x_2'')^2]| = |(x_1' - x_1'')(x_1' + x_1'') +$$

$$+ (x_2' - x_2'')(x_2' + x_2'')| \leqslant 2\sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2} + 2\sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2} =$$

$= 4\delta < \varepsilon$ бўлади. Демак, берилган функция $D \subset R^2$ тўпламда текис узлуксиз.

2. Қуйидаги

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$$

функцияни $A = \{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ тўпламда қарайлик. Равшанки, бу функция A тўпламда узлуксиз. Бироқ қаралаётган функция учун A тўпламга текис узлуксизлик таърифидаги шарт бажарилмайди, яъни $\forall \delta > 0$ учун шундай $\varepsilon > 0$ ва $x' = (x_1', x_2') \in A$, $x'' = (x_1'', x_2'') \in A$ нуқталар топиладики, $\rho(x', x'') < \delta$ ҳамда

$$|f(x_1', x_2') - f(x_1'', x_2'')| \geqslant \varepsilon$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\forall\ \delta > 0$ учун $\varepsilon = 1$ деб ва $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in A$, $\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) \in A$ нуқталарни олсак, $n > n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{2\delta}}\right]$ учун

$$\rho\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)\right) = \frac{1}{n\sqrt{2}} < \delta$$

ҳамда

$$\left| f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) \right| = 3n^2 > 1 = \varepsilon$$

бўлади.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, бирор тўпламда узлуксиз бўлган функциялар ҳар доим шу тўпламда текис узлуксизлик таърифидаги шартни бажаравермас экан. Аммо қуйидаги теорема ўринлидир.

12.17-теорема (Кантор теоремаси). *Агар $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ M $(M \subset R^m)$ тўпламда берилган ва узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.*

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпламда узлуксиз бўлсин-у, аммо текис узлуксизлик таърифидаги шарт бажарилмасин. Бу ҳолда бирор $\varepsilon > 0$ сон ва ихтиёрий $\delta > 0$ сон учун M тўпламда $\rho(x', x'') < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай x' ва x'' $(x' \in M, x'' \in M)$ нуқталар топиладики,

$$|f(x'') - f(x')| \geqslant \varepsilon$$

бўлади.

Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлиги $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \ldots$ ни олайлик:

$$\delta_n \to 0 \ (\delta_n > 0 \ n = 1, 2, \ldots). \tag{12.32}$$

Фаразимизга кўра, юқоридаги $\varepsilon > 0$ сон ва ихтиёрий $\delta_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ учун M тўпламда шундай $a^{(n)}$ ва $b^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ нуқталар топиладики,

$$\rho(a^{(1)}, b^{(1)}) < \delta_1 \text{ ва } |f(a^{(1)}) - f(b^{(1)})| \geqslant \varepsilon,$$
$$\rho(a^{(2)}, b^{(2)}) < \delta_2 \text{ ва } |f(a^{(2)}) - f(b^{(2)})| \geqslant \varepsilon,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho(a^{(n)}, b^{(n)}) < \delta_n \text{ ва } |f(a^{(n)}) - f(b^{(n)})| \geqslant \varepsilon,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

бўлади.

Модомики, M — чегараланган тўплам ва $a^{(n)} \in M$ $(n = 1, 2 \ldots)$ экан, унда Больцано — Вейерштрасс теоремасига кўра $\{a^{(n)}\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий $\{a^{(n_k)}\}$ кетма-кетлик ажратиш мумкин:

$$\lim_{k\to\infty} a^{(n_k)} = a^0. \tag{12.33}$$

M ёпиқ тўплам бўлгани сабабли $a^0 \in M$ бўлади. Юқоридаги $\{b^{(n)}\}$ кетма-кетликдан ажратилган $\{b^{(n_k)}\}$ қисмий кетма-кетликнинг лимити ҳам a^0 га тенг бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ушбу

$$\rho(b^{(n_k)}, a^0) \leqslant \rho(b^{(n_k)}, a^{(n_k)}) + \rho(a^{(n_k)}, a^0) < \delta_{n_k} + \rho(a^{(n_k)}, a^0)$$

тенгсизликдаги δ_{n_k} ва $\rho(a^{(n_k)}, a^0)$ лар учун (12.32) ва (12.33) муносабатларга кўра $k \to \infty$ да

$$\delta_{n_k} \to 0, \ \rho(a^{(n_k)}, a^0) \to 0$$

бўлишини эътиборга олиб, $k \to \infty$ да $\rho(b^{(n_k)}, a^0) \to 0$ эканини топамиз.

Шундай қилиб, $k \to \infty$ да

$$a^{(n_k)} \to a^0, \quad b^{(n_k)} \to a^0.$$

Қаралаётган $f(x)$ функциянинг, шартга кўра M тўпламда узлуксиз эканлигидан

$$f(a^{(n_k)}) \to f(a^0), \ f(b^{(n_k)}) \to f(a^0)$$

бўлиб, улардан эса

$$f(b^{(n_k)}) - f(a^{(n_k)}) \to 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\forall\, n_k$ лар учун

$$|f(b^{(n_k)}) - f(a^{(n_k)})| \geqslant \varepsilon$$

деб қилинган фаразга зиддир. Бундай зиддиятнинг келиб чиқишига сабаб $f(x)$ функциянинг M тўпламда текис узлуксизлик шартини қаноатлантирмайди деб олинишидир. Демак, функция M тўпламда текис узлуксиз. Теорема исбот бўлади.

Бирор $M \subset R^m$ тўплам берилган бўлсин. Бу тўпламда ихтиёрий иккита x' ва x'' нуқталарни олиб, улар орасидаги $\rho(x', x'')$ масофани топамиз. Равшанки, масофа олинган нуқталарга боғлиқ бўлади. Агар x' ва x'' нуқталарни M тўпламда ўзгартира борсак, унда $\{\rho(x', x'')\}$ тўплам ҳосил бўлади. Одатда, бу тўпламнинг аниқ юқори чегараси $\sup\{\rho(x', x'')\}$ $(x' \in M, x'' \in M)$ M тўпламнинг *диаметри* деб аталади ва у $d(M)$ каби белгиланади:

$$d(M) = \sup\{\rho(x', x'')\} \ (x' \in M, \ x'' \in M).$$

$f(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин.

12.31-таъриф. Ушбу

$$\sup\{|f(x'') - f(x')|\} \ (x' \in M, \ x'' \in M)$$

миқдор $f(x)$ функциянинг M тўпламдаги *тебраниши* деб аталади ва у $\omega(f; M)$ каби белгиланади:

$$\omega(f; M) = \sup\{|f(x'') - f(x')|\} \ (x' \in M, \ x'' \in M).$$

Юқорида келтирилган Кантор теоремасидан муҳим натижа келиб чиқади.

12.2-натижа. $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ тўпламда берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам M тўпламни чекли сондаги M_k тўпламларга шундай ажратиш мумкинки,

$$\bigcup_k M_k = M, \ M_k \cap M_j = \varnothing \ (k \neq j) \text{ ва } \omega(f; \ M_k) \leqslant \varepsilon$$

бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпламда узлуксиз бўлсин. Кантор теоремасига кўра бу функция M тўпламда текис узлуксиз бўлади. Бинобарин, $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиладики, $\rho(x', x'') < \delta$ бўлган $\forall x', x''$ лар учун $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ бўлади, M тўпламни диаметрлари шу δ бўлган M_k тўпламларга ажратамиз. Равшанки, бу ҳолда $\forall x' \in M_k$, $\forall x'' \in M_k$ нуқталар учун $\rho(x', x'') < \delta$ бўлади ва демак,

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан эса

$$\sup \{ |f(x'') - f(x')| \} \leqslant \varepsilon,$$

яъни

$$\omega(f; \ M_k) \leqslant \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Натижа исбот бўлди.

Биз ушбу параграфда функциянинг текис узлуксизлиги билан боғлиқ бўлган функциянинг узлуксизлик модули тушунчаси билан ҳам танишамиз.

$f(x)$ функция $M \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. $\forall \delta > 0$ сонни олиб, M тўпламнинг $\rho(x', x'') \leqslant \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' ($x' \in M$, $x'' \in M$) нуқталардаги функция қийматларидан тузилган $|f(x'') - f(x')|$ айирмаларни қарайлик.

12.32-таъриф. Ушбу

$$|f(x'') - f(x')| \quad (x' \in M, \ x'' \in M)$$

айирмалар тўпламининг аниқ юқори чегараси

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} \{ |f(x'') - f(x')| \} \quad (x' \in M, \ x'' \in M)$$

$f(x)$ функциянинг M тўпламдаги *узлуксизлик модули* деб аталади ва $\omega(f; \ \delta)$ каби белгиланади:

$$\omega(f; \ \delta) = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} \{ |f(x'') - f(x')| \} \ (x' \in M, \ x'' \in M).$$

Бу таърифдан, функциянинг узлуксизлик модули δ нинг манфий бўлмаган функцияси эканини кўрамиз. Бундан ташқари $\delta_1 > \delta_2 > 0$ бўлганда ушбу

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta_1} \{ |f(x'') - f(x')| \} \geqslant \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta_2} \{ |f(x'') - f(x')| \}$$

($x' \in M$, $x'' \in M$) тенгсизлик ўринли бўлиб, ундан

$$\omega(f; \ \delta_1 \geqslant \omega(f; \ \delta_2)$$

эканлиги келиб чиқади. Бу эса $\omega(f; \ \delta)$ — δ нинг ўсувчи функцияси эканини билдиради.

Энди $f(x)$ функциянинг текис узлуксизлиги билан унинг узлуксизлиги модули орасидаги боғланишни ифодалайдиган теоремани келтирамиз.

12. 18-теорема. *$f(x)$ функциянинг $M \subset R^m$ тўпламда текис узлуксиз бўлиши учун*

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(f;\ \delta) = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

13-БОБ

КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

Ушбу бобда биз кўп ўзгарувчили функциялар дифференциал ҳисоби билан шуғулланамиз. Киритиладиган ва ўрганиладиган ҳосилалар ва дифференциаллар тушунчалари бир ўзгарувчининг функциялари учун киритилган мос тушунчаларнинг тегишлича умумлаштирилишидан иборат бўлади. Айни пайтда, биз кўрамизки, кўп ўзгарувчили функциялар учун хос бўлган бир қанча янги тушунчалар ҳам (йўналиш бўйича ҳосила, тўла дифференциал ва ҳоказо) ўрганилади.

1-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари

1. Функция хусусий ҳосиласининг таърифлари. $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция очиқ M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлсин. Бу тўпламда $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқта олиб, унинг биринчи координатаси x_1^0 га шундай Δx_1 ($\Delta x_1 \neq 0$) орттирма берайликки, $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in M$ бўлсин. Натижада $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция ҳам $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтада x_1 ўзгарувчиси бўйича

$$\Delta_{x_1} f = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$$

хусусий орттирмага эга бўлади.

Ушбу

$$\frac{\Delta x_1 f}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)}{\Delta x_1} \tag{13.1}$$

нисбатни қарайлик. Равшанки, бу нисбат Δx_1 нинг функцияси бўлиб, у Δx_1 нинг нолдан фарқли қийматларида аниқланган.

13.1-таъриф. Агар $\Delta x_1 \to 0$ да (3.1) нисбатнинг лимити

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_1 f}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)}{\Delta x_1}$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтадаги x_1 ўзгарувчиси бўйича *хусусий ҳосиласи* деб аталади ва

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_1},\ f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0),\ f'_{x_1}$$

белгиларнинг бири билан белгиланади. Демак,

$$f'_{x_1}(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_1 f}{\Delta x_1}.$$

Агар $x_1^0 + \Delta x_1 = x_1$ деб олсак, унда $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$ ва $\Delta x_1 \to 0$ да $x_1 \to x_1^0$ бўлиб, натижада

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} = \frac{\Delta x_1 f}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)}{\Delta x_1} =$$

$$= \lim_{x_1 \to x_1^0} \frac{f(x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)}{x_1 - x_1^0}$$

бўлади. Демак, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтадаги x_1 ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласини ушбу

$$\frac{f(x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)}{x_1 - x_1^0}$$

нисбатнинг $x_1 \to x_1^0$ даги лимити сифатида таърифлаш мумкин.

Худди шунга ўхшаш $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг бошқа ўзгарувчилари бўйича хусусий ҳосилалари таърифланади:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{\Delta x_2 f}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)}{\Delta x_2}$$

. . . .

$$\frac{\partial f}{\partial x_m} = \lim_{\Delta x_m \to 0} \frac{\Delta x_m f}{\Delta x_m} = \lim_{\Delta x_m \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)}{\Delta x_m}.$$

Демак, кўп ўзгарувчили $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг бирор $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтада x_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласини таърифлашда бу функциянинг x_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ ўзгарувчидан бошқа барча ўзгарувчилари ўзгармас деб ҳисобланар экан. Шундай қилиб, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_m}$ 1-қисм, 6-боб, 1-§ да ўрганилган ҳосила — бир ўзгарувчили функция ҳосиласи каби эканлигини кўрамиз. Демак, кўп ўзгарувчили функцияларнинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблашда бир ўзгарувчили функциянинг ҳосиласини ҳисоблашдаги маълум бўлган қоида ва жадваллардан тўлиқ фойдаланиш мумкин.

Мисоллар. 1. $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ бўлсин. Бу функциянинг $\forall (x_1, x_2) \in R^2$ нуқтадаги хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

бўлади.

2. $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} e^{-\frac{x_1 + x_2}{2}}$ функциянинг $(x_1, x_2) \in R^2$ $(x_2 > 0)$ нуқтадаги хусу-

сий ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{x_2}}e^{-\frac{x_1+x_2}{2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{x_2^3}}e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{x_2}}e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{x_2}}e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

3. Ушбу

$$f(x_1,\ x_2)=\begin{cases}\dfrac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, & \text{агар } (x_1,\ x_2)\neq(0,\ 0) \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } (x_1,\ x_2)=(0,\ 0) \text{ бўлса}\end{cases}$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Айтайлик, $(x_1,\ x_2)\neq(0;\ 0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{2x_1\ x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)=\frac{2x_2(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\ 2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^2}=\frac{2x_2(x_2^2-x_1^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{2x_1\ x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)=\frac{2x_1(x_1^2+x_2^2)-2x_1x_2\ 2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}=\frac{2x_1(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$

бўлади.

Энди $(x_1,\ x_2)=(0,\ 0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{\partial f\ (0,0)}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(\Delta x_1,\ 0)=f\ (0,0)}{\Delta x_1}=0,$$

$$\frac{\partial f\ (0,0)}{\partial x_2}=\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{f\ (0,\ \Delta x_2)-f\ (0,0)}{\Delta x_2}=0$$

бўлади.

Демак, берилган $f\ (x_1,\ x_2)$ функция $\forall\ (x_1,\ x_2)\in R^2$ да хусусий ҳосилаларга эга.

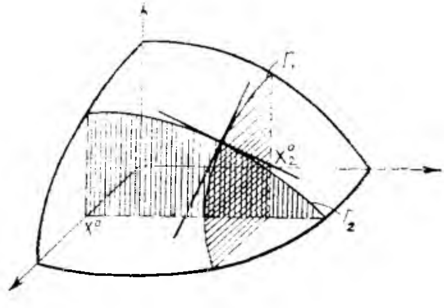
2. Хусусий ҳосиланинг геометрик маъноси. Соддалик учун икки ўзгарувчили функция хусусий ҳосилаларининг геометрик маъносини келтирамиз.

$f\ (x_1,\ x_2)$ функция очиқ $M\ (M\subset R^2)$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_1^0,\ x_2^0)\in M$ бўлсин. Бу функция $(x_1^0,\ x_2^0)$ нуқтада $f'_{x_1}\ (x_1^0,\ x_2^0)$, $f'_{x_2}\ (x_1^0,\ x_2^0)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Таърифга кўра $f'_{x_1}\ (x_1^0,\ x_2^0)$ ва $f'_{x_2}\ (x_1^0,\ x_2^0)$ хусусий ҳосилалар мос равишда ушбу $y_1=f\ (x_1,\ x_2^0)$ ва $y_2=f\ (x_1^0,\ x_2)$ бир ўзгарувчили функцияларнинг x_1^0 ва x_2^0 даги ҳосилаларидан иборат.

Фараз қилайлик, $y=f\ (x_1,\ x_2)$ функциянинг графиги 11-чизмада кўрсатилган сиртни тасвирласин. Унда $y_1=f\ (x_1,\ x_2^0)$ ва $y_2=f\ (x_1^0,\ x_2)$

функцияларнинг графиклари мос равишда $y = f(x_1, x_2)$ сирт билан $x_2 = x_2^0$ текисликнинг ҳамда шу сирт билан $x_1 = x_1^0$ текисликнинг кесишишидан ҳосил бўлган Γ_1 ва Γ_2 чизиқлардан иборат.

Маълумки, бир ўзгарувчили $u = \varphi(x)$ функциянинг бирор x_0 ($x_0 \in R$) нуқтадаги ҳосиласининг геометрик маъноси (1-қисм, 6-боб, 1-§) бу функция тасвирлаган эгри чизиққа $(x_0, \varphi(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентидан, яъни уринманинг Ox ўқи билан ташкил этган бурчакнинг тангенсидан иборат эди. $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ ва $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ хусусий ҳосилалар мос равишда Γ_1 ва Γ_2 эгри чизиқларга (x_1^0, x_2^0) нуқтада ўтказилган уринмаларнинг Ox_1 ва Ox_2 ўқлар билан ташкил этган бурчакнинг тангенсини билдиради. Демак, $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ ва $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ хусусий ҳосилалар $y = f(x_1, x_2)$ сиртнинг мос равишда Ox_1 ва Ox_2 ўқлар йўналиши бўйича ўзгариш даражасини кўрсатади.



11- чизма

Функциянинг узлуксиз бўлиши билан унинг хусусий ҳосилага эга бўлиши орасидаги боғланиш. $f(x)$ функция очиқ M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in M$ нуқтада чекли $f'_{x_1}(x^0)$ хусусий ҳосилага эга бўлсин. Таърифга кўра

$$f'_{x_1}(x^0) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1}$$

бўлиб, ундан

$$\Delta_{x_1} f = f'_{x_1}(x^0) \cdot \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1$$

бўлишини топамиз, бунда $\Delta x_1 \to 0$ да $\alpha_1 \to 0$. Натижада

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \Delta_{x_1} f = \lim_{\Delta x_1 \to 0} [f'_{x_1}(x^0) \cdot \Delta x_1 + \alpha_1 \Delta x_1] = 0$$

бўлади. Бу эса $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада x_1 ўзгарувчиси бўйича хусусий узлуксиз эканлигини билдиради. Демак, $f(x)$ функция x^0 нуқтада чекли $f'_{x_k}(x^0)$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) хусусий ҳосилага эга бўлса, $f(x)$ функция шу нуқтада мос x_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) ўзгарувчилари бўйича хусусий узлуксиз бўлади.

Бироқ кўп ўзгарувчили $f(x)$ функциянинг бирор x^0 нуқтада барча хусусий ҳосилаларга эга бўлишидан, унинг шу нуқтада узлуксиз (барча ўзгарувчилари бўйича бир йўла узлуксиз) бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Масалан, ушбу параграфнинг 1-пунктида келтирилган 3-мисолдаги $f(x_1, x_2)$ функция $\forall (x_1, x_2) \in R^2$ нуқтада $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлса-да, бу функция (0,0) нуқтада узлуксиз (иккала ўзгарувчиси бўйича бир йўла узлуксиз) эмас (қаралсин, 12-боб, 1-§).

2- §. Кўп ўзгарувчили функцияларнинг дифференциалланувчилиги

1. Функциянинг дифференциалланувчилиги тушунчаси. Дифференциалланувчиликнинг зарурий шарти. $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция очиқ M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлсин. Бу тўпламда $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)=x^0$ нуқта билан бирга $(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2, \ldots, x_m^0+\Delta x_m)$ нуқтани олиб, берилган функциянинг тўла орттирмаси

$$\Delta f(x^0)=f(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2, \ldots, x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$$

ни қараймиз.

Равшанки, функциянинг $\Delta f(x^0)$ орттирмаси аргументлар орттирмалари $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ бўлиб, кўпчилик ҳолларда $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ лар билан Δf орасидаги боғланиш мураккаб бўлади. Табиийки, бунда $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ ларга кўра Δf ни аниқ ёки тақрибий ҳисоблаш қийинлашади. Натижада орттирмаси $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ орттирмалар билан соддароқ боғланишда бўлган функцияларни ўрганиш масаласи юзага келади.

13.2-таъриф. Агар $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги $\Delta f(x^0)$ орттирмасини

$$\Delta f(x^0)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\ldots+A_m\Delta x_m+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+ \\ +\ldots+\alpha_m\Delta x_m \qquad (13.2)$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, $f(x)$ функция x^0 *нуқтада дифференциалланувчи* деб аталади, бунда $A_1, A_2, \ldots, A_m$ лар $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ бўлмаган ўзгармаслар, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ лар эса $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ ва $\Delta x_1\to 0$, $\Delta x_2\to 0, \ldots, \Delta x_m\to 0$ да $\alpha_1\to 0, \alpha_2\to 0, \ldots, \alpha_m\to 0$ ($\Delta x_1=\Delta x_2=\ldots=\Delta x_m=0$ бўлганда $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0$ деб олинади).

Агар $f(x)$ функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, $f(x)$ функция *M тўпламда дифференциалланувчи* деб аталади.

Мисол. Ушбу $f(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2$ функцияни қарайлик. Бу функция $\forall$ $(x_1^0, x_2^0)\in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам, (x_1^0, x_2^0) нуқтада берилган функциянинг орттирмаси

$$\Delta f=f(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2)-f(x_1^0, x_2^0)=(x_1^0+\Delta x_1)^2+(x_2^0+\Delta x_2)^2-$$
$$-(x_1^0)^2-(x_2^0)^2=2x_1^0\Delta x_1+2x_2^0\Delta x_2+(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2$$

бўлиб, унда $A_1=2x_1^0$, $A_2=2x_2^0$, $\alpha_1=\Delta x_1$, $\alpha_2=\Delta x_2$ дейилса, натижада

$$\Delta f=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2$$

бўлади. Бу эса берилган функциянинг $\forall$ $(x_1, x_2)\in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи эканлигини билдиради.

$f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчилик шарти (13.2) ни қуйидаги

$$\Delta f(x^0)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\ldots+A_m\Delta x_m+o(\rho) \qquad (13.3)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкинлигини кўрсатамиз, бунда $\rho(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = x^0$ ва $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m)$ нуқталар орасидаги масофа:

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}.$$

Равшанки,

$$\Delta x_1 \to 0,\ \Delta x_2 \to 0,\ \ldots,\ \Delta x_m \to 0 \Rightarrow \rho \to 0$$

ва

$$\rho \to 0 \Rightarrow \Delta x_1 \to 0,\ \Delta x_2 \to 0,\ \ldots,\ \Delta x_m \to 0$$

бўлади.

Энди $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$ да (13.2) муносабатдаги $\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m$ миқдор ρ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор эканлигини кўрсатамиз. Агар

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m = \rho\left(\alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{\rho} + \ldots + \alpha_m \frac{\Delta x_m}{\rho}\right) \quad (\rho \neq 0)$$

муносабатда

$$\frac{|\Delta x_k|}{\rho} \leqslant 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$|\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m| \leqslant (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_m|)\rho$$

бўлади. Демак,

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho).$$

Шундай қилиб, (13.2) шартнинг ўринли бўлишдан (13.3) нинг ўринли бўлиши келиб чиқди.

Агар $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчилик шарти (13.3) кўринишида ўринли бўлса, бундан бу шартнинг (13.2) кўриниши ҳам ўринли бўлиши келиб чиқади. Шуни исботлайлик.

Агар $\rho = 0$ бўлса, унда $\Delta x_1 = \Delta x_2 \ldots = \Delta x_m = 0$ бўлади ва (13.3) дан (13.2) келиб чиқади.

$\rho \neq 0$ бўлсин. Унда $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ ларнинг барчаси бир йўла нолга тенг бўлмайди. Шуни эътиборга олиб қуйидагини топамиз:

$$o(\rho) = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho} \cdot \Delta x_1 + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_2}{\rho} \cdot \Delta x_2 + \ldots + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_m}{\rho} \cdot \Delta x_m = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m,$$

бунда

$$\alpha_k = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_k}{\rho} \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

бўлиб, $\rho \to 0$, яъни $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, ..., $\Delta x_m \to 0$ да $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$, ..., $\alpha_m \to 0$.

Демак, $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчилигининг (13.2) ва (13.3) шартлари ўзаро эквивалентдир.

Энди дифференциалланувчи функциялар ҳақида иккита теорема келтирамиз.

13.1-теорема. *Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функция шу нуқтада узлуксиз бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда таърифга кўра функция орттирмаси учун

$$\Delta f(x^0) = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m$$

бўлади, бунда $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — ўзгармас, $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, ..., $\Delta x_m \to 0$ да $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$, ..., $\alpha_m \to 0$.

Юқоридаги тенгликдан

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta f(x^0) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада узлуксизлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

13.2. теорема. *Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг шу нуқтада барча хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}(x^0)$, $f'_{x_2}(x^0)$, ..., $f'_{x_m}(x^0)$ мавжуд ва улар мос равишда* (13.2) *муносабатдаги $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ларга тенг бўлади, яъни*

$$f'_{x_1}(x^0) = A_1,\ f'_{x_2}(x^0) = A_2,\ \ldots,\ f'_{x_m}(x^0) = A_m.$$

Исбот. $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда таърифга кўра функция орттирмаси учун

$$\Delta f(x^0) = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m \tag{13.2}$$

бўлади. Бу тенгликда

$$\Delta x_1 \neq 0,\ \Delta x_2 = \Delta x_3 = \ldots = \Delta x_m = 0$$

деб олсак, унда (13.2) ушбу

$$\Delta_{x_1} f(x^0) = A_1\Delta x_1 + \alpha_1 \cdot \Delta x_1$$

кўринишни олади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини Δx_1 га бўлиб, сўнг $\Delta x_1 \to 0$ да лимитга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x^0)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} (A_1 + \alpha_1) = A_1.$$

Демак,

$$f'_{x_1}(x^0) = A_1.$$

Худди шунга ўхшаш $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада $f'_{x_2}(x^0)$, $f'_{x_3}(x^0)$, ..., $f'_{x_m}(x^0)$ хусусий ҳосилаларининг мавжудлиги ҳамда

$$f'_{x_2}(x^0) = A_2,\ f'_{x_3}(x^0) = A_3,\ \ldots,\ f'_{x_m}(x^0) = A_m$$

эканлиги кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

13.1-натижа. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда

$$\Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x^0)\Delta x_1 + f'_{x_2}(x^0)\Delta x_2 + \ldots + f'_{x_m}(x^0)\Delta x_m + o(\rho)$$

бўлади.

13.1-эслатма. $f(x)$ функциянинг бирор x^0 нуқтада барча хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}(x^0)$, $f'_{x_2}(x^0)$, ..., $f'_{x_m}(x^0)$ нинг мавжуд бўлишидан, функциянинг шу нуқтада дифференциалланувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Масалан, ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 \cdot x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{агар } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция (0, 0) нуқтада хусусий ҳосилаларга эга:

$$f'_{x_1}(0, 0) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(\Delta x_1, 0) - f(0, 0)}{\Delta x_1} = 0,$$

$$f'_{x_2}(0, 0) = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(0, \Delta x_2) - f(0, 0)}{\Delta x_2} = 0.$$

Берилган функциянинг (0, 0) нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(0, 0) = f(\Delta x_1, \Delta x_2) - f(0, 0) = \frac{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}}$$

бўлиб, уни (13.2) ёки (13.3) кўринишида ифодалаб бўлмайди. Буни исботлаш мақсадида, тескарисини, яъни $f(x_1, x_2)$ функция (0, 0) нуқтада дифференциалланувчи бўлсин деб фараз қилайлик. Унда

$$\Delta f(0, 0) = f'_{x_1}(0, 0)\Delta x_1 + f'_{x_2}(0, 0)\Delta x_2 + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 = \\ = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 \tag{13.4}$$

бўлиб, бу муносабатда $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$ да $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$ бўлади. Демак,

$$\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}} = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2. \tag{13.5}$$

Маълумки, Δx_1 ва Δx_2 лар ихтиёрий орттирмалар. Жумладан, $\Delta x_1 = \Delta x_2$ бўлганда (13.5) тенглик ушбу

$$\frac{\Delta x_1}{\sqrt{2}} = \Delta x_1 (\alpha_1 + \alpha_2)$$

кўринишга келиб, ундан эса

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

бўлиши келиб чиқади. Натижада $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$ да α_1 ва α_2 миқдорларнинг нолга интилмаслигини топамиз. Бу эса $f(x_1, x_2)$ функциянинг (0, 0) нуқтада дифференциалланувчи бўлсин деб қилинган фаразга зид. Демак, берилган функция (0, 0) нуқтада хусусий ҳосилаларга эга, аммо у шу нуқтада дифференциалланувчилик шартини бажармайди.

Шундай қилиб, функциянинг бирор нуқтада барча хусусий ҳосилаларга эга бўлиши, функциянинг шу нуқтада дифференциалланувчи бўлишининг з а р у р и й шартидан иборат экан.

2. Ф у н к ц и я д и ф ф е р е н ц и а л л а н у в ч и л и г и н и н г е т а р л и ш а р т и. Энди кўп ўзгарувчили функция дифференциалланувчи бўлишининг етарли шартини келтирамиз.

$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция очиқ M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб. $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқта шу тўпламга тегишли бўлсин.

13.3-т е о р е м а. *Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтанинг бирор атрофида барча ўзгарувчилари бўйича хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар шу x^0 нуқтада узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади.*

И с б о т. $x^0 \in M$ нуқтани олиб, унинг координаталарига мос равишда шундай $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ орттирмалар берайликки, $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m)$ нуқта x^0 нуқтанинг айтилган атрофига тегишли бўлсин. Сўнг функция тўла орттирмаси

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$$

ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\Delta f(x^0) = [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m)] + [f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + \Delta x_3, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m)] + \ldots + [f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_m^0)].$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир айирма тегишли битта аргументнинг функцияси орттирмаси сифатида қаралиши мумкин. Унинг учун Лагранж теоремасини татбиқ қила оламиз, чунки теоремамизда келтирилган шартлар Лагранж теоремаси шартларининг бажарилишини таъминлайди:

$$\begin{aligned} \Delta f(x^0) = {} & f'_{x_1}(x_1^0 + \theta_1\Delta_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) \cdot \Delta x_1 + \\ & + f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + \theta_2\Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) \cdot \Delta x_2 + \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \\ & + f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \theta_m \Delta x_m) \cdot \Delta x_n, \end{aligned} \tag{13.6}$$

бунда

$$0 < \theta_i < 1 \; (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Одатда (13.6) *функция орттирмасининг формуласи* деб аталади.

Шартга кўра x^0 нуқтада $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилалар узлуксиз. Шунга кўра

$$f'_{x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m + \Delta x_m) = f'_{x_1}(x^0) + \alpha_1,$$
$$f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) = f'_{x_2}(x^0) + \alpha^2,$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \theta_m \Delta x_m) = f'_{x_m}(x^0) + \alpha_m \qquad (13.7)$$

бўлиб, унда $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$ да $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0, \ldots, \alpha_m \to 0$ бўлади.

(13.6) ва (13.7) муносабатлардан

$$\Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x_0)\Delta x_1 + f'_{x_2}(x^0)\Delta x_2 + \ldots + f'_{x_m}(x^0)\Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + $$
$$+ \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m \Delta x_m$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчи эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Бир ва кўп ўзгарувчили функцияларда функциянинг дифференциалланувчилиги тушунчаси киритилди (қаралсин, 1- қисм, 6- боб, 4- § ҳамда ушбу бобнинг 2- §.) Уларни солиштириб қуйидаги хулосаларга келамиз.

1) Бир ўзгарувчили функцияларда ҳам, кўп ўзгарувчили функцияларда ҳам функциянинг бирор нуқтада дифференциалланувчи бўлишидан унинг шу нуқтада узлуксиз бўлиши келиб чиқади. Демак, бир ва кўп ўзгарувчили функцияларда функциянинг дифференциалланувчи бўлиши билан унинг узлуксиз бўлиши орасидаги муносабат бир хил.

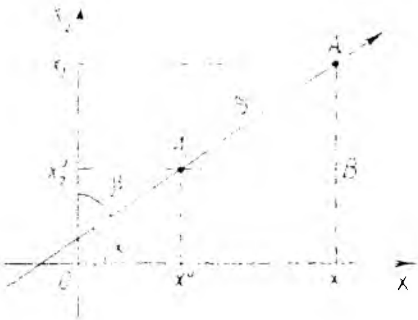
2) Маълумки, бир ўзгарувчили функцияларда функциянинг бирор нуқтада дифференциалланувчи бўлишидан унинг шу нуқтада чекли ҳосилага эга бўлиши келиб чиқади ва, аксинча, функциянинг бирор нуқтада чекли ҳосилага эга бўлишидан унинг шу нуқтада дифференциалланувчи бўлиши келиб чиқади.

Кўп ўзгарувчили функцияларда функциянинг бирор нуқтада дифференциалланувчи бўлишидан унинг шу нуқтада барча чекли хусусий ҳосилаларга эга бўлиши келиб чиқади. Бироқ, функциянинг бирор нуқтада барча чекли хусусий ҳосилаларга эга бўлишидан унинг шу нуқтада дифференциалланувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Демак, бир ва кўп ўзгарувчили функцияларда функциянинг дифференциалланувчи бўлиши билан унинг ҳосилага (хусусий ҳосилага) эга бўлиши орасидаги муносабат бир хил эмас экан.

3- §. Йўналиш бўйича ҳосила

Маълумки, бир ўзгарувчили $y = f(x)$ функциянинг $(x \in R, \; y \in R)$ $\dfrac{df}{dx}$ ҳосиласи бу функциянинг ўзгариш тезлигини билдирар эди. Кўп ўзгарувчили $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг $((x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m,$



12- чизма

$y \in R$) хусусий ҳосилалари ҳам бир ўзгарувчили функциянинг ҳосиласи каби эканлигини эътиборга олиб, бу $\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}, \ldots, \frac{df}{dx_m}$ хусусий ҳосилалар ҳам $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг мос равишда Ox_1 Ox_2, $\ldots$, Ox_m ўқлар бўйича (R^m фазода) ўзгариш тезлигини ифодалайди деб айтиш мумкин.

Энди функциянинг ихтиёрий йўналиш бўйича ўзгариш тезлигини ифодаловчи тушунча билан танишайлик. Соддалик учун икки ўзгарувчили функцияни қараймиз.

$y = f(x_1, x_2) = f(A)$ функция очиқ M тўпламда ($M \in R^2$) берилган бўлсин. Бу тўпламда ихтиёрий $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтани олиб, у орқали бирор тўғри чизиқ ўтказайлик ва ундаги икки йўналишдан бирини мусбат йўналиш, иккинчисини манфий йўналиш деб қабул қилайлик. Бу йўналган тўғри чизиқни l дейлик.

α ва β деб l йўналган тўғри чизиқ мусбат йўналиши билан мос равишда Ox_1 ва Ox_2 координата ўқларининг мусбат йўналиши орасидаги бурчакларни олайлик (12-чизма). Унда ΔA_0AB дан

$$\frac{x_1 - x_1^0}{\rho} = \cos\alpha, \quad \frac{x_2 - x_2^0}{\rho} = \cos\beta$$

бўлиши келиб чиқади. Одатда $\cos\alpha$ ва $\cos\beta$ лар l тўғри чизиқнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади.

l тўғри чизиқда A_0 нуқтадан фарқли ва M тўпламга тегишли бўлган А нуқтани ($A = (x_1, x_2)$) олайликки, A_0A кесма M тўпламга тегишли бўлсин. Агарда A нуқта A_0 га нисбатан l тўғри чизиқнинг мусбат йўналиши томонида бўлса (шаклдагидек), у ҳолда A_0A кесма узунлиги $\rho(A_0, A)$ ни мусбат ишора билан, манфий йўналиши томонида жойлашган бўлса, манфий ишора билан олишга келишайлик.

13.3-таъриф. A нуқта l йўналган тўғри чизиқ бўйлаб A_0 нуқтага интилганда ($A \to A_0$) ушбу нисбат

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)}{\rho((x_1^0, x_2^0), (x_1, x_2))}$$

нинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x_1, x_2) = f(A)$ функциянинг $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтадаги *l йўналиш бўйича ҳосиласи* деб аталади ва

$$\frac{df(A_0)}{dl} \quad \text{ёки} \quad \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{dl}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{df}{dl} = \lim_{A \to A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)}$$

Энди $f(x_1, x_2)$ функциянинг l йўналиш бўйича ҳосиласининг мавжудлиги ҳамда уни топиш масаласи билан шуғулланамиз.

13.4-теорема. *$f(x_1, x_2)$ функция очиқ M тўпламда $(M \subset R^2)$ берилган бўлсин. Агар бу функция $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтада $((x_1^0, x_2^0) \in \in M)$ дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада ҳар қандай йўналиш бўйича ҳосилага эга ва*

$$\frac{df(A_0)}{dl} = \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{dl} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{dx_1}\cos\alpha + \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{\partial x^2}\cos\beta. \qquad (13.8)$$

Исбот. Шартга кўра $f(x_1, x_2)$ функция $A_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак, функция орттирмаси

$$f(A) - f(A_0) = f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)$$

учун

$$f(A) - f(A_0) = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{\partial x}(x_2 - x_2^0) + o(\rho) \qquad (13.9)$$

бўлади, бунда

$$\rho = \rho(A_0, A) = \sqrt{(x_1 - x_1^0) + (x_2 - x_2^0)^2}.$$

(13.9) тенгликнинг ҳар икки томонини $\rho = \rho(A_0, A)$ га бўлсак, у ҳолда

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A^0, A)} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1 - x_1^0}{\rho} + \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{dx_2} \cdot \frac{x_2 - x_2^0}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho} \qquad (13.10)$$

бўлади.

Натижада (13.10) тенглик ушбу

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{dx_2}\cos\beta + \frac{o(\rho)}{\rho}$$

кўринишга келади. Бу тенгликда $A \to A_0$ да (яъни $\rho \to 0$ да) лимитга ўтсак, унда

$$\lim_{A \to A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho} = \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}\cos\beta$$

бўлади. Демак,

$$\frac{df(A_0)}{dl} = \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{dl_1} = \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{df(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}\cos\beta$$

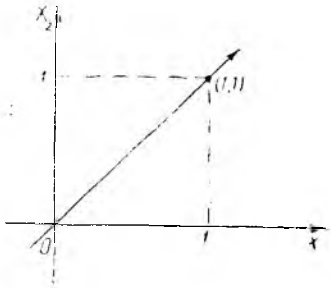
Бу эса теоремани исботлайди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$$

функцияни қарайлик.

l биринчи квадратнинг (1, 1) нуқтадан ўтувчи ва (0, 0) нуқтадан (1, 1) нуқта-



13- чизма

га қараб йўналган биссектрисасидан иборат (13-чизма). Берилган функциянинг $A_0 = (1, 1)$ нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.

Берилган

$$f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$$

функциянинг $A_0 = (1, 1)$ нуқтада дифференциалланувчи эканлиги равшан. Унда юқорида келтирилган (13.8) формуладан фойдаланиб,

$$\frac{df(1, 1)}{dl} = \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x_1}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x_2} \times$$

$$\times \cos\frac{\pi}{4} = \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right)_{\substack{x_1=1\\x_2=2}} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\frac{df(1, 1)}{dl} = 0.$$

Қаралаётган функциянинг $A_0 = (1, 1)$ нуқтадаги Ox_1 ва Ox_2 координата ўқлари бўйича ҳосилалари мос равишда

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}$$

бўлади.

2. Қуйидаги

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

функциянинг $A_0 = (0, 0)$ нуқтада исталган l йўналиш бўйича ҳосиласи

$$\frac{df(0, 0)}{dl} = 1$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1$$

бўлиб,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = 1$$

бўлади.

3. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

функциянинг (0, 0) нуқтада Ox_1 координата ўқи бўйича ҳосиласи 1 га тенг бўлиб, Ox_2 *координата ўқи бўйича ҳосиласи мавжуд эмас.*

13.2- эслатма. Функция бирор нуқтада дифференциалланувчилик шартини қаноатлантирмаса ҳам, у шу нуқтада бирор йўналиш бўйича ва ҳатто ҳар қандай йўналиш бўйича ҳосилага эга бўлиши мумкин. Масалан, ушбу

$$f(x_1,\ x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

функция $A_0 = (0,\ 0)$ нуқтада дифференциалланувчилик шартини бажармайди. Юқорида кўрдикки, бу функция (0, 0) нуқтада исталган йўналиш бўйича ҳосилага эга.

4- §. Кўп ўзгарувчили мураккаб функцияларнинг дифференциалланувчилиги. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

$y = f(x_1, x_2,\ \ldots,\ x_m)$ функция $M\ (M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, $x_1,\ x_2\ \ldots,\ x_m$ ўзгарувчиларнинг ҳар бири ўз навбатида $t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_k$ ўзгарувчиларнинг $T\ (T \subset R^k)$ тўпламда берилган функцияси бўлсин:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k),\\
x_2 &= \varphi_2(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k),\\
&\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\\
x_m &= \varphi_m(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k).
\end{aligned} \tag{13.11}$$

Бунда $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k) \in T$ бўлганда унга мос $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m) \in M$ бўлсин. Натижада ушбу

$$y = f(\varphi_1(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k),\ \varphi_2(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k),\ \ldots,\ \varphi_m(t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_k)) =$$
$$= F(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k)$$

мураккаб функцияга эга бўламиз.

1. Мураккаб функциянинг дифференциалланувчилиги.

13.5-теорема. *Агар (13.11) функцияларнинг ҳар бири $(t_1^0,\ t_2^0,\ \ldots,\ t_k^0) \in T$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $y = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ функция эса мос $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0) \in M$ нуқтада $(x_1^0 = \varphi_1(t_1^0,\ t_2^0,\ \ldots\ t_k^0),\ x_2^0 = \varphi_2(t_1^0,\ t_2^0,\ \ldots,\ t_k^0),\ \ldots,\ x_m^0 = \varphi_m(t_1^0,\ t_2^0,\ \ldots,\ t_k^0))$ дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда мураккаб функция $F(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m)$ ҳам $(t_1^0,\ t_2^0,\ \ldots,\ t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади.*

Исбот. $(t_1^0,\ t_2^0,\ \ldots,\ t_k^0) \in T$ нуқтани олиб, унинг координаталарига мос равишда шундай $\Delta t_1,\ \Delta t_2,\ \ldots,\ \Delta t_k$ орттирмалар берайликки, $(t_1^0 + \Delta t_1,\ t_2^0 + \Delta t_2,\ \ldots,\ t_k^0 + \Delta t_k) \in T$ бўлсин. У ҳолда (13.11) ифодадаги ҳар бир функция ҳам $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_m$ орттирмаларга ва ниҳоят $y = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ функция Δf орттирмага эга бўлади.

Шартга кўра (13.11) ифодадаги функцияларнинг ҳар бири $(t_1^0,\ t_2^0,\ \ldots,\ t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак,

$$\Delta x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\Delta t_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2}\Delta t_2 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k}\Delta t_k + o(\rho),$$
$$\Delta x_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t_1}\Delta t_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2}\Delta t_2 + \ldots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k}\Delta t_k + o(\rho), \qquad (13.12)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\Delta x_m = \frac{\partial x_m}{\partial t_1}\Delta t_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2}\Delta t_2 + \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k}\Delta t_k + o(\rho)$$

бўлади, бунда $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, k)$ хусусий ҳосилаларнинг $(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ нуқтадаги қийматлари олинган,

$$\rho = \sqrt{(\Delta t_1)^2 + (\Delta t_2)^2 + \ldots + (\Delta t_k)^2}.$$

Шартга асосан, $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 +$$
$$+ \alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m \qquad (13.13)$$

бўлади, бунда $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ хусусий ҳосилаларнинг $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтадаги қийматлари олинган ва $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$ да $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0, \ldots, \alpha_m \to 0$ бўлади.

(13.12) ва (13.13) муносабатлардан топамиз:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left[\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\Delta t_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2}\Delta t_2 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k}\Delta t_k + o(\rho)\right] +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_2}\left[\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\Delta t_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2}\Delta t_2 + \ldots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k}\Delta t_k + o(\rho)\right] +$$
$$+ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_m}\left[\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\Delta t_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2}\Delta t_2 + \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k}\Delta t_k + o(\rho)\right] =$$
$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\right]\Delta t_1 +$$
$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_2}\right]\Delta t_2 + \qquad (13.14)$$
$$+ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots +$$
$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_k}\right]\Delta t_k +$$
$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\right]\cdot o(\rho) + \alpha_1\cdot\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_m\Delta x_m.$$

Бу тенгликдаги $\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}$ йиғинди ўзгармас (ρ га боғлиқ эмас) бўлганлиги сабабли

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\right]\cdot o(\rho) = o(\rho)$$

бўлади.

Модомики, $x_i=\varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ $(i=1, 2, \dots, m)$ функциялар $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи экан, улар шу нуқтада узлуксиз бўлади. Унда узлуксизлик таърифига кўра $\Delta t_1\to 0$, $\Delta t_2\to 0$, $\dots$, $\Delta t_k\to 0$ да, яъни $\rho\to 0$ да $\Delta x_1\to 0$, $\Delta x_2\to 0$, $\dots$, $\Delta x_m\to 0$ бўлади. Яна ҳам аниқроқ айтсак, (13.12) формулалардан $\rho\to 0$ да $\Delta x_1=o(\rho)$, $\Delta x_2=o(\rho)$, $\dots$, $\Delta x_m=o(\rho)$ эканлиги келиб чиқади.

$\Delta x_1\to 0$, $\Delta x_2\to 0$, $\dots$, $\Delta x_m\to 0$ да эса $\alpha_i\to 0$, $\alpha_2\to 0$, $\dots$, $\alpha_m\to 0$. Демак,

$$\rho\to 0 \Rightarrow \text{барча } \Delta x_i\to 0 \Rightarrow \text{барча } \alpha_i\to 0 \Rightarrow \alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+\dots+ \\ +\alpha_m\Delta x_m=o(\rho).$$

Шундай қилиб,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\right]\cdot o(\rho)+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+\dots+ \\ +\alpha_m\Delta x_m=o(\rho) \tag{13.15}$$

бўлади. Агар ушбу

$$A_j=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_j}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_j}$$

$(i=1, 2, \dots, k)$ белгилашни киритсак, у ҳолда (13.14) ва (13.15) муносабатлардан

$$\Delta f=A_1\Delta t_1+A_2\Delta t_2+\dots+A_k\Delta t_k+o(\rho)$$

келиб чиқади. Бу эса $y=f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))=F(t_1, t_2, \dots, t_k)$ мураккаб функциянинг $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи эканлигини билдиради.

Теорема исбот бўлди.

2. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Энди

$$y=f(\varphi_1(t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k))= \\ =F(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

мураккаб функциянинг $t_1, t_2, \dots, t_k$ ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилаларини топамиз.

Агар (13.11) функцияларнинг ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)\in T$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $y=f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда мураккаб функция

$$y=f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k))$$

ҳар бир $t_1, t_2, \dots, t_k$ ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосилаларга эга бўлиб,

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$
$$\frac{\partial f}{\partial t_2}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial f}{\partial t_k}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial t_k}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_k}$$

бўлади, бунда $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ $(i=1, 2, \ldots, m, j=1, 2, \ldots, k)$ хусусий ҳосилаларнинг $(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ нуқтадаги, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ хусусий ҳосилаларнинг эса $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтадаги қийматлари олинган.

13.5- теоремага кўра мураккаб функция $(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

Демак, бир томондан

$$\Delta f = A_1\cdot\Delta t_1 + A_2\cdot\Delta t_2 + \ldots + A_k\cdot\Delta t_k + o(\rho) \qquad (13.16)$$

бўлиб, бунда

$$A_j = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_j} \quad (j=1, 2, \ldots, k) \qquad (13.17)$$

(қаралсин, 13.5- теорема), иккинчи томондан 13.1- натижага асосан

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t_1}\Delta t_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2}\cdot t_2. + \Delta. + \frac{\partial f}{\partial t_k}\Delta t_k + o(\rho) \qquad (13.18)$$

бўлади. (13.16), (13.17) ва (13.18) ва муносабатларда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1}, \\
\frac{\partial f}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial f}{\partial t_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_k}
\end{aligned} \qquad (13.19)$$

бўлишини топамиз.

5- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциали

1. Функция дифференциалининг таърифи. $y=f(x)$ функция очиқ $M\,(M\subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, бу тўпламнинг x^0 нуқтасида дифференциалланувчи бўлсин. Таърифга кўра. у ҳолда $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(x^0) = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_m\Delta x_m + o(\rho) \qquad (13.3)$$

бўлиб, бунда

$$A_i = \frac{\partial f(x^0)}{dx_i} \quad (i=1, 2, \ldots, m)$$

ва $\Delta x_1\to 0, \Delta x_2\to 0, \ldots, \Delta x_m\to 0$ да $\rho\to 0$ бўлади. (13.3) те гликнинг ўнг томони икки қисмдан 1) $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots, \Delta x_m$ орттирмаларга нисбатан чизиқли ифода $A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_m\Delta x_m$ дан, 2) $\Delta x_1\to 0, \Delta x_2\to 0, \ldots, \Delta x_m\to 0$ да, яъни $\rho\to 0$ да ρ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор $o(\rho)$ дан иборат.

Шунингдек, (13.3) муносабатдан $\rho\to 0$ да $A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\ldots+A_m\Delta x_m$ — чексиз кичик миқдор $\Delta f(x^0)$ — чексиз кичик миқдорнинг бош қисми эканлигини пайқаймиз.

13.4-таъриф. $f(x)$ функция орттирмаси $\Delta f(x^0)$ нинг $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ ларга нисбатан чизиқли бош қисми

$$A_1\cdot\Delta x_1+A_2\cdot\Delta x_2+\ldots+A_m\cdot\Delta x_m=\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m}\Delta x_m$$

$f(x)$ функциянинг x^0 *нуқтадаги дифференциали (тўлиқ дифференциали)* деб аталади ва $df(x^0)$ ёки $df(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ каби белгиланади. Демак,

$$df(x^0)=df(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)=A_1\cdot\Delta x_1+A_2\cdot\Delta x_2+\ldots+A_m\cdot\Delta x_m=\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m}\Delta x_m.$$

Агар $x_1, x_2, \ldots, x_m$ эркли ўзгарувчиларнинг ихтиёрий орттирмалари $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ лар мос равишда бу ўзгарувчиларнинг дифференциаллари $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ га тенг эканлигини эътиборга олсак, унда $f(x)$ функциянинг дифференциали қуйидаги

$$df(x^0)=\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m}dx_m \qquad (13.20)$$

кўринишга келади.

Одатда $\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1, \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m$ лар $f(x)$ функциянинг *хусусий дифференциаллари* деб аталади ва улар мос равишда $d_{x_1}f, d_{x_2}f, \ldots, d_{x_m}f$ каби белгиланади:

$$d_{x_1}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1,\ d_{x_2}f=\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2,\ \ldots,\ d_{x_m}f=\frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m.$$

Демак, $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги дифференциали, унинг шу нуқтадаги хусусий дифференциаллари йиғиндисидан иборат.

Мисол. Ушбу

$$f(x_1, x_2)=e^{x_1\sin x_2}$$

функция $\forall (x_1, x_2)\in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, унинг дифференциали

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot dx_2=\sin x_2\, e^{x_1\sin x_2}dx_1+x_1\cos x_2 e^{x_1\sin x_2}dx_2=e^{x_1\sin x_2}(\sin x_2dx_1+x_1\cos x_2dx_2)$$

бўлади.

Шуни таъкидлаш лозимки, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг дифференциали $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтага боғлиқ бўлиши билан бирга бу ўзгарувчиларнинг орттирмалари $\Delta x_1=dx_1$, $\Delta x_2=dx_2, \ldots, \Delta x_m=dx_m$ ларга ҳам боғлиқдир.

Функциянинг дифференциали содда геометрик маънога эга. Қуйида уни келтирамиз.

$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ M тўпламда ($M \subset R^m$) берилган бўлиб, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада ($x^0 \in M$) дифференциалланувчи бўлсин. Демак, бу функциянинг x^0 нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

учун

$$\Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + f'_{x_2}(x^0)(x_2 - x_2^0) + \dots + f'_{x_m}(x^0)(x_m - x_m^0) + 0(\rho)$$

бўлади.

Фараз қилайлик $y = f(x)$ функциянинг графиги R^{m+1} фазодаги ушбу

$$(S) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m; y): (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R_m, y \in R\}$$

сиртдан иборат бўлсин. Геометриядан маълумки, бу сиртнинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ нуқтасидан $(y_0 = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0))$ ўтувчи ҳамда Oy ўқига параллел бўлмаган текисликларнинг умумий тенгламаси

$$Y - y_0 = A_1(X_1 - x_1^0) + A_2(X_2 - x_2^0) + \dots + A_m(X_m - x_m^0)$$

бўлади, бунда $X_1, X_2, \dots, X_m$, Y — текисликдаги ўзгарувчи нуқтанинг координаталари.

Хусусан, ушбу

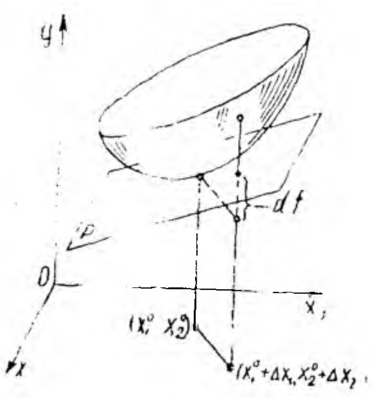
$$Y - y_0 = f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + f'_{x_2}(x^0)(x_2 - x_2^0) + \dots + f'_{x_m}(x^0)(x_m - x_m^0) \quad (13.21)$$

текислик эса (S) сиртга $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ нуқтасида ўтказилган уринма текислик деб аталади.

Агар $x_1 - x_1^0 = dx_1$, $x_2 - x_2^0 = dx_2$, $\dots$, $x_m - x_m^0 = dx_m$ дейилса, унда (13.21) уринма текислик

$$Y - y_0 = f'_{x_1}(x^0)dx_1 + f'_{x_2}(x^0)dx_2 + \dots + f'_{x_m}(x^0)dx_m = df(x^0)$$

кўринишга келади.



14- чизма

Натижада қуйидаги хулосага келамиз: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция аргументлари $x_1, x_2, \dots, x_m$ ларнинг $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $\dots$, $x_m = x_m^0$ қийматларига мос равишда орттирмалар берайлик. У ҳолда функциянинг мос орттирмаси

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = y - y_0$$

(S) сирт $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0)$ ва $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m, y)$

нуқталарнинг охирги, y координатаси олган орттирмани билдиради.

Функциянинг шу нуқтадаги дифференциали эса

$$df(x^0) = Y - y_0$$

уринма текислик $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, y_0)$ ва $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m, Y)$ нуқталарининг охирги, y координатаси олган орттирмани билдиради.

Хусусан, $y = f(x_1, x_2)$ функция очиқ M тўпламда $(M \subset R^2)$ берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Бу функциянинг графиги 14-чизмада тасвирланган (S) сиртни ифодаласин. (S) сиртга (x_1^0, x_2^0, y_0) нуқтасида $(y_0 = f(x_1^0, x_2^0))$ ўтказилган уринма текислик ушбу

$$Y - y_0 = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0)$$

кўринишда бўлиб, ундан

$$Y - y_0 = df(x_1^0, x_2^0)$$

эканлиги келиб чиқади. Демак, $y = f(x_1, x_2)$ функциянинг (x_1^0, x_2^0) нуқтадаги дифференциали бу функция графигига $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$ нуқтасида ўтказилган уринма текислик аппликатасининг орттирмасидан иборат экан.

2. Мураккаб функциянинг дифференциали, $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $M(M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ўзгарувчиларнинг ҳар бири ўз навбатида $t_1, t_2, \ldots, t_k$ ўзгарувчиларнинг T $(T \subset R^k)$ тўпламда берилган функцияси бўлсин:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k). \end{aligned} \tag{13.11}$$

Бунда $(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in T$ бўлганда унга мос $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in M$ бўлиб, ушбу

$$y = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k))$$

мураккаб функция тузилган бўлсин.

Фараз қилайлик (13.11) функцияларнинг ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0) \in T$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда 13.5-теоремага кўра мураккаб функция $(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади. Унда мураккаб функциянинг шу нуқтадаги дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot dt_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} \cdot dt_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t_k} dt_k$$

бўлади.

Энди $\frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_k}$ хусусий ҳосилаларни, ушбу бобнинг

4- § да келтирилган (13.19) формулалардан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_k}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_k}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_k}.$$

Натижада

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\right)dt_1+$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_2}\right)dt_2+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_k}\right)dt_k=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_1}{\partial t_k}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_1}{\partial t_k}dt_k\right)+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_2}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_2}{\partial t_k}dt_k\right)+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x_m}\left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_m}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_m}{\partial t_k}dt_k\right)$$

ўлади.

Агар

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_1}{\partial t_k}dt_k=dx_1,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_2}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_2}{\partial t_k}dt_k=dx_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_m}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_m}{\partial t_k}dt_k=dx_m$$

эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда мураккаб функция дифференциали учун

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m \tag{13.22}$$

бўлиши келиб чиқади.

Мураккаб функция дифференциалини ифодаловчи (13.22) формулани аввал қараб ўтилган (13.20) формула билан солиштириб, функция мураккаб бўлган ҳолда ҳам функция дифференциали функция хусусий

ҳосилалари $\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ билан (б [illegible]
$x_2, \ldots, x_m$ аргументларнинг ҳар бири $t_1, t_2, \ldots, t_k$ ўзгарувчиларнинг функцияси) мос аргумент дифференциаллари $dx_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ кўпайтмасидан иборат эканини кўрамиз.

Шундай қилиб, қаралаётган функциялар мураккаб

$$f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k))$$

$(x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k), (i = 1, 2, \ldots, m))$ кўринишда бўлганда ҳам, бу функцияларнинг дифференциаллари бир хил (13.22) формага эга бўлади (яъни дифференциал формаси сақланади). Одатда бу хоссани дифференциал формасининг (шаклининг) *инвариантлиги* дейилади.

Демак, кўп ўзгарувчили функцияларда ҳам, бир ўзгарувчили функциялардагидек, дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссаси ўринли экан.

Шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, (13.22) ифодада $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ лар $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ларнинг ихтиёрий орттирмалари $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ лар бўлмасдан, улар $t_1, t_2, \ldots, t_k$ ўзгарувчиларнинг функциялари бўлади.

3. Функция дифференциалини ҳисоблашнинг содда қоидалари. $u = f(x)$ ва $v = g(x)$ функциялар очиқ $M (M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, $x^0 \in M$ нуқтада улар дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда $u \pm v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$ $(v \neq 0)$ функциялар ҳам шу x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади ва уларнинг дифференциаллари учун қуйидаги

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$,
2) $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$,
3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ $(v \neq 0)$

формулалар ўринлили бўлади.

Бу муносабатлардан бирининг, масалан, 2) нинг исботини келтириш билан чегараланамиз.

$u = f(x)$ ва $v = g(x)$ функциялар кўпайтмасини F функция деб қарайлик: $F = u \cdot v$. Натижада F функция u ва v лар орқали $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ўзгарувчиларнинг $(x = (x_1, x_2, \ldots, x_m))$ мураккаб функцияси бўлади. Мураккаб функциянинг дифференциалини топиш формуласи (13.22) га кўра

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot dv$$

бўлади.

Агар

$$\frac{\partial F}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = u.$$

эканлигини эътиборга олсак, унда

$$dF = v \cdot du + u \cdot dv$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$d(u \cdot v) = vdu + udv.$$

4. Тақрибий формулалар. Маълумки, функция математик анализ курсида ўрганиладиган асосий объект. Кўпгина масалалар эса функцияларни ҳисоблаш (берилган нуқтада қийматини топиш) билан боғлиқ. Қаралаётган функция мураккаб кўринишда бўлса, равшанки, унинг қийматини аниқ ҳисоблаш қийин, баъзида эса мавжуд усуллар ёрдамида ҳисобланмай қолиши мумкин*.

Чексиз сондаги операцияларни бажариш билан ҳал бўладиган масалаларни, жумладан баъзи функцияларнинг қийматларини ҳисоблаш билан боғлиқ масалаларни ечишда қаралаётган функция ундан соддароқ, ҳисоблаш учун осонроқ бўлган функция билан алмаштирилади. Бундай алмаштиришлар билан тақрибий формулаларни ҳосил қилишда функциянинг дифференциал тушунчаси муҳим роль ўйнайди.

$f(x)$ функция очиқ M $(M\subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, $x^0\in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда таърифга кўра

$$\Delta f=\Delta f(x^0)=\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m}\Delta x_m+$$
$$+o(\rho)=df(x_3)+o(\rho)$$

бўлиб, ундан $(df\neq 0)$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\partial f}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\partial f+o(\rho)}{df}=1$$

бўлиши келиб чиқади. Бундан эса қуйидаги

$$\Delta f(x^0)\approx df(x^0) \tag{13.23}$$

тақрибий формула келиб чиқади. Бу (13.23) формула $x^0=(x_1^0, x_2^0,\ldots,x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг шу нуқтадаги $\Delta f(x^0)$ орттирмасини, унинг x^0 нуқтадаги $df(x^0)$ дифференциали билан тақрибан алмаштириш мумкинлигини кўрсатади. Бу алмаштиришнинг моҳияти шундаки, функциянинг Δf орттирмаси $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(x=(x_1, x_2, \ldots, x_m))$ ўзгарувчилар Δx_1 $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ орттирмаларининг, умуман айтганда, мураккаб функцияси бўлган ҳолда функциянинг df дифференциали эса $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ ларнинг чизиқли функцияси бўлишидадир.

(13.23) формулани ушбу

$$f(x_1^0+\Delta x_1,\ x_2^0+\Delta x_2,\ \ldots,\ x_m^0+\Delta x_m)\approx f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0)+$$
$$+\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0,\ldots,x_m^0)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0,\ldots,x_m^0)}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+$$
$$+\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0,\ldots,x_m^0)}{\partial x_m}\Delta x_m \tag{13.24}$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

---

* Тўғи, функцияларнинг қийматини ҳисоблашда электрон ҳисоблаш машиналаридан кенг фойдаланилади. Шубҳасиз, ҳозирги замон электрон ҳисоблаш машиналари қисқа вақт ичида жуда кўп операцияларни бажариб, қўйилган масалаларни ҳал қилиб беради.

Агар $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_2^0,\ \ldots,\ \Delta x_m = x_m - x_m^0$ эканини эътиборга олсак, унда юқоридаги (13.24) формула қуйидагича бўлади:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \approx f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) +$$
$$+ \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0) + \ldots + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)}{\partial x_m}(x_m - x_m^0).$$

Хусусан, $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = (0,0, \ldots, 0) \in M$ бўлганда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \approx f(0,0, \ldots, 0) + \frac{\partial f(0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_1} x_1 +$$
$$+ \frac{\partial f(0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f(0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_m} x_m$$

бўлади.

5. Бир жинсли функциялар. $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция очиқ $M\ (M \subset R^m)$ тўпламда берилган. M тўпламда $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нуқта билан ушбу $(tx_1\ tx_2, \ldots, tx_m)$ нуқта $(-\infty < t < \infty)$ ҳам шу M тўпламга тегишли бўлсин.

13.5-таъриф. Агар $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция учун

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = t^p f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (13.25)$$
$$((x_1, x_2, \ldots, x_m) \in M, p \in R)$$

бўлса, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *p-даражали бир жинсли функция* деб аталади.

Мисоллар. 1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ функция иккинчи даражали бир жинсли функция бўлади, чунки

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^2 + (tx_2)^2 = t^2(x_1^2 + x_2^2) = t^2 f(x_1, x_2).$$

2. $f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + e^{\frac{x_1}{x_2}}$ функцияни қарайлик.

Бунда

$$f(tx_1, tx_2) = \operatorname{arctg}\frac{tx_2}{tx_1} + e^{\frac{tx_1}{tx_2}} = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + e^{\frac{x_1}{x_2}} = f(x_1, x_2)$$

бўлади. Демак, берилган функция нолинчи даражали бир жинсли функция экан.

3. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = e^{\sin x_1 x_2}$$

функция учун (13.25) шарт бажарилмайди. Демак, бу бир жинсли функция эмас.

Фараз қилайлик p-даражали бир жинсли $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция M тўпламда дифференциалланувчи бўлсин. Унда

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = t^p \cdot f(x_1\ x_2, \ldots, x_m)$$

тенгликнинг ҳар икки томонини t бўйича дифференциаллаб қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m)}{\partial (tx_1)} x_1 + \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m)}{\partial (tx_2)} x_2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m)}{\partial (tx_m)} x_m = p \cdot t^{p-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Хусусан, $t=1$ бўлганда

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_2} x_2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_m} x_m = p f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (13.26)$$

бўлади. Бу (13.26) формула *Эйлер формуласи* деб аталади.

Айтайлик, $f(x_1 x_2, \ldots, x_m)$ функция нолинчи даражали бир жинсли функция бўлсин. Таърифга кўра

$$f(tx_1, tx_2 \ldots, tx_m) = t^0 \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

бўлади. Агар бу тенгликда $t = \frac{1}{x_1}$ $(x_1 \neq 0)$ деб олсак, унда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_m}{x_1}\right)$$

бўлиб, натижада m та ўзгарувчига боғлиқ бўлган $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $m-1$ та $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ $\left(y_1 = \frac{x_2}{x_1}, y_2 = \frac{x_3}{x_1}, \ldots, y_{m-1} = \frac{x_m}{x_1}\right)$ ўзгарувчига боғлиқ бўлган функцияга айланади:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = F(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}).$$

Энди $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция p-даражали бир жинсли функция бўлсин. У ҳолда

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = t^p \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

бўлади. Бу тенгликда ҳам $t = \frac{1}{x_1}$ $(x_1 \neq 0)$ десак, ундан

$$\frac{1}{x_1^p} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_m}{x_1}\right) = F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_m}{x_1}\right)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, p-даражали бир жинсли функция ушбу

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1^p \cdot F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_m}{x_1}\right)$$

кўринишга эга бўлар экан.

6-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллари

1. Функциянинг юқори тартибли хусусий ҳосилалари. $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция очиқ M $(M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, унинг ҳар бир $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нуқтасида $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Равшанки, бу хусусий ҳосилалар ўз навбатида $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлиб, уларнинг функциялари бўлади. Демак, берилган функция хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_m}$ ларнинг ҳам хусусий ҳосилаларини қараш мумкин.

13.6-таъриф. $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_m}$ ларнинг $x_k (k = 1,2, \ldots, m)$ ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосилалари берилган функциянинг *иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари* деб аталади ва

$$f''_{x_1 x_k}, f''_{x_2 x_k}, \ldots, f''_{x_m x_k} \ (k=1,2, \ldots, m)$$

ёки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k} \ (k=1, 2, \ldots, m)$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} = f''_{x_2 x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k} = f''_{x_2 x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$

. . . .

$$\frac{\partial_2 f}{\partial x_m \partial x_k} = f''_{x_m x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) \ (k = 1, 2 \ldots, m).$$

Бу иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни умумий ҳолда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f''_{x_i x_k} (i=1, 2, \ldots, m; \ k=1, 2, \ldots, m)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда $k = i$ бўлганда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} = f''_{x_k x_k}$$

деб ёзиш ўрнига

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = f''x_k^2$$

деб ёзилади.

Агар юқоридаги иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар турли ўзгарувчилар бўйича олинган бўлса, унда бу

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f''_{x_i x_k} \ (i \neq k)$$

2-тартибли хусусий ҳосилалар *аралаш ҳосилалар* деб аталади.

Худди шунга ўхшаш, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибдаги хусусий ҳосилалари таърифланади. Умуман, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $(n-1)$-тартибли хусусий ҳосиласининг хусусий ҳосиласи берилган функциянинг n-тартибли хусусий ҳосиласи деб аталади.

Шуни ҳам айтиш керакки, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ ўзгарувчилар бўйича турли тартибда олинган хусусий ҳосилалари берилган функциянинг турли аралаш ҳосилаларини юзага келтиради.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \quad (x_2 \neq 0)$$

функциянинг 2-тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right) = -\frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) = \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

2. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг аралаш ҳосилаларини топамиз.

Айтайлик $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2\left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1\left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}\left(1 + \frac{8x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}\left(1 + \frac{8x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\right)$$

бўлади.

Берилган $f(x_1, x_2)$ функциянинг $(0, 0)$ нуқтадаги хусусий ҳосилаларини таърифга кўра топамиз:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(\Delta x_1, 0) - f(0, 0)}{\Delta x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(0, \Delta x_2) - f(0, 0)}{\Delta x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_1 \partial x_2} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\dfrac{\partial f(0, \Delta x_2)}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1}}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{-\Delta x_2^3}{\Delta x_2^3} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x_2 \partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\dfrac{\partial f(\Delta x_1, 0)}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f(0, 0)}{\partial x_2}}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_1^3}{\Delta x_1^3} = 1.$$

Бу келтирилган мисоллардан кўринадики, функциянинг $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ ва $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ аралаш ҳосилалари бир-бирига тенг бўлиши ҳам, тенг бўлмаслиги ҳам мумкин экан.

13.6-теорема. *$f(x_1, x_2)$ функция очиқ M ($M \subset R^2$) тўпламда берилган бўлиб, шу тўпламда f'_{x_1}, f'_{x_2} ҳамда $f''_{x_1 x_2}$, $f''_{x_2 x_1}$ аралаш ҳосилаларга эга бўлсин. Агар аралаш ҳосилалар $(x_1^0, x_2^0) \in M$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда шу нуқтада*

$$f''_{x_1 x_2}(x_1^0, x_2^0) = f''_{x_2 x_1}(x_1^0, x_2^0)$$

бўлади.

Исбот. (x_1^0, x_2^0) нуқта координаталарига мос равишда шундай $\Delta x_1 > 0$, $\Delta x_2 > 0$ орттирмалар берайликки,

$$D = \{(x_1, x_2) \in R^2: x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^0 + \Delta x_1,\ x_2^0 \leqslant x_2 \leqslant x_2^0 + \Delta x_2\} \subset M$$

бўлсин. Бу тўғри тўртбурчак учларини ифодаловчи (x_1^0, x_2^0), $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0)$, $(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2)$, $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2)$ нуқталарда функциянинг қийматларини топиб улардан ушбу

$$P = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) + f(x_1^0, x_2^0)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бу ифодани қуйидаги икки

$$P = [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0)] - [f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0)],$$

$$P = [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2)] - [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)]$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Энди берилган $f(x_1, x_2)$ функция ёрдамида x_1 ўзгарувчига боғлиқ бўлган

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2^0),$$

x_2 ўзгарувчига боғлиқ бўлган

$$\psi(x_2) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2)$$

функцияларни тузайлик. Равшанки, $\varphi(x_1)$, $\psi(x_2)$ функциялар

$$\varphi'(x_1) = f'_{x_1}(x_1, x_2^0 + \Delta x_2) - f'_{x_1}(x_1, x_2^0),$$
$$\psi'(x_2) = f'_{x_2}(x_1^0 + \Delta x_1, x_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2)$$

ҳосилаларга эга бўлиб, Лагранж теоремасига асосан

$$\begin{aligned} \varphi'(x_1) &= f''_{x_1x_2}(x_1, x_2^0 + \theta_2\Delta x_2)\Delta x_2, \\ \psi'(x_2) &= f''_{x_2x_1}(x_1^0 + \theta_1\Delta x_1, x_2)\Delta x_1 \end{aligned} \tag{13.27}$$

бўлади, бунда $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$.

Юқорида келтирилган P ифодани $\varphi(x_1)$ ва $\psi(x_2)$ функциялар орқали ушбу

$$P = \varphi(x_1^0 + \Delta x_1) - \varphi_1(x_1^0),$$
$$P = \psi(x_2^0 + \Delta x_2) - \psi(x_2^0)$$

кўринишда ёзиб, сўнг яна Лагранж теоремасини қўллаб қуйидагиларни топамиз:

$$P = \varphi'(x_1^0 + \theta_1'\Delta x_1)\Delta x_1, \quad P = \psi'(x_2^0 + \theta_2'\Delta x_2)\Delta x_2$$
$$(0 < \theta_1', \theta_2' < 1). \tag{13.28}$$

Натижада (13.27) ва (13.28) муносабатлардан

$$P = f''_{x_1x_2}(x_1^0 + \theta_1'\Delta x_1, x_2^0 + \theta_2\Delta x_2)\cdot\Delta x_1\Delta x_2,$$
$$P = f''_{x_2x_1}(x_1^0 + \theta_1\Delta x_1, x_2^0 + \theta_2'\Delta x_2)\Delta x_1\Delta x_2$$

бўлиб, улардан эса

$$\begin{aligned} f''_{x_1x_2}(x_1^0 + \theta_1'\Delta x_1, x_2^0 + \theta_2\Delta x_2) = f''_{x_2x_1}(x_1^0 + \theta_1\Delta x_1, x_2^0 + \\ + \theta_2'\Delta x_2) \end{aligned} \tag{13.29}$$

бўлиши келиб чиқади.

Шартга кўра $f''_{x_1x_2}$ ва $f_{x_2x_1}$ аралаш ҳосилалар (x_1^0, x_2^0) нуқтада узлуксиз. Шунинг учун (13.29) да $\Delta x_1 \to \theta$, $\Delta x_2 \to 0$ (бунда $x_1^0 + \theta_1'\Delta x_1 \to x_1^0$, $x_2^0 + \theta_2\Delta x_2 \to x_2^0$, $x_1^0 + \theta_1\Delta x_1 \to x_1^0$, $x_2^0 + \theta_2'\Delta x_2 \to x_2^0$) лимитга ўтсак,

$$f''_{x_1x_2}(x_1^0, x_2^0) = f''_{x_2x_1}(x_1^0, x_2^0)$$

бўлади. Бу эса теоремани исботлайди.

Агар $f(x_1, x_2)$ функция очиқ $M\,(M \subset R^2)$ тўпламда юқори тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, бу ҳосилаларга нисбатан юқоридаги теоремани такрор қўллаш мумкин.

Масалан, f'_{x_1}, f'_{x_2}, $f''_{x_1x_2}$ ларга теоремани татбиқ этиб қуйидагиларни топамиз:

$$f'''_{x_1x_1x_2} = f'''_{x_1x_2x_1} = f'''_{x_2x_1x_1},$$
$$f'''_{x_1x_2x_2} = f'''_{x_2x_1x_2} = f'''_{x_2x_2x_1},$$
$$f^{(IV)}_{x_1x_1x_2x_2} = f^{(IV)}_{x_1x_2x_1x_2} = f^{(IV)}_{x_1x_2x_2x_1} = f^{(IV)}_{x_2x_1x_1x_2} = f^{(IV)}_{x_2x_1x_2x_1} = f^{(IV)}_{x_2x_2x_1x_1}.$$

2. Функциянинг юқори тартибли дифференциаллари. Кўп ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли дифференциали тушунчасини келтиришдан аввал, функциянинг $n (n > 1)$ марта дифференциалланувчилиги тушунчаси билан танишамиз.

$f(x)$ функция очиқ $M (M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, $x^0 \in M$ бўлсин. Маълумки, $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги орттирмаси ушбу

$$\Delta f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_m \Delta x_m + o(\rho)$$

кўринишда ифодаланса, функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи деб аталар эди, бунда $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — ўзгармас сонлар, $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2}$. Бу ҳолда кўрган эдикки, $A_i = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Айтайлик, $f(x)$ функция M тўпламда $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Агар бу хусусий ҳосилалар x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, $f(x)$ шу нуқтада икки марта дифференциалланувчи функция деб аталади.

Умуман, $f(x)$ функция M тўпламда барча $n - 1$-тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар $x^0 \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада *n марта дифференциалланувчи функция* деб аталади.

13.7-теорема. *Агар очиқ M тўпламда $f(x)$ функциянинг барча n-тартибли хусусий ҳосилалари мавжуд ва $x^0 \in M$ нуқтада узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада n марта дифференциалланувчи бўлади.*

Бу теорема функция дифференциалланувчи бўлишининг етарли шартини ифодаловчи 13.3-теореманинг исботланганлиги каби исботланади.

Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция очиқ $M (M \subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, у $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда бу функциянинг x нуқтадаги дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot dx_m \tag{13.20}$$

бўлади, бунда $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ лар $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ўзгарувчиларнинг ихтиёрий орттирмаларидир.

Энди $f(x)$ функция $x \in M$ нуқтада икки марта дифференциалланувчи бўлсин.

13.7-таъриф. $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги дифференциали $df(x)$ нинг дифференциали берилган $f(x)$ функциянинг *иккинчи тартибли дифференциали* деб аталади ва у $d^2 f$ каби белгиланади:

$$d^2 f = d(d(f)).$$

Юқоридаги (13.20) муносабатни эътиборга олиб, дифференциаллаш қоидаларидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m\right) =$$

$$= dx_1 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + dx_2 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \ldots + dx_m d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} dx_m\right) dx_1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} dx_m\right) dx_2 +$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} dx_m\right) dx_m = \qquad (13.30)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} dx_m^2 +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3 + \ldots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} dx_1 dx_m +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4} dx_2 dx_4 + \ldots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} dx_2 dx_m +$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1} \partial x_m} dx_{m-1} dx_m.$$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нуқтадаги учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибли дифференциаллари ҳам худди юқоридагидек таърифланади.

Умуман, $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги $(n-1)$-тартибли дифференциали $d^{n-1} f(x)$ нинг дифференциал берилган $f(x)$ функциянинг шу нуқтадаги n-тартибли дифференциали деб аталади ва $d^n f$ каби белгиланади. Демак,

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

Биз юқорида $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали унинг хусусий ҳосилалари орқали (13.30) муносабат билан ифодаланишини кўрдик.

$f(x)$ функциянинг кейинги тартибли дифференциалларининг функция хусусий ҳосилалари орқали ифодаси борган сари мураккаблаша боради. Шу сабабли юқори тартибли дифференциалларни, символик равишда, соддароқ формада ифодалаш муҳим.

$f(x)$ функция дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

ни символик равишда (f ни формал равишда қавс ташқарисига чиқариб) қуйидагича

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right) f$$

ёзамиз. Унда функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 f \qquad (13.31)$$

деб қараш мумкин. Бунда қавс ичидаги йиғинди квадратга кўтарилиб, сўнг f га «кўпайтирилади». Кейин даража кўрсаткичлари хусусий ҳосилалар тартиби деб ҳисобланади.

Шу тарзда киритилган символик ифодалаш $f(x)$ функциянинг n-тартибли дифференциалини

$$d^n f=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n f$$

каби ёзиш имконини беради.

3. Мураккаб функциянинг юқори тартибли дифференциаллари. Ушбу пунктда $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(x_1=\varphi_1(t_1, t_2, \ldots t_k)$, $x_2=\varphi_2(t_1, t_2 \ldots t_k)$, $\ldots$ $x_m=\varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k))$ мураккаб функциянинг юқори тартибли дифференциалларини топамиз.

Маълумки, (13.11) функциянинг ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)\in T$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, x_m^0)\in M$ нуқтада днфференциалланувчи бўлса, у ҳолда 13.5-теоремага кўра мураккаб функция $(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи ва дифференциал шаклининг инвариантлик хоссасига асосан мураккаб фрнкциянинг дифференциали

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial y_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m$$

бўлади.

Фараз қилайлик, (13.11) функцияларнинг ҳар бири $(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)\in T$ нуқтада икки марта дифференциалланувчи, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция эса мос $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)\in M$ нуқтада икки марта дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда мураккаб функция ҳам $(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0)$ нуқтада икки марта дифференциалланувчи бўлади. Дифференциаллаш қоидаларидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned}
d^2f=d(df)&=d\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m\right)=\\
&=d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_1}d(dx_1)+d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_2}d(dx_2)+\\
&+\ldots+d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)dx_m+\frac{\partial f}{\partial x_m}d(dx_m)=\\
&=d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)dx+d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)dx_2+\ldots+d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)dx_m+\\
&+\frac{\partial f}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}d^2x_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}d^2x_m=\\
&=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2 f+\\
&+\frac{\partial f}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}d^2x_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}d^2x_m.
\end{aligned} \tag{13.32}$$

Шу йўл билан берилган мураккаб функциянинг кейинги тартибдаги дифференциаллари топилади.

(13.31), (13.32) формулаларни солиштириб, иккинчи тартибли дифференциалларда дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссаси ўринли эмаслигини кўрамиз.

13.3-эслатма. Агар (13.11) функцияларнинг ҳар бири $t_1, t_2 \ldots, t_k$ ўзгарувчиларнинг чизиқли функцияси

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} t_1 + \alpha_{12} t_2 + \ldots + \alpha_{1k} t_k + \beta_1, \\ x_2 &= \alpha_{21} t_1 + \alpha_{22} t_2 + \ldots + \alpha_{2k} t_k + \beta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= \alpha_{m1} t_1 + \alpha_{m2} t_2 + \ldots + \alpha_{mk} t_k + \beta_m \end{aligned} \tag{13.33}$$

бўлса ($\alpha_{ji}, \beta_j (i = 1, 2, \ldots k; j = 1, 2, \ldots, m)$ — ўзгармас сонлар), у ҳолда бундай $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ мураккаб функциянинг юқори тартибли дифференциаллари дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссасига эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам (13.33) ифодадаги функцияларни дифференциалласак, унда

$$\begin{aligned} dx_1 &= \alpha_{11}dt_1 + \alpha_{12}dt_2 + \ldots + \alpha_{1k}dt_k = \alpha_{11}\Delta t_1 + \alpha_{12}\Delta t_2 + \ldots + \alpha_{1k}\Delta t_k, \\ dx_2 &= \alpha_{21}dt_1 + a_{22}dt_2 + \ldots + \alpha_{2k}dt_k = \alpha_{21}\Delta t_1 + \alpha_{22}\Delta t_2 + \ldots + \alpha_{2k}\Delta t_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_m &= \alpha_{m1}dt_1 + \alpha_{m2}dt_2 + \ldots + \alpha_{mk}dt_k = \alpha_{m1}\Delta t_1 + \alpha_{m2}\Delta t_2 + \ldots + \\ &\quad + \alpha_{mk}\Delta t_k \end{aligned}$$

бўлиб $dx_1, dx_2, \ldots dx_m$ ларнинг ҳар бири $t_1, t_2, \ldots, t_k$ ўзгарувчиларга боғлиқ эмаслигини кўрамиз. Равшанки, бундан $d^2x_1 = d^2x_2 = \ldots = d^2x_m = 0$. Бинобарин,

$$\begin{aligned} d^2f &= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m\right) = \\ &= dx_1 d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + dx_2 d\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right) + \ldots + dx_m d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} + dx_2 \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 f \end{aligned}$$

бўлади.

Демак, иккинчи тартибли дифференциаллар дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссасига эга экан.

Шунга ўхшаш, бу ҳолда мураккаб функциянинг иккидан катта тартибдаги дифференциалларида дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссаси ўринли бўлиши кўрсатилади.

7-§. Ўрта қиймат ҳақида теорема

$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $M (M \subset R^m)$ тўпламда берилган. Бу тўпламда шундай $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ ва $b = (b_1, b_2, \ldots b_m)$ нуқталарни олайликки, бу нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси

$$A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m\colon\ x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1)\ x_2 = a_2 + t(b_2 - a_2), \ldots, x_m = a_m + t(b_m - a_m);\ 0 \leq t \leq 1\}$$

шу M тўпламга тегишли бўлсин: $A \subset M$.

13-теорема. *Агар $f(x)$ функция A кесманинг a ва b нуқталарида узлуксиз бўлиб, кесманинг қолган барча нуқталарида функция* *дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда A кесмада шундай c нуқта ($c = (c_1\ c_2, \ldots c_m)$) топиладики,*

$$f(b) - f(a) = f'_{x_1}(c)(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(c)(b_2 - a_2) + \ldots + f'_{x_m}(c)(b_m - a_m)$$

бўлади.

Исбот. $f(x)$ функцияни A тўпламда қарайлик. Унда

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \ldots,$$
$$a_m + t(b_m - a_m)) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

бўлиб, $f(x_1, x_2 \ldots, x_m)$ t ўзгарувчининг $[0, 1]$ сегментда берилган функциясига айланади:

$$F(t) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \ldots, a_m + t(b_m - a_m)).$$

Бу функция $(0,1)$ интервалда ушбу

$$F'(t) = f'_{x_1}(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(b_2 - a_2) + \ldots + f'_{x_m}(b_m - a_m)$$

ҳосилага эга бўлади.

Демак, $F(t)$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз, $(0,1)$ интервалда эса $F'(t)$ ҳосилага эга. Унда Лагранж теоремасига (1-қисм, 6-боб, 6-§) кўра $(0,1)$ интервалда шундай t_0 нуқта топиладики,

$$F(1) - F(0) = F'(t_0) \quad (0 < t_0 < 1) \tag{13.34}$$

бўлади. Равшанки,

$$F(0) = f(a), \quad F(1) = f(b),$$

$$\begin{aligned} F'(t_0) = f'_{x_1}(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2), \ldots, a_m + t_0(b_m - \\ + a_m))(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2), \ldots, a_m + \\ + t_0(b_m - a_m))(b_2 - a_2) + \ldots \ldots + \\ + f'_{x_m}(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2), \ldots, a_m + \\ + t_0(b_m - a_m))(b_m - a_m). \end{aligned} \tag{13.35}$$

Агар

$$\begin{aligned} a_1 + t_0(b_1 - a_1) &= c_1, \\ a_2 + t_0(b_2 - a_2) &= c_2 \\ \ldots &\ldots \\ a_m + t_0(b_m - a_m) &= c_m \end{aligned}$$

деб белгиласак, унда $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m) \in A$ бўлиб, юқоридаги (13.34) ва (13.35) тенгликлардан

$$f(b) - f(a) = f'_{x_1}(c)(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(c)(b_2 - a_2) + \ldots + f'_{x_m}(c)(b_m - a_m)$$

келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема ўрта қиймат ҳақидаги теорема деб аталади.

13.2-натижа. $f(x)$ функция боғламли M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб, унинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлсин. Агар M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида $f(x)$ функциянинг барча хусусий ҳосилалари нолга тенг бўлса, функция M тўпламда ўзгармас бўлади.

Шуни исботлайлик. M тўпламда $a=(a_1, a_2, \dots, a_m)$ ҳамда ихтиёрий $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқталарни олайлик. Бу нуқталарни бирлаштирувчи кесма шу M тўпламга тегишли бўлсин. У ҳолда шу кесма нуқталарида 13.8-теоремага кўра

$$f(a)=f(x)+f'_{x_1}(c)(a_1-x_1)+f'_{x_2}(c)(a_2-x_2)+\dots+f'_{x_m}(c)(a_m-x_m)$$

бўлади. Функциянинг барча хусусий ҳосилалари нолга тенг эканидан

$$F_{(x)}=F_{(a)}$$

бўлиши келиб чиқади.

a ва x нуқталарни бирлаштирувчи кесма M тўпламга тегишли бўлмаса, унда M тўпламнинг боғламли эканлигидан a ва x нуқталарни бирлаштирувчи ва шу тўпламга тегишли бўлган синиқ чизиқ топилади, бу синиқ чизиқ кесмаларига юқоридаги 13.8-теоремани қўллай бориб,

$$f(a)=f(x)$$

бўлишини топамиз.

8-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг Тейлор формуласи

1-қисм, 6-боб, 7-§ да бир ўзгарувчили функциянинг Тейлор формуласи, унинг турли формулада ёзилиши ҳамда Тейлор формуласининг турли формадаги қолдиқ ҳадлари ўрганилган эди. Масалан, $F(t)$ функция $t=t_0$ нуқтанинг атрофида берилган бўлиб, унда $F(t)$, $F''(t)$, $\dots$, $F^{(n+1)}(t)$ ҳосилаларга эга бўлганда

$$F(t)=F(t_0)+F'(t_0)(t-t_0)^2+\frac{1}{2!}F''(t_0)(t-t_0)^2+\dots+$$

$$+\frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n+R_n(t) \qquad (13.36)$$

бўлади, бунда қолдиқ ҳад $R_n(t)$ эса қуйидагича

а) Коши кўринишида $R_n(t)=\dfrac{F^{(n+1)}(c)}{n!}(t-t_0)^{n+1}(1-\theta)^n$,

б) Лагранж кўринишида $R_n(t)=\dfrac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)}(t-t_0)^{n+1}$,

в) Пеано кўринишида $R_n(t)=0(t-t_0)^n$ ёзилади (бунда $0<\theta<1$, $c=t_0+\theta(t-t_0)$).

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очиқ M $(M\subset R^m)$ тўпламда берилган. Бу тўпламда $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтани олиб, унинг $U_\delta((x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0))\subset M$ атрофини қарайлик. Равшанки, $\forall(x_1^a, x_2', \dots, x_m')\in U_\delta(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^2))$ нуқта билан $(x_1^0, x_2^0 \dots, x_m^0)$ нуқтани бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси

$$A=\{(x_1, x_2, \dots, x_m)\in R^m: x_1=x_1^0+t(x_1'-x_1^0),$$

$$x_2=x_2^0+t(x_2'-x_2^0), \dots, x_m=x_m^0+t(x_m'-x_m^0);\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

шу $U_\delta(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0))$ атрофга тегишли бўлади.

Айтайлик, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $U_\delta((x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0))$ да $n+1$ марта дифференциалланувчи бўлсин.

Энди $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функцияни A тўпламда қарайлик. Унда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1^0 + t(x_1' - x_1^0),\ x_2^0 + t(x_2' - x_2^0), \ldots,\ x_m^0 + t(x_m' - x_m^0))$$

бўлиб, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ t ўзгарувчининг $[0,1]$ да берилган функциясига айланиб қолади:

$$F(t) = f(x_1^0 + t(x_1' - x_1^0),\ x_2^0 + t(x_2' - x_2^0), \ldots,\ x_m^0 + t(x_m' - x_m^0)) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{13.37}$$

Бу функциянинг ҳосилаларини ҳисоблайлик:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1' - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2' - x_2^0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_m' - x_m^0) =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1' - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2' - x_2^0) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m' - x_m^0)\right) f,$$
$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1' - x_1^0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2' - x_2^0)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(x_m' - x_m^0)^2 +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1' - x_1^0)(x_2' - x_2^0) + \ldots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1}\partial x_m}(x_{m-1}' - x_{m-1}^0)(x_m' -$$
$$- x_m^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1' - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2' - x_2^0) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m' - x_m^0)\right)^2 f.$$

Умуман k-тартибли ҳосила ушбу

$$f^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1' - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2' - x_2^0) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m' - x_m^0)\right)^k f$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{13.38}$$

кўринишида бўлади. (Унинг тўғрилиги математик индукция методи ёрдамида исботланади).

Юқоридаги $F'(t)$, $F''(t)$, $\ldots$, $F^{(n)}(t)$ ҳосилаларнинг ифодаларига кирган $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг барча хусусий ҳосилалари $(x_1^0 + t(x_1' - x_1^0),\ x_2^0 + t(x_2' - x_2^0), \ldots,\ x_m^0 + t(x_m' - x_m^0))$ нуқтада ҳисобланган.

(13.36) формулада $t_0 = 0$ ва $t = 1$ деб олинса, ушбу

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta)$$
$$(a < \theta < 1) \tag{13.36}$$

ҳосил бўлади. (Бу ерда қолдиқ ҳад Лагранж кўринишида олинган.)

(13.37) ва (13.38) муносабатлардан фойдаланиб қуйидагиларни топамиз:

$$F(0) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0),$$
$$F(1) = f(x_1', x_2', \ldots, x_m'),$$

$$F^{(k)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1'-x_1^0)+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2'-x_2^0)+\ \dots\ +\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m'-x_m^0)\right)^k f$$
$$(k=1,2,\ \dots\ ,n+1).$$

Кейинги тенгликдаги $f(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_m)$ функциянинг барча хусусий ҳосилалари $(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots\ ,x_m^0)$ нуқтада ҳисобланган.

Демак, (13.36) формулага кўра

$$f(x_1',\ x_2',\ \dots\ ,x_m')=f(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots\ ,x_m^0)+\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1'-x_1^0)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_1}(x_2'-x_2^0)+\ \dots\ +\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m'-x_m^0)\right)f+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x^2}(x_1'-x_1^0)+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2'-x_2^0)+\ \dots\ +\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m'-x_m^0)\right)^2 f+$$
$$+\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ +$$
$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1'-x_1^0)+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2'-x_2^0)+\ \dots\ +\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m'-x_m^0)\right)^n f+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1'-x_1^0+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2'-x_2^0)+\ \dots\ +\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m'-x_m^0)\right)^{n+1} f$$

бўлади, бунда $f(x_1, x_2,\ \dots\ ,x_m)$ функциянинг барча биринчи, иккинчи ва ҳоказо n-тартибли хусусий ҳосилалари $(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots\ ,x_m^0)$ нуқтада, шу функциянинг барча $(n+1)$-тартибли хусусий ҳосилалари эса $(x_1^0+\theta(x_1'-x_1^0),\ x_2^0+\theta(x_2'-x_2^0),\ \dots\ ,x_m^0+\theta(x_m'-x_m^0))$ $(0<\theta<1)$ нуқтада ҳисобланган.

Бу формула кўп ўзгарувчили $f(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_m)$ функциянинг Тейлор формуласи деб аталади.

Хусусан, икки ўзгарувчили функциянинг Тейлор формуласи қуйидагича бўлади:

$$f(x_1,\ x_2)=f(x_1^0,\ x_2^0)+\frac{\partial f(x_1^0,\ x_2^0)}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\frac{\partial f(x_1^0,\ x_2^0)}{\partial x_2}(x_2-x_2^0)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1\,\partial x_2}(x_1-x_0)(x_2-x_2^0)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^0)^2\right]+\ \dots\ +\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1^n}(x_1-x_1^0)^n+\right.$$
$$+C_n^1\frac{\partial^n f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1^{n-1}\partial x_2}(x_1-x_1^0)^{n-1}(x_2-x_2^0)+\ \dots\ +\frac{\partial^n f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x^n}(x_2-$$
$$\left.-x_2^0)^n\right]+\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial^{n+1} f(x_1^0+\theta(x_1-x_1^0),\ x_2^0+\theta(x_2-x_2^0))}{\partial x_1^{n+1}}(x_1-x_1^0)^{n+1}+\right.$$
$$\left.+\ \dots\ +\frac{\partial^{n+1} f(x_1^0+\theta(x_1-x_1^0),\ x_2^0+\theta(x_2-x_2^0)}{\partial x_2^{n+1}}(x_2-x_2^0)^{n+1}\right].$$

9- §. Кўп ўзгарувчили функциянинг экстремум қийматлари. Экстремумнинг зарурий шарти

1. Функциянинг максимум ва минимум қийматлари. Кўп ўзгарувчили функциянинг экстремум қийматлари таърифлари худди бир ўзгарувчили функцияники сингари киритилади. $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция бирор очиқ M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in M$ бўлсин.

13.8-таъриф. Агар x_0 нуқтанинг шундай $U_\delta(x_0) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m: \rho(x, x_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_m - x_m^0)^2} < \delta\} \subset M$ атрофи мавжуд бўлсаки, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ учун

$$f(x) \leqslant f(x^0) \quad (f(x) \leqslant f(x^0))$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада *максимумга (минимумга) эга* дейилади, $f(x^0)$ қиймат эса $f(x)$ функциянинг *максимум (минимум) қиймати* ёки *максимуми (минимуми)* дейилади.

13.9-таъриф. Агар x^0 нуқтанинг шундай $U_\delta(x^0)$ атрофи мавжуд бўлсаки, $\forall x \in U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}$ учун $f(x) < f(x^0)$ $(f(x) > f(x^0))$ бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада *қатъий максимумга (қатъий минимумга)* эга дейилади. $f(x^0)$ қиймат эса $f(x)$ функциянинг *қатъий максимум (минимум) қиймати* ёки *қатъий максимуми (қатъий минимуми)* дейилади.

Юқоридаги таърифлардаги x^0 нуқта $f(x)$ функцияга максимум (минимум) (13.8-таърифда), қатъий максимум (қатъий минимум) (13.9-таърифда) қиймат берадиган нуқта деб аталади.

Функциянинг максимум (минимум) қиймати қуйидагича белгиланади:

$$f(x^0) = \max_{x \in U_\delta(x^0)} \{f(x)\} \, f(x_0) = \min_{x \in U_\delta(x^0)} \{f(x)\}).$$

Функциянинг максимум ва минимуми умумий ном билан унинг *экстремуми* деб аталади.

Мисол. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \qquad (x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1)$$

функцияни қарайлик. Бу функция (0. 0) нуқтада қатъий максимумга эришади. Ҳақиқитан ҳам. (0, 0) нуқтанинг ушбу

$$U_r((0, 0)) = \{(x_1, x_2) \in R^2: \quad x_1^2 + x_2^2 < r^2\} \qquad (0 < r < 1)$$

атрофи олинса, унда $\forall (x_1, x_2) \in U_r((0, 0)) \setminus \{(0, 0)\}$ учун

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} < f(0, 0) = 1$$

бўлади.

13.8 ва 13.9-таърифлардан кўринадики, $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги қиймати $f(x^0)$ ни унинг шу нуқта атрофидаги нуқталардаги қийматлари билангина солиштирилар экан. Шунинг учун функциянинг экстремуми (максимуми, минимуми) *локал экстремум* (*локал максимум*, *локал минимум*) деб аталади.

2. **Функция экстремумининг зарурий шарти.** $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция очиқ $M\ (M \subset R^m)$ тўпламда берилган. Айтайлик, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтада максимумга (минимумга) эга бўлсин. Таърифга кўра $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нуқтанинг шундай $U_\delta(x^0) \subset M$ атрофи мавжудки, $\forall\ (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in U_\delta(x)$ учун

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \leqslant f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)\ (f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geqslant \geqslant f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)),$$

хусусан

$$f(x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) \leqslant f(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)\ (f(x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) \geqslant \geqslant f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0))$$

бўлади. Натижада бир ўзгарувчига (x_1) га боғлиқ бўлган $f(x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ функциянинг $U_\delta(x^0)$ да энг катта (энг кичик) қиймати $f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ га эришишини кўрамиз. Агарда x^0 нуқтада $f'_{x_1}(x^0)$ хусусий ҳосила мавжуд бўлса, унда Ферма теоремаси (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 6-§) га кўра

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = f'_{x_1}(x^0) = 0$$

бўлади.

Худди шунингдек, $f'_{x_2}(x^0), \ldots, f'_{x_m}(x^0)$ хусусий ҳосилалар мавжуд бўлса,

$$f'_{x_2}(x^0) = 0,\ f'_{x_3}(x^0) = 0,\ \ldots\ldots,\ f'_{x_m}(x^0) = 0$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб қуйидаги теоремага келамиз.

13.9-теорема. *Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эришса ва шу нуқтада барча $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда*

$$f'_{x_1}(x^0) = 0,\ f'_{x_2}(x^0) = 0,\ \ldots,\ f'_{x_m}(x^0) = 0$$

бўлади.

Бироқ $f(x)$ функциянинг бирор $x' \in R^m$ нуқтада барча хусусий ҳосилаларга эга ва

$$f'_{x_1}(x') = 0,\ f'_{x_2}(x') = 0,\ \ldots,\ f'_{x_m}(x') = 0$$

бўлишидан, унинг шу x' нуқтада экстремумга эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

Масалан, R^2 тўпламда берилган

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

функцияни қарайлик. Бу функция $f'_{x_1}(x_1, x_2) = x_2$, $f'_{x_2}(x_1, x_2) = x_1$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, улар (0, 0) нуқтада нолга айланади. Аммо $f(x_1, x_2) = x_1, x_2$ функция (0, 0) нуқтада экстремумга эга эмас (бу функциянинг графиги гиперболик параболоидни ифодалайди, қаралсин 12- боб, 3-§).

Демак, 13.9-теорема бир аргументли функциялардагидек функция экстремумга эришишининг зарурий шартини ифодалар экан.

$f(x)$ функция хусусий ҳосилаларини нолга айлантирадиган нуқталар унинг *стационар нуқталари* дейилади.

13.4-эслатма. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функциянинг экстремумга эришишининг зарурий шартини ушбу

$$d f(x^0) = 0 \tag{13.39}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлишидан унинг шу нуқтада барча f'_{x_1}, f'_{x_2}, ..., f'_{x_m} хусусий ҳосилаларга эга бўлиши келиб чиқади. x^0 нуқтада функция экстремумга эришишидан теоремага кўра

$$f'_{x_1}(x^0) = 0,\ f'_{x_2}(x^0) = 0,\ \ldots,\ f'_{x_m}(x^0) = 0$$

бўлади. Бундан эса (13.39) бўлиши топилади.

10-§. Функция экстремумининг етарли шарти

Биз юқорида $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада экстремумга эришишининг зарурий шартини кўрсатдик. Энди функциянинг экстремумга эришишининг етарли шартини ўрганамиз.

$f(x)$ функция $x^0 \in R^m$ нуқтанинг бирор

$$U_\delta(x^0) = \{ x \in R^m : \rho(x, x^0) < \delta \} \quad (\delta > 0)$$

атрофида берилган бўлсин. Ушбу

$$\Delta = f(x) - f(x^0) \tag{13.40}$$

айирмани қарайлик. Равшанки, бу айирма $U_\delta(x^0)$ атрофда ўз ишорасини сақласа, яъни ҳар доим $\Delta \geqslant 0$ $(\Delta \leqslant 0)$ бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада минимумга (максимумга) эришади. Агар (13.40) айирма ҳар қандай $U_\delta(x^0)$ атрофда ҳам ўз ишорасини сақламаса, у ҳолда $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эга бўлмайди. Демак, масала (13.40) айирма ўз ишорасини сақлайдиган $U_\delta(x^0)$ атроф мавжудми ёки йўқми, шуни аниқлашдан иборат. Бу масалани биз, хусусий ҳолда, яъни $f(x)$ функция маълум шартларни бажарган ҳолда ечамиз.

$f(x)$ функция қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x)$ функция бирор $U_\delta(x_0)$ да узлуксиз, барча ўзгарувчилари бўйича биринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга;

2) x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг стационар нуқтаси, яъни

$$f'_{x_1}(x^0) = 0,\ f'_{x_2}(x^0) = 0,\ \ldots,\ f'_{x_m}(x^0) = 0.$$

Ушбу бобнинг 8-§ ида келтирилган Тейлор формуласидан фойдаланиб, x^0 нуктанинг стационар нукта эканлигини эътиборга олиб, қуйидагини топамиз:

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2}\,[f''_{x_1^2}\Delta x_1^2 + f''_{x_2^2}\Delta x_2^2 + \ldots + f''_{x_m^2}\Delta x_m^2 +$$
$$+ 2\,(f''_{x_1x_2}\Delta x_1\Delta x_2 + f''_{x_1x_3}\Delta x_1\Delta x_3 + \ldots + f''_{x_{m-1}x_m}\Delta x_{m-1}\Delta x_m)] =$$
$$= f(x^0) + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m} f''_{x_ix_k}\Delta x_i\Delta x_k.$$

Бу муносабатда $f(x)$ функциянинг барча хусусий ҳосилалари $f''_{x_ix_k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ лар ушбу

$$(x_1^0 + \theta\Delta x_1,\ x_2^0 + \theta\Delta x_2,\ \ldots,\ x_m^0 + \theta\Delta x_m)\ (0 < \theta < 1)$$

нуқтада ҳисобланган ва

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_2^0,\ \ldots,\ \Delta x_m = x_m - x_m^0.$$

Демак,

$$\Delta = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m} f''_{x_ix_k}\Delta x_i\Delta x_k.$$

Берилган $f(x)$ функция иккинчи тартибли ҳосилаларининг стационар нуқтадаги қийматларини қуйидагича белгилайлик:

$$a_{ik} = f''_{x_ix_k}(x^0)\ (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Унда $f''_{x_ix_k}(x)$ нинг x^0 нуқтада узлуксизлигидан

$$f''_{x_ix_k} = f''_{x_ix_k}(x_1^0 + \theta\Delta x_1,\ x_2^0 + \theta\Delta x_2,\ \ldots,\ x_m^0 + \theta\Delta x_m) = a_{ik} + \alpha_{ik}$$

$(i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ бўлиши келиб чиқади. Бу муносабатда $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0,\ \ldots,\ \Delta x_m \to 0$ да барча $\alpha_{ik} \to 0$ ва 6-§ да келтирилган 13.6-теоремага асосан

$$a_{ik} = a_{ki}\ (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

бўлади. Натижада (13.40) айирма ушбу

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\Delta x_i\Delta x_k + \sum_{i,k=1}^{m}\alpha_{ik}\Delta x_i\Delta x_k\right)$$

кўринишни олади. Буни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}\left(\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\,\frac{\Delta x_i}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_k}{\rho} + \sum_{i,k=1}^{m}\alpha_{ik}\,\frac{\Delta x_i}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_k}{\rho}\right).$$

Агар

$$\xi_i = \frac{\Delta x_i}{\rho}\ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

деб белгиласак, унда

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}\left(\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\,\xi_i\,\xi_k + \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\,\xi_i\,\xi_k\right) \qquad (13.41)$$

бўлади.

Ушбу

$$P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\,\xi_i\,\xi_k$$

ифода $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ ўзгарувчиларнинг *квадратик формаси* деб аталади, b_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ лар эса квадратик форманинг *коэффициентлари* дейилади. Равшанки, ҳар қандай квадратик форма ўз коэффициентлари орқали тўла аниқланади. Квадратик формалар алгебра курсида батафсил ўрганилади. Қуйида биз квадратик формага доир баъзи (келгусида қўлланиладиган) тушунчаларни эслатиб ўтамиз.

Равшанки $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_m = 0$ бўлса, ҳар қандай квадратик форма учун

$$P(0, 0, \ldots, 0) = 0$$

бўлади.

Энди бошқа нуқталарни қарайлик. Қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1. Барча $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 > 0$ нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) > 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма *мусбат аниқланган* дейилади.

2. Барча $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 > 0$ нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) < 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма *манфий аниқланган* дейилади.

3. Баъзи $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ нуқталар учун $P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) > 0$, баъзи нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) < 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма *ноаниқ* дейилади.

4. Барча $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 > 0$ нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \geqslant 0$$

ва улар орасида шундай $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ нуқталар ҳам борки,

$$P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма *яриммусбат аниқланган* дейилади.

5. Барча $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 > 0$ нуқталар учун

$$P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \leqslant 0$$

ва улар орасида шундай $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ нуқталар ҳам борки,

$$P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = 0.$$

Бу ҳолда квадратик форма *ярим манфий аниқланган* дейилади.

1. Ушбу

$$Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\xi_k\xi_k$$

квадратик форма мусбат аниқланган бўлсин. Аввало юқоридаги

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_m^2}$$

ва

$$\xi_i = \frac{\Delta x_i}{\rho} \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

тенгликлардан

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 = 1$$

эканлигини топамиз. Маълумки, R^n фазода

$$S_1(0) = S_1((0, 0, \ldots, 0)) = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in R^m:$$
$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 = 1\}$$

маркази $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг сферани ифодалайди. Сфера ёпиқ ва чегараланган тўплам. Вейерштрасснинг биринчи теоремасига асосан шу сферада $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ функция узлуксиз функция сифатида чегараланган, хусусан қуйидан чегараланган бўлади:

$$Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \geqslant c \quad (c - \text{const}).$$

Агар $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ квадратик форманинг мусбат аниқланган эканлигини эътиборга олсак, унда $c \geqslant 0$ бўлишини топамиз.

Иккинчи томондан, Вейерштрасснинг иккинчи теоремасига кўра бу $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ функция $S_1(0)$ сферада ўзининг аниқ қуйи чегарасига эришади, яъни бирор $(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_m^0) \in S_1(0)$ учун

$$Q(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_m^0) = \min Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$$

бўлади. Яна $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ квадратик форманинг мусбат аниқланганлигини эътиборга олсак,

$$Q(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_m^0) > 0$$

эканини топамиз. Демак, $S_1(0)$ сферада

$$Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant c > 0$$

бўлади.

Энди

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

ни баҳолаймиз. Коши — Буняковский тенгсизлигидан фойдаланиб, топамиз:

$$\left|\sum_{i,k=1}^{m}\alpha_{ik}\xi_i\xi_k\right|=\left|\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\xi_k\right)\xi_i\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\xi_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}\xi_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}^2\sum_{k=1}^{m}\xi_k^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i,k=1}^{m}\alpha_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Маълумки, $\Delta x_1\to 0$, $\Delta x_2\to 0$, $\ldots$, $\Delta x_m\to 0$ да барча $\alpha_{ik}\to 0$. Бундан фойдаланиб x^0 нуқтанинг атрофини етарлича кичик қилиб олиш ҳисобига

$$\left(\sum_{i,k=1}^{m}\alpha_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{c}{2}$$

тенгсизликка эришиш мумкин. Демак, (13.41) дан

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}\left(\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\xi_i\xi_k+\sum_{i,k=1}^{m}\alpha_{ik}\xi_i\xi_k\right)\geqslant\frac{\rho^2}{2}\left(c-\frac{c}{2}\right)=\frac{\rho^2c}{4}>0.$$

2. Қуйидаги

$$Q(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)=\sum_{i,k=1}^{m}\alpha_{ik}\xi_i\xi_k$$

квадратик форма манфий аниқланган бўлсин. Бу ҳолда x^0 нуқтанинг етарлича кичик атрофида $\Delta=\frac{\rho^2}{2}\left(\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\xi_i\xi_k+\sum_{i,k=1}^{m}\alpha_{ik}\xi_i\xi_k\right)<0$ бўлиши 1-ҳолдагига ўхшаш кўрсатилади. Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

13.10-теорема, *$f(x)$ функция x^0 нуқтанинг бирор $U_\delta(x^0)$ атрофида ($\delta>0$) берилган бўлсин ва у ушбу шартларни бажарсин:*

1) $f(x)$ функция $U_\delta(x^0)$ да барча ўзгарувчилар $x_1, x_2, \ldots, x_m$ бўйича биринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга;

2) x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг стационар нуқтаси;

3) коэффициентлари

$$a_{ik}=f''_{x_ix_k}(x^0)\quad(i,k=1,2,\ldots,m)$$

бўлган

$$Q(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)=\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\xi_i\xi_k$$

квадратик форма мусбат (манфий) аниқланган. У ҳолда $f(x)$ функция x^0 нуқтада минимумга (максимумга) эришади.

Бу теорема функция экстремумининг етарли шартини ифодалайди.

3. Агар

$$Q(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

квадратик форма ноаниқ бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эришмайди. Шуни исботлайлик. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ ларнинг шундай $(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ ва $(\overline{h}, \overline{h}_2, \ldots, \overline{h}_m)$ қийматлари топиладики,

$$Q(h_1, h_2, \ldots, h_m) > 0,\ Q(\overline{h}_1, \overline{h_2}, \ldots, \overline{h}_m) < 0 \qquad (13.42)$$

бўлади.

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) \text{ ва } (x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_m^0 + h_m)$$

нуқталарни бирлаштирувчи

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + th_1, \\ x_2 &= x_2^0 + th_2, \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots \\ x_m &= x_m^0 + th_m\ (0 \leqslant t \leqslant 1) \end{aligned} \qquad (13.43)$$

кесманинг нуқталари учун юқоридаги (13.41) муносабат ушбу

$$\Delta = \frac{t^2}{2}\left(\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}h_i h_k + \sum_{i,k=1}^{m} \alpha_{ik}h_i h_k\right)$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи (12.42) га кўра мусбат бўлади. Иккинчи қўшилувчи эса, $t \to 0$ да нолга интилади (чунки $t \to 0$ да $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0 \to 0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0 \to 0$, $\ldots$, $\Delta x_m = x_m x_m^0 \to 0$). Демак, (13.43) кесманинг x^0 нуқтага етарлича яқин бўлган x нуқталари учун Δ айирма мусбат, яъни

$$f(x) > f(x^0)$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + t\overline{h}_1, \\ x_2 &= x_2^0 + t\overline{h}_2, \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots \\ x_m &= x_m^0 + t\overline{h}_m \end{aligned}$$

кесманинг x^0 нуқтага етарлича яқин бўлган x нуқталари учун Δ айирма манфий, яъни

$$f(x) < f(x^0)$$

бўлиши кўрсатилади.

Демак, $\Delta = f(x) - f(x^0)$ айирма x^0 нуқтанинг ҳар қандай етарлича кичик атрофида ўз ишорасини сақламайди. Бу эса $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада экстремумга эришмаслигини билдиради.

4 — 5. Агар

$$Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

квадратик форма яриммусбат аниқланган бўлса ёки яримманфий аниқланган бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эришиши ҳам, эришмаслиги ҳам мумкин. Бу «шубҳали» ҳол қўшимча текшириб аниқланади.

Юқоридаги 13.10-теореманинг 3-шарти, яъни $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ квадратик форманинг мусбат ёки манфий аниқланганликка алоқадор шарти теореманинг марказий қисмини ташкил этади. Квадратик форманинг мусбат ёки манфий аниқланганлигини алгебра курсидан маълум бўлган Сильвестр аломатидан фойдаланиб топиш мумкин. Қуйида бу аломатни исботсиз келтирамиз.

Сильвестр аломати. Ушбу

$$P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \sum_{i,k=1}^{m} b_{ik}\xi_i\xi_k$$

квадратик форманинг мусбат аниқланган бўлиши учун

$$b_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

тенгсизликларнинг, манфий аниқланган бўлищи учун

$$b_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad \ldots, \quad (-1)^m \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

тенгсизликларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Хусусий ҳолни, функция икки ўзгарувчига боғлиқ бўлган ҳолни қарайлик.

$f(x_1, x_2)$ функция $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтанинг бирор атрофи

$$U_\delta(x^0) = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : \rho(x, x^0) < \delta\} \quad (\delta > 0)$$

да берилган бўлсин ва бу атрофда барча биринчи, иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. x^0 эса қаралаётган функциянинг стационар нуқтаси бўлсин:

$$f'_{x_1}(x^0) = 0, \quad f''_{x_2}(x^0) = 0.$$

Одатдагидек

$$a_{11} = f''_{x_1^2}(x^0), \quad a_{12} = f''_{x_1x_2}(x^0), \quad a_{22} = f''_{x_2^2}(x^0).$$

1°. Агар

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \text{ ва } a_{11} > 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада минимумга эришади.

2°. Агар

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \text{ ва } a_{11} < 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада максимумга эришади.

3°. Агар

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эришмайди.

4°. Агар

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

бўлса. $f(x)$ функция x^0 нуқтада экстремумга эришиши ҳам мумкин, эришмаслиги ҳам мумкин. Бу «шубҳали» ҳол қўшимча текшириш ёрдамида аниқланади.

Ҳақиқатан ҳам, 1°- ва 2°- ҳолларда квадратик форма мос равишда мусбат аниқланган ёки манфий аниқланган бўлади (қаралсин: Сильвестр аломати).

3°- ҳолда, яъни

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0 \tag{13.44}$$

бўлганда $Q(\xi_1, \xi_2) = a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2$ квадратик форма ноаниқ бўлади. Шуни исботлайлик.

$a_{11} = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (13.44) дан $a_{12} \neq 0$ бўлиши келиб чиқади. Натижада $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик форма ушбу

$$Q(\xi_1, \xi_2) = (2a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2)\,\xi_2$$

кўринишга келади. Бу квадратик форма

$$\xi_1 = \frac{1 - a_{22}}{2a_{12}}, \quad \xi_2 = 1$$

қийматда мусбат:

$$Q\left(\frac{1 - a_{22}}{2a_{12}}, 1\right) = 1 > 0 \text{ ва } \xi_1 = \frac{1 + a_{22}}{2a_{12}}, \ \xi_2 = -1,$$

қийматда эса манфий:

$$Q\left(\frac{1 + a_{22}}{2a_{12}}, -1\right) = -1 < 0$$

бўлади.

Энди $a_{11} > 0$ бўлсин. Бу ҳолда $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик формани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$Q(\xi_1, \xi_2) = a_{11}\left[\left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2\right)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}^2}\xi_2^2\right] \quad (13.45$$

Кейинги тенгликдан $\xi_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, $\xi_2 = 1$ қийматда

$$Q\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}},\ 1\right) < 0$$

ва $\forall\ \xi_1 > -\frac{a_{12}}{a_{11}} + \sqrt{\frac{a_{12}^2 - a_{22}a_{22}}{a_{11}^2}}$, $\xi_2 = 1$ қийматларда эса

$$Q\ (\xi_1,\ 1) > 0$$

бўлишини топамиз.

Ва ниҳоят, $a_{11} < 0$ бўлсин. Бу ҳолда (13.45) муносабатдан фойдаланиб, $Q\ (\xi_1,\ \xi_2)$ квадратик форманинг $\xi_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, $\xi_2 = 1$ қийматда мусбат $Q\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}},\ 1\right) > 0$ ва $\forall\ \xi_1 > -\frac{a_{12}}{a_{11}} + \sqrt{\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{12}^2}}$, $\xi_1 = 1$ қийматларда эса манфий

$$Q\ (\xi_1,\ 1) > 0$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ бўлганда $Q\ (\xi_1,\ \xi_2)$ квадратик форманинг ноаниқ бўлиши исбот этилди.

4°- ҳолни, яъни $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ бўлган ҳолни қарайлик. Бу ҳолда, $a_{11} = 0$ бўлса, унда $a_{12} = 0$ бўлиб, $Q\ (\xi_0,\ \xi_2)$ квадратик форма ушбу

$$Q\ (\xi_1.\ \xi_2) = a_{22}\xi_2^2$$

кўринишни олади.

Равшанки, $a_{22} \geqslant 0$ бўлганда

$$Q\ (\xi_1,\ \xi_2) \geqslant 0,$$

$a_{22} \leqslant 0$ бўлганда

$$Q\ (\xi_1,\ \xi_2) \leqslant 0$$

бўлиб, ξ_1 нинг ихтиёрий қийматида

$$Q\ (\xi_1,\ 0) = 0$$

бўлади.

Агар $a_{11} > 0$ бўлса,

$$Q\ (\xi_1,\ \xi_2) = a_{11}\ \left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\ \xi_2\right)^2 \geqslant 0,$$

$a_{11} < 0$ бўлганда

$$Q\ (\xi_1,\ \xi_2) = a_{11}\ \left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\ \xi_2\right)^2 \leqslant 0$$

бўлиб, ξ_1 ва ξ_2 ларнинг

$$\xi_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2$$

тенгликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик форма нолга тенг бўлади. Демак, қаралаётган ҳолда $Q(\xi_1, \xi_2)$ квадратик форма яриммусбат аниқланган ёки ярimманфий аниқланган бўлади.

Энди мисоллар қараймиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1 x_2 \quad (a \neq 0)$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3ax_2, \; f'_{x_2}(x_1, x_2) = 3x_2^2 - 3ax_1,$$

$$f''_{x_1^2}(x_1, x_2) = 6x_1, \; f''_{x_1x_2}(x_1, x_2) = -3a, \; f''_{x_2^2}(x_1, x_2) = 6x_2$$

бўлади.

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 3ax_2 = 0, \\ 3x_2^2 - 3ax_1 = 0 \end{cases}$$

системани ечиб, берилган функциянинг стационар нуқталари $(0, 0)$ ва (a, a) эканини топамиз.

(a, a) нуқтада

$$a_{11} = 6a, \; a_{13} = -3a, \; a_{22} = 6a$$

бўлиб,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 27a^2 > 0$$

бўлади.

Демак, $a > 0$ бўлганда ($a_{11} > 0$ бўлиб) функция (a, a) нуқта минимумга эришади, $a < 0$ бўлганда функция (a, a) нуқтада максимумга эришади. Равшанки, $f(a, a) = -a^3$. $(0, 0)$ нуқтада

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -9a^2 < 0$$

бўлади. Демак, берилган функция $(0, 0)$ нуқтада экстремумга эришмайди.

2. Қуйидаги

$$f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)^2 + (x_2 + 2)^3$$

функцияни қарайлик. Берилган функциянинг стационар нуқтаси $(-2, -2)$ нуқта бўлади. Бу нуқтада

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

бўлишини топиш қийин эмас. Демак, биз бу ерда юқоридаги 4°-«шубҳали» ҳолни учратяпмиз. Экстремум бор-йўқлигини аниқлаш учун қўшимча текшириш ўтказишимиз керак. $(-2, -2)$ нуқтадан ўтувчи $x_2 = x_1$ тўғри чизиқнинг нуқталарини қараймиз. Равшанки, бу тўғри чизиқ нуқталарида берилган функция

$$f(x_1, x_2) = (x_2 + 2)^3$$

бўлиб, $x_2 < -2$ да $f(x_1, x_2) < 0$. $x_2 > -2$ да $f(x_1, x_2) > 0$ бўлади. Демак, $f(x_1, x_2)$ функция $(-2, -2)$ нуқта атрофида ишора сақламайди. Бинобарин, берилган функция $(-2, -2)$ нуқтада экстремумга эришмайди.

11- §. Ошкормас функциялар

1. Ошкормас функция тушунчаси. Мазкур курснинг 1-қисм, 4-боб, 1- § ида функция таърифи келтирилган эди. Уни эслатиб ўтамиз. Агар X тўпламдаги ($X \subset R$) ҳар бир x сонга бирор қоида ёки қонунга кўра Y тўпламдан ($Y \subset R$) битта y сон мос қўйилган бўлса, X тўпламда функция берилган деб аталар ва у

$$f: x \to y \text{ ёки } y = f(x)$$

каби белгиланар эди. Бунда x га y ни мос қўядиган қоида ёки қонун турлича, жумладан аналитик, жадвал ҳамда график усулларда бўлишини кўрдик. Масалан, функциянинг график усулда берилишида x билан y орасидаги боғланиш текисликдаги эгри чизиқ ёрдамида бажариларди.

Энди икки x ва y аргументларнинг $F(x, y)$ функцияси

$$M = \{(x, y) \in R^2 : a < x < b,\ c < y < d\}$$

тўпламда берилган бўлсин. Ушбу

$$F(x, y) = 0$$

тенгламани қарайлик. Бирор x_0 сонни ($x_0 \in (a, b)$) олиб, уни юқоридаги тенгламадаги x нинг ўрнига қўямиз. Натижада y ни топиш учун қуйидаги

$$F(x_0, y) = 0 \qquad (13.46)$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг ечими ҳақида ушбу ҳоллар бўлиши мумкин:

1°. (13.46) тенглама ягона ҳақиқий y_0 ечимга эга,

2°. (13.46) тенглама битта ҳам ҳақиқий ечимга эга эмас,

3°. (13.46) тенглама бир нечта, ҳатто чексиз кўп ҳақиқий ечимга эга.

Масалан,

$$F(x, y) = \begin{cases} y - x^2, & \text{агар } x \geqslant 0 \text{ бўлса}, \\ y^2 + x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлсин. У ҳолда

$$F(x, y) = 0 \qquad (13.47)$$

тенглама $x_0 \geqslant 0$ бўлганда, ягона $y = x_0^2$ ечимга, $x_0 < 0$ бўлганда иккита

$$y = \sqrt{-x_0}, \qquad y = -\sqrt{-x_0}$$

ечимларга эга бўлади.

Агар бирор $F(x, y) = 0$ тенглама учун 1°-ҳол ўринли бўлса, бундай тенглама эътиборга лойиқ. Унинг ёрдамида функция аниқланиши мумкин.

Энди x ўзгарувчининг қийматларидан иборат шундай X тўпламни қарайликки, бу тўпламдан олинган ҳар бир қийматда $F(x, y) = 0$ тенглама ягона ечимга эга бўлсин.

X тўпламдан ихтиёрий x сонни олиб, бу сонга $F(x, y) = 0$ тенгламанинг ягона ечими бўлган y сонни мос қўямиз. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x га юқорида кўрсатилган қоидага кўра битта y мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Бунда x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш $F(x, y)=0$ тенглама ёрдамида бўлади. Одатда бундай берилган (аниқланган) функция *ошкормас кўринишда берилган функция* (ёки *ошкормас функция*) деб аталади ва

$$x \to y : F(x, y) = 0$$

каби белгиланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$F(x, y) = y\sqrt{x^2-1} - 2$$

функцияни қарайлик. Равшанки,

$$F(x, y) = y\sqrt{x^2-1} - 2 = 0 \qquad (13.48)$$

тенглама x нинг $R \setminus \{x \in R: \ -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ дан олинган ҳар бир қийматида ягона

$$y = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}$$

ечимга эга, бундан

$$F\left(x, \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\right) \equiv 0.$$

Натижада (13.48) тенглама ёрдамида берилган ушбу

$$x \to y = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} : F\left(x, \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\right) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияга эга бўламиз.

2. Ушбу

$$F(x, y) = x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0 \qquad (13.49)$$

тенгламани қарайлик. Уни қуйидагича

$$x = y - \frac{1}{2}\sin y = (y) \quad (y \in (-\infty, \infty))$$

кўринишда ёзиб оламиз. Равшанки, $\varphi(y)$ функция $(-\infty, \infty)$ да узлуксиз ва $\varphi'(y) = 1 - \frac{1}{2}\cos y > 0$ ҳосилага эга.

Унда тескари функция ҳақидаги теоремага кўра (I-қисм, 5-боб, 7-§) $y = \varphi^{-1}(x)$ функция мавжуддир. Демак, $(-\infty, \infty)$ олинган x нинг ҳар бир қийматида (13.49) тенглама ягона $y = \varphi^{-1}(x)$ ечимга эга, бундан

$$F(x, \varphi^{-1}(x)) = 0.$$

Ҳар бир x га $\varphi^{-}(x)$ ни мос қўйиб,

$$x \to \varphi^{-1}(x) : F(x, \varphi^{-1}(x)) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияга эга бўламиз.

3. Юқорида келтирилган (13.47) тенглама ҳам $x > 0$ да

$$x \to x^2 : F(x, x^2) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди.

4. Қуйидаги

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - \ln y = 0 \quad (y > 0)$$

тенгламани қарайлик. Бу тенглама x нинг $(-\infty, \infty)$ оралиқдан олинган хеч бир қийматида ечимга эга эмас. Чунки хар доим $y^2 - \ln y > 0$. Бу холда берилган тенглама ёрдамида функция аниқланмайди.

13.5-эслатма. Фараз қилайлик, ушбу

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ошкормас кўринишдаги функцияни аниқламасин. Баъзан, бу холда y га маълум шарт қўйиш натижасида юқоридаги тенглама ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлаши мумкин.

Масалан, қуйидаги

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{13.50}$$

тенгламани қарайлик. Бу тенглама x нинг $(-1, 1)$ оралиқдан олинган хар бир қийматида иккита

$$y = -\sqrt{1-x^2},$$
$$y = \sqrt{1-x^2}$$

ечимларга эга. Агар y га, унинг қийматлари $[-1, 0]$ сегментда бўлсин, деб шарт қўйилса у холда (13.50) тенглама ёрдамида аниқланган

$$x \to -\sqrt{1-x^2}, \ F(x, -\sqrt{1-x^2}) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функция хосил бўлади.

2. Ошкормас функциянинг мавжудлиги. Биз юқорида

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ёрдамида хар доим ошкормас кўринишдаги функция аниқланавермаслигини кўрдик.

Энди тенглама, яъни $F(x, y)$ функция қандай шартларни бажарганда ошкормас кўринишдаги функциянинг аниқланиши, бошқача айтганда, ошкормас кўринишдаги функциянинг мавжуд бўлиши масаласи билан шуғулланамиз.

13.11-теорема. *$F(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг бирор*

$$U_{h,k}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x^0 - h < x < x_0 + h, \ y_0 - k < < y < y_0 + k\}$$

атрофида ($h > 0$, $k > 0$) берилган ва у қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз;

2) x ўзгарувчининг $(x_0 - h, x_0 + h)$ оралиқдан олинган хар бир тайин қийматида y ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи;

3) $F(x_0, y_0) = 0$.

У холда (x_0, y_0) нуқтанинг шундай

$$U_{\delta,\varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \ y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$

атрофи ($0 < \delta < h$, $0 < \varepsilon < k$) топиладики,

1') $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ учун

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ягона y ечимга $(y \in (y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon))$ эга, яъни $F(x,\ y) = 0$ тенглама ёрдамида

$$x \to y : F(x,\ y) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функция аниқланади,

2′) $x = x_0$ бўлганда унга мос келган $y = y_0$ бўлади,

3′) ошкормас кўринишда аниқланган

$$x \to y : F(x,\ y) = 0$$

функция $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз бўлади.

Исбот. $U_{h,\ k}((x_0,\ y_0))$ атрофга тегишли бўлган $(x_0,\ y_0 - \varepsilon)$, $(x_0\ x_0 + + \varepsilon)$ нуқталарни олайлик. Равшанки, $[y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon]$ оралиқда $F(x_0,\ y)$ функция ўсувчи бўлади. Демак,

$$y_0 - \varepsilon < y_0 \Rightarrow F(x_0,\ y_0 - \varepsilon) < F(x_0,\ y_0),$$
$$y_0 + \varepsilon > y_0 \Rightarrow F(x_0,\ y_0 + \varepsilon) > F(x_0,\ y_0).$$

Теореманинг 3-шартига кўра

$$F(x_0,\ y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_0,\ y_0 + \varepsilon) > 0$$

бўлади.

Теореманинг 1-шартига кўра $F(x,\ y)$ функция $U_{h,\ k}((x_0,\ y_0)$ да узлуксиз. Бинобарин $F(x,\ y_0 - \varepsilon)$ ва $F(x,\ y_0 + \varepsilon)$ функциялар $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ оралиқда узлуксиз бўлади. Унда узлуксиз функциянинг хоссасига кўра (қаралсин, 1-қисм, 5-боб, 7-§) x_0 нуқтанинг шундай атрофи $x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ топиладики $(0 < \delta < h)$, $\forall\ x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ учун $F(x,\ y_0 - \varepsilon) < 0,\ F(x,\ y_0 + \varepsilon) > 0$ бўлади.

Равшанки, $(x_0,\ y_0)$ нуқтанинг ушбу

$$U_{\delta,\ k}((x_0,\ y_0)) = \{(x,\ y) \in R^2:\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ y_0 - k < y < y_0 + k\}$$

атрофи учун теореманинг барча шартлари бажарилаверади, чунки

$$U_{\delta,\ k}((x_0,\ y_0)) < U_{h,\ k}((x_0,\ y_0)).$$

$\forall\ x^* \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ нуқтани олиб, $F(x^*,\ y)$ функцияни қарайлик. Бу функция, юқорида айтилганига кўра $[y_0 - \varepsilon,\ y + \varepsilon]$ оралиқда узлуксиз ва унинг четки нуқталарида турли ишорали қийматларга эга:

$$F(x^*,\ y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x^*,\ y_0 + \delta) > 0$$

У ҳолда Больцано — Кошининг биринчи теоремасига кўра (қаралсин, 1-қисм, 5-боб, 7-§) шундай y^* топиладики $(y^* \in (y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon))$,

$$F(x^*,\ y^*) = 0$$

бўлади. Бу топилган y^* ягона бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$y \neq y^* \Rightarrow F(x^*,\ y) \neq F(x^*,\ y^*), \ (y \in [y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon])$$

чунки, $F(x^*,\ y)$ ўсувчи бўлганлиги сабабли $y > y^*$ учун $F(x^*,\ y) > > F(x^*,\ y^*)$ ва $y < y^*$ учун $F(x^*,\ y) < F(x^*,\ y^*)$ бўлади.

Шундай қилиб, x нинг $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ оралиқдан олинган ҳар бир қийматида $F(x,\ y) = 0$ тенглама ягона y ечимга эга эканлиги кўрсатилди. Бу эса $F(x,\ y) = 0$ тенглама ёрдамида

$$x \to y:\ F(x,\ y) = 0 \tag{13.51}$$

ошкормас кўринишдаги функция аниқланганлигини билдиради.

$x = x_0$ бўлсин. Унда теореманинг 3-шарти $F(x_0, y_0) = 0$ дан, x_0 га y_0 ни мос қўйилгандагина:

$$x_0 \to y_0 : F(x_0, y_0) = 0.$$

Демак, $x = x_0$ да ошкормас функциянинг қиймати y_0 га тенг бўлади.

Энди ошкормас функциянинг $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз бўлишини кўрсатамиз.

Равшанки, $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ га мос қўйиладиган $y \in (y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon)$ бўлади. Бу эса ошкормас функциянинг $x = x_0$ нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради.

Ошкормас функциянинг $\forall\ x^* \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатиш бу функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатиш кабидир.

Ҳақиқатан ҳам, $F(x, y) = 0$ тенглама (x_0, y_0) нуқтанинг атрофи $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да ошкормас функцияни аниқлаганлигидан, шундай $y^* \in (y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon)$ топиладики, $F(x^*, y^*) = 0$ бўлади. Юқоридаги мулоҳазани (x^*, y^*) нуқтага нисбатан юритиб, $F(x, y) = 0$ тенглама (x^*, y^*) нуқтанинг атрофида ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлашини (бу аниқланган функция (13.51) нинг ўзи бўлади), уни x^* нуқтада узлуксиз бўлишини топамиз. Демак, ошкормас функция $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз бўлади. Теорема исбот бўлди.

13.6-э с л а т м а. 13.11-теорема, $F(x, y)$ функция x ўзгарувчининг $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида y ўзгарувчининг функцияси сифатида камаювчи бўлганда ҳам ўринли бўлади.

Биз юқорида $F(x, y) = 0$ тенгламани (x_0, y_0) нуқтанинг атрофида x ни y нинг функцияси сифатида аниқлашини ифодалайдиган теоремани келтирдик.

Худди шунга ўхшаш, $F(x, y) = 0$ тенглама (x_0, y_0) нуқтанинг атрофида y ни x нинг функцияси сифатида аниқлашини ифодалайдиган теоремани келтириш мумкин.

13.12-т е о р е м а. *$F(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг бирор $U_{h, k}((x_0, y_0))$ атрофида $(h > 0,\ k > 0)$ берилган ва у қуйидаги шартларни бажарсин:*

1) *$U_{h, k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз;*

2) *y ўзгарувчининг $(y_0 - k,\ y_0 + k)$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи (камаювчи),*

3) *$F(x_0, y_0) = 0$.*

У ҳолда (x_0, y_0) нуқтанинг шундай

$$U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$

атрофи $(0 < \delta < h,\ 0 < \varepsilon < k)$ топиладики,

1′) *$\forall\ y \in (y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon)$ учун*

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ягона x $(x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta))$ ечимга эга, яъни $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида $y \to x :\ F(x, y) = 0$ ошкормас кўринишдаги функция аниқланади;

2′) *$y = y_0$ бўлганда унга мос келган $x = x_0$ бўлади,*

3′) *ошкормас кўринишда аниқланган функция*

$$y \to x:\ F(x, y) = 0$$

$(y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon)$ *да узлуксиз бўлади.*

Бу теореманинг исботи юқорида келтирилган 13.11-теореманинг исботи кабидир.

3. Ошкормас функциянинг ҳосиласи. Энди ошкормас функциянинг ҳосиласини топиш билан шуғулланамиз.

13.13-теорема. *$F(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг бирор*

$$U_{h,k}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2:\ x_0 - h < x < x_0 + h,\ y_0 - k < y < y_0 + k\}$$

атрофида $(h > 0,\ k > 0)$ берилган ва у қуйидаги шартларни бажарсин:

1) *$U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз,*

2) *$U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ва $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$;*

3) *$F(x_0, y_0) = 0$.*

У ҳолда (x_0, y_0) нуқтанинг шундай

$$U_{\delta,\varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2:\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$

атрофи $(0 < \delta < h,\ 0 < \varepsilon < k)$ топиладики,

1′) *$\forall\, x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ учун*

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ягона y ечимга $(y \in (y_0 - \varepsilon,\ y_0 + \varepsilon))$ эга, яъни $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида

$$x \to y:\ F(x, y) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функция аниқланади;

2′) *$x = x_0$ бўлганда унга мос келадиган $y = y_0$ бўлади;*

3′) *ошкормас кўринишда аниқланган*

$$x \to y:\ F(x, y) = 0$$

функция $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз бўлади;

4′) *бу ошкормас кўринишдаги функция $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз ҳосилага эга бўлади.*

Исбот. Шартга кўра $F'_y(x, y)$ функция $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз ва $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Аниқлик учун $F'_y(x_0, y_0) > 0$ дейлик. У ҳолда узлуксиз функциянинг хоссасига кўра (x_0, y_0) нуқтанинг шундай

$$U_{\delta,\varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2:\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$$

атрофи $(0 < \delta < h,\ 0 < \varepsilon < k$ топиладики, $\forall\, (x, y) \in U_{\delta,\varepsilon}((x_0, y_0))$ учун $F'_y(x, y) > 0$ бўлади. Демак, $F(x, y)$ функция x ўзгарувчининг $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида, y ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи. Юқорида исбот этилган 13.11-теоремага кўра

$$F(x, y) = 0$$

тенглама $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ да

$$x \to y:\ F(x, y) = 0$$

ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди, $x = x_0$ бўлганда унга мос келган $y = y_0$ бўлади ва ошкормас функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да узлуксиз бўлади.

Энди ошкормас функциянинг ҳосиласини топамиз, x_0 нуқтага шундай Δx орттирма берайликки, $x_0 + \Delta x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ бўлсин. Натижада

$$x \to y: \; F(x, y) = 0$$

ошкормас фуниция ҳам орттирмага эга бўлиб,

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$$

бўлади. Демак,

$$\Delta F(x_0, y_0) = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = 0) \qquad (13.52)$$

Шартга кўра $F'_x(x, y)$ ва $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилалар $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да узлуксиз. Бинобарин $F(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи:

$$\Delta F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y. \qquad (13.52')$$

Бу муносабатдаги α ва β лар Δx ва Δy ларга боглиқ ва $\Delta x \to 0$ да $\Delta y \to 0$, $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$.

(13.52′) ва (13.52) муносабатлардан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha}{F'_y(x_0, y_0) + \beta}$$

эканлиги келиб чиқади.

Ошкормас функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлигини эътиборга олиб, кейинги тенгликда $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha}{F'_y(x_0, y_0) + \beta} \right) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Демак,

$$y'_{x = x_0} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

$U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилалар узлуксиз ва $F'_y(x, y) \neq 0$ бўлишидан ошкормас функциянинг ҳосиласи

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

нинг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - 2 = 0 \qquad (13.53)$$

тенгламани қарайлик. Равшанки, $F(x, y) = xe^y + ye^x - 2$ функция $\{(x, y) \in R^2: -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$ тўпламда юқоридаги 13.11- теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Демак, $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ атрофида (13.53) тенглама ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди ва бу ошкормас функциянинг ҳосиласи

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$$

бўлади.

Ошкормас кўринишдаги функциянинг ҳосиласини қуйидагича ҳам ҳисобласа бўлади. y нинг x га боғлиқ эканини эътиборга олиб, $F(x, y) = 0$ дан топамиз:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\cdot y' = 0.$$

Бундан эса

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

бўлиши келиб чиқади.

Юқорида келтирилган (13.53) тенглама ёрдамида аниқланган ошкормас кўринишдаги функциянинг ҳосиласини ҳисоблайлик:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\, y' = e^y + ye^x + (xe^y + e^x)\, y' = 0, \qquad (*)$$

$$y' = -\frac{e^y + ye^x}{e^x + xe^y}.$$

4. Ошкормас функциянинг юқори тартибли ҳосилалари. Фараз қилайлик,

$$F(x, y) = 0$$

тенглама $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ атрофида ошкормас кўринишдаги функцияни аниқласин. Агар $F(x, y)$ функция $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да узлуксиз $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга ($F'_y(x, y) \neq 0$) эга бўлса, ошкормас кўринишдаги функция узлуксиз ҳосилага эга бўлиб,

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \qquad (13.54)$$

бўлади.

Энди $F(x, y)$ функция $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ да узлуксиз иккинчи тартибли $F''_{x^2}(x, y)$, $F''_{xy}(x, y)$, $F''_{y^2}(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин, y нинг x га боғлиқлигини эътиборга олиб, (13.54) тенгликни x бўйича дифференциаллаб қуйидагини топамиз:

$$y'' = -\frac{(F'_x(x, y))'_x\, F'_y(x, y) - (F'_y(x, y))'_x\, F'_x(x, y)}{(F'_y(x, y))^2}.$$

Агар

$$(F'_x(x, y))'_x = F''_{x^2}(x, y) + F''_{xy}(x, y)\, y'.$$
$$(F'_y(x, y))'_x = F''_{yx}(x, y) + F''_{y^2}(x, y)\, y' \qquad (13.55)$$

эканлигини ҳисобга олсак, унда

$$y''=\frac{(F''_{yx}(x, y)+F''_{y^2}(x, y)\cdot y')\cdot F'_x(x, y)-(F''_{x^2}(x, y)+F''_{xy}(x, y)\cdot y')\cdot F'_y(x, y)}{(F'_y(x, y))^2}=$$

$$=\frac{F''_{yx}(x, y)\cdot F'_x(x, y)-F''_{x^2}(x, y)\cdot F'_y(x, y)+[F''_{y^2}(x, y)\cdot F'_x(x, y)-F''_{xy}(x, y)F'_y(x, y)]y'}{(F'_y(x, y))^2}$$

бўлади. Бу ифодадаги y' нинг ўрнига унинг қиймати $-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ ни қўйиб, ошкормас кўринишдаги функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи учун қуйидаги формулага келамиз:

$$y''=\frac{2F'_x(x, y)\cdot F'_y(x, y)\cdot F''_{xy}(x, y)-F'^2_y(x, y)F''_{x^2}(x, y)F'^2_x(x, y)F''_{y^2}(x, y)}{(F'_y(x, y))^3}.$$

Худди шу йўл билан ошкормас функциянинг учинчи ва ҳоказо тартибдаги ҳосилалари топилади.

13.7-эслатма. Ушбу

$$F(x, y)=0$$

тенглама билан аниқланган ошкормас кўринишдаги функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини қуйидагича ҳам ҳисобласа бўлади.

$F(x, y)=0$ ни дифференциаллаб,

$$F'_x(x, y)+F'_y(x, y)\cdot y'=0$$

бўлишини топган эдик. Буни яна бир марта дифференциаллаймиз:

$$(F'_x(x, y))'_x+(F'_y(x, y)\cdot y')'_x=$$

$$=(F'_x(x, y))'_x+y'\cdot(F'_y(x, y))'_x+F'_y(x, y)\cdot y''=0.$$

Юқоридаги (13.55) муносабатдан фойдалансак, у ҳолда ушбу

$$F''_{x^2}(x, y)+2F''_{xy}(x, y)y'+F''_{y^2}(x, y)\cdot y'^2+F'_y(x, y)\cdot y''=0$$

тенгликка келамиз. Унда эса

$$y''=-\frac{F''_{x^2}(x, y)+2F''_{xy}(x, y)\cdot y'+F''_{y^2}(x, y)\cdot y'^2}{F'_y(x, y)}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликдаги y' нинг ўрнига унинг қиймати $-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ ни қўйсак, унда

$$y''=\frac{2F'_x(x, y)F'_y(x, y)F''_{xy}(x, y)-F'^2_y(x, y)F''_{x^2}(x, y)-F'^2_x(x, y)\cdot F''_{y^2}(x, y)}{(F'_y(x, y))^3}$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$F(x, y)=xe^y+ye^x-2=0$$

ни дифференциаллаб (қаралсин (*) формула),

$$e^y + ye^x + (xe^y + e^x)\cdot y' = 0$$

бўлишини топган эдик. Буни яна бир марта дифференциаллаб топамиз:

$$e^y \cdot y' + y' e^x + ye^x + e^y \cdot y' + xe^y y' \cdot y' + xe^y y'' + y'' e^x + y'e^x = 0,$$

яъни

$$y''(xe^y + e^x) + 2e^y y' + 2e^x y' + xe^y y'^2 + ye^x .$$

Бундан эса

$$y'' = -\frac{2e^y y' + 2e^x y' + xe^y y'^2 + ye^x}{xe^y + e^x}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликдаги y' унинг ўрнига унинг қиймати

$$y' = -\frac{e^y + ye^x}{e^x + xe^y}$$

ни қўйиб, ошкормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топамиз.

5. Кўп ўзгарувчили ошкормас функциялар. Кўп ўзгарувчили ошкормас кўринишдаги функция тушунчаси юқорида ўрганилган бир ўзгарувчили ошкормас кўринишдаги функция тушунчаси каби киритилади.

$F(x, y) = F(x_1, x_2, \ldots, x_m y)$ функция ($x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^n$) $M = \{(x, y) \in R^{n+1}:\ a_1 < x_1 < b_1, \ldots, a_m < x_m < b_m,\ c < y < d\}$ тўпламда берилган бўлсин. Ушбу

$$F(x, y) = F(x_1, x_2 \ldots, x_m, y) = 0 \qquad (13.56)$$

тенгламани қарайлик.

$x \in R^m$ нуқталардан иборат шундай X тўпламни ($X \subset R^m$) қарайликки, бу тўпламдан олинган ҳар бир нуқтада (13.56) тенглама ягона ҳақиқий ечимга эга бўлсин. Энди X тўпламдан ихтиёрий x нуқтани олиб, бу нуқтага (13.56) тенгламанинг ягона ечими бўлган y ни мос қўямиз. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x нуқтага, юқорида кўрсатилган қоидага кўра, битта y мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Бундай аниқланган функция кўп ўзгарувчили (m та ўзгарувчили) ошкормас кўринишда берилган функция деб аталади ва

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to y:\ F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 0$$

ёки

$$x \to y : F(x, y) = 0$$

каби белгиланади.

Мисол. Ушбу

$$F(x_1, x_2, y) = x_1^2 x_2 - x_2^2 y + x_1 y$$

функцияни қарайлик. Равшанки,

$$F(x_1, x_2, y) = x_1^2 x_2 - x_2^2 y + x_1 y = 0$$

тенглама $R^2 \setminus \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 = x_2^2\}$ тўпламдан олинган ҳар бир (x_1, x_2) нуқтада ягона

$$y = \frac{x_1^2 x_2}{x_2^2 - x_1}$$

ечимга эга, яъни

$$F\left(x_1, x_2, \frac{x_1^2 x_2}{x_2^2 - x_1}\right) = 0.$$

Демак, берилган тенглама ёрдамида x_1, x_2 ўзгарувчиларнинг ошкормас кўринишдаги функцияси аниқланади:

$$(x_1, x_2) \to \frac{x_1^2 x_2}{x_2^2 - x_1}: \quad F\left(x_1, x_2, \frac{x_1^2 x_2}{x_2^2 - x_1}\right) = 0$$

Энди кўп ўзгарувчили ошкормас кўринишдаги функциянинг мавжудлиги, узлуксизлиги ҳамда ҳосилаларга эга бўлиши ҳақидаги теоремаларни келтирамиз.

13.14-теорема. *$F(x, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ функция $(x^0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_0) \in R^{m+1}$ нуқтанинг бирор $U_{h_1 h_2 \dots h_m k}((x^0, y_0)) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \in R^{m+1} : x_1^0 - h_1 < x_1 < x_1^0 + h_1,\ x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2, \dots, x_m^0 - h_m < x_m < x_m^0 + h_m,\ y_0 - k < y < y_0 + k\}$ атрофида ($h_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k > 0$) берилган ва у қуйидаги шартларни бажарсин:*

1) $U_{h_1 h_2 \dots k_m k}((x^0, y_0))$ да узлуксиз;

2) *$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ўзгарувчининг*

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - h_1 < x_1 < x_1^0 + h_1,\ x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2, \dots, x_m^0 - h_m < x_m < x_m^0 + h_m\}$$

тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида y ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи (камаювчи);

3) $F(x^0, y_0) = 0$.

У ҳолда (x^0, y_0) нуқтанинг шундай

$U_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_m \varepsilon}((x^0, y_0)) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \in R^{m+1} : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1 + \delta_1,$

$x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m,\ y_0 - \varepsilon < y <$

$< y_0 + \varepsilon\}$ *атрофи ($0 < \delta_i < h_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, $0 < \varepsilon < k$) топиладики,*

1′) $\forall x \in \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$ *учун*

$$F(x, y) = 0 \tag{13.56}$$

тенглама ягона y ($y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$) ечимга эга, яъни (13.56) *тенглама $x \to y : F(x, y) = 0$ ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди:*

2′) *$x = x^0$ бўлганда, унга мос келган $y = y_0$ бўлади;*

3′) *ошкормас кўринишда аниқланган*

$$x \to y: F(x, y) = 0$$

функция

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1,\ x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \ldots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

тўпламда узлуксиз бўлади.

13.15-теорема. *$F(x, y)$ функция $(x^0, y_0) \in R^{m+1}$ нуқтанинг бирор $U_{h_1h_2\ldots h_m k}((x^0, y_0))$ атрофида берилган ва у қуйидаги шартларни бажарсин:*

1) $U_{h_1h_2\ldots h_{m_k}}((x^0, x_0))$ *да узлуксиз;*

2) $U_{h_1h_2\ldots h_m k}(x^0, y_0))$ *да узлуксиз* $F'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$ *хусусий ҳосилаларга эга ва* $F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) \neq 0$;

3) $F(x^0, y_0) = 0$.

У ҳолда (x^0, y_0) *нуқтанинг шундай* $U_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_m\varepsilon}((x^0, x_0))$ *атрофи* $(0 < \delta_i < h_i, i = 1, 2, \ldots, m, 0 < \varepsilon < k)$ *топиладики,*

1′) $\forall x \in \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1,\ x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \ldots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$ *учун*

$$F(x, y) = 0 \qquad (13.56)$$

тенглама ягона y $(y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon))$ *ечимга эга, яъни* (13.56) *тенглама* $x \to y: F(x, y) = 0$ *ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди;*

2′) $x = x^0$ *бўлганда, унга мос келадиган* $y = y_0$ *бўлади;*

3′) *ошкормас кўринишда аниқланган функция*

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \ldots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

тўпламда узлуксиз бўлади;

4′) *бу ошкормас кўринишдаги функция узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлади.*

Бу теоремаларнинг исботи юқорида келтирилган 13.12 ва 13.13-теоремаларнинг исботи кабидир. Уларни исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

Кўп ўзгарувчили ошкормас функциянинг ҳосилалари ҳам юқоридагига ўхшаш ҳисобланади.

Фараз қилайлик,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 0 \qquad (13.56)$$

тенглама берилган бўлиб, $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$ функция 13.15-теореманинг барча шартларини қаноатлантирсин. Бу тенглама аниқлаган ошкормас функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз. y нинг x_1, x_2,

$\ldots, x_m$ ларга боғлиқ эканини эътиборга олиб, (13.56) дан қуйидагиларни топамиз:

$$F'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) + F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)\cdot y'_{x_1} = 0,$$
$$F'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) + F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)\cdot y'_{x_2} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F'_{x_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) + F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)\cdot y'_{x_m} = 0.$$

Кейинги тенгликлардан эса

$$y'_{x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)}{F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)},$$
$$y'_{x_2} = -\frac{F'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)}{F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y'_{x_m} = -\frac{F'_{x_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)}{F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)}$$

бўлиши келиб чиқади.

$F(x, y)$ функция $U_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_m\varepsilon}((x^0, y_0))$ да узлуксиз юқори тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлганда $F(x, y) = 0$ тенглама аниқланган ошкормас кўринишдаги функциянинг ҳам юқори тартибли ҳосилалари мавжуд бўлади.

Мисол. Ушбу

$$F(x_1, x_2, y) = y^3 - 3x_1 x_2 y - 1 = 0$$

тенгламани қарайлик. Равшанки, $F(x_1, x_2, y) = y^3 - 3x_1 x_2 y - 1$ функция 13.15-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Бу тенглама ёрдамида аниқланган ошкормас кўринишдаги функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$y'_{x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1, x_2, y)}{F'_y(x_1, x_2, y)} = -\frac{-3x_2 y}{3y^2 - 3x_1 x_2} = \frac{x_2 y}{y^2 - x_1 x_2}, \quad (y^2 \neq x_1 x_2)$$

$$y'_{x_2} = -\frac{F'_{x_2}(x_1, x_2, y)}{F'_y(x_1, x_2, y)} = -\frac{-3x_1 y}{3y^2 - 3x_1 x_2} = \frac{x_1 y}{y^2 - x_1 y_2}.$$

Бу ошкормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосилалари қуйидагича топилади:

$$y''_{x_1^2} = \frac{(y^2 - x_1 x_2) x_2 y'_{x_1} - x_2 y (2y\cdot y'_{x_1} - x_2)}{(y^2 - x_1 x_2)^2},$$

$$y''_{x_2^2} = \frac{(y^2 - x_1 x_2) x_1 y'_{x_2} - x_1 y (2y\cdot y'_{x_2} - x_1)}{(y^2 - x_1 x_2)^2},$$

$$y''_{x_1 x_2} = \frac{(y^2 - x_1 x_2)(y + x_2 y'_{x_2}) - x_2 y (2y\cdot y'_{x_2} - x_1)}{(y^2 - x_1 x_2)^2}.$$

Бу тенгликлардаги y'_{x_1}, y'_{x_2} ларнинг ўрнига уларнинг қийматларини қўйиб қуйидагиларни топамиз:

$$y''_{x_1^2} = \frac{(y^2 - x_1 x_2)\, x_2 \dfrac{x_2}{y^2 - x_1 x_2} - x_2 y \left(2y \dfrac{x_2 y}{y^2 - x_1 x_2} - x_2\right)}{(y^2 - x_1 x_2)^2} = -\frac{2 x_1 x_2^3 y}{(y^2 - x_1 x_2)^2},$$

$$y''_{x_1^2} = \frac{(y^2 - x_1 x_2)\, x_1 \dfrac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2} - x_1 y \left(2y \dfrac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2} - x_1\right)}{(y^2 - x_1 x_2)^2} = -\frac{2 x_1^3 x_2 y}{(y^2 - x_1 x_2)^3},$$

$$y''_{x_1 x_2} = \frac{(y^2 - x_1 x_2)\left(y + x_2 \dfrac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2}\right) - x_2 y \left(2y \dfrac{x_1 y}{y^2 - x_1 x_2} - x_1\right)}{(y^2 - x_1 x_2)^3} =$$

$$= \frac{y\,(y^4 - 2y^2 x_1 x_2 - x_1^2 x_2^2)}{(y^2 - x_1 x_2)^2}.$$

6. **Тенгламалар системаси билан аниқланадиган ошкормас функциялар.** Энди, келгусида биз учун керак бўладиган янада умумийроқ ҳол билан, тенгламалар системаси орқали аниқланадиган бир неча функциялар системаси билан танишайлик.

$m+n$ та $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ва $y_1, y_2, \ldots, y_n$ аргументларнинг ушбу n та

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

функциялари R^{m+n} фазодаги бирор

$$M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1\, y_2, \ldots, y_n) \in R^{m+n}:$$
$$: a_1 < x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2, \ldots, a_m < x_m < b_m,\ c_1 < y_1 < d_1, \ldots,$$
$$c_n < y_n < d_n\}$$

тўпламда берилган бўлсин. Қуйидаги

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \\ F_2 = F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2 \ldots, y_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m\ y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \end{array}\right\} \qquad (13.57)$$

тенгламалар системасини қарайлик. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ўзгарувчининг қийматларидан иборат шундай

$$M_x = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : a_1 < x_1 < b,\ a_2 < x_2 < b_2, \ldots,$$
$$a_m < x_m < b_m\} \subset R^m$$

тўпламни қарайликки, бу тўпламдан олинган ҳар бир $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_m')$ нуқтада (13.57) система, яъни

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1', x_2', \ldots, x_m', y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \\ F_2(x_1', x_2', \ldots, x_m', y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m', y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \end{array}\right\}$$

система ягона ечимлар системаси $y_1, y_2, \ldots, y_n)$ га эга бўлсин. Энди M_x тўпламдан ихтиёрий $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нуқтани олиб, бу нуқтага (13.57) тенгламалар системасининг ягона ечимлари системаси бўлган $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ни мос қўямиз. Натижада M_x тўпламдан олинган ҳар бир $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ га юқорида кўрсатилган қоидага кўра $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лар мос қўйилиб, n та функция ҳосил бўлади. Бундай аниқланган функциялар (13.57) тенгламалар системаси ёрдамида аниқланган ошкормас кўринишдаги функциялар деб аталади. Қандай шартлар бажарилганда шу (13.57) тенгламалар системаси $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ларнинг ҳар бирини $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлаши мумкинлиги ҳақидаги масала муҳим. Бундай умумий масалани ҳал қилишни битта соддароқ ҳолни ўрганишдан бошлаймиз.

Икки $F_1 = F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ ва $F_2 = F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функция $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) \in R^4$ нуқтанинг бирор $U_{h_1h_2k_1k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)) = (x_1, x_2, y_1, y_2, \in R^4 : x_1^0 - h_1 < x_1 < x_2^0 + h_1,\ x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2\ y_1^0 - k_1 < y_1 < < y_1^0 + k_1,\ y_2^0 - k_2 < y_2 < y_2^0 + k_2)$ атрофида $(h_1 > 0, h_2 > 0, k_1 > 0, k_2 > 0$, берилган бўлсин. Ушбу

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \\ F_2 &= F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \end{aligned} \tag{13.58}$$

тенгламалар системасини қарайлик.

Энди $F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ ва $F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функциялар қандай шартларни бажарганда (13.58) тенгламалар системаси ошкормас функцияларни аниқлаши масаласи билан шуғулланамиз.

Фараз қилайлик, $F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ ва $F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функциялар учун

$$F_1(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0,\ F_2(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0$$

бўлсин. Бундан ташқари қаралаётган функциялар $U_{h_1h_2k_1k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ да узлуксиз барча хусусий ҳосилаларга эга ва, айтайлик,

$$\frac{\partial F_1(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)}{\partial y_1} \neq 0$$

бўлсин. У ҳолда 13.14-теоремага кўра $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтанинг шундай U_1 атрофи $(U_1 \subset U_{h_1h_2k_1k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ топиладики, бу атрофда

$$F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

тенглама

$$(x_1,\ x_2,\ y_2)\rightarrow y_1 : F_1(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)=0$$

ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди. Шу функцияни

$$y_1=f_1(x_1,\ x_2,\ y_2)$$

деб белгилайлик. Буни (13.58) системанинг иккинчи тенгламасидаги y_1 нинг ўрнига қўйиб қуйидагини топамиз:

$$F_2(x_1\ x_2,\ f_1(x_1\ x_2),\ y_2)=0.$$

Энди

$$\frac{\partial F_2(x_1^0,\ x_2^0,\ f_1(x_1^0,\ x_2^0),\ y_1^0)}{\partial y_2}\neq 0 \qquad (13.59)$$

бўлсин дейлик. У ҳолда яна 13.14-теоремага кўра $(x_1^0,\ x_2^0,\ y_1^0,\ y_2^0)$ нуқтанинг шундай U_2 атрофи $(U_2\subset U_{h_1h_2k_1k_2}((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ топиладики, бу атрофда

$$F_2(x_1,\ x_2,\ f(x_1,\ x_2),\ y_2)=0$$

тенглама

$$(x_1,\ x_2)\rightarrow y_2 : F_2(x_1,\ x_2,\ f(x_1,\ x_2),\ y_2)=0$$

ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди. Бу функцияни $y_2=$ $=f_2(x_1\ x_2)$ деб белгилайлик.

Шундай қилиб, (13.58) тенгламалар системаси $(x_1^0,\ x_2^0,\ y_1^0,\ y_2^0)$ нуқтанинг бирор атрофида y_1 ва y_2 ларни $x_1,\ x_2$ ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлайди:

$$y_1=f_1(x_1,\ x_2,\ f_2(x_1,\ x_2)).$$
$$y_2=f_2(x_1,\ x_2).$$

Равшанки, $f_1(x_1^0,\ x_1^0),\ f_2(x_1^0,\ x_2^0))=y_1^0,\ f_2(x_1^0,\ x_2^0)=y_2^0.$ Юқоридаги (13.59) шартни қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2}+\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial y_2}\neq 0.$$

Бунда барча хусусий ҳосилалар $(x_1^0,\ x_2^0,\ y_1^0,\ y_2^0)$ нуқтада ҳисобланган. Агар

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_2}=-\frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}}$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2}+\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial y_2}=\frac{\partial F_2}{\partial y_2}+\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\left(-\frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}}\right)=\frac{\dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}-\dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}}\neq 0$$

бўлади. Модомики,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \neq 0$$

экан, унда

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_1} - \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \neq 0$$

яъни

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (13.60)$$

бўлади. Шундай қилиб (13. 59) муносабатни (13. 60) кўринишда ёзиш мумкин экан.

Натижада ушбу теоремага келамиз.

13.16-теорема. *$F_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ ва $F_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ функциялар $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) \in R^4$ нуқтанинг бирор $U_{h_1h_2k_1k_2}$ атрофида ($h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$) берилган ва улар қуйидаги шартларни бажарсин:*

1) *$U_{h_1h_2k_1k_2}$ $((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ да узлуксиз;*

2) *$U_{h_1h_2k_1k_2}$ $((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ да барча хусусий ҳосилаларга эга ва улар узлуксиз;*

3) *хусусий ҳосилаларнинг $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтадаги қийматларидан тузилган ушбу детерминант нолдан фарқли;*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0;$$

4) *$(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ да*

$$F_1(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0, \quad F_2(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0.$$

У ҳолда $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$ нуқтанинг шундай $U_{\delta_1\delta_2\varepsilon_1\varepsilon_2}$ $((x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0))$ атрофи ($0 < \delta_1 < h_1$, $0 < \delta_2 < h_2$, $0 < \varepsilon_1 < k_1$, $0 < \varepsilon_2 < k_2$) топиладики, бу атрофда

1′) (13.58) *тенгламалар системаси ошкормас кўринишдаги*

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, f_2(x_1, x_2)), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2)$$

функцияларни аниқлайди;

2′) *$(x_1, x_2) = (x_1^0, x_2^0)$ бўлганда: унга мос келадиган*

$$y_1 = y_1^0 = f_1(x_1^0, x_2^0, f_2(x_1^0, x_2^0)), \quad y_2 = y_2^0 = f_2(x_1^0, x_2^0)$$

бўлади.

3′) *ошкормас кўринишда аниқланган f_1 ва f_2 функциялар*

$$\{(x_1, x_2) \in R^2: \ x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \ x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2\}$$

тўпламда узлуксиз ва барча узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} x_1x_2+y_1y_2=1 \\ x_1y_2-x_2y_1=3 \end{array}\right\} \tag{13.61}$$

системани қарайлик. Бунда

$$F_1(x_1,\ x_2)=x_1x_2+y_1y_2-1,$$
$$F_2(x_1,\ x_2)=x_1y_2-y_1x_2-3$$

бўлиб, бу функциялар $(1,\ -1,\ 1,\ 2)$ нуқтанинг атрофида 13.16-теореманинг барча шартларини бажаради. Ҳақиқатан ҳам, $F_1(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)$, $F_2(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)$ функциялар узлуксиз, узлуксиз барча хусусий ҳосилаларга эга, $(1,\ -1,\ 1,\ 2)$ нуқтада

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ҳамда

$$F_1(1,\ -1,\ 1,\ 2)=0,\quad F_2(1,\ -1,\ 1,\ 2)=0$$

бўлади. Демак, (13.61) система y_1 ва y_2 ларни x_1, x_2 ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлайди. Равшанки, бу функциялар узлуксиз, хусусий ҳосилаларга эга. Берилган (13.61) тенгламалар системасини бевосита y_1 ва y_2 ларга нисбатан ечиб қуйидагиларни топамиз:

$$y_1=\frac{-3+\sqrt{9+4\,x_1x_2-4\,x_1^2\,x_2^2}}{2\,x_2},\qquad y_2=\frac{3+\sqrt{9+4\,x_1x_2-4\,x_1^2\,x_2^2}}{2\,x_1}.$$

Энди (13.57) системанинг ошкормас функцияларнинг аниқлашини таъминлайдиган (ошкормас функцияларнинг мавжудлигини ифодалайдиган) теоремани исботсиз келтирамиз.

13.17-**теорема**. *F_1, F_2, ..., F_n функцияларнинг ҳар бири $(x^0,\ y^0)=(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0,\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_n^0)$ нуқтанинг бирор*

$$U_{hk}((x^0,\ y^0))=U_{h_1h_2\ldots h_m k_1k_2\ldots k_n}((x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0,\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_n^0))=$$
$$=\{(x^0,\ y^0)\in R^{m+n}: x_1^0-h_1<x_1<x_1^0+h_1,\ x_2^0-h_2<x_2<x_2^0+$$
$$+h_2,\ \ldots,\ x_m^0-h_m<x_m<x_m^0+h_m,\ y_1^0-k_1<y_1<y_1^0+k_1,$$
$$y_2^0-k_2<y_2<y_2^0+k_2,\ \ldots,\ y_n^0-k_n<y_n<y_n^0+k_n\}$$

атрофида ($h_i>0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ k_j>0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) берилган ва улар қуйидаги шартларни бажарсин:

1) *$U_{hk}((x^0,\ y^0))$ да узлуксиз;*

2) *$U_{hk}((x^0,\ y^0))$ барча хусусий ҳосилаларга эга ва улар узлуксиз;*

3) *хусусий ҳосилаларнинг $(x^0,\ y^0)$ нуқтадаги қийматларидан тузилган ушбу детерминант нолдан фарқли:*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0;$$

4) $(x^0, y^0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ *нуқтада*

$$F_1(x^0, y^0) = 0, \; F_2(x^0, y^0) = 0, \; \ldots, \; F_n(x^0, y^0) = 0.$$

У ҳолда (x^0, y^0) *нуқтанинг шундай* $U_{\delta,\varepsilon}((x^0, y^0)) = U_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_m\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}$ $((x^0, y^0))$ *атрофи* $(0 < \delta_1 < h_1, 0 < \delta_2 < h_2, \ldots, 0 < \delta_m < h_m, 0 < < \varepsilon_1 < k_1, \ldots, 0 < \varepsilon_n < k_n)$ *топиладики бу атрофда*

1′) (13.57) *система ошкормас кўринишдаги функциялар системасини аниқлайди. Уларни* $y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\ldots$, $y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *дейлик;*

2′) $(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ да $f_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = y_1^0$,

$$f_2(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = y_2^0, \ldots, f_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = y_n^0$$

бўлади;

3′) *ошкормас кўринишда аниқланган* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *функциялар* $\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m;\; x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1,\; x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \ldots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$ *тўпламда узлуксиз ва узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлади.*

14-БОБ

ФУНКЦИОНАЛ КЕТМА-КЕТЛИК ВА ҚАТОРЛАР

1-§. Функционал кетма-кетлик ва қаторлар, уларнинг яқинлашувчилиги

1. Функционал кетма-кетликлар. Ихтиёрий E ва F тўпламлар берилганда, E тўпламни F тўпламга $f: E \to F$ акслантириш тушунчаси 1-қисм, 1-боб, 1-§ да ўрганилган эди.

Энди $E = N$, F тўплам сифатида эса $X \subset R$ тўпламда берилган функцияда тўплами $\{f(x)\}$ ни олиб, ушбу

$$\varphi: N \to \{f(x)\} \quad (\varphi: n \to f_n(x)) \tag{14.1}$$

акслантиришни қараймиз. Бу акслантириш функционал кетма-кетлик тушунчасига олиб келади.

(14.1) акслантиришни қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & \ldots, & n, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ f_1(x), & f_2(x), & \ldots, & f_n(x), & \ldots \end{array}$$

Натижада $\varphi: n \to f_n(x)$ акслантиришнинг аксларидан (образларидан) ташкил топган ушбу

$$f_1(x), \; f_2(x), \; \ldots, \; f_n(x), \; \ldots \tag{14.2}$$

тўплам ҳосил бўлади.

(14.2) тўплам X ($X \subset R$) да берилган *функционал кетма-кетлик (функциялар кетма-кетлиги)* деб аталади ва $y\{f_n(x)\}$ каби белгиланади.

Шундай қилиб, функционал кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади, биз аввал 1-қисм, 3-бобда кўрган сонли кетма-кетликнинг ҳадларидан фарқли ўлароқ муайян функциялардан иборатдир.

Шуни ҳам таъкидлаш лозимки, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ кетма-кетлик турли ҳадларининг аниқланиш соҳаси, умуман айтганда, турлича бўлиши мумкин. Биз бу ерда X сифатида шу соҳаларнинг умумий қисмини олиб қараймиз.

(14.2) кетма-кетликда $f_n(x)$ функция шу кетма-кетликнинг *умумий ҳади (n-ҳади)* дейилади. Демак, (14.2) функционал кетма-кетликнинг умумий ҳади x ва n ўзгарувчиларга ($x \in X$, $n \in N$) боғлиқ бўлади.

Мисоллар. 1. φ — ҳар бир натурал n сонга $\dfrac{1}{n^2+x^2}$ функцияни мос қўювчи акслантириш бўлсин. У ҳолда ушбу $X = (-\infty, +\infty)$ тўпламда берилган

$$\frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{4+x^2}, \quad \frac{1}{9+x^2}, \ldots, \frac{1}{n^2+x^2}, \ldots$$

функционал кетма-кетликка эга бўламиз. Бу кетма-кетликнинг умумий ҳади $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$ бўлади.

2. φ — ҳар бир натурал n сонга $\sin\dfrac{\sqrt{x}}{n}$ функцияни мос қўювчи акслантириш бўлсин. Бу ҳолда қуйидаги

$$\sin\frac{\sqrt{x}}{1}, \quad \sin\frac{\sqrt{x}}{2}, \quad \sin\frac{\sqrt{x}}{3}, \ldots \sin\frac{\sqrt{x}}{n}, \ldots$$

функционал кетма-кетлик ҳосил бўлади. У $X = [0, +\infty)$ тўпламда берилган бўлиб, умумий ҳади $f_n(x) = \sin\dfrac{\sqrt{x}}{n}$ бўлади.

3. Ушбу

$$x, \sqrt{x}, x^2\sqrt{x}, \ldots$$

функционал кетма-кетликни қарайлик. Бу кетма-кетликнинг ток номерли ўринда турган ҳадлари $(-\infty, +\infty)$ оралиқда берилган функциялар бўлиб, жуфт номерли ўринда турган ҳадлари эса $[0, +\infty)$ оралиқда берилган функциялардир. Бу кетма-кетликни $X = [0, +\infty)$ оралиқда берилган деб қараймиз. Унинг умумий ҳади

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{\frac{n+1}{2}}, & \text{агар } n \text{ — тоқ сон бўлса} \\ \sqrt{x}, & \text{агар } n \text{ — жуфт сон бўлса} \end{cases}$$

бўлади.

X тўпламда берилган бирор

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{14.2}$$

кетма-кетликни қарайлик. Бу X тўпламда x_0 ($x_0 \in X$) нуқтани олиб, (14.2) кетма-кетлик ҳар бир $f_n(x)$ ҳадининг шу нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз. Натижада қуйидаги

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots \tag{14.3}$$

сонлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади.

Сонлар кетма-кетлиги эса, аниқроғи уларнинг яқинлашувчилиги, узоқлашувчилиги, яқинлашувчи кетма-кетликнинг хоссалари 1-қисмнинг 3-бобида батафсил ўрганилган эди.

14.1-таъриф. Агар $\{f_n(x_0)\}$ сонлар кетма-кетлиги яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик x_0 *нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи)* деб аталади, x_0 нуқта эса бу функционал кетма-кетликнинг *яқинлашиш (узоқлашиш) нуқтаси* дейилади.

$\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг барча яқинлашиш (узоқлашиш) нуқталаридан иборат тўплам $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг *яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси (тўплами)* деб аталади.

Биз баъзан M тўплам $(M \subset R)$ $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси (тўплами) бўлсин деган ибора ўрнига, унинг эквиваленти — $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M соҳада (тўпламда) яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлсин деган иборани ишлатаверамиз.

Бирор $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, M $(M \subset R)$ эса шу кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси бўлсин. Унда $\forall x_0 \in M$ учун унга мос

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0),\ \ldots,\ f_n(x_0),\ \ldots$$

кетма-кетлик $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ лимитга эга бўлади.

Агар M $(M \subset R)$ тўпламдан олинган ҳар бир x га, унга мос келадиган $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$ кетма-кетликнинг лимитини мос қўйсак, яъни

$$f: x \to \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

унда M тўпламда берилган $f(x)$ функция ҳосил бўлади. Бу $f(x)$ функцияни $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг *лимит функцияси* деб атаймиз. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ (x \in M). \tag{14.4}$$

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f_n(x) = \left\{\frac{1}{n^2+x^2}\right\}\ (n = 1, 2, \ldots)$$

функционал кетма-кетлик $\forall x \in R$ да яқинлашувчи бўлиб, лимит функция айнан 0 га тенг: $\forall x \in R$ учун

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = 0.$$

2. Қуйидаги

$$\{f_n(x)\} = \{n^2x+1\}\ (n = 1, 2, \ldots)$$

функционал фақат битта $x = 0$ нуқтадагина яқинлашувчи, қолган барча нуқталарда узоқлашувчи бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (n^2x+1) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ +\infty, & x > 0 \text{ бўлса.} \\ -\infty, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

3. Ушбу

$$\{f_n(x)\} = \left\{n \cdot \sin\frac{\sqrt{x}}{n}\right\}\ (n = 1, 2, \ldots)$$

функционал кетма-кетлик $\forall x \in R_+$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x) = \sqrt{x}$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{\sqrt{x}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{n}}{\frac{\sqrt{x}}{n}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x}.$$

4. Қуйидаги

$$\{f_n(x)\} = \{x^n\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

функционал кетма-кетликни қарайлик. Бу функционал кетма-кетлик учун, $\forall x \in (1, +\infty)$ да

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \infty,$$

$x = 1$ бўлганда

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1,$$

$\forall x \in (-1, 1)$ да

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

$\forall x \in (-\infty, -1]$ бўлганда эса берилган функционал кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмас.

Шундай қилиб, берилган $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси $M = (-1, 1]$ бўлиб, лимит функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ агар } -1 < x < 1 \text{ бўлса}, \\ 1, \text{ агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади.

2. Функционал қаторлар. Бирор $X\ (X \subset R)$ тўпламда $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots$, $u_n(x)$, $\ldots$ функционал кетма-кетлик берилган бўлсин.

14.2-таъриф. Қуйидаги

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

ифода *функционал қатор* деб аталади ва у $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{14.5}$$

$u_1(x)$; $u_2(x)$, $\ldots$ функциялар (14.5) *функционал қаторнинг ҳадлари*, $u_n(x)$ эса *функционал қаторнинг умумий ҳади (n-ҳади)* деб аталади.

Функционал қаторга мисоллар келтирамиз:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots \ (-\infty < x < \infty)$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} = \frac{x}{1\cdot(x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} + \ldots \ (0 < x < \infty).$$

Шундай қилиб, функционал қаторнинг ҳар бир ҳади, аввал (1-қисмнинг 11-бобида) ўрганилган сонли қаторнинг ҳадларидан фарқли ўлароқ, муайян функциялардан иборатдир.

14.1-эслатма. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор турли ҳадларининг берилиш соҳалари (тўпламлари), умуман айтганда, турлича бўлади. Биз бу ерда X тўплам сифатида шу соҳаларнинг умумий қисмини тушунамиз.

X тўпламда $x_0\,(x_0 \in X)$ нуқтани олиб, (14.5) функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x)\,(n=1, 2, \ldots)$ ҳадининг шу нуқтадаги қийматини топамиз. Натижада ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots \tag{14.6}$$

сонли қатор ҳосил бўлади.

Маълумки, сонли қаторлар, уларнинг яқинлашувчилиги, узоқлашувчилиги, яқинлашиш аломатлари, яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари 1-қисмнинг 11-бобида батафсил баён этилган эди.

14.3-таъриф. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сонли қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор $x_0\,(x_0 \in X)$ *нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи)* деб аталади, x_0 нуқта эса бу функционал қаторнинг *яқинлашиш (узоқлашиш) нуқтаси* дейилади.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг барча яқинлашиш (узоқлашиш) нуқталаридан иборат тўплам, бу функционал қаторнинг *яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси (тўплами)* дейилади.

Кейинги баёнимизда биз $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси M тўплам бўлсин дейиш ўрнига $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор M тўпламда яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлсин деган иборани ҳам ишлатаверамиз.

Бирор $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор берилган бўлиб, $M\,(M \subset R)$ эса шу функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси бўлсин. $\forall\, x_0 \in M$ учун, унга мос $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$ қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндисини эса S_0 дейлик.

Агар M тўпламдан олинган ҳар бир x га унга мос келадиган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ қаторнинг йиғиндисини мос қўйсак, унда M тўпламда берилган $S(x)$ функция ҳосил бўлади.

Бу $S(x)$ функцияни $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ функционал қаторнинг *йиғиндиси* деб атаймиз. Демак, $\forall x \in M$ учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = S(x).$$

Функционал қаторларда ҳам, худди сонли қаторлардаги каби, қаторнинг қисмий йиғиндилари тушунчаси киритилади.

(14.5) функционал қаторнинг дастлабки ҳадларидан тузилган ушбу

$$\begin{aligned} &S_1(x) = u_1(x), \\ &S_2(x) = u_1(x) + u_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

йиғиндилар (14.5) функционал қаторнинг *қисмий йиғиндилари* дейилади. Демак, (14.5) функционал қатор берилган ҳолда ҳар доим бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$:

$$S_1(x),\ S_2(x),\ \ldots,\ S_n(x),\ \ldots \tag{14.7}$$

функционал кетма-кетликни ҳосил қилиш мумкин.

Аксинча (14.5)) функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат (14.7) функционал кетма-кетлик берилган ҳолда, ҳар доим ҳадлари (14.5) функционал қаторнинг мос ҳадларига тенг бўлган қуйидаги

$$S_1(x) + [S_2(x) - S_1(x)] + \ldots + [S_n(x) - S_{n-1}(x)] + \ldots$$

функционал қаторни ҳосил қилиш мумкин.

Сонли қаторнинг яқинлашувчилиги (узоқлашувчилиги) таърифини эслаб (қаралсин, 1-қисм, 11-боб, 1-§) (14.5) функционал қаторнинг x_0 нуқтада яқинлашувчилиги (узоқлашувчилиги) ни қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

14.4-таъриф. Агар $n \to \infty$ да $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик x_0 ($x_0 \in M$) нуқтада яқинлашувчи (узоқлашуви) бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор x_0 *нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи)* деб аталади.

Бу функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси (тўплами) тегишли функционал қаторнинг *яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси (тўплами)* деб аталади.

(14.7) функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $S(x)$:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x)$$

(14.5) функционал қаторнинг *йиғиндиси* деб аталади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

функционал қаторни қарайлик. Бу қаторнинг ҳар бир ҳади: $u_n(x)=x^{n-1}$ ($n=1, 2, \ldots$) функция $R=(-\infty, +\infty)$ да берилган. Қаралаётган функционал қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{1-x^n}{1-x}, & \text{агар } x\neq 1 \text{ бўлса.}\\ n, & \text{агар } x=1 \text{ бўлса}\end{cases}$$

бўлади. Унда

$$\forall\, x\in(-1, +1) \text{ учун } \lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x},$$

$\forall\, x\in[1, +\infty)$ учун $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\infty$, $\forall\, x\in(-\infty, -1]$ учун $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Шундай қилиб, берилган фукционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси $M=(-1, +1)$, узоқлашиш соҳаси эса $R\setminus M=(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$ дан иборат.

$(-1, +1)$ оралиқда функционал қаторнинг йиғиндиси $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$ бўлади.

2. Қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}\quad(0<x<+\infty)$$

функционал қаторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йиғиндисини топамиз:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}\right]=$$

$$=1-\frac{1}{nx+1}.$$

Унда

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{nx+1}\right]=1\quad(0<x<+\infty)$$

бўлади. Демак, берилган қаторнинг йиғиндиси $S(x)=1$ бўлади.

Биз юқорида функционал кетма-кетлик ҳамда функционал қаторлар, уларнинг яқинлашувчилиги (узоқлашувчилиги) тушунчалари билан танишдик.

Аслида бундай тушунчалар билан биз, аввал, хусусий ҳолда (ўзгарувчи x нинг ҳар бир тайин қийматида) 1-қисмнинг 3 ва 11-бобларида сонлар кетма-кетлиги, сонли қаторлар деб танишиб, уларни батафсил ўрганган эдик.

Ҳозирги ҳол, яъни функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(x)$, функционал қатор йиғиндиси $S(x)$, лар x ўзгарувчининг функциялари бўлиши бу $f(x)$ ва $S(x)$ ларнинг функционал хоссаларини ўрганишни тақозо этади.

Масала $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик ҳар бир $f_n(x)$ ($n=1, 2, \ldots$) ҳадининг функционал хоссаларига кўра (узлуксизлиги, дифференциалланувчилиги ва ҳоказо) $f(x)$ лимит функциянинг мос хоссаларини, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ функционал қатор ҳар бир $u_n(x)$ ($n=1, 2, \ldots$) ҳади функционал хоссаларига кўра, қатор йиғиндиси $S(x)$ нинг мос хоссаларини ўрганишдан иборат.

Бу $f(x)$ ҳамда $S(x)$ функцияларнинг хоссаларини ўрганишда, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг лимит функция $f(x)$ га, қатор қисмий йиғиндиси $S_n(x)$ нинг қатор йиғиндиси $S(x)$ га яқинлашиш (интилиш) характери муҳим роль ўйнайди. Шунинг учун баёнимизни функционал кетма-кетлик ҳамда функционал қаторнинг текис яқинлашиши тушунчасини киритиш ва уни ўрганишдан бошлаймиз.

2-§. Функционал кетма-кетлик ва қаторларнинг текис яқинлашувчилиги

1. Функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашувчилиги. Бирор $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x, \ f_2(x), \ \ldots, \ f_n(x), \ \ldots, \tag{14.2}$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, M $(M \subset R)$ эса бу кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси бўлсин. $f(x)$ функция (14.2) функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси бўлсин. Демак, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламнинг ҳар бир x_0 $(x_0 \in M)$ нуқтасида, $n \to \infty$ да мос $f(x_0)$ га интилади:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Кетма-кетликнинг лимити таърифига кўра бу қуйидагини англатади: $\forall\ \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Бунда n_0 натурал сон $\varepsilon > 0$ га ва олинган x_0 нуқтага боғлиқ бўлади: $n_0 = n_0(\varepsilon, x_0)$ (чунки, x ўзгарувчининг M тўпламдан олинган турли қийматларида $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик, умуман айтганда, турлича бўлади).

M тўпламдаги барча нуқталар учун умумий бўлган n_0 натурал сонни топиш мумкинми деган савол туғилади. Буни қуйидагича тушуниш керак: $\forall\ \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $\forall\ n > n_0$ ва $\forall\ x \in M$ учун $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ бўладиган $n_0 \in N$ топиладими?

Қуйида келтириладиган мисоллар кўрсатадики, баъзи функционал кетма-кетликлар учун бундай n_0 натурал сон топилади; баъзи функционал кетма-кетликлар учун эса топилмайди, яъни бирор $\delta_0 > 0$ сони учун исталган катта $n \in N$ сони олинганда ҳам шундай $x \in M$ нуқта топиладики,

$$|f_n x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$$

тенгсизлик бажарилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$((f_n(x)\} = \left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$$

функционал кетма-кетликни қарайлик. Бу кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси $M = (-\infty, +\infty)$, лимит функцияси эса

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$$

бўлади. Демак, $f(x)\equiv 0$. Бу яқинлашишнинг характери қуйидагичадир:

$\forall\ \varepsilon>0$ сон олинганда ҳам $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ дейилса, барча $n>n_0$ да $\forall\ x\in M$ да

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{\sin nx}{n}=0\right|\leqslant\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n_0+1}<\varepsilon$$

бўлади.

Бу ҳолда n_0 натурал сон фақат ε гагина боғлиқ бўлиб, қаралаётган $x\ (x\in(-\infty,+\infty))$ нуқтага боғлиқ эмас. Бошқача айтганда, топилган n_0 натурал сон барча $x\ (x\in(-\infty,\ +\infty))$ нуқталар учун умумийдир.

2. Ушбу

$$\{f_n(x)\}=\left\{\frac{nx}{1+n+x}\right\}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$$

функционал кетма-кетликни қарайлик.

Бу функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(x)=x$ бўлади:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\ \frac{nx}{1+n+x}=x.$$

Бу яқинлашишнинг характери ҳам аввалги мисолдагидек. Ҳақиқатдан ҳам, $\forall\ \varepsilon>0$ $(\varepsilon<1)$ сонни олайлик. n_0 сифатида

$$n_0=\left[(1+x_0)\left(\frac{x_0}{\varepsilon}-1\right)\right]$$

ни олсак, $\forall\ n>n_0$ ва $x\in[0,1]$ нуқта учун

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|=\left|\frac{nx_0}{1+n+x_0}-x_0\right|=\frac{x_0(1+x_0)}{1+n+x_0}\leqslant\frac{x_0(1+x_0)}{2+n_0+x_0}<\varepsilon \quad (14.8)$$

бўлади. Бу ерда, равшанки, n_0 сон ε га ва x_0 нуқтага боғлиқдир. Бироқ n_0' деб

$$n_0'=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}n_0=\left[2\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\right]$$

олинса $\forall\ n>n_0'$ ва $\forall\ x\in[0,\ 1]$ учун (14.8) бажарилаверади. Демак, n_0' натурал сон барча $x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ нуқталар учун умумий бўлади.

3. Қуйидаги

$$\{f_n(x)\}=\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\} \qquad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

функционал кетма-кетликни қарайлик. Унинг лимит функцияси

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0$$

бўлади. Бу эса таърифга кўра, қуйидагини билдиради:

$\forall\ \varepsilon>0$ сон олинганда ҳам,

$$n_0=n_0(\varepsilon,\ x)=\left[\frac{1}{\varepsilon x}\right]\ (x\neq 0) \qquad (14.9)$$

дейилса, барча $n>n_0$ учун

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}-0\right|=\frac{nx}{1+n^2x^2}<\frac{1}{nx}\leqslant\frac{1}{(n_0+1)x}<\varepsilon \qquad (14.10)$$

бўлади, $x=0$ бўлса, равшанки, $\forall\ n$ учун $f_n(0)=f(0)=0$.

Бироқ, масалан, $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ деб олсак, исталган $n \in N$ сони ва $x = \frac{1}{n}$ нуқта учун

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2} \cdot n^2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

бўлади.

Демак, барча $x\,(0 \leqslant x \leqslant 1)$ нуқталар учун умумий бўлган ва (14.10) тенгсизлик бажариладиган n_0 натурал сон топилмайди. (Бу хулосага юқоридаги n_0 учун (14.9) формулани ўрганиб (кўриниб турибдики, у ерда $x \to 0$ да $n_0 \to +\infty$) ҳам келиш мумкин эди.)

$M\,(M \subset R)$ тўпламда бирор $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, у лимит функцияга эга бўлсин. Бу лимит функцияни $f(x)$ $(x \in M)$ деб белгилайлик.

14.5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилсаки, ихтиёрий $n > n_0$ ва ихтиёрий $x \in M$ нуқталар учун бир йўла

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламда $f(x)$ га *текис яқинлашади (функционал кетма-кетлик текис яқинлашувчи)* деб аталади. Акс ҳолда, (яъни $\forall n \in N$ олинганда ҳам, шундай $\varepsilon_0 > 0$ ва $x_0 \in M$ мавжуд бўлсаки,

$$|f_n(x_0) - f(x^0)| \geqslant \varepsilon_0$$

тенгсизлик бажарилса) $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламда $f(x)$ га *текис яқинлашмайди (функционал кетма-кетлик текис яқинлашувчи эмас)* деб аталади. $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг $f(x)$ га текис яқинлашувчилиги қуйидагича белгиланади:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x)\ (x \in M).$$

Юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисида $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ функционал кетма-кетлик лимит функция $f(x) \equiv 0$ га $[0, 1]$ оралиқда текис яқинлашади:

$$\frac{\sin nx}{n} \rightrightarrows 0\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

Учинчисида эса, яъни $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{nx}{1 + n^2x^2}\right\}$ функционал кетма-кетлик $f(x) = 0$ лимит функцияга яқинлашса-да

$$\lim_{n \to \infty} \frac{nx}{1 + n^2x^2} = 0,$$

бу функционал кетма-кетлик учун текис яқинлашиш шарти бажарилмайди.

14.1-теорема. *$\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг M тўпламда $f(x)$ га текис яқинлашиши учун*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. M тўпламда $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)$ лимит функцияга текис яқинлашсин. Таърифга кўра, $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, $n > n_0$ бўлганда M тўпламнинг барча x нуқталари учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Бундан эса $\forall\ n > n_0$ учун

$$M_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in M} |f_n(x)| - f(x)| = 0$$

Етарлилиги. M тўпламда $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)$ лимит функцияга эга бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

бўлсин. Демак, $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Агар ушбу

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \quad (x \in M)$$

муносабатни эътиборга олсак, у ҳолда $\forall\ x \in M$ учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бу эса M тўпламда $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)$ лимит функцияга текис яқинлашишини билдиради.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\{f_n(x)\} = \{e^{-(x-n)^2}\}$$

функционал кетма-кетликни $-c < x < c$ $(c > 0)$ интервалда қарайлик. Бу функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-(x-n)^2} = 0$$

бўлади. Натижада

$$M_n = \sup_{-c \leq x \leq c} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{-c<x<c} |e^{-(x-n)^2} - 0| = \sup_{-c<x<c} e^{-(x-n)^2} = e^{-(c-n)^2}$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} e^{-(c-n)^2} = 0$$

бўлишини топамиз.

Демак, берилган функционал кетма-кетлик $(-c,\ c)$ оралиқда $f(x)=0$ лимит функцияга текис яқинлашади:

$$e^{-(x-n)^2} \rightrightarrows 0 \quad (-c<x<c;\ c>0).$$

2. Қуйидаги

$$\{f_n(x)\}=\left\{n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)\right\} \quad (0<x<\infty)$$

функционал кетма-кетликни қарайлик. Бу функционал кетма-кетликнинг лимит функциясини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)=\lim_{n\to\infty} n\frac{\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (0<x<+\infty).$$

Демак, $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Бу ҳолда $M_n=\sup\limits_{0<x<\infty}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{0<x<\infty}\left|n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\right.\right.$

$$\left.\left.-\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|=\sup_{0<x<\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|=$$

$$=\sup_{0<x<\infty}\frac{\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)}=\sup_{0<x<\infty}\frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2}=$$

$=\infty$ бўлиб берилган, функционал кетма-кетлик учун 14.1-теореманинг шарти бажарилмайди.

Маълумки, 1-қисм, 3-боб, 10-§ да сонлар кетма-кетлигининг лимитга эга бўлиши ҳақида Коши теоремаси келтирилган эди. Шунга ўхшаш теоремани функционал кетма-кетликларда ҳам айтиш мумкин.

Биз қуйида функционал кетма-кетлик қандай шартда лимит функцияга эга бўлиши ва унга текис яқинлашишини ифодалайдиган теоремани келтирамиз. Аввал фундаментал кетма-кетлик тушунчаси билан танишамиз.

$X\ (X\subset R)$ тўпламда $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{14.2}$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин.

14.6-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон мавжуд бўлсаки, $n > n_0$, $m > n_0$ бўлганда $\forall x \in X$ нуқталар учун бир йўла

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{14.11}$$

тенгсизлик бажарилса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик X тўпламда *фундаментал кетма-кетлик* деб аталади.

Масалан, юқорида келтирилган

$$\{f_n(x)\} = \left\{\frac{\sin n x}{n}\right\}$$

функционал кетма-кетлик $X = (-\infty, +\infty)$ тўпламда фундаментал кетма-кетлик бўлади.

$$\{f_n(x)\} = \left\{\frac{n x}{1 + n^2 x^2}\right\}$$

кетма-кетлик эса у $X = [0, 1]$ тўпламда фундаментал кетма-кетлик бўлмайди.

14.2-теорема. (Коши теоремаси.) *$\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик X тўпламда лимит функцияга эга бўлиши ва унга текис яқинлашиши учун у X тўпламда фундаментал бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. X тўпламда $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик лимит функцияга эга бўлиб, унга текис яқинлашсин:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (x \in X).$$

Текис яқинлашиш таърифига мувофиқ $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, $n > n_0$ бўлганда $\forall x \in M$ нуқталар учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

шунингдек, $m > n_0$ бўлганда $\forall x \in X$ учун

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. У ҳолда $n > n_0$, $m > n_0$ ва $\forall x \in X$ учун

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик X тўпламда фундаментал кетма-кетлик эканини билдиради.

Етарлилиги. $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик X тўпламда фундаментал кетма кетлик бўлсин. X тўпламдан олинган ҳар бир x_0 $(x_0 \in X)$ да $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $\{f_n(x_0)\}$ сонлар кетма-кетлигига айланади. Равшанки, $\{f_n(x_0)\}$ кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлади. У ҳолда Коши теоремасига асосан (1-қисм, 3-боб, 10-§) $\{f_n(x_0)\}$ яқинлашувчи. Демак, X тўпламнинг ҳар бир x_0 $(x_0 \in X)$ нуқтасида $\{f_n(x_0)\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи. Бу $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг лимит функциясини $f(x)$ дейлик:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in X).$$

Энди (14.11) тенгсизликда $m \to \infty$ да (бунда n ва x ларни тайинлаб, лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Бундан эса $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг $f(x)$ лимит фунцияга текис яқинлашиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

2. Функционал қаторларнинг текис яқинлашувчилиги. M $(M \subset R)$ тўпламда бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{14.5}$$

функционал қатор берилган бўлсин. Бу функционал қатор M тўпламда яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин. Демак, M тўпламда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} [u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)] = S(x)$$

бўлади, бунда $\{S_n(x)\}$—берилган функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат функционал кетма-кетликдир.

14.7-таъриф. Агар M тўпламда $\sum\limits_{n=1} u_n(x)$ функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик қатор йиғиндиси $S(x)$ га текис яқинлашса, у ҳолда бу функционал қатор M тўпламда *текис яқинлашувчи* деб аталади, акс ҳолда, яъни $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламда $S(x)$ га текис яқинлашмаса, (14.5) функционал қатор M тўпламда $S(x)$ га *текис яқинлашмайди* дейилади.

Шундай қилиб, функционал қаторларнинг текис яқинлашувчилиги (яқинлашмовчилиги) тушунчаси ҳам уларнинг оддий яқинлашувчилиги сингари, функционал кетма-кетликларнинг текис яқинлашувчилиги (яқинлашмовчилиги) орқали киритилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad (0 \leqslant x < +\infty)$$

функционал қаторни қарайлик. Бу қаторинг қисмий йиғиндиси

$$S(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \ldots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}$$

бўлиб, унинг йиғиндиси

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1}.$$

Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - (1+x)\right]$ дейилса, барча $n > n_0$

учун

$$|S_n(x)-S(x)|=\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}-\frac{1}{x+1}\right|=\frac{1}{x+n+1}\leqslant\frac{1}{x+n_0+2}<\varepsilon \quad (14.12)$$

бўлади. Бундаги n_0 натурал сон $\varepsilon>0$ га ҳамда x $(0\leqslant x\leqslant+\infty)$ нуқталарга боғлиқ. Бироқ n_0' деб

$$n_0'=\max_{0\leqslant x<\infty}\left[\frac{1}{\varepsilon}-(1+x)\right]=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$$

ни олинса, унда $n>n_0'$ бўлган n ларда юқоридаги (14.12) тенгсизллик бажарилаверади. Демак, берилган функционал қатор учун таърифдаги n_0' натурал сон барча x $(0\leqslant x<\infty)$ нуқталари учун умумий бўлади, яъни x га боғлиқ бўлмайди. Демак, берилган функционал қатор текис яқинлашувчи.

2. Қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}\quad(0<x<\infty)$$

функционал қаторни қарайлик. Бу функционал қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x)=\frac{x}{1\cdot(x+1)}+\frac{x}{(x+1)(2x+1)}+\ldots+\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)x+1}-\frac{1}{nx+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{nx+1}$$

бўлиб, унинг йиғиндиси

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{nx+1}\right)=1\quad(0<x<\infty).$$

Таърифга кўра, $\forall\ \varepsilon>0$ сон олинганда $n_0=\left[\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\right]$ $(x\neq 0)$ дейилса, барча $n>n_0$ учун

$$|S_n(x)-S(x)|=\left|1-\frac{1}{nx+1}-1\right|=\frac{1}{nx+1}\leqslant\frac{1}{(n_0+1)\ x+1}<\varepsilon$$

бўлади. Агар $x=0$ бўлса, равшанки, $\forall\ n$ учун $S_n(0)=S(0)=1$ бўлиб,

$$S_n(0)-S(0)=0$$

бўлади. Бундаги n_0 натурал сон $\varepsilon>0$ ва x $(0<x<\infty)$ нуқталарга боғлиқ бўлиб, у барча x $(0<x<+\infty)$ нуқталар учун умумий бўла олмайди (бу ҳолда $n_0=\left[\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\right]$ нинг $(0,+\infty)$ да x бўйича максимуми чекли сон эмас).

Бошқача қилиб айтганда, исталган n натурал сон олсак ҳам шундай $\varepsilon_0>0$ $\left(\text{масалан, } \varepsilon_0=\frac{1}{4}\right)$ ва $x=\frac{1}{n}\in(0,++\infty)$ нуқта топиладики,

$$\left|S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{n\,\frac{1}{n}+1}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0$$

бўлади.

14.3-теорема. *M ($M \subset R$) тўпламда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин. Бу функционал қаторнинг M да текис яқинлашувчи бўлиши учун, унинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги $\{S_n(x)\}$ нинг M да фундаментал кетма-кетлик бўлиши зарур ва етарли.*

Бу теорема функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашиш ҳақидаги 14.2-теоремани функционал қаторга нисбатан айтилиши бўлиб, унинг исботи 14.2-теореманинг исботи кабидир.

Функционал қатор

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

нинг текис яқинлашувчи бўлиши ҳақидаги 14.7-таъриф ҳамда функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашувчи бўлишининг зарур ва етарли шартини ифодаловчи 14.1-теоремадан фойдаланиб қуйидаги теоремага келамиз.

14.4-теорема. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *функционал қатор M тўпламда $S(x)$ га текис яқинлашиши учун*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

функционал қатор $(-1, +1)$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

эканини кўрган эдик. Бу функционал қатор учун

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right| \quad (x \in (-1, +1))$$

бўлиб,

$$\sup_{-1<x<1} |S_n(x) - S(x)| = +\infty$$

бўлади. Демак, берилган қатор $(-1, +1)$ оралиқда текис яқинлашувчи эмас.

14.5-теорема. (Вейерштрасс аломати.) *Агар ушбу*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{14.5}$$

функционал қаторнинг ҳар бир ҳади M ($M \subset R$) тўпламда қуйидаги

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (*)$$

тенгсизликни қаноатлантирса ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{14.13}$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (14.5) функционал қатор M тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Модомики, (14.13) қатор яқинлашувчи экан, 1-қисм, 11-боб, 2-§ да келтирилган теоремага асосан, $\forall\ \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$, $m > n$ учун

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_m < \varepsilon$$

бўлади. (*) тенгсизликдан фойдаланиб, M тўпламнинг барча x $(x \in M)$ нуқталари учун

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_m(x)| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бундан эса 14.8-теоремага кўра берилган функционал қаторнинг M тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad (0 \leqslant x < +\infty)$$

функционал қаторнинг текис яқинлашувчилиги аниқланган эди. Бу қаторнинг текис яқинлашувчилигини Вейерштрасс аломати ёрдамида осонгина кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$|u_n(x)| = \left|\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right| = \frac{1}{|x+n|\cdot|x+n+1|} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

бўлиши ҳамда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

қаторнинг яқинлашувчилигидан берилган функционал қаторнинг $(0, +\infty)$ да текис яқинлашувчилиги келиб чиқади.

2. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2} \quad (0 \leqslant x < +\infty)$$

функционал қаторни қарайлик. Бу функционал қаторнинг умумий ҳади

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

функциядан иборат. Бу функцияни $[0, +\infty)$ оралиқда экстремумга текширамиз $u_n(x)$ функциянинг ҳосиласи ягона $x = n^{-\frac{5}{2}}$ нуқтада нолга айланади ($x = n^{-\frac{5}{2}}$ — стационар нуқта). Бу стационар нуқтада

$$u_n''\left(n^{-\frac{5}{2}}\right) < 0$$

бўлади. Демак, $u_n(x)$ функция $x = n^{-\frac{5}{2}} \in [0, +\infty)$ нуқтада максимумга эришади. Унинг максимум қиймати эса $\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}}$ га тенг. Демак, $0 \leqslant x < +\infty$ да

$$|u_n(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

бўлади. Агар $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ қаторнинг яқинлашувчилигини эътиборга олсак, унда Вейерштрасс аломатига кўра, берилган функционал қаторнинг $[0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи эканлигини топамиз.

3-§. Функционал қатор йиғиндисининг ҳамда функционал кетма-кетлик лимит фукқциясининг узлуксизлиги

1. Функционал қатор йиғиндисининг узлуксизлиги. M $(M \subset R)$ тўпламда бирор яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{14.5}$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин.

14.6-теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *функционал қаторнинг ҳар бир ҳади* $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *M тўпламда узлуксиз бўлиб, бу функционал қатор M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ ҳам M тўпламда узлуксиз бўлади.*

Исбот. x_0 — M тўпламдан олинган ихтиёрий нуқта. Функционал қатор текис яқинлашувчи. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, M тўпламнинг барча x нуқталари учун бир йўла

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{14.14}$$

жумладан

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{14.15}$$

тенгсизлик бажарилади.

Модомики, (14.5) функционал қаторнинг ҳар бир ҳади M тўпламда узлуксиз экан, унда

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

функция ҳам M да, жумладан x_0 нуқтада узлуксиз бўлади. Демак, юқоридаги $\varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{14.16}$$

бўлади.

Юқоридаги (14.14), (14.15) ҳамда (14.16) тенгсизликлардан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| +$$
$$+ |S_n(x_0) - S(x_0)|| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Демак, $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $S(x)$ функциянинг x_0 ($\forall\ x_0 \in M$) нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Бу теореманинг шартлари бажарилганда ушбу

$$S(x_0) = \lim_{x \to x_0} [\lim_{n \to \infty} S_n(x)] = \lim_{n \to \infty} [\lim_{n \to x_0} S_n(x)]$$

муносабат ўринли бўлади.

14.2-эслатма. 14.6-теоремадаги $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг M да текис яқинлашувчилик шарти функционал қатор йиғиндиси $S(x)$ нинг узлуксиз бўлиши учун жуда муҳимдир. Бу шарт бажарилмай қолса, теоремадаги тасдиқ, умуман айтганда, тўғри бўлмайди. Бунга қуйидаги функционал қатор мисол бўла олади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x) = (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \ldots +$$
$$+ x^{n-1}(1-x) + \ldots \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

Функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x) = x^{n-1}(1-x)$ $(n = 1, 2 \ldots)$ ҳади $[0, 1]$ оралиқда узлуксиз. Қатор йиғиндиси

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } 0 \leqslant x < 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

эса $[0,1]$ оралиқда (аниқроғи, $x = 1$ нуқтада) узлуксиз эмас.

Айни пайтда, қаторнинг текис яқинлашувчилиги етарли шарт бўлиб, зарурий ҳам эмас. Яъни баъзан текис яқинлашувчилик шартини бажармаган функционал қаторнинг йиғиндиси ҳам узлуксиз бўлиши мумкин. Масалан, ушбу бобнинг 2-§ да келтирилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \quad (0 < x < +\infty)$$

функционал қатор $(0, +\infty)$ оралиқда текис яқинлашувчилик шартини бажармаса-да, бу функционал қаторнинг йиғиндиси $S(x) = 1$ $(0, +\infty)$ оралиқда узлуксиздир.

2. Функционал кетма-кетлик лимит функциясининг узлуксизлиги. M $(M \subset R)$ тўпламда $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{14.2}$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

14.7-теорема. *Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ҳади M тўпламда узлуксиз бўлиб, бу функ-*

ционал кетма-кетлик M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ лимит функция ҳам M тўпламда узлуксиз бўлади.

Бу теореманинг шартлари бажарилганда ушбу

$$f(x) = \lim_{t\to x} [\lim_{n\to\infty} f_n(t)] = \lim [\lim f_n(t)]$$

муносабат ўринли бўлади.

4-§. Функционал қаторларда ҳамда функционал кетма-кетликларда ҳадлаб лимитга ўтиш

1. Функционал қаторларда ҳадлаб лимитга ўтиш. M $(M \subset R)$ тўпламда яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (14.5)$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин. x_0 нуқта эса M тўпламнинг лимит нуқтаси.

14.8-теорема. *Агар $x \to x_0$ да $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ҳади чекли*

$$\lim_{x\to x_0} u_n(x) = c_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (14.17)$$

лимитга эга бўлиб, бу қатор M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$$

қатор ҳам яқинлашувчи, унинг йиғиндиси C эса $S(x)$ нинг $x \to x_0$ даги лимити

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = C$$

га тенг бўлади.

Исбот. Шартга кўра (14.5) функционал қатор текис яқинлашувчи. У ҳолда 14.3-теоремага асосан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$, $m > n$ лар ва M тўпламнинг барча x нуқталари учун

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_m(x)| < \varepsilon \qquad (14.18)$$

тенгсизлик бажарилади. (14.17) шартни эътиборга олиб, (14.18) тенгсизликда $x \to x_0$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_m| \leq \varepsilon.$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$, $m > n$ лар учун

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_m| \leq \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилар экан. Қатор яқинлашувчилигининг зарурий ва етарли шартини ифодаловчи теоремага мувофиқ (қаралсин, 1-қисм, 11-боб, 3-§)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$$

қатор яқинлашувчи бўлади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} C_n = C,$$

бунда

$$C_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Энди $x \to x_0$ да (14.5) функционал қатор йиғиндиси $S(x)$ нинг лимити C га тенг, яъни

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = C$$

бўлишини кўрсатамиз. Шу мақсадда ушбу

$$S(x) - C$$

айирмани олиб, уни қуйидагича ёзамиз:

$$S(x) - C = [S(x) - S_n(x)] + [S_n(x) - C_n] + [C_n - C], \quad (14.19)$$

бунда

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x).$$

Теореманинг шартига кўра (14.5) функционал қатор текис яқинлашувчи. Демак, $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ ва M тўпламнинг барча x нуқталари учун

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.20)$$

тенгсизлик бажарилади.

(14.17) шартдан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{x\to x_0} S_n(x) = \lim_{x\to x_0} [u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)] = c_1 + c_2 + \ldots + c_n = C_n.$$

Демак, $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$|S_n(x) - C_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (14.21)$$

тенгсизлик бажарилади.

Юқорида исбот этилганига кўра

$$\lim_{n\to\infty} C_n = C.$$

Демак, $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра, шундай $n_0' \in N$ топиладики, барча $n > n_0'$ учун

$$|C_n - C| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{14.22}$$

бўлади. Шуни ҳам айтиш керакки, агар $\overline{n_0} = \max\{n_0, n_0'\}$ деб олинса, унда барча $n > \overline{n_0}$ учун (14.22) ва (14.20) тенгсизликлар бир вақтда бажарилади.

Натижада (14.19) муносабатдан, (14.20), (14.21) ва (14.22) тенгсизликларни эътиборга олган ҳолда, қуйидагини топамиз:

$$|S(x) - C| \leqslant |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - C_n| + |C_n - C| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Демак, $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x - x_0| < \delta$ учун $(x \in M)$

$$|S(x) - C| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса $\lim\limits_{x \to x_0} S(x) = C$ эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Юқоридаги лимит муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [\lim_{x \to x_0} u_n(x)].$$

Бу эса 14.8-теореманинг шартлари бажарилганда чексиз қаторларда ҳам ҳадлаб лимитга ўтиш қоидаси ўринли бўлишини кўрсатади.

2. Функционал кетма-кетликларда ҳадлаб лимитга ўтиш. M $(M \subset R)$ тўпламда $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{14.2}$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин. x_0 нуқта эса M тўпламнинг лимит нуқтаси.

14.9-теорема. *Агар $x \to x_0$ да $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ҳади чекли*

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = a_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

лимитга эга бўлиб, бу кетма-кетлик M да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{a_n\}$:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи, унинг $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ лимити эса $f(x)$ нинг $x \to x_0$ даги лимитига тенг

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

бўлади.

5-§. Функционал қаторларни ҳамда функционал кетма-кетликларни ҳадлаб интеграллаш

1. Функционал қаторларни ҳадлаб интеграллаш. $[a, b]$ сегментда яқинлашувчи

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{14.5}$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

14.10-теорема. *Агар* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *қаторнинг ҳар бир* $u_n(x)$ *ҳади* $(n = 1, 2, \ldots$ $[a, b]$ *сегментда узлуксиз бўлиб, бу қатор шу сегментда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қатор ҳадларининг интегралларидан тузилган*

$$\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \ldots$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлади, унинг йиғиндиси эса $\int_a^b S(x)\,dx$ *га тенг бўлади:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Исбот. Берилган функционал қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ ҳади ($n = 1, 2, \ldots$) $[a, b]$ да узлуксиз, демак, $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи. (14.5) функционал қатор $[a, b]$ сегментда текис яқинлашувчи. Унда 14.6-теоремага кўра, функционал қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз, демак, интегралланувчи бўлади.

Аввало (14.5) функционал қатор ҳадларининг интегралларидан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

Шартга кўра (14.5) функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи. У ҳолда 14.3-теоремага асосан, $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{b-a}$ га кўра, шундай $n_0 \in C$ топиладики, $n > n_0$, $m > n$ бўлганда

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_m(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади. Бу тенгсизликдан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\left|\int_a^b u_{n+1}(x)\,dx + \int_a^b u_{n+2}(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_m(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \Big| u_{n+1}(x) +$$

$$+u_{n+2}(x)+\ \ldots\ +u_m|dx<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon. \qquad (14.23)$$

Демак, $\forall\,\varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $n_0\in N$ топиладики, $n>n_0$ ва $m>n$ бўлганда (14.23) тенгсизлик ўринли бўлади. 14.3-теоремага асосан

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx$$

қатор яқинлашувчи бўлади. Одатдагидек берилган функционал қаторнинг қисмий йиғиндисини $S_n(x)$ деймиз. Функционал қаторнинг текис яқинлашувчилиги таърифидан, $\forall\,\varepsilon>0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{b-a}$ га кўра шундай $n_0\in N$ топиладики, барча $n>n_0$ ва $[a,\ b]$ сегментнинг барча x нуқталари учун

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади

Аниқ интеграл хоссасидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b S_n(x)\,dx+\int_a^b[S(x)-S_n(x)]\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+$$

$$+\int_a^b u_2(x)\,dx+\ \ldots\ +\int_a^b u_n(x)\,dx+\int_a^b[S(x)-S_n(x)]\,dx.$$

Агар

$$\left|\int_a^b[S(x)-S_n(x)]\,dx\right|\leqslant\int_a^b|S(x)-S_n(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b[S(x)-S_n(x)]\,dx=0$$

бўлиб, натижада

$$\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\ \ldots\ +\int_a^b u_n(x)\,dx+\ \ldots$$

эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди. Юқоридаги муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b u_n(x)\,dx\right].$$

Бу эса 14.10-теореманинг шартлари бажарилганда чексиз қаторларда ҳам ҳадлаб интеграллаш қоидаси ўринли бўлишини кўрсатади.

14.3-эслатма. Келтирилган теоремада функционал қаторнинг текис яқинлашувчилиги шарти етарли бўлиб, у зарурий шарт эмас, яъни баъзан текис яқинлашувчилик шартини бажармаган функциал қаторларни ҳам ҳадлаб интеграллаш мумкин бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)\quad (0<x<1)$$

қаторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x^{\frac{1}{2k+1}}-x^{\frac{1}{2k-1}}\right)=-x+x^{\frac{1}{2n+1}}$$

бўлиб, йиғиндиси эса

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(-x+x^{\frac{1}{2n+1}}\right)=\begin{cases}0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,}\\ 1-x, & \text{агар } 0<x\leq 1 \text{ бўлса}\end{cases}$$

бўлади. Бу функционал қатор $[0,1]$ оралиқда текис яқинлашувчилик шартини бажармайди. Аммо

$$\int_0^1 S(x)\,dx=\frac{1}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)dx\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\int_0^1 S(x)\,dx=\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)dx$$

бўлиши топилади.

2. **Функционал кетма-кетликларни ҳадлаб интеграллаш.** $[a, b]$ сегментда $\{(f_n(x)\}$.

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \qquad (14.2)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин.

14.11-теорема. *Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ ҳади $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу функционал кетма-кетлик $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда*

$$\int_a^b f_1(x)\,dx, \int_a^b f_2(x)\,dx,\ \ldots,\ \int_a^b f_n(x)\,dx,\ \ldots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади, унинг лимити эса $\int_a^b f(x)\,dx$ га тенг бўлади, яъни

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (14.24)$$

Бу теоремадаги (14.24) лимит муносабатни қуйидагича

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_n(x)\,dx\right]=\int_a^b\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]dx$$

ҳам ёзиш мумкин.

6- §. Функционал қаторларни ҳамда функционал кетма-кетликларни ҳадлаб дифференциаллаш

1. Функционал қаторларни ҳадлаб дифференциаллаш. $[a, b]$ сегментда яқинлашувчи

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{14.5}$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

14.12-теорема. *Агар $\sum_{n=1}^{\infty}n_n(x)$ қаторнинг ҳар бир ҳади $u_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ $[a, b]$ сегментда узлуксиз $u_n'(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ ҳосилага эга бўлиб, бу ҳосилалардан тузилган*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots$$

функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда берилган функционал қаторнинг $S(x)$ йиғиндиси шу $[a, b]$ да $S'(x)$ ҳосилага эга ва

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x) \tag{14.25}$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра

$$u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots$$

функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи. Унинг йиғиндисини $\bar S(x)$ дейлик: $\bar S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$. Бу $\bar S(x)$ 14.6-теоремага асосан $[a, b]$ да узлуксиз бўлади.

Функционал қаторни ҳадлаб интеграллаш ҳақидаги 14.10-теоремадан фойдаланиб, ушбу

$$\bar S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$$

қаторни $[a, x]$ оралиқ $(a<x\leqslant b)$ бўйича ҳадлаб интеграллаб қуйидагини топамиз:

$$\int_a^x \overline{S}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^x u_n'(x)\,dx\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n(x) - u_n(a)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = S(x) - S(a). \qquad (14.26)$$

Модомики, $\overline{S}(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз экан, 1-қисм, 6-боб, 4-§ да келтирилган теоремага биноан

$$\int_a^x \overline{S}(t)\,dt$$

функция дифференциалланувчи бўлиб, унинг ҳосиласи

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x \overline{S}(t)\,dt\right] = \overline{S}(x)$$

бўлади.

Иккинчи томондан (14.26) тенгликка кўра

$$\frac{d}{dx}\left[S(x) - S(a)\right] = \overline{S}(x),$$

яъни

$$S'(x) = \overline{S}(x)$$

бўлишини топамиз. Бу эса (14.5) функционал қатор йиғиндиси ҳосилага эга ва унинг учун (14.25) тенглик ўринли бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

(14.25) тенгликни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин.

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[u_n(x)\right].$$

Бу эса 14.12-теореманинг шартлари бажарилганда чексиз қаторларда ҳам ҳадлаб дифференциаллаш қоидаси ўринли бўлишини кўрсатади.

14.4-эслатма. 14.12-теоремадаги функционал қаторнинг текис яқинлашувчилик шарти ҳам етарли бўлиб, у зарурий шарт эмас.

2. Функционал кетма-кетликларни ҳадлаб дифференциаллаш. $[a, b]$ сегментда яқинлашувчи $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \qquad (14.2)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин.

14.13-теорема. *Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ $[a, b]$ сегментда узлуксиз $f_n'(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ ҳосилага эга бўлиб, бу ҳосилалардан тузилган*

$$f_1'(x),\ f_2'(x),\ \ldots,\ f_n'(x),\ \ldots$$

функционал кетма-кетлик $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса у ҳолда $f(x)$ лимит функция шу $[a, b]$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\{f_n'(x)\}$ кетма- кетликнинг лимити $f'(x)$ га тенг бўлади.

7-§. Даражали қаторлар

1. Даражали қаторлар. Абель теоремаси. Биз аввалги параграфларда функционал қаторларни ўргандик. Функционал қаторлар орасида, уларнинг хусусий ҳоли бўлган ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (14.27)$$

ёки, умумийроқ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots \qquad (14.28)$$

қаторлар (бунда $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots x_0$ — ўзгармас ҳақиқий сонлар) математикада ва унинг татбиқларида муҳим роль ўйнайди. Бу ерда, ушбу бобнинг 1-§ идаги (14.5) ифодада қатнашган $u_n(x)$ сифатида

$$u_n(x) = a_n x^n \text{ (ёки } u_n(x) = a_n (x - x_0)^n),$$

яъни x (ёки $x - x_0$) ўзгарувчининг даражалари қаралаяпти. Шу сабабли (14.27) ва (14.28) қаторлар *даражали қаторлар* деб аталади.

Агар (14.28) қаторда $x - x_0 = t$ деб олинса, у ҳолда бу қатор t ўзгарувчига нисбатан (14.27) қатор кўринишига келади. Демак, (14.27) қаторларни ўрганиш кифоядир.

(14.27) ифодадаги $a_0, a_1\ a_2, \ldots a_n \ldots$ ҳақиқий сонлар (14.27) даражали қаторнинг *коэффициентлари* деб аталади.

Даражали қаторнинг тузилишидан, даражали қаторлар бир-биридан фақат коэффициентлари билангина фарқ қилишини кўрамиз. Демак, даражали қатор берилган деганда унинг коэффициентлари берилган деганини тушунамиз.

Мисоллар. Ушбу

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (0! = 1)$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

қаторлар даражали қаторлардир.

Шундай қилиб, даражали қаторларнинг ҳар бир ҳади $(-\infty, +\infty)$ да берилган функциядир. Бинобарин, даражали қаторни, формал нуқтаи назардан, $(-\infty, +\infty)$ да қараш мумкин. Аммо, табиийки, уларни ихтиёрий нуқтада яқинлашувчи бўлади деб олмаймиз.

Албатта, ихтиёрий даражали қатор $x=0$ нуқтада яқинлашувчи бўлади. Бу равшан. Демак, даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси албатта $x=0$ нуқтани ўз ичига олади.

Даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси (тўплами) структурасини аниқлашда қуйидаги Абель теоремасига асосланилади.

14.14-теорема (Абель теоремаси). *Агар*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (14.27)$$

даражали қатор x нинг $x=x_0$ $(x_0 \neq 0)$ қийматида яқинлашувчи бўлса, x нинг

$$|x| < |x_0| \qquad (14.29)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида (14.27) *даражали қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. Шартга кўра

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

қатор (сонли қатор) яқинлашувчи. У ҳолда қатор яқинлашувчилигининг зарурий шартига асосан

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$$

бўлади. Демак, $\{a_n x_0^n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлади, яъни шундай ўзгармас M сони мавжудки, $\forall n \in N$ учун

$$|a_n x_0^n| \leqslant M$$

тенгсизлик бажарилади. Бу тенгсизликни эътиборга олиб қуйидагини топамиз:

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Энди ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots \qquad (14.30)$$

қатор билан бирга қуйидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (14.31)$$

қаторни қарайлик. Бунда, биринчидан (14.31) қатор яқинлашувчи (чунки бу қатор геометрик қатор бўлиб, унинг маҳражи (14.29) га кўра 1 дан кичик: $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$), иккинчидан (14.30) қаторнинг ҳар бир ҳади (14.31) қаторнинг мос ҳадидан катта эмас. У ҳолда 1-қисм 11-боб, 3-§ да келтирилган теоремага кўра (14.30) қатор яқинлашувчи бўлади. Демак, берилган (14.27) даражали қатор абсолют яқинлашувчи. Теорема исбот бўлди.

14.1-натижа. Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (14.27)$$

даражали қатор x нинг $x = x_0$ қийматида узоқлашувчи бўлса, x нинг $|x| > |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган (14.27) даражали қатор x_0 нуқтада узоқлашувчи бўлсин. Унда бу қатор x нинг $|x| > |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида ҳам узоқлашувчи бўлади, чунки (14.27) қатор x нинг $|x| > |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бирор $x = x_1$ қийматида яқинлашувчи бўладиган бўлса, унда Абель теоремасига кўра бу қатор $x = x_0$ ($|x_0| < x_1|$) нуқтада ҳам яқинлашувчи бўлиб қолади. Бу эса (14.27) қаторнинг $x = x_0$ да узоқлашувчи дейилишига зиддир. Натижа исбот бўлди.

2. Даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интервали. Энди даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси структурасини аниқлайлик.

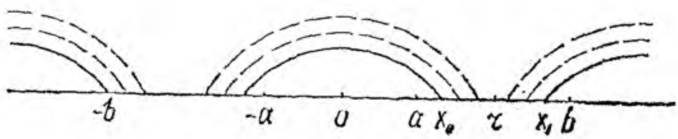
14.15-теорема. *Агар*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (14.27)$$

даражали қатор x нинг баъзи ($x \neq 0$) қийматларида яқинлашувчи, баъзи қийматларида узоқлашувчи бўлса, у ҳолда шундай ягона $r > 0$ ҳақиқий сон топиладики (14.27) *даражали қатор x нинг $|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида абсолют яқинлашувчи, $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоқлашувчи бўлади.*

Исбот. Берилган (14.27) даражали қатор $x = x_0 \neq 0$ да яқинлашувчи, $x = x_1$ да эса узоқлашувчи бўлсин. Равшанки, $|x_0| < |x_1|$ бўлади. Унда 14.14-теорема ҳамда 14.1-натижага мувофиқ (14.27) даражали қатор x нинг $|x| < |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида абсолют яқинлашувчи, x нинг $|x| > |x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоқлашувчи бўлади. Жумладан (14.27) даражали қатор a ($a < |x_0|$) нуқтада яқинлашувчи, b ($b > |x_1|$) нуқтада эса узоқлашувчи бўлади (15-чизма). Демак, (14.27) қатор $[a, b]$ сегментнинг чап четкасида яқинлашувчи, ўнг четкасида эса узоқлашувчи.

$[a, b]$ сегментнинг ўртаси $\frac{a+b}{2}$ нуқтани олиб, бу нуқтада (14.27) қаторни қарайлик. Агар (14.27) қатор $\frac{a+b}{2}$ нуқтада яқинлашувчи бўлса, унда $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ сегментни, $\frac{a+b}{2}$ нуқтада узоқлашувчи бўлса, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ сегментни олиб, уни $[a_1, b_1]$ орқали белгилайлик. Демак, (14.27) қатор a_1 нуқтада яқинлашувчи, b_1 нуқтада эса узоқлашувчи



15- чизма

бўлиб, $[a_1, b_1]$ сегментнинг узунлиги $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ га тенгдир. Сўнг $[a_1, b_1]$ сегментнинг ўртаси $\frac{a_1+b_1}{2}$ нуқтани олиб, бу нуқтада (14.27) қаторни қараймиз. Агар у $\frac{a_1+b_1}{2}$ нуқтада яқинлашувчи бўлса, унда $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ сегментни, узоқлашувчи бўлса, $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ сегментни олиб, уни $[a_2, b_2[$ орқали белгилаймиз. Демак, (14.27) қатор a_2 нуқтада яқинлашувчи, b_2 нуқтада эса узоқлашувчи бўлиб, $[a_2, b_2]$ сегментнинг узунлиги $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$ га тенгдир. Шу жараённи давом эттираверамиз. Натижада ичма-ич жойлашган

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Бу сегментларнинг ҳар бирининг чап чеккасида (a_n- нуқталарда) (14.47) қатор яқинлашувчи, ўнг чеккасида эса [b_n- нуқталарда) узоқлашувчи, $n \to \infty$ да бу сегментлар узунлиги нолга интила боради $\left(b_n - a_n = \left(1\frac{b-a}{2^n} \to 0\right)\right)$.

Унда ичма-ич жойлашган сегментлар принципига кўра (қаралсин, 1-қисм, 3-боб, 8-§) шундай ягона r сони топиладики,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = r$$

бўлиб, бу r нуқта барча сегментларга тегишли бўлади.

Энди x ўзгарувчининг $|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий қийматини қарайлик. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$ бўлгани сабабли, шундай натурал n_0 сони топиладики, $|x| < a_{n_0} < r$ бўлади. a_{n_0} нуқтада (14.27) қатор яқинлашувчи. Демак, 14.14- теоремага кўра x нуқтада ҳам (14.27) даражали қатор яқинлашувчи бўлади.

x ўзгарувчининг $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий қийматини қарайлик. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$ бўлганлиги сабабли, шундай натурал n_1 сони топиладики, $|x| > b_{n_1} > r$ бўлади. b_{n_1} нуқтада (14.27) қатор узоқлашувчи. Унда 14.1- натижага кўра x да (14.27) қатор узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, шундай r сони топиладики (14.27) даражали қатор x нинг $|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида абсолют яқинлашувчи, $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоқлашувчи бўлади. Теорема исботланди.

14.8-таъриф. Юқоридаги 14.15-теоремада топилган r сони (14.27) даражали қаторнинг *яқинлашиши радиуси*, $(-r, r)$ интервал эса (14.27) даражали қаторнинг *яқинлашиш интервали* деб аталади.

14-5-эслатма. 14.15-теорема x нинг $x = \pm r$ қийматларида (14.27) даражали қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши тўғрисида хулоса чиқариб бермайди. Бу $x = \pm r$ нуқталарда (14.27) даражали қатор яқинлашувчи ҳам бўлиши мумкин, узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин.

Энди мисоллар қараймиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

даражали қатор (геометрик қатор) нинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали $(-1, +1)$ бўлади. Бу қатор интервалнинг чекка нуқталари $r = \pm 1$ да узоқлашувчи.

2. Қуйидаги

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots$$

қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали $(-1, 1)$ бўлади. Берилган қатор $r = 1$ да яқинлашувчи, $r = -1$ да эса узоқлашувчидир, Демак, даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси (тўплами) $[-1, 1]$ сегментдан иборат.

3. Ушбу

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали эса $(-1, 1)$ бўлади. Берилган қатор $r = 1$ да яқинлашувчи, $r = -1$ да эса узоқлашувчидир. Демак, қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-1, 1]$ ярим интервалдан иборат.

14.6-эслатма. Юқоридаги теорема баъзи $x_0 \neq 0$ нуқталарда яқинлашувчи, баъзи $x_1 \neq 0$ нуқталарда узоқлашувчи бўлган даражали қаторлар ҳақидадир. Аммо шундай даражали қаторлар ҳам борки, улар фақат $x = 0$ нуқтадагина яқинлашувчи бўлади. Масалан, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\ x^n$, қатор исталган $x_0 \neq 0$ нуқтада узоқлашувчидир. Ҳақиқатан ҳам, Даламбер аломатига кўра

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\ x_0^{n+1}}{n!\ x_0^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\, x_0 = \infty$$

бўлади. Демак, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\ x^n$ қатор исталган $x \neq 0$ да узоқлашувчи. Бундай даражали қаторларнинг яқинлашиш радиусини $r = 0$ деб оламиз

Айни вақтда шундай даражали қаторлар ҳам борки, улар ихтиёрий $x \in (-\infty, \infty)$ да яқинлашувчи бўлади. Масалан, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ни олайлик

Бу қатор исталган x_0 нуқтада яқинлашувчидир. Ҳақиқатан ҳам, яна Даламбер аломатига кўра

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x_0^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x_0|}{n+1} = 0$$

бўлади. Демак, бу қатор исталган $x \in (-\infty + \infty)$ да яқинлашувчи. Бундай даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси $r = +\infty$ деб олинади.

3. Коши — Адамар теоремаси. Юқорида кўрдикки, даражали қаторларнинг яқинлашиш соҳаси содда структурага эга бўлар экан: ёки интервал, ёки ярим интервал, ёки сегмент. Ҳамма ҳолларда ҳам бу соҳа яқинлашиш радиуси r орқали ифодаланади.

Маълумки, ҳар қандай даражали қатор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (14.27)$$

ўзининг коэффициентлари кетма-кетлиги $\{a_n\}$ билан аниқланади. Бинобарин, унинг яқинлашиш ~~радиуси~~ ҳам шу коэффициентлар кетма-кетлиги орқали қандайдир топилиши керак. Берилган (14.27) даражали қатор коэффициентлари ёрдамида $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$:

$$|a_0|,\ |a_1|,\ \sqrt{|a_2|},\ \ldots,\ \sqrt[n]{|a_n|},\ \ldots \qquad (14.32)$$

сонлар кетма-кетлигини тузамиз. Маълумки, ҳар қандай сонлар кетма-кетлигининг юқори лимити мавжуд (қаралсин, 1-қисм, 3-боб, 11-§). Демак, (14.32) кетма-кетлик ҳам юқори лимитга эга. Уни b билан белгилайлик:

$$b = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} \quad (0 \leqslant b \leqslant +\infty)$$

14.16-теорема (Коши — Адамар теоремаси). *Берилган* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси*

$$r = \frac{1}{b} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (14.33)$$

бўлади.

14.6-эслатма. Юқоридаги (14.33) формулада $b = 0$ бўлганда $r = +\infty$, $b = +00$ бўлганда эса $r = 0$ деб олинади.

Исбот. (14.33) формуланинг тўғрилигини кўрсатишда қуйидаги

1) $b = +\infty$ $(r = 0)$,

2) $b = 0$ $(r = +\infty)$,

3) $0 < b < +\infty$ $\left(r = \frac{1}{b}\right)$

ҳолларни алоҳида-алоҳида қараймиз.

1) $b = \infty$ бўлсин. Бу ҳолда $\sqrt[n]{|a_n|}$ кетма-кетлик чегараланмагандир. Ихтиёрий x_0 $(x_0 \neq 0)$ нуқтани олиб, бу нуқтада (14.27) даражали

қаторнинг узоқлашувчи эканини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни шу x_0 нуқтада (14.27) даражали қатор яқинлашувчи бўлсин. Демак, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ қатор (сонли қатор) яқинлашувчи. Унда қатор яқинлашувчилигининг зарурий шартига асосан

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$$

бўлади. Демак, $\{a_n x_0^n\}$ кетма-кетлик чегараланган, яъни шундай ўзгармас M сон мавжудки (уни 1 дан катта қилиб олиш мумкин), $\forall n \in N$ учун

$$|a_n x_0^n| \leqslant M \, (M > 1)$$

тенгсизлик бажарилади. Бу тенгсизликдан

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x_0| \leqslant \sqrt[n]{M} < M,$$

яъни

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{M}{|x_0|}$$

бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб $\sqrt[n]{|a_n|}$ кетма-кетлик чегараланган бўлиб қолди. Натижада зиддиятлик юзага келди. Зиддиятликнинг келиб чиқишига сабаб ($x_0 \neq 0$) нуқтада (14.27) қаторнинг яқинлашувчи бўлсин деб олинишидир. Демак, (14.27) даражали қатор ихтиёрий $x_0 (x_0 \neq 0)$ нуқтада узоқлашувчи.

2) $b = 0$ бўлсин. Бу ҳолда ихтиёрий $x_0 (x_0 \neq 0)$, нуқтада (14.27) даражали қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз. Модомики, $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ кетма-кетликнинг юқори лимити нолга тенг экан, бундан унинг лимити ҳам мавжуд ва нолга тенглиги келиб чиқади. Таърифга асосан $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, жумладан $\varepsilon = \frac{1}{2|x_0|}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x_0|}$$

бўлади. Кейинги тенгсизликдан эса

$$|a_n x_0^n| < \frac{1}{2^n}$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

қатор яқинлашувчи. Таққослаш теоремасига кўра (қаралсин, 1-қисм, 11-боб, 3-§)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Демак,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

қатор абсолют яқинлашувчи.

3) $0 < b < +\infty$ бўлсин. Бу ҳолда (14.27) даражали қатор ихтиёрий $x_0 \left(|x_0| < \frac{1}{b} \right)$ нуқтада яқинлашувчи, ихтиёрий $x_1 \left(|x_1| > \frac{1}{b} \right)$ нуқтада узоқлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

$|x_0| < \frac{1}{b}$ бўлсин. У ҳолда шундай $\delta > 0$ сонни топиш мумкинки, $|x_0| = \frac{1}{b+\delta}$ бўлади. Энди $\delta_1 (0 < \delta_1 < \delta)$ сонни олайлик. Бу $\delta_1 > 0$ сонга кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун (юқори лимитнинг хоссасига кўра, 1-қисм, 3-боб, 11-§) $\sqrt[n]{|a_n|} < b + \delta_1$, яъни $|a_n| < (b + b_1)^n$ бўлади. Демак, барча $n > n_0$ учун

$$|a_n x_0^n| = |a_n| \, |x_0^n| < (b+\delta_1)^n \frac{1}{(b+\delta)^n} = \left(\frac{b+\delta_1}{b+\delta} \right)^n \tag{14.34}$$

бўлиши келиб чиқади, бунда

$$\frac{b+\delta_1}{b+\delta} = \frac{(b+\delta)-(\delta-\delta_1)}{b+\delta} = -\frac{\delta-\delta_1}{b+\delta} < 1.$$

Энди ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| = |a_0| + |a_1 x_0| + |a_2 x_0^2| + \ldots + |a_n x_0^n| + \ldots \tag{14.30}$$

қатор билан қуйидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b+\delta_1}{b+\delta} \right)^n = 1 + \frac{b+\delta_1}{b+\delta} + \ldots + \left(\frac{b+\delta_1}{b+\delta} \right)^n + \ldots \tag{14.35}$$

қаторни солиштирайлик. Бунда, биринчидан, (14.35) қатор яқинлашувчи (чунки бу қатор геометрик қатор бўлиб, унинг махражи $0 < \frac{b+\delta_1}{b+\delta} < 1$), иккинчидан, n нинг бирор қийматидан бошлаб $(n > n_0)$ (14.34) муносабатга кўра (14.30) қаторнинг ҳар бир ҳади (14.35) қаторнинг мос ҳадидан катта эмас. Унда қаторлар назариясида келтирилган таққослаш теоремасига (1-қисм, 11-боб, 3-§) кўра (14.30) қатор яқинлашувчи бўлади.

$|x_1| > \frac{1}{b}$ бўлсин. Унда шундай $\delta' > 0$ сонни топиш мумкинки,

$$|x_1| = \frac{1}{b-\delta'}$$

бўлади. Энди δ_1' $(0 < \delta_1' < \delta')$ сонни олайлик. Юқори лимитнинг хоссасига асосан (1-қисм, 3-боб, 2-§) $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ кетма-кетликнинг ушбу

$$\sqrt[n]{|a_n|} > b - \delta_1', \text{ яъни } |a_n| > (b - \delta_1')^n$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган ҳадларининг сони чексиз кўп бўлади. Демак, бу ҳолда

$$|a_n x_1^n| = |a_n| \cdot |x_1^n| > (b - \delta_1')^n \cdot \frac{1}{(b-\delta')^n} = \left(\frac{b-\delta_1'}{b-\delta'}\right)^n \qquad (14.36)$$

бўлиб, бунда

$$\frac{b-\delta_1'}{b-\delta'} = \frac{(b-\delta') + (\delta' - \delta_1')}{b-\delta'} = 1 + \frac{\delta' - \delta_1'}{b-\delta'} > 1$$

бўлади.

Юқоридаги (14.36) муносабатдан $n \to \infty$ да $\{a_n x_1^n\}$ кетма-кетликнинг лимити нолга тенг эмаслигини топамиз. Демак,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

қатор узоқлашувчи (қатор яқинлашувчилигининг зарурий шарти бажарилмайди).

Шундай қилиб, ҳар бир $x_0\left(|x_0| < \frac{1}{b}\right)$ нуқтада (14.27) даражали қатор яқинлашувчи, ҳар бир $x_1\left(|x_1| > \frac{1}{b}\right)$ нуқтада эса шу даражали қатор узоқлашувчи бўлар экан.

Даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси таърифини эътиборга олиб, $\frac{1}{b}$ берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси эканини топамиз. Теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^{\sqrt{2}}} + \ldots + \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} + \ldots$$

даражали қаторни қарайлик. Бу даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини (14.33) формулага кўра топамиз:

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = 1.$$

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали эса $(-1, +1)$ дан иборат. Бу даражали қатор яқинлашиш интервалининг четкаларида мос равишда қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

сонли қаторларга айланиб, уларни Лейбниц теоремаси ҳамда Раабе аломатидан фойдаланиб яқинлашувчи эканлигини исботлаш қийин эмас.

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-1, +1]$ сегментдан иборат.

Кўпинча практикада даражали қаторларнинг яқинлашиш соҳаларини топишда сонли қаторлар назариясида келтирилган аломатлардан фойдаланилади. Бунда ўзгарувчи x ни параметр сифатида қаралади.

2. Ушбу

$$1+\frac{x}{2\cdot 5}+\frac{x^2}{3\cdot 5^2}+\ldots+\frac{x^n}{(n+1)5^n}+\ldots$$

даражали қаторни қарайлик. Бу қаторга Даламбер аломати (I-қисм 11-боб, 4-§) ни қўллаб қуйидагини топамиз:

$$d=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+2)5^{n+1}}:\frac{x^n}{(n+1)5^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)5^n\, x^{n+1}}{(n+2)5^{n+1}\, x^n}\right|=$$

$$=\frac{|x|}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\frac{|x|}{5}.$$

Демак, $\frac{|x|}{5}<1$, яъни $|x|<5$ бўлганда қатор яқинлашувчи, $\frac{|x|}{5}>1$, яъни $|x|>$ >5 бўлганда қатор узоқлашувчи.

Шундай қилиб, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=5$, яқинлашиш интервали эса $(-5, 5)$ бўлади.

Яқинлашиш интервали $(-5, 5)$ нинг чеккаларида даражали қатор мос равишда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots,\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

сонли қаторларга айланиб, бу қаторларнинг биринчиси яқинлашувчи, иккинчиси эса узоқлашувчидир. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-5, 5)$ ярим интервалдан иборат экан.

8-§. Даражали қаторларнинг хоссалари

Бирор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (14.27)$$

даражали қатор берилган бўлсин.

14.17-теорема. *Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r\ (r>0)$ бўлса, у ҳолда бу қатор $[-c, c]$ $(0<c<r)$ сегментда текис яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. Шартга кўра r — (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси. Демак, берилган қатор $(-r, r)$ интервалда яқинлашувчи. Жумладан, $c<r$ бўлганлигидан, (14.27) даражали қатор c нуқтада ҳам яқинлашувчи (абсолют яқинлашувчи) бўлади. Демак,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|c^n=|a_0|+|a_1|c+|a_2|c^2+\ldots+|a_n|c^n+\ldots \qquad (14.37)$$

қатор яқинлашувчи.

$\forall x \in [-c, c]$ учун ҳар доим $|a_n x_n| \leqslant |a_n| c^n$ бўлади. Натижада, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

қаторнинг ҳар бир ҳади (14.37) қаторнинг мос ҳадидан катта эмаслигини топамиз. У ҳолда Вейерштрасс аломатига кўра $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор $[-c, c]$ сегментда текис яқинлашувчи бўлади. Теорема исбот бўлди.

14.7-эслатма. Бу хоссадаги $c\,(c>0)$ сонни (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r га ҳар қанча яқин қилиб олиш мумкин. Аммо, умуман айтганда, (14.27) даражали қатор $(-r, r)$ да текис яқинлашувчи бўлавермайди.

Масалан, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

даражали қатор $(-1, +1)$ оралиқда яқинлашувчи $(r=1)$, аммо у $(-1, +1)$ да текис яқинлашувчи эмас (134-бетга қаралсин).

14.18-теорема. *Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r>0$ бўлса, у ҳолда бу қаторнинг $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ йиғиндиси $(-r, r)$ оралиқда узлуксиз функция бўлади.*

Исбот. (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш интервали $(-r, r)$ дан ихтиёрий $x_0 (x_0 \in (-r, r))$ нуқтани оламиз. Равшанки, $|x_0| < r$ бўлади. Ушбу $|x_0| < c < r$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи c сонини олайлик. (14.27) даражали қатор юқорида келтирилган 14.17-теоремага кўра $[-c, c]$ да текис яқинлашувчи бўлади. Унда ушбу бобнинг 3-§ идаги 14.6-теоремага асосан, берилган (14.27) даражали қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ функция $[-c, c]$ да, ва демак, x_0 нуқтада узлуксиз бўлади. Демак, (14.27) қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ функция $(-r, r)$ интервалда узлуксиздир. Теорема исбот бўлди.

14.19-теорема (Абель теоремаси). *Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r>0$ бўлиб, бу қатор $x=r$ $(x=-r)$ нуқтада яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (14.27) қаторнинг йиғиндиси $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ функция, шу $x=r$ $(x=-r)$ нуқтада чапдан (ўнгдан) узлуксиз бўлади.*

Исбот. Берилган (14.27) даражали қатор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

$x=r$ нуқтада яқинлашувчи бўлсин. Демак, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_n r^n + \ldots \qquad (14.38)$$

сонли қатор яқинлашувчи. Унинг йиғиндисини $S(r)$ билан белгилайлик: $S(r)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$. Биз $\lim_{x\to r-0} S(x) = S(r)$, яъни $\lim_{x\to r-0} [S(x) - S(r)] = 0$ бўлишини исботлашимиз керак.

Агар $x = tr$ $(0<t<1)$ деб олинса, унда $t\to 1-0$ бўлиб,

$$\lim_{x\to r-0} [S(x) - S(r)] = \lim_{t\to 1-0} [S(tr) - S(r)] = \lim_{t\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n t^n - a^n r^n)$$

бўлади.

Шартга кўра (14.38) қатор яқинлашувчи. У ҳолда 1- қисм, 11- боб, 4- § да келтирилган теоремага асосан, $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{3}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ ва $p = 1, 2, 3, \ldots$ да

$$|a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \ldots + a_{n+p} r^{n+p}| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (14.39)$$

бўлади. Бу тенгсизликда $p\to\infty$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$|a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \ldots| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Энди қуйидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n t^n = a_0 + a_1 r t + a_2 r^2 t^2 + \ldots + a_n r^n t^n + \ldots \quad (0<t<1) \qquad (14.40)$$

қаторни қараймиз. Бу қатор $\forall\, t \in (0,1)$ да яқинлашувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$a_{n+1} r^{n+1} t^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} t^{n+2} + \ldots + a_{n+p} r^{n+p} t^{n+p} =$$
$$= [a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \ldots + a_{n+p} r^{n+p}]\, t^{n+p} -$$
$$- \sum_{i=1}^{p-1} [(a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \ldots + a_{n+i} r^{n+i})(t^{n+1+i} - t^{n+i})]$$

бўлишини ва юқоридаги (14.39) тенгсизликни эътиборга олиб қуйидагини топамиз:

$$|a_{n+1} r^{n+1} t^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} t^{n+2} + \ldots + a_{n+p} r^{n+p} t^{n+p}| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} t^{n+p} + \frac{\varepsilon}{3} \Big[\sum_{i=1}^{p-1} (t^{n+i} - t^{n+i+1}) \Big] = \frac{\varepsilon}{3} t^{n+1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Бу эса (14.40) қаторнинг яқинлашувчилигини, яъни $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0' \in N$ топиладики, барча $n > n_0'$ ва $p = 1, 2, \ldots$ лар учун

$$|a_{n+1} r^{n+1} t^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} t^{n+2} + \ldots + a_{n+p} r^{n+p} t^{n+p}| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (14.41)$$

бўлишини кўрсатади. Бу тенгсизликда $p \to \infty$ да лимитга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$|a_{n+1}r^{n+1}t^{n+1} + a_{n+2}r^{n+2}t^{n+2} + \dots| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14.42}$$

Агар $\overline{n}_0 = \max\{n_0, n_0'\}$ деб олинса, унда $n > \overline{n}_0$ бўлганда (14.41) ва (14.42) тенгсизликлар бир йўла бажарилади.

Барча $n > \overline{n}_0$ учун

$$|S(tr) - S(r)| = |\sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n t^n - a_n r^n)| \leqslant |\sum_{k=1}^{n} a_k r^k (t^k - 1)| +$$
$$+ |a_{n+1}r^{n+1}t^{n+1} + a_{n+2}r^{n+2}t^{n+2} + \dots| + |a_{n+2}r^{n+1} + a_{n+1}r^{n+2} +$$
$$+ \dots| \leqslant |\sum_{k=1}^{n} a_k r^k (t^k - 1)| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

бўлади.

Равшанки, $t \to 1-0$ да $t^k - 1 \to 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.
Шу сабабли

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k r^k (t^k - 1)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

деб олиш мумкин.

Натижада

$$|S(tr) - S(r)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{t \to 1-0} S(tr) = S(r), \text{ яъни } \lim_{x \to r-0} S(x) = S(r)$$

бўлишини билдиради. Демак, (14.27) даражали қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ функция $x = r$ да чапдан узлуксиз.

Худди шунга ўхшаш (14.27) даражали қатор $x = -r$ да яқинлашувчи бўлса, қаторнинг йиғиндиси $-r$ нуқтада ўнгдан узлуксиз бўлиши кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

14.20-теорема. *Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r $(r > 0)$ бўлса, бу қаторни $[a, b]$ $([a, b] \subset (-r, r))$ оралиқда ҳадлаб интеграллаш мумкин.*

Исбот. Шундай c $(0 < c < r)$ топа оламизки, $[a, b] \subset [-c, c] \subset (-r, r)$ бўлади. Берилган даражали қатор $[-c, c]$ да текис яқинлашувчи бўлади. Демак, $[a, b]$ да (14.27) даражали қатор текис яқинлашувчи. Унда (14.27) қаторнинг йиғиндиси

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

узлуксиз бўлиб, ушбу бобнинг 5-§ да келтирилган теоремага кўра бу қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин.

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Теорема исбот бўлди.

Хусусан, $a = 0$, $b = x$ ($|x| < r$) бўлганда

$$\int_0^x S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots$$

бўлади. Бу қаторнинг яқинлашиш радиуси ҳам r га тенг. Ҳақиқатан ҳам, Коши — Адамар теоремасидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = r.$$

14.21-т е о р е м а $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси* r *бўлса,* $(-r, r)$ *да бу қаторни ҳадлаб дифференциаллаш мумкин.*

И с б о т. Аввало берилган (14.27) даражали қатор ҳадларининг ҳосилаларидан тузилган ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots \qquad (14.43)$$

қаторнинг $|x_0| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқтада яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз. Қуйидаги $|x_0| < c < r$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи c сонни олайлик. Унда $\frac{1}{c}|x_0| = q < 1$ бўлиб,

$$|na_n x_0^{n-1}| = nq^{n-1} \cdot \frac{1}{c} |a_n c^n|$$

бўлади. Равшанки, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, q^{n-1} \quad (q < 1)$

қатор яқинлашувчи (уни Даламбер аломатига кўра кўрсатиш қийин эмас). Унда

$$\lim_{n\to\infty} n\, q^{n-1} = 0$$

бўлади. Демак, n нинг бирор n_0 қийматидан бошлаб, ($n > n_0$ учун) $nq^{n-1} < c$ бўлиб, натижада $\forall\, n > n_0$ учун ушбу

$$|n\, a_n x_0^{n-1}| \leq |a_n c^n| \qquad (14.44)$$

тенгсизликка келамиз.

$c \in (-r, r)$ бўлганлиги сабабли $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ қатор абсолют яқинлашувчи.

Унда (14.44) муносабатни ҳисобга олиб, Вейерштрасс аломатидан фойдаланиб, $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ қаторнинг $(-r, r)$ да яқинлашувчи бўлишини топамиз. Демак, бу қатор $[-c, c]$ да текис яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, берилган (14.27) даражали қатор ҳадларининг ҳосилаларидан тузилган (14.43) қатор текис яқинлашувчи. У ҳолда ушбу бобнинг 6-§ да келтирилган 14.12-теоремага кўра

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

бўлади.

Шуни ҳам айтиш керакки, (14.27) ва (14.43) қаторларнинг яқинлашиш радиуслари бир хил бўлади. Ҳақиқатан ҳам, Коши — Адамар теоремасидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim_{n=\infty}} \left(\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Демак,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Бу хоссадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

14.2-натижа. Агар (14.27) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r бўлса, бу қаторни $(-r, r)$ да исталган марта дифференциаллаш мумкин. Шундай қилиб, яқинлашиш радиуси $r > 0$ бўлган $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторни ҳадлаб интеграллаш ва ҳадлаб (исталган марта) дифференциаллаш мумкин ва ҳосил бўлган даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси ҳам r га тенг бўлади.

14.9-таъриф. Агар $f(x)$ функция $(-r, r)$ да яқинлашувчи даражали қаторнинг йиғиндиси бўлса, $f(x)$ *функция* $(-r, r)$ да *аналитик* деб аталади.

14.22-теорема. *Иккита*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{14.27}$$

ва

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots \tag{14.45}$$

даражали қаторлар берилган бўлиб, (14.27) *даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси* $r_1 > 0$, *йиғиндиси эса* $S_1(x)$, (14.45) *даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси* $r_2 > 0$, *йиғиндиси* $S_2(x)$ *бўлсин.*

Агар $\forall\, x \in (-r, r)$ $(r = \min(r_1, r_2))$ *да*

$$S_1(x) = S_2(x) \tag{14.46}$$

бўлса, у ҳолди $\forall\, n \in N$ *учун*

$$a_n = b_n,$$

яъни (14.27) *ва* (14.45) *даражали қаторлар бир хил бўлади.*

Исбот. Равшанки, (14.27) ва (14.45) даражали қаторлар $(-r, r)$ да яқинлашувчи ва уларнинг йиғиндилари $S_1(x)$ ва $S_2(x)$ функциялар шу интервалда узлуксиз бўлади. Демак,

$$\lim_{x\to 0} S_1(x) = S_1(0), \quad \lim_{x\to 0} S_2(x) = S_2(0).$$

Юқоридаги (14.46) шартга кўра $S_1(0) = S_2(0)$ бўлади. Бундан эса $a_0 = b_0$ эканлиги келиб чиқади. Бинобарин, $\forall\ x \in (-r, r)$ учун $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$. Агар $x \neq 0$ десак, бу тенгликдан барча $x \in (-r, 0) \cup (0, r)$ учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}$$

га эга бўламиз. Бу даражали қаторларнинг ҳар бири ҳам $(-r, r)$ да яқинлашувчи бўлади, ва демак, уларнинг йиғиндилари шу интервалда узлуксиз функция бўлади. Шу хусусиятдан фойдалансак, $x \to 0$ да

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = a_1, \quad \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} = b_1$$

бўлишини, ва демак, $a_1 = b_1$ эканлигини топамиз. Бу жараённи давом эттира бориб, барча $n \in N$ учун $a_n = b_n$ бўлиши топилади. Демак, (14.27) ва (14.45) даражали қаторлар бир хил. Теорема исбот бўлди.

$(-r, r)$ $(r > 0)$ оралиқда $f(x)$ функция берилган ва узлуксиз бўлсин. Юқоридаги теорема, $f(x)$ ни даражали қатор йиғиндиси сифатида ифодалай оладиган бўлсак, бундай ифодалаш ягона бўлишини билдиради.

9-§. Тейлор қатори

Биз юқорида, ҳар қандай даражали

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ldots$$

қатор ўзининг яқинлашиш интервали $(-r, r)$ да узлуксиз $S(x)$ функцияни (даражали қатор йиғиндисини) ифодалаб, бу функция шу оралиқда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлишини кўрдик.

Энди бирор оралиқда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлган функцияни даражали қаторга ёйиш масаласини қараймиз.

1. Функцияларни Тейлор қаторига ёйиш. $f(x)$ функция $x = x_0$ нуқтанинг бирор

$$U_\delta(x_0) = \{x \in R : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

атрофида берилган бўлиб, шу атрофда функция исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлсин. Равшанки, бу ҳолда функциянинг 1-қисм, 6-боб, 7-§ да батафсил ўрганилган Тейлор формуласи

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x)$$

ни ёзиш мумкин, бунда $r_n(x)$ — қолдиқ ҳад.

Берилган $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлиши Тейлор формуласидаги ҳадларнинг сонини ҳар қанча катта сонда олиш имконини беради. Бинобарин, табиий равишда ушбу

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \qquad (14.47)$$

қатор юзага келади. Бу махсус даражали қатор бўлиб, унинг коэффициентлари $f(x)$ функция ва унинг ҳосилаларининг x_0 нуқтадаги қийматлари орқали ифодаланган.

Одатда (14.47) даражали қатор $f(x)$ функциянинг *Тейлор қатори* деб аталади.

Хусусан, $x_0=0$ да қатор қуйидагича бўлади:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f_1^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (14.48)$$

Даражали қаторлар деб номланган 8-§ нинг бошланишида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ кўринишдаги даражали қаторларни ўрганишни келишиб олинган эди. Шуни эътиборга олиб, $f(x)$ функциянинг (14.48) кўринишдаги Тейлор қаторини ўрганамиз.

Яна бир бор таъкидлаймизки, (14.47) қатор $f(x)$ функция билан ўзининг коэффициентлари орқали боғланган бўлиб, бу (14.47) қатор яқинлашувчи бўладими, яқинлашувчи бўлган ҳолда унинг йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўладими, бундан қатъи назар, уни $f(x)$ функциянинг Тейлор қатори деб атадик.

Табиий равишда қуйидаги савол туғилади: қачон бирор $U_\delta(0)$ оралиқда берилган, исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлган $f(x)$ функциянинг Тейлор қатори

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

шу оралиқда худди шу $f(x)$ га яқинлашади?

14.23-теорема. *$f(x)$ функция бирор $(-r, r)$ $(r>0)$ оралиқда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлиб, унинг $x=0$ нуқтадаги Тейлор қатори*

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (14.48)$$

бўлсин.

Бу қатор $(-r, r)$ оралиқда $f(x)$ га яқинлашиши учун $f(x)$ функция Тейлор формуласи

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x) \qquad (14.49)$$

нинг қолдиқ ҳади барча $x\in(-r, r)$ да нолга интилиши ($\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$) *зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. Аввало (14.48) қаторнинг коэффициентлари билан (14.49) Тейлор формуласидаги коэффициентларнинг бир хил эканлигини таъкидлаймиз.

(14.48) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўлсин. У ҳолда бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

учун

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x) \quad (\forall\ x\in(-r,\ r))$$

бўлади. Ундан эса $\forall\ x\in(-r,\ r)$ учун

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. $\forall\ x\in(-r,\ r)$ да $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ бўлсин. У ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=0$ бўлиб, ундан эса

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (14.48) қатор $(-r,\ r)$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўлишини, яъни

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (*)$$

эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Одатда (*) муносабат ўринли бўлса, $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилган деб аталади.

14.24-теорема. *Агар $f(x)$ функция $(-r,\ r)$ $(r>0)$ оралиқда даражали қаторга ёйилган бўлса:*

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \qquad (14.50)$$

бу қатор $f(x)$ функциянинг Тейлор қатори бўлади.

Исбот. 14.21-теорема ва унинг натижасига кўра (14.50) даражали қатор $(-r,\ r)$ оралиқда исталган марта (ҳадлаб) дифференциалланувчи бўлиб,

$$f'(x)=1\cdot a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+n\,a_n\,x^{n-1}+\ldots$$
$$f''(x)=1\cdot2\cdot a_2+2\cdot3a_3x+\ldots+n\cdot(n-1)\,a_n\,x^{n-2}+\ldots$$
$$f'''(x)=1\cdot2\cdot3\cdot a_3+\ldots+n(n-1)(n-2)\,a_n\,x^{n-3}+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)\,na_n+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

бўлади. Кейинги тенгликларда $x=0$ деб қуйидагиларни топамиз:

$$a_0=f(0),\ a_1=\frac{f'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(0)}{2!},\quad a_3=\frac{f'''(0)}{3},\ \ldots\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots$$

Натижада (14.50) қаторнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Бу эса теоремани исботлайди.

Мисол. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $(-\infty, +\infty)$ да барча тартибдаги ҳосилаларга эга:

а) $x\neq 0$ бўлганда

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$f''(x)=-\left(\frac{6}{x^4}+\frac{4}{4x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

бунда $P(u)$ — u нинг рационал функцияси. Бу

$$f^{(n)}(x)=P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\quad (n=1, 2, \ldots).$$

муносабатнинг тўғрилиги математик индукция методи ёрдамида кўрсатилади.

б) $x=0$ бўлсин. Берилган функция $x=0$ нуқтада барча тартибдаги ҳосилаларга эга бўлиб, улар нолга тенг бўлади:

$$f^{(n)}(0)=0\qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}=0,\quad f'(0)=0,$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=0,\quad f''(0)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Умумий ҳолда, $f^{(n)}(0)=0$ $(n=1, 2, \ldots)$ бўлишини математик индукция методи ёрдамида кўрсатиш мумкин.

Демак, берилган функциянинг $x=0$ нуқтадаги барча тартибдаги ҳосилалари нолга тенг экан.

Бу функциянинг $x=0$ нуқтадаги Тейлор қатори

$$0+\frac{0}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\ldots+\frac{0}{n!}x^n+\ldots$$

бўлиб, унинг йиғиндиси 0 га тенг.

Келтирилган мисолдан кўринадики, бирор оралиқда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлган баъзи функцияларнинг Тейлор қатори шу оралиқда қаралаётган функцияга яқинлашмаслиги мумкин экан.

Қуйида функциянинг Тейлор қаторига ёйилишининг етарли шартини ифодаловчи теоремани келтирамиз.

14.25-теорема. *$f(x)$ функция бирор $(-r, r)$ оралиқда исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлсин. Агар шундай ўзгармас $M>0$ сони мавжуд бўлсаки, барча $x\in(-r, r)$ ҳамда барча $n=0, 1, 2, \ldots$ учун*

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $(-r, r)$ оралиқда $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилади, яъни

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots \qquad (14.50)$$

Исбот. $f(x)$ функция учун Тейлор формуласи

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x)$$

ни ёзиб, унинг Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳади

$$r_n(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

ни олайлик. У ҳолда

$$|r_n(x)|=\left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant M\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}\ (x\in(-r, r))$$

бўлади. Агар

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0 \quad x\in(-r, r)$$

эканлигини аниқлаймиз. Бу эса (14.50) муносабатнинг ўринли бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2. Элементар функцияларнинг Тейлор қаторлари. 1°, $f(x)=e^x$ функциянинг Тейлор қатори. Маълумки, $f(x)=e^x$ функциянинг (ихтиёрий чекли $[-a,a]$ $(a>0)$ оралиқдаги) Тейлор формуласи

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x)$$

бӯлиб, унинг қолдиқ ҳади эса Лагранж кўринишида қуйидагича бўлади:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \qquad (0 < \theta < 1)$$

(қаранг, 1-қисм, 6-боб, 7-§). Ҳар бир $x \in [-a, a]$ $(a > 0)$ да $e^{\theta x} < e^a$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$$

эканлиги келиб чиқади ва $n \to \infty$ да у нолга интилади. Демак, ихтиёрий чекли x да

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

бўлади.

2°. $f(x) = \sin x$ функциянинг Тейлор қатори. Маълумки, $f(x) = \sin x$ функциянинг (ихтиёрий чекли $[-a, a]$ $(a > 0)$ оралиқдаги) Тейлор формуласи

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n}(x)$$

бўлади. Бу формула қолдиқ ҳадининг Лагранж кўринишидан фойдаланиб (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 7-§) $\forall x \in [-a, a]$ $(a > 0)$ учун

$$|r_{2n}(x)| \leqslant \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

бўлишини топамиз. Ундан

$$\lim_{n \to \infty} r_{2n}(x) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall x$ учун

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

бўлади.

3°. $f(x) = \cos x$ функциянинг Тейлор қатори. Бу функциянинг Тейлор формуласи

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n}(x)$$

қолдиқ ҳадининг Лагранж кўринишидан фойдаланиб (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 7-§) $\forall x \in [-a, a]$ $(a > 0)$ учун

$$|r_{2n}(x)| \leqslant \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

бўлишини топамиз. Ундан

$$\lim_{n\to\infty} r_{2n}(x) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall\, x$ учун

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

4°. $f(x) = \ln(1+x)$ функциянинг Тейлор қатори. Маълумки, бу функциянинг Тейлор формуласи қуйидагича бўлади:]

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Бу формулада $x \in [0, 1]$ да $r_n(x)$ қолдиқ ҳадни Лагранж кўринишида қуйидагича ёзиб

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

унинг учун

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \tag{14.51}$$

бўлишини, $x \in [-a, 0]$ $(0 < a < 1)$ бўлганда эса $r_n(x)$ қолдиқ ҳадни Коши кўринишида қуйидагича ёзиб

$$r_n(x) = (-1)^n\, x^{n+1} \frac{(1-\theta_1)^n}{(1+\theta_1 x)^{n+1}} \quad (0 < \theta_1 < 1),$$

унинг учун

$$|r_n(x)| < \frac{a^{n+1}}{1-a} \tag{14.52}$$

бўлишини кўрган эдик (1-қисм, 6-боб, 7-§).

(14.51) ва (14.52) муносабатлардан $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ бўлишини топамиз. Демак, $\forall\, x \in (-1, 1]$ да

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + $$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \tag{14.53}$$

бўлади.

Шуни таъкидлаш лозимки, $\ln(1+x)$ функция $(-1, +\infty)$ оралиқда берилган бўлса ҳам бу функциянинг Тейлор қатори — (14.53) муносабат $(-1, +1]$ ярим интервалда ўринлидир.

5°. $f(x) = (1+x)^\alpha$ функциянинг Тейлор қатори. Бу функциянинг Тейлор формуласи

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x)$$

бўлиб (қаралсин, 1- қисм, 6- боб, 7- §), унинг қолдиқ ҳади Коши кўринишида қуйидагича бўлади:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1} \quad (0<\theta<1).$$

Уни ушбу

$$r_n(x) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!} x^n \alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

кўринишида ёзиб оламиз.

Агар $-1<x<1$ бўлганда: биринчидан, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}(\alpha-1)(\alpha-2)\dots$
$\dots[(\alpha-1]-(n-1)]x^n=0,$

чунки бу яқинлашувчи

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

қаторнинг умумий ҳади (бу қаторнинг яқинлашувчилиги Даламбер аломатига кўра кўрсатилади), иккинчидан, $|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}<\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}<|\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}$ ва ниҳоят, учинчидан $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\leqslant\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|<1$ бўлганлигидан $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$ бўлиши келиб чиқади.

Демак, $|x|<1$ да

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots$$

бўлади.

10- §. Функцияни кўпҳад билан яқинлаштириш

Маълумки, функция математик анализ курсида ўрганиладиган асосий объект. Кўпгина масалалар эса, функцияни ҳисоблаш (берилган нуқтада қийматини топиш) билан боғлиқ. Функциянинг мураккаб бўлиши бундай ҳисоблашларда катта қийинчиликлар туғдиради. Натижада функцияни унга қараганда содда ва ҳисоблашга қулай бўлган функция билан яқинлаштириш — тақрибий ифодалаш масаласи юзага келади.

Функциянинг даражали қаторга ёйилишидан, уни тақрибий ҳисоблашда кенг фойдаланилади. Бунда функцияни даражали қатор қисмий йиғиндиси билан алмаштирилиб, функциянинг берилган нуқтадаги қийматини топиш кўпҳаднинг шу нуқтадаги қийматини ҳисоблашга келтирилади. Даражали қатор тузилишига кўра содда бўлиши, унинг қисмий йиғиндиси эса оддий кўпҳад эканлиги функциянинг берилган нуқтадаги қийматини эффектив ҳисоблай олиниши мумкинлигига олиб келади.

Шуни ҳам таъкидлаш лозимки, бундай имконият фақат «яхши» функциялар учун, яъни исталган тартибдаги ҳосилаларга эга бўлган ва маълум шартни қаноатлантирган (қаранг 14.23- теорема) функциялар учун мавжуд бўлади. Ихтиёрий узлуксиз функция берилган бўлса, уни бирор кўпҳад ёрдамида тақрибий ҳисоблаш мумкин бўлармикан деган савол туғилади. Яъни функцияни кўпҳад билан тақрибан алмаштириш имкониятини аналитик функциялар синфидан узлуксиз функциялар синфига умумлаштириш масаласи пайдо бўлади.

1885 йилда машҳур немис математиги К. Вейерштрасс томонидан узлуксиз функцияни кўпҳад билан яқинлаштириш мумкинлиги кўрсатилди. Бу факт қуйида келтириладиган теорема орқали ифодаланади.

14.26-теорема (Вейерштрасс теоремаси). *Агар $f(x)$ функция* $[0,1]$ *сегментда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай*

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

кўпҳадлар топиладики

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x) - P_n(x)| = 0$$

*бўлади**.

Бу теореманинг турлича исботлари мавжуд бўлиб, биз унинг Бернштейн кўпҳадлари ёрдамидаги исботини келтирамиз.

14.10-таъриф. $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда берилган бўлсин. Ушбу

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{14.54}$$

кўпҳад $f(x)$ нинг *Бернштейн кўпҳади* деб аталади.

Бернштейн кўпҳади n-даражали кўпҳад бўлиб, унинг коэффициентларн $f(x)$ функциянинг $\frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$ нуқталардаги қийматлари орқали ифодаланади. Масалан, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ бўлганда

$$B_1(f, x) = f(0) + [f(1) - f(0)]\,x,$$

$$B_2(f, x) = f(0) + \left[2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f(0)\right]x + \left[f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right]x^2,$$

$$B_3(f, x) = f(0) + \left[3f\left(\frac{1}{3}\right) - 3f(0)\right]x + \left[3f(0) - 6f\left(\frac{1}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + 3f\left(\frac{2}{3}\right)\right]x^2 + \left[f(1) - 3f\left(\frac{2}{3}\right) - f(0)\right]x^3$$

бўлади.

14.27-теорема (Бернштейн теоремаси). *Агар $f(x)$ функция* $[0, 1]$ *сегментда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x) - B_n(f, x)| = 0$$

бўлади.

Аввало битта лемма исботлаймиз.

---

*Функция берилган ва узлуксиз бўлган оралиқ ихтиёрий сегментдан иборат бўлган ҳолда теореманинг исботи 183-бетда келтирилади.

14.1. Лемма. *Ушбу*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \qquad (14.55)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \qquad (14.56)$$

айниятлар ўринлидир.

Исбот. Маълумки, $\forall a,\ b \in R$ учун

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Бу айниятда $a = x,\ b = 1-x\,(0 \leqslant x \leqslant 1)$ деб олинса, ундан

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = [x+(1-x)]^n = 1$$

бўлиши келиб чиқади.

(14.56) айниятни исботлаш учун ушбу

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

йиғиндиларни ҳисоблаймиз.

Агар

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\frac{k}{n} C_n^k = \frac{k}{n}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(\kappa-1)!} =$$

$$= C_{n-1}^{k-1}, \qquad (14.57)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-$$

$$-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} = x\,[x+(1-x)]^{n-1} = x.$$

бўлишини топамиз. Энди

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

йиғиндини ҳисоблаймиз.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_{n-1}^{k-1}\, x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-1}{n}\, \frac{k-1}{n-1}\, C_{n-1}^{k-1}\, x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-2-(k-2)} + \frac{1}{n}\, x \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-$$

$$-x)^{n-1-(k-1)} = \frac{n-1}{n} x^2 [x+(1-x)]^{n-2} + \frac{1}{n} x [x+(1-x)]^{n-1} =$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

Бу ҳамда юқоридаги (14.56) ва (14.57) муносабатлардан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Лемма исбот бўлди.

Бу леммадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

14.3- натижа. Ихтиёрий $x \in [0,\ 1]$ ва $n \in N$ учун

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n} \tag{14.58}$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий $x \in [0,\ 1]$ учун $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$ бўлиб, (14.56) муносабатдан (14.58) тенгсизликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади.

Бернштейн теоремасининг исботи. Юқоридаги (14.54) ва (14.55) муносабатларга кўра

$$B_n(f,\ x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k} \tag{14.59}$$

бўлади.

$f(x)$ функция $[0,\ 1]$ сегментда узлуксиз. Демак, Кантор теоремасига асосан у шу сегментда текис узлуксиз бўлади, яъни $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $\forall\, x',\ x'' \in [0,\ 1]$ учун $|x' - x''| < \delta$ бўлганда $|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик бажарилади.

Юқоридаги (14.59) йиғинди k нинг $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ қийматлари бўйича йиғилган. Бу йиғиндининг ҳадларини k нинг

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta \qquad (x \in [0,\ 1])$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматлари бўйича ҳамда k нинг

$$\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant \delta \qquad (x \in [0,\ 1])$$

тенгсизликнинг қаноатлантирувчи қийматлари бўйича ажратиб, улардан ушбу

$$\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right] C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k}, \qquad \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right] C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k}$$

ларни ҳосил қиламиз. Равшанки,

$$B_n(f,\ x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right] C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k}=$$

$$=\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right] C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k}+\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right] C_n^k\, x^n (1-x)^{n-k} \qquad (14.60)$$

бўлади.

Энди кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиндиларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида баҳолаймиз.

$$\left|\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| \leqslant \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}=\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2M \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \qquad (14.61)$$

бунда $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$.

Агар $\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant \delta$ бўлганда $\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 \cdot \frac{1}{\delta^2} \geqslant 1$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant \delta} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

бўлади. Юқорида келтирилган лемманинг натижасидан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Демак,

$$\left|\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant \delta} \left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| \leqslant \frac{M}{2n\delta^2}. \qquad (14.62)$$

Натижада (14.60), (14.61) ва (14.62) муносабатлардан

$$|B_n(f, x)-f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2} \quad (\forall x \in [0, 1])$$

бўлиши келиб чиқади. Агар n ни $n > \frac{M}{2\delta^2 n}$ қилиб олинса, у ҳолда

$$|B_n(f, x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бўлади. Бундан эса

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |B_n(f, x)-f(x)| = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Энди $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлсин. Қуйидаги

$$t = \frac{1}{b-a}x - \frac{a}{b-a}$$

чизиқли алмаштириш $[a, b]$ сегментни $[0, 1]$ сегментга акслантиради. Бу алмаштиришдан фойдаланиб, ушбу

$$\varphi(t) = f(a+(b-a)t) \qquad (14.63)$$

функцияни ҳосил қиламиз. Бу $\varphi(t)$ функция $[0, 1]$ сегментда берилган ва шу сегментда узлуксиз бўлади. У ҳолда Бернштейн теоремасига кўра

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |B_n(\varphi, t)-\varphi(t)| = 0 \qquad (14.64)$$

бўлади, бунда

$$B_n(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}.$$

(14.63) ва (14.64) муносабатлардан

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{a<x<b} \left| B_u\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - f(x) \right| = 0$$

бўлиши келиб чиқади, бунда

$$B_n\left(f, \frac{x-a}{b-a}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} \kappa\right) C_n^k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \left[1 - \frac{x-a}{b-a}\right]^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right) C_n^b \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

Шундай қилиб, қаралаётган оралиқ $[a, b]$ сегментдан иборат бўлган ҳолда қуйидаги теорема (Вейерштрасс теоремаси) га келамиз.

14.28-теорема (Вейерштрасс теоремаси). *Агар $f(x)$ функция* $[a, b]$ *сегментда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{a<x<b} \left| B_n\left(f, \frac{x-}{b-a}\right) - f(x) \right| = 0$$

бўлади.

Гарчи Вейерштрасс теоремаси $f(x)$ функцияни $B_n(f, x)$ кўпҳад билан яқинлаштириш мумкинлигини ифодаласа-да, яқинлашиш хатолиги

$$r_n(f, x) = f(x) - B_n(f, x)$$

ни баҳолаш имконини аниқлаб бермайди. Кейинги ўрганишлар $r_n(f, x)$ нинг нолга интилиш тартиби, яқинлаштириладиган $f(x)$ функциянинг узлуксиз модулига (1-қисм, 5-боб, 9-§ га қаранг) боғлиқ эканлигини кўрсатади.

14.29-теорема. *Агар $f(x)$ функция* $[0, 1]$ *сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $B_n(f, x)$ эса унинг Бернштейн кўпҳади бўлса, у ҳолда*

$$\sup_{0<x<1} |B_n(f, x) - f(x)| \leqslant \frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{14.65}$$

бўлади, бунда $\omega(\delta)$ — $f(x)$ функциянинг узлуксизлик модули.

Исбот. (14.59) формуладан фойдаланиб, қуйидагини топамиз.

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Функция узлуксизлик модулининг ушбу

$$\omega(\lambda\,\delta) \leqslant (1+\lambda)\,\omega(\delta)$$

хоссасига кўра

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| \leqslant \omega\left(\left|\frac{k}{n}-x\right|\right)=\omega\left(\sqrt{n}\left|\frac{k}{n}-x\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant\left(\left|\frac{k}{n}-x\right| \sqrt{n}+1\right] \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

бўлиб, натижада

$$\left|B_n(f, x)-f(x)\right| \leqslant\left[\sqrt{n} \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right| C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+1\right] \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

бўлади.

Энди $\sum\limits_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right| C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$ йиғиндини

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right| \sqrt{C_n^k x^k(1-x)^{n-k}} \sqrt{C_n^k x^k(1-x)^{n-k}}$$

кўринишда ёзиб, унга Коши — Буняковский тенгсизлигини (қаралсин, 12- боб, 1- §) қўллаймиз:

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right| \sqrt{C_n^k x^k(1-x)^{n-k}} \sqrt{C_n^k x^k(1-x)^{n-k}} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}}=$$
$$=\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \leqslant \frac{1}{2 \sqrt{n}} .$$

Демак,

$$\left|B_n(f, x)-f(x)\right| \leqslant\left(\sqrt{n} \frac{1}{2 \sqrt{n}}+1\right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{3}{3} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Теорема исбот бўлди.

Хусусан, $f(x)$ функция $[0, 1]$ оралиқда $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x \in [0, 1]$ учун $|f'(x)| \leqslant M$ (M — const) бўлсин. У ҳолда, Лагранж теоремасидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\left|B_n(f, x)-f(x)\right|=\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \leqslant$$
$$\leqslant M \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right| C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{M}{2 \sqrt{n}} .$$

Демак, бу ҳолда

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |B_n(f, x) - f(x)| \leqslant \frac{M}{2\sqrt{n}}$$

бӯлади.

15-БОБ

МЕТРИК ФАЗОЛАР

Юқоридаги баёнимиздан маълумки, математик анализнинг биз ӯрганган барча асосий тушунчалари (лимит, узлуксизлик, ҳосила, интеграл, яқинлашувчилик ва ҳоказо) турли тӯпламлар (R, R^m, $C[a, b]$ ва ҳоказо) элементлари кетма-кетлигида лимитга ӯтиш амали орқали таърифланади. Бу амал ҳар бир тӯпламда ӯзига хос киритилган эди. Масалан,

1) R да $\{x_n\}: x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ($x_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$) кетма-кетлик берилган бӯлсин. Унинг лимити қуйидагича таърифланар эди:

$\forall\, \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (a \in R)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади.

2) R^m да берилган $\{x^n\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots \; (x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n}, \ldots, x_m^{(n)}) \in R^m, \; n = 1, 2, \ldots)$$

кетма-кетлик лимити қуйидагича таърифланар эди:

$\forall\, \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$\sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + (x_2^{(n)} - a_2)^2 + \ldots + (x_m^{(n)} - a_m)^2} < \varepsilon$$

$$(a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in R^m)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда a нуқта $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади.

3) $C[a; b]$ да $\{f_n(x)\}: f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots, (f_n(x) \in$
$\in C[a, b], \; n = 1, 2, \ldots)$

функционал кетма-кетлик берилган бӯлсин. Бу функционал кетма-кетликнинг лимити қуйидагича таърифланар эди:

$\forall\, \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг лимити ($\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)$ га текис яқинлашади), деб аталади.

Агар $|x_n - a|$ миқдор R даги x_n ва a ($x_n \in R$, $a \in R$, $n = 1, 2, \ldots$) нуқталар орасидаги масофа — $\rho(x_n, a)$ (1-қисм, 1-боб. 10-§),

$$\sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + (x_2^{(n)} - a_2)^2 + \ldots + (x_m^{n} - a_m)^2} \quad (x^{(n)} \in R^m, \; n = 1, 2, \ldots)$$

миқдор R^m даги x^n ва a нуқталар орасидаги масофа $\rho(x^n, a)$ (12-боб 1-§), ҳамда

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f_n(x) - f(x)|$$

миқдор эса $C[a, b]$ нинг $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) ва $f(x)$ элементлари орасидаги масофа — $\rho(f_n(x), f(x))$ (1-қисм. 5-боб, 11-§) эканлигини эътиборга олсак, R, R^m,

$C[a, b]$ тўпламларда, уларнинг элементларидан тузилган кетма-кетликнинг лимити масофа тушунчасига асосланганлигини кўрамиз.

Бир томондан R, R^m, $C[a, b]$ тўпламларнинг турли табиатдаги элементлардан ташкил топганлиги, иккинчи томондан эса уларда лимитга ўтиш амалининг фақат масофага асосланишдек умумийликка эга бўлиши, табиий равишда бу тўпламларни умумий ҳолда қарашга, яъни ихтиёрий тўплам элементлари орасида масофа тушунчасини киритиб, ўрганишга олиб келади.

1- §. Метрик фазо

E — ихтиёрий тўплам бўлсин. Бу тўпламнинг ўзини ўзига тўғри (Декарт) кўпайтмаси

$$E \times E = \{(x, y) : x \in E, y \in E\}$$

(қаралсин, 1-қисм, 1-боб, 1-§) ни олайлик.

Маълумки, дастлабки тушунчалар қаторида ихтиёрий A тўпламни B тўпламга акслантириш

$$f : A \to B$$

тушунчаси келтирилган эди (1-қисм, 1-боб, 3-§).

Энди $A = E \times E$, $B = R_+$ (R_+ — барча манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўплами) деб ушбу

$$\rho : E \times E \to R_+ \ (\rho = \rho(x, y)) \tag{15.1}$$

акслантиришни қарайлик.

15.1-таъриф. Агар $\rho : E \times E \to R_+$ акслантириш учун

1°. $\forall x, y \in E$ учун $\rho(x, y) \geqslant 0$ ($\rho(x, y) = 0$ муносабат $x = y$ бўлгандагина бажарилади.

2°. $\forall x, y \in E$ учун $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметриклик),

3°. $\forall x, y, z \in E$ учун $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (учбурчак тенгсизлиги) шартлар бажарилса, у ҳолда бу ρ акслантириш *масофа (метрика)*, E тўплам эса *метрик фазо* деб аталади. Метрик фазо (E, ρ) каби белгиланади. 1° — 3°-шартлар *метрик фазо аксиомалари* дейилади. Метрик фазо элементларини шу фазо нуқталари ҳам деб аталади.

Мисоллар. 1. R тўпламни олайлик. ρ акслантириш қуйидагича аниқланса,

$$\rho(x, y) = |x - y| \ (\forall x, y \in R),$$

1-қисм, 2-боб, 10-§ да исботланганга кўра бу $\rho(x, y)$ учун 1° — 3°-шартлар бажарилади. Демак, $\rho(x, y)$ — масофа ва (R, ρ) — метрик фазо.

2. R^m тўпламни олайлик, $\rho(x, y)$ акслантириш қуйидагича аниқлансин:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_m - x_m)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (y_k - x_k)^2}.$$

Юқорида, 12-боб, 1-§ да бу $\rho(x, y)$ учун 1° — 3°-шартларнинг бажарилиши кўрсатилган эди. Демак, ρ — масофа, (R^m, ρ) — метрик фазо.

3. $C[a, b]$ тўпламни кўрайлик. ρ акслантириш қуйидагича бўлсин;

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \ (\forall x(t), y(t) \in C[a, b]),$$

бу $\rho(x, y)$ юқоридаги 1° — 3°-шартларни қаноатлантиради (қаралсин, 1-қисм, 5-боб, 11-§). Демак, қаралаётган ρ — масофа, $(C[a, b], \rho)$ эса метрик фазо.

4. c — барча яқинлашувчи кетма-кетликлар (сонлар кетма-кетликлари) тўплами бўлсин. ρ акслантириш ушбу

$$\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|, \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in c, \ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in c$$

кўринишда берилсин. 1-қисм, 3-боб, 4-§ да исботланганга кўра бу $\rho(x, y)$ учун $1^\circ - 3^\circ$-шартлар бажарилади. Демак, ρ — масофа, (c, ρ) — метрик фазо.

5. m — барча чегараланган кетма-кетликлар (сонлар кетма-кетликлари) тўплами бўлсин. ρ акслантириш 4-мисолдагидек қуйидагича берилсин:

$$\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n| \quad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in m,$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in m).$$

Бу акслантириш учун $1^\circ - 3^\circ$-шартларнинг бажарилишини кўрсатиш қийин эмас. Аввало $\rho(x, y) \geqslant 0$ бўлиши равшандир. Агар $\rho(x, y) = \sup\limits_n |x_n - y_n| = 0$ бўлса, ундан $\forall\, n \in N$ учун $x_n - y_n$, яъни $x = y$ бўлиши келиб чиқади. Аксинча, агар $x = y$, яъни $\forall\, n \in N$ учун $x_n = y_n$ бўлса, ундан $\rho(x, y) = \sup\limits_n |x_n - y_n| = 0$ экани келиб чиқади.

Иккинчидан $\rho(x,y) = \rho(y, x)$, чунки $\rho(x, y) = \sup\limits_n |x_n - y_n| = \sup\limits_n |y_n - x_n| = \rho(y, x)$. Энди $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in m$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in m$ ва $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n \ldots) \in m$ бўлсин. Абсолют қиймат хоссасига кўра

$$|x_n - z_n| \leqslant |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \quad (n \in N)$$

бўлади. Бундан эса

$$|x_n - z_n| \leqslant \sup_n |x_n - y_n| + \sup_n |y_n - z_n|$$

эканлиги келиб чиқади. Аниқ юқори чегара хоссасига кўра

$$\sup_n |x_n - z_n| \leqslant \sup_n |x_n - y_n| + \sup_n |y_n - z_n|$$

бўлади. Бундан,

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Демак, ρ — масофа, (m, ρ) — метрик фазо.

(E, ρ) метрик фазо берилган. E_1 тўплам E нинг қисм тўплами, яъни $E_1 \subset E$ бўлсин. У ҳолда E_1 ҳам E да киритилган метрика бўйича метрик фазо бўлади: (E_1, ρ). Бу метрик фазо таърифидан келиб чиқади. Мисол келтирамиз. Равшанки, барча рационал сонлар тўплами Q барча ҳақиқий сонлар тўплами R нинг қисм тўплами: $Q \subset R$. (R, ρ) метрик фазо эди. (Q, ρ) ҳам R да киритилган метрика бўйича метрик фазо бўлади.

Ўқувчининг эътиборини яна битта фактга жалб этамиз. Агар F тўплам берилган бўлиб, $\rho : F \times F \to R_+$ акслантиришлар турлича киритилиб, уларнинг ҳар бири $1^\circ - 3^\circ$-шартларни бажарса, натижада турли метрик фазолар ҳосил бўлади. Мисол қарайлик. Биз юқорида $C\,[a, b]$ тўплам берилганда ушбу

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \quad (x(t),\ y(t) \in C\,[a, b])$$

акслантиришни аниқлаб, унинг $1^\circ - 3^\circ$-шартларни бажаришини кўрсатдик ва натижада $(C\,[a, b], \rho)$ метрик фазога эга бўлдик.

Энди худди шу $C\,[a, b]$ тўплам берилганда ρ_1 акслантиришни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2\, dt}. \tag{15.2}$$

Бу $\rho_1(x, y)$ нинг $1^\circ - 3^\circ$-шартларни бажаришини кўрсатамиз.

(15.2) муносабатдан ҳар доим $\rho_1(x, y) \geqslant 0$ экани кўринади. Агар $\forall\, t \in [a, b]$ да $x(t) = y(t)$ бўлса, ундан

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2\, dt} = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Аксинча, агар

$$\rho_1(x, y)=\sqrt{\int_a^b [x(t)-y(t)]^2\, dt}=0$$

бўлса, ундан $\forall\, t\in[a, b]$ учун $x(t)=y(t)$ бўлиши келиб чиқади. Шуни исботлаймиз.

Тескарисини фараз қилайлик. Бирор t_0 $(t_0\in(a, b))$ нуқтада $x(t_0)\neq y(t_0)$, яъни, масалан, $x(t_0)-y(t_0)>0$ бўлсин. У ҳолда узлуксиз функциянинг локал хоссасига кўра (қаралсин, 1-қисм, 5-боб, 7-§) t_0 нуқтанинг етарлича кичик $U_\delta(t_0)$ атрофи $(U_\delta(t_0)\subset[a, b])$ топиладики, $\forall\, t\in U_\delta(t_0)$ учун $x(t)-y(t)>0$ бўлади. У ҳолда

$$\int_a^b [x(t)-y(t)]^2\, dt>0$$

бўлиб, бу $\rho_1(x, y)=0$ деб олинишига зид бўлиб қолади. Демак, $\forall\, t\in[a; b]$ учун $x(t)=y(t)$ бўлади.

Иккинчидан, $\rho_1(x, y)=\rho_1(y, x)$ бўлади, чунки

$$\rho_1(x, y)=\sqrt{\int_a^b [x(t)-y(t)]^2\, dt}=\sqrt{\int_a^b [y(t)-x(t)]^2\, dt}=\rho_1(y, x).$$

Коши — Буняковский тенгсизлиги

$$\left[\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(t)\, dt\int_a^b g^2(t)\, dt$$

дан (қаралсин, 1-қисм. 9-боб, 7-§) фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]^2\, dt=\int_a^b f^2(t)\, dt+2\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt+\int_a^b g^2(t)\, dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b f^2(t)\, dt+2\sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt\int_a^b g^2(t)\, dt}+\int_a^b g^2(t)\, dt=$$

$$=\left(\sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt}+\sqrt{\int_a^b g^2(t)\, dt}\right)^2.$$

Демак,

$$\sqrt{\int_a^b [f(t)+g(t)]^2\, dt}\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt}+\sqrt{\int_a^b g^2(t)\, dt}$$

бўлади. Бу тенгсизликда

$$f(t)=x(t)-z(t),\ g(t)=z(t)-y(t)\ (z(t)\in C[a; b])$$

деб олинса, у ҳолда

$$\sqrt{\int_a^b [x(t)-y(t)]^2\, dt}\leqslant\sqrt{\int_a^b [x(t)-z(t)]^2\, dt}+$$

$$+\sqrt{\int_a^b [z(t)-y(t)]^2\, dt},$$

яъни

$$\rho_1(x, y)\leqslant\rho_1(x, z)+\rho_1(z, y)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, ρ_1 акслантириш масофа. $(C[a, b]. \rho_1)$ эса метрик фазо бўлади. Шундай қилиб $C[a; b]$ тўплам берилганда қуйидаги

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

ва

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt}$$

акслантиришларнинг ҳар бири масофа эканлигини кўрсатиб, натижада иккита турли $(C[a, b], \rho)$ ва $(C[a, b], \rho_1)$ метрик фазоларга эга бўлдик.

Энди метрик фазодаги баъзи бир тўпламларни таърифлаймиз. (E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. Бу фазода бирор a $(a \in E)$ элемент олайлик.

15.2-таъриф. Ушбу

$$\{x \in E : \rho(x, a) < \} \ (\{x \in E : \rho(x, a) < r\}) \ (r > 0)$$

тўплам (E, ρ) метрик фазодаги *очиқ шар* (*шар*) деб аталади. a нуқта *шар маркази*, $r > 0$ эса *шар радиуси* дейилади.

15.3-таъриф. Маркази a нуқтада, радиуси ε $(\varepsilon > 0)$ бўлган очиқ шар

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in E : \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

a нуқтанинг *атрофи* (ε-*атрофи*) дейилади.

Хусусан, (R, ρ) метрик фазода a $(a \in R)$ нуқтанинг атрофи (қаралсин, 1-қисм, 3-боб, 2-§)

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R : \rho(x, a) = |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

интервални, $(R^m. \rho)$ фазода a $(a = (a_1, a_2, \dots a_m) \in R^m)$ нуқтанинг атрофи

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R^m : \rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} < \varepsilon\}$$

эса 12-боб, 1-§ да киритилган сферик атрофни билдиради.

G — (E, ρ) метрик фазодаги бирор тўплам бўлсин. Бу тўпламда бирор x_0 нуқтани олайлик. Агар x_0 $(x_0 \in G)$ нуқтанинг шундай $U_\varepsilon(x_0)$ $(\varepsilon > 0)$ атрофи мавжуд бўлсаки,

$$U_\varepsilon(x_0) \subset G$$

бўлса, у ҳолда x_0 нуқта G тўпламнинг *ички нуқтаси* дейилади.

15.4-таъриф. G тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлса, бундай тўплам *очиқ тўплам* деб аталади.

Масалан, $(E. \rho)$ метрик фазодаги ҳар қандай очиқ шар

$$A = \{x \in E : \rho(x, a) < r\} \ (a \in E, r > 0)$$

очиқ тўплам бўлади (солиштиринг: 12-боб, 1-§).

F — $(E. \rho)$ метрик фазодаги бирор тўплам бўлсин; $F \subset E$, x_0 эса E га тегишли бирор нуқта: $x_0 \in E$. Агар x_0 $(x_0 \in E)$ нуқтанинг исталган $U_\varepsilon(x_0)$ атрофида F тўпламнинг x_0 дан фарқли камида битта нуқтаси топилса, x_0 нуқта F тўпламнинг *лимит нуқтаси* деб аталади. Бунда x_0 лимит нуқта F тўпламга тегишли бўлиши ҳам, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин.

F тўпламнинг барча лимит нуқталаридан ташкил топган тўплам F тўпламнинг *ҳосилавий тўплами* дейилади ва F' каби белгиланади.

Ушбу $F \cup F'$ тўплам F тўпламнинг *ёпилмаси* деб аталади ва у $\overline{F}$ каби белгиланади: $\overline{F} = F \cup F'$.

15.5-таъриф. Агар F $(F \subset E)$ тўпламнинг барча лимит нуқталари шу тўпламга тегишли бўлса, яъни $F' \subset F$ бўлса, F *ёпиқ тўплам* деб аталади.

Равшанки, F ёпиқ тўплам бўлса, $F \cup F' = \overline{F} = F$ бўлади.

Масалан, (E, ρ) метрик фазодаги шар

$$B = \{x \in E : \rho(x, a) \leq r\} \ (a \in E, r > 0)$$

ёпиқ тўплам бўлади.

M — (E, ρ) метрик фазодаги бирор тўплам бўлсин.

15.6-таъриф. Агар (E, ρ) метрик фазода шундай шар

$$B = \{x \in E ; \rho(x, a) \leqslant r\} \quad (a \in E, \ r > 0)$$

топилсаки, $M \subset B$ бўлса, у ҳолда M *чегараланган тўплам* деб аталади. Акс ҳолда, яъни ҳар қандай B шар олинганда ҳам, шундай $x \in M$ мавжуд бўлсаки, $x \notin B$ бўлса, M *тўпламни чегараланмаган тўплам* дейилади.

Масалан, (R^m, ρ) метрик фазода шар, параллелепипед, симплекслар (қаралсин, 12-боб, 1-§) чегараланган тўпламлар бўлади.

Шу метрик фазода ушбу

$$M > \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ \ldots \ x_m \geqslant 0\}$$

тўплам чегараланмаган тўплам бўлади.

2-§. Метрик фазода кетма-кетлик ва унинг лимити

Бирор (E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. f ҳар бир натурал n $(n \in N)$ сонга. E нинг бирор муайян x_n $(x_n \in E)$ нуқтасини мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$f : N \to E \text{ ёки } n \to x_n \quad (n \in N, \ x_n \in E).$$

Бу $f : N \to E$ акслантиришнинг тасвирлари (образлари) дан тузилган

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \quad (x_n \in E, \ n = 1, 2, \ldots) \tag{15.3}$$

тўплам (E, ρ) метрик фазода кетма-кетлик деб аталади ва у $\{x_n\}$ каби белгиланади.

(15.3) кетма-кетликнинг бирор n_1 номерли x_{n_1} ҳадини, сўнгра номери n_1 дан катта бўлган n_2 номерли x_{n_2} ҳадини ва ҳоказо, шу усул билан (15.3) кетма-кетликнинг ҳадларини олиб, улардан ушбу

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_k}, \ldots (n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \tag{15.4}$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз.

Одатда (15.4) кетма-кетлик (15.3) кетма-кетликнинг *қисмий кетма-кетлиги* деб аталади ва $\{x_{n_k}\}$ каби белгиланади.

Энди (E, ρ) метрик фазода

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \quad (x_n \in E, \ n = 1, 2, \ldots) \tag{15.3}$$

кетма-кетликнинг лимити тушунчасини киритамиз.

(E, ρ) метрик фазода (15.3) кетма-кетлик берилган бўлсин, a нуқта E га тегишли нуқта бўлсин: $a \in E$.

15.7-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки. барча $n > n_0$ учун $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$ бўлса, a нуқта $\{x_n\}$ *кетма-кетликнинг лимити* деб аталади ва $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ёки $x_n \to a$-каби белгиланади.

Юқорида келтирилган таърифга эквивалент бўлган қуйидаги таърифни ҳам бериш мумкин.

15.8-таъриф. Агар a нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(a)$ $(\forall \varepsilon > 0)$ атрофи олинганда ҳам, (15.3) кетма-кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлса, a нуқта (15.3) *кетма-кетликнинг лимити* деб аталади.

Агар (15.3) кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у *яқинлашувчи кетма-кетлик* дейилади. Одатда бундай яқинлашиш *масофа бўйича яқинлашиш* деб аталади.

Мисоллар. 1. (E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. $\forall x_0 \in E$ нуқтани олиб, ушбу

$$x_0, x_0, \ldots, x_0, \ldots$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Равшанки, бу яқинлашувчи кетма-кетлик бўлади.

2. (E, ρ) метрик фазо берилган бўлиб, бу фазо ҳеч бўлмаганда иккита турли нуқталарга эга бўлсин. Бу нуқталарни x_0 ва x_1 билан белгилаб ($x_0 \neq x_1$, $x_0 \in E$ $x_1 \in E$).

$$x_0, x_1, x_0, x_1, \ldots, x_0, x_1, \ldots$$

кетма-кетликни тузамиз. Бу кетма-кетлик яқинлашувчи эмас.

3. (Q, ρ) метрик фазода қуйидаги

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots,$$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

кетма-кетликларни қарайлик. Бу кетма-кетликларнинг биринчиси $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ нинг лимити 0 га тенг ($0 \in Q$). Демак, (Q, ρ) метрик фазодаги $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади.

Иккинчи кетма-кетлик $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ нинг лимити e га тенг:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

(қаралсин, 1-қисм, 3-боб, 8-§). Бироқ $e \overline{\in} Q$. Демак, (Q, ρ) метрик фазода $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи эмас.

Энди, хусусий ҳолларда, (E, ρ) метрик фазо сифатида (R, ρ), (R^m, ρ) ва $(C[a, b], \rho)$ фазоларни олиб, бу фазоларда кетма-кетликнинг масофа бўйича яқинлашувчилиги тушунчасини изоҳлаб ўтамиз.

(R, ρ) метрик фазодаги $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \; (x_n \in R, \; n = 1, 2, \ldots)$$

кетма-кетлик ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги бўлиб, унинг масофа бўйича яқинлашиши, 1-қисм, 3-бобда ўрганилган сонлар кетма-кетлигининг яқинлашишидан иборат.

(R^m, ρ) метрик фазодаги $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots \; (x^{(n)} \in R^m, \; n = 1, 2, \ldots)$$

кетма-кетлик R^m тўпламнинг $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$ $(n = 1, 2, \ldots,)$ нуқталаридан иборат кетма-кетлик бўлиб, унинг масофа бўйича яқинлашиши координаталар бўйича яқинлашишни билдиради (қаралсин 12-боб, 2-§).

$(C[a, b], \rho)$ метрик фазодаги $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots, f_n(x) \in C[a, b]$; $n = 1, 2, \ldots$ кетма-кетлик функционал кетма-кетлик бўлиб, унинг масофа бўйича яқинлашиши 14-бобда батафсил ўрганилган текис яқинлашишни ифодалайди.

Энди метрик фазода яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссаларини келтирамиз.

1°. Агар (E, ρ) метрик фазода $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, бу кетма-кетликнинг лимити битта бўлади.

Исбот. $\{x_n\}$ $(x_n \in E, \; n = 1, 2, \ldots)$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити иккита: a ва b $(a \in E, \; b \in E)$ бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, b) = 0,$$

яъни $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ да $\rho(x_n, a) <$

$< \frac{\varepsilon}{2}$. шунингдек шу $\varepsilon > 0$ учун шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall\, n > n_0'$ да $\rho(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Агар $\overline{n_0} = \max(n, n_0')$ дейилса, унда $\forall\, n > \overline{n_0}$ да бир вақтда $\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Масофа таърифидаги 3°- шартдан, яъни учбурчак тенгсизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\rho(a, b) \leqslant \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b).$$

Демак, $\forall\, \varepsilon > 0$ ва $\forall\, n > \overline{n_0}$ учун $\rho(a, b) < \varepsilon$ бўлиб, ундан $\rho(a, b) = 0$ бўлиши келиб чиқади. Масофа таърифидаги 1°- шартга кўра $a = b$ бўлади.

2°. Агар (E, ρ) метрик фазода $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad (a \in E)$$

бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликнинг ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги $\{x_{n_k}\}$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots)$ ҳам яқинлашувчи бўлади ва $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

Исбот. $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити a га тенг бўлсин; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Бу $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $\{x_{n_k}\}$: $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ қисмий кетма-кетлигини олайлик.

Модомики $x_n \to a$ экан, унда $\forall\, \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall\, n > n_0$ учун $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ бўлади. $k \to \infty$ да $n_k \to \infty$ бўлишидан $m \in N$ топиладики, $n_m > n_0$ бўлади. Демак, $k > m \Rightarrow n_k > n_0 \Rightarrow \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. Бу эса $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ эканлигини билдиради.

3- §. Коши теоремаси. Тўлиқ метрик фазо

Биз юқорида R даги (1-қисм, 3-боб, 10-§), R^m даги (12-боб, 2-§), $C[a, b]$ даги (14-боб, 2-§) кетма-кетликларнинг яқинлашувчи бўлишлари учун уларнинг фундаментал бўлишлари зарур ва етарли эканлигини (Коши теоремасини) кўриб ўтдик. Математик анализнинг бу муҳим теоремаси ихтиёрий метрик фазо учун ҳам ўринли бўладими деган савол туғилади. Аввало, фундаментал кетма-кетлик тушунчасини киритайлик.

(E, ρ) — ихтиёрий метрик фазо, $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \ (x_n \in E,\ n = 1, 2, \ldots)$$

— ундаги бирор кетма-кетлик бўлсин.

15.9-таъриф. Агар $\forall\, \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилсаки, $\forall\, n > n_0$ ва $\forall\, m > n_0$ лар учун $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ бўлса, $\{x_n\}$ *фундаментал кетма-кетлик* дейилади.

R, R^m, $C[a, b]$ фазолардаги фундаментал ва фундаментал бўлмаган кетма-кетликларга мисолларни биз юқорида кўрган эдик. Яна битта мисол сифатида (Q, ρ) метрик фазодаги

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots \tag{15.5}$$

кетма-кетликни келтирайлик. $Q \subset R$ бўлгани сабабли (15.5) ни R даги кетма-кетлик деб қараш ҳам мумкин. R да бу кетма-кетлик яқинлашувчи, яъни

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Коши теоремасига кўра $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик фундаменталдир. Q да киритилган масофа R даги $\rho(x, y) = |x-y|$ масофанинг айнан ўзи бўлгани учун $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик (Q, ρ) да ҳам фундаменталдир.

Ихтиёрий (E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. Ундаги барча яқинлашувчи кетма-кетликлар тўпламини $L(E)$, барча фундаментал кетма-кетликлар тўпламини $\Phi(E)$ деб белгилайлик.

Юқорида биз келтирган Коши теоремаси R, R^m, $C[a, b]$ лар учун $L(E)=\Phi(E)$ эканини билдиради.

15.1-теорема. *Ихтиёрий (E, ρ), метрик фазо учун $L(E) \subset \Phi(E)$, яъни ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетликлар фундаментал бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, $\{x_n\}$ $(x_n \in E,\ n=1, 2, \ldots)$ яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ (a \in E)$$

бўлсин. Яъни $\forall\, \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall\, n > n_0$ учун

$$\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик бажарилсин. Масофа таърифидаги 3°-шартдан фойдаланиб, $\forall\, n > n_0$ ва $\forall\, m > n_0$ лар учун

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бу эса, $\{x_n\}$ нинг фундаментал кетма-кетлик эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Аммо $\Phi(E) \subset L(E)$ муносабат, яъни ҳар қандай фундаментал кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлиши ихтиёрий метрик фазо учун тўғри бўлавермайди. Бошқача айтганда, шундай метрик фазо ва унда шундай фундаментал кетма-кетлик топиладики, у яқинлашувчи бўлмайди.

Мисол сифатида (Q, ρ) фазони ва ундаги (15.5) кетма-кетликни қарашимиз мумкин. Бу кетма-кетлик, кўрсатганимиздек, фундаментал бўлса-да, яқинлашувчи эмас. Яна бир мисол келтирайлик.

$(C[0; 1], \rho)$ метрик фазода қуйидаги $\{x_n\}$:

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$$

кетма-кетликни олайлик. Бу фундаментал кетма-кетлик бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\forall\, \varepsilon > 0$ сонга кўра $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$ деб олинса, унда $\forall\, n > n_0$, $\forall\, m > n_0$ учун

$$\rho^2(x^n, x^m) = \int_0^1 (x^n - x^m)^2\, dx = \int_0^1 [x^{2n} + x^{2m} - 2x^{n+m}]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1} - 2\,\frac{1}{n+m+1} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m} \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n_0} \leqslant \varepsilon^2$$

ва демак,

$$\rho(x^n, x^m) < \varepsilon$$

бўлади.

Бироқ бу $\{x^n\}$ кетма-кетлик $(C[0, 1], \rho)$ метрик фазода яқинлашувчи эмас (чунки

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{агар } 0 \leqslant x < 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } \quad x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлиб, $f(x) \bar{\in} C[a, b]$).

Шундай қилиб, баъзи бир метрик фазоларда ҳар қандай фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўлар экан, баъзи бир метрик фазоларда ҳар қандай фундаментал кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлавермас экан.

15.10-таъриф. (E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. Агар бу фазода $\Phi(E) \subset L(E)$ бўлса, яъни ҳар қандай $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, (E, ρ) ***тўлиқ метрик фазо*** деб аталади.

Мисоллар. Юқорида, 1-§ да келтирилган (R, ρ), (R^m, ρ), $(C[a, b], \rho)$, (m, ρ), (c, ρ) метрик фазолар тўлиқ метрик фазолар бўлади.

(R, ρ) фазонинг тўлиқлиги 1-қисм, 3-боб, 10-§ да келтирилган теоремадан, (R^m, ρ) фозонинг тўлиқлиги 12-боб, 2-§ да келтирилган теоремадан $(C[a, b], \rho)$ метрик фазонинг тўлиқлиги эса 14-боб, 2-§ да келтирилган теоремадан келиб чиқади.

Энди (m, ρ) метрик фазонинг тўлиқлигини кўрсатамиз. Бу метрик фазода $\{x_n\}$ $\{x^n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots) \in m\}$ кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлсин. Фундаменталлик таърифидан: $\forall\, \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall\, n > n_0$, $\forall\, p > n_0$ учун

$$\rho\,(x_n, x_p) < \varepsilon,$$

яъни

$$\rho\,(x_n, x_p) = \sup_k |\rho_k^{(n)} - \xi_k^{(p)}| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\forall\, k \in N$ ҳамда $\forall\, n > n_0$, $\forall\, p > n_0$ учун

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(p)}| < \varepsilon$$

бўлади. Бундан $\{\xi_k^{(n)}\} = \{\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots\}$ сонлар кетма-кетлигининг фундаментал кетма-кетлик экани келиб чиқади. Унда Коши теоремасига мувофиқ (1-қисм, 3-боб, 10-§) бу кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k \ (\forall\, k \in N). \tag{15.6}$$

Энди $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k, \ldots)$ нинг m тўпламга тегишли бўлишини кўрсатамиз.

Аввало, $x_n \in m$ эканлигидан шундай M_n сон мавжудки, $\forall\, k \in N$ учун

$$|\xi_k^{(n)}| < M_n \ (n = 1.2, \ldots)$$

бўлади. Иккинчи томондан $\{x_n\}$ нинг фундаменталлигидан топамиз:

$\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall\, n > n_0$ ва $\forall\, p > n_0$ учун $\forall\, k \in N$ да

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(p)}| < \varepsilon \tag{15.7}$$

бўлади. Юқоридаги тенгсизликлардан $\forall\, n > n_0$ учун

$$M_{n_0+1} - \varepsilon < \xi_k^{(n)} < M_{n_0+1} + \varepsilon \tag{15.7}$$

муносабатларга эга бўламиз. Бу тенгсизликлардан, $n \to \infty$ да $\forall\, k \in N$ учун

$$M_{n_0+1} - \varepsilon \leqslant \xi < M_{n_0+1} + \varepsilon$$

келиб чиқади. Демак, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ кетма-кетлик чегараланган экан, яъни $x \in m$.

Юқоридаги (15.7) муносабатдан $n > n_0$ бўлганда $\sup\limits_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k| \leqslant \varepsilon$ эканлиги келиб чиқади. Бу эса $s(x_n, x) < \varepsilon$ бўлишини ифодалайди. Демак, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\,(x_n, x) = 0$, яъни $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи.

Шундай қилиб, (m, ρ) метрик фазодаги ихтиёрий $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатдик. Демак, (m, ρ) — тўлиқ метрик фазо.

Худди шунга ўхшаш (c, ρ) метрик фазонинг тўлиқлиги кўрсатилади.

Юқорида келтирилган мисоллар (Q, ρ) ва $(C[0, 1], \rho_1)$ метрик фазоларнинг тўлиқ эмаслигини кўрсатади. 15.1-теорема ҳамда тўлиқ метрик фазо таърифидан қуйидаги теоремага келамиз.

15.2-теорема (Коши теоремаси). *(E, ρ) тўлиқ метрик фазо бўлсин. Бу фазода $\Phi(E) = L(E)$, яъни $\{x_n\}$ $(x_n \in E,\ n = 1, 2, \ldots)$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлиши учун унинг фундаментал бўлиши зарур ва етарли.*

Тўлиқ метрик фазоларда R даги ичма-ич жойлашган сегментлар принципи (1-қисм, 3-боб, 8-§), R^m даги ичма-ич жойлашган шарлар принципи (12-боб, 2-§) каби принцип ўринли бўлади.

(E, ρ) метрик фазо берилган бўлсин. Марказлари x_n ($x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$) нуқталарда. радиуслари r_n ($r_n \in R_+$, $n = 1, 2, \ldots$) бўлган ушбу

$$S_1 = S_1(x_1, r_1) = \{x \in E: \ \rho(x, x_1) \leqslant r_1\},$$
$$S_2 = S_2(x_2, r_2) = \{x \in E: \ \rho(x, x_2) \leqslant r_2\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = S_n(x_n, r_n) = \{x \in E: \ \rho(x, x_n) \leqslant r_n\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

шарлар кетма-кетлиги $\{S_n\}$ берилган бўлсин. Агар бу кетма-кетлик учун қуйидаги

$$S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\{S_n\}$ — ичма-ич жойлашган шарлар кетма-кетлиги деб аталади.

15.3-теорема. (E, ρ) — *тўлиқ метрик фазо бўлсин. Бу фазода* $\{S_n\}$ *ичма-ич жойлашган шарлар кетма-кетлиги бўлсин. Агар* $n \to \infty$ *да шар радиусларидан иборат* $\{r_n\}$ *кетма-кетликнинг лимити ноль бўлса, яъни*

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0,$$

у ҳолда барча шарларга тегишли бўлган x_0 ($x_0 \in E$) *нуқта мавжуд ва ягонадир.*

Бу теоремнинг исботи 12-боб. 2-§ да келтирилган R^m даги ичма-ич жойлашган шарлар ҳақидаги теореманинг исботига ўхшашдир.

4-§. Больцано — Вейерштрасс теоремаси. Компакт метрик фазолар

Биз юқорида R даги (1-қисм, 3-боб, 9-§), R^m даги (12-боб, 2-§) ҳар қандай чегараланган кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкинлигини (Больцано—Вейерштрасс теоремасини) кўриб ўтдик. Математик анализнинг бу муҳим теоремаси ихтиёрий метрик фазо учун ҳам ўринли бўладими деган савол туғилади.

Аввало. ушбу бобнинг 1-§ ида ихтиёрий метрик фазода берилган тўпламнинг чегараланганлиги тушунчаси билан танишганимизни эслатиб ўтамиз.

Биз, шунингдек, ихтиёрий яқинлашувчи кетма-кетлик чегараланган тўплам ташкил қилишини ҳам кўрган эдик. Юқорида айтилганига кўра, (R, ρ), $R^m, \rho)$ метрик фазоларда ҳар қандай чегараланган кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин, яъни бу метрик фазоларда Больцано — Вейерштрасс теоремаси ўринли бўлади.

Бироқ бу ҳол ҳамма метрик фазоларда ҳам ўринли бўлавермайди. Масалан, (m, ρ) метрик фазони олайлик. Бу фазода ушбу

$$(1, 0, 0, 0, \ldots), \quad (0, 1, 0, 0, \ldots), \quad (0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots \qquad (15.8)$$

кетма-кетликни қарайлик. Бу кетма-кетликнинг барча ҳадлари қуйидаги

$$\{x \in m: s(x, 0) \leqslant 1\} \qquad (0 = (0, 0, 0, \ldots))$$

шарда жойлашгандир. Демак, (15.8) кетма-кетлик чегараланган. Айни пайтда бу (15.8) кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиб бўлмайди. Чунки (15.8) кетма-кетликнинг ихтиёрий икки x_k ва x_n ($k \neq n$) элементлири орасидаги масофа ҳар доим

$$\rho(x_k, x_n) = 1 \quad (k \neq n)$$

бўлади.

Демак, баъзи бир метрик фазоларда, ундаги ихтиёрий чегараланган кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин (масалан, (R, ρ), $R^m, \rho)$ фазолар), баъзи бир метрик фазоларда эса, ундаги ҳар қандай чегараланган кетма-кетликдан ҳам яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиб бўлавермас экан (масалан, (m, ρ) метрик фазо).

15.11-таъриф. (E, ρ) — ихтиёрий метрик фазо. Агар бу фазодаги ҳар қандай чегараланган $\{x_n\}$ ($x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$) кетма-кетликдан яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ ($x_{n_k} \in E$. $k = 1, 2, \ldots$; $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$) қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлса, (E, ρ) *компакт метрик фазо* деб аталади. Акс ҳолда, яъни (E, ρ) да шундай чегараланган кетма-кетлик топилсаки, ундан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажритиб олиш мумкин бўлмаса, $(E. \rho)$ *компакт бўлмаган фазо* дейилади.

Шундай қилиб, юқоридаги R, R^m фазолар компакт фазолардир. (m, ρ) фазо компакт бўлмаган фазодир.

ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

Биз 1-қисмнинг 9-бобида $[a, b]$ оралиқда берилган $f(x)$ функциянинг Риман интеграли тушунчасини киритдик ва батафсил ўргандик. Интегралнинг баёнида оралиқнинг чеклилиги ва функциянинг чегараланганлиги бевосита иштирок этди. Биз кўрдикки, ушбу таъриф маъносида интегралланувчи функциялар синфи анча кенг экан.

Хўш, $[a,+\infty)$ (ёки $(-\infty, a]$, ёки $(-\infty, +\infty)$) оралиқда берилган $f(x)$ функциянинг интеграли ёки $[a, b]$ да берилган, аммо чегараланмаган $f(x)$ функциянинг интеграли тушунчаларини ҳам киритиб бўлармикан? Яъни аввалги интеграл тушунчасини маълум маъноларда умумлаштириш имконияти бормикан деган савол туғилади. Албатта, умумлаштириш шундай бўлиши керакки, натижада Риман интегралининг асосий хоссалари ўз кучини сақлаб қолсин.

Биз ушбу бобда ана шундай умумлашган (ёки хосмас) интегралларини киритамиз ва ўрганамиз.

1-§. Чегаралари чексиз хосмас интеграллар

1. Чегаралари чексиз хосмас интеграл тушунчаси. Бирор $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, бу оралиқнинг исталган $[a, t]$ $(a<t<+\infty)$ қисмида интегралланувчи (қаралсин, 1-қисм, 9-боб), яъни ихтиёрий t $(t>a)$ учун ушбу

$$\int_a^t f(x)\,dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Бу интеграл, қаралаётган функция ҳамда олинган t га боғлиқ бўлиб, тайин $f(x)$ учун у фақат t ўзгарувчининг функцияси бўлади:

$$\int_a^t f(x)\,dx = F(t). \tag{16.1}$$

Натижада (16.1) муносабат билан аниқланган $F(t)$ $(t \in (a,+\infty))$ функцияга эга бўламиз.

16.1-таъриф. Агар $t \to +\infty$ да $F(t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $[a,+\infty)$ оралиқдаги *хосмас интеграли* деб аталади ва у

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx, \tag{16.2}$$

16.2-таъриф. Агар $t \to +\infty$ да $F(t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.2) хосмас интеграл *яқинлашувчи* дейилади, $f(x)$ эса чексиз $[a, +\infty)$ оралиқда *интегралланувчи функция* деб аталади.

Агар $t \to +\infty$ да $F(t)$ функциянинг лимити чексиз бўлса, (16.2) интеграл *узоқлашувчи* деб аталади.

Функциянинг $(-\infty, a]$ ва $(-\infty, +\infty)$ оралиқлар бўйича хосмас интеграллари ҳам юқоридаги каби таърифланади.

$f(x)$ функция $(-\infty, a]$ оралиқда берилган бўлиб, бу оралиқнинг исталган $[\tau, a]$ $(-\infty<\tau<a)$ қисмида интегралланувчи, яъни

$$\int_{\tau}^{a} f(x)\,dx=\Phi(\tau)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

16.3-таъриф. $\tau \to -\infty$ да $\Phi(\tau)$ функциянинг лимити $\lim\limits_{\tau\to-\infty}\Phi(\tau)$ мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $(-\infty, a]$ оралиқдаги *хосмас интеграли* деб аталади ва у

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx=\lim_{\tau\to-\infty}\Phi(\tau)=\lim_{\tau\to-\infty}\int_{\tau}^{a} f(x)\,dx \qquad (16.3)$$

16.4-таъриф. Агар $\tau \to -\infty$ да $\Phi(\tau)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.3) интеграл *яқинлашувчи* дейилади, $f(x)$ эса чексиз $(-\infty, a]$ оралиқда *интегралланувчи функция* деб аталади.

Агар $\tau \to -\infty$ да $\Phi(\tau)$ функциянинг лимити чексиз бўлса, (16.3) интеграл *узоқлашувчи* деб аталади.

$f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, бу оралиқнинг исталган $[\tau, t]$ $(-\infty<\tau<t<+\infty)$ қисмида интегралланувчи, яъни

$$\int_{\tau}^{t} f(x)\,dx=\psi(\tau, t)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

16.5-таъриф. $\tau \to -\infty$, $t \to +\infty$ да $\psi(\tau, t)$ функциянинг лимити

$$\lim_{\substack{\tau\to-\infty\\ t\to+\infty}}\psi(\tau, t)$$

мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг чексиз $(-\infty, +\infty)$ оралиқдаги *хосмас интеграли* деб аталади ва у

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{\substack{\tau\to-\infty\\ t\to+\infty}}\psi(\tau, t)=\lim_{\substack{\tau\to-\infty\\ t\to+\infty}}\int_{\tau}^{t} f(x)\,dx \qquad (16.4)$$

16.6-таъриф. Агар $\tau\to-\infty$, $t\to+\infty$ да $\psi(\tau, t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.4) интеграл *яқинлашувчи* дейилади, $f(x)$ эса чексиз $(-\infty, +\infty)$ оралиқда *интегралланувчи* функция деб аталади.

Агар $\tau\to-\infty$, $t\to+\infty$ да $\psi(\tau, t)$ функциянинг лимити чексиз бўлса, (16.4) интеграл *узоқлашувчи* деб аталади.

Аниқ интеграл хоссасига кўра $\forall a\in R$ учун

$$\int_{\tau}^{t} f(x)\,dx=\int_{\tau}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{t} f(x)\,dx$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ нинг мавжуд бўлиши $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ ва $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралларнинг ҳар бирининг алоҳида-алоҳида мавжуд бўлишидан келиб чиқади. Бинобарин, уни қуйидагича ҳам аниқлаш мумкин бўлади:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (\forall a\in R)$$

16.1-эслатма. Юқорида $[a, +\infty)$ $((-\infty, a]i$ $(-\infty, +\infty))$ да берилган $f(x)$ функциянинг хосмас интеграли тушунчаси $F(t)$ $(\Phi(\tau)$, $\psi(\tau, t)$ нинг $t\to+\infty$, $(\tau\to-\infty$, $t\to+\infty)$ да лимити мавжуд бўлган ҳоллар учун киритилди ва унинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилиги таърифланди. Маълумки, $F(t)$ $(\Phi(\tau)$, $\psi(\tau, t))$ нинг $t\to+\infty$ $(\tau\to-\infty$, $t\to+\infty)$ даги лимити мавжуд бўлмаган ҳол ҳам бўлиши мумкин. Бу ҳолда биз шартли равишда $f(x)$ нинг хосмас интеграли

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\ \left(\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right)$$

узоқлашувчи деб қабул қиламиз

Шундай қилиб, хосмас интеграл тушунчаси аввал ўрганилган Риман интеграли тушунчасидан яна бир марта лимитга ўтиш амаали орқали юзага келар экан. Қулайлик учун қуйида биз кўпинча «хосмас интеграл» дейиш ўрнига «интеграл» деб кетаверамиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-e}dx$$

интегрални қарайлик. Таърифига кўра

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} e^{-x}\,dx$$

бўлиб,

$$F(t)=\int_{0}^{t} e^{-x}\,dx=-e^{-1}+1$$

бўлганлигидан эса

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}dx=1$$

бўлади. Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1.$$

2. Қуйидаги

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$$

интегрални қарайлик. Хосмас интеграл таърифига кўра

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\tau\to-\infty}\int_{\tau}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\tau\to-\infty}(-\operatorname{arctg}\tau)=\frac{\pi}{2}$$

бўлади. Демак, интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2},$$

3. Ушбу

$$I=\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\ (a>0,\ \alpha>0) \tag{16.5}$$

интегрални яқинлашувчиликка текширинг. Равшанки, $[a, t]\,(a>0)$ оралиқда $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ функция узлуксиз бўлиб, $\int_a^t\frac{dx}{x^\alpha}$ мавжуд бўлади. Қуйидаги ҳолларни қарайлик:

а) $\alpha>1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(t^{1-\alpha}-a^{1-\alpha})=\frac{1}{\alpha-1}\,a^{1-\alpha}$$

бўлади. Демак, $\alpha>1$ бўлганда берилган интеграл яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}\,a^{1-\alpha}$$

бўлади.

б) $\alpha<1$ ва $\alpha=1$ бўлганда эса, мос равишда

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{1-\alpha}(t^{1-\alpha}-a^{1-\alpha})=+\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}(\ln t-\ln a)=+\infty$$

бўлади. Демак, $\alpha\leqslant 1$ бўлганда берилган интеграл узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (a > 0, \ \alpha > 0)$$

хосмас интеграл $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи, $0 < \alpha \leqslant 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

4. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx$$

хосмас интеграл, юқоридаги келишувимизга кўра узоқлашувчидир, чунки $t \to +\infty$ да

$$F(t) = \int_0^t \cos x dx = \sin t$$

функция лимитга эга эмас.

Юқорида $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграл $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ интегралнинг $t \to +\infty$ даги лимити сифатида таърифланди. Сўнгра бу хосмас интеграл мавжуд (мавжуд эмас) дейилиши ўрнига хосмас интеграл яқинлашувчи (узоқлашувчи) дейилди. Бундай дейилишининг боиси, бир томондан, хосмас интегралнинг лимитга ўтиш амали билан таърифланиши бўлса, иккинчи томондан унинг, қаторлар билан ўхшашлигидир. Маълумки, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ қатор $F(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ қисмий йиғиндининг $n \to +\infty$ даги лимити сифатида таърифланиб, бу

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} F(n) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

лимит чекли бўлганда қатор яқинлашувчи, чексиз бўлганда ёки мавжуд бўлмаганда эса қатор узоқлашувчи деб аталар эди.

Биз қуйида хосмас интегралларнинг турли хоссаларини ўрганар эканмиз, уларни, асосан, $f(x)$ функциянинг $[a, +\infty]$ оралиқ бўйича олинган $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграли учун келтирамиз. Бу хоссаларни $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ёки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ каби хосмас интеграллар учун ҳам тегишлича баён этиш мумкин. Бу ишни китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз.

2. Яқинлашувчи хосмас интегралларнинг хоссалари. Риман интегралини умумлаштиришдан ҳосил қилинган яқинлашувчи хосмас интеграллар ҳам шу Риман интеграли хоссалари сингари хоссаларга эга.

$f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлсин.

1°. Агар $f(x)$ функциянинг $[a, +\infty)$ оралиқ бўйича $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграли яқинлашувчи бўлса, бу функциянинг $[b, +\infty)$ $(a<b)$ оралиқ бўйича $\int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграли ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча. Бунда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx \tag{16.6}$$

бўлади.

Исбот. Аниқ интеграл хоссасига кўра

$$\int\limits_a^t f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^t f(x)\,dx \quad (a<t<\infty) \tag{16.7}$$

бўлади.

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи, яъни

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_a^t f(x)\,dx$$

лимит мавжуд ва чекли бўлсин. Юқоридаги (16.7) муносабатни ушбу

$$\int\limits_b^t f(x)\,dx = \int\limits_a^t f(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

кўринишда ёзиб, $t\to+\infty$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_b^t f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_a^t f(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Бундан эса $\int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчи ва

$$\int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

яъни

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

эканлиги келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш $\int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлишидан $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралнинг ҳам яқинлашувчи ҳамда (16.6) формуланинг ўринли бўлиши кўрсатилади.

2° Агар $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^{+\infty} cf(x)\,dx$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} cf(x)\,dx = c\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

бўлади, бунда $c = \text{const}$.

3°. Агар $\forall x \in [a, +\infty)$ да $f(x) \geqslant 0$ бўлса, бу функциянинг хосмас интеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant 0$$

бўлади.

Энди $f(x)$ функция билан бир қаторда $g(x)$ функция ҳам $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлсин.

4°. Агар $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]\,dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)] = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

бўлади.

16.1-натижа. Агар $f_1(x)$, $f_2(x)$, . . . , $f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, $\int_a^{+\infty} f_k(x)\,dx$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x, + \ldots + c_n f_n(x)]\,dx \quad (c_k = \text{const},\ k = 1, 2, \ldots n)$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)]\,dx = c_1 \int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx +$$

$$+ c_2 \int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx + \ldots + c_n \int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx$$ бўлади.

5°. Агар $\forall x \in [a, +\infty)$ учун $f(x) \leqslant g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ интеграллар яқинлашувчи, бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

бўлади.

Юқорида келтирилган 2° — 5°-хоссалар хосмас интеграл ва унинг яқинлашувчилиги таърифларидан бевосита келиб чиқади.

Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлсин. Шунингдек $f(x)$ функция шу оралиқда чегараланган, яъни шундай m ва M ўзгармас сонлар мавжудки, $\forall x \in [a, +\infty)$ учун

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

бўлиб, $g(x)$ функция эса $[a, +\infty)$ да ўз ишорасини ўзгартирмасин яъни $\forall x \in [a, +\infty)$ учун ҳар доим $g(x) \geqslant 0$ ёки $g(x) \leqslant 0$ бўлсин.

6° Агар $\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx$ ва $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас $\mu\, (m \leqslant \mu \leqslant M)$ сон топиладики,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx = \mu \cdot \int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx \qquad (16.8)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Юқорида келтирилган $g(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда манфий бўлмасин: $g(x) \geqslant 0\, (\forall x \in [a, +\infty))$. У ҳолда

$$mg(x) \leqslant f(x) g(x) \leqslant Mg(x)$$

бўлиб, унда эса (Риман интегралининг тегишли хоссасига кўра) $m\int\limits_a^t g(x)\, dx \leqslant \int\limits_a^t f(x) g(x)\, dx \leqslant M \int\limits_a^t g(x)\, dx$ бўлишини топамиз. Кейинги, тенгсизликларда $t \to +\infty$ да лимитга ўтсак,

$$m \int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx \leqslant M \int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx \qquad (16.9)$$

эканлиги келиб чиқади.

Икки ҳолни қарайлик:

а) $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx = 0$$

бўлиб, бунда μ деб $m \leqslant \mu \leqslant M$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий сонни олиш мумкин.

б) $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx > 0$ бўлсин. Бу ҳолда (16.9) тенгсизликлардан

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx}{\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx} \leqslant M$$

бўлиши келиб чиқади. Агар

$$M = \frac{\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx}{\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx}$$

деб олсак, унда

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx = \mu \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$$

бўлади.

$[a, +\infty)$ оралиқда $g(x) \leqslant 0$ бўлганда (16.8) формула худди шунга ўхшаш исботланади. Бу 6°-хосса *ўрта қиймат ҳақидаги теорема* деб ҳам юритилади.

2-§. Чегаралари чексиз хосмас интегралларнинг яқинлашувчилиги

Энди $[a, +\infty)$ оралиқда берилган $f(x)$ функция $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интегралининг яқинлашувчилиги шартини топиш билан шуғулланамиз.

Маълумки, $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги $t \to +\infty$ да

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx \quad (t > a)$$

функциянинг чекли лимитга эга бўлиши билан таърифланар эди. Бинобарин, $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги шарти, $t \to +\infty$ да $F(t)$ функцияниг чекли лимитга эга бўлиши шартидан иборат. Биз функциянинг чекли лимитга эга бўлиши ҳақидаги теоремани дастлаб монотон функция, сўнг ихтиёрий функция учун келтирган эдик (1-қисм, 4-боб. 5-§, 6-§).

Аввало $[a, +\infty)$ оралиқда берилган ҳамда $\forall x \in [a, +\infty)$ да $f(x) \geqslant 0$ бўлган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилигини ифодалайдиган теоремани келтирғмиз.

1. Манфий бўлмаган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги. $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, $\forall x \in [a, +\infty)$ да $f(x) \geqslant 0$ бўлсин. Бу $f(x)$ функцияни $[a, +\infty)$ оралиқнинг исталган $[a, t]$ $(a < t < +\infty)$ қисмида интегралланувчи деб қарайлик. Унда $a < t_1 < t_2 < +\infty$ лар учун

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x)\, dx = \int_a^{t_1} f(x)\, dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)\, dx = F(t_1) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \geqslant F(t_1)$$

бўлади. Демак, $f(x) \geqslant 0$ бўлганда $F(t)$ функция ўсувчи бўлар экан. Бинобарин, $t \to +\infty$ да $F(t)$ ҳамма вақт лимитга (чекли ёки чексиз) эга бўлади.

Монотон функциянинг лимити ҳақидаги 4.4-теоремадан (1-қисм, 4-боб, 5-§) фойдаланиб, $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги шартини ифодалайдиган қуйидаги теоремага келамиз.

16.1-теорема. $f(x)$ $(f(x) \geqslant 0)$ *функция хосмас интеграли* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$

нинг яқинлашувчи бўлиши учун, $\{F(t)\}$ нинг юқоридан чегараланган, яъни $\forall\, t \in (a, +\infty)$ учун

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \leqslant C \quad (C = \mathrm{const})$$

бўлиши зарур ва етарли.

Одатда бу теорема $f(x)$ $(f(x) \geqslant 0)$ функция хосмас интеграли $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ нинг *яқинлашувчилик критерийси* деб аталади.

Яна ўша теоремага асосан қуйидаги натижани айта оламиз.

16.2-натижа. Агар $\{F(t)\} = \{\int_a^t f(x)\,dx\}$ тўплам юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади.

2. Манфий бўлмаган функциялар хосмас интегралларини таққослаш ҳақида теоремалар.

16.2-теорема. *$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, $\forall\, x \in [a, +\infty)$ да*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \tag{16.10}$$

бўлсин. У ҳолда $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ узоқлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

Исбот. $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи бўлсин. Унда 16.1-теоремага кўра $\{G(t)\} = \{\int_a^t g(x)\,dx\}$ тўплам юқоридан чегараланган, яъни

$$G(t) = \int_a^t g(x)\,dx \leqslant C \quad (C = \mathrm{const})$$

бўлади. (16.10) муносабатга асосан $\forall\, t$ учун $(t \in (a, +\infty))$

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \leqslant \int_a^t g(x)\,dx = G(t) \leqslant C$$

бўлиб, ундан яна 16.1-теоремага кўра $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Энди $\int_a^{+\infty} (x)\,dx$ интеграл узоқлашувчи бўлсин. У ҳолда $\{F(t)\} = \{\int_a^t t(x)\,dx\}$ юқоридан чегараланмаган бўлиб,

$$\int_a^t f(x)\,dx \leqslant \int_a^t g(x)\,dx$$

тенгсизликдан эса $\{G(t)=\{\int\limits_a^t g(x)\,dx\}$ нинг ҳам юқоридан чегараланмаганлигини топамиз. Демак, юқорида келтирилган натижага кўра, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ интеграл — узоқлашувчи. Теорема исбот бўлди.

16.3-теорема. *$[a, +\infty)$ да $g(x)$ манфий бўлмаган функциялар берилган бўлсин. $x\to+\infty$ да $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбатнинг лимити k* бўлсин:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Агар $k<+\infty$ ва $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади. Агар $k>0$ ва $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл узоқлашувчи бўлади.

Исбот. $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $k<+\infty$ бўлсин. Лимит таърифига кўра, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $t_0\,(t_0>a)$ топиладики, барча $x>t_0$ учун

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<\varepsilon,$$

яъни

$$(k-\varepsilon)\,g(x)<f(x)<(k+\varepsilon)g(x) \tag{16.11}$$

бўлади.

Шартга кўра $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи. У ҳолда $\int\limits_a^{+\infty}(k+\varepsilon)\,g(x)\,dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади. (16.11] тенгсизликни эътиборга олиб, сўнг 16.2-теоремадан фойдаланиб, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчилигини топамиз.

Энди $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ интеграл узоқлашувчи бўлиб, $k>0$ бўлсин. Агар $k>k_1>0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи k_1 сон олинса ҳам, шундай $t_0'\,(t_0'>a)$ топиладики, барча $x>t_0'$ учун

$$\frac{f(x)}{g(x)}>k_1$$

бўлади. Демак, $x>t_0'$ да

$$g(x)<\frac{1}{k_1}f(x)$$

бўлиб, ундан 16.2-теоремага асосан $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралнинг узоқлашувчилиги келиб чиқади. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

16.3-натижа. 16.3-теорема шартларида агар $0 < k < +\infty$ бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ва $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ интеграллар бир вақтда ёки яқинлашувчи, ёки узоқлашувчи бўлади.

Одатда, бирор (мураккаброқ) хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги ҳақида аввалдан яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилиги маълум бўлган хосмас интеграл билан солиштириб хулоса чиқарилади. Хусусан, текширилаётган $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ $(f(x) \geqslant 0))$ интегрални $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $(a > 0,\ \alpha > 0,$ қаралсин, (16.5)) интеграл билан солиштириб қуйидаги аломатларни ҳосил қиламиз.

1°. Агар x нинг етарли катта қийматларида $(x > x_0 > a)$

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$$

бўлса, у ҳолда $\forall\, x > x_0$ учун $\varphi(x) \leqslant c < +\infty$ ва $\alpha > 1$ бўлганда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи, $\varphi(x) \geqslant c > 0$ ва $\alpha \leqslant 1$ бўлганда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Аргумент x нинг етарли катта қийматларида

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} \quad (x > x_0)$$

бўлиб, $\varphi(x) \leqslant c < +\infty$ ва $\alpha > 1$ бўлсин. У ҳолда

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} \leqslant \frac{c}{x^\alpha}$$

бўлиб, $\alpha > 1$ да $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ интегралнинг яқинлашувчилигига ҳамда 16.2-теоремага асосланиб, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Агар $\varphi(x) \geqslant c > 0$ ва $\alpha \leqslant 1$ бўлса, унда $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ интегралнинг узоқлашувчилигини эътиборга олиб, яна 16.2-теоремага кўра $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралнинг узоқлашувчилигини топамиз. 1°-аломат исбот бўлди.

2°. Агар $x \to +\infty$ да $f(x)$ функция $\frac{1}{x}$ га нисбатан $\alpha (\alpha > 0)$ тартибли чексиз кичик бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \leqslant 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Бу аломатнинг тўғрилиги юқорида келтирилган 16.2-теоремадан ундаги $g(x)$ функцияни $\frac{1}{x^{\alpha}}$ деб олинишидан келиб чиқади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

нтегрални қарайлик. Равшанки, ихтиёрий $x \geqslant 1$

$$e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

ўлади. Агар $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ ҳамда $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ интегралнинг қинлашувчилигини эътиборга олсак, унда 1°-аломатга кўра берилган интегралнинг қинлашувчи эканини топамиз.

2. Қуйидаги

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+x}}$$

интегрални қарайлик. Бу интеграл остидаги функция учун

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+x}} = \frac{1}{x^{5/3}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}} \leqslant \frac{1}{x^{5/3}},\ x \geqslant 1$$

бўлиб, юқорида келтирилган аломатга кўра берилган интеграл яқинлашувчи бўлади.

3. Ихтиёрий функция хосмас интегралиинг яқинлашувчилиги. Биз $[a, +\infty)$ оралиқда берилган $f(x)$ функциянинг шу оралиқ бўйича олинган $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интегралини

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

функция $t \to +\infty$ да чекли лимитга эга бўлган ҳолда яқинлашувчи деб атадик. Демак, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги тушунчаси, биз аввал ўрганган тушунча — функциянинг чекли лимити орқали ифодаланди. Бинобарин, бу интегралнинг яқинлашувчилик шарти $F(t)$ функциянинг $t \to +\infty$ даги чекли лимити мавжуд бўлиши шартидан иборат бўлади.

Мазкур курснинг 1-қисм, 4-боб, 6-§ ида келтирилган теоремадан (Коши теоремасидан) фойдаланиб, қуйидаги теоремага келамиз.

16.4-теорема (Коши теоремаси). *Қуйидаги хосмас интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

нинг яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам, шундай $t_0\,(t_0>a)$ сони топилиб, $t'>t_0$, $t''>t_0$ бўлган ихтиёрий t', t'' лар учун

$$|F(t'')-F(t')|=\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Бу теорема назарий аҳамиятга эга бўлган муҳим теорема бўлиб ундан хосмас интегралларнинг яқинлашувчилигини аниқлашда фойдаланиш қийин бўлади (аввалги Коши критерийлари сингари).

16.5-теорема. *Агар $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. Шартга кўра $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ интеграл яқинлашувчи. 16.4-теоремага асосан, $\forall\,\varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $t_0(t_0>a)$ топилади ки, $t'>t_0$, $t''>t'$) бўлганда $\int_{t'}^{t'}|f(x)|\,dx<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади Аммо

$$\left|\int_{t'}^{t'} f(x)\,dx\right|\leqslant\int_{t'}^{t'}|f(x)|\,dx$$

тенгсизликни эътиборга олсак, у ҳолда

$$\left|\int_{t'}^{t'} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, $\forall\,\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам, шундай $t_0\,(t_0>a)$ топиладики, $t''>t_0$, $t'>t_0$ бўлганда

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

бўлади. Бундан 16.4-теоремага асосан $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчилигини топамиз. Теорема исбот бўлди.

16.2-эслатма. $\int_a^{+\infty}|f(x)\,dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлишидан $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди, яъни баъзи функциялар учун $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ узоқлашувчи, $\int_a^{+\infty} f(x)\,d.$ эса яқинлашувчи бўлади.

Масалан, ушбу

$$\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{[x]}}{[x]}\,dx$$

интеграл яқинлашувчи, аммо

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{[x]}}{[x]}\right|dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{[x]}$$

эса узоқлашувчидир.

16.7-таъриф. Агар $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ *абсолют яқинлашувчи интеграл* деб аталади, $f(x)$ функция эса $[a, +\infty)$ оралиқда *абсолют интегралланувчи функция* дейилади.

16.8-таъриф. Агар $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ *шартли яқинлашувчи интеграл* дейилади.

Шундай қилиб, $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ хосмас интегрални яқинлашувчиликка текшириш қуйидаги тартибда олиб борилиши мумкин:

$\forall x\in[a, +\infty)$ да $f(x)\geqslant 0$ бўлсин. Бу ҳолда $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ интегралнинг яқинлашувчи (узоқлашувчи) лигини 2-§ да келтирилган аломатлардан фойдаланиб топиш мумкин. Бошқа ҳолларда $f(x)$ функциянинг $|f(x)|$ абсолют қийматининг $[a, +\infty)$ оралиқ бўйича $\int_d^{+\infty}|f(x)dx$ интегралини қараймиз. Равшанки, кейинги интегралга нисбатан яна 2-§ даги аломатларни қўллаш мумкин. Агар бирор аломатга кўра $\int_a^{+\infty}|f(x)dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги топилса, унда 16-5-теоремага кўра берилган $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ интегралнинг ҳам яқинлашувчилиги (ҳатто абсолют яқинлашувчилиги) топилган бўлади.

Агар бирор аломатга кўра $\int_a^{+\infty}|f(x)dx$ интегралнинг узоқлашувчилигини аниқласак, айтиш мумкинки, $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ ёки узоқлашувчи бўлади, ёки шартли яқинлашувчи бўлади ва буни аниқлаш қўшимча таҳлил қилишни талаб этади.

Пировардида, хосмас интегралларнинг яқинлашувчилигини аниқлашда кўп қўлланадиган аломатлардан бирини келтирамиз.

16.6-теорема (Дирихле аломати). *$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, улар қуйидаги шартларни бажарсин;*

1) $f(x)$ *функция* $[a, +\infty)$ *оралиқда узлуксиз ва унинг шу оралиқдаги бошланғичи* $F(x)$ $(F'(x) = f(x))$ *функцияси чегараланган,*

2) $g(x)$ *функция* $[a, +\infty)$ *оралиқда* $g'(x)$ *ҳосилага эга ва у узлуксиз функция,*

3) $g(x)$ *функция* $[a, +\infty)$ *да камаювчи,*

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.$

У ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Узлуксиз $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг кўпайтмаси $f(x)\, g(x)$ функция ҳам $[a, +\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун, бу $f(x)\, g(x)$ функция исталган $[a, t]$ $(t > a)$ оралиқда интегралланувчи бўлади, яъни

$$\varphi(t) = \int_a^t f(x)\, g(x)\, dx \tag{16.12}$$

интеграл мавжуд.

$t \to +\infty$ да $\varphi(t)$ функциянинг чекли лимитга эга бўлишини кўрсатамиз. Теореманинг 1-ва 2-шартларидан фойдаланиб, (16.12) интегрални бўлаклаб ҳисоблаймиз.

$$\int_a^t f(x)\, g(x)\, dx = \int_a^t g(x)\, dF(x) = g(x)\, F(x)\Big|_a^t - \int_a^t F(x)\, g'(x)\, dx. \tag{16.13}$$

Ўнг томондаги биринчи қўшилувчи учун ушбу

$$|g(t)\, F(t)| \leqslant Mg(t) \quad (M = \sup |F(t)| < +\infty)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Ундан, $t \to +\infty$ да $g(t) \to 0$ бўлишини эътиборга олсак,

$$\lim_{t\to+\infty} g(t)\, F(t) = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди ўнг томондаги иккинчи $\int_a^t F(x)\, g'(x)\, dx$ ҳадни қараймиз. Модомики, $g(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи ҳамда шу оралиқда камаювчи экан, унда $\forall\, x \in [a, +\infty)$ да $g'(x) \leqslant 0$ бўлиб,

$$\int_a^t F(x) \cdot g'(x)\,|\, dx \leqslant M \int_a^t |g'(x)|\, dx = -M \int_a^t g'(x)\, dx =$$

$$= M\,[g(a) - g(t)] \leqslant Mg(a) \quad (g(t) \geqslant 0)$$

бўлади. Шундай қилиб, t ўзгарувчининг барча $t > a$ қийматларида

$$\int_a^t |F(x) \cdot g'(x)|\, dx$$

интеграл (t ўзгарувчининг функцияси) юқоридан чегараланган. У ҳолда ушбу бобнинг 2-§ ида келтирилган теоремага кўра $\int_a^{+\infty} F(x) g'(x)\, dx$ интеграл яқинлашувчи (ҳатто абсолют яқинлашувчи) бўлади. Декак,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t F(x)\, g'(x)\, dx$$

лимит мавжуд ва чекли.

Юқоридаги (16.13) тенгликда $t \to +\infty$ да лимитга ўтиб, ушбу

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\, g(x)\, dx$$

лимитнинг мавжуд ҳамда чекли бўлишини топамиз. Бу эса $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ интегралнинг яқинлашувчилигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx \quad (\alpha > 0)$$

интегрални қарайлик. Бу интегралдаги $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ функциялар юқорида келтирилган теореманинг барча шартларини қаноатлантиради:

1) $f(x) = \sin x$ функция $[1, +\infty)$ оралиқда узлуксиз ва бошланғич функцияси $F(x) = -\cos x$ чегараланган,

2) $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ функция $[1, +\infty)$ оралиқда $g'(x) = -\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}$ ҳосилага эга ва у узлуксиз,

3) $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ функция $[1, +\infty)$ оралиқда камаювчи,

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$

бўлади. Демак, Дирихле аломатига кўра берилган интеграл яқинлашувчи.

3-§. Чегараси чексиз хосмас интегралларнинг иҳсоблаш

Чекли $[a, b]$ оралиқ бўйича олинган $\int_a^b f(x)\, dx$ Риман интеграли Ньютон — Лейбниц формуласи ёрдамида, ёки бўлаклаб, ёки ўзгарувчиларни алмаштириб, ёки бошқа усуллар билан ҳисобланар эди.

Энди яқинлашувчи ушбу

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

хосмас интегрални ҳисоблаш талаб этилсин.

1. Ньютон — Лейбниц формуласи. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Маълумки, бу ҳолда

$f(x)$ функция шу оралиқда $\Phi(x)$ $(\Phi'(x)=f(x),\ x\in[a,+\infty))$ бошланғич функцияга эга бўлади. $x\to+\infty$ да $\Phi(x)$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, бу лимитни $\Phi(x)$ бошланғич функциянинг $+\infty$ даги қиймати деб қабул қиламиз, яъни

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=\Phi(+\infty).$$

Хосмас интеграл таърифи ҳамда Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx=\lim_{t\to+\infty}[\Phi(t)-\Phi(a)]=$$

$$=\Phi(+\infty)-\Phi(a)=\Phi(x)\Big|_a^{+\infty}. \tag{16.14}$$

Бу эса юқоридаги келишувга кўра бошланғич функцияга эга бўлган $f(x)$ функция хосмас интеграли учун Ньютон — Лейбниц формуласи ўринли бўлишини кўрсатади.

Мисол. Ушбу

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$$

хосмас интегрални қарайлик. Равшанки, $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ функция $\left[\frac{2}{\pi},+\infty\right]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, унинг бошланғич функцияси $\Phi(x)=\cos\frac{1}{x}$ бўлади. Демак, (16.14) формулага кўра

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx=\cos\frac{1}{x}\Big|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}=1.$$

Баъзан, берилган I хосмас интеграл ўзгарувчиларни алмаштириб ёки бўлаклаб интеграллаш натижасида ҳисобланади.

2. Бўлаклаб интеграллаш усули. $u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a,+\infty)$ оралиқда берилган ҳамда узлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин.

Агар $\int_a^{+\infty}v(x)\,du(x)$ интеграл яқинлашувчи ҳамда ушбу

$$\lim_{t\to+\infty}u(t)=u(+\infty),\qquad \lim_{t\to+\infty}v(t)=v(+\infty)$$

лимитлар мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty}u(x)\,dv(x)$ интеграл яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty}u(x)\,dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}v(x)\,du(x) \tag{16.15}$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, 1-қисм, 9-боб, 10-§ да келтирилган формулага кўра

$$\int_a^t u(x)\,du(x) = u(x)\,v(x)\Big|_a^t - \int_a^t -(x)\,du(x) = [u(t)\,v(t) -$$

$$- u(a)\,v(a)] - \int_a^t v(x)\,du(x)$$

бўлиб, бу тенгликда $t \to +\infty$ да лимитга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t u(x)\,dv(x) = \lim_{t\to+\infty}[u(t)\,v(t) - u(a)\,v(a)] - \lim_{t\to+\infty}\int_a^t v(x)\,du(x) \tag{16-16}$$

Шартга кўра $\int_a^{+\infty} v(x)\,du(x)$ интеграл яқинлашувчи ҳамда $\lim\limits_{t\to+\infty}[u(t)\,v(t) - u(a)\,v(a)]$ лимит мавжуд ва чекли эканлигини эътиборга олсак, унда (16.16) муносабатдан $\int_a^{+\infty} u(x)\,dv(x)$ интегралнинг яқинлашувчилиги ҳамда (16.15) формуланинг ўринли бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Қуйидаги

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$$

интегрални ҳисоблайлик. Агар $u(x)=x$, $dv(x) = e^{-x}\,dx$ дейилса, унда $u(x)v(x)\Big|_0^{+\infty} = x(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x}) = 0$, $\int_0^{+\infty} v(x)\,du(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -1$ бўлиб, (16.15) формулага кўра

$$\int_0^{+\infty} u(x)\,dv(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-e^{-x})\,dx = 1$$

бўлади. Демак,

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1.$$

16.3-эслатма. Юқоридаги (16.15) формулани келтириб чиқаришда $\int_a^{+\infty} v(x)\,du(x)$ интегралнинг яқинлашувчилиги ҳамда $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)\,v(t)$ лимитнинг мавжуд ва чекли бўлиши талаб этилди.

Агар $\int_0^{+\infty} u(x)\,dv(x)$, $\int_a^{+\infty} v(x)\,du(x)$ интегралларнинг яқинлашувчилиги ҳамда $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)\,v(t)$ лимитнинг мавжуд ва чекли бўлиши каби учта фактдан исталган иккитаси ўринли бўлса, у ҳолда уларнинг учинчиси ҳамда (16.15) формула ўринли бўлади.

3. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули. $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган бўлсин. Қуйидаги

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

интегрални қарайлик. Бу интегралда $x=\varphi(z)$ дейлик, бунда $\varphi(z$ функция қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\varphi(z)$ функция $[\alpha, +\infty)$ оралиқда берилган, $\varphi'(z)$ ҳосилага эга ва бу ҳосила узлуксиз,

2) $\varphi(z)$ функция $[\alpha, +\infty)$ оралиқда қатъий ўсувчи,

3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(+\infty)=\lim\limits_{z\to+\infty}\varphi(z(= +\infty$ бўлсин.

У ҳолда $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(\varphi(z))\varphi'(z)\,dz$ интеграл яқинлашувчи бўлса, унда $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ ҳам яқинлашувчи ва

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)\,dz \tag{16.17}$$

бўлади.

Ихтиёрий $z\,(\alpha<z<+\infty)$ нуқтани олиб, унга мос $\varphi(z)=t$ нуқтани топамиз. $[a, t)$ оралиқда 1-қисм, 9-боб, 2-§ да келтирилган формулага кўра

$$\int\limits_{a}^{t} f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{z} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)\,dz$$

бўлади. Бу муносабатда $t\to+\infty$ да (бунда $z=\varphi^{-1}(t)\to+\infty$) лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{a}^{t} f(x)\,dx=\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz.$$

Бу эса $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчилигини ҳамда (16.17) формуланинг ўринли бўлишини кўрсатади.

16.4-эслатма. $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ яқинлашувчи бўлсин. Бу интегралда

$$x=\varphi(z) \tag{16.18}$$

бўлиб, (16.18) функция юқоридаги шартларни бажарсин. У ҳолда

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{+\infty} f(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} \tag{16.19}$$

интегрални қарайлик. Равшанки, бу интеграл яқинлашувчи. Уни ҳисоблайлик. Аввало бу интегралда $x=\frac{1}{z}$ алмаштириш қиламиз. Натижада

$$I=\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{1+\frac{1}{z^4}}\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz=\int_{0}^{+\infty}\frac{z^2\,dz}{1+z^4} \qquad (16.20)$$

бўлиб, (16.19) ва (16.20) тенгликлардан

$$I=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги интегралда

$$x=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\left(x-\frac{1}{x}=y\right)$$

алмаштиришни бажариб, қуйидагини топамиз:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{2+y^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Демак,

$$\int_{0}^{-\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

4. Чегараси чексиз бўлган хосмас интегралларни ҳам баъзан (аниқ интеграл сингари) интеграл йиғиндининг лимити сифатида ҳисоблаш мумкин бўлади.

$f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда $(a\geqslant 0)$ берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $[a,+\infty)$ да $f(x)$ функция интегралланувчи,

2) $[a,+\infty)$ да $f(x)$ функция камаювчи ва $\forall\, x\in[a,+\infty)$ учун $f(x)>0$.

У ҳолда

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{h\to 0}h\sum_{k=0}^{\infty}f(a+kh) \qquad (16.21)$$

бўлади.

Исботлайлик, $[a,+\infty)$ оралиқни $[a,a+h]$, $[a+h,a+2h]$, ..., $[a+kh,a+kh+h]$, ... $(h>0)$ оралиқларга ажратайлик. $A>a$ бўлсин. Функциянинг мусбатлигидан

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h}-1\right]}\int_{a+kh}^{a+kh+h}f(x)\,dx\leqslant\int_{a}^{A}f(x)\,dx\leqslant\sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h}\right]}\int_{a+kh}^{a+kh+h}f(x)\,dx \qquad (16.22)$$

тенгсизликларни ёза оламиз. Функциянинг камаювчи эканлигидан $\forall\, x\in[a+kh,\ a+kh+h]$ учун

$$f(a+kk+h)\leqslant f(x)\leqslant f(a+kh)$$

бўлади. Шундан фойдалансак, (16.22) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h}\right]-1} hf(a+kh+h) \leqslant \int_a^A f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h}\right]} hf(a+kh). \qquad (16.23)$$

Шартга кўра, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ яқинлашувчи. Функциянинг мусбатлигидан $\forall\ A>a$ учун

$$\int_a^A f(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Бу тенгсизликдан ва (16.23) дан $\forall\ A>a$, $\forall\ h>0$ учун

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx > \sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{h}\right]-1} hf(a+kh) - hf(a).$$

Бундан эса

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} hf(a+kh) - hf(a)$$

бўлади. Шундай қилиб, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(a+kh)$ қатор яқинлашувчи бўлар экан.

Буни эътиборга олсак, $f(x)$ нинг мусбатлигидан ва (16.22) муносабатнинг ўнг томонидаги тенгсизликдан

$$\int_a^A f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} hf(a+kh)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликнинг ихтиёрий $A>a$ учун тўғри эканлигидан

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant h\sum_{k=0}^{\infty} f(a+kh).$$

Демак,

$$h\sum_{k=0}^{\infty} f(a+kh) - hf(a) \leqslant \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant h\sum_{k=0}^{\infty} f(a+kh)$$

экан. Бу ерда $h\to 0$ да лимитга ўтсак (16.21) формулани ҳосил қиламиз.

Мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx$$

интегрални қарайлик. Равшанки, бу интеграл яқинлашувчи. $[1, +\infty)$ оралиқда эса $f(x)=xe^{-x}$ функция камаювчи ҳамда $\forall\ x\in[1, +\infty)$ учун $f(x)=xe^{-x}>0$ дир. Юқорида келтирилган (16.21) формуладан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{k=0}^{\infty}(1+kh)\,e^{-(1+kh)} = e^{-1}\lim_{h\to 0}\left[h\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kh} + h^2\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-kh}\right] =$$

$$=e^{-1}\left[\lim_{h\to 0} h\,\frac{1}{1-e^{-h}}+\lim_{h\to 0} h^2\frac{e^{-h}}{(1-e^{-h})^2}\right]=e^{-1}\left[1+\lim_{h\to 0} e^{-1}\left(\frac{h}{e^{-h}-1}\right)^2\right]=$$
$$=e^{-1}(1+1)=2e^{-1}.$$

Демак,

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx=2e^{-1}.$$

16.5-эслатма. Юқорида келтирилган (16.21) формула $f(x)$ функция x ўзгарувчининг бирор x_0 $(x_0>a)$ қийматидан бошлаб камаювчи бўлганда ҳам ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

5. Чегараси чексиз хосмас интегралларнинг бош қийматлари. $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, бу оралиқнинг исталган $[t', t]$ $(-\infty<t'<t<+\infty)$ қисмида интегралланувчи бўлсин: $F(t', t)=\int\limits_{t'}^{t} f(x)\,dx.$

Маълумки, $f(x)$ функциянинг $(-\infty, +\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интеграли ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}} F(t', t)=\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}}\int_{t'}^{t} f(x)\,dx$$

лимит билан аниқланар эди. t', t ўзгарувчилар бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда $t'\to-\infty$, $t\to+\infty$ да $F(t', t)$ функция чекли лимитга эга бўлса, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи деб аталар эди.

Равшанки, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, яъни ихтиёрий равишда $t'\to-\infty$, $t\to+\infty$ да $F(t', t)$ функция чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда бу функция $t'=-t$ бўлиб, $t\to+\infty$ бўлганда ҳам, чекли лимитга эга (интеграл яқинлашувчи) бўлаверади. Бироқ $F(t', t)=$ $=\int\limits_{t'}^{t} f(x)\,dx$ функция, $t'=-t$ бўлиб, $t\to+\infty$ да чекли лимитга эга бўлишидан $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқавермайди.

Мисол. Ушбу

$$\int_{t'}^{t}\sin x\,dx$$

интеграл учун $t'=-t$ бўлса, равшанки, $\forall\, t>0$ учун $\int\limits_{-t}^{t}\sin x dx=0$ ва демак,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}\sin x\,dx=0$$

бўлади. Бироқ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$ интеграл яқинлашувчи эмас.

16.9-таъриф. Агар $t'=-t$ бўлиб, $t\to+\infty$ да $F(t', t)=$

$= \int\limits_{t'}^{t} f(x)\,dx$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл *бош қиймат маъносида яқинлашувчи* дейилиб,

$$\lim_{t \to +\infty} \int\limits_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

лимит эса $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг *бош қиймати* деб аталади.

Одатда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг бош қиймати

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int\limits_{-t}^{t} f(x)\,dx.$$

Бунда v. p. белги французча «valeur principiale» «бош қиймат» сўзларининг дастлабки ҳарфларини ифодалайди.

Шундай қилиб, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у бош қиймат маъносида ҳам яқинлашувчи бўлади. Бироқ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг бош қиймат маъносида яқинлашувчи бўлишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

6. **Чегараси чексиз хосмас интегралларни тақрибий ҳисоблаш.** $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда берилган ва узлуксиз бўлиб,

$$I = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{16.24}$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин.

Кўп ҳолларда бундай интегрални аниқ ҳисоблаш қийин бўлиб, уни тақрибий ҳисоблашга тўғри келади.

(16.24) хосмас интегрални тақрибий ҳисоблаш хос интегрални — аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашга келтирилади. Аниқ интегрални ҳисоблашда, бизга маълум формулалар (тўғри тўртбурчаклар, трапеция, Симпсон формулалари (қаралсин 1- қисм, 9- боб, 11- §)) дан фойдаланилади.

Таърифга кўра

$$\lim_{t \to +\infty} \int\limits_{a}^{t} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

лимит мавжуд ва чекли, яъни $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай t_0 ($a < t_0 < \infty$) топиладики, $t > t_0$ да

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx\right| < \varepsilon \tag{16.25}$$

бўлади. Агар

$$\int_t^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx$$

эканлигини эътиборга олсак, унда юқоридаги (16.25) тенгсизлик ушбу

$$\left|\int_t^{+\infty} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

кўринишни олади.

Натижада берилган I интегрални тақрибий ифодаловчи қуйидаги формулага келамиз:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \approx \int_a^t f(x)\,dx. \tag{16.26}$$

Бу тақрибий формуланинг хатолиги

$$\left|\int_t^{+\infty} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

интегрални қарайлик. Бу интеграл яқинлашувчидир. Уни $[0, a[$ $(a > 0)$ оралиқ бўйича $\int_0^a e^{-x^2}\,dx$ интеграл билан алмштириб ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^a e^{-x^2}\,dx\ (a > 0) \tag{16.27}$$

тақрибий формулага келамиз. (16.27) формуланинг хатолиги

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx - \int_0^a e^{-x^2}\,dx = \int_a^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

учун қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leqslant \frac{1}{a}\int_a^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\int_a^{+\infty} e^{-x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2a}\left[-e^{-x^2}\right]_a^{+\infty} = \frac{1}{2a}e^{-a^2}.$$

Энди $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$ бўлган ҳолларни қарайлик. $a = 1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

бўлиб, бу тақрибий формуланинг хатолиги

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx - \int_0^1 e^{-x^2}\,dx - \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \leqslant 0{,}1839$$

бўлади.

$a = 2$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\int^{\infty} e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^2 e^{-x^2}\,dx$$

бўлиб, бу тақрибий формуланинг хатолиги учун ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx - \int_0^2 e^{-x^2}dx = \int_2^{+\infty} e^{-x^2}dx < 0{,}00458$$

баҳога эга бўламиз.

$a=3$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_0^3 e^{-x^2}dx$$

бўлиб, унинг хатолиги

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx - \int_0^3 e^{-x^2}dx = \int_3^{+\infty} e^{-x^2}dx < 0{,}00002$$

бўлади.

4-§. Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграллари

1. Махсус нуқта. $f(x)$ функция X $(X\subset R)$ тўпламда берилган бўлсин. Бирор x_0 $(x_0\in R)$ нуқтани олиб, унинг ушбу

$$\dot{U}_\delta(x_0)=\{x: x\in R;\ x_0-\delta<x<x_0+\delta;\ x\neq x_0\}\quad (\delta>0)$$

атрофини (1-қисм, 118, 122-бетлар) қарайлик.

16.10-таъриф. Агар x_0 нуқтанинг ҳар қандай $\dot{U}_\delta(x_0)$ атрофи олинганда ҳам $\dot{U}_\delta(x_0)\cap X\neq\varnothing$ тўпламда $f(x)$ функция чегараланмаган бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг *махсус нуқтаси* деб аталади.

Мисоллар. 1. $[a, b)$ ярим интервалда ушбу $f(x)=\dfrac{1}{b-x}$ функцияни қарайлик. b нуқта бу функциянинг махсус нуқтаси бўлади, чунки $[a, b)\cap\dot{U}_\delta(b)$ тўпламда берилган функция чегараланмагандир.

2. $(a, b]$ ярим интегралда $f(x)=\dfrac{1}{x-a}$ функция берилган бўлсин. Равшанки бу функция $(a, b]\cap\dot{U}_\delta(a)$ тўпламда чегараланмаган. Демак, a махсус нуқта.

3. (a, b) интервалда ушбу $f(x)=\dfrac{1}{(x-a)^\alpha(b-x)^\beta}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$ функцияни қарайлик, a ва b нуқталар бу функциянинг махсус нуқталари бўлади, чунки берилган функция $(a, b)\cap\dot{U}_\delta(a)$ ва $(a, b)\cap\dot{U}_\delta(b)$ тўпламларда чегараланмагандир.

4. Ушбу $f(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$ функция $R\setminus\{-1, 0, 1\}$ тўпламда берилган. Равшанки, бу функция -1, 0, 1 нуқталар атрофида чегараланмаган. Демак, -1, 0, 1 махсус нуқталар бўлади.

2. Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли тушунчаси. Мазкур курснинг 1-қисм, 9-бобида математик анализнинг асосий тушунчаларидан бири—функциянинг $[a, b]$ оралиқ бўйича аниқ интеграли (Риман интеграли) тушунчаси киритилди ва уни батафсил ўрганилди. Унда функциянинг интегралланувчи бўлиши функциянинг чегараланган бўлишини тақозо этади.

Энди чекли $[a, b]$ оралиқда чегараланмаган функциялар учун интеграл тушунчасини киритамиз ва уни ўрганамиз.

$f(x)$ функция $[a, b)$ ярим интервалда берилган бўлиб, b нуқта шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функция $[a, b)$ ярим интервалнинг исталган $[a, t]$ $(a < t < b)$ қисмида интегралланувчи (1-қисм, 9-боб, 2-§), яъни ихтиёрий t учун ушбу

$$\int_a^t f(x)\,dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Бу интеграл, равшанки, қаралаётган функцияга ва олинган t га боғлиқ бўлади. Агар $f(x)$ ни тайинлаб олсак, қаралаётган интеграл фақат t ўзгарувчининг функцияси бўлади:

$$\int_a^t f(x)\,dx = F(t) \quad (a < t < b).$$

Натижада (a, b) интервалда берилган $F(t)$ функцияга эга бўламиз.

16.11-таъриф. Агар $t \to b - 0$ да $F(t)$ функциянинг лимити

$$\lim_{t \to 0 - b} F(t)$$

мавжуд бўлса, бу лимит (чегараланмаган) $f(x)$ функциянинг $[a, b)$ *бўйича хосмас интеграли* деб аталади ва у

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

каби белгиланади. Демак

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b - 0} F(t) = \lim_{t \to b - 0} \int_a^t f(x)\,dx. \qquad (16.28)$$

16.12-таъриф. Агар $t \to b - 0$ да $F(t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.28) хосмас интеграл *яқинлашувчи* дейилади, $f(x)$ эса $[a, b)$ да *интегралланувчи функция* дейилади

Агар $t \to b - 0$ да $F(t)$ функциянинг лимити чексиз бўлса, (16.28) интеграл *узоқлашувчи* деб аталади.

Худди юқоридагидек, a нуқта $f(x)$ функциянинг махсус нуқтаси бўлганда $(a, b]$ оралиқ бўйича хосмас интеграл, a ва b нуқталар функциянинг махсус нуқталари бўлганда (a, b) оралиқ бўйича хосмас интеграл таърифланади.

$f(x)$ функция $(a, b]$ ярим интервалда берилган бўлиб, a нуқта шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу $f(x)$ функция $(a, b]$ ярим интервалнинг исталган $[t, b]$ $(a < t < b)$ қисмида интегралланувчи, яъни ихтиёрий $t\,(a < t < b)$ учун ушбу

$$\int_t^b f(x)\,dx = \Phi(t) \qquad (16.29)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

16.13-таъриф. Агар $t \to a + 0$ да $\Phi(t)$ функциянинг

$$\lim_{t \to a+0} \Phi(t)$$

лимити мавжуд бўлса, бу лимит (чегараланмаган) $f(x)$ функциянинг $(a, b]$ бўйича *хосмас интеграли* деб аталади ва

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a+0} \int_t^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a+0} \Phi(t). \tag{16.30}$$

16.14-таъриф. Агар $t\to a+0$ да $\Phi(t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, $\int_a^b f(x)\,dx$ интеграл *яқинлашувчи* деб аталади, $f(x)$ эса $(a, b]$ да *интегралланувчи* функция дейилади.

Агар $t\to a+0$ да $\Phi(t)$ функциянинг лимити чексиз бўлса (16.30) интеграл *узоқлашувчи* деб аталади.

$f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, a ва b нуқталар шу функциянинг махсус нуқталари бўлсин. Шунингдек, $f(x)$ функция (a, b) интервалнинг исталган $[\tau, t]$ $(a<\eta<t<b)$ қисмида интегралланувчи, яъни

$$\int_\tau^t f(x)\,dx = \varphi(\tau, t) \tag{16.31}$$

интеграл мавжуд бўлсин.

16.15-таъриф. $\tau\to a+0$, $t\to b-0$ да $\varphi(\tau, t)$ функциянинг

$$\lim_{\substack{\tau\to a+0\\ t\to b-0}} \varphi(\tau, t)$$

лимити мавжуд бўлса, бу лимит (чегараланмаган) $f(x)$ функциянинг (a, b) бўйича *хосмас интеграли* деб аталади ва у

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\tau\to a+0\\ t\to b-0}} \int_\tau^t f(x)\,dx = \lim_{\substack{\tau\to a+0\\ t\to b-0}} \varphi(\tau, t). \tag{16.32}$$

16.16-таъриф. Агар $\tau\to a+0$, $t\to b-0$ да $\varphi(\tau, t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.32) интеграл *яқинлашувчи* дейилади, $f(x)$ эса (a, b) да *интегралланувчи функция* деб аталади.

Агар $\tau\to a+0$, $t\to b-0$ да $\varphi(\tau, t)$ функциянинг лимити чексиз бўлса, (16.32) интеграл *узоқлашувчи* деб аталади.

$c_1, c_2, \dots, c_n$ $(c_i\in(a, b),\ i=1, 2, \dots, n)$ нуқталар $f(x)$ функциянинг махсус нуқталари бўлган ҳолда ҳам $f(x)$ нинг (a, b) бўйича хосмас интеграли юқоридагидек таърифланади. Соддалик учун a, b ҳамда c $(a<c<b)$ махсус нуқталар бўлган ҳолда, хосмас интеграл таърифини келтирамиз. $f(x)$ функция $(a, b)\setminus\{c\}$ тўпламнинг исталган

$[\tau,\ t]$ $(a<\tau<t<c)$ ҳамда $[u,\ v]$ $(c<u<v<b)$ қисмларида интеграл-ланувчи, яъни

$$\int_{\tau}^{t} f(x)\,dx=\varphi(\tau,\ t),\quad \int_{u}^{v} f(x)\,dx=\psi(u,\ v) \qquad (16.32)$$

интеграллар мавжуд бўлсин.

16.17-таъриф. Агар $\tau\to a+0$, $t\to c-0$ ҳамда $u\to c+0$, $v\to b-0$ да $\varphi(\tau,\ t)+\psi(u,\ v)$ функциянинг

$$\lim_{\substack{\tau\to a+0\\ t\to c-0\\ u\to c+0\\ v\to b-0}}[\varphi(\tau,\ t)+\psi(u,\ v)]=\lim_{\substack{\tau\to a+0\\ t\to c-0\\ u\to c+0\\ u\to b-0}}[\int_{\tau}^{t} f(x)\,dx+\int_{u}^{v} f(x)\,dx]$$

лимити мавжуд бўлса, бу лимит (чегараланмаган) $f(x)$ функциянинг $(a,\ b)$ бўйича *хосмас интеграли* деб аталади ва у

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\lim_{\substack{\tau\to a+0\\ t\to c-0\\ u\to c+0\\ v\to b-0}}[\int_{\tau}^{t} f(x)\,dx+\int_{u}^{v} f(x)\,dx]. \qquad (16.34)$$

16.18-таъриф. Агар $\tau\to a+0$, $t\to c-0$ ҳамда $u\to c+0$, $v\to b-0$ да $\varphi(\tau,\ t)+\psi(u,\ v)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, (16.34) интеграл *яқинлашувчи* дейилади, $f(x)$ эса $(a,\ b)$ да *интегралланувчи функция* дейилади.

Агар $\tau\to a+0$, $t\to c-0$ ҳамда $u\to c+0$, $v\to b-0$ да $\varphi(\tau,\ t)+\psi(u,\ v)$ функциянинг лимити чексиз бўлса, (16.34) интеграл *узоқлашувчи* деб аталади.

16.6-эслатма. Юқорида махсус нуқтаси a (ёки b, ёки a ва b) бўлган $f(x)$ функциянинг $(a,\ b]$ (ёки $[a,\ b)$), ёки оралиқ бўйича хосмас интеграли тушунчаси $F(t)$ нинг $t\to a+0$ (ёки $\Phi(t)$ нинг $t\to b-0$, ёки $\varphi(\tau,\ t)$ нинг $\tau\to a+0$, $t\to b-0$) да лимити мавжуд бўлган ҳоллар учун киритилди ва унинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчилиги таърифланди. Маълумки, $F(t)$ нинг $t\to a+0$ (ёки $\Phi(t)$ нинг $t\to b-0$, ёки $\varphi(\tau,\ t)$ нинг $\tau\to a+0$, $t\to b-0$) даги лимити мавжуд бўлмаган ҳол бўлиши мумкин. Бу ҳолда биз шартли равишда $f(x)$ нинг хосмас интеграли

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

узоқлашувчи деб қабул қиламиз.

Шундай қилиб, чегараланмаган функция хосмас интеграли тушунчаси аввал ўрганилган Риман интеграли тушунчасидан яна бир марта лимитга ўтиш амали орқали юзага келар экан. Қулайлик учун қуйида кўпинча «хосмас интеграл» дейиш ўрнига интеграл деб кетаверамиз.

Мисоллар. 1. $(0, 1]$ ярим интервалда $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ функцияни қарайлик. Равшанки, $x=0$ нуқта бу функциянинг махсус нуқтасидир. Берилган функция ихтиёрий $[t, 1]$ $(0<t<1)$ оралиқ бўйича интегралланувчи

$$\Phi(t)=\int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=2(1-\sqrt{t}).$$

У ҳолда

$$\lim_{t\to+0}\Phi(t)=\lim_{t\to+0} 2(1-\sqrt{t})=2$$

бўлади. Демак, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ интеграл яқинлашувчи ва у 2 га тенг.

2. Ушбу $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади, чунки

$$\lim_{t\to+0}\Phi(t)=\lim_{t\to+0}\int_t^1 \frac{dx}{x}=\lim_{t\to+0}[\ln x]_t^1=+\infty.$$

3. Ушбу $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ интегрални қарайлик. Равшанки, $x=0$ ва $x=1$ нуқталар махсус нуқталардир. Хосмас интеграл таърифига кўра

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{\substack{\tau\to+0\\ t\to1-0}}\int_\tau^t \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{\substack{\tau\to+0\\ t\to1-0}}[\arcsin(2x-1)]_\tau^t=$$

$$=\lim_{\substack{\tau\to+0\\ t\to1-0}}[\arcsin(2t-1)-\arcsin(2\tau-1)]=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

бўлади. Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\pi.$$

4. Ушбу

$$I_1=\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}\ (\alpha>0),\quad I_2=\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\ (a>0)$$

интегралларни қарайлик. Хосмас интеграл таърифидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\lim_{t\to a+0}\int_t^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\lim_{t\to a+0}\left[\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_t^b=$$

$$=\lim_{t\to a+0}\frac{1}{1-a}[b-a)^{1-\alpha}-(t-x)^{1-\alpha}],\ (\alpha\neq1).$$

Бу лимит $\alpha < 1$ бўлганда чекли, демак I_1 хосмас интеграл яқинлашувчи, $\alpha > 1$ бўлганда эса чексиз бўлиб, унда I_1 хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади. $\alpha = 1$ бўлганда

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{t\to a+0}\int_t^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{t\to a+0}\left[\ln[x-a)\right]_t^b$$

бўлиб, I_1 интеграл узоқлашувчидир.

Демак,

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}\ (\alpha > 0)$$

хосмас интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \geqslant 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

Худди шунга ўхшаш кўрсатиш мумкинки,

$$I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\ (\alpha > 0)$$

хосмас интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \geqslant 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

Биз қуйида хосмас интегралларнинг турли хоссаларини ўрганар эканмиз, уларни, асосан махсус нуқтаси b бўлган $f(x)$ функциянинг $[a, b)$ оралиқ бўйича олинган $\int_a^b f(x)\,dx$ интеграли учун келтирамиз. Бу хоссаларни махсус нуқтаси a (ёки a ва b) бўлган функциянинг мос равишда $(a, b]$ ёки $(a, b))$ оралиқ бўйича олинган хосмас интеграллари учун ҳам тегишлича баён этиш мумкин.

3. Яқинлашувчи хосмас интегралларнинг хоссалари. $f(x)$ функция $[a, b)$ да берилган бўлиб, b шу $f(x)$ функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функция исталган $[a, t]$ $(a < t < b)$ да интегралланувчи бўлсин.

1°. Агар $f(x)$ функциянинг $[a, b)$ оралиқ бўйича $\int_a^b f(x)\,dx$ интеграли яқинлашувчи бўлса, бу функциянинг $[c, b]$ $(a < c < b)$ оралиқ бўйича $\int_c^b f(x)\,dx$ интеграли ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча. Бунда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{16.35}$$

бўлади.

Исбот. Аниқ интеграл хоссасига кўра

$$\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^t f(x)\,dx \quad (a < t < b) \tag{*}$$

бўлади.

$\int_a^b f(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи, яъни

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\,dx$$

лимит мавжуд ва чекли бўлсин. Юқоридаги (*) тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$\int_c^t f(x)\,dx = \int_a^t f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx.$$

Кейинги тенгликда $t \to b-0$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{t\to b-0}\int_c^t f(x)\,dx = \lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx.$$

Бундан $\int_c^b f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчи ва

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

эканлиги келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш $\int_c^b f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлишидан $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралнинг ҳам яқинлашувчи ҳамда (16.35) формуланинг ўринли бўлиши кўрсатилади.

Қуйида келтириладиган 2° — 5°-хоссалар хосмас интеграл ва унинг яқинлашувчилиги таърифларидан бевосита келиб чиқади.

2°. Агар $\int_a^a f(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b cf(x)\,dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b (x)\,dx$$

бўлади, бунда $c = \text{const}$.

3°. Агар $\int_a^a f(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $\forall x \in [a,\ b)$ да $f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

бўлади.

Энди $f(x)$ функция билан бир қаторда $g(x)$ функция ҳам $[a,\ b)$ да берилган бўлиб, b эса бу функцияларнинг махсус нуқтаси бўлсин.

4° Агар $\int_a^b f(x)\,dx$ ва $\int_a^b g(x)\,dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

бўлади.

16.4-натижа. $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b)$ да берилган бўлиб, b эса бу функцияларнинг махсус нуқтаси бўлсин. Агар $\int_a^b f_k(x)\,dx\ (k=1, 2, \ldots, n)$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)]\,dx$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)]\,dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx +$$
$$+ \ldots + c_n \int_a^b f_n(x)\,dx\ c_i = \text{const},\ i = \overline{1, n}.$$

бўлади.

5° Агар $\int_a^b f(x)\,dx$ ва $\int_a^b g(x)\,dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b)$ да $f(x) \leqslant g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

бўлади.

Юқоридаги $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар қуйидаги шартларни ҳам бажарсин:

1) $f(x)$ функция $[a, b)$ да чегараланган, яъни шундай m ва M ўзгармас сонлар мавжудки, $\forall x \in [a, b)$ да $m \leqslant f(x) \leqslant M$;

2) $g(x)$ функция $[a, b)$ да ўз ишорасини ўзгартирмасин, яъни барча $x\,(x \in [a, b)$ ларда $g(x) \geqslant 0$ ёки $g(x) \leqslant 0$.

6°. Агар $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ ва $\int_a^b g(x)\,dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас $\mu\,(m \leqslant M)$ сон топиладики,

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу хосса ушбу бобнинг 1-§ да келтирилган 6°-хосса исботи каби исботланади. Одатда бу хосса **ўрта қиймат ҳақидаги теорема** деб юритилади.

5-§. Чегараланмаган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги

$f(x)$ функция $[a, b)$ ярим интервалда берилган бўлиб, b шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги шартини топиш билан шуғулланамиз.

Биз юқорида $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги $t \to b-0$ да

$$F(t)=\int_a^t f(x)\,dx \quad (a<t<b)$$

функциянинг чекли лимитга эга бўлиши билан таърифланишини кўрдик. Бинобарин, $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги шарти, $t \to b-0$ да $F(t)$ функциянинг чекли лимитга эга бўлиши шартидан иборат.

1- қисм, 4- боб, 5-§, 6-§ даги функциянинг чекли лимитга эга бўлиши ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб, $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги шартини ифодаловчи теоремаларни келтирамиз.

1. Манфий бўлмаган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги. $f(x)$ функция $[a, b)$ ярим интервалда берилган бўлиб, b эса шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин.

Бу функция $[a, b)$ оралиқда манфий бўлмасин ($\forall x \in [a, b)$ учун $f(x) \geqslant 0$) ва оралиқнинг исталган $[a, t]$ қисмида ($a<t<b$) интегралланувчи бўлсин. У ҳолда $a<t_1<t_2<b$ лар учун

$$F(t_2)=\int_a^{t_2} f(x)\,dx=F(t_1)+\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx \geqslant F(t_1)$$

бўлади. Демак, $f(x) \geqslant 0$ бўлганда $F(t)$ функция ўсувчи бўлар экан. Бинобарин, $t \to b-0$ да $F(t)$ ҳамма вақт лимитга (чекли ёки чексиз) эга бўлади. Монотон функция лимити ҳақидаги теоремадан фойдаланиб (қаралсин, 1-қисм, 4- боб, 5-§) $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги шартини ифодалайдиган қуйидаги теоремага келамиз.

16.7- теорема. $[a, b)$ *да манфий бўлмаган* $f(x)$ *функция* $\int_a^b f(x)\,dx$ *хосмас интегралининг яқинлашувчи бўлиши учун,* $\{F(t)\}$ *нинг юқоридаги чегараланган, яъни* $\forall t \in (a, b)$ *учун*

$$F(t)=\int_a^t f(x)\,dx \leqslant c \; (c=\mathrm{const})$$

бўлиши зарур ва етарли.

Одатда бу теорема $f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$) функция $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интегралининг *яқинлашувчилиги критерийси* деб аталади.

Яна ўша теоремага асосан қуйидаги натижани айта оламиз.

16.5- натижа. Агар $\{F(t)\}=\{\int_a^t f(x)\,dx\}$ тўплам юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади.

Манфий бўлмаган функциялар хосмас интегралларини таққослаш ҳақида теоремалар.

16.8-теорема. *$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b)$ да берилган бўлиб, b эса бу функцияларнинг махсус нуқтаси ва $\forall\ x \in [a, b)$ да*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \qquad (16.36)$$

бўлсин. У ҳолда:

$\int\limits_a^b g(x)\,dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади,

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ узоқлашувчи бўлса, $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

Исбот. $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ яқинлашувчи бўлсин. Унда 16.7-теоремага кўра $\{G(t)\} = \{\int\limits_a^t g(x)\,dx\}$ $(a < t < b)$ тўплам юқоридан чегараланган:

$$G(t) = \int\limits_a^t g(x)\,dx \leqslant C \ \ (C = \text{const})$$

бўлади. (16.36) муносабатга асосан

$$F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^t g(x)\,dx = G(t) \leqslant C$$

бўлиб, ундан яна 16.7-теоремага кўра $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Энди $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интеграл узоқлашувчи бўлсин. У ҳолда $\{F(t)\} = \{\int\limits_a^t f(x)\,dx\}$ юқоридан чегараланмаган бўлиб,

$$\int\limits_a^t f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^t g(x)\,dx$$

тенгсизликдан эса

$$\{G(t)\} = \{\int\limits_a^t g(x)\,dx\}$$

нинг ҳам юқоридан чегараланмаганлигини топамиз. Демак, юқорида келтирилган натижага кўра $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ интеграл узоқлашувчи. Теорема исбот бўлди.

16.9-теорема. *$[a, b)$ да $f(x)$ ва $g(x)$ манфий бўлмаган функциялар берилган. $x \to b-0$ да $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ нисбатнинг лимити k бўлсин:*

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Агар $k < +\infty$ *ва* $\int_a^b g(x)\,dx$ *интеграл яқинлашувчи бўлса,* $\int_a^b f(x)\,dx$ *интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.*

Агар $k > 0$ *ва* $\int_a^b g(x)\,dx$ *интеграл узоқлашувчи бўлса,* $\int_a^b f(x)\,dx$ *интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.*

Бу теореманинг исботи ушбу бобнинг 2-§ ида келтирилган 16.3-теореманинг исботи кабидир. Уни исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

Юқорида келтирилган теоремалардан қуйидаги натижа келиб чиқади.

16.6-натижа. 16.9-теорема шартларида агар $0 < k < +\infty$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ ва $\int_a^b g(x)\,dx$ интеграллар бир вақтда ёки яқинлашувчи, ёки узоқлашувчи бўлади.

Бирор $\int_a^b f(x)\,dx$ $(f(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [a, b))$ хосмас интеграл берилган бўлсин. Бу интегрални $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ интеграл билан солиштириб, қуйидаги аломагларни топамиз.

1°. Агар x нинг b га етарлича яқин қийматларида

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

бўлса, у ҳолда $\varphi(x) \leqslant c < +\infty$ ва $\alpha < 1$ бўлганда $\int_a^b f(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи, $\varphi(x) \geqslant c > 0$ ва $\alpha \geqslant 1$ бўлганда $\int_a^b f(x)\,dx$ интеграл узоқлашувчи бўлади.

2°. Агар $x \to b - 0$ да $f(x)$ функция $\frac{1}{b-x}$ га нисбатан $\alpha\,(\alpha > 0)$ тартибли чексиз катта бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ интеграл $\alpha < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \geqslant 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Бу аломатларнинг исботи ҳам ушбу бобнинг 2-§ ида келтирилган аломатларнинг исботи кабидир.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[4]{1-x}}\,dx$$

интегрални қарайлик. Бунда интеграл остидаги функция

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{\varphi(x)}{(1-x)^{1/4}}$$

бўлади. Равшанки, $\forall x \in [0, 1)$ учун $\varphi(x) = \cos^2 x \leqslant 1$ ва $\alpha = \frac{1}{4} < 1$. Демак, юқоридаги 1°-аломатга кўра берилган интеграл яқинлашувчи бўлади.

2. Қуйидаги

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

интегрални қарайлик.

$$\lim_{x\to -0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 0-1} x \sqrt{\frac{1-x}{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ҳамда

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

интегралнинг яқинлашувчилигини эътиборга олиб, 16.6-натижага асосланиб берилган интегралнинг яқинлашувчилигини топамиз.

2. **Ихтиёрий функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги.** $f(x)$ функция $[a, b)$ ярим интервалда берилган бўлиб, b нуқта $f(x)$ функциянинг махсус нуқтаси бўлсин.

Маълумки, $t \to b-0$ да

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

функция чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи деб аталар эди. Демак $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги тушунчаси ҳам функциянинг чекли лимитга эга бўлиши орқали ифодаланади. Функциянинг чекли лимитга эга бўлиши ҳақидаги теоремадан (1-қисм, 4-боб, 6-§) фойдаланиб қуйидаги теоремага келамиз.

16.10-**теорема.** (**Коши теоремаси**). *Қуйидаги*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

хосмас интегралнинг (b — махсус нуқта) яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилиб, $b-\delta < t' < b$, $b-\delta < t'' < b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи t' ва t'' лар учун

$$|F(t'') - F(t')| = \left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Бу теорема муҳим назарий аҳамиятга эга бўлган теорема. Бироқ ундан амалда—хосмас интегралларнинг яқинлашувчилигини аниқлашда фойдаланиш қийин бўлади.

16.11-теорема. *Агар* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* $\int_a^b f(x)dx$ *интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.*

Бу теореманинг исботи ушбу бобнинг 2-§ идаги 16.5-теореманинг исботи кабидир.

16.7-эслатма. $\int_a^b |f(x)|\,dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлишидан $\int_a^b f(x)dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Мисол. Ушбу $\int_0^1 (-1)^{\left[\frac{1}{1-x}\right]}\left[\frac{1}{1-x}\right]dx$ интеграл яқинлашувчи, аммо

$$\int_0^1 \left|(-1)^{\left[\frac{1}{1-x}\right]}\left[\frac{1}{1-x}\right]\right|dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{1-x}\right]dx$$ интеграл эса узоқлашувчидир.

16.9-таъриф. Агар $\int_a^b |f(x)|\,dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ *абсолют яқинлашувчи интеграл* деб аталади. $f(x)$ функция эса $[a, b]$ да *абсолют интегралланувчи функция* деб аталади.

Агар $\int_a^b f(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $\int_a^b |f(x)|\,dx$ интеграл узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ *шартли яқинлашувчи интеграл* деб аталади.

Бирор $f(x)$ функция $[a, b)$ да берилган бўлиб, b эса шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу $f(x)$ функция $|f(x)|$ абсолют қийматининг $[a, b)$ бўйича $\int_a^b |f(x)|\,dx$ интегралини қарайлик. Кейинги интегралга нисбатан 6-§ даги аломатларни қўллаш мумкин. Агар бирор аломатга кўра $\int_a^b |f(x)|\,dx$ интегралнинг яқилашувчилиги топилса, унда 16.11-теоремага асосан берилган $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралнинг ҳам яқинлашучилиги (ҳатто абсолют яқинлашувчилиги) топилган бўлади.

Агар бирор аломатга кўра $\int_a^b |f(x)|\,dx$ интегралнинг узоқлашувчилигини аниқласак, айтиш мумкинки, $\int_a^b j(x)\,dx$ ёки узоқлашувчи бўлади, ёки шартли яқинлашувчи бўлади ва буни аниқлаш қўшимча текширишни талаб этади.

6- §. Чегараланмаган функция хосмас интегралини ҳисоблаш

Биз аввалги параграфларда функция хосмас интегралининг якинлашувчилигини ўргандик. Энди яқинлашувчи хосмас интегралларни ҳисоблаш билан шуғулланамиз.

Бирор $f(x)$ функция $[a, b)$ да берилган бўлиб, b эса шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функциянинг хосмас интеграли

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

яқинлашувчи, уни ҳисоблаш талаб этилсин.

1. Ньютон—Лейбниц формуласи. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, b)$ да узлуксиз бўлсин. Маълумки, бу ҳолда $f(x)$ функция шу оралиқда $\Phi(x)$ ($\Phi'(x) = f(x)$, $x \in [a, b)$) бошланғич функцияга эга бўлади. $x \to b-0$ да $\Phi(x)$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, бу лимитни $\Phi(x)$ бошланғич функциянинг b нуқтадаги қиймати деб қабул қиламиз:

$$\lim_{x \to b-0} \Phi(x) = \Phi(b).$$

Хосмас интеграл таърифи ҳамда Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t \to b-0} [\Phi(t) - \Phi(a)] = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b.$$

Бу эса, юқоридаги келишув асосида, бошланғич функцияга эга бўлган $f(x)$ функция хосмас интеграли учун Ньютон — Лейбниц формуласи ўринли бўлишини кўрсатади.

Берилган хосмас интеграл ўзгарувчиларни алмаштириб ёки бўлаклаб интеграллаш натижасида ҳисобланиши мумкин.

Биз ушбу бобнинг 3- § ида чегаралари чексиз хосмас интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш ва бўлаклаб интеграллаш усулларини келтирган эдик. Худди шу усуллар чегараланмаган функция хосмас интегралларида ҳам мавжуддир. Уларни исботсиз келтирамиз.

2. Бўлаклаб интеграллаш усули. $u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b)$ да берилган бўлиб, шу оралиқда узлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. b нуқта эса $v(x) \cdot u'(x)$ ҳамда $u(x)v'(x)$ функцияларнинг махсус нуқталари.

Агар $\int_a^b v(x)du(x)$ интеграл яқинлашувчи ҳамда ушбу

$$\lim_{t \to b-0} u(t)\,v(t)$$

лимит мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_a^b u(x)\,dv(x)$ интеграл яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x) \qquad (16.37)$$

бўлади, бунда

$$u(b)\cdot v(b)=\lim_{t\to b-0} u(t)\,v(t).$$

Мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

интегрални қарайлик. Агар $u(x)=x+1$, $d\,v(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$ деб олсак, унда

$$u(x)\cdot v(x)\,\Big|_0^1=(x+1)\,3\,(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^1=3,$$

$$\int_0^1 v(x)\,du(x)=\int_0^1 3\,(x-1)^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{9}{4}(x-1)^{4/3}\Big|_0^1=-\frac{9}{4}$$

бўлиб, (16.37) формулага кўра

$$\int_0^1 u(x)\,dv(x)=\int_0^1\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=3-\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{21}{4}$$

бўлади. Демак,

$$\int_0^1\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)}}=\frac{21}{4}.$$

16.8-эслатма. Юқоридаги (16.37) формулани келтириб чиқаришда $\int_a^b v(x)\,du(x)$ интегралнинг яқинлашувчилиги ҳамда $\lim\limits_{t\to b-0}[u(t)\cdot v(t)]$ лимитнинг мавжуд ва чекли бўлиши талаб этилди.

Агар $\int_a^b u(x)\,dv(x)$, $\int_a^b v(x)du(x)$ интегралларнинг яқинлашувчилиги ҳамда $\lim\limits_{t\to b-0}[u(t)\,v(t)]$ лимитнинг мавжуд ва чекли бўлиши каби учта фактдан исталган иккитаси ўринли бўлса, унда уларнинг учинчиси ҳамда (16.37) формула ўринли бўлади.

3. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули. $f(x)$ функция $[a,b)$ да берилган бўлиб, b эса шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Қуйидаги

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

хосмас интегрални қарайлик. Бу интегралда $x=\varphi(z)$ дейлик, бунда $\varphi(z)$ функция $[\alpha,\beta)$ ораликда $\varphi'(z)>0$ ҳосилага эга ва у узлуксиз ҳамда $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Агар $\int_\alpha^\beta f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)\,dz$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz$$

бўлади.

16.9-эслатма. $\int_a^b f(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи бўлсин. Бу интегралда $x=\varphi(z)$ бўлиб, у юқоридаги шартларни бажарсин. У ҳолда $\int_\alpha^\beta f(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(z)\,\varphi'(z)\,dz$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

интегралда $x=\varphi(z)=z^2$ алмаштириш бажарамиз. Равшанки, бу $x=z^2$ функция $(0,\ 1]$ оралиқда $x'=2z>0$ ҳосилага эга ва у узлуксиз ҳамда $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$. Интегрални ҳисоблаймиз:

$$I=\int_0^1 \frac{2dz}{1+z^2} = 2\operatorname{arctg} z\,|_0^1 = 2\,\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\,.$$

4. Чегараланмаган функциялар хосмас интегралларини ҳам баъзан (аниқ интеграл сингари) интеграл йиғиндининг лимити сифатида ҳисоблаш мумкин бўлади.

$f(x)$ функция $[a,b)$ да берилган бўлиб, b нуқта шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функция қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $[a,b)$ да $f(x)$ функция интегралланувчи,

2) $[a,b)$ да $f(x)$ функция ўсувчи ва $\forall\, x\in[a,b)$ учун $f(x)>0$.

У ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left[a+\frac{k}{n}(b-a)\right] \tag{6.38}$$

бўлади.

Бу (16.38) муносабатнинг исботи ушбу бобнинг 4-§ ида исботланган (16.21) муносабатнинг исботи кабидир.

Чегараланмаган функция хосмас интегралининг бош қиймати. $f(x)$ функция $[a,b)$ интервалда берилган бўлиб, $c(a<c<b)$ эса шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин.

Маълумки, $\tau\to c-0$, $t\to c+0$ да, яъни $\eta=c-\tau\to 0$, $\eta'=t-c\to 0$ да ушбу

$$F(\tau,t)=\int_a^\tau f(x)\,dx+\int_t^b f(x)\,dx=\int_a^{c-\eta} f(x)\,dx+\int_{c+\eta'}^b f(x)\,dx=F_0(\eta,\eta')$$

функциянинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли деб аталар эди:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta'\to 0}} F_0(\eta,\ \eta')=\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta'\to 0}}\Big[\int_a^{c-\eta} f(x)\,dx+\int_{c+\eta'}^b f(x)\,dx\Big].$$

Агар бу лимит чекли бўлса, $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи дейилар эди.

Равшанки, $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, яъни ихтиёрий равишда $\eta\to 0$, $\eta'\to 0$ да $F_0(\eta,\ \eta')$ функция чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $\eta=\eta'$ ва $\eta\to 0$ да ҳам бу функция чекли лимитга эга — интеграл яқинлашувчи бўлаверади.

Бироқ $F_0(\eta,\ \eta')$ функциянинг $\eta=\eta'$ бўлиб, $\eta\to 0$ да чекли лимитга эга бўлишидан $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Мисол. Ушбу

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}\quad (a<c<b)$$

хосмас интегрални қарайлик. Равшанки,

$$F_0(\eta,\ \eta')=\int_a^{c-\eta}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\eta'}^b\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}+\ln\frac{\eta}{\eta'}\tag{16.39}$$

бўлади.

$\eta=\eta'$ ва $\eta\to 0$ да $F_0(\eta,\ \eta')\to\ln\dfrac{d-c}{c-a}$ бўлади.

Бироқ ихтиёрий равишда $\eta\to 0$, $\eta'\to 0$ да (16.39) муносабатдан кўринадики, $F_0(\eta,\ \eta')$ функция аниқ лимитга эга бўлмайди.

16.20-таъриф. Агар $\eta=\eta'$ ва $\eta\to 0$ да $F_0(\eta,\ \eta')$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интеграл *бош қиймат маъносида яқинлашувчи* дейилиб,

$$\lim_{\eta\to 0} F_0(\eta,\ \eta)$$

лимит эса $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг *бош қиймати* деб аталади ва

$$\text{v. p.}\int_a^b f(x)\,dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\text{v. p.}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0} F_0(\eta,\ \eta).$$

Шундай қилиб, $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у бош қиймат маъносида ҳам яқинлашувчи бўлади. Бироқ $\int_a^b f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг бош қиймат маъносида яқинлашувчи бўлишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

5. **Чегараланмаган функция хосмас интегралини тақрибий ҳисоблаш.** $f(x)$ функция $[a, b)$ да берилган ва b шу функциянинг махсус нуқтаси, бу функция $[a, b)$ да узлуксиз бўлиб,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин. Кўп ҳолларда бундай интегрални аниқ ҳисоблаш қийин бўлиб, уни тақрибий ҳисоблашга тўғри келади.

Хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги таърифига асосан

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\,dx$$

лимит мавжуд ва чекли, яъни $\forall\,\varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топиладики, $b-\delta < t < b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча t ларда

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx\right| = \left|\int_t^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

бўлади.

Натижада берилган I интегрални тақрибий ифодаловчи қуйидаги

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^t f(x)\,dx \qquad (b-\delta < t < b)$$

формулага келамиз. Бу тақрибий формуланинг хатолиги

$$\left|\int_t^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

бўлади.

Шундай қилиб, хосмас интегрални тақрибий ҳисоблаш — аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашга келтирилади. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашда эса, бизга маълум формулалар (тўғри тўртбурчаклар, трапеция, Симпсон формулалари, қаралсин, I-қисм, 9-боб, 11-§) дан фойдаланилади.

7- §. Умумий ҳол

Ушбу параграфда чегараланмаган $f(x)$ функциянинг чексиз оралиқ бўйича хосмас интеграли тушунчаси келтирилади.

Соддалик учун, $(a, +\infty)$ оралиқда берилган $f(x)$ функция шу оралиқда битта a махсус нуқтага эга бўлсин. Бу функция исталган чекли $[t, \tau]$ $(a < t < \tau < +\infty)$ оралиқда интегралланувчи, яъни ушбу

$$\int_t^\tau f(x)\,dx \tag{16.40}$$

интеграл мавжуд бўлсин.

τ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида $(t < \tau < +\infty)$ (16.40) интеграл t га боғлиқ бўлади:

$$\int_t^\tau f(x)\,dx = F_\tau(t).$$

Маълумки, агар $t \to a+0$ да

$$\lim_{t \to a+0} F_\tau(t)$$

лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $(a, \tau]$ оралиқ бўйича хосмас интеграли деб аталиб, у

$$\int_a^\tau f(x)\,dx$$

каби белгиланар эди. Демак,

$$\int_a^\tau f(x)\,dx = \lim_{t \to a+0} F_\tau(t) = \lim_{t \to a+0} \int_t^\tau f(x)\,dx. \tag{16.41}$$

Қаралаётган $f(x)$ функциянинг $(a, \tau]$ $(a < \tau < +\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интеграли $\int_a^\tau f(x)\,dx$ мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интеграя τ га боғлиқ бўлади.

$$\int_a^\tau f(x)\,dx = \varphi(\tau).$$

Агар $\tau \to +\infty$ да $\varphi(\tau)$ функциянинг лимити

$$\lim_{\tau \to +\infty} \varphi(\tau)$$

мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $(a, +\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интерали деб аталиб, у

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\tau \to +\infty} \varphi(\tau) = \lim_{\tau \to +\infty} \int_a^\tau f(x)\,dx. \tag{16.42}$$

Юқоридаги (16.41) ва (16.42) муносабатларга кўра

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\tau\to+\infty}\int_a^{\tau} f(x)\,dx = \lim_{\tau\to+\infty}\lim_{t\to+0}\int_t^{\tau} f(x)dx \qquad (16.43)$$

бўлади.

Агар (16.43) лимит мавжуд бўлиб, у чекли бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи дейилиб, $f(x)$ эса $(a, +\infty)$ оралиқда интегралланувчи деб аталади.

Агар (16.43) лимит мавжуд бўлиб, у чексиз бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи деб аталади.

16.10-эслатма. Агар (16.43) лимит мавжуд бўлмаса, бу ҳолда шартли равишда $f(x)$ функциянинг $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграли узоқлашувчи деб қабул қилинади.

Умуман, юқоридагидек, $f(x)$ функция $(a, +\infty)/\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ $(a < c_i < +\infty,\ i = 1, 2 \ldots, n)$ тўпламда берилган, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ эса шу функциянинг махсус нуқталари бўлган ҳолда ҳам $f(x)$ функциянинг $(a, +\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интегралини таърифлаш ва уни ўрганиш мумкин.

Биз ушбу бобнинг 1—8-параграфларида функциянинг чексиз оралиқ бўйича хосмас интегралининг ҳамда чегараланмаган функциянинг хосмас интегралининг яқинлашувчилиги шарти, яқинлашувчи интегралларнинг хоссалари, уларни ҳисоблаш билан шуғулланган эдик. Худди шунга ўхшаш масалаларни 9-§ да келтирилган интегралларга нисбатан айтиб, уларни ўрганиш мумкин.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\,dx \qquad (16.44)$$

хосмас интегрални қарайлик. $a < 1$ қийматларда, $x = 0$ нуқта интеграл остидаги функциянинг махсус нуқтаси бўлади (чунки, $x \to +0$ да интеграл остидаги функция чексизга интилади). Демак, бу ҳолда (16.44) интеграл ҳам чексиз оралиқ бўйича олинган хосмас интеграл, ҳам чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли экан. Бу интегрални икки қисмга:

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\,dx = \int_0^{1} x^{a-1} e^{-x}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\,dx$$

ажратиб, уларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида яқинлашувчиликка текширамиз.

Биринчи

$$\int_0^1 x^{a-1} e^{-x}\,dx$$

интегралда, интеграл остидаги функция учун

$$\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{x^{1-a}} \leqslant x^{a-1} e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^{1-a}}\,(0 < x \leqslant 1)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Ушбу

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-a}}\, dx$$

интеграл $1-a<1$, яъни $a>0$ да яқинлашувчи, $1-a\geqslant 1$, яъни $a\leqslant 0$ да узоқлашувчи (қаралсин, 5-§).

5-§ да келтирилган таққослаш ҳақидаги 16.8-теоремага кўра

$$\int_0^1 x^{a-1} e^x\, dx$$

интеграл $a>0$ да яқинлашувчи, $a\leqslant 0$ да эса узоқлашувчи.

Энди $\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$ интегрални яқинлашувчиликка текширамиз.

Равшанки,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a-1} e^{-x}}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a+1}}{e^x} = 0.$$

Ушбу $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ интеграл яқинлашувчи бўлганлигидан, 2-§ да келтирилган 16.3-натижага кўра $\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$ интеграл ҳам яқинлашувчидир. Шундай қилиб, $\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$ интеграл a нинг ихтиёрий қийматида яқинлашувчи. Натижада берилган $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$ интегралнинг $a>0$ да яқинлашувчи бўлишини топамиз.

2. Ушбу

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1}\, dx \tag{16.45}$$

интегрални қарайлик. Интеграл остидаги функция учун

1) $a<1$, $b\geqslant 1$ бўлганда $x=0$ махсус нуқта,

2) $a\geqslant 1$, $b<1$ бўлганда $x=1$ махсус нуқта,

3) $a<1$, $b<1$ бўлганда $x=0$ ва $x=1$ нуқталар махсус нуқталари бўлади, бинобарин (16.45) интеграл чегараланмаган функциянинг хосмас интегралидир.

Берилган интегрални яқинлашувчиликка текшириш учун уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} (1-x)^{b-1}\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1}\, dx.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир интегралда, интеграл остидаги функциянинг кўпи билан битта махсус нуқтаси бўлади.

Равшанки,

$$\lim_{x\to 0} (1-x)^{b-1} = 1, \quad \lim_{x\to 1} x^{a-1} = 1.$$

У ҳолда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{x^{a-1}}=1,\ \lim_{x\to 1}\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(1-x)^{b-1}}=1$$

бўлиб, хосмас интегралларда таққослаш ҳақидаги 16.9- теоремага кўра

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \text{ билан } \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}\,dx$$

ҳамда

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \text{ билан } \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

интеграллар бир вақтда ёки яқинлашади, ёки узоқлашади.

Маълумки, $a>0$ бўлганда

$$\int_0^{1/2} x^{a-1}\,dx$$

интеграл яқинлашувчи, $b>0$ бўлганда

$$\int_{1/2}^{1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

интеграл яқинлашувчи. Демак, $a>0$ бўлганда

$$\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади, $b>0$ бўлганда

$$\int_{1/2}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, қаралаётган

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

интеграл $a>0$ ва $b>0$ бўлганда, яъни

$$M=\{(a,b)\in R^2 : a\in(0,+\infty),\ b\in(0,\infty)\}$$

тўпламда яқинлашувчи бўлади.

17- БОБ

ПАРАМЕТРГА БОҒЛИҚ ИНТЕГРАЛЛАР

Мазкур курснинг 12- ва 13- бобларида кўп ўзгарувчили функциялар ва уларнинг дифференциал ҳисоби батафсил ўрганилди. Энди бундай функцияларнинг интеграл ҳисоби билан шуғулланамиз. Шуни айтиш керакки, кўп ўзгарувчили функцияларга нисбатан интеграл тушунчаси турлича бўлади.

Ушбу бобда кўп ўзгарувчили функциянинг битта ўзгарувчиси бўйича интеграли билан танишамиз ва уни ўрганамиз.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция бирор M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлсин. Бу функциянинг битта x_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) ўзгарувчисидан бошқа барча ўзгарувчиларини ўзгармас деб ҳисобласак, у ҳолда $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция битта x_k ўзгарувчига боғлиқ бўлган функцияга айланади. Унинг шу ўзгарувчи бўйича интеграли (агар у мавжуд бўлса), равшанки $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m$ ларга боғлиқ бўлади. Бундай интеграллар параметрга боғлиқ интеграллар тушунчасига олиб келади.

Соддалик учун икки ўзгарувчили $f(x, y)$ функциянинг битта ўзгарувчи бўйича интегралини ўрганамиз.

$f(x, y)$ функция R^2 фазодаги бирор

$$M = \{(x, y) \in R^2 : a \leqslant x \leqslant b, \ y \in E \subset R\}$$

тўпламда берилган бўлсин. y ўзгарувчининг E ($E \subset R$) тўпламдан олинган ҳар бир тайинланган қийматида $f(x, y)$ функция x ўзгарувчиси бўйича $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи, яъни

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интеграл y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган қийматига боғлиқ бўлади:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx. \qquad (17.1)$$

Одатда (17.1) интеграл *параметрга боғлиқ интеграл* деб аталади, y ўзгарувчи эса *параметр* дейилади.

Параметрга боғлиқ интегралларда, $f(x, y)$ функциянинг функционал хоссаларига (лимити, узлуксизлиги, дифференциалланувчилиги, интегралланувчилиги ви ҳоказо) кўра $\Phi(y)$ функциянинг тегишли функционал хоссалари ўрганилади. Бундай хоссаларни ўрганишда $f(x, y)$ функциянинг y ўзгарувчиси бўйича лимити ва унга интилиши характери муҳим роль ўйнайди.

1-§. Лимит функция. Текис яқинлашиш. Лимит функциянинг узлуксизлиги

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : a \leqslant x \leqslant b, \ y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган, y_0 эса E ($E \subset R$) тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

x ўзгарувчининг $[a, b]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ фақат y нинггина функциясига айланади. Агар $y \to y_0$ да бу функциянинг лимити мавжуд бўлса, равшанки, у лимит x ўзгарувчининг $[a, b]$ оралиқдан олинган қийматига боғлиқ бўлади:

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x, y_0) = \varphi(x).$$

17.1-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\forall x \in [a, b]$ учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ топилсаки, $|y - y_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бӯлса, у ҳолда $\varphi(x)$ функция $f(x, y)$ функциянинг $y - y_0$ даги *лимит функцияси* дейилади.

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2;\ x \in [a, b],\ y \in E\}$ тўпламда берилган бўлиб, ∞ эса E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

17.2-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\forall x \in [a, b]$ учун шундай $\Delta = \Delta(\varepsilon, x) > 0$ топилсаки, $|y| > \Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда $\varphi(x)$ функция $f(x, y)$ функциянинг $y \to \infty$ даги *лимит функцияси* дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x, y) = xy$$

функцияни $M = \{(x, y) \in R^2:\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ тўпламда қарайлик. $y_0 = 1$ бўлсин.

Агар $\forall\ \varepsilon > 0$ кўра, $\delta = \varepsilon$ деб олинса, унда $|y - y_0| = |y - 1| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall\ y \in [0, 1]$ ва $\forall \in [0, 1]$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = |xy - x| = |x| \cdot |y - 1| \leqslant |y - 1| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $y \to 1$ да $f(x, y) = xy$ функциянинг лимит функцияси

$$\varphi(x) = \lim_{y \to 1} f(x, y) = \lim_{y \to 1} xy = x$$

бўлади.

2. Қуйидаги

$$f(x, y) = x^y$$

функцияни $M = \{(x, y) \in R^2:\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ тўпламда қарайлик. $y_0 = 0$ бўлсин.

Агар $x = 0$ бўлса, у ҳолда $\forall\ y \in [0, 1]$ учун

$$f(0, y) = 0$$

бўлади.

Агар x ўзгарувчи тайинланган ва $x \neq 0$ бўлса, у ҳолда $y \to 0$ да

$$f(x, y) = x^y \to x^0 = 1$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall\ \varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta = \log_x (1 - \varepsilon)$ $(x > 0)$ деб олинадиган бўлса, унда $|y - y_0| = |y - 0| = |y| < \delta$ тангсизликни бажарадиган $\forall\ y \in [0, 1]$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = |x^y - 1| = 1 - x^y < 1 - x^{\log_x (1-\varepsilon)} = 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon$$

бўлади.

Демак, $y \to 0$ да берилган $f(x, y) = x^y$ функциянинг лимит функцияси

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in (0, 1] \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

га тенг бўлади.

Юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисида, лимит функция таърифидаги $\delta = \varepsilon$ бўлиб, у фақат ε гагина боғлиқ, иккинчисида эса $\delta = \log_x (1 - \varepsilon)$ бўлиб, у берилган $\varepsilon > 0$ билан бирга қаралаётган x нуқтага ҳам боғлиқ эканини кўрамиз.

Лимит функция таърифидаги $\delta > 0$ нинг қаралаётган x нуқталарга боғлиқ бўлмай фақат $\varepsilon > 0$ гагина боғлиқ қилиб танлаб олиниши мумкин бўлган ҳол муҳимдир.

17.3-таъриф. M тўпламда берилган $f(x, y)$ функциянинг $y \to y_0$ даги лимит функцияси $\varphi(x)$ бўлсин. $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилсаки, $|y - y_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ ва $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлса, $f(x, y)$ функция ўз лимит функцияси $\varphi(x)$ га $[a, b]$ да *текис яқинлашади* дейилади.

Акс ҳолда яқинлашиш *нотекис* дейилади. Нотекис яқинлашишнинг қатъий таърифини келтирайлик.

17.4-таъриф. M тўпламда берилган $f(x, y)$ функциянинг $y \to y_0$ даги лимит функцияси $\varphi(x)$ бўлсин. $\forall \delta > 0$ олинганда ҳам шундай $\varepsilon_0 > 0$, $x_0 \in [a, b]$ ва $|y_1 - y_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $y_1 \in E$ топилсаки, ушбу

$$|f(x_0, y_1) - \varphi(x_0)| \geqslant \varepsilon_0$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция $\varphi(x)$ га *нотекис яқинлашади* дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x, y) = x \sin y$$

функцияни $M = \{(x, y) \in R^2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 < y \leqslant \pi\}$ тўпламда қарайлик. $y_0 = \frac{\pi}{3}$ бўлсин. Равшанки, $y \to y_0 = \frac{\pi}{3}$ бўлганда $f(x, y) = x \cdot \sin y$ функциянинг лимити $\frac{\sqrt{3}}{2} x$ га тенг бўлади. Демак, $\varphi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} x$.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олайлик. Агар $\delta = \varepsilon$ десак, у ҳолда $\left| y - \frac{\pi}{3} \right| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирган $\forall y$ учун ва $\forall x \in [0, 1]$ учун

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = \left| x \sin y - \frac{\sqrt{3}}{2} x \right| = |x| \cdot \left| \sin y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |x| \left| \sin y - \sin \frac{\pi}{3} \right| \leqslant$$

$$< \left| y - \frac{\pi}{3} \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. 17.3-таърифга кўра, $y \to \frac{\pi}{3}$ да берилган $f(x, y) = x \cdot \sin y$ функция ўз лимит функцияси $\varphi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} x$ га текис яқинлашади.

3. Юқорида келтирилган

$$f(x, y) = x^y$$

функция $y \to 0$ да ўз лимит функцияси

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in (0, 1] \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

га нотекис яқинлашади.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall \delta > 0$ сонни олайлик. Агар $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$, y_1 сифатида $0 < y_1 < \delta$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий y_1 ни ва $x_0 = 2^{-1/y_1}$ деб олсак, у ҳолда

$$|f(x_0, y_1) - \varphi(x_0)| = 1 - x_0^{y_1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0 = \frac{1}{4}.$$

Бу эса, 17.4-таърифга кўра, $y \to 0$ да $f(x, y) = x^y$ функция ўз лимит функцияси $\varphi(x)$ га нотекис яқинлашишини билдиради.

Энди $f(x, y)$ функциянинг лимит функцияга эга бўлиши ва унга текис яқинлашиши ҳақидаги теоремани келтирамиз.

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ y \in E\}$ тўпламда берилган бўлиб, y_0 эса E $(E \subset R)$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

17.1-теорема. *$f(x, y)$ функция $y \to y_0$ да лимит функция $\varphi(x)$ га эга бўлиши ва унга текис яқинлашиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, x $(x \in [a, b])$ га боғлиқ бўлмаган шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилиб, $|y - y_0| < \delta$, $|y' - y_0| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи $\forall y$, $y' \in E$ ҳамда $\forall x \in [a, b]$ учун*

$$|f(x, y) - f(x, y')| < \varepsilon \qquad (17.2)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x, y)$ функция $y \to y_0$ да $\varphi(x)$ лимит функцияга эга бўлиб, унга $[a, b]$ да текис яқинлашсин. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $|y - y_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall y \in E$ ҳамда $\forall x \in [a, b]$ учун $|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Жумладан $|y' - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Натижада

$$|f(x, y) - f(x, y')| \leqslant |f(x, y) - \varphi(x)| + |f(x, y') - \varphi(x)| < \varepsilon$$

бўлиб, (17.2) шартнинг бажарилишини топамиз.

Етарлилиги. Теоремадаги (17.2) шарт бажарилсин. У ҳолда x-ўзгарувчининг $[a, b]$ оралиқда олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ функция y ўзгарувчининггина функцияси бўлиб, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $|y - y_0| < \delta$, $|y' - y_0| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи $\forall y$, $y' \in E$ учун

$$|f(x, y) - f(x, y')| < \varepsilon \qquad (17.2)$$

бўлади. Функция лимитининг мавжудлиги ҳақидаги Коши теоремасига асосан (қаралсин, 1-қисм, 4-боб, 6-§) $y \to y_0$ да $f(x, y)$ функция лимитга эга бўлади. Равшанки, бу лимит тайинланган x $(x \in [a, b])$ га боғлиқ. Демак,

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x).$$

Шу билан $y \to y_0$ да $f(x, y)$ функция $\varphi(x)$ лимит функцияга эга бўлиши кўрсатилди.

Энди y ўзгарувчини $|y-y_0|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматида тайинлаб, (17.2) тенгсизликда $y'\to y_0$ да лимитга ўтсак, у ҳолда

$$|f(x, y)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon$$

ҳосил бўлади. Бу эса $y\to y_0$ да $f(x, y)$ фунциянинг $\varphi(x)$ лимит функцияга $[a, b]$ да текис яқинлашишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Энди лимит функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремани келтирайлик. Бу теоремадан келгусида биз фойдаланамиз.

17.2-теорема. *Агар $f(x, y)$ функция y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир қийматида, x ўзгарувчининг функцияси сифатида, $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса ва $y\to y_0$ да $f(x, y)$ функция $\varphi(x)$ лимит функцияга $[a, b]$ да текис яқинлашса, у ҳолда $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлади.*

Исбот. y_0 га интиладиган $\{y_n\}$ кетма-кетликни олайлик ($y_n\in E$, $n=1, 2, \ldots$). Шартга кўра ҳар бир y_n ($n=1, 2, \ldots$) да $f(x, y_n)$ функция x ўзгарувчининг $[a, b]$ оралиқдаги узлуксиз функцияси бўлади. Демак, $\{f(x, y_n)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади $[a, b]$ оралиқда узлуксиз.

Теореманинг иккинчи шартига кўра $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топиладики, $\forall x\in[a, b]$ учун

$$|y-y_0|<\delta\Rightarrow|f(x, y)-\varphi(x)|<\varepsilon\quad(y\in E)\tag{17.3}$$

бўлади.

$y_n\to y_0$ дан юқорида олинган $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ га кўра шундай $n_0\in N$ топиладики, $\forall n>n_0$ учун $|y_n-y_0|<\delta$ бўлади. У ҳолда, (17.3) га асосан, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $n_0\in N$ топиладики, $\forall n>n_0$ ва $\forall x\in[a, b]$ учун

$$|f(x, y_n)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

бўлади. Бу эса $\{f(x, y_n)\}$ функционал кетма-кетлик $\varphi(x)$ га $[a, b]$ да текис яқинлашувчилигини билдиради. 14-боб, 3-§ да келтирилган 14.6-теоремага асосан $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиздир. Теорема исбот бўлди.

2-§. Параметрга боғлиқ интеграллар

$f(x, y)$ функция

$$M=\{(x, y)\in R^2:\ x\in[a, b],\ y\in E\subset R\}$$

тўпламда берилган бўлиб, y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ — x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Яъни y ни ўзгармас деб ҳисоблан ганда

$$\int_a^b f(x, y)\,dx$$

интеграл мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интегралнинг қиймати олинган y га (параметрга) боғлиқ бўлади:

$$\Phi(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx. \qquad (17.1)$$

Мисол. Ушбу $f(x, y)=\sin xy$ функциянинг x ўзгарувчиси бўйича $[a, b]$ даги интеграли (бу ерда $y \neq 0$)

$$\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b \sin xy\,dx=\frac{1}{y}\int_a^b \sin xy\,d(xy)=\frac{\cos ay-\cos by}{y}$$

бўлиб, $E=R\setminus\{0\}$ тўпламда берилган

$$\Phi(y)=\frac{1}{y}(\cos ay-\cos by)$$

функциядан иборатдир.

Ушбу параграфда параметрга боғлиқ (17.1) интегралнинг ($\Phi(y)$ — функциянинг) функционал хоссаларини ўрганамиз.

1. Интеграл белгиси остида лимитга ўтиш. $f(x, y)$ функция $M=\{(x, y)\in R^2\colon x\in[a, b],\ y\in E\subset R\}$ тўпламда берилган бўлиб, y_0 нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

13.3-теорема. *$f(x, y)$ функция y нинг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида x нинг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция $y\to y_0$ да $\varphi(x)$ лимит функцияга эга бўлса ва унга текис яқинлашса, у ҳолда*

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (17.4)$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x, y)$ функция $y\to y_0$ да $\varphi(x)$ лимит функцияга эга ва унга текис яқинлашади. Демак, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топиладики, $|y-y_0|<\delta$ ни қаноатлантирувчи $\forall y\in E$ ва $\forall x\in[a, b]$ учун

$$|f(x, y)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади.

Иккинчи томондан, 17.2-теоремага асосан, $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлади. Демак, бу функциянинг интеграли $\int_a^b \varphi(x)dx$ мавжуд.

Натижада

$$\left|\int_a^b f(x, y)\,dx-\int_a^b \varphi(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x, y)-\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx=\varepsilon$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

(17.4) муносабатни қуйидагича

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b [\lim_{y\to y_0} f(x, y)]\,dx$$

ҳам ёзиш мумкин. Бу эса интеграл белгиси остида лимитга ўтиш мумкинлигини кўрсатади.

Мисол. Биз $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ тўпламда берилган

$$f(x, y) = x \sin y$$

функциянинг $y \to 0$ да $\varphi(x) = 0$ лимит функцияга текис яқинлашишини кўрган эдик: $\lim\limits_{y\to 0} x \sin y = 0$.

Берилган функция y ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг $[0, 1]$ оралиқдаги узлуксиз функцияси эканлиги равшан. Демак, 17.3-теоремага кўра

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 f(x, y)\,dx = \lim_{y\to 0} \int_0^1 x \sin y\,dx = \int_0^1 [\lim x \sin y]\,dx = 0$$

бўлади.

2. **Интегралнинг параметр бўйича узлуксизлиги.**

17.4-теорема. *Агар $f(x, y)$ функция*

$$M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

Исбот. Ихтиёрий $y_0 \in [c, d]$ нуқтани олайлик. Шартга кўра $f(x, y)$ функция M тўпламда (тўғри тўртбурчакда) узлуксиз. Кантор теоремасига кўра бу функция M тўпламда текис узлуксиз бўлади. Унда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики,

$$\rho((x, y), (x, y_0)) = |y - y_0| < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall (x, y) \in M$, $\forall (x, y_0) \in M$ учун

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $f(x, y)$ функциянинг $y \to y_0$ да $f(x, y_0)$ лимит функцияга текис яқинлашишини билдиради. У ҳолда 17.3-теоремага асосан

$$\lim_{y\to y_0} \Phi(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b [\lim_{y\to y_0} f(x, y)]\,dx = \int_a^b f(x, y_0)\,dx = \Phi(y_0)$$

$$(\forall y_0 \in [c, d])$$

бўлади. Демак, $\Phi(y)$ функция y_0 нуқтада узлуксиз. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ тўпламда қаралаётган бўлсин. Равшанки, $f(x, y)$ функция M да узлуксиздир. Юқоридаги теоремага кўра $\Phi(y)$ функция ҳам $[0, 1]$ да узлуксиз бўлади. Берилган интегрални ҳисоблаб топамиз:

$$\Phi(y)=\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+y^2+1}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{2+y^2}{1+y^2}.$$

3. Интегрални параметр бўйича дифференциаллаш. Энди параметрга боғлиқ интегрални параметр бўйича дифференциаллашни қараймиз.

17.5-теорема. *$f(x, y)$ функция*

$$M=\{(x, y)\in R^2: x\in[a, b],\ y\in[c, d]\}$$

тўпламда берилган ва y ўзгарувчининг $[c, d]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция M тўпламда $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилага эга бўлиб, у узлуксиз бўлса, у ҳолда $\Phi(y)$ функция ҳам $[c, d]$ оралиқда $\Phi'(y)$ ҳосилага эга ва ушбу

$$\Phi'(y)=\int_a^b f'_y(x, y)\,dx \tag{17.5}$$

муносабат ўринлидир.

Исбот. Шартга кўра $f(x, y)$ функция x ўзгарувчиси бўйича $[a, b]$ оралиқда узлуксиз. Бинобарин

$$\Phi(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$$

интеграл мавжуд.

Энди $\forall\, y_0\in[c, d]$ нуқтани олиб, унга шундай Δy $(\Delta y \gtrless 0)$ орттирма берайликки, $y_0+\Delta y\in[c, d]$ бўлсин. $\Phi(y)$ функциянинг y_0 нуқтадаги орттирмасини топиб, ушбу

$$\frac{\Phi(y_0+\Delta y)-\Phi(y_0)}{\Delta y}=\int_a^b \frac{f(x, y_0+\Delta y)-f(x, y_0)}{\Delta y}\,dx$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Лагранж теоремаси (1-қисм, 6-боб, 6-§) га кўра (уни қўллай олишимиз теорема шартлари билан таъминланган)

$$\frac{f(x, y_0+\Delta y)-f(x, y_0)}{\Delta y}=f'_y(x, y_0+\theta\Delta y)$$

бўлади, бунда $0<\theta<1$.

Натижада

$$\frac{\Phi(y_0+\Delta y)-\Phi(y_0)}{\Delta y}=\int_a^b f'_y(x, y_0+\theta\cdot\Delta y)\,dx=\int_a^b f'_y(x, y_0)\,dx+$$

$$+\int_a^b [f'_y(x, y_0+\theta\cdot\Delta y)-f'_y(x, y_0)]\,dx$$

бўлиб, ундан эса

$$\left|\frac{\Phi(y_0+\Delta y)-\Phi(y_0)}{\Delta y}-\int_a^b f_y'(x, y_0)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f_y'(x, y_0+\theta\cdot\Delta y)-f_y'(x, y_0)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \omega(f_y', \Delta y)\,dx = \omega(f_y', \Delta y)\cdot(b-a) \qquad (17.6)$$

бўлишини топамиз, бунда $\omega(f_y', \Delta y)$ — $f_y'(x, y)$ функциянинг узлуксизлик модули.

Модомики, $f_y'(x, y)$ функция M тўпламдә узлуксиз экан, унда Кантор теоремасига кўра бу функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади. У ҳолда мазкур курснинг 12-боб, 4-§ ида келтирилган теоремага асосан

$$\lim_{\Delta y\to 0}\omega(f_y', \Delta y)=0$$

бўлади.

(17.6) муносабатдан

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Phi(y_0+\Delta y)-\Phi(y_0)}{\Delta y}=\int_a^b f_y'(x, y_0)\,dx$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\Phi'(y_0)=\int_a^b f_y'(x, y_0)\,dx.$$

Қаралаётган y_0 нуқта $[c, d]$ оралиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлганлигини эътиборга олсак, унда кейинги тенглик теореманинг исботланганлигини кўрсатади.

(17.5) муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b \frac{d}{dy}f(x, y)\,dx.$$

Бу эса дифференциаллаш амалини интеграл белгиси остига ўтказиш мумкинлигини кўрсатади.

Исбот этилган бу 17.5-теорема Лейбниц қоидаси деб аталади.

Мисол. Ушбу

$$f(x, y)=\ln(y^2\sin^2 x)$$

функция $M=\left\{(x, y)\in R^2: x\in\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], 0<y_0\leqslant y\leqslant y_1<\infty\right\}$ тўпламда узлуксиз ҳамда $f_y'(x, y)=\frac{2}{y}$ ҳосилага эга ва у ҳам узлуксиз. Ундан олинган $\Phi(y)=$

$= \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \ln (y^2 \cdot \sin^2 x)\, dx$ интегрални қарайлик. 17.5-теоремага кўра $\Phi(y)$ функция ҳосилага эга бўлиб,

$$\Phi'(y) = \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} (\ln (y^2 \sin^2 x))'_y\, dx = \frac{2}{y} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{y}$$

бўлади.

4. Интегрални параметр бўйича интеграллаш. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b],\ y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган ва шу тўпламда узлуксиз бўлсин. У ҳолда 17.4-теоремага кўра

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx \tag{17.1}$$

функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади. Бинобарин, бу функциянинг $[c, d]$ оралиқ бўйича интеграли мавжуд.

Демак, $f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда параметрга боғлиқ интегрални параметр бўйича $[c, d]$ оралиқда интеграллаш мумкин:

$$\int\limits_c^d \Phi(y)\, dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y)\, dx\right] dy.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида $f(x, y)$ функцияни аввал x ўзгарувчи бўйича $[a, b]$ оралиқда интеграллаб (бунда y ни ўзгармас ҳисоблаб), сўнг натижани $[c, d]$ оралиқда интегралланади.

Баъзан $f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз бўлган ҳолда бу функцияни аввал y ўзгарувчиси бўйича $[c, d]$ оралиқда интеграллаб (бунда x ни ўзгармас ҳисоблаб), сўнг ҳосил бўлган x ўзгарувчининг функциясини $[a, b]$ оралиқда интеграллаш қулай бўлади. Натижада ушбу

$$\int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y)\, dx\right] dy, \quad \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, y)\, dy\right] dx$$

интеграллар ҳосил бўлади. Бу интеграллар бир-бирига тенг бўладими деган савол туғилади. Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

17.6-теорема. *Агар $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b],$ $y \in [c, d]\}$ тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда*

$$\int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y)\, dx\right] dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, y)\, dy\right] dx$$

бўлади.

Исбот. $\forall t \in [c, d]$ нуқтани олиб, қуйидаги

$$\varphi(t) = \int\limits_c^t \left[\int\limits_a^b f(x,y)\, dx\right] dy, \quad \psi(t) = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^t f(x, y)\, dy\right] dx$$

интегралларни қарайлик. Бу $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз.

$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ функция $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлгани сабабли 1-қисм; 9-боб, 9-§ да келтирилган 9.9-теоремага асосан

$$\varphi'(t) = \left(\int\limits_c^t \Phi(y)\, dy\right)' = \Phi(t) = \int\limits_a^b f(x, t)\, dx \qquad (17.7)$$

бўлади.

$f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз. Яна ўша 1-қисм, 9-боб, 9-§ даги теоремага кўра

$$\left(\int\limits_c^t f(x, y)\, dy\right)'_t = f(x, t) \quad (x \text{ — ўзгармас})$$

бўлади. Демак, $\int\limits_c^t f(x, y)\, dy$ функциянинг $M = \{(x, t) \in R^2:\ x \in [a, b],\ t \in [c, d]\}$ тўпламдаги t бўйича хусусий ҳосиласи $f(x, t)$ га тенг ва демак, узлуксиз. У ҳолда 17.5-теоремага мувофиқ

$$\psi'(t) = \left(\int\limits_a^b \left[\int\limits_c^t f(x, y)\, dy\right] dx\right)'_t = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^t f(x, y)\, dy\right]'_t dx = \int\limits_a^b f(x, t)\, dx \qquad (17.8)$$

бўлади.

(17.7) ва (17.8) муносабатлардан

$$\varphi'(t) = \psi'(t) = \int\limits_a^b f(x, t)\, dx$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\varphi(t) = \psi(t) + C \quad (C \text{ — const}).$$

Бироқ $t = c$ бўлганда $\varphi(c) = \psi(c) = 0$ бўлиб, ундан $C = 0$ бўлишини топамиз. Демак, $\varphi(t) = \psi(t)$ бўлади. Хусусан, $t = d$ бўлганда $\varphi(d) = \psi(d)$ бўлиб, у теоремани исботлайди.

Мисол. Параметрга боғлиқ интегрални параметр бўйича интеграллашдан фойдаланиб, ушбу

$$A = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx \quad (0 < a < b)$$

интегрални ҳисоблаймиз.

Равшанки, $(x > 0)$

$$\int\limits_a^b x^y\, dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

бўлади. Демак

$$A = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y\, dy.$$

Интеграл остидаги $f(x, y) = x^y$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [0, 1], y \in [a, b]\}$ тўпламда узлуксиздир. У ҳолда 17.6-теоремага кўра

$$A = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx$$

бўлади. Аммо

$$\int_0^1 x^y dx = \frac{1}{y+1}$$

бўлганлигидан $A = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln\frac{b+1}{a+1}$ бўлади. Демак. $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln\frac{b+1}{a+1}$.

3-§. Параметрга боғлиқ интеграллар (умумий ҳол)

$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг $[c, d]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ функция x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин.

$x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ функцияларнинг ҳар бири $[c, d]$ да берилган ва $\forall y \in [c, d]$ учун

$$a \leqslant \alpha(y) \leqslant \beta(y) \leqslant b \tag{17.9}$$

бўлсин.

Равшанки, ушбу

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx$$

интеграл мавжуд, y ўзгарувчи (параметр) га боғлиқдир:

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx. \tag{17.10}$$

Бу интеграл ушбу бобнинг 2-§ ида ўрганилган интегралга қараганда умумийроқ. Ҳақиқатан ҳам, (17.9) да $\alpha(y) = a$, $\beta(y) = b$, $(y \in [c, d])$ бўлганда (17.10) интеграл (17.1) кўринишдаги интегралга айланади.

Ушбу параграфда $f(x, y)$ ҳамда $\alpha(y)$, $\beta(y)$ функцияларнинг функционал хоссаларига кўра параметрга боғлиқ

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx$$

интегралнинг хоссаларини ўрганамиз.

17.7-теорема. *$f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ тўпламда узлуксиз, $\alpha(y)$ ва $\beta(y)$ функциялрнинг ҳар бири $[c, d]$ да узлуксиз ва улар (17.9) шартни қаноатлантирсин. У ҳолда*

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx$$

функция ҳам $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлади.

Исбот. $\forall y_0 \in [c, d]$ нуктани олиб, унга шундай $\Delta y (\Delta y \gtrless 0)$ орттирма берайликки, $y_0 + \Delta y \in [c, d]$ бўлсин. У холда

$$F(y_0+\Delta y) - F(y_0) = \int_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\,dx =$$

$$= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} [f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0)]\,dx +$$

$$+ \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx \qquad (17.11)$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги кўшилувчиларни бахолаймиз.

$f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз, демак, Кантор теоремасига асосан, текис узлуксиз бўлади. У холда $\Delta y \to 0$ да $f(x, y_0+\Delta y)$ функция ўз лимит функцияси $f(x, y_0)$ га текис якинлашади (каралсин, 250- бет) ва 17.3- теоремага кўра

$$\lim_{\Delta y \to 0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y)} [f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0)]\,dx =$$

$$= \int_{\alpha(y)}^{\beta(y_0)} \lim_{\Delta y \to 0} [f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0)]\,dx = 0 \qquad (17.12)$$

бўлади.

(17.11) муносабатдаги

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx, \quad \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx$$

интеграллар учун куйидаги бахога эгамиз:

$$\left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx \right| \leqslant M\,|\beta(y_0+\Delta y) - \beta(y_0)|,$$

$$\left| \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx \right| \leqslant M\alpha\,|(y_0+\Delta y) - \alpha(y_0)|, \qquad (17.13)$$

бунда $M = \sup(|f(x, y)|\ ((x, y) \in M)$.

Шартга кўра $\alpha(y)$, $\beta(y)$ функцияларнинг хар бири $[c, d]$ да узлуксиз. Демак,

$$\lim_{\Delta y \to 0} [\alpha(y_0+\Delta y) - \alpha(y_0)] = 0,$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} [\beta(y_0+\Delta y) - \beta(y_0)] = 0. \qquad (17.14)$$

Юкоридаги (17.12), (17.13) ва (17.14) муносабатларни эътиборга олиб, (17.11) тенгликда $\Delta y \to 0$ да лимитга ўтсак, унда

$$\lim_{\Delta y \to 0} [F(y_0+\Delta y) - F(y_0)] = 0$$

бўлиши келиб чикади. Демак, $F(y)$ функция $\forall y_0 \in [c, d]$ да узлуксиз. Теорема исбот бўлди.

17.8-теорема. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b],\ y \in [c, d]\}$ *тўпламда узлуксиз, $f'_y(x, y)$ хусусий хосилага эга ва у узлуксиз, $\alpha(y)$ $\beta(y)$ функциялар эса $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$ хосилаларга эга ҳамда улар* (17.9) *шартни қаноатлантирсин. У ҳолда*

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

функция $[c, d]$ оралиқда $F'(y)$ ҳосилага эга ва

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y)dx + \beta'(y)\cdot f(\beta(y), y) - \alpha'(y)\cdot f(\alpha(y), y)$$

бўлади.

Исбот. $\forall y_0 \in [c, d]$ нуқтани олиб, унга шундай $\Delta y\ (\Delta y \gtrless 0)$ орттирма берайликки, $y_0 + \Delta y \in [c, d]$ бўлсин.

(17.11) муносабатдан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y} = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx + \frac{1}{\Delta y} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 +$$

$$+ \Delta y)\, dx - \frac{1}{\Delta y} \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y)\, dx. \tag{17.15}$$

$\Delta y \to 0$ да
$$\frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y}$$

функция ўз лимит функцияси $f'_y(x, y_0)$ га $[a, b]$ оралиқда текис яқинлашади (қаралсин, 250-бет). Унда

$$\lim_{\Delta y \to 0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0)\, dx \tag{17.16}$$

бўлади.

Энди

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y)\, dx, \quad \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y)\, dx$$

интегралларга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 8-§), ушбу

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y)\, dx = f(x', y_0 + \Delta y)\,[\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)],$$

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y)\, dx = f(x'', y_0 + \Delta y)\,[\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)]$$

тенгликларни ҳосил қиламиз, бунда x' нуқта $\beta(y_0)$, $\beta(y_0 + \Delta y)$ нуқталар орасида, x'' эса $\alpha(y_0)$, $\alpha(y_0 + \Delta y)$ нуқталар орасида жойлашган.

$f(x, y)$ функциянинг M тўпламда узлуксизлигини, $\alpha(y)$ ва $\beta(y)$

функцияларнинг эса $[c, d]$ оралиқда ҳосилага эга бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx = \lim_{\Delta\to 0}[f(x', y_0+\Delta y)\times$$

$$\times\frac{\beta(y_0+\Delta y)-\beta(y_0)}{\Delta y}\Big] = \lim_{\Delta y\to 0} f(x', y_0+\Delta y)\cdot\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\beta(y_0+\Delta y)-\beta(y_0)}{\Delta y} =$$

$$= f(\beta(y_0), y_0)\cdot\beta'(y_0),$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x, y_0+\Delta y)\,dx = \lim_{\Delta y\to 0}\Big[f(x'', y_0+\Delta y)\times$$

$$\times\frac{\alpha(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0)}{\Delta y}\Big] = \lim_{\Delta y\to 0} f(x'', y_0+\Delta y)\cdot\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\alpha(y_0+\Delta y)-\alpha(y_0)}{\Delta y} =$$

$$= f(\alpha(y_0), y_0)\,\alpha'(y_0) \qquad (17.17)$$

эканлиги келиб чиқади.

Юқоридаги (17.15) муносабатда, $\Delta y\to 0$ да лимитга ўтиб, (17.16) ва (17.17) тенгликларни эътиборга олиб ушбуни топамиз:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(y_0+\Delta y)-F(y_0)}{\Delta y} = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0)dx + f(\beta(y_0)\cdot\beta'(y_0) -$$

$$- f(a(y_0), y_0)\cdot\alpha'(y_0).$$

Демак,

$$F'(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0)\,dx + f(\beta(y_0), y_0)\cdot\beta'(y_0) - f(\alpha(y_0), y_0)\cdot\alpha'(y_0).$$

Модомики, y_0 нуқта $[c, d]$ оралиқдаги ихтиёрий нуқта экан, у ҳолда $\forall\, y\in[c, d]$ учун

$$F'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y)\,dx + f(\beta(y), y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y), y)\cdot\alpha'(y)$$

бўлиши равшандир. Бу эса теоремани исботлайди.

Хусусан, $\alpha(y)\equiv a$, $\beta(y)\equiv b$ бўлса, бу формуладан 2-§ да келтирилган (17.5) формула келиб чиқади.

17.9-теорема. $f(x, y)$ функция $M=\{(x, y)\in R^2 : x\in[a, b]\ y\in[c, d]\}$ тўпламда узлуксиз, $\alpha(y)$ ва $\beta(y)$ функцияларнинг ҳар бири $[c, d]$ да узлуксиз ва улар (17.9) шартни қаноатлантирсин. У ҳолда $F(y)$ функция $[c, d]$ да интегралланувчи бўлади.

Бу теоремани исботлашни ўқувчига ҳавола қиламиз.

4-§. Параметрга боғлиқ хосмас интеграллар. Интегралнинг текис яқинлашиши

Биз мазкур курснинг 16-бобида хосмас интеграл (чегараси чексиз хосмас интеграл, чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли) тушунчаси билан танишиб, уни ўргандик. Ушбу бобнинг 2-§ ва 3-§ ларида параметрга боғлиқ интеграллар баён этилди.

Энди умумий ҳол — параметрга боғлиқ хосмас интеграллар билан шуғулланамиз.

1. Параметрга боғлиқ хосмас интеграл тушунчаси.

1°. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in]a, +\infty), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган. Сўнг y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ оралиқ бўйича интегралланувчи, яъни

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \quad (y \in E \subset R)$$

хосмас интеграл мавжуд ва чекли бўлсин. Бу интеграл y нинг қийматига боғлиқдир:

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx. \tag{17.18}$$

(17.18) интеграл *параметрга боғлиқ чегараси чексиз хосмас интеграл* деб аталади.

$f(x, y)$ функция $M' = \{(x, y) \in R^2 : x \in (-\infty, a]\ \ y \in E \subset R\}$ $(M'' = \{(x, y) \in R^2 : x \in (-\infty, +\infty), y \in E \subset R\})$ тўпламда берилган ва y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$—x нинг функцияси сифатида $(-\infty, a]$ $((-\infty, +\infty))$ да интегралланувчи бўлсин. Бунда

$$\int_{-\infty}^{a} f(x, y)\,dx \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx \right)$$

интеграл ҳам параметрга боғлиқ, чегараси чексиз хосмас интеграл деб аталади.

2°. $f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b), y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган. Сўнг y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = b$ махсус нуқта бўлсин ва бу функция $[a, b)$ оралиқда интегралланувчи яъни,

$$\int_a^b f(x, y)\,dx \quad (y \in E \subset R)$$

хосмас интеграл мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интеграл y нинг қийматига боғлиқ:

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{17.19}$$

(17.19) интеграл *параметрга боғлиқ, чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли* деб аталади.

$f(x, y)$ функция M_1' $\{x, y) \in R^2 : x \in (a, b], y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган ва y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x,y)$—x нинг функцияси сифатида қаралганда, унинг учун $x = a$ махсус нуқта бўлсин. Бу функция $(a, b]$ да интегралланувчи бўлсин. У ҳолда

$$I_2(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

интеграл ҳам *параметрга боғлиқ чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли* деб аталади.

3° Умумий ҳолда, параметрга боғлиқ чегараланмаган функциянинг чегараси чексиз хосмас интеграли тушунчаси ҳам юқоридагидек киритилади.

$f(x, y)$ функция $M_2 = \{(x, y) \in R^2 : x \in (c, +\infty),\ y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = c$ махсус нуқта бўлсин ва бу функция $(c, +\infty)$ оралиқда интегралланувчи (қаралсин: 16- боб, 9- §), яъни

$$\int_c^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

чегараланмаган функциянинг чегараси чексиз хосмас интеграли мавжуд бўлсин. Бу интеграл y нинг қийматига боғлиқдир:

$$I_3(y) = \int_c^{+\infty} f(x, y)\, dx \tag{17.20}$$

(17.20) интеграл *параметрга боғлиқ чегараланмаган функциянинг чегараси чексиз хосмас интеграли* деб аталади.

Биз юқорида келтирилган (17.18), (17.19), (17.20) интегралларни параметрга боғлиқ хосмас интеграллар деб кетаверамиз.

Масалан, 16-бобнинг 1- § ида қаралган

$$I(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{dy}{x^\alpha} \quad (a > 0,\ \alpha > 0)$$

интеграл, шу бобнинг 5- § да қаралган

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

интеграллар, 16-бобнинг 9- § да қаралган

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-y}\, dx$$

интеграллар параметрга боғлиқ хосмас интеграллардир.

Бу ерда ҳам асосий масалалардан бири — $f(x, y)$ функциянинг функционал хоссаларига кўра, (17.18), (17.19) ва (17.20) параметрга боғлиқ хосмас интегралларнинг функционал хоссаларини ўрганишдир.

Биз қуйида уларнинг турли хоссаларини, асосан,

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx \tag{17.18}$$

интеграл учун келтирамиз. Бу хоссаларни

$$\int_a^b f(x, y)\, dx, \quad \int_c^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

каби хосмас интеграллар учун ҳам тегишлича баён этиш мумкин.

Параметрга боғлиқ хосмас интегралларни ўрганишда интегралнинг текис яқинлашиши тушунчаси муҳим роль ўйнайди.

2. Интегралнинг текис яқинлашиши. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty),\ y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да интегралланувчи бўлсин.

Чегараси чексиз хосмас интеграл таърифига кўра ихтиёрий $[a, t]$ да $(a < t < +\infty)$

$$F(t, y) = \int_a^t f(x, y)\,dx \tag{17.21}$$

интеграл мавжуд ва

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \lim_{t \to +\infty} F(t, y). \tag{17.22}$$

Шундай қилиб, (17.21) ва (17.22) интеграллар билан аниқланган $F(t, y)$ ва $I(y)$ функцияларга эга бўламиз ва $I(y)$ функция $F(t, y)$ функциянинг $t \to +\infty$ даги лимит функцияси бўлади.

17.5-таъриф. Агар $t \to +\infty$ да $F(t, y)$ функция ўз лимиг функцияси $I(y)$ га E тўпламда текис яқинлашса, у ҳолда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

интеграл E тўпламда *текис яқинлашувчи* деб аталади.

17.6-таъриф. Агар $t \to +\infty$ да $F(t, y)$ функция ўз лимит функцияси $I(y)$ га E да нотекис яқинлашса, у ҳолда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

интеграл E тўпламда *нотекис яқинлашувчи* деб аталади.

Равшанки, $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлса, у шу тўпламда яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб,

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

интегралнинг E тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши қуйидагини англатади:

1) $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ хосмас интеграл y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида яқинлашувчи,

2) $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $\forall t > \delta$ ва $\forall y \in E$ учун

$$\left| \int_t^{+\infty} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon$$

бўлади.

$\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ интеграл E тўпламда яқинлашувчи, аммо у шу тўпламда нотекис яқинлашувчи дегани қуйидагини англатади:

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ хосмас интеграл y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида яқинлашувчи.

2) $\forall\delta > 0$ олинганда ҳам, шундай $\varepsilon_0 > 0$, $y_0 \in E$ ва $t_1 > \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $t_1 \in [a, +\infty)$ топиладики,

$$\left| \int\limits_{t_1}^{+\infty} f(x, y_0)\,dx \right| \geqslant \varepsilon_0$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx \quad (y \in E = (0, +\infty))$$

интегрални қарайлик. Бу ҳолда

$$F(t, y) = \int\limits_0^{t} ye^{-xy}\,dx = 1 - e^{-ty} \quad (0 \leqslant t < +\infty)$$

бўлиб, y ўзгарувчининг $E = (0, +\infty)$ тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида

$$\lim_{t\to\infty} F(t, y) = \lim_{t\to+\infty} (1 - e^{-ty}) = 1$$

бўлади. Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = 1$$

бўлади.

Энди берилган интегрални текис яқинлашувчиликка текширамиз.

$y \in E = (0, +\infty)$ бўлсин Ихтиёрий катта мусбат δ сонни олайлик. Агар $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$, $t_0 > \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ихтиёрий t_0 ва $y_0 = \frac{1}{t_0}$ деб олсак, у ҳолда

$$\left| \int\limits_{t_0}^{+\infty} y_0 e^{-xy_0}\,dx \right| = e^{-t_0 y_0} = e^{-1} > \frac{1}{3} = \varepsilon_0$$

бўлади. Бу эса

$$I(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$$

интеграл $E = (0, +\infty)$ да нотекис яқинлашувчи эканини билдиради.

Энди $y \in E' = [c, +\infty) \subset E$ бўлсин, бунда c — ихтиёрий мусбат сон. Унда $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $(0 < \varepsilon < 1)$ $\delta = \frac{1}{c} \ln \frac{1}{\varepsilon}$ дейилса, $\forall t > \delta$ ва $\forall\ y \in [c, +\infty)$ учун

$$\left| \int\limits_t^{+\infty} ye^{-xy}\,dx \right| = e^{-ty} < e^{-c\frac{1}{c}\ln\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$I(y)=\int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$$

интеграл $E'=[c,\ +\infty)$ да $(c>0)$ текис яқинлашувчи.

Биз кўрдикки, параметрга боғлиқ хосмас интеграл

$$I(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,\ y)\,dx \tag{17.18}$$

нинг E тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши, $t\to+\infty$ да $F(t,\ y)$ функцияни лимит функция $I(y)$ га $(y\in E)$ текис яқинлашишидан иборат.

Ушбу бобнинг 1-§ ида $y\to y_0$ да $f(x,\ y)$ функциянинг лимит функция $\varphi(x)$ га текис яқинлашишининг зарурий ва етарли шартини ифодаловчи 17.1-теоремани келтирдик. Бу теоремадан фойдаланиб, (17.18) интегралнинг текис яқинлашувчи бўлишининг зарурий ва етарли шарти келтирилади.

$f(x,\ y)$ функция $M=\{(x,\ y)\in R^2 : x\in[a,\ +\infty)\ y\in E\subset R\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x,\ y)$ — x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a,\ +\infty)$ да интегралланувчи, яъни

$$I(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,\ y)\,dx \tag{17.18}$$

хосмас интеграл мавжуд бўлсин.

17.7-таъриф. Агар $\forall\ \varepsilon>0$ олинганда ҳам, y га боғлиқ бўлмаган шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топилсаки, $t'>\delta,\ t''>\delta$ ни қаноатлантирувчи $\forall t',\ t''$ ва $\forall\ y\in E$ учун

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} f(x,\ y)\,dx\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда (17.18) хосмас интеграл E тўпламда *фундаментал интеграл* деб аталади.

17.10-теорема (Коши теоремаси). Ушбу $I(y)=\int\limits_a^{\infty} f(x,\ y)\,dx$ *интегралнинг E тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши учун унинг E тўпламда фундаментал бўлиши зарур ва етарли.*

Бу теорема назарий аҳамиятга эга. Ундан амалиётда фойдаланиш қийин.

Қуйида биз интегралнинг текис яқинлашувчилигини таъминлайдиган, кўпинча қўлланиладиган аломатларни келтирамиз.

Вейерштрасс аломати. $f(x,\ y)$ функция $M=\{(x,\ y)\in R^2 : x\in[a,\ +\infty),\ y\in E\subset R\}$ тўпламда берилган, y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x,\ y)$ функция x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a,\ +\infty)$ да интегралланувчи бўлсин. Агар шундай $\varphi(x)$ функция $(x\in[a,\ +\infty))$ топилсаки,

1) $\forall x\in[a,\ +\infty)$ ва $\forall\ y\in E$ учун $|f(x,\ y)|\leqslant\varphi(x)$ бўлса,

2) $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Шартга кўра $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ яқинлашувчи. Унда 16-бобнинг 2-§ ида келтирилган 16.4-теоремага асосан, $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топиладики, $\forall\, t'>\delta$, $\forall\, t''>\delta$ бўлганда $\left|\int\limits_{t'}^{t''} \varphi(x)dx\right| < \varepsilon$ бўлади. Иккинчи томондан, 1) шартдан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} f(x, y)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{t'}^{t''} |f(x, y)|\,dx \leqslant \int\limits_{t'}^{t''} \varphi(x)\,dx \quad (t' < t'').$$

Демак,

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Бу эса $\int\limits_a^{\infty} f(x, y)\,dx$ хосмас интегралнинг E тўпламда фундаментал эканини билдиради. Юқоридаги 17.10-теоремага асосан $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}(dx) \quad (y \in E = (-\infty, \infty))$$

интегрални қарайлик.

Агар $\varphi(x)$ функция сифатида $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ олинса, у ҳолда

1) $\forall\, x \in [0, +\infty)$ ва $\forall\, y \in (-\infty, +\infty)$ учун

$$|f(x, y)| = \left|\frac{\cos xy}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x).$$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ интеграл яқинлашувчи (қаралсин, 16-боб, 1-§) бўлади. Демак, Вейерштрасс аломатига кўра берилган интеграл $E = (-\infty, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

Интегралнинг текис яқинлашувчилигини аниқлашда қўл келадиган аломатлардан — Абель ва Дирихле аломатларини исботсиз келтирамиз.

Абель аломати. $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар $M = \{(x, y) \in R^2: x \in [a, +\infty),\ y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг E тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматида $g(x, y)$ функция x нинг функцияси сифатида $[a, +\infty)$ да монотон функция бўлсин.

Агар

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи ва $\forall (x, y) \in M$ учун

$$|g(x, y)| \leqslant c \quad (c = \text{const})$$

бўлса,

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \cdot g(x, y)\, dx$$

интеграл E да текис яқинлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\, dx \; (y \in E = [0, +\infty))$$

интегрални қарайлик. Агар

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{x}, \; g(x, y) = e^{-xy}$$

деб олинса, Абель аломати шартлари бажарилади. Ҳақиқатан ҳам, $\int_0^{+\infty} f(x, y)\, dx$ текис яқинлашувчи:

$$\int_0^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

(16-боб, 2-§ ва 17-боб, 8-§), $g(x, y) = e^{-xy}$ эса y нинг $E = [0, +\infty)$ дан олинган ҳар бир тайин қийматида x нинг камаювчи функцияси ва $\forall\, x \in [0, +\infty)$, $\forall\, y \in E = [0, +\infty)$ учун $|g(x, y)| = e^{-xy} \leqslant 1$ бўлади. Демак, берилган интеграл Абель аломатига кўра $E = [0, +\infty)$ да текис яқинлашувчи.

Дирихле аломати. $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар M тўпламда берилган. Агар $\forall\, t \geqslant a$ ҳамда $\forall\, y \in E$ учун

$$\left| \int_a^t f(x, y)\, dx \right| \leqslant c \quad (c = \text{const})$$

бўлса ва y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида, $x \to +\infty$ да $g(x, y)$ функция ўз лимит функцияси $\varphi(y) = 0$ га текис яқинлашса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \quad g(x, y)\, dx$$

интеграл E да текис яқинлашувчи бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx \quad (y \in E = [1, 2])$$

интегралини қарайлик. Агар

$$f(x, y) = \sin x y, \quad g(x, y) = \frac{1}{x}$$

дейилса, унда $\forall\ t > 0$, $\forall\ y \in [1, 2]$ учун

$$\left| \int_0^t f(x, y)\, dx \right| = \left| \int_0^t \sin x y\, d x \right| = \left| 1 - \frac{\cos t y}{y} \right| \leqslant 2$$

бўлади. $x \to +\infty$ да $g(x, y) = \frac{1}{x}$ функция E тўпламда нолга текис яқинлашади:

$$g(x, y) = \frac{1}{x} \to 0.$$

Демак, берилган интеграл Дирихле аломати га кўра $E = [1, 2]$ да текис яқинлашувчидир.

Чегараланмаган функция хосмас интегралининг текис (нотекис) яқинлашувчилиги тушунчаси ҳам юқоридагидек киритилади.

$f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b),\ y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = b$ махсус нуқта бўлсин ва бу функция $[a, b)$ да интегралланувчи бўлсин. Чегараланмаган функция хосмас интеграли таърифига кўра ихтиёрий $[a, t]$ да $(a < t < b)$

$$F_1(t, y) = \int_a^t f(x, y)\, dx$$

интеграл мавжуд ва

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx = \lim_{t \to b-0} F_1(t, y) \tag{17.23}$$

бўлади. Демак, $I_1(y)$ функция $F_1(t, y)$ функциянинг $t \to b - 0$ даги лимит функцияси.

17.8-таъриф. Агар $t \to b - 0$ да $F_1(t, y)$ функция ўз лимит функцияси $I_1(y)$ га E тўпламда текис яқинлашса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

интеграл E тўпламда *текис яқинлашувчи* деб аталади.

17.9-таъриф. Агар $t \to b - 0$ да $F_1(t, y)$ функция ўз лимит функцияси $I_1(y)$ га E тўпламда нотекис яқинлашса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

интеграл E тўпламда *нотекис яқинлашувчи* деб аталади.

Бу таърифларни «$\varepsilon - \delta$» орқали баён этишни ўқувчига ҳавола этамиз.

17.10-таъриф. Агар $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилсаки, $b - \delta < t' < b$, $b - \delta < t'' < b$ бўлган $\forall\ t'$, t'' лар ва $\forall\ y \in E$ учун

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда (17.23) интеграл E тўпламда *фундамент интеграл* деб аталади.

17.11-теорема. $\int_a^b f(x, y)\, dx$ *интегралнинг* E *тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши учун унинг* E *тўпламда фундаментал бўлиши зарур ва етарли.*

5-§. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларда интеграл белгиси остида лимитга ўтиш

1. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty),\ y \in \subset R\}$ тўпламда берилган. y_0 нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

17.12-теорема. $f(x)$ *функция*

1) y *ўзгарувчининг* E *дан олинган ҳар бир тайин қийматида* x *ўзгарувчининг функцияси сифатида* $[a, +\infty)$ *да узлуксиз,*

2) $y \to y_0$ *да ихтиёрий* $[a, t]$ $[a < t < \infty)$ *оралиқда* $\varphi(x)$ *лимит функцияга текис яқинлашувчи бўлсин.*

Агарда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

интеграл E *тўпламда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* $y \to y_0$ *да* $I(y)$ *функция лимитга эга ва*

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx \tag{17.24}$$

бўлади.

Исбот. Теореманинг 1) ва 2) шартлари ҳамда ушбу бобнинг 1-§ идаги 17.2-теоремадан $\varphi(x)$ лимит функциянинг $[a, +\infty)$ да узлуксиз бўлиши келиб чиқади. Демак, $\varphi(x)$ функция ҳар бир чекли $[a, t]$ $(a < t < +\infty)$ оралиқда интегралланувчи.

$\varphi(x)$ ни $[a, +\infty)$ да интегралланувчи эканлигини кўрсатайлик.

Теореманинг шартига кўра

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

интеграл E да текис яқинлашувчи. Унда 17.10-теоремага асосан, $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топиладики, $t' > \delta$, $t'' > \delta$ бўлган $\forall\ t'$, t'' лар ва $\forall\ y \in E$ учун

$$\left|\int^{t''} f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon \tag{17.25}$$

бўлади. $f(x, y)$ функцияга қўйилган шартлар 2-§ да келтирилган 17.3-теорема шартларининг бажарилишини таъминлайди. (17.25) тенгликда $y \to y_0$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\left| \int_{t'}^{t''} \varphi(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

Бундан эса $\varphi(x)$ нинг $[a, +\infty)$ да интегралланувчи бўлиши келиб чиқади (16-боб, 2-§).

Энди

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx \right|$$

айирмани қуйидагича ёзиб,

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx \right| = \left| \int_a^{t} [f(x, y) - \varphi(x)]\, dx + \int_t^{+\infty} f(x, y)\, dx - \right.$$

$$\left. - \int_t^{\infty} \varphi(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^{t} \left| f(x, y) - \varphi(x) \right| dx + \left| \int_t^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_t^{+\infty} \varphi(x)\, dx \right| \quad (a < t + \infty) \qquad (17.26)$$

тенгсизликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчини баҳолаймиз.

$\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ интеграл E да текис яқинлашувчи. Демак, $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ топиладики, барча $t > \delta_1$ ва $\forall\ y \in E$ учун

$$\left| \int_t^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (17.27)$$

бўлади.

$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи. Демак, юқоридаги $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ топиладики, барча $t > \delta_2$ учун

$$\left| \int_t^{+\infty} \varphi(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (17.28)$$

бўлади.

Агар $\delta_0 = max\ \{\delta_1, \delta_2\}$ деб олинса, барча $t > \delta_0$ учун (17.27) ва (17.28) тенгсизликлар бир йўла бажарилади. $y \to y_0$ да $f(x, y)$ функция $\varphi(x)$ лимит функцияга ҳар бир $[a, t]$ (жумладан $t > \delta_0$) да текис яқинлашувчи. Демак, $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta' > 0$ топиладики, $|y - y_0| < \delta'$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $y \in E$ ва $\forall\ x \in [a, t]$ $(a < t < +\infty)$ учун

$$| f(x, y) - \varphi(x) | < \frac{\varepsilon}{3(t-a)} \qquad (17.29)$$

бўлади. Натижада (17.26), (17.27) (17.28) ва (17.29) тенгсизликларга кўра

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx \tag{17.30}$$

бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

(17.30) лимит муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} \left[\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right] dx.$$

Бу эса 17.12-теореманинг шартлари бажарилганда параметрга боғлиқ хосмас интегралларда ҳам интеграл белгиси остида лимитга ўтиш мумкинлигини кўрсатади.

2. $f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b),\ y \in E \subset R\}$ тўпламда берилган, y_0 нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Шунингдек, y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = b$ махсус нуқта бўлсин.

17.13-теорема. *$f(x, y)$ функция*

1) *y ўзгарувчининг E дан олинган ҳар бир тайин қийматида x ўзгарувчининг функцияси сифатида $[a, b)$ да узлуксиз,*

2) *$y \to y_0$ да ихтиёрий $[a, t)$ $(a < t < b)$ оралиқда $\varphi(x)$ лимит функцияга текис яқинлашувчи бўлсин.*

Агар

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

интеграл E тўпламда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $y \to y_0$ да $I_1(y)$ функция лимитга эга ва

$$\lim_{y \to y_0} I_1(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\,dy = \int_a^b \left[\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right] dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

бўлади.

6-§. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларнинг параметр бўйича узлуксизлиги

1. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty),\ y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган.

17.14-теорема. *$f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз ва*

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

интеграл $[c, d]$ *да текис яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда* $I(y)$ *функция* $[c, d]$ *оралиқда узлуксиз бўлади.*

Исбот. $f(x, y)$ функциянинг M тўпламда узлуксизлигидан, аввало бу функция y ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида x нинг узлуксиз функцияси бўлиши келиб чиқади. Шу билан бирга $f(x, y)$ функция $M_t = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, t], \ y \in [c, d]\}$ $(a < t < +\infty)$ тўпламда ҳам узлуксиз, демак, шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.

$\forall y_0 \in [c, d]$ нуқтани олайлик. $y \to y_0$ да $f(x, y)$ функция $f(x, y_0)$ лимит функцияга $[a, t]$ да текис яқинлашади (қаралсин, 250- бет). Агар теореманинг иккинчи шартини эътиборга олсак, у ҳолда $f(x, y)$ функция 17.12-теореманинг барча шартларини бажаришини кўрамиз. У ҳолда 17.12- теоремага асосан

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{+\infty} \left[\lim_{y\to y_0} f(x, y)\right] dx =$$

$$= \int_a^{+\infty} f(x, y_0)\, dx = I(y_0)$$

бўлади. Бу эса $I(y)$ функциянинг $[c, d]$ оралиқда узлуксиз эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2. $f(x, y)$ функция $M_2 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b), \ y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг $[c, d]$ оралиқдан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x = b$ махсус нуқта бўлсин.

17.15-теорема. *$f(x, y)$ функция M_1 тўпламда узлуксиз ва*

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

интеграл $[c, d]$ *да текис яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда* $I_1(y)$ *функция* $[c, d]$ *оралиқда узлуксиз бўлади.*

7- §. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларни параметр бўйича дифференциаллаш

1. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, +\infty), \ y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган.

17.16-теорема. *$f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилага эга ва у ҳам узлуксиз ҳамда y ўзгарувчининг $[c, d]$ дан олинган ҳар бир тайин қийматида*

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин.

Агар $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\, dx$ *интеграл* $[c, d]$ *да текис яқинлашувчи бўлса,* *у ҳолда $I(y)$ функция ҳам $[c, d]$ оралиқда $I'(y)$ ҳосилага эга бўлади ва*

$$I'(y)=\int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx \tag{17.31}$$

муносабат ўринлидир.

Исбот. $\forall\, y_0 \in [c, d]$ нуқтани олиб, унга шундай Δy ($\Delta y \gtrless 0$) orттирма берайликки, $y_0+\Delta y \in [c, d]$ бўлсин.

$I(y)$ функциянинг y_0 нуқтадаги орттирмасини олиб, ушбу

$$\frac{I(y_0+\Delta y)-I(y_0)}{\Delta y}=\int_a^{+\infty}\frac{f(x, y_0+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}\,dx \tag{17.32}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Энди (17.32) тенгликдаги интегралда $\Delta y\to 0$ да интеграл белгиси остида лимитга ўтиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Лагранж теоремасига кўра

$$\frac{f(x, y_0+\Delta y)-f(x, y_0)}{\Delta y}=f'_y(x, y_0+\theta\cdot\Delta y) \tag{17.33}$$

бўлади, бунда $0<\theta<1$.

Шартга кўра $f'_y(x, y)$ функция $M_t=\{(x, y)\in R^2:\ x\in[a, t]\ y\in[c, d]\}$ ($a<t<+\infty$) тўпламда узлуксиз, демак, текис узлуксиз. У ҳолда $\forall\,\varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топиладики, $|x''-x'|<\delta$, $|y''-y'|<\delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $(x', y')\in M_t$, $(x'', y'')\in M_t$ нуқталар учун

$$|f'_y(x'', y'')-f'_y(x', y')|<\varepsilon$$

бўлади. Агар $x'=x''=x$, $y'=y_0$ $y''=y_0+\Delta y\cdot\theta$ дейилса, унда $|<y|\,\delta$ бўлганда

$$|f'_y(x, y_0+\theta\cdot\Delta y)-f'_y(x, y_0)|<\varepsilon\quad(\forall\, x\in[a, t])$$

бўлади. Юқоридаги (17.33) тенгликдан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\left|\frac{f(x, y_0+\Delta y)-f(x, y_0)}{\Delta y}\ f'_y-(x, y_0)\right|<\varepsilon.$$

Бу эса $\Delta y\to 0$ да $\dfrac{f(x, y_0+\Delta y)-f(x, y_0)}{\Delta y}$ функция $f'_y(x, y_0)$ лимиг функцияга текис яқинлашишини билдиради.

Теореманинг шартига кўра

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$$

текис яқинлашувчи. Демак, $\forall\,\varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топиладики, $>t'\,\delta$, $t''>\delta$ бўлган t', t'' ва $\forall\ y\in[c, d]$ учун

$$\left|\int_{t'}^{t''} f'_y(x, y)\,dx\right|<\varepsilon$$

бўлади. Жумладан

$$\left|\int_{t'}^{t''} f'_y(x,\ y_0+\Delta y\cdot\theta)\,dx\right|<\varepsilon$$

бўлади. (17.33) тенгликка асосан

$$\left|\int_{t'}^{t''} \frac{f(x,\ y_0+\Delta y)-f(x,\ y_0)}{\Delta y}\,dx\right|<\varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(x,\ y_0+\Delta y)-f(x,\ y_0)}{\Delta y}\,dx$$

интегралнинг текис яқинлашувчилигини билдиради.

Натижада 17.12- теоремага кўра

$$\lim_{\Delta y\to 0}\int_a^{+\infty} \frac{f(x,\ y_0+\Delta y)-f(x,\ y_0)}{\Delta y}\,dx=\int_a^{+\infty}\left[\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\ y_0+\Delta y)-f(x,\ y_0)}{\Delta y}\right]dx$$

тенглик ўринли бўлади.

Юқоридаги (17.32) тенгликда $\Delta y\to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{I(y_0+\Delta y)-I(y_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\int_a^{+\infty}\frac{f(x,\ y_0+\Delta y)-f(x,\ y_0)}{\Delta y}\,dx=$$

$$=\int_a^{+\infty}\left[\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\ y_0+\Delta y)-f(x,\ y_0)}{\Delta y}\right]dx=\int_a^{+\infty} f'_y(x,\ y_0)\,dx.$$

Демак,

$$I'(y_0)=\int_a^{+\infty} f'_y(x,\ y_0)\,dx.$$

Теорема исбот бўлди.

(17.31) муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,\ y)\,dx=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\,dx.$$

Бу эса теорема шартларида дифференциаллаш амалини интеграл белгиси остига ўтказиш мумкинлигини кўрсатади.

2. $f(x,\ y)$ функция $M_1=\{(x,\ y)\in R^2: x\in[a,\ b),\ \ y\in[c,\ d]\}$ тўпламда берилган. y ўзгарувчининг $[c,\ d]$ дан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x,\ y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x=b$ махсус нуқта бўлсин.

17.17-теорема. *$f(x, y)$ функция M_1 тўпламда узлуксиз, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилага эга ва у ҳам узлуксиз ҳамда y ўзгарувчининг $]c, d[$ дан олинган ҳар бир тайин қийматида*

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин.

Агар

$$\int_a^b f'_y(x, y)\,dx$$

интеграл $]c, d]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $I_1(y)$ функция ҳам $[c, d]$ оралиқда $I'_1(y)$ ҳосилага эга бўлади ва

$$I'_1(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\,dx$$

муносабат ўринлидир.

8- §. Параметрга боғлиқ хосмас интегралларни параметр бўйича интеграллиш

1. $f(x, y)$ функция $M = \{(x, y) \in R^2:\ x \in [a, +\infty),\ y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган.

17.18-теорема. *Агар $f(x, y)$ функция M тўпламда узлуксиз ва*

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

интеграл $[c, d]$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $I(y)$ функция $[c, d]$ да интегралланувчи ва

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx\right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx$$

бўлади.

Исбот. Теореманинг шартларидан $I(y)$ функциянинг $[c, d]$ оралиқда узлуксиз бўлиши келиб чиқади (қаралсин, 17.4-теорема) Демак, $I(y)$ функция $[c, d]$ да интегралланувчи.

Энди

$$\int_a^d \left[\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx\right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx$$

тенгликнинг ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Шартга кўра

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

интеграл $[c, d]$ да текис яқинлашувчи. Демак, $\forall\varepsilon>0$ олинган ҳам шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топиладики, $\forall t>\delta$ ва $\forall y\in[c, d]$ учун

$$\left|\int_t^{+\infty} f(x, y)\,dx\right|<\varepsilon \tag{17.34}$$

бўлади. Мана шундай t бўйича

$$\int_c^d\left[\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx\right]dy=\int_c^d\left[\int_a^t f(x, y)\,dx\right]dy+\int_c^d\left[\int_t^{+\infty} f(x, y)\,dx\right]dy.$$

17.6-теоремага асосан

$$\int_c^d\left[\int_a^t f(x, y\,dx\,dy=\int_a^t\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx$$

бўлади. Натижада

$$\int_c^d I(y)dy=\int_a^t\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx+\int_c^d\left[\int_t^{+\infty} f(x, y)\,dx\right]dy$$

бўлади. Юқоридаги (17.34) муносабатни эътиборга олиб қуйидагини топамиз:

$$\left|\int_c^d I(y)\,dy-\int_a^t\left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx\right|\leqslant\int_c^d\left|\int_t^{+\infty} f(x, y)dx\right|dy<\varepsilon(d-c).$$

Бу эса

$$\int_c^d I(y)\,dy=\lim_{t\to\infty}\int_a^t\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx=\int_a^{+\infty}\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx$$

эканини билдиради. Демак,

$$\int_c^d\left[\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx\right]dy=\int_a^{+\infty}\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx.$$

Теорема исбот бўлди.

Энди $f(x, y)$ функция $M_2=\{(x, y)\in R^2: x\in[a, +\infty),\ y\in[c, +\infty)\}$ тўпламда берилган бўлсин.

17.19-теорема. *$f(x, y)$ функция M_2 тўпламда узлуксиз ва*

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx,\quad \int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy$$

интеграллар мос равишда $[c, +\infty]$ ва $[a, +\infty]$ да текис яқинлашувчи бўлсин.

Агар

$$\int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty}|f(x, y)|\,dx\right]dy\ \left(\text{ёки}\ \int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty}|f(x, y)|\,dy\right]dx\right.$$

интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy\right]dx,\quad \int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx\right]dy$$

интеграллар яқинлашувчи ва

$$\int_{c}^{+\infty}\left[\int_{a}^{+\infty} f(x, y)\,dx\right]dy = \int_{a}^{+\infty}\left[\int_{c}^{+\infty} f(x, y)\,dy\right]dx$$

бўлади.

Бу теореманинг исботини ўқувчига ҳавола қиламиз.

2. $f(x, y)$ функция $M_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b],\ y \in [c, d]\}$ тўпламда берилган. y нинг $]c, d]$ дан олинган ҳар бир тайин қийматида $f(x, y)$ ни x ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралганда унинг учун $x=b$ махсус нуқта бўлсин.

17.20- **теорема.** *$f(x, y)$ функция M_1 тўпламда узлуксиз ва*

$$I_1(y) = \int_{a}^{b} f(x, y)\,dx$$

интеграл $[c, d]$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $I_1(y)$ функция $[c, d]$ да интегралланувчи ва

$$\int_{c}^{d} I_1(y)\,dy = \int_{c}^{d}\left[\int_{a}^{b} f(x, y)dx\right]dy = \int_{a}^{b}\left[\int_{c}^{d} f(x, y)dy\right]dx$$

бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

интегрални қарайлик. У чегараланмаган функциянинг ($a < 1$ да $x = 0$ махсус нуқта) чегараси чексиз хосмас интеграли бўлиб, a параметрга боғлиқдир:

$$I(a) = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$$

Бу интегрални қуйидаги икки қисмга ажратиб,

$$I(a) = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = I_1(a) + I_2(a)$$

уларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида яқинлашувчиликка текширамиз.

$0 < x < 1$ да қуйидаги

$$\frac{1}{2}x^{a-1} \leqslant \frac{x^{a-1}}{1+x} < x^{a-1}$$

тенгсизликлар ўринли ва $\int_{0}^{1} x^{a-1}\,dx$ интеграл $a > 0$ да яқинлашувчи, $a \leqslant 0$ да узоқлашувчи (қаралсин, 16-боб, 5-§). 16-бобнинг 6-§ ида келтирилган 16.8-теоремага кўра

$$I_1(a) = \int_{0}^{1} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

интеграл $a>0$ да яқинлашувчи $a\leqslant 0$ да узоқлашувчи бўлади. $x\geqslant 1$ да қуйидаги

$$\frac{1}{2}x^{a-2}\leqslant\frac{x^{a-1}}{1+x}<x^{a-2}$$

тенгсизликлар ўринли ва $\int\limits_{1}^{+\infty}x^{a-2}\,dx$ интеграл $a<1$ да яқинлашувчи, $a\geqslant 1$ да узоқлашувчи (қаралсин, 16-боб, 1-§). 16-бобнинг 2-§ ида келтирилган 16.2-теоремага кўра

$$I_2(a)=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

интеграл $a<1$ да яқинлашувчи, $a\geqslant 1$ да узоқлашувчи бўлади. Шундай қилиб, берилган

$$I(a)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

интегралнинг $0<a<1$ да яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Энди $I(a)$ интегрални ҳисоблаймиз.

Равшанки, $0<x<1$ да

$$\frac{x^{a-1}}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{a+k-1} \qquad (*)$$

бўлиб, бу қатор $[a_0,\ b_0]$ $(0<a_0\leqslant x\leqslant b_0<1)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

(*) даражали қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{a+k-1}=\frac{x^{a-1}\,[1-(-x)^n]}{(1+x)}$$

бўлади. Агар $\forall\, n\in N$ ва $\forall\, x\in(0,\ 1)$ учун

$$\frac{x^{a-1}\,[1-(-x)^n]}{1+x}<x^{a-1}$$

тенгсизликнинг ўринли бўлишини ҳамда

$$\int\limits_{0}^{1}x^{a-1}\,dx \qquad (0<a<1)$$

интегралнинг яқинлашувчилигини эътиборга олсак, унда Вейерштрасс аломатига кўра интеграл $\int\limits_{0}^{1}S_n(x)\,dx$ $(n=1,\ 2,\ 3\ \ldots)$ текис яқинлашувчи бўлади. 17.13-теоремага кўра

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{1}S_n(x)\,dx=\int\limits_{0}^{1}[\lim_{n\to\infty}S_n(x)]\,dx,$$

яъни

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{a+k-1}\right]dx=\int_0^1\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{a+k-1}\right]dx=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

бўлади. Бу тенгликдан қуйидагини топамиз;

$$I_1(a)=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_0^1(-1)^k x^{a+k-1}\,dx\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_0^1(-1)^k x^{a+k-1}\,dx\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a+k}.$$

Демак,

$$I_1(a)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a+k}.$$

Агар

$$I_2(a)=\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

интегралда $x=\frac{1}{t}$ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда

$$I_2(a)=\int_0^1\frac{t^{-a}}{1+t}\,dt=\int_0^1\frac{t^{(1-a)-1}}{1+t}\,dt$$

бўлади. Юқоридаги йўл билан

$$I_2(a)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a-k}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$I(a)=I_1(a)+I_2(a)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a+k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a-k}=\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{a+k}+\frac{1}{a-k}\right)$$

бўлади.

Агар

$$\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{a+k}+\frac{1}{a-k}\right)=\frac{\pi}{\sin a\pi}\quad(0<a<1)$$

бўлишини (қаралсин, 21- боб, 4- §) эътиборга олсак, унда

$$I(a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin a\pi}\quad(0<a<1).$$

2. Ушбу

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

интегрални қарайлик. Бу хосмас интегралининг яқинлашувчи бўлиши 16- бобнинг 2- § ида кўрсатилган эди. Энди берилган интегрални ҳисоблаймиз. Бунинг учун қуйидаги

$$I(a)=\int_0^{+\infty}e^{-ay}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$$

параметрга боғлиқ хосмас интегрални қараймиз.

Равшанки,

$$f(x,a)=e^{-ax}\,\frac{\sin x}{x}\ (f(0,a)=1)$$

функция

$$\{(x,a)\in R^2: x\in[0,+\infty),\ a\in[0,c]\}\qquad(c>0)$$

тўпламда узлуксиз,

$$f'_a(x,a)=-e^{-ax}\ \sin x$$

хусусий ҳосилага эга ва у ҳам узлуксиз функция. Қуйидаги

$$\int_0^{+\infty}f'_a(x,a)dx=-\int_0^{+\infty}e^{-ax}\ \sin x dx$$

интеграл эса $a\geqslant a_0$ $(a_0>0)$ да текис яқинлашувчи. 17.16-теоремага кўра

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\left(e^{-ax}\,\frac{\sin x}{x}\right)'_a dx=-\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin dx=-\frac{1}{1+a^2}$$

бўлади (қаралсин, 1-қисм, 8- боб, 2- §). Демак,

$$I(a)=-\operatorname{arctg}a+C.$$

$a=+\infty$ бўлганда, $I(+\infty)=$ бўлиб, $\frac{-\pi}{2}+C=0$ яъни $C=\frac{\pi}{2}$ бўлади. Демак,

$$I(a)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}a.$$

Бу тенгликда $a\to 0$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}I(a)=\frac{\pi}{2}.$$

Шундай қилиб, $I(0)=\frac{\pi}{2}$, яъни

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

бўлади.

9-§. Бета функция (I тур Эйлер интеграли) ва унинг хоссалари

Биз 16-бобнинг 9-§ ида ушбу

$$\int_{0}^{1}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \qquad (17.35)$$

хосмас интегрални қарадик.

Интеграл остидаги функция учун

1) $a<1$, $b\geqslant 1$ бўлганда $x=0$ махсус нуқта,

2) $a\geqslant 1$, $b<1$ бўлганда $x=1$ махсус нуқта,

3) $a<1$, $b<1$ бўлганда $x=0$ ва $x=1$ нуқталар махсус нуқталар бўлади.

Бинобарин, (17.35) чегараланмаган функциянинг хосмас интегралидир. Демак, (17.35) интеграл — параметрга боғлиқ хосмас интегралдир. Ўша ерда (17.35) хосмас интегралнинг $a>0$, $b>0$ да, яъни

$$M=\{(a,b)\in R^2: a\in(0,+\infty),\ b\in(0,+\infty)\}$$

тўпламда яқинлашувчи бўлиши кўрсатилди.

17.11-таъриф. (17.35) интеграл *бета функция* ёки I *тур Эйлер интеграли* деб аталади ва $B(a,b)$ каби белгиланади, демак

$$B(a,b)=\int_{0}^{1}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx\quad (a>0,\ b>0).$$

Шундай қилиб $B(a,b)$ функция R^2 фазодаги $M=\{(a,b)\in R^2: a\in(0,+\infty),\ b\in(0,+\infty)\}$ тўпламда берилгандир.

Энди $B(a,b)$ функциянинг хоссаларини ўрганайлик.

1°. (17.35) интеграл

$$B(a,b)=\int_{0}^{1}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

ихтиёрий $M_0=\{(x,b)\in R^2: a\in[a_0,+\infty),\ b\in[b_0,+\infty)\}$ $a_0>0$, $b_0>0$) тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган интегрални текис яқинлашувчиликка текшириш учун уни қуйидагича

$$\int_{0}^{1}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx=\int_{0}^{1/2}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx+\int_{1/2}^{1}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

ёзиб оламиз.

Равшанки, $a>0$ бўлганда $\int\limits_0^{1/2} x^{a-1}\,dx$ интеграл яқинлашувчи, $b>0$ бўлганда $\int\limits_{1/2}^{1} (1-x)^{b-1}\,dx$ интеграл яқинлашувчи.

Параметр a нинг $a \geqslant a_0 (a_0>0)$ қийматлари ва $\forall b>0$, $\forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ учун

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1} \leqslant x^{a_0-1}(1-x)^{b-1} \leqslant 2x^{a_0-1}$$

бўлади. Вейерштрасс аломатидан фойдаланиб

$$\int\limits_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

интегралнинг текис яқинлашувчилигини топамиз.

Шунингдек, параметр b нинг $b \geqslant b_0\,(b_0>0)$ қийматлари ва $\forall a>0$, $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ учун

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1} \leqslant x^{a-1}(1-x)^{b_0-1} \leqslant 2(1-x)^{b_0-1}$$

бўлади ва яна Вейерштрасс аломатига кўра $\int\limits_{1/2}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ интегралнинг текис яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Демак, $\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ интеграл $a \geqslant a_0 > 0$, ва $b \geqslant b_0 > 0$ бўлганда, яъни

$$M_0 = \{(a, b) \in R^2 : a \in [a_0, +\infty),\ b \in [b_0, +\infty)\}$$

тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

17.1-эслатма. $B(a, b)$ нинг $M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty),\ b \in (0, +\infty)\}$ тўпламда нотекис яқинлашувчилигини кўриш қийин эмас.

2°. $B(a, b)$ функция $M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty),\ b \in (0, +\infty)\}$ тўпламда узлуксиз функциядир.

Ҳақиқатан ҳам,

$$B(a, b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

интегралнинг M_0 тўпламда текис яқинлашувчи бўлишидан ва интеграл остидаги функциянинг $\forall (a, b) \in M$ да узлуксизлигидан 17.15-теоремага асосан $B(a, b)$ функция

$$M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty),\ b \in (0, +\infty)\}$$

тўпламда узлуксиз бўлади.

3°. $\forall (a, b) \in M$ учун $B(a, b) = B(b, a)$ бўлади. Дарҳақиқат $B(a, b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ интегралда $x = 1-t$ алмаштириш бажарилса, унда

$$B(a, b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx=\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}\,dt=B(b, a)$$

бўлишини топамиз.

4°. $B(a, b)$ функция қуйидагича ҳам ифодаланади:

$$B(a, b)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt. \tag{17.36}$$

Ҳақиқатан ҳам, (17.35) интегралда $x=\frac{t}{1+t}$ алмаштириш бажарилса, у ҳолда

$$B(a, b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{a-1}\left(1-\frac{t}{1+t}\right)^{b-1}\frac{dt}{(1+t)^2}=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt$$

бўлади.

Хусусан, $b=1-a$ $(0<a<1)$ бўлганда

$$B=(a, 1-a)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt=\frac{\pi}{\sin a\pi} \tag{17.37}$$

бўлади. (17.37) муносабатдан қуйидагини топамиз:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)=\pi.$$

5°. $\forall (a, b)\in M'(M'=\{(a, b)\in R^2 : a\in(0, +\infty),\ b\in(1, +\infty)\})$ учун

$$B(a, b)=\frac{b-1}{a+b-1}B(a, b-1) \tag{17.38}$$

бўлади.

(17.35) интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$B(a, b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx=\int_0^1(1-x)^{b-1}\,d\left(\frac{x^a}{a}\right)=\frac{1}{a}x^a(1-$$

$$-x)^{b-1}\Big|_0^1+\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}\,dx=\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}\,dx$$

$$(a>0,\ b>1).$$

Агар
$$x^a (1-x)^{b-2} = x^{a-1} [1-(1-x)] (1-x)^{b-2} = x^{a-1} (1-x)^{b-2} - x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$
эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда
$$\int_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-2} dx - \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = B(a,\ b-1) - (a,\ b)$$
бўлиб, натижада
$$B(a,\ b) = \frac{b-1}{a} [B(a,\ b-1) - B(a,\ b)]$$
бўлади. Бу тенгликдан эса
$$B(a,\ b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a,\ b-1) \quad (a > 0,\ b > 1)$$
бўлишини топамиз.

Худди шунга ўхшаш $\forall\ (a,\ b) \in M''$ учун
$$(M'' = \{(a,\ b) \in R^2 : a \in (1,\ +\infty),\ b \in (0,\ +\infty)\})$$
$$B(a,\ b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1,\ b)$$
бўлади.

Хусусан, $b = n$ $(n \in N)$ бўлганда
$$B(a,\ b) = B(a,\ n) = \frac{n-1}{a+n-1} B(a,\ n-1)$$
бўлиб, (17.38) формулани такрор қўллаб қуйидагини топамиз.
$$B(a,\ n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-1} \cdots \frac{1}{n+1} B(a,\ 1).$$

Равшанки, $B(a,\ 1) = \int\limits_a^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}$. Демак,
$$B(a,\ n) = \frac{1 \cdot 2 \cdots (a-1)}{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)}. \tag{17.39}$$
Агар (17.39) да $a = m$ $(m \in N)$ бўлса, у ҳолда
$$B(m,\ n) = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{m(m+1) \cdots (m+n-1)} = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

10-§. Гамма функция (II тур Эйлер интеграли) ва унинг хоссалари

Биз 16-бобнинг 9-§ ида қуйидаги
$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \tag{17.40}$$
хосмас интегрални қарадик. Бу чегараланмаган функциянинг ($a < 1$ да $x = 0$ махсус нуқта) чексиз оралиқ бўйича олинган хосмас интегра-

ли бўлиши билан бирга a га (параметрга) ҳам боғлиқдир. Ўша ерда (17.40) хосмас интегралнинг $a > 0$ да, $(0, +\infty)$ да яқинлашувчи, $a \leqslant 0$ да, яъни $(-\infty, 0]$ да узоқлашувчи бўлиши кўрсатилди.

17.12-таъриф. (17.40) интеграл *гамма функция* ёки *II тур Эйлер интеграли* деб аталади ва $\Gamma(a)$ каби белгиланади. Демак,

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx.$$

Шундай қилиб, $\Gamma(a)$ функция $(0, +\infty)$ да берилгандир. Энди $\Gamma(a)$ функциянинг хоссаларини ўрганайлик.

1° (17.40) интеграл

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

ихтиёрий $[a_0, b_0]$ $(0 < a_0 < b_0 < +\infty)$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. (17.40) интегрални қуйидаги икки қисмга ажратиб,

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x}\, dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

уларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида текис яқинлашувчиликка текширамиз.

Агар a_0 $(a_0 > 0)$ сонни олиб, параметр a нинг $a \geqslant a_0$ қийматлари қаралса, унда барча $x \in (0, 1]$ учун $x^{a-1} e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^{1-a_0}}$ бўлиб, ушбу бобнинг 4-§ ида келтирилган Вейерштрасс аломатига асосан

$$\int_0^1 x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

интеграл текис яқинлашувчи бўлади.

Агар b_0 $(b_0 > 0)$ сонни олиб, параметр a нинг $a \leqslant b_0$ қийматлари қараладиган бўлса, унда барча $x \geqslant 1$ учун

$$x^{a-1} e^{-x} \leqslant x^{b_0-1}\ e^{-x} \leqslant \left(\frac{b_0+1}{e}\right)^{b_0+1} \cdot \frac{1}{x^2}$$

бўлиб,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигидан, яна Вейерштрасс аломатига кўра

$$\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

интегралнинг текис яқинлашувчи бўлишини топамиз. Шундай қилиб,

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

интеграл $[a_0, b_0]$ $(0 < a_0 < b_0 < +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлади.

17.2-эслатма. $\Gamma(a)$ нинг $(0, +\infty)$ да нотекис яқинлашувчилигини кўриш қийин эмас.

2°. $\Gamma(a)$ функция $(0, +\infty)$ да узлуксиз ҳамда барча тартибдаги узлуксиз ҳосилаларга эга ва

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^n \, dx \quad (n = 1, 2 \ldots).$$

Исбот. $\forall a \in (0, +\infty)$ нуқтани олайлик. Унда шундай $[a_0, b_0]$ $(0 < a_0 < b_0 < +\infty)$ оралиқ топиладики, $a \in [a_0, b_0]$ бўлади.

Равшанки,

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \, dx$$

интеграл остидаги $f(x, a) = x^{a-1} e^{-x}$ функция $M = \{(x, a) \in R^2;\ x \in (0, +\infty),\ a \in (0, +\infty)\}$ тўпламда узлуксиз функциядир. (17.40) интеграл эса (юқорида исбот этилганга кўра) $[a_0, b_0]$ да текис яқинлашувчи. У ҳолда 17.4-теоремага асосан $\Gamma(a)$ функция $[a_0, b_0]$ да, бинобарин, a нуқтада узлуксиз бўлади.

(17.40) интеграл остидаги $f(x, a) = x^{a-1} e^{-x}$ функция

$$f'_a(x, a) = x^{a-1} e^{-x} \ln x$$

ҳосиласининг M тўпламда узлуксиз функция эканлигини пайқаш қийин эмас.

Энди

$$\int_0^{+\infty} f'_a(x, a)\, dx = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$$

интегрални $[a_0, b_0]$ да текис яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз. Ушбу $\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$ интеграл остидаги $x^{a-1} e^{-x} \ln x$ функция учун $0 < x \leq 1$ да $|x^{a-1} e^{-x} \ln x| \leq x^{a_0-1} |\ln x|$ тенгсизлик ўринлидир. $\psi_1(x) = x^{\frac{a_0}{2}} |\ln x|$ функция $0 < x \leq 1$ да чегараланганлигидан ва $\int_0^1 x^{\frac{a_0}{2}-1} dx$ интегралнинг яқинлашувчилигидан $\int_0^1 x^{a_0-1} |\ln x|\, dx$ нинг ҳам яқинлашувчи бўлишини ва Вейерштрасс аломатига кўра қаралаётган $\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$ интегралнинг текис яқинлашувчилигини топамиз.

Шунга ўхшаш қуйидаги

$$\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$$

интегралда, интеграл остидаги $x^{a-1} e^{-x} \ln x$ функция учун барча $x \geq 1$ да

$$x^{a-1} e^{-x} \ln x \leq x^{b_0-1} e^{-x} \ln x < x^{b_0} e^{-x} \leq \left(\frac{b_0+2}{e}\right)^{b_0+2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

бўлиб, $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ интегралнинг яқинлашувчилигидан, яна Вейерштрасс аломатига кўра $\int\limits_{1}^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x\, dx$ нинг текис яқинлашувчилиги келиб чиқади. Демак, $[a_0, b_0]$ да $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{a-1} e^{-h} \ln x\, dx$ интеграл текис яқинлашувчи. Унда 17.16-теоремага асосан

$$f'(a) = \left(\int\limits_{0}^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx \right)^1 = \int\limits_{b}^{+\infty} (x^{a-1} e^{-x})'\, dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x\, dx$$

бўлади ва $\Gamma'(a)$ $[a_0, b_0]$ да бинобарин, a нуқтада узлуксиздир.

Худди шу йўл билан $\Gamma(a)$ функциянинг иккинчи, учинчи ва ҳоказо тартибдаги ҳосилаларининг мавжудлиги, узлуксизлиги ҳамда

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int\limits_{0}^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^n\, dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

бўлиши кўрсатилади.

3°. $\Gamma(a)$ функция учун ушбу

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a) \quad (a > 0)$$

формула ўринли.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\Gamma(a) = \int\limits_{0}^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\, d\left(\frac{x^a}{a}\right)$$

интегрални бўлаклаб интегралласак,

$$\Gamma(a) = e^{-x} \cdot \frac{x^a}{a}\Bigg|_{0}^{+\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^a}{a} e^{-x}\, dx = \frac{1}{a}\, \Gamma(a+1)$$

бўлиб, ундан

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a) \tag{17.41}$$

бўлиши келиб чиқади.

Бу формула ёрдамида $\Gamma(a+n)$ ни топиш мумкин. Дарҳақиқат, (17.41) формулани такрор қўллаб,

$$\begin{aligned} &\Gamma(a+2) = \Gamma(a+1) \cdot (a+1), \\ &\Gamma(a+3) = \Gamma(a+2) \cdot (a+2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Gamma(a+n) = \Gamma(a+n-1)(a+n-1) \end{aligned}$$

бўлишини, улардан эса

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2) \ldots (a+2)(a+1) \cdot a\, \Gamma(a)$$

эканлигини топамиз. Хусусан, $a = 1$ бўлганда

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \ldots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1)$$

бўлади. Агар $\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=1$ бўлишини эътиборга олсак, унда $\Gamma(n+1)=n!$ эканлиги келиб чиқади.

Яна (17.41) формуладан фойдаланиб $\Gamma(2)=\Gamma(1)=1$ бўлишини топамиз.

4° $\Gamma(a)$ функциянинг ўзгариш характери.

$\Gamma(a)$ функция $(0, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, шу оралиқда исталган тартибли ҳосилага эга. Бу функциянинг $a=1$ ва $a=2$ нуқталардаги қийматлари бир-бирига тенг:

$$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1.$$

$\Gamma(a)$ функцияга Ролль теоремасини (қаралсин, 1-қисм, 6-боб, 6-§) татбиқ қила оламиз, чунки юқорида келтирилган фактлар Ролль теоремаси шартларининг бажарилишини таъминлайди. Демак, Ролль теоремасига кўра, шундай a^* $(1<a^*<2)$ топиладики, $\Gamma'(a^*)=0$ бўлади. $\forall\ a\in(0, +\infty)$ да

$$\Gamma''(a)=\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln^2 x\,dx>0$$

бўлиши сабабли, $\Gamma'(a)$ функция $(0, +\infty)$ оралиқда қатъий ўсувчи бўлади. Демак, $\Gamma'(a)$ функция $(0, +\infty)$ да a^* нуқтадан бошқа нуқталарда нолга айланмайди, яъни

$$\Gamma'(a)=\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx=0$$

тенглама $(0, +\infty)$ оралиқда a^* дан бошқа ечимга эга эмас. У ҳолда

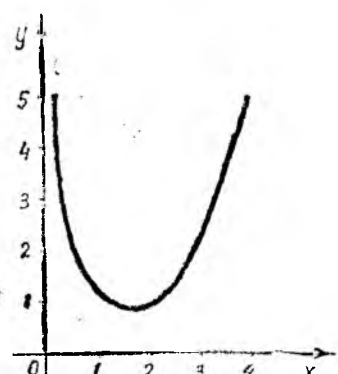
$$0<a<a^* \text{ да } \Gamma'(a)<0,$$
$$a^*<a<+\infty \text{ да } \Gamma'(a)>0$$

бўлади. Демак, $\Gamma(a)$ функция a^* нуқтада минимумга эга. Унинг минимум қиймати $\Gamma(a^*)$ га тенг.

Тақрибий ҳисоблаш усули билан

$$a^*=1{,}4616\ \ldots$$
$$\Gamma(a^*)=\min\Gamma(a)=0{,}8856\ \ldots$$

бўлиши топилган.



16-чизма

$\Gamma(a)$ функция $a>a^*$ да ўсувчи бўлганлиги сабабли $a>n+1$ $(n\in N)$ бўлганда $\Gamma(a)>\Gamma(n+1)=n!$ бўлиб, ундан

$$\lim_{a\to+\infty}\Gamma(a)=+\infty$$

бўлишини топамиз.

Иккинчи томондан, $a\to+0$ да $\Gamma(a+1)\to\Gamma(1)=1$ ҳамда $\Gamma(a)=\dfrac{\Gamma(a+1)}{a}$ эканлигидан $\lim\limits_{a\to+0}\Gamma(a)=+\infty$ келиб чиқади.

$\Gamma(a)$ функциянинг графиги 16-чизмада тасвирланган.

11- §. Бета ва гамма функциялар орасидаги боғланиш

Биз қуйида $B(a, b)$ ва $\Gamma(a)$ функциялар орасидаги боғланишни ифодалайдиган формулани келтирамиз.

Маълумки, $\Gamma(a)$ функция $(0, +\infty)$ да, $B(a, b)$ функция эса R^2 фазодаги $M = \{(a, b) \in R^2 : a \in (0, +\infty),\ b \in (0, +\infty)\}$ тўпламда берилган.

17.21-теорема. *$\forall\ (a, b) \in M$ учун*

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

формула ўринлидир.

Исбот. Ушбу $\Gamma(a+b) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a+b-1} e^{-x}\, dx \quad (a > 0,\ b > 0)$ гамма функцияда ўзгарувчини қуйидагича алмаштирамиз:

$$x = (1+t)\, y \quad (t > 0).$$

Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\Gamma(a+b) = \int\limits_0^{+\infty} (1+t)^{a+b-1} \cdot y^{a+b-1}\, e^{-(1+t)\,y} \cdot (1+t)\, dy =$$

$$= (1+t)^{a+b} \int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1}\, e^{-(1+t)\,y}\, dy.$$

Кейинги тенгликдан қуйидагини топамиз:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1}\, e^{-(1+t)y}\, dy.$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини t^{a-1} га кўпайтириб, натижани $(0, +\infty)$ оралиқ бўйича интеграллаймиз:

$$\Gamma(a+b) \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+a}}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \left[\int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1}\, e^{-(1+t)\,y}\, dy\right] t^{a-1}\, dt.$$

Агар (17.36) формулага кўра

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\, dt = B(a, b)$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$\Gamma(a+b) \cdot B(a, b) = \int\limits_0^{+\infty} \left[\int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1}\, e^{-(1+t)y}\right] t^{a-1}\, dt \qquad (17.42)$$

бўлади. Энди (17.42) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл $\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)$ га тенг бўлишини исботлаймиз. Унинг учун, эввало бу интегралларда интеграллаш тартибини алмаштириш мумкинлигини кўрсатамиз. Бунинг учун 17.19-теорема шартлари бажарилишини кўрсатишимиз керак.

Дастлаб $a > 1,\ b > 1$ бўлган ҳолни кўрайлик.

$a > 1$, $b > 1$ да, яъни $\{(a, b) \in R^2 : a \in (1, +\infty), b \in (1, +\infty)\}$ тўпламда интеграл остидаги

$$f(t, y) = y^{a+b-1}\ t^{a-1}\ e^{-(1+t)y}$$

функция $\forall\ (t, y) \in \{(t, y) \in R^2 : t \in [0, +\infty), y \in [0, +\infty)\}$ да узлуксиз бўлиб, $f(t, y) = y^{a+b-1}\ t^{a-1}\ e^{-(1+t)y} \geqslant 0$ бўлади.

Ушбу $\int\limits_0^{+\infty} f(t, y)\, dy = \int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}\ y^{a+b-1}\ e^{-(1+t)y}\, dy$ интеграл t ўзгарувчининг $[0, +\infty)$ оралиқда узлуксиз функцияси бўлади, чунки

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}\ y^{a+b-1}\ e^{-(1+t)y}\, dy = \Gamma(a+b) \cdot \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}.$$

Ушбу

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t, y)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}\ y^{a+b-1}\ e^{-(1+t)y}\, dt$$

интеграл y ўзгарувчининг $[0, +\infty)$ оралиқдаги узлуксиз функцияси бўлади, чунки

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}\ y^{a+b-1}\ e^{-(1+t)y}\, dt = \Gamma(a) \cdot y^{b-1}\ e^{-y}$$

ва ниҳоят, юқоридаги (17.42) муносабатга кўра

$$\int\limits_0^{+\infty} \left[\int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}\ y^{a+b-1}\ e^{-(1+t)y}\, dy\right] dt$$

интеграл яқинлашувчи.

У ҳолда 17.19-теоремага асосан

$$\int\limits_0^{+\infty} \left[\int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}\ y^{a+b-1}\ e^{-(1+t)y}\, dt\right] dy$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int\limits_0^{+\infty} \left[\int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}\ y^{a+b-1}\ e^{-(1+t)y}\, dy\right] dt = \int\limits_0^{+\infty} \left[\int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}\ y^{a+b-1}\ e^{-(1+t)y}\, dt\right] dy$$

бўлади. Ўнг томондаги интегрални ҳисоблайлик:

$$\int\limits_0^{+\infty} \left[\int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}\ y^{a+b-1}\ e^{-(1+t)y}\, dy\right] dt = \int\limits_0^{+\infty} \left[\int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}\ y^{a+b-1}\ e^{-(1+t)y}\, dt\right] dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1}\, e^{-y} \left[\int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}\ e^{-ty}\, dt\right] dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1}\ e^{-y}\ \frac{1}{y^a} \Big] \int\limits_0^{+\infty} (ty)^{a-1}\, e^{-ty}\ d\,(ty)\Big] dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} y^{b-1}\ e^{-y} \cdot \Gamma(a)\, dy = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b). \qquad (17.43)$$

Натижада (17.42) ва (17.43) муносабатлардан

$$\Gamma(a+b)\cdot B(a, b)=\Gamma(a)\cdot\Gamma(b),$$

яъни

$$B(a, b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{17.44}$$

бўлиши келиб чиқади. Биз бу формулани $a>1$, $b>1$ бўлган ҳол учун исботладик. Энди умумий ҳолни кўрайлик.

Айтайлик, $a>0$, $b>0$ бўлсин. У ҳолда исбот этилган (17.44) формулага кўра

$$B(a+1, b+1)=\frac{\Gamma(a+1)\cdot\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \tag{17.45}$$

бўлади.

$B(a, b)$ ва $\Gamma(a)$ функцияларнинг хоссаларидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$B(a+1, b+1)=\frac{a}{a+b+1}B(a, b+1)=\frac{a}{a+b+1}\cdot\frac{b}{a+b}B(a, b),$$

$$\Gamma(a+1)=a\cdot\Gamma(a),\ \Gamma(b+1)=b\cdot\Gamma(b),\ \Gamma(a+b+2)=(a+b+ \\ +1)\Gamma(a+b+1)=(a+b+1)(a+b)\cdot\Gamma(a+b).$$

Натижада (17.45) формула қуйидаги

$$\frac{a\cdot b}{(a+b)(a+b+1)}B(a, b)=\frac{a\cdot\Gamma(a)\cdot b\cdot\Gamma(b)}{(a+b)(a+b+1)\Gamma(a+b)}$$

кўринишга келади. Бу эса (17.44) формула $a>0$, $b>0$ да ҳам ўринли эканини билдиради.

17.1-натижа. $\forall\ a\in(0,1)$ учун

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi} \tag{17.46}$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (17.44) формулада $b=1-a$ $(0<a<1)$ дейилса, унда

$$B(a, 1-a)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}$$

бўлиб, (17.37) ва $\Gamma(1)=1$ муносабатларга мувофиқ

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}\ (0<a<1).$$

Одатда (17.46) формула *келтириш формуласи* деб аталади.

Хусусан, (17.46) да $a=\frac{1}{2}$ деб олсак, унда

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{*}$$

бўлишини топамиз.

17.2-натижа. Ушбу

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Gamma(2a)\quad(a>0)$$

формула ўринлидир. Шуни исботлаймиз.

(17.44) муносабатда $a=b$ деб

$$B(a,\ a)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(a)}{\Gamma(a)}$$

бўлишини топамиз. Сўнгра

$$B(a,\ a)=\int_0^1[x(1-x)]^{a-1}\,dx=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx=$$

$$=2\int_0^{1/2}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}-x\right)^2\right]^{a-1}dx$$

интегралда $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{t}$ алмаштиришни бажариб,

$$B(a,\ a)=2\int_0^1\left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{a-1}\frac{1}{4}\,t^{-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{a-1}\,dt=\frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},\ a\right)$$

га эга бўламиз. Натижада

$$\frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},\ a\right)$$

бўлади.

Яна (17.44) формулага кўра

$$B\left(\frac{1}{2},\ a\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}\quad(^{**})$$

бўлиб, (**) муносабатдан

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\cdot\sqrt{\pi}\,\frac{1}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}$$

эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Gamma(2a).\qquad\textbf{(17.47)}$$

Одатда (17.47) формула *Лежандр формуласи* деб аталади.

КАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

«Математик анализ» курсининг 1-қисм, 9 — 10-бобларида функциянинг аниқ интеграли батафсил ўрганилди.

Математика ва фаннинг бошқа тармоқларида кўп ўзгарувчили функцияларнинг интеграллари билан боғлиқ масалаларга дуч келамиз (қуйида, 1-§ келтириладиган масала шулар жумласидандир). Бинобарин, уларни — каррали интегралларни ўрганиш вазифаси юзага келади.

Каррали интеграллар назариясида ҳам, аниқ интеграллар назарисидагидек, интегралнинг мавжудлиги, унинг хоссалари, каррали интегрални ҳисоблаш, интегралнинг татбиқлари ўрганилади. Бунда аниқ интеграл ҳақидаги маълумотлардан муттасил фойдалана борилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, аниқ интегралда интеграллаш оралиғи тўғри чизиқ (R — фазо) даги кесмадан иборат бўлса, каррали интегралларда мос фазодаги соҳалар бўлади. Бундай соҳаларнинг турлича бўлиши каррали интегралларни ўрганишни бирмунча мураккаблаштиради. Ва ҳатто, кейинроқ кўрамизки, интеграл тушунчасини ҳам турлича киритишни тақозо қилади (кейинги бобларга қаранг).

Қуйида биз, соддалик учун, икки ўзгарувчили функцияларнинг интеграллари билан танишамиз.

1-§. Икки каррали интеграл таърифи

Аниқ интегралнинг баёнини шу интеграл тушунчасига олиб келадиган масаладан бошлаган эдик. Икки каррали интеграл тушунчасини ўрганишни ҳам унга олиб келадиган масалани келтиришдан бошлаймиз.

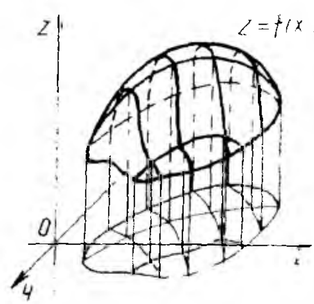
1. Масала. $f(x, y)$ функция чегараланган (D) соҳада* ($(D) \subset R^2$) берилган, узлуксиз ҳамда $\forall (x, y) \in (D)$ учун $f(x, y) \geqslant 0$ бўлсин. R^3 фазода $Oxyz$ — Декарт координата системасини олайлик. Юқоридан $z = f(x, y)$ сирт билан, ён томонидан, ясовчилари Oz ўқига паралел бўлган цилиндрик сирт ҳамда пастдан Oxy текислигидаги (D) соҳа билан чегараланган (V) жисмни қарайлик (17-чизма). (V) жисмнинг ҳажмини топиш талаб этилсин.

Агар $f(x, y)$ функция (D) да ўзгармас бўлса, $f(x, y) = C$ (C — const), у ҳолда (V) жисмнинг (цилиндрнинг) ҳажми

$$V = C \cdot D$$

га тенг бўлади, бунда D — (D) соҳанинг юзи.

Агар (D) соҳада $f(x, y)$ x ва y ўзгарувчиларнинг ихтиёрий узлуксиз функцияси бўлса, у ҳолда (V) жисмнинг ҳажмини топиш учун, аввало (D) соҳани эгри



17-чизма

* Бу ерда ва келгусида ҳамма вақт функциянинг аниқланиш соҳаси (D) ни юзга эга бўлган соҳа деб ҳисоблаймиз.

чизиқлар билан n та бўлакка бўламиз: $(D)=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(D_k)$. Бўлувчи чизиқларни йўналтирувчи сифатида олиб Oz ўқига параллел цилиндрик сиртлар ўтказамиз. Натижада (V) жисм n та (V_k) $(k=1, 2, \ldots, n)$ бўлакларга ажралади. Сўнг ҳар бир (D_k) $(k=1, 2, \ldots, n)$ да ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқта оламиз. Бу (D_k) да $f(x, y)$ функцияни ўзгармас ва $f(\xi_k, \eta_k)$ га тенг десак, у ҳолда (V_k) бўлакнинг ҳажми тахминан

$$f(\xi_k, \eta_k)\cdot D_k$$

бўлиб, (V) жисмнинг ҳажми эса тахминан

$$V\approx\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\cdot D_k$$

бўлади, бунда D_k — (D_k) нинг юзи.

(V) жисмнинг ҳажмини ифодаловчи бу формула тақрибийдир. Чунки, $f(x, y)$ ни ҳар бир (D_k) да ўзгармас $f(\xi_k, \eta_k)$ деб ҳисобладик: $f(x, y)=f(\xi_k, \eta_k)$, агар $(x, y)\in(D_k)$ бўлса.

Энди (D) соҳани бўлакларга бўлиниш сонини шундай орттира борайликки, бунда ҳар бир (D_k) $(k=1, 2, \ldots, n)$ бўлакнинг диаметри нолга интила борсин. У ҳолда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\cdot D_k$$

қиймат изланаётган (V) жисмнинг ҳажмини тобора аниқроқ ифодалай боради деб ҳисоблаш табиийдир. Демак, масала юқоридаги йиғиндининг лимитини топиш билан ҳал қилинади. Бундай йиғиндининг лимити икки каррали интеграл тушунчасига олиб келади.

2. **Икки каррали интеграл таърифи.** Икки каррали интегрални таърифлашдан аввал баъзи бир тушунчалар, жумладан (D) соҳанинг бўлиниши, функциянинг интеграл йиғиндиси тушунчалари билан танишамиз.

Бирор чегараланган $(D)\subset R^2$ соҳа берилган бўлсин. (D) соҳанинг чегарасидаги ихтиёрий икки нуқтани бирлаштирувчи ва бутунлай шу соҳада ётувчи чизиқни (эгри чизиқни) l чизиқ деб атаймиз. Равшанки, бундай чизиқлар (D) соҳани бўлакларга ажратади.

Шунингдек, (D) соҳада бутунлай ётувчи ёпиқ чизиқни ҳам l чизиқ деб қараймиз. Бундай чизиқлар ҳам (D) соҳани бўлакларга ажратади. Бу соҳани бўлакларга ажратувчи чекли сондаги l чизиқлар системаси $\{l: l\subset(D)\}$ (D) соҳанинг бўлиниши деб аталади ва $P=\{l: l\subset(D)\}$ каби белгиланади. (D) соҳани бўлакларга ажратувчи ҳар бир l чизиқ P бўлинишнинг бўлувчи чизиғи, (D) соҳанинг бўлаги эса P бўлинишнинг бўлаги дейилади. P бўлиниш бўлаклари диаметрининг энг каттаси P бўлинишнинг диаметри деб аталади ва у λ_P каби белгиланади.

Мисол: $(D)=\{(x, y)\}\in R^2: \ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ бўлсин. Қуйидаги

$$x=x_i=\frac{i}{4}\quad(i=0, 1, 2, 3, 4),$$

$$y=y_k=\frac{k}{3}\quad(k=0, 1, 2, 3)$$

чизиқлар системаси (D) соҳанинг P_1 бўлиниши,

$$x = x_i = \frac{i}{n} \quad (i = 0,\ 1.\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$y = y_k = \frac{k}{n} \quad (k = 0,\ 1.\ 2,\ \ldots,\ n)$$

чизиқлар системаси эса шу соҳанинг бошқа P_2 бўлиниши бўлади. Уларнинг диаметри $R_2 = \frac{5}{12}$, $P_1 = \frac{\sqrt{2}}{n}$ га тенг.

Демак, (D) соҳа берилган ҳолда, бу соҳани турли усуллар билан бўлинишларини тузиш мумкин. Натижада (D) соҳанинг бўлинишлари тўплами ҳосил бўлади. Уни $\mathscr{P} = \{P\}$ каби белгилайлик.

$f(x, y)$ функция $(D) \subset R^2$ соҳада берилган бўлсин. Бу соҳанинг $P \in \mathscr{P}$ бўлинишини ва бу бўлинишнинг ҳар бир (D_k) $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ бўлагида ихтиёрий $(\xi_k,\ \eta_k)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ нуқтани олайлик. Берилган функциянинг $(\xi_k,\ \eta_k)$ нуқтадаги қиймати $f(\xi_k,\ \eta_k)$ ни D_k (D_k—(D_k) соҳанинг юзи) га кўпайтириб, қуйидаги

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k,\ \eta_k)\ D_k$$

йиғиндини тузамиз.

18.1-таъриф. Ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k)\cdot D_k \tag{18.1}$$

йиғинди, $f(x, y)$ функциянинг *интеграл йиғиндиси* ёки *Риман йиғиндиси* деб аталади.

Мисол. 1. $f(x, y) = x \cdot y$ функциянинг (D) соҳадаги интеграл йиғиндиси

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k)\cdot D_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot \eta_k \cdot D_k$$

бўлади, бунда

$$(\xi_k,\ \eta_k) \in (D_k)\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

2. Ушбу

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{агар } (x, y) \in (D) \text{ да } x \text{ — рационал сон, } y \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) \in (D) \text{ да, } x \text{ ва } y \text{ ларнинг камида биттаси иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

функциянинг интеграл йиғиндиси қуйидагича бўлади:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \psi(\xi_k,\ \eta_k)\ D_k = \begin{cases} D, & \text{агар барча } \xi_k \text{ ва } \eta_k \text{ лар рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар барча } \xi_k \text{ ёки барча } \eta_k \text{ лар иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

Юқорида келтирилган таърифдан кўринадики, $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндиси σ қаралаётган $f(x, y)$ функцияга, (D) соҳанинг бўлиниш усулига ҳамда ҳар бир (D_k) дан олинган ξ_k, η_k нуқталарга боғлиқ бўлади, яъни

$$\sigma_P = \sigma_P\ (f,\ \xi_k,\ \eta_k).$$

$f(x, y)$ функция чегараланган $(D) \subset R^2$ соҳада берилган бўлсин. Бу (D) соҳанинг шундай

$$P_1,\ P_2,\ \ldots, P_m,\ \ldots \tag{18.2}$$

бўлинишларини қараймизки, уларнинг диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1},\ \lambda_{P_2},\ \ldots,\ \lambda_{P_m},\ \ldots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \to 0$. Бундай P_m $(m = 1,\ 2,\ \ldots)$ бўлинишларга нисбатан $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндисини тузамиз.

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k)\ D_k.$$

Натижада (D) соҳанинг (18.2) бўлинишларига мос $f(x, y)$ функция интеграл йиғиндилари қийматларидан иборат қуйидаги

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_m\ \ldots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади $(\xi_k,\ \eta_k)$ нуқталарга боғлиқ.

18.2-таъриф. Агар (D) соҳанинг ҳар қандай (18.2) бўлинишлар кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос интеграл йиғинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик, $(\xi_k,\ \eta_k)$ нуқталарни танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I га σ *йиғиндининг лимити* деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k) \cdot D_k = I$$

каби белгиланади.

Интеграл йиғиндининг лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

18.3-таъриф. Агар $\forall\ \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилсаки, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши ҳамда ҳар бир (D_k) бўлакдаги ихтиёрий $(\xi_k,\ \eta_k)$ лар учун

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I га σ *йиғиндининг лимити* деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = I$$

каби белгиланади.

Энди $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича икки каррали интегралининг таърифини келтирамиз.

18.4-таъриф. Агар $\lambda_P \to 0$ да $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндиси σ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y)$ функция (D) соҳада *интегралланувчи (Риман маъносида интегралланувчи) функция* дейилади.

Бу σ йиғиндининг чекли лимити I эса $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича *икки каррали интеграли (Риман интеграли)* дейилади ва у

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dD$$

каби белгиланади. Демак,

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dD = \lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k, \eta_k)\, D_k.$$

Биринчи пунктда келтирилган (V) жисмнинг ҳажми $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича икки каррали интегралидан иборат экан.

Мисол. 1. $f(x, y) = C$ — const функциянинг (D) соҳа бўйича икки каррали интегралини топамиз. Бу функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} C \cdot D_k = C \cdot D$$

бўлиб, $\lambda_P \Rightarrow 0$ да $\lim\limits_{\lambda_P \to 0} \sigma = C \cdot \mathrm{D}$ бўлади. Демак,

$$\iint\limits_{(D)} C \cdot d\mathrm{D} = C \cdot \mathrm{D}.$$

Хусусан, $f(x, y) = 1$ бўлганда

$$\iint\limits_{(D)} d\mathrm{D} = \mathrm{D} \qquad (18.3)$$

бўлади.

2. Ушбу пунктда $\psi(x, y)$ функциянинг $(\mathrm{D}) \subset R^2$ соҳада интеграл йиғиндисини топган эдик. Унинг ифодаси ҳамда интеграл таърифидан бу функциянинг (D) соҳада интегралланувчи эмаслиги келиб чиқади.

18.1-эслатма. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланмаган бўлса, у шу соҳада интегралланмайди.

2-§. Дарбу йиғиндилари. Икки каррали интегралнинг бошқача таърифи

1. Дарбу йиғиндилари. $f(x, y)$ функция $(D) \subset R^2$ соҳада берилган бўлиб, у шу соҳада чегараланган бўлсин. Демак, шундай ўзгармас m ва M сонлар мавжудки, $\forall\ (x, y) \in (D)$ да

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M$$

бўлади.

(D) соҳанинг бирор P бўлинишини олайлик. Бу бўлинишнинг ҳар бир (D_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ бўлагида $f(x, y)$ функция чегараланган бўлиб, унинг аниқ чегаралари

$$m_k = \inf \{f(x, y) : (x, y) \in (D_k)\},\ M_k = \sup \{f(x, y) : (x, y) \in (D_k)\}$$

мавжуд бўлади. Равшанки, $\forall\ (x, y) \in (D_k)$ учун

$$m_k \leqslant f(x, y) \leqslant M_k. \qquad (18.4)$$

18.5-таъриф. Ушбу

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k D_k,\quad S = \sum_{k=1}^{n} M_k D_k$$

йиғиндилар мос равишда Дарбунинг *қуйи* ҳамда *юқори йиғиндилари* деб аталади.

Бу таърифдан, Дарбу йиғиндиларининг $f(x, y)$ функцияга ҳамда (D) соҳанинг бўлинишиға боғлиқ эканлиги кўринади:

$$s = s_P(f), \quad S = S_P(f).$$

Шунингдек, ҳар доим

$$s \leqslant S$$

бўлади.

Юқоридаги (18.4) тенгсизликдан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k D_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) D_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k D_k.$$

Демак,

$$s_P(f) \leqslant \sigma_P(f; \xi_k, \eta_k) \leqslant S_P(f).$$

Шундай қилиб, $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндиси ҳар доим унинг Дарбу йиғиндилари орасида бўлар экан.

Аниқ чегаранинг хоссасига кўра

$$m \leqslant m_k, \quad M_k \leqslant M \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

бўлади. Натижада ушбу

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k D_k \geqslant m \sum_{k=1}^{n} D_k = mD,$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k D_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} D_k = M \cdot D$$

тенгсизликларга келамиз. Демак, $\forall P \in \{\mathscr{P}\}$ учун

$$m \cdot D \leqslant s \leqslant S \leqslant M \cdot D \tag{18.5}$$

бўлади. Бу эса Дарбу йиғиндиларининг чегараланганлигини билдиради.

2. Икки каррали интегралнинг бошқача таърифи. $f(x, y)$ функция $(D) \subset R^2$ соҳада берилган бўлиб, у шу соҳада чегараланган бўлсин. (D) соҳанинг бўлинишлари тўплами $\mathscr{P} = \{P\}$ нинг ҳар бир $P \in \mathscr{P}$ бўлинишига нисбатан $f(x, y)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари $s_P(f)$, $S_P(f)$ ни тузиб

$$\{s_P(f)\}, \quad \{S_P(f)\}$$

тўпламларни қараймиз. Бу тўпламлар (18.5) га кўра чегараланган бўлади.

18.6-таъриф. $\{s_P(f)\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги *қуйи икки каррали интеграли (қуйи Риман интеграли)* деб аталади ва у

$$\underline{I} = \underline{\iint_{(D)}} f(x, y)\, dD$$

каби белгиланади.

$\{S_P(f)\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада *юқори икки каррали интеграли (юқори Риман интеграли)* деб аталади ва у

$$\overline{I} = \overline{\iint_{(D)}} f(x, y)\, dD$$

каби белгиланади. Демак,

$$\underline{I} = \underline{\iint_{(D)}} f(x, y)\, dD = \sup\{s\}, \quad \overline{I} = \overline{\iint_{(D)}} f(x, y)\, dD = \inf\{S\}.$$

18.7-таъриф. Агар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада қуйи ҳамда юқори икки каррали интеграллари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функциянинг (D) *соҳада интегралланувчи* деб аталади, уларнинг умумий қиймати

$$I = \underline{\iint_{(D)}} f(x, y)\, dD = \overline{\iint_{(D)}} f(x, y)\, dD$$

$f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги *икки каррали интеграли (Риман интеграли)* дейилади ва у

$$\iint_{(D)} f(x, y)\, dD$$

каби белгиланади. Демак,

$$\iint_{(D)} f(x, y)\, dD = \underline{\iint_{(D)}} f(x, y)\, dD = \overline{\iint_{(D)}} f(x, y)\, dD.$$

Агар

$$\underline{\iint_{(D)}} f(x, y)\, dD \neq \overline{\iint_{(D)}} f(x, y)\, dD$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (D) соҳада *интегралланмайди* деб аталади.

Шундай қилиб, $f(x, y)$ функциянинг икки каррали интегралига икки хил таъриф берилди. Бу таърифлар ўзаро эквивалент таърифлар. У 1-қисм, 9-бобдаги аниқ интеграл таърифларининг эквивалентлигини исботланганидек кўрсатилади.

3-§. Икки каррали интегралнинг мавжудлиги

$f(x, y)$ функциянинг $(D) \subset R^2$ соҳа бўйича икки каррали интеграли мавжудлиги масаласини қараймиз. Бунинг учун аввало (D) соҳанинг ҳамда Дарби йиғиндиларининг хоссаларини келтирамиз.

(D) соҳанинг бўлинишлари хоссалари 1-қисм, 9-бобда ўрганилган $[a, b]$ оралиқнинг бўлинишлари хоссалари кабидир. Уларни исботлаш деярли бир хил мулоҳаза асосида олиб борилишини эътиборга олиб, қуйида у хоссаларни исботсиз келтиришни лозим топдик.

$f(x, y)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари хоссалари ҳақидаги вазият ҳам худди шундайдир.

1. (D) соҳа бўлинишларининг хоссалари. Фараз қилайлик, $\mathcal{P} = \{P\}$ — (D) соҳа бўлинишларидан иборат тўплам бўлиб, $P_1 \in \mathcal{P}$ $P_2 \in \mathcal{P}$ бўлсин.

Агар P_1 бўлинишнинг ҳар бир бўлувчи чизиғи P_2 бўлинишнинг ҳам бўлувчи чизиғи бўлса, P_2 бўлиниш P_1 ни эргаштиради деб аталади ва $P_1 \prec P_2$ каби белгиланади.

1°. Агар $P_1 \in \mathscr{P}$, $P_2 \in \mathscr{P}$, $P_3 \in \mathscr{P}$ бўлинишлар учун $P_1 \prec P_2$, $P_2 \prec P_3$ бўлса, у ҳолда $P_1 \prec P_3$ бўлади.

2°. $\forall P_1 \in \mathscr{P}$, $\forall P_2 \in \mathscr{P}$ бўлинишлар учун, шундай $P \in \mathscr{P}$ топиладики, $P_1 \prec P$, $P_2 \prec P$ бўлади.

2. Дарбу йиғиндиларининг хоссалари. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва чегараланган бўлсин. (D) соҳанинг P бўлинишини олиб, бу бўлинишга нисбатан $f(x, y)$ функциянинг интеграл ва Дарбу йиғиндиларини тузамиз:

$$\sigma = \sigma_P(f; \xi_k, \eta_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k,$$

$$s = s_P(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k D_k,$$

$$S = S_P(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k D_k.$$

1°. $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $(\xi_k, \eta_k) \in (D_k)$ нуқталарни $(k = 1, 2, \ldots, n)$ шундай танлаб олиш мумкинки,

$$0 \leqslant S_P(f) - \sigma_P(f) < \varepsilon,$$

шунингдек, $(\xi_k, \eta_k) \in (D_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ нуқталарни яна шундай танлаб олиш мумкинки,

$$0 \leqslant \sigma_P(f) - s_P(f) < \varepsilon$$

бўлади.

Бу хосса Дарбу йиғиндилари $s_P(f)$, $S_P(f)$ лар интеграл йиғинди $\sigma_P(f)$ муайян бўлиниш учун мос равишда аниқ қуйи ҳамда аниқ юқори чегара бўлишини билдиради.

2°. Агар P_1 ва P_2 лар (D) соҳанинг икки бўлинишлари бўлиб, $P_1 \prec P_2$ бўлса, у ҳолда

$$s_{P_1}(f) \leqslant s_{P_2}(f), \ S_{P_2}(f) \leqslant S_{P_1}(f)$$

бўлади.

Бу хосса (D) соҳанинг бўлинишдаги бўлаклар сони орта борганда уларга мос Дарбунинг қуйи йиғиндисининг камаймаслиги, юқори йиғиндисининг эса ошмаслигини билдиради.

3°. Агар P_1 ва P_2 лар (D) соҳанинг ихтиёрий икки бўлинишлари бўлиб, $s_{P_1}(f)$, $S_{P_1}(f)$ ва $s_{P_2}(f)$, $S_{P_2}(f)$ лар $f(x, y)$ функциянинг шу бўлинишларга нисбатан Дарбу йиғиндилари бўлса, у ҳолда

$$s_{P_1}(f) \leqslant S_{P_2}(f), \ s_{P_2}(f) \leqslant S_{P_1}(f)$$

бўлади.

Бу хосса, (D) соҳанинг бўлинишларига нисбатан тузилган қуйи йиғиндилар тўплами $\{s_P(f)\}$ нинг ҳар бир элементи (юқори йиғиндилар тўплами $\{S_P(f)\}$ нинг ҳар бир элементи) юқори йиғиндилар тўплами $\{S_P(f)\}$ нинг исталган элементидан (қуйи йиғиндилар тўплами $\{s_P(f)\}$ нинг исталган элементидан) катта (кичик) эмаслигини билдиради.

4°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва чегараланган бўлса, у ҳолда

$$\sup\{s_P(f)\} \leqslant \inf\{S_P(f)\}$$

бўлади.

Бу хосса $f(x, y)$ функциянинг қуйи икки каррали интеграли, унинг юқори икки каррали интегралидан катта эмаслигини билдиради:

$$\underline{I} \leqslant \overline{I}.$$

5°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва чегараланган бўлса, у ҳолда $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган барча бўлинишлари учун

$$\begin{aligned} S_P(f) &< \overline{I} + \varepsilon \quad (0 \leqslant S_P(f) - \overline{I} < \varepsilon), \\ s_P(f) &> \underline{I} - \varepsilon \quad (0 \leqslant \underline{I} - s_P(f) < \varepsilon \end{aligned} \tag{18.6}$$

бўлади.

Бу хосса $f(x, y)$ функциянинг юқори ҳамда қуйи интеграллари $\lambda_P \to 0$ да мос равишда Дарбунинг юқори ҳамда қуйи йиғиндиларининг лимити эканлигини билдиради:

$$\overline{I} = \lim_{\lambda_P \to 0} S_P(f), \quad \underline{I} = \lim_{\lambda_P \to 0} s_P(f).$$

3. Икки каррали интегралнинг мавжудлиги. Энди икки каррали интегралнинг мавжуд бўлишининг зарур ва етарли шартини (критерийсини) келтирамиз.

18.1-теорема. *$f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиши учун, $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилиб, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан Дарбу йиғиндилари*

$$S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon \tag{18.7}$$

тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлсин. Таърифга кўра

$$I = \underline{I} = \overline{I}$$

бўлади, бунда

$$\underline{I} = \sup\{s_P(f)\}, \quad \overline{I} = \inf\{S_P(f)\}.$$

$\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан Дарбу йиғиндилари учун (18.6) муносабатларга кўра

$$S_P(f) - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \underline{I} - s_P(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлиб, ундан

$$S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилиб, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан Дарбу йиғиндилари учун

$$S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon$$

бўлсин. Қаралаётган $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланганлиги учун, унинг қуйи ҳамда юқори интеграллари

$$\underline{I} = \sup\{s_P(f)\},\ \overline{I} = \inf\{S_P(f)\}$$

мавжуд

$$\underline{I} \leqslant \overline{I}$$

бўлади. Равшанки,

$$s_P(f) \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S_P(f).$$

Бу муносабатдан

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} \leqslant S_P(f) - s_P(f)$$

бўлишини топамиз. Демак, $\forall\, \varepsilon > 0$ учун

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} < \varepsilon$$

бўлиб, ундан $\underline{I} = \overline{I}$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада интегралланувчи эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Агар $f(x, y)$ функциянинг (D_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ соҳадаги тебранишини ω_k билан белгиласак, у ҳолда

$$S_P(f) - S_P(f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\, D_k = \sum_{c=1}^{n} \omega_k D_k$$

бўлиб, теоремадаги (18.7) шарт ушбу

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k D_k < \varepsilon,$$

яъни

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k D_k = 0$$

кўринишларни олади.

4- §. Интегралланувчи функциялар синфи

Ушбу параграфда икки каррали интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, маълум синф функцияларнинг интегралланувчи бўлишини кўрсатамиз.

18.2-теорема. *Агар $f(x, y)$ функция чегараланган ёпиқ $(D) \subset R^2$ соҳада берилган ва узлуксиз бўлса, у шу соҳада интегралланувчи бўлади.*

Исбот. $f(x, y)$ функция (D) соҳада текис узлуксиз бўлади. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига асосан (12-боб, 6-§), $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган P бўлиниши олинганда, бу бўлинишнинг ҳар бир бўлагида функциянинг тебраниши $\omega_k < \varepsilon$ бўлади. Демак, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишида

$$S_P(f) - s_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k D_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} D_k = \varepsilon \cdot D$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k D_k = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи. Теорема исбот бўлди.

Баъзи бир узиладиган функцияларнинг ҳам интегралланувчи бўлишини кўрсатишдан аввал ноль юзли чизиқ тушунчасини эслатиб, битта лемма исботлаймиз. R^2 текисликда бирор Γ чизиқ берилган бўлсин. Маълумки, $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам, Γ чизиқни шундай кўпбурчак (Q) билан ўраш мумкин бўлсаки, бу кўпбурчакнинг юзи $Q < \varepsilon$ бўлса, у ҳолда Γ — ноль юзли чизиқ деб аталар эди. Масалан, $[a, b]$ ораликда аниқланган ва узлуксиз $y = f(x)$ функция тасвирлаган чизиқ ноль юзли чизиқ бўлади. Шуни ҳам айтиш керакки, гарчанд юзаки қараганда ҳар қандай чизиқ ноль юзли бўлиб кўринса ҳам, аслида ундай эмас.

(D) соҳада ноль юзли Γ чизиқ берилган бўлсин.

18.1-лемма. $\forall \varepsilon > 0$ *олинганда ҳам, шундай* $\delta > 0$ *топиладики,* (D) *соҳанинг диаметри* $\lambda_P < \delta$ *бўлган* P *бўлиниши олинганда бу бўлинишнинг* Γ *чизиқ билан умумий нуқтага эга бўлган бўлаклари юзларининг йиғиндиси* ε *дан кичик бўлади.*

Исбот. Шартга кўра Γ — ноль юзли чизиқ. Демак, уни шундай (Q) кўпбурчак билан ўраш мумкинки, бу кўпбурчакнинг юзи $Q < \varepsilon$ бўлади.

Γ чизиқ билан (Q) кўпбурчак чегараси умумий нуқтага эга эмас деб, Γ чизиқ нуқталари билан (Q) кўпбурчак чегараси нуқталари орасидаги масофани қарайлик. Бу нуқталар орасидаги масофа ўзининг энг кичик қийматига эришади. Биз уни $\delta > 0$ орқали белгилаймиз. Агар (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган P бўлиниши олинса, равшанки, бу бўлинишининг Γ чизиқ билан умумий нуқтага эга бўлган бўлаклари бутунлай (Q) кўпбурчакда жойлашади. Демак, бундай бўлаклар юзларининг йиғиндиси ε дан кичик бўлади. Лемма исбот бўлди.

18.3-теорема. *Агар* $f(x, y)$ *функция* (D) *соҳада чегараланган ва бу соҳанинг чекли сондаги ноль юзли чизиқларида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, функция* (D) *соҳада интегралланувчи бўлади.*

Исбот. $f(x, y)$ функция (D) соҳада чегараланган бўлиб, у шу соҳанинг фақат битта ноль юзли Γ чизиғида ($\Gamma \subset (D)$) узилишга эга бўлиб қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлсин.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олиб, Γ чизиқни юзи ε дан кичик бўлган (Q) кўпбурчак билан ўраймиз. Натижада (D) соҳа (Q) ва $(D)\setminus(Q)$ соҳаларга ажралади.

Шартга кўра, $f(x, y)$ функция $(D)\setminus(Q)$ да узлуксиз. Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta_1 > 0$ топиладики, диаметри $\lambda_{P_1} < \delta_1$ бўлган P_1 бўлинишнинг ҳар бир бўлагидаги $f(x, y)$ функциянинг тебраниши $\omega_k < \varepsilon$ бўлади.

Юқоридаги лемманинг исбот жараёни кўрсатадики, шу $\varepsilon > 0$ га кўра, шундай $\delta_2 > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta_2$ бўлган бўлиниши олинса, бу бўлинишнинг (Q) кўпбурчак билан умумий нуқтага эга бўлган бўлаклар юзларининг йиғиндиси ε дан кичик бўлади.

Энди $\min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta$ деб, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган P бўлинишини оламиз. Бу бўлинишга нисбатан $f(x, y)$ функциянинг Дарбу йиғиндиларини тузиб, қуйидаги

$$S_P(f) - s_P(f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k D_k \tag{18.8}$$

айирмани қараймиз.

Бу (18.8) йиғиндининг (Q) кўпбурчакдан ташқарида жойлашган (D_k) бўлакларга мос ҳадларидан иборат йиғинди

$$\sum_k{}' \omega_k D_k$$

бўлсин.

(18.8) йиғиндининг қолган барча ҳадларидан ташкил топган йиғинди

$$\sum_k{}'' \omega_k D_k$$

бўлсин. Натижада (18.8) йиғинди икки қисмга ажралади:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k D_k = \sum_k{}' \omega_k D_k + \sum_k{}'' \omega_k D_k. \tag{18.9}$$

$(D)\setminus(Q)$ соҳадаги бўлакларда $\omega_k < \varepsilon$ бўлганлигидан

$$\sum_k{}' \omega_k D_k < \varepsilon \sum_k{}' D_k \leqslant \varepsilon \cdot D \tag{18.10}$$

бўлади.

Агар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги тебранишини Ω билан белгиласак, у ҳолда

$$\sum_k{}'' \omega_k D_k \leqslant \Omega \sum_k{}'' D_k$$

бўлади. (Q) кўпбурчакда бутунлай жойлашган P бўлинишнинг бўлаклари юзларининг йиғиндиси ε дан кичик ҳамда (Q) кўпбурчак чегараси билан умумий нуқтага эга бўлган бўлаклар юзларининг йиғиндиси ҳам ε дан кичик бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\sum_k{}'' D_k < 2\varepsilon$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\sum_k{}'' \omega_k D_k < 2\Omega\varepsilon. \tag{18.11}$$

Натижада (18.9), (18.10) ва (18.11) муносабатлардан

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k D_k < \varepsilon D + 2\Omega\varepsilon = \varepsilon(D + 2\Omega)$$

эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k D_k = 0.$$

Бу эса $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада интегралланувчи бўлишини билдиради.

$f(x, y)$ функция (D) соҳанинг чекли сондаги ноль юзли чизиқларида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, унинг (D) да интегралланувчи бўлиши юқоридагидек исбот этилади. Теорема исбот бўлди.

5- §. Икки каррали интегралнинг хоссалари

Қуйида $f(x, y)$ функция икки каррали интегралининг хоссаларини ўрганамиз.

Икки каррали интеграл ҳам аниқ интегралнинг хоссалари сингари хоссаларга эга. Уларни асосан исботсиз келтирамиз.

1°. $f(x, y)$ функция (D) соҳага $((D) \subset R^2)$ интегралланувчи бўлсин. Бу функциянинг (D) соҳага тегишли бўлган ноль юзли L чизиқдаги $(L \subset (D))$ қийматларинигина (чегараланганлигини сақлаган ҳолда) ўзгартиришдан ҳосил бўлган $F(x, y)$ функция ҳам (D) соҳада интегралланувчи бўлиб,

$$\iint_{(D)} f(x, y)\, dD = \iint_{(D)} F(x, y)\, dD$$

бўлади.

Исбот. Равшанки, $\forall (x, y) \in (D) \setminus L$ учун

$$f(x, y) = F(x, y).$$

Шартга кўра L — ноль юзли чизиқ. Унда 18.1-леммага асосан, $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши олинганда ҳам, бу бўлинишнинг L чизиқ билан умумий нуқтага эга бўлган бўлаклари юзларининг йиғиндиси ε дан кичик бўлади. Шу P бўлинишга нисбатан $f(x, y)$ ва $F(x, y)$ функцияларнинг ушбу интеграл йиғиндиларини тузамиз:

$$\sigma_P(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, D_k,$$

$$\sigma_P(F) = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_n, \eta_k)\, D_k.$$

$\sigma_P(f)$ йиғиндини қуйидагича икки қисмга ажратамиз:

$$\sigma_P(f) = \sum_k{}' f(\xi_k, \eta_k)\cdot D_k + \sum_k{}'' f(\xi_k, \eta_k)\cdot D_k,$$

бунда $\sum\limits_k{}'$ йиғинди L чизиқ билан умумий нуқтага эга бўлган (D_k) бўлаклар бўйича олинган, $\sum\limits_k{}''$ эса қолган барча ҳадлардан ташкил топган йиғинди.

Худди шунга ўхшаш

$$\sigma_P(F) = \sum_k{}' F(\xi_k, \eta_k)\ D_k + \sum_k{}'' F(\xi_k, \eta_k)\ D_k.$$

Агар $\forall (x, y) \in (D) / L$ учун $f(x, y) = F(x, y)$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$|\sigma_P(f) - \sigma_P(F)| \leqslant \sum_k{}' |f(\xi_k, \eta_k) - F(\xi_k, \eta_k)|\cdot D_k \leqslant M\cdot \sum_k{}' D_k < M\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади, бунда $M = \sup|f(x, y) - F(x, y)|$, $((x, y) \in (D)\diagdown L)$. Демак,

$$|\sigma_P(f) - \sigma_P(F) < M\varepsilon.$$

Кейинги тенгсизликда $\lambda_P \to 0$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dD = \iint\limits_{(D)} F(x, y)\, dD.$$

2°. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган бўлиб, (D) соҳа ноль юзли L чизиқ билан (D_1) ва (D_2) соҳаларга ажралган бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, функция (D_1) ва (D_2) соҳаларда ҳам интегралланувчи бўлади, ва аксинча, яъни $f(x, y)$ функция (D_1) ва (D_2) соҳаларнинг ҳар бирида интегралланувчи бўлса, функция (D) соҳада ҳам интегралланувчи бўлади. Бунда

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dD = \iint\limits_{(D_1)} f(x, y)\, dD + \iint\limits_{(D_2)} f(x, y)\, dD.$$

3°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $c f(x, y)$ $(c = \text{const})$ ҳам шу соҳада интегралланувчи ва ушбу

$$\iint\limits_{(D)} c\cdot f(x, y)\, dD = c\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dD$$

формула ўринли бўлади.

4°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x, y) \pm g(x, y)$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва ушбу

$$\iint\limits_{(D)} [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dD = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dD \pm \iint\limits_{(D)} g(x, y)\, dD$$

формула ўринли бўлади.

18.1-натижа. Агар $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\ldots$, $f_n(x, y)$ функцияларнинг ҳар бири (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда ушбу

$c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + \ldots + c_n f_n(x, y)$ $(c_i = \text{const},\ i = 1, 2, \ldots, n)$

функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\iint\limits_{(D)} [c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + \ldots + c_n f_n(x, y)]\, dD =$$

$$= c_1 \iint\limits_{(D)} f_1(x, y)\, dD + c_2 \iint\limits_{(D)} f_2(x, y)\, dD + \ldots + c_n \iint\limits_{(D)} f_n(x, y)\, dD$$

бўлади.

5°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, $\forall\ (x, y) \in (D)$ учун $f(x, y) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dD \geqslant 0$$

бўлади.

18.2-натижа. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, $\forall\ (x, y) \in (D)$ учун

$$f(x, y) \leqslant g(x, y)$$

бўлса, у ҳолда

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dD \leqslant \iint\limits_{(D)} g(x, y)\, dD$$

бўлади.

6°. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x, y)|$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\left| \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dD \right| \leqslant \iint\limits_{(D)} |f(x, y)|\, dD$$

бўлади.

7°. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва у шу соҳада чегараланган бўлсин. Демак, шундай m ва M ўзгармас сонлар ($m = \inf\{f(x, y);\ (x, y) \in (D)\}$, $M = \sup\{f(x, y);\ (x, y) \in (D)\}$) мавжудки, $\forall\ (x, y) \in (D)$ учун

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M$$

бўлади.

18.4-теорема. *Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас μ $(m \leqslant \mu \leqslant M)$ сон мавжудки,*

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dD = \mu \cdot D$$

бўлади, бунда D — (D) соҳанинг юзи.

18.3-натижа. Агар $f(x, y)$ функция ёпиқ (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу соҳада шундай $(a, b) \in (D)$ нуқта топиладики,

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dD = f(a, b) \cdot D$$

бўлади.

18.5-теорема. *Агар $g(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлиб, у шу соҳада ўз ишорасини ўзгартирмаса ва $f(x, y)$ функция (D) свҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай $(a, b) \in (D)$* нуқта топиладики,

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, g(x, y)\, dD = f(a, b) \iint\limits_{(D)} g(x, y)\, dD$$

бўлади.

8°. Интеграллаш соҳаси ўзгарувчи бўлган икки каррали интеграллар. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган бўлиб, у шу соҳада интегралланувчи бўлсин. Бу функция, (D) соҳанинг юзга эга бўлган ҳар қандай (d) қисмида $((d) \subset (D))$ ҳам интегралланувчи бўлади. Равшанки, ушбу

$$\iint_{(d)} f(x, y)\,dD$$

интеграл (d) га боғлиқ бўлади.

(D) соҳанинг юзга эга бўлган ҳар бир (d) қисмига юқоридаги интегрални мос қўямиз:

$$\Phi : (d) \to \iint_{(d)} f(x, y)\,dD.$$

Натижада функция ҳосил бўлади. Одатда бу

$$\Phi((d)) = \iint_{(d)} f(x, y)\,dD$$

функция *соҳанинг функцияси* деб аталади.

(D) соҳада бирор (x_0, y_0) нуқтани олайлик. (d) эса шу нуқтани ўз ичига олган ва $(d) \subset (D)$ бўлган соҳа бўлсин. Бу соҳанинг юзи d, диаметри эса λ бўлсин.

Агар $\lambda \to 0$ да $\dfrac{\Phi((d))}{d}$ нисбатнинг лимити $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{\Phi((d))}{d}$ мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $\Phi((d))$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги *соҳа бўйича ҳосиласи* деб аталади.

Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда $\Phi((d))$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги соҳа бўйича ҳосиласи $f(x_0, y_0)$ га тенг бўлади.

6- §. Икки каррали интегралларни ҳисоблаш

$f(x, y)$ функциянинг (D) соҳадаги $((D) \subset R^2)$ икки каррали интеграли тегишли интеграл йиғиндининг маълум маънодаги лимити сифатида таърифланди. Бу лимит тушунчаси мураккаб характерга эга бўлиб, уни шу таъриф бўйича ҳисоблаш ҳатто содда ҳолларда ҳам анча қийин бўлади.

Агар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада интегралланувчилиги маълум бўлса, унда биламизки, интеграл йиғинда (D) соҳанинг бўлиниш усулига ҳам, ҳар бир бўлакда олинган (ξ_k, η_k) нуқталарга ҳам боғлиқ бўлмай, $\lambda_p \to 0$ да ягона $\iint_{(D)} (x, y)\,dD$ сонга интилади. Натижада функциянинг икки каррали интегралини топиш учун бирорта бўлинишга нисбатан интеграл йиғиндининг лимитини ҳисоблаш етарли бўлади. Бу ҳол (D) соҳанинг бўлинишини ҳамда (ξ_k, η_k) нуқталарни, интеграл йиғиндини ва унинг лимитини ҳисоблашга қулай қилиб олиш имконини беради.

Мисол. Ушбу

$$\iint_{(D)} xy\, dD$$

интегрални ҳисоблайлик. Бунда

$$(D)=\{(x,\ y)\in R^2: 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}.$$

Равшанки, $f(x,\ y)=xy$ функция (D) да узлуксиз. Демак, бу функция (D) соҳада интегралланувчи.

(D) соҳани

$$(D_{ik})=\left\{(x,\ y)\in R^2: \frac{i}{n}\leqslant x\leqslant\frac{i+1}{n},\ \frac{k}{n}\leqslant y\leqslant\frac{k+1}{n},\ \frac{i}{n}+\frac{k}{n}\leqslant 1\right\}$$
$$(i=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1)$$

бўлакларга ажратиб, ҳар бир (D_{ik}) да $(\xi_i,\ \eta_k)=\left(\frac{i}{n},\ \frac{k}{n}\right)$ деб қараймиз.

У ҳолда

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_i,\ \eta_k)D_{ik}=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{n-i-1}\frac{i}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n-i}{n}\cdot\frac{1}{2n^2}\right]=$$
$$=\frac{1}{2n^4}\sum_{i=0}^{n-1} i(n-i)^2=\frac{1}{2n^2}\left(\frac{n^2(n-1)n}{2}-2n\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\right.$$
$$\left.+\frac{n^2(n-1)^2}{4}\right)$$

бўлади. Бундан эса

$$\lim_{n\to\infty}\sigma=\frac{1}{24}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\iint_{(D)} xy\, dD=\frac{1}{24}.$$

Умуман, кўп ҳолларда функцияларнинг каррали интегралларини таърифга кўра ҳисоблаш қийин бўлади. Шунинг учун каррали интегралларни ҳисоблашнинг амалий жиҳатдан қулай бўлган йўлларини топиш зарурияти туғилади.

Юқорида айтиб ўтганимиздек. $f(x,\ y)$ функциянинг каррали интеграли ва уни ҳисоблаш (D) соҳага боғлиқ.

Аввал, содда ҳолда, (D) соҳа тўғри тўртбурчак соҳадан иборат бўлган ҳолда функциянинг каррали интегралини ҳисоблаймиз.

18.6-теорема. *$f(x,\ y)$ функция $(D)=\{(x,\ y)\in R^2: a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$ соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин.*

Агар $x(x\in[a,\ b])$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$I(x)=\int_c^d f(x,\ y)\,dy$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,\ y)dy\right]dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x,\ y)dD=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,\ y)\,dy\right]dx$$

бўлади.

Исбот. (D) соҳани

$$(D_{ik}) = \{(x, y) \in R^2 : x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1},\ y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}\} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1,\ k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

$(a = x_0 < x_i < \ldots < x_n = b,\ c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d)$ бўлакларга ажратамиз. Бу бўлинишни P_{nm} деб белгилаймиз. Унинг диаметри

$$\lambda_{P_{nm}} = \max \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_k^2} \left(\Delta x_i = x_{i+1} - x_i;\ \ \Delta y_k = y_{k+1} - y_k \right).$$

Модомики, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи экан, у шу соҳада чегараланган бўлади. Бинобарин, $f(x, y)$ функция ҳар бир (D_{ik}) да чегараланган ва демак, у шу соҳада аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эга бўлади:

$$m_{ik} = \inf \{ f(x, y) : (x, y) \in (D_{ik})\},$$

$$M_{ik} = \sup \{ f(x, y) : (x, y) \in (D_{ik})\},$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1,\ k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Равшанки, $\forall (x, y) \in (D_{ik})$ учун $m_{ik} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{ik}$, хусусан, $\xi_i \in [x_i\, x_{i+1}]$ учун ҳам $m_{ik} \leqslant f(\xi_i, y) \geqslant M_{ik}$ бўлади. Теореманинг шартидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} m_{ik} dy \leqslant \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i\ y) dy \leqslant \int_{y_k}^{y_{k+1}} M_{ik}\, dy,$$

яъни

$$m_{ik}\Delta y_k \leqslant \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)\, dy \leqslant M_{ik},\ \Delta y_k, \text{ бунда } \Delta y_k = y_{k+1} - y_k.$$

Агар кейинги тенгсизликларни k нинг $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ қийматларида ёзиб, уларни ҳадлаб қўшсак, у ҳолда

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)\, dy \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k,$$

яъни

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \leqslant \int_c^d f(\xi_i, y) dy = I(\xi_i) \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k$$

$(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ бўлади.

Энди кейинги тенгсизликларни $\Delta x_i (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i)$ га кўпайтириб, сўнг ҳадлаб қўшамиз. Натижада

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \right) \Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k \right) \cdot \Delta x_i$$

бўлади.

Равшанки,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k\Big)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\cdot\Delta x_i\Delta y_k=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}D_{ik}=s$$

$f(x, y)$ функция учун Дарбунинг қуйи йиғиндиси,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\Delta y_k\Big)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}D_{ik}=S$$

эса Дарбунинг юқори йиғиндисидир. Демак,

$$s\leqslant\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i\leqslant S. \tag{18.12}$$

Шартга кўра $f(x, y)$ функция (D) да интегралланувчи. У ҳолда $\lambda_{P_{nm}}\to$ $\to 0$ да

$$s\to\iint_{(D)} f(x, y)\,dD,\quad S\to\iint_{(D)} f(x, y)\,dD$$

бўлади.

(18.12) муносабатдан эса,

$$\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

йиғиндининг лимитга эга бўлиши ва бу лимит

$$\iint_{(D)} f(x, y)\,dD$$

га тенг бўлиши келиб чиқади:

$$\lim_{\lambda_{P_{nm}}\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i=\iint_{(D)} f(x, y)dD.$$

Агар

$$\lim_{\lambda_{P_{nm}}\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b I(x)dx$$

ва

$$\int_a^b I(x)\,dx=\int_a^b\Big[\int_c^d f(x, y)\,dy\Big]dx$$

эканлигини эътиборга олсак, унда

$$\iint_{(D)} f(x, y)\,dD=\int_a^b\Big[\int_c^d f(x, y)\,dy\Big]dx$$

бўлишини топамиз. Бу эса теоремани исботлайди.

18.7-теорема. *$f(x, y)$ функция $(D)=\{(x, y)\in R^2 : a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$ соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар y ($y\in[c, d]$) ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида*

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y)\, dD = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy$$

бўлади.

Бу теореманинг исботи юқоридаги теореманинг исботи кабидир.

18.6-теорема ва 18.7-теоремалардан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

18.4-натижа. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $x\ (x \in [a, b])$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида $\int_c^d f(x, y)\, dy$ интеграл мавжуд бўлса, $y\ (y \in [c, d])$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида $\int_a^b f(x, y) dx$ интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx, \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy \tag{18.13}$$

интеграллар ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy$$

бўлади.

18.5-натижа. Агар $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(D)} f(x, y)\, dD, \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx, \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy$$

интегралларнинг ҳар бири мавжуд ва улар бир-бирига тенг бўлади.

(18.13) интеграллар, тузилишига кўра, икки аргументли функциядан аввал бир аргументи бўйича (иккинчи аргументини ўзгармас ҳисоблаб туриб), сўнг иккинчи аргументи бўйича олинган интеграллардир. Бундай интегралларни *такрорий интеграллар* деб аташ (такрорий лимитлар сингари) табиийдир.

Шундай қилиб, қаралаётган ҳолда каррали интегралларни ҳисоблаш такрорий интегралларни ҳисоблашга келтирилар экан. Такрорий интегрални ҳисоблаш эса иккита оддий (бир аргументли функциянинг интегралини) Риман интегралини кетма-кет ҳисоблаш демакдир.

18.2-эслатма. Юқорида келтирилган 18.6-теоремани исботлаш жараёнида кўрдикки, тўғри тўртбурчак (D) соҳа, томонлари мос равишда Δx_i, Δy_k бўлган тўғри тўртбурчак соҳалар (D_{i0}) ларга ажратилди. Равшанки, бу элементар соҳанинг юзи $D_{ik} = \Delta x_i \Delta y_0$ бўлади.

Аввал айтганимиздек, Δx ни dx га, Δy ни dy га алмаштириш мумкинлигини ҳамда $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ эканини эътиборга олиб, бундан буён интегрални ушбу

$$\iint_{(D)} f(x\ y),\ dD$$

кўринишда ёзиш ўрнига

$$\int_a^b \int_c^d f(x,\ y) dy\, dx \left(\text{ёки } \int_c^d \int_a^b f(x,\ y)\, dx\, dy \right)$$

каби ҳам ёзиб кетаверамиз.

Мисол. Ушбу

$$\iint_{(D)} \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\, dx\, dy$$

интеграл ҳисоблансин, бунда $(D) = \{x,\ y) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Интеграл остидаги

$$f(x,\ y) = \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

функция (D) соҳада узлуксиз. Унда қаралаётган икки каррали интеграл ҳам,

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\, dx$$

интеграл ҳам мавжуд. 18.7-теоремага кўра

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\, dx \right] dy$$

интеграл мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D)} \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\, dx \right] dy$$

бўлади.

Агар

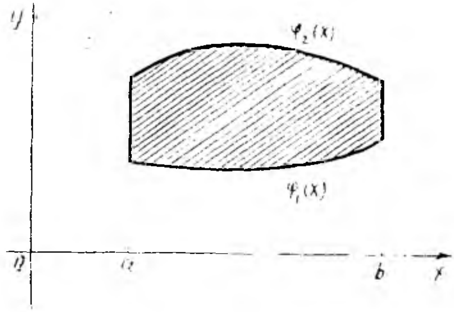
$$\int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} d(1+x^2+y^2) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+2}}$$

бўлишини ҳисобга олсак, унда

$$\iint_{(D)} \frac{x dx\, dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+2}} \right] dy =$$

$$=]\ln(y + \sqrt{y^2+1}) - \ln(y + \sqrt{y^2+2})]_0^1 = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$$



18- чизма

эканини топамиз. Демак.

$$\iint\limits_{(D)} \frac{x\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

Энди (D) соҳа ушбу

$$(D) = \{(x, y)\in R^2 : a\leqslant x\leqslant b.\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$$

кўринишда бўлсин. Бунда $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ $[a, b]$ да берилган ва узлуксиз функциялар (18- чизма).

18.8- теорема. *$f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $x\,(x\in[a,b])$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида*

$$I(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\int\limits_a^b\Big[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\Big]dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dD = \int\limits_a^b\Big[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\Big]\,dx$$

бўлади.

Исбот. $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар $[a, b]$ да узлуксиз. Вейерштрасс теоремасига кўра бу функциялар $[a, b]$ да ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришади. Уларни

$$\min_{a\leqslant x\leqslant b}\varphi_1(x) = c,\quad \max_{a\leqslant x\leqslant b}\varphi_2(x) = d$$

деб белгилайлик.

Энди

$$(D_1) = \{\,(x, y)\in R^2 : a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$$

соҳада ушбу

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{агар } (x, y)\in(D) \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } (x, y)\in(D_1)\setminus(D) \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни қарайлик.

Равшанки, теорема шартларида бу функция (D_1) соҳада интегралланувчи ва интеграл хоссасига кўра

$$\iint\limits_{(D_1)} f^*(x, y)dD = \iint\limits_{(D)} f^*(x, y)dD + \iint\limits_{(D_1)\setminus(D)} f^*(x,y)dD =$$

$$= \iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dD \qquad (18.14)$$

бўлади. Шунингдек, $x(x\in[a,b])$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$I_1(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$

интеграл мавжуд ва

$$I_1(x)=\int_c^d f^*(x,y)dy=\int_c^{\varphi_1(x)} f^*(x,y)dy+\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x,y)\,dy+$$

$$+\int_{\varphi_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (18.15)$$

бўлади. Унда 18.6- теоремага кўра

$$\int_a^b\Big[\int_c^d f^*(x,y)dy\Big]dx$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(D_1)} f^*(x,y)\,dD=\int_a^b\Big[\int_c^d f^*(x,y)dy\Big]dx$$

бўлади.

(18.14) ва (18.15) муносабатдан

$$\iint_{(D)} f(x,y)\,dD=\int_a^b\Big[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\Big]dx$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Энди (D) соҳа ушбу

$$(D)=\{(x,y)\in R^2:\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi(y),\ c\leqslant y\leqslant d\}$$

кўринишда бўлсин. Бунда $\psi_1(y)$ ва $\psi_2(y)$ $[c,d]$ да берилган узлуксиз функциялар (19- чизма).

18.9- теорема. *$f(x,y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар $y(y\in[c,d])$ ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида*

$$I(y)=\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

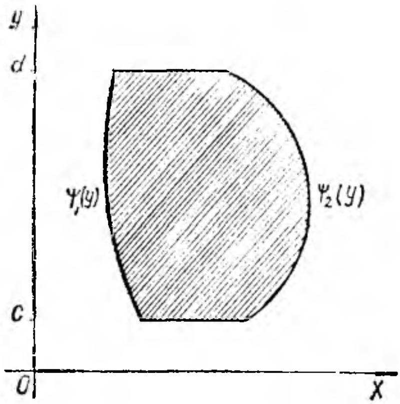
$$\int_c^d\Big[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\Big]dy$$

интеграл ҳам мавжуд бўлади ва

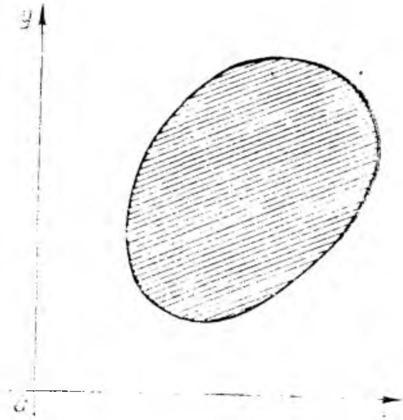
$$\iint_{(D)} f(x,y)\,dD=\int_c^d\Big[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\Big]dy$$

бўлади.

Бу теореманинг исботи 18.8- теореманинг исботи кабидир.



19- чизма



20- чизма

Фараз қилайлик, (D) соҳа ($(D)\subset R^2$) юқорида қаралган соҳаларнинг ҳар бирининг хусусиятига эга бўлсин (20- чизма).

18.6- натижа. $f(x, y)$ функция (D) соҳада берилган ва интегралланувчи бўлсин. Агар x ($x\in[a, b]$ ўзгарувчининг ҳар бир тийин қийматида

$$\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$$

интеграл мавжуд бўлса, y ($y\in[c, d]$) ўзгарувчининг ҳар бир тайин қийматида

$$\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$$

интеграл мавжуд бўлса, у холда

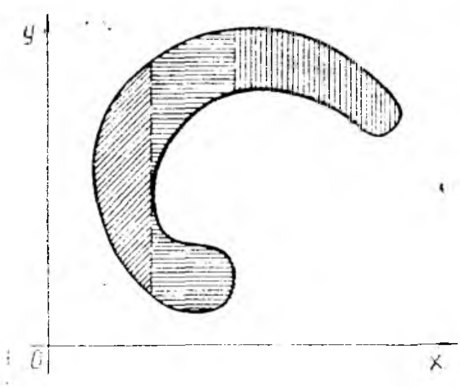
$$\int\limits_a^b\Big[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\Big]dx,\quad \int\limits_c^d\Big[\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx\Big]dy$$

интеграллар ҳам мавжуд ва

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dD=\int\limits_a^b\Big[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)dy\Big]dx=$$

$$=\int\limits_c^d\Big[\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx\Big]dy$$

бўлади.



21 - чизма

Бу натижанинг исботи 18.8-теорема ва 18.9-теоремадан келиб чиқади.

Агар (D) соҳа 21-чизмада тасвирланган соҳа бўлса, у ҳолда бу соҳа юқорида ўрганилган соҳалар кўринишига келадиган қилиб бўлакларга ажратилади. Натижада (D) соҳа бўйича икки каррали интеграл ажратилган соҳалар бўйича икки каррали интеграллар йиғиндисига тенг бўлади. Шундай қилиб, биз интеграллаш соҳаси (D) нинг етарли кенг синфи учун каррали инитегралларни такрорий интегралларга келтириб ҳисоблаш мумкинлигини кўрамиз.

Мисоллар. **1.** Ушбу

$$\iint\limits_{(D)} e^{-y^2}\,dx\,dy$$

интегрални қарайлик, бунда $(D)=\{(x,y)\in R^2: 0\leqslant x\leqslant y,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1\}$. Бу ҳолда 18.7-теореманинг барча шартлари бажарилади. Ўша теоремага кўра

$$\iint\limits_{(D)} e^{-y^2}\,dx\,dy=\int_0^1\Big[\int_0^y e^{-y^2}\,dx\Big]\,dy$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларни ҳисоблаб қуйидагиларни топамиз:

$$\int_0^y e^{-y^2}\,dx=ye^{-y^2},$$

$$\int_0^1 ye^{-y^2}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-y^2}\,d(y^2)=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

Демак,

$$\iint\limits_{(D)} e^{-y^2}\,dx\,dy=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

2. Ушбу

$$\iint\limits_{(D)} xy\,dx\,dy$$

интегрални қарайлик, бунда $(D)=\{(x,y)\in R^2: 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$. Бу ҳолда 18.6-теореманинг барча шартлари бажарилади. Унда

$$\iint\limits_{(D)} xy\,dx\,dy=\int_0^1 x\Big[\int_0^{1-x} y\,dy\Big]dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx=\frac{1}{24}$$

бўлади.

3. Ушбу

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{x+y}\,dx\,dy$$

интегрални қарайлик, бунда $(D)=\{(x,y)\in R^2: 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$. Бу ҳолда 18.6-теореманинг барча шартлари бажарилади. Ўша теоремага кўра

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{x+y}\,dx\,dy=\int_0^1\Big[\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,dy\Big]\,dx$$

бўлади. Интегралларни ҳисоблаб топамиз:

$$\int_0^1\Big[\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,dy\Big]dx=\int_0^1\left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+y)^3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}dx=$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (1 - \sqrt{x^3})\, dx = \frac{2}{5}.$$

Демак,

$$\iint_{(D)} \sqrt{x+y}\, dx\, dy = \frac{2}{5}.$$

Бу келтирилган мисолларда содда функцияларнинг содда соҳа бўйича икки каррали интеграллари қаралди. Кўп ҳолларда содда функцияларни мураккаб соҳа бўйича, мураккаб функцияларни содда соҳа бўйича ва айниқса, мураккаб функцияларни мураккаб соҳа бўйича икки каррали интегралларини ҳисоблашга тўғри келади. Бундай интегралларни ҳисоблаш эса анча қийин бўлади.

7- §. Икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш

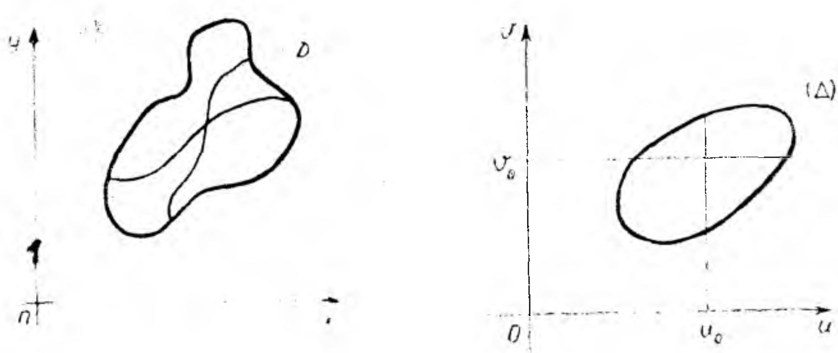
$f(x, y)$ функция (D) соҳада ($(D) \subset R^2$) берилган бўлсин. Бу функциянинг икки каррали

$$\iint_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy \tag{18.16}$$

интеграли мавжудлиги маълум бўлиб, уни ҳисоблаш талаб этилсин. Равшанки, $f(x, y)$ функция ҳамда (D) соҳа мураккаб бўлса, (18.16) интегрални ҳисоблаш қийин бўлади. Кўпинча, x ва y ўзгарувчиларни, маълум қоидага кўра бошқа ўзгарувчиларга алмаштириш натижасида интеграл остидаги функция ҳам, интеграллаш соҳаси ҳам соддалашиб, икки каррали интегрални ҳисоблаш осонлашади.

Ушбу параграфда икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш билан шуғулланамиз. Аввало текисликда соҳани соҳага акслантириш, эгри чизиқли координаталар ҳамда соҳанинг юзини эгри чизиқли координаталарда ифодаланишини келтирамиз.

Иккита текислик берилган бўлсин (22-чизма). Биринчи текисликда тўғри бурчакли Oxy координата системасини ва чегараланган (D) соҳани қарайлик. Бу соҳанинг чегараси $\partial(D)$ содда, бўлакли-силлиқ чизиқдан иборат бўлсин. Иккинчи текисликда эса тўғри бурчакли Ouv



22-чизма

координата системасини ва чегараланган (Δ) соҳани қарайлик. Бу соҳанинг чегараси $\partial(\Delta)$ ҳам содда, бўлакли-силлиқ чизиқдан иборат бўлсин.

$\varphi(u, v)$ ва $\psi(u, v)$ лар (Δ) соҳада берилган шундай функциялар бўлсинки, улардан тузилган $\{\varphi(u, v), \psi(u, v)\}$ система (Δ) соҳадаги (u, v) нуқтани (D) соҳадаги (x, y) нуқтага акслантирсин:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &: (u, v) \to x, \\ \psi &: (u, v) \to y. \end{aligned}\right\}$$

Ва бу акслантиришнинг аксларидан иборат $\{(x, y)\}$ тўплам (D) га тегишли бўлсин.

Демак, ушбу

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}\right\} \tag{18.17}$$

система (Δ) соҳани (D) соҳага акслантиради.

Бу акслантириш қуйидаги шартларни бажарсин:

1°. (18.17) акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш, яъни (Δ) соҳанинг турли нуқталарини (D) соҳанинг турли нуқталарига акслантириб, (D) соҳадаги ҳар бир нуқта учун (Δ) соҳада унга мос келадиган нуқта биттагина бўлсин.

Равшанки, бу ҳолда (18.17) система u ва v ларга нисбатан бир қийматли ечилади: $u = \varphi_1(x, y)$, $v = \psi_1(x, y)$ ва ушбу

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_1(x, y), \\ v &= \psi_1(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{18.18}$$

система билан акслантириш юқоридаги акслантиришга тескари бўлиб (D) соҳани (Δ) соҳага акслантиради. Демак,

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\varphi_1(x, y), \psi_1(x, y)) &\equiv x, \\ \psi(\varphi_1(x, y), \psi_1(x, y)) &\equiv y. \end{aligned}\right\} \tag{18.19}$$

2°. $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ функциялар (Δ) соҳада, $\varphi_1(x, y)$ ва $\varphi_1(x, y)$ функциялар (D) соҳада узлуксиз ва барча хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар ҳам узлуксиз бўлсин.

3°. (18.17) системадаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларидан тузилган ушбу

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{18.20}$$

функционал детерминант (Δ) соҳада нолдан фарқли (яъни (Δ) соҳанинг ҳар бир нуқтасида нолдан фарқли) бўлсин. Одатда (18.20) детерминантни системанинг *якобиани* дейилади ва $I(u, v)$ ёки $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ каби белгиланади.

Бу 2° ва 3°-шартлардан, (Δ) боғламли соҳа бўлганда, (18.20) якобианнинг шу соҳада ўз ишорасини сақлаши келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, $I(u, v)$ функция (Δ) соҳанинг иккита турли нуқталарида турли ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда 12-бобнинг

5-§ идаги 12.13-теоремага кўра, (Δ) да шундай (u_0, v_0) нуқта топиладики, $I(u_0, v_0)=0$ бўлади. Бу эса $I(u, v)\neq 0$ бўлишига зиддир.

3°-шартдан (18.18) системанинг якобиани, яъни ушбу

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{18.21}$$

функционал детерминантнинг ҳам (D) соҳада нолдан фаркли бўлиши келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, (18.19) муносабатдан

$$\frac{\partial x}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\cdot\frac{D(u, v)}{D(x, y)}=1$$

бўлиб,

$$I_1(x, y)=\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\neq 0$$

бўлишини топамиз.

Демак, (D) боғламли соҳа бўлганда (18.21) якобиан ҳам (D) соҳада ўз ишорасини сақлайди.

Юқоридаги шартлардан яна қуйидагилар келиб чиқади.

(18.17) акслантириш (Δ) соҳанинг ички нуқтасини (D) соҳанинг ички нуқтасига акслантиради. Ҳақиқатан ҳам, ошкормас функциянинг мавжудлиги ҳақидаги теоремага кўра (18.17) система (x_0, y_0) нуқтанинг бирор атрофида u ва v ларни x ва y ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлайди: $u=\varphi_1(x, y)$, $v=\psi_1(x, y)$. Бунда $\varphi_1(x_0, y_0)=u_0$, $\psi_1(x_0, y_0)=v_0$ бўлади. Демак, (x_0, y_0) (D) соҳанинг ички нуқтаси. Бундан (18.17) акслантириш (Δ) соҳанинг чегараси $\partial(\Delta)$ ни (D) соҳанинг чегараси $\partial(D)$ га акслантириши келиб чиқади.

Шунингдек, (18.17) акслантириш (Δ) соҳадаги силлиқ (бўлакли-силлиқ) эгри чизиқ

$$\left.\begin{array}{l} u=u(t) \\ v=v(t) \end{array}\right\} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

ни (D) соҳадаги силлиқ (бўлакли-силлиқ) эгри чизиқ

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(u(t), v(t)) \\ y=\psi(u(t), v(t)) \end{array}\right\}$$

га акслантиради.

(Δ) соҳада $u=u_0$ тўғри чизиқни олайлик. (18.17) акслантириш бу тўғри чизиқни (D) соҳадаги

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(u_0,\ v), \\ y=\psi(u_0,\ v) \end{array}\right\} \tag{18.22}$$

эгри чизиққа акслантиради. Худди шундай (Δ) соҳадаги $v=v_0$ тўғри чизиқни (18.17) акслантириш (D) соҳадаги

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(u,\ v_0), \\ y=\psi(u,\ v_0) \end{array}\right\} \tag{18.23}$$

эгри чизиққа акслантиради. Одатда, (18.22) ва (18.23) эгри чизиқларни координат чизиқлари ((18.22) ни v координат чизиғи, (18.23) ни эса u координат чизиғи) деб аталади.

Модомики, (18.17) акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш экан, унда (D) соҳанинг ҳар бир $(x,\ y)$ нуқтасидан ягона v — координат чизиғи (u нинг тайин ўзгармас қийматига мос бўлган чизиқ), ягона u — координат чизиғи (v нинг тайин ўзгармас қийматига мос бўлган чизиқ) ўтади. Демак, (D) соҳанинг шу $(x,\ y)$ нуқтаси юқорида айтилган u ва v лар билан, яъни (Δ) соҳанинг $(u,\ v)$ нуқтаси билан тўла аниқланади. Шунинг учун u ва v ларни (D) соҳа нуқталарининг координаталари деб қараш мумкин. (D) соҳа нуқталарининиг бундай координаталари эгри чизиқли координаталар деб аталади.

Шундай қилиб, u ва v лар бир томондан (Δ) соҳа нуқтасининг Декарт координаталари, иккинчи томондан худди шу u ва v лар (D) соҳа нуқтасининг эгри чизиқли координаталари бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{array}\right\} \quad (\rho\geqslant 0,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi)$$

системани қарайлик.

Бу система $(\Delta)=\{(u,\ v)\in R^2: 0\leqslant\rho<+\infty,\ 0\leqslant\varphi<2\pi\}$ соҳани Oxy текисликка акслантиради. Бу системанинг якобиани

$$I(u,\ v)=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}=\rho$$

бўлади.

ρ ва φ лар (D) соҳа нуқталарининг эгри чизиқли координаталари бўлиб, шу соҳанинг координат чизиқлари эса, маркази (0, 0) нуқтада, радиуси ρ га тенг ушбу

$$x^2+y^2=\rho^2$$

айланалардан (v — координат чизиқлари) ҳамда (0, 0) нуқтадан чиққан $\varphi=\rho_0$ $(0\leqslant\rho_0<2\pi)$ нурлардан (v — координат чизиқлар) иборатдир.

Фараз қилайлик, ушбу

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(u,\ v) \\ y=\psi(u,\ v) \end{array}\right\} \tag{18.17}$$

система (Δ) соҳани (D) соҳага акслантирсин. Бу акслантириш юқоридаги 1° — 3°-шартларни бажарсин. У ҳолда, (D) соҳанинг юзи

$$D = \iint\limits_{(D)} \left| I(u, v) \right| du\ dv = \iint\limits_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du\ dv \tag{18.24}$$

бўлади.

Бу формуланинг исботи кейинги бобда келтирилади (қаранг, 19-боб, 3-§).

$f(x, y)$ функция (D) соҳада $((D) \subset R^2)$ берилган ва шу соҳада узлуксиз бўлсин. (D) эса содда, бўлакли-силлиқ чизиқ билан чегараланган соҳа бўлсин. Равшанки, $f(x, y)$ функция (D) соҳада интегралланувчи бўлади.

Айтайлик, ушбу

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}\right\} \tag{18.17}$$

система (Δ) соҳани (D) соҳага акслантирсин ва бу акслантириш юқоридаги 1° — 3°-шартларни бажарсин.

Ҳар бир бўлувчи чизиғи бўлакли-силлиқ бўлган (Δ) соҳанинг P_Δ бўлинишини олайлик. (18.17) акслантириш натижасида (D) соҳанинг P_D бўлиниши ҳосил бўлади. Бу бўлинишга нисбатан $f(x, y)$ функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

ни тузамиз. Равшанки,

$$\lim_{\lambda_{P_D} \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_{P_D} \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) D_k = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{18.25}$$

Юқорида келтирилган (18.24) формулага кўра

$$D_k = \iint\limits_{(D_k)} |I(u, v)|\, du\ dv$$

бўлади. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$D_k = |I(u_k^*, v_k^*)| \cdot \Delta_k \quad ((u_k^*, v_k^*) \in (\Delta_k)),$$

бунда Δ_k — (Δ_k) нинг юзи. Натижада (18.26) йиғинди ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot | I(u_k^*, v_k^*) \cdot \Delta_k$$

кўринишга келади.

(ξ_k, η_k) нуқтанинг (D_k) соҳадаги ихтиёрий нуқта эканлигидан фойдаланиб, уни

$$\varphi(u_k^*, v_k^*) = \xi_k,$$
$$\psi(u_k^*, v_k^*) = \eta_k$$

деб олиш мумкин. У ҳолда

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(u_k^*, v_k^*), \psi(u_k^*, v_k^*) \,|\, I(u_k^*, v_k^*)| \cdot \Delta_k$$

бўлади.

Равшанки,

$$f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot |I(u, v)|$$

функция (Δ) соҳада узлуксиз. Демак, у шу соҳада интегралланувчи. У ҳолда

$$\lim_{\lambda_{P_\Delta}\to 0} \sigma = \lim_{\lambda_{P_\Delta}\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(u_k^*, v_k^*), \psi(u_k^*, v_k^*)) |I(u_k^*, v_k^*)\Delta_k =$$

$$= \iint_{(\Delta)} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I(u, v)| du\, dv \qquad (18.26)$$

бўлади.

$\lambda_{P_\Delta} \to 0$ да $\lambda_{P_D} \to 0$ бўлишини эътиборга олиб, (18.25) ва (18.26) муносабатлардан

$$\iint_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{(\Delta)} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I(u, v)| du\, dv \qquad (18.27)$$

бўлишини топамиз.

Бу икки каррали интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласидир.

У берилган (D) соҳа бўйича интегрални ҳисоблашни (Δ) соҳа бўйича интегрални ҳисоблашга келтиради. Агарда (18.27) да ўнг томондаги интегрални ҳисоблаш енгил бўлса, бажарилган ўзгарувчиларни алмаштириш ўзини оқлайди.

Мисол. Ушбу

$$\iint_{(D)} \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\, dx\, dy$$

интегрални қарайлик, бунда

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$$

маркази (0, 0) нуқтада, радиуси 1 га тенг бўлган юқори текисликдаги ярим доира. Берилган интегралда ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштирамиз:

$$x = \rho \cos \varphi,$$
$$y = \rho \sin \varphi.$$

Бу алмаштириш ушбу

$$(\Delta) = \{(\rho, \varphi) \in R^2 : 0 < \varphi < \pi,\ 0 < \rho < 1\}$$

тўғри тўртбурчакни (D) соҳага акслантиради ва у $1^\circ - 3^\circ$- шартларни қаноатлантиради. Унда (18.27) формулага кўра

$$\iint_{(D)} \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\, dx\, dy = \iint_{(\Delta)} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\, |I(\rho, \varphi)|\, d\rho d\varphi$$

бўлади. Бунда якобиан $I(\rho, \varphi) = \rho$ бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаб топамиз:

$$\iint_{(\Delta)} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\, |I(\rho, \varphi)|\, d\rho\, d\varphi = \int_0^1 \left(\int_0^\pi d\varphi\right) \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\, \rho\, d\rho =$$

$$= \pi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\, \rho\, d\rho = \frac{\pi}{4}(\pi - 2).$$

Демак,

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy = \frac{\pi}{4}(\pi-2)$$

8- §. Икки каррали интегрални тақрибий ҳисоблаш

$f(x, y)$ функция (D) соҳада $((D) \subset R^2)$ берилган ва шу соҳада интегралланувчи, яъни

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\, dx\, dy \tag{18.28}$$

интеграл мавжуд бўлсин. Маълум кўринишга эга бўлган (D) соҳалар учун бундай интегрални ҳисоблаш 6- § да келтирилди. Равшанки, $f(x, y)$ функция мураккаб бўлса, шунингдек, интеграллаш соҳаси мураккаб кўринишга эга бўлса, унда (18.28) интегрални ҳисоблаш анча қийин бўлади ва кўп ҳолларда бундай интегрални тақрибий ҳисоблашга тўғри келади.

Ушбу параграфда (18.28) интегрални тақрибий ҳисоблашни амалга оширадиган содда формулалардан бирини келтирамиз.

Айтайлик, $f(x, y)$ функция $(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ *тўғри тўртбурчакда берилган ва узлуксиз бўлсин.* Унда 6- § да келтирилган формулага кўра

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_c^d f(x, y)\, dy\Big] dx \tag{18.29}$$

бўлади.

Энди

$$\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \quad (x \in [a, b])$$

интегралга 1-қисм, 9- боб, 11- § даги (9.52) формулани — тўғри тўртбурчаклар формуласини татбиқ этиб, ушбу

$$\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \approx \frac{d-c}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x, y_{k+\frac{1}{2}}) \quad (x \in [a, b]) \tag{18.30}$$

тақрибий формулани ҳосил қиламиз. Сўнг

$$\int\limits_a^b f(x, y_{k+\frac{1}{2}})\, dx$$

интегралга яна ўша (9.53) формулани қўллаб, қуйидаги

$$\int\limits_a^b f(x, y_{k+\frac{1}{2}})\, dx \approx \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}) \tag{18.31}$$

тақрибий формулага келамиз.

Натижада (18.29), (18.30) ва (18.31) муносабатлардан

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{nm} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{i+\frac{1}{2}},\ y_{k+\frac{1}{2}}\right) \qquad (18.32)$$

бўлиши келиб чиқади.

Бу икки каррали интегрални тақрибий ҳисоблаш формуласи, «тўғри тўртбурчаклар» формуласи деб аталади.

Шундай қилиб, «тўғри тўртбурчаклар» формуласида, икки каррали интеграл махсус тузилган йиғинди билан алмаштирилади. Бу йиғинди эса қуйидагича тузилади:

$(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ — тўғри тўртбурчак nm та тенг $(D_{ik}) = \{(x, y) \in R^2 : x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1},\ y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1;\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ тўғри тўртбурчакларга ажратилади. Бунда

$$x_i = a + i\frac{b-a}{m},\quad y_k = c + k\frac{d-c}{n}.$$

Ҳар бир (D_{ik}) нинг маркази бўлган $\left(x_{i+\frac{1}{2}},\ y_{k+\frac{1}{2}}\right)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1;\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ нуқтада $f(x, y)$ функциянинг қиймати $f\left(x_{i+\frac{1}{2}},\ y_{k+\frac{1}{2}}\right)$ ҳисобланиб, уни шу (D_{ik}) нинг юзига кўпайтирилади. Сўнгра улар барча i ва k лар $(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1;\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ бўйича йиғилади.

Одатда, ҳар бир тақрибий формуланинг хатолиги топилади ёки баҳоланади. Келтирилган (18.32) тақрибий формуланинг хатолигини ҳам ўрганиш мумкин.

Мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(D)} \frac{1}{(x+y+1)^2}\,dx\,dy$$

интегрални қарайлик, бунда $(D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Уни тақрибий ҳисоблаймиз. (D) ни ушбу тўртта тенг бўлакка бўламиз:

$$(D_{00}) = \left\{(x, y) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\right\},$$

$$(D_{01}) = \left\{(x, y) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1\right\},$$

$$(D_{10}) = \left\{(x, y) \in R^2 : \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\right\},$$

$$(D_{11}) = \left\{(x, y) \in R^2 : \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,\ \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1\right\}.$$

Бу бўлакларнинг марказлари

$$\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right),\ \left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right)$$

нуқталарда

$$f(x,\ y) = \frac{1}{(1+x+y)^2}$$

функциянинг қийматларини ҳисоблаб, (18.32) формулага кўра

$$\iint\limits_{(D)} \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dx\,dy \approx 0{,}2761$$

бўлишини топамиз. Бу интегралнинг аниқ қиймати эса

$$\iint\limits_{(D)} \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x+y)^2}\right]dy = \ln\frac{4}{3} = 0{,}287682\ \ldots$$

бўлади.

9- §. Икки каррали интегралнинг баъзи бир татбиқлари

Ушбу параграфда икки каррали интегралнинг баъзи бир татбиқларини келтирамиз.

1. Жисмнинг ҳажми ва унинг икки каррали интеграл орқали ифодаланиши. R^3 фазода бирор чегараланган (V) жисмни қарайлик. Бу (V) жисмнинг ичига (A) кўпёқлар жойлашган, ўз навбатида (V) жисм эса (B) кўпёқлар ичида жойлашган бўлсин. (A) кўпёқлар ҳажмларини V_A билан, (B) кўпёқлар ҳажмлирини V_B билан белгилайлик. Биз кўпёқларнинг ҳажмлари тушунчасини ва уни ҳисоблашни (худди текисликдаги кўпбурчакнинг юзи тушунчаси ва уни ҳисоблаш каби) биламиз деб оламиз. Натижада (V) жисмнинг ичида жойлашган кўпёқлар ҳамжларидан иборат $\{V_A\}$ тўплам, ичига (V) жисм жойлашган кўпёқлар ҳажмларидан иборат $\{V_B\}$ тўпламлар ҳосил бўлади. $\{V_A\}$ тўплам юқоридан, $\{V_B\}$ тўплам қуйидан чегараланганлиги сабабли $\{V_A\}$ тўплам аниқ юқори чегарага, $\{V_B\}$ тўплам эса аниқ қуйи чегарага эга бўлади:

$$\sup\ \{V_A\} = \underline{V},\quad \inf\ \{V_B\} = \overline{V}.$$

Равшанки,

$$\underline{V} \leqslant \overline{V}.$$

18.8-таъриф. Агар $\underline{V} = \overline{V}$, яъни $\sup\ \{V_A\} = \inf\ \{V_B\}$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда (V) жисм *ҳажмга эга* деб аталади ва $V = \underline{V} = \overline{V}$ миқдор (V) *жисмнинг ҳажми* дейилади.

Демак,

$$V = \sup\ \{V_A\} = \inf\ \{V_B\}.$$

Энди (V) жисм сифатида юқоридан $z = f(x,\ y)$ сирт билан, ён томонларидан ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик сирт ҳамда пастдан Oxy текислигидаги (D) соҳа билан чегараланган жисмни қарайлик.

(D) ёпиқ соҳанинг P бўлинишини оламиз. $f(x, y)$ функция (D) да узлуксиз бўлганлиги сабабли, бу функция P бўлинишнинг ҳар бир (D_k) бўлагида ҳам узлуксиз бўлиб, унда

$$\inf \{f(x, y) : (x, y) \in (D_k)\} = m_k, \ \sup \{f(x, y) : (x, y) \in (D_k)\} = M_k$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$ ларга эга бўлади.

Қуйидаги

$$V_A = \sum_{k=1}^{n} m_k D_k$$

$$V_B = \sum_{k=1}^{n} M_k D_k$$

йиғиндиларни тузамиз. Бу йиғиндиларнинг биринчиси (V) жисм ичига жойлашган кўпёқнинг ҳажмини, иккинчиси эса (V) жисмни ўз ичига олган кўпёқнинг ҳажмини ифодалайди.

Равшанки, бу кўпёқлар, демак, уларнинг ҳажмлари ҳам $f(x, y)$ функцияга ҳамда (D) соҳанинг бўлинишига боғлиқ бўлади:

$$V_A = V_A^P(f), \ V_B = V_B^P(f).$$

(D) соҳанинг турли бўлинишлари олинса, уларга нисбатан (V) жисмнинг ичига жойлашган ҳамда (V) жисмни ўз ичига олган турли кўпёқлар ясалади. Натижада бу кўпёқлар ҳажмларидан иборат қуйидаги

$$\{V_A^P(f)\}, \ (V_B^P(f)\}$$

тўпламлар ҳосил бўлади. Бунда $\{V_A^P(f)\}$ тўплам юқоридан, $\{V_B^P(f)\}$ тўплам эса қуйидан чегараланган бўлади. Демак, бу тўпламларнинг аниқ чегаралари

$$\sup \{V_A^P(f)\}, \ \inf \{V_B^P(f)\}$$

мавжуд. Шартга кўра $f(x, y)$ функция (D) ёпиқ соҳада узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига асосан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{D}$ сонга кўра шундай $\delta > 0$ сон топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши P учун ҳар бир (D_k) да функциянинг тебраниши

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{D}$$

бўлади. Унда

$$\inf \{V_B^P(f)\} - \sup \{V_A^P(f)\} \leqslant V_B^P(f) - V_A^P(f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot D_k - \sum_{k=1}^{n} m_k D_k = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) D_k <$$

$$< \frac{\varepsilon}{D} \sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{\varepsilon}{D} D = \varepsilon.$$

Демак, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши олинганда ҳам бу бўлинишга мос (V) жисмнинг ичига жойлашган ҳамда бу (V) ни ўз ичига олган кўпёқ ҳажмлари учун ҳар доим

$$0 \leqslant \inf \{V_B^P(f)\} - \sup \{V_A^P(f)\} < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан эса

$$\inf \{V_B^P(f)\} = \sup \{V_A^P(f)\} \tag{18.33}$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенглик (V) жисм ҳажмга эга бўлишини билдиради.

Энди юқорида ўрганилган $V_A^P(f)$, $V_B^P(f)$ йиғиндиларни Дарбу йиғиндилари билан таққослаб, $V_A^P(f)$ ҳам $V_B^P(f)$ йиғиндилар $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳада мос равишда Дарбунинг қуйи ҳамда юқори йиғиндилари эканини топамиз. Шунинг учун ушбу

$$\sup \{V_A^P(f)\}, \ \inf \{V_B^P(f)\}$$

миқдорлар $f(x, y)$ функциянинг қуйи ҳамда юқори икки каррали интеграллари бўлади, яъни

$$\sup \{V_A^P(f)\} = \underline{\iint_{(D)}} f(x, y) \, dD, \ \inf \{V_B^P(f)\} = \overline{\iint_{(D)}} f(x, y) \, dD.$$

Юқоридаги (18.33) муносабатга кўра

$$\underline{\iint_{(D)}} f(x, y) \, dD = \overline{\iint_{(D)}} f(x, y) \, dD$$

тенглик ўринли экани кўринади. Демак.

$$\iint_{(D)} f(x \ y) dD = \underline{\iint_{(D)}} f(x, y) \, dD = \overline{\iint_{(D)}} f(x, y) \, dD.$$

Шундай қилиб, бир томондан, қаралаётган (V) жисм ҳажмга эга экани иккинчи томондан, унинг ҳажми $f(x, y)$ функциянинг (D) соҳа бўйича икки каррали интегралига тенг экани исбот этилди. Демак, (V) жисмнинг ҳажми учун ушбу

$$V = \iint_{(D)} f(x, y) \, dD \tag{18.34}$$

формула ўринли.

Мисол. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

эллипсоиднинг ҳажми топилсин. Бу эллипсоид $z = 0$ текисликка нисбатан симметрикдир. Юқори қисмини $(z \geqslant 0)$ ўраб турган сирт

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

бўлади.

Юқоридаги (18.34) формулага кўра эллипсоиднинг ҳажми V:

$$V = 2c \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy$$

бўлади, бунда

$$(D) = \left\{(x,\ y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}.$$

Интегралда

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,\rho \cos\varphi \\ y &= b\,\rho\ \cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (18.35)$$

алмаштиришни бажарамиз. Бу систёманинг якобиани

$$I\ (\rho,\ \varphi) = \begin{vmatrix} a\ \cos\varphi & b\ \sin\varphi \\ -a\,\rho\ \sin\varphi & b\,\rho\ \sin\varphi \end{vmatrix} = ab\,\rho$$

бўлади. (18.35) система $(\Delta) = \{(\rho,\ \varphi) \in R^2 : 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ соҳани (D) соҳага акслантиради. (18.27) формулага кўра

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\ dx\ dy = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{1-\rho^2}\ \ ab\ \rho\ d\rho\ d\varphi$$

бўлади. Демак,

$$V = 2\ abc \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{1-\rho^2}\ \rho\ d\ \rho\, d\varphi = 2\ abc \int\limits_0^1 (\int\limits_0^{2\pi} d\varphi)\ \sqrt{1-\rho^2}\ \rho\ d\rho =$$

$$= 4\,\pi\, abc \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\, d\,\rho = \frac{4\,\pi}{3}\ a\,b\,c.$$

Шундай қилиб, эллипсоиднинг ҳажми

$$V = \frac{4}{3}\ \pi\, abc$$

бўлади.

2. Ясси шаклнинг юзи. Ушбу бобнинг 1-§ нда (D) соҳанинг юзи қуйидаги

$$D = \iint\limits_{(D)} dD = \iint\limits_{(D)} dxdy$$

интегралга тенг бўлишини кўрдик. Демак, икки каррали интеграл ёрдамида ясси шаклнинг юзини ҳисоблаш мумкин экан.

Хусусан, соҳа

$$(D)\ \{(x,\ y) \in R^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f\ (x)\}$$

эгри чизиқли трапециядан иборат бўлса ($f\ (x)$ функция $[a,\ b]$ да узлуксиз, у ҳолда

$$D = \iint\limits_{(D)} dx\,dy = \int\limits_a^b \left|\int\limits_0^{f(x)} dy\right| dx = \int\limits_a^b f\ (x)\ dx$$

бўлиб, 1-қисм, 10-боб, 2-§ да топилган формулага келамиз.

Мисол. Ушбу

$$x=\frac{y^2+a^2}{2a},\ x=\frac{y^2+b^2}{2b}\quad (0<a<b)$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин. Бу чизиқлар параболадан иборат (23- чизма). Қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} x-\frac{y^2+a^2}{2a}=0 \\ x-\frac{y^2+b^2}{2b}=0 \end{aligned}\right\}$$

системани ечиб, параболаларнинг кесишган нуқталари

$$\left(\frac{a+b}{2},\ \sqrt{ab}\right)\ \text{ва}\ \left(\frac{a+b}{2},\ -\sqrt{ab}\right)$$

эканини топамиз. Қаралаётган шакл Ox ўққа нисбатан симметрик бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда (D) нинг юзи

$$D=2\iint\limits_{(D_1)} dx\,dy$$

бўлади, бунда

$$(D_1)=\left\{(x,y)\in R^2:\ \frac{y^2+a^2}{2a}\leqslant x\leqslant\frac{y^2+b^2}{2b},\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{ab}\right\}.$$

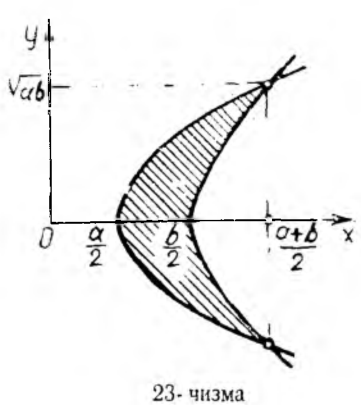
Интегрални ҳисоблаб, қуйидагини топамиз:

$$\iint\limits_{(D_1)} dx\,dy=\int\limits_0^{\sqrt{ab}}\left(\int\limits_{\frac{y^2+a^2}{2a}}^{\frac{y^2+b^2}{2b}} dx\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{ab}}\left(\frac{y^2+b^2}{2b}-\frac{y^2+a^2}{2a}\right)dy=\frac{1}{3}(b-a)\sqrt{ab}.$$

Демак,

$$D=\iint\limits_{(D)} dx\,dy=\frac{2}{3}(b-a)\sqrt{ab}.$$



23- чизма

3. Сиртнинг юзи ва унинг икки каррали интеграл орқали ифодаланиши. Икки каррали интеграл ёрдамида сирт юзини ҳисоблаш мумкин. Аввало сиртнинг юзи тушунчасини келтирамиз.

Фараз қилайлик, $z=f(x,y)$ функция (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциянинг графиги 17- чизмада тасвирланган (S) сиртдан иборат бўлсин.

(D) соҳанинг P бўлинишини олайлик. Унинг бўлаклари (D_1), (D_2), . . .,

(D_n) бўлсин. Бу бўлинишнинг бўлувчи чизиқларини йўналтирувчилар сифатида қараб, улар орқали ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик сиртлар ўтказамиз. Равшанки, бу цилиндрик сиртлар (S) сиртни (S_1), (S_2), . . . , (S_n) бўлакларга ажратади. Ҳар бир (D_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ да ихтиёрий (ξ_k, η_k) нуқта олиб, (S) сиртда унга мос нуқта (ξ_k, η_k, z_k) $(z_k = f(\xi_k, \eta_k))$ ни топамиз. Сўнг (S) сиртга шу (ξ_k, η_k, z_k) нуқтада уринма текислик ўтказамиз. Бу уринма текислик билан юқорида айтилган цилиндрик сиртнинг кесишишидан ҳосил бўлган уринма текислик қисмини (T_k) билан, унинг юзини эса T_k билан белгилайлик.

Геометриядан маълумки, (D_k) соҳа (T_k) нинг ортогонал проекцияси бўлиб,

$$D_k = T_k \, |\cos \gamma_k| \tag{18.36}$$

бўлади, бунда γ_k — (S) сиртга (ξ_k, η_k, z_k) $(z_k = f(\xi_k, \eta_k))$ нуқтада ўтказилган уринма текислик нормалининг Oz ўқи билан ташкил этган бурчак.

Равшанки, $\lambda_p \to 0$ да (S_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ нинг диаметри ҳам нолга интилади.

Агар $\lambda_p \to 0$ да

$$\sum_{k=1}^{n} T_k$$

йиғинди чекли лимитга эга бўлса, бу лимит (S) сиртнинг юзи деб аталади. Демак, (S) сиртнинг юзи

$$S = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=1}^{n} T_k \tag{18.27}$$

бўлади.

Юқорида қаралаётган $z = f(x, y)$ функция (D) соҳада $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар (D) соҳада узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\cos \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'_y(\xi_k, \eta_k)}}$$

бўлади.

(18.36) муносабатдан

$$T_k = \frac{1}{\cos \gamma_k} D_k$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos \gamma_k} D_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'^2_y(\xi_k, \eta_k)} \, D_k. \tag{18.38}$$

Тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди

$$\sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}$$

функциянинг интеграл йиғиндисидир (қаранг, 1-§). Бу функция (D) соҳада узлуксиз, демак, интегралланувчи. Шунинг учун

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_k, \eta_k) + f_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \cdot D_k =$$

$$= \iint_{(D)} \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\, dD$$

бўлади.

Шундай қилиб, (18.37) ва (18.38) муносабатлардан

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\, dD \tag{18.39}$$

бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Асосининг радиуси r, баландлиги h бўлган доиравий конуснинг ён сирти топилсин.

Бундай конус сиртининг тенгламаси

$$z = \frac{h}{r} \sqrt{x^2 + y^2}$$

бўлади. Юқоридаги (18.39) формулага кўра

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx\, dy$$

бўлади, бунда

$$(D) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}.$$

Энди

$$z_x' = \frac{h}{r} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z_y' = \frac{h}{r} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ва

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{h^2}{r^2} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}$$

эканини эътиборга олиб, қуйидагини топамиз:

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}\, dx\, dy = \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}} \iint_{(D)} dx\, dy =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}\, \pi r^2 = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

10-§. Уч каррали интеграл

Юқорида Риман интеграли тушунчасининг икки ўзгарувчили функция учун қандай киритилишини кўрдик ва уни батафсил ўргандик. Худди шунга ўхшаш бу тушунча уч ўзгарувчили функция учун ҳам киритилади. Уни ўрганишда Риман интеграли ҳамда икки каррали интегралда юритилган барча мулоҳазалар (интеграллаш соҳасининг бўлинишини олиш, бўлакларда ихтиёрий нуқта танлаб олиб, интеграл йиғинди тузиш, тегишлича лимитга ўтиш ва ҳоказо) қайтарилади. Шуни эътиборга олиб, қуйида уч каррали интеграл ҳақидаги фактларни келтириш билан чегараланамиз.

1. Уч каррали интеграл таърифи. $f(x, y, z)$ функция R^3 фазодаги чегараланган (V) соҳада берилган бўлсин. (Бу ерда ва келгусида ҳамма вақт функциянинг берилиш соҳаси (V) ни ҳажмга эга бўлган деб қараймиз.) (V) соҳанинг P бўлинишини ва бу бўлинишнинг ҳар бир (V_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ бўлагида ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқтани олайлик. Сўнгра қуйидаги

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k$$

йиғиндини тузамиз, бунда V_k — (V_k) нинг ҳажми.

Бу йиғинди $f(x, y, z)$ функциянинг *интеграл йиғиндиси* ёки *Риман йиғиндиси* деб аталади.

Энди (V) соҳанинг шундай

$$P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots \tag{18.40}$$

бўлинишларини қараймизки, уларнинг диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \ldots, \lambda_{P_m}, \ldots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \to 0$. Бундай P_m $(m = 1, 2, \ldots)$ бўлинишларга нисбатан $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k.$$

Натижада қуйидаги

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқталарга боғлиқ.

18.9-таъриф. Агар (V) нинг ҳар қандай (18.40) бўлинишлар кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос интеграл йиғинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқталарни танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I сон σ йиғиндининг *лимити* деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k = I$$

каби белгиланади.

18.10-таъриф. Агар $\lambda_P \to 0$ да $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йиғиндиси σ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y, z)$ функция (V) да *интегралланувчи (Риман маъносида интегралланувчи) функция* дейилади. Бу σ йиғиндининг чекли лимити I эса $f(x, y, z)$ функциянинг (V)

бўйича *уч каррали интеграли (Риман интеграли)* дейилади ва у

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV$$

каби белгиланади. Демак,

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot V_k.$$

$f(x, y, z)$ функция (V) да $((V) \subset R^3)$ берилган бўлиб, у шу соҳада чегараланган бўлсин:

$$m \leqslant f(x, y, z) \leqslant M \quad (\forall (x, y, z) \in (V)).$$

(V) соҳанинг бўлинишлар тўплами $\{P\}$ нинг ҳар бир бўлинишига нисбатан $f(x, y, z)$ функциясининг Дарбу йиғиндилари

$$s_P(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k V_k, \quad S_P(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k V_k$$

ни тузиб, ушбу

$$\{s_P(f)\}; \ \{S_P(f)\}$$

тўпламларни қарайлик. Равшанки, бу тўпламлар чегараланган бўлади.

18.11-таъриф. $\{s_P(f)\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси $f(x, y, z)$ функциянинг *қуйи уч каррали интеграли* деб аталади ва у

$$\underline{I} = \underline{\iiint\limits_{(V)}} f(x, y, z)\, dV$$

каби белгиланади.

$\{S_P(f)\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси $f(x, y, z)$ функциянинг *юқори уч каррали интеграли* деб аталади ва у

$$\overline{I} = \overline{\iiint\limits_{(V)}} f(x, y, z)\, dV$$

каби белгиланади.

18.12-таъриф. Агар $f(x, y, z)$ фуркциянинг қуйи ҳамда юқори уч каррали интеграллари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x, y, z)$ функция (V) да *интегралланувчи* деб аталади ва уларнинг умумий қиймати

$$I = \underline{\iiint\limits_{(V)}} f(x, y, z)\, dV = \overline{\iiint\limits_{(V)}} f(x, y, z)\, dV$$

$f(x, y, z)$ функциянинг *уч каррали интеграли (Риман интеграли)* дейилади.

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \underline{\iiint\limits_{(V)}} f(x, y, z)\, dV = \overline{\iiint\limits_{(V)}} f(x, y, z)\, dV.$$

2. Уч каррали интегралнинг мавжудлиги. $f(x, y, z)$ функция (V) $((V) \subset R^3)$ соҳада берилган бўлсин.

18.10-теорема. *$f(x, y, z)$ функция (V) соҳада интегралланувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топилиб, (V) соҳанинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан Дарбу йиғиндилари*

$$S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва етарли.

3. Интегралланувчи функциялар синфи. Уч каррали интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, маълум синф функцияларининг интегралланувчи бўлиши кўрсатилади.

18.11-теорема. *Агар $f(x, y, z)$ функция чегараланган ёпиқ (V) $((V) \subset R^3)$ соҳада берилган ва узлуксиз бўлса, у шу соҳада интегралланувчи бўлади.*

18.12-теорема. *Агар $f(x, y, z)$ функция (V) соҳада чегараланган ва бу соҳанинг чекли сондаг ноль ҳажмли сиртларида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлса, функция (V) да интегралланувчи бўлади.*

4. Уч каррали интегралнинг хоссалари. Уч каррали интеграллар ҳам ушбу бобнинг 5-§ ида келтирилган икки каррали интегралнинг хоссалари каби хоссаларга эга.

1°. $f(x, y, z)$ функция (V) соҳада берилган бўлиб, (V) соҳа ноль ҳажмли (S) сирт билан (V_1) ва (V_2) соҳаларга ажратилган бўлсин. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлса, функция (V_1) ва (V_2) соҳаларда ҳам интегралланувчи бўлади, ва аксинча яъни $f(x, y, z)$ функция (V_1) ва (V_2) соҳаларнинг ҳар бирида интегралланувчи бўлса, функция (V) да ҳам интегралланувчи бўлади. Бунда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{(V_1)} f(x, y, z)\, dV + \iiint\limits_{(V_2)} f(x, y, z)\, dV$$

бўлади.

2°. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $c \cdot f(x, y, z)$ $(c = \text{const})$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва ушбу

$$\iiint\limits_{(V)} c\, f(x, y, z)\, dV = c \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV$$

формула ўринли бўлади.

3°. Агар $f(x, y, z)$ ва $g(x, y, z)$ функциялар (V) да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x, y, z) \pm g(x, y, z)$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва ушбу

$$\iiint\limits_{(V)} [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)]\, dV = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV \pm \iiint\limits_{(V)} g(x, y, z)\, dV$$

формула ўринли бўлади.

4°. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлиб, $\forall (x, y, z) \in (V)$ учун $f(x, y, z) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV \geqslant 0$$

бўлади.

5°. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x, y, z)|$ функция ҳам шу соҳада интегралланувчи ва

$$\left|\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV\right| \leqslant \iiint\limits_{(V)} |f(x, y, z)|\, dV$$

бўлади.

6°. Агар $f(x, y, z)$ функция (V) да интегралланувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас $\mu\ (m \leqslant \mu \leqslant M)$ сон мавжудки,

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \mu \cdot V$$

бўлади, бунда V — (V) соҳанинг ҳажми.

7°. Агар $f(x, y, z)$ функция ёпиқ (V) соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу соҳада шундай $(a, b, c) \in (V)$ нуқта топиладики,

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = f(a, b, c) \cdot V$$

бўлади.

5. Уч каррали интегралларни ҳисоблаш. $f(x, y, z)$ функция $(V) = \{(x, y, z) \in R^3:\ a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ e \leqslant z \leqslant l\}$ соҳада (параллелепипедда) берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d \left(\int\limits_e^l f(x, y, z)\, dz\right) dy\right] dx$$

бўлади.

Энди $(V)\ ((V) \subset R^3)$ соҳа—пастдан $z = \psi_1(x, y)$, юқоридан $z = \psi_2(x, y)$ сиртлар билан, ён томондан эса Oz ўқига параллел цилиндрик сирт билан чегараланган соҳа бўлсин. Бу соҳанинг Oxy текисликдаги проекцияси эса (D) бўлсин.

Агар $f(x, y, z)$ функция шундай (V) соҳада узлуксиз бўлиб, $z = \psi_1(x, y)$, $z = \psi_2(x, y)$ функциялар (D) да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \iint\limits_{(D)} \left(\int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\right) dx\, dy$$

бўлади. Агар юқоридаги ҳолда $(D) = \{(x, y) \in R^2:\ a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$ бўлиб, $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар $[a, b]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\right) dy\right] dx.$$

6. Уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш. Уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш ушбу бобнинг 7-§ да келтирилган икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш кабидир. Шуни ҳисобга олиб, қуйида уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласини келтириш билан кифояланамиз.

$f(x, y, z)$ функция $(V)\ ((V) \subset R^3)$ соҳада берилган ва узлуксиз бўлсин, (V) соҳа эса силлиқ ёки бўлакли-силлиқ сиртлар билан чегараланган бўлсин.

Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(u,\ v,\ w), \\ y=\psi(u,\ v,\ w), \\ z=\chi(u,\ v,\ w), \end{array}\right\}$$

система (Δ) $((\Delta)\subset R^3)$ соҳани (V) соҳага акслантирсин ва бу акслантириш 7-§ да келтирилган 1°—3°-шартларни бажарсин. У ҳолда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,\ y,\ z)\,dV=\iiint\limits_{(\Delta)} f(\varphi(u,v,w),\ \psi(u,v,w),\ \chi(u,\ v,\ w))\ |I|\,du\,dv\,dw$$

бўлади, бунда

$$I=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

7. Уч каррали интегралнинг баъзи бир татбиқлари. Уч каррали интеграл ёрдамида R^3 фазодаги жисмнинг ҳажмини, жисмнинг массасини, инерция моментларини топиш мумкин.

19-БОБ

ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

Юқоридаги бобда Риман интеграли тушунчасини икки ўзгарувчили функция учун қандай киритилишини кўрдик ва уни ўргандик. Шуни ҳам айтиш керакки, кўп ўзгарувчили функциялар учун интеграл тушунчаси турлича киритилиши мумкин. Биз қуйида келтирадиган эгри чизиқли интеграллар ҳам конкрет амалий масалалардан пайдо бўлгандир.

1-§. Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар

1. Биринчи тур эгри чизиқли интеграл таърифи. Текисликда бирор содда $\overset{\frown}{AB}$* $(A=(a_1,\ a_2)\in R^2,\ B=(b_1,\ b_2)\in R^2)$ эгри чизиқни (ёйни) олайлик. Бу эгри чизиқда икки йўналишдан бирини мусбат йўналиш, иккинчисини манфий йўналиш деб қабул қилайлик (24-чизма).

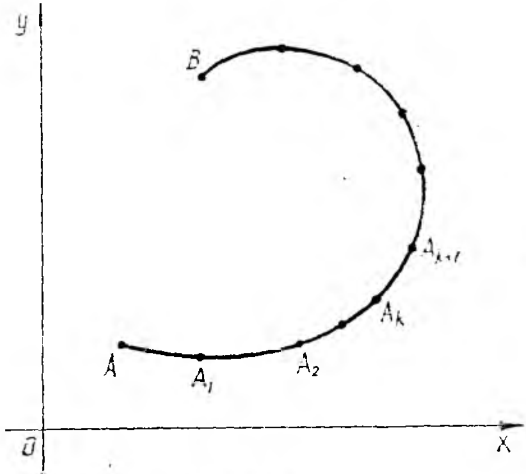
---

* Айтайлик, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ функцияларнинг ҳар бири $(\alpha,\ \beta)$да берилган бўлсин. Бу функциялар $(\alpha,\ \beta)$ да $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга ва улар узлуксиз бўлиб, $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)>0$ бўлсин.

R^2 текисликдаги ушбу

$$L=\{(x,\ y)\in R^2:\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in(\alpha,\ \beta)\}$$

тўплам *содда эгри чизиқ* деб аталади. Содда эгри чизиқ узунликка эга бўлади.



24- чизма

$\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқни A дан B га қараб $A_0 = A$, A_1, A_2, ..., $A_n = B$ ($A_k = (x_k, y_k) \in AB$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $A_0 = (x_0, y_0) = (a_1, a_3)$, $A_n = (x_n, y_n) = (b_1, b_2)$) нуқталар ёрдамида n та бўлакка бўламиз. Бу A_c, A_1, ..., A_n нуқталар системаси $\overset{\frown}{AB}$ ёйининг бўлиниши деб аталади ва у

$$P = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$$

каби белгиланади $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ ёй (бўлиниш ёйлари) узунликлари Δs_k ($k = 0, 1, \ldots, n$) нинг энг каттаси P бўлишнинг диаметри дейилади ва у λ_P билан белгиланади:

$$\lambda_P = \max_k \{\Delta s_k\}.$$

Равшанки, $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқни турли усуллар билан исталган сонда бўлинишларини тузиш мумкин.

$\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқда $f(x, y)$ функция берилган бўлсин. Бу эгри чизиқнинг

$$P = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$$

бўлинишини ва унинг ҳар бир $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ ёйида ихтиёрий $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ ($Q_k = (\xi_k, \eta_k) \in \overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$, $k = 0, 1, \ldots, n$) нуқта оламиз. Берилган функциянинг $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ нуқтадаги $f(\xi_k, \eta_k)$ қийматини $\overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ нинг Δs_k узунлигига кўпайтириб қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k \qquad (19.1)$$

Энди $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқнинг шундай

$$P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots, \qquad (19.2)$$

бўлинишлари кетма-кетлигини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \ldots, \lambda_{P_m}, \ldots,$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \to 0$. Бундай бўлинишларга нисбатан (19.1) каби йиғиндиларни тузиб, ушбу

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots,$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Равшанки, бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади $Q_k=(\xi_k, \eta_k)$ нуқталарга боғлиқ.

19.1-таъриф. Агар $\smile{AB}$ эгри чизиқнинг ҳар қандай (19.2) кўринишдаги бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос йиғиндилардан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик (ξ_k, η_k) нуқталарнинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу сон σ *йиғиндининг лимити* деб аталади ва

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k = I \qquad (19.3)$$

каби белгиланади.

(19.1) йиғиндининг лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

19.2-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сони олинганда ҳам шундай $\delta>0$ топилсаки, AB эгри чизиқнинг диаметри $\lambda_P<\delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши учун тузилган σ йиғинди ихтиёрий $(\xi_k, \eta_k) \in \overset{\frown}{A_kA_{k+1}}$ нуқталарда

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизликни бажарса, I сон σ *йиғиндининг* $\lambda_P \to 0$ *даги лимити* деб аталади ва (19.3) каби белгиланади.

(19.1) йиғинди лимитининг бу таърифлари эквивалент таърифлардир.

19.3-таъриф. Агар $\lambda_P \to 0$ да σ йиғинди четли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ бўйича *интегралланувчи* дейилади. Бу лимит $f(x, y)$ функциянинг эгри чизиқ бўйича *биринчи тур эгри чизиқли интеграли* деб аталади ва у

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\, dS$$

каби белгиланади.

Шундай қилиб, киритилган эгри чизиқли интеграл тушунчасининг ўзига хослиги қаралаётган икки аргументли функциянинг берилиш соҳаси текисликдаги бирор $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ эканлигидир. Қолган бошқа мулоҳазалар (бўлинишларининг олиниши, бўлаклардан ихтиёрий нуқта танлаб интеграл йиғинди тузиш, тегишлича лимитга ўтиш) юқорида киритилган интеграл тушунчалари сингаридир.

2. Узлуксиз функция биринчи тур эгри чизиқли интеграли. Энди биринчи тур эгри чизиқли интегралнинг мавжуд бўлишини таъминлайдиган шартни топиш билан шуғулланамиз. Юқорида келтирилган 19.3-таърифдан кўринадики, биринчи тур эгри чизиқли интеграл $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиққа ҳамда унда берилган $f(x, y)$ функцияга боғлиқ бўлади. Демак, интегралнинг мавжуд бўлиши шартини $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ ҳамда $f(x, y)$ функцияга қўйиладиган шартлар орқали топиш керак бўлади.

Фараз қилайлик, $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\left.\begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant s \leqslant S) \tag{19.4}$$

система билан берилган бўлсин. Бунда s — $\overset{\frown}{AQ}$ ёйининг узунлиги ($Q = (x, y) \in \overset{\frown}{AB}$), S эса $\overset{\frown}{AB}$ нинг узунлиги. $f(x, y)$ функция шу $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқда берилган бўлсин, Модомики, $x = x(s)$, $y = y(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant S)$ экан, унда $(x, y) = f(x(s), y(s))$ бўлиб, натижада ушбу

$$f(x(s), y(s)) = F(s) \ (0 \leqslant s \leqslant S)$$

мураккаб функцияга эга бўламиз.

$\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқнинг $P = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ бўлинишини ва ҳар бир $\overset{\frown}{A_kA_{k+1}}$ да ихтиёрий $Q_k = (\xi_k, \eta_k)$ нуқтани олайлик. Ҳар бир A_k нуқтага мос келадиган $\overset{\frown}{AA_k}$ нинг узунлиги s_k, ҳар бир Q_k нуқтага мос келадиган $\overset{\frown}{AQ_k}$ нинг узунлиги s_k^* дейлик. Равшанки, $\overset{\frown}{A_kA_{k+1}}$ нинг узунлиги $s_{k+1} - s_k = \Delta s_k$ бўлади.

Натижада P бўлинишга нисбатан тузилган

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k$$

йиғинди ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x(s_k^*), y(s_k^*)) \cdot \Delta s_k = \sum_{k=0}^{n-1} F(s_k^*) \cdot \Delta s_k$$

кўринишга келади. Демак,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} F(s_k^*) \cdot \Delta s_k. \tag{19.5}$$

Бу йиғиндини $[0, S]$ оралиқдаги $F(s)$ функциянинг интеграл йиғиндиси (Риман йиғиндиси) эканлигини пайқаш қийин эмас (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 1-§).

Агар $f(x, y)$ функция $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция $[0, S]$ да узлуксиз бўлади. Демак, бу ҳолда $F(s)$ функция $[0, S]$ да интегралланувчи:

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(s_k^*) \cdot \Delta s_k = \int_0^S F(s)\,ds. \tag{19.6}$$

Шундай қилиб, (19.5), (19.6) муносабатлардан $\lambda_P \to 0$ да σ йиғиндининг лимити мавжуд бўлиши ва

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \int_0^S F(s)\,ds$$

эканлигини топамиз. Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

19.1-теорема. *Агар $f(x, y)$ функция $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ бўйича биринчи тур эгри чизиқли интеграли мавжуд бўлади ва*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\,ds = \int_0^S f(x(s), y(s))\,ds$$

бўлади.

Бу теорема, бир томондан узлуксиз функция биринчи тур эгри чизиқли интегралининг мавжудлигини аниқлаб берса, иккинчи томондан бу интегралнинг аниқ интегралга (Риман интегралига) келишини кўрсатади.

19.1-эслатма. Эгри чизиқли интеграл тушунчаси билан Риман интеграли тушунчасини солиштириб, уларнинг ҳар иккаласи йиғиндининг лимити сифатида таърифланишини кўрдик. Айни пайтда бу тушунчаларнинг фарқли томони ҳам бор. Ушбу

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\cdot\Delta s_k \tag{19.5}$$

йиғиндидаги Δs_k ҳар доим мусбат бўлиб, $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқнинг йўналишига боғлиқ эмас. Демак,

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\,ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x, y)\,ds.$$

3. Биринчи тур эгри чизиқли интегралларнинг хоссалари. Юқорида кўрдикки, узлуксиз функцияларнинг биринчи тур эгри чизиқли интеграллари Риман интегралларига келади. Бинобарин, эгри чизиқли интеграллар ҳам Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга бўлади. Шуни эътиборга олиб, эгри чизиқли интегралларнинг асосий хоссаларини санаб ўтиш билан кифояланамиз.

(19.4) система билан аниқланган $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқда $f(x, y)$ функция берилган ва узлуксиз.

1°. Агар $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\,ds = \int_{\overset{\frown}{AC}} f(x, y)\,ds + \int_{\overset{\frown}{CB}} f(x, y)\,ds$$

бўлади.

2°. Ушбу

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} cf(x, y)\,ds = c\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\,ds \quad (c = \text{const})$$

тенглик ўринли.

$\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқда $f(x, y)$ функция билан $g(x, y)$ функция ҳам берилган ва у узлуксиз бўлсин.

3°. Қуйидаги

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} [f(x, y) \pm g(x, y)]\,ds = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\,ds \pm \int_{\overset{\frown}{AB}} g(x, y)\,ds$$

формула ўринли бўлади.

4°. Агар $\forall\,(x,\ y)\in\overset{\frown}{AB}$ да $f(x,\ y)\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,\ y)\,ds\geqslant 0$$

бўлади.

5°. $|f(x,\ y)|$ функция шу $\overset{\frown}{AB}$ да интегралланувчи ва

$$\Big|\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,\ y)\,ds\Big|\leqslant\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}|f(x,\ y)|\,ds$$

бўлади.

6°. Шундай $(c_1,\ c_2)\in\overset{\frown}{AB}$ нуқта топиладики,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,\ y)\,ds=f(c_1,\ c_2)\cdot S$$

бўлади, бунда S — $\overset{\frown}{AB}$ нинг узунлиги.

6°. хосса ўрта қиймат ҳақидаги теорема деб аталади.

4. Биринчи тур эгри чизиқли интегралларни ҳисоблаш. Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар, асосан Риман интегралларига келтирилиб ҳисобланади. Юқорида келтирилган 19.1-теоремага кўра $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\left.\begin{array}{l} x=x(s)\\ y=y(s)\end{array}\right\}\quad(0\leqslant s\leqslant S)$$

система билан берилганда (бунда s — ёй узунлиги) га $f(x,\ y)$ функция шу $\overset{\frown}{AB}$ да узлуксиз бўлганда эгри чизиқли интеграл Риман интегралига келди. Демак, бу Риман интегралини ҳисоблаш натижасида эгри чизиқли интеграл топилади.

Энди $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{array}\right\}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\tag{19.7}$$

система билан (параметрик формада) берилган бўлсин. Бунда $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар $[\alpha,\ \beta]$ да $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга ва бу ҳосилалар шу оралиқда узлуксиз ҳамда $(\varphi(\alpha),\ \psi(\alpha))=A$ ва $(\varphi(\beta),\ \psi(B))=B$ бўлсин.

Равшанки, (19.7) система $[\alpha,\ \beta]$ оралиқни $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиққа акслантиради. Бунда $[\gamma,\ \delta]\subset[\alpha,\ \beta]$ нинг $\overset{\frown}{AB}$ чизиқдаги $\overset{\frown}{A_\gamma A_\delta}$ аксининг узунлиги

$$\int\limits_{\gamma}^{\delta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

бўлади (қаралсин, 1-қисм, 10-боб, 1-§).

19.2-теорема. *Агар $f(x, y)$ функция $\overset{\frown}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\,ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\; dt \qquad (19.8)$$

бўлади.

Исбот. $[\alpha, \beta]$ ораликнинг

$$P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \; (\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta)$$

бўлинишини олайлик. Бу бўлинишнинг бўлувчи нуқталари $t_k (k = 0, 1, \ldots, n)$ нинг $\overset{\frown}{AB}$ даги мос аксларини $A_k (k = 0, 1, \ldots, n)$ дейлик. Равшанки, бу $A_k (k = 0, 1, \ldots, n)$ нуқталар $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқнинг

$$\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$$

бўлинишини ҳосил қилади. Бунда $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k)) \; (k = 0, 1, \ldots, n)$ ва $\overset{\frown}{A_kA_{k+1}}$ нинг узунлиги

$$\Delta s_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\varphi'^2(t) + \varphi'^2(t)}\; dt$$

бўлади. Ўрта қиймат ҳадидаги теоремадан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\Delta s_k = \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)} \cdot (t_{k+1} - t_k) = \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)} \cdot \Delta t_k,$$

бунда $t_k < \tau_k < t_{k+1}$. Энди $\varphi(\tau_k) = \xi_k$, $\psi(\tau_k) = \eta_k$ деб оламиз. Равшанки, $(\xi_k, \eta_k) \in \overset{\frown}{A_kA_{k+1}} (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$ бўлади. $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқнинг юқорида айтилган

$$\{A_1, A_1, \ldots, A_n\}$$

бўлинишини ва ҳар бир $\overset{\frown}{A_kA_{k+1}}$ да (ξ_k, η_k) нуқтани олиб,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta s_k$$

йиғиндини тузамиз. Уни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k), \psi(\tau_k)) \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \varphi'^2(\tau_k)}\; \Delta t_k. \qquad (19.8)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги йиғинди $f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \varphi'^2(t)}$ функциянинг $[\alpha, \beta]$ ораликдаги Риман йиғиндисидир.

Шартга кўра $f(x, y)$ ва $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ функциялар узлуксиз. Демак, мураккаб функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремага кўра $f(\varphi(t), \psi(t))$ ва демак, $f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t)+\varphi'^2(t)}$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз. Демак, бу функция $[\alpha, \beta]$ да интегралланувчи бўлади. Яъни

$$\lim_{\max\{\Delta t_k\}\to 0} \sigma \sum_{k=1}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\varphi'^2(\tau_k)}\,\Delta t_k =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t)+\varphi'^2(t)}\,dt.$$

Модомики, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз экан, унда $\max\limits_k \{\Delta t_k\}\to 0$ да $\Delta x_k\to 0$, $\Delta y_k\to 0$ ва демак, $\Delta s_k\to 0$. Бундан эса $\lambda_p\to 0$ бўлиши келиб чиқади. (19.8) муносабатдан фойдаланиб

$$\lim_{\lambda_p\to 0}\sigma = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t)+\varphi'^2(t)}\,dt$$

бўлишини топамиз. Бу эса

$$\int_{\smile AB} f(x, y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t)+\varphi'^2(t)}\,dt.$$

эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

19.1-натижа. $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$y=y(x)\ (a\leqslant x\leqslant b,\ y(a)=A,\ y(b)=B)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, $y(x)$ функция $[a, b]$ да ҳосилага эга ва у узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция шу $\overset{\smile}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_{\smile AB} f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \tag{19.9}$$

бўлади.

19.2-натижа. $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\rho=\rho(\theta)\ (\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_1)$$

тенглама билан (қутб координата системасида) берилган бўлиб, $\rho(\theta)$ функция $[\theta_0, \theta_1]$ да ҳосилага эга ва у узлуксиз бўлсин. Агар $f(x, y)$ функция шу $\overset{\smile}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_{\smile AB} f(x, y)\,ds = \int_{\theta_2}^{\theta_1} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta \tag{19.10}$$

бўлади.

Бу натижаларни исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

Мисол. Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \sqrt{x^2+y^2}\, ds$$

эгри чизиқли интеграл ҳисоблансин, бунда $\overset{\frown}{AB}$ — маркази координата бошида, радиуси $r>0$ га тенг бўлган айлананинг юқори ярим текисликдаги қисми.

Равшанки, бу $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi)$$

система билан аниқланади. $\overset{\frown}{AB}$ да $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(r\cos t)^2+(r\sin t)^2}$ функция узлуксиз. Демак,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \sqrt{x^2+y^2}\, ds = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{(r\cos t)^2+(r\sin t)^2}\cdot\sqrt{(r\cos t)'^2+(r\sin t)'^2}\, dt =$$

$$= r^2\int\limits_0^{\pi} dt = \pi r^3$$

бўлади.

5. **Биринчи тур эгри чизиқли интегралларнинг баъзи бир татбиқлари.** Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар ёрдамида ёй узунлигини, жисмнинг массасини, оғирлик марказларини топиш мумкин. Қуйида биз биринчи тур эгри чизиқли интеграллар ёрдамида ёй узунлиги қандай ҳисобланишини кўрсатамиз.

Текисликда содда $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ берилган бўлсин. Бу чизиқда $f(x, y) = 1$ функцияни қарайлик. Равшанки, бу функция $\overset{\frown}{AB}$ да узлуксиз. $f(x, y)$ функциянинг биринчи тур эгри чизиқли интеграли таърифидан қуйидагини топамиз:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\, ds = \lim_{\lambda_P \to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\cdot\Delta s_k = \lim_{\lambda_P \to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta s_k = S.$$

Демак,

$$S = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds. \qquad (*)$$

Мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) = a\cos^3 t \\ y &= y(t) = a\sin^3 t \end{aligned}\right\}$$

система билан берилган $\overset{\frown}{AB}$ чизиқнинг узунлиги топилсин. Бу чизиқ астроидани ифодалайди.

(*) формулага кўра астроиданинг узунлиги

$$S = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds$$

бўлади. Астроида координата ўқларига нисбатан симметрик бўлишини эътиборга олиб, юқорида келтирилган (19.8) формуладан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int\limits_{\smile AB} ds = 4\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{r}}\sqrt{(-3a\cos^2 t\cdot\sin t(^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{9a^2}{4}\sin^2 2t}\,dt = 6a\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt = 6a\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 6a.$$

2- §. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар

1. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар таърифи. Текисликда бирор содда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқни қарайлик. Бу эгри чизиқда $f(x, y)$ функция берилган бўлсин. $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқнинг

$$P=\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$$

бўлинишини ва унинг ҳар бир $\overset{\smile}{A_kA_{k+1}}$ $(k=0,1, \ldots, n-1)$ ёйида ихтиёрий $Q_k=(\xi_k, \eta_k)$ нуқтани $(Q_k=(\xi_k, \eta_k)\in\overset{\smile}{A_kA_{k+1}}, k=0,1, \ldots n-1)$ олайлик. Берилган функциянинг $Q_k=(\xi_k, \eta_k)$ нуқтадаги $f(\xi_k, \eta_k)$ қийматини $\overset{\smile}{A_kA_{k+1}}$ нинг $Ox\,(Oy)$ ўқдаги $\Delta x_k\,(\Delta y_k)$ проекциясига кўпайтириб қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\cdot\Delta x_k \left(\sigma'' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\cdot\Delta y_k\right). \tag{19.11}$$

Энди $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқнинг шундай

$$P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots \tag{19.12}$$

бўлинишлари кетма-кетлигини қараймизки, уларнинг диаметрларидан ташкил топган мос

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \ldots, \lambda_{P_m}, \ldots$$

кетма-кетлик нолга интилсин:

$$\lambda_{P_m}\to 0.$$

Бундай бўлинишларга нисбатан (19.11) каби йиғиндиларни тузиб ушбу

$$\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_m, \ldots (\sigma''_1, \sigma''_2, \ldots, \sigma''_m, \ldots)$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Равшанки, бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади, хусусан, (ξ_k, η_k) нуқталарга ҳам боғлиқ.

19.4-таъриф. Агар $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқнинг ҳар қандай (19.12) кўринишдаги бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос йиғиндилардан иборат $\{\sigma'_m\}$ $(\{\sigma''_m\})$ кетма-кетлик (ξ_k, η_k) нуқталарнинг $((\xi_k, \eta_k)\in\overset{\smile}{A_kA_{k+1}})$ танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган равишда ҳамма вақт битта I' сонга (I'' сонга) интилса, бу сон σ' (σ'') *йиғиндининг лимити* деб аталади ва

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma' = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n-1} (\xi f_k, \ \eta_k) \cdot \Delta x_k = I'$$

$$(\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma'' = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \ \eta_k) \cdot \Delta y_k = I'') \qquad (19.13)$$

каби белгиланади.

σ' (σ'') йиғиндининг бу лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

19.5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилсаки, $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши учун тузилган σ' (σ'') йиғинди учун ихтиёрий $(\xi_k, \ \eta_k)$ нуқталарда $((\xi_k, \ \eta_k) \in \overset{\frown}{A_k A_{k+1}}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1)$

$$|\sigma' - I'| < \varepsilon \ (|\sigma'' - I''| < \varepsilon)$$

тенгсизлик бажарилса, I' сон (I'' сон) σ' *йиғиндининг* (σ'' йиғиндининг) $\lambda_P \to 0$ *даги лимити* деб аталади ва (19.13) каби белгиланади.

Йиғинди лимитининг бу таърифлари эквивалент таърифлардир.

19.6-таъриф. Агар $\lambda_P \to 0$ да σ' йиғинди (σ'' йиғинди) чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x, \ y)$ функция $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ бўйича *интегралланувчи* дейилади. Бу лимит $f(x, \ y)$ функциянинг $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ бўйича *иккинчи тур эгри чизиқли интеграли* деб аталади ва у

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, \ y)\, dx \quad (\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, \ y)\, dy)$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, \ y)\, dx = \lim_{\lambda_P \to 0} \sigma' = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \ \eta_k) \cdot \Delta x_k,$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, \ y)\, dy = \lim_{\lambda_P \to 0} \sigma'' = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \ \eta_k) \cdot \Delta y_k.$$

Шундай қилиб, $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқда берилган $f(x, \ y)$ функциядан иккита Ox ўқидаги проекциялар воситасида ва Oy ўқидаги проекциялар воситасида олинган иккинчи тур эгри чизиқли интеграл тушунчалари киритилди.

Фараз қилайлик, $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқда иккита $P(x, \ y)$ ва $Q(x, \ y)$ функциялар берилган бўлиб, $\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, \ y)\, dx$, $\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x, \ y)\, dy$ лар эса уларнинг кккинчи тур эгри чизиқли интеграллари бўлсин. Ушбу

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, \ y)\, dx + \int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x, \ y)\, dy$$

йиғинди иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг умумий кўриниши деб аталади ва

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

каби ёзилади. Демак,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q(x, y)\,dy$$

Иккинчи тур эгри чизиқли интеграл таърифидан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

19.3-натижа. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграл эгри чизиқнинг йўналишига боғлиқ бўлади.

Шуни исботлайлик.

Маълумки, $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқда иккита йўналиш (A нуқтадан B нуқтага ва B нуқтадан A нуқтага) олиш мумкин ($\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BA}$; $A \neq B$).

$\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқнинг юқоридаги P бўлинишини олиб, бу бўлинишга нисбатан (19.11) йиғиндини тузамиз:

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\cdot\Delta x_k \quad (\Delta x_k = x_{k+1} - x_k).$$

Айтайлик, $\lambda_P \to 0$ да бу йиғинди чекли лимитга эга бўлсин. Демак,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\cdot\Delta x_k = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\,dx. \tag{19.14}$$

Энди $\overset{\frown}{AB}$ нинг ўша P бўлинишини ҳамда ҳар бир $\overset{\frown}{A_kA_{k+1}}$ даги ўша (ξ_k, η_k) нуқталарни олиб, $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқнинг йўналишини эса B дан A га қараб деб ушбу йиғиндини тузамиз:

$$\overline{\sigma'} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\cdot(x_k - x_{k+1}).$$

$\lambda_P \to 0$ да бу йиғинди чекли лимитга эга бўлса, у таърифга биноан ушбу

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x, y)\,dx$$

интеграл бўлади:

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \overline{\sigma'} = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\cdot(x_k - x_{k+1}) = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x, y)\,dx.$$

Агар

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\cdot\Delta x_k = -\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\cdot(x_k - x_{k+1}) = -\overline{\sigma'}$$

эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда $\lambda_p \to 0$ да σ' йиғиндининг чекли лимитга эга бўлишидан $\overline{\sigma'}$ йиғиндининг ҳам чекли лимитга эга бўлиши ва

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \overline{\sigma'} = -\lim_{\lambda_p \to 0} \sigma'$$

тенгликнинг бажарилишини топамиз. Демак,

$$\int\limits_{\smile{BA}} f(x, y)\,dx = -\int\limits_{\smile{AB}} f(x, y)\,dx.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\int\limits_{\smile{BA}} f(x, y)\,dy = -\int\limits_{\smile{AB}} f(x, y)\,dy$$

бўлади.

19.4-натижа. $\smile{AB}$ эгри чизиқ Ox ўқига (Oy ўқига) перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ кесмасидан иборат бўлсин. $f(x, y)$ функция шу чизиқда берилган бўлсин.

У ҳолда

$$\int\limits_{\smile{AB}} f(x, y)\,dx \quad \left(\int\limits_{\smile{AB}} f(x, y)\,dy\right)$$

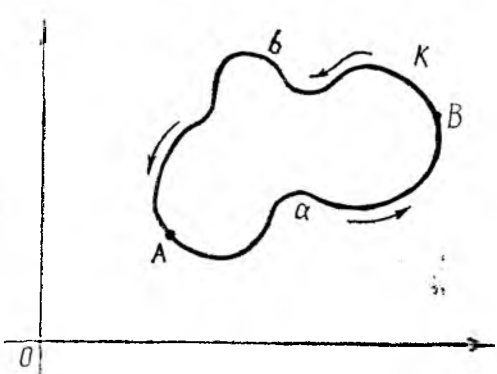
мавжуд бўлади ва

$$\int\limits_{\smile{AB}} f(x, y)\,dx = 0 \quad \left(\int\limits_{\smile{AB}} f(x, y)\,dy = 0\right).$$

Бу тенглик бевосита иккинчи тур эгри чизиқли интеграл таърифидан келиб чиқади.

Энди $\smile{AB}$ — содда ёпиқ эгри чизиқ бўлсин, яъни A ва B нуқталар устма-уст тушсин. Бу ёпиқ чизиқни K деб белгилайлик. Бу содда ёпиқ чизиқда ҳам икки йўналиш бўлади. Уларнинг бирини мусбат йўналиш, иккинчисини манфий йўналиш деб қабул қилайлик. Шундай йўналишни мусбат деб қабул қиламизки, кузатувчи ёпиқ чизиқ бўйлаб ҳаракат қилганда, ёпиқ чизиқ билан чегараланган соҳа унга нисбатан ҳар доим чап томонда ётсин.

Фараз қилайлик, K содда ёпиқ чизиқда $f(x, y)$ функция берилган бўлсин. Бу K чизиқда ихтиёрий иккита турли нуқталарни олиб, уларни A ва B билан белгилайлик. Натижада K ёпиқ чизиқ иккита $\smile{AaB}$ ва $\smile{BbA}$ чизиқларга ажралади (25-чизма).



25-чизма

Ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AaB}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{\overset{\smile}{BbA}} f(x, y)\,dx$$

интеграл (агар у мавжуд бўлса) $f(x, y)$ функциянинг K ёпиқ чизиқ бўйича *иккинчи тур эгри чизиқли интеграли* деб аталади ва

$$\int\limits_{K} f(x, y)\,dx \text{ ёки } \oint\limits_{K} f(x, y)\,dx$$

каби белгиланади. Бунда K ёпиқ чизиқнинг мусбат йўналиши олинган. (Бундан буён ёпиқ чизиқ бўйича олинган интегралларда, ёпиқ чизиқ мусбат йўналишда деб қараймиз.) Демак,

$$\int\limits_{K} f(x, y)\,dx = \int\limits_{\overset{\smile}{AaB}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{\overset{\smile}{BbA}} f(x, y)\,dx.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\int\limits_{K} f(x, y)\,dy$$

ҳамда, умумий ҳолда

$$\int\limits_{K} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

интеграллар таърифланади.

$\overset{\smile}{AB}$ фазовий эгри чизиқ бўлиб, бу чизиқда $f(x, y, z)$ функция берилган бўлсин. Юқоридагидек, $f(x, y, z)$ функциянинг $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ бўйича иккинчи тур эгри чизиқли интеграллари таърифланади ва улар

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y, z)\,dx, \quad \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y, z)\,dy, \quad \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y, z)\,dz$$

каби белгиланади. Умумий ҳолда $\overset{\smile}{AB}$ да $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ $R(x, y, z)$ функциялар берилган бўлиб, ушбу

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y, z)\,dx, \quad \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Q(x, y, z)\,dy, \quad \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} R(x, y, z)\,dz$$

интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y, z)\,dx + \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Q(x, y, z)\,dy + \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} R(x, y, z)\,dz$$

йиғинди иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг умумий кўриниши деб аталади ва у

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

қаби белгиланади. Демак,

$$\int\limits_{\smile AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \int\limits_{\smile AB} P(x, y, z)\,dx +$$
$$+ \int\limits_{\smile AB} Q(x, y, z)\,dy + \int\limits_{\smile AB} R(x, y, z)\,dz.$$

2. Узлуксиз функция иккинчи тур эгри чизиқли интеграли. Энди иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг мавжуд бўлишини таъминлайдиган шартни топиш билан шуғулланамиз.

Фараз қилайлик, $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \tag{19.15}$$

система билан (параметрик формада) берилган бўлсин. Бунда $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да $\varphi'(t)$ ҳосилага эга ва бу ҳосила шу оралиқда узлуксиз, $\psi(t)$ функция ҳам $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз ҳамда $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = A$ ва $(\varphi(\beta), \psi(\beta)) = B$ бўлсин.

t параметр α дан β га қараб ўзгарганда $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ нуқта A дан B га қараб $\overset{\smile}{AB}$ ни чиза борсин.

19.3-теорема. *Агар $f(x, y)$ функция $\overset{\smile}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ бўйича иккинчи тур эгри чизиқли интеграли*

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y)\,dx$$

мавжуд ва

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y)\,dx = \int\limits_{d}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

бўлади.

Исбот. $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг

$$P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \quad (\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta)$$

бўлинишини олайлик. Бу бўлинишнинг бўлувчи нуқталари t_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ нинг $\overset{\smile}{AB}$ даги мос аксларини A_k дейлик $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Равшанки, бу A_k нуқталар AB эгри чизиқнинг

$$\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$$

бўлинишини ҳосил қилади. Бундан $A_k = (\varphi(t_k). \ \psi(t_k))$ $(k = 0, 1, \ldots n)$ бўлади. Бу бўлинишга нисбатан (19.11) йиғиндини

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k$$

тузамиз. Кейинги тенгликда $\Delta x_k - \overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ нинг Ox ўқдаги проекцияси

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)$$

га тенгдир.

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\varphi(t_{k+1}) - \gamma(t_k) = \varphi'(\theta_k)\cdot(t_{k+1} - t_k) = \varphi'(\theta_k)\cdot\Delta t_k \quad (\theta_k \in [t_k,\ t_{k+1}]).$$

Маълумки, $(\xi_k, \eta_k) \in \overset{\frown}{A_k A_{k+1}}$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots\ n-1)$. Агар бу (ξ_k, η_k) нуқтага аксланувчи нуқтани τ_k $(\tau_k \in [t_k,\ t_{k+1}])$ дейилса, унда

$$\xi_k = \varphi(\tau_k),\quad \eta_k = \psi(\tau_k)$$

бўлади. Натижада σ' йиғинди қуйидаги кўринишга келади:

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k))\cdot\varphi'(\theta_k)\,\Delta t_k.$$

Энди $\lambda'_P = \max\limits_k \{\Delta t_k\} \to 0$ да (бу ҳолда λ_P ҳам нолга интилади) σ' йиғиндининг лимитини топиш мақсадида унинг ифодасини ўзгартириб қуйидагича ёзамиз:

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k))\cdot\varphi^1(\tau_k)\,\Delta t_k + \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(r_k),\ \psi(\tau_k))\,[\varphi'(\theta_k) - \\ - \varphi'(\tau_k)]\cdot\Delta t_k. \tag{19.16}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчини баҳолаймиз:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k))\,[\varphi'(\tau_k)]\cdot\Delta t_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |f(\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k))|\,|\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)|\,\Delta t_k \leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{k=0}^{n-1} |\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)|\,\Delta t_k,$$

бунда

$$M = \max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |f(\varphi(t),\ \psi(t))|.$$

$\varphi'(t)$ функция $[d,\ \beta]$ да узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига кўра, $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топиладики, $[\alpha,\ \beta]$ оралиқнинг диаметри $\lambda'_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниш учун

$$|\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{M\cdot(\beta-\alpha)}\quad (\theta_k,\ \tau_k \in [t_k,\ t_{k-1}])$$

бўлади. Унда

$$\left|\sum_{k=-0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k))\,[\varphi'(\theta_k) - \varphi(\tau_k)]\,\Delta t_k\right| < M\sum_{k=-0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}\,\Delta t_k =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta t_k = \varepsilon.$$

Демак,

$$\lim_{\lambda'_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))[\varphi'(\theta_k) - \varphi^1(\tau_k)]\Delta t_k = 0$$

бўлади. Бу муносабатни эътиборга олиб, (19.16) тенгликда $\lambda_p \to 0$ да лимитга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sigma' = \lim_{\lambda'_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))\varphi'(\tau_k)\Delta t_k =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Демак,

$$\int_{\smile AB} f(x, y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Теорема исбот бўлди.

Энди (19.15) системада $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз, $\mu(t)$ функция эса $[\alpha, \beta]$ да $\psi'(t)$ ҳосилага эга ва бу ҳосила шу оралиқда узлуксиз бўлсин.

19.4-теорема. *Агар $f(x, y)$ функция $\overset{\frown}{AB}$ да берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ бўйича олинган иккинчи тур эгри чизиқли интеграли*

$$\int_{\smile AB} f(x, y)\,dy$$

мавжуд ва

$$\int_{\smile AB} f(x, y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)\,dt$$

бўлади.

Бу теорема юқоридаги 19.3-теорема каби исботланади.

Бу теоремалар, бир томондан, узлуксиз функция иккинчи тур эгри чизиқли интегралининг мавжудлигини аниқлаб берса, иккинчи томондан, бу интеграл аниқ интеграл (Риман интеграли) орқали ифодаланишини кўрсатади.

$\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ (19.15) система билан берилган бўлиб, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга ва бу ҳосилалар узлуксиз бўлсин.

Агар $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқда иккита $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар берилган бўлиб, улар шу чизиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_{\smile AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} P[(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) +$$

$$+ Q(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)]\,dt$$

бўлади.

3. Иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг хоссалари. Юқорида келтирилган теоремалар узлуксиз функцияларнинг иккинчи тур эгри чизиқли интегралларини, бизга маълум бўлган аниқ интеграл — Риман интегралларига келишини кўрсатади. Бинобарин, бу эгри чизиқли интеграллар ҳам Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга бўлади. Ўтган параграфда эса худди шундай мулоҳаза биринчи тур эгри чизиқли интегралларга нисбатан бўлган эди. Шуларни эътиборга олиб, иккинчи тур эгри чизиқли интегралларнинг хоссаларини келтиришни ва тегишли хулосалар чиқаришни ўқувчига ҳавола этамиз.

4. Иккинчи тур эгри чизиқли интегралларни ҳисоблаш. Юқорида келтирилган теоремалар функциянинг иккинчи тур эгри чизиқли интегралларининг мавжудлигини тасдиқлабгина қолмасдан уларни ҳисоблаш йўлини кўрсатади. Демак, иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар ҳам, асосан Риман интегралларига келтирилиб ҳисобланади:

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \tag{19.17}$$

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)\,dt, \tag{19.18}$$

$$\int\limits_{\smile AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)]\,dt. \tag{19.19}$$

Хусусан, $\smile AB$ эгри чизиқ

$$y = y(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, $y(x)$ функция $[a, b]$ да ҳосилага эга ва у узлуксиз бўлса, (19.17), (19.19) формулалар қуйидаги

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\,dx,$$

$$\int\limits_{\smile AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\,y'(x)]\,dx \tag{19.20}$$

кўринишга келади.

Шунингдек, $\smile AB$ эгри чизиқ

$$x = x(y) \quad (c \leqslant y \leqslant d)$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, $x(y)$ функция $[c, d]$ оралиқда ҳосилага эга ва узлуксиз бўлса, (19.18) ва (19.19) формулалар қуйидаги

$$\int\limits_{\smile AB} f(x, y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} f(x(y), y)\,dy, \tag{19.21}$$

$$\int\limits_{\smile AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_c^d [P(x(y), y)\,x'(y) + Q(x(y), y)]\,dy \tag{19.22}$$

кўринишга келади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int\limits_{\smile AB} y^2\,dx + x^2\,dy$$

интегрални қарайлик. Бунда $\overset{\smile}{AB}$ — $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг юқори ярим текисликдаги қисмидан иборат.

Эллипснинг параметрик тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t. \end{aligned}\right\}$$

$A = (a, 0)$ нуқтага параметр t нинг $t = 0$ қиймати, $B = (-a, 0)$ нуқтага эса $t = \pi$ қиймати мос келиб, t параметр 0 дан π гача ўзгарганда (x, y) нуқта A дан B га қараб эллипснинг юқори ярим текисликдаги қисмини чизиб чиқади. $P(x, y) = y^2$, $Q(x, y) = x^2$ функциялар эса $\overset{\smile}{AB}$ да узлуксиз. (19.9) формуладан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int\limits_{\smile AB} y^2\,dx + x^2\,dy = \int\limits_0^\pi [b^2 \sin^2 t\,(-a \sin t) + a^2 \cos^2 t\,b \cos t]\,dt =$$

$$= ab \int\limits_0^\pi (a \cos^3 t - b \sin^3 t)\,dt = -\frac{4}{3}ab^2.$$

2. Ушбу

$$\int\limits_{\smile AB} 3x^2 y\,dx + (x^3 + 1)\,dy$$

интегрални қарайлик. Бунда $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ:

а) (0,0) нуқтадан чиққан (0,0) ва (1,1) нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси,

б) (0,0) дан чиққан (0,0) ва (1,1) нуқталарни бирлаштирувчи $y = x^2$ параболанинг ёйи,

в) (0,0) нуқтадан чиққан (0,0), (1,0), (1,1) нуқталарни бирлаштирувчи синиқ чизиқдан иборат.

Юқоридаги (19.20), (19.21) ва (19.22) формулалардан фойдаланиб қуйидагиларни топамиз:

а) ҳолда

$$\int\limits_{\smile AB} 3x^2 y\,dx + (x^3 + 1)\,dy = \int\limits_0^1 [3x^2 x + (x^3 + 1)]\,dx = \int\limits_0^1 (4x^3 + 1)\,dx = 2,$$

б) ҳолда

$$\int\limits_{\smile AB} 3x^2 y\,dx + (x^3 + 1)\,dy = \int\limits_0^1 [3x^2 x^2 + (x^3 + 1)\,2x]\,dx = \int\limits_0^1 (5x^4 + 2x)\,dx = 2,$$

в) ҳолда

$$\int\limits_{\smile AB} 3x^2 y\,dx + (x^3 + 1)\,dy = \int\limits_{\smile AC} 3x^2 y\,dx + (x^3 + 1)\,dy + \int\limits_{\smile CB} 3x^2 y\,dx + (x^3 + 1)\,dy,$$

бунда $\overset{\smile}{AC}$ — (0, 0) ва (1, 0) нуқталарни, CB — (1, 0) ва (1, 1) нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаларидан иборат.

Равшанки,

$$\int\limits_{\smile{AC}} 3x^2 ydx + (x^3+1)\,dy = 0,\quad \int\limits_{\smile{CB}} 3x^2 ydx + (x^3+1)\,dy = \int\limits_0^1 2\,dy = 2.$$

Демак,

$$\int\limits_{\smile{AB}} 3x^2 ydx + (x^3+1)\,dy = 2.$$

3- §. Грин формуласи ва унинг татбиқлари

Маълумки, Ньютон — Лейбниц формуласи $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқ бўйича олинган аниқ интегралини шу функция бошланғич функциясининг оралиқ четкалари (чегаралари) даги қийматлари орқали ифодалар эди.

Бирор (D) соҳада ($(D) \subset R^2$) берилган $f(x, y)$ узлуксиз функциянинг икки каррали

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy$$

интегралини тегишли функциянинг шу соҳа чегарасидаги қийматлари орқали (аниқроғи, соҳа чегараси бўйича олинган эгри чизиқли интеграл орқали) ифодалайдиган формула ҳам мавжуд. Қуйида бу формулани келтирамиз.

1. Грин формуласи. Юқоридан $y = \varphi_2(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ функция графиги, ён томонлардан $x = a$, $x = b$ вертикал чизиқлар ҳамда пастдан $y_1 = \varphi_1(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ функция графиги билан чегараланган соҳа — эгри чизиқли трапецияни қарайлик. Бу соҳани (D) билан, унинг чегараси — ёпиқ чизиқни $\partial(D)$ билан белгилайлик (26- чизма).

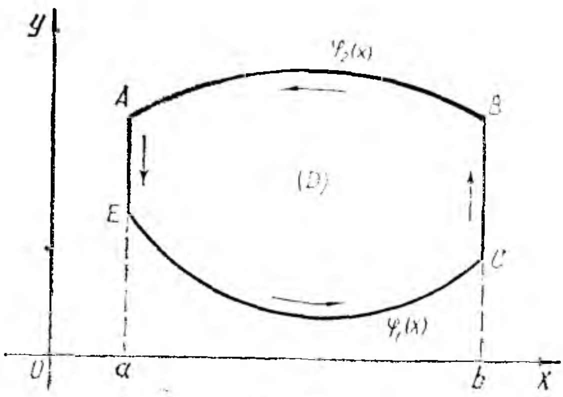
Равшанки, $\smile{AB}$ — $\varphi_2(x)$ функция графиги, $\smile{EC}$ — $\varphi_1(x)$ функция графиги ҳамда

$$\partial(D) = \smile{EC} + CB + \smile{BA} + AE.$$

$P(x, y)$ функция шу (D) соҳада берилган ва узлуксиз бўлиб, $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ хусусий ҳосилага эга ва у ҳам (D) да узлуксиз бўлсин. У ҳолда ушбу

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dxdy$$

интеграл мавжуд бўлади ва 18-бобнинг 6-§ идаги формулага кўра



26- чизма

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dy \right) dx$$

бўлади. Энди

$$\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dy = P(x, y)\Big|_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} = P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))$$

бўлишини эътиборга олиб қуйидагини топамиз:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_a^b P(x, \varphi_2(x))\, dx - \int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))\, dx.$$

Ушбу бобнинг 2-§ идаги (19.20) формулага биноан

$$\int\limits_a^b P(x, \varphi_2(x))\, dx = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)\, dx, \quad \int\limits_a^b P(x_1 \varphi_1((x))\, dx = \int\limits_{\overset{\smile}{EC}} P(x, y)\, dx$$

бўлади. Демак,

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)\, dx - \int\limits_{\overset{\smile}{EC}} P(x, y)\, dx =$$

$$= -\int\limits_{\overset{\smile}{BA}} P(x, y)\, dx - \int\limits_{\overset{\smile}{EC}} P(x, y)\, dx.$$

Равшанки,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{CB}} P(x, y)\, dx = 0, \quad \int\limits_{\overset{\smile}{EA}} P(x, y)\, dx = 0.$$

Бу тенгликларни ҳисобга олиб қуйидагини топамиз:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{\overset{\smile}{EC}} P(x, y)\, dx - \int\limits_{\overset{\smile}{CB}} P(x, y)\, dy - \int\limits_{\overset{\smile}{BA}} P(x, y)\, dx -$$

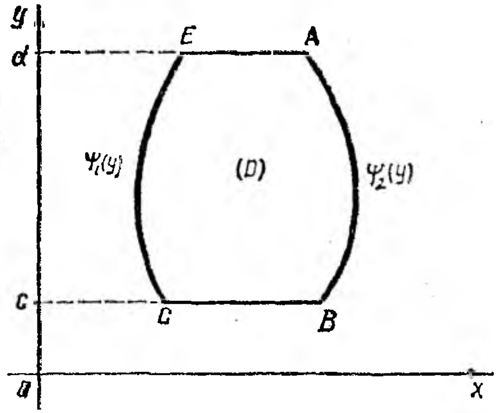
$$-\int\limits_{\overset{\smile}{AE}} P(x, y)\, dx = -\Big(\int\limits_{\overset{\smile}{EC}} P(x, y)\, dx + \int\limits_{\overset{\smile}{CB}} P(x, y)\, dx + \int\limits_{\overset{\smile}{BA}} P(x, y)\, dx +$$

$$+\int\limits_{\overset{\smile}{AE}} P(x, y)\, dx\Big) = -\int\limits_{\partial(D)} P(x, y)\, dx.$$

Демак,

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{\partial(D)} P(x, y)\, dx. \tag{19.23}$$

Энди, юқоридан $y = c$, пастдан $y = d$ чизиқлар, ён томондан эса $x = \psi_1(y)$, $y = \psi_2(y)$ функциялар графиклари билан чегараланган соҳа — эгри чизиқли трапецияни қарайлик. Бу соҳани (D) билан, унинг



27- чизма

чегараси — ёпиқ чизиқни $\partial(D)$ билан белгилайлик (27- чизма).

$Q(x, y)$ функция шу (D) соҳада берилган, узлуксиз бўлиб, $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилага эга ва бу ҳосила (D) да узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_{\partial(D)} Q(x, y)\, dy \qquad (19.24)$$

бўлади.

Бу формуланинг тўғрилиги юқоридагидек мулоҳаза юритиш билан исботланади.

Энди R^2 фазода қараладиган (D) соҳа юқоридаги икки ҳолда қаралган соҳанинг ҳар бирининг характерига эга бўлган соҳа бўлсин, $\partial(D)$ эса унинг чегараси бўлсин. Бу (D) соҳада иккита $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар берилган, узлуксиз бўлиб, улар $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам (D) да узлуксиз бўлсин. Равшанки, бу ҳолда (19.23) ва (19.24) формулалар ўринли бўлади. Уларни ҳадлаб қўшиб ушбуни топамиз:

$$\int\limits_{\partial(D)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dx = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right) dx\, dy. \qquad (19.25)$$

Бу *Грин формуласи* деб аталади.

Демак, Грин формуласи соҳа бўйича олинган икки каррали интегрални шу соҳа чегараси бўйича олинган эгри чизиқли интеграл билан боғлайдиган формула экан.

Биз юқорида Грин формуласини махсус кўринишдаги (D) соҳалар (эгри чизиқли трапециялар) учун келтирдик. Аслида бу формула анча кенг синфдаги соҳалар учун ҳам тўғри бўлиб, бу факт у соҳаларни чекли сондаги эгри чизиқли трапециялар йиғиндиси сифатида тасвирлаш билан исбот қилинади.

2. Грин формуласининг баъзи бир татбиқлари. 1°. Шаклнинг юзини топиш. Грин формуласидан фойдаланиб, ясси шаклнинг юзини содда функцияларнинг эгри чизиқли интеграллари ёрдамида ҳисобланишини кўрсатиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, (19.25) формулада $P(x, y) - y$, $Q(x, y) = 0$ дейилса, у ҳолда

$$\int\limits_{\partial(D)} (-y)\, dx = \iint\limits_{(D)} dx\, dy = D$$

бўлади. Демак,

$$D = -\int\limits_{\partial(D)} y\, dx.$$

Агар (19.25) формулада $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$ дейилса, у ҳолда

$$D = \int\limits_{\partial(D)} x dy \tag{19.26}$$

бўлади.

(19.25) формулада $P(x, y) = -\frac{1}{2} y$, $Q(x, y) = \frac{1}{2} x$ деб олинса, (D) соҳанинг юзи

$$D = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial(D)} x dy - y dx \tag{19.27}$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{array}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

эллипс билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин. (19.26) формулага кўра

$$D = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial(D)} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} (a \cos t b \cos t + b \sin t a \sin t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} ab \int\limits_{0}^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab$$

бўлади.

2°. Икки каррали интегралларни ўзгарувчиларни алмаштириб ҳисоблаш. Мазкур курснинг 18- боб, 7- § ида (Δ) соҳани (D) соҳага акслантирувчи

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v) \end{array}\right\} \tag{19.28}$$

система ўша параграфда келтирилган 1° — 3°- шартларни бажарганда (D) соҳанинг юзи

$$D = \iint\limits_{(\Delta)} \left| I(u, v) \right| du dv = \iint\limits_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv \tag{19.29}$$

бўлиши айтилган эди. Грин формуласидан фойдаланиб шу формуланинг тўғрилигини исботлаймиз.

Аввало (19.26) формуладан фойдаланиб, (D) соҳанинг юзи

$$D = \int\limits_{\partial(D)} x dy \tag{19.30}$$

бўлишини топамиз. Фараз қилайлик, $\partial(\Delta)$ параметрик формада ушбу

$$\begin{array}{l} u = u(t) \\ v = v(t) \end{array} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta \text{ ёки } \alpha \geqslant t \geqslant \beta)$$

система билан ифодалансин. У ҳолда қуйидаги

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(u, v) = \varphi(u(t), v(t)), \\ y = \psi(u, v) = \psi(u(t), v(t)) \end{array}\right\}$$

система (D) соҳанинг $\partial(D)$ чегарасини ифодалайди. Бунда параметрнинг ўзгариш чегарасини шундай танлаб оламизки, t параметр α дан β га қараб ўзгарганда $\partial(D)$ эгри чизиқ мусбат йўналишда бўлсин. У ҳолда (19.30) тенглик ушбу

$$D = \int\limits_{\partial(D)} x dy = \int\limits_{\partial(D)} \varphi(u, v)\, d\psi(u, v) =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(u(t), v(t)) \left[\frac{\partial\psi}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial\psi}{\partial v} v'(t)\right] dt \tag{19.31}$$

кўринишга келади.

Агар

$$\int\limits_{\partial(D)} \varphi(u, v) \left[\frac{\partial\psi}{\partial u} du + \frac{\partial\psi}{\partial v} dv\right] =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(u(t), v(t)) \left[\frac{\partial\psi}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial\psi}{\partial v} v'(t)\right] dt \tag{19.32}$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$D = \pm \int\limits_{\partial(D)} x \frac{\partial y}{\partial u} dn + x \frac{\partial y}{\partial v} dv \tag{19.33}$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликдаги интеграл белгиси олдига қўйилган ишорани тушунтирамиз. Юқорида, t параметр α дан β га қараб ўзгарганда $\partial(D)$ эгри чизиқни мусбат йўналишда бўлишини айтдик. Бу ҳолда $\partial(\Delta)$ эгри чизиқнинг йўналиши мусбат ҳам бўлиши мумкин, манфий ҳам бўлиши мумкин. Шунинг учун (19.31) ва (19.32) муносабатлар бир-биридан ишора билан фарқ қилади. Агар $\partial(D)$ эгри чизиқнинг мусбат йўналишига $\partial(\Delta)$ эгри чизиқнинг ҳам мусбат йўналиши мос келса, унда «+» ишора олинади, акс ҳолда эса «—» ишора олинади.

Энди ушбу

$$\int\limits_{\partial(\Delta)} P(u, v)\, du + Q(u, v)\, dv = \iint\limits_{(\Delta)} \left(\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v}\right) du\, dv \tag{19.34}$$

Грин формуласида

$$P(u, v) = x \frac{\partial y}{\partial u}, \quad Q(u, v) = x \frac{\partial y}{\partial v}$$

деб олсак, у ҳолда бу формула қуйидаги кўринишга келади:

$$\int\limits_{\partial(\Delta)} x \frac{\partial y}{\partial u} du + x \frac{\partial y}{\partial v} dv = \iint\limits_{(\Delta)} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(x \frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(x \frac{\partial y}{\partial u}\right)\right] du\, dv. \tag{19.35}$$

Агар

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(x \frac{\partial y}{\partial v}\right) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + x \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(x \frac{\partial y}{\partial u}\right) = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + x \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$$

ва

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(x \frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(x \frac{\partial y}{\partial v}\right) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

эканини эътиборга олсак, унда (19.33), (19.34) ва (19.35) муносабат лардан

$$D = \pm \iint\limits_{(\Delta)} \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\, du\, dv$$

бўлиши келиб чиқади.

Маълумки,

$$I(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

якобиан аниқ ишорали, D эса маъносига кўра мусбат бўлиши керак. Демак, интеграл белгиси олдидаги ишора якобианнинг ишораси билан бир хил бўлиши керак. Шунинг учун

$$D = \iint\limits_{(\Delta)} \left| \frac{\partial Q(x, y)}{D(u, v)} \right| du\, dv$$

бўлади. Шуни исботлаш лозим эди.

3°. Э г р и ч и з и қ л и и н г е г р а л қ и й м а т и н и н г и н т е г р а л л а ш й ў л и г а б о ғ л и қ б ў л м а с л и г и. Чегараланган ёпиқ боғламли (D) $((D) \subset R^2)$ соҳада иккита $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар берилган бўлсин. Бу функциялар (D) соҳада узлуксиз ва $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\frac{Q(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларга эга ва бу ҳосилалар ҳам шу соҳада узлуксиз бўлсин.

1) Агар (D) соҳада

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \tag{19.36}$$

бўлса, у ҳолда (D) соҳага тегишли бўлган ҳар қандай K ёпиқ чизиқ бўйича олинган ушбу

$$\int\limits_K P(x, y)dx + Q(x, y)\, dy$$

интеграл нолга тенг бўлади:

$$\int\limits_K P(x, y)dx + Q(x, y)\, dy = 0.$$

Исбот. K ёпиқ чизиқ чегараланган соҳани (G) дейлик. Равшанки, $(G) \subset (D)$. Грин формуласига кўра

$$\int\limits_K P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint\limits_{(G)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx\, dy$$

бўлади. Шартга кўра (D) да, демак (G) да

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

У ҳолда (19.36) муносабатдан

$$\iint\limits_{(G)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx\, dy = 0$$

бўлади. Демак,

$$\int\limits_{K} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = 0.$$

2) Агар (D) соҳага тегишли бўлган ҳар қандай K ёпиқ чизиқ бўйича олинган ушбу интеграл

$$\int\limits_{K} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = 0$$

бўлса, у ҳолда қуйидаги

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy \quad (\overset{\frown}{AB} \subset (D)) \tag{19.37}$$

интеграл A ва B нуқталарни бирлаштирувчи эгри чизиққа боғлиқ бўлмайди, яъни (19.37) интеграл қиймати интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмайди.

Исбот. (D) соҳанинг A ва B нуқталарини бирлаштирувчи ва шу соҳага тегишли бўлган ихтиёрий иккита $\overset{\frown}{AaB}$ ҳамда $\overset{\frown}{AbB}$ эгри чизиқни олайлик. Бу ҳолда $\overset{\frown}{AaB}$ ва $\overset{\frown}{AbB}$ эгри чизиқлар биргаликда (D) соҳага тегишли бўлган ёпиқ чизиқни ташкил этади. Уни K билан белгилайлик:

$$K = AaBbA.$$

Шартга кўра

$$\int\limits_{K} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = \int\limits_{AaBbA} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = 0$$

бўлади. Интегралнинг хоссасидан фойдаланиб ушбуни топамиз:

$$\int\limits_{AaBbA} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AaB}} P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\overset{\frown}{BbA}} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AaB}} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy -$$

$$- \int\limits_{\overset{\frown}{AbB}} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy.$$

Демак,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AaB}} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy - \int\limits_{\overset{\frown}{AaB}} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = 0.$$

Бундан эса

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AaB}} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AbB}} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy$$

эканлиги келиб чиқади.

19.2-эслатма. Юқоридаги тасдиқ, исбот жараёнидан кўринадики, $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ содда эгри чизиқлар тўпламидан ихтиёрий олинганда ўринлидир.

3) Агар ушбу

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)\,dy \quad (\overset{\frown}{AB} \subset (D)) \tag{19.37}$$

интеграл A ва B нуқталарини бирлаштирувчи эгри чизиққа боғлиқ бўлмаса, яъни интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

ифода (D) соҳада берилган бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлади.

Исбот. Модомики, (19.37) интеграллаш йўлига боғлиқ эмас экан, у ҳолда интеграл $A=(x_0, y_0)$ ва $B=(x_1, y_1)$ нуқталар билан бир қийматли аниқланади. Шунинг учун бу ҳолда (19.27) интеграл қуйидагича ҳам ёзилади:

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Энди A нуқтани тайинлаб, B нуқта сифатида (D) соҳанинг ихтиёрий (x, y) нуқтасини олиб, ушбу

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

интегрални қараймиз. Равшанки, бу интеграл (x, y) га боғлиқ бўлади:

$$F(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Бу функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблаймиз. (x, y) нуқтанинг x координатасига шундай Δx орттирма берайликки, $(x+\Delta x, y)$ нуқта ва (x, y), $(x+\Delta x, y)$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси ҳам (D) соҳага тегишли бўлсин. Натижада $F(x, y)$ функция ҳам хусусий орттирмага эга бўлади:

$$F(x+\Delta x, y) - F(x, y) = \int\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(x+\Delta x,\, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)\,dy -$$

$$- \int\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{(x,\, y)}^{(x+\Delta x,\, y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int\limits_{(x,\, y)}^{(x+\Delta x,\, y)} P(x, y)\,dx.$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int\limits_{(x,\, y)}^{(x+\Delta x,\, y)} P(x, y)dx = P(x+\theta\cdot\Delta x, y)\,\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

Натижада

$$\frac{F(x+\Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = P(x+\theta\cdot\Delta x, y)$$

бўлади. Бундан

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\cdot\Delta x, y) = P(x, y)$$

бўлади. Демак,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y).$$

Худди шунга ўхшаш

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

бўлиши кўрсатилади.

Шундай қилиб,

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}dy = dF(x, y)$$

бўлади.

4) Агар

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \tag{19.38}$$

ифода (D) соҳада берилган бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

бўлади.

Исбот. Айтайлик, (19.38) ифода (D) соҳада берилган $F(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлсин:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = dF(x, y).$$

Равшанки,

$$P(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

Кейинги тенгликлардан ушбуни топамиз:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{dx\,dy}, \qquad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y\,\partial x}.$$

Шартга кўра $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, лар (D) соҳада узлуксиз. Аралаш ҳосилаларнинг тенглиги ҳақидаги теоремага биноан (қаралсин, 13-боб, (6-§)

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

бўлади.

Шундай қилиб, Грин формуласидан фойдаланган ҳолда, юқоридаги 1) — 4) тасдиқлар орасида

$$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$$

муносабат борлиги кўрсатилди.

4- §. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар орасидаги боғланиш

Ушбу параграфда биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар орасидаги боғланишни ифодаловчи формулаларни келтирамиз.

Текисликда содда силлиқ $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\left.\begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \end{aligned}\right\} \qquad (0 \leqslant s \leqslant S)$$

система билан аниқланган бўлсин, бунда s — ёй узунлиги (қаралсин, ушбу бобнинг 1- §), $x(s)$ ва $y(s)$ функциялар $x'(s)$, $y'(s)$ ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар узлуксиз.

Равшанки, бу эгри чизиқ ҳар бир нуқтада уринмага эга бўлади. Агар Ox ва Oy ўқлар билан уринманинг ёй ўсиши томонига қараб йўналиш орасидаги бурчак мос равишда α ва β дейилса, унда

$$x'(s) = \cos\alpha, \qquad y'(s) = \cos\beta$$

бўлади.

Айтайлик, бу $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқда $f(x, y)$ функция берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)\,dx$$

интеграл мавжуд бўлади ва (19,17) формулага кўра

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)\,dx = \int\limits_0^S f(x(s),\ y(s)) \cdot x'(s)\,ds$$

тенглик ўринли. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални қуйидагича

$$\int\limits_0^S f(x(s),\ y(s)) \cdot x'(s)\,ds = \int\limits_0^S f(x(s),\ y(s))\ \cos\alpha\,ds$$

ёзиш мумкин. Ушбу бобнинг 1- § да келтирилган 19.1-теоремадан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int\limits_0^S f(x(s),\ y(s)\cos\alpha\,ds = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,\ y)\cos\alpha\,ds.$$

Натижада юқоридаги тенгликлардан

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)\,dx = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)\cos\alpha\,ds.$$

бўлиши келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш, тегишли шартларда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f\,x, y)\,dy = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)\cos\beta\,ds$$

ва умумий ҳолда

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = \int\limits_{\overset{\smile}{AE}} [P(x,\ y)\cos\alpha + Q(x, y)\cos\beta]\,ds$$

бўлади.

20-БОБ

СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ

Мазкур курсиннг 18-бобида $z = z(x, y)$ тенглама аниқлаган силлиқ (S) сирт билан танишган эдик. Бунда $z(x, y)$ функция (D) соҳада $((D) \subset R^2)$ берилган, узлуксиз ва $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам (D) да узлуксиз функция эди. (S) сирт юзга эга бўлиб, унинг юзи

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}\ dx\,dy \tag{20.1}$$

га тенг эканлиги кўрсатилди.

Ўша бобнинг пировардида R^3 фазодаги (V) соҳада $((V) \subset R^3)$ берилган функциянинг уч каррали интеграли билан танишиб, уни ўргандик.

Энди R^3 фазодаги (S) сиртда берилган функциянинг интеграли тушунчаси билан танишамиз. Сирт интеграли тушунчасини киритишдан аввал, бу ерда ҳам функция берилиш соҳасининг бўлиниши, бўлиниш бўлаклари, бўлинишнинг диаметри тушунчалари киритилиши керак.

Бу тушунчалар $[a, b]$ оралиқнинг бўлиниши (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 1-§) ва текисликдаги (D) соҳанинг бўлиниши (қаралсин, 18-боб, 1-§) даги каби киритилади ва ўхшаш хоссаларга эга бўлади. Шунинг учун бу ерда биз бу тушунчаларни киритилган ҳисоблаб бевосита баёнимизни сирт интегралининг таърифидан бошлаб кетаверамиз.

1-§. Биринчи тур сирт интеграллари

1. Биринчи тур сирт интегралининг таърифи. $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда $((S) \subset R^3)$ берилган бўлсин. Бу сиртнинг P бўлинишини ва бу бўлинишнинг ҳар бир (S_k) бўлагида $(k = 1, 2, \ldots n)$ ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқтани олайлик. Берилган функциянинг (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқтадаги $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ қийматини (S_k) нинг S_k юзига кўпайтириб, қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_h) \cdot S_k.$$

20.1-таъриф. Ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k \tag{20.2}$$

йиғинди $f(x, y, z)$ функциянинг *интеграл йиғиндиси* ёки *Риман йиғиндиси* деб аталади.

(S) сиртнинг шундай

$$P_1, P_2 \ldots, P_m, \ldots \tag{20.3}$$

бўлинишларини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \ldots, \lambda_{P_m}, \ldots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \to 0$ Бундай $P_m (m = 1, 2, \dots)$ бўлинишларга нисбатан $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йиғиндиларини тузамиз. Натижада (S) сиртнинг (20.3) бўлинишларига мос интеграл йиғиндилар қийматларидан иборат қуйидаги кетма-кетлик ҳосил бўлади:

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

20.2-таъриф. Агар (S) сиртнинг ҳар қандай (20.3) бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос интеграл йиғинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик, (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқталарни танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда, ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I *σ йиғиндининг лимити* деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k = I \qquad (20.4)$$

каби белгиланади.

Интеграл йиғиндининг лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

20.3-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилсаки, (S) сиртнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши ҳамда ҳар бир (S_k) бўлакдан олинган ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) лар учун

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I сони *σ йиғиндининг лимити* деб аталади ва у (20.4) каби белгиланади.

20.4-таъриф. Агар $\lambda_P \to 0$ да $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йиғиндиси σ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y, z)$ функция (S) сирт бўйича *интегралланувчи (Риман маъносида интегралланувчи) функция* деб аталади. Бу йиғиндининг чекли лимити I эса, $f(x, y, z)$ функциянинг *биринчи тур сирт интеграли* дейилади ва у

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, ds$$

каби белгиланади. Демак,

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, ds = \lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot S_k.$$

2. Узлуксиз функция биринчи тур сирт интеграли. Энди биринчи тур сирт интегралининг мавжуд бўлишини таъминлайдиган шартни топиш билан шуғулланамиз.

Фараз қилайлик R^3 фазодаги (S) сирт

$$z = z(x, y)$$

тенглама билан берилган бўлсин. Бунда $z = z(x, y)$ функция чегараланган ёпиқ (D) соҳада $((D)) \subset R^2)$ узлуксиз ва $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам (D) да узлуксиз.

20.1-теорема. Агар $f(x, y, z)$ *функция* (S) *сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг* (S) *сирт бўйича биринчи тур сирт интеграли*

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, ds$$

мавжуд ва

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, ds = \iint_{(D)} f(x, y, z, (x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}\, dx\, dy$$

бўлади.

Исбот. (S) сиртнинг P_S бўлинишини олайлик. Унинг бўлаклари (S_1), (S_2), . . . , (S_n) бўлсин. Бу сирт ва унинг бўлакларининг Oxy текисликдаги проекцияси (D) соҳанинг P_D бўлинишини ва унинг (D_1), $(D_2$, . . . , (D_n) бўлакларини ҳосил қилади. P_S бўлинишга нисбатан (20.2) йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \ \eta_k, \ \zeta_k)\, S_k.$$

Маълумки, $(\xi_k, \ \eta_k, \ \zeta_k) \in (S_k)$. Бу нуқтага аксланувчи нуқта $(\xi_k, \ \eta_k)$ бўлади. Демак, $\zeta_k = z(\xi_k, \ \eta_k)$. (20.1) формулага биноан

$$S_k = \iint_{(D_k)} \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}\, dx\, dy$$

бўлади.

Ўрта қиймат ҳақидаги теорема (қаралсин, 18-боб, 5-§) дан фойдаланиб топамиз:

$$S_k = \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k^*, \ \eta_k^*) + z_y'^2(\xi_k^*, \ \eta_k^*)} \quad D_k \quad ((\xi_k^*, \ \eta_k^*) \in (D_k)).$$

Натижада σ йиғинди қуйидаги

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \ \eta_k, \ z(\xi_k, \ \eta_k))\, S_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \ \eta_k, \ z(\xi_k, \ \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k \eta_k^*), \ + z_y'^2(\xi_k^*, \ \eta_k^*)} \quad D_k$$

кўринишга келади.

Энди $\lambda_{P_S} \to 0$ да (бу ҳолда $\lambda_{P_D} \to 0$ ҳам нолга интилади) σ йиғиндининг лимитини топиш мақсадида унинг ифодасини ўзгартириб ёзамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \ \eta_k + z_y'^2(\xi_k, \ \eta_k)} \ D_k +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k,\ z(\xi_k,\ \eta_k))\Big[\sqrt{1+z_x'^2(\xi_k^*,\ \eta_k^*)+z_y'^2(\xi_k^*,\ \eta_k^*)}\ -$$

$$-\sqrt{1+z_x'^2(\xi_k,\ \eta_k)+z_y'^2(\xi_k,\ \eta_k)}\Big]D_k. \tag{20.5}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчини баҳолаймиз:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k,\ z(\xi_k,\ \eta_k))\Big[\sqrt{1+z_x'^2(\xi_k^*,\ \eta_k^*)+z_y'^2(\xi_k^*,\ \eta_k^*)}\ -$$

$$-\sqrt{1+z_x'^2(\xi_k,\ \eta_k)+z_y'^2(\xi_k,\ \eta_k)}\Big]D_k\Big| \leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\Big|\sqrt{1+z_x'^2(\xi_k^*,\ \eta_k^*)+z_y'^2(\xi_k^*,\ \eta_k^*)}\ -$$

$$-\sqrt{1+z_k'^2(\xi_k,\ \eta_k)+z_y'^2(\xi_k,\ \eta_k)}\Big|D_k,$$

бунда

$$M=\max|f(x,\ y,\ z)|.$$

Равшанки,

$$\sqrt{1+z_x'^2(x,\ y)+z_y'^2(x,\ y)}$$

функция (D) да узлуксиз, демак, текис узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига кўра $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta>0$. топиладики, (D) соҳанинг диаметри $\lambda_{P_D}<\delta$ бўлган ҳар қандай P_D бўлиниши учун

$$\Big|\overline{1+z_x'^2(\xi_k^*,\ \eta_k^*)+z_y'^2(\xi_k^*,\ \eta_k^*)}\ -$$

$$-\sqrt{1+z_x'^2(\xi_k,\ \eta_k)+z_y'^2(\xi_k,\ \eta_k)}\Big|<\frac{\varepsilon}{M\cdot D}$$

бўлади. Унда

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k,\ z(\xi_k,\ \eta_k))\Big[\sqrt{1+z_k'^2(\xi_k^*,\ \eta_k^*)+z_y'^2(\xi_k^*,\ \eta_k)}\ -$$

$$-\sqrt{1+z_x'^2(\xi_k,\ \eta_k)+z_y'^2(\xi_k,\ \eta_k)}\Big]D_k\Big|<M\frac{\varepsilon}{MD}\sum_{k=1}^{n}D_k=\varepsilon$$

ва демак,

$$\lim_{\lambda_{P_D}\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k,\ z(\xi_k,\ \eta_k))\Big[\sqrt{1+z_x'^2(\xi_k^*,\ \eta_k^*)+z_k'^2(\xi_k^*,\ \eta_k^*)}\ -$$

$$-\sqrt{1+z_x'^2(\xi_k,\ \eta_k)+z_y'^2(\xi_k,\ \eta_k))}\Big]D_k=0$$

бўлади.

(20.5) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \; D_k$$

эса

$$f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}$$

функциянинг интеграл йиғиндисидир. Бу функция (D) соҳада узлуксиз. Демак, $\lambda_{P_D} \to 0$ да интеграл йиғинди чекли лимитга эга ва

$$\lim_{\lambda_{P_D} \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \; D_k =$$
$$= \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} \; dx\,dy$$

бўлади. Бу муносабатни эътиборга олиб, (20.5) тенгликда $\lambda_{P_S} \to 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{\lambda_{P_S} \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_{P_S} \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \; D_k =$$
$$= \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} \; dx\,dy.$$

Демак,

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, ds = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} \; dx\,dy.$$

Теорема исбот бўлди.

Бу теорема, бир томондан, узлуксиз функция биринчи тур сирт интегралининг мавжудлигини аниқлаб берса, иккинчи томондан, бу интеграл икки каррали Риман интеграли орқали ифодаланишини кўрсатади.

20.1-эслатма. (S) сирт $x = x(y, z)$ $(y = y(z, x))$ тенглама билан аниқланган бўлиб, $x = x(y, x)$ функция ($y(z, x)$ функция) (D) соҳада ($(D) \subset R^2$) узлуксиз ва $x_y'(y, z)$, $x_z'(y, z)$ хусусий ҳосилаларга ($y_z'(z, x)$, $y_x'(z, x)$ хусусий ҳосилаларга) эга ҳамда бу ҳосилалар (D)) да узлуксиз бўлсин.

Агар $f(x, y, z)$ функция шу (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг биринчи тур сирт интеграли

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, ds$$

мавжуд ва

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, ds = \iint_{(D)} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2(y, z) + x_z'^2(y, z)} \; dy\,dz,$$

$$\left(\iint_{(S)} f(x, y, z)\, ds = \iint_{(D)} f(x, y(z, x), z) \sqrt{1 + y_z'^2(z, x) + y_x'^2(z, x)} \; dz\,dx \right)$$

бўлади.

20.2-эслатма. Биз $f(x, y, z)$ функция биринчи тур сирт интегралининг мавжудлигини махсус кўринишдаги (S) сиртлар ($z = z(x, y)$, $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$ тенгламалар билан аниқланган сиртлар) учун келтирдик. Аслида функция интегралининг мавжудлиги кенг синфдаги сиртлар учун тўғри бўлади. Жумладан, агар (S) сирт чекли сондаги юқорида айтилган сиртлар йиғиндиси сифатида тасвирланган бўлса, унда берилган ва узлуксиз бўлган $f(x, y, z)$ функциянинг сирт интеграли мавжуд бўлади ва у мос икки каррали интеграллар йиғиндисига тенг бўлади.

3. Биринчи тур сирт интегралларининг хоссалари. Юқорида келтирилган теорема узлуксиз функциялар биринчи тур сирт интегралларининг икки каррали Риман интегралларига келишини кўрсатади. Бинобарин, бу сирт интеграллар ҳам икки каррали Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга бўлади. Икки каррали Риман интегралларининг хоссалари 18-бобнинг 5-§ ида ўрганилган.

4. Биринчи тур сирт интегралларни ҳисоблаш. Юқорида келтирилган теорема функция биринчи тур сирт интегралининг мавжудлигини тасдиқлабгина қолмасдан, уни ҳисоблаш йўлини ҳам кўрсатади. Демак, биринчи тур сирт интеграллар икки каррали Риман интегралларига келтирилиб ҳисобланади:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)ds = \iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}\, dx\, dy,$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, ds = \iint\limits_{(D)} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2(y, z) + x_z'^2(y, z)}\, dy\, dz,$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, ds = \iint\limits_{(D)} f(x, y(z, x), z) \sqrt{(1 + y_z'^2(z, x) + y_x'^2(z, x)}\, dz\, dx. \quad (20.6)$$

Мисоллар. 1. Ушбу

$$I = \iint\limits_{(S)} (x + y + z)\, ds$$

интегрални қарайлик. Бунда (S) — $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ сферанинг $z = 0$ текисликнинг юқорида жойлашган қисми.

Равшанки. (S) сирт

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

тенглама билан аниқланган бўлиб, бу сиртда берилган

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

функция узлуксиздир. 20.1 теоремага кўра

$$I = \iint\limits_{(D)} (x + y + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}\, dx\, dy$$

бўлади, бунда $(D) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$.

Энди бу тенгликнинг ўнг томонидаги икки каррали интегрални ҳисоблаймиз:

$$z_x'(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y'(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Демак,

$$I = \iint\limits_{(D)} (x+y+\sqrt{r^2-x^2-y^2}) \sqrt{1+z_x'^2(x, y)+z_y'^2(x, y)}\, dx\, dy =$$

$$= r \iint\limits_{(D)} \left(\frac{x+y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} + 1 \right) dx\, dy.$$

Кейинги интегралда ўзгарувчиларни алмаштирамиз:

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi.$$

Натижада

$$I = r \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^r \left[\frac{\rho(\cos\psi+\sin\psi)}{\sqrt{r^2-\rho^2}} + 1 \right] \rho d\rho \right) d\psi = r \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^r \frac{\rho(\cos\psi+\sin\psi)}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \rho d\rho \right) d\psi +$$

$$+ r \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^r \rho d\rho \right) d\psi = r \int\limits_0^{2\pi} (\cos\psi+\sin\psi)\, d\psi \int\limits_0^r \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}} + r \cdot 2\pi \frac{r^2}{2} = \pi r^3.$$

Демак, берилган интеграл

$$\iint\limits_{(S)} (x+y+z)\, ds = \pi r^3$$

бўлади.

3. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)} x(y+z) ds$$

интегрални қарайлик, бунда (S) — $x = \sqrt{b^2-y^2}$ цилиндрик сиртнинг $z=0$, $z=c$ $(c>0)$ текисликлар орасидаги қисми.

Модомики, бу (S) сирт $x=\sqrt{b^2-y^2}$ кўринишда берилган экан, унда интегрални ҳисоблаш учун (20.6) формуладан фойдаланиш лозимдир.

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, ds = \iint\limits_{(D)} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1+x_y'^2(y, z)+x_z'^2(y, z)}\, dydz.$$

Бунда (D) соҳа (S) сиртнинг Oyz текисликдаги проекциясидан иборат:

$$(D) = \{(y, z) \in R^2 : x = \sqrt{b^2-y^2},\ z=0,\ z=c\} =$$

$$= \{(y, z) \in R^2 : -b \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c\},$$

$x = \sqrt{b^2-y^2}$ функциянинг хусусий ҳосилалари

$$x_y'(y, z) = -\frac{y}{\sqrt{b^2-y^2}}, \qquad x_z'(y, z) = 0$$

бўлади. Демак,

$$\iint\limits_{(S)} x(y+z) ds = \iint\limits_{(D)} \sqrt{b^2-y^2}\,(y+z) \sqrt{1+\frac{y^2}{b^2-y^2}}\, dydz =$$

$$= b \iint\limits_{(D)} (y+z) dy\, dz$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги икки каррали интегрални ҳисоблаб топамиз:

$$b \iint\limits_{(D)} (y+z)\, dydz = b \int\limits_{-b}^{b} \left(\int\limits_0^c (y+z)\, dz \right) dy = b \int\limits_{-b}^{b} \left(yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_{z=0}^{z=c} dy =$$

$$= b \int\limits_{-b}^{b} \left(cy + \frac{c^2}{2} \right) dy = \frac{bc}{2} y^2 \Bigg|_{-b}^{b} + \frac{bc^2}{2} y \Bigg|_{-b}^{b} = b^2c^2.$$

Демак,

$$\iint\limits_{(S)} x\,(y+z)\,ds = b^2c^2.$$

2- §. Иккинчи тур сирт интеграллари

R^3 фазода $z=z(x, y)$ тенглама билан аниқланган (S) сиртни қарайлик. Бунда $z(x, y)$ функция чегараси бўлакли-силлиқ чизиқдан иборат бўлган (D) соҳада ($(D)\subset R^2$) берилган, узлуксиз, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам узлуксиз. Одатда бундай сиртни силлиқ сирт дейилади. Силлиқ сирт ҳар бир (x_0, y_0, z_0) нуқтасида уринма текисликка эга бўлади.

Энди (S) сиртда унинг чегараси билан кесишмайдиган K ёпиқ чизиқни олайлик. (x_0, y_0, z_0) нуқта сиртнинг K ёпиқ чизиқ билан чегараланган қисмига тегишли бўлсин. Бу чизиқни Oxy текислигига проекциялаймиз. Натижада Oxy текисликда ҳам $K_п$ ёпиқ чизиқ ҳосил бўлади. Мазкур курснинг 19- боб, 2- § ида текисликдаги ёпиқ чизиқнинг мусбат ва манфий йўналишлари киритилган эди. (S) сиртдаги ёпиқ чизиқнинг мусбат ва манфий йўналишлари ҳам шу сингари киритилади. Шуни ҳам айтиш керакки, йўналишнинг мусбат ёки манфийлигини аниқлаш ҳаракатланаётган нуқтага қай томондан қарашга ҳам боғлиқ.

Сиртнинг (x_0, y_0, z_0) нуқтасидаги уринма текисликка шу нуқтада перпендикуляр ўтказайлик. Бу перпендукулярнинг мусбат йўналиши деб шундай йўналиш оламизки, унинг томонидан қаралганда иккала (K ҳамда $K_п$) ёпиқ чизиқларнинг йўналишлари мусбат бўлади. Унинг манфий йўналиши эса шундай йўналишки, у томондан қаралганда $K_п$ нинг мусбат йўналишига K нинг манфий йўналиши мос келади. Перпендукулярнинг мусбат йўналиши бўйича олинган бирлик кесма сиртнинг (x_0, y_0, z_0) нуқтадаги *нормали* дейилади.

Нормалнинг Ox, Oy ва Oz ўқларининг мусбат йўналишлари билан ташкил қилган бурчакларини мос равишда λ, β, γ орқали белгиласак,

$$\cos\alpha = -\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}, \quad \cos\beta = -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \tag{20.7}$$

бўлади ва улар нормалнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади (қаранг, Г. М. Фихтенгольц, «Математик анализ асослари», II қисм).

Исботлаш мумкинки, силлиқ (S) сиртнинг барча нуқталаридаги перпендукулярларнинг мусбат йўналишлари (нормаллари) бир хил бўлади. Ва, демак, манфий йўналишлари ҳам. Шунга кўра, сиртнинг икки томони ҳақида тушунча киритилади.

Сиртнинг устки томони деб, унинг шундай томони олинадики, бу томондан қаралганда иккала (K ва $K_п$) ёпиқ чизиқларнинг йўналишлари мусбат бўлади.

Сиртнинг устки томони қаралганда $K_п$ билан чегараланган текис шаклнинг юзи мусбат ишора билан, пастки томони (иккинчи томони) қаралганда манфий ишора билан олинади.

1. Иккинчи тур сирт интегралининг таърифи. $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган бўлсин. Бу сиртнинг маълум бир томонини олайлик. Сиртнинг P бўлинишини ва бу бўлинишнинг ҳар бир (S_k) бўлагида $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқта $(k = 1, 2, \ldots, n)$ олайлик. Берилган функциянинг (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқтадаги $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ қийматини (S_k) нинг Oxy текисликдаги проекцияси (D_k) нинг юзига кўпайтириб қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) D_k. \tag{20.8}$$

(S) сиртнинг шундай

$$P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots \tag{20.9}$$

бўлинишларини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \ldots, \lambda_{P_m}, \ldots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \to 0$. Бундай P_m $(m = 1, 2, \ldots)$ бўлинишларга нисбатан $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йиғиндиларини тузамиз. Натижада (S) сиртнинг (20.9) бўлинишларига мос интеграл йиғиндилар қийматларидан иборат қуйидаги

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади.

20.5-таъриф. Агар (S) сиртнинг ҳар қандай (20.9) бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам, унга мос интеграл йиғинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик, (ξ_k, η_k, ζ_k) нуқталарни танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт битта I сонга интилса, бу I *σ йиғиндининг лимити* деб аталади ва у

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) D_k = I \tag{20.10}$$

каби белгиланади.

Интеграл йиғиндининг лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

20.6-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топилсаки, (S) сиртнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши ҳамда ҳар бир (S_k) бўлакдан олинган ихтиёрий (ξ_k, η_k, ζ_k) лар учун

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I сони *σ йиғиндининг лимити* деб аталади ва у (20.10) каби белгиланади.

20.7-таъриф. Агар $\lambda_P \to 0$ да $f(x, y, z)$ функциянинг интеграл йиғиндиси σ чекли лимитга эга бўлса, $f(x, y, z)$ функция (S) *сиртнинг танланган томони бўйича интегралланувчи функция* деб аталади. Бу йиғиндининг чекли лимити I эса, $f(x, y, z)$ функциянинг (S) сиртнинг танланган томони бўйича *иккинчи тур сирт интеграли* деб аталади ва у

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dxdy$$

каби белгиланади. Демак,

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dxdy = \lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, D_k.$$

Функция иккинчи тур сирт интегралининг қуйидагича

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dxdy \tag{20.11}$$

белгиланишидан, интеграл (S) сиртнинг қайси томони бўйича олинганлиги кўринмайди. Бинобарин, (20.11) интеграл тўғрисида гап борганда, ҳар гал интеграл сиртнинг қайси томони бўйича олинаётганлиги айтиб борилади.

Равшанки, $f(x, y, z)$ функциянинг (S) сиртнинг бир томони бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли, функциянинг шу сиртнинг иккинчи томони бўйича олинган иккинчи тур сирт интегралидан фақат ишораси билангина фарқ қилади.

Юқоридагидек,

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dydz, \quad \iint_{(S)} f(x, y, z)\, dzdx$$

иккинчи тур сирт интеграллари таърифланади.

Шундай қилиб, сиртда берилган $f(x, y, z)$ функциядан учта — Oxy текисликдаги проекциялар, Oyz текисликдаги проекциялар ҳамда Ozx текисликдаги проекциялар воситасида олинган иккинчи тур сирт интеграли тушунчалари киритилади.

Умумий ҳолда, (S) сиртда $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функциялар берилган бўлиб, ушбу

$$\iint_{(S)} P(x, y, z)\, dxdy, \quad \iint_{(S)} Q(x, y, z)\, dydz, \quad \iint_{(S)} R(x, y, z)\, dzdx$$

интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\iint_{(S)} P(x, y, z)\, dxdy + \iint_{(S)} Q(x, y, z)\, dydz + \iint_{(S)} R(x, y, z)\, dzdx$$

йиғинди иккинчи тур сирт интегралининг умумий кўриниши деб аталади ва у

$$\iint_{(S)} P(x, y, z)\, dxdy + Q(x, y, z)\, dydz + R(x, y, z)\, dzdx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\iint_{(S)} P(x, y, z)\, dxdy + Q(x, y, z)\, dydz + R(x, y, z)\, dzdx =$$

$$= \iint_{(S)} P(x, y, z)\, dxdy + \iint_{(S)} Q(x, y, z)\, dydz + \iint_{(S)} R(x, y, z)\, dzdx.$$

Энди R^3 фазода бирор (V) жисм берилган бўлсин. Бу жисмни ўраб турган ёпиқ сирт силлиқ сирт бўлиб, уни (S) дейлик. $f(x, y, z)$ функция (V) да берилган. Oxy текисликка параллел бўлган текислик билан (V) ни икки қисмга ажратамиз: $(V) = (V_1) + (V)_2$. Натижада уни ўраб турган (S) сирт ҳам (S_1) ва (S_2) сиртларга ажралади. Ушбу

$$\iint_{(S_1)} f(x, y, z)\, dx\, dy + \iint_{(S_2)} f(x, y, z)\, dx\, dy \tag{20.12}$$

интеграл (агар у мавжуд бўлса) $f(x, y, z)$ функциянинг ёпиқ сирт бўйича иккинчи тур сирт интеграли деб аталади ва

$$\oint\!\!\oint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$$

каби белгиланади. Бунда (20.12) муносабатдаги биринчи интеграл (S_1) сиртнинг устки томони, иккинчи интеграл эса (S_2) сиртнинг пастки томони бўйича олинган. Худди шунга ўхшаш

$$\oint\!\!\oint_{(S)} f(x, y, z)\ dy\, dz, \qquad \oint\!\!\oint_{(S)} f(x, y, z)\ dz\, dx$$

ҳамда, умумий ҳолда

$$\oint\!\!\oint_{(S)} P(x, y, z,)\ dx\, dy + Q(x, y, z)\, dy\, dz + R(x, y, z)\, dz\, dx$$

интеграллар таърифланади.

2. Узлуксиз функция иккинчи тур сирт интеграли. Фараз қилайлик, R^3 фазода (S) сирт $z = z(x, y)$ тенглама билан берилган бўлсин. Бунда $z = z(x, y)$ функция чегараланган ёпиқ (D) соҳада $((D) \subset R^2)$ узлуксиз ва $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ҳамда бу ҳосилалар ҳам (D) да узлуксиз.

20.2- теорема. *Агар $f(x, y, z)$ функция (S) сиртда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг (S) сирт бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли*

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dx\, dy$$

мавжуд ва

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dx dy = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y))\, dx\, dy$$

бўлади.

Исбот. (S) сиртнинг P_S бўлинишини олайлик. Унинг бўлаклари (S_1), (S_2), ..., (S_n) бўлсин. Бу сирт ва унинг бўлакларининг Oxy текисликдаги проекцияси (D) нинг P_D бўлинишини ва унинг (D_1), (D_2) ... (D_n) бўлакларини ҳосил қилади. P_S бўлинишга нисбатан ушбу йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot D_k. \tag{20.8}$$

Агар (S) сиртнинг устки томони қаралаётган бўлса, у ҳолда барча D_k лар мусбат бўлади.

Модомики, $f(x, y, z)$ функция $z = z(x, y)$ сиртда берилган экан, у x ва y ўзгарувчиларнинг қуйидаги функциясига айланади:

$$f(x, y, z) = f(x, y, z(x, y)).$$

Бундан эса

$$\zeta_k = z(\xi_k, \eta_k) \quad (k = 1,2, \ldots, n)$$

бўлиши келиб чиқади. Натижада (20.8) йиғинди ушбу

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \cdot D_k$$

кўринишга келади. Бу йиғинди $f(x, y, z(x, y))$ функциянинг интеграл йиғиндиси (икки каррали интеграл учун интеграл йиғинди) эканини пайқаш қийин эмас. Агар $f(x, y, z(x, y))$ функциянинг (D) да узлуксиз эканлигини эътиборга олсак, унда $\lambda_{P_D} \to 0$ да

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) D_k$$

йиғинди чекли лимитга эга бўлади ва

$$\lim_{\lambda_{P_D} \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\zeta_k, \eta_k)) D_k = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y))\, dx\, dy$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{\lambda_{P_S} \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_{P_S} \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k \; \zeta_k) \cdot D_k =$$

$$= \lim_{\lambda_{P_D} \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) D_k = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y))\, dxdy.$$

Бундан эса

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dxdy = \iint_{(S)} f(x, y, z(x, y))\, dxdy$$

бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Агар (S) сиртнинг пастки томони қаралса, унда барча D_k лар манфий бўлиб,

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dxdy = -\iint_{(D)} f(x, y, z(x, y))\, dxdy$$

бўлади.

Худди юқоридагидек, тегишли шартларда

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dydz, \quad \iint_{(D)} f(x, y, z)\, dzdx$$

интеграллар мавжуд бўлади ва

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dydz = \iint_{(S)} f(x(y, z), y, z)\, dydz,$$

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dzdx = \iint_{(D)} f(x, y(z, x), z)\, dzdx$$

бўлади.

20.1-натижа. Ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган (S) цилиндрик сиртни қарайлик. $f(x, y, z)$ функция шу сиртда берилган бўлсин. У ҳолда

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dxdy$$

мавжуд бўлади ва у нолга тенг:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dxdy = 0.$$

Худди шунга ўхшаш, тегишли шартларда

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dydz = 0, \quad \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dzdx = 0$$

бўлади.

Бу тенгликлар бевосита иккинчи тур сирт интеграллари таърифидан келиб чиқади.

Юқорида келтирилган теоремадан фойдаланиб, иккинчи тур сирт интеграллари ҳам икки каррали Риман интеграллари хоссалари каби хоссаларга эга бўлишини кўрсатиш ва уларни келтириб чиқаришни ўкувчига ҳавола этамиз.

3. **Иккинчи тур сирт интегралларини ҳисоблаш.** Юқорида келтирилган теоремадан фойдаланиб иккинчи тур сирт интегралларини ҳисоблаш мумкин. Унда иккинчи тур сирт интеграллари икки каррали Риман интегралларига келтириб ҳисобланади:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dxdy = \iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))\, dxdy,$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dydz = \iint\limits_{(D)} f(x(y, z), y, z)\, dydz,$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dzdx = \iint\limits_{(D)} f(x, y(z, x), z), dzdx.$$

Мисол. Ушбу

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz\right) dxdy$$

интегрални қарайлик. Бунда (S) — $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг $z = 0$ текисликдан пастда жойлашган қисми бўлиб, интеграл шу сиртнинг пастки томони бўйича олинган.

Равшанки, бу (S) сиртнинг тенгламаси қуйидагича бўлиб,

$$z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

унинг Oxy текислигидаги проекцияси

$$(D) = \left\{(x, y) \in R^2:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$$

эллипсдан иборатдир.

(S) сирт ҳам, бу сиртда берилган

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz$$

функция ҳам 20.2-теореманинг шартларини қаноатлантиради. У ҳолда

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} + kz\right) dxdy = -\iint\limits_{(D)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - kc\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\right) dxdy$$

бўлади. Интеграл (S) сиртнинг пастки томони бўйича олинганлиги сабабли тенгликнинг ўнг томонидаги икки каррали интеграл олдига минус ишораси қўйилди.

Энди бу

$$-\iint\limits_{(D)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right) dxdy =$$
$$=\iint\limits_{(D)} \left(kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$$

икки каррали интегрални ҳисоблаймиз. Икки каррали интегралда ўзгарувчиларни

$$x = a\rho\cos\varphi,\quad y = b\rho\sin\varphi$$

каби алмаштириб қуйидагини топамиз:

$$\iint\limits_{(D)} \left(kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^1 (kc\sqrt{1-\rho^2}-\rho^2)\,ab\rho d\rho\right] d\varphi=$$
$$= ab\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^1 (kc\rho\sqrt{1-\rho^2}-\rho^3)\,d\rho\right] d\varphi = 2\pi ab\left[-\frac{kc}{2}\,\frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{3/2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 =$$
$$= 2\pi ab\left(-\frac{1}{4}+\frac{kc}{3}\right).$$

Демак,

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+kz\right) dxdy = 2\pi ab\left(\frac{kc}{3}-\frac{1}{4}\right).$$

4. Биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллари орасидаги боғланиш. Биз 19-бобнинг 4-§ да биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар орасидаги боғланишни ифодалайдиган формулаларни келтирган эдик.

Шунга ўхшаш, биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллари орасидаги боғланишни ифодаловчи формулалар ҳам мавжуд.

(S) сирт ва унда берилган $f(x, y, z)$ ва $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функциялар тегишли шартларни қаноатлантирганда (қаралсин, 2-§ нинг 1-пункти) ушбу

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dydz = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\cos\alpha\,ds,$$
$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dzdx = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\cos\beta\,ds, \qquad (20.13)$$
$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dxdy = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\cos\gamma\,ds,$$

умумий ҳолда

$$\iint\limits_{(S)} P(x, y, z)\,dydz + Q(x, y, z)\,dzdx + R(x, y, z)\,dxdy =$$
$$= \iint\limits_{(S)} [P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma]\,ds$$

формулалар ўринли бўлади.

Бу формулаларнинг тўғрилигини исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз.

3- §. Стокс формуласи

R^3 фазода $z = z(x, y)$ тенглама билан аниқланган силлиқ (S) сирт берилган бўлсин. Бу сиртнинг чегараси $\partial(S)$ бўлакли-силлиқ эгри чизиқ бўлсин. (S) сиртнинг Oxy текисликдаги проекциясини (D) дейлик. Унда $\partial(S)$ нинг проекцияси $\partial(D)$ дан иборат бўлади.

Фараз қилайлик, (S) сиртда $P(x, y, z)$ функция берилган бўлиб, у узлуксиз бўлсин. Ундан ташқари бу функция (S) да

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}$$

хусусий ҳосилаларга эга ва улар узлуксиз бўлсин.

Ушбу

$$\int\limits_{\partial(S)} P(x, y, z)\, dx$$

эгри чизиқли интегрални қарайлик (унинг мавжудлиги равшан). Агар $\partial(S)$ чизиқнинг (S) сиртда ётишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int\limits_{\partial(S)} P(x, y, z)\, dx = \int\limits_{\partial(S)} P(x, y, z(x, y))\, dx$$

бўлади.

Энди Грин формуласидан фойдаланиб ушбуни топамиз:

$$\int\limits_{\partial(D)} P(x, y, z(x, y))\, dx = -\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y}\, dxdy.$$

Равшанки, $P(x, y, z(x, y))$ функциянинг y ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосиласи

$$\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot z'_y(x, y)$$

бўлади.

Ушбу бобнинг 2-§ идаги (20.7) муносабатлардан

$$z'_y(x, y) = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

бўлишини эътиборга олсак,

$$\iint\limits_{(D)} \left[\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot z'_y(x, y)\right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(D)} \left[\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right] dxdy$$

бўлади.

Натижада қаралаётган интеграл учун қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int\limits_{\partial(S)} P(x, y, z)\, dx = -$$

$$-\iint\limits_{(D)} \left[\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right] dxdy. \qquad (20.14)$$

2- § даги 20.2- теоремадан фойдаланиб (20.14) тенгликнинг ўнг томонидаги икки каррали интегрални иккинчи тур сирт интеграли орқали ифодалаймиз:

$$\iint\limits_{(D)} \left[\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right] dxdy.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи тур сирт интегралини, (20.13) формулага асосланиб, биринчи тур сирт интегралига келтирамиз:

$$\iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right] \cdot dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right] \cdot \cos\gamma\, ds = \qquad (20.15)$$

$$= \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \cos\gamma\, ds - \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cos\beta\, ds.$$

Ва ниҳоят, яна (20.13) формулалардан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \cos\gamma\, ds = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}\, dxdy,$$

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cos\beta\, ds = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\, dzdx. \qquad (20.16)$$

(20.14), (20.15) ва (20.16) муносабатлардан

$$\int\limits_{\partial(S)} P(x, y, z)\, dx = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\, dzdx - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}\, dxdy \qquad 20.17)$$

бўлиши келиб чиқади.

Худди шундай мулоҳаза асосида (S) сирт ва унда берилган $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функциялар тегишли шартларни бажарганда ушбу

$$\int\limits_{\partial(S)} Q(x, y, z)\, dy = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x}\, dxdy - \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z}\, dydz,$$

$$\int\limits_{\partial(S)} R(x, y, z)\, dz = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y}\, dydz - \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x}\, dzdx \quad (20.18)$$

формулаларнинг ўринли бўлиши кўрсатилади. (20.17) ва (20.18) формулаларни ҳадлаб қўшиб қуйидагини топамиз:

$$\int\limits_{\partial(S)} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}\right] dxdy + \left[\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z}\right] dydz + \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x}\right] dzdx. \quad (20.19)$$

Бу *Стокс формуласи* деб аталади.

20.2-натижа. Мазкур курснинг 19-боб, 3-§ идаги Грин формуласи Стокс формуласининг хусусий ҳолидир. Ҳақиқатан ҳам, (20.19) Стокс формуласида (S) сирт сифатида Oxy текисликдаги (D) соҳа олинса, унда $z = 0$ бўлиб, (20.19) формуладан

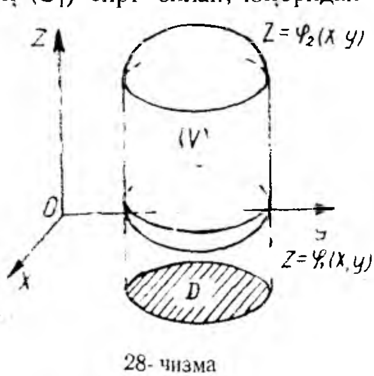
$$\int\limits_{\partial(D)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint\limits_{(D)} \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right] dxdy$$

бўлиши келиб чиқади. Бу Грин формуласидир.

Шундай қилиб, Стокс формуласи (S) сирт бўйича олинган II тур сирт интеграли билан шу сиртнинг чегараси бўйича олинган эгри чизиқли интегрални боғловчи формуладир.

4-§. Остроградский формуласи

R^3 фазода, пастдан $z = \varphi_1(x, y)$ теглама билан аниқланган силлиқ (S_1) сирт билан, юқоридан $z = \varphi_2(x, y)$ тенглама ёрдамида аниқланган силлиқ (S_2) сирт билан, ён томондан эса ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик (S_3) сирт билан чегараланган (V) соҳани (жисмни) қарайлик. Унинг Oxy текисликдаги проекцияси (D) бўлиб, бу (D) нинг чегараси юқорида айтилган цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси сифатида олинади (28-чизма)



28-чизма

$$(\varphi_1(x, y) \leqslant \varphi_2(x, y),\ (x, y) \in (D)).$$

Фараз қилайлик, (V) да $R(x, y, z)$ функция берилган ва узлуксиз бўлсин. Бундан ташқари бу функция шу соҳада

$$\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$$

хусусий ҳосилага эга ва бу ҳосила ҳам узлуксиз.

Равшанки, бу ҳолда

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$$

мавжуд бўлади ва 18-бобнинг 10-§ ида келтирилган формулага кўра

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(D)} \left(\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right) dxdy \quad (20.20)$$

бўлади.

Агар

$$\int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz = R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y))$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\iint\limits_{(D)} \left(\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz \right) dxdy = \iint\limits_{(D)} R(x, y, \varphi_2(x, y))\, dxdy -$$

$$- \iint\limits_{(D)} R(x, y, \varphi_1(x, y))\, dxdy \quad (20.21)$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги икки каррали интегралларни, 2-§ даги формулалардан фойдаланиб, сирт интеграллари орқали ёзамиз:

$$\iint\limits_{(D)} R(x, y, \varphi_2(x, y))\, dxdy = \iint\limits_{(S_2)} R(x, y, z)\, dxdy,$$

$$\iint\limits_{(D)} R(x, y, \varphi_1(x, y))\, dxdy = \iint\limits_{(S_2)} R(x, y, z)\, dxdy. \quad (20.22)$$

Келтирилган тенгликлардаги сирт интеграллари сиртнинг устки томони бўйича олинган. (20.20), (20.21) ва (20.22) муносабатлардан қуйидагини топамиз:

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R(x. y, z)}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(S_2)} R(x, y, z)\, dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{(S_1)} R(x, y, z)\, dxdy. \quad (20.23)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи интеграл (S_1) сиртнинг пастки томони бўйича олинган.

(S_3) сирт ясовчилари Oz ўққа параллел бўлган цилиндрик сирт бўлганлигидан

$$\iint_{(S_2)} R(x, y, z)\, dxdy = 0 \tag{20.24}$$

бўлади. (20.23) ва (20.24) муносабатлардан

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dxdydz = \iint_{(S_1)} R(x, y, z)\, dxdy + \iint_{(S_2)} R(x, y, z)\, dxdy +$$

$$+ \iint_{(S_3)} R(x, y, z)\, dxdy = \iint_{(S)} R(x, y, z)\, dxdy$$

бўлиши келиб чиқади. Бунда (S) — (V) жисмни ўраб турувчи сирт. Демак,

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dxdydz = \oint\!\!\oint_{(S)} R(x, y, z)\, dxdy. \tag{20.25}$$

Худди шу йўл билан, (V) ҳамда $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ лар тегишли шартларни қаноатлантирганда қуйидаги

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x}\, dxdydz = \oint\!\!\oint_{(S)} P(x, y, z)\, dydz, \tag{20.26}$$

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y}\, dxdydz = \oint\!\!\oint_{(S)} Q(x, y, z)\, dzdx \tag{20.27}$$

формулаларнинг тўғрилиги исботланади.

Юқоридаги (20.25), (20.26) ва (20.27) тенгликларни ҳадлаб қўшиб қуйидагини топамиз:

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\right) dx\,dydz = \oint\!\!\oint_{(S)} P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dzdx +$$

$$+ R(x, y, z)\, dxdy.$$

Бу формула *Остроградский формуласи* деб аталади.

21-БОБ

ФУРЬЕ ҚАТОРЛАРИ

Биз юқорида, курсимиз давомида, мураккаб функцияларни улардан соддароқ бўлган функциялар орқали ифодалаш масалаларига бир неча марта дуч келдик ва уларни ўргандик. Бу соҳадаги классик масалалардан бири — функцияларни даражали қаторларга ёйишдан иборат бўлиб, у мазкур курснинг 13-бобида батафсил ўрганилди.

Агар қаралаётган функциялар даврий функциялар бўлса, табиийки, уларни соддароқ даврий функциялар билан ифодалаш лозим бўлади. Ҳар бир ҳади содда даврий функциялар бўлган функционал қаторларни ўрганиш мураккаб даврий функцияларни соддароқ даврий функциялар билан ифодалаш масаласини ҳал этишда муҳим роль ўйнайди.

Ушбу бобда, ҳар бир ҳади махсус даврий функциялар бўлган функционал қаторлар — Фурье қаторларини ўрганамиз.

Фурье қаторлари назарияси математик анализнинг чуқур ва кенг ўрганилган бўлими бўлиб, унинг амалий масалаларни ҳал қилишдаги роли каттадир. Бу соҳада жуда кўп илмий изланишлар олиб борилган ва муҳим натижаларга эришилган.

Биз қуйида Фурье қаторлари назариясининг асосий тушунчалари, методлари ва ютуқлари билан дастлабки тарзда танишамиз.

1- §. Баъзи муҳим тушунчалар

Ушбу параграфда келгусида керак бўладиган баъзи муҳим тушунчаларни — функцияларни даврий давом эттириш, гармоникалар ҳамда бўлакли-узлуксизлик, бўлакли-дифференциалланувчилик тушунчаларини келтирамиз.

1. Функцияларни даврий давом эттириш. $f(x)$ функция $a, b]$ ярим интервалда берилган бўлсин. Бу функция ёрдамида қуйидаги

$$f^*(x) = f(x-(b-a)m), \quad x \in (a+m(b-a),\ b+m(b-a)] \quad (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots) \tag{21.1}$$

функцияни тузамиз. Равшанки, энди $f^*(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда берилган ва даврий функция бўлади. Унинг даври $T_0 = b-a$ га тенг. Бу бажарилган жараённи *функцияни даврий давом эттириш* дейилади.

Агарда берилган $f(x)$ функция $(a, b]$ да узлуксиз функция бўлса ва

$$f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(b)$$

бўлса, у ҳолда давом эттирилган $f^*(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да узлуксиз бўлади.

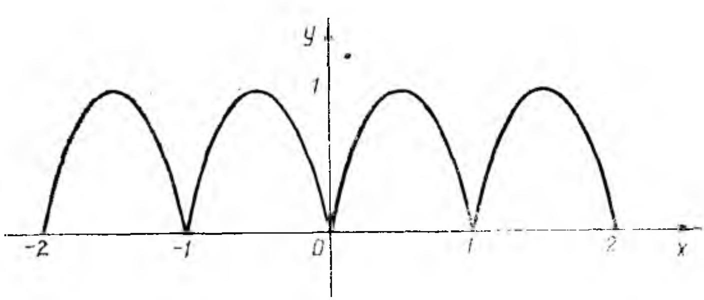
Масалан, $f(x) = 2\sqrt{x(1-x)}$ функцияни даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган функциянинг графиги 29-чизмада тасвирланган.

Агарда берилган $f(x)$ функция $(a, b]$ да узлуксиз функция бўлса ва

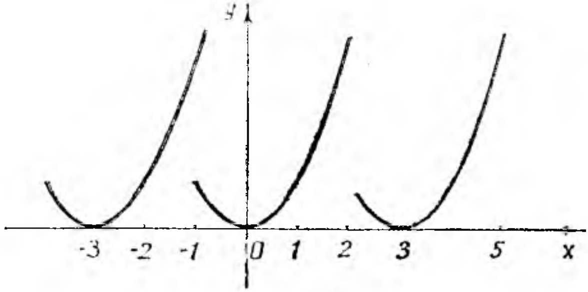
$$f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x) \neq f(b)$$

бўлса, равшанки $f^*(x)$ функция $x = a+m(b-a)$ $(m = \pm 1, \pm 2, \dots)$ нуқталарда узилишга эга бўлади.

Масалан, $(-1, 2]$ оралиқда берилган $f(x) = x^2$ функцияни даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган функциянинг графиги 30-чизмада тасвирланган.



29- чизма.



30- чизма.

$f(x)$ функция $[a,\ b)$ ярим интервалда берилган бўлса, уни даврий давом эттириш ҳам юқоридаги сингари бажарилади:

$$f^*(x) = f(x-(b-a)m), \quad x \in [a+m(b-a),\ b+m(b-a)$$
$$(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Агарда $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да берилган бўлса, уни $(-\infty,\ +\infty)/$ $/\{a+m(b-a);\ m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\} = X^*$ тўпламга даврий давом эттириш мумкин:

$$f^*(x) = f(x-(b-a)m), \quad x \in (a+m(b-a),\ b+m(b-a))$$
$$(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Изоҳ. $f(x)$ функция $[a,\ b]$ да берилган бўлса, уни $(-\infty,\ +\infty)$ га, умуман айтганда, икки хил даврий давом эттириш мумкин:

$$f^*(x) = f(x-(b-a)m), \quad x \in (a+m(b-a),\ b+m(b-a)]$$
$$(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$
$$f^{**}(x) = f(x-(b-a)m), \quad x \in [a+m(b-a),\ b+m(b-a))$$
$$(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

21.1-лемма. *$f(x)$ функция $(a,\ b]$ оралиқда берилган ва у шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда $f(x)$ ни $(-\infty,\ +\infty)$ га даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган $f^*(x)$ функция ихтиёрий $(\alpha,\ \alpha+(b-a)]$ да интегралланувчи бўлади ва*

$$\int_{\alpha}^{\alpha+(b-a)} f^*(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (*)$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция $(a,\ b]$ да интегралланувчи, $f^*(x)$ функциянинг тузилишига биноан (қаралсин, (21.1) унинг $\alpha,\ \alpha+$ $+(b-a)]$ $(\forall\, \alpha \in R)$ да интегралланувчи бўлишини топамиз.

Аниқ интегралнинг хоссасига кўра

$$\int_{\alpha}^{\alpha+(b-a)} f^*(x)\,dx = \int_{\alpha}^{a} f^*(x)\,dx + \int_a^b f^*(x)\,dx + \int_b^{\alpha+(b-a)} f^*(x)\,dx \qquad (21.2)$$

бўлади. Равшанки, $\forall x \in (a,\ b]$ учун $f^*(x)=f(x)$. Демак,

$$\int_a^b f^*(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Энди

$$\int_b^{\alpha+(b-a)} f^*(x)\,dx$$

интегралда $x = y + (b-a)$ алмаштиришни бажарамиз:

$$\int_b^{\alpha+(b-a)} f^*(x)\,dx = \int_a^{\alpha} f^*(y+(b-a))\,dy = \int_a^{\alpha} f^*(y)\,dy = -\int_{\alpha}^{a} f^*(y)\,dy.$$

Натижада (21.2) тенглик ушбу

$$\int_{\alpha}^{\alpha+(b-a)} f^*(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

кўринишга келади. Бу эса 21.1-леммани исботлайди. Бу леммадаги (*) формула содда геометрик маънога эга: 31-чизмадаги штрихланган юзалар бир-бирига тенг.

2. Гармоникалар. Ушбу

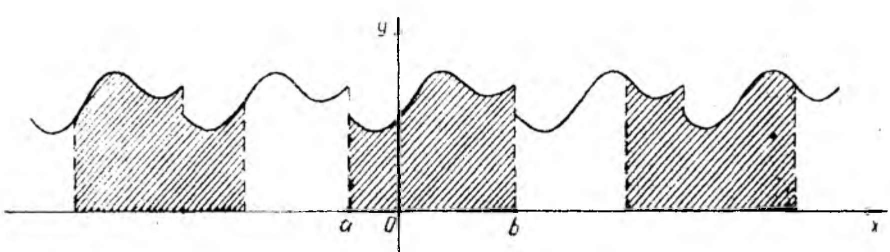
$$f(x) = A\cdot\sin(\alpha x+\beta) \tag{21.3}$$

функцияни қарайлик, бунда A, α, β — ўзгармас сонлар. Бу даврий функция бўлиб, унинг даври $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ га тенгдир. Ҳақиқатан ҳам,

$$f\left(x+\frac{2\pi}{\alpha}\right) = A\cdot\sin\left[\alpha\left(x+\frac{2\pi}{\alpha}\right)+\beta\right] = A\cdot\sin\left[(\alpha x+\beta)+2\pi\right] =$$
$$= A\cdot\sin(\alpha x+\beta) = f(x).$$

Бу $f(x) = A\cdot\sin(\alpha x+\beta)$ функция *гармоника* деб аталади.

Гармоникалар математика ва унинг татбиқларида, физика ва техникада кўп учрайди. Масалан, массаси m га тенг бўлган M нуқтанинг тўғри чизиқ бўйлаб OM ($OM = s$) масофага пропорционал бўлган $F = -ks$ куч таъсири остидаги ҳаракати (тебранма ҳаракати) $s = s(t)$ ни топиш ушбу



31-чизма.

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \gamma \cdot s = 0, \left(\gamma = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

дифференциал тенгламани ечишга келади. Бу тенгламанинг ечими гармоникадан иборат бўлади.

Берилган

$$f(x) = A \cdot \sin(\alpha x + \beta)$$

гармониканинг графиги, $y = \sin x$ функция графигини Ox ва Oy ўқлар бўйича сиқиш (чўзиш) ҳамда Ox ўқи бўйича суриш натижасида ҳосил бўлади. Масалан,

$$f(x) = 2 \cdot \sin(2x + 1)$$

гармониканинг графигини ясаш жараёни ва унинг графиги 32-чизмада тасвирланган.

Тригонометриядан маълум бўлган формуладан фойдаланиб, гармоникани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x) = A \cdot \sin(\alpha x + \beta) = A \cdot (\cos \alpha x \cdot \sin \beta + \sin \alpha x \cdot \cos \beta).$$

Агар

$$A \cdot \sin \beta = a, \quad A \cdot \cos \beta = b$$

деб белгиласак, унда гармоника ушбу

$$f(x) = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x \tag{21.4}$$

кўринишга келади.

Демак, ҳар қандай (21.3) гармоника (21.4) кўринишда ифодаланади.

Аксинча, ҳар қандай (21.4) кўринишдаги функция гармоникани ифодалайди. Шуни исботлаймиз. $f(x) = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x$ бўлиб, a ва b лар ўзгармас бўлсин. Уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$f(x) = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x = \sqrt{a^2 + b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha x + \right.$$
$$\left. + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha x\right].$$

Агар

$$\sqrt{a^2 + b^2} = A, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \beta,$$
$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \beta$$

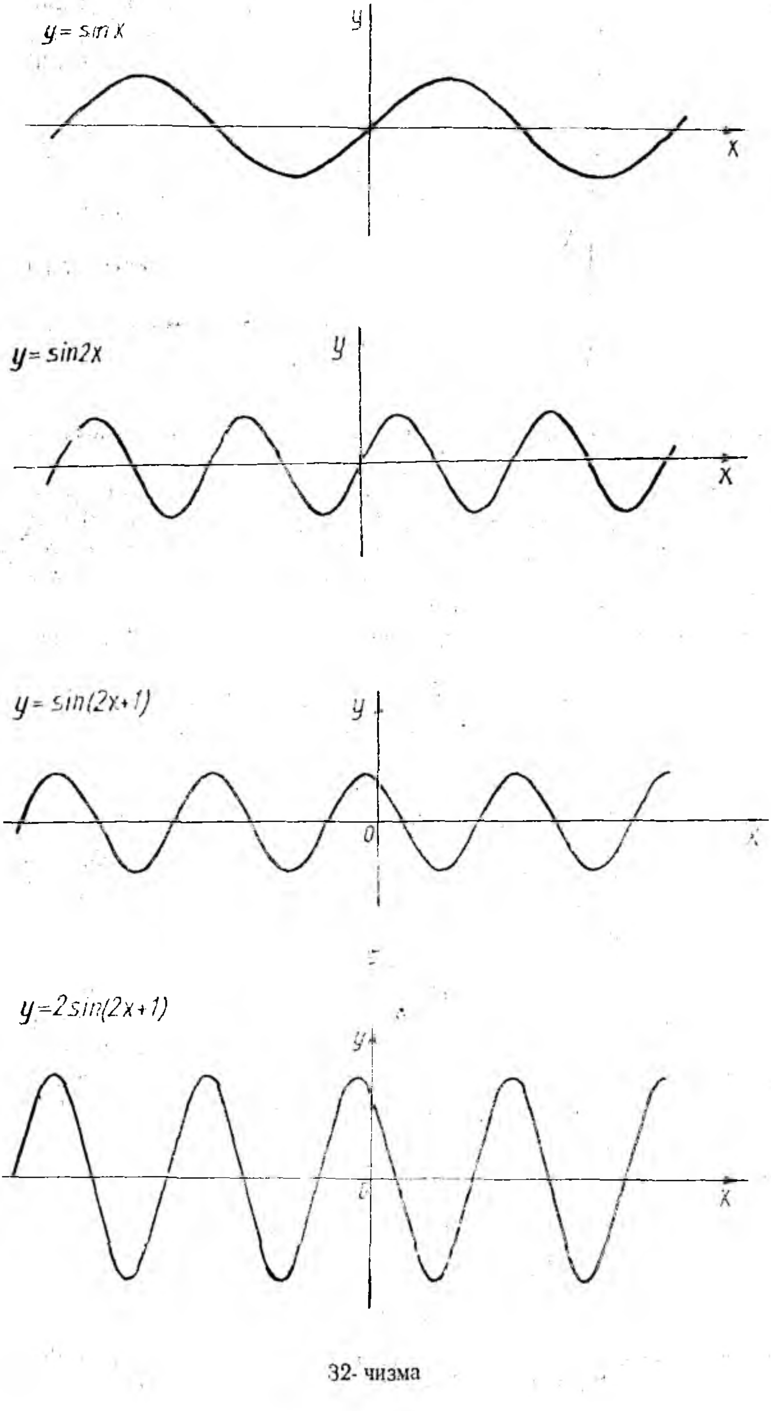
дейилса, у ҳолда

$$f(x) = A \cdot [\sin \beta \cos \alpha x + \cos \beta \sin \alpha x] = A \sin(\alpha x + \beta)$$

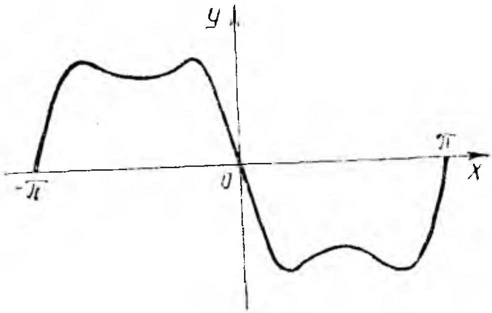
бўлишини топамиз.

Биз юқорида гармоникалар содда даврий функциялар бўлиб, уларнинг графиклари $y = \sin x$ функция графиги характерига эга бўлишини кўрдик.

Аммо бир нечта (турли) гармоникалар йиғиндисини олсак, у ҳам даврий функция бўлсада, аммо анча мураккаб функция бўлади, графи-



32- чизма



33- чизма

ги эса $y = \sin x$ функция графиги характеридан бир мунча фарқ қилади. Масалан, учта турли гармоникалар:

$$-\frac{4}{\pi}\sin x, \quad -\frac{4}{3\pi}\sin 3x, \quad -\frac{4}{5\pi}\sin 5x$$

йиғиндисидан иборат ушбу

$$\varphi(x) = -\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x\right)$$

функция графигини қарайдиган бўлсак, у 33- чизмада тасвирланган бўлиб, $y = \sin x$ функция графиги характерига ўхшамайди.

3. Бўлакли-узлуксизлик ва бўлакли-дифференциалланувчилик. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда берилган бўлсин. Маълумки, бу функция $\forall x \in (a, b)$ нуқтада узлуксиз бўлса, ҳамда a нуқтада ўнгдан, b нуқтада чапдан узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз дейилар эди.

Энди $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ да бўлакли-узлуксизлиги тушунчаси билан танишамиз.

Агар $[a, b]$ оралиқни шундай

$$[a_0 a_1],\ [a_1 a_2],\ \ldots,\ [a_{n-1}, a_n]\quad (a_0 = a,\ a_n = b)$$

бўлакларга ажратиш мумкин бўлсаки,

$$([a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \ \ldots \ \cup [a_{n-1}, a_n])$$

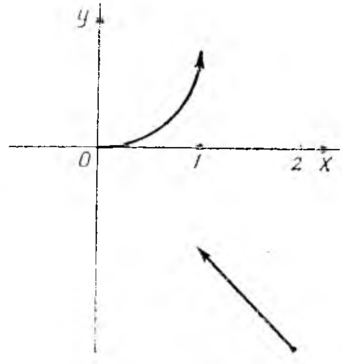
ҳар бир (a_k, a_{k+1}) $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ да $f(x)$ функция узлуксиз бўлса, ҳамда $x = a_k$ нуқталарда чекли ўнг $f(a_k + 0)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ ва чап $f(a_k - 0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ лимитларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a\, b]$ да *бўлакли-узлуксиз* деб аталади.

Бошқача айтганда, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталаридан бошқа барча нуқталарида узлуксиз бўлса ва шу чекли сондаги нуқталардаги узилиши эса биринчи тур узилиш бўлса, функция $[a, b]$ да *бўлакли-узлуксиз* деб аталади. $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган ва узлуксиз бўлсин. Равшанки, бу функция $[a, b]$ да бўлакли-узлуксиз бўлади.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ агар } 0 \leqslant x < 1 \text{ бўлса}, \\ 0, \quad \text{агар } x = 1 \text{ бўлса}, \\ -x, \text{ агар } 1 < x \leqslant 2 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Агар $[0, 2]$ оралиқни $[0, 1]$ ва $[1,2]$ бўлакларга ажратсак $[0, 2] = [0, 1] \cup [1, 2])$, у ҳолда $[0, 1)$ ва $(1, 2]$ бўлакларда берилган функция узлуксиз, $x = 1$ нуқтада эса чекли ўнг ва чап $f(1+0) = \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = -1$, $f(1-0) = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 1$ лимитларга эга бўлиши топилади. Демак, берилган функция $[0, 2]$ оралиқда бўлакли-узлуксиздир (34- чизма).



34- чизма

Агар $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да берилган бўлиб, унинг исталган чекли $[\alpha, \beta]$ қисмида ($[\alpha, \beta] \subset (-\infty, +\infty)$), бўлакли-узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да *бўлакли-узлуксиз* деб аталади

Айтайлик. $f(x)$ функция $(a, b]$ да берилган ва бўлакли-узлуксиз бўлсин. Бу функцияни $(-\infty, +\infty)$ га даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган $f^*(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да бўлакли-узлуксиз бўлади.

Масалан, $f(x) = x$ $(x \in (-\pi, \pi]$ бўлсин. Бу функцияни $(-\infty, +\infty)$га даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган функциянинг графиги 35-чизмада тасвирланган.

Энди бўлакли-дифференциалланувчилик тушунчаси билан танишамиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлсин. Маълумки, бу функция $\forall x \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, ҳамда унинг a нуқтада ўнг ҳосиласи

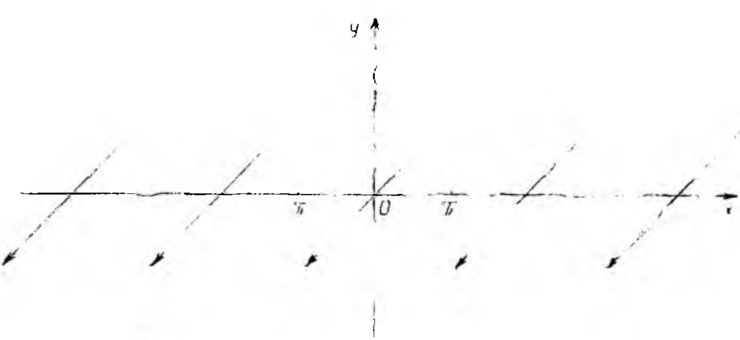
$$f'(a+0) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)\, f(a)}{x-a},$$

b нуқтада чап ҳосиласи

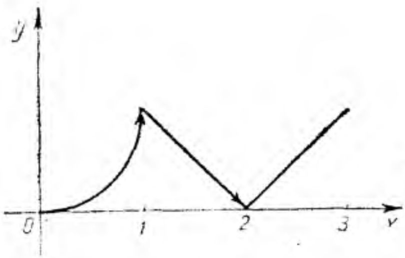
$$f'(b-0) = \lim_{x \to b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x-b}$$

мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда дифференциалланувчи дейилар эди.

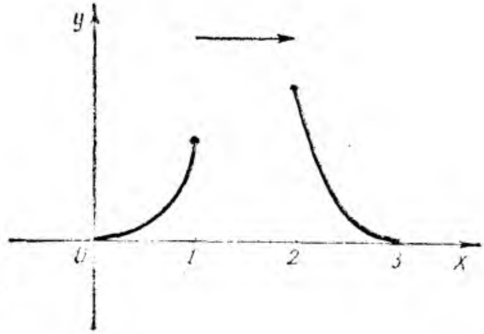
Агар $[a, b]$ оралиқни $[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \ldots \cup [a_{n-1}, a_n]$ бўладиган шундай $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$ $(a_0 = a, a_n = b)$ бўлакларга ажратиш мумкин бўлсаки, ҳар бир (a_k, a_{k+1}) да $(k = 0, 1, 2, \ldots,$



35- чизма



36- чизма



37- чизма

$n-1$) функция дифференциалланувчи бўлса ҳамда $x = a_k$ нуқталарда чекли ўнг $f'(a_k+0)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ ва чап $f'(a_k - 0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да *бўлакли-дифференциалланувчи* деб аталади.

Бошқача айтганда, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталаридан бошқа барча нуқталарида дифференциалланувчи бўлса ва шу чекли сондаги нуқталарда чекли бир томонли ҳосилаларга эга бўлса, функция $[a, b]$ да бўлакли-дифференциалланувчи деб аталади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган ва дифференциалланувчи бўлсин. Равшанки, бу функция $[a, b]$ да бўлакли-дифференциалланувчи бўлади.

Мисол. 1. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } 0 \leqslant x < 1 \text{ бўлса,} \\ 2-x, & \text{агар } 1 \leqslant x < 2 \text{ бўлса,} \\ x-2, & \text{агар } 2 \leqslant x \leqslant 3 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик (36-чизма). Агар $[0, 3]$ оралиқни $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ бўлакларга ажратсак, унда $[0, 1)$ $(1, 2,)$ ва $(2, 3]$ ларда $f(x)$ функция дифференциалланувчи бўлиб, $x = 1$, $x = 2$ нуқталарда эса чекли ўнг ва чап ҳосилалар

$$f'(1-0) = 2,\ f'(1+0) = -1,\ f'(2-0) = -1,\ f'(2+0) = 1$$

га эга бўлишини топамиз.

Демак, $f(x)$ функция $[0, 3]$ да бўлакли-дифференциалланувчи.

2. Ушбу

$$\varphi(x) - \begin{cases} x^2, & \text{агар } 0 \leqslant x < 1 \text{ бўлса,} \\ 2, & \text{агар } 1 \leqslant x < 2 \text{ бўлса,} \\ \frac{3}{2}(x-3)^2, & \text{агар } 2 \leqslant x \leqslant 3 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик (37-чизма). Агар $[0, 3]$ оралиқни $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ бўлакларга ажратсак, унда $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ ларда $\varphi(x)$ функция дифференциалланувчи бўлиб, $x = 1$, $x = 2$ нуқталарда эса чекли ўнг ва чап ҳосилалар

$$f'(1-0) = 2,\ f'(1+0) = 0,\ f'(2-0) = 0,\ f'(2+0) = -3$$

га эга бўлишини топамиз. Демак, $\varphi(x)$ функция $[0, 3]$ да бўлакли-дифференциалланувчи.

Юқорида келтирилган таъриф ва мисоллардан, $[a, b]$ оралиқда бўлакли-дифференциалланувчи функция шу оралиқда бўлакли-узлуксиз функция бўлишини кўриш мумкин.

Агар $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да берилган бўлиб, унинг исталган чекли $[\alpha, \beta]$ $([\alpha, \beta] \subset (-\infty, +\infty))$ қисмида бўлакли-дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ да бўлакли-дифференциалланувчи деб аталади.

$f(x)$ функция $(a, b]$ да берилган ва бўлакли-дифференциалланувчи бўлса, уни $(-\infty, +\infty)$ га даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган $f^*(x)$ $(-\infty, +\infty)$ да бўлакли-дифференциалланувчи бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлсин. Агар $[a, b]$ оралиқни $[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \ldots \cup [a_{n-1}, a_n]$ бўладиган шундай $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$ $(a_0 = a, a_n = b)$ бўлакларга ажратиш мумкин бўлсаки, ҳар бир $[a_k, a_{k+1})$ да $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ функция $f'(x)$ ҳосилага эга ва бу ҳосила узлуксиз бўлса ҳамда $x = a_k$ нуқталарда чекли ўнг $f'(x_k + 0)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ ва чап $f'(a_k - 0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ да *бўлакли-силлиқ* деб аталади.

Бошқача айтганда, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталаридан бошқа барча нуқталарида $f'(x)$ ҳосилага эга ва бу ҳосила узлуксиз бўлса ҳамда шу чекли сондаги нуқталарда чекли бир томонли ҳосилаларга эга бўлса, функция $[a, b]$ да бўлакли-силлиқ деб аталади.

2-§. Фурье қаторининг таърифи

Биз мазкур курснинг 14-бобида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

функционал қаторни батафсил ўргандик. Энди ҳар бир ҳади

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

гармоникадан иборат ушбу

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{21.5}$$

хусусий функционал қаторни қарайлик.

Одатда (21.5) қатор *тригонометрик қатор* деб аталади.

$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ сонлар эса *тригонометрик қаторнинг коэффициентлари* дейилади.

Шундай қилиб, тригонометрик қатор гарчанд функционал қатор бўлса ҳам (унинг ҳар бир ҳади муайян функциялар бўлганлиги учун) ўз коэффициентлари $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ лар билан тўла аниқланади.

(21.5) тригонометрик қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

тригонометрик кўпҳад деб аталади.

1. Фурье қаторининг таърифи. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда

$$f(x)\cos nx,\ f(x)\sin nx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

функциялар ҳам, иккита интегралланувчи функциялар кўпайтмаси сифатида (қаралсин, 1-қисм, 9-боб, 7-§) $[-\pi, \pi]$ да интегралланувчи бўлади. Бу функцияларнинг интегралларини ҳисоблаб, уларни қуйидагича белгилайлик:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{21.6}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Бу сонлардан фойдаланиб ушбу

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{21.7}$$

тригонометрик қаторни тузамиз.

21.1-таъриф. $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ коэффициентлари (21.6) формулалар билан аниқланган (21.7) тригонометрик қатор $f(x)$ *функциянинг Фурье қатори* деб аталади. $a_0, a_1, b_1, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ сонлар эса $f(x)$ функциянинг *Фурье коэффициентлари* дейилади.

Демак, берилган функциянинг Фурье қатори шундай тригонометрик қаторки, унинг коэффициентлари шу функцияга боғлиқ бўлиб, (21.6) формулалар билан аниқланади. Шу сабабли (21.7) қаторни (унинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишидан қатъи назар) ушбу «$\sim$» белги билан қуйидагича ёзилади:

$$f(x) \sim T(f; x) = \frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

Мисол. Ушбу

$$f(x) = e^{\alpha x} \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi,\ \alpha \neq 0)$$

функциянинг Фурье қатори тузилсин.

(21.6) формуладан фойдаланиб, бу функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha\pi}\left(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}\right) = \frac{2}{\alpha\pi}\,\mathrm{sh}\,\alpha\pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha\cos nx + n\sin nx}{\alpha^2+n^2}e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= (-1)^n\frac{1}{\pi}\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\operatorname{sh}\alpha\pi,\quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x}\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha\sin nx - n\cos nx}{\alpha^2+n^2}e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\frac{2n}{\alpha^2+n^2}\operatorname{sh}\alpha\pi\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(қаранг, 1-қисм, 8-боб, 2-§).

Демак, берилган функциянинг Фурье қатори

$$e^{\alpha x} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) =$$

$$= \frac{2\operatorname{sh}\alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}(\alpha\cos nx - n\sin nx)\right\}$$

бўлади.

Фараз қилайлик, бирор

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{21.7}$$

тригонометрик (функционал) қатор $[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи бўлсин. Унинг йиғиндисини $f(x)$ деб белгилайлик:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = f(x). \tag{21.8}$$

Бундан ташқари, (21.7) ни ҳамда уни $\cos kx$ ва $\sin kx$ ($k = 1, 2, \ldots$) ларга кўпайтиришдан ҳосил бўлган

$$\frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cdot\cos kx + b_n\sin nx\cdot\cos kx) =$$

$$= f(x)\cos kx, \tag{21.9}$$

$$\frac{a_0}{2}\sin kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cdot\sin kx + b_n\sin nx\cdot\sin kx) = f(x)\sin kx$$

($k = 1, 2, 3, \ldots$) қаторларни $[-\pi, \pi]$ да ҳадлаб интеграллаш мумкин бўлсин.

(21.8) ва (21.9) ларни $[-\pi, \pi]$ да интеграллаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right) = \pi\cdot a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx\cdot\cos kx +\right.$$

$$\left. + b_n \sin nx\cdot\cos kx)\right]dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos kx\,dx\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}\sin kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx\cdot\sin kx +\right.$$

$$\left. + b_n \sin nx\cdot\sin kx)\right]dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\sin kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin kx\,dx\right).$$

Агар $n \neq k$ да

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-k)x - \cos(n+k)x]\,dx =$$

$$= \left[\frac{\sin(n-k)x}{n-k} - \frac{\sin(n+k)x}{n+k}\right]_{-\pi}^{\pi}\cdot\frac{1}{2} = 0$$

ва

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx = \pi,$$

шунингдек,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos kx\,dx = 0\ (n\neq k),\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\sin kx\,dx = 0 \quad (n, k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi\cdot a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \pi\cdot a_k \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \pi\cdot b_k \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

эканини топамиз. Бу тенгликлардан эса

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \tag{21.6}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

келиб чиқади.

Демак, $f(x)$ функция тригонометрик қаторга ёйилган бўлса ва бу қатор учун юқорида айтилган шартлар бажарилган бўлса, у ҳолда бу тригонометрик қаторнинг коэффициентлари $f(x)$ функция орқали (21.6) формулалар билан ифодаланади, яъни $f(x)$ нинг Фурье коэффициентлари бўлади. Бинобарин, қаторнинг ўзи $f(x)$ нинг Фурье қатори бўлади.

2. Жуфт ва тоқ функцияларнинг **Фурье** қаторлари. Жуфт ва тоқ функцияларнинг Фурье қаторлари бирмунча содда кўринишга эга бўлади. Биз қуйида уларни келтирамиз.

$f(x)$ функция $[-\pi,\ \pi]$ да берилган жуфт функция бўлсин. У шу $[-\pi,\ \pi]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Равшанки, бу ҳолда $f(x)\cos nx$ жуфт функция, $f(x)\sin nx$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ эса тоқ функция бўлади ва улар $[-\pi,\ \pi]$ да интегралланувчи бўлади.

(21.6) формулалардан фойдаланиб, $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right] = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Демак, жуфт $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{21.10}$$

бўлиб, Фурье қатори эса

$$f(x) \sim T(f;\,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

бўлади.

Энди $f(x)$ функция $[-\pi,\ \pi]$ да берилган тоқ функция бўлсин ва у шу $[-\pi,\ \pi]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Бу ҳолда $f(x)\cos nx$ тоқ функция, $f(x)\sin nx$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ эса жуфт функция бўлади. (21.6) формулалардан фойдаланиб, $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\cos nx\,dx\right] = 0\,(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Демак, тоқ $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари

$$a_n = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{21.11}$$

бўлиб, Фурье қатори эса

$$f(x) \approx T(f;\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

бўлади.

Мисоллар. 1. $f(x) = x^2$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ функциянинг Фурье қатори ёзилсин. (21.10) формулалардан фойдаланиб берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\, x^2 \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x \sin nx\, dx =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left[\left(-x\cdot\frac{\cos nx}{n}\right)_0^\pi + \int_0^\pi \cos nx\, dx\right] = (-1)^n \frac{4}{n^2} (n = 1, 2, \ldots).$$

Демак, $f(x) = x^2$ функциянинг Фурье қатори ушбу

$$x^2 \backsim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2}\cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right)$$

кўринишида бўлади.

2. Ушбу

$$f(x) = x \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

тоқ функциянинг Фурье қатори ёзилсин.

(21.11) формулалардан фойдаланиб берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз: $b_n = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi x \sin nx\, dx = -\frac{2}{n\pi}\, x\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos nx\, dx = -$ $-\frac{2}{n}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{2}{n} (n = 1, 2, 3, \ldots)$. Демак, $f(x) = x$ функциянинг Фурье қатори қуйидагича бўлади:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}\sin nx = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

3. $[-l, l]$ **оралиқда берилган функциянинг Фурье қатори.** Биз юқорида $[-\pi, \pi]$ оралиқда берилган функция учун унинг Фурье қатори тушунчасини киритдик. Бундай тушунчани ихтиёрий $[-l, l]$ $(l > 0)$ оралиқда берилган функция учун ҳам киритиш мумкин.

$f(x)$ функция $[-l, l]$ $(l > 0)$ да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин.

Равшанки, ушбу

$$t = \frac{\pi}{l} x \tag{21.12}$$

алмаштириш $[-l, l]$ оралиқни $[-\pi, \pi]$ оралиққа ўтказади. Агар

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \varphi(t)$$

дейилса, $\varphi(t)$ функцияни $[-\pi, \pi]$ да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлишини кўриш қийин эмас. Бу $\varphi(t)$ функциянинг Фурье қатори қуйидагича бўлади:

$$\varphi(t) \sim T(\varphi; t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

бунда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt\, dt$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Юқоридаги (21.12) тенгликни эътиборга олсак, унда

$$\varphi\left(\frac{\pi}{l} x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{\pi}{l} x + b_n \sin n\frac{\pi}{l} x\right)$$

бўлиб, унинг коэффициентлари эса

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \varphi\left(\frac{\pi}{l} x\right)\cos n\frac{\pi}{l} xdx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \varphi\left(\frac{\pi}{l} x\right)\sin n\frac{\pi}{l} xdx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

бўлади.

Натижада

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{21.13}$$

га эга бўламиз, бунда

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned} \tag{21,14}$$

(21.13) нинг ўнг томонидаги тригонометрик қаторни $[-l, l]$ да берилган $f(x)$ нинг Фурье қатори дейилади, (21.14) Фурье коэффициентлари дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = e^x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

функциянинг Фурье қатори ёзилсин.

(21.14) формулалардан фойдаланиб берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз (бунда $l = 1$);

$$a_0 = \int_{-1}^{1} e^x\,dx = e - e^{-1},$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} e^x \cos n\pi x dx = \frac{n\pi \sin n\pi x + \cos n\pi x}{1 + n^2\pi^2} e^x \Bigg|_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{1}{1 + n^2\pi^2}(e \cos n\pi - e^{-1}\cos n\pi) = (-1)^n \frac{e - e^{-1}}{1 + n^2\pi^2} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} e^x \sin n\pi x dx = \frac{\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x}{1 + n^2\pi^2} e^x \Bigg|_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{1}{1+n^2\pi^2}(e\cdot n\pi\cos n\pi + e^{-1} n\pi\cos n\pi) = \frac{n\pi\cos n\pi}{1+n^2\pi^2}(e^{-1}-e) =$$

$$= \frac{n\pi(-1)^n}{1+n^2\pi^2}(e^{-1}-e) = (-1)^{n+1}\frac{e-e^{-1}}{1+n^2\pi^2} n\pi \ (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Демак, $f(x)=e^x$ функциянинг $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ Фурье қатори ушбу

$$e^x \backsim \frac{e-e^{-1}}{2} + (e-e^{-1})\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x + \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2\pi^2}\pi n\cdot\sin n\pi x\right]$$

кўринишда бўлади.

Изоҳ. (21.7) формула билан аниқланган

$$T(f;\, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

тригонометрик қаторнинг $(-\infty, +\infty)$ да берилган 2π даврли функция эканлигини кўриш қийин эмас:

$$T(f;\, x+2\pi) = T(f;\, x).$$

Агар $[-\pi, \pi]$ да берилган $f(x)$ функцияни $(-\infty, +\infty)$ га даврий давом эттирсак (қаранг ушбу бобнинг 1-§).

$f^*(x) = f(x-2\pi m),\ x \in (-\pi+2\pi m,\ \pi+2\pi m)\ (m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$

у ҳолда, равшанки, $(-\infty, +\infty)$ да

$$f^*(x) \sim T(f^*;\, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

бўлади.

3- §. Леммалар. Дирихле интеграли

Функцияларни Фурье қаторига ёйиш шартларини аниқлаш, юқорида айтиб ўтганимиздек, Фурье қаторлари назариясининг муҳим масалаларидан бири. Уни ҳал этувчи теоремани келтиришдан аввал баъзи бир фактларни ўрганамиз.

1. Леммалар. Қуйида келтириладиган леммалар Фурье қаторлари назариясида муҳим роль ўйнайди.

21.2-лемма. $[a, b]$ *оралиқда берилган ва интегралланувчи ихтиёрий* $\varphi(x)$ *функция учун*

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\sin px\,dx = 0, \tag{21.15}$$

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos px\,dx = 0 \tag{21.16}$$

бўлади.

Исбот. $[a, b]$ оралиқнинг бирор

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b)$$

бўлинишини олайлик. Интегралнинг хоссасига кўра

$$\int_a^b \varphi(x)\sin px\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x)\sin px\,dx \qquad (21.17)$$

бўлади. $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган. Демак,

$$\inf\{\varphi(x);\ x\in[x_k,\ x_{k+1}]\}\ (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

мавжуд. Уни m_k билан белгилаймиз:

$$m_k = \inf\{\varphi(x);\ x\in[x_k,\ x_{k+1}]\}\ (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Энди (21.20) интегрални

$$\int_a^b \varphi(x)\sin px\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x)\sin px\,dx = \qquad (21.18)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi(x) - m_k)\sin px\,dx + \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin px\,dx = S_1 + S_2$$

кўринишда ёзиб, сўнгра ҳар бир

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi(x) - m_k)\sin px\,dx,$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin px\,dx$$

қўшилувчини баҳолаймиз.

Агар ω_k $\varphi(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots n-1)$ даги тебраниши бўлса, S_1 учун ушбу

$$|S_1| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_k\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\,\Delta x_k\ (\Delta x_k = x_{k+1} - x_k) \qquad (21.19)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шартга кўра $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи. Унда 1-қисм, 9-боб, 5-§ да келтирилган теоремага асосан, $\forall\,\varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $[a, b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлиниши учун

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\cdot\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (21.20)$$

бўлади. (21.19) ва (21.20) муносабатлардан

$$|S_1| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (21.21)$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди $S_2=\sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \sin px\,dx$ йиғиндини баҳолаймиз. Равшанки,

$$\left|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \sin px\,dx\right| = \left|\frac{\cos px_k - \cos px_{k+1}}{p}\right| \leqslant \frac{2}{p}.$$

Демак, $|S_2| \leqslant \frac{2}{p}\sum\limits_{k=0}^{n-1}|m_k|$ бўлади. p ни етарли катта қилиб олиш ҳисобига

$$\frac{2}{p}\sum_{k=0}^{n-1}|m_k| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{21.22}$$

бўлади. Натижада (21.18), (21.21) ва (21.22) муносабатлардан етарли катта p лар учун $\left|\int\limits_a^b \varphi(x)\sin px\,dx\right| < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_a^b \varphi(x)\sin px\,dx = 0.$$

(21.16) муносабатнинг ўринли бўлиши худди шунга ўхшаш кўрсатилади. Лемма исбот бўлди.

Хусусан, $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда бўлакли-узлуксиз бўлса, унинг учун лемманинг тасдиғи ўринли бўлади.

21.1-эслатма. Леммадаги

$$I(p) = \int\limits_a^b \varphi(x)\sin px\,dx, \quad I_1(p) = \int\limits_a^b \varphi(x)\cos px\,dx$$

интегралар, равшанки, параметрга (p — параметр) боғлиқ интеграллардир. Мазкур курснинг 17-боб, 5-§ ида биз бундай интегралларнинг лимитини интеграл белгиси остида лимитга ўтиб ҳисоблаш ҳақидаги теоремада исбот қилган эдик. Бу теорема шартлари юқоридаги интеграллар учун бажарилмайди ($p\to\infty$ да интеграл остидаги функциянинг лимити мавжуд эмас) ва, демак, ундан фойдалана олмаймиз. Шунинг учун ҳам лемма юқорида алоҳида исботланди. Иккинчи томондан, лемма параметрга боғлиқ интегралларнинг лимитини бевосита, интеграл белгиси остида лимитга ўтмасдан ҳам, ҳисоблаш мумкин эканлигига мисол бўлади.

Юқоридаги лемма чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли учун ҳам умумлаштирилиши мумкин.

$\varphi(x)$ функция $[a, b)$ ярим интервалда берилган, b нуқта шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин.

21.3-лемма. $[a, b)$ *да абсолют интегралланувчи ихтиёрий* $\varphi(x)$ *функция учун*

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_a^b \varphi(x)\sin px\,dx = 0,$$

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_a^b \varphi(x)\cos px\,dx = 0 \tag{21.23}$$

бўлади.

Исбот. Ихтиёрий η $(0<\eta<b-a)$ олиб,

$$\int_a^b \varphi(x)\sin px\,dx$$

интегрални қуйидагича ёзиб

$$\int_a^b \varphi(x)\sin px\,dx=\int_a^{b-\eta}\varphi(x)\sin px\,dx+\int_{b-\eta}^b \varphi(x)\sin px\,dx, \quad (21.24)$$

бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчини баҳолаймиз.

Қаралаётган $\varphi(x)$ функция $[a,\ b-\eta)$ да интегралланувчи бўлганлиги сабабли юқорида келтирилган 21.2-леммага кўра

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^{b-\eta}\varphi(x)\sin px\,dx=0$$

бўлади. Демак, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $p_0>0$ топиладики, барча $p>p_0$ учун

$$\left|\int_a^{b-\eta}\varphi(x)\sin px\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (21.25)$$

бўлади.

Шартга кўра $\varphi(x)$ функция $[a,\ b)$ да абсолют интегралланувчи. Таърифга биноан, $\forall\ \varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $\delta>0$ топиладики,

$0<\eta<\delta$ бўлганда $\int_{b-\eta}^{b}|\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Демак,

$$\left|\int_{b-\eta}^{b}\varphi(x)\sin px\,dx\right|\leqslant\int_{b-\eta}^{b}|\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}. \quad (21.26)$$

Юқоридаги (21.24), (21.25) ва (21.26) муносабатлардан етарли катта p лар учун $\left|\int_a^b\varphi(x)\sin px\,dx\right|<\varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. Демак,

$\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b\varphi(x)\sin px\,dx=0$. (21.23) муносабатнинг ўринли бўлиши худди шунга ўхшаш кўрсатилади. Лемма исбот бўлди.

Исбот этилган леммалардан муҳим натижа келиб чиқади.

21.1-натижа. $[-\pi,\ \pi)$ оралиқда бўлакли-узлуксиз ёки шу оралиқда абсолют интегралланувчи $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари $n\to\infty$ да нолга интилади:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0.$$

2. Дирихле интеграли. Фруье қаторининг яқинлашувчилигини ўрганиш, бу қатор қисмий йиғиндилари кетма-кетлигининг лимитини аниқлаш демакдир. Шу мақсадда қатор қисмий йиғиндисини қулай кўринишда ёзиб оламиз.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi)$ оралиқда берилган ва абсолют интегралланувчи (хос ёки хосмас маънода) бўлсин. Бу функциянинг Фурье коэффициентларини топиб,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

сўнгра топилган коэффициентлар бўйича $f(x)$ функциянинг Фурье қаторини тузамиз:

$$f(x) \sim T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Энди бу қаторнинг ушбу

$$F_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

қисмий йиғиндисини оламиз. Бу йиғиндидаги a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ва b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ ларнинг ўрнига уларнинг ифодаларини қўйсак, у ҳолда

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,[\cos kt\cdot\cos kx + \sin kt\cdot\sin kx]\,dt.$$

Маълумки,

$$\cos kt\cdot\cos kx + \sin kt\cdot\sin kx = \cos k(t - x).$$

Демак,

$$F_n(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t - x)\right]dt.$$

Интеграл остидаги ифода учун қуйидаги муносабат ўринли:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t - x) = \frac{\sin(2n+1)\dfrac{t-x}{2}}{2\sin\dfrac{t-x}{2}}.$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$2\sin\frac{u}{2}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku\right] = \sin\frac{u}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{u}{2}\cos ku = \sin\frac{u}{2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)u - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)u\right] = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u$$

$$(u = t - x).$$

Бу тенглик ёрдамида $F_n(f;\ x)$ йиғинди қуйидагича ифодаланади:

$$F_n(f;\ x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin(2n+1)\cdot\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\,dt. \qquad (21.27)$$

(21.27) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл $f(x)$ функциянинг *Дирихле интеграли* деб аталади.

Шундай қилиб, $f(x)$ функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси $F_n(f;\ x)$ параметрга боғлиқ (21.27) кўринишдаги интеграл (Дирихле интеграли) дан иборат экан.

$f^*(x)$ функция $f(x)$ функциянинг $(-\infty,\ +\infty)$ га даврий давоми бўлсин. Бинобарин, $f^*(x)$ функция $(-\infty,\ +\infty)$ да берилган, 2π даврли, $[-\pi,\ \pi)$ да абсолют интегралланувчи функциядир. Қулайлик учун биз қуйида $f(x)$ функциянинг ўзини $(-\infty,\ +\infty)$ да берилган, 2π даврли, $[-\pi,\ \pi)$ да абсолют интегралланувчи функция деб ҳисоблаймиз ва $f^*(x)$ ўрнига $f(x)$ ни ёзиб кетаверамиз.

Энди $F_n(f;\ x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\,dt$ интегралда $t = x + u$ алмаштириш қиламиз. Интеграл остидаги функция 2π даврли функция бўлганлиги сабабли, бу алмаштириш натижасида интеграллаш чегараси ўзгармасдан қолади (ушбу бобнинг 1-§ ига қаралсин). Натижада

$$F_n(f;\ x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,du$$

бўлади. Бу интегрални ушбу

$$F_n(f;\ x) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x+u)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,du + \int_{0}^{\pi} f(x+u)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,du\right]$$

икки қисмга ажратиб, ўнг томондаги биринчи интегралда u ўзгарувчини $-u$ га алмаштирамиз. У ҳолда

$$F_n(f;\ x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \qquad (21.28)$$

бўлади. Дирихле интеграли $F_n(f;\ x)$ нинг бу кўринишидан келгусида фойдаланилади.

Хусусан, $f(x)\equiv 1$ бўлса, (21.28) муносабатдан

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du\ (n=1,\ 2,\ \ldots) \qquad (21.29)$$

бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда

$$a_0=2,\ a_k=b_k=0\ (k=1,2,\ 3,\ \ldots)$$

бўлиб,

$$F_n(1;\ x)\equiv 1$$

бўлади.

4- §. Фурье қаторининг яқинлашувчилиги

Энди берилган $f(x)$ функция қандай шартларни бажарганда, унинг Фурье қатори яқинлашувчи бўлишини топиш билан шуғулланамиз.

1. Локаллаштириш принципи. Юқорида келтирилган Дирихле интеграли

$$F_n(f;\ x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du \quad (21.29)$$

қуйидаги муҳим хоссага эга. Ихтиёрий $\delta\ (0<\delta<\pi)$ сонни олиб, (21.29) интегрални икки қисмга ажратамиз:

$$F_n(f;\ x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du.$$

Ўнг томондаги иккинчи

$$I_2(n,\ \delta)=\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du$$

интегралнинг $n\to\infty$ да лимити мавжуд ва нолга тенг. Ҳақиқатан ҳам берилган $f(x)$ функция $[-\pi,\ \pi)$ да, ва демак, $[\delta,\ \pi)$ да абсолют интегралланувчи бўлганлигидан

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\,[f(x+u) + f(x-u)]$$

функция ҳам шу оралиқда абсолют интегралланувчи бўлади ($[\delta, \pi)$ да $\sin\frac{u}{2}$ функция чегараланган) ва 21.3-леммага асосан

$$\lim_{n\to\infty} I_2(n, \delta) = \lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi \varphi(u)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du = 0.$$

Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

21.1-теорема. *Ушбу*

$$I_1(n, \delta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x+u) + f(x-u)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du$$

интегралнинг $n\to\infty$ даги лимити мавжуд бўлгандагина Дирихле интегралининг $n\to\infty$ даги лимити мавжуд бўлади ва

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f; x) = \lim_{n\to\infty} I_1(n, \delta).$$

Равшанки, $I_1(n, \delta)$ интегралда f функциянинг $[x-\delta, x+\delta]$ оралиқдаги қийматларигина қатнашади.

Шундай қилиб, берилган $f(x)$ функция Фурье қаторининг x нуқтада яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши бу функциянинг шу нуқта $(x-\delta, x-\delta)$ атрофидаги қийматларигагина боғлиқ бўлар экан. Шунинг учун келтирилган теорема *локаллаштириш принципи* деб юритилади. Унинг моҳиятини қуйидагича ҳам тушунтириш мумкин.

Иккита турли 2π даврли $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[-\pi, \pi)$ да абсолют интегралланувчи бўлсин. Равшанки, бу функцияларнинг Фурье қаторлари ҳам, умуман айтганда, турлича бўлади. Бирор $x_0\in(-\pi, \pi)$ ва δ $(0<\delta<\pi)$ учун

$$f(x) = \varphi(x), \text{ агар } x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta],$$

$$f(x) \neq \varphi(x), \text{ агар } x\in[-\pi, \pi)\setminus[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$$

бўлса, у ҳолда $n\to\infty$ да бу функциялер Фурье қаторлари қисмий йиғиндиларининг x_0 нуқтадаги лимитлари ёки бир вақтда мавжуд (бу ҳолда улар бир-бирига тенг) бўлади, ёки улар бир вақтда мавжуд бўлмайди.

Пировардида, ўқувчиларимиз эътиборини локаллаштириш принципининг яна бир муҳим томонига жалб қилайлик.

Келтирилган теоремадан $I_1(n, \delta)$ интегралнинг $n\to\infty$ даги лимити барча δ $(0<\delta<\pi)$ лар учун бир вақтда ёки мавжуд бўлиши, ёки мавжуд бўлмаслиги келиб чиқади.

2. Фурье қаторининг яқинлашувчилиги.

21.2-теорема. 2π *даврли* $f(x)$ *функция* $[-\pi, \pi]$ *оралиқда бўлакли-дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда бу функциянинг Фурье қатори*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$[-\pi, \pi)$ *да яқинлашувчи бўлади. Унинг йиғиндиси*

$$T(f;\ x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

бўлади ($x\in[-\pi, \pi)$).

Исбот. (21.29) тенгликнинг ҳар икки томонини

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

га кўпайтириб қуйидагини топамиз:

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du. \tag{21.30}$$

(21.28) ва (21.30) муносабатлардан фойдаланиб ушбу

$$F_n(f;\ x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

айирмани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F_n(f;\ x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)-$$

$$-f(x+0)-f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du.$$

Агар

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)-f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=I_{1n}(f;\ x),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x-u)-f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=I_{0n}(f;\ x)$$

деб белгиласак, унда

$$F_n(f;\ x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=I_{1n}(f;\ x)+I_{2n}(f;\ x)$$

бўлади.

Энди $I_{1n}(f;\ x)$ ва $I_{2n}(f;\ x)$ ларни баҳолаймиз. Ихтиёрий δ $(0<\delta<$ $<\pi)$ сонни олиб, $I_{1n}(f;\ x)$ ни икки қисмга ажратиб ёзайлик:

$$I_{1n}(f;\ x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[f(x+u)-f(x+0)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}[f(x+u)-f(x+0)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du. \qquad (21.31)$$

Локаллаштириш принципига асосан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}[f(x+u)-f(x+0)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du=0$$

бўлади. Демак, $\forall\ \varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $n_0=n_0\ (\varepsilon,\ \delta)\in N$ топиладики, $\forall\ n>n_0$ учун

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}[f(x+u)-f(x+0)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (21.32)$$

бўлади.

Энди (21.31) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интегрални баҳолайлик. Уни δ ни танлаб олиш ҳисобига етарлича кичик қила олишимиз мумкинлигини кўрсатайлик.

Шартга кўра, $f(x)$ функция $[-\pi,\ \pi)$ да бўлакли-дифференциалланувчи. Бинобарин, $\forall\ x\ [x\in[-\pi,\ \pi))$ нуқтада унинг бир томонли чекли ҳосилалари, хусусан, ўнг ҳосиласи

$$\lim_{u\to+0}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}=f'(x+0)$$

мавжуд. Демак, шундай $\delta_1>0$ топиладики $0<u<\delta_1$ бўлганда

$$\left|\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\right|\leqslant M_1\quad (M_1=\text{const})$$

бўлади.

Шунингдек, шундай $\delta_2>0$ топиладики, $0<u<\delta_2$ бўлганда

$$\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\leqslant M_2\quad (M_2=\text{const})$$

бўлади.

Агар $\delta=\min\left\{\delta_1,\ \delta_2,\ \frac{\pi\varepsilon}{2M_1M_2}\right\}$ дейилса, унда ихтиёрий $n\in N$ учун

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\left[\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\right]\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\cdot\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right|du \leqslant \frac{1}{\pi}\cdot M_1\cdot M_2\cdot\delta < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (21.36)$$

бўлади. Натижада (21.31). (21.32) ва (21.33) муносабатлардан, $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун $|I_{1n}(f; x)| < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади.

Иккинчи интеграл

$$I_{2n}(f;\ x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x-u)-f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

ҳам худди шунга ўхшаш баҳоланада ва $|I_{2n}(f; x)| < \varepsilon$ бўлиши топилади. Демак, $\forall\ \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$\left|F_n(f;\ x) - \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\right| < 2\varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f;\ x) = \frac{1}{2}[(x+0)+f(x-0)]$$

эканини билдиради.

Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи, унинг йиғиндиси $T(f; x)$ эса $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ га тенг:

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\,x + b_k\sin kx) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Теорема исбот бўлди.

Равшанки, теорема шартларини қаноатлантирувчи $f(x)$ функциянинг узлуксизлик нуқталарида

$$T(f;\ x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x)$$

бўлади.

$x = \pm\pi$ бўлганда ушбу бобнинг 1-§ ида айтилган ушбу

$$f(\pi+0) = f(-\pi+0) = f(\pi-0)$$

тенгликлар эътиборга олинса, унда

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f; -\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(-\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+\pi(\pi-0)}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f; \pi) = \frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+((\pi-0)}{2}$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f; -\pi) = \lim_{n\to\infty} F_n(f;\ \pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)],$$

яъни

$$T(f;\ -\pi)=T(f;\ \pi)=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$$

бўлади.

21.2-натижа. Агар 2π даврли $f(x)$ функция $[-\pi,\ \pi]$ да узлуксиз, бўлакли-дифференциалланувчи ва $f(-\pi)=f(\pi)$ бўлса, бу функциянинг Фурье қатори $[-\pi,\ \pi]$ да яқинлашувчи, йиғиндиси

$$T(f;\ x)=f(x)\qquad (x\in[-\pi,\ \pi])$$

бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x)=x^2\qquad (x\in[-\pi,\ \pi])$$

функциянинг Фурье қатори қуйидагича

$$x^2\backsim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{k^2}\cos kx=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right)$$

бўлишини кўрган эдик. Равшанки, x^2 функция $[-\pi,\ \pi]$ да оралиқда 21.5-натижанинг шартларини қаноатлантиради. Шу натижага кўра, $[-\pi,\ \pi]$ да унинг Фурье қатори яқинлашувчи, йиғиндиси эса x^2 га тенг бўлади. Демак,

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{k^2}\cos kx=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right)$$

$$(x\in[-\pi,\ \pi]).$$

2. Ушбу

$$f(x)=\cos ax\ \ (0<a<1)$$

функцияни қарайлик. Унинг Фурье коэффициентлари

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\,dx=2\frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(a+n)x+\cos(a-n)x)dx=$$

$$=(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\frac{\sin a\pi}{\pi}\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_n=0\qquad (n=1,\ 2\ \ldots),$$

бўлади. Демак, берилган функциянинг Фурье қатори

$$\cos ax\backsim\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2-k^2}\cos kx$$

бўлади. Агар бу $f(x)=\cos ax$ функция 21.5- натижанинг шартларини бажаришини эътиборга олсак, унда

$$\cos ax=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2-k^2}\cos kx$$

бўлишини топамиз.

Кейинги тенгликдан $x=0$ дейилса,

$$1=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+2a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2-k^2}\right],$$

ъни

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{a+k}+\frac{1}{a-k}\right)$$

келиб чиқади.

3. Қуйидаги

$$f(x)=\begin{cases}-x, \text{ агар } -\pi\leqslant x\leqslant 0 \text{ бўлса,}\\ 0, \text{ агар } 0<x<\pi \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция юқоридаги 21.2-теорема шартини қаноатлантиришини кўриш қийин эмас.

Берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топиб, Фурье қаторини ёзамиз:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=-\frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{\pi}{2},$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos kx\,dx=-\frac{1}{k\pi}x\sin kx\Big|_{-\pi}^{0}+$$

$$+\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx=\frac{1}{k^2\pi}(\cos k\pi-\cos 0)=\frac{1}{k^2\pi}[(-1)^k-1].$$

Демак,

$$a_k=\begin{cases}-\dfrac{2}{k^2\pi}, \text{ агар } k-\text{тоқ сон бўлса,}\\ 0, \text{ агар } k-\text{жуфт сон бўлса.}\end{cases}$$

Энди b_k коэффициентларни ҳисоблаймиз:

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\,x\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos kx}{k}\,dx=\frac{\cos k\pi}{k}=\frac{(-1)^k}{k}.$$

Шундай қилиб, $x\in(-\pi,\pi)$ учун

$$T(f;x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin kx}{k}=f(x),$$

$x=\pm\pi$ да эса

$$T(f;-\pi)=T(f;\pi)=\frac{0+\sigma}{2}=\frac{\pi}{2}$$

бўлади.

4. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ агар } -\pi\leqslant x<0 \text{ бўлса,}\\ -1, \text{ агар } 0\leqslant x<\pi \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция юқоридаги теореманинг шартларини қаноатлантиради. Берилган функциянинг Фурье коэффициентларини ҳисоблаб, унинг Фурье қаторини топамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{n} \int\limits_{0}^{\pi} dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} \cos nx\, dx - \int\limits_{0}^{\pi} \cos nx\, dx = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\, x dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} \sin n\, x\, d\, x - \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \sin nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} [\cos 0 - \cos nx] + \frac{1}{n\pi} [\cos nx - \cos 0] = \frac{2}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0) =$$

$$= \frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1].$$

Демак,

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{агар } n \text{ — жуфт сон бўлса,} \\ -\dfrac{4}{n\pi}, & \text{агар } n \text{ — тоқ сон бўлса.} \end{cases}$$

Шундай қилиб, берилган $f(x)$ функциянинг Фурье қатори

$$T\ (f;\ x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1} = -\frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots \right)$$

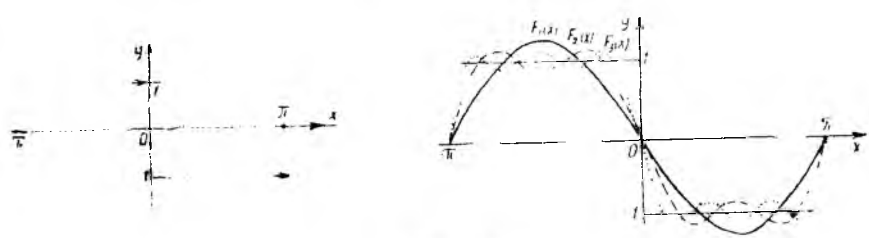
бўлади ва унинг йиғиндиси

$$T(f;\ x) = \begin{cases} f(x), \text{ агар } x \in (-\pi,\ \pi) \setminus \{0\} \text{ бўлса,} \\ \dfrac{f(-0) + f(+0)}{2} = \dfrac{1 + (-1)}{2} = 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ \dfrac{f(-\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2} = 0, \text{ агар } x = -\pi \text{ бўлса,} \\ \dfrac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2} = 0, \text{ агар } x = \pi \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади. 38-чизмада $f(x)$ функциянинг ва унинг Фурье қаторининг $F_1(f;\ x)$, $F_2(f;\ x)$ ва $F_3(f;\ x)$ қисмий йиғиндилари тасвирланган.

5- §. Қисмий йиғиндиларнинг бир экстремал хоссаси. Бессель тенгсизлиги

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда берилган. Бу функция ва унинг квадрати $f^2(x)$ ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Одатда бундай функциялар квадрати билан интегралланувчи деб аталади.



38- чизма

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да квадрати билан интегралланувчи бўлса, у шу оралиқда абсолют интегралланувчи бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ушбу

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}(1+f^2(x))$$

тенгсизликдан фойдаланиб

$$\int_a^b |(x)|\,dx$$

нинг мавжуд бўлишини топамиз. Бу эса $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ да абсолют интегралланувчи эканини билдиради.

Аммо $f(x)$ функциянинг абсолют интегралланувчи бўлишидан, унинг квадрати билан интегралланувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

функция $(0, 1]$ да интегралланувчи, лекин

$$f^2(x) = \frac{1}{x}$$

функция эса $(0, 1]$ да интегралланувчи эмас (қаралсин, 16-боб, 5-§).

Демак, квадрати билан интегралланувчи функциялар тўплами, абсолют интегралланувчи функциялар тўпламининг қисми бўлади.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да квадрати билан интегралланувчи функция, $T_n(x)$ — даражаси n дан катта бўлмаган тригонометрик кўпҳад бўлсин:

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Равшанки, бундай кўпҳадлар ҳам $[-\pi, \pi]$ да квадрати билан интегралланувчи бўладилар. Коши — Буняковский тенгсизлигидан

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\,dx \tag{21.34}$$

интегралнинг ҳам мавжудлиги келиб чиқади. Бу интеграл муайян $f(x)$ да $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ ларга боғлиқ:

$$I = I(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\,dx.$$

Энди қуйидаги масалани қарайлик. Шу коэффициентлар қандай танлаб олинганда I энг кичик қийматга эга бўлади? Бу масалани ҳал этиш учун юқоридаги (21.34) интегрални ҳисоблайлик:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,T_n(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\,dx \tag{21.35}$$

$f(x)$ функция Фурье коэффициенлари учун

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

формулалардан фойдалансак,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)\right]dx =$$

$$= \frac{\alpha_0}{2}a_0\pi + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cdot a_k\pi + \beta_k\cdot b_k\cdot\pi) = \tag{21.36}$$

$$= \pi\left[\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cdot a_k + \beta_k\cdot b_k)\right]$$

бўлади.

Агар

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\sin kx\ dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx dx = \pi$$

(қаранг. ушбу бобнинг 2-§ ига) эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)\right]^2 dx =$$

$$= \pi\left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right] \tag{21.37}$$

бўлади. Юқоридаги (21.36), (21.35.), (21.37) тенгликлардан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - T_n(x)\right]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\pi\left[\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\beta_k b_k\right] + \pi\left[\frac{\alpha_n^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 + \sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\right] = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + \sum_{k=1}^{n}b_k^2\right] + \pi\left[\frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - a_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(\beta_k - b_k)^2\right].$$

Бу тенгликдан кўринадики,

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - T_n(x)]^2\,dx$$

интеграл

$$\alpha_0 = a_0,$$
$$\alpha_k = a_k, \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$
$$\beta_k = b_k, \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

бўлгандагина ўзининг энг кичик қийматига эришади ва у қиймат

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right]$$

бўлади, яъни:

$$\min_{\alpha_0,\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \ldots\ \alpha_n,\ \beta_n} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\,dx =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right].$$

Шундай қилиб, қуйидаги теоремани исботладик.

21.3-теорема. *$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган, квадрати билан интегралланувчи бўлсин. Даражаси n дан катта бўлмаган барча тригонометрик кўпҳадлар $\{T_n(x)\}$ ичида ушбу*

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\,dx$$

интегралга энг кичик қиймат берувчи кўпҳад $f(x)$ функция Фурье қаторининг n-қисмий йиғиндиси бўлади:

$$\min_{T(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(f;\ x)]^2\,dx =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right]. \tag{21.38}$$

21.3-натижа. Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да квадрати билан интегралланувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг Фурье коэффициентлари квадратларидан тузилган

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \ \text{ва}\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

қаторлар яқинлашувчи бўлади ва қуйидаги тенгсизлик ўринлидир:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{21.39}$$

Исбот. (21.38) муносабатдан $\forall n$ учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} d_k^2\right] \geqslant 0,$$

яъни

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k^2+\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$$

бўлади. Бу ерда n ни чексизликка интилтириб, келтирилган натижани ва тенгсизликни ҳосил қиламиз.

(21.39) тенгсизлик *Бессель тенгсизлиги* деб аталади.

6- §. Яқинлашувчи Фурье қатори йиғиндисининг функционал хоссалари

Биз мазкур курснинг 14- бобида яқинлашувчи функционал қаторлар йиғиндисининг функционал хосссаларини батафсил ўргандик. Равшанки, берилган функциянинг Фурье қатори функционал қаторларнинг хусусий ҳолидир. Бинобарин, тегишли шартларда Фурье қаторлари йиғиндилари ҳам 14- бобда келтирилган хоссаларга эга бўлади. Қуйида уларни исботсиз келтирамиз.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган ва унинг Фурье қатори

$$T(f;\ x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx) \tag{21.40}$$

$[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи бўлсин.

1°. Фурье қатори йиғиндисининг узлуксизлиги. Агар (21.40) қатор $[-\pi, \pi]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қаторнинг $T(f;\ x)$ йиғиндиси $[-\pi, \pi]$ оралиқда узлуксиз функция бўлади.

2°. Фурье қаторни ҳадлаб интеграллаш. Агар (21.40) қатор $[-\pi, \pi]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (21.40) қатор ҳадларини интегралларидан тузилган

$$\int_a^b \frac{a_0}{2}\, dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_a^b \cos nx dx+b_n \int_a^b \sin nx dx\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}(b-a)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{\sin nb-\sin na}{n}+b_n \frac{\cos na-\cos nb}{n}\right)$$

қатор $(-\pi \leqslant a<b \leqslant \pi)$ ҳам яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндиси

$$\int_a^b T(f;\ x)\, dx$$

га тенг бўлади, яъни

$$\int_a^b T(f;\ x)\, dx=\int_a^b\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx)\right] dx=$$

$$=\int_a^b \frac{a_0}{2}\, dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b(a_n \cos nx+b_n \sin nx)\, dx\right].$$

3°. Фурье қаторини ҳадлаб дифференциаллаш. Агар (21.43) қаторнинг ҳар бир ҳадининг ҳосилаларидан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$$

қатор $[-\pi, \pi]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда берилган Фурье қаторининг йиғиндиси $T(f; x)$) шу $[-\pi, \pi]$ да $T'(f; x)$ ҳосилага эга ва

$$T'(f; x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$$

бўлади.

Шундай қилиб, умумий ҳолдагидек $f(x)$ функция Фурье қатори йиғиндисининг функционал хоссаларини ўрганишда Фурье қаторининг текис яқинлашувчи бўлиши муҳим роль ўйнаяпти. Бинобарин, Фурье қаторининг текис яқинлашувчи бўлишини таъминлайдиган шартларни аниқлаш лозим бўлади.

Энди шу ҳақида теорема келтирамиз.

Фурье қаторининг текис яқинлашиши. 21.4-теорема. *$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда берилган, узлуксиз ҳамда $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлсин. Агар бу функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда бўлакли-силлиқ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг Фурье қатори*

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{21.40}$$

$[-\pi, \pi]$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган $f(x)$ функция Фурье қатори (21.40) нинг ҳар бир

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ҳади учун

$$|u_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leqslant |a_n| + |b_n|$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ бўлади.

Энди

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

Фурье коэффициентлари

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1, 2, \ldots)$$

ни қарайлик.

Бўлаклаб интеграллаш қоидасига кўра

$$a_n = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx, \qquad (21.41)$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\left(\frac{\cos nx}{n}\right) = -\frac{1}{\pi}f(x)\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = -\frac{1}{n\pi}(-1)^n[f(\pi)-f(-\pi)] +$$

$$+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Агар $f(-\pi)=f(\pi)$ шартни эътиборга олсак, у ҳолда

$$b_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-D}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx \qquad (21.42)$$

бўлади.

$f'(x)$ нинг Фурье коэффициентларини a_n' ва b_n' десак:

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx,\ b_n' = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx\ (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

у ҳолда (21.41) ва (21.42) муносабатларга кўра

$$a_n = -\frac{1}{n}b_n',\ b_n = \frac{1}{n}a_n'\ (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

бўлади. Натижада

$$|a_n| + |b_n| = \frac{1}{n}\left(|a_n'| + |b_n'|\right)$$

бўлади.

Агар

$$\frac{1}{n}\left(|a_n'|+|b_n'|\right) = \frac{1}{n}|a_n'| + \frac{1}{n}|b_n'| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(a_n'^2 + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(b_n'^2 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n'^2 + b_n'^2\right) + \frac{1}{n^2}$$

бўлишини ҳисобга олсак, унда ушбу

$$|a_n| + |b_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n'^2 + b_n'^2\right) + \frac{1}{n^2} \qquad (21.43)$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Шартга кўра $f'(x)$ функция бўлакли-узлуксиздир. Бинобарин, у квадрати билан интегралланувчидир. Шунинг учун бу функциянинг a_n', b_n' Фурье квэффициентлари Бессель тенгсизлигини қаноатлантиради, яъни

$$\frac{a'^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n'^2+b_n'^2\right)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'^2(x)\,dx$$

бўлади. Демак,

$$\frac{a_0'^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n'^2+b_n'^2\right)$$

қатор яқинлашувчи. Унда яқинлашувчи қаторларнинг хоссаларига кўра ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(a_n'^2+b_n'^2\right)+\frac{1}{n^2}\right] \tag{21.44}$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

Юқорида келтирилган (21.46) тенгсизликка мувофиқ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right) \tag{21.45}$$

қаторнинг ҳар бир ҳади (21.44) қаторнинг мос ҳадидан катта эмас. Таққослаш теоремасига кўра (қаралсин, 1- том, 11- боб, 8- §) (21.45) қатор яқинлашувчи, демак,

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)$$

қатор яқинлашувчи бўлади.

Вейерштрасс аломатидан (14- боб, 2- §) фойдаланиб, (21.40) Фурье қаторининг $[-\pi, \pi]$ да текис яқинлашувчи бўлишини топамиз. Теорема исбот бўлди.

7- §. Функцияларни тригонометрик кўпҳад билан яқинлаштириш

Юқорида, 6- § да кўрдикки, агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз, бўлакли-узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, унинг Фурье қатори $T(x)$ шу оралиқда текис яқинлашувчи бўлади, яъни қисмий йиғиндилар кетма-кетлиги $\{F_n(f;\ x)\}$ шу $f(x)$ функцияга текис яқинлашади. Текис яқинлашувчиликнинг таърифига биноан, $\forall\ \varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $n_0\in N$ топиладики, $\forall\ n>n_0$ учун

$$\sup_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|F_n(f;\ x)-f(x)|<\varepsilon \tag{21.46}$$

бўлади. Бу эса юқорида айтилган шартларни қаноатлантирувчи функцияларни исталган аниқликда $F_n(x)$ тригонометрик кўпҳад билан тақрибан алмаштириш мумкинлигини ифодалайди.

Аммо 14- бобда келтирилган Вейерштрасс теоремасига кўра ихтиёрий $[a, b]$ да узлуксиз функцияни исталган аниқликда алгебраик кўпҳад билан тақрибан алмаштириш мумкин эди.

Табиийки, (21.46) ўринли бўлиши учун $f(x)$ нинг $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз бўлишининг ўзи етарли бўлмасмикин, деган савол туғилади. Бу саволга жавоб салбийдир. Ҳаттоки, узлуксиз функциянинг Фурье қатори, умуман айтганда, яқинлашувчи бўлмай қолиши ҳам мумкин экан (қаранг, И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Москва, 1947, 7-боб, 3-§). Демак, Фурье қаторлари қисмий йиғиндиларидан, функцияларнинг бу, кенгроқ синфи учун тақрибий ҳисоблаш аппаратлари сифатида фойдалана олмас эканмиз. Қуйида биз $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз ихтиёрий $f(x)$ функция учун шундай тригонометрик кўпҳадлар $\{\sigma_n(f;\ x)\}$ кетма-кетлигини тузамизки,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-\pi<x<\pi} |\sigma(f;\ x) - f(x)| = 0$$

бўлади. Шуни ҳам таъкидлаймизки, бу тригонометрик кўпҳадлар Фурье қаторлари қисмий йиғиндилари ёрдамида осонгина тузилади.

Фейер йиғиндиси. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда берилган ва узлуксиз бўлсин. Бу функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси

$$F_n(f;\ x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

дан фойдаланиб, ушбу

$$\sigma_n(f;\ x) = \frac{1}{n}[F_0(f;\ x) + F_1(f;x) + F_1(f;x) + \ldots + F_{n-1}(f;x)],$$

$$F_0(f;\ x) = \frac{a_0}{2} \tag{21.47}$$

йиғиндини тузамиз. Одатда (21.47) йиғинди $f(x)$ функциянинг *Фейер йиғиндиси* деб аталади.

$f(x)$ функциянинг Фейер йиғиндиси $\sigma_n(f;\ x)$ тригонометрик кўпҳад бўлади. Ҳақиқатан ҳам, Фурье қатори қисмий йиғиндиларининг ифодалари

$$F_0(f;\ x) = \frac{a_0}{2},$$

$$F_1(f;x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x,$$

$$F_2(f;x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_{n-1}(f;\ x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_{n-1}\cos(n-1)x + $$
$$+ b_{n-1} \sin(n-1)x$$

га кўра

$$\sigma_1(f;\ x) = \frac{a_0}{2},$$

$$\sigma_2(f;x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} a_1 \cos x + \frac{1}{2} b_1 \sin x,$$

$$\sigma_3(f;\ x) = \frac{a_0}{2} + \frac{2}{3}a_1\cos x + \frac{2}{3}b_1\sin x + \frac{1}{3}a_2\cos 2x + \frac{1}{3}b^2\sin 2x,$$

. . . .

$$\sigma_n(f;\ x) = \frac{a_0}{2} + \frac{n-1}{n}a_1\cos x + \frac{n-1}{n}b_1\sin x + \ldots + \frac{1}{n}a_{n-1}\cos(n-$$

$$-1)x + \frac{1}{n}b_{n-1}\sin(n-1)x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}a_k\cos kx + \frac{n-k}{n}b_k\sin kx\right)$$

бўлади.

Агар 3-§ да келтирилган (21.32) тенглик

$$F_n(1,\ x) = 1\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

ни эътиборга олсак, унда (21.50) дан

$$\sigma_n(1;\ x) = 1 \qquad (21.48)$$

бўлиши келиб чиқади.

(21.47) муносабатдаги $F_k(f;\ x)$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1)$ нинг ўрнига унинг ифодаси (қаралсин, (21.28)

$$F_k(f;\ x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u) + f(x-u)]\frac{\sin\frac{2k+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

ни қўйиб қуйидагини топамиз:

$$\sigma_n(f;\ x) = \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\int_0^{\pi}[f(x+u) + f(x-u)]\frac{\sin\frac{2k+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du\right\} =$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{\sin\frac{u}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\frac{u}{2}\right]du =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{\sin t}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)t\right[dt.$$

Интеграл остидаги йиғинди учун

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1) = \frac{\sin 2t}{\sin t}$$

муносабат ўринли. Ҳақиқатан ҳам,

$$\sin t\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)t = \sum_{k=0}^{n-1}\sin t\cdot\sin(2k+1)t =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left[\cos 2kt - \cos(2k+2)t\right] = \frac{1}{2}(1-\cos 2nt) = \sin^2 nt.$$

Натижада $f(x)$ функциянинг Фейер йиғиндиси ушбу

$$\sigma_n(f;\ x)=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \qquad (21.49)$$

кўринишни олади. Бу ва юқоридаги (21.48) тенгликдан

$$1=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \qquad (21.50)$$

бўлиши келиб чиқади.

21.5-теорема (Фейер теоремаси). *$f(x)$ функция $[-\pi,\ \pi]$ оралиқда берилган, узлуксиз ва $f(-\pi)=f(\pi)$ бўлсин. У ҳолда*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{-\pi\le x\le\pi}|\sigma_n(f;\ x)-f(x)|=0$$

бўлади.

Исбот. (21.50) тенгликнинг ҳар икки томонини $f(x)$ га кўпайтирсак, у ҳолда

$$f(x)=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2f(x)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt$$

бўлади. Бу ва (21.49) муносабатдан фойдаланиб, ушбуни топамиз:

$$\sigma_n(f;\ x)-f(x)=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\Big[f(x+2t)+f(x-2t)-$$

$$-2f(x)\Big]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt. \qquad (21.51)$$

Модомики, шартга кўра $f(x)$ функция $[-\pi,\ \pi]$ да узлуксиз экан, у Кантор теоремасига биноан текис узлуксиз бўлади. Демак, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топиладики, $|x'-x''|<2\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall\, x',\ x''\in[-\pi,\ \pi]$ учун

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (21.52)$$

бўлади. Шу топилган δ сонни олиб (уни $\delta<\frac{\pi}{2}$ деб ҳисоблаш мумкин), (21.51) интегрални икки қисмга ажратамиз:

$$\sigma_n(f;\ x)-(x)=I_1(n,\ \delta)+I_2(n,\ \delta),$$

бунда

$$I_1(n,\ \delta)=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\delta}\left[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\right]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt,$$

$$I_2(n,\ \sigma)=\frac{1}{n\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi/2}\left[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\right]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Энди $I_1(n,\ \delta)$ ва $I_2(n,\ \sigma)$ интегралларни баҳолаймиз. Юқоридаги (21.52) муносабатни эътиборга олиб қуйидагини топамиз:

$$|I_1(n,\ \delta)|\leqslant\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\delta}\Big[|f(x+2t)-f(x)|+|f(x-2t)-$$

$$-f(x)|\Big]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt<\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{n\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Демак, $\forall\ \varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $\delta>0$ топиладики, барча $n\in N$ лар учун $|I_1(n,\ \delta)|<\frac{\varepsilon}{2}$ бўлади.

Энди $I_2(n,\ \delta)$ интегрални баҳолаймиз.

$$|I_2(n,\ \delta)|\leqslant\frac{1}{n\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi/2}|f(x+2t)+f(x-2t)-$$

$$-2f(x)|\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\leqslant\frac{1}{n\pi}\cdot 4M\int\limits_{\delta}^{\pi/2}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt,$$

бунда $M=\max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|f(x)|$. Равшанки,

$$t\in\left[\delta,\ \frac{\pi}{2}\right](\delta>0)\ \text{да}\ \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2\leqslant\frac{1}{\sin^2\delta}$$

бўлади. Натижада $I_2(n,\ \delta)$ учун ушбу $|I_2(n,\ \delta)|\leqslant\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{4M}{\sin^2\delta}\cdot\frac{\pi}{2}=$ $=\frac{2M}{n\sin^2\delta}$ баҳога эга бўламиз. Агар натурал n сонини $n>n_0=$ $=\left[\frac{4M}{\varepsilon\sin^2\delta}\right]$ қилиб олинса, унда $\frac{2M}{n\sin^2\delta}<\frac{\varepsilon}{2}$ ва, демак, $|I_2(n,\ \delta)|<$ $<\frac{\varepsilon}{2}$ бўлади.

Шундай қилиб, $\forall\ \varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топиладики, $\forall\ n\in N$ учун $|I_1(n,\ \delta)|<\frac{\varepsilon}{2}$ бўлди. Ва шу $\varepsilon>0$ ва $\delta=\delta(\varepsilon)$ ларга кўра шундай n_0 топиладики, $\forall n>n_0$ учун $|I_2(n,\ \delta)|<\frac{\varepsilon}{2}$ бўлди. Бу тасдиқларни бирлаштирсак, $\forall\ \varepsilon>0$ учун шундай $n_0\in N$ топиладики. $\forall n>n_0$, $\forall\ x\in[-\pi,\ \pi]$ учун $|\sigma_n(f;\ x)-f(x)|<\varepsilon$ бўлади.

Демак, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|\sigma_n(f;\ x)-f(x)=0$. Теорема исбот бўлди.

Натижада, функцияни тригонометрик кўпҳад билан яқинлаштириш ҳақидаги қуйидаги теоремага келамиз.

21.6-теорема (Вейерштрасс теоремаси). *Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$да берилган, узлуксиз ва $f(-\pi)=f(\pi)$ бўлса, у ҳолда шундай $\mathcal{P}_n(x)$ тригонометрик кўпҳад топиладики,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-\pi\le x\le\pi} |\mathcal{P}_n(x)-f(x)|=0$$

бўлади.

8-§. Ўртача яқинлашиш. Фурье қаторининг ўртача яқинлашиши

Функционал кетма-кетлик ва қаторларда текис яқинлашиш тушунчаси билан бир қаторда, ундан умумийроқ — ўртача яқинлашиш тушунчаси ҳам киритилади.

1. Ўртача яқинлашиш. $[a, b]$ оралиқда бирор $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(k),\ \dots \tag{21.53}$$

функционал кетма-кетлик ва $f(x)$ функция берилган бўлиб, $f_n(x)$ $(n=1, 2, \dots)$ ҳамда $f(x)$ лар шу оралиқда квадрати билан интегралланувчи бўлсин.

21.2-таъриф. Агар

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx=0$$

бўлса у ҳолда (21.53) функционал кетма-кетлик $f(x)$ функцияга $[a, b]$ да *ўртача яқинлашади* деб аталади*.

Мисоллар. 1. Ушбу $\{f_n(x)\}=\{x^n\}$:

$$x,\ x^2,\ \dots,\ x^n\ \dots\ (x\in[0, 1])$$

функционал кетма-кетлик

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\in[0, 1) \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } x=1 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияга $[0, 1]$ да ўртача яқинлашади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\int_0^1\left[f_n(x)-f(x)\right]^2dx=\int_0^1(x^n-0)^2\,dx=\int_0^1 x^{2n}\,dx=\frac{1}{2n+1}$$

ва, демак,
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 [x^n-0]^2\,dx=0.$$

---

*Аниқроқ айтганда, киритилган яқинлашишни, одатда ўрта квадратик яқинлашиш деб аталади.

2. Қуйидаги $\{f_n(x)\} = \{\sqrt{2nx}\, e^{-\frac{1}{2}nx^2}\}$:

$$\sqrt{2x}\, e^{-\frac{1}{2}x^2},\ \sqrt{4x}\, e^{-\frac{1}{2}2x^2},\ \dots,\ \sqrt{2nx}\, e^{-\frac{1}{2}nx^2},\ \dots\ (x \in (0,\ 1])$$

функционал кетма-кетлик $f(x) = 0$ функцияга $[0.\ 1]$ да ўртача яқинлашмайди, чунки

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2\, dx = \int_0^1 [\sqrt{2nx}\, e^{-\frac{1}{2}nx^2} - 0]^2\, dx =$$

$$= \int_0^1 2\, nx\, e^{-nx^2} dx = \int_0^1 e^{-nx^2}\, d(nx^2) = (1 - e^{-n}),$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 [\sqrt{2nx}\, e^{-\frac{1}{2}nx^2} - 0]^2\, dx = 1 \neq 0.$$

21.7-теорема. *Агар (21.53) функционал кетма-кетлик $f(x)$ га $[a,\ b]$ да текис яқинлашса, шу (21.53) кетма-кетлик $f(x)$ га $[a,\ b]$ да ўртача яқинлашади.*

Исбот. (21.53) кетма-кетлик $f(x)$ га текис яқинлашсин.

Таърифга биноан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ ва $\forall x \in [a,\ b]$ учун бир йўла

$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}$$

бўлади. Демак, $\forall n > n_0$ учун

$$\left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\, dx\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\, dx <$$

$$< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dx = \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\, dx = 0$$

эканини билдиради. Демак, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $f(x)$ функцияга $[a,\ b]$ да ўртача яқинлашади. Теорема исбот бўлди.

21.2-эслатма. Функционал кетма-кетликнинг $[a,\ b]$ да ўртача яқинлашишидан, унинг шу оралиқда текис яқинлашиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, юқорида кўрдикки $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$ кетма-кетлик

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \in [0,\ 1) \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияга $[0, 1]$ да ўртача яқинлашади. Бироқ бу функционал кетма-кетлик шу $f(x)$ функцияга $[0,1]$ да текис яқинлашмайди (қаралсин, 14- боб, 2 -§).

Юқорида келтирилган теорема ва эслатма функционал кетма-кетликларда ўртача яқинлашиш текис яқинлашиш тушунчасига қараганда кенгроқ тушунча эканини кўрсатади.

21.3- эслатма. Функционал кетма-кетлик $[a, b]$ да яқинлашишидан $[(a, b)$ нинг ҳар бир нуқтасида яқинлашишидан) унинг шу оралиқда ўртача яқинлашиши келиб чиқавермайди. Шунингдек, функционал кетма-кетликнинг $[a, b]$ да ўртача яқинлашишидан, унинг шу оралиқда яқинлашиши ($[a, b]$ нинг ҳар бир нуқтасида яқинлашиши ҳам келиб чиқавермайди.

Мисол. $\{f_n(x)\} = \{\sqrt{2nx}\, e^{-\frac{1}{2}nx^2}\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)=0$ функцияга $[0, 1]$ да яқинлашади ($[0, 1]$ оралиқнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашади):

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim \sqrt{2nx}\, e^{-\frac{1}{2}nx^2} = 0 = f(x).$$

Бу кетма-кетликнинг $f(x)=0$ функцияга $[0, 1]$ да ўртача яқинлашмаслиги кўрсатилган эди.

Энди бирор оралиқда ўртача яқинлашадиган, бироқ шу оралиқда яқинлашмайдиган функционал кетма-кетликка мисол келтирамиз.

$[0, 1]$ оралиқни n та тенг бўлакка ажратамиз:

$$[0, 1] = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Delta_n(k),$$

бунда

$$\Delta_n(k) = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \qquad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Қуйидаги

$$\varphi_n(k, x) = 1, \text{ агар } x \in \Delta_n(k),$$

$$\varphi_n(k, x) = 0, \text{ агар } x \in [0,1] \setminus \Delta_n(k)$$

$(k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ функциялар ёрдамида ушбу функционал кетма-кетликни тузамиз:

$$f_1(x) = \varphi_1(0, x),$$

$$f_2(x) = \varphi_2(0, x),\ f_3(x) = \varphi_2(1, x),$$

$$f_4(x) = \varphi_3(0, x),\ f_5(1, x),\ f_6(x) = \varphi_3(2, x),$$

. . . .

$\{f_m(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x)=0$ функцияга $[0, 1]$ оралиқда ўртача яқинлашади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^1 [f_m(x) - f(x)]^2\,dx = \lim_{m\to\infty}\int_0^1 f_m^2(x)\,dx =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\int_0^1 [\varphi_n(k, x)]^2\,dx = \lim_{m\to\infty}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1\,dx = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

$\{f_m(x)\}$ функционал кетма-кетлик ҳадларининг тузилиши қоидасига кўра $f_m(x) = \varphi_n(k\ x)$ бўлиб, $m \to \infty$ да $n \to \infty$ бўлади.)

Бу $\{f_m(x)\}$ функционал кетма-кетлик $f(x) = 0$ функцияга $[0, 1]$ оралиқнинг ар бир нуқтасида яқинлашмайди. Ҳақиқатан ҳам. $\forall x \in [0, 1]$ нуқта учун m нинг эксиз кўп қийматлари топиладики, $f_m(x) = 1$ бўлади, m нинг чексиз кўп қийматари топиладики, $f_m(x) = 0$ бўлади.

Функционал қаторларда ҳам ўртача яқинлашиш тушунчаси шунга хшаш киритилади.

$[a, b]$ оралиқда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(u) + \ldots + u_k(x) + \ldots \qquad (21.54)$$

ɜункционал қатор берилган бўлсин. Бу қатор қисмий йиғиндилари

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

цан иборат $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетликни қарайлик.

21.3-таъриф. Агар

$$\lim \int_a^b [S_n(x) - S(x)]^2\, dx = 0$$

бўлса, у ҳолда (21.54) функционал қатор $S(x)$ функцияга $[a, b]$ да *ўртача яқинлашади* деб аталади.

2. Фурье қаторининг ўртача яқинлашиши. $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган, $T(f; x)$ эса унинг Фурье қатори

$$T(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

бўлсин.

21.8-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда узлуксиз ва $f(-\pi) = f(\pi)$ бўлса, унинг Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ да $f(x)$ га ўртача яқинлашади.*

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да узлуксиз ва $f(-\pi) = f(\pi)$. У ҳолда ушбу бобнинг 7-§ ида келтирилган Вейерштрасс теоремасига асосан, $\forall\, \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай тригонометрик кўпҳад $\mathscr{P}_n(x)$ топиладики, $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$ учун

$$|f(x) - \mathscr{P}_n(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}$$

бўлади. Бу тенгсизликдан фойдаланиб

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \mathscr{P}_n(x)]^2\, dx < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \varepsilon \qquad (21.55)$$

бўлишини топамиз.

Маълумки, $f(x)$ функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси $F_n(f; x)$ учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(f; x)]^2\, dx = \min_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\, dx \qquad (21.56)$$

бўлади (қаралсин, 5- §). Демак, (21.58) ва (21.59) муносабатларга кўра

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(f;\ x)]^2\,dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\,dx < \varepsilon$$

$$(\forall\ x \in [-\pi,\ \pi])$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(f;\ x)]^2\,dx = 0,$$

яъни $f(x)$ функция Фурье қатори $[-\pi,\ \pi]$ да ўртача яқинлашишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Биз ўтган параграфда $[-\pi,\ \pi]$ оралиқда квадрати билан интегралланувчи $f(x)$ функция учун ушбу

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_n(f;\ x)^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]$$

тенгликни келтириб чиқарган эдик. Бу тенгликдан кўринадики, агар

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\int_{-\pi}^{\pi} f^3(x)\,dx - \pi\left\{\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right]\right\}\right\} = 0,$$

яъни

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\ (x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \qquad (21.57)$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) - F_n(f;\ x)]^2\,dx = 0$$

бўлади ва, демак, $f(x)$ функциянинг Фурье қатори $[-\pi,\ \pi]$ да ўртача яқинлашади.

Шундай қилиб, $f(x)$ функция Фурье қаторининг $[-\pi,\ \pi]$ да ўртача яқинлашишини кўрсатиш учун (21.60) тенгликнинг ўринли бўлишини кўрсатиш зарур ва етарли бўлади. Одатда (21.57) *Парсеваль тенглиги* деб аталади.

9- §. Функцияларнинг ортогонал системаси. Умумлашган Фурье қатоян

1. Функцияларнинг ортогонал системаси. $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $[a, b]$ да берилган ва улар шу оралиқда интегралланувчи бўлсин.

21.4- таъриф. Агар

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)\cdot\psi(x)\,dx = 0$$

бўлса, у ҳолда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $[a, b]$ да *ортогонал* деб аталади.

Мисол. $\varphi(x)=\sin x$, $\psi(x)=\cos x$ функциялар $[-\pi, \pi]$ да ортогонал бўлади, чунки

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\cdot\cos x\,dx = 0$$

бўлади,

$\varphi(x)=x$, $\psi(x)=\frac{3}{2}x^2-1$ функциялар $[-1, 1]$ да ортогонал бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\int_a^b \varphi(x)\cdot\psi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\left(\frac{3}{2}x^2-1\right)dx = 0.$$

Энди

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x), \ldots,\ \varphi_n(x), \ldots \tag{21.58}$$

функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ да берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Бу (21.58) функциялар системасини $\{\varphi_n(x)\}$ каби белгилаймиз.

21.5-таъриф. Агар $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системасининг исталган иккита $\varphi_k(x)$ ва $\varphi_m(x)$ $(k\neq m)$ функциялари учун

$$\int_a^b \varphi_k(x)\cdot\varphi_m(x)\,dx = 0\quad (k\neq m)$$

бўлса, у ҳолда $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системаси $[a, b]$ да *ортогонал* деб аталади.

Одатда, $k=m\,(k=0, 1, 2, \ldots)$ бўлганда

$$\int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx > 0\quad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

деб қаралади. Бу интегрални λ_k каби белгилайлик:

$$\lambda_k = \int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx\,(k=0, 1, 2, \ldots).$$

Агар (21.61) система учун

$$\lambda_k = 1\,(k=0, 1, 2, \ldots)$$

бўлса, $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системаси *нормал* деб аталади.

Агар (21.58) система учун

$$\int_a^b \varphi_k(x)\cdot\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{агар } k\neq m \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } k=m \text{ бўлса}\end{cases}$$

бўлса, $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системаси *ортонормал* деб аталади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx, \ldots$$

система (тригонометрик система) $[-\pi, \pi]$ да ортогонал бўлади, чунки $k\neq m$ бўлганда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos mx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin mx\, dx = 0$$

бўлиб, ихтиёрий $k,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ бўлганда $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin mx\, dx = 0$ бўлади (қаралсин, ушбу бобнинг 1- §).

2. Қуйидаги

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

функциялар системаси $[-\pi, \pi]$ да ортонормал бўлади. Бу системанинг $[-\pi, \pi]$ да ортогонал бўлиши равшандир. Унинг шу $[-\pi, \pi]$ да нормал бўлиши эса

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx\right)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx\right)^2 dx = 1 \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

бўлишидан келиб чиқади.

3. Ушбу $\{P_n(x)\}$:

$$P_0(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots \tag{21.59}$$

функциялар системасини қарайлик, бунда

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\ 2^n} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Бу система $[-1, 1]$ да ортогонал бўлади. Шуни исботлайлик. Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)\, P_m(x)\, dx = \frac{1}{k!\ m!\ 2^{k+m}} \int_{-1}^{1} \frac{d^k (x^2-1)^k}{dx^k} \cdot d\left[\frac{d^{m-1}(x^2-1)^m}{dx^{m-1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{k!\ m!\ 2^{k+m}} \left[\frac{d^k (x^2-1)^k}{dx^k} \cdot \frac{d^{m-1}(x^2-1)^m}{dx^{m-1}}\right]_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} \frac{d^{k+1}(x^2-1)^k}{dx^{k+1}} \cdot \frac{d^{m-1}(x^2-1)^m}{dx^{m-1}}\, dx\Bigg].$$

Агар $x = \pm 1$ да

$$\frac{d^{m-1}(x^2-1)^m}{dx^{m-1}} = 0$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)\, P_m(x)\, dx = \frac{1}{k!\ m!\ 2^{k+m}} \int_{-1}^{1} \frac{d^{k+1}(x^2-1)^k}{dx^{k+1}}\, d\left[\frac{d^{m-2}(x^2-1)^m}{dx^{m-2}}\right]$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални яна бўлаклаб интеграллаб, сўнг $x = \pm 1$ да

$$\frac{d^{m-2}(x^2-1)^m}{dx^{m-2}} = 0$$

бўлишини ҳисобга олиб қуйидагини топамиз:

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)\, P_m(x)\, dx = \frac{1}{k!\, m!\, 2^{k+m}} \int_{-1}^{1} \frac{d^{k+2}(x^2-1)^k}{dx^{k+2}}\, d\left[\frac{d^{m-3}(x^2-1)^m}{dx^{m-3}}\right].$$

Шу жараённи давом эттира бориб, m қадамдан кейин қуйидаги тенгликка келамиз:

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)\, P_m(x)\, dx = \frac{(-1)^{m-1}}{k!\, m!\, 2^{k+m}} \left[\frac{d^{k+m-1}(x^2-1)^k}{dx^{k+m-1}} \cdot (x^2-1) \Big|_{-1}^{1} - \right.$$

$$\left. - \int_{-1}^{1} (x^2-1) \frac{d^{k+m}(x^2-1)^k}{dx^{k+m}}\, dx \right].$$

$x = \pm 1$ да $x^2 - 1 = 0$ ва $m > k$ учун $\dfrac{d^{k+m+1}(x^2-1)}{dx^{k+m+1}} = 0$ бўлишини ҳисобга олиб

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)\, P_m(x)\, dx = 0 \tag{21.60}$$

эканлигини топамиз. Демак, $m > k$ бўлганда (21.60) муносабат ўринлидир.

Худди юқоридагидек, $m < k$ бўлганда ҳам (21.60) муносабатнинг ўринли бўлиши кўрсатилади.

Шундай қилиб $k \neq m$ учун $\int_{-1}^{1} P_k(x)\, P_m(x)\, dx = 0$ бўлади. Бу эса (21.62) системанинг $[-1;\ 1]$ да ортогонал эканлигини билдиради.

Одатда $P_n(x)$ — *Лежандр кўпҳади* деб аталади. Бу кўпҳад, хусусан $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ бўлганда

$$P_0(x) = 1,\quad P_1(x) = x,\quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1,\quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

бўлади.

(21.61) система берилган бўлсин. Унинг ёрдамида тузилган ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \ldots + c_n \varphi_n(x) + \ldots \tag{21.61}$$

функционал қатор $\{\varphi_n(x)\}$ система бўйича қатор дейилади, $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$, ўзгармас сонлар эса қаторнинг коэффициентлари дейилади.

Хусусан, $\varphi_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ бўлганда (21.61) қатор тригонометрик қаторга айланади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда берилган ва шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Равшанки, $f(x) \cdot \varphi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ функция ҳам $[a, b]$ да интегралланувчи бўлади. Бу функцияларнинг интегралларини ҳисоблаб, уни қуйидагича белгилаймиз:

$$a_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b f(x) \cdot \varphi_n(x)\, dx. \tag{21.62}$$

Бу сонлардан фойдаланиб ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x) + \dots \tag{21.63}$$

қаторни тузамиз.

21.6-**таъриф.** $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ коэффициентлари (21.62) формула билан аниқланган (21.63) қатор $f(x)$ функциянинг $\{\varphi_n(x)\}$ система бўйича *умумлашган Фурье қатори* деб аталади. $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ сонлар эса *умумлашган Фурье коэффициентлари* дейилади.

Одатда, $f(x)$ функция билан унга мос умумлашган Фурье қатори «$\sim$» белги орқали қуйидагича ёзилади:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\varphi_n(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x) + \dots$$

АДАБИЁТ

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, III, —М, Наука, 1969. (I, II томлари ўзбек тилига таржима қилинган).

2. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. I, II. —М., Наука. 1964. (Ўзбек тилига таржима қилинган.)

3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, т. I.— М., Наука, 1971. (Ўзбек тилига таржима қилинган).

4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, т. II, — М., Наука, 1980.

5. Хинчин А. Я. Восемь лекций по математическому анализу, —М., Наука, 1977.

6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. I, II. —М., Высшая школа, 1981.

7. Никольский С. М. Курс математического анализа, т. I, II, —М., Наука, 1973.

8. Ильин В. А. , Садовничий В. А. , Сендов Бл. Х. Математический анализ. —М. , Наука, 1979.

9. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, —М., Наука, 1970.

10. Рудин У. Основы математического анализа, —М. , Мир, 1976.

11. Зорич В. А. Математический анализ, ч. I, II, —М., Наука, 1981.

12. Романовский И. В. Избранные труды, т. I (Введение в анализ). Изд. АН УзССР, Ташкент, 1959.

13. Азларов Т. А. , Мансуров Ҳ. Математик анализ, 1-қисм, —Т. , «Ўқитувчи», 1986.

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

АЗЛАРОВ ТУРСУН АБДУРАҲИМОВИЧ,
МАНСУРОВ ХОДЖАКБАР

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

II часть

Учебник для студентов
университетов и пединститутов

Издательство «Ўзбекистон»,
700129 — Ташкент, 1995, Навои, 30.

Бадиий муҳаррир *И. Кученкова*
Техник муҳаррир *А. Горшкова*
Мусаҳҳиҳ *М. Юлдашева*

Теришга берилди 11.01.94. Босишга рухсат этилди 24.02.95. Қоғоз формати $60 \times 90^1/_{16}$. Литературная гарнитурада юқори босма усулида босилди. Шартли бос. т. 27,5. Нашр. т. 29,93. Тиражи 5500. Баҳоси шартнома асосида

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий, 30. Нашр № 286-93.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ижарадаги Тошкент матбаа комбинатида босилди. 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.

Азларов Т., Мансуров Ҳ.

А 36 Математик анализ: Ун-тлар ва пед.ин-тларининг талабалари учун дарслик Қ. 2.— Т.: Ўзбекистон, 1995.—436 б.

ISBN 5-640-01507-1

Ушбу китоб университетлар ҳамда педагогика институтлари, шунингдек, олий техника ўқув юртларининг олий математика фани чуқур дастур асосида ўқитиладиган факультетлари талабалари учун мўлжалланган. Уни ёзишда муаллифлар Тошкент Давлат университетининг математика, амалий математика ва механика факультетларида бир неча йиллар давомида ўқиган лекцияларидан фойдаланганлар.

Китобни ёзишда, бир томондан, математика фанининг тобора янги тушунчалар, янги ғоялар билан бойиб боришига эътибор қаратилган бўлса, иккинчи томондан, математиканинг фан ва техниканинг турли соҳаларига татбиқ доираси кенгайиб бориши ҳисобга олинган.

Китоб анализ курсининг 2-қисми бўлиб, унда кўп ўзгарувчили функциялар дифференциал ва интеграл ҳисоби, функционал қаторлар назарияси ва Фурье қаторлари назарияси батафсил баён этилган.

22.161я73

$$А\frac{1602070000-05}{М\,351\,(04)\,95}\,95$$