Юрко В.А.

Введение в теорию обратных спектральных задач

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.984; 517.927
ББК 22.161.6
Ю 75

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 06-01-14001д

Юрко В. А. **Введение в теорию обратных спектральных задач.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 384 с. — ISBN 5-9221-0734-8.

В книге рассматривается современное состояние теории обратных задач спектрального анализа для обыкновенных дифференциальных уравнений. Представлены основные результаты и методы решения обратных задач как для уравнения Штурма–Лиувилля, так и для дифференциальных уравнений высших порядков и систем дифференциальных уравнений. Материал книги представляет собой переработанное и дополненное изложение курса лекций, читавшегося автором в ряде классических университетов (Саратовский государственный университет (Россия), университет Дуйсбург–Эссен (Германия), Сивасский университет (Турция) и др.).

Для математиков, физиков, инженеров, а также для студентов старших курсов математических, физических и технических специальностей.

Научное издание

ЮРКО Вячеслав Анатольевич

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОБРАТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*
Оригинал-макет: *М.М. Артемьева*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 19.06.06. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 24. Уч.-изд. л. 26,4. Тираж 300 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Московская типография № 6»
115088, г. Москва, Ж-88, ул. Южнопортовая, 24

ISBN 5-9221-0734-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

В книге представлены основные методы и результаты, полученные в теории обратных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных операторов. Обратные задачи спектрального анализа заключаются в определении операторов по некоторым их спектральным характеристикам. Подобные задачи играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют много приложений в механике, физике, электронике, геофизике, метеорологии и других областях естествознания и техники. Интерес к этой тематике постоянно увеличивается благодаря появлению все новых приложений, и в настоящее время теория обратных задач интенсивно развивается во всем мире.

Наиболее полные результаты в спектральной теории дифференциальных операторов и, в частности, в теории обратных задач получены для дифференциального уравнения Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y.$$

Первые исследования в этой области были выполнены Д. Бернулли, Даламбером, Эйлером, Лиувиллем и Штурмом в связи с решением уравнения, описывающего колебания струны. Интенсивное развитие спектральная теория для различных классов операторов получила в XX веке. Глубокие идеи здесь принадлежат Бирхгофу, Вейлю, Гильберту, Нейману, Стеклову, Стоуну и другим математикам. Что касается обратных спектральных задач, то основные результаты и методы здесь получены во второй половине XX века. Отметим работы Билса, Борга, Гасымова, Крейна, Левитана, Левинсона, Лейбензона, Марченко, Сахновича, Фаддеева, Хачатряна и др. (см. исторический обзор в конце книги). Созданные методы позволили решить целый ряд важных прикладных задач в различных областях естествознания и техники. Отметим замечательный метод интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики, связанный с использованием обратных спектральных задач на оси (см. [1, 2, 89, 236, 304]). Много приложений связано также с обратными задачами для дифференциальных уравнений на полуоси и на конечном интервале, для систем дифференциальных уравнений, для дифференциальных уравнений с особенностями и точками поворота, для задач с последействием, для дифференциальных уравнений с нелинейной зависимостью от спектрального параметра, для дифференциальных уравнений на графах и для других классов дифференциальных уравнений.

В настоящей книге изложена теория решения обратных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Материал книги условно можно разбить на две части. В первой части, состоящей из гл. 1, 2, исследуется оператор Штурма–Лиувилля $ly := -y'' + q(x)y$. Используя этот оператор в качестве модельного, мы даем достаточно элементарное и полное введение в теорию обратных задач и описываем ее основные идеи и методы. Эта часть книги доступна для широкого круга читателей — математиков, физиков и инженеров, а также для студентов старших курсов механико-математических, физических и технических специальностей. От читателя требуется знание начал математического анализа и теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Существенно более трудными являются обратные задачи для дифференциальных уравнений высших порядков и для систем дифференциальных уравнений. В гл. 3 излагается теория решения обратных задач для уравнений произвольного порядка n вида

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)} = \lambda y,$$

а гл. 4 посвящена обратным задачам для систем дифференциальных уравнений:

$$Q_0 Y'(x) + Q(x)Y(x) = \rho Y(x),$$

где $Y = [y_k]_{k=\overline{1,n}}$ — вектор-столбец, с произвольным расположением корней характеристического уравнения.

В книге представлены основные методы решения обратных спектральных задач: метод оператора преобразования, метод спектральных отображений, метод эталонных моделей, метод Борга и другие. Метод оператора преобразования сыграл важную роль в спектральной теории операторов Штурма–Лиувилля (см. монографии [173, 164]). Но этот метод оказался неудобным для многих важных классов обратных задач, более сложных, чем обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля. Более универсальным инструментом является метод спектральных отображений, связанный с развитием метода контурного интеграла. Этот метод позволяет исследовать обратные задачи для широкого класса операторов. Изложение метода спектральных отображений является одной из главных целей книги. В частности, основные результаты гл. 3, 4 получены именно этим методом. Для удобства читателей метод спектральных отображений сначала излагается в простейшем варианте для операторов Штурма–Лиувилля (см. §§ 1.4, 2.2). Отметим, что известный в теории обратных задач подход, связанный с использованием задачи Римана (см., например, [30]), фактически является частным случаем метода спектральных отображений. Еще одним методом, применяемым в книге, является так называемый метод эталонных моделей, в котором строится последовательность модельных операторов, аппроксимирующая искомый неизвестный оператор. В методе Борга, изложенном в § 1.6, обратная задача Штурма–Лиувилля сводится к решению специального нелинейного интегрального уравнения, что дает возможность строить локальное решение обратной задачи и исследовать устойчивость ее решения.

Существует обширная литература, посвященная обратным спектральным задачам. Список литературы в конце книги не претендует на полноту. В нем приведены лишь монографии, обзоры и наиболее важные статьи по данной тематике. В конце книги приведен исторический очерк и дан краткий обзор литературы по теории обратных спектральных задач.

Глава 1

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

В этой главе дается введение в спектральную теорию операторов Штурма–Лиувилля на конечном интервале. Параграф 1.1 посвящен так называемым прямым задачам спектрального анализа. Здесь изучаются основные спектральные характеристики краевых задач Штурма–Лиувилля. В частности, доказана теорема о существовании и асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций. Исследуются свойства собственных функций. Доказано, что система собственных функций является полной и образует ортогональный базис в пространстве L_2. Приводится теорема о разложении в равномерной норме. Строятся операторы преобразования, которые являются эффективным инструментом в спектральной теории операторов Штурма–Лиувилля.

Параграфы 1.2–1.7 посвящены теории обратных спектральных задач для операторов Штурма–Лиувилля на конечном интервале. В § 1.2 даются различные постановки обратных задач и доказываются соответствующие теоремы единственности. В §§ 1.3–1.7 излагаются различные методы решения обратных задач. Разнообразие идей этих методов позволяет применять их для многих других более сложных классов операторов. Метод оператора преобразования, в котором обратная задача сводится к решению линейного интегрального уравнения, описан в § 1.3. В § 1.4 представлен метод спектральных отображений, в котором используются идеи метода контурного интеграла. Центральную роль здесь играет так называемое основное уравнение обратной задачи, являющееся линейным уравнением в соответствующем банаховом пространстве. Дается вывод основного уравнения, доказывается его однозначная разрешимость и приводятся явные формулы для решения обратной задачи. В настоящее время метод спектральных отображений представляется наиболее универсальным инструментом в теории обратных задач. Для оператора Штурма–Лиувилля метод спектральных отображений дает те же результаты, что и метод оператора преобразования. Но метод спектральных отображений является более эффективным для многих других классов обратных задач. В § 1.5 излагается метод эталонных моделей, который позволяет строить эффективные алгоритмы для широкого класса обратных задач. Метод локального решения обратной задачи, принадлежащий Боргу, предлагается в § 1.6. В § 1.7 приводится метод решения обратных задач спектрального анализа для дифференциальных операторов на графах.

§ 1.1. Собственные значения и собственные функции

1.1.1. Свойства собственных значений. Рассмотрим следующую краевую задачу $L = L(q(x), h, H)$:

$$\ell y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \tag{1.1.1}$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \tag{1.1.2}$$

Здесь λ — спектральный параметр; $q(x), h$ и H вещественны; $q(x) \in L_2(0, \pi)$. Оператор ℓ называется *оператором Штурма–Лиувилля*, а функцию q мы в дальнейшем будем называть потенциалом.

Нас интересуют нетривиальные решения краевой задачи (1.1.1)–(1.1.2).

Определение 1.1.1. Те значения параметра λ, для которых L имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями*, а соответствующие нетривиальные решения называются *собственными функциями*. Множество собственных значений называется *спектром* L.

В этом пункте мы получим простейшие свойства спектра краевой задачи L и изучим асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций. Заметим, что аналогичные результаты имеют место и для других видов распадающихся краевых условий, а именно:
(i) $U(y) = 0,\ y(\pi) = 0$;
(ii) $y(0) = 0,\ V(y) = 0$;
(iii) $y(0) = y(\pi) = 0$.

Пусть $C(x, \lambda), S(x, \lambda), \varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (1.1.1) при начальных условиях

$$\begin{cases} C(0,\lambda) = 1, & C'(0,\lambda) = 0, \quad S(0,\lambda) = 0, \quad S'(0,\lambda) = 1, \\ \varphi(0,\lambda) = 1, & \varphi'(0,\lambda) = h, \quad \psi(\pi,\lambda) = 1, \quad \psi'(\pi,\lambda) = -H. \end{cases}$$

При каждом фиксированном x функции $\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda), C(x, \lambda), S(x, \lambda)$ являются целыми аналитическими по λ. Ясно, что

$$U(\varphi) := \varphi'(0, \lambda) - h\varphi(0, \lambda) = 0, \ V(\psi) := \psi'(\pi, \lambda) + H\psi(\pi, \lambda) = 0. \tag{1.1.3}$$

Обозначим

$$\Delta(\lambda) = \langle \psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) \rangle, \tag{1.1.4}$$

где $\langle y(x), z(x) \rangle := y(x)z'(x) - y'(x)z(x)$.

Согласно формуле Остроградского–Лиувилля вронскиан $\langle \psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) \rangle$ не зависит от x. Функция $\Delta(\lambda)$ называется *характеристической функцией* краевой задачи L. Подставляя $x = 0$ и $x = \pi$ в (1.1.4), получаем

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi). \tag{1.1.5}$$

Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ и имеет не более счетного множества нулей $\{\lambda_n\}$.

Теорема 1.1.1. *Нули* $\{\lambda_n\}$ *характеристической функции совпадают с собственными значениями краевой задачи* L. *Функции* $\varphi(x,\lambda_n)$ *и* $\psi(x,\lambda_n)$ *являются собственными функциями, и существует последовательность* $\{\beta_n\}$ *такая, что*

$$\psi(x,\lambda_n)=\beta_n\varphi(x,\lambda_n), \quad \beta_n\neq 0. \tag{1.1.6}$$

Доказательство. 1) Пусть λ_0 является нулем функции $\Delta(\lambda)$. Тогда в силу (1.1.3)–(1.1.5) $\psi(x,\lambda_0)=\beta_0\varphi(x,\lambda_0)$, и функции $\psi(x,\lambda_0),\varphi(x,\lambda_0)$ удовлетворяют краевым условиям (1.1.2). Следовательно, λ_0 — собственное значение, а $\psi(x,\lambda_0),\varphi(x,\lambda_0)$ — соответствующие собственные функции.

2) Обратно, пусть λ_0 является собственным значением L, и пусть y_0 — соответствующая собственная функция. Тогда $U(y_0)=V(y_0)=0$. Ясно, что $y_0(0)\neq 0$ (если бы $y_0(0)=0$, то $y_0'(0)=0$, и по теореме единственности решения задачи Коши $y_0(x)\equiv 0$). Без ограничения общности полагаем $y_0(0)=1$. Тогда $y_0'(0)=h$ и, следовательно, $y_0(x)\equiv\equiv\varphi(x,\lambda_0)$. Поэтому (1.1.5) дает: $\Delta(\lambda_0)=V(\varphi(x,\lambda_0))=V(y_0(x))=0$. Мы также доказали, что каждому собственному значению соответствует только одна (с точностью до постоянного множителя) собственная функция. □

Обозначим

$$\alpha_n:=\int\limits_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)\,dx. \tag{1.1.7}$$

Числа $\{\alpha_n\}$ называются *весовыми числами*, а числа $\{\lambda_n,\alpha_n\}$ называются *спектральными данными* краевой задачи L.

Лемма 1.1.1. *Справедливо соотношение*

$$\beta_n\alpha_n=-\dot\Delta(\lambda_n), \tag{1.1.8}$$

где числа β_n *определяются формулой* (1.1.6) *и* $\dot\Delta(\lambda)=\dfrac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$.

Доказательство. Используя (1.1.1), вычисляем

$$\frac{d}{dx}\langle\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda_n)\rangle=(\lambda-\lambda_n)\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)$$

и, следовательно, с учетом (1.1.5) имеем

$$(\lambda-\lambda_n)\int\limits_0^\pi\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)\,dx=\langle\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda_n)\rangle\Big|_0^\pi=-\Delta(\lambda).$$

При $\lambda\to\lambda_n$ это дает

$$\int\limits_0^\pi\psi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\,dx=-\dot\Delta(\lambda_n).$$

Используя (1.1.6) и (1.1.7), приходим к (1.1.8). □

Теорема 1.1.2. *Собственные значения* $\{\lambda_n\}$ *и собственные функции* $\varphi(x,\lambda_n)$ *и* $\psi(x,\lambda_n)$ *— вещественны. Все нули функции* $\Delta(\lambda)$ *являются простыми, т.е.* $\dot{\Delta}(\lambda_n)\neq 0$. *Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в* $L_2(0,\pi)$.

Доказательство. Пусть λ_n и λ_k $(\lambda_n\neq\lambda_k)$ — собственные значения с собственными функциями $y_n(x)$ и $y_k(x)$ соответственно. Интегрирование по частям дает

$$\int_0^\pi \ell y_n(x)\,y_k(x)\,dx=\int_0^\pi y_n(x)\ell y_k(x)\,dx,$$

и, следовательно,

$$\lambda_n\int_0^\pi y_n(x)y_k(x)\,dx=\lambda_k\int_0^\pi y_n(x)y_k(x)\,dx.$$

Так как $\lambda_n\neq\lambda_k$, то имеем

$$\int_0^\pi y_n(x)y_k(x)\,dx=0.$$

Далее, пусть $\lambda^0=u+iv, v\neq 0,$ — невещественное собственное значение с собственной функцией $y^0(x)\not\equiv 0$. Так как $q(x)$, h и H — вещественны, то $\overline{\lambda^0}=u-iv$ также является собственным значением с собственной функцией $\overline{y^0(x)}$. Так как $\lambda^0\neq\overline{\lambda^0}$, то получаем

$$\|y^0\|^2_{L_2}=\int_0^\pi y^0(x)\overline{y^0(x)}\,dx=0,$$

что невозможно. Таким образом, все собственные значения $\{\lambda_n\}$ краевой задачи L вещественны и, следовательно, собственные функции $\varphi(x,\lambda_n)$ и $\psi(x,\lambda_n)$ также вещественны. Так как $\alpha_n\neq 0$, $\beta_n\neq 0$, то в силу (1.1.8) имеем: $\dot{\Delta}(\lambda_n)\neq 0$. □

Пример 1.1.1. Пусть $q(x)\equiv 0$, $h=0$, $H=0$, и пусть $\lambda=\rho^2$. Тогда

$$C(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x,\quad S(x,\lambda)=\frac{\sin\rho x}{\rho},\quad \psi(x,\lambda)=\cos\rho(\pi-x),$$

$$\Delta(\lambda)=-\rho\sin\rho\pi,\quad \lambda_n=n^2(n\geqslant 0),\quad \varphi(x,\lambda_n)=\cos nx,\quad \beta_n=(-1)^n.$$

Лемма 1.1.2. *При* $|\rho|\to\infty$ *верны следующие асимптотические формулы*:

$$\begin{gathered}\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+O\Big(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau|x)\Big)=O(\exp(|\tau|x)),\\ \varphi'(x,\lambda)=-\rho\sin\rho x+O(\exp(|\tau|x))=O(|\rho|\exp(|\tau|x)),\end{gathered}\tag{1.1.9}$$

$$\begin{aligned}\psi(x,\lambda) = {}& \cos\rho(\pi-x) + O\Big(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau|(\pi-x))\Big) = \\ &\qquad\qquad = O(\exp(|\tau|(\pi-x))), \\ \psi'(x,\lambda) = {}& \rho\sin\rho(\pi-x) + O(\exp(|\tau|(\pi-x))) = \\ &\qquad\qquad = O(|\rho|\exp(|\tau|(\pi-x)))\end{aligned} \qquad (1.1.10)$$

равномерно по $x \in [0,\pi]$.

Здесь и в дальнейшем $\lambda = \rho^2$, $\tau = \operatorname{Im}\rho$, а o и O — символы Ландау.

Доказательство. Функция $\varphi(x,\lambda)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра:

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + h\frac{\sin\rho x}{\rho} + \int\limits_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}q(t)\varphi(t,\lambda)\,dt. \qquad (1.1.11)$$

Дифференцируя (1.1.11), вычисляем

$$\varphi'(x,\lambda) = -\rho\sin\rho x + h\cos\rho x + \int\limits_0^x \cos\rho(x-t)q(t)\varphi(t,\lambda)\,dt. \qquad (1.1.12)$$

Обозначим $\mu(\lambda) = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi}(|\varphi(x,\lambda)|\exp(-|\tau|x))$. Так как

$$|\sin\rho x| \leqslant \exp(|\tau|x), \qquad |\cos\rho x| \leqslant \exp(|\tau|x),$$

то из (1.1.11) вытекает, что при $|\rho| \geqslant 1$, $x \in [0,\pi]$ имеет место оценка

$$|\varphi(x,\lambda)|\exp(-|\tau|x) \leqslant 1 + \frac{1}{|\rho|}\Big(h + \mu(\lambda)\int\limits_0^x |q(t)|\,dt\Big) \leqslant C_1 + \frac{C_2}{|\rho|}\mu(\lambda),$$

и, следовательно, $\mu(\lambda) \leqslant C_1 + C_2|\rho|^{-1}\mu(\lambda)$. При достаточно больших $|\rho|$ это дает: $\mu(\lambda) = O(1)$, т. е. $\varphi(x,\lambda) = O(\exp(|\tau|x))$. Подставляя эту оценку в правую часть (1.1.11) и (1.1.12), приходим к (1.1.9). Аналогично получаем (1.1.10). □

Основным результатом этого пункта является следующая теорема о существовании и асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций краевой задачи L.

Теорема 1.1.3. *Краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$. При этом*

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \{\varkappa_n\} \in l_2, \qquad (1.1.13)$$

$$\varphi(x,\lambda_n) = \cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n}, \quad |\xi_n(x)| \leqslant C, \qquad (1.1.14)$$

где

$$\omega = h + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)\,dt.$$

Здесь и в дальнейшем один и тот же символ $\{\varkappa_n\}$ обозначает различные последовательности из l_2, а символ C — различные положительные константы, не зависящие от x, λ и n.

Доказательство. 1). Подставляя асимптотику для $\varphi(x,\lambda)$ из (1.1.9) в правые части (1.1.11) и (1.1.12), вычисляем

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda) &= \cos\rho x + q_1(x)\frac{\sin\rho x}{\rho} + \\ &\qquad + \int\limits_0^x q(t)\frac{\sin\rho(x-2t)}{2\rho}\,dt + O\Big(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^2}\Big),\\ \varphi'(x,\lambda) &= -\rho\sin\rho x + q_1(x)\cos\rho x + \\ &\qquad + \int\limits_0^x q(t)\frac{\cos\rho(x-2t)}{2}\,dt + O\Big(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho}\Big),\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

где

$$q_1(x) = h + \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt.$$

Согласно (1.1.5), $\Delta(\lambda) = \varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda)$. Следовательно, в силу (1.1.15) имеем

$$\Delta(\lambda) = -\rho\sin\rho\pi + \omega\cos\rho\pi + \varkappa(\rho), \tag{1.1.16}$$

где

$$\varkappa(\rho) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)\cos\rho(\pi-2t)\,dt + O\Big(\frac{1}{\rho}\exp(|\tau|\pi)\Big).$$

2). Обозначим $G_\delta = \{\rho : |\rho - k| \geqslant \delta,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$, $\delta > 0$, и покажем, что

$$|\sin\rho\pi| \geqslant C_\delta \exp(|\tau|\pi), \quad \rho \in G_\delta, \tag{1.1.17}$$

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C_\delta|\rho|\exp(|\tau|\pi), \quad \rho \in G_\delta, |\rho| \geqslant \rho^* \tag{1.1.18}$$

при достаточно большом $\rho^* = \rho^*(\delta)$.

Пусть $\rho = \sigma + i\tau$. Достаточно доказать (1.1.17) для области $D_\delta = \{\rho : \ \sigma \in [-1/2, 1/2],\ \tau \geqslant 0,\ |\rho| \geqslant \delta\}$. Положим $\theta(\rho) = |\sin\rho\pi|\exp(-|\tau|\pi)$. Пусть $\rho \in D_\delta$. При $\tau \leqslant 1$ имеем: $\theta(\rho) \geqslant C_\delta$. Так как $\sin\rho\pi = \frac{1}{2i}\Big(\exp(i\rho\pi) - \exp(-i\rho\pi)\Big)$, то при $\tau \geqslant 1$

$$\theta(\rho) = \frac{1}{2}\Big|1 - \exp(2i\sigma\pi)\exp(-2\tau\pi)\Big| \geqslant \frac{1}{4}.$$

Таким образом, (1.1.17) доказано. Далее, используя (1.1.16), для $\rho \in G_\delta$ получаем

$$\Delta(\lambda) = -\rho\sin\rho\pi\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big),$$

и, следовательно, (1.1.18) также доказано.

3). Обозначим $\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = (n+1/2)^2\}$. В силу (1.1.16)

$$\Delta(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda), \quad f(\lambda) = -\rho\sin\rho\pi, \quad |g(\lambda)| \leqslant C\exp(|\tau|\pi).$$

Согласно (1.1.17), $|f(\lambda)| > |g(\lambda)|$, $\lambda \in \Gamma_n$, при достаточно больших n $(n \geqslant n^*)$. Тогда по теореме Руше [206, с. 246] число нулей функции $\Delta(\lambda)$ внутри Γ_n совпадает с числом нулей функции $f(\lambda) = -\rho\sin\rho\pi$, т. е. равно $n+1$. Таким образом, в круге $|\lambda| < (n+1/2)^2$ расположено ровно $n+1$ собственных значений краевой задачи L : $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$. Применяя теперь теорему Руше к кругу $\gamma_n(\delta) = \{\rho : \ |\rho - n| \leqslant \delta\}$, заключаем, что при достаточно больших n в $\gamma_n(\delta)$ лежит ровно один нуль функции $\Delta(\rho^2)$, а именно $\rho_n = \sqrt{\lambda_n}$. В силу произвольности $\delta > 0$ имеем

$$\rho_n = n + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = o(1), \quad n \to \infty. \qquad (1.1.19)$$

Подставляя (1.1.19) в (1.1.16), получаем

$$0 = \Delta(\rho_n^2) = -(n+\varepsilon_n)\sin(n+\varepsilon_n)\pi + \omega\cos(n+\varepsilon_n)\pi + \varkappa_n,$$

и, следовательно,

$$-n\sin\varepsilon_n\pi + \omega\cos\varepsilon_n\pi + \varkappa_n = 0. \qquad (1.1.20)$$

Тогда $\sin\varepsilon_n\pi = O(n^{-1})$, т. е. $\varepsilon_n = O(n^{-1})$. Снова используя (1.1.20), вычисляем более точно: $\varepsilon_n = \dfrac{\omega}{\pi n} + \dfrac{\varkappa_n}{n}$, т. е. (1.1.13) доказано. Подставляя (1.1.13) в (1.1.15), приходим к (1.1.14), где

$$\xi_n(x) = \Big(h + \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt - x\frac{\omega}{\pi} - x\varkappa_n\Big)\sin nx + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\sin n(x-2t)\,dt + O\Big(\frac{1}{n}\Big). \qquad (1.1.21)$$

Следовательно, $|\xi_n(x)| \leqslant C$, и теорема 1.1.3 доказана. □

В силу (1.1.6) при $x = \pi$ имеем: $\beta_n = (\varphi(\pi, \lambda_n))^{-1}$. Тогда, используя (1.1.7), (1.1.8), (1.1.14) и (1.1.21), вычисляем

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \beta_n = (-1)^n + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \dot{\Delta}(\lambda_n) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} + \frac{\varkappa_n}{n}. \quad (1.1.22)$$

Так как функция $\Delta(\lambda)$ имеет только простые нули, то $\operatorname{sign}\dot{\Delta}(\lambda_n) = (-1)^{n+1}$ при всех $n \geqslant 0$.

Через W_2^N обозначим пространство функций $f(x)$, $x \in [0,\pi]$, таких, что функции $f^{(j)}(x)$, $j = \overline{0, N-1}$, абсолютно непрерывны и $f^{(N)}(x) \in L_2(0,\pi)$.

Замечание 1.1.1. Если $q(x) \in W_2^N$, $N \geqslant 1$, то можно получить более точные асимптотические формулы. В частности,

$$\begin{gathered}
\rho_n = n + \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\omega_j}{n^j} + \frac{\varkappa_n}{n^{N+1}}, \qquad \omega_{2p} = 0, \quad p \geqslant 0, \quad \omega_1 = \frac{\omega}{\pi}, \\
\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\omega_j^+}{n^j} + \frac{\varkappa_n}{n^{N+1}}, \qquad \omega_{2p+1}^+ = 0,\ p \geqslant 0, \quad \alpha_n > 0.
\end{gathered} \tag{1.1.23}$$

В самом деле, пусть $q(x) \in W_2^1$. Тогда интегрирование по частям дает

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\cos\rho(x-2t)\,dt = \frac{\sin\rho x}{4\rho}\,(q(x)+q(0)) + \\
+ \frac{1}{4\rho}\int_0^x q'(t)\sin\rho(x-2t)\,dt, \\
\frac{1}{2\rho}\int_0^x q(t)\sin\rho(x-2t)\,dt = \frac{\cos\rho x}{4\rho^2}\,(q(x)-q(0)) - \\
- \frac{1}{4\rho^2}\int_0^x q'(t)\cos\rho(x-2t)dt.
\end{gathered} \tag{1.1.24}$$

Из (1.1.15) и (1.1.24) вытекает

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + \Big(h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\Big)\frac{\sin\rho x}{\rho} + O\Big(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^2}\Big).$$

Подставляя эту асимптотику в правые части формул (1.1.11)–(1.1.12) и используя (1.1.24) и (1.1.5), получаем более точные асимптотические формулы для $\varphi^{(\nu)}(x,\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$, чем (1.1.15)–(1.1.16):

$$\begin{aligned}
\varphi\,(x,\lambda) = {} & \cos\rho x + q_1(x)\frac{\sin\rho x}{\rho} + q_{20}(x)\frac{\cos\rho x}{\rho^2} - \\
& - \int_0^x q'(t)\frac{\cos\rho(x-2t)}{4\rho^2}\,dt + O\Big(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^3}\Big), \\
\varphi'(x,\lambda) = {} & -\rho\sin\rho x + q_1(x)\cos\rho x + q_{21}(x)\frac{\sin\rho x}{\rho} + \\
& + \int_0^x q'(t)\frac{\sin\rho(x-2t)}{4\rho}\,dt + O\Big(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^2}\Big),
\end{aligned}$$

$$\Delta(\lambda) = -\rho\sin\rho\pi + \omega\cos\rho\pi + \omega_0\frac{\sin\rho\pi}{\rho} + \frac{\varkappa_0(\rho)}{\rho}, \tag{1.1.25}$$

где

$$q_1(x) = h + \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt, \quad \omega_0 = q_{21}(\pi) + Hq_1(\pi),$$

$$q_{2j}(x) = \frac{1}{4}\Big(q(x) + (-1)^{j+1}q(0)\Big) + \frac{(-1)^{j+1}}{2}\int\limits_0^x q(t)q_1(t)\,dt, \quad j = 0, 1,$$

$$\varkappa_0(\rho) = \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi q'(t)\sin\rho(\pi - 2t)\,dt + O\left(\frac{\exp(|\tau|\pi)}{\rho}\right).$$

Из (1.1.25) вытекает: $\rho_n = n + \varepsilon_n$, $-n\sin\varepsilon_n\pi + \omega\cos\varepsilon_n\pi + \varkappa_n/n = 0$, и, следовательно,

$$\rho_n = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n^2}, \quad \{\varkappa_n\} \in l_2.$$

Остальные формулы в (1.1.23) получаются аналогично.

Теорема 1.1.4. *Задание спектра* $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ *однозначно определяет характеристическую функцию* $\Delta(\lambda)$ *по формуле*

$$\Delta(\lambda) = \pi(\lambda_0 - \lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}. \tag{1.1.26}$$

Доказательство. Из (1.1.16) вытекает, что $\Delta(\lambda)$ является целой по λ функцией порядка 1/2 и, следовательно, по теореме Адамара [240, с. 259] $\Delta(\lambda)$ однозначно определяется своими нулями с точностью до постоянного множителя:

$$\Delta(\lambda) = C\prod_{n=0}^{\infty}\Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\Big) \tag{1.1.27}$$

(случай, когда $\Delta(0) = 0$ требует небольших изменений). Рассмотрим функцию

$$\widetilde{\Delta}(\lambda) := -\rho\sin\rho\pi = -\lambda\pi\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{\lambda}{n^2}\Big).$$

Тогда

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} = C\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0\pi\lambda}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{\lambda_n - n^2}{n^2 - \lambda}\Big).$$

Учитывая (1.1.13) и (1.1.16), вычисляем

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\Delta(\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)} = 1, \quad \lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{\lambda_n - n^2}{n^2 - \lambda}\Big) = 1,$$

и, следовательно,
$$C = \pi\lambda_0 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^2}.$$

Подставляя это в выражение (1.1.27), приходим к (1.1.26). □

Замечание 1.1.2. Аналогичные результаты верны и для других видов распадающихся краевых условий. Сформулируем здесь кратко результаты, которые будут использоваться ниже. Доказательства могут быть рекомендованы как упражнения.

(i) Рассмотрим краевую задачу $L_1 = L_1(q(x), h)$ для уравнения (1.1.1) с краевыми условиями $U(y) = 0$, $y(\pi) = 0$. Все собственные значения $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ задачи L_1 являются простыми и совпадают с нулями характеристической функции $d(\lambda) := \varphi(\pi, \lambda)$, причем
$$d(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n - \lambda}{(n+1/2)^2}. \tag{1.1.28}$$

Для спектральных данных $\{\mu_n, \alpha_{n1}\}_{n\geqslant 0}$, $\quad \alpha_{n1} := \int_0^\pi \varphi^2(x, \mu_n)\,dx$, задачи L_1 справедливы асимптотические формулы
$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\omega_1}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \{\varkappa_n\} \in l_2, \tag{1.1.29}$$
$$\alpha_{n1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\varkappa_{n1}}{n}, \quad \{\varkappa_{n1}\} \in l_2, \tag{1.1.30}$$
где $\omega_1 = h + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt$.

(ii) Рассмотрим краевую задачу $L^0 = L^0(q(x), H)$ для уравнения (1.1.1) с краевыми условиями $y(0) = 0$, $V(y) = 0$. Все собственные значения $\{\lambda_n^0\}_{n\geqslant 0}$ задачи L^0 являются простыми и совпадают с нулями характеристической функции $\Delta^0(\lambda) := \psi(0, \lambda) = S'(\pi, \lambda) + HS(\pi, \lambda)$. Функция $S(x, \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра:
$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int\limits_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) S(t, \lambda)\,dt, \tag{1.1.31}$$
причем при $|\rho| \to \infty$
$$\begin{gathered} S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + O\Big(\frac{1}{|\rho|^2}\exp(|\tau| x)\Big) = O\Big(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau| x)\Big), \\ S'(x, \lambda) = \cos \rho x + \Big(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau| x)\Big) = O(\exp(|\tau| x)), \\ \Delta^0(\lambda) = \cos \rho\pi + \Big(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau|\pi)\Big), \quad \tau = \operatorname{Im} \rho. \end{gathered} \tag{1.1.32}$$

Кроме того,

$$\Delta^0(\lambda)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^0-\lambda}{(n+1/2)^2},\qquad \sqrt{\lambda_n^0}=n+\frac{1}{2}+\frac{\omega^0}{\pi n}+\frac{\varkappa_n}{n},\quad \{\varkappa_n\}\in l_2,$$

где $\omega^0=H+\dfrac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt$.

(iii) Рассмотрим краевую задачу $L_1^0=L_1^0(q(x))$ для уравнения (1.1.1) с краевыми условиями $y(0)=y(\pi)=0$. Все собственные значения $\{\mu_n^0\}_{n\geqslant 1}$ задачи L_1^0 являются простыми и совпадают с нулями характеристической функции $d^0(\lambda):=S(\pi,\lambda)$, причем

$$d^0(\lambda)=\pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^0-\lambda}{n^2},\qquad \sqrt{\mu_n^0}=n+\frac{\omega_1^0}{\pi n}+\frac{\varkappa_n}{n},\quad \{\varkappa_n\}\in l_2,$$

где $\omega_1^0=\dfrac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt$.

Лемма 1.1.3. *Справедливо соотношение*

$$\lambda_n<\mu_n<\lambda_{n+1},\quad n\geqslant 0, \tag{1.1.33}$$

т.е. собственные значения двух краевых задач L и L_1 перемежаются.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1.1.1, выводим

$$\frac{d}{dx}\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle=(\lambda-\mu)\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\mu), \tag{1.1.34}$$

и, следовательно,

$$(\lambda-\mu)\int_0^\pi\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\mu)\,dx=\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle\Big|_0^\pi=d(\lambda)\Delta(\mu)-d(\mu)\Delta(\lambda).$$

При $\mu\to\lambda$ получаем

$$\int_0^\pi\varphi^2(x,\lambda)dx=\dot d(\lambda)\Delta(\lambda)-d(\lambda)\dot\Delta(\lambda),$$

где $\dot\Delta(\lambda)=\dfrac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$, $\dot d(\lambda)=\dfrac{d}{d\lambda}d(\lambda)$.

В частности, это дает

$$\alpha_n=-\dot\Delta(\lambda_n)d(\lambda_n), \tag{1.1.35}$$

$$\frac{1}{d^2(\lambda)}\int_0^\pi\varphi^2(x,\lambda)\,dx=-\frac{d}{d\lambda}\Big(\frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)}\Big),\qquad -\infty<\lambda<\infty,\qquad d(\lambda)\neq 0.$$

Таким образом, функция $\dfrac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)}$ является монотонно убывающей на $\mathbf{R}\setminus\{\mu_n|\ n\geqslant 0\}$, причем

$$\lim_{\lambda\to\mu_n\pm 0}\frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)}=\pm\infty.$$

Отсюда, в силу (1.1.13) и (1.1.29), приходим к (1.1.33). □

1.1.2. Свойства собственных функций. В этом пункте доказывается, что система собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля L полна и образует ортогональный базис в $L_2(0,\pi)$. Эта теорема была доказана В. А. Стекловым в конце XIX века. Далее приводятся достаточные условия равномерной сходимости ряда по собственным функциям. Теоремы о полноте и о разложении играют важную роль при решении различных задач математической физики методом разделения переменных. Для доказательства этих теорем здесь используется метод контурного интеграла интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра.

Теорема 1.1.5. (i) *Система собственных функций* $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geqslant 0}$ *краевой задачи* L *полна в* $L_2(0,\pi)$.

(ii) *Пусть* $f(x)$, $x\in[0,\pi]$, *— абсолютно непрерывная функция. Тогда*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi(x,\lambda_n),\qquad a_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi}f(t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt,\tag{1.1.36}$$

причем ряд сходится равномерно на $[0,\pi]$.

(iii) *Для* $f(x)\in L_2(0,\pi)$ *ряд* (1.1.36) *сходится в* $L_2(0,\pi)$, *причем имеет место равенство Парсеваля*:

$$\int_0^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n|a_n|^2.\tag{1.1.37}$$

Существует несколько методов доказательства теоремы 1.1.5. Будем использовать здесь метод контурного интеграла, который играет важную роль в исследовании прямых и обратных задач спектрального анализа для многих классов операторов.

Доказательство. 1) Обозначим

$$G(x,t,\lambda)=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases}\varphi(x,\lambda)\psi(t,\lambda), & x\leqslant t,\\ \varphi(t,\lambda)\psi(x,\lambda), & x\geqslant t,\end{cases}$$

и рассмотрим функцию

$$Y(x,\lambda)=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(\psi(x,\lambda)\int_0^x \varphi(t,\lambda)f(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi(t,\lambda)f(t)\,dt\Big).$$

Функция $G(x,t,\lambda)$ называется *функцией Грина* задачи L. Она является ядром интегрального оператора, обратного оператору Штурма–Лиувилля, т. е. функция $Y(x,\lambda)$ дает решение краевой задачи

$$\ell Y-\lambda Y+f(x)=0,\quad U(Y)=V(Y)=0; \tag{1.1.38}$$

это легко проверяется дифференцированием. Учитывая (1.1.6) и используя теорему 1.1.2, вычисляем

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda)=-\frac{1}{\dot\Delta(\lambda_n)}\Big(\psi(x,\lambda_n)\int_0^x \varphi(t,\lambda_n)f(t)\,dt+$$

$$+\varphi(x,\lambda_n)\int_x^\pi \psi(t,\lambda_n)f(t)\,dt\Big)=-\frac{\beta_n}{\dot\Delta(\lambda_n)}\varphi(x,\lambda_n)\int_0^\pi f(t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt.$$

В силу (1.1.8) имеем

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda)=\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\int_0^\pi f(t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt. \tag{1.1.39}$$

2) Пусть функция $f(x)\in L_2(0,\pi)$ такова, что

$$\int_0^\pi f(t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt=0,\quad n\geqslant 0.$$

Тогда с учетом (1.1.39) получаем $\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda)=0$, и, следовательно, при каждом фиксированном $x\in[0,\pi]$ функция $Y(x,\lambda)$ является целой по λ. Далее, из (1.1.9), (1.1.10) и (1.1.18) вытекает, что при фиксированном $\delta>0$ и достаточно большом $\rho^*>0$

$$|Y(x,\lambda)|\leqslant\frac{C_\delta}{|\rho|},\quad \rho\in G_\delta,\ |\rho|\geqslant\rho^*.$$

Используя принцип максимума модуля для аналитических функций [206, с. 204] и теорему Лиувилля [206, с. 209], заключаем, что $Y(x,\lambda)\equiv 0$. Отсюда и из (1.1.38) следует, что $f(x)=0$ п. в. на $(0,\pi)$. Таким образом, утверждение (i) доказано.

3) Пусть теперь $f(x) \in AC[0,\pi]$ — произвольная абсолютно непрерывная функция. Так как $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ — решения уравнения (1.1.1), то функцию $Y(x,\lambda)$ можно преобразовать к виду

$$Y(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda\Delta(\lambda)}\Big(\psi(x,\lambda)\int\limits_0^x(-\varphi''(t,\lambda)+q(t)\varphi(t,\lambda))f(t)\,dt + \\ + \varphi(x,\lambda)\int\limits_x^\pi(-\psi''(t,\lambda)+q(t)\psi(t,\lambda))f(t)\,dt\Big).$$

Интегрирование по частям слагаемых со вторыми производными с учетом (1.1.4) дает

$$Y(x,\lambda) = \frac{f(x)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\Big(Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\Big), \tag{1.1.40}$$

где

$$Z_1(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(\psi(x,\lambda)\int\limits_0^x g(t)\varphi'(t,\lambda)\,dt + \\ + \varphi(x,\lambda)\int\limits_x^\pi g(t)\psi'(t,\lambda)\,dt\Big), \quad g(t) := f'(t),$$

$$Z_2(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(hf(0)\psi(x,\lambda) + Hf(\pi)\varphi(x,\lambda) + \\ + \psi(x,\lambda)\int\limits_0^x q(t)\varphi(t,\lambda)f(t))dt + \varphi(x,\lambda)\int\limits_x^\pi q(t)\psi(t,\lambda)f(t))\,dt\Big).$$

Используя (1.1.9), (1.1.10) и (1.1.18), получаем при фиксированном $\delta > 0$ и достаточно большом $\rho^* > 0:$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|Z_2(x,\lambda)| \leqslant \frac{C}{|\rho|}, \quad \rho\in G_\delta, \quad |\rho|\geqslant\rho^*. \tag{1.1.41}$$

Покажем, что

$$\lim_{\substack{|\rho|\to\infty\\ \rho\in G_\delta}}\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|Z_1(x,\lambda)| = 0. \tag{1.1.42}$$

Предположим сначала, что функция $g(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,\pi]$. В этом случае интегрирование по частям дает

$$Z_1(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(\psi(x,\lambda)g(t)\varphi(t,\lambda)\Big|_0^x + \varphi(x,\lambda)g(t)\psi(t,\lambda)\Big|_x^\pi - \\ - \psi(x,\lambda)\int\limits_0^x g'(t)\varphi(t,\lambda)\,dt - \varphi(x,\lambda)\int\limits_x^\pi g'(t)\psi(t,\lambda)\,dt\Big).$$

В силу (1.1.9), (1.1.10) и (1.1.18) получаем

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|Z_1(x,\lambda)|\leqslant\frac{C}{|\rho|},\quad \rho\in G_\delta,\quad |\rho|\geqslant\rho^*.$$

Пусть теперь $g(t)\in L(0,\pi)$. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и выберем абсолютно непрерывную функцию $g_\varepsilon(t)$ так, чтобы

$$\int\limits_0^\pi|g(t)-g_\varepsilon(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{2C^+},$$

где

$$C^+=\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}\sup_{\rho\in G_\delta}\frac{1}{|\Delta(\lambda)|}\Bigl(|\psi(x,\lambda)|\int\limits_0^x|\varphi'(t,\lambda)|\,dt+|\varphi(x,\lambda)|\int\limits_x^\pi|\psi'(t,\lambda)|\,dt\Bigr).$$

Тогда при $\rho\in G_\delta$, $|\rho|\geqslant\rho^*$, имеем

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|Z_1(x,\lambda)|\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|Z_1(x,\lambda;g_\varepsilon)|+ \\ +\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|Z_1(x,\lambda;g-g_\varepsilon)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{C(\varepsilon)}{|\rho|}.$$

Следовательно, существует $\rho^0>0$ такое, что $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi}|Z_1(x,\lambda)|\leqslant\varepsilon$ при $|\rho|>\rho^0$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ приходим к (1.1.42).

Рассмотрим контурный интеграл

$$I_N(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N}Y(x,\lambda)\,d\lambda,$$

где $\Gamma_N=\{\lambda:\ |\lambda|=(N+1/2)^2\}$ (с обходом против часовой стрелки). Из (1.1.40)–(1.1.42) вытекает

$$I_N(x)=f(x)+\varepsilon_N(x),\qquad \lim_{N\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|\varepsilon_N(x)|=0. \tag{1.1.43}$$

С другой стороны, можно вычислить $I_N(x)$ с помощью теоремы о вычетах [206, с. 239]. В силу (1.1.39) имеем

$$I_N(x)=\sum_{n=0}^N a_n\varphi(x,\lambda_n),\qquad a_n=\frac{1}{\alpha_n}\int\limits_0^\pi f(t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt.$$

Сравнивая это выражение с (1.1.43), приходим к (1.1.36), причем ряд сходится равномерно на $[0,\pi]$, т. е. утверждение (ii) доказано.

4) Система собственных функций $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geqslant0}$ полна и ортогональна в $L_2(0,\pi)$, поэтому она образует ортогональный базис в $L_2(0,\pi)$ и справедливо равенство Парсеваля (1.1.37). □

1.1.3. Операторы преобразования. Важную роль в теории обратных задач для операторов Штурма–Лиувилля играют так называемые операторы преобразования. Они связывают решения двух различных уравнений Штурма–Лиувилля при всех λ. В этом пункте мы строим операторы преобразования и изучаем их свойства. Отметим, что операторы преобразования впервые появились в теории операторов обобщенного сдвига Дельсарта и Левитана (см. [163]). Операторы преобразования для произвольных уравнений Штурма–Лиувилля были построены Повзнером [204]. В теории решения обратных задач операторы преобразования использовались Гельфандом, Левитаном и Марченко (см. § 1.3 и монографии [173, 164]).

Теорема 1.1.6. *Для функции $C(x,\lambda)$ имеет место представление*

$$C(x,\lambda)=\cos\rho x+\int_0^x K(x,t)\cos\rho t\,dt,\qquad \lambda=\rho^2, \tag{1.1.44}$$

где $K(x,t)$ — вещественная непрерывная функция, причем

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt. \tag{1.1.45}$$

Доказательство. Из (1.1.11) при $h=0$ вытекает, что функция $C(x,\lambda)$ является решением следующего интегрального уравнения:

$$C(x,\lambda)=\cos\rho x+\int_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}q(t)C(t,\lambda)\,dt. \tag{1.1.46}$$

Так как

$$\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}=\int_t^x \cos\rho(s-t)\,ds,$$

то (1.1.46) принимает вид

$$C(x,\lambda)=\cos\rho x+\int_0^x q(t)C(t,\lambda)\Big(\int_t^x \cos\rho(s-t)\,ds\Big)\,dt,$$

и, следовательно,

$$C(x,\lambda)=\cos\rho x+\int_0^x\Big(\int_0^t q(\tau)C(\tau,\lambda)\cos\rho(t-\tau)\,d\tau\Big)\,dt.$$

Метод последовательных приближений дает

$$C(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x,\lambda), \tag{1.1.47}$$

$C_0(x,\lambda)=\cos\rho x,\ \ C_{n+1}(x,\lambda)=$

$$=\int_0^x\Big(\int_0^t q(\tau)C_n(\tau,\lambda)\cos\rho(t-\tau)\,d\tau\Big)dt. \tag{1.1.48}$$

Покажем по индукции, что

$$C_n(x,\lambda)=\int_0^x K_n(x,t)\cos\rho t\,dt, \tag{1.1.49}$$

где функции $K_n(x,t)$ не зависят от λ.

Вычислим сначала $C_1(x,\lambda)$, используя соотношение $\cos\alpha\cos\beta=$ $=\dfrac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\Big)$:

$$C_1(x,\lambda)=\int_0^x\Big(\int_0^t q(\tau)\cos\rho\tau\cos\rho(t-\tau)\,d\tau\Big)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x\cos\rho t\Big(\int_0^t q(\tau)\,d\tau\Big)\,dt+\frac{1}{2}\int_0^x\Big(\int_0^t q(\tau)\cos\rho(t-2\tau)\,d\tau\Big)\,dt.$$

Замена переменных $t-2\tau=s$ во втором интеграле дает

$$C_1(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^x\cos\rho t\Big(\int_0^t q(\tau)\,d\tau\Big)\,dt+\frac{1}{4}\int_0^x\Big(\int_{-t}^t q\Big(\frac{t-s}{2}\Big)\cos\rho s\,ds\Big)\,dt.$$

Меняя порядок интегрирования во втором интеграле, получаем

$$C_1(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^x\cos\rho t\Big(\int_0^t q(\tau)\,d\tau\Big)\,dt+\frac{1}{4}\int_0^x\cos\rho s\Big(\int_s^x q\Big(\frac{t-s}{2}\Big)\,dt\Big)\,ds+$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-x}^0\cos\rho s\Big(\int_{-s}^x q\Big(\frac{t-s}{2}\Big)\,dt\Big)\,ds=\frac{1}{2}\int_0^x\cos\rho t\Big(\int_0^t q(\tau)\,d\tau\Big)\,dt+$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^x\cos\rho s\Big(\int_s^x\Big(q\Big(\frac{t-s}{2}\Big)+q\Big(\frac{t+s}{2}\Big)\Big)\,dt\Big)\,ds.$$

Таким образом, (1.3.6) верно при $n = 1$, где

$$K_1(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t q(\tau)\,d\tau + \frac{1}{4}\int\limits_t^x \Big(q\Big(\frac{s-t}{2}\Big) + q\Big(\frac{s+t}{2}\Big)\Big)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)\,d\xi, \quad t \leqslant x. \quad (1.1.50)$$

Предположим теперь, что (1.1.49) верно при некотором $n \geqslant 1$. Тогда, подставляя (1.1.49) в (1.1.48), вычисляем

$$C_{n+1}(x,\lambda) = \int\limits_0^x\int\limits_0^t q(\tau)\cos\rho(t-\tau)\int\limits_0^\tau K_n(\tau,s)\cos\rho s\,ds\,d\tau\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^x\int\limits_0^t q(\tau)\int\limits_0^\tau K_n(\tau,s)(\cos\rho(s+t-\tau) + \cos\rho(s-t+\tau))\,ds\,d\tau\,dt.$$

Замены переменных $s+t-\tau = \xi$ и $s-t+\tau = \xi$ соответственно приводят к равенству

$$C_{n+1}(x,\lambda) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x\int\limits_0^t q(\tau)\int\limits_{t-\tau}^{t} K_n(\tau,\xi+\tau-t)\cos\rho\xi\,d\xi\,d\tau\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^x\int\limits_0^t q(\tau)\int\limits_{\tau-t}^{2\tau-t} K_n(\tau,\xi+t-\tau)\cos\rho\xi\,d\xi\,d\tau\,dt.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$C_{n+1}(x,\lambda) = \int\limits_0^x K_{n+1}(x,t)\cos\rho t\,dt,$$

где

$$K_{n+1}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_t^x\Big(\int\limits_{\xi-t}^{\xi} q(\tau)K_n(\tau,t+\tau-\xi)\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} q(\tau)K_n(\tau,t-\tau+\xi)\,d\tau + \int\limits_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi-t} q(\tau)K_n(\tau,-t-\tau+\xi)\,d\tau\Big)\,d\xi. \quad (1.1.51)$$

Подставляя (1.1.49) в (1.1.47), приходим к (1.1.44), где

$$K(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n(x,t). \tag{1.1.52}$$

Из (1.1.50) и (1.1.51) вытекает

$$|K_n(x,t)|\leqslant (Q(x))^n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},\qquad Q(x):=\int\limits_0^x|q(\xi)|\,d\xi.$$

В самом деле, (1.1.50) при $t\leqslant x$ дает

$$|K_1(x,t)|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x+t}{2}}|q(\xi)|\,d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}|q(\xi)|\,d\xi\leqslant\int\limits_0^x|q(\xi)|\,d\xi=Q(x).$$

Далее, если при некотором $n\geqslant 1$ оценка для $|K_n(x,t)|$ верна, то в силу (1.1.51) имеем

$$|K_{n+1}(x,t)|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_t^x\Bigg(\int\limits_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi}|q(\tau)|(Q(\tau))^n\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi}|q(\tau)|(Q(\tau))^n\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau\Bigg)\,d\xi\leqslant\int\limits_0^x\int\limits_0^{\xi}|q(\tau)|(Q(\tau))^n\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^x(Q(\xi))^{n+1}\frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\,d\xi\leqslant(Q(x))^{n+1}\frac{x^n}{n!}\,.$$

Таким образом, ряд (1.1.52) сходится абсолютно и равномерно при $0\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi$ и функция $K(x,t)$ является непрерывной. Более того, из (1.1.50)–(1.1.52) следует, что гладкость функции $K(x,t)$ совпадает с гладкостью функции $\int_0^x q(t)\,dt$. Так как согласно (1.1.50), (1.1.51)

$$K_1(x,x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt,\qquad K_{n+1}(x,x)=0,\qquad n\geqslant 1,$$

то приходим к (1.1.45). ☐

Оператор T, определяемый формулой $Tf(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t)f(t)\,dt$, отображает функцию $\cos\rho x$, которая является решением уравнения $-y''=\lambda y$ с нулевым потенциалом, в функцию $C(x,\lambda)$, которая является решением уравнения (1.1.1) с некоторым потенциалом $q(x)$ (т. е. $C(x,\lambda)=T(\cos\rho x)$). Оператор T называется *оператором преобразования* для $C(x,\lambda)$. Важно, что ядро $K(x,t)$ не зависит от λ.

Аналогично можно получить операторы преобразования для $S(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$.

Теорема 1.1.7. *Для функций $S(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ имеют место представления*

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int\limits_0^x P(x,t)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,dt, \tag{1.1.53}$$

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + \int\limits_0^x G(x,t)\cos\rho t\,dt, \tag{1.1.54}$$

где $P(x,t)$ и $G(x,t)$ — вещественные непрерывные функции с той же гладкостью, что и функция $\int_0^x q(t)\,dt$, причем

$$G(x,x) = h + \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt, \tag{1.1.55}$$

$$P(x,x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt. \tag{1.1.56}$$

Доказательство. Функция $S(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (1.1.31), и, следовательно,

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int\limits_0^x\int\limits_0^t q(\tau)S(\tau,\lambda)\cos\rho(t-\tau)\,d\tau\,dt.$$

Метод последовательных приближений дает

$$S(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x,\lambda), \tag{1.1.57}$$

$$S_0(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho}, \qquad S_{n+1}(x,\lambda) = \int\limits_0^x\int\limits_0^t q(\tau)S_n(\tau,\lambda)\cos\rho(t-\tau)\,d\tau\,dt.$$

Действуя так же, как и при доказательстве теоремы 1.1.6, получаем следующее представление:

$$S_n(x,\lambda) = \int\limits_0^x P_n(x,t)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,dt,$$

где

$$P_1(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)\,d\xi,$$

$$P_{n+1}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_t^x\Bigl(\int\limits_{\xi-t}^{\xi} q(\tau)P_n(\tau, t+\tau-\xi)\,d\tau + \\ + \int\limits_{\frac{\xi+t}{2}}^{\xi} q(\tau)P_n(\tau, t-\tau+\xi)\,d\tau - \int\limits_{\frac{\xi-t}{2}}^{\xi-t} q(\tau)P_n(\tau, -t-\tau+\xi)\,d\tau\Bigr)\,d\xi,$$

причем

$$|P_n(x,t)| \leqslant (Q(x))^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad Q(x) := \int\limits_0^x |q(\xi)|\,d\xi.$$

Следовательно, ряд (1.1.57) сходится абсолютно и равномерно при $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant \pi$, и мы приходим к (1.1.53) и (1.1.56).

Соотношение (1.1.54) может быть получено прямо из (1.1.44) и (1.1.53):

$$\varphi(x,\lambda) = C(x,\lambda) + hS(x,\lambda) = \\ \cos\rho x + \int\limits_0^x K(x,t)\cos\rho t\,dt + h\int\limits_0^x \cos\rho t\,dt + \\ + h\int\limits_0^x P(x,t)\Bigl(\int\limits_0^t \cos\rho\tau\,d\tau\Bigr)\,dt = \cos\rho x + \int\limits_0^x G(x,t)\cos\rho t\,dt,$$

где

$$G(x,t) = K(x,t) + h + h\int\limits_t^x P(x,\tau)\,d\tau.$$

Полагая здесь $t = x$, приходим к (1.1.55). □

§ 1.2. Постановка обратных задач. Теоремы единственности

Перейдем теперь к обратным задачам спектрального анализа. В этом параграфе даются различные постановки обратных задач и доказываются соответствующие теоремы единственности. Мы рассмотрим несколько методов доказательства этих теорем. Эти методы имеют широкую область применения и позволяют исследовать различные классы обратных спектральных задач.

1.2.1. Теорема Амбарцумяна. Первый результат в теории обратных спектральных задач принадлежит Амбарцумяну [13]. Рассмотрим краевую задачу $L(q(x), 0, 0)$, т. е.

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0. \tag{1.2.1}$$

Ясно, что если $q(x) = 0$ п. в. на $(0, \pi)$, то собственные значения задачи (1.2.1) имеют вид: $\lambda_n = n^2$, $n \geqslant 0$. Амбарцумян доказал обратное утверждение.

Теорема 1.2.1. *Если собственные значения задачи* (1.2.1) *суть* $\lambda_n = n^2$, $n \geqslant 0$, *то* $q(x) = 0$ *п. в. на* $(0, \pi)$.

Доказательство. Из (1.1.13) вытекает, что $\omega = 0$, т. е. $\int_0^\pi q(x)\,dx = 0$. Пусть $y_0(x)$ — собственная функция для наименьшего собственного значения $\lambda_0 = 0$. Тогда $y_0''(x) - q(x)y_0(x) = 0$, $y_0'(0) = y_0'(\pi) = 0$. Согласно теореме Штурма об осцилляции, функция $y_0(x)$ не имеет нулей в интервале $x \in [0, \pi]$. Учитывая соотношение

$$\frac{y_0''(x)}{y_0(x)} = \left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)}\right)^2 + \left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)}\right)',$$

получаем

$$0 = \int_0^\pi q(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{y_0''(x)}{y_0(x)}\,dx = \int_0^\pi \left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)}\right)^2 dx.$$

Таким образом, $y_0'(x) \equiv 0$, т. е. $y_0(x) \equiv \text{const}$, $q(x) = 0$ п. в. на $(0, \pi)$. □

Замечание 1.2.1. На самом деле мы доказали более общее, чем теорема 1.2.1, утверждение, а именно:

Если $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)\,dx$, *то* $q(x) = \lambda_0$ *п. в. на* $(0, \pi)$.

1.2.2. Единственность восстановления дифференциального уравнения по спектральным данным. Результат Амбарцумяна является исключением из правил. Вообще говоря, задание спектра не определяет оператор однозначно. В пп. 1.2.2–1.2.4 приведены три теоремы единственности, в которых указаны спектральные характеристики, однозначно определяющие оператор.

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1.2.1. По заданным спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geqslant 0}$ построить потенциал $q(x)$ и коэффициенты h и H.

Целью этого пункта является доказательство теоремы единственности решения задачи 1.2.1.

Условимся, что наряду с L рассматривается краевая задача $\widetilde{L} = L(\widetilde{q}(x), \widetilde{h}, \widetilde{H})$ того же вида, но с другими коэффициентами. Если некоторый символ обозначает объект, относящийся к задаче L, то символ $\widetilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\widetilde{L}$, а $\widehat{\gamma} := \gamma - \widetilde{\gamma}$.

Теорема 1.2.2. *Если* $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$, $\alpha_n = \widetilde{\alpha}_n$, $n \geqslant 0$, *то* $L = \widetilde{L}$, *т.е.* $q(x) = \widetilde{q}(x)$ *п.в. на* $(0, \pi)$, $h = \widetilde{h}$ *и* $H = \widetilde{H}$. *Таким образом, задание спектральных данных* $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *однозначно определяет потенциал и коэффициенты краевых условий.*

Мы дадим два доказательства теоремы 1.2.2. Первое принадлежит Марченко 176 и использует оператор преобразования и равенство Парсеваля (1.1.37). Метод Марченко работает также и для операторов Штурма–Лиувилля на полуоси и позволяет доказать теорему единственности восстановления оператора по его спектральной функции. Второй метод принадлежит Левинсону [162] и опирается на метод контурного интеграла. Отметим, что Левинсон первым применил идеи метода контурного интеграла к исследованию обратных спектральных задач. В § 1.4 будет дано развитие этих идей для конструктивного решения обратной задачи.

Доказательство (Марченко). Согласно (1.1.54) имеем

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \rho x + \int_0^x G(x, t) \cos \rho t \, dt, \quad \widetilde{\varphi}(x, \lambda) = \cos \rho x + \int_0^x \widetilde{G}(x, t) \cos \rho t \, dt.$$

Другими словами, $\varphi(x, \lambda) = (E + G) \cos \rho x$, $\widetilde{\varphi}(x, \lambda) = (E + \widetilde{G}) \cos \rho x$, где

$$(E+G)f(x) = f(x) + \int_0^x G(x, t) f(t) \, dt, \quad (E+\widetilde{G})f(x) = f(x) + \int_0^x \widetilde{G}(x, t) f(t) \, dt.$$

Разрешая соотношение $\widetilde{\varphi}(x, \lambda) = (E + \widetilde{G}) \cos \rho x$ относительно $\cos \rho x$, находим

$$\cos \rho x = \widetilde{\varphi}(x, \lambda) + \int_0^x \widetilde{H}(x, t) \widetilde{\varphi}(t, \lambda) \, dt,$$

где $\widetilde{H}(x, t)$ — непрерывная функция, которая является ядром обратного оператора:

$$(E + \widetilde{H}) = (E + \widetilde{G})^{-1}, \quad \widetilde{H} f(x) = \int_0^x \widetilde{H}(x, t) f(t) \, dt.$$

Следовательно,

$$\varphi(x, \lambda) = \widetilde{\varphi}(x, \lambda) + \int_0^x Q(x, t) \widetilde{\varphi}(t, \lambda) \, dt, \tag{1.2.2}$$

где $Q(x, t)$ — вещественная непрерывная функция.

Пусть $f(x) \in L_2(0, \pi)$. Из (1.2.2) вытекает

$$\int_0^\pi f(x) \varphi(x, \lambda) \, dx = \int_0^\pi g(x) \widetilde{\varphi}(x, \lambda) \, dx, \quad g(x) := f(x) + \int_x^\pi Q(t, x) f(t) \, dt.$$

Поэтому при всех $n \geqslant 0$ имеем

$$a_n = \widetilde{b}_n, \quad a_n := \int_0^\pi f(x)\varphi(x,\lambda_n)\,dx, \quad \widetilde{b}_n := \int_0^\pi g(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda_n)\,dx.$$

Используя равенство Парсеваля (1.1.37), вычисляем

$$\int_0^\pi |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{|a_n|^2}{\alpha_n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{|\widetilde{b}_n|^2}{\alpha_n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{|\widetilde{b}_n|^2}{\widetilde{\alpha}_n} = \int_0^\pi |g(x)|^2\,dx,$$

т. е.

$$\|f\|_{L_2} = \|g\|_{L_2}. \tag{1.2.3}$$

Рассмотрим оператор $Af(x) = f(x) + \int_x^\pi Q(t,x)f(t)\,dt$. Тогда $Af = g$. В силу (1.2.3) $\|Af\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$ при всех $f(x) \in L_2(0,\pi)$. Следовательно, $A^* = A^{-1}$, что возможно лишь при $Q(x,t) \equiv 0$. Таким образом, $\varphi(x,\lambda) \equiv \widetilde{\varphi}(x,\lambda)$, т. е. $q(x) = \widetilde{q}(x)$ п. в. на $(0,\pi)$, $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$.

Доказательство (Левинсона). Пусть $f(x)$, $x \in [0,\pi]$, — некоторая абсолютно непрерывная функция. Рассмотрим функцию

$$Y^0(x,\lambda) = -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(\psi(x,\lambda)\int_0^x f(t)\widetilde{\varphi}(t,\lambda)\,dt + \varphi(x,\lambda)\int_x^\pi f(t)\widetilde{\psi}(t,\lambda)\,dt\Big)$$

и контурный интеграл

$$I_N^0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} Y^0(x,\lambda)\,d\lambda.$$

Используемая здесь техника взята из доказательства теоремы 1.1.5 о разложении, но здесь функция $Y^0(x,\lambda)$ строится по решениям двух краевых задач. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1.1.5, вычисляем

$$Y^0(x,\lambda) = \frac{f(x)}{\lambda} - \frac{Z^0(x,\lambda)}{\lambda},$$

где

$$Z^0(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big\{f(x)[\varphi(x,\lambda)(\widetilde{\psi}'(x,\lambda) - \psi'(x,\lambda)) - \psi(x,\lambda)(\widetilde{\varphi}'(x,\lambda) -$$
$$- \varphi'(x,\lambda))] + \widetilde{h}f(0)\psi(x,\lambda) + \widetilde{H}f(\pi)\varphi(x,\lambda) + \psi(x,\lambda)\int_0^x (\widetilde{\varphi}'(t,\lambda)f'(t) +$$
$$+ \widetilde{q}(t)\widetilde{\varphi}(t,\lambda)f(t))\,dt + \varphi(x,\lambda)\int_x^\pi (\widetilde{\psi}'(t,\lambda)f'(t) + \widetilde{q}(t)\widetilde{\psi}(t,\lambda)f(t))\,dt\Big\}.$$

Асимптотические свойства функций $\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ и $\widetilde{\psi}(x,\lambda)$ те же, что и у функций $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$. Поэтому теми же рассуждениями, что и при доказательстве теоремы 1.1.5, получаем

$$I_N^0(x) = f(x) + \varepsilon_N^0(x), \quad \lim_{N\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant\pi} |\varepsilon_N^0(x)| = 0.$$

С другой стороны, интеграл $I_N^0(x)$ можно вычислить с помощью теоремы о вычетах:

$$I_N^0(x) = \sum_{n=0}^{N} \Bigl(-\frac{1}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\Bigr)\Bigl(\psi(x,\lambda_n)\int_0^x f(t)\widetilde{\varphi}(t,\lambda_n)\,dt + \\ + \varphi(x,\lambda_n)\int_x^\pi f(t)\widetilde{\psi}(t,\lambda_n)\,dt\Bigr).$$

Из леммы 1.1.1 и теоремы 1.1.4 вытекает, что при условиях теоремы 1.2.2 $\beta_n = \widetilde{\beta}_n$. Следовательно,

$$I_N^0(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\int_0^\pi f(t)\widetilde{\varphi}(t,\lambda_n)\,dt.$$

При $N\to\infty$ имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\int_0^\pi f(t)\widetilde{\varphi}(t,\lambda_n)\,dt.$$

Вместе с (1.1.36) это дает

$$\int_0^\pi f(t)(\varphi(t,\lambda_n) - \widetilde{\varphi}(t,\lambda_n))\,dt = 0.$$

В силу произвольности функции $f(x)$ заключаем, что $\varphi(x,\lambda_n) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda_n)$ при всех $n \geqslant 0$ и $x \in [0,\pi]$. Следовательно, $q(x) = \widetilde{q}(x)$ п. в. на $(0,\pi)$, $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$. □

Симметричный случай. Пусть $q(x) = q(\pi - x)$, $H = h$. В этом случае для определения потенциала $q(x)$ и коэффициента h достаточно задать только спектр $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$.

Теорема 1.2.3. *Если* $q(x) = q(\pi - x)$, $H = h$, $\widetilde{q}(x) = \widetilde{q}(\pi - x)$, $\widetilde{H} = \widetilde{h}$ *и* $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$, $n \geqslant 0$, *то* $q(x) = \widetilde{q}(x)$ *п. в. на* $(0,\pi)$ *и* $h = \widetilde{h}$.

Доказательство. Если $q(x) = q(\pi - x)$, $H = h$ и $y(x)$ — некоторое решение уравнения (1.1.1), то $y_1(x) := y(\pi - x)$ также удовлетворяет (1.1.1). В частности, имеем: $\psi(x,\lambda) = \varphi(\pi - x,\lambda)$. Используя (1.1.6), вычисляем

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n) = \beta_n\psi(\pi - x,\lambda_n) = \beta_n^2\varphi(\pi - x,\lambda_n) = \beta_n^2\psi(x,\lambda_n).$$

Следовательно, $\beta_n^2 = 1$. С другой стороны, из (1.1.6) вытекает, что $\beta_n \varphi(\pi, \lambda_n) = 1$. Применяя теорему Штурма об осцилляции, заключаем, что $\beta_n = (-1)^n$. Тогда (1.1.8) дает: $\alpha_n = (-1)^{n+1}\dot{\Delta}(\lambda_n)$. При условиях теоремы 1.2.3 получаем, что $\alpha_n = \widetilde{\alpha}_n$, $n \geqslant 0$, и по теореме 1.2.2 $q(x) = \widetilde{q}(x)$ п. в. на $(0, \pi)$ и $h = \widetilde{h}$. $\square$

1.2.3. Единственность восстановления дифференциального уравнения по двум спектрам. Борг [44] предложил иную постановку обратной задачи: восстановить дифференциальный оператор по двум спектрам краевых задач с общим дифференциальным уравнением и одним общим краевым условием. Для определенности пусть общим является краевое условие в точке $x = 0$.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ и $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ — собственные значения краевых задач L и L_1 соответственно (L_1 определена в замечании 1.1.2). Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1.2.2. По заданным двум спектрам $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ и $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ построить потенциал $q(x)$ и коэффициенты h и H в краевых условиях.

Целью этого пункта является доказательство теоремы единственности решения задачи 1.2.2.

Теорема 1.2.4. *Если* $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$, $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$, $n \geqslant 0$, *то* $q(x) = \widetilde{q}(x)$ *п. в. на* $(0, \pi)$, $h = \widetilde{h}$ *и* $H = \widetilde{H}$. *Таким образом, задание двух спектров* $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geqslant 0}$ *однозначно определяет потенциал и коэффициенты краевых условий.*

Доказательство. В силу (1.1.26) и (1.1.28) характеристические функции $\Delta(\lambda)$ и $d(\lambda)$ однозначно определяются своими нулями, т. е. при условиях теоремы 1.2.4 имеем

$$\Delta(\lambda) \equiv \widetilde{\Delta}(\lambda), \quad d(\lambda) \equiv \widetilde{d}(\lambda).$$

Кроме того, из (1.1.13) и (1.1.29) вытекает

$$H = \widetilde{H}, \quad \widehat{h} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \widehat{q}(x)\,dx = 0, \tag{1.2.4}$$

где $\widehat{h} = h - \widetilde{h}$, $\widehat{q}(x) = q(x) - \widetilde{q}(x)$. Следовательно,

$$\varphi(\pi, \lambda) = \widetilde{\varphi}(\pi, \lambda), \quad \varphi'(\pi, \lambda) = \widetilde{\varphi}'(\pi, \lambda). \tag{1.2.5}$$

Так как $-\varphi''(x, \lambda) + q(x)\varphi(x, \lambda) = \lambda\varphi(x, \lambda)$, $-\widetilde{\varphi}''(x, \lambda) + \widetilde{q}(x)\widetilde{\varphi}(x, \lambda) = \lambda\widetilde{\varphi}(x, \lambda)$, то

$$\int_0^\pi \widehat{q}(x)\varphi(x, \lambda)\widetilde{\varphi}(x, \lambda)\,dx = \Big|_0^\pi (\varphi'(x, \lambda)\widetilde{\varphi}(x, \lambda) - \varphi(x, \lambda)\widetilde{\varphi}'(x, \lambda)),$$

$$\widehat{q} := q - \widetilde{q}.$$

Учитывая (1.2.4) и (1.2.5), вычисляем

$$\int_0^\pi \widehat{q}(x)\Big(\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\frac{1}{2}\Big)\,dx=0. \tag{1.2.6}$$

Покажем, что (1.2.6) влечет $\widehat{q}=0$. Для этого воспользуемся оператором преобразования (1.1.54). Можно также использовать и оригинальный прием Борга, изложенный в § 1.6 и не связанный с операторами преобразования.

Применяя (1.1.54), запишем функцию $\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\dfrac{1}{2}$ в виде

$$\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos 2\rho x+\int_0^x (G(x,t)+\widetilde{G}(x,t))\cos\rho x\cos\rho t\,dt+$$
$$+\int_0^x\int_0^x G(x,t)\widetilde{G}(x,s)\cos\rho t\cos\rho s\,dtds=\frac{1}{2}\cos 2\rho x+\frac{1}{2}\int_{-x}^x (G(x,t)+$$
$$+\widetilde{G}(x,t))\cos\rho(x-t)\,dt+\frac{1}{4}\int_{-x}^x\int_{-x}^x G(x,t)\widetilde{G}(x,s)\cos\rho(t-s)\,dtds$$

(здесь $G(x,-t)=G(x,t)$, $\widetilde{G}(x,-t)=\widetilde{G}(x,t)$). Замены переменных $\tau=(x-t)/2$ и $\tau=(s-t)/2$ соответственно дают

$$\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Big(\cos 2\rho x+2\int_0^x (G(x,x-2\tau)+\widetilde{G}(x,x-2\tau))\times$$
$$\times\cos 2\rho\tau\,d\tau+\int_{-x}^x \widetilde{G}(x,s)\Big(\int_{(s-x)/2}^{(s+x)/2} G(x,s-2\tau)\cos 2\rho\tau\,d\tau\Big)\,ds\Big),$$

и, следовательно,

$$\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Big(\cos 2\rho x+\int_0^x V(x,\tau)\cos 2\rho\tau\,d\tau\Big), \tag{1.2.7}$$

где

$$V(x,\tau)=2(G(x,x-2\tau)+\widetilde{G}(x,x-2\tau))+$$
$$+\int_{2\tau-x}^x \widetilde{G}(x,s)G(x,s-2\tau)\,ds+\int_{-x}^{x-2\tau}\widetilde{G}(x,s)G(x,s+2\tau)\,ds. \tag{1.2.8}$$

Подставляя (1.2.7) в (1.2.6) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_0^\pi \Big(\widehat{q}(\tau) + \int_\tau^\pi V(\tau, x)\widehat{q}(x)\,dx\Big)\cos 2\rho\tau\,d\tau \equiv 0.$$

Следовательно,

$$\widehat{q}(\tau) + \int_\tau^\pi V(\tau, x)\widehat{q}(x)\,dx = 0.$$

Это однородное интегральное уравнение Вольтерра имеет только нулевое решение, т. е. $\widehat{q}(x) = 0$ п. в. на $(0, \pi)$. Отсюда и из (1.2.4) вытекает, что $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$. □

Замечание 1.2.2. Ясно, что результат Борга остается также верным и в случае, когда вместо $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ задаются спектры $\{\lambda_n\}$ и $\{\lambda_n^0\}$ краевых задач L и L^0 (L^0 определена в замечании 1.1.2), т. е. остается верным для следующей обратной задачи.

Задача 1.2.3. По заданным спектрам $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ и $\{\lambda_n^0\}_{n\geqslant 0}$ построить потенциал $q(x)$ и коэффициенты h и H в краевых условиях.

Теорема единственности для задачи 1.2.3 имеет следующий вид.

Теорема 1.2.5. *Если* $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$, $\lambda_n^0 = \widetilde{\lambda}_n^0$, $n \geqslant 0$, *то* $q(x) = \widetilde{q}(x)$ *п. в. на* $(0, \pi)$, $h = \widetilde{h}$ *и* $H = \widetilde{H}$. *Таким образом, задание двух спектров* $\{\lambda_n, \lambda_n^0\}_{n\geqslant 0}$ *однозначно определяет потенциал и коэффициенты краевых условий.*

Отметим, что теорема 1.2.5 может быть сведена к теореме 1.2.4 заменой $x \to \pi - x$.

1.2.4. Функция Вейля. Пусть функция $\Phi(x, \lambda)$ является решением уравнения (1.1.1) при условиях $U(\Phi) = 1$, $V(\Phi) = 0$. Положим $M(\lambda) := \Phi(0, \lambda)$. Функции $\Phi(x, \lambda)$ и $M(\lambda)$ называются соответственно *решением Вейля* и *функцией Вейля* для краевой задачи L. Функция Вейля впервые была введена Г. Вейлем (для случая оператора Штурма–Лиувилля на полуоси); более подробное изложение см. в [165]. Ясно, что

$$\Phi(x, \lambda) = -\frac{\psi(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} = S(x, \lambda) + M(\lambda)\varphi(x, \lambda), \tag{1.2.9}$$

$$M(\lambda) = -\frac{\Delta^0(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{1.2.10}$$

$$\langle \varphi(x, \lambda), \Phi(x, \lambda)\rangle \equiv 1, \tag{1.2.11}$$

где $\Delta^0(\lambda)$ определена в замечании 1.1.2. Таким образом, функция Вейля является мероморфной функцией с простыми полюсами в точках $\lambda = \lambda_n$, $n \geqslant 0$.

Теорема 1.2.6. *Справедливо представление*

$$M(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}. \tag{1.2.12}$$

Доказательство. Так как $\Delta^0(\lambda)=\psi(0,\lambda)$, то из (1.1.10) вытекает, что $|\Delta^0(\lambda)|\leqslant C\exp(|\tau|\pi)$. Тогда, используя (1.2.10) и (1.1.18), получаем при достаточно большом $\rho^*>0$:

$$|M(\lambda)|\leqslant\frac{C_\delta}{|\rho|},\quad \rho\in G_\delta,\ |\rho|\geqslant\rho^*. \tag{1.2.13}$$

Далее, опираясь на (1.2.10) и лемму 1.1.1, вычисляем

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n}M(\lambda)=-\frac{\Delta^0(\lambda_n)}{\dot\Delta(\lambda_n)}=-\frac{\beta_n}{\dot\Delta(\lambda_n)}=\frac{1}{\alpha_n}. \tag{1.2.14}$$

Рассмотрим контурный интеграл

$$J_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N}\frac{M(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu,\quad \lambda\in int\,\Gamma_N.$$

В силу (1.2.13) имеем: $\lim\limits_{N\to\infty}J_N(\lambda)=0$. С другой стороны, теорема о вычетах и (1.2.14) дают

$$J_N(\lambda)=-M(\lambda)+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)},$$

и теорема 1.2.6 доказана. □

В этом пункте рассматривается следующая обратная задача.

Задача 1.2.4. По заданной функции Вейля $M(\lambda)$ построить $L(q(x),h,H)$.

Докажем теорему единственности решения обратной задачи 1.2.4.

Теорема 1.2.7. *Если $M(\lambda)=\widetilde M(\lambda)$, то $L=\widetilde L$. Таким образом, задание функции Вейля однозначно определяет оператор.*

Доказательство. Введем матрицу $P(x,\lambda)=[P_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=1,\,2}$ по формуле

$$P(x,\lambda)\begin{bmatrix}\tilde\varphi(x,\lambda) & \widetilde\Phi(x,\lambda)\\ \tilde\varphi'(x,\lambda) & \widetilde\Phi'(x,\lambda)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi(x,\lambda) & \Phi(x,\lambda)\\ \varphi'(x,\lambda) & \Phi'(x,\lambda)\end{bmatrix}. \tag{1.2.15}$$

Используя (1.2.11) и (1.2.15), вычисляем

$$\begin{gathered}P_{j1}(x,\lambda)=\varphi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde\Phi'(x,\lambda)-\Phi^{(j-1)}(x,\lambda)\tilde\varphi'(x,\lambda),\\ P_{j2}(x,\lambda)=\Phi^{(j-1)}(x,\lambda)\tilde\varphi(x,\lambda)-\varphi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde\Phi(x,\lambda),\end{gathered} \tag{1.2.16}$$

$$\begin{gathered}\varphi(x,\lambda)=P_{11}(x,\lambda)\tilde\varphi(x,\lambda)+P_{12}(x,\lambda)\tilde\varphi'(x,\lambda),\\ \Phi(x,\lambda)=P_{11}(x,\lambda)\widetilde\Phi(x,\lambda)+P_{12}(x,\lambda)\widetilde\Phi'(x,\lambda).\end{gathered} \tag{1.2.17}$$

Из (1.2.16), (1.2.9) и (1.2.11) вытекает

$$P_{11}(x,\lambda)=1+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(\psi(x,\lambda)(\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda))-\varphi(x,\lambda)(\widetilde{\psi}'(x,\lambda)-\psi'(x,\lambda))\Big),$$

$$P_{12}(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(\varphi(x,\lambda)\widetilde{\psi}(x,\lambda)-\psi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\Big).$$

В силу (1.1.9), (1.1.10) и (1.1.18) это дает

$$|P_{11}(x,\lambda)-1|\leqslant\frac{C_\delta}{|\rho|},\quad |P_{12}(x,\lambda)|\leqslant\frac{C_\delta}{|\rho|},\quad \rho\in G_\delta,\quad |\rho|\geqslant\rho^*,\quad (1.2.18)$$

$$|P_{22}(x,\lambda)-1|\leqslant\frac{C_\delta}{|\rho|},\quad |P_{21}(x,\lambda)|\leqslant C_\delta,\quad \rho\in G_\delta,\quad |\rho|\geqslant\rho^*.\quad (1.2.19)$$

Согласно (1.2.9) и (1.2.16) имеем

$$\begin{aligned}P_{11}(x,\lambda)&=\varphi(x,\lambda)\widetilde{S}'(x,\lambda)-S(x,\lambda)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)+\\&\qquad+(\widetilde{M}(\lambda)-M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda),\\P_{12}(x,\lambda)&=S(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\widetilde{S}(x,\lambda)+\\&\qquad+(M(\lambda)-\widetilde{M}(\lambda))\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda).\end{aligned}$$

Таким образом, если $M(\lambda)\equiv\widetilde{M}(\lambda)$, то при каждом фиксированном x функции $P_{11}(x,\lambda)$ и $P_{12}(x,\lambda)$ являются целыми по λ. Вместе с (1.2.18) это дает $P_{11}(x,\lambda)\equiv 1$, $P_{12}(x,\lambda)\equiv 0$. Подставляя в (1.2.17), находим: $\varphi(x,\lambda)\equiv\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$, $\Phi(x,\lambda)\equiv\widetilde{\Phi}(x,\lambda)$ при всех x и λ, и, следовательно, $L=\widetilde{L}$. □

Отметим, что идея использования отображений пространств решений дифференциальных уравнений для решения обратной задачи принадлежит З. Л. Лейбензону [159, 160].

Замечание 1.2.3. Согласно (1.2.12) задание функции Вейля $M(\lambda)$ равносильно заданию спектральных данных $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$. С другой стороны, в силу (1.2.10) нули и полюсы функции Вейля $M(\lambda)$ совпадают со спектрами краевых задач L и L^0 соответственно. Поэтому задание функции Вейля $M(\lambda)$ равносильно заданию двух спектров: $\{\lambda_n\}$ и $\{\lambda_n^0\}$. Таким образом, обратные задачи восстановления уравнения Штурма–Лиувилля по спектральным данным и по двум спектрам: являются частными случаями обратной задачи 1.2.4 восстановления уравнения Штурма–Лиувилля по заданной функции Вейля, и мы имеем несколько независимых методов доказательства теорем единственности. Функция Вейля является весьма естественной и удобной спектральной характеристикой в теории обратных задач. Используя концепцию функции Вейля и ее обобщения, можно формулировать и изучать обратные задачи для различных классов операторов. Например, обратная задача восстановления дифференциальных операторов высших порядков по функциям Вейля исследовалась в [250]. Концепция функции Вейля будет использоваться в гл. 2 при исследовании операторов Штурма–Лиувилля на полуоси, а также в гл. 3, 4 для других классов операторов.

§ 1.3. Метод оператора преобразования

В §§ 1.3–1.6 представлены различные методы конструктивного решения обратных задач. В этом параграфе описывается метод Гельфанда–Левитана [(96, 164, 173)], в котором используются операторы преобразования, построенные в § 1.1. Метод позволяет получить алгоритм решения обратной задачи, а также необходимые, достаточные условия ее разрешимости. Центральную роль в этом методе играет линейное интегральное уравнение относительно ядра оператора преобразования (см. теорему 1.3.1). Основные результаты параграфа содержатся в теоремах 1.3.2, 1.3.4.

1.3.1. Вспомогательные утверждения. Для описания метода нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1.3.1. *В банаховом пространстве B рассмотрим уравнения*

$$(E+A_0)y_0=f_0,\quad (E+A)y=f,$$

где A и A_0 — линейные ограниченные операторы, действующие из B в B, и E — единичный оператор. Предположим, что существует линейный ограниченный оператор $R_0:=(E+A_0)^{-1}$. Из этого, в частности, следует, что уравнение $(E+A_0)y_0=f_0$ однозначно разрешимо в B. Если $\|A-A_0\|\leqslant(2\|R_0\|)^{-1}$, то существует линейный ограниченный оператор $R:=(E+A)^{-1}$, причем

$$R=R_0\Big(E+\sum_{k=1}^{\infty}((A_0-A)R_0)^k\Big),\quad \|R-R_0\|\leqslant 2\|R_0\|^2\,\|A-A_0\|.$$

Кроме того, y и y_0 удовлетворяют оценке

$$\|y-y_0\|\leqslant C_0(\|A-A_0\|+\|f-f_0\|),$$

где C_0 зависит только от $\|R_0\|$ и $\|f_0\|$.

Доказательство. Имеем

$$E+A=(E+A_0)+(A-A_0)=\Big(E+(A-A_0)R_0\Big)(E+A_0).$$

При условиях леммы $\|(A-A_0)R_0\|\leqslant 1/2$, и, следовательно, существует линейный ограниченный оператор

$$R:=(E+A)^{-1}=R_0\Big(E+(A-A_0)R_0\Big)^{-1}=R_0\Big(E+\sum_{k=1}^{\infty}((A_0-A)R_0)^k\Big).$$

В частности, это дает: $\|R\|\leqslant 2\|R_0\|$. Снова используя условие на $\|A-A_0\|$, выводим

$$\|R-R_0\|\leqslant\|R_0\|\frac{\|(A-A_0)R_0\|}{1-\|(A-A_0)R_0\|}\leqslant 2\|R_0\|^2\|A-A_0\|.$$

Далее, $y-y_0=Rf-R_0f_0=(R-R_0)f_0+R(f-f_0)$, и, следовательно, $\|y-y_0\|\leqslant 2\|R_0\|^2\|f_0\|\|A-A_0\|+2\|R_0\|\|f-f_0\|$. □

Следующая лемма является очевидным следствием леммы 1.5.1.

Лемма 1.3.2. *Рассмотрим интегральное уравнение*

$$y(t,\alpha)+\int\limits_a^b A(t,s,\alpha)y(s,\alpha)\,ds=f(t,\alpha),\quad a\leqslant t\leqslant b,\tag{1.3.1}$$

где $A(t,s,\alpha)$ и $f(t,\alpha)$ — непрерывные функции. Предположим, что при некотором фиксированном $\alpha=\alpha_0$ однородное уравнение

$$z(t)+\int\limits_a^b A_0(t,s)z(s)\,ds=0,\quad A_0(t,s):=A(t,s,\alpha_0),$$

имеет только нулевое решение. Тогда в окрестности точки $\alpha=\alpha_0$ уравнение (1.3.1) имеет единственное решение $y(t,\alpha)$, которое непрерывно по t и α. Более того, функция $y(t,\alpha)$ имеет ту же гладкость, что и $A(t,s,\alpha)$, $f(t,\alpha)$.

Лемма 1.3.3. *Пусть функции $\varphi_j(x,\lambda)$, $j\geqslant 1$, являются решениями уравнений*

$$-y''+q_j(x)y=\lambda y,\quad q_j(x)\in L_2(0,\pi)$$

при условиях $\varphi_j(0,\lambda)=1$, $\varphi_j'(0,\lambda)=h_j$, и пусть $\varphi(x,\lambda)$ — функция, определенная в § 1.1. Если $\lim\limits_{j\to\infty}\|q_j-q\|_{L_2}=0$, $\lim\limits_{j\to\infty}h_j=h$, то

$$\lim_{j\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}\max_{|\lambda|\leqslant r}|\varphi_j(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)|=0.$$

Доказательство. Нетрудно проверить дифференцированием, что функция $\varphi_j(x,\lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi_j(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+(h_j-h)S(x,\lambda)+\int\limits_0^x g(x,t,\lambda)(q_j(t)-q(t))\varphi_j(t,\lambda)\,dt,$$

где $g(x,t,\lambda)=C(t,\lambda)S(x,\lambda)-C(x,\lambda)S(t,\lambda)$ — функция Грина задачи Коши: $-y''+q(x)y-\lambda y=f$, $y(0)=y'(0)=0$. Зафиксируем $r>0$. Тогда при $|\lambda|\leqslant r$ и $x\in[0,\pi]$ имеем

$$|\varphi_j(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)|\leqslant C\Big(|h_j-h|+\|q_j-q\|_{L_2}\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}\max_{|\lambda|\leqslant r}|\varphi_j(x,\lambda)|\Big).$$

В частности, это дает: $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi}\max\limits_{|\lambda|\leqslant r}|\varphi_j(x,\lambda)|\leqslant C$, где C не зависит от j. Поэтому

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}\max_{|\lambda|\leqslant r}|\varphi_j(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)|\leqslant C\Big(|h_j-h|+\|q_j-q\|_{L_2}\Big)\to 0\quad\text{при }j\to\infty.$$

Лемма 1.3.3 доказана. □

Лемма 1.3.4. *Пусть даны числа* $\{\rho_n,\ \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *вида*

$$\rho_n = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\varkappa_{n1}}{n}, \quad \{\varkappa_n\}, \{\varkappa_{n1}\} \in l_2,\ \alpha_n \neq 0. \tag{1.3.2}$$

Обозначим

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\cos \rho_n x}{\alpha_n} - \frac{\cos nx}{\alpha_n^0} \Big), \tag{1.3.3}$$

где $\alpha_n^0 = \pi/2$ *при* $n > 0$ *и* $\alpha_n^0 = \pi$ *при* $n = 0$. *Тогда* $a(x) \in W_2^1(0, 2\pi)$.

Доказательство. Обозначим $\delta_n = \rho_n - n$. Так как

$$\frac{\cos \rho_n x}{\alpha_n} - \frac{\cos nx}{\alpha_n^0} = \frac{1}{\alpha_n^0}\Big(\cos\rho_n x - \cos nx\Big) + \Big(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_n^0}\Big)\cos\rho_n x,$$

$$\cos\rho_n x - \cos nx = \cos(n+\delta_n)x - \cos nx =$$
$$= -\sin\delta_n x \sin nx - 2\sin^2\frac{\delta_n x}{2}\cos nx =$$
$$= -\delta_n x \sin nx - (\sin\delta_n x - \delta_n x)\sin nx - 2\sin^2\frac{\delta_n x}{2}\cos nx,$$

то преобразуем $a(x)$ к виду: $a(x) = A_1(x) + A_2(x)$, где

$$A_1(x) = -\frac{\omega x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = -\frac{\omega x}{\pi}\cdot\frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi,$$

$$A_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_n^0}\Big)\cos\rho_n x + \frac{1}{\pi}\Big(\cos\rho_0 x - 1\Big) - x\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_n\frac{\sin nx}{n} -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty}(\sin\delta_n x - \delta_n x)\sin nx - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{\delta_n x}{2}\cos nx. \tag{1.3.4}$$

Так как

$$\delta_n = O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_n^0} = \frac{\gamma_n}{n}, \quad \{\gamma_n\} \in l_2,$$

то ряды в (1.3.4) сходятся абсолютно и равномерно на $[0, 2\pi]$, причем $A_2(x) \in W_2^1(0, 2\pi)$. Следовательно, $a(x) \in W_2^1(0, 2\pi)$. □

Аналогичным образом доказываются следующие более общие утверждения.

Лемма 1.3.5. *Пусть даны числа* $\{\rho_n,\ \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *вида* (1.1.23). *Тогда*

$$a(x) \in W_2^{N+1}(0, 2\pi).$$

Доказательство. Подставляя (1.1.23) в (1.3.3), получаем ряды, которые можно $N+1$ раз почленно дифференцировать, а также слагаемые, представляющие собой произведения полиномов от x на ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{2k+1}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{2k}}.$$

Дифференцируя эти ряды $2k$ и $2k-1$ раз соответственно, получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\quad 0<x<2\pi.$$

$\square$

Лемма 1.3.6. *Пусть даны числа* $\{\rho_n,\ \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *вида* (1.3.2). *Зафиксируем* $C_0>0$. *Если числа* $\{\widetilde{\rho}_n,\ \widetilde{\alpha}_n\}_{n\geqslant 0}$, $\widetilde{\alpha}_n\neq 0$ *удовлетворяют условию*

$$\Omega:=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)\xi_n)^2\Big)^{1/2}\leqslant C_0,\quad \xi_n:=|\widetilde{\rho}_n-\rho_n|+|\widetilde{\alpha}_n-\alpha_n|,$$

то

$$\widehat{a}(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\cos\widetilde{\rho}_n x}{\widetilde{\alpha}_n}-\frac{\cos\rho_n x}{\alpha_n}\Big)\in W_2^1(0,2\pi),\tag{1.3.5}$$

причем

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|\widehat{a}(x)|\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n,\quad \|\widehat{a}(x)\|_{W_2^1}\leqslant C\Omega,$$

где C *зависит от* $\{\rho_n,\ \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ и C_0.

Доказательство. Очевидно, что $\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n\leqslant C\Omega$. Запишем (1.3.5) в виде

$$\widehat{a}(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\Big(\frac{1}{\widetilde{\alpha}_n}-\frac{1}{\alpha_n}\Big)\cos\rho_n x+\frac{1}{\widetilde{\alpha}_n}\Big(\cos\widetilde{\rho}_n x-\cos\rho_n x\Big)\Big)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\alpha_n-\widetilde{\alpha}_n}{\widetilde{\alpha}_n\alpha_n}\cos\rho_n x+\frac{2}{\widetilde{\alpha}_n}\sin\frac{(\rho_n-\widetilde{\rho}_n)x}{2}\sin\frac{(\rho_n+\widetilde{\rho}_n)x}{2}\Big).$$

Эти ряды сходятся абсолютно и равномерно, $\widehat{a}(x)$ — непрерывная функция, причем $|\widehat{a}(x)|\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n$. Дифференцируя (1.3.5), вычисляем аналогично

$$\widehat{a}'(x):=-\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\widetilde{\rho}_n\sin\widetilde{\rho}_n x}{\widetilde{\alpha}_n}-\frac{\rho_n\sin\rho_n x}{\alpha_n}\Big)=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\Big(\frac{\widetilde{\rho}_n}{\widetilde{\alpha}_n}-\frac{\rho_n}{\alpha_n}\Big)\sin\rho_n x+\frac{\widetilde{\rho}_n}{\widetilde{\alpha}_n}\Big(\sin\widetilde{\rho}_n x-\sin\rho_n x\Big)\Big)=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\widetilde{\alpha}_n\rho_n-\alpha_n\widetilde{\rho}_n}{\widetilde{\alpha}_n\alpha_n}\sin\rho_n x+\frac{2\widetilde{\rho}_n}{\widetilde{\alpha}_n}\sin\frac{(\rho_n-\widetilde{\rho}_n)x}{2}\cos\frac{(\rho_n+\widetilde{\rho}_n)x}{2}\Big)=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\widetilde{\alpha}_n\rho_n-\alpha_n\widetilde{\rho}_n}{\widetilde{\alpha}_n\alpha_n}\sin\rho_n x+x\frac{\widetilde{\rho}_n}{\widetilde{\alpha}_n}(\rho_n-\widetilde{\rho}_n)\cos\frac{(\rho_n+\widetilde{\rho}_n)x}{2}+$$

$$+\frac{\widetilde{\rho}_n}{\widetilde{\alpha}_n}\Big(2\sin\frac{(\rho_n-\widetilde{\rho}_n)x}{2}-x(\rho_n-\widetilde{\rho}_n)\Big)\cos\frac{(\rho_n+\widetilde{\rho}_n)x}{2}\Big)=A_1(x)+A_2(x),$$

где

$$A_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{\alpha}_n\rho_n-\alpha_n\widetilde{\rho}_n}{\widetilde{\alpha}_n\alpha_n}\sin\rho_n x+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{\rho}_n}{\widetilde{\alpha}_n}\Big(\rho_n-\widetilde{\rho}_n\Big)\cos\rho_n x, \qquad (1.3.6)$$

$$A_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{\rho}_n}{\widetilde{\alpha}_n}\Big(2\sin\frac{(\rho_n-\widetilde{\rho}_n)x}{2}-x(\rho_n-\widetilde{\rho}_n)\Big)\cos\frac{(\rho_n+\widetilde{\rho}_n)x}{2}+$$
$$+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{\rho}_n}{\widetilde{\alpha}_n}(\rho_n-\widetilde{\rho}_n)\Big(\cos\frac{(\rho_n+\widetilde{\rho}_n)x}{2}-\cos\rho_n x\Big). \qquad (1.3.7)$$

Ряды в (1.3.7) сходятся абсолютно и равномерно, причем

$$|A_2(x)|\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}|\rho_n-\widetilde{\rho}_n|.$$

Ряды в (1.3.6) сходятся в $L_2(0,2\pi)$ и $\|A_1(x)\|_{L_2(0,2\pi)}\leqslant C\Omega$. Используя эти оценки, получаем утверждения леммы. □

1.3.2. Восстановление дифференциального оператора по спектральным данным. Рассмотрим краевую задачу $L=L(q(x),h,H)$. Пусть $\{\lambda_n,\ \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ — спектральные данные L, $\rho_n=\sqrt{\lambda_n}$. Будем решать обратную задачу восстановления L по заданным спектральным данным $\{\lambda_n,\ \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$. В § 1.1 было показано, что спектральные данные обладают следующими свойствами:

$$\rho_n=n+\frac{\omega}{\pi n}+\frac{\varkappa_n}{n},\qquad \alpha_n=\frac{\pi}{2}+\frac{\varkappa_{n1}}{n},\qquad \{\varkappa_n\},\{\varkappa_{n1}\}\in\ell_2, \qquad (1.3.8)$$
$$\alpha_n>0,\qquad \lambda_n\neq\lambda_m\ (n\neq m). \qquad (1.3.9)$$

Более точно:

$$\varkappa_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}q(t)\cos 2nt\,dt+O\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

$$\varkappa_{n1}=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\pi-t)q(t)\sin 2nt\,dt+O\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

т. е. главные части зависят линейно от потенциала.

Рассмотрим функцию

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\cos\rho_n x\cos\rho_n t}{\alpha_n}-\frac{\cos nx\cos nt}{\alpha_n^0}\Big), \tag{1.3.10}$$

где $\alpha_n^0=\pi/2$ при $n>0$ и $\alpha_n^0=\pi$ при $n=0$. Так как $F(x,t)=(a(x+t)+a(x-t))/2$, то в силу леммы 1.3.4 функция $F(x,t)$ является непрерывной, и $\dfrac{d}{dx}F(x,x)\in L_2(0,\pi)$.

Теорема 1.3.1. *При каждом фиксированном* $x\in(0,\pi]$ *ядро* $G(x,t)$ *из представления* (1.1.54) *удовлетворяет линейному интегральному уравнению*

$$G(x,t)+F(x,t)+\int_0^x G(x,s)F(s,t)\,ds=0,\quad 0<t<x. \tag{1.3.11}$$

Это уравнение называется уравнением Гельфанда–Левитана.

Таким образом, теорема 1.3.1 позволяет свести нашу обратную задачу к решению уравнения (1.3.11). Отметим, что (1.3.11) является интегральным уравнением Фредгольма с параметром x.

Доказательство. Разрешая соотношение (1.1.54) относительно $\cos\rho x$, получаем

$$\cos\rho x=\varphi(x,\lambda)+\int_0^x H(x,t)\varphi(t,\lambda)\,dt, \tag{1.3.12}$$

где $H(x,t)$ — непрерывная функция. Используя (1.1.54) и (1.3.12), вычисляем

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\varphi(x,\lambda_n)\cos\rho_n t}{\alpha_n}=\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{\cos\rho_n x\cos\rho_n t}{\alpha_n}+\frac{\cos\rho_n t}{\alpha_n}\int_0^x G(x,s)\cos\rho_n s\,ds\Big),$$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\varphi(x,\lambda_n)\cos\rho_n t}{\alpha_n}=\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{\varphi(x,\lambda_n)\varphi(t,\lambda_n)}{\alpha_n}+\frac{\varphi(x,\lambda_n)}{\alpha_n}\int_0^t H(t,s)\varphi(s,\lambda_n)\,ds\Big).$$

Это дает

$$\Phi_N(x,t)=I_{N1}(x,t)+I_{N2}(x,t)+I_{N3}(x,t)+I_{N4}(x,t),$$

где

$$\Phi_N(x,t)=\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{\varphi(x,\lambda_n)\varphi(t,\lambda_n)}{\alpha_n}-\frac{\cos nx\cos nt}{\alpha_n^0}\Big),$$

$$I_{N1}(x,t) = \sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{\cos\rho_n x\cos\rho_n t}{\alpha_n} - \frac{\cos nx\cos nt}{\overset{0}{\alpha}_n}\Big),$$

$$I_{N2}(x,t) = \sum_{n=0}^{N}\frac{\cos nt}{\overset{0}{\alpha}_n}\int\limits_0^x G(x,s)\cos ns\,ds,$$

$$I_{N3}(x,t) = \sum_{n=0}^{N}\int\limits_0^x G(x,s)\Big(\frac{\cos\rho_n t\cos\rho_n s}{\alpha_n} - \frac{\cos nt\cos ns}{\overset{0}{\alpha}_n}\Big)\,ds,$$

$$I_{N4}(x,t) = -\sum_{n=0}^{N}\frac{\varphi(x,\lambda_n)}{\alpha_n}\int\limits_0^t H(t,s)\varphi(s,\lambda_n)\,ds.$$

Пусть $f(x)\in AC[0,\pi]$. Согласно теореме 1.1.5

$$\lim_{N\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}\int\limits_0^\pi f(t)\Phi_N(x,t)\,dt = 0.$$

Кроме того, равномерно по $x\in[0,\pi]$:

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)I_{N1}(x,t)\,dt = \int\limits_0^\pi f(t)F(x,t)\,dt,$$

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)I_{N2}(x,t)\,dt = \int\limits_0^x f(t)G(x,t)\,dt,$$

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)I_{N3}(x,t)\,dt = \int\limits_0^\pi f(t)\Big(\int\limits_0^x G(x,s)F(s,t)\,ds\Big)\,dt,$$

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)I_{N4}(x,t)\,dt =$$

$$= -\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{\varphi(x,\lambda_n)}{\alpha_n}\int\limits_0^\pi\varphi(s,\lambda_n)\Big(\int\limits_s^\pi H(t,s)f(t)\,dt\Big)\,ds =$$

$$= -\int\limits_x^\pi f(t)H(t,x)\,dt.$$

Доопределим $G(x,t) = H(x,t) = 0$ при $x < t$. В силу произвольности $f(x)$ приходим к соотношению

$$G(x,t) + F(x,t) + \int_0^x G(x,s)F(s,t)\,ds - H(t,x) = 0.$$

При $t < x$ это дает (1.3.11). $\square$

Следующая теорема, которая является основным результатом § 1.3, дает алгоритм решения обратной задачи и необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Теорема 1.3.2. *Для того чтобы вещественные числа* $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *были спектральными данными для некоторой краевой задачи* $L(q(x), h, H)$ *вида* (1.1.1)–(1.1.2) *с* $q(x) \in L_2(0,\pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* (1.3.8), (1.3.9). *Кроме того,* $q(x) \in W_2^N$ *тогда и только тогда, когда имеет место* (1.1.23). *Краевая задача строится по следующему алгоритму.*

Алгоритм 1.3.1. (i) *По заданным числам* $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *строим функцию* $F(x,t)$ *по формуле* (1.3.10).

(ii) *Находим функцию* $G(x,t)$ *из уравнения* (1.3.11).

(iii) *Вычисляем* $q(x)$, h *и* H *по формулам*

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}G(x,x), \quad h = G(0,0), \tag{1.3.13}$$

$$H = \omega - h - \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt. \tag{1.3.14}$$

Необходимость условий теоремы 1.3.2 доказана выше; здесь мы докажем достаточность. Пусть заданы вещественные числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ вида (1.3.8)–(1.3.9). Построим функцию $F(x,t)$ по формуле (1.3.10) и рассмотрим уравнение (1.3.11).

Лемма 1.3.7. *При каждом фиксированном* $x \in (0,\pi]$ *уравнение* (1.3.11) *имеет единственное решение* $G(x,t)$ *в* $L_2(0,x)$.

Доказательство. Так как (1.3.11) является уравнением Фредгольма второго рода, то достаточно доказать, что однородное уравнение

$$g(t) + \int_0^x F(s,t)g(s)\,ds = 0 \tag{1.3.15}$$

имеет только нулевое решение $g(t) = 0$.

Пусть $g(t)$ — решение уравнения (1.3.15). Тогда

$$\int_0^x g^2(t)\,dt + \int_0^x\int_0^x F(s,t)g(s)g(t)\,dsdt = 0,$$

или

$$\int_0^x g^2(t)\,dt + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\Bigl(\int_0^x g(t)\cos\rho_n t\,dt\Bigr)^2 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\Bigl(\int_0^x g(t)\cos nt\,dt\Bigr)^2 = 0.$$

Используя равенство Парсеваля

$$\int_0^x g^2(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\Bigl(\int_0^x g(t)\cos nt\,dt\Bigr)^2$$

для функции $g(t)$, продолженной нулем при $t > x$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\Bigl(\int_0^x g(t)\cos\rho_n t\,dt\Bigr)^2 = 0.$$

Так как $\alpha_n > 0$, то

$$\int_0^x g(t)\cos\rho_n t\,dt = 0, \quad n \geqslant 0.$$

Система функций $\{\cos\rho_n t\}_{n\geqslant 0}$ полна в $L_2(0,\pi)$ (см. утверждение 1.6.6 § 1.6), и, следовательно, $g(t) = 0$. Лемма 1.3.7 доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы 1.3.2. Пусть $G(x,t)$ — решение уравнения (1.3.11). Замена $t \to tx$, $s \to sx$ в (1.3.11) дает

$$F(x,xt) + G(x,xt) + x\int_0^1 G(x,xs)F(xt,xs)\,ds = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \quad (1.3.16)$$

Из (1.3.11), (1.3.16) и леммы 1.3.2 вытекает, что функция $G(x,t)$ является непрерывной и имеет ту же гладкость, что и функция $F(x,t)$. В частности, $\frac{d}{dx}G(x,x) \in L_2(0,\pi)$. Построим функцию $\varphi(x,\lambda)$ по формуле (1.1.54), а также функцию $q(x)$ и число h по формулам (1.3.13).

Лемма 1.3.8. *Справедливы соотношения*

$$-\varphi''(x,\lambda) + q(x)\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda), \quad (1.3.17)$$

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h. \quad (1.3.18)$$

Доказательство. 1) Предположим сначала, что $a(x) \in W_2^2(0,2\pi)$, где $a(x)$ определена в (1.3.3). Дифференцируя тождество

$$J(x,t) := F(x,t) + G(x,t) + \int_0^x G(x,s)F(s,t)\,ds \equiv 0, \quad (1.3.19)$$

вычисляем

$$J_t(x,t) = F_t(x,t) + G_t(x,t) + \int\limits_0^x G(x,s)F_t(s,t)\,ds = 0, \tag{1.3.20}$$

$$J_{tt}(x,t) = F_{tt}(x,t) + G_{tt}(x,t) + \int\limits_0^x G(x,s)F_{tt}(s,t)\,ds = 0, \tag{1.3.21}$$

$$J_{xx}(x,t) = F_{xx}(x,t) + G_{xx}(x,t) + \frac{dG(x,x)}{dx}F(x,t) + G(x,x)F_x(x,t) + \\ + \frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\Big|_{t=x} F(x,t) + \int\limits_0^x G_{xx}(x,s)F(s,t)\,ds = 0. \tag{1.3.22}$$

В силу (1.3.10) $F_{tt}(s,t) = F_{ss}(s,t)$ и $F_t(x,t)_{|t=0} = 0$. Отсюда и из (1.3.20) при $t = 0$ выводим

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{1.3.23}$$

Кроме того, интегрирование по частям в (1.3.21) дает

$$J_{tt}(x,t) = F_{tt}(x,t) + G_{tt}(x,t) + G(x,x)\frac{\partial F(s,t)}{\partial s}\Big|_{s=x} - \\ - \frac{\partial G(x,s)}{\partial s}\Big|_{s=x} F(x,t) + \int\limits_0^x G_{ss}(x,s)F(s,t)\,ds = 0. \tag{1.3.24}$$

Из (1.3.19), (1.3.22), (1.3.24) и тождества

$$J_{xx}(x,t) - J_{tt}(x,t) - q(x)J(x,t) \equiv 0$$

вытекает

$$(G_{xx}(x,t) - G_{tt}(x,t) - q(x)G(x,t)) + \int\limits_0^x (G_{xx}(x,s) - \\ - G_{ss}(x,s) - q(x)G(x,s))F(s,t)\,ds \equiv 0.$$

Согласно лемме 1.3.7 это однородное уравнение имеет только нулевое решение, т. е.

$$G_{xx}(x,t) - G_{tt}(x,t) - q(x)G(x,t) = 0, \quad 0 < t < x. \tag{1.3.25}$$

Дифференцируя (1.1.54) дважды, вычисляем

$$\varphi'(x,\lambda) = -\rho\sin\rho x + G(x,x)\cos\rho x + \int\limits_0^x G_x(x,t)\cos\rho t\,dt, \qquad (1.3.26)$$

$$\varphi''(x,\lambda) = -\rho^2\cos\rho x - G(x,x)\rho\sin\rho x + \\ + \Big(\frac{dG(x,x)}{dx} + \frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\Big|_{t=x}\Big)\cos\rho x + \int\limits_0^x G_{xx}(x,t)\cos\rho t\,dt. \qquad (1.3.27)$$

С другой стороны, интегрируя дважды по частям, получаем

$$\lambda\varphi(x,\lambda) = \rho^2\cos\rho x + \rho^2\int\limits_0^x G(x,t)\cos\rho t\,dt = \\ = \rho^2\cos\rho x + G(x,x)\rho\sin\rho x + \frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=x}\cos\rho x - \frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} - \\ - \int\limits_0^x G_{tt}(x,t)\cos\rho t\,dt.$$

Вместе с (1.1.54) и (1.3.27) это дает

$$\varphi''(x,\lambda) + \lambda\varphi(x,\lambda) - q(x)\varphi(x,\lambda) = \Big(2\frac{dG(x,x)}{dx} - q(x)\Big)\cos\rho x - \\ - \frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} + \int\limits_0^x (G_{xx}(x,t) - G_{tt}(x,t) - q(x)G(x,t))\cos\rho t\,dt.$$

Отсюда, учитывая (1.3.13), (1.3.23) и (1.3.25), приходим к (1.3.17). Соотношения (1.3.18) следуют из (1.1.54) и (1.3.26) при $x = 0$.

2) Рассмотрим теперь общий случай, когда выполняются соотношения (1.3.8), (1.3.9). Тогда, согласно лемме 1.3.4, $a(x) \in W_2^1(0,2\pi)$. Через $\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ обозначим решение уравнения (1.1.1) при условиях $\widetilde{\varphi}(0,\lambda) = 1$, $\widetilde{\varphi}'(0,\lambda) = h$. Наша цель — доказать, что $\widetilde{\varphi}(x,\lambda) \equiv \varphi(x,\lambda)$.

Выберем числа $\{\rho_{n,(j)},\, \alpha_{n,(j)}\}_{n\geqslant 0}$, $j \geqslant 1$, вида

$$\rho_{n,(j)} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\varkappa_{n,(j)}}{n^2}, \quad \alpha_{n,(j)} = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega_{n,(j)}}{n^2} + \frac{\varkappa_{n1,(j)}}{n^2}, \\ \{\varkappa_{n,(j)}\}, \{\varkappa_{n1,(j)}\} \in \ell_2,$$

так, что при $j \to \infty$

$$\Omega_j := \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |(n+1)\xi_{n,(j)}|^2\Big)^{1/2} \to 0, \quad \xi_{n,(j)} := |\rho_{n,(j)} - \rho_n| + |\alpha_{n,(j)} - \alpha_n|.$$

Обозначим

$$a_j(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\cos \rho_{n,(j)}x}{\alpha_{n,(j)}} - \frac{\cos nx}{\alpha_n^0}\Big), \quad j \geqslant 1.$$

В силу леммы 1.3.5 $a_j(x) \in W_2^2(0,2\pi)$. Пусть $G_j(x,t)$ — решение уравнения Гельфанда–Левитана:

$$G_j(x,t) + F_j(x,t) + \int_0^x G_j(x,s)F_j(s,t)\,ds = 0, \quad 0 < t < x,$$

где $F_j(x,t) = (a_j(x+t) + a_j(x-t))/2$. Положим

$$q_j(x) := 2\frac{d}{dx}G_j(x,x), \quad h_j := G_j(0,0),$$

$$\varphi_j(x,\lambda) = \cos \rho x + \int_0^x G_j(x,t)\cos \rho t\,dt. \tag{1.3.28}$$

Так как $a_j(x) \in W_2^2(0,2\pi)$, то из первой части доказательства леммы 1.3.8 вытекает

$$-\varphi_j''(x,\lambda) + q_j(x)\varphi_j(x,\lambda) = \lambda\varphi_j(x,\lambda), \quad \varphi_j(0,\lambda) = 1, \quad \varphi_j'(0,\lambda) = h_j.$$

Далее, в силу леммы 1.3.6, имеем: $\lim\limits_{j\to\infty} \|a_j(x) - a(x)\|_{W_2^1} = 0$. Отсюда с учетом леммы 1.3.1 получаем

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi} |G_j(x,t) - G(x,t)| = 0, \tag{1.3.29}$$

$$\lim_{j\to\infty} \|q_j - q\|_{L_2} = 0, \quad \lim_{j\to\infty} h_j = h. \tag{1.3.30}$$

Из (1.3.11), (1.5.28) и (1.5.29) вытекает

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant\pi} \max_{|\lambda|\leqslant r} |\varphi_j(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)| = 0.$$

С другой стороны, согласно лемме 1.3.3 и (1.3.30) имеем

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant\pi} \max_{|\lambda|\leqslant r} |\varphi_j(x,\lambda) - \widetilde{\varphi}(x,\lambda)| = 0.$$

Следовательно, $\widetilde{\varphi}(x,\lambda) \equiv \varphi(x,\lambda)$, и лемма 1.3.8 доказана. ☐

Лемма 1.3.9. *Справедливо соотношение*

$$H(x,t)=F(x,t)+\int\limits_0^t G(t,u)F(x,u)\,du,\quad 0\leqslant t\leqslant x,\tag{1.3.31}$$

где функция $H(x,t)$ *определена в* (1.3.12).

Доказательство. 1) Предположим сначала, что $a(x)\in W_2^2(0,2\pi)$. Дифференцируя (1.3.12) дважды, вычисляем

$$-\rho\sin\rho x=\varphi'(x,\lambda)+H(x,x)\varphi(x,\lambda)+\int\limits_0^x H_t(x,t)\varphi(t,\lambda)\,dt,\tag{1.3.32}$$

$$-\rho^2\cos\rho x=\varphi''(x,\lambda)+H(x,x)\varphi'(x,\lambda)+\\+\Big(\frac{dH(x,x)}{dx}+\frac{\partial H(x,t)}{\partial x}\Big|_{t=x}\Big)\varphi(x,\lambda)+\int\limits_0^x H_{xx}(x,t)\varphi(t,\lambda)\,dt.\tag{1.3.33}$$

С другой стороны, из (1.5.12) и (1.5.17) вытекает

$$-\rho^2\cos\rho x=\varphi''(x,\lambda)-q(x)\varphi(x,\lambda)+\int\limits_0^x H(x,t)(\varphi''(t,\lambda)-q(t)\varphi(t,\lambda))\,dt.$$

Интегрируя дважды по частям и используя (1.3.18), выводим

$$-\rho^2\cos\rho x=\varphi''(x,\lambda)+H(x,x)\varphi'(x,\lambda)-\Big(\frac{\partial H(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=x}+q(x)\Big)\varphi(x,\lambda)+\\+\Big(\frac{\partial H(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}-hH(x,0)\Big)+\int\limits_0^x(H_{tt}(x,t)-q(t)H(x,t))\varphi(t,\lambda)\,dt.$$

Вместе с (1.3.33) и $\dfrac{dH(x,x)}{dx}=\Big(\dfrac{\partial H(x,t)}{\partial x}+\dfrac{\partial H(x,t)}{\partial t}\Big)\Big|_{t=x}$ это дает

$$b_0(x)+b_1(x)\varphi(x,\lambda)+\int\limits_0^x b(x,t)\varphi(t,\lambda)\,dt=0,\tag{1.3.34}$$

где

$$b_0(x):=-\Big(\frac{\partial H(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}-hH(x,0)\Big),\quad b_1(x):=2\frac{dH(x,x)}{dx}+q(x),\\ b(x,t):=H_{xx}(x,t)-H_{tt}(x,t)+q(t)H(x,t).\tag{1.3.35}$$

Подставляя (1.1.54) в (1.3.34), получаем

$$b_0(x) + b_1(x)\cos\rho x + \int_0^x B(x,t)\cos\rho t\,dt = 0, \tag{1.3.36}$$

где

$$B(x,t) = b(x,t) + b_1(x)G(x,t) + \int_t^x b(x,s)G(s,t)\,ds. \tag{1.3.37}$$

Из (1.3.36) при $\rho = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{x}$ вытекает

$$b_0(x) + \int_0^x B(x,t)\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{x}\,dt = 0.$$

По лемме Римана–Лебега интеграл здесь стремится к нулю при $n \to \infty$; поэтому $b_0(x) = 0$. Далее, полагая в (1.3.36) $\rho = \frac{2n\pi}{x}$, получаем

$$b_1(x) + \int_0^x B(x,t)\cos\frac{2n\pi t}{x}\,dt = 0,$$

и, следовательно, $b_1(x) = 0$. Тогда (1.3.36) принимает вид

$$\int_0^x B(x,t)\cos\rho t\,dt = 0, \quad \rho \in \mathbf{C},$$

откуда вытекает, что $B(x,t) = 0$. Поэтому (1.3.37) приводит к соотношению

$$b(x,t) + \int_t^x b(x,s)G(s,t)\,ds = 0,$$

и, следовательно, $b(x,t) = 0$. Полагая в (1.3.32) $x = 0$, получаем

$$H(0,0) = -h. \tag{1.3.38}$$

Так как $b_0(x) = b_1(x) = b(x,t) = 0$, то из (1.3.35) и (1.3.38) заключаем, что функция $H(x,t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered} H_{xx}(x,t) - H_{tt}(x,t) + q(t)H(x,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant x, \\ H(x,x) = -h - \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt, \quad \frac{\partial H(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} - hH(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{1.3.39}$$

Верно также и обратное утверждение, а именно: если функция $H(x,t)$ удовлетворяет (1.3.39), то верно (1.3.12).

В самом деле, обозначим

$$\gamma(x,\lambda) := \varphi(x,\lambda) + \int_0^x H(x,t)\varphi(t,\lambda)\,dt.$$

Аналогично вышеизложенному вычисляем

$$\gamma''(x,\lambda)+\lambda\gamma(x,\lambda)=\Big(2\frac{dH(x,x)}{dx}+q(x)\Big)\varphi(x,\lambda)-\Big(\frac{\partial H(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}-hH(x,0)\Big)+$$
$$+\int_0^x (H_{xx}(x,t)-H_{tt}(x,t)+q(t)H(x,t))\varphi(t,\lambda)\,dt.$$

В силу (1.3.39) это дает: $\gamma''(x,\lambda)+\lambda\gamma(x,\lambda)=0$. Ясно, что $\gamma(0,\lambda)=1$, $\gamma'(0,\lambda)=0$. Следовательно, $\gamma(x,\lambda)=\cos\rho x$, т. е. верно (1.3.12).

Обозначим

$$\widetilde{H}(x,t) := F(x,t) + \int_0^t G(t,u)F(x,u)\,du. \tag{1.3.40}$$

Покажем, что функция $\widetilde{H}(x,t)$ удовлетворяет (1.3.39).

(i) Дифференцируя (1.3.40) по t и полагая $t=0$, получаем

$$\frac{\partial\widetilde{H}(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = G(0,0)F(x,0) = hF(x,0).$$

Так как $\widetilde{H}(x,0)=F(x,0)$, то это дает

$$\frac{\partial\widetilde{H}(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} - h\widetilde{H}(x,0) = 0.$$

(ii) Из (1.1.54) и (1.3.40) вытекает

$$\widetilde{H}(x,x) = F(x,x) + \int_0^x G(x,u)F(x,u)\,du = -G(x,x),$$

т. е. согласно (1.3.13)

$$\widetilde{H}(x,x) = -h - \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt.$$

(iii) Снова используя (1.3.40), вычисляем

$$\widetilde{H}_{tt}(x,t) = F_{tt}(x,t) + \frac{dG(t,t)}{dt}F(x,t) + G(t,t)F_t(x,t) + \\ + \frac{\partial G(t,u)}{\partial t}\Big|_{u=t}F(x,t) + \int\limits_0^t G_{tt}(t,u)F(x,u)\,du,$$

$$\widetilde{H}_{xx}(x,t) = F_{xx}(x,t) + \int\limits_0^t G(t,u)F_{xx}(x,u)\,du = \\ = F_{xx}(x,t) + \int\limits_0^t G(t,u)F_{uu}(x,u)\,du = F_{xx}(x,t) + G(t,t)F_t(x,t) - \\ - \frac{\partial G(t,u)}{\partial u}\Big|_{u=t}F(x,t) + \int\limits_0^t G_{uu}(t,u)F(x,u)\,du.$$

Следовательно,

$$\widetilde{H}_(x,t) - \widetilde{H}_{tt}(x,t) + q(t)\widetilde{H}(x,t) = \Big(q(t) - 2\frac{dG(t,t)}{dt}\Big)F(x,t) - \\ - \int\limits_0^t (G_{tt}(t,u) - G_{uu}(t,u) - q(t)G(t,u))\,dt.$$

В силу (1.3.13) и (1.3.25) это дает

$$\widetilde{H}_{xx}(x,t) - \widetilde{H}_{tt}(x,t) + q(t)\widetilde{H}(x,t) = 0.$$

Так как $\widetilde{H}(x,t)$ удовлетворяет (1.3.39), то, как было показано выше,

$$\cos\rho x = \varphi(x,\lambda) + \int\limits_0^x \widetilde{H}(x,t)\varphi(t,\lambda)\,dt.$$

Сравнивая это соотношение с (1.3.12), заключаем, что

$$\int\limits_0^x (\widetilde{H}(x,t) - H(x,t))\varphi(t,\lambda)\,dt = 0 \quad \text{при всех } \lambda,$$

т. е. $\widetilde{H}(x,t) = H(x,t)$.

2) Рассмотрим теперь общий случай, когда выполняются соотношения (1.3.8), (1.3.9). Тогда $a(x) \in W_2^1(0,2\pi)$. Повторяя рассуждения из

доказательства леммы 1.3.8, построим числа $\{\rho_{n,(j)}, \alpha_{n,(j)}\}_{n\geqslant 0}$, $j \geqslant 1$, и функции $a_j(x) \in W_2^2(0, 2\pi)$, $j \geqslant 1$, такие, что

$$\lim_{j\to\infty} \|a_j(x) - a(x)\|_{W_2^1} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi} |F_j(x,t) - F(x,t)| = 0,$$

и верно (1.3.29). Аналогично

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi} |H_j(x,t) - H(x,t)| = 0.$$

Выше было доказано, что

$$H_j(x,t) = F_j(x,t) + \int\limits_0^t G_j(t,u)F_j(x,u)\,du.$$

При $j \to \infty$ приходим к (1.3.31), и лемма 1.3.9 доказана. ☐

Лемма 1.3.10. *Для каждой функции* $g(x) \in L_2(0,\pi)$ имеет место соотношение

$$\int\limits_0^\pi g^2(x)\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\alpha_n}\Bigl(\int\limits_0^\pi g(t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt\Bigr)^2. \tag{1.3.41}$$

Доказательство. Обозначим

$$Q(\lambda) := \int\limits_0^\pi g(t)\varphi(t,\lambda)\,dt.$$

С учетом (1.1.54) преобразуем $Q(\lambda)$ к виду

$$Q(\lambda) = \int\limits_0^\pi h(t)\cos\rho t\,dt,$$

где

$$h(t) = g(t) + \int\limits_t^\pi G(s,t)g(s)\,ds. \tag{1.3.42}$$

Аналогично с учетом (1.5.12) имеем

$$g(t) = h(t) + \int\limits_t^\pi H(s,t)h(s)\,ds. \tag{1.3.43}$$

Используя (1.3.42), вычисляем

$$\int_0^\pi h(t)F(x,t)\,dt = \int_0^\pi \Big(g(t) + \int_t^\pi G(u,t)g(u)\,du\Big)F(x,t)\,dt =$$
$$= \int_0^\pi g(t)\Big(F(x,t) + \int_0^t G(t,u)F(x,u)\,du\Big)\,dt =$$
$$= \int_0^x g(t)\Big(F(x,t) + \int_0^t G(t,u)F(x,u)\,du\Big)\,dt +$$
$$+ \int_x^\pi g(t)\Big(F(x,t) + \int_0^t G(t,u)F(x,u)\,du\Big)\,dt.$$

Отсюда, в силу (1.3.31) и (1.3.11), выводим

$$\int_0^\pi h(t)F(x,t)\,dt = \int_0^x g(t)H(x,t)\,dt - \int_x^\pi g(t)G(t,x)\,dt. \tag{1.3.44}$$

Из (1.3.10) и равенства Парсеваля вытекает

$$\int_0^\pi h^2(t)\,dt + \int_0^\pi\int_0^\pi h(x)h(t)F(x,t)\,dxdt =$$
$$= \int_0^\pi h^2(t)\,dt + \sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{1}{\alpha_n}\Big(\int_0^\pi h(t)\cos\rho_n t\,dt\Big)^2 - \frac{1}{\alpha_n^0}\Big(\int_0^\pi h(t)\cos nt\,dt\Big)^2\Big) =$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{Q^2(n^2)}{\alpha_n^0} + \sum_{n=0}^\infty\Big(\frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{Q^2(n^2)}{\alpha_n^0}\Big) = \sum_{n=0}^\infty \frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n}.$$

Используя (1.3.44), получаем

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n} = \int_0^\pi h^2(t)\,dt + \int_0^\pi h(x)\Big(\int_0^x g(t)H(x,t)\,dt\Big)\,dx -$$
$$-\int_0^\pi h(x)\Big(\int_x^\pi g(t)G(t,x)\,dt\Big)\,dx = \int_0^\pi h^2(t)\,dt + \int_0^\pi g(t)\Big(\int_t^\pi H(x,t)h(x)\,dx\Big)\,dt -$$
$$-\int_0^\pi h(x)\Big(\int_x^\pi g(t)G(t,x)\,dt\Big)\,dx.$$

В силу (1.3.42) и (1.3.43) заключаем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n}=\int_0^{\pi}h^2(t)\,dt+\int_0^{\pi}g(t)(g(t)-h(t))\,dt-\\ -\int_0^{\pi}h(x)(h(x)-g(x))\,dx=\int_0^{\pi}g^2(t)\,dt,$$

т. е. верно (1.3.41). □

Следствие 1.3.1. *Для любых функций $f(x), g(x)\in L_2(0,\pi)$ имеет место равенство*

$$\int_0^{\pi}f(x)g(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi}f(t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt\int_0^{\pi}g(t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt. \tag{1.3.45}$$

В самом деле, (1.3.45) следует из соотношения (1.3.41), примененного к функции $f+g$.

Лемма 1.3.11. *Справедливо соотношение*

$$\int_0^{\pi}\varphi(t,\lambda_k)\varphi(t,\lambda_n)\,dt=\begin{cases}0, & n\neq k,\\ \alpha_n, & n=k.\end{cases} \tag{1.3.46}$$

Доказательство. 1) Пусть $f(x)\in W_2^2[0,\pi]$. Рассмотрим ряд

$$f^*(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi(x,\lambda_n), \tag{1.3.47}$$

где

$$c_n:=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi}f(x)\varphi(x,\lambda_n)\,dx. \tag{1.3.48}$$

Используя лемму 1.3.8 и интегрирование по частям, вычисляем

$$c_n=\frac{1}{\alpha_n\lambda_n}\int_0^{\pi}f(x)\Big(-\varphi''(x,\lambda_n)+q(x)\varphi(x,\lambda_n)\Big)\,dx=\\ =\frac{1}{\alpha_n\lambda_n}\Big(hf(0)-f'(0)+\varphi(\pi,\lambda_n)f'(\pi)-\varphi'(\pi,\lambda_n)f(\pi)+\\ +\int_0^{\pi}\varphi(x,\lambda_n)(-f''(x)+q(x)f(x))\,dx\Big).$$

Применяя асимптотические формулы (1.3.8) и (1.1.15), нетрудно убедиться, что при $n \to \infty$

$$c_n = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad \varphi(x, \lambda_n) = O(1)$$

равномерно по $x \in [0, \pi]$. Следовательно, ряд (1.3.47) сходится абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$. Согласно (1.3.45) и (1.3.48) имеем

$$\int_0^\pi f(x) g(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^\pi g(t) \varphi(t, \lambda_n)\, dt =$$

$$= \int_0^\pi g(t) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(t, \lambda_n)\, dt = \int_0^\pi g(t) f^*(t)\, dt.$$

В силу произвольности $g(x)$ заключаем, что $f^*(x) = f(x)$, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(x, \lambda_n). \tag{1.3.49}$$

2) Зафиксируем $k \geqslant 0$ и положим $f(x) = \varphi(x, \lambda_k)$. Тогда в силу (1.3.49)

$$\varphi(x, \lambda_k) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{nk} \varphi(x, \lambda_n), \quad c_{nk} = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^\pi \varphi(x, \lambda_k) \varphi(x, \lambda_n)\, dx.$$

Далее, система функций $\{\cos \rho_n x\}_{n \geqslant 0}$ является минимальной в $L_2(0, \pi)$ (см. утверждение 1.6.6), и, следовательно, в силу (1.1.54), система функций $\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n \geqslant 0}$ также является минимальной в $L_2(0, \pi)$. Поэтому $c_{nk} = \delta_{nk}$ (δ_{nk} — символ Кронекера), и приходим к (1.3.46). Лемма 1.3.11 доказана. ☐

Лемма 1.3.12. *При всех $n, m \geqslant 0$ имеет место равенство*

$$\frac{\varphi'(\pi, \lambda_n)}{\varphi(\pi, \lambda_n)} = \frac{\varphi'(\pi, \lambda_m)}{\varphi(\pi, \lambda_m)}. \tag{1.3.50}$$

Доказательство. Из (1.1.34) вытекает

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^\pi \varphi(x, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_m) dx = \Big(\varphi(x, \lambda_n) \varphi'(x, \lambda_m) - \varphi'(x, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_m)\Big)\Big|_0^\pi.$$

Учитывая (1.3.46), получаем

$$\varphi(\pi, \lambda_n) \varphi'(\pi, \lambda_m) - \varphi'(\pi, \lambda_n) \varphi(\pi, \lambda_m) = 0. \tag{1.3.51}$$

Ясно, что $\varphi(\pi, \lambda_n) \neq 0$ при всех $n \geqslant 0$. В самом деле, если бы $\varphi(\pi, \lambda_m) = 0$ при некотором m, то $\varphi'(\pi, \lambda_m) \neq 0$ и, в силу (1.3.51),

$\varphi(\pi,\lambda_n)=0$ при всех n, что невозможно, так как $\varphi(\pi,\lambda_n)=(-1)^n+O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Так как $\varphi(\pi,\lambda_n)\neq 0$ при всех $n\geqslant 0$, то (1.3.50) следует из (1.3.51). Лемма 1.3.12 доказана. □

Обозначим $\widetilde{H}=-\varphi'(\pi,\lambda_n)(\varphi(\pi,\lambda_n))^{-1}$. Отметим, что согласно (1.3.50) $\widetilde{H}$ не зависит от n. Тогда

$$\varphi'(\pi,\lambda_n)+\widetilde{H}\varphi(\pi,\lambda_n)=0,\quad n\geqslant 0.$$

Вместе с леммой 1.3.8 и (1.3.46) это дает, что числа $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ являются спектральными данными для построенной краевой задачи $L(q(x),h,\widetilde{H})$. Ясно, что $\widetilde{H}=H$, где H определяется по формуле (1.3.14). Тем самым теорема 1.3.2 доказана. □

Пример 1.3.1. Пусть $\lambda_n=n^2$ $(n\geqslant 0)$, $\alpha_n=\pi/2$ $(n\geqslant 1)$, и пусть $\alpha_0>0$ — произвольное положительное число. Обозначим $a:=\dfrac{1}{\alpha_0}-\dfrac{1}{\pi}$. Воспользуемся алгоритмом 1.3.1:

1) согласно (1.3.10) $F(x,t)\equiv a$;

2) решая уравнение (1.3.11), находим: $G(x,t)=-a/(1+ax)$;

3) в силу (1.3.13), (1.3.14)

$$q(x)=\frac{2a^2}{(1+ax)^2},\quad h=-a,\quad H=\frac{a}{1+a\pi}=\frac{a\alpha_0}{\pi}.$$

Согласно (1.1.54)

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x-\frac{a}{1+ax}\frac{\sin\rho x}{\rho}.$$

Замечание 1.3.1. Аналогичные результаты верны также и для других видов краевых условий, т. е. для краевых задач L_1, L^0 и L_1^0. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3.3. *Для того чтобы вещественные числа* $\{\mu_n,\ \alpha_{n1}\}_{n\geqslant 0}$ *были спектральными данными некоторой краевой задачи* $L_1(q(x),h)$ *с* $q(x)\in L_2(0,\pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mu_n\neq\mu_m$ $(n\neq m)$, $\alpha_{n1}>0$, *и выполнялись соотношения* (1.1.29), (1.1.30).

1.3.3. Восстановление дифференциальных операторов по двум спектрам. Пусть $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ и $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ — собственные значения краевых задач L и L_1 соответственно. Тогда имеют место асимптотические формулы (1.1.13) и (1.1.29), а также представления (1.1.26) и (1.1.28) для характеристических функций $\Delta(\lambda)$ и $d(\lambda)$ соответственно.

Теорема 1.3.4. *Для того чтобы вещественные числа* $\{\lambda_n,\ \mu_n\}_{n\geqslant 0}$ *были спектрами краевых задач* L *и* L_1 *с* $q(x)\in L_2(0,\pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* (1.1.13), (1.1.29) *и* (1.1.33). *Функция* $q(x)$ *и числа* h *и* H *строятся по следующему алгоритму*:

(i) *по заданным числам* $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geqslant 0}$ *находим числа* α_n *по формуле* (1.1.35), *где* $\Delta(\lambda)$ *и* $d(\lambda)$ *строятся согласно* (1.1.26) *и* (1.1.28);

(ii) *по числам* $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *строим* $q(x)$, h *и* H *по алгоритму* 1.3.1.

Необходимость условий теоремы 1.3.4 доказана выше; здесь мы докажем достаточность. Пусть заданы вещественные числа $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geqslant 0}$, удовлетворяющие условиям теоремы 1.3.4. Построим функции $\Delta(\lambda)$ и $d(\lambda)$ по формулам (1.1.26) и (1.1.28), а затем найдем числа α_n по формуле (1.1.35).

Наш план — использовать теорему 1.3.2. Для этого мы должны получить требуемую в теореме 1.3.2 асимптотику чисел α_n. Это кажется трудной задачей, так как функции $\Delta(\lambda)$ и $d(\lambda)$ по построению являются бесконечными произведениями. Но, к счастью, для вычисления асимптотики α_n можно также использовать теорему 1.3.2 в качестве вспомогательного утверждения. В самом деле, в силу теоремы 1.3.2 существует краевая задача $\widetilde{L} = L(\widetilde{q}(x), \widetilde{h}, \widetilde{H})$ с $\widetilde{q}(x) \in L_2(0,\pi)$ (неединственная) такая, что числа $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ являются ее собственными значениями. Тогда функция $\Delta(\lambda)$ является характеристической функцией задачи $\widetilde{L}$, и, следовательно, согласно (1.1.22) имеем

$$\dot{\Delta}(\lambda_n) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} + \frac{\varkappa_n}{n}, \qquad \{\varkappa_n\} \in l_2.$$

Кроме того, $\operatorname{sign} \dot{\Delta}(\lambda_n) = (-1)^{n+1}$. Аналогично, используя теорему 1.3.3, можно получить

$$d(\lambda_n) = (-1)^n + \frac{\varkappa_n}{n}, \qquad \{\varkappa_n\} \in l_2.$$

Кроме того, учитывая (1.1.33), заключаем, что $\operatorname{sign} d(\lambda_n) = (-1)^n$. Поэтому, с учетом (1.1.35), приходим к соотношениям

$$\alpha_n > 0, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\varkappa_{n1}}{n}, \qquad \{\varkappa_{n1}\} \in l_2.$$

Тогда в силу теоремы 1.3.2 существует краевая задача $L = L(q(x), h, H)$ с $q(x) \in L_2(0,\pi)$ такая, что числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ являются спектральными данными L. Через $\{\widetilde{\mu}_n\}_{n\geqslant 0}$ обозначим собственные значения краевой задачи $L_1(q(x), h)$. Осталось показать, что $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$ при всех $n \geqslant 0$.

Пусть $\widetilde{d}(\lambda)$ — характеристическая функция задачи L_1. Тогда в силу (1.1.35) $\alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n)\widetilde{d}(\lambda_n)$. С другой стороны, по построению $\alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n)d(\lambda_n)$, и мы приходим к равенству $d(\lambda_n) = \widetilde{d}(\lambda_n)$, $n \geqslant 0$. Следовательно, функция

$$Z(\lambda) := \frac{d(\lambda) - \widetilde{d}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

является целой по λ. С другой стороны, в силу (1.1.9) имеем

$$|d(\lambda)| \leqslant C\exp(|\tau|\pi), \qquad |\widetilde{d}(\lambda)| \leqslant C\exp(|\tau|\pi).$$

Учитывая (1.1.18), получаем при фиксированном $\delta > 0$:

$$|Z(\lambda)| \leqslant C|\rho|^{-1}, \quad \lambda \in G_\delta, \quad |\rho| \geqslant \rho^*.$$

Используя принцип максимума модуля для аналитических функций [206, с. 204] и теорему Лиувилля [206, с. 209], заключаем, что $Z(\lambda) \equiv 0$, т. е. $d(\lambda) \equiv \widetilde{d}(\lambda)$, и, следовательно, $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$ при всех $n \geqslant 0$. □

§ 1.4. Метод спектральных отображений

Метод спектральных отображений, представленный в этом параграфе, является эффективным инструментом для исследования широкого класса обратных задач не только для операторов Штурма–Лиувилля, но также и для других более сложных классов операторов, таких как дифференциальные операторы произвольных порядков, дифференциальные операторы с особенностями и точками поворота, пучки дифференциальных операторов и др. В методе спектральных отображений используются идеи метода контурного интеграла. Более того, метод спектральных отображений можно рассматривать как вариант метода контурного интеграла, адаптированный к решению обратных задач. В этом параграфе метод спектральных отображений применяется для операторов Штурма–Лиувилля на конечном интервале. Для операторов Штурма–Лиувилля метод спектральных отображений дает те же результаты, что и метод оператора преобразования (см. § 1.3). Однако метод спектральных отображений имеет более широкую область применения для других классов обратных задач (см., например, гл. 3, 4).

Отправной точкой в методе спектральных отображений является интегральная формула Коши для аналитических функций [206, с. 166]. Мы применяем ее в комплексной плоскости спектрального параметра λ для специально построенных аналитических по λ функций, имеющих особенности, связанные со спектральными характеристиками оператора (см. доказательство леммы 1.4.3). Это позволяет свести обратную задачу к так называемому *основному уравнению*, которое является линейным уравнением в соответствующем банаховом пространстве последовательностей. В п. 1.4.1 дается вывод основного уравнения и доказывается его однозначная разрешимость. Используя решение основного уравнения, мы получаем алгоритм решения обратной задачи. В п. 1.4.2 даются необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. В п. 1.4.3 исследуется обратная задача для несамосопряженного оператора Штурма–Лиувилля.

1.4.1. Основное уравнение обратной задачи. Рассмотрим краевую задачу $L = L(q(x), h, H)$ вида (1.1.1)–(1.1.2) с вещественными $q(x) \in L_2(0, \pi)$, h и H. Пусть $\{\lambda_n,\ \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ — спектральные данные L, $\rho_n = \sqrt{\lambda_n}$. Тогда верны соотношения (1.3.8), (1.3.9). В этом пункте приведено решение обратной задачи восстановления L по спектральным данным с использованием идей метода контурного интеграла.

Отметим, что если функции $y(x,\lambda)$ и $z(x,\mu)$ являются решениями уравнений $\ell y=\lambda y$ и $\ell z=\mu z$ соответственно, то

$$\frac{d}{dx}\langle y,z\rangle=(\lambda-\mu)yz,\quad \langle y,z\rangle:=yz'-y'z. \tag{1.4.1}$$

Обозначим

$$D(x,\lambda,\mu):=\frac{\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}=\int\limits_0^x\varphi(t,\lambda)\varphi(t,\mu)\,dt. \tag{1.4.2}$$

Последнее равенство следует из (1.4.1).

Выберем модельную краевую задачу $\widetilde{L}=L(\widetilde{q}(x),\widetilde{h},\widetilde{H})$ с вещественными $\widetilde{q}(x)\in L_2(0,\pi)$, $\widetilde{h}$ и $\widetilde{H}$ так, чтобы $\widetilde{\omega}=\omega$ (можно взять, например, $\widetilde{q}(x)\equiv 0$, $\widetilde{h}=0$, $\widetilde{H}=\omega$ или $\widetilde{h}=\widetilde{H}=0$, $\widetilde{q}(x)\equiv 2\omega/\pi$). Пусть $\{\widetilde{\lambda}_n,\ \widetilde{\alpha}_n\}_{n\geqslant 0}$ — спектральные данные задачи $\widetilde{L}$.

Замечание 1.4.1. Без ограничения общности можно рассматривать случай $\omega=0$. Этого можно добиться сдвигом спектра $\{\lambda_n\}\to\to\{\lambda_n+C\}$, поскольку если $\{\lambda_n\}$ — спектр задачи $L(q(x),h,H)$, то $\{\lambda_n+C\}$ — спектр задачи $L(q(x)+C,h,H)$. В этом случае $\widetilde{\omega}=0$, и можно положить $\widetilde{q}(x)\equiv 0$, $\widetilde{h}=\widetilde{H}=0$. Однако мы будем рассматривать общий случай произвольного ω.

Положим

$$\xi_n:=|\rho_n-\widetilde{\rho}_n|+|\alpha_n-\widetilde{\alpha}_n|.$$

Так как $\omega=\widetilde{\omega}$, то из (1.3.8) и аналогичных формул для $\widetilde{\rho}_n$ и $\widetilde{\alpha}_n$ вытекает

$$\Omega:=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)\xi_n)^2\Big)^{1/2}<\infty,\quad \sum_n\xi_n<\infty. \tag{1.4.3}$$

Обозначим

$$\lambda_{n0}=\lambda_n,\ \lambda_{n1}=\widetilde{\lambda}_n,\ \alpha_{n0}=\alpha_n,\ \alpha_{n1}=\widetilde{\alpha}_n,$$
$$\varphi_{ni}(x)=\varphi(x,\lambda_{ni}),\ \widetilde{\varphi}_{ni}(x)=\widetilde{\varphi}(x,\lambda_{ni}),$$
$$P_{ni,kj}(x)=\frac{1}{\alpha_{kj}}D(x,\lambda_{ni},\lambda_{kj}),\ \widetilde{P}_{ni,kj}(x)=\frac{1}{\alpha_{kj}}\widetilde{D}(x,\lambda_{ni},\lambda_{kj}),$$
$$i,j\in\{0,1\},\quad n,k\geqslant 0. \tag{1.4.4}$$

Тогда, согласно (1.4.2), имеем

$$P_{ni,kj}(x)=\frac{\langle\varphi_{ni}(x),\varphi_{kj}(x)\rangle}{\alpha_{kj}(\lambda_{ni}-\lambda_{kj})}=\frac{1}{\alpha_{kj}}\int\limits_0^x\varphi_{ni}(t)\varphi_{kj}(t)\,dt.$$

$$\widetilde{P}_{ni,kj}(x)=\frac{\langle\widetilde{\varphi}_{ni}(x),\widetilde{\varphi}_{kj}(x)\rangle}{\alpha_{kj}(\lambda_{ni}-\lambda_{kj})}=\frac{1}{\alpha_{kj}}\int\limits_0^x\widetilde{\varphi}_{ni}(t)\widetilde{\varphi}_{kj}(t)\,dt.$$

Ясно, что

$$P'_{ni,kj}(x)=\frac{1}{\alpha_{kj}}\varphi_{ni}(x)\varphi_{kj}(x),\quad \widetilde{P}'_{ni,kj}(x)=\frac{1}{\alpha_{kj}}\widetilde{\varphi}_{ni}(x)\widetilde{\varphi}_{kj}(x).\qquad(1.4.5)$$

Ниже мы будем использовать следующий вариант леммы Шварца ([206, с. 363]).

Лемма 1.4.1. *Пусть $f(\rho)$ является аналитической функцией в круге $|\rho-\rho^0|<a$, и пусть $f(\rho^0)=0$, $|f(\rho)|\leqslant A$ при $|\rho-\rho^0|<a$. Тогда $|f(\rho)|\leqslant|\rho-\rho^0|A/a$ при $|\rho-\rho^0|<a$.*

Для решения обратной задачи нам потребуются вспомогательные утверждения.

Лемма 1.4.2. *При $x\in[0,\pi]$, $n,k\geqslant 0$, $i,j,\nu=0,1$, имеют место оценки*

$$|\varphi_{ni}^{(\nu)}(x)|\leqslant C(n+1)^\nu,\quad |\varphi_{n0}^{(\nu)}(x)-\varphi_{n1}^{(\nu)}(x)|\leqslant C\xi_n(n+1)^\nu,\qquad(1.4.6)$$

$$|P_{ni,kj}(x)|\leqslant\frac{C}{|n-k|+1},\quad |P_{ni,kj}^{(\nu+1)}(x)|\leqslant C(k+n+1)^\nu,$$

$$|P_{ni,k0}(x)-P_{ni,k1}(x)|\leqslant\frac{C\xi_k}{|n-k|+1},|P_{n0,kj}(x)-P_{n1,kj}(x)|\leqslant\frac{C\xi_n}{|n-k|+1},$$

$$|P_{n0,k0}(x)-P_{n1,k0}(x)-P_{n0,k1}(x)+P_{n1,k1}(x)|\leqslant\frac{C\xi_n\xi_k}{|n-k|+1}.\qquad(1.4.7)$$

Аналогичные оценки верны также для $\widetilde{\varphi}_{ni}(x)$, $\widetilde{P}_{ni,kj}(x)$.

Доказательство. Из (1.1.9) и (1.3.8) вытекает: $|\varphi^{(\nu)}(x,\lambda_{ni})|\leqslant C(n+1)^\nu$. Кроме того, при фиксированном $a>0$ имеем

$$|\varphi^{(\nu)}(x,\lambda)|\leqslant C(n+1)^\nu,\quad |\rho-\rho_{n1}|\leqslant a.$$

Применяя лемму Шварца в ρ-плоскости к функции $f(\rho):=\varphi^{(\nu)}(x,\lambda)-\varphi^{(\nu)}(x,\lambda_{n1})$ при фиксированных ν,n,x и a, получаем

$$|\varphi^{(\nu)}(x,\lambda)-\varphi^{(\nu)}(x,\lambda_{n1})|\leqslant C(n+1)^\nu|\rho-\rho_{n1}|,\quad |\rho-\rho_{n1}|\leqslant a.$$

Следовательно, $|\varphi_{n0}^{(\nu)}(x)-\varphi_{n1}^{(\nu)}(x)|\leqslant C(n+1)^\nu|\rho_{n0}-\rho_{n1}|$, и (1.4.6) доказано.

Покажем, что

$$|D(x,\lambda,\lambda_{kj})|\leqslant\frac{C\exp(|\tau|x)}{|\rho\mp k|+1},\quad \lambda=\rho^2,\quad \pm\mathrm{Re}\,\rho\geqslant 0,$$

$$\tau:=\mathrm{Im}\,\rho,\quad k\geqslant 0.\qquad(1.4.8)$$

Пусть для определенности $\sigma:=\mathrm{Re}\,\rho\geqslant 0$. Зафиксируем $\delta_0>0$. При $|\rho-\rho_{kj}|\geqslant\delta_0$ в силу (1.4.2), (1.1.9) и (1.3.8) имеем

$$|D(x,\lambda,\lambda_{kj})|=\frac{|\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda_{kj})\rangle|}{|\lambda-\lambda_{kj}|}\leqslant C\exp(|\tau|x)\frac{|\rho|+|\rho_{kj}|}{|\rho^2-\rho_{kj}^2|}.$$

Так как

$$\frac{|\rho|+|\rho_{kj}|}{|\rho+\rho_{kj}|}\leqslant\frac{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}+|\rho_{kj}|}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2+\rho_{kj}^2}}\leqslant\sqrt{2}$$

(здесь используется неравенство $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$ при вещественных a,b), то

$$|D(x,\lambda,\lambda_{kj})|\leqslant\frac{C\exp(|\tau|x)}{|\rho-\rho_{kj}|}.$$

При $|\rho-\rho_{kj}|\geqslant\delta_0$ имеем

$$\frac{|\rho-k|+1}{|\rho-\rho_{kj}|}\leqslant 1+\frac{|\rho_{kj}-k|+1}{|\rho-\rho_{kj}|}\leqslant C,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{|\rho-\rho_{kj}|}\leqslant\frac{C}{|\rho-k|+1}.$$

Это дает (1.4.8) при $|\rho-\rho_{kj}|\geqslant\delta_0$. При $|\rho-\rho_{kj}|\leqslant\delta_0$

$$|D(x,\lambda,\lambda_{kj})|=\Bigl|\int\limits_0^x\varphi(t,\lambda)\varphi(t,\lambda_{kj})\,dt\Bigr|\leqslant C\exp(|\tau|x),$$

т. е. (1.4.8) верно также и при $|\rho-\rho_{kj}|\leqslant\delta_0$. Аналогично можно показать, что

$$|D(x,\lambda,\mu)|\leqslant\frac{C\exp(|\tau|x)}{|\rho\mp\theta|+1},\quad \mu=\theta^2,\quad |\mathrm{Im}\,\theta|\leqslant C_0,\quad \pm\mathrm{Re}\,\rho\,\mathrm{Re}\,\theta\geqslant 0.$$

Используя лемму Шварца, получаем

$$|D(x,\lambda,\lambda_{k1})-D(x,\lambda,\lambda_{k0})|\leqslant\frac{C\xi_k\exp(|\tau|x)}{|\rho\mp k|+1},\quad \pm\mathrm{Re}\rho\geqslant 0,\quad k\geqslant 0.\quad(1.4.9)$$

В частности, это дает

$$|D(x,\lambda_{ni},\lambda_{k1})-D(x,\lambda_{ni},\lambda_{k0})|\leqslant\frac{C\xi_k}{|n-k|+1}.$$

Симметрично выводим

$$|D(x,\lambda_{n1},\lambda_{kj})-D(x,\lambda_{n0},\lambda_{kj})|\leqslant\frac{C\xi_n}{|n-k|+1}.$$

Применяя лемму Шварца к функции $Q_k(x,\lambda):=D(x,\lambda,\lambda_{k1})-D(x,\lambda,\lambda_{k0})$ при фиксированных k и x, получаем

$$|D(x,\lambda_{n0},\lambda_{k0})-D(x,\lambda_{n1},\lambda_{k0})-D(x,\lambda_{n0},\lambda_{k1})+{}$$
$${}+D(x,\lambda_{n1},\lambda_{k1})|\leqslant\frac{C\xi_n\xi_k}{|n-k|+1}.$$

Эти оценки вместе с (1.4.4), (1.4.5) и (1.3.8) приводят к (1.4.7). □

Лемма 1.4.3. *Справедливы соотношения*

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}\varphi_{k0}(x)-\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\varphi_{k1}(x)\Big), \tag{1.4.10}$$

$$\frac{\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}-\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}+ \\ +\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}\frac{\langle\varphi_{k0}(x),\varphi(x,\mu)\rangle}{(\lambda_{k0}-\mu)}- \\ -\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\frac{\langle\varphi_{k1}(x),\varphi(x,\mu)\rangle}{(\lambda_{k1}-\mu)}\Big)=0, \tag{1.4.11}$$

причем ряды сходятся абсолютно и равномерно по $x\in[0,\pi]$ и λ, μ на компактах.

Доказательство. 1) Обозначим $\lambda'=\min\limits_{ni}\lambda_{ni}$ и возьмем фиксированное $\delta>0$. В λ-плоскости рассмотрим замкнутый контур γ_N (с обходом против часовой стрелки) вида: $\gamma_N=\gamma_N^+\cup\gamma_N^-\cup\gamma'\cup\Gamma_N'$, где

$$\gamma_N^{\pm}=\{\lambda:\ \pm\mathrm{Im}\,\lambda=\delta,\ \mathrm{Re}\,\lambda\geqslant\lambda',\ |\lambda|\leqslant\Big(N+\frac{1}{2}\Big)^2\},$$
$$\gamma'=\{\lambda:\ \lambda-\lambda'=\delta\exp(i\alpha),\ \alpha\in\Big(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\Big)\},$$
$$\Gamma_N'=\Gamma_N\cap\{\lambda:\ |\mathrm{Im}\,\lambda|\leqslant\delta,\ \mathrm{Re}\,\lambda>0\},\quad \Gamma_N=\{\lambda:\ |\lambda|=\Big(N+\frac{1}{2}\Big)^2\}.$$

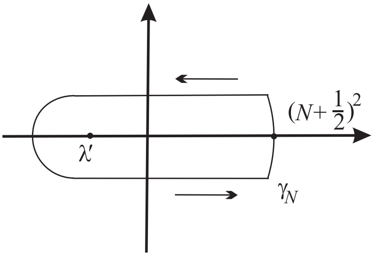

рис. 1.4.1

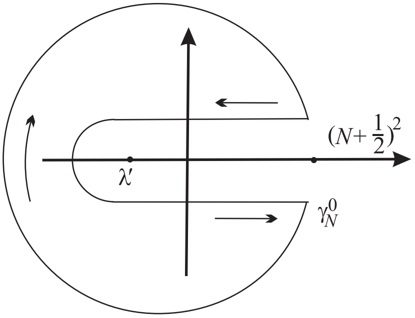

рис. 1.4.2

Обозначим $\gamma_N^0=\gamma_N^+\cup\gamma_N^-\cup\gamma'\cup(\Gamma_N\setminus\Gamma_N')$ (с обходом по часовой стрелке). Пусть $P(x,\lambda)=[P_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=1,2}$ — матрица, определяемая формулой (1.2.15). Из (1.2.16) и (1.2.9) вытекает, что при каждом фиксированном x функции $P_{jk}(x,\lambda)$ являются мероморфными по λ

с простыми полюсами $\{\lambda_n\}$ и $\{\widetilde{\lambda}_n\}$. В силу интегральной формулы Коши [206, с. 166] имеет место равенство

$$P_{1k}(x,\lambda)-\delta_{1k}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N^0}\frac{P_{1k}(x,\xi)-\delta_{1k}}{\lambda-\xi}\,d\xi,\quad k=1,2,$$

где $\lambda\in int\,\gamma_N^0$, а δ_{jk} — символ Кронекера. Следовательно,

$$P_{1k}(x,\lambda)-\delta_{1k}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\frac{P_{1k}(x,\xi)}{\lambda-\xi}\,d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N}\frac{P_{1k}(x,\xi)-\delta_{1k}}{\lambda-\xi}\,d\xi,$$

где Γ_N проходится против часовой стрелки. Подставляя последнее выражение в (1.2.17), приходим к соотношению

$$\varphi(x,\lambda)=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\frac{\widetilde{\varphi}(x,\lambda)P_{11}(x,\xi)+\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)P_{12}(x,\xi)}{\lambda-\xi}\,d\xi+\varepsilon_N(x,\lambda),$$

где

$$\varepsilon_N(x,\lambda)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N}\frac{\widetilde{\varphi}(x,\lambda)(P_{11}(x,\xi)-1)+\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)P_{12}(x,\xi)}{\lambda-\xi}\,d\xi.$$

В силу (1.2.18) имеем

$$\lim_{N\to\infty}\varepsilon_N(x,\lambda)=0 \tag{1.4.12}$$

равномерно по $x\in[0,\pi]$ и λ на компактах. Учитывая (1.2.16), вычисляем

$$\varphi(x,\lambda)=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\Big(\widetilde{\varphi}(x,\lambda)(\varphi(x,\xi)\widetilde{\Phi}'(x,\xi)-\Phi(x,\xi)\widetilde{\varphi}'(x,\xi))+$$

$$+\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)(\Phi(x,\xi)\widetilde{\varphi}(x,\xi)-\varphi(x,\xi)\widetilde{\Phi}(x,\xi)\Big)\frac{d\xi}{\lambda-\xi}+\varepsilon_N(x,\lambda).$$

С учетом (1.2.9) это дает

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\xi)\rangle}{\lambda-\xi}\widehat{M}(\xi)\varphi(x,\xi)\,d\xi+\varepsilon_N(x,\lambda), \tag{1.4.13}$$

где $\widehat{M}(\lambda)=M(\lambda)-\widetilde{M}(\lambda)$, так как слагаемые с $S(x,\xi)$ пропадают по теореме Коши. Из (1.2.14) вытекает

$$\operatorname*{Res}_{\xi=\lambda_{kj}}\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\xi)\rangle}{\lambda-\xi}\widehat{M}(\xi)\varphi(x,\xi)=\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{kj}(x)\rangle}{\alpha_{kj}(\lambda-\lambda_{kj})}\varphi_{kj}(x).$$

Вычисляя интеграл в (1.4.13) по теореме о вычетах [206, с. 239] и используя (1.4.12), приходим к (1.4.10).

2) Так как
$$\frac{1}{\lambda-\mu}\Big(\frac{1}{\lambda-\xi}-\frac{1}{\mu-\xi}\Big)=\frac{1}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\,,$$
то в силу интегральной формулы Коши имеем
$$\frac{P_{jk}(x,\lambda)-P_{jk}(x,\mu)}{\lambda-\mu}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N^0}\frac{P_{jk}(x,\xi)}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\,d\xi,\quad k,j=1,2;\quad \lambda,\mu\in int\,\gamma_N^0.$$

Действуя как и в первой части доказательства и используя (1.2.18), (1.2.19), получаем
$$\frac{P_{jk}(x,\lambda)-P_{jk}(x,\mu)}{\lambda-\mu}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\frac{P_{jk}(x,\xi)}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\,d\xi+\varepsilon_{Njk}(x,\lambda,\mu),\quad (1.4.14)$$
где $\lim\limits_{N\to\infty}\varepsilon_{Njk}(x,\lambda,\mu)=0,\quad j,k=\overline{1,n}$. Из (1.2.16) и (1.2.11) вытекает
$$\begin{gathered}P_{11}(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)-P_{21}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)=\widetilde{\varphi}'(x,\lambda),\\ P_{22}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-P_{12}(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)=\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\end{gathered}\qquad (1.4.15)$$
$$P(x,\lambda)\begin{bmatrix}y(x)\\ y'(x)\end{bmatrix}=\langle y(x),\widetilde{\Phi}(x,\lambda)\rangle\begin{bmatrix}\varphi(x,\lambda)\\ \varphi'(x,\lambda)\end{bmatrix}-$$
$$-\langle y(x),\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\rangle\begin{bmatrix}\Phi(x,\lambda)\\ \Phi'(x,\lambda)\end{bmatrix}\quad (1.4.16)$$
для любой функции $y(x)\in C^1[0,1]$. Учитывая (1.4.14) и (1.4.16), вычисляем
$$\frac{P(x,\lambda)-P(x,\mu)}{\lambda-\mu}\begin{bmatrix}y(x)\\ y'(x)\end{bmatrix}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\Big(\langle y(x),\widetilde{\Phi}(x,\xi)\rangle\begin{bmatrix}\varphi(x,\xi)\\ \varphi'(x,\xi)\end{bmatrix}-$$
$$-\langle y(x),\ \widetilde{\varphi}(x,\xi)\rangle\begin{bmatrix}\Phi(x,\xi)\\ \Phi'(x,\xi)\end{bmatrix}\Big)\frac{d\xi}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}+\varepsilon_N^0(x,\lambda,\mu),$$
$$\lim_{N\to\infty}\varepsilon_N^0(x,\lambda,\mu)=0.\quad (1.4.17)$$

Согласно (1.2.15)
$$P(x,\lambda)\begin{bmatrix}\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\\ \widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi(x,\lambda)\\ \varphi'(x,\lambda)\end{bmatrix}.$$

Поэтому имеет место соотношение
$$\det\Big(P(x,\lambda)\begin{bmatrix}\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\\ \widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\varphi(x,\mu)\\ \varphi'(x,\mu)\end{bmatrix}\Big)=\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle.$$

Далее, используя (1.4.15), выводим
$$\det\Big(P(x,\mu)\begin{bmatrix}\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\\ \widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\varphi(x,\mu)\\ \varphi'(x,\mu)\end{bmatrix}\Big)=$$
$$=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\Big(P_{11}(x,\mu)\varphi'(x,\mu)-P_{21}(x,\mu)\varphi(x,\mu)\Big)-$$

$$-\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\Big(P_{22}(x,\mu)\varphi(x,\mu)-P_{12}(x,\mu)\varphi'(x,\mu)\Big)=\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle.$$

Таким образом,

$$\det\Big((P(x,\lambda)-P(x,\mu))\begin{bmatrix}\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\\ \widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\varphi(x,\mu)\\ \varphi'(x,\mu)\end{bmatrix}\Big)=$$
$$=\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle-\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle.$$

Следовательно, (1.4.17) при $y(x)=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ дает

$$\frac{\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}-\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\Big(\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}(x,\xi)\rangle\langle\varphi(x,\xi),\varphi(x,\mu)\rangle}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}-\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\xi)\rangle\langle\Phi(x,\xi),\varphi(x,\mu)\rangle}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\Big)d\xi+$$
$$\varepsilon^1_N(x,\lambda,\mu),\qquad\lim_{N\to\infty}\varepsilon^1_N(x,\lambda,\mu)=0.$$

В силу (1.2.9), (1.2.14) и теоремы о вычетах приходим к (1.4.11). □

Аналогичным образом можно получить следующее соотношение:

$$\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\Phi(x,\lambda)+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}\varphi_{k0}(x)-\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\varphi_{k1}(x)\Big).\quad(1.4.18)$$

Из определения функций $\widetilde{P}_{ni,kj}(x)$, $P_{ni,kj}(x)$ и из (1.4.10), (1.4.11) вытекает

$$\widetilde{\varphi}_{ni}(x)=\varphi_{ni}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(\widetilde{P}_{ni,k0}(x)\varphi_{k0}(x)-\widetilde{P}_{ni,k1}(x)\varphi_{k1}(x)),\qquad(1.4.19)$$

$$P_{ni,\ell j}(x)-\widetilde{P}_{ni,\ell j}(x)+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}(\widetilde{P}_{ni,k0}(x)P_{k0,\ell j}(x)-\widetilde{P}_{ni,k1}(x)P_{k1,\ell j}(x))=0.\quad(1.4.20)$$

Обозначим

$$\varepsilon_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}}\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\varphi_{k0}(x)-\frac{1}{\alpha_{k1}}\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\varphi_{k1}(x)\Big),\quad\varepsilon(x)=-2\varepsilon_0'(x).\qquad(1.4.21)$$

Лемма 1.4.4. *Ряд в* (1.4.21) *сходится абсолютно и равномерно на* $[0,\pi]$, *причем функция* $\varepsilon_0(x)$ *абсолютно непрерывна и* $\varepsilon(x)\in L_2(0,\pi)$.

Доказательство. Запишем $\varepsilon_0(x)$ в виде

$$\varepsilon_0(x) = A_1(x) + A_2(x), \tag{1.4.22}$$

где

$$A_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{\alpha_{k0}} - \frac{1}{\alpha_{k1}}\Bigr)\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\varphi_{k0}(x),$$

$$A_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{k1}}\Bigl((\widetilde{\varphi}_{k0}(x)-\widetilde{\varphi}_{k1}(x))\varphi_{k0}(x)+\widetilde{\varphi}_{k1}(x)(\varphi_{k0}(x)-\varphi_{k1}(x))\Bigr). \tag{1.4.23}$$

Из (1.3.8), (1.4.3) и (1.4.6) вытекает, что ряды в (1.4.23) сходятся абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$, причем

$$|A_j(x)| \leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k \leqslant C\Omega, \quad j = 1, 2. \tag{1.4.24}$$

Далее, используя асимптотические формулы (1.1.9), (1.3.8) и (1.4.3), вычисляем

$$A_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{\alpha_{k0}} - \frac{1}{\alpha_{k1}}\Bigr)\frac{d}{dx}\Bigl(\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\varphi_{k0}(x)\Bigr) = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\Bigl(\sin 2kx + \frac{\eta_k(x)}{k+1}\Bigr),$$

где $\{\gamma_k\} \in l_2$ и $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi}|\eta_k(x)| \leqslant C$ при $k \geqslant 0$. Следовательно, $A_1(x) \in W_2^1(0,\pi)$. Аналогично получаем, что $A_2(x) \in W_2^1(0,\pi)$, и поэтому $\varepsilon_0(x) \in W_2^1(0,\pi)$. □

Лемма 1.4.5. *Справедливы соотношения*

$$q(x) = \widetilde{q}(x) + \varepsilon(x), \tag{1.4.25}$$

$$h = \widetilde{h} - \varepsilon_0(0), \quad H = \widetilde{H} + \varepsilon_0(\pi), \tag{1.4.26}$$

где функции $\varepsilon(x)$ *и* $\varepsilon_0(x)$ *определяются согласно* (1.4.21).

Доказательство. Дифференцируя (1.4.10) дважды по x и используя (1.4.1) и (1.4.21), получаем

$$\widetilde{\varphi}'(x,\lambda) - \varepsilon_0(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \varphi'(x,\lambda) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}\varphi_{k0}'(x) - \frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\varphi_{k1}'(x)\Bigr), \tag{1.4.27}$$

$$\widetilde{\varphi}''(x,\lambda)=\varphi''(x,\lambda)+\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}\varphi_{k0}''(x)-\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\varphi_{k1}''(x)\Bigr)+ \\ + 2\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{\alpha_{k0}}\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\varphi_{k0}'(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}}\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\varphi_{k1}'(x)\Bigr)+ \\ + \sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{\alpha_{k0}}(\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}_{k0}(x))'\varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}}(\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}_{k1}(x))'\varphi_{k1}(x)\Bigr).$$

Заменим здесь вторые производные, используя уравнение (1.1.1), а затем заменим $\varphi(x,\lambda)$, используя (1.4.10). Это дает

$$\widetilde{q}(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = q(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda) +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}}\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle\varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}}\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle\varphi_{k1}(x)\Big) +$$
$$+ 2\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}}\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\varphi'_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}}\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\varphi'_{k1}(x)\Big) +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}}(\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}_{k0}(x))'\varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}}(\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}_{k1}(x))'\varphi_{k1}(x)\Big).$$

После сокращения слагаемых с $\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)$ приходим к (1.4.25).

Обозначим $h_0 = -h$, $h_\pi = H$, $U_0 = U$, $U_\pi = V$. В (1.4.10) и (1.4.27) положим $x = 0$ и $x = \pi$. Тогда

$$\widetilde{\varphi}'(a,\lambda) + (h_a - \varepsilon_0(a))\widetilde{\varphi}(a,\lambda) = U_a(\varphi(x,\lambda)) +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle_{|x=a}}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}U_a(\varphi_{k0}) - \frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle_{|x=a}}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}U_a(\varphi_{k1})\Big),$$
$$a = 0,\pi. \quad (1.4.28)$$

Пусть $a = 0$. Так как $U_0(\varphi(x,\lambda)) = 0$, $\widetilde{\varphi}(0,\lambda) = 1$, $\widetilde{\varphi}'(0,\lambda) = -\widetilde{h}_0$, то $h_0 - \widetilde{h}_0 - \varepsilon_0(0) = 0$, т. е. $h = \widetilde{h} - \varepsilon_0(0)$. Пусть $a = \pi$. Так как

$$U_\pi(\varphi(x,\lambda)) = \Delta(\lambda),\ U_\pi(\varphi_{k0}) = 0,\ U_\pi(\varphi_{k1}) = \Delta(\lambda_{k1}),$$
$$\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle\Big|_{x=\pi} = \widetilde{\varphi}(\pi,\lambda)\widetilde{\Delta}(\mu) - \widetilde{\varphi}(\pi,\mu)\widetilde{\Delta}(\lambda),$$

то из (1.4.28) вытекает

$$\widetilde{\varphi}'(\pi,\lambda) + (h_\pi - \varepsilon_0(\pi))\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda) = \Delta(\lambda) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{\varphi}_{k1}(\pi)\widetilde{\Delta}(\lambda)}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\Delta(\lambda_{k1}).$$

При $\lambda = \lambda_{n1}$ это дает

$$\widetilde{\varphi}'_{n1}(\pi) + (h_\pi - \varepsilon_0(\pi))\widetilde{\varphi}_{n1}(\pi) = \Delta(\lambda_{n1})\Big(1 + \frac{1}{\alpha_{n1}}\widetilde{\varphi}_{n1}(\pi)\widetilde{\Delta}_1(\lambda_{n1})\Big),$$

где $\widetilde{\Delta}_1(\lambda) := \dfrac{d}{d\lambda}\widetilde{\Delta}(\lambda)$. В силу (1.1.6) и (1.1.8) имеем

$$\widetilde{\varphi}_{n1}(\pi)\widetilde{\beta}_n = 1, \quad \widetilde{\beta}_n\widetilde{\alpha}_n = -\widetilde{\Delta}_1(\lambda_{n1}),$$

т. е. $(\alpha_{n1})^{-1}\widetilde{\varphi}_{n1}(\pi)\widetilde{\Delta}_1(\lambda_{n1}) = -1$, тогда

$$\widetilde{\varphi}'_{n1}(\pi) + (h_\pi - \varepsilon_0(\pi))\widetilde{\varphi}_{n1}(\pi) = 0.$$

С другой стороны, $\widetilde{\varphi}'_{n1}(\pi) + \widetilde{h}_\pi \widetilde{\varphi}_{n1}(\pi) = \widetilde{\Delta}(\lambda_{n1}) = 0$. Таким образом, $(h_\pi - \varepsilon_0(\pi) - \widetilde{h}_\pi)\widetilde{\varphi}_{n1}(\pi) = 0$, т. е. $h_\pi - \widetilde{h}_\pi = \varepsilon_0(\pi)$. □

Замечание 1.4.2. При каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ соотношения (1.4.19) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\varphi_{ni}(x)$, $n \geqslant 0$, $i = 0, 1$. Но ряд в (1.4.19) сходится лишь «со скобками». Поэтому неудобно использовать (1.4.19) в качестве основного уравнения обратной задачи. Ниже мы преобразуем (1.4.19) к линейному уравнению в соответствующем банаховом пространстве последовательностей (см. (1.4.33) или (1.4.34)).

Пусть V — множество индексов $u = (n, i)$, $n \geqslant 0$, $i = 0, 1$. При каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ определим вектор

$$\psi(x) = [\psi_u(x)]^T_{u \in V} = [\psi_{n0}(x), \psi_{n1}(x)]^T_{n \geqslant 0} = [\psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{10}, \psi_{11}, \ldots]^T$$

по формулам

$$\begin{bmatrix} \psi_{n0}(x) \\ \psi_{n1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{n0}(x) \\ \varphi_{n1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_n(\varphi_{n0}(x) - \varphi_{n1}(x)) \\ \varphi_{n1}(x) \end{bmatrix},$$

где $\chi_n = \xi_n^{-1}$ при $\xi_n \neq 0$ и $\chi_n = 0$ при $\xi_n = 0$. Введем также блочную матрицу

$$H(x) = [H_{u,v}(x)]_{u,v \in V} = \begin{bmatrix} H_{n0,k0}(x) & H_{n0,k1}(x) \\ H_{n1,k0}(x) & H_{n1,k1}(x) \end{bmatrix}_{n,k \geqslant 0}, \qquad u = (n, i),\ v = (k, j)$$

по формулам

$$\begin{bmatrix} H_{n0,k0}(x) & H_{n0,k1}(x) \\ H_{n1,k0}(x) & H_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n0,k0}(x) & P_{n0,k1}(x) \\ P_{n1,k0}(x) & P_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \xi_k \chi_n (P_{n0,k0}(x) - P_{n1,k0}(x)) & \chi_n (P_{n0,k0}(x) - P_{n0,k1}(x) - P_{n1,k0}(x) + P_{n1,k1}(x)) \\ \xi_k P_{n1,k0}(x) & P_{n1,k0}(x) - P_{n1,k1}(x) \end{bmatrix}.$$

Аналогично определяются $\widetilde{\psi}(x)$, $\widetilde{H}(x)$ заменой в предыдущих определениях $\varphi_{ni}(x)$ на $\widetilde{\varphi}_{ni}(x)$ и $P_{ni,kj}(x)$ на $\widetilde{P}_{ni,kj}(x)$. Из (1.4.6) и (1.4.7) вытекает

$$|\psi_{ni}^{(\nu)}(x)| \leqslant C(n+1)^\nu, \ |H_{ni,kj}(x)| \leqslant \frac{C\xi_k}{(|n-k|+1)},$$

$$|H_{ni,kj}^{(\nu+1)}(x)| \leqslant C(n+k+1)^\nu \xi_k. \qquad (1.4.29)$$

Аналогично

$$|\widetilde{\psi}_{ni}^{(\nu)}(x)| \leqslant C(n+1)^{\nu}, \ |\widetilde{H}_{ni,kj}(x)| \leqslant \frac{C\xi_k}{(|n-k|+1)},$$
$$|\widetilde{H}_{ni,kj}^{(\nu+1)}(x)| \leqslant C(n+k+1)^{\nu}\xi_k, \quad (1.4.30)$$

а также

$$|\widetilde{H}_{ni,kj}(x) - \widetilde{H}_{ni,kj}(x_0)| \leqslant C|x-x_0|\xi_k, \quad x, x_0 \in [0,\pi], \quad (1.4.31)$$

где C не зависит от x, x_0, n, i, j и k.

Рассмотрим банахово пространство m ограниченных последовательностей вида $\alpha = [\alpha_u]_{u\in V}$ с нормой $\|\alpha\|_m = \sup\limits_{u\in V}|\alpha_u|$. Из (1.4.29) и (1.4.30) вытекает, что при каждом $x \in [0,\pi]$ операторы $E + \widetilde{H}(x)$ и $E - H(x)$ (E — единичный оператор), действующие из m в m, являются линейными ограниченными операторами, причем

$$\|H(x)\|, \ \|\widetilde{H}(x)\| \leqslant C \sup_n \sum_k \frac{\xi_k}{|n-k|+1} < \infty. \quad (1.4.32)$$

Теорема 1.4.1. *При каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$ вектор $\psi(x) \in m$ удовлетворяет уравнению*

$$\widetilde{\psi}(x) = (E + \widetilde{H}(x))\psi(x) \quad (1.4.33)$$

в банаховом пространстве m. Оператор $E + \widetilde{H}(x)$ имеет ограниченный обратный, т.е. уравнение (1.4.33) *однозначно разрешимо.*

Доказательство. Запишем (1.4.19) в виде

$$\widetilde{\varphi}_{n0}(x) - \widetilde{\varphi}_{n1}(x) = \varphi_{n0}(x) - \varphi_{n1}(x) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\Big((\widetilde{P}_{n0,k0}(x) - \widetilde{P}_{n1,k0}(x))(\varphi_{k0}(x) - \varphi_{k1}(x)) + (\widetilde{P}_{n0,k0}(x) -$$
$$- \widetilde{P}_{n1,k0}(x) - \widetilde{P}_{n0,k1}(x) + \widetilde{P}_{n1,k1}(x))\varphi_{k1}(x)\Big),$$

$$\widetilde{\varphi}_{n1}(x) = \varphi_{n1}(x) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{n1,k0}(x)(\varphi_{k0}(x) - \varphi_{k1}(x)) + (\widetilde{P}_{n1,k0}(x) - \widetilde{P}_{n1,k1}(x))\varphi_{k1}(x)\Big).$$

Учитывая введенные обозначения, получаем

$$\widetilde{\psi}_{ni}(x) = \psi_{ni}(x) + \sum_{k,j}\widetilde{H}_{ni,kj}(x)\psi_{kj}(x), \quad (n,i), (k,j) \in V, \quad (1.4.34)$$

что равносильно (1.4.33). Ряд в (1.4.34) сходится абсолютно и равномерно при $x \in [0,\pi]$. Аналогично, (1.4.20) принимает вид

$$H_{ni,kj}(x)-\widetilde{H}_{ni,kj}(x)+\sum_{\ell,s}(\widetilde{H}_{ni,\ell s}(x)H_{\ell s,kj}(x)=0,\ (n,i),(k,j),(\ell,s)\in V,$$

или $(E+\widetilde{H}(x))(E-H(x))=E$. Меняя местами L и $\widetilde{L}$, выводим аналогично

$$\psi(x)=(E-H(x))\widetilde{\psi}(x),\quad (E-H(x))(E+\widetilde{H}(x))=E.$$

Следовательно, оператор $(E+\widetilde{H}(x))^{-1}$ существует и является линейным ограниченным оператором. □

Уравнение (1.4.33) называется *основным уравнением* обратной задачи. Разрешая (1.4.33), находим вектор $\psi(x)$ и, следовательно, функции $\varphi_{ni}(x)$. Так как функции $\varphi_{ni}(x)=\varphi(x,\lambda_{ni})$ являются решениями уравнения (1.1.1), то можно построить потенциал $q(x)$ и коэффициенты h и H. Тем самым получаем следующий алгоритм решения обратной задачи 1.2.1.

Алгоритм 1.4.1. *Даны числа* $\{\lambda_n,\ \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$.

(i) *Выбираем* $\widetilde{L}$ *так, чтобы* $\widetilde{\omega}=\omega$, *и строим* $\widetilde{\psi}(x)$ *и* $\widetilde{H}(x)$.

(ii) *Находим* $\psi(x)$ *из уравнения* (1.4.33).

(iii) *Вычисляем* $q(x)$, h *и* H *по формулам* (1.4.21), (1.4.25), (1.4.26).

1.4.2. Необходимые и достаточные условия. В этом пункте приводятся необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи 1.2.1.

Теорема 1.4.2. *Для того чтобы вещественные числа* $\{\lambda_n,\ \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *были спектральными данными для некоторой краевой задачи* $L(q(x),h,H)$ *вида* (1.1.1), (1.1.2) *с* $q(x)\in L_2(0,\pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* (1.3.8), (1.3.9). *Кроме того,* $q(x)\in W_2^N$ *тогда и только тогда, когда верно* (1.1.23). *Краевая задача* $L(q(x),h,H)$ *строится по алгоритму* 1.4.1.

Необходимость условий теоремы 1.4.2 доказана выше; здесь мы докажем достаточность. Пусть заданы числа $\{\lambda_n,\ \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ вида (1.3.8)–(1.3.9). Выберем $\widetilde{L}$, построим $\widetilde{\psi}(x)$, $\widetilde{H}(x)$ и рассмотрим уравнение (1.4.33).

Лемма 1.4.6. *При каждом фиксированном* $x\in[0,\pi]$ *оператор* $E+\widetilde{H}(x)$, *действующий из* m *в* m, *имеет ограниченный обратный, и основное уравнение* (1.4.33) *имеет единственное решение* $\psi(x)\in m$.

Доказательство. Достаточно доказать, что однородное уравнение

$$(E+\widetilde{H}(x))\beta(x)=0, \tag{1.4.35}$$

где $\beta(x)=[\beta_u(x)]_{u\in V}$, имеет только нулевое решение. Пусть $\beta(x)\in m$ — решение уравнения, т. е.

$$\beta_{ni}(x)+\sum_{k,j}\widetilde{H}_{ni,kj}(x)\beta_{kj}(x)=0, \quad (n,i),(k,j)\in V. \tag{1.4.36}$$

Обозначим $\gamma_{n1}(x)=\beta_{n1}(x)$, $\gamma_{n0}(x)=\beta_{n0}(x)\xi_n+\beta_{n1}(x)$. Тогда (1.4.36) принимает вид

$$\gamma_{ni}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(\widetilde{P}_{ni,k0}(x)\gamma_{k0}(x)-\widetilde{P}_{ni,k1}(x)\gamma_{k1}(x))=0, \tag{1.4.37}$$

причем

$$|\gamma_{ni}(x)|\leqslant C(x), \quad |\gamma_{n0}(x)-\gamma_{n1}(x)|\leqslant C(x)\xi_n. \tag{1.4.38}$$

Построим функции $\gamma(x,\lambda)$, $\Gamma(x,\lambda)$ и $B(x,\lambda)$ по формулам

$$\gamma(x,\lambda)=-\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}\gamma_{k0}(x)-\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\gamma_{k1}(x)\Big), \tag{1.4.39}$$

$$\Gamma(x,\lambda)=-\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}\gamma_{k0}(x)-\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\gamma_{k1}(x)\Big), \tag{1.4.40}$$

$$B(x,\lambda)=\overline{\gamma(x,\overline{\lambda})}\Gamma(x,\lambda). \tag{1.4.41}$$

Конструкция функции $B(x,\lambda)$ напоминает конструкцию функции Грина при $t=x$: $G(x,x,\lambda)=\overline{\varphi(x,\overline{\lambda})}\Phi(x,\lambda)$, а идея доказательства леммы напоминает идею доказательства теоремы о разложении. В силу (1.4.2) функция $\gamma(x,\lambda)$ является целой по λ при каждом x. Функции $\Gamma(x,\lambda)$ и $B(x,\lambda)$ являются мероморфными по λ с простыми полюсами λ_{ni}. Согласно (1.4.2) и (1.4.37) имеем: $\gamma(x,\lambda_{ni})=\gamma_{ni}(x)$. Покажем, что

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n0}}B(x,\lambda)=\frac{1}{\alpha_{n0}}|\gamma_{n0}(x)|^2, \quad \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n1}}B(x,\lambda)=0. \tag{1.4.42}$$

В самом деле, в силу (1.4.39), (1.4.40) и (1.2.9) имеет место соотношение

$$\Gamma(x,\lambda)=\widetilde{M}(\lambda)\gamma(x,\lambda)-$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{S}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}\gamma_{k0}(x)-\frac{\langle\widetilde{S}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\gamma_{k1}(x)\Big). \tag{1.4.43}$$

Так как $\langle\widetilde{S}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle_{|x=0}=-1$, то из (1.4.1) вытекает

$$\frac{\langle\widetilde{S}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}=-\frac{1}{\lambda-\mu}+\int_0^x\widetilde{S}(t,\lambda)\widetilde{\varphi}(t,\mu)\,dt.$$

Поэтому, согласно (1.4.43),

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n0}} \Gamma(x,\lambda) = \frac{1}{\alpha_{n0}}\gamma_{n0}(x), \qquad \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{n1}} \Gamma(x,\lambda) = \frac{1}{\alpha_{n1}}\gamma_{n1}(x) - \frac{1}{\alpha_{n1}}\gamma_{n1}(x) = 0.$$

Вместе с (1.4.41) это дает (1.4.42).

Далее рассмотрим интеграл

$$I_N^0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N} B(x,\lambda)\,d\lambda, \tag{1.4.44}$$

где $\Gamma_N = \{\lambda:\ |\lambda| = (N+1/2)^2\}$. Покажем, что

$$\lim_{N\to\infty} I_N^0(x) = 0. \tag{1.4.45}$$

В самом деле, из (1.4.2) и (1.4.39) вытекает

$$-\gamma(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{k0}}\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_{k0})(\gamma_{k0}(x) - \gamma_{k1}(x)) +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}} - \frac{1}{\alpha_{k1}}\Big)\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_{k0})\gamma_{k1}(x) +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{k1}}\Big(\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_{k0}) - \widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_{k1})\Big)\gamma_{k1}(x).$$

Пусть для определенности $\sigma := \operatorname{Re}\rho \geqslant 0$. В силу (1.3.8), (1.4.38), (1.4.8) и (1.4.9) имеем

$$\overline{|\gamma(x,\overline{\lambda})|} = |\gamma(x,\lambda)| \leqslant C(x)\exp(|\tau|x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi_k}{|\rho-k|+1},$$

$$\sigma \geqslant 0,\ \tau = \operatorname{Im}\rho. \tag{1.4.46}$$

Аналогично, используя (1.4.40), получаем при достаточно большом $\rho^* > 0:$

$$|\Gamma(x,\lambda)| \leqslant \frac{C(x)}{|\rho|}\exp(-|\tau|x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi_k}{|\rho-k|+1}, \quad \sigma \geqslant 0,\ \rho\in G_\delta,\ |\rho|\geqslant\rho^*.$$

Тогда

$$|B(x,\lambda)| \leqslant \frac{C(x)}{|\rho|}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi_k}{|\rho-k|+1}\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(x)}{|\rho|}\sum_{k=0}^{\infty}((k+1)\xi_k)^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(|\rho-k|+1)^2(k+1)^2}.$$

С учетом (1.4.3) это дает

$$|B(x,\lambda)| \leqslant \frac{C(x)}{|\rho|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|\rho-k|^2(k+1)^2}, \quad |\rho| = N+\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re}\rho \geqslant 0. \quad (1.4.47)$$

Так как $\rho = (N+1/2)\exp(i\theta), \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, то

$$|\rho - k| = \Big(N+\frac{1}{2}\Big)^2 + k^2 - 2\Big(N+\frac{1}{2}\Big)k\cos\theta \geqslant \Big(N+\frac{1}{2}-k\Big)^2. \quad (1.4.48)$$

Далее,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2(N+\frac{1}{2}-k)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(k+1)^2(N+\frac{1}{2}-k)^2} + \\ + \frac{1}{(N+2)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2} = \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2(N-k)^2} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big).$$

Так как

$$\frac{1}{k^2(N-k)^2} = \frac{2}{kN^3} + \frac{1}{k^2N^2} + \frac{2}{N^3(N-k)} + \frac{1}{N^2(N-k)^2},$$

то

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2(N-k)^2} = \frac{4}{N^3}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k} + \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2(N+\frac{1}{2}-k)^2} = O\Big(\frac{1}{N^2}\Big).$$

Вместе с (1.4.47) и (1.4.48) это дает: $|B(x,\lambda)| \leqslant C(x)|\rho|^{-3}$ при $\lambda \in \Gamma_N$. Подставляя эту оценку в (1.4.44), приходим к (1.4.45).

С другой стороны, вычисляя интеграл в (1.4.44) по теореме о вычетах и учитывая (1.4.42), заключаем, что

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{\alpha_{n0}}|\gamma_{n0}(x)|^2 = 0.$$

Так как $\alpha_{n0} > 0$, то $\gamma_{n0}(x) = 0$. Построим теперь функции

$$\Delta(\lambda) := \pi(\lambda_0 - \lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n - \lambda}{n^2},$$

$$\widetilde{\Delta}(\lambda) := -\pi\lambda\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-\lambda}{n^2} = -\rho\sin\rho\pi, \quad f(x,\lambda) := \frac{\gamma(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

Из соотношения $\gamma(x,\lambda_{n0}) = \gamma_{n0}(x) = 0$ вытекает, что при каждом $x \in \in [0,\pi]$ функция $f(x,\lambda)$ является целой по λ. С другой стороны, имеем

$$\frac{\widetilde{\Delta}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \prod_{n=0}^{\infty}\Big(1 + \frac{\lambda_n - n^2}{\lambda - \lambda_n}\Big).$$

Зафиксируем $\delta > 0$. В силу (1.1.17) и (1.3.8) имеют место следующие оценки в секторе $\arg\lambda \in [\delta, 2\pi - \delta]$:

$$|\widetilde{\Delta}(\lambda)| \geqslant C|\rho|\exp(|\tau|\pi), \quad \Big|\frac{\lambda_n - n^2}{\lambda - \lambda_n}\Big| \leqslant \frac{C}{n^2}, \quad \tau := \operatorname{Im}\rho.$$

Следовательно, $|\Delta(\lambda)| \geqslant C|\rho|\exp(|\tau|\pi)$, $\arg\lambda \in [\delta, 2\pi - \delta]$. Учитывая (1.4.46), получаем

$$|f(x,\lambda)| \leqslant \frac{C(x)}{|\rho|}, \quad \arg\lambda \in [\delta, 2\pi - \delta].$$

Отсюда, используя теоремы Фрагмена–Линделефа [240, с. 186] и Лиувилля [206, с. 209], заключаем, что $f(x,\lambda) \equiv 0$, т. е. $\gamma(x,\lambda) \equiv 0$ и $\gamma_{n1}(x) = \gamma(x,\lambda_{n1}) = 0$. Следовательно, $\beta_{ni}(x) = 0$ при $n \geqslant 0$, $i = 0, 1$, и лемма 1.4.6 доказана. □

Пусть $\psi(x) = [\psi_u(x)]_{u\in V}$ — решение основного уравнения (1.4.33).

Лемма 1.4.7. *При* $n \geqslant 0$, $i = 0, 1$, *справедливы соотношения*

$$\psi_{ni}(x) \in C^1[0,\pi],\ |\psi_{ni}^{(\nu)}(x)| \leqslant C(n+1)^{\nu},\ \nu = 0, 1,\ x \in [0,\pi], \tag{1.4.49}$$

$$|\psi_{ni}(x) - \widetilde{\psi}_{ni}(x)| \leqslant C\Omega\eta_n, \quad x \in [0,\pi], \tag{1.4.50}$$

$$|\psi'_{ni}(x) - \widetilde{\psi}'_{ni}(x)| \leqslant C\Omega, \quad x \in [0,\pi], \tag{1.4.51}$$

где Ω *определена в* (1.4.3), *а*

$$\eta_n := \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2(|n-k|+1)^2}\Big)^{1/2}.$$

Здесь и в дальнейшем один и тот же символ C обозначает различные положительные константы, зависящие только от $\widetilde{L}$ и C_0, где $C_0 > 0$ таково, что $\Omega \leqslant C_0$.

Доказательство. 1) Обозначим $\widetilde{R}(x) = (E + \widetilde{H}(x))^{-1}$. Зафиксируем $x_0 \in [0,\pi]$ и рассмотрим основное уравнение (1.4.33) при $x = x_0$: $\widetilde{\psi}(x_0) = (E + \widetilde{H}(x_0))\psi(x_0)$. В силу (1.4.31)

$$\|\widetilde{H}(x) - \widetilde{H}(x_0)\| \leqslant C|x - x_0|\sum_k \xi_k \leqslant C_1|x - x_0|, \quad x, x_0 \in [0,\pi], \quad C_1 > 0.$$

Положим $\omega(x_0) := (2C_1\|\widetilde{R}(x_0)\|)^{-1}$. Тогда при $|x - x_0| \leqslant \omega(x_0)$ имеем

$$\|\widetilde{H}(x) - \widetilde{H}(x_0)\| \leqslant (2\|\widetilde{R}(x_0)\|)^{-1}.$$

Используя лемму 1.3.1, получаем при $|x-x_0| \leqslant \omega(x_0)$:

$$\widetilde{R}(x) - \widetilde{R}(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\widetilde{H}(x_0) - \widetilde{H}(x)\Big)^k \Big(\widetilde{R}(x_0)\Big)^{k+1},$$

$$\|\widetilde{R}(x) - \widetilde{R}(x_0)\| \leqslant 2C_1 \|\widetilde{R}(x_0)\|^2 |x-x_0|.$$

Следовательно, $\widetilde{R}(x)$ непрерывна по $x \in [0,\pi]$ и $\|\widetilde{R}(x)\| \leqslant C$, $x \in [0,\pi]$. Представим $\widetilde{R}(x)$ в виде $\widetilde{R}(x) = E - H(x)$. Тогда

$$\|H(x)\| \leqslant C, \quad x \in [0,\pi], \tag{1.4.52}$$

и

$$(E - H(x))(E + \widetilde{H}(x)) = (E + \widetilde{H}(x))(E - H(x)) = E. \tag{1.4.53}$$

В координатах (1.4.53) принимает вид

$$H_{ni,kj}(x) = \widetilde{H}_{ni,kj}(x) - \sum_{\ell,s} H_{ni,\ell s}(x)\widetilde{H}_{\ell s,kj}(x),$$
$$(n,i),(k,j),(\ell,s) \in V, \tag{1.4.54}$$

$$H_{ni,kj}(x) = \widetilde{H}_{ni,kj}(x) - \sum_{\ell,s} \widetilde{H}_{ni,\ell s}(x) H_{\ell s,kj}(x),$$
$$(n,i),(k,j),(\ell,s) \in V. \tag{1.4.55}$$

Функции $H_{ni,kj}(x)$ непрерывны при $x \in [0,\pi]$, и в силу (1.4.52), (1.4.54) и (1.4.30) имеем

$$|H_{ni,kj}(x)| \leqslant C\xi_k, \quad x \in [0,\pi]. \tag{1.4.56}$$

Подставляя эту оценку в правые части (1.4.54) и (1.4.55) и используя (1.4.30), получаем более точные оценки

$$|H_{ni,kj}(x)| \leqslant C\xi_k \Big(\frac{1}{|n-k|+1} + \Omega\eta_k\Big), \quad x \in [0,\pi], \ (n,i),(k,j) \in V, \tag{1.4.57}$$

$$|H_{ni,kj}(x)| \leqslant C\xi_k \Big(\frac{1}{|n-k|+1} + \Omega\eta_n\Big), \quad x \in [0,\pi], \ (n,i),(k,j) \in V. \tag{1.4.58}$$

Отметим, что поскольку

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2(|n-k|+1)^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)^2} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2(k-n+1)^2} \leqslant 2\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\Big)^2,$$

то $\{\eta_k\} \in l_2$. Решая основное уравнение (1.4.33), находим

$$\psi_{ni}(x) = \widetilde{\psi}_{ni}(x) - \sum_{k,j} H_{ni,kj}(x)\widetilde{\psi}_{kj}(x), \quad x \in [0,\pi],\ (n,i),(k,j) \in V. \tag{1.4.59}$$

Согласно (1.4.30) и (1.4.58) ряд в (1.4.59) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,\pi]$ и функции $\psi_{ni}(x)$ непрерывны при $x \in [0,\pi]$. Кроме того, $|\psi_{ni}(x)| \leqslant C$ при $x \in [0,\pi]$, $(n,i) \in V$, и верно (1.4.50).

2) Из (1.4.53) следует, что

$$H'(x) = (E - H(x))\widetilde{H}'(x)(E - H(x)), \tag{1.4.60}$$

функции $H_{ni,kj}(x)$ непрерывно дифференцируемы, причем

$$|H'_{ni,kj}(x)| \leqslant C\xi_k. \tag{1.4.61}$$

Дифференцируя (1.4.59), вычисляем

$$\psi'_{ni}(x) = \widetilde{\psi}'_{ni}(x) - \sum_{k,j} H_{ni,kj}(x)\widetilde{\psi}'_{kj}(x) - \sum_{k,j} H'_{ni,kj}(x)\widetilde{\psi}_{kj}(x). \tag{1.4.62}$$

В силу (1.4.30), (1.4.57) и (1.4.61) ряды в (1.4.62) сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,\pi]$; $\psi_{ni}(x) \in C^1[0,\pi]$,

$$|\psi'_{ni}(x)| \leqslant C(n+1), \quad x \in [0,\pi],\ (n,i) \in V$$

и верно соотношение (1.4.51). ☐

Замечание 1.4.3. Оценки для $\psi'_{ni}(x)$ могут быть также получены следующим образом. Дифференцируя (1.4.34) формально, вычисляем

$$\widetilde{\psi}'_{ni}(x) - \sum_{k,j} \widetilde{H}'_{ni,kj}(x)\psi_{kj}(x) = \psi'_{ni}(x) + \sum_{k,j} \widetilde{H}_{ni,kj}(x)\psi'_{kj}(x). \tag{1.4.63}$$

Определим

$$z(x) = [z_u(x)]_{u\in V}, \quad \widetilde{z}(x) = [\widetilde{z}_u(x)]_{u\in V},$$
$$\widetilde{A}(x) = [\widetilde{A}_{u,v}(x)]_{u,v\in V}, \quad u = (n,i), \quad v = (k,j),$$

по формулам

$$z_{ni}(x) = \frac{1}{n+1}\psi'_{ni}(x), \quad \widetilde{z}_{ni}(x) = \frac{1}{n+1}\Big(\widetilde{\psi}'_{ni}(x) - \sum_{k,j} \widetilde{H}'_{ni,kj}(x)\psi_{kj}(x)\Big),$$
$$\widetilde{A}_{ni,kj}(x) = \frac{k+1}{n+1}\widetilde{H}_{ni,kj}(x).$$

Тогда (1.4.63) принимает вид $\widetilde{z}(x) = (E + \widetilde{A}(x))z(x)$, или

$$\widetilde{z}_{ni}(x) = z_{ni}(x) + \sum_{k,j} \widetilde{A}_{ni,kj}(x)z_{kj}(x). \tag{1.4.64}$$

Из (1.4.30) вытекает

$$\sum_{k,j}|\widetilde{A}_{ni,kj}(x)|\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)\xi_k}{(n+1)(|n-k|+1)}\leqslant\frac{C\Omega}{n+1}\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(|n-k|+1)^2}\Bigr)^{1/2}.$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(|n-k|+1)^2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k+1)^2}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-n+1)^2}\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},\qquad(1.4.65)$$

то приходим к оценке

$$\sum_{k,j}|\widetilde{A}_{ni,kj}(x)|\leqslant\frac{C\Omega}{n+1}.$$

При каждом фиксированном $x\in[0,\pi]$ оператор $\widetilde{A}(x)$ является линейным ограниченным оператором, действующем из m в m, причем $\|\widetilde{A}(x)\|\leqslant C\Omega$. Однородное уравнение

$$u_{ni}(x)+\sum_{k,j}\widetilde{A}_{ni,kj}(x)u_{kj}(x)=0,\quad [u_{ni}(x)]\in m,\qquad(1.4.66)$$

имеет только нулевое решение. В самом деле, пусть $[u_{ni}(x)]\in m$ — решение уравнения (1.4.66). Тогда функции $\beta_{ni}(x):=(n+1)u_{ni}(x)$ удовлетворяют (1.4.36). Кроме того, (1.4.36) дает

$$|\beta_{ni}(x)|\leqslant C(x)\sum_{k,j}|\widetilde{H}_{ni,kj}(x)|(k+1)\leqslant$$

$$\leqslant C(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)\xi_k}{|n-k|+1}\leqslant C(x)\Omega\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(|n-k|+1)^2}\Bigr)^{1/2}.$$

Поэтому с учетом (1.4.65) заключаем, что $|\beta_{ni}(x)|\leqslant C(x)$, т.е. $[\beta_{ni}(x)]\in m$. По лемме 1.4.6 $\beta_{ni}(x)=0$, т.е. $u_{ni}(x)=0$. Используя (1.4.64) и вышеприведенные рассуждения, можно показать, что $\psi_{ni}(x)\in C^1[0,\pi]$ и $|\psi'_{ni}(x)|\leqslant C(n+1)$, т.е. соотношения (1.4.49) доказаны. Тогда из (1.4.63) вытекает

$$|\psi'_{ni}(x)-\widetilde{\psi}'_{ni}(x)|\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)\xi_k}{|n-k|+1}\leqslant C\Omega\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(|n-k|+1)^2}\Bigr)^{1/2}.$$

Отсюда, учитывая (1.4.65), приходим к (1.4.51). □

Построим функции $\varphi_{ni}(x)$ по формулам

$$\varphi_{n1}(x)=\psi_{n1}(x),\quad \varphi_{n0}(x)=\psi_{n0}(x)\xi_n+\psi_{n1}(x).\qquad(1.4.67)$$

Тогда справедливы соотношения (1.4.19) и (1.4.6). В силу (1.4.67) и леммы 1.4.7 имеем

$$|\varphi_{ni}^{(\nu)}(x)| \leqslant C(n+1)^{\nu}, \quad \nu = 0, 1, \tag{1.4.68}$$

$$|\varphi_{ni}(x) - \widetilde{\varphi}_{ni}(x)| \leqslant C\Omega\eta_n, \ |\varphi'_{ni}(x) - \widetilde{\varphi}'_{ni}(x)| \leqslant C\Omega. \tag{1.4.69}$$

Далее, построим функции $\varphi(x,\lambda)$ и $\Phi(x,\lambda)$ по (1.4.10), (1.4.18), а также краевую задачу $L(q(x),h,H)$ по (1.4.21), (1.4.25)–(1.4.26). Ясно, что $\varphi(x,\lambda_{ni}) = \varphi_{ni}(x)$.

Лемма 1.4.8. $q(x) \in L_2(0,\pi)$.

Доказательство. Здесь мы следуем доказательству леммы 1.4.4 с необходимыми изменениями. Согласно (1.4.22) $\varepsilon_0(x) = A_1(x) + A_2(x)$, где функции $A_j(x)$ определены в (1.4.23). Из (1.3.8), (1.4.3) и (1.4.6) вытекает, что ряды в (1.4.23) сходятся абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$, причем имеет место оценка (1.4.24). Далее,

$$A'_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}} - \frac{1}{\alpha_{k1}}\Big)\frac{d}{dx}\Big(\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\varphi_{k0}(x)\Big) =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}} - \frac{1}{\alpha_{k1}}\Big)\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\widetilde{\varphi}'_{k0}(x) + A(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\Big(\sin 2kx + \frac{\eta_k(x)}{k+1}\Big) + A(x),$$

где

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}} - \frac{1}{\alpha_{k1}}\Big)\Big(\widetilde{\varphi}_{k0}(x)(\varphi'_{k0}(x) - \widetilde{\varphi}'_{k0}(x)) + {} + \widetilde{\varphi}'_{k0}(x)(\varphi_{k0}(x) - \widetilde{\varphi}_{k0}(x))\Big), \tag{1.4.70}$$

$$\{\gamma_k\} \in l_2, \quad \Big(\sum_{k=0}^{\infty}|\gamma_k|^2\Big)^{1/2} \leqslant C\Omega, \quad \max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|\eta_k(x)| \leqslant C.$$

В силу (1.4.68), (1.4.69), (1.4.6) и (1.3.8) ряд в (1.4.70) сходится абсолютно и равномерно на $[0,\pi]$, причем

$$|A(x)| \leqslant C\Omega\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\xi_k\eta_k\Big) \leqslant C\Omega^2\Big(1 + \Big(\sum_{k=0}^{\infty}|\eta_k|^2\Big)^{1/2}\Big) \leqslant C\Omega^2,$$

так как $\{\eta_k\} \in l_2$. Поэтому $A_1(x) \in W_2^1[0,\pi]$. Аналогично получаем, что $A_2(x) \in W_2^1[0,\pi]$. Следовательно, $\varepsilon_0(x) \in W_2^1(0,\pi)$, $\varepsilon(x) \in L_2(0,\pi)$, т. е. $q(x) \in L_2(0,\pi)$. □

Лемма 1.4.9. *Справедливы соотношения*

$$\ell\varphi_{ni}(x)=\lambda_{ni}\varphi_{ni}(x),\ \ \ell\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda),\ \ \ell\Phi(x,\lambda)=\lambda\Phi(x,\lambda). \tag{1.4.71}$$

$$\varphi(0,\lambda)=1,\ \varphi'(0,\lambda)=h,\ U(\Phi)=1,\ V(\Phi)=0. \tag{1.4.72}$$

Доказательство. 1) Используя (1.4.10), (1.4.18) и действуя так же, как и при доказательстве леммы 1.4.5, получаем

$$\widetilde{U}_a(\widetilde{\varphi}(x,\lambda))=U_a(\varphi(x,\lambda))+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle_{|x=a}}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}U_a(\varphi_{k0})-$$
$$-\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle_{|x=a}}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}U_a(\varphi_{k1})\Big),\quad a=0,\pi, \tag{1.4.73}$$

$$\widetilde{U}_a(\widetilde{\Phi}(x,\lambda))=U_a(\Phi(x,\lambda))+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle_{|x=a}}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}U_a(\varphi_{k0})-$$
$$-\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle_{|x=a}}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}U_a(\varphi_{k1})\Big),\quad a=0,\pi, \tag{1.4.74}$$

где $U_0=U$, $U_\pi=V$. Так как $\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{kj}(x)\rangle_{|x=0}=0$, то из (1.4.10) и (1.4.73) при $x=0$ вытекает, что $\varphi(0,\lambda)=1$, $U_0(\varphi)=0$, и, следовательно, $\varphi'(0,\lambda)=h$. В (1.4.74) положим $a=0$. Так как $U_0(\varphi)=0$, то приходим к соотношению $U_0(\Phi)=1$.

2) Для доказательства (1.4.71) предположим сначала, что

$$\Omega_1:=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}((k+1)^2\xi_k)^2\Big)^{1/2}<\infty. \tag{1.4.75}$$

В этом случае из (1.4.60) дифференцированием можно получить

$$H''(x)=(E-H(x))\widetilde{H}''(x)(E-H(x))-$$
$$-H'(x)\widetilde{H}'(x)(E-H(x))-(E-H(x))\widetilde{H}'(x)H(x). \tag{1.4.76}$$

Из (1.4.30), (1.4.56) и (1.4.61) вытекает, что ряды в (1.4.76) сходятся абсолютно и равномерно при $x\in[0,\pi]$, $H_{ni,kj}(x)\in C^2[0,\pi]$ и

$$|H''_{ni,kj}(x)|\leqslant C(n+k+1)\xi_k. \tag{1.4.77}$$

Далее, используя (1.4.59), вычисляем

$$\widetilde{\ell}\psi_{ni}(x)=\widetilde{\ell}\widetilde{\psi}_{ni}(x)+\sum_{k,j}H_{ni,kj}(x)\widetilde{\ell}\widetilde{\psi}_{kj}(x)+$$
$$+2\sum_{k,j}H'_{ni,kj}(x)\widetilde{\psi}'_{kj}(x)+\sum_{k,j}H''_{ni,kj}(x)\widetilde{\psi}_{kj}(x). \tag{1.4.78}$$

Так как $\widetilde{\ell}\widetilde{\varphi}_{ni}(x) = \lambda_{ni}\widetilde{\varphi}_{ni}(x)$, то

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\psi}_{n0}(x) = \lambda_{n0}\widetilde{\psi}_{n0}(x) + \chi_n(\lambda_{n0} - \lambda_{n1})\widetilde{\varphi}_{n1}(x), \quad \widetilde{\ell}\widetilde{\psi}_{n1}(x) = \lambda_{n1}\widetilde{\psi}_{n1}(x)$$

и, следовательно, $\widetilde{\ell}\widetilde{\psi}_{ni}(x) \in C[0,\pi]$, $|\widetilde{\ell}\widetilde{\psi}_{ni}(x)| \leqslant C(n+1)^2$, $(n,i) \in V$. Отсюда и из (1.4.57), (1.4.61), (1.4.65), (1.4.77), (1.4.30) выводим, что ряды в (1.4.78) сходятся абсолютно и равномерно при $x \in [0,\pi]$, причем

$$\widetilde{\ell}\psi_{ni}(x) \in C[0,\pi], \quad |\widetilde{\ell}\psi_{ni}(x)| \leqslant C(n+1)^2, \quad (n,i) \in V.$$

С другой стороны, из доказательства леммы 1.4.8 и из (1.4.75) вытекает, что в нашем случае $q(x) - \widetilde{q}(x) \in C[0,\pi]$, и поэтому $\ell\psi_{ni}(x) \in \in C[0,\pi]$, $|\ell\psi_{ni}(x)| \leqslant C(n+1)^2$, $(n,i) \in V$. Вместе с (1.4.67) это приводит к соотношениям

$$\ell\varphi_{ni}(x) \in C[0,\pi],\ |\ell\varphi_{ni}(x)| \leqslant C(n+1)^2,$$
$$|\ell\varphi_{n0}(x) - \ell\varphi_{n1}(x)| \leqslant C\xi_n(n+1)^2,\ (n,i) \in V.$$

Используя (1.4.19), вычисляем

$$-\widetilde{\varphi}''_{ni}(x) + q(x)\widetilde{\varphi}_{ni}(x) = \ell\varphi_{ni}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{ni,k0}(x)\ell\varphi_{k0}(x) - \widetilde{P}_{ni,k1}(x)\ell\varphi_{k1}(x)\Big) -$$
$$- 2\widetilde{\varphi}_{ni}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}}\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\varphi'_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}}\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\varphi'_{k1}(x)\Big) -$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}}(\widetilde{\varphi}_{ni}(x)\widetilde{\varphi}_{k0}(x))'\varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}}(\widetilde{\varphi}_{ni}(x)\widetilde{\varphi}_{k1}(x))'\varphi_{k1}(x)\Big).$$

С учетом (1.4.21) и (1.4.25) выводим

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\varphi}_{ni}(x) = \ell\varphi_{ni}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{ni,k0}(x)\ell\varphi_{k0}(x) - \widetilde{P}_{ni,k1}(x)\ell\varphi_{k1}(x)\Big) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}}\langle\widetilde{\varphi}_{ni}(x), \widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle\varphi_{k0}(x) - \frac{1}{\alpha_{k1}}\langle\widetilde{\varphi}_{ni}(x), \widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle\varphi_{k1}(x)\Big). \tag{1.4.79}$$

Используя (1.4.10) и (1.4.18), вычисляем аналогично:

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \ell\varphi(x,\lambda) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda), \widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\alpha_{k0}(\lambda - \lambda_{k0})}\ell\varphi_{k0}(x) - \frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda), \widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}(\lambda - \lambda_{k1})}\ell\varphi_{k1}(x)\Big) +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}}\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle\varphi_{k0}(x)-$$
$$-\frac{1}{\alpha_{k1}}\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle\varphi_{k1}(x)\Big), \qquad (1.4.80)$$

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\ell\Phi(x,\lambda)+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}\ell\varphi_{k0}(x)-\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\ell\varphi_{k1}(x)\Big)+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}}\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle\varphi_{k0}(x)-$$
$$-\frac{1}{\alpha_{k1}}\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle\varphi_{k1}(x)\Big). \qquad (1.4.81)$$

Из (1.4.79) вытекает

$$\lambda_{ni}\widetilde{\varphi}_{ni}(x)=\ell\varphi_{ni}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{ni,k0}(x)\ell\varphi_{k0}(x)-\widetilde{P}_{ni,k1}(x)\ell\varphi_{k1}(x)\Big)+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\Big((\lambda_{ni}-\lambda_{k0})\widetilde{P}_{ni,k0}(x)\varphi_{k0}(x)-(\lambda_{ni}-\lambda_{k1})\widetilde{P}_{ni,k1}(x)\varphi_{k1}(x)\Big),$$

и, следовательно, приходим к (1.4.37), где $\gamma_{ni}(x):=\ell\varphi_{ni}(x)-\lambda_{ni}\varphi_{ni}(x)$. Тогда верно (1.4.36), где

$$\beta_{n1}(x)=\gamma_{n1}(x),\ \beta_{n0}(x)=\chi_n(\gamma_{n0}(x)-\gamma_{n1}(x)),\ \chi_n:=\begin{cases}\xi_n^{-1}, & \xi_n\neq 0,\\ 0, & \xi_n=0.\end{cases}$$

Кроме того, $|\gamma_{ni}(x)|\leqslant C(n+1)^2$, $|\gamma_{n0}(x)-\gamma_{n1}(x)|\leqslant C\xi_n(n+1)^2$, и, следовательно,

$$|\beta_{ni}(x)|\leqslant C(n+1)^2. \qquad (1.4.82)$$

Из (1.4.36), (1.4.30), (1.4.82) и (1.4.75) вытекает

$$|\beta_{ni}(x)|\leqslant\sum_{k,j}|H_{ni,kj}(x)\beta_{kj}(x)|\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^2\xi_k}{|n-k|+1}.$$

Так как

$$\frac{k+1}{(n+1)(|n-k|+1)}\leqslant 1,$$

то имеет место оценка

$$|\beta_{ni}(x)|\leqslant C(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\xi_k\leqslant C(n+1). \qquad (1.4.83)$$

Используя (1.4.83) вместо (1.4.82) и повторяя рассуждения, выводим

$$|\beta_{ni}(x)| \leqslant \sum_{k,j} |H_{ni,kj}(x)\beta_{kj}(x)| \leqslant C\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\xi_k}{|n-k|+1} \leqslant C.$$

Тогда, в силу леммы 1.4.6, $\beta_{ni}(x) = 0$ и, следовательно, $\gamma_{ni}(x) = 0$. Таким образом, $\ell\varphi_{ni}(x) = \lambda_{ni}\varphi_{ni}(x)$. Далее, из (1.4.80) вытекает

$$\lambda\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \ell\varphi(x,\lambda) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}\lambda_{k0}\varphi_{k0}(x) - \frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\lambda_{k1}\varphi_{k1}(x)\Big) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}(\lambda-\lambda_{k0})\varphi_{k0}(x) - \\ - \frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}(\lambda-\lambda_{k1})\varphi_{k1}(x)\Big).$$

Отсюда, в силу (1.4.10), следует, что $\ell\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda)$. Аналогично, используя (1.4.81), получаем: $\ell\Phi(x,\lambda) = \lambda\Phi(x,\lambda)$. Таким образом, (1.4.71) доказано для случая, когда имеет место соотношение (1.4.75).

3) Рассмотрим теперь общий случай, когда выполняются соотношения (1.4.3). Выберем числа $\{\rho_{n,(j)}, \alpha_{n,(j)}\}_{n\geqslant 0}$, $j \geqslant 1$, так, чтобы

$$\Omega_{1,(j)} := \Big(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2\xi_{k,(j)})^2\Big)^{1/2} < \infty,$$

$$\Omega_{0,(j)} := \Big(\sum_{k=0}^{\infty}((k+1)\eta_{k,(j)})^2\Big)^{1/2} \to 0 \ \text{ при } j \to \infty,$$

где

$$\xi_{k,(j)} := |\rho_{k,(j)} - \widetilde{\rho}_k| + |\alpha_{k,(j)} - \widetilde{\alpha}_k|, \quad \eta_{k,(j)} := |\rho_{k,(j)} - \rho_k| + |\alpha_{k,(j)} - \alpha_k|.$$

При каждом фиксированном $j \geqslant 1$ решаем соответствующее основное уравнение

$$\widetilde{\psi}_{(j)}(x) = (E + \widetilde{H}_{(j)}(x))\psi_{(j)}(x),$$

а затем строим функции $\varphi_{(j)}(x,\lambda)$ и краевые задачи $L(q_{(j)}(x), h_{(j)}, H_{(j)})$. Используя лемму 1.3.1, можно показать, что

$$\lim_{j\to\infty}\|q_{(j)} - q\|_{L_2} = 0, \quad \lim_{j\to\infty} h_{(j)} = h,$$

$$\lim_{j\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|\varphi_{(j)}(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)| = 0. \qquad (1.4.84)$$

Через $\varphi_0(x,\lambda)$ обозначим решение уравнения (1.1.1) при условиях $\varphi_0(0,\lambda)=1$, $\varphi_0'(0,\lambda)=h$. В силу леммы 1.3.3

$$\lim_{j\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|\varphi_{(j)}(x,\lambda)-\varphi_0(x,\lambda)|=0.$$

Сравнивая это соотношение с (1.4.84), заключаем, что $\varphi_0(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)$, т. е. $\ell\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda)$. Аналогично получаем: $\ell\Phi(x,\lambda)=\lambda\Phi(x,\lambda)$.

4) Обозначим $\Delta(\lambda):=V(\varphi)$. Из (1.4.73) и (1.4.74) при $a=\pi$ вытекает

$$\widetilde{\Delta}(\lambda)=\Delta(\lambda)+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle_{|x=\pi}}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}\Delta(\lambda_{k0})-\\ -\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle_{|x=\pi}}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\Delta(\lambda_{k1})\Big),\qquad(1.4.85)$$

$$0=V(\Phi)+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle_{|x=\pi}}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}\Delta(\lambda_{k0})-\\ -\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle_{|x=\pi}}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\Delta(\lambda_{k1})\Big).\qquad(1.4.86)$$

В (1.4.85) положим $\lambda=\lambda_{n1}$:

$$\Delta(\lambda_{n1})+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{n1,k0}(\pi)\Delta(\lambda_{k0})-\widetilde{P}_{n1,k1}(\pi)\Delta(\lambda_{k1})\Big)=0.$$

Так как $\widetilde{P}_{n1,k1}(\pi)=\delta_{nk}$, то получаем: $\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{P}_{n1,k0}(\pi)\Delta(\lambda_{k0})=0$. В силу леммы 1.4.6 отсюда заключаем, что $\Delta(\lambda_{k0})=0,\ k\geqslant 0$. Подставляя это выражение в (1.4.86) и используя соотношение $\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle_{|x=\pi}=0$, получаем: $V(\Phi)=0$, т. е. (1.4.72) доказано. Отметим, что дополнительно доказано, что $\Delta(\lambda_n)=0$, т. е. числа $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ являются собственными значениями задачи L. □

Из (1.4.18) при $x=0$ вытекает

$$M(\lambda)=\widetilde{M}(\lambda)+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\alpha_{k0}(\lambda-\lambda_{k0})}-\frac{1}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}\Big).$$

Согласно теореме 1.2.6 $\widetilde{M}(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{\alpha_{k1}(\lambda-\lambda_{k1})}$, и, следовательно,

$$M(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda-\lambda_k)}.$$

Таким образом, числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ являются спектральными данными построенной краевой задачи L. Отметим, что если выполняется (1.1.23), то можно выбрать модельную задачу $\widetilde{L} = L(\widetilde{q}(x), \widetilde{h}, \widetilde{H})$ с $\widetilde{q}(x) \in W_2^N$ так, чтобы $\{n^{N+1}\xi_n\} \in l_2$, и получить $q(x) \in W_2^N$. Это рассуждение завершает доказательство теоремы 1.4.2. □

Пример 1.4.1. Пусть $\lambda_n = n^2$ $(n \geqslant 0)$, $\alpha_n = \pi/2$ $(n \geqslant 1)$, и пусть $\alpha_0 > 0$ — произвольное положительное число. Выберем $\widetilde{L}$ так, чтобы $\widetilde{q}(x) = 0$, $\widetilde{h} = \widetilde{H} = 0$. Тогда $\widetilde{\lambda}_n = 0$ $(n \geqslant 0)$, $\widetilde{\alpha}_n = \dfrac{\pi}{2}$ $(n \geqslant 1)$ и $\widetilde{\alpha}_0 = \pi$. Обозначим $a := \dfrac{1}{\alpha_0} - \dfrac{1}{\pi}$. Ясно, что $a > -\dfrac{1}{\pi}$. Тогда (1.4.19) и (1.4.21) дают: $1 = (1 + ax)\varphi_{00}(x)$, $\varepsilon_0(x) = a\varphi_{00}(x)$, и, следовательно,

$$\varphi_{00}(x) = \frac{1}{1+ax}, \quad \varepsilon_0(x) = \frac{a}{1+ax}.$$

Используя (1.4.25) и (1.4.26), вычисляем

$$q(x) = \frac{2a^2}{(1+ax)^2}, \quad h = -a, \quad H = \frac{a}{1+a\pi} = \frac{a\alpha_0}{\pi}. \tag{1.4.87}$$

Согласно (1.4.10) имеем

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x - \frac{a}{1+ax}\frac{\sin\rho x}{\rho}.$$

1.4.3. Несамосопряженный случай. В несамосопряженном случае теорема 1.4.1 остается верной, т. е. по необходимости основное уравнение (1.4.33) однозначно разрешимо. Следовательно, результаты п. 1.4.1 остаются верными и в несамосопряженном случае. Однако доказательство достаточности в теореме 1.4.2 должно быть скорректировано, так как в общем случае лемма 1.4.6 не работает. В несамосопряженном случае мы должны требовать разрешимости основного уравнения (см. условие P теоремы 1.4.3). Как будет показано в примере 1.4.2, условие P является существенным и не может быть опущено. С другой стороны, мы представляем классы операторов, для которых однозначная разрешимость основного уравнения может быть доказана.

Рассмотрим краевую задачу L вида (1.1.1)–(1.1.2), где $q(x) \in L_2(0,\pi)$ —комплекснозначная функция, h, H — комплексные числа. Для упрощения выкладок ограничимся случаем, когда все нули характеристической функции $\Delta(\lambda)$ являются простыми. В этом случае будем говорить, что $L \in V$. Если $L \in V$, то

$$\alpha_n \neq 0, \quad \lambda_n \neq \lambda_k \ (n \neq k), \tag{1.4.88}$$

и имеют место асимптотические формулы (1.3.8).

Теорема 1.4.3. *Для того чтобы комплексные числа* $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *были спектральными данными для некоторой задачи* $L(q(x), h, H) \in V$ *с* $q(x) \in L_2(0,\pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

1) *имели место соотношения* (1.4.88) *и* (1.3.8);

2) (*условие* P) *при каждом фиксированном* $x \in [0,\pi]$ *линейный огра-*

ниченный оператор $E+\widetilde{H}(x)$, *действующий из* m *в* m, *имел ограниченный обратный. Здесь задача* $\widetilde{L}\in V$ *выбрана так, чтобы* $\widetilde{\omega}=\omega$. *Краевая задача* $L(q(x),h,H)$ *строится по алгоритму* 1.4.1.

Доказательство теоремы 1.4.3 в основном повторяет доказательство теоремы 1.4.2; только лемма 1.4.6 должна быть опущена.

Пример 1.4.2. Рассмотрим пример 1.4.1, но теперь пусть α_0 — произвольное комплексное число. Тогда основное уравнение обратной задачи принимает вид

$$1=(1+ax)\varphi_{00}(x),$$

а условие P означает, что $1+ax\neq 0$ при всех $x\in[0,\pi]$, т. е. $a\notin(-\infty,-1/\pi]$. Следовательно, условие P выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_0\notin(-\infty,0]$. Таким образом, числа $\{n^2,\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$; $\alpha_n = \pi/2$ $(n\geqslant 1)$ будут спектральными данными тогда и только тогда, когда $\alpha_0\notin(-\infty,0]$. Краевая задача строится согласно (1.4.87). Для самосопряженного случая имеем: $\alpha_0>0$, и условие P всегда выполняется.

В теореме 1.4.3 одним из условий, при которых произвольные комплексные числа $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ будут спектральными данными для краевой задачи L вида (1.1.1), (1.1.2), является требование, чтобы основное уравнение было однозначно разрешимо (условие P). Это условие в общем случае труднопроверяемо. В связи с этим важным является описание классов операторов, для которых однозначная разрешимость основного уравнения может быть проверена. Здесь мы укажем три таких класса, часто встречающиеся в приложениях.

(i) *Самосопряженный случай.* В этом случае условие P выполняется автоматически (см. теорему 1.4.2).

(ii) *Конечномерные возмущения.* Пусть дана модельная краевая задача $\widetilde{L}$ со спектральными данными $\{\widetilde{\lambda}_n,\widetilde{\alpha}_n\}_{n\geqslant 0}$. Изменим конечное подмножество этих чисел. Другими словами, рассмотрим числа $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ такие, что $\lambda_n=\widetilde{\lambda}_n$ и $\alpha_n=\widetilde{\alpha}_n$ при $n>N$, а в остальном произвольные. Тогда, согласно (1.4.19), основное уравнение становится линейной алгебраической системой:

$$\widetilde{\varphi}_{ni}(x)=\varphi_{ni}(x)+\sum_{k=0}^{N}(\widetilde{P}_{ni,k0}(x)\varphi_{k0}(x)-\widetilde{P}_{ni,k1}(x)\varphi_{k1}(x)),$$
$$n=\overline{0,N},\ i=0,1,\ x\in[0,\pi],$$

а условие P является условием отличия от нуля определителя этой системы при всех $x\in[0,\pi]$. Такие возмущения весьма популярны в приложениях. Отметим, что в самосопряженном случае определитель всегда отличен от нуля.

(iii) *Локальная разрешимость основного уравнения.* При малых возмущениях спектральных данных условие P выполняется автоматически. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4.4. *Пусть дана задача* $\widetilde{L}=L(\widetilde{q}(x),\widetilde{h},\widetilde{H})\in V$. *Существует* $\delta>0$ (*зависящее от* $\widetilde{L}$) *такое, что если комплексные* *числа* $\{\lambda_n,\, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *удовлетворяют условию* $\Omega < \delta$, *то существует единственная краевая задача* $L(q(x), h, H) \in V$ *с* $q(x) \in L_2(0,\pi)$, *для которой числа* $\{\lambda_n,\, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *являются спектральными данными, причем*

$$\|q-\widetilde{q}\|_{L_2(0,\pi)} < C\Omega, \quad |h-\widetilde{h}| < C\Omega, \quad |H-\widetilde{H}| < C\Omega, \tag{1.4.89}$$

где C *зависит только от* $\widetilde{L}$.

Доказательство. Здесь C будет обозначать различные константы, зависящие только от $\widetilde{L}$. Так как $\Omega < \infty$, то имеют место асимптотические формулы (1.3.8). Выберем $\delta_0 > 0$ так, чтобы в случае, если $\Omega < \delta_0$, выполнялись соотношения (1.4.88). В силу (1.4.32)

$$\|\widetilde{H}(x)\| \leqslant C \sup_n \sum_k \frac{\xi_n}{|n-k|+1} < C\Omega.$$

Выберем $\delta \leqslant \delta_0$ так, что в случае, если $\Omega < \delta$, $\|\widetilde{H}(x)\| \leqslant 1/2$ при $x \in [0,\pi]$. Тогда существует обратный оператор $(E+\widetilde{H}(x))^{-1}$, причем $\|(E+\widetilde{H}(x))^{-1}\| \leqslant 2$. Таким образом, выполняются все условия теоремы 1.4.3. В силу теоремы 1.4.3 существует единственная краевая задача $L(q(x), h, H) \in V$, для которой числа $\{\lambda_n,\, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ являются спектральными данными. Кроме того, верны соотношения (1.4.68), (1.4.69). Повторяя теперь рассуждения из доказательства леммы 1.4.8, получаем

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\pi} |\varepsilon_0(x)| \leqslant C\Omega, \quad \|\varepsilon(x)\|_{L_2(0,\pi)} \leqslant C\Omega.$$

Вместе с (1.4.25)–(1.4.26) это дает (1.4.89). □

Аналогичным образом можно исследовать устойчивость решения обратной задачи *в равномерной норме*; точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4.5. *Пусть дана задача* $\widetilde{L} = L(\widetilde{q}(x), \widetilde{h}, \widetilde{H}) \in V$. *Существует* $\delta > 0$ (*зависящее от* $\widetilde{L}$) *такое, что если комплексные числа* $\{\lambda_n,\, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *удовлетворяют условию* $\Omega_1 < \delta$ (Ω_1 *определена в* (1.4.75)), *то существует единственная краевая задача* $L(q(x), h, H) \in V$, *для которой числа* $\{\lambda_n,\, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *являются спектральными данными. Кроме того, функция* $q(x) - \widetilde{q}(x)$ *непрерывна на* $[0,\pi]$ *и*

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\pi} |q-\widetilde{q}| < C\Omega_1, \quad |h-\widetilde{h}| < C\Omega_1, \quad |H-\widetilde{H}| < C\Omega_1,$$

где C *зависит только от* $\widetilde{L}$.

Замечание 1.4.4. Используя метод спектральных отображений, можно решать обратную задачу не только в $L_2(0,\pi)$ и $W_2^N(0,\pi)$, но также и для других классов потенциалов. Сформулируем, например, следующую теорему для несамосопряженного случая.

Теорема 1.4.6. *Для того чтобы комплексные числа* $\{\lambda_n,\, \alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *были спектральными данными для некоторой краевой задачи*

$L(q(x), h, H) \in V$ с $q(x) \in D \subset L(0,\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы

1) *выполнялось соотношения* (1.4.88);

2) (*асимптотика*) *существовала краевая задача* $\widetilde{L} = L(\widetilde{q}(x), \widetilde{h}, \widetilde{H}) \in \in V$ *с* $\widetilde{q}(x) \in D$ *такая, что* $\{n\xi_n\} \in l_2$;

3) (*условие* P) *при каждом фиксированном* $x \in [0,\pi]$ *линейный ограниченный оператор* $E + \widetilde{H}(x)$, *действующий из* m *в* m, *имел ограниченный обратный*;

4) $\varepsilon(x) \in D$, *где функция* $\varepsilon(x)$ *определена в* (1.4.21).

Краевая задача $L(q(x), h, H)$ *строится по алгоритму* 1.4.1.

§ 1.5. Метод эталонных моделей

В методе эталонных моделей строится последовательность модельных операторов, которые приближают в некотором смысле искомый оператор и позволяют строить потенциал «шагами». Метод дает эффективный алгоритм решения обратной задачи и имеет широкую область применения. Он применим для многих важных классов обратных задач, когда другие методы оказываются неприменимыми. Например, в [258] исследовались так называемые неполные обратные задачи для дифференциальных операторов высших порядков, когда только некоторая часть спектральной информации доступна для измерения и имеется априорная информация об операторе или его спектре. В [276] метод эталонных моделей применялся при решении обратной задачи для систем дифференциальных уравнений с нелинейной зависимостью от спектрального параметра, а в [262] — для исследования интегродифференциальных операторов. Этот метод также использовался для решения обратной задачи теории упругости [261].

Однако метод эталонных моделей работает при довольно жестких условиях на оператор. Например, для оператора Штурма–Лиувилля метод работает в классах аналитических или кусочно-аналитических на отрезке $[0,\pi]$ потенциалов. Метод также работает для более общих классов потенциалов, например в классе кусочно-операторно-аналитических функций (см. [82]) или в других классах функций, которые могут быть разложены в ряды, обобщающие ряды Тейлора. В этом параграфе идея метода эталонных моделей показана на простейшем примере операторов Штурма–Лиувилля. Чтобы не загромождать изложения, мы ограничимся случаем, когда потенциал $q(x)$ краевой задачи (1.1.1)–(1.1.2) является аналитической на $[0,\pi]$ функцией. Другие, более сложные применения метода эталонных моделей изложены в [250, 258].

1.5.1. Вспомогательные утверждения. Пусть функция $\Phi(x,\lambda)$ является решением Вейля уравнения (1.1.1) при условиях $U(\Phi) = = 1$, $V(\Phi) = 0$, и пусть $M(\lambda) := \Phi(0,\lambda)$ — функция Вейля для краевой задачи L (см. п. 1.2.4). Из нескольких равносильных формулировок обратных задач, введенных в § 1.2, рассмотрим здесь для определенности обратную задачу 1.2.4 восстановления L по функции Вейля.

Пусть задана функция Вейля $M(\lambda)$ краевой задачи L. Наша цель — дать конструктивную процедуру построения потенциала $q(x)$, который является аналитической функцией на $[0,\pi]$ (для упрощения выкладок считаем, что коэффициенты h и H известны). Возьмем некоторую модельную краевую задачу $\widetilde{L}=L(\widetilde{q}(x),h,H)$ с аналитическим потенциалом $\widetilde{q}(x)$. Так как

$$-\Phi''(x,\lambda)+q(x)\Phi(x,\lambda)=\lambda\Phi(x,\lambda),\ -\widetilde{\Phi}''(x,\lambda)+\widetilde{q}(x)\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\lambda\widetilde{\Phi}(x,\lambda),$$

то $(q(x)-\widetilde{q}(x))\Phi(x,\lambda)\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=(\Phi'(x,\lambda)\widetilde{\Phi}(x,\lambda)-\Phi(x,\lambda)\widetilde{\Phi}'(x,\lambda))'$, и, следовательно,

$$\int_0^\pi \widehat{q}(x)\Phi(x,\lambda)\widetilde{\Phi}(x,\lambda)\,dx=\widehat{M}(\lambda), \tag{1.5.1}$$

где $\widehat{q}(x)=q(x)-\widetilde{q}(x)$, $\widehat{M}(\lambda)=M(\lambda)-\widetilde{M}(\lambda)$.

Изучим асимптотику слагаемых в (1.5.1). Сначала докажем вспомогательное утверждение. Обозначим $Q=\{\rho:\ \arg\rho\in[\delta_0,\pi-\delta_0]\}$, $\delta_0>$ >0. Тогда существует $\varepsilon_0>0$ такое, что

$$|\operatorname{Im}\rho|\geqslant\varepsilon_0|\rho| \quad \text{при } \rho\in Q. \tag{1.5.2}$$

Лемма 1.5.1. *Пусть*

$$r(x)=\frac{x^k}{k!}\Big(\gamma+p(x)\Big),\ H(x,\rho)=\exp(2i\rho x)\Big(1+\frac{\xi(x,\rho)}{\rho}\Big),\ x\in[0,a],$$

где $p(x)\in C[0,a]$, $p(0)=0$, *а функция* $\xi(x,\rho)$ *непрерывна и ограничена при* $x\in[0,a]$, $\rho\in Q$, $|\rho|\geqslant\rho^*$. *Тогда при* $\rho\to\infty$, $\rho\in Q$:

$$\int_0^a r(x)H(x,\rho)\,dx=\frac{(-1)^k}{(2i\rho)^{k+1}}(\gamma+o(1)).$$

Доказательство. Разобьем интеграл на три слагаемых:

$$(2i\rho)^{k+1}(-1)^k\int_0^a r(x)H(x,\rho)\,dx=I_1(\rho)+I_2(\rho)+I_3(\rho),$$

$$I_1(\rho):=\gamma(2i\rho)^{k+1}(-1)^k\int_0^a\frac{x^k}{k!}\exp(2i\rho x)\,dx,$$

$$I_2(\rho):=(2i\rho)^{k+1}(-1)^k\int_0^a\frac{x^k}{k!}p(x)\exp(2i\rho x)\,dx,$$

$$I_3(\rho):=(2i)^{k+1}(-\rho)^k\int_0^a r(x)\exp(2i\rho x)\xi(x,\rho)\,dx.$$

Так как

$$\int_0^\infty \frac{x^k}{k!}\exp(2i\rho x)\,dx = \frac{(-1)^k}{(2i\rho)^{k+1}}, \quad \rho\in Q,$$

то $I_1(\rho)-\gamma\to 0$ при $|\rho|\to\infty$, $\rho\in Q$.

Далее, возьмем $\varepsilon>0$ и выберем $\delta=\delta(\varepsilon)$ так, чтобы при $x\in[0,\delta]$ $|p(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\varepsilon_0^{k+1}$, где ε_0 определено в (1.5.2). Тогда, используя (1.5.2), вычисляем

$$|I_2(\rho)| < \frac{\varepsilon}{2}(2|\rho|\varepsilon_0)^{k+1}\int_0^\delta \frac{x^k}{k!}\exp(-2\varepsilon_0|\rho|x)\,dx + \\ + (2|\rho|)^{k+1}\int_\delta^a \frac{x^k}{k!}|p(x)|\exp(-2\varepsilon_0|\rho|x)\,dx < \\ < \frac{\varepsilon}{2} + (2|\rho|)^{k+1}\exp(-2\varepsilon_0|\rho|\delta)\int_0^{a-\delta}\frac{(x+\delta)^k}{k!}|p(x+\delta)|\exp(-2\varepsilon_0|\rho|x)\,dx.$$

В силу произвольности ε получаем, что $I_2(\rho)\to 0$ при $|\rho|\to\infty$, $\rho\in Q$.

Так как $|(\gamma+p(x))\xi(x,\rho)|<C$, то при $|\rho|\to\infty$, $\rho\in Q$ имеем

$$|I_3(\rho)| < C|\rho|^k\int_0^a \frac{x^k}{k!}\exp(-2\varepsilon_0|\rho|x)\,dx \leqslant \frac{C}{|\rho|\varepsilon_0^{k+1}} \to 0,$$

и лемма 1.5.1 доказана. □

Предположим, что при некотором фиксированном $k\geqslant 0$ коэффициенты Тейлора $q_j := q^{(j)}(0)$, $j=\overline{0,k-1}$, уже вычислены. Выберем модельную краевую задачу $\widetilde{L}$ так, чтобы первые k коэффициентов Тейлора функций q и $\widetilde{q}$ совпадали, т. е. $\widetilde{q}_j=q_j$, $j=\overline{0,k-1}$. Тогда, используя (1.5.1) и лемму 1.5.1, можно вычислить следующий коэффициент Тейлора $q_k=q^{(k)}(0)$. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.5.2. *Зафиксируем k. Пусть функции $q(x)$ и $\widetilde{q}(x)$ аналитичны при $x\in[0,a]$, $a>0$, причем $\widehat{q}_j := q_j-\widetilde{q}_j=0$ при $j=\overline{0,k-1}$. Тогда*

$$\widehat{q}_k = \frac{1}{4}(-1)^k \lim_{\substack{|\rho|\to\infty\\ \rho\in Q}}(2i\rho)^{k+3}\widehat{M}(\lambda). \tag{1.5.3}$$

Доказательство. Из (1.1.10), (1.1.16) и (1.2.9) вытекает

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{1}{i\rho}\exp(i\rho x)\Big(1+O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big).$$

Следовательно, учитывая (1.5.1), получаем

$$\widehat{M}(\lambda)=\int\limits_0^\pi \widehat{q}(x)\Phi(x,\lambda)\widetilde{\Phi}(x,\lambda)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^a \frac{x^k}{k!}\Big(\widehat{q}^{(k)}(0)+p(x)\Big)\frac{1}{(i\rho)^2}\exp(2i\rho x)\Big(1+\frac{\xi(x,\rho)}{\rho}\Big)\,dx+$$

$$+\int\limits_a^\pi \widehat{q}(x)\Phi(x,\lambda)\widetilde{\Phi}(x,\lambda)\,dx.$$

Используя лемму 1.5.1, получаем при $|\rho|\to\infty,\ \rho\in Q$:

$$\widehat{M}(\lambda)=\frac{4(-1)^k}{(2i\rho)^{k+3}}\Big(\widehat{q}^{(k)}(0)+o(1)\Big),$$

и лемма 1.5.2 доказана. □

1.5.2. Решение обратной задачи. Опираясь на вышеприведенные факты, приходим к следующему алгоритму решения задачи 1.2.4 в классе аналитических потенциалов.

Алгоритм 1.5.1. *Пусть задана функция Вейля* $M(\lambda)$ *краевой задачи* (1.1.1, (1.1.2) *с аналитическим потенциалом.*

(i) *Вычисляем* $q_k=q^{(k)}(0),\ k\geqslant 0$. *Для этого последовательно при* $k=0,1,2,\ldots$ *выполняем следующие операции: строим модельную краевую задачу* $\widetilde{L}$ *с аналитическим потенциалом* $\widetilde{q}(x)$ *такую, что* $\widetilde{q}_j=q_j,\ j=\overline{0,k-1}$, *и вычисляем* $q_k=q^{(k)}(0)$ *по формуле* (1.5.3).

(ii) *Строим функцию* $q(x)$ *по формуле*

$$q(x)=\sum_{k=0}^\infty q_k\frac{x^k}{k!},\qquad 0<x<R,$$

где

$$R=\Big(\overline{\lim_{k\to\infty}}\Big(\frac{|q_k|}{k!}\Big)^{1/k}\Big)^{-1}.$$

Если $R<\pi$, *то при* $R<x<\pi$ *функция* $q(x)$ *строится по аналитическому продолжению или методом шагов, описанным в замечании* 1.5.1.

Замечание 1.5.1. Метод эталонных моделей работает также и в классе кусочно-аналитических потенциалов. В самом деле, функции

$$\Phi_a(x,\lambda)=\frac{\Phi(x,\lambda)}{\Phi'(a,\lambda)},\quad M_a(\lambda)=\frac{\Phi(a,\lambda)}{\Phi'(a,\lambda)}=\frac{S(a,\lambda)+M(\lambda)\varphi(a,\lambda)}{S'(a,\lambda)+M(\lambda)\varphi'(a,\lambda)}$$

являются соответственно решением Вейля и функцией Вейля для отрезка $x\in[a,\pi]$. Предположим, что потенциал $q(x)$ уже построен на отрезке $[0,a]$. Тогда можно вычислить $M_a(\lambda)$ и перейти к интервалу $[a,\pi]$.

§ 1.6. Устойчивость решения обратной задачи

В этом параграфе излагается метод локального решения обратной задачи 1.2.2, позволяющий исследовать устойчивость решения. Не ограничивая общности, будем рассматривать случай $H = 0$. В этом методе, который был предложен Боргом [44], обратная задача сводится к нелинейному интегральному уравнению (см. (1.6.13)), которое может быть решено локально. Важную роль в методе Борга играют произведения собственных функций рассматриваемых краевых задач. Для вывода и исследования нелинейного уравнения Борга используется полнота или базисность по Риссу в $L_2(0,\pi)$ таких произведений. Для теорем единственности достаточно доказать полноту произведений (см. п. 1.2.3), а для локального решения обратной задачи и исследования устойчивости ее решения нужна базисность по Риссу. Для удобства читателей в п. 1.6.5 дается необходимая информация о базисах Рисса в гильбертовом пространстве. Заметим, что для операторов Штурма–Лиувилля метод Борга слабее, чем метод Гельфанда–Левитана и метод спектральных отображений. Однако метод Борга иногда оказывается полезным, когда другие методы не работают (см., например, [130, 150, 75, 262] и др.).

1.6.1. Вывод уравнения Борга. Пусть $\lambda_{ni} = \rho_{ni}^2$, $n \geqslant 0$, $i = 1, 2$, — собственные значения краевых задач L_i :

$$\ell y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \tag{1.6.1}$$

$$y'(0) - hy(0) = y^{(i-1)}(\pi) = 0, \tag{1.6.2}$$

где $q(x) \in L_2(0,\pi)$ — вещественная функция и h — вещественное число. Тогда (см. § 1.1)

$$\rho_{n1} = \Bigl(n + \frac{1}{2}\Bigr) + \frac{a}{n} + \frac{\varkappa_{n1}}{n}, \quad \rho_{n2} = n + \frac{a}{n} + \frac{\varkappa_{n2}}{n}, \tag{1.6.3}$$

где

$$\{\varkappa_{ni}\} \in l_2, \quad a = \frac{1}{\pi}\Bigl(h + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)\,dt\Bigr).$$

Пусть L_i и $\widetilde{L}_i$, $i = 1, 2$, таковы, что $a = \widetilde{a}$. Тогда

$$\Lambda := \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(|\lambda_{n1} - \widetilde{\lambda}_{n1}|^2 + |\lambda_{n2} - \widetilde{\lambda}_{n2}|^2\Bigr)\Bigr)^{1/2} < \infty.$$

Обозначим

$$y_{ni}(x) = \varphi(x, \widetilde{\lambda}_{ni}),\ \widetilde{y}_{ni}(x) = \widetilde{\varphi}(x, \widetilde{\lambda}_{ni}),\ s_{ni}(x) = S(x, \widetilde{\lambda}_{ni}),\ \widetilde{s}_{ni}(x) = \widetilde{S}(x, \widetilde{\lambda}_{ni}),$$

$$G_{ni}(x,t) = \begin{cases} S(x, \widetilde{\lambda}_{ni})C(t, \widetilde{\lambda}_{ni}) - S(t, \widetilde{\lambda}_{ni})C(x, \widetilde{\lambda}_{ni}), & 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & 0 \leqslant x < t \leqslant \pi, \end{cases}$$

где $\varphi(x,\lambda)$, $C(x,\lambda)$ и $S(x,\lambda)$ — решения уравнения (1.6.1) при условиях $C(0,\lambda) = \varphi(0,\lambda) = S'(0,\lambda) = 1$, $C'(0,\lambda) = S(0,\lambda) = 0$, $\varphi'(0,\lambda) = h$.

Так как $\ell y_{ni}(x) = \widetilde{\lambda}_{ni} y_{ni}(x)$, $\widetilde{\ell}\widetilde{y}_{ni}(x) = \widetilde{\lambda}_{ni}\widetilde{y}_{ni}(x)$, то

$$\int\limits_0^\pi r(x) y_{ni}(x)\widetilde{y}_{ni}(x)\,dx = \int\limits_0^\pi (y_{ni}(x)\widetilde{y}''_{ni}(x) - y''_{ni}(x)\widetilde{y}_{ni}(x))\,dx = \\ = \Big(y_{ni}(x)\widetilde{y}'_{ni}(x) - y'_{ni}(x)\widetilde{y}_{ni}(x)\Big)\Big|_0^\pi, \qquad (1.6.4)$$

где $r := \widetilde{q} - q$. Положим

$$p = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi r(x)\,dx. \qquad (1.6.5)$$

Из равенства $a = \widetilde{a}$ вытекает, что $p = \widetilde{h} - h$, и, следовательно, (1.6.4) принимает вид

$$\int\limits_0^\pi r(x) y_{ni}(x)\widetilde{y}_{ni}(x)\,dx = y_{ni}(\pi)\widetilde{y}'_{ni}(\pi) - \\ - y'_{ni}(\pi)\widetilde{y}_{ni}(\pi) - p,\ n \geqslant 0, \quad i = 1, 2. \qquad (1.6.6)$$

Так как $\widetilde{y}_{ni}(x)$ являются собственными функциями краевых задач $\widetilde{L}_i$, то

$$\widetilde{y}_{n1}(\pi) = 0, \quad \widetilde{y}'_{n2}(\pi) = 0, \quad n \geqslant 0. \qquad (1.6.7)$$

Далее, дифференцированием нетрудно проверить, что функция $\widetilde{y}_{ni}(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\widetilde{y}_{ni}(x) = y_{ni}(x) + p s_{ni}(x) + \int\limits_0^\pi G_{ni}(x,t) r(t)\widetilde{y}_{ni}(t)\,dt, \\ n \geqslant 0, \quad i = 1, 2. \qquad (1.6.8)$$

Решая уравнение (1.6.8) методом последовательных приближений, находим

$$\widetilde{y}_{ni}(x) = y_{ni}(x) + p s_{ni}(x) + \varphi_{ni}(x), \quad n \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \qquad (1.6.9)$$

где

$$\varphi_{ni}(x) = \sum_{j=1}^\infty \underbrace{\int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi}_{j} G_{ni}(x,t_1) G_{ni}(t_1,t_2)\ldots G_{ni}(t_{j-1},t_j) \times \\ \times r(t_1)\ldots r(t_j)(y_{ni}(t_j) + p s_{ni}(t_j))\,dt_1\ldots dt_j. \qquad (1.6.10)$$

Подставляя (1.6.9)–(1.6.10) в (1.6.6) и используя (1.6.5) и (1.6.7), получаем

$$\int_0^\pi r(x)\xi_{ni}(x)\,dx = \omega_{ni}, \quad n \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \tag{1.6.11}$$

где

$$\xi_{ni}(x) = y_{ni}^2(x) - \frac{1}{2},$$

$$\omega_{n1} = y_{n1}(\pi)(y'_{n1}(\pi) + ps'_{n1}(\pi) + \varphi'_{n1}(\pi)) - \\ - \int_0^\pi pr(x)s_{n1}(x)y_{n1}(x)\,dx - \int_0^\pi r(x)y_{n1}(x)\varphi_{n1}(x)\,dx,$$

$$\omega_{n2} = -y'_{n2}(\pi)(y_{n2}(\pi) + ps_{n2}(\pi) + \varphi_{n2}(\pi)) \\ - \int_0^\pi pr(x)s_{n2}(x)y_{n2}(x)\,dx - \int_0^\pi r(x)y_{n2}(x)\varphi_{n2}(x)\,dx.$$

Из (1.2.7) вытекает

$$\xi_{ni}(x) = \frac{1}{2}\Big(\cos 2\widetilde{\rho}_{ni}x + \int_0^x V_1(x,t)\cos 2\widetilde{\rho}_{ni}t\,dt\Big), \tag{1.6.12}$$

где $V_1(x,t)$ — непрерывная функция. Введем функции $\{\eta_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ и числа $\{z_n\}_{n\geqslant 0}$ по формулам

$$\eta_{2n}(x) = \xi_{n2}(x),\ \eta_{2n+1}(x) = \xi_{n1}(x), \quad z_{2n} = 2\widetilde{\rho}_{n2}, \quad z_{2n+1} = 2\widetilde{\rho}_{n1}.$$

Тогда, согласно (1.6.3) и (1.6.12), имеем

$$z_n = n + \frac{a}{n} + \frac{\varkappa_n}{n},\ \{\varkappa_n\} \in l_2,$$

$$\eta_n(x) = \frac{1}{2}\Big(\cos z_n x + \int_0^x V_1(x,t)\cos z_n t\,dt\Big).$$

В силу утверждений 1.6.6 и 1.6.2 множество функций $\{\eta_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$. Через $\{\chi_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ обозначим соответствующий биортогональный базис. Тогда из (1.6.11) выводим

$$r(x) = \sum_{n=0}^\infty \Big(\omega_{n2}\chi_{2n}(x) + \omega_{n1}\chi_{2n+1}(x)\Big),$$

и, следовательно, с учетом (1.6.5) имеем

$$r(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}}_{j}H_j(x,t_1,\ldots,t_j)r(t_1)\cdot\ldots\cdot r(t_j)\,dt_1\ldots dt_j, \quad (1.6.13)$$

где

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-y'_{n2}(\pi)y_{n2}(\pi)\chi_{2n}(x)+y'_{n1}(\pi)y_{n1}(\pi)\chi_{2n+1}(x)), \quad (1.6.14)$$

$$H_1(x,t_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-y'_{n2}(\pi)\Big(G_{n2}(\pi,t_1)y_{n2}(t_1)-\frac{1}{2}s_{n2}(\pi)\Big)\chi_{2n}(x)+$$
$$+y_{n1}(\pi)\Big(\frac{\partial G_{n1}(x,t_1)}{\partial x}\Big|_{x=\pi}y_{n1}(t_1)-\frac{1}{2}s'_{n1}(\pi)\Big)\chi_{2n+1}(x)\Big), \quad (1.6.15)$$

$$H_j(x,t_1,\ldots,t_j)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\Big(y_{n2}(t_1)+y'_{n2}(\pi)G_{n2}(\pi,t_1)\Big)\times$$
$$\times G_{n2}(t_1,t_2)\ldots G_{n2}(t_{j-2},t_{j-1})\Big(G_{n2}(t_{j-1},t_j)y_{n2}(t_j)-$$
$$-\frac{1}{2}s_{n2}(t_{j-1})\Big)\chi_{2n}(x)-\Big(y_{n1}(t_1)-y_{n1}(\pi)\frac{\partial G_{n1}(x,t_1)}{\partial x}\Big|_{x=\pi}\Big)\times$$
$$\times G_{n1}(t_1,t_2)\ldots G_{n1}(t_{j-2},t_{j-1})\Big(G_{n1}(t_{j-1},t_j)y_{n1}(t_j)-$$
$$-\frac{1}{2}s_{n1}(t_{j-1})\Big)\chi_{2n+1}(x)\Big), \quad j\geqslant 2. \quad (1.6.16)$$

Уравнение (1.6.13) называется *уравнением Борга.*

Замечание 1.6.1. Для доказательства базисности по Риссу системы функций $\{\eta_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ мы использовали выше оператор преобразования. Однако во многих случаях, когда метод Борга может быть применен, оператор преобразования не работает. Ниже в п. 1.6.3 представлена оригинальная идея Борга, которая позволяет доказывать базисность по Риссу произведений собственных функций без использования оператора преобразования.

1.6.2. Основная теорема. Используя уравнение Борга, можно доказать следующую теорему о локальном решении обратной задачи и об устойчивости этого решения.

Теорема 1.6.1. *Для краевых задач* L_i *вида* (1.6.1), (1.6.2) *существует* $\delta>0$ (*зависящее от* L_i) *такое, что если вещественные чис-*

ла $\{\widetilde{\lambda}_{ni}\}_{n\geqslant 0}$, $i=1,2$, *удовлетворяют условию* $\Lambda<\delta$, *то существуют единственные* $\widetilde{q}(x)\in L_2(0,\pi)$, $\widetilde{h}$, *для которых числа* $\{\widetilde{\lambda}_{ni}\}_{n\geqslant 0}$, $i=1,2$, *являются собственными значениями* $\widetilde{L}_i$. *Кроме того,*

$$\|q-\widetilde{q}\|_{L_2}<C\Lambda, \quad |h-\widetilde{h}|<C\Lambda. \tag{1.6.17}$$

Здесь и в дальнейшем одним и тем же символом C обозначаются различные положительные константы, зависящие от L_i.

Доказательство. Существует $\delta_1>0$ такое, что если вещественные числа $\{\widetilde{\lambda}_{ni}\}_{n\geqslant 0}$, $i=1,2$, удовлетворяют условию $\Lambda<\delta_1$, то $\widetilde{\lambda}_{ni}\neq\widetilde{\lambda}_{kj}$ при $(n,i)\neq(k,j)$ и

$$y_{n2}(\pi)\neq 0, \quad y'_{n1}(\pi)\neq 0 \quad \text{при всех } n\geqslant 0. \tag{1.6.18}$$

В самом деле, согласно теореме 1.1.1, функции $\varphi(x,\lambda_{n2})$ являются собственными функциями краевой задачи L_2, и $\varphi'(\pi,\lambda_{n2})=0$, $\varphi(\pi,\lambda_{n2})\neq 0$ при всех $n\geqslant 0$. Кроме того, в силу (1.1.9) и (1.6.3), имеем

$$\varphi(\pi,\lambda_{n2})=\cos n\pi+O\Big(\frac{1}{n}\Big)=(-1)^n+O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Таким образом, $|\varphi(\pi,\lambda_{n2})|\geqslant C>0$. С другой стороны, используя (1.3.11), вычисляем

$$\varphi(\pi,\widetilde{\lambda}_{n2})-\varphi(\pi,\lambda_{n2})=(\cos\widetilde{\rho}_{n2}\pi-\cos\rho_{n2}\pi)+\\ +\int\limits_0^\pi G(\pi,t)(\cos\widetilde{\rho}_{n2}t-\cos\rho_{n2}t)\,dt,$$

и, следовательно, $|\varphi(\pi,\widetilde{\lambda}_{n2})-\varphi(\pi,\lambda_{n2})|<C|\widetilde{\rho}_{n2}-\rho_{n2}|$. Тогда при достаточно малом Λ имеем

$$y_{n2}(\pi):=\varphi(\pi,\widetilde{\lambda}_{n2})\neq 0 \quad \text{при всех } n\geqslant 0.$$

Аналогично выводится второе неравенство в (1.6.18).

Нетрудно убедиться, что справедливы следующие оценки при $n\geqslant 0$, $i=0,1,\quad 0\leqslant x,t\leqslant\pi$:

$$|y_{ni}(x)|<C,\ |y'_{n1}(\pi)|<C(n+1),\ \Big|\frac{\partial G_{ni}(x,t)}{\partial x}\Big|<C,\ |G_{ni}(x,t)|<\frac{C}{n+1},$$
$$|y'_{n2}(\pi)|<C|\widetilde{\lambda}_{n2}-\lambda_{n2}|,\ |y_{n1}(\pi)|<\frac{C}{n+1}|\widetilde{\lambda}_{n1}-\lambda_{n1}|,\quad |s'_{n1}(\pi)|<\frac{C}{n+1}.$$

В самом деле, оценка $|y_{ni}(x)|<C$ следует из (1.1.9) и (1.6.3). Так как $\varphi'(\pi,\lambda_{n2})=0$, то $y'_{n2}(\pi)=\varphi'(\pi,\widetilde{\lambda}_{n2})-\varphi'(\pi,\lambda_{n2})$. В силу (1.1.54)

$$\varphi'(x,\lambda)=-\rho\sin\rho x+G(x,x)\cos\rho x+\int\limits_0^x\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\cos\rho t\,dt.$$

Поэтому

$$\varphi'(\pi,\widetilde{\lambda}_{n2})-\varphi'(\pi,\lambda_{n2})=-\widetilde{\rho}_{n2}\sin\widetilde{\rho}_{n2}\pi+\rho_{n2}\sin\rho_{n2}\pi+$$
$$+G(\pi,t)(\cos\widetilde{\rho}_{n2}\pi-\cos\rho_{n2}\pi)+\int\limits_0^\pi \frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\pi}(\cos\widetilde{\rho}_{n2}t-\cos\rho_{n2}t)\,dt,$$

и, следовательно, $|y'_{n2}(\pi)|<C|\widetilde{\lambda}_{n2}-\lambda_{n2}|$. Остальные оценки устанавливаются аналогично.

Используя (1.6.14)–(1.6.16), получаем

$$\|f\|<C\Lambda,\quad \|H_1\|<C\Lambda,\quad \|H_j\|<C^j\ (j\geqslant 2), \tag{1.6.19}$$

где $\|.\|$ — норма в L_2 по совокупности аргументов. В самом деле, согласно (1.6.14) имеем

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty f_n\chi_n(x),$$

где $f_{2n}=-y'_{n2}(\pi)y_{n2}(\pi)$, $f_{2n+1}=y'_{n1}(\pi)y_{n1}(\pi)$. Тогда, используя предыдущие оценки для $y_{ni}(x)$, находим $|f_{2n}|\leqslant C|\widetilde{\lambda}_{n2}-\lambda_{n2}|$, $|f_{2n+1}|\leqslant$ $\leqslant C|\widetilde{\lambda}_{n1}-\lambda_{n1}|$. В силу (1.6.58) это дает: $\|f\|<C\Lambda$. Остальные оценки в (1.6.19) выводятся аналогично.

Рассмотрим в $L_2(0,\pi)$ нелинейное интегральное уравнение (1.6.13) и запишем его в виде: $r=f+Ar$, где

$$Ar=\sum_{j=1}^\infty A_jr,$$

$$(A_jr)(x)=\underbrace{\int\limits_0^\pi\ldots\int\limits_0^\pi}_{j}H_j(x,t_1,\ldots,t_j)r(t_1)\cdot\ldots\cdot r(t_j)\,dt_1\ldots dt_j.$$

С учетом (1.6.19) получаем оценки

$$\|A_1r\|\leqslant C\Lambda\|r\|,\ \|A_1r-A_1\widetilde{r}\|\leqslant C\Lambda\|r-\widetilde{r}\|,$$
$$\|A_jr\|\leqslant(C\|r\|)^j,\ \|A_jr-A_j\widetilde{r}\|\leqslant\|r-\widetilde{r}\|\Big(C\max(\|r\|,\|\widetilde{r}\|)\Big)^{j-1},$$
$$j\geqslant 2,\quad \|f\|<C\Lambda. \tag{1.6.20}$$

Зафиксируем $C\geqslant 1/2$ так, чтобы имели место оценки (1.6.20). Если $\|r\|\leqslant(2C)^{-1}$, $\|\widetilde{r}\|\leqslant(2C)^{-1}$, то из (1.6.20) вытекает

$$\|Ar\|\leqslant C\Lambda\|r\|+2C^2\|r\|^2,$$
$$\|Ar-A\widetilde{r}\|\leqslant C\|r-\widetilde{r}\|\Big(\Lambda+2\max(\|r\|,\|\widetilde{r}\|)\Big).$$

Кроме того, если $\Lambda \leqslant (4C)^{-1}$, $\|r\| \leqslant (8C^2)^{-1}$, $\|\widetilde{r}\| \leqslant (8C^2)^{-1}$, то

$$\|Ar\| \leqslant \frac{1}{2}\|r\|, \quad \|Ar - A\widetilde{r}\| \leqslant \frac{1}{2}\|r - \widetilde{r}\|. \tag{1.6.21}$$

Поэтому существует достаточно малое $\delta_2 > 0$ такое, что если $\Lambda < \delta_2$, то уравнение (1.6.13) может быть решено методом последовательных приближений:

$$r_0 = f, \quad r_{k+1} = f + Ar_k, \; k \geqslant 0,$$

$$r = r_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(r_{k+1} - r_k). \tag{1.6.22}$$

В самом деле, положим $\delta_2 = (16C^3)^{-1}$. Если $\Lambda < \delta_2$, то $\|f\| \leqslant (16C^2)^{-1}$, $\Lambda \leqslant (4C)^{-1}$. Используя (1.6.21), получаем по индукции

$$\|r_k\| \leqslant 2\|f\|, \quad \|r_{k+1} - r_k\| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}\|f\|, \quad k \geqslant 0.$$

Следовательно, ряд (1.6.22) сходится в $L_2(0,\pi)$ к решению уравнения (1.6.13). Кроме того, для этого решения верна оценка $\|r\| \leqslant 2\|f\|$.

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, и пусть $r(x)$ — построенное выше решение уравнения (1.6.13). Определим p по формуле (1.6.5) и $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{h}$ — по формулам: $\widetilde{q} = q + r$, $\widetilde{h} = h + p$. Тем самым мы построили краевые задачи $\widetilde{L}_i$. Ясно, что имеют место оценки (1.6.17).

Осталось показать, что числа $\{\widetilde{\lambda}_{ni}\}_{n\geqslant 0}$ являются собственными значениями для построенных краевых задач $\widetilde{L}_i$. Для этой цели рассмотрим функции $\widetilde{y}_{ni}(x)$, которые являются решениями уравнения (1.6.8). Тогда верны соотношения (1.6.9), (1.6.10). Ясно, что

$$-\widetilde{y}''_{ni}(x) + \widetilde{q}(x)\widetilde{y}_{ni}(x) = \widetilde{\lambda}_{ni}\widetilde{y}_{ni}(x), \quad \widetilde{y}_{ni}(0) = 1, \quad \widetilde{y}'_{ni}(0) = \widetilde{h},$$

и, следовательно, имеет место (1.6.6). Далее, умножая (1.6.13) на $\eta_n(x)$, интегрируя по x и учитывая (1.6.9), (1.6.10), получаем

$$\int_0^\pi r(x)y_{n1}(x)\widetilde{y}_{n1}(x)\,dx = y_{n1}(\pi)\widetilde{y}'_{n1}(\pi) - p,$$

$$\int_0^\pi r(x)y_{n2}(x)\widetilde{y}_{n2}(x)\,dx = -y'_{n2}(\pi)\widetilde{y}_{n2}(\pi) - p.$$

Сравнивая эти соотношения с (1.6.6) и используя (1.6.18), заключаем, что верны равенства (1.6.7), т. е. функции $\widetilde{y}_{ni}(x)$ являются собственными функциями, а числа $\{\widetilde{\lambda}_{ni}\}_{n\geqslant 0}$ — собственными значениями для $\widetilde{L}_i$. Единственность следует из теоремы Борга (см. теорему 1.2.4). □

1.6.3. Случай краевых условий Дирихле. Результаты, аналогичные вышеприведенным, верны также и для краевых условий Дирихле; в этом пункте мы докажем соответствующую теорему (см. теорему 1.6.2). Наиболее интересной частью этого пункта является прием Борга доказательства базисности по Риссу произведений собственных функций (см. замечание 1.6.1).

Пусть $\lambda_{ni}^0 = (\rho_{ni}^0)^2$, $n \geqslant 1$, $i = 1, 2$, — собственные значения краевых задач L_i^0 вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad q(x) \in L_2(0, \pi), \tag{1.6.23}$$

$$y(0) = y^{(i-1)}(\pi) = 0 \tag{1.6.24}$$

с вещественным потенциалом q. Тогда (см. §1.1)

$$\rho_{n1}^0 = n + \frac{a^0}{n} + \frac{\varkappa_{n1}^0}{n}, \quad \rho_{n2}^0 = \Big(n - \frac{1}{2}\Big) + \frac{a^0}{n} + \frac{\varkappa_{n2}^0}{n},$$

$$\{\varkappa_{ni}^0\} \in l_2, \quad a^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt.$$

Пусть L_i^0 и $\widetilde{L}_i^0$, $i = 1, 2$, таковы, что $a^0 = \widetilde{a}^0$. Тогда

$$\Lambda^0 := \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(|\lambda_{n1}^0 - \widetilde{\lambda}_{n1}^0|^2 + |\lambda_{n2}^0 - \widetilde{\lambda}_{n2}^0|^2\Big)\Big)^{1/2} < \infty$$

и

$$\int_0^\pi r(t)\,dt = 0, \tag{1.6.25}$$

где $r = \widetilde{q} - q$. Действуя так же, как и в п. 1.6.1, и используя те же обозначения, получаем

$$\int_0^\pi r(x)s_{ni}(x)\widetilde{s}_{ni}(x)\,dx = s_{ni}(\pi)\widetilde{s}'_{ni}(\pi) - s'_{ni}(\pi)\widetilde{s}_{ni}(\pi),$$

$$n \geqslant 1, \quad i = 1, 2, \tag{1.6.26}$$

$$\widetilde{s}_{n1}(\pi) = 0, \quad \widetilde{s}'_{n2}(\pi) = 0, \quad n \geqslant 1, \tag{1.6.27}$$

$$\widetilde{s}_{ni}(x) = s_{ni}(x) + \int_0^\pi G_{ni}(x, t)r(t)\widetilde{s}_{ni}(t)\,dt, \quad n \geqslant 1, \quad i = 1, 2. \tag{1.6.28}$$

Решая уравнение (1.6.28) методом последовательных приближений, находим

$$\widetilde{s}_{ni}(x) = s_{ni}(x) + \psi_{ni}(x), \tag{1.6.29}$$

где

$$\psi_{ni}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi}}_{j} G_{ni}(x,t_1)G_{ni}(t_1,t_2)\ldots G_{ni}(t_{j-1},t_j) \times$$
$$\times\, r(t_1)\ldots r(t_j)s_{ni}(t_j)\,dt_1\ldots dt_j. \quad (1.6.30)$$

Подставляя (1.6.29)–(1.6.30) в (1.6.26) и используя (1.6.27), вычисляем

$$\int_0^{\pi} r(x)u_{ni}(x)\,dx = \omega_{ni}^0, \quad n \geqslant 1, \quad i = 1,2, \quad (1.6.31)$$

где $u_{ni}^0(x) = 2n^2 s_{ni}^2(x)$,

$$\begin{aligned} \omega_{n1}^0 &= 2n^2\Big(s_{n1}(\pi)(s'_{n1}(\pi)+\psi'_{n1}(\pi)) - \int_0^{\pi} r(x)s_{n1}(x)\psi_{n1}(x)\,dx\Big), \\ \omega_{n2}^0 &= 2n^2\Big(-s'_{n2}(\pi)(s_{n2}(\pi)+\psi_{n2}(\pi)) - \int_0^{\pi} r(x)s_{n2}(x)\psi_{n2}(x)\,dx\Big). \end{aligned} \quad (1.6.32)$$

Введем функции $\{u_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ и числа $\{\omega_n\}_{n\geqslant 0}$ по формулам

$$u_{2n}(x) := u_{n1}^0(x), \quad u_{2n-1}(x) := u_{n2}^0(x), \quad \omega_{2n} := \omega_{n1}^0,$$
$$\omega_{2n-1} := \omega_{n2}^0 \ (n \geqslant 1), \quad \omega_0 := 0.$$

Тогда равенство (1.6.31) принимает вид

$$\int_0^{\pi} r(x)u_n(x)\,dx = \omega_n, \quad n \geqslant 1. \quad (1.6.33)$$

Обозначим $v_n(x) := u'_n(x)/n$, $w_n(x) := 1 - u_n(x)$ $(n \geqslant 1)$, $w_0(x) := 1$. Используя результаты § 1.1, получаем асимптотические формулы

$$v_n(x) = \sin nx + O\Big(\frac{1}{n}\Big), \ w_n(x) = \cos nx + O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad n \to \infty. \quad (1.6.34)$$

В силу (1.6.25) и (1.6.33) имеем

$$\int_0^{\pi} r(x)w_n(x)\,dx = -\omega_n, \quad n \geqslant 0. \quad (1.6.35)$$

Лемма 1.6.1. *Каждое множество функций* $\{v_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ *и* $\{w_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ *образует базис Рисса в* $L_2(0,\pi)$.

Доказательство. Здесь, как и выше, можно применять оператор преобразования, но мы используем иной метод, который был предложен Боргом [44].

Пусть $q(x)\in W_2^1$, и пусть y — решение уравнения (1.6.23), удовлетворяющее условию $y(0)=0$. Аналогично, пусть функция $\widetilde{y}$ такова, что $-\widetilde{y}''+\widetilde{q}(x)\widetilde{y}=\lambda\widetilde{y}$, $\widetilde{y}(0)=0$, где $\widetilde{q}(x)\in W_2^1$. Обозначим $u=y\widetilde{y}$. Тогда

$$u'=y\widetilde{y}'+y'\widetilde{y},\quad u''=-2\lambda u+(q+\widetilde{q})u+2y'\widetilde{y}',$$
$$u'''+4\lambda u'-(q+\widetilde{q})u'-(q'+\widetilde{q}')u=2(qy\widetilde{y}'+\widetilde{q}y'\widetilde{y}).$$

Отсюда, используя соотношения

$$2(qy\widetilde{y}'+\widetilde{q}y'\widetilde{y})=(q+\widetilde{q})u'+(q-\widetilde{q})(y\widetilde{y}'-y'\widetilde{y}),$$
$$(y\widetilde{y}'-y'\widetilde{y})(x)=\int_0^x(\widetilde{q}(s)-q(s))u(s)\,ds,$$

выводим

$$u'''+4\lambda u'-2(q(x)+\widetilde{q}(x))u'-(q'(x)+\widetilde{q}'(x))u=$$
$$=(q(x)-\widetilde{q}(x))\int_0^x(\widetilde{q}(s)-q(s))u(s)\,ds.$$

Обозначим $v=u'$. Так как $u(0)=u'(0)=0$, то $v(0)=0$, $u(x)=$ $=\int_0^x v(s)\,ds$ и, следовательно,

$$-v''+2(q(x)+\widetilde{q}(x))v+\int_0^x N(x,s)v(s)\,ds=4\lambda v, \tag{1.6.36}$$

где

$$N(x,s)=q'(x)+\widetilde{q}'(x)+(q(x)-\widetilde{q}(x))\int_s^x(\widetilde{q}(\xi)-q(\xi))\,d\xi.$$

В частности, при $\widetilde{q}=q$ заключаем, что функции $\{v_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ являются собственными функциями краевой задачи

$$-v''+p(x)v+\int_0^x M(x,s)v(s)\,ds=4\lambda v,\quad v(0)=v(\pi)=0,$$

где $p(x) = 4q(x)$, $M(x,t) = 2q'(x)$. Тогда для последовательности $\{v_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ существует биортогональная в $L_2(0,\pi)$ последовательность $(\{v_n^*(x)\}_{n\geqslant 1}$ ($v_n^*(x)$ — собственные функции краевой задачи

$$-v^{*\prime\prime} + p(x)v^* + \int_x^\pi M(s,x)v^*(s)\,ds = 4\lambda v^*, \quad v^*(0) = v^*(\pi) = 0).$$

В силу (1.6.34) и утверждения 1.6.4 это означает, что система функций $\{v_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$.

Покажем теперь, что система функций $\{w_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ полна в $L_2(0,\pi)$. В самом деле, предположим, что

$$\int_0^\pi f(x)w_n(x)\,dx = 0, \quad n \geqslant 0, \quad f(x) \in L_2(0,\pi).$$

В частности, это дает $\int_0^\pi f(x)\,dx = 0$, и, следовательно,

$$\int_0^\pi f(x)u_n(x)\,dx = 0, \quad n \geqslant 1.$$

Интегрируя по частям и используя соотношения $v_n(0) = v_n(\pi) = 0$, вычисляем

$$\int_0^\pi v_n(x)\,dx \int_x^\pi f(t)\,dt = 0, \quad n \geqslant 1.$$

Система функций $\{v_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ полна в $L_2(0,\pi)$. Поэтому $\int_x^\pi f(t)\,dt = 0$ при $x \in [0,\pi]$, т. е. $f(x) = 0$ п. в. на $(0,\pi)$. Тем самым доказано, что система функций $\{w_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ полна в $L_2(0,\pi)$. Кроме того, в силу (1.6.34) последовательность $\{w_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ квадратично близка к базису Рисса $\{\cos nx\}_{n\geqslant 0}$, и поэтому, согласно утверждению 1.6.5, $\{w_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ — базис Рисса в $L_2(0,\pi)$. □

Замечание 1.6.2. С помощью (1.6.36) можно также доказать полноту произведений собственных функций $s_{ni}(x)\widetilde{s}_{ni}(x)$ и тем самым получить другой метод доказательства теоремы единственности Борга (см. § 1.2), без использования оператора преобразования.

Через $\{v_n^*(x)\}_{n\geqslant 1}$ и $\{w_n^*(x)\}_{n\geqslant 0}$ обозначим базисы, биортогональные к $\{v_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ и $\{w_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ соответственно. Тогда из (1.6.35) выводим (теми же рассуждениями, что и в п. 1.6.1):

$$r(x) = f^0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^\pi \ldots H_j^0(x, t_1, \ldots, t_j) r(t_1) \cdot \ldots \cdot r(t_j)\,dt_1 \ldots dt_j, \qquad (1.6.37)$$

где

$$f^0(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2(s'_{n1}(\pi)s_{n1}(\pi)v^*_{2n}(x) - s'_{n2}(\pi)s_{n2}(\pi)v^*_{2n-1}(x)),$$

$$H_1^0(x,t_1) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2\Big(s_{n1}(\pi)\frac{\partial G_{n1}(x,t_1)}{\partial x}\Big|_{x=\pi} s_{n1}(t_1)v^*_{2n}(x) - \\ - s'_{n2}(\pi)G_{n2}(\pi,t_1)s_{n2}(t_1)v^*_{2n-1}(x)\Big),$$

$$H_j^0(x,t_1,\ldots,t_j) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2\bigg(\Big(s_{n1}(\pi)\frac{\partial G_{n1}(x,t_1)}{\partial x}\Big|_{x=\pi} - \\ - s_{n1}(t_1)\Big)G_{n1}(t_1,t_2)\ldots G_{n1}(t_{j-1},t_j)s_{n1}(t_j)v^*_{2n}(x) - \\ - \Big(s'_{n2}(\pi)G_{n2}(\pi,t_1) + s_{n2}(t_1)\Big)G_{n2}(t_1,t_2)\times\ldots \\ \ldots\times G_{n2}(t_{j-1},t_j)s_{n2}(t_j)v^*_{2n-1}(x)\bigg), \quad j \geqslant 2.$$

Используя нелинейное уравнение (1.6.37) и действуя так же, как и в п. 1.6.2, приходим к следующей теореме.

Теорема 1.6.2. *Для краевых задач* L_i^0 *вида* (1.6.23), (1.6.24) *существует* $\delta > 0$ *такое, что если вещественные числа* $\{\widetilde{\lambda}^0_{ni}\}_{n\geqslant 1}$, $i = 1,2$, *удовлетворяют условию* $\Lambda^0 < \delta$, *то существует единственная вещественная функция* $\widetilde{q}(x) \in L_2(0,\pi)$, *для которой числа* $\{\widetilde{\lambda}^0_{ni}\}_{n\geqslant 1}$, $i = 1,2$, *являются собственными значениями задач* $\widetilde{L}_i^0$. *Кроме того,* $\|q - \widetilde{q}\|_{L_2} < C\Lambda^0$.

Замечание 1.6.3. Используя базис Рисса $\{v_n(x)\}_{n\geqslant 1}$, можно также вывести другое нелинейное уравнение. В самом деле, обозначим $z(x) := \int_x^\pi r(t)\,dt$. После интегрирования по частям равенство (1.6.33) принимает вид

$$\int_0^\pi z(x)v_n(x)\,dx = \frac{\omega_n}{n}, \quad n \geqslant 1.$$

Так как $\{v_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ и $\{v^*_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ — взаимно биортогональные базисы, то

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^0}{n} v^*_n(x),$$

или

$$\int_x^\pi r(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{n} v^*_n(x), \quad r(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{n}\frac{d}{dx} v^*_n(x).$$

Отсюда, в силу (1.6.30) и (1.6.32), получаем аналогично п. 1.6.1

$$r(x) = f_1(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi}}_{j} H_{j1}(x, t_1, \dots, t_j) r(t_1) \cdot \ldots \cdot r(t_j)\, dt_1 \dots dt_j,$$

где

$$f_1(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2n\Big(s'_{n1}(\pi) s_{n1}(\pi) \frac{d}{dx} v^*_{2n}(x) - s'_{n2}(\pi) s_{n2}(\pi) \frac{d}{dx} v^*_{2n-1}(x)\Big),$$

$$\begin{aligned} H_{11}(x, t_1) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2n\Big(s_{n1}(\pi) \frac{\partial G_{n1}(x, t_1)}{\partial x}\Big|_{x=\pi} s_{n1}(t_1) \frac{d}{dx} v^*_{2n}(x) - \\ - s'_{n2}(\pi) G_{n2}(\pi, t_1) s_{n2}(t_1) \frac{d}{dx} v^*_{2n-1}(x)\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{j1}(x, t_1, \dots, t_j) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2n\Big(\Big(s_{n1}(\pi) \frac{\partial G_{n1}(x, t_1)}{\partial x}\Big|_{x=\pi} - \\ - s_{n1}(t_1)\Big) G_{n1}(t_1, t_2) \dots G_{n1}(t_{j-1}, t_j) s_{n1}(t_j) \frac{d}{dx} v^*_{2n}(x) - \\ - \Big(s'_{n2}(\pi) G_{n2}(\pi, t_1) + s_{n2}(t_1)\Big) G_{n2}(t_1, t_2) \times \dots \\ \dots \times G_{n2}(t_{j-1}, t_j) s_{n2}(t_j) \frac{d}{dx} v^*_{2n-1}(x)\Big), \quad j \geqslant 2. \end{aligned}$$

1.6.4. Устойчивость решения обратной задачи в равномерной норме.

Пусть $\lambda_{ni} = \rho_{ni}^2$, $n \geqslant 0$, $i = 1, 2$, — собственные значения краевых задач L_i вида (1.6.1), (1.6.2), где q — вещественная непрерывная функция, h — вещественное число. Собственные значения $\{\lambda_{ni}\}$ совпадают с нулями характеристических функций $\Delta_i(\lambda) := \varphi^{(i-1)}(\pi, \lambda)$, $i = 1, 2$, где $\varphi(x, \lambda)$ — решение уравнения (1.6.1) при условиях $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$. Без ограничения общности в дальнейшем считаем, что в (1.6.3) $a = 0$. Тогда, в силу (1.6.3), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(|\rho_{n1} - (n + 1/2)| + |\rho_{n2} - n|\Big) < \infty. \tag{1.6.38}$$

Пусть краевые задачи $\widetilde{L}_i$ выбраны так, что

$$\Lambda_1 := \sum_{n=0}^{\infty} \Big(|\lambda_{n1} - \widetilde{\lambda}_{n1}| + |\lambda_{n2} - \widetilde{\lambda}_{n2}|\Big) < \infty. \tag{1.6.39}$$

Величина Λ_1 будет характеризовать близость спектров.

Теорема 1.6.3. *Существует* $\delta > 0$ (*зависящее от* L_i) *такое, что если* $\Lambda_1 < \delta$, *то*

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\pi} |q(x) - \widetilde{q}(x)| < C\Lambda_1, \quad |h - \widetilde{h}| < C\Lambda_1.$$

Здесь и в дальнейшем одним и тем же символом C будем обозначать различные положительные константы, зависящие только от L_i.

Докажем предварительно несколько вспомогательных утверждений. Пусть

$$\alpha_n := \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_{n2})\, dx$$

— весовые числа для L_2.

Лемма 1.6.2. *Существует* $\delta_1 > 0$ *такое, что если* $\Lambda_1 < \delta_1$, *то*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n - \widetilde{\alpha}_n| < C\Lambda_1. \tag{1.6.40}$$

Доказательство. Согласно (1.1.38)

$$\alpha_n = -\dot{\Delta}_2(\lambda_{n2})\Delta_1(\lambda_{n2}), \quad \dot{\Delta}_2(\lambda) := \frac{d}{d\lambda}\Delta_2(\lambda). \tag{1.6.41}$$

Функции $\Delta_i(\lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/2$, и, следовательно, по теореме Адамара [240, с. 259]

$$\Delta_i(\lambda) = B_i \prod_{k=0}^{\infty}\Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{ki}}\Big) \tag{1.6.42}$$

(случай, когда $\lambda = 0$ является собственным значением L_i вносит незначительные изменения). Тогда

$$\frac{\widetilde{\Delta}_i(\lambda)}{\Delta_i(\lambda)} = \frac{\widetilde{B}_i}{B_i} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{ki}}{\widetilde{\lambda}_{ki}} \prod_{k=0}^{\infty}\Big(1 + \frac{\widetilde{\lambda}_{ki} - \lambda_{ki}}{\lambda_{ki} - \lambda}\Big).$$

Так как

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \frac{\widetilde{\Delta}_i(\lambda)}{\Delta_i(\lambda)} = 1, \quad \lim_{\lambda\to-\infty} \prod_{k=0}^{\infty}\Big(1 + \frac{\widetilde{\lambda}_{ki} - \lambda_{ki}}{\lambda_{ki} - \lambda}\Big) = 1,$$

то

$$\frac{\widetilde{B}_i}{B_i} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{ki}}{\widetilde{\lambda}_{ki}} = 1. \tag{1.6.43}$$

Далее, из (1.6.42) вытекает

$$\dot{\Delta}_2(\lambda_{n2}) = -\frac{B_2}{\lambda_{n2}} \prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}\Big(1 - \frac{\lambda_{n2}}{\lambda_{k2}}\Big).$$

Поэтому, учитывая (1.6.43), вычисляем

$$\frac{\dot{\widetilde{\Delta}}_2(\lambda_{n2})}{\dot{\Delta}_2(\lambda_{n2})} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty} \frac{\widetilde{\lambda}_{k2} - \widetilde{\lambda}_{n2}}{\lambda_{k2} - \lambda_{n2}}.$$

Тогда в силу (1.6.41)–(1.6.43)

$$\frac{\widetilde{\alpha}_n}{\alpha_n} = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - \theta_{kn}^{(1)}) \prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}(1 - \theta_{kn}^{(2)}), \quad \theta_{kn}^{(i)} := \frac{\lambda_{ki} - \widetilde{\lambda}_{ki}}{\lambda_{ki} - \lambda_{n2}} + \frac{\widetilde{\lambda}_{n2} - \lambda_{n2}}{\lambda_{ki} - \lambda_{n2}}. \quad (1.6.44)$$

Обозначим

$$\theta_n := \sum_{k=0}^{\infty} |\theta_{kn}^{(1)}| + \sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty} |\theta_{kn}^{(2)}|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{|\lambda_{k1} - \widetilde{\lambda}_{k1}|}{|\lambda_{k1} - \lambda_{n2}|} + \frac{|\widetilde{\lambda}_{n2} - \lambda_{n2}|}{|\lambda_{k1} - \lambda_{n2}|} \Big) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty} \Big(\frac{|\lambda_{k2} - \widetilde{\lambda}_{k2}|}{|\lambda_{k2} - \lambda_{n2}|} + \frac{|\widetilde{\lambda}_{n2} - \lambda_{n2}|}{|\lambda_{k2} - \lambda_{n2}|} \Big) \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_{n2} - \widetilde{\lambda}_{n2}| \Big(2 \sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{k2} - \lambda_{n2}|} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{k1} - \lambda_{n2}|} \Big) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_{n1} - \widetilde{\lambda}_{n1}| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n1} - \lambda_{k2}|}. \quad (1.6.45) \end{aligned}$$

Используя асимптотику собственных значений (см. § 1.1), получаем

$$\frac{1}{|\lambda_{k2} - \lambda_{n2}|} < \frac{C}{|k^2 - n^2|}, \quad k \neq n.$$

Так как

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty} \frac{1}{|k^2 - n^2|} < 1, \quad n \geqslant 1,$$

то

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{k2} - \lambda_{n2}|} < C. \quad (1.6.46)$$

Аналогично доказывается, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{|\lambda_{k1}-\lambda_{n2}|}+\frac{1}{|\lambda_{n1}-\lambda_{k2}|}\Big)<C. \tag{1.6.47}$$

Из (1.6.45)–(1.6.47) вытекает оценка

$$\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n<C\Lambda_1. \tag{1.6.48}$$

Выберем $\delta_1>0$ так, что если $\Lambda_1<\delta_1$, то $\theta_n<1/4$. Так как при $|\xi|<1/2$

$$|\ln(1-\xi)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi|^k}{k}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi|^k\leqslant 2|\xi|,$$

то из (1.6.44) следует, что

$$\Big|\ln\frac{\widetilde{\alpha}_n}{\alpha_n}\Big|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|\ln(1-\theta_{kn}^{(1)})|+\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}|\ln(1-\theta_{kn}^{(2)})|<2\theta_n.$$

Используя свойства ln, получаем: $\Big|\dfrac{\widetilde{\alpha}_n}{\alpha_n}-1\Big|<4\theta_n$, или $|\widetilde{\alpha}_n-\alpha_n|<C\theta_n$. Учитывая (1.6.48), приходим к (1.6.40). □

Лемма 1.6.3. *Существует* $\delta_2>0$ *такое, что если* $\Lambda_1<\delta_2$, *то*

$$|G(x,t)-\widetilde{G}(x,t)|<C\Lambda_1,\quad 0\leqslant x\leqslant t\leqslant\pi, \tag{1.6.49}$$

$$|\varphi'(\pi,\lambda_{n1})\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda_{n1})|<|\lambda_{n1}-\widetilde{\lambda}_{n1}|, \tag{1.6.50}$$

$$|\varphi'(\pi,\widetilde{\lambda}_{n2})\widetilde{\varphi}(\pi,\widetilde{\lambda}_{n2})|<C|\lambda_{n2}-\widetilde{\lambda}_{n2}|. \tag{1.6.51}$$

Доказательство. Функция $G(x,t)$ является решением интегрального уравнения (1.3.11). В силу леммы 1.3.6 $|\widehat{F}(x,t)|<C\Lambda_1$. Тогда из однозначной разрешимости уравнения (1.3.11) и леммы 1.3.1 получаем оценку (1.6.49).

Далее, из (1.1.9) и (1.6.3) вытекает: $|\varphi'(\pi,\lambda_{n1})|<C(n+1)$. Используя (1.3.11), получаем

$$\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda_{n1})=\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda_{n1})-\widetilde{\varphi}(\pi,\widetilde{\lambda}_{n1})=$$
$$=(\cos\rho_{n1}\pi-\cos\widetilde{\rho}_{n1}\pi)+\int_0^{\pi}\widetilde{G}(\pi,t)(\cos\rho_{n1}t-\cos\widetilde{\rho}_{n1}t)\,dt.$$

Следовательно, при $\Lambda_1<\delta_2$, с учетом (1.6.49), имеем: $|\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda_{n1})|<$ $<C|\rho_{n1}-\widetilde{\rho}_{n1}|$, откуда приходим к (1.6.50). Аналогично доказывается и (1.6.51). □

Лемма 1.6.4. *Пусть* $g(x)$ — *непрерывная на отрезке* $[0,\pi]$ *функция, и пусть заданы различные числа* $\{z_n\}_{n\geqslant 0}$ *такие, что* $\sum_{n=0}^{\infty}|z_n - n| < \infty$. *Предположим, что*

$$\Theta := \sum_{n=0}^{\infty}|\varepsilon_n| < \infty, \quad \varepsilon_n := \int_0^{\pi} g(x)\cos z_n x\, dx.$$

Тогда $|g(x)| < M\Theta$, *где константа* M *зависит только от множества* $\{z_n\}_{n\geqslant 0}$.

Доказательство. Так как система функций $\{\cos z_n x\}_{n\geqslant 0}$ полна в $L_2(0,\pi)$, то коэффициенты ε_n однозначно определяют функцию $g(x)$. Из равенства

$$\int_0^{\pi} g(x)\cos nx\, dx = \varepsilon_n + \int_0^{\pi} g(x)(\cos nx - \cos z_n x)\, dx$$

получаем

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n^0}\cos nx + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\cos nx\int_0^{\pi}(\cos nt - \cos z_n t)g(t)\, dt.$$

Следовательно, функция $g(x)$ является решением интегрального уравнения

$$g(x) = \varepsilon(x) + \int_0^{\pi} H(x,t)g(t)\, dt, \tag{1.6.52}$$

$$\varepsilon(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n^0}\cos nx, \quad H(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\cos nx(\cos nt - \cos z_n t),$$

причем ряды сходятся абсолютно и равномерно при $0 \leqslant x, t \leqslant \pi$ и

$$|\varepsilon(x)| < \frac{2}{\pi}\Theta, \quad |H(x,t)| < C\sum_{n=0}^{\infty}|z_n - n|.$$

Покажем, что однородное уравнение

$$y(x) = \int_0^{\pi} H(x,t)y(t)\, dt, \quad y(x) \in C[0,\pi], \tag{1.6.53}$$

имеет только нулевое решение. В самом деле, из (1.6.53) имеем

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\cos nx\int_0^{\pi}(\cos nt - \cos z_n t)y(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$\int_0^\pi y(t)\cos nt\,dt = \int_0^\pi (\cos nt - \cos z_n t)y(t)\,dt,$$

или

$$\int_0^\pi y(t)\cos z_n t\,dt = 0.$$

Отсюда и из полноты системы $\{\cos z_n x\}_{n\geqslant 0}$ вытекает, что $y(x) = 0$. Таким образом, уравнение (1.6.52) однозначно разрешимо и, следовательно, $|g(x)| < M\Theta$. □

Замечание 1.6.4. Из доказательства леммы 1.6.4 видно, что если мы рассмотрим числа $\{\widetilde{z}_n\}$ такие, что $\sum_{n=0}^\infty |\widetilde{z}_n - z_n| < \delta$ при достаточно малом δ, то константа M не будет зависеть от $\widetilde{z}_n$.

Доказательство теоремы 1.6.3. Используя соотношения

$$-\varphi''(x,\lambda) + q(x)\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda), \quad -\widetilde{\varphi}''(x,\lambda) + \widetilde{q}(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \lambda\widetilde{\varphi}(x,\lambda),$$

получаем

$$\int_0^\pi \widehat{q}(x)\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\,dx = \varphi'(\pi,\lambda)\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda) - \varphi(\pi,\lambda)\widetilde{\varphi}'(\pi,\lambda) + \widetilde{h} - h.$$

Так как $\widehat{h} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \widehat{q}(x)\,dx = 0$, то

$$\int_0^\pi \widehat{q}(x)\Big(\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda) - \frac{1}{2}\Big)\,dx = \varphi'(\pi,\lambda)\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda) - \varphi(\pi,\lambda)\widetilde{\varphi}'(\pi,\lambda). \quad (1.6.54)$$

Подставляя (1.2.7) в (1.6.54), получаем при $\lambda = \lambda_{n1}$ и $\lambda = \widetilde{\lambda}_{n2}$:

$$\int_0^\pi g(x)\cos 2\rho_{n1}x\,dx = \varphi'(\pi,\lambda_{n1})\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda_{n1}),$$

$$\int_0^\pi g(x)\cos 2\widetilde{\rho}_{n2}x\,dx = \varphi'(\pi,\widetilde{\lambda}_{n2})\widetilde{\varphi}(\pi,\widetilde{\lambda}_{n2}),$$

где

$$g(x) = 2\Big(\widehat{q}(x) + \int_x^\pi V(x,t)\widehat{q}(t)\,dt\Big). \quad (1.6.55)$$

Учитывая (1.2.8) и (1.6.49), имеем при $\Lambda_1 < \delta_2$:

$$|V(x,t)| < C. \quad (1.6.56)$$

Воспользуемся леммой 1.6.4 при

$$z_{2n+1} = 2\rho_{n,1},\ z_{2n} = 2\widetilde{\rho}_{n,2}, \quad \varepsilon_{2n+1} = \varphi'(\pi, \lambda_{n1})\widetilde{\varphi}(\pi, \lambda_{n1}),$$
$$\varepsilon_{2n} = \varphi'(\pi, \widetilde{\lambda}_{n2})\widetilde{\varphi}(\pi, \widetilde{\lambda}_{n2}).$$

Из (1.6.35), (1.6.36), (1.6.50) и (1.6.51) вытекает, что при $\Lambda_1 < \delta_2$ верна оценка $|g(x)| < C\Lambda_1$. Так как $\widehat{q}(x)$ — решение интегрального уравнения Вольтерра (1.6.55), то из (1.6.56) заключаем, что $|\widehat{q}(x)| < C\Lambda_1$, и, следовательно, $|\widehat{h}| < C\Lambda_1$. □

1.6.5. Базисы Рисса. 1) Для удобства читателей в этом пункте представлены основные сведения о базисах Рисса в гильбертовом пространстве. Более подробную информацию о базисах Рисса можно найти в [102, 28]. Пусть B — гильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)$.

Определение 1.6.1. Последовательность $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ векторов гильбертова пространства B называется *базисом* этого пространства, если каждый вектор $f \in B$ разлагается единственным образом в ряд

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j, \tag{1.6.57}$$

сходящийся по норме пространства B.

Ясно, что если $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ — базис, то $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ полна и минимальна в B. Напомним, что выражение «$\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ полна» означает, что замкнутая линейная оболочка $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ совпадает с B, а «$\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ минимальна» означает, что ни один элемент последовательности не принадлежит замкнутой линейной оболочке остальных.

Определение 1.6.2. Две последовательности $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ и $\{\chi_j\}_{j\geqslant 1}$ из B называются *биортогональными*, если $(f_j, \chi_k) = \delta_{jk}$ (δ_{jk} — символ Кронекера).

Для всякого базиса $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ биортогональная последовательность $\{\chi_j\}_{j\geqslant 1}$ существует и определяется однозначно. Более того, $\{\chi_j\}_{j\geqslant 1}$ также является базисом в B. В разложении (1.6.57) коэффициенты c_j имеют вид

$$c_j = (f, \chi_j). \tag{1.6.58}$$

Определение 1.6.3. Последовательность $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ называется *почти нормированной*, если $\inf\limits_j \|f_j\| > 0$ и $\sup\limits_j \|f_j\| < \infty$.

Если базис $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ пространства B почти нормирован, то почти нормирован и биортогональный базис $\{\chi_j\}_{j\geqslant 1}$.

Определение 1.6.4. Последовательность $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ называется *ортогональной*, если $(e_j, e_k) = 0$ при $j \neq k$. Последовательность $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ называется *ортонормальной*, если $(e_j, e_k) = \delta_{jk}$.

Всякая полная ортонормальная последовательность является базисом. Для ортонормального базиса $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ соотношения (1.6.57), (1.6.58) принимают вид

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}(f,e_j)e_j, \tag{1.6.59}$$

и для каждого вектора $f\in B$ имеет место равенство Парсеваля:

$$\|f\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|(f,e_j)|^2.$$

2) Пусть теперь $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ — ортонормальный базис гильбертова пространства B, и пусть $A: B\to B$ — некоторый линейный ограниченный обратимый оператор. Тогда оператор A^{-1} ограничен, и согласно (1.6.59) при каждом $f\in B$ имеем

$$A^{-1}f=\sum_{j=1}^{\infty}(A^{-1}f,e_j)e_j=\sum_{j=1}^{\infty}(f,A^{*-1}e_j)e_j.$$

Следовательно,

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}(f,\chi_j)f_j,$$

где

$$f_j=Ae_j,\quad \chi_j=A^{*-1}e_j. \tag{1.6.60}$$

Очевидно, что $(f_j,\chi_k)=\delta_{jk}$ $(j,k\geqslant 1)$, т. е. последовательности $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ и $\{\chi_j\}_{j\geqslant 1}$ являются биортогональными. Поэтому, если верно (1.6.57), то $c_j=(f,\chi_j)$, т. е. разложение (1.6.57) единственно. Таким образом, всякий линейный ограниченный обратимый оператор преобразует любой ортонормальный базис в некоторый другой базис.

Определение 1.6.5. Базис $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ гильбертова пространства B называется *базисом Рисса*, если он получен из ортонормального базиса действием линейного ограниченного обратимого оператора.

Согласно (1.6.60) базис, биортогональный базису Рисса, сам является базисом Рисса. Используя (1.6.60), вычисляем: $\inf\limits_j\|f_j\|\geqslant\|A^{-1}\|$ и $\sup\limits_j\|f_j\|\leqslant\|A\|$, т. е. всякий базис Рисса является почти нормированным. Для базиса Рисса $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ $(f_j=Ae_j)$ верно следующее неравенство при всех $f\in B$:

$$C_1\sum_{j=1}^{\infty}|(f,\chi_j)|^2\leqslant\|f\|^2\leqslant C_2\sum_{j=1}^{\infty}|(f,\chi_j)|^2, \tag{1.6.61}$$

где $\{\chi_j\}_{j\geqslant 1}$ — соответствующий биортогональный базис ($\chi_j = A^{*-1}e_j$), а константы C_1, C_2 зависят только от оператора A. В самом деле, используя (1.6.60) и равенство Парсеваля, вычисляем

$$\|A^{-1}f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(A^{-1}f, e_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(f, \chi_j)|^2.$$

Так как $\|f\| = \|AA^{-1}f\| \leqslant \|A\| \cdot \|A^{-1}f\|$, $\|A^{-1}f\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|f\|$, то $C_1\|A^{-1}f\|^2 \leqslant \|f\|^2 \leqslant C_2\|A^{-1}f\|^2$, где $C_1 = \|A^{-1}\|^{-2}$, $C_2 = \|A\|^2$, и, следовательно, верно (1.6.61).

Следующие утверждения очевидны.

Утверждение 1.6.1. *Если* $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ — *базис Рисса в* B *и* $\{\gamma_j\}_{j\geqslant 1}$ — *комплексные числа такие, что* $0 < C_1 \leqslant |\gamma_j| \leqslant C_2 < \infty$, *то* $\{\gamma_j f_j\}_{j\geqslant 1}$ *также является базисом Рисса в* B.

Утверждение 1.6.2. *Если* $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ — *базис Рисса в* B *и* A — *линейный ограниченный обратимый оператор, то* $\{Af_j\}_{j\geqslant 1}$ *также является базисом Рисса в* B.

3) Приведем теперь несколько утверждений, которые дают достаточные условия того, что последовательность $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ является базисом Рисса в B. Сначала дадим определения:

Определение 1.6.6. Две последовательности векторов $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ и $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ из B называются *квадратично близкими*, если $\sum_{j=1}^{\infty} \|g_j - f_j\|^2 < \infty$.

Определение 1.6.7. Последовательность векторов $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ называется *ω-линейно независимой*, если равенство $\sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j = 0$ возможно лишь при $c_j = 0$ ($j \geqslant 1$).

Предположение 1.6.1. Пусть $f_j = Ae_j$, $j \geqslant 1$, — базис Рисса в B, где $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ — ортонормальный базис в B, а A — линейный ограниченный обратимый оператор. Пусть $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ выбрана так, что

$$\Omega := \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \|g_j - f_j\|^2\Big)^{1/2} < \infty,$$

т. е. $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ квадратично близка к $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$.

Утверждение 1.6.3 (устойчивость базиса). *Пусть выполняется предположение* 1.6.1. *Если* $\Omega < (\|A^{-1}\|)^{-1}$, *то* $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ *является базисом Рисса в* B.

Доказательство. Рассмотрим оператор T :

$$T\Big(\sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j (f_j - g_j), \quad \{c_j\} \in l_2. \tag{1.6.62}$$

Другими словами, $Te_j = f_j - g_j$. Ясно, что T — линейный ограниченный оператор, причем $\|T\| \leqslant \Omega$. Кроме того, $\sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|^2 < \infty$.

Так как $A-T=(E-TA^{-1})A$ и $\|TA^{-1}\|<1$, то $A-T$ — линейный ограниченный обратимый оператор. С другой стороны, $(A-T)e_j=g_j$, и, следовательно, $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ — базис Рисса в B. □

Утверждение 1.6.4 (Бари [28]). *Пусть выполняется предположение* 1.6.1. *Если* $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ *ω-линейно независима, то* $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ *является базисом Рисса в* B.

Доказательство. Определим оператор T согласно (1.6.62). Уравнение $(A-T)f=0$ имеет только нулевое решение. В самом деле, если $(A-T)f=0$, то из равенств

$$(A-T)f=\sum_{j=1}^{\infty}(f,e_j)f_j-\sum_{j=1}^{\infty}(f,e_j)(f_j-g_j)=\sum_{j=1}^{\infty}(f,e_j)g_j$$

вытекает: $\sum_{j=1}^{\infty}(f,e_j)g_j=0$. Отсюда в силу ω-линейной независимости последовательности $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ имеем: $(f,e_j)=0$, $j\geqslant 1$. Следовательно, $f=0$. Таким образом, оператор $A-T$ является линейным ограниченным обратимым оператором. Так как $(A-T)e_j=g_j$, то последовательность $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ является базисом Рисса в B. □

Утверждение 1.6.5. *Пусть выполняется предположение* 1.6.1. *Если* $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ *полна в* B, *то* $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ *— базис Рисса в* B.

Доказательство. Выберем натуральное N так, чтобы

$$\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty}\|g_j-f_j\|^2\Big)^{1/2}<\frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

и рассмотрим последовательность $\{\psi_j\}_{j\geqslant 1}$:

$$\psi_j=\begin{cases} f_j, & j=\overline{1,N},\\ g_j, & j>N.\end{cases}$$

В силу утверждения 1.6.3 последовательность $\{\psi_j\}_{j\geqslant 1}$ образует базис Рисса в B. Пусть $\{\psi_j^*\}_{j\geqslant 1}$ — биортогональный базис для $\{\psi_j\}_{j\geqslant 1}$. Обозначим $D:=\det[(g_j,\psi_n^*)]_{j,n=\overline{1,N}}$ и покажем, что $D\neq 0$. Предположим противное: $D=0$. Тогда линейная алгебраическая система

$$\sum_{n=1}^{N}\beta_n(g_j,\psi_n^*)=0,\quad j=\overline{1,N},$$

имеет ненулевое решение $\{\beta_n\}_{n=\overline{1,N}}$. Рассмотрим вектор $f:=\sum_{n=1}^{N}\overline{\beta_n}\psi_n^*$. Так как $\{\psi_n^*\}_{n\geqslant 1}$ — базис Рисса, то $f\neq 0$. С другой стороны, вычисляем

$$\text{(i) при}\quad j=\overline{1,N}:\quad (g_j,f)=\sum_{n=1}^{N}\beta_n(g_j,\psi_n^*)=0;$$

$$\text{(ii) при}\quad j > N: \quad (g_j, f) = (\psi_j, f) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n (\psi_j, \psi_n^*) = 0.$$

Таким образом, $(g_j, f) = 0$ при всех $j \geqslant 1$. В силу полноты системы $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ заключаем, что $f = 0$. Полученное противоречие означает, что $D \neq 0$.

Покажем теперь, что последовательность $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ является ω-линейно независимой. В самом деле, пусть $\{c_j\}_{j\geqslant 1}$ — комплексные числа такие, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j = 0. \tag{1.6.63}$$

Так как $g_j = \psi_j$ при $j > N$, то

$$\sum_{j=1}^{N} c_j (g_j, \psi_n^*) = 0, \quad n = \overline{1, N}.$$

Определитель этой линейной системы равен $D \neq 0$, и, следовательно, $c_j = 0$, $j = \overline{1, N}$. Тогда (1.6.63) принимает вид: $\sum_{j=N+1}^{\infty} c_j \psi_j = 0$. Так как $\{\psi_j\}_{j\geqslant 1}$ — базис Рисса, то $c_j = 0$, $j > N$. Тем самым доказано, что последовательность $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ является ω-линейно независимой. Тогда, в силу утверждения 1.8.4, заключаем, что $\{g_j\}_{j\geqslant 1}$ — базис Рисса в B. □

Утверждение 1.6.6. *Пусть даны числа* $\{\rho_n\}_{n\geqslant 0}$, $\rho_n^2 \neq \rho_k^2$ $(n \neq \neq k)$, *вида*

$$\rho_n = n + \frac{a}{n} + \frac{\varkappa_n}{n}, \quad \{\varkappa_n\} \in l_2,\ a \in \mathbf{C}. \tag{1.6.64}$$

Тогда последовательность $\{\cos \rho_n x\}_{n\geqslant 0}$ *образует базис Рисса в* $L_2(0, \pi)$.

Доказательство. Покажем сначала, что система $\{\cos \rho_n x\}_{n\geqslant 0}$ полна в $L_2(0, \pi)$. Пусть $f(x) \in L_2(0, \pi)$ такова, что

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos \rho_n x\, dx = 0, \quad n \geqslant 0. \tag{1.6.65}$$

Рассмотрим функции

$$\Delta(\lambda) := \pi(\lambda_0 - \lambda) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}, \quad \lambda_n = \rho_n^2,$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_0^{\pi} f(x) \cos \rho x\, dx, \quad \lambda = \rho^2, \quad \lambda \neq \lambda_n.$$

Из (1.6.65) вытекает, что $F(\lambda)$ — целая по λ функция (после устранения особенностей). С другой стороны, при доказательстве леммы 1.4.6 было показано, что

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C|\rho| \exp(|\tau|\pi), \quad \arg\lambda \in [\delta, 2\pi - \delta], \quad \delta > 0, \quad \tau := \operatorname{Im}\rho,$$

и, следовательно, $|F(\lambda)| \leqslant C|\rho|^{-1}$, $\arg\lambda \in [\delta, 2\pi - \delta]$. Отсюда с помощью теорем Фрагмена–Линделефа [240, с. 186] и Лиувилля [206, с. 209] заключаем, что $F(\lambda) \equiv 0$, и, следовательно, $f = 0$. Тем самым доказано, что система функций $\{\cos\rho_n x\}_{n\geqslant 0}$ полна в $L_2(0,\pi)$. Из (1.6.64) вытекает, что система функций $\{\cos\rho_n x\}_{n\geqslant 0}$ квадратично близка к ортогональному базису $\{\cos nx\}_{n\geqslant 0}$. Тогда, в силу утверждения 1.6.5, $\{\cos\rho_n x\}_{n\geqslant 0}$ — базис Рисса в $L_2(0,\pi)$. $\square$

§ 1.7. Обратные задачи на геометрических графах

Параграф посвящен решению обратной спектральной задачи для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на компактных графах. Дифференциальные операторы на графах (сетях, деревьях) часто встречаются в естествознании и технике (см. [202] и литературу там). Большинство работ по спектральной теории на графах посвящено так называемым прямым задачам изучения свойств спектра и корневых функций. Обратные спектральные задачи, в силу их нелинейности, являются более трудными для исследования, и в настоящее время в теории обратных задач для дифференциальных операторов на графах имеются лишь отдельные фрагменты, не составляющие общей картины. Некоторые аспекты теории обратных задач на графах изучались в [37, 54, 97, 149, 200] и других работах, но в основном рассматривались только очень частные случаи. Отметим статью [37], в которой была первая попытка предложить глобальную постановку обратной задачи на компактных деревьях и дать подход к ее решению. Но к сожалению постановка обратной задачи в [37] оказалась переопределенной, и вопрос о постановке и решении обратной задачи оставался открытым.

В этом параграфе даются постановки обратных задач для операторов Штурма–Лиувилля на компактных графах. Эти постановки не являются переопределенными и которые являются естественными обобщениями классических обратных задач для операторов Штурма–Лиувилля на интервале. Мы вводим спектральные характеристики, которые однозначно определяют потенциал на графе, изучаем их свойства, доказываем соответствующие теоремы единственности и даем конструктивную процедуру решения. Для исследования обратных задач на графах мы развиваем идеи метода спектральных отображений. Этот метод позволяет решать обратные задачи для широкого класса графов [298]. Так как различные классы графов требуют различной техники, мы ограничиваемся уравнениями Штурма–Лиувилля на деревьях (т. е. на графах без циклов). Отметим, что полученные результаты верны не только в самосопряженном случае, но также и в несамосопряженном, когда потенциал является комплекснозначной функцией на дереве.

1.7.1. Уравнение Штурма–Лиувилля на дереве. Рассмотрим компактное связное дерево T в $\mathbf{R^m}$ с корнем v_0, множеством вершин $V = \{v_0, \ldots, v_r\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_r\}$. Предположим, что длина каждого ребра равна 1. Вершина называется граничной, если она принадлежит только одному ребру. Такое ребро называется граничным. Все остальные вершины и ребра называются внутренними. Без ограничения общности считаем, что v_0 является граничной вершиной.

Для двух точек $a, b \in T$ будем писать $a \leqslant b$, если a лежит на единственном простом пути, соединяющем корень v_0 с b; пусть $|b|$ обозначает длину этого пути. Будем писать $a < b$, если $a \leqslant b$ и $a \neq b$. Отношение $<$ определяет частичную упорядоченность на T. Если $a < b$, то обозначим $[a, b] := \{z \in T : \ a \leqslant z \leqslant b\}$. В частности, если $e = [v, w]$ — ребро, то мы будем называть v его начальной точкой, w — его конечной точкой и будем говорить, что e выходит из v и заканчивается в w. Для каждой внутренней вершины v мы обозначим через $R(v) := \{e \in \mathcal{E} : \ e = [v, w], \, w \in V\}$ множество ребер, выходящих из v. Для любой точки $v \in V$ число $|v|$ является целым неотрицательным числом, которое называется порядком v. Для $e \in \mathcal{E}$ его порядок определяется как порядок его конечной точки. Число $\sigma := \max\limits_{j=\overline{1,r}} |v_j|$ называется высотой дерева T. Пусть $V^{(\mu)} := \{v \in V : \ |v| = \mu\}$, $\mu = \overline{0, \sigma}$, — множество вершин порядка μ, и пусть $\mathcal{E}^{(\mu)} := \{e \in \mathcal{E} : \ e = [v, w], \, v \in V^{(\mu-1)}, w \in V^{(\mu)}\}$, $\mu = \overline{1, \sigma}$ — множество ребер порядка μ.

Каждое ребро $e \in \mathcal{E}$ рассматривается как отрезок $[0, 1]$ и параметризуется параметром $x \in [0, 1]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию на каждом ребре $e = [v, w] \in \mathcal{E}$: если $z = z(x) \in e$, то $z(0) = w$, $z(1) = v$, т. е. $x = 0$ соответствует конечной точке w, а $x = 1$ соответствует начальной точке v. Для определенности занумеруем вершины v_j следующим образом: $\Gamma := \{v_0, v_1, \ldots, v_p\}$ — граничные вершины, $v_{p+1} \in V^{(1)}$, а v_j, $j > p + 1$, занумерованы в порядке возрастания $|v_j|$. Аналогично занумеруем ребра, а именно: $e_j = [v_{j_k}, v_j]$, $j = \overline{1, r}$, $j_k < j$. В частности, $E := \{e_1, \ldots, e_{p+1}\}$ — множество граничных ребер, $e_{p+1} = [v_0, v_{p+1}]$. Ясно, что $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ тогда и только тогда, когда $v_j \in V^{(\mu)}$.

Интегрируемая функция Y на T может быть представлена как вектор $Y(x) = [y_j(x)]_{j \in J}$, $x \in [0, 1]$, где $J := \{j : \ j = \overline{1, r}\}$, и функция $y_j(x)$ определена на ребре e_j. Пусть $q = [q_j]_{j \in J}$ — интегрируемая вещественнозначная функция на T, которая называется потенциалом. Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля на T:

$$-y_j''(x) + q_j(x) y_j(x) = \lambda y_j(x), \quad x \in [0, 1], \tag{1.7.1}$$

где $j \in J$, λ — спектральный параметр, функции $y_j(x)$, $y_j'(x)$ абсолютно непрерывны на $[0, 1]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки в каждой внутренней вершине v_k, $k=\overline{p+1,r}$:

$$y_j(1)=y_k(0) \text{ для всех } e_j\in R(v_k) \quad \text{(условие непрерывности)},$$
$$\sum_{e_j\in R(v_k)} y_j'(1)=y_k'(0) \quad \text{(условие Кирхгофа)}. \tag{1.7.2}$$

Условия склейки (1.7.2) называются стандартными условиями. В электрических сетях (1.7.2) выражает закон Кирхгофа; при колебаниях упругих сетей (1.7.2) выражает баланс напряжений и т. д. Отметим, что в (1.7.2) мы имеем $2r-p-1$ условий. Для того чтобы определить краевую задачу для (1.7.1), нам нужно дополнительно $p+1$ условий в граничных вершинах v_j, $j=\overline{0,p}$. Для этого мы введем следующие линейные формы в граничных вершинах v_j, $j\in\Gamma$:

$$U_{js}(Y):=\sum_{\nu=0}^{1} h_{js}^{\nu} Y_{|v_j}^{(\nu)}, \quad s=0,1, \quad j=\overline{0,p},$$

где h_{js}^{ν} — вещественные числа такие, что $\det[h_{js}^{\nu}]_{s,\nu=0,1}\neq 0$. Обозначим через L краевую задачу для уравнения (1.7.1) с условиями склейки (1.7.2) и с краевыми условиями

$$U_{j0}(Y)=0, \quad j=\overline{0,p}. \tag{1.7.3}$$

Мы также будем рассматривать краевые задачи L_k, $k=\overline{0,p}$, для уравнения (1.7.1) с условиями склейки (1.7.2) и с краевыми условиями

$$U_{k1}(Y)=0, \quad U_{j0}(Y)=0, \quad j=\overline{0,p}\setminus k. \tag{1.7.4}$$

Пусть $\Psi_k(x,\lambda)=[\psi_{kj}(x,\lambda)]_{j\in J}$, $k=\overline{0,p}$, — решения уравнения (1.7.1), удовлетворяющие (1.7.2) и краевым условиям

$$U_{j0}(\Psi_k)=\delta_{jk}, \quad j=\overline{0,p}, \tag{1.7.5}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Функции Ψ_k называются решениями Вейля для (1.7.1) относительно краевой вершины v_k. Обозначим $M(\lambda)=[M_k(\lambda)]_{k=\overline{1,p}}$, где $M_k(\lambda):=U_{k1}(\Psi_k)$. Функции $M_k(\lambda)$ называются функциями Вейля, а $M(\lambda)$ называется вектором Вейля для уравнения (1.7.1).

Для определенности мы будем рассматривать случай $U_{j0}(Y)=Y'_{|v_j}+h_jY_{|v_j}$, $U_{j1}(Y)=Y_{|v_j}$, т. е. $h_{j0}^1=h_{j1}^0=1$, $h_{j1}^1=0$, $h_{j0}^0=h_j$. Остальные случаи исследуются аналогично. Пусть $\varphi_j(x,\lambda)$, $S_j(x,\lambda)$, $j\in J$, $x\in[0,1]$, — решения уравнения (1.7.1) на ребре e_j при начальных условиях $\varphi_j(0,\lambda)=S_j'(0,\lambda)=1$, $\varphi_j'(0,\lambda)=-h_j$, $S_j(0,\lambda)=0$. При каждом фиксированном x функции $\varphi_j^{(\nu)}(x,\lambda)$, $S_j^{(\nu)}(x,\lambda)$, $\nu=0,1$, являются целыми по λ порядка $1/2$. Кроме того, $\langle\varphi_j(x,\lambda),S_j(x,\lambda)\rangle\equiv 1$, где $\langle y,z\rangle:=yz'-y'z$. Очевидно, что

$$\psi_{kk}(x,\lambda)=S_k(x,\lambda)+M_k(\lambda)\varphi_k(x,\lambda). \tag{1.7.6}$$

Обозначим: $M^1_{kj}(\lambda) = \psi_{kj}(0, \lambda)$, $M^0_{kj}(\lambda) = \psi'_{kj}(0, \lambda) + h_j \psi_{kj}(0, \lambda)$. Тогда

$$\psi_{kj}(x, \lambda) = M^0_{kj}(\lambda) S_j(x, \lambda) + M^1_{kj}(\lambda) \varphi_j(x, \lambda). \tag{1.7.7}$$

В частности, при $k = \overline{1, p}$ имеем: $M^1_{kk}(\lambda) = M_k(\lambda)$, $M^0_{kk}(\lambda) = 1$, $M^0_{kj}(\lambda) = 0$ для $j = \overline{1, p} \setminus k$. Подставляя (1.7.7) в (1.7.2) и (1.7.5), получим систему линейных алгебраических уравнений s_k относительно $M^0_{kj}(\lambda), M^1_{kj}(\lambda)$. Известным методом можно показать, что определитель этой системы $\Delta(\lambda)$ является целой функцией порядка 1/2 и $\Delta(\lambda)$ является характеристической функцией краевой задачи L вида (1.7.1)–(1.7.3), т. е. нули $\Delta(\lambda)$ совпадают с собственными значениями $\{\lambda_l\}_{l \geqslant 0}$ задачи L. Решая систему s_k, получаем по формулам Крамера: $M^s_{kj}(\lambda) = \Delta^s_{kj}(\lambda) / \Delta(\lambda)$, $s = 0, 1$, $j = \overline{1, r}$, где определитель $\Delta^s_{kj}(\lambda)$ получается из $\Delta(\lambda)$ заменой столбца, соответствующего $M^s_{kj}(\lambda)$, на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\lambda) = \frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad k = \overline{1, p}, \tag{1.7.8}$$

где $\Delta_k(\lambda) := \Delta^0_{kk}(\lambda)$ является характеристической функцией краевой задачи L_k. Функция $\Delta_k(\lambda)$ является целой по λ порядка 1/2, и ее нули совпадают с собственными значениями $\{\lambda_{lk}\}_{l \geqslant 0}$ краевой задачи L_k вида (1.7.1), (1.7.2), (1.7.4). Отметим, что аналогично классическим операторам Штурма–Лиувилля можно показать, что λ_l и λ_{lk} вещественны и ограничены снизу. Таким образом, функции Вейля $M_k(\lambda)$ являются мероморфными по λ с полюсами $\{\lambda_l\}_{l \geqslant 0}$. Данные $S := \{\lambda_l, \alpha_{lk}\}_{l \geqslant 0,\, k = \overline{1, p}}$, где α_{lk} — вычеты $M_k(\lambda)$ в точках λ_l, называются спектральными данными для L.

Мы исследуем три обратные задачи восстановления потенциала $q = [q_j]_{j \in J}$ и коэффициентов $h = [h_j]_{j \in J}$ по следующим спектральным характеристикам:

1) по вектору Вейля $M = [M_k]_{k = \overline{1, p}}$;

2) по системе $p + 1$ спектров $\Sigma := \{\lambda_l,\ \lambda_{lk},\ l \geqslant 0,\ k = \overline{1, p}\}$;

3) по спектральным данным S.

Для каждой из этих обратных задач мы даем конструктивную процедуру для решения и доказываем единственность решения. Отметим, что понятие вектора Вейля M является обобщением понятия функции Вейля (m-функции) для классического оператора Штурма–Лиувилля. Если $r = 1$ (т. е. дерево T есть интервал $[0, 1]$), то $p = 1$, и вектор Вейля M совпадает с классической функцией Вейля. Таким образом, обратная задача 1 является обобщением классической обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля на интервале по функции Вейля или (что равносильно) по спектральной мере. Обратная задача 2 является обобщением классической обратной задачи Борга для оператора Штурма–Лиувилля на интервале по двум спектрам. Если $r = 1$, то $p = 1$ и обратная задача 2 совпадает с классической обратной задачей Борга по двум спектрам. Обратная задача 3 является обобщением классической обратной задачи Марченко для оператора Штурма–Лиувилля на интервале.

1.7.2. Вспомогательные утверждения.

Пусть $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$. Обозначим $\Lambda := \{\rho:\ \operatorname{Im}\rho \geqslant 0\}$. Известно (см. [188]), что при каждом фиксированном $j \in J$ на ребре e_j существует фундаментальная система решений уравнения (1) $\{e_{j1}(x,\rho), e_{j2}(x,\rho)\}$, $x \in [0,1]$, $\rho \in \Lambda$, $|\rho| \geqslant \rho^*$, со свойствами:

1) функции $e_{js}^{(\nu)}(x,\rho)$, $\nu = 0,1$, непрерывны по $x \in [0,1]$, $\rho \in \Lambda$, $|\rho| \geqslant \rho^*$;

2) для каждого $x \in [0,1]$ функции $e_{js}^{(\nu)}(x,\rho)$, $\nu = 0,1$, аналитичны по $\rho \in \Lambda$, $|\rho| \geqslant \rho^*$;

3) равномерно по $x \in [0,1]$ верны следующие асимптотические формулы:

$$e_{j1}^{(\nu)}(x,\rho) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x)[1], \quad e_{j2}^{(\nu)}(x,\rho) = (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x)[1],$$
$$\rho \in \Lambda,\ |\rho| \to \infty, \quad (1.7.9)$$

где $[1] = 1 + O(\rho^{-1})$, $\nu = 0,1$. Обозначим $\Lambda_\delta := \{\rho:\ \arg\rho \in [\delta, \pi - \delta]\}$, $\delta > 0$.

Лемма 1.7.1. *Пусть $y_j(x,\rho)$ — решение уравнения* (1.7.1) *на ребре e_j, и пусть*

$$\frac{y_j'(0,\rho)}{y_j(0,\rho)} = (-i\rho)r_j[1], \quad r_j \neq -1,\ \rho \in \Lambda_\delta,\ |\rho| \to \infty. \quad (1.7.10)$$

Тогда при $\nu = 0,1$, $\rho \in \Lambda_\delta$, $|\rho| \to \infty$, равномерно по $x \in [0,1]$ имеем

$$y_j^{(\nu)}(x,\rho) = D_j(\rho)\Big((-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x)[1] - (r_j+1)^{-1} \times$$
$$\times (r_j - 1)(i\rho)^\nu \exp(i\rho x)[1]\Big), \quad (1.7.11)$$

где $D_j(\rho)$ не зависит от x.

Доказательство. Используя фундаментальную систему решений $\{e_{j1}(x,\rho), e_{j2}(x,\rho)\}$, получаем

$$y_j(x,\rho) = A_j(\rho)e_{j1}(x,\rho) + D_j(\rho)e_{j2}(x,\rho). \quad (1.7.12)$$

Из (1.7.9) и (1.7.12) следует, что

$$\frac{y_j'(0,\rho)}{y_j(0,\rho)} = (i\rho)\,\frac{A_j(\rho)[1] - D_j(\rho)[1]}{A_j(\rho)[1] + D_j(\rho)[1]}, \quad \rho \in \Lambda_\delta, \quad |\rho| \to \infty.$$

Учитывая (1.7.10), вычисляем: $A_j(\rho) = D_j(\rho)(r_j+1)^{-1}(r_j-1)[1]$. Подставляя это соотношение в (1.7.12) и используя (1.7.9), приходим к (1.7.11). □

Лемма 1.7.2. *Пусть $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu)}$, и пусть r_j — число ребер, выходящих из v_j. Тогда при $\nu = 0, 1,$ $\rho \in \Lambda_\delta$, $|\rho| \to \infty$ равномерно по $x \in [0, 1]$ имеем*

$$\psi_{0j}^{(\nu)}(x, \lambda) = B_j(\rho) \exp(i\rho\mu)\Big((-i\rho)^{\nu-1} \exp(-i\rho x)[1] - \\ - (i\rho)^{\nu-1} d_j \exp(i\rho x)[1]\Big), \qquad (1.7.13)$$

где $d_j = 1$ при $j = \overline{1, p}$ и $d_j = (1 + r_j)^{-1}(1 - r_j)$ при $j = \overline{p + 1, r}$. При этом для $\rho \in \Lambda_\delta$, $|\rho| \to \infty$:

$$B_j(\rho) = b_j[1], \quad b_j \neq 0, \ b_{p+1} = 1. \qquad (1.7.14)$$

В частности, при $\rho \in \Lambda_\delta$, $|\rho| \to \infty$

$$\psi_{0j}^{(\nu)}(x, \lambda) = (-i\rho)^{\nu-1} b_j \exp(i\rho(\mu - x))[1], \quad \nu = 0, 1, \quad x \in (0, 1]. \qquad (1.7.15)$$

Доказательство. 1) Пусть $j = \overline{1, p}$. Тогда $\psi'_{0j}(0, \lambda) + h_j\psi_{0j}(0, \lambda) = 0$ и в силу (1.7.7)

$$\psi_{0j}(x, \lambda) = M_{0j}^1(\lambda)\varphi_j(x, \lambda). \qquad (1.7.16)$$

Используя (1.7.16) и асимптотику

$$\varphi_j^{(\nu)}(x, \lambda) = \frac{1}{2}\Big((i\rho)^\nu \exp(i\rho x)[1] + (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x)[1]\Big), \quad |\rho| \to \infty, \qquad (1.7.17)$$

приходим к (1.7.13) для $j = \overline{1, p}$.

2) Докажем (1.7.13) для всех остальных ребер индукцией по $\mu = \sigma, \sigma - 1, \ldots, 1$, где σ — высота дерева T. Если $\mu = \sigma$ (т. е. $e_j \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$), то $1 \leqslant j \leqslant p$ и (1.7.13) верно согласно предыдущим рассуждениям.

Зафиксируем $\mu < \sigma$. Предположим, что (1.7.13) доказано для всех $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu+1)} \cup \ldots \cup \mathcal{E}^{(\sigma)}$. Пусть $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu)}$. Ясно, что если $e_k \in R(v_j)$, то $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu+1)}$. Поэтому для каждого $e_k \in R(v_j)$ (13) верно по предположению индукции. В частности, при $\rho \in \Lambda_\delta$, $|\rho| \to \infty$, $e_k \in R(v_j)$ имеем

$$\psi_{0k}(1, \lambda) = B_k(\rho)(-i\rho)^{-1} \exp(i\rho\mu)[1], \quad \psi'_{0k}(1, \lambda) = B_k(\rho) \exp(i\rho\mu)[1].$$

Используя условия склейки (1.7.2), вычисляем

$$\frac{\psi'_{0j}(0, \lambda)}{\psi_{0j}(0, \lambda)} = \sum_{e_k \in R(v_j)} \frac{\psi'_{0k}(1, \lambda)}{\psi_{0k}(1, \lambda)} = (-i\rho) r_j[1].$$

Применяя лемму 1, приходим к (1.7.13) с некоторым коэффициентом $B_j(\rho)$. Таким образом, (1.7.13) доказано для всех ребер $e_j \in \mathcal{E}$. Далее, из (1.7.2) следует, что $\psi_{0j}(0, \lambda) = \psi_{0k}(1, \lambda)$ для всех $e_k \in R(v_j)$, и, следовательно, $B_k(\rho) = 2(r_j + 1)^{-1} B_j(\rho)[1]$. Так как $\psi'_{0,p+1}(1, \lambda) +$

$+ h_0\psi_{0,p+1}(1,\lambda) = 1$, то мы получаем (1.7.14). Поэтому (1.7.15) также имеет место. □

Симметрично к (1.7.13)–(1.7.15) можно получить асимптотику для всех других решений Вейля Ψ_k, $k = \overline{1,p}$. В частности, следующее утверждение является следствием леммы 1.7.2.

Лемма 1.7.3. *При* $k = \overline{1,p}$, $\nu = 0,1$ *имеем*

$$\psi_{kk}^{(\nu)}(x,\lambda) = (i\rho)^{\nu-1}\exp(i\rho x)[1],\ M_k(\lambda) = (i\rho)^{-1}[1],$$
$$\rho \in \Lambda_\delta, \quad |\rho| \to \infty, \quad x \in [0,1). \quad (1.7.18)$$

Пусть $\delta > 0$ — достаточно малое фиксированное число. Обозначим $G_\delta := \{\rho : \ |\rho - \rho_l| \geqslant \delta,\ \forall l \geqslant 0\}$, где $\lambda_l = \rho_l^2$ — собственные значения краевой задачи L. Используя стандартную технику (см. [188]), можно показать, что

$$|\psi_{kk}^{(\nu)}(x,\lambda)| \leqslant C|\rho^{\nu-1}\exp(i\rho x)|, \quad |M_k(\lambda)| \leqslant C|\rho|^{-1},$$
$$\rho \in G_\delta \cap \Lambda, \quad x \in [0,1]. \quad (1.7.19)$$

Задача $Z(T, v_0, a)$. Пусть $\Psi = [\psi_j]_{j\in J}$ — решение уравнения (1.7.1) на T, удовлетворяющее (1.7.2) и краевым условиям

$$\Psi_{|v_0} = a, \quad U_{j0}(\Psi) = 0, \quad j = \overline{1,p}, \quad (1.7.20)$$

где a — комплексное число. Обозначим $m_j^1(\lambda) = \psi_j(0,\lambda)$, $m_j^0(\lambda) = \psi_j'(0,\lambda) + h_j\psi_j(0,\lambda)$, $j \in J$. Тогда

$$\psi_j(x,\lambda) = m_j^0(\lambda)S_j(x,\lambda) + m_j^1(\lambda)\varphi_j(x,\lambda). \quad (1.7.21)$$

Подставляя (1.7.21) в (1.7.2) и (1.7.20), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $m_j^0(\lambda), m_j^1(\lambda), j \in J$. Определитель этой системы есть $\Delta_0(\lambda)$. Решая эту систему по формулам Крамера, находим матрицу перехода $[m_j^0(\lambda), m_j^1(\lambda)]_{j\in J}$ для T относительно v_0 и a. Задача вычисления матрицы перехода $[m_j^0(\lambda), m_j^1(\lambda)]_{j\in J}$ по формулам Крамера называется задачей $Z(T, v_0, a)$. Эта задача будет использоваться ниже для описания процедуры решения обратных задач.

1.7.3. Локальная обратная задача.

Зафиксируем $k = \overline{1,p}$ и рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу на ребре e_k, которая называется задачей $IP(k)$.

IP(*k*). По заданной $M_k(\lambda)$ построить $q_k(x)$, $x \in [0,1]$ и h_k.

Докажем единственность решения локальной обратной задачи $IP(k)$. Для этого наряду с T рассмотрим дерево $\widetilde{T}$ того же вида, но с другими $\widetilde{q}$ и $\widetilde{h}$. Везде в дальнейшем, если символ α обозначает объект, относящийся к T, то $\widetilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\widetilde{T}$.

Лемма 1.7.4. *Если $M_k(\lambda)=\widetilde{M}_k(\lambda)$, то $q_k(x)=\widetilde{q}_k(x)$ п.в. на* $[0{,}1]$ *и $h_k=\widetilde{h}_k$. Таким образом, задание функции Вейля M_k однозначно определяет потенциал q_k на ребре e_k и коэффициент h_k.*

Доказательство. Определим матрицу $P^k(x,\lambda)=[P^k_{js}(x,\lambda)]_{j,s=1,2}$ по формуле

$$P^k(x,\lambda)\begin{bmatrix}\widetilde{\varphi}_k(x,\lambda) & \widetilde{\psi}_{kk}(x,\lambda)\\ \widetilde{\varphi}'_k(x,\lambda) & \widetilde{\psi}'_{kk}(x,\lambda)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi_k(x,\lambda) & \psi_{kk}(x,\lambda)\\ \varphi'_k(x,\lambda) & \psi'_{kk}(x,\lambda)\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\varphi_k(x,\lambda)=P^k_{11}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}_k(x,\lambda)+P^k_{12}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}'_k(x,\lambda). \qquad (1.7.22)$$

Из (1.7.6) следует, что $\langle\varphi_k(x,\lambda),\psi_{kk}(x,\lambda)\rangle\equiv 1$, и, следовательно,

$$P^k_{1s}(x,\lambda)=(-1)^{s-1}\times$$
$$\times\Big(\varphi_k(x,\lambda)\widetilde{\psi}^{(2-s)}_{kk}(x,\lambda)-\widetilde{\varphi}^{(2-s)}_k(x,\lambda)\psi_{kk}(x,\lambda)\Big). \qquad (1.7.23)$$

Используя (1.7.17)–(1.7.19) и (1.7.23), получаем

$$P^k_{1s}(x,\lambda)=\delta_{1s}+O(\rho^{-1}),\quad \rho\in\Lambda_\delta,\quad |\rho|\to\infty,\quad x\in(0,1], \qquad (1.7.24)$$
$$|P^k_{1s}(x,\lambda)|\leqslant C|\rho|^{1-s},\quad \rho\in G_\delta\cap\Lambda,\quad x\in[0,1]. \qquad (1.7.25)$$

Согласно (1.7.6) и (1.7.23),

$$P^k_{1s}(x,\lambda)=(-1)^{s-1}\Big(\Big(\varphi_k(x,\lambda)\widetilde{S}^{(2-s)}_k(x,\lambda)-S_k(x,\lambda)\widetilde{\varphi}^{(2-s)}_k(x,\lambda)\Big)+$$
$$+(\widetilde{M}_k(\lambda)-M_k(\lambda))\varphi_k(x,\lambda)\widetilde{\varphi}^{(2-s)}_k(x,\lambda)\Big).$$

Так как $M_k(\lambda)=\widetilde{M}_k(\lambda)$, то при каждом фиксированном x функции $P^k_{1s}(x,\lambda)$ являются целыми по λ. Вместе с (1.7.24), (1.7.25) это дает $P^k_{11}(x,\lambda)\equiv 1$, $P^k_{12}(x,\lambda)\equiv 0$. Подставляя эти соотношения в (1.7.22), получаем $\varphi_k(x,\lambda)\equiv\widetilde{\varphi}_k(x,\lambda)$ при всех x и λ, и, следовательно, $q_k(x)=\widetilde{q}_k(x)$ п.в. на $[0,1]$ и $h_k=\widetilde{h}_k$. □

Используя метод спектральных отображений для оператора Штурма–Лиувилля на ребре e_k, можно получить конструктивную процедуру решения локальной обратной задачи $IP(k)$. Здесь мы только кратко объясним суть идей; подробности и доказательства см. в § 1.4. Возьмем дерево $\widetilde{T}$ с $\widetilde{q}=0$ и $\widetilde{h}=0$. Тогда $\widetilde{\varphi}_k(x,\lambda)=\cos\rho x$. Зафиксируем $k=\overline{1,p}$. Обозначим $\lambda'=\min\limits_{l\geqslant 0}(\lambda_l,\widetilde{\lambda}_l)$ и возьмем фиксированное $\delta>0$. В λ-плоскости рассмотрим контур γ (с обходом против часовой стрелки) вида $\gamma=\gamma^+\cup\gamma^-\cup\gamma'$, где $\gamma^\pm=\{\lambda:\ \pm\mathrm{Im}\,\lambda=\delta;\ \mathrm{Re}\,\lambda\geqslant\lambda'\}$, $\gamma'=\{\lambda:\ \lambda-\lambda'=\delta\exp(i\alpha),\ \alpha\in(\pi/2,3\pi/2)\}$. При каждом фиксированном $x \in [0,1]$ функция $\varphi_k(x,\lambda)$ является единственным решением следующего линейного интегрального уравнения:

$$\widetilde{\varphi}_k(x,\lambda) = \varphi_k(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\widehat{M}_k(\mu)\varphi_k(x,\mu)\,d\mu, \qquad (1.7.26)$$

где $\widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu) = \int_0^x \widetilde{\varphi}_k(t,\lambda)\widetilde{\varphi}_k(t,\mu)\,dt$, $\widehat{M}_k(\mu) := M_k(\mu) - \widetilde{M}_k(\mu)$. Потенциал q_k на ребре e_k может быть построен из решения интегрального уравнения (1.7.26) по формуле

$$q_k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} (\varphi_k(x,\lambda)\widetilde{\varphi}_k(x,\lambda))'\widehat{M}_k(\lambda)\,d\lambda$$

или по формуле $q_k(x) = \lambda + \varphi_k''(x,\lambda)/\varphi_k(x,\lambda)$. Кроме того, $h_k = -\varphi_k'(0,\lambda)$. Также возможно построить потенциал по дискретным спектральным данным $\{\lambda_l, \alpha_{lk}\}_{l \geqslant 0}$. Для этого можно вычислить контурный интеграл в (1.7.26) по теореме о вычетах и преобразовать интегральное уравнение (1.7.26) к следующему линейному уравнению в пространстве ограниченных последовательностей (при каждом фиксированном x):

$$\widetilde{\varphi}_{kns}(x) = \varphi_{kns}(x) + \sum_{l,j} \widetilde{P}_{kns}^{lj}(x)\varphi_{klj}(x), \quad l,n \geqslant 0, \quad s,j = 0,1,$$

где

$$\varphi_{kns}(x) = \varphi_k(x,\lambda_n^s), \quad \widetilde{\varphi}_{kns}(x) = \widetilde{\varphi}_k(x,\lambda_n^s), \quad \widetilde{P}_{kns}^{lj}(x) = (-1)^j \times$$
$$\times \widetilde{D}_k(x,\lambda_n^s,\lambda_l^j)\alpha_{lk}^j, \quad \lambda_l^0 = \lambda_l, \quad \lambda_l^1 = \widetilde{\lambda}_l, \quad \alpha_{lk}^0 = \alpha_{lk}, \quad \alpha_{lk}^1 = \widetilde{\alpha}_{lk};$$

подробнее см. § 1.4.

1.7.4. Решения Вейля для внутренних вершин. Зафиксируем $v_k \in V$. Обозначим $T_k^0 := \{z \in T : v_k < z\}$, $T_k := T \setminus T_k^0$. Ясно, что T_k — дерево с корнем v_0. Пусть Γ_k — множество граничных вершин T_k, и пусть E_k — множество граничных ребер T_k. Обозначим $J_k := \{j : e_j \in \in T_k\}$. Если $Y = [y_j]_{j \in J}$ — функция на T, то $\{Y\}_k := [y_j]_{j \in J_k}$ является функцией на T_k.

Зафиксируем $v_k \notin \Gamma$ (т. е. $k = \overline{p+1,r}$). Пусть $\Psi_k(x,\lambda) = [\psi_{kj}(x,\lambda)]_{j \in J_k}$ — решение уравнения (1.7.1) на T_k, удовлетворяющее (1.7.2) и краевым условиям $U_{j0}(\Psi_k) = \delta_{kj}$, $v_j \in \Gamma_k$, где $U_{k0}(Y) = Y'_{|v_k} + h_k Y_{|v_k}$ и h_k — вещественное число. Вектор Ψ_k является решением Вейля для (1.7.1) на T_k относительно вершины v_k. Обозначим через $M_k(\lambda) := \psi_{kk}(0,\lambda)$, $k = \overline{p+1,r}$, функции Вейля для T_k относительно v_k.

Лемма 1.7.5. *Зафиксируем $v_m \notin \Gamma$. Пусть $e_k = [v_m, v_k] \in R(v_m)$. Тогда*

$$\Psi_m(x,\lambda) = \left\{\frac{1}{A_{mk}(\lambda)}\Psi_k(x,\lambda)\right\}_m,$$

т.е.

$$\psi_{mj}(x,\lambda)=\frac{1}{A_{mk}(\lambda)}\psi_{kj}(x,\lambda),\quad j\in J_m, \tag{1.7.27}$$

$$M_m(\lambda)=\frac{1}{A_{mk}(\lambda)}\psi_{kk}(1,\lambda), \tag{1.7.28}$$

где

$$A_{mk}(\lambda)=\sum_{e_j\in R(v_m)}\psi'_{kj}(1,\lambda)+h_m\psi_{kk}(1,\lambda) \tag{1.7.29}$$

и Ψ_m, M_m *не зависят от* k.

Доказательство. Так как $U_{j0}(\Psi_k)=U_{j0}(\Psi_m)=0$ для $j\in J_m\setminus m$, то получаем (1.7.27) при некотором $A_{mk}(\lambda)$. Используя условие $U_{m0}(\Psi_m)=1$, вычисляем $A_{mk}(\lambda)=\psi'_{km}(0,\lambda)+h_m\psi_{km}(0,\lambda)$. Учитывая (1.7.2), приходим к (1.7.29). Далее,

$$M_m(\lambda)=\psi_{mm}(0,\lambda)=\frac{1}{A_{mk}(\lambda)}\psi_{km}(0,\lambda).$$

Снова используя условия склейки (1.7.2), получаем (1.7.28). □

Обозначим $M^1_{kj}(\lambda)=\psi_{kj}(0,\lambda)$, $M^0_{kj}(\lambda)=\psi'_{kj}(0,\lambda)+h_j\psi_{kj}(0,\lambda)$ при $k=\overline{p+1,r}$, $j\in J_k$. Тогда (1.7.6) и (1.7.7) верны для $k=\overline{1,r}$, $j\in J_k$, где $J_k=J$ при $k=\overline{1,p}$. В частности, это дает

$$\psi^{(\nu)}_{kj}(1,\lambda)=M^0_{kj}(\lambda)S^{(\nu)}_j(1,\lambda)+M^1_{kj}(\lambda)\varphi^{(\nu)}_j(1,\lambda),$$
$$\nu=0,1,\quad k=\overline{1,r},\quad j\in J_k, \tag{1.7.30}$$

$$\psi^{(\nu)}_{kk}(1,\lambda)=S^{(\nu)}_k(1,\lambda)+M_k(\lambda)\varphi^{(\nu)}_k(1,\lambda),\quad \nu=0,1,\quad k=\overline{1,r}. \tag{1.7.31}$$

1.7.5. Решение обратной задачи 1. Пусть задан вектор Вейля $M(\lambda)=[M_k(\lambda)]_{k=\overline{1,p}}$ для дерева T. Процедура решения обратной задачи 1 состоит в выполнении так называемых A_μ-процедур последовательно для $\mu=\sigma,\sigma-1,\ldots,1$, где σ — высота дерева T. Опишем A_μ-процедуры.

A_σ-процедура. 1) Для каждого ребра $e_k\in\mathcal{E}^{(\sigma)}$ решаем локальную обратную задачу $IP(k)$ и находим $q_k(x)$, $x\in[0,1]$, на ребре e_k, а также h_k.

2) Для каждого $e_k\in\mathcal{E}^{(\sigma)}$ строим $\varphi_k(x,\lambda)$, $S_k(x,\lambda)$, $x\in[0,1]$, и вычисляем $\psi^{(\nu)}_{kk}(1,\lambda)$, $\nu=0,1$ по (1.7.31).

3) Возвратная процедура. Для каждого фиксированного $v_m\in V^{(\sigma-1)}\setminus\Gamma$ и для всех $e_j,e_k\in R(v_m)$, $j\neq k$ строим $M^s_{kj}(\lambda)$, $s=0,1$, по формулам

$$M^0_{kj}(\lambda)=0,\ M^1_{kj}(\lambda)=\psi_{kk}(1,\lambda)/\varphi_j(1,\lambda),\quad e_j,e_k\in R(v_m),\ j\neq k.$$

4) Для каждого фиксированного $v_m\in V^{(\sigma-1)}\setminus\Gamma$ вычисляем функцию Вейля $M_m(\lambda)$ по (1.7.28), где $A_{mk}(\lambda)$ и $\psi'_{kj}(1,\lambda)$ строятся согласно (1.7.29) и (1.7.30).

Выполним теперь A_μ-процедуры для $\mu = \overline{1, \sigma - 1}$ по индукции. Зафиксируем $\mu = \overline{1, \sigma - 1}$ и предположим, что A_σ-,…, $A_{\mu+1}$-процедуры уже выполнены. Выполним A_μ-процедуру.

A_μ-процедура. Для каждого $v_k \in V^{(\mu)}$ функции Вейля $M_k(\lambda)$ заданы. В самом деле, если $v_k \in V^{(\mu)} \cap \Gamma$, то $M_k(\lambda)$ заданы априори, а если $v_k \in V^{(\mu)} \setminus \Gamma$, то $M_k(\lambda)$ были вычислены на предыдущих шагах по $A_\sigma-$,…, $A_{\mu+1}$-процедурам.

1) Для каждого ребра $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ решаем локальную обратную задачу $IP(k)$ и находим $q_k(x)$, $x \in [0, 1]$, на ребре e_k, а также h_k. Если $\mu = 1$, то обратная задача 1 решена и мы останавливаем наши вычисления. Если $\mu > 1$, то переходим к следующему шагу.

2) Для каждого $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ строим $\varphi_k(x, \lambda)$, $S_k(x, \lambda)$, $x \in [0, 1]$, и вычисляем $\psi_{kk}^{(\nu)}(1, \lambda)$, $\nu = 0, 1$, по (1.7.31).

3) Возвратная процедура. Для каждого фиксированного $v_m \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$ и для любых фиксированных $e_k, e_i \in R(v_m)$, $i \neq k$, рассмотрим дерево $T_i^1 := T_i^0 \cup \{e_i\}$ с корнем v_m. Решая задачу $Z(T_i^1, v_m, \psi_{kk}(1, \lambda))$, вычисляем матрицу перехода $[M_{kj}^0(\lambda), M_{kj}^1(\lambda)]$ при $e_j \in T_i^1$.

4) Для каждого фиксированного $v_m \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$ вычисляем функцию Вейля $M_m(\lambda)$ по (1.7.28), где $A_{mk}(\lambda)$ и $\psi'_{kj}(1, \lambda)$ построены согласно (1.7.29) и (1.7.30).

Таким образом, мы получили решение обратной задачи 1 и доказали его единственность, т. е. верно следующее утверждение.

Теорема 1.7.1. *Задание вектора Вейля M однозначно определяет потенциал q на T и h. Решение обратной задачи* 1 *может быть получено последовательным выполнением* A_σ-,$A_{\sigma-1}$-,…, A_1-*процедур.*

1.7.6. Решение обратной задачи 2. Пусть задана система спектров $\Sigma := \{\lambda_l, \lambda_{lk};\ l \geqslant 0;\ k = \overline{1, p}\}$. Числа $\{\lambda_l\}_{l\geqslant 0}$ и $\{\lambda_{lk}\}_{l\geqslant 0}$ совпадают с нулями характеристических функций $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_k(\lambda)$ соответственно. Эти функции являются целыми по λ порядка 1/2. По теореме Адамара функции $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_k(\lambda)$ однозначно определяются своими нулями с точностью до постоянных множителей:

$$\Delta(\lambda) = C \prod_{l=0}^{\infty} \Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_l}\Big), \quad \Delta_k(\lambda) = C_k \prod_{l=0}^{\infty} \Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{lk}}\Big)$$

(случай, когда $\Delta(0) = 0$ или/и $\Delta_k(0) = 0$ требует небольшой модификации). Тогда, в силу (1.7.8),

$$M_k(\lambda) = m_k \prod_{l=0}^{\infty} \Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{lk}}\Big)\Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_l}\Big)^{-1}, \quad k = \overline{1, p}, \quad m_k \text{ — const.} \quad (1.7.32)$$

Используя (1.7.18), получаем

$$m_k = \lim_{|\rho|\to\infty} (i\rho)^{-1} \prod_{l=0}^{\infty} \Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_l}\Big)\Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{lk}}\Big)^{-1}, \quad \rho \in \Lambda_\delta, \quad k = \overline{1,p}. \qquad (1.7.33)$$

Таким образом, используя данные спектры Σ, можно однозначно построить вектор Вейля $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=\overline{1,p}}$ по (1.7.32) и (1.7.33). Другими словами, решение обратной задачи 2 сводится к решению обратной задачи 1 и верно следующее утверждение.

Теорема 1.7.2. *Задание системы спектров Σ однозначно определяет потенциал q на T и h. Для построения решения обратной задачи 2 вычисляем вектор Вейля M по* (1.7.32), (1.7.33) *и затем строим q и h, решая обратную задачу* 1.

1.7.7. Решение обратной задачи 3. Пусть заданы спектральные данные S. Выберем положительные числа $R_N \to \infty$ так, чтобы при достаточно малом $\delta > 0$ окружности $|\rho| = R_N$ лежали в G_δ для всех N. Покажем, что

$$M_k(\lambda) = \sum_l \frac{\alpha_{lk}}{\lambda - \lambda_l}, \qquad (1.7.34)$$

где ряд в (1.7.34) сходится «со скобками»: $\sum_l := \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{|\lambda_l|<R_N^2}$.

В самом деле, рассмотрим контурный интеграл

$$J_{N,k}(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_N} \frac{M_k(\mu)}{\lambda - \mu}\, d\mu, \quad \lambda \in \operatorname{int}\gamma_N, \qquad (1.7.35)$$

где $\gamma_N = \{\mu : |\mu| = R_N^2\}$. Из (1.7.18) и (1.7.19) следует, что $\lim\limits_{N\to\infty} J_{N,k}(\lambda) = 0$. С другой стороны, вычисляя контурный интеграл в (1.7.35) по теореме о вычетах, получаем

$$J_{N,k}(\lambda) = -M_k(\lambda) + \sum_{|\lambda_l|<R_N^2} \frac{\alpha_{lk}}{\lambda - \lambda_l},$$

и, следовательно, верно (1.7.34).

Таким образом, используя известные спектральные данные S, можно однозначно построить вектор Вейля $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=\overline{1,p}}$ по (1.7.34). Другими словами, решение обратной задачи 3 сводится к решению обратной задачи 1, и верно следующее утверждение.

Теорема 1.7.3. *Задание спектральных данных S однозначно определяет потенциал q на T и h. Для построения решения обратной задачи* 3 *вычисляем вектор Вейля M по* (1.7.34) *и затем строим q и h, решая обратную задачу* 1.

Замечание 1.7.1. Все полученные результаты верны также и для несамосопряженных операторов Штурма–Лиувилля на T с комплекснозначными потенциалами.

Глава 2

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

§ 2.1. Операторы Штурма–Лиувилля на полуоси

В §§ 2.1–2.3 дается введение в теорию обратных спектральных задач для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на полуоси. Сначала рассматриваются несамосопряженные операторы с комплекснозначными интегрируемыми потенциалами. В качестве основной спектральной характеристики вводится и изучается функция Вейля, доказывается теорема о разложении и дается решение обратной задачи восстановления оператора Штурма–Лиувилля по заданной функции Вейля. При этом используется метод спектральных отображений, изложенный в гл. 1 для конечного отрезка. Установлена связь основного уравнения обратной задачи, полученного методом спектральных отображений, с уравнением Гельфанда–Левитана. Далее рассматриваются наиболее важные частные случаи, которые часто встречаются в приложениях, а именно: самосопряженные операторы, несамосопряженные операторы с простым спектром, а также возмущения дискретного спектра модельного оператора. Вводятся так называемые спектральные данные, которые описывают множество особенностей функции Вейля, и дается решение обратной задачи восстановления оператора Штурма–Лиувилля по спектральным данным. В § 2.3 исследуются более общие локально суммируемые, комплекснозначные потенциалы. В п. 2.3.1 рассматривается обратная задача для волнового уравнения. В п. 2.3.2 вводится и изучается обобщенная функция Вейля, доказывается теорема о разложении и дается решение обратной задачи восстановления оператора Штурма–Лиувилля по обобщенной функции Вейля. Установлена связь с обратной задачей для волнового уравнения.

2.1.1. Решения Йоста и Бирхгофа. Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейную форму $L = L(q(x), h)$:

$$\ell y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x > 0, \tag{2.1.1}$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0), \tag{2.1.2}$$

где $q(x) \in L(0, \infty)$ — комплекснозначная функция и h — комплексное число. Пусть $\lambda = \rho^2$, $\rho = \sigma + i\tau$, и пусть для определенности $\tau := \operatorname{Im}\rho \geqslant 0$. Через Π обозначим λ-плоскость с разрезом $\lambda \geqslant 0$, а $\Pi_1 = \overline{\Pi} \setminus \{0\}$. Тогда при отображении $\rho \to \rho^2 = \lambda$ Π_1 соответствует множеству $\Omega = \{\rho : \ \operatorname{Im}\rho \geqslant 0,\, \rho \neq 0\}$. Положим $\Omega_\delta = \{\rho : \ \operatorname{Im}\rho \geqslant 0,\, |\rho| \geqslant \delta\}$. Через W_N обозначим множество функций $f(x)$, $x \geqslant 0$ таких, что функции $f^{(j)}(x)$, $j = \overline{0, N-1}$, абсолютно непрерывны на $[0, T]$ при каждом фиксированном $T > 0$ и $f^{(j)}(x) \in L(0, \infty)$,

$j=\overline{0,N}$. В этом пункте строятся специальные фундаментальные системы решений для уравнения (2.1.1) в Ω с асимптотическим поведением на бесконечности типа $\exp(\pm i\rho x)$.

Теорема 2.1.1. *Уравнение* (2.1.1) *имеет единственное решение,* $y=e(x,\rho)$, $\rho\in\Omega$, $x\geqslant 0$, *удовлетворяющее интегральному уравнению*

$$e(x,\rho)=\exp(i\rho x)-\frac{1}{2i\rho}\int\limits_x^\infty(\exp(i\rho(x-t))-$$
$$-\exp(i\rho(t-x)))\,q(t)e(t,\rho)\,dt. \quad (2.1.3)$$

Функция $e(x,\rho)$ *обладает следующими свойствами.*
(i_1) *При* $x\to\infty$, $\nu=0,1$ *и каждом фиксированном* $\delta>0$

$$e^{(\nu)}(x,\rho)=(i\rho)^\nu\exp(i\rho x)(1+o(1)) \quad (2.1.4)$$

равномерно в Ω_δ. *При* $\mathrm{Im}\ \ \rho>0\quad e(x,\rho)\in L_2(0,\infty)$, *причем* $e(x,\rho)$ *является единственным решением уравнения* (2.1.1) (*с точностью до постоянного множителя*) *с этим свойством.*
(i_2) *При* $|\rho|\to\infty$, $\rho\in\Omega$, $\nu=0,1$

$$e^{(\nu)}(x,\rho)=(i\rho)^\nu\exp(i\rho x)\Big(1+\frac{\omega(x)}{i\rho}+o\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big),$$
$$\omega(x):=-\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty q(t)\,dt \quad (2.1.5)$$

равномерно по $x\geqslant 0$.
(i_3) *При фиксированных* $x\geqslant 0$ *и* $\nu=0,1$ *функции* $e^{(\nu)}(x,\rho)$ *регулярны при* $\mathrm{Im}\,\rho>0$ *и непрерывны при* $\rho\in\Omega$.
(i_4) *При вещественном* $\rho\neq 0$ *функции* $e(x,\rho)$ *и* $e(x,-\rho)$ *образуют фундаментальную систему решений уравнения* (2.1.1), *причем*

$$\langle e(x,\rho),e(x,-\rho)\rangle=-2i\rho, \quad (2.1.6)$$

где $\langle y,z\rangle:=yz'-y'z$ *— вронскиан функций* y *и* z. *Функция* $e(x,\rho)$ *называется решением Йоста уравнения* (2.1.1).

Доказательство. Заменой

$$e(x,\rho)=\exp(i\rho x)z(x,\rho) \quad (2.1.7)$$

приводим уравнение (2.1.3) к виду

$$z(x,\rho)=1-\frac{1}{2i\rho}\int\limits_x^\infty(1-\exp(2i\rho(t-x)))\,q(t)z(t,\rho)\,dt,\quad x\geqslant 0,\quad \rho\in\Omega. \quad (2.1.8)$$

Метод последовательных приближений дает

$$z_0(x,\rho)=1,\quad z_{k+1}(x,\rho)=-\frac{1}{2i\rho}\int\limits_x^\infty (1-\exp(2i\rho(t-x)))\times \\ \times q(t)z_k(t,\rho)\,dt, \quad (2.1.9)$$

$$z(x,\rho)=\sum_{k=0}^\infty z_k(x,\rho). \quad (2.1.10)$$

Покажем по индукции, что имеет место оценка

$$|z_k(x,\rho)|\leqslant \frac{(Q_0(x))^k}{|\rho|^k k!},\quad \rho\in\Omega,\quad x\geqslant 0, \quad (2.1.11)$$

где $Q_0(x):=\int_x^\infty |q(t)|\,dt$. В самом деле, при $k=0$ оценка (2.1.11) очевидна. Предположим, что (2.1.11) выполняется при некотором фиксированном $k\geqslant 0$. Так как $|1-\exp(2i\rho(t-x))|\leqslant 2$, то из (2.1.9) вытекает

$$|z_{k+1}(x,\rho)|\leqslant \frac{1}{|\rho|}\int\limits_x^\infty |q(t)z_k(t,\rho)|\,dt. \quad (2.1.12)$$

Подставляя (2.1.11) в правую часть соотношения (2.1.12), получаем

$$|z_{k+1}(x,\rho)|\leqslant \frac{1}{|\rho|^{k+1}k!}\int\limits_x^\infty |q(t)|(Q_0(t))^k\,dt=\frac{(Q_0(t))^{k+1}}{|\rho|^{k+1}(k+1)!}.$$

Из (2.1.11) следует, что ряд (2.1.10) сходится абсолютно при $x\geqslant 0$, $\rho\in\Omega$ и функция $z(x,\rho)$ является единственным решением интегрального уравнения (2.1.8). Кроме того, в силу (2.1.10) и (2.1.11)

$$|z(x,\rho)|\leqslant \exp(Q_0(x)/|\rho|), \\ |z(x,\rho)-1|\leqslant (Q_0(x)/|\rho|)\exp(Q_0(x)/|\rho|). \quad (2.1.13)$$

В частности, из (2.1.13) вытекает, что при фиксированном $\delta>0$

$$z(x,\rho)=1+o(1),\quad x\to\infty \quad (2.1.14)$$

равномерно в Ω_δ и

$$z(x,\rho)=1+O\Big(\frac{1}{\rho}\Big),\quad |\rho|\to\infty,\ \rho\in\Omega \quad (2.1.15)$$

равномерно при $x\geqslant 0$. Подставляя (2.1.15) в правую часть (2.1.8), получаем

$$z(x,\rho)=1-\frac{1}{2i\rho}\int\limits_x^\infty (1-\exp(2i\rho(t-x)))\,q(t)\,dt+O\Big(\frac{1}{\rho^2}\Big),\ |\rho|\to\infty \quad (2.1.16)$$

равномерно при $x\geqslant 0$.

Лемма 2.1.1. *Пусть* $q(x) \in L(0,\infty)$,

$$J_q(x,\rho) := \int_x^\infty q(t)\exp(2i\rho(t-x))\,dt, \quad \rho \in \Omega. \tag{2.1.17}$$

Тогда

$$\lim_{|\rho|\to\infty} \sup_{x\geqslant 0} |J_q(x,\rho)| = 0. \tag{2.1.18}$$

Доказательство. 1) Предположим сначала, что $q(x) \in W_1$. Тогда интегрирование по частям в (2.1.17) дает

$$J_q(x,\rho) = -\frac{q(x)}{2i\rho} - \frac{1}{2i\rho}\int_x^\infty q'(t)\exp(2i\rho(t-x))\,dt,$$

и, следовательно, $\sup\limits_{x\geqslant 0}|J_q(x,\rho)| \leqslant C_q|\rho|^{-1}$.

2) Пусть теперь $q(x) \in L(0,\infty)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выбираем $q_\varepsilon(x) \in \in W_1$ так, чтобы

$$\int_0^\infty |q(t) - q_\varepsilon(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $|J_q(x,\rho)| \leqslant |J_{q_\varepsilon}(x,\rho)| + |J_{q-q_\varepsilon}(x,\rho)| \leqslant C_{q_\varepsilon}|\rho|^{-1} + \varepsilon/2$. Следовательно, существует $\rho^0 > 0$ такое, что $\sup\limits_{x\geqslant 0}|J_q(x,\rho)| \leqslant \varepsilon$ при $|\rho| \geqslant \rho^0$, $\rho \in \Omega$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к (2.1.18). □

Вернемся к доказательству теоремы 2.1.1. Из (2.1.16) и леммы 2.1.1 вытекает, что

$$z(x,\rho) = 1 + \frac{\omega(x)}{i\rho} + o\Big(\frac{1}{\rho}\Big), \quad |\rho| \to \infty, \quad \rho \in \Omega \tag{2.1.19}$$

равномерно при $x \geqslant 0$. Из (2.1.7), (2.1.9)-(2.1.11), (2.1.14) и (2.1.19) выводим $(\mathrm{i}_1) - (\mathrm{i}_3)$ для $\nu = 0$. Кроме того, (2.1.3) и (2.1.7) дают

$$e'(x,\rho) = (i\rho)\exp(i\rho x)\left(1 - \frac{1}{2i\rho}\int_x^\infty (1 + \exp(2i\rho(t-x)))\,q(t)z(t,\rho)\,dt\right). \tag{2.1.20}$$

Используя (2.1.20), получаем $(\mathrm{i}_1) - (\mathrm{i}_3)$ для $\nu = 1$. Дифференцированием нетрудно убедится, что функция $e(x,\rho)$ является решением уравнения (2.1.1). При вещественном $\rho \neq 0$ функции $e(x,\rho)$ и $e(x,-\rho)$ удовлетворяют уравнению (2.1.1), и в силу (2.1.4) $\lim\limits_{x\to\infty}\langle e(x,\rho), e(x,-$ $-\rho)\rangle = -2i\rho$. Так как вронскиан $\langle e(x,\rho), e(x,-\rho)\rangle$ не зависит от x, то приходим к (2.1.6). Теорема 2.1.1 доказана. □

Замечание 2.1.1. Если $q(x) \in W_N$, то существуют функции $\omega_{s\nu}(x)$ такие, что при $\rho \to \infty$, $\rho \in \Omega$, $\nu = 0, 1, 2$, имеет место асимптотическая формула

$$e^{(\nu)}(x,\rho) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x)\Big(1 + \sum_{s=1}^{N+1} \frac{\omega_{s\nu}(x)}{(i\rho)^s} + o\Big(\frac{1}{\rho^{N+1}}\Big)\Big),$$
$$\omega_{1\nu}(x) = \omega(x). \quad (2.1.21)$$

В самом деле, пусть $q(x) \in W_1$. Подставляя (2.1.19) в правую часть (2.1.8), вычисляем

$$z(x,\rho) = 1 - \frac{1}{2i\rho} \int_x^\infty (1 - \exp(2i\rho(t-x)))\, q(t)\, dt -$$
$$- \frac{1}{2(i\rho)^2} \int_x^\infty (1 - \exp(2i\rho(t-x)))\, q(t)\omega(t)\, dt + o\Big(\frac{1}{\rho^2}\Big), \quad |\rho| \to \infty.$$

Интегрируя по частям и используя лемму 2.1.1, получаем

$$z(x,\rho) = 1 + \frac{\omega(x)}{i\rho} + \frac{\omega_{20}(x)}{(i\rho)^2} + o\Big(\frac{1}{\rho^2}\Big), \quad |\rho| \to \infty,\ \rho \in \Omega, \quad (2.1.22)$$

где

$$\omega_{20}(x) = -\frac{1}{4}q(x) + \frac{1}{4}\int_x^\infty q(t)\Big(\int_t^\infty q(s)\, ds\Big)\, dt = -\frac{1}{4}q(x) + \frac{1}{8}\Big(\int_x^\infty q(t)\, dt\Big)^2.$$

В силу (2.1.7) и (2.1.22) приходим к (2.1.21) для $N = 1$, $\nu = 0$. По индукции можно получить (2.1.21) при всех N.

Если дополнительно имеем $xq(x) \in L(0,\infty)$, то решение Йоста $e(x,\rho)$ существует также при $\rho = 0$. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $(1+x)q(x) \in L(0,\infty)$. *Тогда функции* $e^{(\nu)}(x,\rho)$, $\nu = 0, 1$, *непрерывны при* $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, *и*

$$|e(x,\rho)\exp(-i\rho x)| \leqslant \exp(Q_1(x)), \quad (2.1.23)$$
$$|e(x,\rho)\exp(-i\rho x) - 1| \leqslant \Big(Q_1(x) - Q_1\Big(x + \frac{1}{|\rho|}\Big)\Big)\exp(Q_1(x)), \quad (2.1.24)$$
$$|e'(x,\rho)\exp(-i\rho x) - i\rho| \leqslant Q_0(x)\exp(Q_1(x)), \quad (2.1.25)$$

где

$$Q_1(x) := \int_x^\infty Q_0(t)\, dt = \int_x^\infty (t-x)|q(t)|\, dt.$$

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1.2. *Предположим, что* $c_1 \geqslant 0$, $u(x) \geqslant 0$, $v(x) \geqslant 0$ $(a \leqslant x \leqslant T \leqslant \infty)$; $u(x)$ *ограничена и* $(x-a)v(x) \in L(a,T)$. *Если*

$$u(x) \leqslant c_1 + \int_x^T (t-x)v(t)u(t)\,dt, \tag{2.1.26}$$

то

$$u(x) \leqslant c_1 \exp\Bigl(\int_x^T (t-x)v(t)\,dt\Bigr). \tag{2.1.27}$$

Доказательство. Обозначим $\xi(x) = c_1 + \int_x^T (t-x)v(t)u(t)\,dt$. Тогда

$$\xi(T) = c_1, \quad \xi'(x) = -\int_x^T v(t)u(t)\,dt, \quad \xi'' = v(x)u(x)$$

и (2.1.26) дает $0 \leqslant \xi''(x) \leqslant \xi(x)v(x)$. Пусть $c_1 > 0$. Тогда $\xi(x) > 0$ и

$$\frac{\xi''(x)}{\xi(x)} \leqslant v(x).$$

Следовательно,

$$\Bigl(\frac{\xi'(x)}{\xi(x)}\Bigr)' \leqslant v(x) - \Bigl(\frac{\xi'(x)}{\xi(x)}\Bigr)^2 \leqslant v(x).$$

Интегрируя это неравенство дважды, получаем

$$-\frac{\xi'(x)}{\xi(x)} \leqslant \int_x^T v(t)\,dt, \quad \ln\frac{\xi(x)}{\xi(T)} \leqslant \int_x^T (t-x)v(t)\,dt,$$

и, следовательно,

$$\xi(x) \leqslant c_1 \exp\Bigl(\int_x^T (t-x)v(t)\,dt\Bigr).$$

Согласно (2.1.26) $u(x) \leqslant \xi(x)$, и мы приходим к (2.1.27).

Если $c_1 = 0$, то $\xi(x) = 0$. В самом деле, предположим противное, т.е. $\xi(x) \neq 0$. Так как $\xi(x) \geqslant 0$, $\xi'(x) \leqslant 0$, то существует $T_0 \leqslant T$ такое, что $\xi(x) > 0$ при $x < T_0$ и $\xi(x) \equiv 0$ при $x \in [T_0, T]$. Повторяя рассуждения, получаем при $x < T_0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$:

$$\ln\frac{\xi(x)}{\xi(T_0-\varepsilon)} \leqslant \int_x^{T_0-\varepsilon} (t-x)v(t)\,dt \leqslant \int_x^{T_0} (t-x)v(t)\,dt,$$

что невозможно. Таким образом, $\xi(x) \equiv 0$, и (2.1.27) становится очевидным. □

Доказательство теоремы 2.1.2. При $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$ имеем

$$\left|\frac{\sin\rho}{\rho}\exp(i\rho)\right| \leqslant 1. \qquad (2.1.28)$$

В самом деле, (2.1.28) очевидно при вещественных ρ и при $|\rho| \geqslant 1$, $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$. Тогда согласно принципу максимума модуля для аналитических функций [206, с. 204] неравенство (2.1.28) верно также при $|\rho| \leqslant 1$, $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$.

Из (2.1.28) вытекает

$$\left|\frac{1-\exp(2i\rho x)}{2i\rho}\right| \leqslant x \ \text{ при } \operatorname{Im}\rho \geqslant 0, \quad x \geqslant 0. \qquad (2.1.29)$$

Используя (2.1.9) и (2.1.29), получаем оценку

$$|z_{k+1}(x,\rho)| \leqslant \int\limits_x^\infty t|q(t)z_k(t,\rho)|\,dt, \quad k \geqslant 0, \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0, \quad x \geqslant 0,$$

и, следовательно, по индукции выводим

$$|z_k(x,\rho)| \leqslant \frac{1}{k!}\Bigl(\int\limits_x^\infty t|q(t)|\,dt\Bigr)^k, \quad k \geqslant 0, \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0, \quad x \geqslant 0.$$

Итак, ряд (2.1.10) сходится абсолютно и равномерно при $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, и функция $z(x,\rho)$ непрерывна при $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Кроме того,

$$|z(x,\rho)| \leqslant \exp\Bigl(\int\limits_x^\infty t|q(t)|\,dt\Bigr), \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0,\ x \geqslant 0. \qquad (2.1.30)$$

Используя (2.1.7) и (2.1.20), заключаем, что функции $e^{(\nu)}(x,\rho)$, $\nu = 0, 1$, непрерывны при $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $x \geqslant 0$.

Далее, из (2.1.8) и (2.1.29) следует, что

$$|z(x,\rho)| \leqslant 1 + \int\limits_x^\infty (t-x)|q(t)z(t,\rho)|\,dt, \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0,\ x \geqslant 0.$$

В силу леммы 2.1.2 имеем

$$|z(x,\rho)| \leqslant \exp(Q_1(x)), \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0,\ x \geqslant 0, \qquad (2.1.31)$$

т. е. верно (2.1.23). Отметим, что оценка (2.1.31) является более точной, чем (2.1.30).

Используя (2.1.8), (2.1.29) и (2.1.31), вычисляем

$$|z(x,\rho)-1| \leqslant \int\limits_x^\infty (t-x)|q(t)|\exp(Q_1(t))\,dt \leqslant \exp(Q_1(x))\int\limits_x^\infty (t-x)|q(t)|\,dt,$$

и, следовательно,

$$|z(x,\rho)-1| \leqslant Q_1(x)\exp(Q_1(x)), \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0,\ x \geqslant 0. \tag{2.1.32}$$

Более точно,

$$|z(x,\rho)-1| \leqslant \int\limits_x^{x+\frac{1}{|\rho|}} (t-x)|q(t)|\exp(Q_1(t))\,dt + \frac{1}{|\rho|}\int\limits_{x+\frac{1}{|\rho|}}^{\infty} |q(t)|\exp(Q_1(t))\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \exp(Q_1(x))\Big(\int\limits_x^{\infty}(t-x)|q(t)|\,dt - \int\limits_{x+\frac{1}{|\rho|}}^{\infty}\Big(t-x-\frac{1}{|\rho|}\Big)|q(t)|\,dt\Big) =$$

$$= \Big(Q_1(x) - Q_1\Big(x+\frac{1}{|\rho|}\Big)\Big)\exp(Q_1(x)),$$

т. е. верно (2.1.24). Наконец, из (2.1.20) и (2.1.31) следует, что

$$|e'(x,\rho)\exp(-i\rho x) - i\rho| \leqslant \int\limits_x^{\infty}|q(t)|\exp(Q_1(t))\,dt \leqslant \exp(Q_1(x))\int\limits_x^{\infty}|q(t)|\,dt,$$

и мы приходим к (2.1.25). Теорема 2.1.2 доказана. □

Замечание 2.1.2. Рассмотрим функцию $q(x) = \dfrac{2a^2}{(1+ax)^2}$, где a — комплексное число такое, что $a \notin (-\infty,0]$. Тогда $q(x) \in L(0,\infty)$, но $xq(x) \notin L(0,\infty)$. Решение Йоста в этом случае имеет вид (см. пример 2.2.1):

$$e(x,\rho) = \exp(i\rho x)\Big(1 - \frac{a}{i\rho(1+ax)}\Big),$$

т. е. $e(x,\rho)$ имеет особенность при $\rho = 0$; поэтому условие интегрируемости в теореме 2.1.2 не может быть опущено.

Для решения Йоста $e(x,\rho)$ существует оператор преобразования. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1.3. *Пусть* $(1+x)q(x) \in L(0,\infty)$. *Тогда решение Йоста* $e(x,\rho)$ *представимо в виде*

$$e(x,\rho) = \exp(i\rho x) + \int\limits_x^{\infty} A(x,t)\exp(i\rho t)\,dt, \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0,\ x \geqslant 0, \tag{2.1.33}$$

где $A(x,t)$ — непрерывная функция при $0 \leqslant x \leqslant t < \infty$ и

$$A(x,x) = \frac{1}{2}\int\limits_x^{\infty} q(t)\,dt, \tag{2.1.34}$$

$$|A(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}Q_0\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\exp\Big(Q_1(x) - Q_1\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\Big), \tag{2.1.35}$$

$$1+\int_x^\infty |A(x,t)|\,dt \leqslant \exp(Q_1(x)), \quad \int_x^\infty |A(x,t)|\,dt \leqslant Q_1(x)\exp(Q_1(x)). \tag{2.1.36}$$

Кроме того, функция $A(x_1,x_2)$ имеет первые производные $\dfrac{\partial A}{\partial x_i}$, $i=1,2$; функции

$$\frac{\partial A(x_1,x_2)}{\partial x_i} + \frac{1}{4}q\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)$$

абсолютно непрерывны по x_1 и x_2 и удовлетворяют оценкам

$$\Big|\frac{\partial A(x_1,x_2)}{\partial x_i} + \frac{1}{4}q\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)\Big| \leqslant \frac{1}{2}Q_0(x_1)Q_0\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)\times$$
$$\times\exp\Big(Q_1(x_1) - Q_1\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)\Big), \quad i=1,2. \tag{2.1.37}$$

Доказательство. Рассуждения при доказательстве этой теоремы аналогичны тем, что были приведены в § 1.1, но с соответствующими изменениями. Эту теорему можно также найти в [173, 164].

Согласно (2.1.7) и (2.1.10) имеем

$$e(x,\rho) = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon_k(x,\rho), \quad \varepsilon_k(x,\rho) = z_k(x,\rho)\exp(i\rho x). \tag{2.1.38}$$

Покажем по индукции, что справедливо следующее представление:

$$\varepsilon_k(x,\rho) = \int_x^\infty a_k(x,t)\exp(i\rho t)\,dt, \quad k \geqslant 1, \tag{2.1.39}$$

где функции $a_k(x,t)$ не зависят от ρ.

Сначала вычислим $\varepsilon_1(x,\rho)$. В силу (2.1.9) и (2.1.38) имеем

$$\varepsilon_1(x,\rho) = \int_x^\infty \frac{\sin\rho(s-x)}{\rho}\exp(i\rho s)q(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_x^\infty q(s)\Big(\int_x^{2s-x}\exp(i\rho t)\,dt\Big)\,ds.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем, что (2.1.39) верно при $k = 1$, где

$$a_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_{(t+x)/2}^\infty q(s)\,ds.$$

Предположим теперь, что (2.1.39) верно при некотором $k \geqslant 1$. Тогда

$$\varepsilon_{k+1}(x,\rho) = \int\limits_x^\infty \frac{\sin\rho(s-x)}{\rho} q(s)\varepsilon_k(s,\rho)\,ds =$$

$$= \int\limits_x^\infty \frac{\sin\rho(s-x)}{\rho} q(s)\Big(\int\limits_s^\infty a_k(s,u)\exp(i\rho u)\,du\Big)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_x^\infty q(s)\Big(\int\limits_s^\infty a_k(s,u)\Big(\int\limits_{-s+u+x}^{s+u-x}\exp(i\rho t)\,dt\Big)\,du\Big)\,ds.$$

Продолжим $a_k(s,u)$ нулем при $u < s$. При $s \geqslant x$ это дает

$$\int\limits_s^\infty a_k(s,u)\Big(\int\limits_{-s+u+x}^{s+u-x}\exp(i\rho t)\,dt\Big)\,du = \int\limits_x^\infty \exp(i\rho t)\Big(\int\limits_{t-s+x}^{t+s-x} a_k(s,u)\,du\Big)\,dt.$$

Поэтому

$$\varepsilon_{k+1}(x,\rho) = \frac{1}{2}\int\limits_x^\infty \exp(i\rho t)\Big(\int\limits_x^\infty q(s)\Big(\int\limits_{t-s+x}^{t+s-x} a_k(s,u)\,du\Big)\,ds\Big)\,dt$$

$$= \int\limits_x^\infty a_{k+1}(x,t)\exp(i\rho t)\,dt,$$

где

$$a_{k+1}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_x^\infty q(s)\Big(\int\limits_{t-s+x}^{t+s-x} a_k(s,u)\,du\Big)\,ds, \quad t \geqslant x.$$

Выполняя замены переменных $u+s=2\alpha$ и $u-s=2\beta$ соответственно, получаем

$$a_{k+1}(x,t) = \int\limits_{(t+x)/2}^\infty \Big(\int\limits_0^{(t-x)/2} q(\alpha-\beta)a_k(\alpha-\beta,\alpha+\beta)\,d\beta\Big)\,d\alpha.$$

Полагая $H_k(\alpha,\beta) = a_k(\alpha-\beta,\alpha+\beta)$, $t+x=2u$, $t-x=2v$, вычисляем для $0 \leqslant v \leqslant u$:

$$H_1(u,v) = \frac{1}{2}\int\limits_u^\infty q(s)\,ds, \quad H_{k+1}(u,v) = \int\limits_u^\infty \Big(\int\limits_0^v q(\alpha-\beta)H_k(\alpha,\beta)\,d\beta\Big)\,d\alpha. \quad (2.1.40)$$

По индукции можно доказать, что

$$|H_{k+1}(u,v)| \leqslant \frac{1}{2}Q_0(u)\frac{(Q_1(u-v)-Q_1(u))^k}{k!}, \quad k \geqslant 0,\ 0 \leqslant v \leqslant u. \tag{2.1.41}$$

В самом деле, при $k=0$ оценка (2.1.41) очевидна. Предположим, что (2.1.41) верно для $H_k(u,v)$. Тогда (2.1.40) дает

$$|H_{k+1}(u,v)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_u^\infty Q_0(\alpha)\Big(\int\limits_0^v |q(\alpha-\beta)|\frac{(Q_1(\alpha-\beta)-Q_1(\alpha))^{k-1}}{(k-1)!}\,d\beta\Big)\,d\alpha.$$

Так как функции $Q_0(x)$ и $Q_1(x)$ монотонные, то

$$|H_{k+1}(u,v)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{Q_0(u)}{(k-1)!}\int\limits_u^\infty (Q_1(\alpha-v)-Q_1(\alpha))^{k-1} \times$$

$$\times (Q_0(\alpha-v)-Q_0(\alpha))\,d\alpha = \frac{1}{2}Q_0(u)\frac{(Q_1(u-v)-Q_1(u))^k}{k!},$$

т. е. (2.1.41) доказано. Поэтому ряд $H(u,v)=\sum_{k=1}^\infty H_k(u,v)$ сходится абсолютно и равномерно при $0 \leqslant v \leqslant u$ и

$$H(u,v) = \frac{1}{2}\int\limits_u^\infty q(s)\,ds + \int\limits_u^\infty\Big(\int\limits_0^v q(\alpha-\beta)H(\alpha,\beta)\,d\beta\Big)\,d\alpha, \tag{2.1.42}$$

$$|H(u,v)| \leqslant \frac{1}{2}Q_0(u)\exp\Big(Q_1(u-v)-Q_1(u)\Big). \tag{2.1.43}$$

Положим

$$A(x,t) = H\Big(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\Big). \tag{2.1.44}$$

Тогда $A(x,t)=\sum_{k=1}^\infty a_k(x,t)$, причем ряд сходится абсолютно и равномерно при $0 \leqslant x \leqslant t$ и имеют место соотношения (2.1.33)–(2.1.35). Используя (2.1.35), вычисляем

$$\int\limits_x^\infty |A(x,t)|\,dt \leqslant \exp(Q_1(x))\int\limits_x^\infty Q_0(\xi)\exp(-Q_1(\xi))\,d\xi =$$

$$= \exp(Q_1(x))\int\limits_x^\infty \frac{d}{d\xi}\Big(\exp(-Q_1(\xi))\Big)\,d\xi = \exp(Q_1(x))-1$$

и приходим к (2.1.36).

Далее, из (2.1.42) вытекает

$$\frac{\partial H(u,v)}{\partial u} = -\frac{1}{2}q(u) - \int\limits_0^v q(u-\beta)H(u,\beta)\,d\beta, \tag{2.1.45}$$

$$\frac{\partial H(u,v)}{\partial v} = \int\limits_u^\infty q(\alpha - v)H(\alpha,v)\,d\alpha. \tag{2.1.46}$$

Из (2.1.45)–(2.1.46) и (2.1.43) имеем

$$\Big|\frac{\partial H(u,v)}{\partial u} + \frac{1}{2}q(u)\Big| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^v |q(u-\beta)|Q_0(u)\exp(Q_1(u-\beta) - Q_1(u))\,d\beta,$$

$$\Big|\frac{\partial H(u,v)}{\partial v}\Big| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_u^\infty |q(\alpha - v)|Q_0(\alpha)\exp(Q_1(\alpha - v) - Q_1(\alpha))\,d\alpha.$$

Так как

$$\int\limits_0^v |q(u-\beta)|\,d\beta = \int\limits_{u-v}^u |q(s)|\,ds \leqslant Q_0(u-v),$$

$$Q_1(\alpha - v) - Q_1(\alpha) = \int\limits_{\alpha-v}^\alpha Q_0(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{u-v}^u Q_0(t)\,dt = Q_1(u-v) - Q_1(u), \quad u \leqslant \alpha,$$

то

$$\Big|\frac{\partial H(u,v)}{\partial u} + \frac{1}{2}q(u)\Big| \leqslant \frac{1}{2}Q_0(u)\exp(Q_1(u-v) - Q_1(u))\int\limits_0^v |q(u-\beta)|\,d\beta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}Q_0(u-v)Q_0(u)\exp(Q_1(u-v) - Q_1(u)), \tag{2.1.47}$$

$$\Big|\frac{\partial H(u,v)}{\partial v}\Big| \leqslant \frac{1}{2}Q_0(u)\exp(Q_1(u-v) - Q_1(u))\int\limits_u^\infty |q(\alpha - v)|\,d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}Q_0(u-v)Q_0(u)\exp(Q_1(u-v) - Q_1(u)). \tag{2.1.48}$$

В силу (2.1.44)

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial H(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial H(u,v)}{\partial v}\Big),\qquad \frac{\partial A(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial H(u,v)}{\partial u}+\frac{\partial H(u,v)}{\partial v}\Big),$$

где

$$u=\frac{t+x}{2},\quad v=\frac{t-x}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{4}\,q\Big(\frac{x+t}{2}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial H(u,v)}{\partial u}+\frac{1}{2}\,q(u)\Big)-\frac{1}{2}\frac{\partial H(u,v)}{\partial v},$$
$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{4}\,q\Big(\frac{x+t}{2}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial H(u,v)}{\partial u}+\frac{1}{2}\,q(u)\Big)+\frac{1}{2}\frac{\partial H(u,v)}{\partial v}.$$

Учитывая (2.1.47), (2.1.48), приходим к (2.1.37). Теорема 2.1.3 доказана. □

Пусть $(1+x)q(x)\in L(0,\infty)$. Введем потенциалы

$$q_r(x)=\begin{cases} q(x), & x\leqslant r,\\ 0, & x>r,\end{cases}\qquad r\geqslant 0, \tag{2.1.49}$$

и рассмотрим соответствующие решения Йоста

$$e_r(x,\rho)=\exp(i\rho x)+\int\limits_x^\infty A_r(x,t)\exp(i\rho t)\,dt. \tag{2.1.50}$$

Согласно теоремам 2.1.2, 2.1.3 имеем

$$\begin{gathered}|e_r(x,\rho)\exp(-i\rho x)|\leqslant \exp(Q_1(x)),\\ |e_r(x,\rho)\exp(-i\rho x)-1|\leqslant Q_1(x)\exp(Q_1(x)),\\ |e'_r(x,\rho)\exp(-i\rho x)-i\rho|\leqslant Q_0(x)\exp(Q_1(x)),\end{gathered} \tag{2.1.51}$$

$$|A_r(x,t)|\leqslant \frac{1}{2}Q_0\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\exp\Big(Q_1(x)-Q_1\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\Big). \tag{2.1.52}$$

Кроме того,

$$\begin{gathered}e_r(x,\rho)\equiv\exp(i\rho x)\ \text{ при }\ x>r,\\ A_r(x,t)\equiv 0\ \text{ при }\ x+t>2r.\end{gathered} \tag{2.1.53}$$

Лемма 2.1.3. *Пусть* $(1+x)q(x)\in L(0,\infty)$. *Тогда при* $\operatorname{Im}\rho\geqslant 0$, $x\geqslant 0$, $r\geqslant 0$ справедливы оценки

$$|(e_r(x,\rho)-e(x,\rho))\exp(-i\rho x)|\leqslant \int\limits_r^\infty t|q(t)|\,dt\,\exp(Q_1(0)), \tag{2.1.54}$$

$$|(e'_r(x,\rho)-e'(x,\rho))\exp(-i\rho x)|\leqslant$$
$$\leqslant \Big(Q_0(r)+\int\limits_r^\infty t|q(t)|\,dt\,Q_0(0)\Big)\exp(Q_1(0)). \tag{2.1.55}$$

Доказательство. Обозначим

$$z_r(x,\rho)=e_r(x,\rho)\exp(-i\rho x),\ \ z(x,\rho)=e(x,\rho)\exp(-i\rho x),$$
$$u_r(x,\rho)=|z_r(x,\rho)-z(x,\rho)|.$$

Из (2.1.8) и (2.1.29) вытекает

$$u_r(x,\rho)\leqslant\int\limits_x^\infty (t-x)|q_r(t)z_r(t,\rho)-q(t)z(t,\rho)|\,dt,$$
$$\operatorname{Im}\rho\geqslant 0,\ x\geqslant 0,\ r\geqslant 0. \qquad (2.1.56)$$

Пусть $x\geqslant r$. В силу (2.1.23), (2.1.49), (2.1.56) имеем

$$u_r(x,\rho)\leqslant\int\limits_x^\infty (t-x)|q(t)z(t,\rho)|\,dt\leqslant\int\limits_x^\infty (t-x)|q(t)|\exp(Q_1(t))\,dt.$$

Так как функция $Q_1(x)$ монотонна, то

$$u_r(x,\rho)\leqslant Q_1(x)\exp(Q_1(x))\leqslant Q_1(r)\exp(Q_1(0)),\quad x\geqslant r. \qquad (2.1.57)$$

При $x\leqslant r$ оценка (2.1.56) дает

$$u_r(x,\rho)\leqslant\int\limits_r^\infty (t-x)|q(t)z(t,\rho)|\,dt+\int\limits_x^r (t-x)|q(t)|u_r(t,\rho)\,dt.$$

Используя (2.1.23), выводим

$$u_r(x,\rho)\leqslant\exp(Q_1(r))\int\limits_r^\infty t|q(t)|\,dt+\int\limits_x^r (t-x)|q(t)|u_r(t,\rho)\,dt.$$

Согласно лемме 2.1.2 приходим к соотношению

$$u_r(x,\rho)\leqslant\exp(Q_1(r))\int\limits_r^\infty t|q(t)|\,dt\exp\Bigl(\int\limits_x^r (t-x)|q(t)|\,dt\Bigr),\quad x\leqslant r,$$

и, следовательно,

$$u_r(x,\rho)\leqslant\exp(Q_1(x))\int\limits_r^\infty t|q(t)|\,dt\leqslant\exp(Q_1(0))\int\limits_r^\infty t|q(t)|\,dt,\quad x\leqslant r.$$

Вместе с (2.1.57) это приводит к (2.1.54). Обозначим

$$v_r(x,\rho)=|(e_r'(x,\rho)-e'(x,\rho))\exp(-i\rho x)|,\quad \operatorname{Im}\rho\geqslant 0,\ x\geqslant 0,\ r\geqslant 0.$$

Из (2.1.20) вытекает

$$v_r(x,\rho) \leqslant \int_x^\infty |q_r(t)z_r(t,\rho) - q(t)z(t,\rho)|\,dt, \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0,\ x \geqslant 0,\ r \geqslant 0. \tag{2.1.58}$$

Пусть $x \geqslant r$. В силу (2.1.23), (2.1.49), (2.1.58) имеем

$$v_r(x,\rho) \leqslant \int_x^\infty |q(t)|\exp(Q_1(t))\,dt \leqslant Q_0(x)\exp(Q_1(x)) \leqslant \\ \leqslant Q_0(r)\exp(Q_1(0)), \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant x. \tag{2.1.59}$$

При $x \leqslant r$ оценка (2.1.58) дает

$$v_r(x,\rho) \leqslant \int_r^\infty |q(t)z(t,\rho)|\,dt + \int_x^r |q(t)|u_r(t,\rho)\,dt.$$

Используя (2.1.23) и (2.1.54), выводим

$$v_r(x,\rho) \leqslant \int_r^\infty |q(t)|\exp(Q_1(t))\,dt + \exp(Q_1(0))\int_r^\infty s|q(s)|\,ds\int_x^r |q(t)|\,dt,$$

и, следовательно,

$$v_r(x,\rho) \leqslant \Bigl(Q_0(r) + Q_0(0)\int_r^\infty t|q(t)|\,dt\Bigr)\exp(Q_1(0)), \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0.$$

Вместе с (2.1.59) это дает (2.1.55). Лемма 2.1.3 доказана. ☐

Теорема 2.1.4. *Для каждого $\delta > 0$ существует $a = a_\delta \geqslant 0$ такое, что при $\rho \in \Omega_\delta$ уравнение* (2.1.1) *имеет единственное решение $y = E(x,\rho)$ удовлетворяющее интегральному уравнению*

$$E(x,\rho) = \exp(-i\rho x) + \frac{1}{2i\rho}\int_a^x \exp(i\rho(x-t))q(t)E(t,\rho)\,dt + \\ + \frac{1}{2i\rho}\int_x^\infty \exp(i\rho(t-x))q(t)E(t,\rho)\,dt. \tag{2.1.60}$$

Функция $E(x,\rho)$, называемая решением Бирхгофа для (2.1.1), *имеет следующие свойства*:

(i$_1$) $E^{(\nu)}(x,\rho) = (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x)(1 + o(1))$, $x \to \infty$, $\nu = 0, 1$, *равномерно по* $|\rho| \geqslant \delta$, $\operatorname{Im}\rho \geqslant \alpha$ *при каждом фиксированном* $\alpha > 0$;

(i$_2$) $E^{(\nu)}(x,\rho) = (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x)(1 + O(\rho^{-1}))$, $|\rho| \to \infty$, $\rho \in \Omega$ *равномерно по* $x \geqslant a$;

(i$_3$) *при каждом фиксированном* $x \geqslant 0$ *функции* $E^{(\nu)}(x,\rho)$ *регулярны при* $\operatorname{Im}\rho > 0$, $|\rho| \geqslant \delta$ *и непрерывны при* $\rho \in \Omega_\delta$;
(i$_4$) *функции* $e(x,\rho)$, $E(x,\rho)$ *образуют фундаментальную систему решений уравнения* (2.1.1), *причем* $\langle e(x,\rho), E(x,\rho)\rangle = -2i\rho$;
(i$_5$) *если* $\delta \geqslant Q_0(0)$, *то можно брать* $a = 0$.

Доказательство. При фиксированном $\delta > 0$ выберем $a = a_\delta \geqslant 0$ так, чтобы $Q_0(a) \leqslant \delta$. Заменой $E(x,\rho) = \exp(-i\rho x)\xi(x,\rho)$ сведем (2.1.60) к уравнению

$$\xi(x,\rho) = 1 + \frac{1}{2i\rho}\int\limits_a^x \exp(2i\rho(x-t))q(t)\xi(t,\rho)\,dt + \frac{1}{2i\rho}\int\limits_x^\infty q(t)\xi(t,\rho)\,dt. \quad (2.1.61)$$

Метод последовательных приближений дает

$$\xi_0(x,\rho) = 1,\ \xi_{k+1}(x,\rho) = \frac{1}{2i\rho}\int\limits_a^x \exp(2i\rho(x-t))q(t)\xi_k(t,\rho)\,dt + \frac{1}{2i\rho}\int\limits_x^\infty q(t)\xi_k(t,\rho)\,dt,$$

$$\xi(x,\rho) = \sum_{k=0}^\infty \xi_k(x,\rho),$$

причем

$$|\xi_{k+1}(x,\rho)| \leqslant \frac{1}{2|\rho|}\int\limits_a^\infty |q(t)\xi_k(t,\rho)|\,dt,$$

и, следовательно,

$$|\xi_k(x,\rho)| \leqslant \Big(\frac{(Q_0(a)}{2|\rho|}\Big)^k.$$

Таким образом, при $x \geqslant a$, $|\rho| \geqslant Q_0(a)$ имеем

$$|\xi(x,\rho)| \leqslant 2, \quad |\xi(x,\rho) - 1| \leqslant Q_0(a)|\rho|^{-1}.$$

Из (2.1.60) вытекает

$$E'(x,\rho) = \exp(-i\rho x)\Big(-i\rho + \frac{1}{2}\int\limits_a^x \exp(2i\rho(x-t))q(t)\xi(t,\rho)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_x^\infty q(t)\xi(t,\rho)\,dt\Big). \quad (2.1.62)$$

Так как $|\xi(x,\rho)| \leqslant 2$ при $x \geqslant a$, $\rho \in \Omega_\delta$, то из (2.1.61)–(2.1.62) выводим

$$|E^{(\nu)}(x,\rho)(-i\rho)^{-\nu}\exp(i\rho x) - 1| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\rho|}\Big(\int_a^x \exp(-2\tau(x-t))|q(t)|\,dt + \int_x^\infty |q(t)|\,dt\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\rho|}\Big(\exp(-\tau x)\int_a^{x/2} |q(t)|\,dt + \int_{x/2}^\infty |q(t)|\,dt\Big),$$

и, следовательно, свойства (i_1), (i_2) доказаны. Остальные утверждения теоремы 2.1.4 очевидны. □

2.1.2. Свойства спектра.

Обозначим

$$\Delta(\rho) = e'(0,\rho) - h\,e(0,\rho). \tag{2.1.63}$$

В силу теоремы 2.1.1 функция $\Delta(\rho)$ аналитична при $\operatorname{Im}\rho > 0$ и непрерывна при $\rho \in \Omega$. Из (2.1.5) следует, что при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in \Omega$ имеют место асимптотические формулы

$$e(0,\rho) = 1 + \frac{\omega_1}{i\rho} + o\Big(\frac{1}{\rho}\Big), \quad \Delta(\rho) = (i\rho)\Big(1 + \frac{\omega_{11}}{i\rho} + o\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big), \tag{2.1.64}$$

где $\omega_1 = \omega(0)$, $\omega_{11} = \omega(0) - h$. Используя (2.1.7), (2.1.16) и (2.1.20), можно получить более точно:

$$e(0,\rho) = 1 + \frac{\omega_1}{i\rho} + \frac{1}{2i\rho}\int_0^\infty q(t)\exp(2i\rho t)\,dt + O\Big(\frac{1}{\rho^2}\Big),$$

$$\Delta(\rho) = (i\rho)\Big(1 + \frac{\omega_{11}}{i\rho} - \frac{1}{2i\rho}\int_0^\infty q(t)\exp(2i\rho t)\,dt + O\Big(\frac{1}{\rho^2}\Big)\Big). \tag{2.1.65}$$

Обозначим

$$\Lambda = \{\lambda = \rho^2 : \rho \in \Omega,\ \Delta(\rho) = 0\},$$
$$\Lambda' = \{\lambda = \rho^2 :\ \operatorname{Im}\rho > 0,\ \Delta(\rho) = 0\},$$
$$\Lambda'' = \{\lambda = \rho^2 :\ \operatorname{Im}\rho = 0,\ \rho \neq 0,\ \Delta(\rho) = 0\}.$$

Очевидно, что $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$ — ограниченное множество, а Λ' — ограниченное не более чем счетное множество. Обозначим

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{e(x,\rho)}{\Delta(\rho)}. \tag{2.1.66}$$

Функция $\Phi(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (2.1.1) и, в силу (2.1.63) и теоремы 2.1.1, также условиям

$$U(\Phi) = 1, \tag{2.1.67}$$

$$\Phi(x,\lambda) = O(\exp(i\rho x)), \quad x \to \infty, \quad \rho \in \Omega, \tag{2.1.68}$$

где U определено в (2.1.2). Функция $\Phi(x,\lambda)$ называется *решением Вейля* для L. Отметим, что (2.1.1), (2.1.67) и (2.1.68) однозначно определяют решение Вейля.

Положим $M(\lambda) := \Phi(0,\lambda)$. Функция $M(\lambda)$ называется *функцией Вейля* для L. Из (2.1.66) вытекает

$$M(\lambda) = \frac{e(0,\rho)}{\Delta(\rho)}. \tag{2.1.69}$$

Ясно, что

$$\Phi(x,\lambda) = S(x,\lambda) + M(\lambda)\varphi(x,\lambda), \tag{2.1.70}$$

где функции $\varphi(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$ являются решениями (2.1.1) при начальных условиях

$$\varphi(0,\lambda) = 1,\ \varphi'(0,\lambda) = h, \quad S(0,\lambda) = 0,\ S'(0,\lambda) = 1.$$

Заметим, что функция Вейля играет важную роль в спектральной теории операторов Штурма–Лиувилля (см., например, [165]).

Согласно формуле Остроградского–Лиувилля вронскиан $\langle\varphi(x,\lambda), \Phi(x,\lambda)\rangle$ не зависит от x. Так как $\langle\varphi(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\rangle_{|x=0} = U(\Phi) = 1$, то получаем

$$\langle\varphi(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\rangle \equiv 1. \tag{2.1.71}$$

Теорема 2.1.5. *Функция Вейля $M(\lambda)$ аналитична в $\Pi \setminus \Lambda'$ и непрерывна в $\Pi_1 \setminus \Lambda$. Множество особенностей $M(\lambda)$ (как аналитической функции) совпадает с множеством $\Lambda_0 := \{\lambda:\ \lambda \geqslant 0\} \cup \Lambda$.*

Теорема 2.1.5 следует из (2.1.63), (2.1.69) и теоремы 2.1.1. В силу (2.1.70) множество особенностей решения Вейля $\Phi(x,\lambda)$ совпадает с Λ_0 при каждом $x \geqslant 0$, так как функции $\varphi(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$ являются целыми по λ при каждом $x \geqslant 0$.

Определение 2.1.1. Множество особенностей функции Вейля $M(\lambda)$ называется спектром L. Те значения λ, при которых уравнение (2.1.1) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие условиям $U(y) = 0$, $y(\infty) = 0$ (т. е. $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$), называются собственными значениями L, а соответствующие решения называются собственными функциями.

Замечание 2.1.3. Можно ввести оператор

$$L^o:\ D(L^o) \to L_2(0,\infty), \quad y \to -y'' + q(x)y$$

с областью определения $D(L^o) = \{y:\ y \in L_2(I) \cap AC_{loc}(I),\ y' \in AC_{loc}(I),\ L^o y \in L_2(I),\ U(y) = 0\}$, где $I := [0,\infty)$. Нетрудно убедиться, что спектр L^o совпадает с Λ_0. Для операторов Штурма–Лиувилля с равным успехом можно работать как с оператором L^o, так и с парой L. Однако для обобщений на многие другие классы обратных задач с методической точки зрения более естественно здесь работать с парой L (см. также гл. 3).

Теорема 2.1.6. *L не имеет собственных значений при $\lambda > 0$.*

Доказательство. Предположим, что $\lambda_0 = \rho_0^2 > 0$ является собственным значением, а $y_0(x)$ — соответствующая собственная функция. Так как функции $\{e(x, \rho_0), e(x, -\rho_0)\}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.1.1), то $y_0(x) = Ae(x, \rho_0) + Be(x, -\rho_0)$. При $x \to \infty$ имеем: $y_0(x) \sim 0$, $e(x, \pm\rho_0) \sim \exp(\pm i\rho_0 x)$. Но это возможно лишь при $A = B = 0$. □

Теорема 2.1.7. *Пусть $\lambda_0 \notin [0, \infty)$. Для того чтобы λ_0 было собственным значением, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta(\rho_0) = 0$. Другими словами, множество ненулевых собственных значений совпадает с Λ'. Каждому собственному значению $\lambda_0 \in \Lambda'$ соответствует только одна (с точностью до постоянного множителя) собственная функция, а именно*

$$\varphi(x, \lambda_0) = \beta_0 e(x, \rho_0), \quad \beta_0 \neq 0. \tag{2.1.72}$$

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda'$. Тогда $U(e(x, \rho_0)) = \Delta(\rho_0) = 0$ и, в силу (2.1.4), $\lim\limits_{x\to\infty} e(x, \rho_0) = 0$. Таким образом, $e(x, \rho_0)$ — собственная функция, а $\lambda_0 = \rho_0^2$ — собственное значение. Кроме того, из (2.1.66) и (2.1.71) вытекает, что $\langle \varphi(x, \lambda), e(x, \rho) \rangle = \Delta(\rho)$, и, следовательно, верно (2.1.72).

Обратно, пусть $\lambda_0 = \rho_0^2$, $\operatorname{Im} \rho_0 > 0$, — собственное значение, а $y_0(x)$ — соответствующая собственная функция. Ясно, что $y_0(0) \neq 0$. Без ограничения общности считаем, что $y_0(0) = 1$. Тогда $y_0'(0) = h$, и, следовательно, $y_0(x) \equiv \varphi(x, \lambda_0)$. Так как функции $E(x, \rho_0)$, $e(x, \rho_0)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.1.1), то $y_0(x) = \alpha_0 E(x, \rho_0) + \beta_0 e(x, \rho_0)$. При $x \to \infty$ вычисляем $\alpha_0 = 0$, т.е. $y_0(x) = \beta_0 e(x, \rho_0)$. Отсюда получаем (2.1.72). Тогда $\Delta(\rho_0) = U(e(x, \rho_0)) = 0$, и $\varphi(x, \lambda_0)$, $e(x, \rho_0)$ являются собственными функциями. □

Таким образом, спектр L состоит из положительной полуоси $\{\lambda : \lambda \geqslant 0\}$ и дискретного множества $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$. Каждый элемент множества Λ' является собственным значением L. Согласно теореме 2.1.6 точки множества Λ'' не являются собственными значениями L; они называются *спектральными особенностями* L.

Пример 2.1.1. Пусть $q(x) \equiv 0$, $h = i\theta$, где θ — вещественное число. Тогда $\Delta(\rho) = i\rho - h$ и $\Lambda' = \varnothing$, $\Lambda'' = \{\theta\}$, т.е. L не имеет собственных значений, а точка $\rho_0 = \theta$ является спектральной особенностью для L.

Из (2.1.5), (2.1.64), (2.1.66) и (2.1.69) следует, что при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in \Omega$ имеют место асимптотические формулы

$$M(\lambda) = \frac{1}{i\rho}\left(1 + \frac{m_1}{i\rho} + o\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \qquad (2.1.73)$$

$$\Phi^{(\nu)}(x,\lambda) = (i\rho)^{\nu-1}\exp(i\rho x)\left(1 + \frac{B(x)}{i\rho} + o\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \qquad (2.1.74)$$

равномерно по $x \geqslant 0$, причем $m_1 = h$, $B(x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(s)\,ds$. Учитывая (2.1.65), можно получить более точно:

$$M(\lambda) = \frac{1}{i\rho}\left(1 + \frac{m_1}{i\rho} + \frac{1}{i\rho}\int\limits_0^\infty q(t)\exp(2i\rho t)\,dt + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right), \qquad (2.1.75)$$
$$|\rho| \to \infty, \quad \rho \in \Omega.$$

Кроме того, если $q(x) \in W_N$, то в силу (2.1.21) имеем

$$M(\lambda) = \frac{1}{i\rho}\left(1 + \sum_{s=1}^{N+1}\frac{m_s}{(i\rho)^s} + o\left(\frac{1}{\rho^{N+1}}\right)\right), \ |\rho| \to \infty, \ \rho \in \Omega, \qquad (2.1.76)$$

где $m_1 = h, \quad m_2 = -q(0)/2 + h^2, \ldots$ Обозначим

$$V(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\left(M^-(\lambda) - M^+(\lambda)\right), \quad \lambda > 0, \qquad (2.1.77)$$

где $M^\pm(\lambda) = \lim\limits_{z\to 0,\, Re\, z>0} M(\lambda \pm iz)$. Из (2.1.73), (2.1.77) вытекает

$$V(\lambda) = \frac{1}{\pi\rho}\left(1 + o\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \quad \rho > 0, \quad \rho \to +\infty. \qquad (2.1.78)$$

Используя (2.1.75), вычисляем более точно:

$$V(\lambda) = \frac{1}{\pi\rho}\left(1 + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^\infty q(t)\sin 2\rho t\,dt + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right), \qquad (2.1.79)$$
$$\rho > 0, \ \rho \to +\infty.$$

Кроме того, если $q(x) \in W_{N+1}$, то (2.1.76) дает

$$V(\lambda) = \frac{1}{\pi\rho}\left(1 + \sum_{s=1}^{N+1}\frac{V_s}{\rho^s} + o\left(\frac{1}{\rho^{N+1}}\right)\right), \quad \rho > 0, \quad \rho \to +\infty, \qquad (2.1.80)$$

где $V_{2s} = (-1)^s m_{2s}$, $V_{2s+1} = 0$.

Замечание 2.1.4. Аналогичные результаты верны также и в случае, когда вместо $U(y) = 0$ рассматривается краевое условие $U_0(y) := y(0) = 0$. В этом случае решение Вейля $\Phi_0(x,\lambda)$ и функция Вейля

$M_0(\lambda)$ определяются условиями $\Phi_0(0,\lambda)=1$, $\Phi_0(x,\lambda)=O(\exp(i\rho x))$, $x\to\infty$, $M_0(\lambda):=\Phi_0'(0,\lambda)$, причем

$$\Phi_0(x,\lambda)=\frac{e(x,\rho)}{e(0,\rho)}=C(x,\lambda)+M_0(\lambda)S(x,\lambda),\quad M_0(\lambda)=\frac{e'(0,\rho)}{e(0,\rho)},\qquad (2.1.81)$$

где $C(x,\lambda)$ — решение уравнения (2.1.1) при условиях $C(0,\lambda)=1$, $C'(0,\lambda)=0$.

2.1.3. Теорема о разложении. В λ-плоскости рассмотрим контур $\gamma=\gamma'\cup\gamma''$ (с обходом против часовой стрелки), где γ' — ограниченный замкнутый контур, охватывающий множество $\Lambda\cup\{0\}$, а γ'' — двусторонний разрез вдоль луча $\{\lambda:\ \lambda>0,\ \lambda\notin \mathrm{i}nt\,\gamma'\}$.

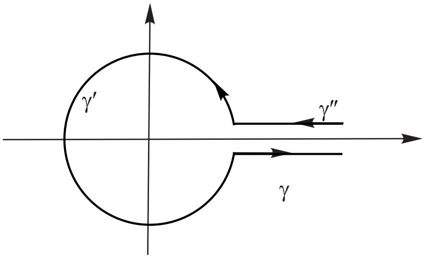

рис. 2.1.1

Теорема 2.1.8. *Пусть $f(x)\in W_2$. Тогда равномерно по $x\geqslant 0$*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\varphi(x,\lambda)F(\lambda)M(\lambda)\,d\lambda,\qquad (2.1.82)$$

где

$$F(\lambda):=\int\limits_0^\infty \varphi(t,\lambda)f(t)\,dt.$$

Доказательство. Будем использовать метод контурного интеграла. Для этого рассмотрим функцию

$$Y(x,\lambda)=\Phi(x,\lambda)\int\limits_0^x\varphi(t,\lambda)f(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int\limits_x^\infty\Phi(t,\lambda)f(t)\,dt.\qquad (2.1.83)$$

Так как функции $\varphi(x,\lambda)$, $\Phi(x,\lambda)$ удовлетворяют уравнению (2.1.1), то $Y(x,\lambda)$ можно преобразовать к виду

$$Y(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\Phi(x,\lambda)\int\limits_0^x(-\varphi''(t,\lambda)+q(t)\varphi(t,\lambda))f(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{\lambda}\varphi(x,\lambda)\int\limits_x^\infty(-\Phi''(t,\lambda)+q(t)\Phi(t,\lambda))f(t)\,dt.$$

Интегрируя дважды по частям слагаемые, содержащие вторые производные, получаем с учетом (2.1.71):

$$Y(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\Big(f(x)+Z(x,\lambda)\Big), \tag{2.1.84}$$

где

$$Z(x,\lambda)=(f'(0)-hf(0))\Phi(x,\lambda)+\Phi(x,\lambda)\int\limits_0^x \varphi(t,\lambda)\ell f(t)\,dt+ \\ +\varphi(x,\lambda)\int\limits_x^\infty \Phi(t,\lambda)\ell f(t)\,dt. \tag{2.1.85}$$

Аналогично

$$F(\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\Big(f'(0)-hf(0)\Big)+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty \varphi(t,\lambda)\ell f(t)\,dt, \quad \lambda>0. \tag{2.1.86}$$

Функция $\varphi(x,\lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.1.11). Обозначим

$$\mu_T(\lambda)=\max_{0\leqslant x\leqslant T}(|\varphi(x,\lambda)|\exp(-|\tau|x)), \quad \tau:=\operatorname{Im}\rho.$$

Тогда (1.1.11) дает при $|\rho|\geqslant 1,\ x\in[0,T]$:

$$|\varphi(x,\lambda)|\exp(-|\tau|x)\leqslant C+\frac{\mu_T(\lambda)}{|\rho|}\int\limits_0^T |q(t)|\,dt,$$

и, следовательно,

$$\mu_T(\lambda)\leqslant C+\frac{\mu_T(\lambda)}{|\rho|}\int\limits_0^T |q(t)|\,dt\leqslant C+\frac{\mu_T(\lambda)}{|\rho|}\int\limits_0^\infty |q(t)|\,dt.$$

Отсюда заключаем, что $|\mu_T(\lambda)|\leqslant C$ при $|\rho|\geqslant\rho^*$. Вместе с (1.1.12) это дает при $\nu=0,1$, $|\rho|\geqslant\rho^*$:

$$|\varphi^{(\nu)}(x,\lambda)|\leqslant C|\rho|^\nu\exp(|\tau|x) \tag{2.1.87}$$

равномерно по $x\geqslant 0$. Кроме того, из (2.1.74) следует, что при $\nu=0,1$, $|\rho|\geqslant\rho^*$:

$$|\Phi^{(\nu)}(x,\lambda)|\leqslant C|\rho|^{\nu-1}\exp(-|\tau|x) \tag{2.1.88}$$

равномерно по $x\geqslant 0$. В силу (2.1.85), (2.1.87), (2.1.88) имеем: $Z(x,\lambda)=$

$= O(\rho^{-1})$ при $|\lambda| \to \infty$ равномерно по $x \geqslant 0$. Поэтому соотношение (2.1.84) дает

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{x\geqslant 0} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=R} Y(x,\lambda)\, d\lambda \right| = 0, \tag{2.1.89}$$

где контур в интеграле проходится против часовой стрелки. Рассмотрим контур $\gamma_R^0 = (\gamma \cap \{\lambda :\ |\lambda| \leqslant R\}) \cup \{\lambda :\ |\lambda| = R\}$ (с обходом по часовой стрелке).

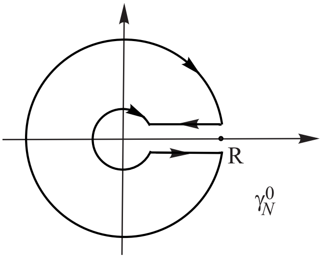

рис. 2.1.2

По теореме Коши [206, с. 149] $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R^0} Y(x,\lambda)d\lambda = 0$. Учитывая (2.1.89), получаем

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{x\geqslant 0} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} Y(x,\lambda)\, d\lambda \right| = 0,$$

где $\gamma_R = \gamma \cap \{\lambda :\ |\lambda| \leqslant R\}$ (с обходом против часовой стрелки). Отсюда, используя (2.1.83) и (2.1.70), приходим к (2.1.82), так как слагаемые с $S(x,\lambda)$ пропадают в силу теоремы Коши. Отметим, что согласно (2.1.79), (2.1.86), (2.1.87) справедливы оценки

$$F(\lambda) = O(\lambda^{-1}),\ M(\lambda) = O(\rho^{-1}),\ \varphi(x,\lambda) = O(1),\ x \geqslant 0,\ \lambda > 0,\ \lambda \to \infty,$$

и, следовательно, интеграл в (2.1.82) сходится абсолютно и равномерно при $x \geqslant 0$. □

Замечание 2.1.5. Если $q(x)$ и h вещественны и $(1+x)q(x) \in L(0,\infty)$, то (см. § 2.3) $\Lambda'' = \varnothing$, $\Lambda' \subset (-\infty, 0)$ — конечное множество простых собственных значений, $V(\lambda) > 0$ при $\lambda > 0$ ($V(\lambda)$ определено в (2.1.77)), а $M(\lambda) = O(\rho^{-1})$ при $\rho \to 0$. Тогда (2.1.82) принимает вид

$$f(x) = \int\limits_0^\infty \varphi(x,\lambda)F(\lambda)V(\lambda)d\lambda + \sum_{\lambda_j\in\Lambda'} \varphi(x,\lambda_j)F(\lambda_j)Q_j, \quad Q_j := \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j} M(\lambda),$$

или

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,\lambda)F(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

где $\sigma(\lambda)$ — спектральная функция L (см. [165]). При $\lambda < 0$ $\sigma(\lambda)$ — ступенчатая функция; при $\lambda > 0$ $\sigma(\lambda)$ — абсолютно непрерывная функция, причем $\sigma'(\lambda) = V(\lambda)$.

Замечание 2.1.6. Из доказательства следует, что теорема 2.1.8 остается верной и при $f(x) \in W_1$.

§ 2.2. Обратная задача на полуоси для суммируемых потенциалов

2.2.1. Восстановление оператора по функции Вейля. В этом пункте исследуется обратная задача восстановления пары $L = L(q(x), h)$ вида (2.1.1), (2.1.2) по заданной функции Вейля $M(\lambda)$. Для этих целей используется метод спектральных отображений, описанный в § 1.4 для операторов Штурма–Лиувилля на конечном интервале. Так как для случая полуоси рассуждения во многом аналогичны, то доказательства теорем в этом пункте не столь подробны, как в § 1.4.

Сначала докажем теорему единственности решения обратной задачи. Как и в гл. 1, условимся, что наряду с L здесь и в дальнейшем рассматривается пара $\widetilde{L} = L(\widetilde{q}(x), \widetilde{h})$ того же вида, но с другими коэффициентами. Если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к L, то $\widetilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\widetilde{L}$, а $\widehat{\gamma} := \gamma - \widetilde{\gamma}$.

Теорема 2.2.1. *Если $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$, то $L = \widetilde{L}$. Таким образом, задание функции Вейля однозначно определяет $q(x)$ и h.*

Доказательство. Определим матрицу $P(x,\lambda) = [P_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=1,2}$ по формуле

$$P(x,\lambda)\begin{bmatrix} \widetilde{\varphi}(x,\lambda) & \widetilde{\Phi}(x,\lambda) \\ \widetilde{\varphi}'(x,\lambda) & \widetilde{\Phi}'(x,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x,\lambda) & \Phi(x,\lambda) \\ \varphi'(x,\lambda) & \Phi'(x,\lambda) \end{bmatrix}.$$

В силу (2.1.71) это дает

$$\begin{aligned} P_{j1}(x,\lambda) &= \varphi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) - \Phi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda) \\ P_{j2}(x,\lambda) &= \Phi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda) - \varphi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}(x,\lambda) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x,\lambda) &= P_{11}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda) \\ \Phi(x,\lambda) &= P_{11}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Используя (2.2.1), (2.1.87), (2.1.88), получаем при $|\lambda| \to \infty, \quad \lambda = \rho^2$:

$$P_{jk}(x,\lambda) - \delta_{jk} = O(\rho^{-1}),\ j \leqslant k; \quad P_{21}(x,\lambda) = O(1). \tag{2.2.3}$$

Если $M(\lambda) \equiv \widetilde{M}(\lambda)$, то в силу (2.2.1) и (2.1.70) функции $P_{jk}(x,\lambda)$ являются целыми по λ при каждом фиксированном x. Вместе с (2.2.3) это дает $P_{11}(x,\lambda) \equiv 1$, $P_{12}(x,\lambda) \equiv 0$. Подставляя в (2.2.2), получаем $\varphi(x,\lambda) \equiv \widetilde{\varphi}(x,\lambda)$, $\Phi(x,\lambda) \equiv \widetilde{\Phi}(x,\lambda)$ при всех x и λ, и, следовательно, $L = \widetilde{L}$. $\square$

Перейдем теперь к построению решения обратной задачи. Будем говорить, что $L \in V_N$, если $q(x) \in W_N$. Обратную задачу будем решать в классах V_N.

Пусть пара $\widetilde{L} = L(\widetilde{q}(x), \widetilde{h})$ выбрана так, что

$$\int\limits_{\rho^*}^{\infty} \rho^4 |\widehat{V}(\lambda)|^2\, d\rho < \infty, \quad \widehat{V} := V - \widetilde{V} \tag{2.2.4}$$

при достаточно большом $\rho^* > 0$. Условие (2.2.4) носит технический характер и введено для упрощения выкладок. В принципе, модельную пару $\widetilde{L}$ можно брать любой (например, $\widetilde{q}(x) = \widetilde{h} = 0$), но при произвольном выборе $\widetilde{L}$ доказательства, вообще говоря, становятся более громоздкими. С другой стороны, (2.2.4) не является жестким ограничением, так как в силу (2.1.79)

$$\rho^2 \widehat{V}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \widehat{q}(t) \sin 2\rho t\, dt + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big).$$

В частности, если $q(x) \in L_2$, то (2.2.4) выполняется автоматически для любой функции $\widetilde{q}(x) \in L_2$. При $N \geqslant 1$ условие (2.2.4) также выполняется для любой модельной пары $\widetilde{L} \in V_N$.

Из (2.2.4) вытекает

$$\int\limits_{\lambda^*}^{\infty} |\widehat{V}(\lambda)|\, d\lambda = 2 \int\limits_{\rho^*}^{\infty} \rho |\widehat{V}(\lambda)|\, d\rho < \infty, \quad \lambda^* = (\rho^*)^2, \quad \lambda = \rho^2. \tag{2.2.5}$$

Обозначим

$$\begin{gathered} D(x,\lambda,\mu) = \frac{\langle \varphi(x,\lambda), \varphi(x,\mu) \rangle}{\lambda - \mu} = \int\limits_0^x \varphi(t,\lambda)\varphi(t,\mu)\, dt, \\ \widetilde{D}(x,\lambda,\mu) = \frac{\langle \widetilde{\varphi}(x,\lambda), \widetilde{\varphi}(x,\mu) \rangle}{\lambda - \mu} = \int\limits_0^x \widetilde{\varphi}(t,\lambda)\widetilde{\varphi}(t,\mu)\, dt, \end{gathered} \tag{2.2.6}$$

$$r(x,\lambda,\mu) = D(x,\lambda,\mu)\widehat{M}(\mu), \quad \widetilde{r}(x,\lambda,\mu) = \widetilde{D}(x,\lambda,\mu)\widehat{M}(\mu).$$

Лемма 2.2.1. *Имеют место оценки*

$$|D(x,\lambda,\mu)|,\ |\widetilde{D}(x,\lambda,\mu)| \leqslant \frac{C_x \exp(|\mathrm{Im}\,\rho|x)}{|\rho \mp \theta|+1},$$

$$\lambda=\rho^2,\ \mu=\theta^2 \geqslant 0,\ \pm\theta Re\,\rho \geqslant 0. \qquad (2.2.7)$$

Доказательство. Пусть $\rho=\sigma+i\tau$, и пусть для определенности $\theta \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Зафиксируем $\delta_0>0$. При $|\rho-\theta| \geqslant \delta_0$ в силу (2.2.6) и (2.1.87) имеем

$$|D(x,\lambda,\mu)| = \left|\frac{\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}\right| \leqslant C\exp(|\tau|x)\frac{|\rho|+|\theta|}{|\rho^2-\theta^2|}. \qquad (2.2.8)$$

Так как

$$\frac{|\rho|+|\theta|}{|\rho+\theta|} = \frac{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}+\theta}{\sqrt{(\sigma+\theta)^2+\tau^2}} \leqslant \frac{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}+\theta}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2+\theta^2}} \leqslant \sqrt{2}$$

(используется оценка $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ при вещественных a,b), то (2.2.8) дает

$$|D(x,\lambda,\mu)| \leqslant \frac{C\exp(|\tau|x)}{|\rho-\theta|}. \qquad (2.2.9)$$

При $|\rho-\theta| \geqslant \delta_0$ имеем

$$\frac{|\rho-\theta|+1}{|\rho-\theta|} \leqslant 1+\frac{1}{\delta_0},$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{|\rho-\theta|} \leqslant \frac{C_0}{|\rho-\theta|+1},$$

где $C_0=\dfrac{\delta_0+1}{\delta_0}$. Подставляя эту оценку в правую часть (2.2.9), получаем

$$|D(x,\lambda,\mu)| \leqslant \frac{C\exp(|\tau|x)}{|\rho-\theta|+1},$$

и (2.2.7) доказано при $|\rho-\theta| \geqslant \delta_0$.

При $|\rho-\theta| \leqslant \delta_0$ в силу (2.2.6) и (2.1.87) имеем

$$|D(x,\lambda,\mu)| \leqslant \int\limits_0^x |\varphi(t,\lambda)\varphi(t,\mu)|\,dt \leqslant C_x\exp(|\tau|x),$$

т. е. (2.2.7) верно также и при $|\rho-\theta| \leqslant \delta_0$. □

Лемма 2.2.2. *Справедливы соотношения*

$$\int\limits_1^\infty \frac{d\theta}{\theta(|R-\theta|+1)} = O\Big(\frac{\ln R}{R}\Big), \quad R\to\infty, \tag{2.2.10}$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{d\theta}{\theta^2(|R-\theta|+1)^2} = O\Big(\frac{1}{R^2}\Big), \quad R\to\infty. \tag{2.2.11}$$

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{\theta(R-\theta+1)} = \frac{1}{R+1}\Big(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{R-\theta+1}\Big),$$

$$\frac{1}{\theta(\theta-R+1)} = \frac{1}{R-1}\Big(\frac{1}{\theta-R+1}-\frac{1}{\theta}\Big),$$

то при $R>1$ вычисляем

$$\int\limits_1^\infty \frac{d\theta}{\theta(|R-\theta|+1)} = \int\limits_1^R \frac{d\theta}{\theta(R-\theta+1)} + \int\limits_R^\infty \frac{d\theta}{\theta(\theta-R+1)} =$$

$$= \frac{1}{R+1}\int\limits_1^R \Big(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{R-\theta+1}\Big)\,d\theta + \frac{1}{R-1}\int\limits_R^\infty \Big(\frac{1}{\theta-R+1}-\frac{1}{\theta}\Big)\,d\theta =$$

$$= \frac{2\ln R}{R+1} + \frac{\ln R}{R-1},$$

т. е. верно (2.2.10). Аналогично при $R>1$ имеем

$$\int\limits_1^\infty \frac{d\theta}{\theta^2(|R-\theta|+1)^2} = \int\limits_1^R \frac{d\theta}{\theta^2(R-\theta+1)^2} + \int\limits_R^\infty \frac{d\theta}{\theta^2(\theta-R+1)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(R+1)^2}\int\limits_1^R \Big(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{R-\theta+1}\Big)^2 d\theta + \frac{1}{R^2}\int\limits_R^\infty \frac{d\theta}{(\theta-R+1)^2} =$$

$$= \frac{2}{(R+1)^2}\Big(\int\limits_1^R \frac{d\theta}{\theta^2} + \int\limits_1^R \frac{d\theta}{\theta(R-\theta+1)}\Big) + \frac{1}{R^2}\int\limits_1^\infty \frac{d\theta}{\theta^2} = O\Big(\frac{1}{R^2}\Big),$$

т. е. верно (2.2.11). □

В λ-плоскости рассмотрим контур $\gamma=\gamma'\cup\gamma''$ (с обходом против часовой стрелки), где γ' — ограниченный замкнутый контур, охватывающий множество $\Lambda \cup \widetilde{\Lambda} \cup \{0\}$, а γ'' — двусторонний разрез вдоль луча $\{\lambda:\ \lambda > 0,\ \lambda \notin \operatorname{int}\gamma'\}$ (см. рис. 2.1.1).

Теорема 2.2.2. *Справедливы соотношения*

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu, \tag{2.2.12}$$

$$r(x,\lambda,\mu) - \widetilde{r}(x,\lambda,\mu) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \widetilde{r}(x,\lambda,\xi) r(x,\xi,\mu)\,d\xi = 0. \tag{2.2.13}$$

Уравнение (2.2.12) *называется основным уравнением обратной задачи.*

Доказательство. Из (2.1.73), (2.1.87), (2.2.6) и (2.2.7) вытекает, что при $\lambda,\mu\in\gamma$, $\pm\mathrm{Re}\,\rho \pm \mathrm{Re}\,\theta \geqslant 0$ имеют место оценки

$$|r(x,\lambda,\mu)|,\ |\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)| \leqslant \frac{C_x}{|\mu|(|\rho\mp\theta|+1)}, \qquad |\varphi(x,\lambda)| \leqslant C. \tag{2.2.14}$$

Из (2.2.14) с учетом (2.2.10) следует, что интегралы в (2.2.12) и (2.2.13) сходятся абсолютно и равномерно на γ при каждом $x \geqslant 0$.

Обозначим $J_\gamma = \{\lambda:\ \lambda \notin \gamma \cup \operatorname{int}\gamma'\}$. Рассмотрим контур $\gamma_R = \gamma \cap \cap \{\lambda:\ |\lambda| \leqslant R\}$ с обходом против часовой стрелки, а также рассмотрим контур $\gamma_R^0 = \gamma_R \cup \{\lambda:\ |\lambda| = R\}$ с обходом по часовой стрелке (см. рис. 2.1.2). Согласно интегральной формуле Коши [206, с. 166] имеем

$$P_{1k}(x,\lambda) - \delta_{1k} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R^0} \frac{P_{1k}(x,\mu)-\delta_{1k}}{\lambda-\mu}\,d\mu, \qquad \lambda \in \operatorname{int}\gamma_R^0,$$

$$\frac{P_{jk}(x,\lambda) - P_{jk}(x,\mu)}{\lambda-\mu} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R^0} \frac{P_{jk}(x,\xi)}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\,d\xi, \qquad \lambda,\mu \in \operatorname{int}\gamma_R^0.$$

Используя (2.2.3), получаем

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|\mu|=R} \frac{P_{1k}(x,\mu)-\delta_{1k}}{\lambda-\mu}\,d\mu = 0, \qquad \lim_{R\to\infty}\int\limits_{|\xi|=R} \frac{P_{jk}(x,\xi)}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\,d\xi = 0,$$

и, следовательно,

$$P_{1k}(x,\lambda) = \delta_{1k} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{P_{1k}(x,\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu, \qquad \lambda \in J_\gamma, \tag{2.2.15}$$

$$\frac{P_{jk}(x,\lambda) - P_{jk}(x,\mu)}{\lambda-\mu} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{P_{jk}(x,\xi)}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\,d\xi, \qquad \lambda,\mu \in J_\gamma. \tag{2.2.16}$$

Здесь (и везде в дальнейшем, где это необходимо) интеграл понимается в смысле главного значения: $\int_\gamma = \lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}$.

В силу (2.2.2) и (2.2.15)

$$\varphi(x,\lambda)=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\widetilde{\varphi}(x,\lambda)P_{11}(x,\mu)+\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)P_{12}(x,\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu,\qquad \lambda\in J_{\gamma}.$$

Учитывая (2.2.1), получаем

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda)=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\widetilde{\varphi}(x,\lambda)(\varphi(x,\mu)\widetilde{\Phi'}(x,\mu)-\Phi(x,\mu)\widetilde{\varphi}'(x,\mu))&+\\ +\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)(\Phi(x,\mu)\widetilde{\varphi}(x,\mu)-\varphi(x,\mu)\widetilde{\Phi}(x,\mu))\frac{d\mu}{\lambda-\mu}&.\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.1.70) вытекает (2.2.12), так как слагаемые с $S(x,\mu)$ пропадают в силу теоремы Коши.

Используя (2.2.16) и действуя так же, как и при доказательстве леммы 1.6.3, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}D(x,\lambda,\mu)-\widetilde{D}(x,\lambda,\mu)&=\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\Bigl(\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}(x,\xi)\rangle\langle\varphi(x,\xi),\varphi(x,\mu)\rangle}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}-\\ &\qquad-\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\xi)\rangle\langle\Phi(x,\xi),\varphi(x,\mu)\rangle}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\Bigr)\,d\xi.\end{aligned}$$

В силу (2.1.70) и (2.2.6) это дает (2.2.13). □

Аналогичным образом выводится соотношение

$$\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\Phi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}\widehat{M}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu,\qquad \lambda\in J_{\gamma}. \tag{2.2.17}$$

Рассмотрим банахово пространство $C(\gamma)$ непрерывных ограниченных функций $z(\lambda)$, $\lambda\in\gamma$ с нормой $\|z\|=\sup\limits_{\lambda\in\gamma}|z(\lambda)|$.

Теорема 2.2.3. *При каждом фиксированном* $x\geqslant 0$ *основное уравнение* (2.2.12) *имеет единственное решение* $\varphi(x,\lambda)\in C(\gamma)$.

Доказательство. При фиксированном $x\geqslant 0$ рассмотрим следующие линейные ограниченные операторы в $C(\gamma)$:

$$\widetilde{A}z(\lambda)=z(\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)z(\mu)\,d\mu,$$

$$Az(\lambda)=z(\lambda)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}r(x,\lambda,\mu)z(\mu)\,d\mu.$$

Тогда

$$\widetilde{A}Az(\lambda) = z(\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)z(\mu)\,d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} r(x,\lambda,\mu)z(\mu)\,d\mu -$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\xi)\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} r(x,\xi,\mu)z(\mu)\,d\mu\Big)\,d\xi =$$
$$= z(\lambda) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\Big(r(x,\lambda,\mu) - \widetilde{r}(x,\lambda,\mu) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\xi)r(x,\xi,\mu)\,d\xi\Big)z(\mu)\,d\mu.$$

В силу (2.2.13) это дает: $\widetilde{A}Az(\lambda) = z(\lambda)$, $z(\lambda) \in C(\gamma)$. Меняя местами L и $\widetilde{L}$, получаем аналогично: $A\widetilde{A}z(\lambda) = z(\lambda)$. Таким образом, $\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = E$, где E — единичный оператор. Следовательно, оператор $\widetilde{A}$ имеет ограниченный обратный, и основное уравнение (2.2.12) однозначно разрешимо при каждом $x \geqslant 0$. Теорема 2.2.3 доказана. ☐

Обозначим

$$\varepsilon_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{\varphi}(x,\mu)\varphi(x,\mu)\widehat{M}(\mu)\,d\mu,\ \varepsilon(x) = -2\varepsilon_0'(x). \tag{2.2.18}$$

Теорема 2.2.4. *Справедливы соотношения*

$$q(x) = \widetilde{q}(x) + \varepsilon(x), \tag{2.2.19}$$
$$h = \widetilde{h} - \varepsilon_0(0). \tag{2.2.20}$$

Доказательство. Дифференцируя (2.2.12) дважды по x и используя (2.2.6) и (2.2.18), получаем

$$\widetilde{\varphi}'(x,\lambda) - \varepsilon_0(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \varphi'(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\varphi'(x,\mu)\,d\mu, \tag{2.2.21}$$

$$\widetilde{\varphi}''(x,\lambda) = \varphi''(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\varphi''(x,\mu)\,d\mu +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}2\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\mu)\widehat{M}(\mu)\varphi'(x,\mu)\,d\mu +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\mu))'\widehat{M}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu. \tag{2.2.22}$$

Заменяем в (2.2.22) вторые производные из уравнения (2.1.1), а затем заменяем $\varphi(x,\lambda)$, используя (2.2.12). Это дает

$$\widetilde{q}(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = q(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\mu)\rangle\widehat{M}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}2\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\mu)\widehat{M}(\mu)\varphi'(x,\mu)\,d\mu + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\mu))'\widehat{M}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu.$$

После сокращения членов с $\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)$ приходим к (2.2.19). Положив $x = 0$ в (2.2.21), получаем (2.2.20). □

Таким образом, получен следующий алгоритм решения обратной задачи.

Алгоритм 2.2.1. *Пусть задана функция* $M(\lambda)$.

1) *Выбираем* $\widetilde{L} \in V_N$ *так, что верно* (2.2.4).
2) *Находим* $\varphi(x,\lambda)$ *из основного уравнения* (2.2.12).
3) *Строим* $q(x)$ *и* h *по формулам* (2.2.18)–(2.2.20).

Сформулируем теперь необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. Через $\mathbf{W}$ обозначим множество функций $M(\lambda)$ таких, что

(i) $M(\lambda)$ аналитична в Π, за исключением не более чем счетного ограниченного множества полюсов Λ', и непрерывна в Π_1, за исключением ограниченного множества Λ (Λ и Λ' свои для каждой функции $M(\lambda)$);
(ii) при $|\lambda| \to \infty$ имеет место (2.1.73).

Теорема 2.2.5. *Для того чтобы функция* $M(\lambda) \in \mathbf{W}$ *была функцией Вейля для некоторой пары* $L \in V_N$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) (*асимптотика*) *существует* $\widetilde{L} \in V_N$ *такое, что выполняется* (2.2.4);
2) (*условие P*) *при каждом фиксированном* $x \geqslant 0$ *уравнение* (2.2.12) *имеет единственное решение* $\varphi(x,\lambda) \in C(\gamma)$;
3) $\varepsilon(x) \in W_N$, *где функция* $\varepsilon(x)$ *определяется формулой* (2.2.18).

При этих условиях $q(x)$ *и* h *строятся по формулам* (2.2.19), (2.2.20).

Как показано в примере 2.2.1, условия (2) и (3) являются существенными и не могут быть опущены. С другой стороны, в п. 2.2.2 приведены классы операторов, для которых однозначная разрешимость основного уравнения может быть доказана.

Необходимость теоремы 2.2.5 доказана выше. Докажем теперь достаточность. Пусть дана функция $M(\lambda) \in \mathbf{W}$, удовлетворяющая условиям теоремы 2.2.5, и пусть $\varphi(x,\lambda)$ — решение основного уравнения (2.2.12). Тогда (2.2.12) дает аналитическое продолжение для $\varphi(x,\lambda)$

во всю λ-плоскость, причем при каждом $x \geqslant 0$ функция $\varphi(x,\lambda)$ является целой по λ порядка 1/2. Используя лемму 1.3.1, можно показать, что функции $\varphi^{(\nu)}(x,\lambda)$, $\nu = 0, 1$, абсолютно непрерывны по x на компактах, причем

$$|\varphi^{(\nu)}(x,\lambda)| \leqslant C|\rho|^{\nu} \exp(|\tau|x). \tag{2.2.23}$$

Построим функцию $\Phi(x,\lambda)$ из соотношения (2.2.17), а также $L = L(q(x), h)$ по формулам (2.2.19)–(2.2.20). Ясно, что $L \in V_N$.

Лемма 2.2.3. *Справедливы соотношения*

$$\ell\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda), \quad \ell\Phi(x,\lambda) = \lambda\Phi(x,\lambda).$$

Доказательство. Пусть для простоты $\int_{\lambda^*}^{\infty} \rho|\widehat{V}(\lambda)|\,d\lambda < \infty$ (общий случай требует небольших изменений). Тогда (2.2.23) верно при $\nu = 0, 1, 2$. Дифференцируя (2.2.12) дважды по x, получаем (2.2.21) и (2.2.22). Из (2.2.22) и (2.2.12) вытекает

$$-\widetilde{\varphi}''(x,\lambda) + q(x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \ell\varphi(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda), \widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle\widehat{M}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu - \\ - 2\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} (\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\mu))'\widehat{M}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu.$$

Учитывая (2.2.19), вычисляем

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \ell\varphi(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda), \widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle\widehat{M}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu. \tag{2.2.24}$$

Используя (2.2.17), выводим аналогично

$$\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) - \varepsilon_0(x)\widetilde{\Phi}(x,\lambda) = \Phi'(x,\lambda) + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda), \widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda - \mu}\widehat{M}(\mu)\varphi'(x,\mu)\,d\mu, \tag{2.2.25}$$

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\ell\Phi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}\widehat{M}(\mu)\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle\widehat{M}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu.\quad(2.2.26)$$

Из (2.2.24) следует, что

$$\lambda\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\ell\varphi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\lambda-\mu)\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu.$$

Учитывая (2.2.12), находим, что при фиксированном $x\geqslant 0$

$$\eta(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\eta(x,\mu)\,d\mu=0,\quad \lambda\in\gamma,\quad(2.2.27)$$

где $\eta(x,\lambda):=\ell\varphi(x,\lambda)-\lambda\varphi(x,\lambda)$. Согласно (2.2.23) имеем

$$|\eta(x,\lambda)|\leqslant C_x|\rho|^2,\quad \lambda\in\gamma.\quad(2.2.28)$$

В силу (2.2.27), (2.2.6) и (2.2.7)

$$|\eta(x,\lambda)|\leqslant C_x\Big(1+\int\limits_{\lambda^*}^{\infty}\frac{|\widehat{V}(\mu)|}{|\rho-\theta|+1}|\eta(x,\mu)|\,d\mu\Big),$$
$$\lambda\in\gamma,\ \theta>0,\ \mathrm{Re}\,\rho\geqslant 0.\quad(2.2.29)$$

Подставляя (2.2.28) в правую часть (2.2.29), получаем

$$|\eta(x,\lambda)|\leqslant C_x\Big(1+\int\limits_{\lambda^*}^{\infty}\frac{\theta^2|\widehat{V}(\mu)|}{|\rho-\theta|+1}\,d\mu\Big),\quad \lambda\in\gamma,\ \theta>0,\ \mathrm{Re}\,\rho\geqslant 0.$$

Так как

$$\frac{\theta}{\rho(|\rho-\theta|+1)}\leqslant 1\ \text{ при }\ \theta,\rho\geqslant 1,$$

то это дает

$$|\eta(x,\lambda)|\leqslant C_x|\rho|,\quad \lambda\in\gamma.\quad(2.2.30)$$

Используя (2.2.30) вместо (2.2.28) и повторяя предыдущие аргументы, приходим к оценке $|\eta(x,\lambda)|\leqslant C_x$ для $\lambda\in\gamma$. В силу условия P теоремы

2.2.5 однородное уравнение (2.2.27) имеет только нулевое решение $\eta(x,\lambda)\equiv 0$. Следовательно,

$$\ell\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda). \tag{2.2.31}$$

Далее, из (2.2.26) и (2.2.31) вытекает

$$\lambda\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\ell\Phi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}\widehat{M}(\mu)\mu\varphi(x,\mu)\,d\mu+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\lambda-\mu)\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}\widehat{M}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu.$$

Вместе с (2.2.17) это дает $\ell\Phi(x,\lambda)=\lambda\Phi(x,\lambda)$. □

Лемма 2.2.4. *Справедливы соотношения*

$$\varphi(0,\lambda)=1,\ \varphi'(0,\lambda)=h. \tag{2.2.32}$$
$$U(\Phi)=1,\quad \Phi(0,\lambda)=M(\lambda), \tag{2.2.33}$$
$$\Phi(x,\lambda)=O(\exp(i\rho x)),\ x\to\infty. \tag{2.2.34}$$

Доказательство. Полагая $x=0$ в (2.2.12), (2.2.21) и используя (2.2.20), получаем

$$\varphi(0,\lambda)=\widetilde{\varphi}(0,\lambda)=1,$$
$$\varphi'(0,\lambda)=\widetilde{\varphi}'(0,\lambda)-\varepsilon_0(0)\widetilde{\varphi}(0,\lambda)=\widetilde{h}+h-\widetilde{h}=h,$$

т. е. верно (2.2.32). Используя (2.2.17) и (2.2.25), вычисляем

$$\Phi(0,\lambda)=\widetilde{\Phi}(0,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\widehat{M}(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu, \tag{2.2.35}$$

$$\Phi'(0,\lambda)=\widetilde{\Phi}'(0,\lambda)-\widetilde{\Phi}(0,\lambda)\varepsilon_0(0)+\frac{h}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\widehat{M}(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu.$$

Следовательно,

$$U(\Phi)=\Phi'(0,\lambda)-h\Phi(0,\lambda)=\widetilde{\Phi}'(0,\lambda)-(\varepsilon_0(0)+h)\widetilde{\Phi}(0,\lambda)=$$
$$=\widetilde{\Phi}'(0,\lambda)-\widetilde{h}\widetilde{\Phi}(0,\lambda)=\widetilde{U}(\widetilde{\Phi})=1.$$

Далее, так как $\langle y,z\rangle=yz'-y'z$, то (2.2.17) принимает вид

$$\Phi(x,\lambda)=\widetilde{\Phi}(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\widetilde{\Phi}'(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\mu)-\widetilde{\Phi}(x,\lambda)\widetilde{\varphi}'(x,\mu)}{\lambda-\mu}\times$$
$$\times\widehat{M}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu, \tag{2.2.36}$$

где $\lambda \in J_\gamma$. Функция $\varphi(x,\lambda)$ является решением задачи Коши (2.2.31), (2.2.32). Поэтому, согласно (2.1.87),

$$|\varphi^{(\nu)}(x,\mu)| \leqslant C|\theta|^\nu, \quad \mu=\theta^2\in\gamma, \quad x \geqslant 0, \quad \nu=0,1. \tag{2.2.37}$$

Кроме того, оценки (2.1.87)–(2.1.88) имеют место для функций $\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ и $\widetilde{\Phi}(x,\lambda)$, т. е.

$$|\widetilde{\varphi}^{(\nu)}(x,\mu)| \leqslant C|\theta|^\nu, \quad \mu=\theta^2\in\gamma, \quad x \geqslant 0, \quad \nu=0,1, \tag{2.2.38}$$

$$|\widetilde{\Phi}^{(\nu)}(x,\lambda)| \leqslant C|\rho|^{\nu-1}\exp(-|\operatorname{Im}\rho|x), \quad x\geqslant 0, \quad \rho\in\Omega. \tag{2.2.39}$$

В силу (2.1.73)

$$\widehat{M}(\lambda)=O(\lambda^{-1}), \quad |\rho|\to\infty, \quad \rho\in\Omega. \tag{2.2.40}$$

Зафиксируем $\lambda \in J_\gamma$. Из (2.2.36) с учетом (2.2.37)–(2.2.40) выводим

$$|\Phi(x,\lambda)\exp(-i\rho x)| \leqslant C\Big(1+\int\limits_{\rho^*}^{\infty}\frac{d\theta}{\theta|\lambda-\mu|}\Big) \leqslant C_1,$$

т. е. верно (2.2.34). Далее, из (2.2.35) вытекает

$$\Phi(0,\lambda)=\widetilde{M}(\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\widehat{M}(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu.$$

Согласно интегральной формуле Коши имеем

$$\widehat{M}(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R^0}\frac{\widehat{M}(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu, \quad \lambda\in\operatorname{int}\gamma_R^0.$$

Так как

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=R}\frac{\widehat{M}(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu=0,$$

то

$$\widehat{M}(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\widehat{M}(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu, \quad \lambda\in J_\gamma.$$

Следовательно, $\Phi(0,\lambda)=\widetilde{M}(\lambda)+\widehat{M}(\lambda)=M(\lambda)$, т. е. верно (2.2.33). □

Таким образом, $\Phi(x,\lambda)$ является решением Вейля, а $M(\lambda)$ — функцией Вейля для построенной пары $L(q(x),h)$, и теорема 2.2.5 доказана. □

Метод Гельфанда–Левитана. Для операторов Штурма–Лиувилля на конечном интервале метод Гельфанда–Левитана рассматривался в § 1.3. Для случая полуоси имеют место аналогичные результаты. Поэтому здесь мы ограничимся только выводом уравнения Гельфанда–Левитана и установлением связи с основным уравнением, полученным методом спектральных отображений. Более подробно метод Гельфанда–Левитана для оператора Штурма–Лиувилля на полуоси изложен в [173, 164 и 166].

Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейную форму $L = L(q(x), h)$ вида (2.2.1)–(2.2.2). Пусть $\widetilde{q}(x) = 0$, $\widetilde{h} = 0$. Обозначим

$$F(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \cos\rho x \cos\rho t \widehat{M}(\lambda)\, d\lambda, \tag{2.2.41}$$

где γ — контур, введенный в § 2.1 (см. рис. 2.1.1). Отметим, что в силу (2.1.77) и (2.2.5)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma''} \cos\rho x \cos\rho t \widehat{M}(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\lambda^*}^{\infty} \cos\rho x \cos\rho t \widehat{V}(\lambda)\, d\lambda < \infty.$$

Пусть $G(x,t)$ и $H(x,t)$ — ядра операторов преобразования (1.1.54) и (1.3.12) соответственно.

Теорема 2.2.6. *При каждом фиксированном x функция $G(x,t)$ удовлетворяет следующему линейному интегральному уравнению*:

$$G(x,t) + F(x,t) + \int\limits_0^x G(x,s)F(s,t)ds = 0, \quad 0 < t < x. \tag{2.2.42}$$

Уравнение (2.2.42) *называется уравнением Гельфанда–Левитана.*

Доказательство. Используя (1.1.54) и (1.3.12), вычисляем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \varphi(x,\lambda) \cos\rho t M(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \cos\rho x \cos\rho t M(\lambda)\, d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \left(\int\limits_0^x G(x,s)\cos\rho s\, ds\right) \cos\rho t M(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \varphi(x,\lambda) \cos\rho t M(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \varphi(x,\lambda)\varphi(t,\lambda) M(\lambda)\, d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \left(\int\limits_0^t H(t,s)\varphi(s,\lambda)\, ds\right) \varphi(x,\lambda) M(\lambda)\, d\lambda,$$

где $\gamma_R = \gamma \cap \{\lambda : \ |\lambda| \leqslant R\}$. Это дает

$$\Phi_R(x,t) = I_{R1}(x,t) + I_{R2}(x,t) + I_{R3}(x,t) + I_{R4}(x,t),$$

где

$$\Phi_R(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \varphi(x,\lambda)\varphi(t,\lambda)M(\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \cos\rho x\cos\rho t\widetilde{M}(\lambda)\,d\lambda,$$

$$I_{R1}(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \cos\rho x\cos\rho t\widehat{M}(\lambda)d\lambda,$$

$$I_{R2}(x,t) = \int\limits_0^x G(x,s)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \cos\rho t\cos\rho s\widehat{M}(\lambda)d\lambda\right)ds,$$

$$I_{R3}(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \cos\rho t\left(\int\limits_0^x G(x,s)\cos\rho s\,ds\right)\widetilde{M}(\lambda)d\lambda,$$

$$I_{R4}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \varphi(x,\lambda)\left(\int\limits_0^t H(t,s)\varphi(s,\lambda)\,ds\right)M(\lambda)\,d\lambda.$$

Пусть $\xi(t)$, $t\geqslant 0$, — дважды непрерывно дифференцируемая финитная функция. По теореме 2.1.8

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^\infty \xi(t)\Phi_R(x,t)dt = 0, \qquad \lim_{R\to\infty}\int\limits_0^\infty \xi(t)I_{R1}(x,t)dt = \int\limits_0^\infty \xi(t)F(x,t)dt,$$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^\infty \xi(t)I_{R2}(x,t)dt = \int\limits_0^\infty \xi(t)\left(\int\limits_0^x G(x,s)F(s,t)ds\right)dt,$$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^\infty \xi(t)I_{R3}(x,t)dt = \int\limits_0^x \xi(t)G(x,t)dt,$$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^\infty \xi(t)I_{R4}(x,t)dt = -\int\limits_x^\infty \xi(t)H(t,x)dt.$$

Положим $G(x,t)=H(x,t)=0$ при $x<t$. В силу произвольности $\xi(t)$ приходим к соотношению

$$G(x,t)+F(x,t)+\int\limits_0^x G(x,s)F(s,t)ds - H(t,x) = 0.$$

При $t<x$ это дает (2.2.42). □

Таким образом, для того чтобы решить обратную задачу восстановления L *по функции Вейля* $M(\lambda)$, *надо вычислить* $F(x,t)$ *по формуле* (2.2.41), *найти* $G(x,t)$ *из уравнения Гельфанда–Левитана* (2.2.42) *и построить* $q(x)$ *и* h *по формулам* (1.3.13).

Замечание 2.2.1. Установим связь между уравнением Гельфанда–Левитана и основным уравнением (2.2.12). Для этого воспользуемся косинус-преобразованием Фурье. Пусть $\widetilde{q}(x) = \widetilde{h} = 0$. Тогда $\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\,x$. Умножая (2.2.42) на $\cos\sqrt{\lambda}\,t$ и интегрируя по t, получаем

$$\int\limits_0^x G(x,t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt + \int\limits_0^x \cos\sqrt{\lambda}\,t\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \cos\sqrt{\mu}\,x\cos\sqrt{\mu}\,t\widehat{M}(\mu)\,d\mu\right)dt +$$
$$+\int\limits_0^x \cos\sqrt{\lambda}\,t\int\limits_0^x G(x,s)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \cos\sqrt{\mu}\,t\cos\sqrt{\mu}\,s\widehat{M}(\mu)\,d\mu\right)ds = 0.$$

Используя (1.1.54), приходим к (2.2.12).

Замечание 2.2.2. Если $q(x)$ и h вещественны и $(1+x)q(x) \in L(0,\infty)$, то (2.2.41) принимает вид $F(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\rho x\cos\rho t\,d\widehat{\sigma}(\lambda)$, где $\widehat{\sigma} = \sigma - \widetilde{\sigma}$, а σ и $\widetilde{\sigma}$ — спектральные функции L и $\widetilde{L}$ соответственно.

2.2.2. Восстановление оператора по спектральным данным. В теореме 2.2.5 одним из условий, при которых произвольная функция $M(\lambda)$ будет функцией Вейля для некоторой пары $L = L(q(x),h)$ вида (2.1.1), (2.1.2), является разрешимость основного уравнения. В общем случае это условие труднопроверяемо. В связи с этим важной задачей является описание классов операторов, для которых разрешимость основного уравнения может быть доказана. Одним из таких классов является класс самосопряженных операторов. В этом параграфе для самосопряженных операторов Штурма–Лиувилля вводятся так называемые спектральные данные, которые описывают множество особенностей функции Вейля $M(\lambda)$, т. е. дискретную и непрерывную части спектра. Исследуется обратная задача восстановления L по спектральным данным. Доказано, что задание спектральных данных однозначно определяет функцию Вейля. Таким образом, обратная задача восстановления L по функции Вейля равносильна обратной задаче восстановления L по спектральным данным. Основное уравнение, полученное в п. 2.2.1, может быть построено непосредственно по спектральным данным на множестве$\{\lambda:\ \lambda \geqslant 0\} \cup \Lambda$. Доказывается однозначная разрешимость основного уравнения в соответствующем банаховом пространстве. В заключение обратная задача по спектральным данным рассматривается также и в несамосопряженном случае.

Самосопряженный случай. Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейную форму $L = L(q(x),h)$ вида (2.1.1)–(2.1.2) и предположим, что $q(x)$ и h вещественны. Это означает, что оператор L^o, введенный в замечании 2.1.3, является самосопряженным. В самосопряженном случае можно получить дополнительные свойства спектра к тем, что были установлены в § 2.1.

Теорема 2.2.7. *Пусть $q(x)$ и h вещественны. Тогда $\Lambda'' = \varnothing$, т. е. спектральные особенности отсутствуют.*

Доказательство. Так как $q(x)$ и h вещественны, то из теоремы 2.1.1 и (2.1.63) следует, что при вещественном ρ

$$\overline{e(x,\rho)} = e(x,-\rho), \qquad \overline{\Delta(\rho)} = \Delta(-\rho). \tag{2.2.43}$$

Предположим, что $\Lambda'' \neq \varnothing$, т. е. при некотором вещественном $\rho^0 \neq 0$, $\Delta(\rho^0) = 0$. Тогда, согласно (2.2.43), $\Delta(-\rho^0) = \overline{\Delta(\rho^0)} = 0$. Вместе с (2.1.6) это дает

$$-2i\rho^0 = \langle e(x,\rho^0), e(x,-\rho^0)\rangle_{|x=0} = e(0,\rho^0)\Delta(-\rho^0) - e(0,-\rho^0)\Delta(\rho^0) = 0,$$

что невозможно. □

Теорема 2.2.8. *Пусть $q(x)$ и h вещественны. Тогда ненулевые собственные значения λ_k являются вещественными отрицательными и*

$$\Delta(\rho_k) = 0 \quad (\text{ где } \lambda_k = \rho_k^2 \in \Lambda'). \tag{2.2.44}$$

Собственные функции $e(x,\rho_k)$ и $\varphi(x,\lambda_k)$ вещественны, причем

$$e(x,\rho_k) = e(0,\rho_k)\varphi(x,\lambda_k), \quad e(0,\rho_k) \neq 0. \tag{2.2.45}$$

Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в $L_2(0,\infty)$.

Доказательство. Из (2.1.66) и (2.1.71) вытекает

$$\langle \varphi(x,\lambda), e(x,\rho)\rangle = \Delta(\rho). \tag{2.2.46}$$

В силу теоремы 2.1.7 верно (2.2.44); поэтому (2.2.46) дает

$$e(x,\rho_k) = c_k\varphi(x,\lambda_k), \quad c_k \neq 0.$$

Полагая здесь $x = 0$, получаем: $c_k = e(0,\rho_k)$, т. е. верно (2.2.45).

Пусть λ_n и λ_k ($\lambda_n \neq \lambda_k$) — собственные значения с собственными функциями $y_n(x) = e(x,\rho_n)$ и $y_k(x) = e(x,\rho_k)$ соответственно. Интегрирование по частям приводит к соотношению

$$\int\limits_0^\infty \ell y_n(x)\, y_k(x)\, dx = \int\limits_0^\infty y_n(x)\ell y_k(x)\, dx,$$

и, следовательно, $\lambda_n \int_0^\infty y_n(x)y_k(x)\, dx = \lambda_k \int_0^\infty y_n(x)y_k(x)\, dx$, т. е.

$$\int\limits_0^\infty y_n(x)y_k(x)\, dx = 0.$$

Предположим теперь, что $\lambda^0 = u + iv, v \neq 0,$ — невещественное собственное значение с собственной функцией $y^0(x) \not\equiv 0$. Так как $q(x)$ и h вещественны, то число $\overline{\lambda^0} = u - iv$ также является собственным значением с собственной функцией $\overline{y^0(x)}$. Так как $\lambda^0 \neq \overline{\lambda^0}$, то получаем, как и выше:

$$\|y^0\|^2_{L_2} = \int\limits_0^\infty y^0(x)\overline{y^0(x)}\,dx = 0,$$

что невозможно. Таким образом, все собственные значения λ_k для L являются вещественными, и, следовательно, собственные функции $\varphi(x,\lambda_k)$ и $e(x,\rho_k)$ также вещественны. Вместе с теоремой 2.1.6 это дает $\Lambda' \subset (-\infty, 0)$. □

Теорема 2.2.9. *Пусть $q(x)$ и h вещественны, $\Lambda' = \{\lambda_k\}$, $\lambda_k = \rho_k^2 < 0$. Обозначим $\Delta_1(\rho) := \dfrac{d}{d\lambda}\Delta(\rho)$ $(\lambda = \rho^2)$. Тогда*

$$\Delta_1(\rho_k) \neq 0. \tag{2.2.47}$$

Доказательство. Так как $e(x,\rho)$ удовлетворяет уравнению (2.1.1), то

$$\frac{d}{dx}\langle e(x,\rho), e(x,\rho_k)\rangle = (\rho^2 - \rho_k^2)e(x,\rho)e(x,\rho_k).$$

Используя (2.1.4), (2.1.63) и (2.2.44), вычисляем

$$(\rho^2 - \rho_k^2)\int\limits_0^\infty e(x,\rho)e(x,\rho_k)\,dx = \langle e(x,\rho), e(x,\rho_k)\rangle\Big|_0^\infty =$$

$$= e(0,\rho_k)\Delta(\rho), \quad \operatorname{Im}\rho > 0.$$

При $\rho \to \rho_k$ это дает

$$\int\limits_0^\infty e^2(x,\rho_k)dx = \frac{1}{2\rho_k}e(0,\rho_k)\left(\frac{d}{d\rho}\Delta(\rho)\right)_{|\rho=\rho_k} = e(0,\rho_k)\Delta_1(\rho_k). \tag{2.2.48}$$

Так как $\int_0^\infty e^2(x,\rho_k)dx > 0$, то приходим к (2.2.47). □

Пусть $\Lambda' = \{\lambda_k\}$, $\lambda_k = \rho_k^2 < 0$. Из (2.1.69), (2.2.44) и (2.2.45) следует, что функция Вейля $M(\lambda)$ имеет простые полюсы в точках $\lambda = \lambda_k$, причем

$$\alpha_k := \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_k} M(\lambda) = \frac{e(0,\rho_k)}{\Delta_1(\rho_k)}. \tag{2.2.49}$$

Учитывая (2.2.45) и (2.2.46), выводим

$$\alpha_k = \Big(\int\limits_0^\infty \varphi^2(x,\lambda_k)\,dx\Big)^{-1} > 0.$$

Далее, функция $V(\lambda)$, определенная в (2.1.77), является непрерывной при $\lambda = \rho^2 > 0$, и в силу (2.1.69)

$$V(\lambda) := \frac{1}{2\pi i}\left(M^-(\lambda) - M^+(\lambda)\right) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{e(0,-\rho)}{\Delta(-\rho)} - \frac{e(0,\rho)}{\Delta(\rho)}\right).$$

Используя (2.2.43) и (2.1.6), вычисляем

$$V(\lambda) = \frac{\rho}{\pi|\Delta(\rho)|^2} > 0, \quad \lambda = \rho^2 > 0. \tag{2.2.50}$$

Через W'_N обозначим множество функций $q(x) \in W_N$ таких, что

$$\int_0^\infty (1+x)|q(x)|\,dx < \infty, \tag{2.2.51}$$

Будем говорить, что $L \in V'_N$, если $q(x)$ и h вещественны и $q(x) \in W'_N$.

Теорема 2.2.10. *Пусть $L \in V'_N$. Тогда Λ' — конечное множество.*

Доказательство. При $x \geqslant 0$, $\tau \geqslant 0$ функция $e(x, i\tau)$ является вещественной и в силу (2.1.24)

$$|e(x,i\tau)\exp(\tau x) - 1| \leqslant Q_1(x)\exp(Q_1(x)), \quad x \geqslant 0,\ \tau \geqslant 0, \tag{2.2.52}$$

где

$$Q_1(x) = \int_x^\infty (t-x)|q(t)|\,dt.$$

В частности, из (2.2.52) следует, что существует $a > 0$ такое, что

$$e(x,i\tau)\exp(\tau x) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad x \geqslant a, \quad \tau \geqslant 0. \tag{2.2.53}$$

Предположим, что $\Lambda' = \{\lambda_k\}$ — бесконечное множество. Так как Λ' ограничено и $\lambda_k = \rho_k^2 < 0$, то $\rho_k = i\tau_k \to 0$, $\tau_k > 0$. Используя (2.2.53), вычисляем

$$\int_a^\infty e(x,\rho_k)e(x,\rho_n)\,dx \geqslant \frac{1}{4}\int_a^\infty \exp(-(\tau_k+\tau_n)x)\,dx = \\ = \frac{\exp(-(\tau_k+\tau_n)a)}{4(\tau_k+\tau_n)} \geqslant \frac{\exp(-2aT)}{8T}, \tag{2.2.54}$$

где $T = \max\limits_k \tau_k$. Так как собственные функции $e(x,\rho_k)$ и $e(x,\rho_n)$ ортогональны в $L_2(0,\infty)$, то

$$0 = \int_0^\infty e(x,\rho_k)e(x,\rho_n)\,dx = \int_a^\infty e(x,\rho_k)e(x,\rho_n)\,dx + \\ + \int_0^a e^2(x,\rho_k)\,dx + \int_0^a e(x,\rho_k)(e(x,\rho_n) - e(x,\rho_k))\,dx. \tag{2.2.55}$$

С учетом (2.2.54) получаем

$$\int_a^\infty e(x,\rho_k)e(x,\rho_n)\,dx \geqslant C_0 > 0, \quad \int_0^a e^2(x,\rho_k)\,dx \geqslant 0. \tag{2.2.56}$$

Покажем, что

$$\int_0^a e(x,\rho_k)(e(x,\rho_n)-e(x,\rho_k))\,dx \to 0 \ \text{ при } \ k,n\to\infty. \tag{2.2.57}$$

В самом деле, согласно (2.1.23) $|e(x,\rho_k)| \leqslant \exp(Q_1(0))$ при $x \geqslant 0$. Тогда, используя (2.1.33), вычисляем

$$\Big|\int_0^a e(x,\rho_k)(e(x,\rho_n)-e(x,\rho_k))\,dx\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \exp(Q_1(0))\Big(\int_0^a |\exp(-\tau_n x)-\exp(-\tau_k x)|\,dx +$$
$$+\int_0^a\Big(\int_x^\infty |A(x,t)(\exp(-\tau_n x)-\exp(-\tau_k x))|\,dt\Big)\,dx\Big). \tag{2.2.58}$$

В силу (2.1.35)

$$|A(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}Q_0\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\exp(Q_1(x)) \leqslant \frac{1}{2}Q_0\Big(\frac{t}{2}\Big)\exp(Q_1(0)), \quad 0\leqslant x\leqslant t,$$

и, следовательно, (2.2.58) дает

$$\Big|\int_0^a e(x,\rho_k)(e(x,\rho_n)-e(x,\rho_k))\,dx\Big| \leqslant$$
$$\leqslant C\Big(\int_0^a |\exp(-\tau_n x)-\exp(-\tau_k x)|\,dx +$$
$$+\int_0^\infty Q_0\Big(\frac{t}{2}\Big)|\exp(-\tau_n t)-\exp(-\tau_k t)|\,dt\Big). \tag{2.2.59}$$

Ясно, что

$$\int_0^a |\exp(-\tau_n x)-\exp(-\tau_k x)|\,dx \to 0 \ \text{ при } \ k,n\to\infty. \tag{2.2.60}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существует $a_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\int\limits_{a_\varepsilon}^{\infty} Q_0\Big(\frac{t}{2}\Big)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, для достаточно больших k и n имеем

$$\int\limits_0^{a_\varepsilon} Q_0\Big(\frac{t}{2}\Big)|\exp(-\tau_n t) - \exp(-\tau_k t)|\,dt \leqslant \\ \leqslant Q_0(0)\int\limits_0^{a_\varepsilon} |\exp(-\tau_n t) - \exp(-\tau_k t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для достаточно больших k и n

$$\int\limits_0^{\infty} Q_0\Big(\frac{t}{2}\Big)|\exp(-\tau_n t) - \exp(-\tau_k t)|\,dt < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε выводим

$$\int\limits_0^{\infty} Q_0\Big(\frac{t}{2}\Big)|\exp(-\tau_n t) - \exp(-\tau_k t)|\,dt \to 0 \ \text{ при } \ k,n \to \infty.$$

Отсюда и из (2.2.59)–(2.2.60) получаем (2.2.57). Соотношения (2.2.55)–(2.2.57) приводят к противоречию. Это означает, что Λ' — конечное множество. ☐

Теорема 2.2.11. *Пусть $L \in V'_N$. Тогда*

$$\rho(\Delta(\rho))^{-1} = O(1), \quad \rho \to 0, \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0. \tag{2.2.61}$$

Доказательство. Обозначим $g(\rho) = 2i\rho(\Delta(\rho))^{-1}$. В силу (2.1.6) и (2.1.63)

$$\Delta(\rho)e(0,-\rho) - e(0,\rho)\Delta(-\rho) = 2i\rho.$$

Поэтому при вещественных $\rho \neq 0$,

$$g(\rho) = e(0,-\rho) - \xi(\rho)e(0,\rho), \tag{2.2.62}$$

где $\xi(\rho) := \Delta(-\rho)(\Delta(\rho))^{-1}$. Из (2.2.43) вытекает

$$|\xi(\rho)| = 1 \ \text{ при вещественных } \ \rho \neq 0. \tag{2.2.63}$$

Пусть $\Lambda' = \{\lambda_k\}_{k=\overline{1,m}}$, $\lambda_k = \rho_k^2$, $\rho_k = i\tau_k$, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m$. Обозначим

$$D = \{\rho:\ \operatorname{Im}\rho > 0,\ |\rho| < \tau^*\}, \tag{2.2.64}$$

где $\tau^* = \tau_1/2$. Функция $g(\rho)$ является аналитической в D и непрерывной в $\overline{D} \setminus \{0\}$. В силу (2.2.62), (2.2.63) и (2.1.23)

$$|g(\rho)| \leqslant C \quad \text{при вещественных} \quad \rho \neq 0. \tag{2.2.65}$$

Предположим сначала, что $\Delta(\rho)$ аналитична в начале координат. Тогда, используя (2.2.65), получаем, что функция $g(\rho)$ имеет устранимую особенность в начале координат, и, следовательно (после продолжения $g(\rho)$ по непрерывности в начало координат), $g(\rho)$ непрерывна в $\overline{D}$, т. е. (2.2.61) доказано.

В общем случае мы не можем использовать эти рассуждения. Поэтому введем потенциалы $q_r(x)$ по формуле (2.1.49) и соответствующие решения Йоста по формуле (2.1.50). Обозначим $\Delta_r(\rho) = e'_r(0,\rho) - he_r(0,\rho)$, $r \geqslant 0$. В силу (2.1.53) функции $\Delta_r(\rho)$ являются целыми по ρ и согласно лемме 2.1.3

$$\lim_{r\to\infty} \Delta_r(\rho) = \Delta(\rho) \tag{2.2.66}$$

равномерно по $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$. Пусть δ_r — нижняя грань расстояний между нулями $\Delta_r(\rho)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$. Покажем, что

$$\delta^* := \inf_{r>0} \delta_r > 0. \tag{2.2.67}$$

В самом деле, предположим противное, т. е. что существует последовательность $r_k \to \infty$ такая, что $\delta_{r_k} \to 0$. Пусть $\rho_{k1} = i\tau_{k1}$, $\rho_{k2} = i\tau_{k2}$ $(\tau_{k1}, \tau_{k2} \geqslant 0)$ — нули функции $\Delta_{r_k}(\rho)$ такие, что $\rho_{k1} - \rho_{k2} \to 0$ при $k \to \infty$. Из (2.1.51) следует, что существует $a > 0$ такое, что

$$e_r(x, i\tau)\exp(\tau x) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad x \geqslant a, \quad \tau \geqslant 0, \quad r \geqslant 0. \tag{2.2.68}$$

Аналогично (2.2.55) выводим

$$0 = \int_0^\infty e_{r_k}(x,\rho_{k1})e_{r_k}(x,\rho_{k2})\,dx = \int_a^\infty e_{r_k}(x,\rho_{k1})e_{r_k}(x,\rho_{k2})\,dx +$$
$$+ \int_0^a e^2_{r_k}(x,\rho_{k1})\,dx + \int_0^a e_{r_k}(x,\rho_{k1})(e_{r_k}(x,\rho_{k2}) - e_{r_k}(x,\rho_{k1}))\,dx.$$

Как и выше, с учетом (2.2.68) получаем

$$\int_a^\infty e_{r_k}(x,\rho_{k1})e_{r_k}(x,\rho_{k2})\,dx \geqslant \frac{\exp(-(\tau_{k1}+\tau_{k2})a)}{4(\tau_{k1}+\tau_{k2})}.$$

В силу (2.2.66) имеем: $|\tau_{k1}|, |\tau_{k2}| \leqslant C$, и, следовательно,

$$\int\limits_a^\infty e_{r_k}(x,\rho_{k1}) e_{r_k}(x,\rho_{k2})\,dx \geqslant C_0 > 0.$$

Кроме того, $\int_0^a e_{r_k}^2(x,\rho_{k1})\,dx \geqslant 0$. С другой стороны, используя (2.1.50) и (2.1.52), нетрудно проверить (аналогично доказательству (2.2.57)), что

$$\int\limits_0^a e_{r_k}(x,\rho_{k1})(e_{r_k}(x,\rho_{k2}) - e_{r_k}(x,\rho_{k1}))\,dx \to 0 \quad \text{при} \ \ k\to\infty,$$

и мы приходим к противоречию. Это означает, что верно (2.2.67).

Определим D согласно (2.2.64) с $\tau^* = \min(\frac{\tau_1}{2}, \frac{\delta^*}{2})$. Тогда функция $\Delta_r(\rho)$ имеет в $\overline{D}$ самое большее один нуль $\rho = i\tau_r^0$, $0 \leqslant \tau_r^0 \leqslant \tau^*$. Рассмотрим функцию $\gamma_r(\rho) := g_r(\rho) g_r^0(\rho)$, где

$$g_r(\rho) = \frac{2i\rho}{\Delta_r(\rho)}, \quad g_r^0(\rho) = \frac{\rho - i\tau_r^0}{\rho + i\tau_r^0}$$

(если $\Delta_r(\rho)$ не имеет нулей в $\overline{D}$, то положим $g_r^0(\rho) := 1$). Ясно, что

$$|g_r^0(\rho)| \leqslant 1 \ \ \text{при} \ \ \rho \in \overline{D}. \tag{2.2.69}$$

Аналогично (2.2.62), (2.2.63), имеем при вещественных $\rho \neq 0$:

$$g_r(\rho) = e_r(0,-\rho) - \xi_r(\rho) e_r(0,\rho), \quad |\xi_r(\rho)| = 1. \tag{2.2.70}$$

Из (2.2.66), (2.2.70) и (2.1.51) вытекает, что $|g_r(\rho)| \leqslant C$ при $\rho \in \partial D$, $r \geqslant 0$, где $\partial D = \overline{D} \setminus D$ — граница D, а C не зависит от r. Вместе с (2.2.69) это дает

$$|\gamma_r(\rho)| \leqslant C \ \ \text{при} \ \ \rho \in \partial D, \ r \geqslant 0.$$

Так как функции $\gamma_r(\rho)$ аналитичны в $\overline{D}$, то согласно принципу максимума для аналитических функций [206, с. 204]

$$|\gamma_r(\rho)| \leqslant C \ \ \text{при} \ \ \rho \in \overline{D}, \ r \geqslant 0, \tag{2.2.71}$$

где C не зависит от r.

Зафиксируем $\delta \in (0,\tau^*)$ и обозначим $D_\delta := \{\rho :\ \mathrm{Im}\,\rho > 0,\ \delta < |\rho| < \tau^*\}$. В силу (2.2.66) $\lim\limits_{r\to\infty} g_r(\rho) = g(\rho)$ равномерно в $\overline{D_\delta}$. Кроме того, из (2.2.66) вытекает, что $\lim\limits_{r\to\infty} \tau_r^0 = 0$, и, следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty} \gamma_r(\rho) = g(\rho)$ равномерно в $\overline{D_\delta}$. Отсюда и из (2.2.71) имеем: $|g(\rho)| \leqslant C$ при $\rho \in \overline{D_\delta}$. В силу произвольности δ заключаем, что $|g(\rho)| \leqslant C$ при $\rho \in \overline{D} \setminus \{0\}$, т. е. (2.2.61) доказано. ☐

Теорема 2.2.12. *Пусть* $L \in V'_N$. *Тогда* $\lambda = 0$ *не является собственным значением* L.

Доказательство. Функция $e(x) := e(x, 0)$ является решением уравнения (2.1.1) при $\lambda = 0$, и согласно теореме 2.1.2

$$\lim_{x \to \infty} e(x) = 1. \tag{2.2.72}$$

Выберем $a > 0$ так, чтобы

$$e(x) \geqslant 1/2 \ \text{ при } \ x \geqslant a, \tag{2.2.73}$$

и рассмотрим функцию

$$z(x) := e(x) \int_a^x \frac{dt}{e^2(t)}. \tag{2.2.74}$$

Нетрудно проверить, что $z''(x) = q(x)z(x)$ и $e(x)z'(x) - e'(x)z(x) \equiv 1$. Из (2.2.72)–(2.2.74) вытекает

$$\lim_{x \to \infty} z(x) = +\infty. \tag{2.2.75}$$

Предположим, что $\lambda = 0$ является собственным значением, и пусть $y_0(x)$ — соответствующая собственная функция. Так как функции $\{e(x), z(x)\}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.1.1) при $\lambda = 0$, то $y_0(x) = C_1^0 e(x) + C_2^0 z(x)$. В силу (2.2.72) и (2.2.75) это возможно лишь при $C_1^0 = C_2^0 = 0$. □

Замечание 2.2.3. Пусть $q(x) = 2a^2(1 + ax)^{-2}$, $h = -a$, где a — комплексное число такое, что $a \notin (-\infty, 0]$. Тогда $q(x) \in L(0, \infty)$, но $xq(x) \notin L(0, \infty)$. В этом случае $\lambda = 0$ является собственным значением с собственной функцией $y(x) = (1 + ax)^{-1}$.

В силу теоремы 2.1.2 $e(0, \rho) = O(1)$ при $\rho \to 0$, $\operatorname{Im} \rho \geqslant 0$. Поэтому теорема 2.2.11 с учетом (2.1.69) дает

$$M(\lambda) = O(\rho^{-1}), \quad |\rho| \to 0. \tag{2.2.76}$$

Ниже, в примере 2.2.1, показано, что если условие (2.2.51) не выполняется, то (2.2.76), вообще говоря, неверно.

Объединяя полученные выше результаты, приходим к следующей теореме.

Теорема 2.2.13. *Пусть* $L \in V'_N$, *и пусть* $M(\lambda)$ — *функция Вейля для* L. *Тогда* $M(\lambda)$ *аналитична в* Π *за исключением конечного множества простых полюсов* $\Lambda' = \{\lambda_k\}_{k=\overline{1,m}}$, $\lambda_k = \rho_k^2 < 0$, *и непрерывна в* $\Pi_1 \setminus \Lambda'$. *Кроме того,*

$$\alpha_k := \operatorname*{Res}_{\lambda = \lambda_k} M(\lambda) > 0, \quad k = \overline{1, m},$$

и имеет место соотношение (2.2.76). *Функция* $\rho V(\lambda)$ *непрерывна и ограничена при* $\lambda = \rho^2 > 0$, *причем* $V(\lambda) > 0$ *при* $\lambda = \rho^2 > 0$.

Определение 2.2.1. Множество $S := (\{V(\lambda)\}_{\lambda>0}, \{\lambda_k, \alpha_k\}_{k=\overline{1,m}})$ называется *спектральными данными* для L.

Лемма 2.2.5. *Функция Вейля однозначно определяется по спектральным данным S по формуле*

$$M(\lambda) = \int_0^\infty \frac{V(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu + \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{\lambda-\lambda_k}, \quad \lambda \in \Pi \setminus \Lambda'. \tag{2.2.77}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$I_R(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=R} \frac{M(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu.$$

Из (2.1.73) вытекает

$$\lim_{R\to\infty} I_R(\lambda) = 0 \tag{2.2.78}$$

равномерно на компактных подмножествах множества $\Pi \setminus \Lambda'$. С другой стороны, двигая контур $|\mu| = R$ к вещественной оси и используя теорему о вычетах, получаем

$$I_R(\lambda) = -M(\lambda) + \int_0^R \frac{V(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu + \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{\lambda-\lambda_k}.$$

Вместе с (2.2.78) это дает (2.2.77). □

Из теоремы 2.2.1 *и леммы* 2.2.5 *следует, что задание спектральных данных однозначно определяет потенциал $q(x)$ и коэффициент h.*

Пусть $L \in V_N'$, и пусть пара $\widetilde{L} \in V_N'$ выбрана так, что выполняется (2.2.4). Обозначим

$$\lambda_{n0} = \lambda_n,\ \lambda_{n1} = \widetilde{\lambda}_n,\ \alpha_{n0} = \alpha_n,\ \alpha_{n1} = \widetilde{\alpha}_n,$$
$$\varphi_{ni}(x) = \varphi(x, \lambda_{ni}),\ \widetilde{\varphi}_{ni}(x) = \widetilde{\varphi}(x, \lambda_{ni}),$$
$$p = m + \widetilde{m}, \quad \theta(x) = [\theta_k(x)]_{k=\overline{1,p}}^T,$$
$$\theta_k(x) = \varphi_{k0}(x),\ k = \overline{1,m}, \quad \theta_{k+m}(x) = \varphi_{k1}(x),\ k = \overline{1,\widetilde{m}}.$$

Аналогично определим $\widetilde{\theta}(x)$. Из (2.2.12), (2.2.17) и (2.2.18) вытекает

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \int_0^\infty \widetilde{D}(x,\lambda,\mu)\widehat{V}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu +$$
$$+ \sum_{k=1}^m \widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_{k0})\alpha_{k0}\varphi_{k0}(x) - \sum_{k=1}^{\widetilde{m}} \widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_{k1})\alpha_{k1}\varphi_{k1}(x), \tag{2.2.79}$$

$$\widetilde{\varphi}_{ni}(x) = \varphi_{ni}(x) + \int\limits_0^\infty \widetilde{D}(x,\lambda_{ni},\mu)\widehat{V}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\widetilde{D}(x,\lambda_{ni},\lambda_{k0})\alpha_{k0}\varphi_{k0}(x) - \sum_{k=1}^{\widetilde{m}}\widetilde{D}(x,\lambda_{ni},\lambda_{k1})\alpha_{k1}\varphi_{k1}(x), \quad (2.2.80)$$

$$\widetilde{\Phi}(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda) + \int\limits_0^\infty \frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}\widehat{V}(\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\lambda-\lambda_{k0}}\alpha_{k0}\varphi_{k0}(x) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\widetilde{m}}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\lambda-\lambda_{k1}}\alpha_{k1}\varphi_{k1}(x), \quad (2.2.81)$$

$$\varepsilon_0(x) = \int\limits_0^\infty \varphi(x,\mu)\widetilde{\varphi}(x,\mu)\widehat{V}(\mu)\,d\mu +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varphi_{k0}(x)\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\alpha_{k0} - \sum_{k=1}^{\widetilde{m}}\varphi_{k1}(x)\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\alpha_{k1},$$

$$\varepsilon(x) = -2\varepsilon_0'(x). \quad (2.2.82)$$

При каждом фиксированном $x \geqslant 0$ соотношения (2.2.79), (2.2.80) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\varphi(x,\lambda)$, $\lambda > 0$, и $\theta_k(x)$, $k=\overline{1,p}$. Запишем (2.2.79), (2.2.80) как линейное уравнение в соответствующем банаховом пространстве.

Пусть $C = C(0,\infty)$ — банахово пространство непрерывных ограниченных функций $f:\ [0,\infty)\to\mathbf{C}$, $\lambda\mapsto f(\lambda)$ на полуоси $\lambda\geqslant 0$ с нормой $\|f\|_C = \sup\limits_{\lambda\geqslant 0}|f(\lambda)|$. Очевидно, что при каждом фиксированном $x \geqslant 0$, $\varphi(x,\cdot), \widetilde{\varphi}(x,\cdot) \in C$. Рассмотрим банахово пространство B векторов

$$F = \begin{bmatrix} f \\ f^0 \end{bmatrix}, \quad f\in C, \quad f^0 = [f_k^0]^T_{k=\overline{1,p}} \in \mathbf{R}^p,$$

с нормой $\|F\|_B = \max(\|f\|_C\,, \|f^0\|_{\mathbf{R}^p})$. Обозначим

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \varphi(x,\cdot) \\ \theta(x) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\psi}(x) = \begin{bmatrix} \widetilde{\varphi}(x,\cdot) \\ \widetilde{\theta}(x) \end{bmatrix}.$$

Тогда $\psi(x), \widetilde{\psi}(x) \in B$ при каждом фиксированном $x \geqslant 0$. Обозначим

$$\begin{gathered}
\widetilde{H}_{\lambda,\mu}(x) = \widetilde{D}(x,\lambda,\mu)\widehat{V}(\mu),\\
\widetilde{H}_{\lambda,k}(x) = \widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_{k0})\alpha_{k0},\ k=\overline{1,m},\\
\widetilde{H}_{\lambda,k+m}(x) = -\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_{k1})\alpha_{k1},\ k=\overline{1,\widetilde{m}},\\
\widetilde{H}_{n,\mu}(x) = \widetilde{D}(x,\lambda_{n0},\mu)\widehat{V}(\mu),\ n=\overline{1,m},\\
\widetilde{H}_{n+m,\mu}(x) = \widetilde{D}(x,\lambda_{n1},\mu)\widehat{V}(\mu),\ n=\overline{1,\widetilde{m}},\\
\widetilde{H}_{n,k}(x) = \widetilde{D}(x,\lambda_{n0},\lambda_{k0})\alpha_{k0},\ n,k=\overline{1,m},\\
\widetilde{H}_{n,k+m}(x) = -\widetilde{D}(x,\lambda_{n0},\lambda_{k1})\alpha_{k1},\ n=\overline{1,m},\ k=\overline{1,\widetilde{m}},\\
\widetilde{H}_{n+m,k}(x) = \widetilde{D}(x,\lambda_{n1},\lambda_{k0})\alpha_{k0},\ n=\overline{1,\widetilde{m}},\ k=\overline{1,m},\\
\widetilde{H}_{n+m,k+m}(x) = -\widetilde{D}(x,\lambda_{n1},\lambda_{k1})\alpha_{k1},\ n,k=\overline{1,\widetilde{m}}.
\end{gathered}$$

Через $\widetilde{H} : B \to B$ обозначим оператор, определяемый соотношениями

$$\widetilde{F} = \widetilde{H}F, \quad F = \begin{bmatrix} f \\ f^0 \end{bmatrix} \in B, \quad \widetilde{F} = \begin{bmatrix} \widetilde{f} \\ \widetilde{f}^0 \end{bmatrix} \in B,$$

$$\begin{gathered}
\widetilde{f}(\lambda) = \int\limits_0^\infty \widetilde{H}_{\lambda,\mu} f(\mu)\,d\mu + \sum_{k=1}^p \widetilde{H}_{\lambda,k} f_k^0,\\
\widetilde{f}_n^0 = \int\limits_0^\infty \widetilde{H}_{n,\mu} f(\mu)\,d\mu + \sum_{k=1}^p \widetilde{H}_{n,k} f_k^0.
\end{gathered}$$

Тогда при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ оператор $E + \widetilde{H}(x)$ (E — единичный оператор), действующий из B в B, является линейным и ограниченным. Принимая во внимание введенные обозначения, запишем (2.2.79)–(2.2.80) в виде

$$\widetilde{\psi}(x) = (E + \widetilde{H}(x))\psi(x). \tag{2.2.83}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.2.14. *При каждом фиксированном* $x \geqslant 0$ *вектор* $\psi(x) \in B$ *является решением уравнения* (2.2.83).

Приведем теперь необходимые и достаточные условия разрешимости рассматриваемой обратной задачи. Через $\mathbf{W}'$ обозначим множество векторов $S = (\{V(\lambda)\}_{\lambda>0},\ \{\lambda_k, \alpha_k\}_{k=\overline{1,m}})$ (m свое для каждого S) таких, что

1) $\alpha_k > 0,\ \lambda_k < 0$ при всех k; $\lambda_k \neq \lambda_s$ при $k \neq s$;

2) функция $\rho V(\lambda)$ непрерывна и ограничена при $\lambda > 0$, $V(\lambda) > 0$ и $M(\lambda) = O(\rho^{-1})$, $\rho \to 0$, где $M(\lambda)$ определяется по формуле (2.2.77);

3) существует пара $\widetilde{L}$ такая, что выполняется (2.2.4).

Ясно, что если S — спектральные данные для некоторого $L \in V'_N$, то $S \in \mathbf{W}'$.

Теорема 2.2.15. *Пусть $S \in \mathbf{W}'$. Тогда при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ уравнение* (2.2.83) *имеет единственное решение в B, т. е. оператор $E + \widetilde{H}(x)$ обратим.*

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1.4.6, достаточно доказать, что при каждом $x \geqslant 0$ однородное уравнение

$$(E + \widetilde{H}(x))\beta(x) = 0, \quad \beta(x) \in B, \tag{2.2.84}$$

имеет только нулевое решение. Пусть

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} \beta(x,\cdot) \\ \beta^0(x) \end{bmatrix} \in B, \quad \beta^0(x) = [\beta^0_k(x)]^T_{k=\overline{1,p}}$$

— решение уравнения (2.2.84), т. е.

$$\beta(x,\lambda) + \int\limits_0^\infty \widetilde{D}(x,\lambda,\mu)\widehat{V}(\mu)\beta(x,\mu)\,d\mu + \sum_{k=1}^m \widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_{k0})\alpha_{k0}\beta_{k0}(x) - \\ - \sum_{k=1}^{\widetilde{m}} \widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_{k1})\alpha_{k1}\beta_{k1}(x) = 0, \tag{2.2.85}$$

$$\beta_{ni}(x) + \int\limits_0^\infty \widetilde{D}(x,\lambda_{ni},\mu)\widehat{V}(\mu)\beta(x,\mu)\,d\mu + \sum_{k=1}^m \widetilde{D}(x,\lambda_{ni},\lambda_{k0})\alpha_{k0}\beta_{k0}(x) - \\ - \sum_{k=1}^{\widetilde{m}} \widetilde{D}(x,\lambda_{ni},\lambda_{k1})\alpha_{k1}\beta_{k1}(x) = 0, \tag{2.2.86}$$

где $\beta_{k0}(x) = \beta^0_k(x)$, $k = \overline{1,m}$, $\beta_{k1}(x) = \beta^0_{k+m}(x)$, $k = \overline{1,\widetilde{m}}$. Тогда (2.2.85) дает аналитическое продолжение для функции $\beta(x,\lambda)$ на всю λ-плоскость и при каждом $x \geqslant 0$ функция $\beta(x,\lambda)$ является целой по λ. Кроме того, согласно (2.2.85), (2.2.86) имеем

$$\beta(x,\lambda_{ni}) = \beta_{ni}(x). \tag{2.2.87}$$

Покажем, что при каждом фиксированном $x \geqslant 0$

$$|\beta(x,\lambda)| \leqslant \frac{C_x}{|\rho|}\exp(|\tau|x), \quad \lambda = \rho^2, \quad \tau := \operatorname{Im}\rho. \tag{2.2.88}$$

В самом деле, используя (2.2.6) и (2.1.87), получаем

$$|\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_{ki})| \leqslant \frac{C_x}{|\rho|}\exp(|\tau|x). \tag{2.2.89}$$

Пусть для определенности $\sigma := \mathrm{Re}\,\rho \geqslant 0$. Из (2.2.85), (2.2.7) и (2.2.89) вытекает

$$|\beta(x,\lambda)| \leqslant C_x \exp(|\tau|x)\Bigl(\int\limits_1^\infty \frac{|\widehat{V}(\mu)|\theta}{|\rho-\theta|+1}\,d\theta + \frac{1}{|\rho|}\Bigr), \quad \mu=\theta^2. \tag{2.2.90}$$

В силу (2.2.4)

$$\Bigl(\int\limits_1^\infty \frac{|\widehat{V}(\mu)|\theta}{|\rho-\theta|+1}\,d\theta\Bigr)^2 \leqslant \Bigl(\int\limits_1^\infty |\widehat{V}(\mu)|^2\theta^4\,d\theta\Bigr)\Bigl(\int\limits_1^\infty \frac{d\theta}{\theta^2(|\rho-\theta|+1)^2}\Bigr) \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_1^\infty \frac{d\theta}{\theta^2(|\rho-\theta|+1)^2}. \tag{2.2.91}$$

Так как

$$|\rho-\theta| = \sigma^2+\tau^2+\theta^2-2\sigma\theta,$$
$$||\rho|-\theta| = \sigma^2+\tau^2+\theta^2-2|\rho|\theta,$$

то

$$|\rho-\theta| \geqslant ||\rho|-\theta|. \tag{2.2.92}$$

В силу (2.2.91), (2.2.92) и (2.2.11)

$$\int\limits_1^\infty \frac{|\widehat{V}(\mu)|\theta}{|\rho-\theta|+1}\,d\theta \leqslant \frac{C}{|\rho|}. \tag{2.2.93}$$

Используя (2.2.90) и (2.2.93), приходим к (2.2.88).

Далее, построим функцию $\Gamma(x,\lambda)$ по формуле

$$\Gamma(x,\lambda) = -\int\limits_0^\infty \frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}\widehat{V}(\mu)\beta(x,\mu)\,d\mu -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\lambda-\lambda_{k0}}\alpha_{k0}\beta_{k0}(x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\widetilde{m}} \frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\lambda-\lambda_{k1}}\alpha_{k1}\beta_{k1}(x). \tag{2.2.94}$$

Из (2.1.70), (2.2.6), (2.2.85) и (2.2.94) следует, что

$$\Gamma(x,\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)\beta(x,\lambda) - \int\limits_0^\infty \frac{\langle\widetilde{S}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}\widehat{V}(\mu)\beta(x,\mu)\,d\mu -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\frac{\langle\widetilde{S}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k0}(x)\rangle}{\lambda-\lambda_{k0}}\alpha_{k0}\beta_{k0}(x)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\widetilde{m}}\frac{\langle\widetilde{S}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{k1}(x)\rangle}{\lambda-\lambda_{k1}}\alpha_{k1}\beta_{k1}(x). \quad (2.2.95)$$

Так как $\langle\widetilde{S}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle_{|x=0}=-1$, то из (1.6.1) выводим

$$\frac{\langle\widetilde{S}(x,\lambda),\widetilde{\varphi}(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}=-\frac{1}{\lambda-\mu}+\int\limits_0^x\widetilde{S}(t,\lambda)\widetilde{\varphi}(t,\mu)\,dt.$$

Поэтому (2.2.95) принимает вид

$$\Gamma(x,\lambda)=\widetilde{M}(\lambda)\beta(x,\lambda)+\int\limits_0^\infty\frac{\widehat{V}(\mu)\beta(x,\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_{k0}\beta_{k0}(x)}{\lambda-\lambda_{k0}}-\sum_{k=1}^{\widetilde{m}}\frac{\alpha_{k1}\beta_{k1}(x)}{\lambda-\lambda_{k1}}+\Gamma_1(x,\lambda), \quad (2.2.96)$$

где

$$\Gamma_1(x,\lambda)=\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^x\widetilde{S}(t,\lambda)\widetilde{\varphi}(t,\mu)\,dt\Big)\widehat{V}(\mu)\beta(x,\mu)\,d\mu-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}\Big(\int\limits_0^x\widetilde{S}(t,\lambda)\widetilde{\varphi}_{k0}(t)\,dt\Big)\alpha_{k0}\beta_{k0}(x)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\widetilde{m}}\Big(\int\limits_0^x\widetilde{S}(t,\lambda)\widetilde{\varphi}_{k1}(t)\,dt\Big)\alpha_{k1}\beta_{k1}(x).$$

Функция $\Gamma_1(x,\lambda)$ является целой по λ при каждом $x\geqslant 0$. Используя (2.2.77), получаем из (2.2.96):

$$\Gamma(x,\lambda)=M(\lambda)\beta(x,\lambda)+\Gamma_0(x,\lambda), \quad (2.2.97)$$

где

$$\Gamma_0(x,\lambda)=\Gamma_1(x,\lambda)+\Gamma_2(x,\lambda)+\Gamma_3(x,\lambda),$$
$$\Gamma_2(x,\lambda)=-\int\limits_0^\infty\frac{\widehat{V}(\mu)(\beta(x,\lambda)-\beta(x,\mu))}{\lambda-\mu}\,d\mu,$$
$$\Gamma_3(x,\lambda)=-\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_{k0}}{\lambda-\lambda_{k0}}(\beta(x,\lambda)-\beta_{k0}(x))+\sum_{k=1}^{\widetilde{m}}\frac{\alpha_{k1}}{\lambda-\lambda_{k1}}(\beta(x,\lambda)-\beta_{k1}(x)).$$

В силу (2.2.87) функция $\Gamma_0(x,\lambda)$ является целой по λ при каждом фиксированном $x \geqslant 0$. Пользуясь (2.2.97), (2.2.94), (2.2.88) и (2.1.88), получаем следующие свойства функции $\Gamma(x,\lambda)$.

1) При каждом фиксированном $x \geqslant 0$ функция $\Gamma(x,\lambda)$ аналитична в $\Pi \setminus \Lambda'$ по λ (с простыми полюсами λ_{k0}, $k = \overline{1,m}$) и непрерывна в $\Pi_1 \setminus \Lambda'$. Кроме того,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{k0}} \Gamma(x,\lambda) = \alpha_{k0}\beta_{k0}(x), \quad k = \overline{1,m}. \tag{2.2.98}$$

2) Обозначим $\Gamma^{\pm}(\lambda) = \lim\limits_{z\to 0,\, \operatorname{Re} z>0} \Gamma(\lambda \pm iz)$, $\lambda > 0$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\Gamma^{-}(\lambda) - \Gamma^{+}(\lambda)\right) = V(\lambda)\beta(x,\lambda), \quad \lambda > 0. \tag{2.2.99}$$

3) При $|\lambda| \to \infty$

$$|\Gamma(x,\lambda)| \leqslant C_x|\rho|^{-2}\exp(-|\tau|x). \tag{2.2.100}$$

Построим теперь функцию $B(x,\lambda)$ по формуле

$$B(x,\lambda) = \overline{\beta(x,\overline{\lambda})}\Gamma(x,\lambda). \tag{2.2.101}$$

По теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R^0} B(x,\lambda)\,d\lambda = 0,$$

где контур γ_R^0 определен в § 2.1 (см. рис. 2.1.2). В силу (2.2.88), (2.2.100) и (2.2.101) имеем

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=R} B(x,\lambda)\,d\lambda = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} B(x,\lambda)\,d\lambda = 0, \tag{2.2.102}$$

где контур γ определен в § 2.1 (см. рис. 2.1.1). Двигая контур γ в (2.2.102) к вещественной оси и используя теорему о вычетах и (2.2.98), получаем при достаточно малом $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{n=1}^{m}\alpha_{n0}|\beta_{n0}(x)|^2 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\varepsilon} B(x,\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon''} B(x,\lambda)\,d\lambda = 0, \tag{2.2.103}$$

где γ_ε'' — двусторонний разрез вдоль луча $\{\lambda:\ \lambda \geqslant \varepsilon\}$. Так как $M(\lambda) = O(\rho^{-1})$ при $|\lambda| \to 0$, то в силу (2.2.97) и (2.2.101) находим, что при каждом фиксированном $x \geqslant 0$

$$B(x,\lambda) = O(\rho^{-1}) \ \text{ при } \ |\lambda| \to 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\varepsilon} B(x,\lambda)\,d\lambda = 0.$$

Вместе с (2.2.103), (2.2.99) и (2.2.101) это дает

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_{k0}|\beta_{k0}(x)|^2 + \int\limits_0^\infty |\beta(x,\lambda)|^2 V(\lambda)\,d\lambda = 0.$$

Так как $\alpha_{k0} > 0$, $V(\lambda) > 0$, то $\beta(x,\lambda) = 0$, $\beta_{n0}(x) = 0$, $\beta_{n1}(x) = \beta(x,\lambda_{n1}) = 0$. Таким образом, $\beta(x) = 0$ и теорема 2.2.15 доказана. □

Теорема 2.2.16. *Для того чтобы вектор* $S = (\{V(\lambda)\}_{\lambda>0}, \{\lambda_k,\alpha_k\}_{k=\overline{1,m}}) \in \mathbf{W}'$ *представлял собой спектральные данные для некоторой пары* $L \in V_N'$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\varepsilon(x) \in W_N'$, *где* $\varepsilon(x)$ *определяется по формуле* (2.2.82), *а* $\psi(x)$ *является решением уравнения* (2.2.83). *Функция* $q(x)$ *и число* h *строятся по формулам* (2.2.19)–(2.2.20).

Через $\mathbf{W}''$ обозначим множество функций $M(\lambda)$ таких, что:

1) $M(\lambda)$ аналитична в Π за исключением конечного числа простых полюсов $\Lambda' = \{\lambda_k\}_{k=1,m}$, $\lambda_k = \rho_k^2 < 0$ (m свое для каждой функции $M(\lambda)$), причем

$$\alpha_k := \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_k} M(\lambda) > 0;$$

2) $M(\lambda)$ непрерывна в $\Pi_1 \setminus \Lambda'$, $M(\lambda) = O(\rho^{-1})$ при $\rho \to 0$,

$$V(\lambda) := \frac{1}{2\pi i}\Big(M^-(\lambda) - M^+(\lambda)\Big) > 0 \ \text{ при } \ \lambda > 0;$$

3) существует $\widetilde{L}$ такая, что выполняется (2.2.4).

Теорема 2.2.17. *Для того чтобы функция* $M(\lambda) \in \mathbf{W}''$ *была функцией Вейля для некоторой пары* $L \in V_N'$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\varepsilon(x) \in W_N'$, *где* $\varepsilon(x)$ *определяется по формуле* (2.2.82).

Мы опускаем доказательства теорем 2.2.16, 2.2.17, так как они аналогичны соответствующим утверждениям для операторов Штурма–Лиувилля на конечном интервале из § 1.4 (см. также доказательство теоремы 2.2.5).

Несамосопряженный случай. Обратную задачу восстановления L по спектральным данным можно рассматривать и в несамосопряженном случае, когда $q(x) \in L(0,\infty)$ — комплекснозначная функция, и h — комплексное число. Для краткости ограничимся случаем простого спектра (см. определение 2.2.2). Для несамосопряженных дифференциальных операторов с простым спектром вводятся спектральные данные и исследуется обратная задача восстановления L по спектральным данным. Рассматривается также важный частный случай возмущения дискретного спектра модельного оператора.

В этом случае основное уравнение обратной задачи превращается в систему линейных алгебраических уравнений, а условие разрешимости основного уравнения — в условие отличия от нуля определителя этой системы.

Определение 2.2.2. Будем говорить, что L имеет *простой спектр*, если функция $\Delta(\rho)$ имеет конечное число простых нулей в Ω, и $M(\lambda) = O(\rho^{-1})$ при $\rho \to 0$. Запись $L \in V_N''$ означает, что L имеет простой спектр и $q \in W_N$.

Ясно, что $V_N' \subset V_N''$, так как самосопряженные операторы, рассмотренные выше, имеют простой спектр.

Пусть $L \in V_N''$. Тогда $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=\overline{1,m}}$, $\lambda_k = \rho_k^2$, — конечное множество, а функция Вейля $M(\lambda)$ аналитична в $\Pi \setminus \Lambda'$ и непрерывна в $\Pi_1 \setminus \Lambda$; $\Lambda' = \{\lambda_k\}_{k=\overline{1,r}}$ — собственные значения, а $\Lambda'' = \{\lambda_k\}_{k=\overline{r+1,m}}$ — спектральные особенности L. Теми же рассуждениями, что и в лемме 2.2.5, доказывается следующее утверждение.

Лемма 2.2.6. *Имеет место соотношение*

$$M(\lambda) = \int\limits_0^\infty \frac{V(\mu)}{\lambda - \mu}\, d\mu + \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{\lambda - \lambda_k},$$

где

$$V(\lambda) := \frac{1}{2\pi i}\left(M^-(\lambda) - M^+(\lambda)\right), \quad M^\pm(\lambda) := \lim_{z\to 0,\,\mathrm{Re}\, z>0} M(\lambda \pm iz),$$

$$\alpha_k := \begin{cases} e(0,\rho_k)(\Delta_1(\rho_k))^{-1}, & k = \overline{1,r}, \\ \dfrac{1}{2} e(0,\rho_k)(\Delta_1(\rho_k))^{-1}, & k = \overline{r+1,m}, \end{cases} \qquad \Delta_1(\rho) := \frac{d}{d\lambda}\Delta(\rho).$$

Определение 2.2.3. Множество $S = (\{V(\lambda)\}_{\lambda>0}, \{\lambda_k, \alpha_k\}_{k=\overline{1,m}})$ называется спектральными данными для L.

Пользуясь теоремой 2.2.1 и леммой 2.2.6, приходим к следующей теореме единственности.

Теорема 2.2.18. *Пусть S и $\widetilde{S}$ являются спектральными данными для L и $\widetilde{L}$ соответственно. Если $S = \widetilde{S}$, то $L = \widetilde{L}$. Таким образом, задание спектральных данных однозначно определяет L.*

Для $L \in V_N''$ основное уравнение (2.2.83) остается верным и теорема 2.2.14 также имеет место. При этом потенциал q и коэффициент h строятся по формулам (2.2.82), (2.2.19)–(2.2.20).

Возмущения дискретного спектра. Пусть дана пара $\widetilde{L} \in V_N$, и пусть $\widetilde{M}(\lambda)$ — функция Вейля для $\widetilde{L}$. Рассмотрим функцию

$$M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda) + \sum_{\lambda_0 \in J} \frac{a_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}, \tag{2.2.104}$$

где J — конечное множество в λ-плоскости; a_{λ_0}, $\lambda_0 \in J$ — комплексные числа. Тогда $\widehat{V}(\lambda) = 0$, и основное уравнение (2.2.12) превращается в линейную алгебраическую систему

$$\widetilde{\varphi}(x, z_0) = \varphi(x, z_0) + \sum_{\lambda_0 \in J} \widetilde{D}(x, z_0, \lambda_0) a_{\lambda_0} \varphi(x, \lambda_0), \quad z_0 \in J, \tag{2.2.105}$$

с определителем $\det(E + \widetilde{G}(x))$, где $\widetilde{G}(x) = [\widetilde{D}(x, z_0, \lambda_0) a_{\lambda_0}]_{z_0, \lambda_0 \in J}$. Условие разрешимости основного уравнения (условие P в теореме 2.2.5) принимает здесь вид

$$\det(E + \widetilde{G}(x)) \neq 0 \ \text{ при всех } \ x \geqslant 0. \tag{2.2.106}$$

Потенциал q и коэффициент h строятся по формулам

$$q(x) = \widetilde{q}(x) + \varepsilon(x), \quad h = \widetilde{h} - \sum_{\lambda_0 \in J} a_{\lambda_0}, \tag{2.2.107}$$

$$\varepsilon(x) = -2 \sum_{\lambda_0 \in J} a_{\lambda_0} \frac{d}{dx} \Big(\widetilde{\varphi}(x, \lambda_0) \varphi(x, \lambda_0) \Big). \tag{2.2.108}$$

Опираясь на теорему 2.2.5, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.2.19. *Пусть* $\widetilde{L} \in V_N$. *Для того чтобы функция* $M(\lambda)$ *вида* (2.2.104) *была функцией Вейля для некоторой пары* $L \in V_N$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (2.2.106) *и* $\varepsilon(x) \in W_N$, *где* $\varepsilon(x)$ *определяется по формуле* (2.2.108), *а* $\{\varphi(x, \lambda_0)\}_{\lambda_0 \in J}$ — *решение уравнения* (2.2.105). *При этих условиях потенциал* q *и коэффициент* h *строятся по формулам* (2.2.107).

Пример 2.2.1. Пусть $\widetilde{q}(x) = 0$ и $\widetilde{h} = 0$. Тогда $\widetilde{M}(\lambda) = \dfrac{1}{i\rho}$. Рассмотрим функцию

$$M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda) + \frac{a}{\lambda - \lambda_0},$$

где a и λ_0 — комплексные числа. Тогда основное уравнение (2.2.105) принимает вид

$$\widetilde{\varphi}(x, \lambda_0) = F(x) \varphi(x, \lambda_0),$$

где

$$\widetilde{\varphi}(x, \lambda_0) = \cos \rho_0 x, \quad F(x) = 1 + a \int\limits_0^x \cos^2 \rho_0 t \, dt, \quad \lambda_0 = \rho_0^2.$$

Условие разрешимости (2.2.106) в данном случае имеет вид

$$F(x) \neq 0 \ \text{ при всех } \ x \geqslant 0, \tag{2.2.109}$$

а функция $\varepsilon(x)$ находится по формуле

$$\varepsilon(x) = \frac{2a\rho_0 \sin 2\rho_0 x}{F(x)} + \frac{2a^2 \cos^4 \rho_0 x}{F^2(x)}.$$

Случай 1. Пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда $F(x) = 1 + ax$, а (2.2.109) равносильно условию
$$a \notin (-\infty, 0). \tag{2.2.110}$$

Если (2.2.110) выполняется, то $M(\lambda)$ является функцией Вейля для пары L вида (2.2.1)–(2.2.2), причем
$$q(x) = \frac{2a^2}{(1+ax)^2}, \quad h = -a,$$
$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x - \frac{a}{1+ax} \cdot \frac{\sin\rho x}{\rho}, \quad e(x,\rho) = \exp(i\rho x)\Big(1 - \frac{a}{i\rho(1+ax)}\Big),$$
$$\Delta(\rho) = i\rho, \quad V(\lambda) = \frac{1}{\pi\rho}, \quad \varphi(x,0) = \frac{1}{1+ax}.$$

Если $a < 0$, то условие разрешимости не выполняется, и функция $M(\lambda)$ не является функцией Вейля.

Случай 2. Пусть $\lambda_0 \neq 0$ — вещественное число, и пусть $a > 0$. Тогда $F(x) \geqslant 1$, и условие (2.2.109) выполняется. Но в этом случае $\varepsilon(x) \notin L(0,\infty)$, т. е. $\varepsilon(x) \notin W_N$ при любом $N \geqslant 0$.

§ 2.3. Обратная задача на полуоси для локально суммируемых потенциалов

2.3.1. Обратная задача для волнового уравнения. Рассмотрим следующую краевую задачу $B(q(x),h)$:
$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \tag{2.3.1}$$
$$u(x,x) = 1, \quad (u_x - hu)_{|x=0,} \tag{2.3.2}$$

где $q(x)$ — комплекснозначная локально интегрируемая функция (т. е. интегрируемая на каждом конечном интервале), h — комплексное число. Обозначим $r(t) := u(0,t)$. Функция r называется следом решения. В этом параграфе исследуется следующая обратная задача.

Задача 2.3.1. По заданному следу $r(t)$, $t \geqslant 0$, решения $B(q(x),h)$ построить $q(x)$, $x \geqslant 0$, и h.

Мы докажем теорему единственности решения обратной задачи 2.3.1 (теорема 2.3.3), получим алгоритм ее решения (алгоритм 2.3.1) и дадим необходимые и достаточные условия ее разрешимости (теорема 2.3.4). Более подробно об обратных задачах для уравнений с частными производными см. [20, 21, 22, 38, 40, 42, 50, 57, 73, 122, 123, 124, 125, 137, 153–155, 190, 192, 205, 208, 211–213].

Замечание 2.3.1. Краевая задача $B(q(x),h)$ эквивалентна задаче Коши с точечным источником возмущения. В самом деле, пусть для простоты здесь $h = 0$.Положим $u(x,t) = 0$ при $0 < t < x$ и $u(x,t) =$

$= u(-x,t)$, $q(x) = q(-x)$ при $x < 0$. Тогда $u(x,t)$ является решением задачи Гурса

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad 0 \leqslant |x| \leqslant t,$$
$$u(x,|x|) = 1.$$

В свою очередь эта задача Гурса равносильна задаче Коши

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$
$$u_{|t=0} = 0, \quad u_{t|t=0} = 2\delta(x),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. При $h \neq 0$ краевая задача (2.3.1)–(2.3.2) также соответствует некоторой задаче Коши с точечным источником возмущения.

Вернемся к краевой задаче (2.3.1)–(2.3.2). Обозначим

$$Q(x) = \int\limits_0^x |q(t)|\,dt, \quad Q_*(x) = \int\limits_0^x Q(t)\,dt, \quad d = \max(0,-h).$$

Теорема 2.3.1. *Краевая задача* (2.3.1), (2.3.2) *имеет единственное решение* $u(x,t)$, *причем*

$$|u(x,t)| \leqslant \exp(d(t-x))\exp\Bigl(2Q_*\Bigl(\frac{t+x}{2}\Bigr)\Bigr), \quad 0 \leqslant x \leqslant t. \tag{2.3.3}$$

Доказательство. Заменой

$$\xi = t + x, \quad \eta = t - x, \quad v(\xi,\eta) = u\Bigl(\frac{\xi-\eta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}\Bigr)$$

преобразуем (2.3.1)–(2.3.2) к виду

$$v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}q\Bigl(\frac{\xi-\eta}{2}\Bigr)v(\xi,\eta), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \xi, \tag{2.3.4}$$
$$v(\xi,0) = 1, \quad (v_\xi(\xi,\eta) - v_\eta(\xi,\eta) - hv(\xi,\eta))_{|\xi=\eta} = 0. \tag{2.3.5}$$

Так как $v_\xi(\xi,0) = 0$, то интегрирование (2.3.4) по η дает

$$v_\xi(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}\int\limits_0^\eta q\Bigl(\frac{\xi-\alpha}{2}\Bigr)v(\xi,\alpha)\,d\alpha. \tag{2.3.6}$$

В частности,

$$v_\xi(\xi,\eta)_{|\xi=\eta} = -\frac{1}{4}\int\limits_0^\eta q\Bigl(\frac{\eta-\alpha}{2}\Bigr)v(\eta,\alpha)\,d\alpha. \tag{2.3.7}$$

Из (2.3.6) вытекает

$$v(\xi,\eta)=v(\eta,\eta)-\frac{1}{4}\int\limits_{\eta}^{\xi}\Big(\int\limits_{0}^{\eta}q\Big(\frac{\beta-\alpha}{2}\Big)v(\beta,\alpha)\,d\alpha\Big)\,d\beta. \tag{2.3.8}$$

Вычислим теперь $v(\eta,\eta)$. Так как

$$\frac{d}{d\eta}(v(\eta,\eta)\exp(h\eta))=(v_{\xi}(\xi,\eta)+v_{\eta}(\xi,\eta)+hv(\xi,\eta))_{|\xi=\eta}\exp(h\eta),$$

то в силу (2.3.5) и (2.3.7) получаем

$$\frac{d}{d\eta}(v(\eta,\eta)\exp(h\eta))=2v_{\xi}(\xi,\eta)_{|\xi=\eta}\exp(h\eta)=$$
$$=-\frac{1}{2}\exp(h\eta)\int\limits_{0}^{\eta}q\Big(\frac{\eta-\alpha}{2}\Big)v(\eta,\alpha)\,d\alpha.$$

Это дает (поскольку $v(0,0)=1$):

$$v(\eta,\eta)\exp(h\eta)-1=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\eta}\exp(h\beta)\Big(\int\limits_{0}^{\beta}q\Big(\frac{\beta-\alpha}{2}\Big)v(\beta,\alpha)\,d\alpha\Big)\,d\beta,$$

и, следовательно,

$$v(\eta,\eta)=\exp(-h\eta)-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\eta}\exp(-h(\eta-\beta))\times$$
$$\times\Big(\int\limits_{0}^{\beta}q\Big(\frac{\beta-\alpha}{2}\Big)v(\beta,\alpha)\,d\alpha\Big)\,d\beta. \tag{2.3.9}$$

Подставляя (2.3.9) в (2.3.8), заключаем, что функция $v(\xi,\eta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(\xi,\eta)=\exp(-h\eta)-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\eta}\exp(-h(\eta-\beta))\Big(\int\limits_{0}^{\beta}q\Big(\frac{\beta-\alpha}{2}\Big)v(\beta,\alpha)\,d\alpha\Big)\,d\beta-$$
$$-\frac{1}{4}\int\limits_{\eta}^{\xi}\Big(\int\limits_{0}^{\eta}q\Big(\frac{\beta-\alpha}{2}\Big)v(\beta,\alpha)\,d\alpha\Big)\,d\beta. \tag{2.3.10}$$

Обратно, если $v(\xi,\eta)$ является решением уравнения (2.3.10), то нетрудно убедиться, что $v(\xi,\eta)$ удовлетворяет (2.3.4)–(2.3.5).

Будем решать интегральное уравнение (2.3.10) методом последовательных приближений. Вычисления немного различны для $h \geqslant 0$ и $h < 0$.

Случай 1. Пусть $h \geqslant 0$. Обозначим

$$v_0(\xi,\eta) = \exp(-h\eta), \quad v_{k+1}(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\eta \exp(-h(\eta-\beta)) \times$$

$$\times \Bigl(\int\limits_0^\beta q\Bigl(\frac{\beta-\alpha}{2}\Bigr) v_k(\beta,\alpha)\,d\alpha\Bigr)\,d\beta - \frac{1}{4}\int\limits_\eta^\xi \Bigl(\int\limits_0^\eta q\Bigl(\frac{\beta-\alpha}{2}\Bigr) v_k(\beta,\alpha)\,d\alpha\Bigr)\,d\beta. \tag{2.3.11}$$

Покажем по индукции, что

$$|v_k(\xi,\eta)| \leqslant \frac{1}{k!}\Bigl(2Q_*\Bigl(\frac{\xi}{2}\Bigr)\Bigr)^k, \quad k \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \xi. \tag{2.3.12}$$

В самом деле, оценка (2.3.12) очевидна при $k=0$. Предположим, что оценка (2.3.12) верна при некотором $k \geqslant 0$. Тогда из (2.3.11) вытекает

$$|v_{k+1}(\xi,\eta)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^\xi \Bigl(\int\limits_0^\eta \Bigl|q\Bigl(\frac{\beta-\alpha}{2}\Bigr) v_k(\beta,\alpha)\Bigr|\,d\alpha\Bigr)\,d\beta. \tag{2.3.13}$$

Подставляя (2.3.12) в правую часть (2.3.13), получаем

$$|v_{k+1}(\xi,\eta)| \leqslant \frac{1}{2k!}\int\limits_0^\xi \Bigl(2Q_*\Bigl(\frac{\beta}{2}\Bigr)\Bigr)^k \Bigl(\int\limits_0^\eta \Bigl|q\Bigl(\frac{\beta-\alpha}{2}\Bigr)\Bigr|\,d\alpha\Bigr)\,d\beta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k!}\int\limits_0^\xi \Bigl(2Q_*\Bigl(\frac{\beta}{2}\Bigr)\Bigr)^k \Bigl(\int\limits_0^{\beta/2} |q(s)|\,ds\Bigr)\,d\beta = \frac{1}{k!}\int\limits_0^\xi \Bigl(2Q_*\Bigl(\frac{\beta}{2}\Bigr)\Bigr)^k Q\Bigl(\frac{\beta}{2}\Bigr)\,d\beta =$$

$$= \frac{1}{k!}\int\limits_0^{\xi/2} (2Q_*(s))^k (2Q_*(s))'\,ds = \frac{1}{(k+1)!}\Bigl(2Q_*\Bigl(\frac{\xi}{2}\Bigr)\Bigr)^{k+1},$$

и, следовательно, оценка (2.3.12) доказана.

В силу (2.3.12) ряд

$$v(\xi,\eta) = \sum_{k=0}^\infty v_k(\xi,\eta)$$

сходится абсолютно и равномерно на компактах $0 \leqslant \eta \leqslant \xi \leqslant T$, причем

$$|v(\xi,\eta)| \leqslant \exp\Big(2Q_*\Big(\frac{\xi}{2}\Big)\Big).$$

Функция $v(\xi,\eta)$ является единственным решением уравнения (2.3.10). Следовательно, функция $u(x,t) = v(t+x, t-x)$ является единственным решением краевой задачи (2.3.1)–(2.3.2), причем имеет место (2.3.3).

Случай 2. Пусть $h < 0$. Заменой $w(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)\exp(h\eta)$ сведем (2.3.10) к интегральному уравнению

$$w(\xi,\eta) = 1 - \frac{1}{2}\int_0^\eta\Big(\int_0^\beta q\Big(\frac{\beta-\alpha}{2}\Big)\exp(h(\beta-\alpha))w(\beta,\alpha)\,d\alpha\Big)\,d\beta - \\ - \frac{1}{4}\int_\eta^\xi\Big(\int_0^\eta q\Big(\frac{\beta-\alpha}{2}\Big)\exp(h(\eta-\alpha))w(\beta,\alpha)\,d\alpha\Big)\,d\beta. \quad (2.3.14)$$

Методом последовательных приближений, аналогично случаю 1, получаем, что интегральное уравнение (2.3.14) имеет единственное решение, причем

$$|w(\xi,\eta)| \leqslant \exp\Big(2Q_*\Big(\frac{\xi}{2}\Big)\Big),$$

т. е. теорема 2.3.1 доказана также и для случая $h < 0$. □

Замечание 2.3.2. Из доказательства теоремы 2.3.1 следует, что решение $u(x,t)$ задачи (2.3.1), (2.3.2) в области $\Theta_T := \{(x,t):\ 0 \leqslant x \leqslant t,\ 0 \leqslant x+t \leqslant 2T\}$ однозначно определяется заданием h и $q(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant T$, т. е. если $q(x) = \widetilde{q}(x)$, $x \in [0,T]$ и $h = \widetilde{h}$, то $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t)$ при $(x,t) \in \Theta_T$. Поэтому можно также рассматривать краевую задачу (2.3.1)–(2.3.2) в области Θ_T и изучать обратную задачу восстановления $q(x)$, $0 \leqslant x \leqslant T$ и h по заданному следу $r(t)$, $t \in [0, 2T]$.

Через D_N $(N \geqslant 0)$ обозначим множество функций $f(x)$, $x \geqslant 0$, таких, что при каждом фиксированном $T > 0$ функции $f^{(j)}(x)$, $j = \overline{0, N-1}$ абсолютно непрерывны на $[0,T]$, т. е. $f^{(j)}(x) \in L(0,T)$, $j = \overline{0,N}$. Из доказательства теоремы 2.3.1 вытекает, что $r(t) \in D_2$, $r(0) = 1$, $r'(0) = -h$. Кроме того, функция r'' имеет ту же гладкость, что и потенциал q. Например, если $q \in D_N$, то $r \in D_{N+2}$.

Для решения обратной задачи 2.3.1 будем использовать формулу Римана решения задачи Коши

$$\begin{gathered} u_{tt} - p(t)u = u_{xx} - q(x)u + p_1(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u_{|t=0} = r(x), \quad u_{t|t=0} = s(x). \end{gathered} \quad (2.3.15)$$

Известно (см., например, [174, с. 9], что решение задачи (2.3.15) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(r(x+t) + r(x-t)\Big) + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Big(s(\xi)R(\xi,0,x,t) - r(\xi)R_2(\xi,0,x,t)\Big)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x+\tau-t}^{x+t-\tau} R(\xi,\tau,x,t)p_1(\xi,\tau)\,d\xi,$$

где $R(\xi,\tau,x,t)$ — функция Римана, а $R_2 = \dfrac{\partial R}{\partial \tau}$. Отметим, что если $q(x) \equiv \mathrm{const}$, то $R(\xi,\tau,x,t) = R(\xi - x,\tau,t)$. В частности, решение задачи Коши

$$\begin{gathered} u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad -\infty < t < \infty,\ x > 0, \\ u_{|x=0} = r(t), \quad u_{x|x=0} = hr(t) \end{gathered} \tag{2.3.16}$$

имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(r(t+x) + r(t-x)\Big) - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} r(\xi)(R_2(\xi - t,0,x) - hR(\xi - t,0,x))\,d\xi.$$

Замена переменных $\tau = t - \xi$ приводит к соотношению

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(r(t+x) + r(t-x)\Big) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} r(t-\tau)G(x,\tau)\,d\tau, \tag{2.3.17}$$

где $G(x,\tau) = -R_2(-\tau,0,x) + hR(-\tau,0,x)$.

Замечание 2.3.3. В (2.3.16) возьмем $r(t) = \cos\rho t$. Очевидно, что функция $u(x,t) = \varphi(x,\lambda)\cos\rho t$, где $\varphi(x,\lambda)$ была определена в § 1.1, является решением задачи (2.3.16). Поэтому (2.3.17) дает при $t = 0$:

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} G(x,\tau)\cos\rho\tau\,d\tau.$$

Так как $G(x,-\tau) = G(x,\tau)$, то

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + \int\limits_0^x G(x,\tau)\cos\rho\tau\,d\tau,$$

т. е. получили другой вывод представления (1.1.54). Таким образом, функция $G(x,t)$ является ядром оператора преобразования. В частности, в § 1.1 было показано, что

$$G(x,x) = h + \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt. \tag{2.3.18}$$

Перейдем теперь к решению обратной задачи 2.3.1. Пусть $u(x,t)$ — решение краевой задачи (2.3.1), (2.3.2). Доопределим $u(x,t) = 0$ при $0 \leqslant t < x$ и $u(x,t) = -u(x,-t)$, $r(t) = -r(-t)$ при $t < 0$. Тогда $u(x,t)$ является решением задачи Коши (2.3.16), и поэтому имеет место (2.3.17). Но $u(x,t) = 0$ при $x > |t|$ (это есть проявление связи между $q(x)$ и $r(t)$), и, следовательно,

$$\frac{1}{2}\Big(r(t+x) + r(t-x)\Big) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} r(t-\tau)G(x,\tau)\,d\tau = 0, \quad |t| < x. \tag{2.3.19}$$

Обозначим $a(t) = r'(t)$. Дифференцируя (2.3.19) по t и используя соотношения

$$r(0+) = 1, \quad r(0-) = -1, \tag{2.3.20}$$

получаем

$$G(x,t) + F(x,t) + \int\limits_0^x G(x,\tau)F(t,\tau)\,d\tau = 0, \quad 0 < t < x, \tag{2.3.21}$$

где

$$F(x,t) = \frac{1}{2}\Big(a(t+x) + a(t-x)\Big), \quad a(t) = r'(t). \tag{2.3.22}$$

Уравнение (2.3.21) называется уравнением Гельфанда–Левитана.

Теорема 2.3.2. *При каждом фиксированном $x > 0$ уравнение* (2.3.21) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Зафиксируем $x_0 > 0$. Достаточно доказать, что однородное уравнение

$$g(t) + \int\limits_0^{x_0} g(\tau)F(t,\tau)\,d\tau = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant x_0, \tag{2.3.23}$$

имеет только нулевое решение $g(t) = 0$.

Пусть $g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant x_0$, — решение уравнения (2.3.23). Так как $a(t) = r'(t) \in D_1$, то из (2.3.22), (2.3.23) следует, что $g(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, x_0]$. Доопределим $g(-t) = g(t)$ при $t \in [0, x_0]$ и далее $g(t) = 0$ при $|t| > x_0$.

Покажем, что

$$\int\limits_{-x_0}^{x_0} r(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = 0, \quad t \in [-x_0, x_0]. \tag{2.3.24}$$

В самом деле, в силу (2.3.20) и (2.3.23) имеем

$$\frac{d}{dt}\Big(\int\limits_{-x_0}^{x_0} r(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\int\limits_{-x_0}^{t} r(t-\tau)g(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_{t}^{x_0} r(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\Big) = r(+0)g(t) - r(-0)g(t) + \int\limits_{-x_0}^{x_0} a(t-\tau)g(\tau)\,d\tau =$$

$$= 2\Big(g(t) + \int\limits_{0}^{x_0} g(\tau)F(t,\tau)\,d\tau\Big) = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-x_0}^{x_0} r(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \equiv C_0.$$

Полагая здесь $t=0$ и пользуясь нечетностью функции $r(-\tau)g(\tau)$, находим $C_0 = 0$, т. е. верно (2.3.24).

Обозначим $\Delta_0 = \{(x,t):\ x - x_0 \leqslant t \leqslant x_0 - x,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0\}$ и рассмотрим функцию

$$w(x,t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \quad (x,t) \in \Delta_0, \tag{2.3.25}$$

где $u(x,t)$ — решение краевой задачи (2.3.1)–(2.3.2). Покажем, что

$$w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Delta_0. \tag{2.3.26}$$

Так как $u(x,t) = 0$ при $x > |t|$, то (2.3.25) принимает вид

$$w(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{t-x} u(x,t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t+x}^{\infty} u(x,t-\tau)g(\tau)\,d\tau. \tag{2.3.27}$$

Дифференцируя (2.3.27) и используя соотношения

$$u(x,x) = 1, \quad u(x,-x) = -1, \tag{2.3.28}$$

вычисляем

$$w_x(x,t) = g(t+x) - g(t-x) + \int\limits_{-\infty}^{t-x} u_x(x,t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \\ + \int\limits_{t+x}^{\infty} u_x(x,t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \qquad (2.3.29)$$

$$w_t(x,t) = g(t+x) + g(t-x) + \int\limits_{-\infty}^{t-x} u_t(x,t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \\ + \int\limits_{t+x}^{\infty} u_t(x,t-\tau)g(\tau)\,d\tau. \qquad (2.3.30)$$

Так как в силу (2.3.28) $(u_x(x,t) \pm u_t(x,t))_{|t=\pm x} = \dfrac{d}{dx}u(x,\pm x) = 0$, то из (2.3.29), (2.3.30) вытекает

$$w_{xx}(x,t) - w_{tt}(x,t) - q(x)w(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [u_{xx} - u_{tt} - q(x)u](x,t-\tau)g(\tau)\,d\tau,$$

и, следовательно,

$$w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t) - q(x)w(x,t), \quad (x,t) \in \Delta_0. \qquad (2.3.31)$$

Далее, соотношения (2.3.25) и (2.3.29) дают

$$w(0,t) = \int\limits_{-x_0}^{x_0} r(t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \quad w_x(0,t) = h\int\limits_{-x_0}^{x_0} r(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = 0, \\ t \in [-x_0, x_0].$$

Поэтому, согласно (2.3.24), имеем

$$w(0,t) = w_x(0,t) = 0, \quad t \in [-x_0, x_0]. \qquad (2.3.32)$$

Так как задача Коши (2.3.31)–(2.3.32) имеет только нулевое решение, то приходим к (2.3.26).

Обозначим $u_1(x,t) := u_t(x,t)$. Из (2.3.30) находим

$$w_t(x,0) = 2g(x) + \int\limits_{-\infty}^{-x} u_1(x,\tau)g(\tau)\,d\tau + \int\limits_{x}^{\infty} u_1(x,\tau)g(\tau)\,d\tau =$$

$$= 2\Big(g(x) + \int_x^\infty u_1(x,\tau)g(\tau)\,d\tau\Big) = 2\Big(g(x) + \int_x^{x_0} u_1(x,\tau)g(\tau)\,d\tau\Big).$$

Учитывая (2.3.26), получаем

$$g(x) + \int_x^{x_0} u_1(x,\tau)g(\tau)\,d\tau = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0.$$

Это интегральное уравнение имеет только нулевое решение $g(x) = 0$, и, следовательно, теорема 2.3.2 доказана. □

Пусть r и $\widetilde{r}$ являются следами решений для краевых задач $B(q(x),h)$ и $B(\widetilde{q}(x),\widetilde{h})$ соответственно.

Теорема 2.3.3. *Если* $r(t) = \widetilde{r}(t)$, $t \geqslant 0$, *то* $q(x) = \widetilde{q}(x)$, $x \geqslant 0$, *и* $h = \widetilde{h}$. *Таким образом, задание следа* r *однозначно определяет потенциал* q *и коэффициент* h.

Доказательство. Так как $r(t) = \widetilde{r}(t)$, $t \geqslant 0$, то согласно (2.3.22) имеем: $F(x,t) = \widetilde{F}(x,t)$. Поэтому теорема 2.3.2 дает

$$G(x,t) = \widetilde{G}(x,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant x. \tag{2.3.33}$$

В силу (2.3.18)

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}G(x,x), \quad h = G(0,0) = -r'(0). \tag{2.3.34}$$

Отсюда и из (2.3.33) заключаем, что $q(x) = \widetilde{q}(x)$, $x \geqslant 0$ и $h = \widetilde{h}$. □

Уравнение Гельфанда–Левитана (2.3.21) и теорема 2.3.2 приводят к следующему алгоритму решения обратной задачи 2.3.1.

Алгоритм 2.3.1. *Пусть задан след* $r(t)$, $t \geqslant 0$.
1) *Строим* $F(x,t)$, *используя* (2.3.22).
2) *Находим* $G(x,t)$ *из уравнения* (2.3.21).
3) *Вычисляем* $q(x)$ *и* h *по формулам* (2.3.34).

Замечание 2.3.4. Укажем кратко на связь обратной задачи 2.3.1 с обратной спектральной задачей, рассмотренной в § 2.2. Пусть $q(x) \in L(0,\infty)$, и пусть $u(x,t)$ — решение задачи (2.3.1), (2.3.2). Тогда согласно (2.3.3) $|u(x,t)| \leqslant C_1 \exp(C_2 t)$. Обозначим

$$\Phi(x,\lambda) = -\int_x^\infty u(x,t)\exp(i\rho t)dt, \quad x \geqslant 0, \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0,$$

$$M(\lambda) = -\int_0^\infty r(t)\exp(i\rho t)dt, \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0.$$

Нетрудно убедиться, что $\Phi(x,\lambda)$ и $M(\lambda)$ являются решением Вейля и функцией Вейля для пары $L = L(q(x),h)$ вида (2.1.1), (2.1.2). Формула обращения для преобразования Лапласа дает

$$r(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1} M(\lambda)\exp(-i\rho t)\,d\rho = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\sin\rho t}{\rho}(2\rho)M(\lambda)\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\sin\rho t}{\rho}M(\lambda)\,d\lambda,$$

где γ — контур, введенный в § 2.1 (см. рис. 2.1.1), а γ_1 — образ γ при отображении $\rho \to \lambda = \rho^2$. Пусть $\widetilde{q}(x) = \widetilde{h} = 0$. Так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\sin\rho t}{\rho}\widetilde{M}(\lambda)\,d\lambda = \widetilde{r}(t) = 1,$$

то

$$r(t) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\sin\rho t}{\rho}\widehat{M}(\lambda)\,d\lambda.$$

Если выполняется соотношение (2.2.5), то

$$a(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\cos\rho t\,\widehat{M}(\lambda)d\lambda,$$

и, следовательно,

$$F(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\cos\rho x\cos\rho t\,\widehat{M}(\lambda)d\lambda,$$

т. е. уравнение (2.3.21) совпадает с уравнением (2.2.42).

Приведем теперь необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи 2.3.1.

Теорема 2.3.4. *Для того чтобы функция $r(t)$, $t \geqslant 0$ была следом для некоторой краевой задачи $B(q(x),h)$ вида* (2.3.1), (2.3.2) *с* $q \in D_N$, *необходимо и достаточно, чтобы* $r(t) \in D_{N+2}$, $r(0) = 1$ *и при каждом фиксированном* $x > 0$ *интегральное уравнение* (2.3.21) *было однозначно разрешимо.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы 2.3.4 доказана выше; здесь мы докажем достаточность. Пусть для простоты $N \geqslant 1$ (случай $N = 0$ требует небольших изменений). Пусть дана функция $r(t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющая условиям теоремы 2.3.4, и пусть $G(x,t)$, $0 \leqslant t \leqslant x$, — решение уравнения (2.3.21). Доопределим $G(x,t) = G(x,-t)$, $r(t) = -r(-t)$ при $t < 0$ и рассмотрим функцию

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\Big(r(t+x) + r(t-x)\Big) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} r(t-\tau)G(x,\tau)\,d\tau,$$
$$-\infty < t < \infty,\ x \geqslant 0. \quad (2.3.35)$$

Далее, построим q и h по формулам (2.3.34) и рассмотрим краевую задачу (2.3.1)–(2.3.2) с этими q и h. Пусть $\widetilde{u}(x,t)$ — решение задачи (2.3.1)–(2.3.2), и пусть $\widetilde{r}(t) := \widetilde{u}(0,t)$. Осталось доказать, что $\widetilde{u} = u$, $\widetilde{r} = r$.

Дифференцируя (2.3.35) и учитывая (2.3.20), получаем

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\Big(a(t+x) + a(t-x)\Big) + G(x,t) + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} a(t-\tau)G(x,\tau)\,d\tau, \quad (2.3.36)$$

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2}\Big(a(t+x) - a(t-x)\Big) + \\ + \frac{1}{2}\Big(r(t-x)G(x,x) + r(t+x)G(x,-x)\Big) + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} r(t-\tau)G_x(x,\tau)\,d\tau. \quad (2.3.37)$$

Так как $a(0+) = a(0-)$, то из (2.3.36) выводим

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(a'(t+x) + a'(t-x)\Big) + G_t(x,t) + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} a'(t-\tau)G(x,\tau)\,d\tau. \quad (2.3.38)$$

Интегрирование по частям дает

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(a'(t+x) + a'(t-x)\Big) + G_t(x,t) - \\ - \frac{1}{2}\Big(a(t-\tau)G(x,\tau)\Big|_{-x}^{t} + a(t-\tau)G(x,\tau)\Big|_{t}^{x}\Big) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} a(t-\tau)G_t(x,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(a'(t+x) + a'(t-x)\Big) + G_t(x,t) + \frac{1}{2}\Big(a(t+x)G(x,-x) - \\ - a(t-x)G(x,x)\Big) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} r'(t-\tau)G_t(x,\tau)\,d\tau.$$

Снова интегрируя по частям и используя (2.3.20), находим

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(a'(t+x) + a'(t-x)\Big) + G_t(x,t) + \\ + \frac{1}{2}\Big(a(t+x)G(x,-x) - a(t-x)G(x,x)\Big) - \\ - \frac{1}{2}\Big(r(t-\tau)G_t(x,\tau)\Big|_{-x}^{t} + r(t-\tau)G_t(x,\tau)\Big|_{t}^{x}\Big) + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} r(t-\tau)G_{tt}(x,\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\Big(a'(t+x) + a'(t-x)\Big) + \\ + \frac{1}{2}\Big(a(t+x)G(x,-x) - a(t-x)G(x,x)\Big) + \\ + \frac{1}{2}\Big(r(t+x)G_t(x,-x) - r(t-x)G_t(x,x)\Big) + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} r(t-\tau)G_{tt}(x,\tau)\,d\tau. \quad (2.3.39)$$

Дифференцируя (2.3.37), получаем

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(a'(t+x) + a'(t-x)\Big) + \\ + \frac{1}{2}\Big(a(t+x)G(x,-x) - a(t-x)G(x,x)\Big) + \\ + \frac{1}{2}\Big(r(t+x)\frac{d}{dx}G(x,-x) + r(t-x)\frac{d}{dx}G(x,x)\Big) + \\ + \frac{1}{2}\Big(r(t+x)G_x(x,-x) + r(t-x)G_x(x,x)\Big) + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} r(t-\tau)G_{xx}(x,\tau)\,d\tau.$$

Вместе с (2.3.35), (2.3.39) и (2.3.34) это дает

$$u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) - u_{tt}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} r(t-\tau)g(x,\tau)\,d\tau,$$

$$-\infty < t < \infty, \quad x \geqslant 0, \tag{2.3.40}$$

где

$$g(x,t) = G_{xx}(x,t) - G_{tt}(x,t) - q(x)G(x,t).$$

Покажем, что

$$u(x,t) = 0, \quad x > |t|. \tag{2.3.41}$$

В самом деле, из (2.3.36) и (2.3.21) вытекает, что $u_t(x,t) = 0$ при $x > |t|$, и, следовательно, $u(x,t) \equiv C_0(x)$ при $x > |t|$. Полагая $t = 0$ в (2.3.35), вычисляем

$$C_0(x) = \frac{1}{2}\Big(r(x) + r(-x)\Big) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} r(-\tau)G(x,\tau)\,d\tau = 0,$$

т. е. приходим к (2.3.41).

Из (2.3.40) и (2.3.41) следует, что

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} r(t-\tau)g(x,\tau)\,d\tau = 0, \quad x > |t|. \tag{2.3.42}$$

Дифференцируя (2.3.42) по t и учитывая (2.3.20), находим

$$\frac{1}{2}\Big(r(0+)g(x,t) - r(0-)g(x,t)\Big) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} a(t-\tau)g(x,\tau)\,d\tau = 0,$$

или

$$g(x,t) + \int\limits_{0}^{x} F(t,\tau)g(x,\tau)\,d\tau = 0.$$

Согласно теореме 2.3.2 это однородное уравнение имеет только нулевое решение $g(x,t) = 0$, т. е.

$$G_{tt} = G_{xx} - q(x)G, \quad 0 < |t| < x. \tag{2.3.43}$$

Далее, из (2.3.38) при $t = 0$ и (2.3.41) вытекает

$$0 = \frac{1}{2}\Big(a'(x) + a'(-x)\Big) + G_t(x,0) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} a'(-\tau)G(x,\tau)\,d\tau.$$

Так как $a'(x) = -a'(-x)$, $G(x,t) = G(x,-t)$, то

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{2.3.44}$$

В силу (2.3.34) функция $G(x,t)$ удовлетворяет также (2.3.18).

Из (2.3.40) и (2.3.43) вытекает

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t), \quad -\infty < t < \infty, \quad x \geqslant 0.$$

Кроме того, (2.3.35) и (2.3.37) дают (с учетом равенства $h = G(0,0)$)

$$u_{|x=0} = r(t), \quad u_{x|x=0} = hr(t).$$

Покажем, что

$$u(x,x) = 1, \quad x \geqslant 0. \tag{2.3.45}$$

Так как функция $G(x,t)$ удовлетворяет (2.3.43), (2.3.44) и (2.3.18), то согласно (2.3.17) имеем

$$\widetilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\widetilde{r}(t+x) + \widetilde{r}(t-x)\Big) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} \widetilde{r}(t-\tau)G(x,\tau)\,d\tau. \tag{2.3.46}$$

Сравнивая (2.3.35) с (2.3.46), получаем

$$\widehat{u}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\widehat{r}(t+x) + \widehat{r}(t-x)\Big) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} \widehat{r}(t-\tau)G(x,\tau)\,d\tau,$$

где $\widehat{u} = u - \widetilde{u}$, $\widehat{r} = r - \widetilde{r}$. Так как функция $\widehat{r}(t)$ непрерывна при $-\infty < t < \infty$, то функция $\widehat{u}(x,t)$ также непрерывна при $-\infty < t < \infty$, $x > 0$. С другой стороны, в силу (2.3.41) имеем: $\widehat{u}(x,t) = 0$ при $x > |t|$, и, следовательно, $\widehat{u}(x,x) = 0$. Согласно (2.3.2) $\widetilde{u}(x,x) = 1$, и мы приходим к (2.3.45). Таким образом, функция $u(x,t)$ является решением краевой задачи (2.3.1)–(2.3.2). В силу теоремы 2.3.1 получаем $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t)$, и, следовательно, $r(t) = \widetilde{r}(t)$. Теорема 2.3.4 доказана. ☐

2.3.2. Обобщенная функция Вейля. Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейную форму $L = L(q(x), h)$:

$$\ell y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x > 0,$$
$$U(y) := y'(0) - hy(0).$$

В этом пункте исследуется обратная спектральная задача для L в случае, когда $q(x)$ — локально суммируемая комплекснозначная функция, и h — комплексное число. Для этого случая в качестве основной спектральной характеристики вводится так называемая обобщенная функция Вейля. Отметим, что В.А. Марченко [174] применял обобщенную спектральную функцию при решении обратной задачи для несамосопряженного оператора Штурма–Лиувилля с локально суммируемым потенциалом.

Введем пространство обобщенных функций. Пусть D — множество всех суммируемых ограниченных на вещественной оси целых функций экспоненциального типа с обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа и со следующей сходимостью: последовательность $z_k(\rho)$ сходится к $z(\rho)$, если типы σ_k функций $z_k(\rho)$ ограничены $(\sup \sigma_k < \infty)$ и $\|z_k(\rho) - z(\rho)\|_{L(-\infty,\infty)} \to 0$ при $k \to \infty$. Линейное многообразие D с таким определением сходимости примем за пространство основных функций.

Определение 2.3.1. Линейные непрерывные функционалы

$$R: \ D \to \mathbf{C}, \ z(\rho) \mapsto R(z(\rho)) = (z(\rho), R),$$

определенные на основном пространстве D, называются обобщенными функциями (ОФ). Множество всех ОФ обозначается через D'. Последовательность ОФ $R_k \in D'$ сходится к $R \in D'$, если $\lim(z(\rho), R_k) = (z(\rho), R)$, $k \to \infty$, для любой $z(\rho) \in D$. ОФ $R \in D'$ называется регулярной, если она определяется функцией $R(\rho) \in L_\infty$ по формуле

$$(z(\rho), R) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z(\rho) R(\rho)\, d\rho.$$

Определение 2.3.2. Пусть функция $f(t)$ локально суммируема при $t > 0$ (т. е. суммируема на каждом конечном отрезке $[0, T]$). ОФ $L_f(\rho) \in D'$, определяемая равенством

$$(z(\rho), L_f(\rho)) := \int\limits_0^{\infty} f(t) \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} z(\rho) \exp(i\rho t)\, d\rho \Big)\, dt, \quad z(\rho) \in D, \qquad (2.3.47)$$

называется обобщенным преобразованием Фурье–Лапласа для функции $f(t)$.

Так как $z(\rho) \in D$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |z(\rho)|^2\, d\rho \leqslant \sup_{-\infty<\rho<\infty} |z(\rho)| \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} |z(\rho)|\, d\rho,$$

т. е. $z(\rho) \in L_2(-\infty, \infty)$. Поэтому в силу теоремы Пэли–Винера [311] функция

$$B(t) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} z(\rho) \exp(i\rho t)\, d\rho$$

является непрерывной и финитной, т. е. существует $d > 0$ такое, что $B(t) = 0$ при $|t| > d$ и

$$z(\rho) = \int_{-d}^{d} B(t) \exp(-i\rho t)\, dt. \tag{2.3.48}$$

Следовательно, интеграл в (2.3.47) существует. Отметим, что если $f(t) \in L(0, \infty)$, то

$$(z(\rho), L_f(\rho)) := \int_{-\infty}^{\infty} z(\rho)\Bigl(\int_{0}^{\infty} f(t)\exp(i\rho t)\, dt\Bigr)\, d\rho,$$

т. е. $L_f(\rho)$ является регулярной ОФ (порожденной $\int_0^\infty f(t)\exp(i\rho t)\, dt$) и совпадает с обычным преобразованием Фурье–Лапласа для функции $f(t)$. Так как

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos\rho x}{\rho^2}\exp(i\rho t)d\rho = \begin{cases} x-t, & t < x, \\ 0, & t > x, \end{cases}$$

то имеет место следующая формула обращения:

$$\int_{0}^{x}(x-t)f(t)dt = \left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-\cos\rho x}{\rho^2},\ L_f(\rho)\right). \tag{2.3.49}$$

Пусть функция $u(x,t)$ является решением задачи (2.3.1), (2.3.2) с локально суммируемым комплекснозначным потенциалом $q(x)$. Доопределим $u(x,t) = 0$ при $0 < t < x$ и обозначим $\Phi(x,\lambda) := -L_u(\rho)$ $(\lambda = \rho^2)$, т. е.

$$(z(\rho), \Phi(x,\lambda)) = -\int_{x}^{\infty} u(x,t)\Bigl(\int_{-\infty}^{\infty} z(\rho)\exp(i\rho t)d\rho\Bigr)\, dt. \tag{2.3.50}$$

При $z(\rho) \in D,\ \rho^2 z(\rho) \in L(-\infty,\infty),\ \nu = 1, 2$ положим

$$(z(\rho), (i\rho)^\nu\Phi(x,\lambda)) := ((i\rho)^\nu z(\rho), \Phi(x,\lambda)),$$
$$(z(\rho), \Phi^{(\nu)}(x,\lambda)) := \frac{d^\nu}{dx^\nu}(z(\rho), \Phi(x,\lambda)).$$

Теорема 2.3.5. *Справедливы соотношения*

$$\ell\Phi(x,\lambda) = \lambda\Phi(x,\lambda), \quad U(\Phi) = 1.$$

Доказательство. Вычисляем

$$(z(\rho), \ell\Phi(x,\lambda)) = (z(\rho), -\Phi''(x,\lambda) + q(x)\Phi(x,\lambda)) =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} (i\rho)z(\rho)\exp(i\rho x)d\rho - u_x(x,x)\int\limits_{-\infty}^{\infty} z(\rho)\exp(i\rho x)d\rho +$$

$$+ \int\limits_{x}^{\infty}\Big(u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t)\Big)\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} z(\rho)\exp(i\rho t)\,d\rho\Big)\,dt,$$

$$(z(\rho), \lambda\Phi(x,\lambda)) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} (i\rho)z(\rho)\exp(i\rho x)d\rho -$$

$$- u_t(x,x)\int\limits_{-\infty}^{\infty} z(\rho)\exp(i\rho x)d\rho +$$

$$+ \int\limits_{x}^{\infty} u_{tt}(x,t)\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} z(\rho)\exp(i\rho t)\,d\rho\Big)\,dt.$$

Используя тождество $u_t(x,x) + u_x(x,x) = \dfrac{d}{dx}u(x,x) \equiv 0$, получаем $(z(\rho), \ell\Phi(x,\lambda) - \lambda\Phi(x,\lambda)) = 0$. Далее, так как

$$(z(\rho), \Phi'(x,\lambda)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z(\rho)\exp(i\rho x)\,d\rho -$$

$$- \int\limits_{x}^{\infty} u_x(x,t)\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} z(\rho)\exp(i\rho t)\,d\rho\Big)\,dt,$$

то

$$(z(\rho), U(\Phi)) = (z(\rho), \Phi'(0,\lambda) - h\Phi(0,\lambda)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z(\rho)\,d\rho,$$

и теорема 2.3.5 доказана. □

Определение 2.3.3. ОФ $\Phi(x,\lambda)$ называется *обобщенным решением Вейля*, а ОФ $M(\lambda) := \Phi(0,\lambda)$ называется *обобщенной функцией Вейля* (ОФВ) для $L(q(x), h)$.

Отметим, что если $q(x) \in L(0,\infty)$, то $|u(x,t)| \leqslant C_1\exp(C_2 t)$, и $\Phi(x,\lambda)$, $M(\lambda)$ совпадают с обычными решением и функцией Вейля соответственно (см. замечание 2.3.4).

Обратная задача формулируется следующим образом.

Задача 2.3.2. По заданной ОФВ $M(\lambda)$ построить потенциал $q(x)$ и число h.

Обозначим $r(t) := u(0,t)$. Из (2.3.50) вытекает

$$(z(\rho), M(\lambda)) = -\int\limits_0^\infty r(t)\Big(\int\limits_{-\infty}^\infty z(\rho)\exp(i\rho t)\,d\rho\Big)\,dt,$$

т. е. $M(\lambda) = -L_r(\rho)$. Используя (2.3.49), получаем дифференцированием

$$r(t) = -\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-\cos\rho t}{\rho^2},\ M(\lambda)\right), \tag{2.3.51}$$

и обратная задача 2.3.2 сводится к обратной задаче 2.3.1 по следу r, рассмотренной в 2.3.1. Таким образом, доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.3.6. *Пусть* $M(\lambda)$ *и* $\widetilde{M}(\lambda)$ *— ОФВ для* $L = L(q(x), h)$ *и* $\widetilde{L} = L(\widetilde{q}(x), \widetilde{h})$ *соответственно. Если* $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$, *то* $L = \widetilde{L}$. *Таким образом, задание ОФВ однозначно определяет потенциал* q *и коэффициент* h.

Теорема 2.3.7. *Пусть* $\varphi(x,\lambda)$ *— решение уравнения* $\ell\varphi = \lambda\varphi$ *при начальных условиях* $\varphi(0,\lambda) = 1$, $\varphi'(0,\lambda) = h$. *Тогда справедливо представление*

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + \int\limits_0^x G(x,t)\cos\rho t\,dt,$$

причем функция $G(x,t)$ *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$G(x,t) + F(x,t) + \int\limits_0^x G(x,\tau)F(t,\tau)\,d\tau = 0, \quad 0 < t < x, \tag{2.3.52}$$

где $F(x,t) = (r'(t+x) + r'(t-x))/2$. *Функция* r *определяется по формуле* (2.3.51), *причем* $r \in D_2$. *Если* $q \in D_N$, *то* $r \in D_{N+2}$. *Кроме того, при каждом фиксированном* $x > 0$ *интегральное уравнение* (2.3.52) *однозначно разрешимо.*

Теорема 2.3.8. *Для того чтобы ОФ* $M \in D'$ *была ОФВ для некоторой пары* $L(q(x), h)$ *с* $q \in D_N$, *необходимо и достаточно, чтобы*

1) $r \in D_{N+2}$, $r(0) = 1$, *где* r *определяется по формуле* (2.3.51);

2) *при каждом* $x > 0$ *интегральное уравнение* (2.3.52) *было однозначно разрешимо.*

Потенциал q и коэффициент h строятся по следующему алгоритму.

Алгоритм 2.3.2. *Дана ОФВ* $M(\lambda)$.

1) *Строим* $r(t)$ *по формуле* (2.3.51).

2) *Находим* $G(x,t)$ *из интегрального уравнения* (2.3.52).

3) *Вычисляем* $q(x)$ *и* h *по формулам* $q(x) = 2\dfrac{dG(x,x)}{dx}$, $h = G(0,0)$.

В заключение докажем теорему о разложении для случая локально суммируемых комплекснозначных потенциалов q.

Теорема 2.3.9. *Пусть $f(x) \in W_2$. Тогда равномерно на компактах*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\Big(\varphi(x,\lambda)F(\lambda)(i\rho), M(\lambda)\Big), \tag{2.3.53}$$

где

$$F(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(t)\varphi(t,\lambda)\,dt. \tag{2.3.54}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $q(x) \in L(0,\infty)$. Пусть $f(x) \in Q$, где $Q = \{f \in W_2 : U(f) = 0,\ \ell f \in L_2(0,\infty)\}$ (общий случай, когда $f \in W_2$, требует небольших изменений).

Пусть $D^+ = \{z(\rho) \in D : \rho z(\rho) \in L_2(-\infty,\infty)\}$. Ясно, что $z(\rho) \in D^+$ тогда и только тогда, когда $B(t) \in W_2^1[-d,d]$ в (2.3.48). Для $z(\rho) \in D^+$ интегрирование по частям в (2.3.48) дает

$$z(\rho) = \int\limits_{-d}^{d} B(t)\exp(-i\rho t)\,dt = \frac{1}{i\rho}\int\limits_{-d}^{d} B'(t)\exp(-i\rho t)\,dt.$$

Используя (2.3.54), вычисляем

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty f(t)\Big(-\varphi''(t,\lambda) + q(t)\varphi(t,\lambda)\Big)\,dt = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty \varphi(t,\lambda)\ell f(t)\,dt,$$

и, следовательно, $F(\lambda)(i\rho) \in D^+$. В силу теоремы 2.1.8 имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \varphi(x,\lambda)F(\lambda)M(\lambda)\,d\lambda = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\gamma_1} \varphi(x,\lambda)F(\lambda)(i\rho)M(\lambda)\,d\rho, \tag{2.3.55}$$

где контур γ_1 в ρ-плоскости является образом γ при отображении $\rho \to \lambda = \rho^2$. Согласно замечанию 2.3.4

$$M(\lambda) = -\int\limits_0^\infty r(t)\exp(i\rho t)\,dt, \quad |r(t)| \leqslant C_1\exp(C_2 t). \tag{2.3.56}$$

Возьмем $b > C_2$. Тогда по теореме Коши из (2.3.55)–(2.3.56) выводим

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \varphi(x,\lambda)F(\lambda)(i\rho)\Big(-\int\limits_0^\infty r(t)\exp(i\rho t)\,dt\Big)\,d\rho =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty r(t)\Big(\int\limits_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \varphi(x,\lambda)F(\lambda)(i\rho)\exp(i\rho t)\,d\rho\Big)\,dt.$$

Снова используя теорему Коши, получаем

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}r(t)\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\lambda)F(\lambda)(i\rho)\exp(i\rho t)\,d\rho\Big)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big(\varphi(x,\lambda)F(\lambda)(i\rho),M(\lambda)\Big),$$

т. е. верно (2.3.53).

Пусть теперь $q(x)$ является локально суммируемой комплекснозначной функцией. Обозначим

$$q_R(x)=\begin{cases} q(x), & 0\leqslant x\leqslant R,\\ 0, & x>R.\end{cases}$$

Пусть $r_R(t)$ — след, построенный для потенциала q_R. Согласно замечанию 2.3.2

$$r_R(t)=r(t)\ \text{ при }\ t\leqslant 2R. \tag{2.3.57}$$

Так как $q_R(x)\in L(0,\infty)$, то в силу (2.3.53) имеем

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}r_R(t)\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\lambda)F(\lambda)(i\rho)\exp(i\rho t)\,d\rho\Big)\,dt.$$

Пусть $x\in[0,T]$ при некотором $T>0$. Тогда существует $d>0$ такое, что

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{d}r_R(t)\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\lambda)F(\lambda)(i\rho)\exp(i\rho t)\,d\rho\Big)\,dt,\qquad 0\leqslant x\leqslant T.$$

При достаточно большом R $(R>d/2)$ в силу (2.3.57) имеем

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{d}r(t)\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\lambda)F(\lambda)(i\rho)\exp(i\rho t)\,d\rho\Big)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}r(t)\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\lambda)F(\lambda)(i\rho)\exp(i\rho t)\,d\rho\Big)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big(\varphi(x,\lambda)F(\lambda)(i\rho),M(\lambda)\Big),$$

т. е. верно соотношение (2.3.53), и теорема 2.3.9 доказана. □

Замечание 2.3.5. Задание ОФВ M равносильно заданию обобщенной спектральной функции (ОСФ) R, введенной В.А. Марченко (см. [174]). Более того, можно показать, что $R(\rho)=\pi^{-1}(i\rho)M(\lambda)$. В самосопряженном случае (когда потенциал $q(x)$ является вещественной локально суммируемой функцией, а h — вещественное число) имеем: $(f(\lambda), R) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\sigma(\lambda)$, где $\sigma(\lambda)$ — спектральная функция оператора. Таким образом, обратная задача для самосопряженного оператора Штурма–Лиувилля по спектральной функции является частным случаем обратной задачи 2.3.2 по ОФВ.

§ 2.4. Операторы Штурма–Лиувилля на оси

В §§ 2.4, 2.5 рассматриваются сингулярные дифференциальные операторы Штурма–Лиувилля на оси и дается решение обратной задачи рассеяния. В § 2.4 вводятся данные рассеяния и изучаются их свойства. В § 2.5, используя метод оператора преобразования, мы даем вывод так называемого основного уравнения и доказываем его однозначную разрешимость. Используя основное уравнение, мы получаем алгоритм решения обратной задачи рассеяния и необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Далее рассматривается важный частный случай — класс безотражательных потенциалов; приводятся явные формулы для построения таких потенциалов. В заключение методом обратной задачи рассеяния дается решение задачи Коши для нелинейного уравнения Кортевега–де Фриза. Отметим, что обратная задача рассеяния на оси для оператора Штурма–Лиувилля рассматривалась многими авторами (см., например, [173, 164, 80, 70]).

2.4.1. Решения Йоста. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ell y := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty. \tag{2.4.1}$$

Везде в этом пункте будем предполагать, что функция $q(x)$ вещественна и

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|q(x)|\, dx < \infty. \tag{2.4.2}$$

Пусть $\lambda = \rho^2$, $\rho = \sigma + i\tau$, и пусть для определенности $\tau := \operatorname{Im} \rho \geqslant 0$. Обозначим $\Omega_+ = \{\rho : \ \operatorname{Im} \rho > 0\}$,

$$Q_0^+(x) = \int_x^{\infty} |q(t)|\, dt, \quad Q_1^+(x) = \int_x^{\infty} Q_0^+(t)\, dt = \int_x^{\infty} (t - x)|q(t)|\, dt,$$

$$Q_0^-(x) = \int_{-\infty}^{x} |q(t)|\, dt, \quad Q_1^-(x) = \int_{-\infty}^{x} Q_0^-(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} (t - x)|q(t)|\, dt.$$

Ясно, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} Q_j^{\pm}(x) = 0$. Следующая теорема вводит решения Йоста $e(x, \rho)$ и $g(x, \rho)$ с заданным поведением на $\pm\infty$.

Теорема 2.4.1. *Уравнение* (2.4.1) *имеет единственные решения* $y = e(x, \rho)$ *и* $y = g(x, \rho)$, *удовлетворяющие интегральным уравнени-*

ям

$$e(x,\rho)=\exp(i\rho x)+\int\limits_x^{\infty}\frac{\sin\rho(t-x)}{\rho}q(t)e(t,\rho)\,dt,$$

$$g(x,\rho)=\exp(-i\rho x)+\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}q(t)g(t,\rho)\,dt.$$

Функции $e(x,\rho)$ и $g(x,\rho)$ обладают следующими свойствами.

1) *При каждом фиксированном x функции $e^{(\nu)}(x,\rho)$ и $g^{(\nu)}(x,\rho)$ $(\nu=0,1)$ аналитичны в Ω_+ и непрерывны в $\overline{\Omega}_+$.*

2) *При $\nu=0,1$ имеем*

$$\begin{aligned}e^{(\nu)}(x,\rho)&=(i\rho)^{\nu}\exp(i\rho x)(1+o(1)),\quad x\to+\infty,\\ g^{(\nu)}(x,\rho)&=(-i\rho)^{\nu}\exp(-i\rho x)(1+o(1)),\quad x\to-\infty,\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

равномерно в $\overline{\Omega}_+$. Кроме того, при $\rho\in\overline{\Omega}_+$:

$$\begin{gathered}|e(x,\rho)\exp(-i\rho x)|\leqslant\exp(Q_1^+(x)),\\ |e(x,\rho)\exp(-i\rho x)-1|\leqslant Q_1^+(x)\exp(Q_1^+(x)),\\ |e'(x,\rho)\exp(-i\rho x)-i\rho|\leqslant Q_0^+(x)\exp(Q_1^+(x)),\end{gathered}\tag{2.4.4}$$

$$\begin{gathered}|g(x,\rho)\exp(i\rho x)|\leqslant\exp(Q_1^-(x)),\\ |g(x,\rho)\exp(i\rho x)-1|\leqslant Q_1^-(x)\exp(Q_1^-(x)),\\ |g'(x,\rho)\exp(i\rho x)+i\rho|\leqslant Q_0^-(x)\exp(Q_1^-(x)).\end{gathered}\tag{2.4.5}$$

3) *При каждом $\rho\in\Omega_+$ и при каждом вещественном α: $e(x,\rho)\in L_2(\alpha,\infty)$, $g(x,\rho)\in L_2(-\infty,\alpha)$. Кроме того, $e(x,\rho)$ и $g(x,\rho)$ являются единственными решениями* (2.4.1) (*с точностью до постоянного множителя*) *с этим свойством.*

4) *При $|\rho|\to\infty$, $\rho\in\overline{\Omega}_+$, $\nu=0,1$ имеем*

$$\begin{aligned}&e^{(\nu)}(x,\rho)=(i\rho)^{\nu}\exp(i\rho x)\Big(1+\frac{\omega^+(x)}{i\rho}+o\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big),\\ &\qquad\qquad\omega^+(x)=-\frac{1}{2}\int\limits_x^{\infty}q(t)\,dt,\\ &g^{(\nu)}(x,\rho)=(-i\rho)^{\nu}\exp(-i\rho x)\Big(1+\frac{\omega^-(x)}{i\rho}+o\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big),\\ &\qquad\qquad\omega^-(x)=-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x}q(t)\,dt\end{aligned}\tag{2.4.6}$$

равномерно по $x\geqslant\alpha$ и $x\leqslant\alpha$ соответственно.

5) *При вещественных* $\rho \neq 0$ *функции* $\{e(x,\rho), e(x,-\rho)\}$ *и* $\{g(x,\rho), g(x,-\rho)\}$ *образуют фундаментальные системы решений для* (2.4.1) *и*

$$\langle e(x,\rho), e(x,-\rho)\rangle = -\langle g(x,\rho), g(x,-\rho)\rangle \equiv -2i\rho, \tag{2.4.7}$$

где $\langle y,z\rangle := yz' - y'z$.

6) *Функции* $e(x,\rho)$ *и* $g(x,\rho)$ *имеют представления*

$$\begin{gathered} e(x,\rho) = \exp(i\rho x) + \int\limits_x^\infty A^+(x,t)\exp(i\rho t)\,dt, \\ g(x,\rho) = \exp(-i\rho x) + \int\limits_{-\infty}^x A^-(x,t)\exp(-i\rho t)\,dt, \end{gathered} \tag{2.4.8}$$

где $A^\pm(x,t)$ — *вещественные непрерывные функции, причем*

$$A^+(x,x) = \frac{1}{2}\int\limits_x^\infty q(t)dt, \quad A^-(x,x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^x q(t)dt, \tag{2.4.9}$$

$$|A^\pm(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}Q_0^\pm\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\exp\Big(Q_1^\pm(x) - Q_1^\pm\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\Big). \tag{2.4.10}$$

Функции $A^\pm(x,t)$ *имеют первые производные* $A_1^\pm := \dfrac{\partial A^\pm}{\partial x}$, $A_2^\pm := = \dfrac{\partial A^\pm}{\partial t}$; *функции*

$$A_i^\pm(x,t) \pm \frac{1}{4}\,q\Big(\frac{x+t}{2}\Big)$$

абсолютно непрерывны по x *и* t, *и*

$$\Big|A_i^\pm(x,t) \pm \frac{1}{4}\,q\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\Big| \leqslant \frac{1}{2}\,Q_0^\pm(x)Q_0^\pm\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\exp(Q_1^\pm(x)), \quad i = 1,2. \tag{2.4.11}$$

Для функции $e(x,\rho)$ теорема 2.4.1 доказана в § 2.1 (см. теоремы 2.1.1–2.1.3). Для $g(x,\rho)$ рассуждения аналогичны. Кроме того, все утверждения теоремы 2.4.1 для $g(x,\rho)$ могут быть получены из соответствующих утверждений для $e(x,\rho)$ заменой $x \to -x$.

В следующей лемме мы описываем свойства решений Йоста $e_j(x,\rho)$ и $g_j(x,\rho)$, построенным для потенциалов q_j, которые аппроксимируют q.

Лемма 2.4.1. *Если* $(1+|x|)|q(x)| \in L(a,\infty)$, $a > -\infty$, *и*

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_a^\infty (1+|x|)|q_j(x) - q(x)|\,dx = 0, \tag{2.4.12}$$

то

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{\rho\in\overline{\Omega_+}}\sup_{x\geqslant a}|(e_j^{(\nu)}(x,\rho)-e^{(\nu)}(x,\rho))\exp(-i\rho x)|=0,\quad \nu=0,1. \tag{2.4.13}$$

Если $(1+|x|)|q(x)|\in L(-\infty,a)$, $a<\infty$, *и* $\lim\limits_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{a}(1+|x|)|q_j(x)-q(x)|\,dx=0$, *то*

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{\rho\in\overline{\Omega_+}}\sup_{x\leqslant a}|(g_j^{(\nu)}(x,\rho)-g^{(\nu)}(x,\rho))\exp(i\rho x)|=0,\quad \nu=0,1. \tag{2.4.14}$$

Здесь $e_j(x,\rho)$ *и* $g_j(x,\rho)$ *— решения Йоста для* q_j.

Доказательство. Обозначим

$$z_j(x,\rho)=e_j(x,\rho)\exp(-i\rho x),\ z(x,\rho)=e(x,\rho)\exp(-i\rho x),$$
$$u_j(x,\rho)=|z_j(x,\rho)-z(x,\rho)|.$$

Из (2.1.8) вытекает

$$z_j(x,\rho)-z(x,\rho)=\frac{1}{2i\rho}\int\limits_x^\infty(1-\exp(2i\rho(t-x)))\times$$
$$\times(q(t)z(t,\rho)-q_j(t)z_j(t,\rho))\,dt.$$

Отсюда, учитывая (2.1.29), выводим

$$u_j(x,\rho)\leqslant\int\limits_x^\infty(t-x)|(q(t)-q_j(t))z(t,\rho)|\,dt+\int\limits_x^\infty(t-x)|q_j(t)|u_j(t,\rho)\,dt.$$

Согласно (2.4.4)

$$|z(x,\rho)|\leqslant\exp(Q_1^+(x))\leqslant\exp(Q_1^+(a)),\quad x\geqslant a, \tag{2.4.15}$$

и, следовательно,

$$u_j(x,\rho)\leqslant\exp(Q_1^+(a))\int\limits_a^\infty(t-a)|q(t)-q_j(t)|\,dt+$$
$$+\int\limits_x^\infty(t-x)|q_j(t)|u_j(t,\rho)\,dt.$$

В силу леммы 2.1.2 имеем

$$u_j(x,\rho) \leqslant \exp(Q_1^+(a)) \int_a^\infty (t-a)|q(t)-q_j(t)|\,dt \exp\Big(\int_x^\infty (t-x)|q_j(t)|\,dt\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(Q_1^+(a)) \int_a^\infty (t-a)|q(t)-q_j(t)|\,dt \exp\Big(\int_a^\infty (t-a)|q_j(t)|\,dt\Big).$$

Поэтому

$$u_j(x,\rho) \leqslant C_a \int_a^\infty (t-a)|q(t)-q_j(t)|\,dt. \tag{2.4.16}$$

В частности, (2.4.16) и (2.4.12) дают $\lim\limits_{j\to\infty} \sup\limits_{\rho\in\overline{\Omega_+}} \sup\limits_{x\geqslant a} u_j(x,\rho) = 0$, и мы приходим к (2.4.13) для $\nu = 0$. Обозначим $v_j(x,\rho) = |(e_j'(x,\rho) - e'(x,\rho))\exp(-i\rho x)|$. Из (2.1.20) вытекает

$$v_j(x,\rho) \leqslant \int_x^\infty |q(t)z(t,\rho) - q_j(t)z_j(t,\rho)|\,dt,$$

и, следовательно,

$$v_j(x,\rho) \leqslant \int_a^\infty |(q(t)-q_j(t))z(t,\rho)|\,dt + \int_a^\infty |q_j(t)|u_j(t,\rho)\,dt. \tag{2.4.17}$$

В силу (2.4.15)–(2.4.17) получаем

$$v_j(x,\rho) \leqslant C_a\Big(\int_a^\infty |q(t)-q_j(t)|\,dt + \int_a^\infty (t-a)|q(t)-q_j(t)|\,dt \cdot \int_a^\infty |q_j(t)|\,dt\Big).$$

Вместе с (2.4.12) это дает: $\lim\limits_{j\to\infty} \sup\limits_{\rho\in\overline{\Omega_+}} \sup\limits_{x\geqslant a} v_j(x,\rho) = 0$, и мы приходим к (2.4.13) для $\nu = 1$. Соотношения (2.4.14) доказываются аналогично. □

2.4.2. Данные рассеяния. При вещественных $\rho \neq 0$ функции $\{e(x,\rho), e(x,-\rho)\}$ и $\{g(x,\rho), g(x,-\rho)\}$ образуют фундаментальные системы решений уравнения (2.4.1). Поэтому

$$e(x,\rho) = a(\rho)g(x,-\rho) + b(\rho)g(x,\rho),$$

$$g(x,\rho) = c(\rho)e(x,\rho) + d(\rho)e(x,-\rho). \tag{2.4.18}$$

Изучим свойства коэффициентов $a(\rho)$, $b(\rho)$, $c(\rho)$ и $d(\rho)$.

Лемма 2.4.2. *При вещественных $\rho \neq 0$ имеют место следующие соотношения*:

$$c(\rho) = -b(-\rho), \quad d(\rho) = a(\rho), \tag{2.4.19}$$

$$\overline{a(\rho)} = a(-\rho), \quad \overline{b(\rho)} = b(-\rho), \tag{2.4.20}$$

$$|a(\rho)|^2 = 1 + |b(\rho)|^2, \tag{2.4.21}$$

$$a(\rho) = -\frac{1}{2i\rho}\langle e(x,\rho), g(x,\rho)\rangle, \ b(\rho) = \frac{1}{2i\rho}\langle e(x,\rho), g(x,-\rho)\rangle. \tag{2.4.22}$$

Доказательство. Так как $\overline{e(x,\rho)} = e(x,-\rho)$, $\overline{g(x,\rho)} = g(x,-\rho)$, то (2.4.20) следует из (2.4.18). Используя (2.4.18), вычисляем

$$\langle e(x,\rho), g(x,\rho)\rangle = \langle a(\rho)g(x,-\rho) + b(\rho)g(x,\rho),\ g(x,\rho)\rangle = -2i\rho a(\rho),$$
$$\langle e(x,\rho), g(x,-\rho)\rangle = \langle a(\rho)g(x,-\rho) + b(\rho)g(x,\rho),\ g(x,-\rho)\rangle = 2i\rho b(\rho),$$
$$\langle e(x,\rho), g(x,\rho)\rangle = \langle e(x,\rho),\ c(\rho)e(x,\rho) + d(\rho)e(x,-\rho)\rangle = 2i\rho d(\rho),$$
$$\langle e(x,-\rho), g(x,\rho)\rangle = \langle e(x,-\rho),\ c(\rho)e(x,\rho) + d(\rho)e(x,-\rho)\rangle = 2i\rho c(\rho),$$

т. е. верны (2.4.19) и (2.4.22). Далее,

$$-2i\rho = \langle e(x,\rho), e(x,-\rho)\rangle = \langle a(\rho)g(x,-\rho) + b(\rho)g(x,\rho),$$
$$a(-\rho)g(x,\rho) + b(-\rho)g(x,-\rho)\rangle = a(\rho)a(-\rho)\langle g(x,-\rho),$$
$$g(x,\rho)\rangle + b(\rho)b(-\rho)\langle g(x,\rho), g(x,-\rho)\rangle = -2i\rho\Big(|a(\rho)|^2 - |b(\rho)|^2\Big),$$

и мы приходим к (2.4.21). □

Отметим, что (2.4.22) дает аналитическое продолжение для $a(\rho)$ в Ω_+. Поэтому функция $a(\rho)$ аналитична в Ω_+ и $\rho a(\rho)$ непрерывна в $\overline{\Omega}_+$. Функция $\rho b(\rho)$ непрерывна при вещественных ρ. Кроме того, из (2.4.22) и (2.4.6) вытекает

$$a(\rho) = 1 - \frac{1}{2i\rho}\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(t)\,dt + o\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad b(\rho) = o\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad |\rho| \to \infty \tag{2.4.23}$$

(в областях определения), и, следовательно, функция $\rho(a(\rho) - 1)$ ограничена в $\overline{\Omega}_+$. Используя (2.4.22) и (2.4.8), можно получить более точные формулы

$$\begin{gathered} a(\rho) = 1 - \frac{1}{2i\rho}\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(t)\,dt + \frac{1}{2i\rho}\int\limits_{0}^{\infty} A(t)\exp(i\rho t)\,dt, \\ b(\rho) = \frac{1}{2i\rho}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(t)\exp(i\rho t)\,dt, \end{gathered} \tag{2.4.24}$$

где $A(t) \in L(0,\infty)$ и $B(t) \in L(-\infty,\infty)$ — вещественные функции.

В самом деле,

$$2i\rho a(\rho)=g(0,\rho)e'(0,\rho)-e(0,\rho)g'(0,\rho)=\Bigl(1+\int\limits_{-\infty}^{0}A^{-}(0,t)\exp(-i\rho t)\,dt\Bigr)\times$$

$$\times\Bigl(i\rho-A^{+}(0,0)+\int\limits_{0}^{\infty}A_1^{+}(0,t)\exp(i\rho t)\,dt\Bigr)+$$

$$+\Bigl(1+\int\limits_{0}^{\infty}A^{+}(0,t)\exp(i\rho t)\,dt\Bigr)\Bigl(i\rho-A^{-}(0,0)-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{0}A_1^{-}(0,t)\exp(-i\rho t)\,dt\Bigr).$$

Интегрирование по частям дает

$$i\rho\int\limits_{-\infty}^{0}A^{-}(0,t)\exp(-i\rho t)\,dt=-A^{-}(0,0)+\int\limits_{-\infty}^{0}A_2^{-}(0,t)\exp(-i\rho t)\,dt,$$

$$i\rho\int\limits_{0}^{\infty}A^{+}(0,t)\exp(i\rho t)\,dt=-A^{+}(0,0)-\int\limits_{0}^{\infty}A_2^{+}(0,t)\exp(i\rho t)\,dt.$$

Далее,

$$\int\limits_{-\infty}^{0}A^{-}(0,t)\exp(-i\rho t)\,dt\int\limits_{0}^{\infty}A_1^{+}(0,s)\exp(i\rho s)\,ds=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}A^{-}(0,t)\Bigl(\int\limits_{-t}^{\infty}A_1^{+}(0,\xi+t)\exp(i\rho\xi)\,d\xi\Bigr)\,dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\Bigl(\int\limits_{-\xi}^{0}A^{-}(0,t)A_1^{+}(0,\xi+t)\,dt\Bigr)\exp(i\rho\xi)\,d\xi.$$

Аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{0}A_1^{-}(0,t)\exp(-i\rho t)\,dt\int\limits_{0}^{\infty}A^{+}(0,s)\exp(i\rho s)\,ds=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\Bigl(\int\limits_{-\xi}^{0}A_1^{-}(0,t)A^{+}(0,\xi+t)\,dt\Bigr)\exp(i\rho\xi)\,d\xi.$$

Так как

$$2(A^+(0,0)+A^-(0,0))=\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(t)\,dt,$$

то мы приходим к (2.4.24) для $a(\rho)$, где

$$A(t)=A_1^+(0,t)-A_1^-(0,-t)+A_2^-(0,-t)-A_2^+(0,t)-A^+(0,0)A^-(0,-t)-$$
$$-A^-(0,0)A^+(0,t)+\int\limits_{-t}^{0} A^-(0,\xi)A_1^+(0,\xi+t)\,d\xi-\int\limits_{-t}^{0} A_1^-(0,\xi)A^+(0,\xi+t)\,d\xi.$$

Из (2.4.10)–(2.4.11) вытекает, что $A(t)\in L(0,\infty)$. Для функции $b(\rho)$ рассуждения аналогичны.

Обозначим

$$e_0(x,\rho)=\frac{e(x,\rho)}{a(\rho)},\quad g_0(x,\rho)=\frac{g(x,\rho)}{a(\rho)},\tag{2.4.25}$$

$$s^+(\rho)=-\frac{b(-\rho)}{a(\rho)},\quad s^-(\rho)=\frac{b(\rho)}{a(\rho)}\ .\tag{2.4.26}$$

Функции $s^+(\rho)$ и $s^-(\rho)$ называются *коэффициентами отражения* (правым и левым соответственно). Из (2.4.18), (2.4.25) и (2.4.26) вытекает

$$\begin{gathered} e_0(x,\rho)=g(x,-\rho)+s^-(\rho)g(x,\rho),\\ g_0(x,\rho)=e(x,-\rho)+s^+(\rho)e(x,\rho). \end{gathered}\tag{2.4.27}$$

Используя (2.4.25), (2.4.27) и (2.4.3), получаем

$$\begin{gathered} e_0(x,\rho)\sim\exp(i\rho x)+s^-(\rho)\exp(-i\rho x)\ (x\to-\infty),\\ e_0(x,\rho)\sim t(\rho)\exp(i\rho x)\ (x\to\infty),\\ g_0(x,\rho)\sim t(\rho)\exp(i\rho x)\ (x\to-\infty),\\ g_0(x,\rho)\sim\exp(-i\rho x)+s^+(\rho)\exp(i\rho x)\ (x\to\infty), \end{gathered}$$

где $t(\rho)=(a(\rho))^{-1}$ называется *коэффициентом прохождения*.

Отметим основные свойства функций $s^{\pm}(\rho)$. В силу (2.4.20)–(2.4.22) и (2.4.26) функции $s^{\pm}(\rho)$ непрерывны при вещественных $\rho\neq0$, и $\overline{s^{\pm}(\rho)}=s^{\pm}(-\rho)$. Кроме того, (2.4.21) влечет $|s^{\pm}(\rho)|^2==1-|a(\rho)|^{-2}$, и, следовательно, $|s^{\pm}(\rho)|<1$ при вещественных $\rho\neq0$. Далее, согласно (2.4.23) и (2.4.26), $s^{\pm}(\rho)=o(\rho^{-1})$ при $|\rho|\to\infty$. Обозначим через $R^{\pm}(x)$ преобразование Фурье для $s^{\pm}(\rho)$:

$$R^{\pm}(x):=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^{\pm}(\rho)\exp(\pm i\rho x)\,d\rho.\tag{2.4.28}$$

Тогда $R^{\pm}(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ вещественны и

$$s^{\pm}(\rho) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R^{\pm}(x) \exp(\mp i\rho x)\, dx. \tag{2.4.29}$$

Из (2.4.25) и (2.4.27) вытекает

$$\rho e(x,\rho) = \rho a(\rho)\Big((s^-(\rho)+1)g(x,\rho) + g(x,-\rho) - g(x,\rho)\Big),$$
$$\rho g(x,\rho) = \rho a(\rho)\Big((s^+(\rho)+1)e(x,\rho) + e(x,-\rho) - e(x,\rho)\Big),$$

и, следовательно, $\lim\limits_{\rho\to 0} \rho a(\rho)(s^{\pm}(\rho)+1) = 0$.

Изучим теперь свойства дискретного спектра.

Определение 2.4.1. Те значения параметра λ, для которых уравнение (2.4.1) имеет ненулевые решения $y(x) \in L_2(-\infty,\infty)$, называются *собственными значениями*, а соответствующие решения называются *собственными функциями*.

Свойства собственных значений аналогичны свойствам дискретного спектра для оператора Штурма–Лиувилля на полуоси.

Теорема 2.4.2. *Числа $\lambda \geqslant 0$ не являются собственными значениями.*

Доказательство. Повторить рассуждения из теорем 2.1.6 и 2.2.12. □

Пусть $\Lambda_+ := \{\lambda,\ \lambda = \rho^2,\ \rho \in \Omega_+ :\ a(\rho) = 0\}$ — множество нулей функции $a(\rho)$ в верхней полуплоскости Ω_+. Так как $a(\rho)$ аналитична в Ω_+ и, в силу (2.4.23),

$$a(\rho) = 1 + O(\rho^{-1}), \quad |\rho| \to \infty, \quad \mathrm{Im}\rho \geqslant 0,$$

то Λ_+ является не более чем счетным ограниченным множеством.

Теорема 2.4.3. *Множество собственных значений совпадает с Λ_+. Собственные значения $\{\lambda_k\}$ отрицательны (т. е. $\Lambda_+ \subset (-\infty, 0)$). Для каждого собственного значения $\lambda_k = \rho_k^2$ существует только одна (с точностью до постоянного множителя) собственная функция, а именно:*

$$g(x,\rho_k) = d_k e(x,\rho_k), \quad d_k \neq 0. \tag{2.4.30}$$

Собственные функции $e(x,\rho_k)$ и $g(x,\rho_k)$ вещественны. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в $L_2(-\infty,\infty)$.

Доказательство. Пусть $\lambda_k = \rho_k^2 \in \Lambda_+$. В силу (2.4.22),

$$\langle e(x,\rho_k), g(x,\rho_k)\rangle = 0, \tag{2.4.31}$$

т. е. верно (2.4.30). Согласно теореме 2.4.1 $e(x,\rho_k) \in L_2(\alpha,\infty)$, $g(x,\rho_k) \in L_2(-\infty,\alpha)$ при каждом вещественном α. Поэтому (2.4.30) влечет $e(x,\rho_k)$, $g(x,\rho_k) \in L_2(-\infty,\infty)$. Таким образом, $e(x,\rho_k)$ и $g(x,\rho_k)$ являются собственными функциями, а $\lambda_k = \rho_k^2$ — собственными значениями.

Обратно, пусть $\lambda_k = \rho_k^2$, $\rho_k \in \Omega_+$, — собственное значение, и пусть $y_k(x)$ — соответствующая собственная функция. Так как $y_k(x) \in L_2(-\infty,\infty)$, то

$$y_k(x) = c_{k1}e(x,\rho_k), \quad y_k(x) = c_{k2}g(x,\rho_k), \quad c_{k1}, c_{k2} \neq 0,$$

и, следовательно, (2.4.31) верно. Используя (2.4.22), получаем $a(\rho_k) = 0$, т. е. $\lambda_k \in \Lambda_+$.

Пусть λ_n и λ_k ($\lambda_n \neq \lambda_k$) — собственные значения с собственными функциями $y_n(x) = e(x,\rho_n)$ и $y_k(x) = e(x,\rho_k)$ соответственно. Тогда интегрирование по частям дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell y_n(x)\, y_k(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} y_n(x) \ell y_k(x)\, dx,$$

и, следовательно,

$$\lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} y_n(x) y_k(x)\, dx = \lambda_k \int_{-\infty}^{\infty} y_n(x) y_k(x)\, dx,$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_n(x) y_k(x)\, dx = 0.$$

Далее, пусть $\lambda^0 = u + iv$, $v \neq 0$, — невещественное собственное значение с собственной функцией $y^0(x) \neq 0$. Так как $q(x)$ вещественна, то $\overline{\lambda^0} = u - iv$ также является собственным значением с собственной функцией $\overline{y^0(x)}$. Так как функция $\lambda^0 \neq \overline{\lambda^0}$, то в силу ортогональности имеем

$$\|y^0\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^0(x)\overline{y^0(x)}\, dx = 0,$$

что невозможно. Таким образом, все собственные значения $\{\lambda_k\}$ являются вещественными, и, следовательно, собственные функции $e(x,\rho_k)$ и $g(x,\rho_k)$ также являются вещественными. Вместе с теоремой 2.4.2 это дает: $\Lambda_+ \subset (-\infty, 0)$. ☐

При $\lambda_k = \rho_k^2 \in \Lambda_+$ положим

$$\alpha_k^+ = \Bigl(\int_{-\infty}^{\infty} e^2(x,\rho_k)\, dx\Bigr)^{-1}, \quad \alpha_k^- = \Bigl(\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x,\rho_k)\, dx\Bigr)^{-1}.$$

Теорема 2.4.4. *Множество Λ_+ является конечным, т.е. в Ω_+ функция $a(\rho)$ имеет не более конечного числа нулей. Все нули $a(\rho)$ в Ω_+ простые, т.е. $a_1(\rho_k) \neq 0$, где $a_1(\rho) := \dfrac{d}{d\rho}a(\rho)$. Кроме того,*

$$\alpha_k^+ = \frac{d_k}{ia_1(\rho_k)}, \quad \alpha_k^- = \frac{1}{id_k a_1(\rho_k)}, \tag{2.4.32}$$

где числа d_k определены в (2.4.30).

Доказательство. 1) Покажем, что

$$\begin{gathered}
-2\rho\int\limits_{-A}^{x} e(t,\rho)g(t,\rho)\,dt = \langle e(t,\rho),\dot g(t,\rho)\rangle\Big|_{-A}^{x}, \\
2\rho\int\limits_{x}^{A} e(t,\rho)g(t,\rho)\,dt = \langle \dot e(t,\rho),g(t,\rho)\rangle\Big|_{x}^{A},
\end{gathered} \tag{2.4.33}$$

где $\dot e(t,\rho) := \dfrac{d}{d\rho}e(t,\rho)$, $\dot g(t,\rho) := \dfrac{d}{d\rho}g(t,\rho)$. В самом деле,

$$\frac{d}{dx}\langle e(x,\rho),\dot g(x,\rho)\rangle = e(x,\rho)\dot g''(x,\rho) - e''(x,\rho)\dot g(x,\rho).$$

Так как

$$-e''(x,\rho)+q(x)e(x,\rho) = \rho^2 e(x,\rho),$$

$$-\dot g''(x,\rho)+q(x)\dot g(x,\rho) = \rho^2\dot g(x,\rho)+2\rho g(x,\rho),$$

то

$$\frac{d}{dx}\langle e(x,\rho),\dot g(x,\rho)\rangle = -2\rho e(x,\rho)g(x,\rho).$$

Аналогично:

$$\frac{d}{dx}\langle \dot e(x,\rho),g(x,\rho)\rangle = 2\rho e(x,\rho)g(x,\rho),$$

и мы приходим к (2.4.33).

Из (2.4.33) вытекает

$$2\rho\int\limits_{-A}^{A} e(t,\rho)g(t,\rho)\,dt = -\langle \dot e(x,\rho),g(x,\rho)\rangle - \langle e(x,\rho),\dot g(x,\rho)\rangle + \\ + \langle \dot e(x,\rho),g(x,\rho)\rangle\Big|_{x=A} + \langle e(x,\rho),\dot g(x,\rho)\rangle\Big|_{x=-A}.$$

С другой стороны, дифференцируя (2.4.22) по ρ, получаем

$$2i\rho a_1(\rho)+2ia(\rho) = -\langle \dot e(x,\rho),g(x,\rho)\rangle - \langle e(x,\rho),\dot g(x,\rho)\rangle.$$

При $\rho = \rho_k$ это дает

$$ia_1(\rho_k) = \int\limits_{-A}^{A} e(t, \rho_k) g(t, \rho_k)\, dt + \delta_k(A), \tag{2.4.34}$$

где

$$\delta_k(A) = -\frac{1}{2\rho_k}\Big(\langle \dot{e}(x, \rho_k), g(x, \rho_k)\rangle\Big|_{x=A} + \langle e(x, \rho_k), \dot{g}(x, \rho_k)\rangle\Big|_{x=-A}\Big).$$

Так как $\rho_k = i\tau_k$, $\tau_k > 0$, то в силу (2.4.4) имеем

$$e(x, \rho_k), e'(x, \rho_k) = O(\exp(-\tau_k x)), \quad x \to +\infty.$$

Согласно (2.4.8),

$$\dot{e}(x, \rho_k) = ix\exp(-\tau_k x) + \int\limits_{x}^{\infty} itA^+(x, t)\exp(-\tau_k t)\, dt,$$

$$\dot{e}'(x, \rho_k) = i\exp(-\tau_k x) - ix\tau_k\exp(-\tau_k x) - ixA^+(x, x)\exp(-\tau_k x) + \\ + \int\limits_{x}^{\infty} itA_1^+(x, t)\exp(-\tau_k t)\, dt.$$

Поэтому $\dot{e}(x, \rho_k), \dot{e}'(x, \rho_k) = O(1)$ при $x \to +\infty$. Отсюда, используя (2.4.30), вычисляем

$$\langle \dot{e}(x, \rho_k), g(x, \rho_k)\rangle = d_k\langle \dot{e}(x, \rho_k), e(x, \rho_k)\rangle = o(1), \quad x \to +\infty,$$
$$\langle e(x, \rho_k), \dot{g}(x, \rho_k)\rangle = \frac{1}{d_k}\,\langle g(x, \rho_k), \dot{g}(x, \rho_k)\rangle = o(1), \quad x \to -\infty.$$

Следовательно, $\lim\limits_{A\to\ +\infty} \delta_k(A) = 0$. Тогда (2.4.34) влечет

$$ia_1(\rho_k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e(t, \rho_k) g(t, \rho_k)\, dt.$$

Снова используя (2.4.30), получаем

$$ia_1(\rho_k) = d_k\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^2(t, \rho_k)\, dt = \frac{1}{d_k}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g^2(t, \rho_k)\, dt.$$

Поэтому $a_1(\rho_k) \neq 0$, и (2.4.32) верно.

2) Предположим, что $\Lambda_+ = \{\lambda_k\}$ — бесконечное множество. Так как Λ_+ ограничено и $\lambda_k = \rho_k^2 < 0$, то $\rho_k = i\tau_k \to 0$, $\tau_k > 0$. В силу (2.4.4), (2.4.5) существует $A > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} e(x, i\tau) &\geqslant \frac{1}{2}\exp(-\tau x) \quad \text{при} \quad x \geqslant A,\ \tau \geqslant 0, \\ g(x, i\tau) &\geqslant \frac{1}{2}\exp(\tau x) \quad \text{при} \quad x \leqslant -A,\ \tau \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.4.35}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_A^\infty e(x,\rho_k)e(x,\rho_n)\,dx &\geqslant \frac{\exp(-(\tau_k+\tau_n)A)}{4(\tau_k+\tau_n)} \geqslant \frac{\exp(-2AT)}{8T}, \\ \int_{-\infty}^{-A} g(x,\rho_k)g(x,\rho_n)\,dx &\geqslant \frac{\exp(-(\tau_k+\tau_n)A)}{4(\tau_k+\tau_n)} \geqslant \frac{\exp(-2AT)}{8T}, \end{aligned} \tag{2.4.36}$$

где $T = \max\limits_k \tau_k$. Так как собственные функции $e(x,\rho_k)$ и $e(x,\rho_n)$ ортогональны в $L_2(-\infty,\infty)$, то

$$\begin{aligned} 0 = \int_{-\infty}^{\infty} e(x,\rho_k)e(x,\rho_n)\,dx = \int_A^\infty e(x,\rho_k)e(x,\rho_n)\,dx\, + \\ + \frac{1}{d_k d_n}\int_{-\infty}^{-A} g(x,\rho_k)g(x,\rho_n)\,dx + \int_{-A}^{A} e^2(x,\rho_k)\,dx\, + \\ + \int_{-A}^{A} e(x,\rho_k)(e(x,\rho_n) - e(x,\rho_k))\,dx. \end{aligned} \tag{2.4.37}$$

Возьмем $x_0 \leqslant -A$ так, чтобы $e(x_0, 0) \neq 0$. Согласно (2.4.30)

$$\frac{1}{d_k d_n} = \frac{e(x_0,\rho_k)e(x_0,\rho_n)}{g(x_0,\rho_k)g(x_0,\rho_n)}.$$

Так как функции $e(x,\rho)$ и $g(x,\rho)$ непрерывны при $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, то с помощью (2.4.35) вычисляем

$$\begin{aligned} \lim_{k,n\to\infty} g(x_0,\rho_k)g(x_0,\rho_n) = g^2(x_0,0) > 0, \\ \lim_{k,n\to\infty} e(x_0,\rho_k)e(x_0,\rho_n) = e^2(x_0,0) > 0. \end{aligned}$$

Поэтому $\lim\limits_{k,n\to\infty}(d_k d_n)^{-1} > 0$. Вместе с (2.4.36) это дает

$$\int\limits_{A}^{\infty} e(x,\rho_k)e(x,\rho_n)\,dx + \frac{1}{d_k d_n}\int\limits_{-\infty}^{-A} g(x,\rho_k)g(x,\rho_n)\,dx + \\ + \int\limits_{-A}^{A} e^2(x,\rho_k)\,dx \geqslant C > 0 \quad (2.4.38)$$

при достаточно больших k и n. С другой стороны, действуя таким же образом, как и при доказательстве теоремы 2.2.10, нетрудно проверить, что

$$\int\limits_{-A}^{A} e(x,\rho_k)(e(x,\rho_n) - e(x,\rho_k))\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad k,n\to\infty. \qquad (2.4.39)$$

Соотношения (2.4.37)–(2.4.39) приводят к противоречию. Это означает, что Λ_+ является конечным множеством. □

Таким образом, множество собственных значений имеет вид

$$\Lambda_+ = \{\lambda_k\}_{k=\overline{1,N}}, \quad \lambda_k = \rho_k^2, \quad \rho_k = i\tau_k, \quad 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m.$$

Определение 2.4.2. Множество $J^+ = \{s^+(\rho), \lambda_k, \alpha_k^+;\ \rho\in\mathbf{R},\ k = \overline{1,N}\}$ называется правыми данными рассеяния, а множество $J^- = \{s^-(\rho), \lambda_k, \alpha_k^-;\ \rho\in\mathbf{R},\ k=\overline{1,N}\}$ называется левыми данными рассеяния.

Пример 2.4.1. Пусть $q(x)\equiv 0$. Тогда

$$e(x,\rho) = \exp(i\rho x),\ g(x,\rho) = \exp(-i\rho x),\ a(\rho) = 1,\ b(\rho) = 0, \\ s^{\pm}(\rho) = 0,\ N = 0,$$

т. е. множество собственных значений пусто.

2.4.3. Вспомогательные утверждения. В этом пункте изучаются связи между данными рассеяния J^+ и J^-. Рассмотрим функцию

$$\gamma(\rho) = \frac{1}{a(\rho)}\prod_{k=1}^{N}\frac{\rho - i\tau_k}{\rho + i\tau_k}. \qquad (2.4.40)$$

Лемма 2.4.3. (i_1) *Функция $\gamma(\rho)$ аналитична в Ω_+ и непрерывна в $\overline{\Omega_+}\setminus\{0\}$.*

(i_2) *Функция $\gamma(\rho)$ не имеет нулей в $\overline{\Omega_+}\setminus\{0\}$.*

(i_3) *При $|\rho|\to\infty$, $\rho\in\overline{\Omega_+}$:*

$$\gamma(\rho) = 1 + O(\rho^{-1}). \qquad (2.4.41)$$

(i_4) $|\gamma(\rho)| \leqslant 1$ *при* $\rho\in\overline{\Omega_+}$.

Доказательство. Свойства (i_1)–(i_3) являются очевидными следствиями предыдущих утверждений, и только (i_4) нуждается в доказательстве. В силу (2.4.21), $|a(\rho)| \geqslant 1$ при вещественных $\rho \neq 0$, и, следовательно,

$$|\gamma(\rho)| \leqslant 1 \ \text{ при вещественных } \ \rho \neq 0. \tag{2.4.42}$$

Предположим, что функция $\rho a(\rho)$ аналитична в начале координат. Тогда, используя (2.4.40) и (2.4.42), выводим, что $\gamma(\rho)$ имеет устранимую особенность в начале координат, и $\gamma(\rho)$ (после продолжения по непрерывности) является непрерывной в $\overline{\Omega_+}$. Используя (2.4.41), (2.4.42) и принцип максимума, приходим к (i_4).

В общем случае мы не можем пользоваться этими рассуждениями для $\gamma(\rho)$. Поэтому мы введем потенциалы

$$q_r(x) = \begin{cases} q(x), & |x| \leqslant r, \\ 0, & |x| > r, \end{cases} \qquad r \geqslant 0,$$

и рассмотрим соответствующие решения Йоста $e_r(x,\rho)$ и $g_r(x,\rho)$. Ясно, что $e_r(x,\rho) \equiv \exp(i\rho x)$ при $x \geqslant r$ и $g_r(x,\rho) \equiv \exp(-i\rho x)$ при $x \leqslant -r$. При каждом фиксированном x функции $e_r^{(\nu)}(x,\rho)$ и $g_r^{(\nu)}(x,\rho)$ ($\nu = 0, 1$) являются целыми по ρ. Положим

$$a_r(\rho) = -\frac{1}{2i\rho}\langle e_r(x,\rho), g_r(x,\rho)\rangle, \quad \gamma_r(\rho) = \frac{1}{a_r(\rho)} \prod_{k=1}^{N_r} \frac{\rho - i\tau_{kr}}{\rho + i\tau_{kr}},$$

где $\rho_{kr} = i\tau_{kr}$, $k = \overline{1, N_r}$, — нули $a_r(\rho)$ в верхней полуплоскости Ω_+. Функция $\rho a_r(\rho)$ является целой по ρ, и (см. лемму 2.4.2) $|a_r(\rho)| \geqslant 1$ при вещественных ρ. Функция $\gamma_r(\rho)$ аналитична в $\overline{\Omega_+}$, и

$$|\gamma_r(\rho)| \leqslant 1 \ \text{ при } \ \rho \in \overline{\Omega_+}. \tag{2.4.43}$$

В силу леммы 2.4.1

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\rho\in\overline{\Omega_+}} \sup_{x\geqslant a} |(e_r^{(\nu)}(x,\rho) - e^{(\nu)}(x,\rho)) \exp(-i\rho x)| = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\rho\in\overline{\Omega_+}} \sup_{x\leqslant a} |(g_r^{(\nu)}(x,\rho) - g^{(\nu)}(x,\rho)) \exp(i\rho x)| = 0,$$

при $\nu = 0, 1$ и при каждом вещественном a. Поэтому $\lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{\rho\in\overline{\Omega_+}} |\rho(a_r(\rho) - -a(\rho))| = 0$, т. е.

$$\lim_{r\to\infty} \rho a_r(\rho) = \rho a(\rho) \ \text{ равномерно в } \ \overline{\Omega_+}. \tag{2.4.44}$$

В частности, (2.4.44) дает $0 < \tau_{kr} \leqslant C$ при всех k и r.

Пусть δ_r — нижняя грань расстояний между нулями $\{\rho_{kr}\}$ функции $a_r(\rho)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\rho > 0$. Покажем, что

$$\delta^* := \inf_{r>0} \delta_r > 0. \tag{2.4.45}$$

В самом деле, предположим от противного, что существует последовательность $r_k \to \infty$ такая, что $\delta_{r_k} \to 0$. Пусть $\rho_k^{(1)} = i\tau_k^{(1)}$, $\rho_k^{(2)} = i\tau_k^{(2)}$ $(\tau_k^{(1)}, \tau_k^{(2)} \geqslant 0)$ — нули $a_{r_k}(\rho)$ такие, что $\rho_k^{(1)} - \rho_k^{(2)} \to 0$ при $k \to \infty$. Из (2.4.4)–(2.4.5) вытекает, что существует $A > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} &e_r(x, i\tau) \geqslant \frac{1}{2}\exp(-\tau x) \ \text{ при } \ x \geqslant A,\ \tau \geqslant 0,\ r \geqslant 0, \\ &g_r(x, i\tau) \geqslant \frac{1}{2}\exp(\tau x) \ \text{ при } \ x \leqslant -A,\ \tau \geqslant 0,\ r \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.4.46}$$

Так как функции $e_{r_k}(x, \rho_k^{(1)})$ и $e_{r_k}(x, \rho_k^{(2)})$ ортогональны в $L_2(-\infty, \infty)$, то

$$\begin{aligned} 0 = \int_{-\infty}^{\infty} e_{r_k}(x, \rho_k^{(1)}) e_{r_k}(x, \rho_k^{(2)})\, dx = \int_{A}^{\infty} e_{r_k}(x, \rho_k^{(1)}) e_{r_k}(x, \rho_k^{(2)})\, dx + \\ + \frac{1}{d_k^{(1)} d_k^{(2)}} \int_{-\infty}^{-A} g_{r_k}(x, \rho_k^{(1)}) g_{r_k}(x, \rho_k^{(2)})\, dx + \int_{-A}^{A} e_{r_k}^2(x, \rho_k^{(1)})\, dx + \\ + \int_{-A}^{A} e_{r_k}(x, \rho_k^{(1)}) (e_{r_k}(x, \rho_k^{(2)}) - e_{r_k}(x, \rho_k^{(1)}))\, dx, \end{aligned} \tag{2.4.47}$$

где числа $d_k^{(j)}$ определяются из

$$g_{r_k}(x, \rho_k^{(j)}) = d_k^{(j)} e_{r_k}(x, \rho_k^{(j)}), \quad d_k^{(j)} \neq 0.$$

Возьмем $x_0 \leqslant -A$. Тогда, в силу (2.4.46),

$$g_{r_k}(x_0, \rho_k^{(1)}) g_{r_k}(x_0, \rho_k^{(2)}) \geqslant C > 0,$$

и

$$\frac{1}{d_k^{(1)} d_k^{(2)}} = \frac{e_{r_k}(x_0, \rho_k^{(1)}) e_{r_k}(x_0, \rho_k^{(2)})}{g_{r_k}(x_0, \rho_k^{(1)}) g_{r_k}(x_0, \rho_k^{(2)})}.$$

Используя лемму 2.4.1, получаем

$$\varliminf_{k\to\infty} e_{r_k}(x_0, \rho_k^{(1)}) e_{r_k}(x_0, \rho_k^{(2)}) \geqslant 0,$$

следовательно,

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{d_k^{(1)} d_k^{(2)}} \geqslant 0.$$

Тогда

$$\int\limits_{A}^{\infty} e_{r_k}(x,\rho_k^{(1)})e_{r_k}(x,\rho_k^{(2)})\,dx + \frac{1}{d_k^{(1)}d_k^{(2)}}\int\limits_{-\infty}^{-A} g_{r_k}(x,\rho_k^{(1)})g_{r_k}(x,\rho_k^{(2)})\,dx + \\ + \int\limits_{-A}^{A} e_{r_k}^2(x,\rho_k^{(1)})\,dx \geqslant C > 0.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{-A}^{A} e_{r_k}(x,\rho_k^{(1)})(e_{r_k}(x,\rho_k^{(2)}) - e_{r_k}(x,\rho_k^{(1)}))\,dx \to 0 \ \text{ при } \ k\to\infty.$$

Отсюда и из (2.4.47) получаем противоречие, т. е. (2.4.45) доказано.

Пусть $D_{\delta,R} := \{\rho\in\Omega_+ : \ \delta < |\rho| < R\}$, где $0<\delta<\min(\delta^*,\tau_1)$, $R > \tau_N$. Используя (2.4.44), можно показать, что

$$\lim_{r\to\infty}\gamma_r(\rho) = \gamma(\rho) \ \text{ равномерно в } \ \overline{D_{\delta,R}}. \tag{2.4.48}$$

Из (2.4.43) и (2.4.48)Ъ вытекает, что $|\gamma(\rho)|\leqslant 1$ при $\rho\in\overline{D_{\delta,R}}$. В силу произвольности δ и R получаем: $|\gamma(\rho)|\leqslant 1$ при $\rho\in\overline{\Omega_+}$, т. е. ($\mathrm{i}_4$) доказано. □

Из леммы 2.4.3 вытекает

$$(a(\rho))^{-1} = O(1) \ \text{ при } \ |\rho|\to 0,\ \rho\in\overline{\Omega_+}. \tag{2.4.49}$$

Отметим также, что поскольку функция $\sigma a(\sigma)$ непрерывна в начале координат, то при достаточно малых вещественных σ имеем: $1\leqslant |a(\sigma)| = |\gamma(\sigma)|^{-1}\leqslant C|\sigma|^{-1}$.

Свойства функции $\gamma(\rho)$, полученные в лемме 2.4.3, позволяют восстановить функцию $\gamma(\rho)$ в Ω_+ по ее модулю $|\gamma(\sigma)|$ на вещественной оси σ.

Лемма 2.4.4. *Справедливо следующее соотношение*:

$$\gamma(\rho) = \exp\Bigl(\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\gamma(\xi)|}{\xi-\rho}\,d\xi\Bigr), \qquad \rho\in\Omega_+. \tag{2.4.50}$$

Доказательство. 1) Функция $\ln\gamma(\rho)$ аналитична в Ω_+ и $\ln\gamma(\rho) = O(\rho^{-1})$ при $|\rho|\to\infty$, $\rho\in\overline{\Omega_+}$. Рассмотрим замкнутый контур C_R (с обходом против часовой стрелки), который является границей области $D_R = \{\rho \in \Omega_+ : \ |\rho| < R\}$ (см. рис. 2.4.1). Согласно интегральной формуле Коши имеем

$$\ln \gamma(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \rho}\, d\xi, \quad \rho \in D_R.$$

Так как

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|\xi|=R \\ \xi \in \overline{\Omega_+}}} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \rho}\, d\xi = 0,$$

то

$$\ln \gamma(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \rho}\, d\xi, \quad \rho \in \Omega_+. \tag{2.4.51}$$

2) Возьмем вещественное σ и замкнутый контур $C^{\sigma}_{R,\delta}$ (с обходом против часовой стрелки), состоящий из полуокружностей $C^0_R = \{\xi : \ \xi = R\exp(i\varphi), \ \varphi \in [0,\pi]\}$, $\Gamma^{\sigma}_{\delta} = \{\xi : \ \xi - \sigma = \delta\exp(i\varphi), \ \varphi \in [0,\pi]\}$, $\delta > 0$ и интервалов $[-R, R] \setminus [\sigma - \delta, \sigma + \delta]$ (см. рис. 2.4.1).

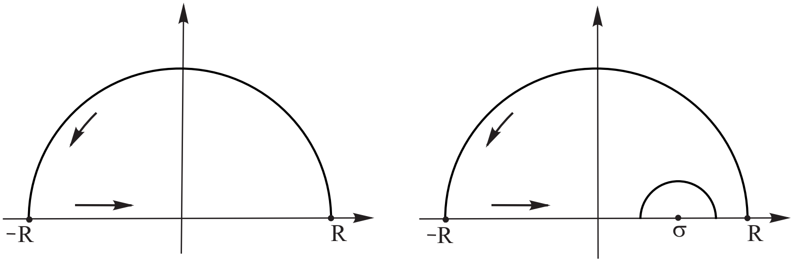

рис. 2.4.1

По теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^{\sigma}_{R,\delta}} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \sigma}\, d\xi = 0.$$

Так как

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^0_R} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \sigma}\, d\xi = 0, \quad \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^{\sigma}_{\delta}} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \sigma}\, d\xi = -\frac{1}{2} \ln \gamma(\sigma),$$

то при вещественных σ получаем

$$\ln \gamma(\sigma) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - \sigma}\, d\xi. \tag{2.4.52}$$

В (2.4.52) (и везде в дальнейшем, где необходимо) интеграл понимается в смысле главного значения.

3) Пусть $\gamma(\sigma)=|\gamma(\sigma)|\exp(-i\beta(\sigma))$. Разделяя в (2.4.52) вещественную и мнимую части, получаем

$$\beta(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\gamma(\xi)|}{\xi-\sigma}\,d\xi,\quad \ln|\gamma(\sigma))|=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta(\xi)}{\xi-\sigma}\,d\xi.$$

Тогда, используя (2.4.51), вычисляем при $\rho\in\Omega_+$:

$$\ln\gamma(\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\gamma(\xi)|}{\xi-\rho}\,d\xi-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta(\xi)}{\xi-\rho}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\gamma(\xi)|}{\xi-\rho}\,d\xi-\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigl(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi-\rho)(s-\xi)}\Bigr)\ln|\gamma(s)|\,ds.$$

Так как

$$\frac{1}{(\xi-\rho)(s-\xi)}=\frac{1}{s-\rho}\Bigl(\frac{1}{\xi-\rho}-\frac{1}{\xi-s}\Bigr),$$

то при $\rho\in\Omega_+$ и при вещественных s

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi-\rho)(s-\xi)}=\frac{\pi i}{s-\rho}.$$

Следовательно,

$$\ln\gamma(\rho)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\gamma(\xi)|}{\xi-\rho}\,d\xi,\quad \rho\in\Omega_+,$$

и мы приходим к (2.4.50). □

Из (2.4.21) и (2.4.26) вытекает, что $|a(\rho)|^{-2}=1-|s^{\pm}(\rho)|^2$ при вещественных $\rho\neq0$. В силу (2.4.40) при вещественных $\rho\neq0$ имеем

$$|\gamma(\rho)|=\sqrt{1-|s^{\pm}(\rho)|^2}\,.$$

Используя (2.4.40) и (2.4.50), получаем

$$a(\rho)=\prod_{k=1}^{N}\frac{\rho-i\tau_k}{\rho+i\tau_k}\exp\Bigl(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1-|s^{\pm}(\xi)|^2)}{\xi-\rho}\,d\xi\Bigr),\quad \rho\in\Omega_+.\quad(2.4.53)$$

Отметим, что так как функция $\rho a(\rho)$ непрерывна в $\overline{\Omega_+}$, то

$$\frac{\rho^2}{1-|s^{\pm}(\rho)|^2}=O(1)\ \text{ при }\ |\rho|\to0.$$

Соотношение (2.4.53) позволяет установить связи между данными рассеяния J^+ и J^-. Точнее, по данным J^+ можно однозначно восстановить J^- (и наоборот) по следующему алгоритму.

Алгоритм 2.4.1. Пусть заданы J^+. Тогда
1) строим функцию $a(\rho)$ по (2.4.53);
2) вычисляем d_k и α_k^-, $k=\overline{1,N}$, по (2.4.32);
3) находим $b(\rho)$ и $s^-(\rho)$ по (2.4.26).

§ 2.5. Обратная задача рассеяния на оси

2.5.1. Основное уравнение. Обратная задача рассеяния ставится следующим образом: по данным рассеяния J^+ (или J^-) построить потенциал q.

Центральную роль при построении решения обратной задачи рассеяния играет так называемое основное уравнение, которое является линейным интегральным уравнением с параметром. В этом пункте мы даем вывод основного уравнения и доказываем его однозначную разрешимость. Далее мы получаем решение обратной задачи рассеяния и необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Теорема 2.5.1. *При каждом фиксированном x функции $A^\pm(x,t)$, определенные в* (2.4.8), *удовлетворяют интегральным уравнениям*

$$F^+(x+y)+A^+(x,y)+\int_x^\infty A^+(x,t)F^+(t+y)\,dt=0,\quad y>x, \tag{2.5.1}$$

$$F^-(x+y)+A^-(x,y)+\int_{-\infty}^x A^-(x,t)F^-(t+y)\,dt=0,\quad y<x, \tag{2.5.2}$$

где

$$F^\pm(x)=R^\pm(x)+\sum_{k=1}^N \alpha_k^\pm \exp(\mp\tau_k x), \tag{2.5.3}$$

а функции $R^\pm(x)$ определены в (2.4.28). *Уравнения* (2.5.1) *и* (2.5.2) *называются основными уравнениями или уравнениями Гельфанда–Левитана–Марченко.*

Доказательство. В силу (2.4.18) и (2.4.19) имеем

$$\left(\frac{1}{a(\rho)}-1\right)g(x,\rho)=s^+(\rho)e(x,\rho)+e(x,-\rho)-g(x,\rho). \tag{2.5.4}$$

Положим $A^+(x,t)=0$ при $t<x$ и $A^-(x,t)=0$ при $t>x$.Тогда, используя (2.4.8) и (2.4.29), получаем

$$s^+(\rho)e(x,\rho)+e(x,-\rho)-g(x,\rho)=$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty} R^+(y)\exp(i\rho y)dy\right)\left(\exp(i\rho x)+\int_{-\infty}^{\infty} A^+(x,t)\exp(i\rho t)\,dt\right)+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}(A^+(x,t)-A^-(x,t))\exp(-i\rho t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)\exp(-i\rho y)\,dy,$$

где

$$H(x,y)=A^+(x,y)-A^-(x,y)+R^+(x+y)+\int_x^{\infty} A^+(x,t)R^+(t+y)\,dt. \qquad (2.5.5)$$

Таким образом, при каждом фиксированном x правая часть в (2.5.4) является преобразованием Фурье функции $H(x,y)$. Поэтому

$$H(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{a(\rho)}-1\right)g(x,\rho)\exp(i\rho y)\,d\rho. \qquad (2.5.6)$$

Фиксируем x и y $(y>x)$ и рассмотрим функцию

$$f(\rho):=\left(\frac{1}{a(\rho)}-1\right)g(x,\rho)\exp(i\rho y). \qquad (2.5.7)$$

Согласно (2.4.6) и (2.4.23),

$$f(\rho)=\frac{c}{\rho}\exp(i\rho(y-x))(1+o(1)), \quad |\rho|\to\infty, \quad \rho\in\overline{\Omega}_+ \qquad (2.5.8)$$

Пусть $C_{\delta,R}$ — замкнутый контур (с обходом против часовой стрелки), который является границей области $D_{\delta,R}=\{\rho\in\Omega_+ : \delta<|\rho|<R\}$, где $\delta<\tau_1<\ldots<\tau_N<R$. Таким образом, все нули $\rho_k=i\tau_k$, $k=\overline{1,N}$, функции $a(\rho)$ лежат в $D_{\delta,R}$. По теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\delta,R}} f(\rho)\,d\rho=\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{\rho=\rho_k} f(\rho).$$

С другой стороны, из (2.5.7), (2.5.8), (2.4.5) и (2.4.49) вытекает

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|\rho|=R\\ \rho\in\overline{\Omega}_+}} f(\rho)\,d\rho=0, \quad \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|\rho|=\delta\\ \rho\in\overline{\Omega}_+}} f(\rho)\,d\rho=0.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\rho)\,d\rho=\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{\rho=\rho_k} f(\rho).$$

Отсюда и из (2.5.6)–(2.5.7) выводим

$$H(x,y)=i\sum_{k=1}^{N}\frac{g(x,i\tau_k)\exp(-\tau_k y)}{a_1(i\tau_k)}.$$

Используя (2.4.30), (2.4.8) и (2.4.32), получаем

$$H(x,y)=i\sum_{k=1}^{N}\frac{d_k e(x,i\tau_k)\exp(-\tau_k y)}{a_1(i\tau_k)}=$$
$$=-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^{+}\left(\exp(-\tau_k(x+y))+\int\limits_{x}^{\infty}A^{+}(x,t)\exp(-\tau_k(t+y))\,dt\right). \tag{2.5.9}$$

Так как $A^{-}(x,y)=0$ при $y>x$, то (2.5.5) и (2.5.9) дают (2.5.1). Соотношение (2.5.2) доказывается аналогично. ☐

Лемма 2.5.1. *Пусть даны неотрицательные функции* $v(x), u(x)$ $(a\leqslant x\leqslant T\leqslant\infty)$ *такие, что* $v(x)\in L(a,T)$, $u(x)v(x)\in L(a,T)$, *и пусть* $c_1\geqslant 0$. *Если*

$$u(x)\leqslant c_1+\int\limits_{x}^{T} v(t)u(t)\,dt, \tag{2.5.10}$$

то

$$u(x)\leqslant c_1\exp\Bigl(\int\limits_{x}^{T} v(t)\,dt\Bigr). \tag{2.5.11}$$

Доказательство. Положим

$$\xi(x):=c_1+\int\limits_{x}^{T} v(t)u(t)\,dt.$$

Тогда $\xi(T)=c_1$, $-\xi'(x)=v(x)u(x)$ и (2.5.10) дает $0\leqslant-\xi'(x)\leqslant v(x)\xi(x)$. Пусть $c_1>0$. Тогда $\xi(x)>0$ и

$$0\leqslant-\frac{\xi'(x)}{\xi(x)}\leqslant v(x).$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$\ln\frac{\xi(x)}{\xi(T)} \leqslant \int_x^T v(t)\,dt,$$

и, следовательно,

$$\xi(x) \leqslant c_1 \exp\Big(\int_x^T v(t)\,dt\Big).$$

Согласно (2.5.10) $u(x) \leqslant \xi(x)$, и мы приходим к (2.5.11).

Если $c_1 = 0$, то $\xi(x) = 0$. В самом деле, предположим от противного, что $\xi(x) \not\equiv 0$. Тогда существует $T_0 \leqslant T$ такое, что $\xi(x) > 0$ при $x < T_0$, и $\xi(x) \equiv 0$ при $x \in [T_0, T]$. Повторяя рассуждения, получаем для $x < T_0$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$,

$$\ln\frac{\xi(x)}{\xi(T_0-\varepsilon)} \leqslant \int_x^{T_0-\varepsilon} v(t)\,dt \leqslant \int_x^{T_0} v(t)\,dt,$$

что невозможно. Таким образом, $\xi(x) \equiv 0$, и (2.5.11) становится очевидным. □

Лемма 2.5.2. *Функции $F^{\pm}(x)$ являются абсолютно непрерывными и при каждом фиксированном $a > -\infty$,*

$$\int_a^\infty |F^{\pm}(\pm x)|\,dx < \infty, \qquad \int_a^\infty (1+|x|)|F^{\pm\prime}(\pm x)|\,dx < \infty. \tag{2.5.12}$$

Доказательство. 1) Согласно (2.5.3) и (2.4.28), $F^+(x) \in L_2(a,\infty)$ при каждом фиксированном $a > -\infty$. По непрерывности (2.5.1) верно также при $y = x$:

$$F^+(2x) + A^+(x,x) + \int_x^\infty A^+(x,t)F^+(t+x)\,dt = 0. \tag{2.5.13}$$

Перепишем (2.5.13) в виде

$$F^+(2x) + A^+(x,x) + 2\int_x^\infty A^+(x,2\xi-x)F^+(2\xi)\,d\xi = 0. \tag{2.5.14}$$

Из (2.5.14) и (2.4.10) вытекает, что функция $F^+(x)$ непрерывна и при $x \geqslant a$ верна оценка

$$|F^+(2x)| \leqslant \frac{1}{2}Q_0^+(x) + \exp(Q_1^+(a))\int_x^\infty Q_0^+(\xi)|F^+(2\xi)|\,d\xi. \tag{2.5.15}$$

Фиксируем $r \geqslant a$. Тогда при $x \geqslant r$ (2.5.15) дает

$$|F^+(2x)| \leqslant \frac{1}{2}Q_0^+(r) + \exp(Q_1^+(a)) \int\limits_x^\infty Q_0^+(\xi)|F^+(2\xi)|\,d\xi.$$

Применяя лемму 2.5.1, получаем

$$|F^+(2x)| \leqslant \frac{1}{2}Q_0^+(r)\exp(Q_1^+(a)\exp(Q_1^+(a))), \quad x \geqslant r \geqslant a,$$

и, следовательно,

$$|F^+(2x)| \leqslant C_a Q_0^+(x), \quad x \geqslant a. \tag{2.5.16}$$

Из (2.5.16) вытекает, что при каждом $a > -\infty$

$$\int\limits_a^\infty |F^+(x)|\,dx < \infty.$$

2) В силу (2.5.14) функция $F^+(x)$ абсолютно непрерывна и

$$2F^{+\prime}(2x) + \frac{d}{dx}A^+(x,x) - 2A^+(x,x)F^+(2x) + \\ + 2\int\limits_x^\infty \Big(A_1^+(x, 2\xi - x) + A_2^+(x, 2\xi - x)\Big)F^+(2\xi)\,d\xi = 0,$$

где

$$A_1^+(x,t) = \frac{\partial A^+(x,t)}{\partial x}, \quad A_2^+(x,t) = \frac{\partial A^+(x,t)}{\partial t}.$$

Учитывая (2.4.9), получаем

$$F^{+\prime}(2x) = \frac{1}{4}\,q(x) + P(x), \tag{2.5.17}$$

где

$$P(x) = -\int\limits_x^\infty \Big(A_1^+(x, 2\xi - x) + A_2^+(x, 2\xi - x)\Big)F^+(2\xi)\,d\xi - \\ - \frac{1}{2}F^+(2x)\int\limits_x^\infty q(t)\,dt.$$

Из (2.5.16) и (2.4.11) вытекает

$$|P(x)| \leqslant C_a (Q_0^+(x))^2, \quad x \geqslant a. \tag{2.5.18}$$

Так как

$$xQ_0^+(x) \leqslant \int_x^\infty t|q(t)|\,dt,$$

то из (2.5.17) и (2.5.18) следует, что при каждом $a > -\infty$,

$$\int_a^\infty (1+|x|)|F^{+\prime}(x)|\,dx < \infty,$$

и (2.5.12) доказано для $F^+(x)$. Для $F^-(x)$ рассуждения аналогичны. $\square$

Перейдем теперь к изучению разрешимости основных уравнений (2.5.1) и (2.5.2). Пусть заданы множества $J^\pm = \{s^\pm(\rho), \lambda_k, \alpha_k^\pm;\ \rho \in \in \mathbf{R},\ k = \overline{1,N}\}$, удовлетворяющие следующему условию.

Условие A. *При вещественных $\rho \neq 0$ функции $s^\pm(\rho)$ непрерывны, $|s^\pm(\rho)| < 1$, $\overline{s^\pm(\rho)} = s^\pm(-\rho)$ и $s^\pm(\rho) = o(\rho^{-1})$ при $|\rho| \to \infty$. Вещественные функции $R^\pm(x)$, определенные в* (2.4.28), *являются абсолютно непрерывными, $R^\pm(x) \in L_2(-\infty,\infty)$, и при каждом фиксированном $a > -\infty$*

$$\int_a^\infty |R^\pm(\pm x)|\,dx < \infty, \qquad \int_a^\infty (1+|x|)|R^{\pm\prime}(\pm x)|\,dx < \infty. \tag{2.5.19}$$

Кроме того, $\lambda_k = -\tau_k^2 < 0$, $\alpha_k^\pm > 0$, $k = \overline{1,N}$.

Теорема 2.5.2. *Пусть даны J^+ (J^-), удовлетворяющие условию A. Тогда при каждом фиксированном x интегральное уравнение* (2.5.1) ((2.5.2) *соответственно*) *имеет единственное решение $A^+(x,y) \in L(x,\infty)$ ($A^-(x,y) \in L(-\infty,x)$ соответственно*).

Доказательство. Для определенности рассмотрим уравнение (2.5.1). Для (2.5.2) рассуждения аналогичны. Нетрудно проверить, что при каждом x оператор

$$(J_x f)(y) = \int_x^\infty F^+(t+y)f(t)\,dt, \quad y > x,$$

является компактным в $L(x,\infty)$. Поэтому достаточно доказать, что однородное уравнение

$$f(y) + \int_x^\infty F^+(t+y)f(t)\,dt = 0 \tag{2.5.20}$$

имеет только нулевое решение. Пусть $f(y) \in L(x,\infty)$ — вещественная функция, удовлетворяющая (2.5.20). Из (2.5.20) и условия A вытекает, что функции $F^+(y)$ и $f(y)$ ограничены на полуоси $y > x$, и, следовательно, $f(y) \in L_2(x,\infty)$. Используя (2.5.3) и (2.4.28), вычисляем

$$0 = \int\limits_x^\infty f^2(y)\,dy + \int\limits_x^\infty \int\limits_x^\infty F^+(t+y)f(t)f(y)\,dtdy =$$

$$= \int\limits_x^\infty f^2(y)\,dy + \sum_{k=1}^N \alpha_k^+ \Big(\int\limits_x^\infty f(y)\exp(-\tau_k y)\,dy\Big)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty s^+(\rho)\Phi^2(\rho)\,d\rho,$$

где $\Phi(\rho) = \int_x^\infty f(y)\exp(i\rho y)\,dy$. В силу равенства Парсеваля имеем

$$\int\limits_x^\infty f^2(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty |\Phi(\rho)|^2\,d\rho,$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^+ \Big(\int\limits_x^\infty f(y)\exp(-\tau_k y)\,dy\Big)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty |\Phi(\rho)|^2\Big(1 - |s^+(\rho)|\exp(i(2\theta(\rho)+\eta(\rho)))\Big)\,d\rho = 0,$$

где $\theta(\rho) = \arg\Phi(\rho)$, $\eta(\rho) = \arg(-s^+(\rho))$. Возьмем в этом равенстве вещественную часть:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^+ \Big(\int\limits_x^\infty f(y)\exp(-\tau_k y)\,dy\Big)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty |\Phi(\rho)|^2\Big(1 - |s^+(\rho)|\cos((2\theta(\rho)+\eta(\rho)))\Big)\,d\rho = 0.$$

Так как $|s^+(\rho)| < 1$, то это возможно только если $\Phi(\rho) \equiv 0$. Тогда $f(y) = 0$, и теорема 2.5.2 доказана. $\square$

Замечание 2.5.1. Основные уравнения (2.5.1)–(2.5.2) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{gathered}F^+(2x+y)+B^+(x,y)+\\ +\int\limits_0^\infty B^+(x,t)F^+(2x+y+t)\,dt=0,\quad y>0,\\ F^-(2x+y)+B^-(x,y)+\\ +\int\limits_{-\infty}^0 B^-(x,t)F^-(2x+y+t)\,dt=0,\quad y<0,\end{gathered}\tag{2.5.21}$$

где $B^\pm(x,y)=A^\pm(x,x+y)$.

2.5.2. Решение обратной задачи рассеяния. В этом пункте, используя основные уравнения (2.5.1)–(2.5.2), мы даем решение обратной задачи рассеяния восстановления потенциала q по данным рассеяния J^+ (или J^-). Сначала докажем теорему единственности.

Теорема 2.5.3. *Задание данных рассеяния J^+ (или J^-) однозначно определяет потенциал q.*

Доказательство. Пусть J^+ и $\widetilde{J}^+$ — правые данные рассеяния для потенциалов q и $\widetilde{q}$ соответственно, и пусть $J^+=\widetilde{J}^+$. Тогда из (2.5.3) и (2.4.28) вытекает, что $F^+(x)=\widetilde{F}^+(x)$. В силу теорем 2.5.1 и 2.5.2, $A^+(x,y)=\widetilde{A}^+(x,y)$. Поэтому, учитывая (2.4.9), получаем $q=\widetilde{q}$. Для J^- рассуждения аналогичны. □

Решение обратной задачи рассеяния может быть построено по следующему алгоритму.

Алгоритм 2.5.1. Пусть заданы J^+ (или J^-).

1) Вычисляем функцию $F^+(x)$ (или $F^-(x)$) по (2.5.3) и (2.4.28).

2) Находим $A^+(x,y)$ (или $A^-(x,y)$), решая основное уравнение (2.5.1) (или (2.5.2) соответственно).

3) Строим $q(x)=-2\dfrac{d}{dx}A^+(x,x)$ (или $q(x)=2\dfrac{d}{dx}A^-(x,x)$).

Перейдем теперь к описанию необходимых и достаточных условий разрешимости обратной задачи рассеяния. Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.5.3. *Пусть даны множества* $J^\pm=\{s^\pm(\rho),\lambda_k,\alpha_k^\pm;\ \rho\in R,\ k=\overline{1,N}\}$, *удовлетворяющие условию* A, *и пусть* $A^\pm(x,y)$ — *решения интегральных уравнений* (2.5.1), (2.5.2). *Построим функции* $e(x,\rho)$ *и* $g(x,\rho)$ *по* (2.4.8) *и функции* $q^\pm(x)$ *по формулам*

$$q^+(x)=-2\frac{d}{dx}A^+(x,x),\quad q^-(x)=2\frac{d}{dx}A^-(x,x).\tag{2.5.22}$$

Тогда для каждого фиксированного $a > -\infty$

$$\int_a^\infty (1+|x|)|q^\pm(\pm x)|\,dx < \infty, \tag{2.5.23}$$

и

$$-e''(x,\rho) + q^+(x)e(x,\rho) = \rho^2 e(x,\rho),$$
$$-g''(x,\rho) + q^-(x)g(x,\rho) = \rho^2 g(x,\rho). \tag{2.5.24}$$

Доказательство. 1) Из (2.5.19) и (2.5.3) вытекает

$$\int_a^\infty |F^\pm(\pm x)|\,dx < \infty, \quad \int_a^\infty (1+|x|)|F^{\pm\prime}(\pm x)|\,dx < \infty. \tag{2.5.25}$$

Перепишем (2.5.1) в виде

$$F^+(y+2x) + A^+(x,x+y) + \\ + \int_0^\infty A^+(x,x+t)F^+(t+y+2x)\,dt = 0, \quad y > 0, \tag{2.5.26}$$

и для каждого фиксированного x рассмотрим оператор

$$(\mathcal{F}_x f)(y) = \int_0^\infty F^+(t+y+2x)f(t)\,dt, \quad y \geqslant 0,$$

в $L(0,\infty)$. Из теоремы 2.5.2 вытекает, что существует $(E+\mathcal{F}_x)^{-1}$, где E — единичный оператор, и $\|(E+\mathcal{F}_x)^{-1}\| < \infty$. Используя лемму 1.3.1 (или аналог леммы 1.3.2 для бесконечного интервала) нетрудно убедиться, что $A^+(x,y)$, $y \geqslant x$ и $\|(E+\mathcal{F}_x)^{-1}\|$ являются непрерывными функциями. Так как

$$\|\mathcal{F}_x\| = \sup_y \int_0^\infty |F^+(t+y+2x)|\,dt = \sup_y \int_{y+2x}^\infty |F^+(\xi)|\,d\xi \leqslant \int_{2x}^\infty |F^+(\xi)|\,d\xi,$$

то $\lim\limits_{x\to\infty} \|\mathcal{F}_x\| = 0$. Поэтому $C_a^0 := \sup\limits_{x\geqslant a} \|(E+\mathcal{F}_x)^{-1}\| < \infty$. Обозначим

$$\tau_0(x) = \int_x^\infty |F^{+\prime}(t)|\,dt, \quad \tau_1(x) = \int_x^\infty \tau_0(t)\,dt = \int_x^\infty (t-x)|F^{+\prime}(t)|\,dt.$$

Тогда

$$|F^+(x)| \leqslant \tau_0(x). \tag{2.5.27}$$

Из (2.5.26) вытекает $A^+(x, x+y) = -(E + \mathcal{F}_x)^{-1} F^+(y+2x)$, и, следовательно,

$$\int\limits_0^\infty |A^+(x, x+y)|\, dy \leqslant C_a^0 \int\limits_0^\infty |F^+(y+2x)|\, dy \leqslant C_a^0 \tau_1(2x), \quad x \geqslant a. \tag{2.5.28}$$

Используя (2.5.26), (2.5.27) и (2.5.28), вычисляем

$$|A^+(x, x+y)| \leqslant \tau_0(y+2x) + \int\limits_0^\infty |A^+(x, x+t)| \tau_0(t+y+2x)\, dt \leqslant \\ \leqslant \Big(1 + C_a^0 \tau_1(2x)\Big) \tau_0(y+2x). \tag{2.5.29}$$

Применяя лемму 1.3.1, можно показать, что функция $A^+(x, y)$ имеет первые производные

$$A_1^+(x, y) := \frac{\partial A^+(x, y)}{\partial x}, \quad A_2^+(x, y) := \frac{\partial A^+(x, y)}{\partial y},$$

и поэтому, дифференцируя (2.5.1), получаем

$$\left.\begin{aligned} &F^{+'}(x+y) + A_1^+(x, y) - A^+(x, x) F^+(x+y) + \\ &\qquad\qquad + \int\limits_x^\infty A_1^+(x, t) F^+(t+y)\, dt = 0, \\ &F^{+'}(x+y) + A_2^+(x, y) + \int\limits_x^\infty A^+(x, t) F^{+'}(t+y)\, dt = 0. \end{aligned}\right. \tag{2.5.30}$$

Обозначим $A_0^+(x, x+y) := \dfrac{d}{dx} A^+(x, x+y)$. Дифференцируя (2.5.26) по x, вычисляем

$$2F^{+'}(y+2x) + A_0^+(x, x+y) + \int\limits_0^\infty A_0^+(x, x+t) F^+(t+y+2x)\, dt + \\ + 2\int\limits_0^\infty A^+(x, x+t) F^{+'}(t+y+2x)\, dt = 0, \tag{2.5.31}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_0^\infty |A_0^+(x, x+y)|\, dy \leqslant 2C_a^0 \Big(\int\limits_0^\infty |F^{+'}(y+2x)|\, dy + \\ + \int\limits_0^\infty |A^+(x, x+t)| \Big(\int\limits_0^\infty |F^{+'}(t+y+2x)|\, dy \Big)\, dt \Big).$$

В силу (2.5.29) это дает

$$\int_0^\infty |A_0^+(x,x+y)|\,dy \leqslant 2C_a^0\Big(\tau_0(2x) + (1 + C_a^0\tau_1(2x))\int_0^\infty \tau_0^2(t+2x)\,dt\Big) \leqslant$$
$$\leqslant 2C_a^0\tau_0(2x)\Big(1 + (1 + C_a^0\tau_1(2x))\tau_1(2x)\Big). \quad (2.5.32)$$

Из (2.5.31) вытекает

$$|A_0^+(x,x+y) + 2F^{+\prime}(y+2x)| \leqslant \int_0^\infty |A_0^+(x,x+t)F^+(t+y+2x)|\,dt +$$
$$+ 2\int_0^\infty |A^+(x,x+t)F^{+\prime}(t+y+2x)|\,dt.$$

Используя (2.5.27), (2.5.32) и (2.5.29), получаем

$$|A_0^+(x,x+y) + 2F^{+\prime}(y+2x)| \leqslant 2C_a^0\tau_0(y+2x)\tau_0(2x)\tau_1(2x) \times$$
$$\times (1 + C_a^0\tau_1(2x)) + 2\tau_0(2x)\tau_0(y+2x)(1 + C_a^0\tau_1(2x)).$$

При $y = 0$ имеем

$$|2\frac{d}{dx}A^+(x,x) + 4F^{+\prime}(2x)| \leqslant 2C_a\tau_0^2(2x), \quad x \geqslant a,$$

где $C_a = 4(1 + C_a^0\tau_1(2a))^2$. Учитывая (2.5.22), заключаем

$$\int_a^\infty (1+|x|)|q^+(x)|\,dx \leqslant 4\int_a^\infty (1+|x|)|F^{+\prime}(2x)|\,dx + C_a\int_a^\infty (1+|x|)\tau_0^2(2x)\,dx.$$

Так как

$$x\tau_0(2x) \leqslant \int_{2x}^\infty t|F^{+\prime}(t)|\,dt \leqslant \int_0^\infty t|F^{+\prime}(t)|\,dt,$$

то приходим к (2.5.23) для q^+. Для q^- рассуждения аналогичны.

2) Докажем теперь (2.5.24). Для определенности докажем (2.5.24) для $e(x,\rho)$. Сначала дополнительно предположим, что функция $F^{+\prime}(x)$ абсолютно непрерывна и $F^{+\prime\prime}(x) \in L(a,\infty)$ при каждом $a > -\infty$. Дифференцируя равенство

$$J(x,y) := F^+(x+y) + A^+(x,y) +$$
$$+ \int_x^\infty A^+(x,t)F^+(t+y)\,dt = 0,\ y > x, \quad (2.5.33)$$

вычисляем

$$J_{yy}(x,y)=F^{+''}(x+y)+A^{+}_{yy}(x,y)+\int\limits_x^{\infty} A^{+}(x,t)F^{+''}(t+y)\,dt=0, \quad (2.5.34)$$

$$J_{xx}(x,y) = F^{+''}(x+y) + A^{+}_{xx}(x,y) - \frac{d}{dx}A^{+}(x,x)F^{+}(x+y) - \\ - A^{+}(x,x)F^{+'}(x+y) - A^{+}_{1}(x,t)_{|t=x}F^{+}(x+y) + \\ + \int\limits_x^{\infty} A^{+}_{xx}(x,t)F^{+}(t+y)\,dt = 0. \quad (2.5.35)$$

Интегрирование по частям в (2.5.34) дает

$$J_{yy}(x,y) = F^{+''}(x+y) + A^{+}_{yy}(x,y) + \\ + \Big(A^{+}(x,t)F^{+'}(t+y) - A^{+}_{2}(x,t)F^{+}(t+y)\Big)\Big|_x^{\infty} + \\ + \int\limits_x^{\infty} A^{+}_{tt}(x,t)F^{+}(t+y)\,dt = 0.$$

Из (2.5.29) и (2.5.30) вытекает, что подстановка в бесконечности равна нулю, и, следовательно,

$$J_{yy}(x,y) = F^{+''}(x+y) + A^{+}_{yy}(x,y) - A^{+}(x,x)F^{+'}(x+y) + \\ + A^{+}_{2}(x,x)F^{+}(x+y) + \int\limits_x^{\infty} A^{+}_{tt}(x,t)F^{+}(t+y)\,dt = 0. \quad (2.5.36)$$

Используя (2.5.35), (2.5.36), (2.5.33), (2.5.22) и равенство

$$J_{xx}(x,y) - J_{yy}(x,y) - q^{+}(x)J(x,y) = 0,$$

которое следует из соотношения $J(x,y)=0$, получаем

$$f(x,y) + \int\limits_x^{\infty} f(x,t)F^{+}(t+y)\,dt = 0, \quad y \geqslant x, \quad (2.5.37)$$

где $f(x,y) := A^+_{xx}(x,y) - A^+_{yy}(x,y) - q^+(x)A^+(x,y)$. Нетрудно проверить, что $f(x,y) \in L(x,\infty)$ при каждом $x \geqslant a$. По теореме 2.5.2 однородное уравнение (2.5.37) имеет только нулевое решение, т. е.

$$A^+_{xx}(x,y) - A^+_{yy}(x,y) - q^+(x)A^+(x,y) = 0, \quad y \geqslant x. \tag{2.5.38}$$

Дифференцируя (2.4.8) дважды, получаем

$$\begin{aligned} e''(x,\rho) = (i\rho)^2 \exp(i\rho x) - (i\rho)A^+(x,x)\exp(i\rho x) - \\ - \Bigl(\frac{d}{dx}A^+(x,x) + A^+_1(x,t)_{|t=x}\Bigr)\exp(i\rho x) + \\ + \int\limits_x^\infty A^+_{xx}(x,t)\exp(i\rho t)\,dt. \end{aligned} \tag{2.5.39}$$

С другой стороны, интегрируя дважды по частям, вычисляем

$$\begin{aligned} \rho^2 e(x,\rho) = -(i\rho)^2\exp(i\rho x) - (i\rho)^2 \int\limits_x^\infty A^+(x,t)\exp(i\rho t)\,dt = \\ = -(i\rho)^2\exp(i\rho x) + (i\rho)A^+(x,x)\exp(i\rho x) - \\ - A^+_2(x,t)_{|t=x}\exp(i\rho x) - \int\limits_x^\infty A^+_{tt}(x,t)\exp(i\rho t)\,dt. \end{aligned}$$

Вместе с (2.4.8) и (2.5.39) это дает

$$\begin{aligned} e''(x,\rho) + \rho^2 e(x,\rho) - q^+(x)e(x,\rho) = \\ = \Bigl(-2\frac{d}{dx}A^+(x,x) - q^+(x)\Bigr)\exp(i\rho x) + \int\limits_x^\infty (A^+_{xx}(x,t) - A^+_{tt}(x,t) - \\ - q^+(x)A^+(x,t))\exp(i\rho t)\,dt. \end{aligned}$$

Учитывая (2.5.22) и (2.5.38), приходим к (2.5.24) для $e(x,\rho)$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда верно (2.5.25). Обозначим через $\widetilde{e}(x,\rho)$ решение Йоста для потенциала q^+. Наша цель — доказать, что $\widetilde{e}(x,\rho) \equiv e(x,\rho)$. Для этого выберем функции $F^+_j(x)$ так, чтобы $F^+_j(x)$, $F^{+\prime}_j(x)$ были абсолютно непрерывны, $F^{+\prime\prime}_j(x) \in L(a,\infty)$ для каждого $a > -\infty$ и

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_a^\infty |F_j^+(x) - F^+(x)|\,dx = 0,$$
$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_a^\infty (1+|x|)|F_j^{+\prime}(x) - F^{+\prime}(x)|\,dx = 0. \tag{2.5.40}$$

Обозначим

$$\tau_{0j}(x) = \int\limits_x^\infty |F_j^{+\prime}(t) - F^{+\prime}(t)|\,dt,$$

$$\tau_{1j}(x) = \int\limits_x^\infty \tau_{0j}(t)\,dt = \int\limits_x^\infty (t-x)|F_j^{+\prime}(t) - F^{+\prime}(t)|\,dt.$$

Используя (2.5.40) и лемму 1.3.1, можно показать, что при достаточно больших j интегральное уравнение

$$F_j^+(x+y) + A_{(j)}^+(x,y) + \int\limits_x^\infty A_{(j)}^+(x,t)F_j^+(t+y)\,dt = 0, \quad y > x,$$

имеет единственное решение $A_{(j)}^+(x,y)$, причем

$$\int\limits_x^\infty |A_{(j)}^+(x,y) - A^+(x,y)|\,dy \leqslant C_a\tau_{1j}(2x), \quad x \geqslant a. \tag{2.5.41}$$

Следовательно,

$$\lim_{j\to\infty}\max_{x\geqslant a}\int\limits_x^\infty |A_{(j)}^+(x,y) - A^+(x,y)|\,dy = 0. \tag{2.5.42}$$

Обозначим

$$e_j(x,\rho) = \exp(i\rho x) + \int\limits_x^\infty A_{(j)}^+(x,t)\exp(i\rho t)\,dt, \tag{2.5.43}$$

$$q_j^+(x) = -2\frac{d}{dx}A_{(j)}^+(x,x).$$

Ранее было доказано, что $-e_j''(x,\rho) + q_j^+(x)e_j(x,\rho) = \rho^2 e_j(x,\rho)$, т. е. $e_j(x,\rho)$ — решение Йоста для потенциала q_j^+. Используя (2.5.40), (2.5.41) и действуя так же, как и в первой части доказательства леммы 2.5.3, получаем

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_a^\infty (1+|x|)|q_j^+(x)-q^+(x)|\,dx=0.$$

В силу леммы 2.4.1 это дает

$$\lim_{j\to\infty}\max_{\rho\in\overline{\Omega_+}}\max_{x\geqslant a}|(e_j(x,\rho)-\widetilde{e}(x,\rho))\exp(-i\rho x)|=0.$$

С другой стороны, используя (2.4.8), (2.5.42) и (2.5.43), выводим

$$\lim_{j\to\infty}\max_{\rho\in\overline{\Omega_+}}\max_{x\geqslant a}|(e_j(x,\rho)-e(x,\rho))\exp(-i\rho x)|=0.$$

Следовательно, $e(x,\rho)\equiv\widetilde{e}(x,\rho)$, и (2.5.24) доказано для функции $e(x,\rho)$. Для $g(x,\rho)$ рассуждения аналогичны. Поэтому лемма 2.5.3 доказана. □

Сформулируем теперь необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния

Теорема 2.5.4. *Для того чтобы множество* $J^+=\{s^+(\rho),\ \lambda_k,\ \alpha_k^+;\ \rho\in\mathbf{R},\ k=\overline{1,N}\}$ *было правыми данными рассеяния для некоторого вещественного потенциала* q, *удовлетворяющего* (2.4.2), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) $\lambda_k=-\tau_k^2,\ 0<\tau_1<\ldots<\tau_N;\ \alpha_k^+>0,\ k=\overline{1,N}$;

2) *при вещественных* $\rho\neq 0$ *функция* $s^+(\rho)$ *непрерывна*, $\overline{s^+(\rho)}=s^+(-\rho)$, $|s^+(\rho)|<1$, *и*

$$s^+(\rho)=o(\rho^{-1})\ \text{ при }\ |\rho|\to\infty, \tag{2.5.44}$$

$$\frac{\rho^2}{1-|s^+(\rho)|^2}=O(1)\ \text{ при }\ |\rho|\to 0; \tag{2.5.45}$$

3) *функция* $\rho(a(\rho)-1)$, *где* $a(\rho)$ *определено формулами*

$$a(\rho):=\prod_{k=1}^N\frac{\rho-i\tau_k}{\rho+i\tau_k}\exp(B(\rho)),$$

$$B(\rho):=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{\ln(1-|s^+(\xi)|^2)}{\xi-\rho}\,d\xi,\ \rho\in\Omega_+, \tag{2.5.46}$$

непрерывна и ограничена в $\overline{\Omega_+}$, *и*

$$(a(\rho))^{-1}=O(1)\ \textit{ при }\ |\rho|\to 0,\ \rho\in\overline{\Omega_+}, \tag{2.5.47}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\rho a(\rho)\Big(s^+(\rho)+1\Big)=0\ \textit{ при вещественных }\ \rho; \tag{2.5.48}$$

4) *функции* $R^{\pm}(x)$, *определенные формулами*

$$R^{\pm}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^{\pm}(\rho)\exp(\pm i\rho x)\,d\rho,\ s^{-}(\rho):=-s^{+}(-\rho)\frac{a(-\rho)}{a(\rho)},\quad(2.5.49)$$

вещественны и абсолютно непрерывны, $R^{\pm}(x)\in L_2(-\infty,\infty)$, *и при каждом* $a>-\infty$ *верно* (2.5.19).

Доказательство. Необходимость теоремы 2.5.4 доказана выше. Докажем достаточность. Пусть дано множество J^{+}, удовлетворяющее условиям теоремы 2.5.4. Согласно (2.5.46) имеем

$$B(\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(\xi)}{\xi-\rho}\,d\xi,\quad \rho\in\Omega_{+},\quad \theta(\xi):=\ln\frac{1}{1-|s^{+}(\xi)|^{2}}.\quad(2.5.50)$$

При вещественных $\xi\neq 0$ функция $\theta(\xi)$ непрерывна и

$$\theta(\xi)=\theta(-\xi)\geqslant 0,\quad(2.5.51)$$

$$\theta(\xi)=o(\xi^{-2})\ \text{ при }\ \xi\to\infty\ \text{ и }\ \theta(\xi)=O\Big(\ln\frac{1}{\xi}\Big)\ \text{ при }\ \xi\to 0.$$

Функция $B(\rho)$ аналитична в Ω_{+}, непрерывна в $\overline{\Omega_{+}}\setminus\{0\}$ и при вещественных $\rho\neq 0$,

$$B(\rho)=\frac{1}{2}\theta(\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(\xi)}{\xi-\rho}\,d\xi,\quad(2.5.52)$$

причем интеграл в (2.5.52) понимается в смысле главного значения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}:=\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\rho-\varepsilon}+\int\limits_{\rho+\varepsilon}^{\infty}\Big).$$

Используя (2.5.46), (2.5.51), (2.5.52) и условие (3) теоремы, получаем

$$\overline{a(\rho)}=a(-\rho)\ \text{ при вещественных }\ \rho\neq 0.\quad(2.5.53)$$

Кроме того, при вещественных $\rho\neq 0$ (2.5.46) и (2.5.52) дают

$$|a(\rho)|^{2}=|\exp(B(\rho))|^{2}=\exp(2\mathrm{Re}\,B(\rho))=\exp(\theta(\rho)),$$

и, следовательно,

$$1-|s^{+}(\rho)|^{2}=|a(\rho)|^{-2}\ \text{ при вещественных }\ \rho\neq 0.\quad(2.5.54)$$

Далее, функция $s^-(\rho)$, определенная в (2.5.49), непрерывна при вещественных $\rho \neq 0$, и в силу (2.5.53) $\overline{s^-(\rho)} = s^-(-\rho)$, $|s^-(\rho)| = |s^+(\rho)|$. Поэтому, учитывая (2.5.44), (2.5.45) и (2.5.48), получаем

$$s^-(\rho) = o(\rho^{-1}) \text{ при } |\rho| \to \infty, \qquad \frac{\rho^2}{1 - |s^-(\rho)|^2} = O(1) \text{ при } |\rho| \to 0,$$
$$\lim_{\rho\to 0} \rho a(\rho)\Big(s^-(\rho) + 1\Big) = 0 \text{ при вещественных } \rho.$$

Покажем, что
$$a_1^2(\rho_k) < 0, \quad k = \overline{1, N}, \tag{2.5.55}$$
где $a_1(\rho) = \dfrac{d}{d\rho}a(\rho)$, $\rho_k = i\tau_k$. В самом деле, из (2.5.46) вытекает

$$a_1(\rho_k) = \frac{d}{d\rho}\Big(\prod_{j=1}^N \frac{\rho - i\tau_j}{\rho + i\tau_j}\Big)_{|\rho=\rho_k} \exp(B(\rho_k)).$$

Используя (2.5.51), вычисляем

$$B(\rho_k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\xi)}{\xi - i\tau_k}\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi\theta(\xi)}{\xi^2 + \tau_k^2}\, d\xi + \frac{\tau_k}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\xi)}{\xi^2 + \tau_k^2}\, d\xi = \frac{\tau_k}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\xi)}{\xi^2 + \tau_k^2}\, d\xi.$$

Так как
$$\frac{d}{d\rho}\Big(\prod_{j=1}^N \frac{\rho - i\tau_j}{\rho + i\tau_j}\Big)_{|\rho=\rho_k} = \frac{1}{2i\tau_k}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^N \frac{\tau_k - \tau_j}{\tau_k + \tau_j}\Big),$$

то числа $a_1(\rho_k)$ являются чисто мнимыми, и (2.5.55) доказано. Обозначим
$$\alpha_k^- = -\frac{1}{a_1^2(\rho_k)\alpha_k^+}, \quad k = \overline{1, N}. \tag{2.5.56}$$

Согласно (2.5.55)–(2.5.56) $\alpha_k^- > 0$, $k = \overline{1, N}$. Таким образом, мы имеем множества $J^\pm = \{s^\pm(\rho),\ \lambda_k,\ \alpha_k^\pm;\ \rho \in \mathbf{R},\ k = \overline{1, N}\}$, которые удовлетворяют условию A. Поэтому верны теорема 2.5.2 и лемма 2.5.3. Пусть $A^\pm(x, y)$ — решения уравнений (2.5.1)–(2.5.2). Построим функции $e(x, \rho)$ и $g(x, \rho)$ по (2.4.8) и функции $q^\pm(x)$ — по (2.5.22). Тогда верны (2.5.23)–(2.5.25).

Лемма 2.5.4. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} s^+(\rho)e(x, \rho) + e(x, -\rho) &= \frac{g(x, \rho)}{a(\rho)}, \\ s^-(\rho)g(x, \rho) + g(x, -\rho) &= \frac{e(x, \rho)}{a(\rho)}. \end{aligned} \tag{2.5.57}$$

Доказательство. 1) Обозначим

$$\Phi^+(x,y) = R^+(x+y) + \int_x^\infty A^+(x,t)R^+(t+y)\,dt,$$

$$\Phi^-(x,y) = R^-(x+y) + \int_{-\infty}^x A^-(x,t)R^-(t+y)\,dt.$$

При каждом фиксированном x имеем: $\Phi^\pm(x,y) \in L_2(-\infty,\infty)$, и

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^\infty \Phi^+(x,y)\exp(-i\rho y)\,dy = s^+(\rho)e(x,\rho),\\ \int_{-\infty}^\infty \Phi^-(x,y)\exp(i\rho y)\,dy = s^-(\rho)g(x,\rho).\end{gathered} \tag{2.5.58}$$

В самом деле, используя (2.4.8) и (2.5.49), вычисляем

$$s^+(\rho)e(x,\rho) = \Big(\exp(i\rho x) + \int_x^\infty A^+(x,t)\exp(i\rho t)\,dt\Big) \times$$
$$\times \int_{-\infty}^\infty R^+(\xi)\exp(-i\rho\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^\infty R^+(x+y)\exp(-i\rho y)\,dy +$$
$$+ \int_x^\infty A^+(x,t)\Big(\int_{-\infty}^\infty R^+(t+y)\exp(-i\rho y)\,dy\Big)\,dt =$$
$$= \int_{-\infty}^\infty \Big(R^+(x+y) + \int_x^\infty A^+(x,t)R^+(t+y)\,dt\Big)\exp(-i\rho y)\,dy =$$
$$= \int_{-\infty}^\infty \Phi^+(x,y)\exp(-i\rho y)\,dy.$$

Второе соотношение в (2.5.58) доказывается аналогично.

Из (2.5.1)–(2.5.2) вытекает

$$\Phi^+(x,y) = -A^+(x,y) - \sum_{k=1}^N \alpha_k^+ \exp(-\tau_k y)e(x,i\tau_k), \quad y > x,$$

$$\Phi^-(x,y) = -A^-(x,y) - \sum_{k=1}^N \alpha_k^- \exp(\tau_k y)g(x,i\tau_k), \quad y < x.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi^{+}(x,y)\exp(-i\rho y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{x} \Phi^{+}(x,y)\exp(-i\rho y)\,dy - \\ - \int\limits_{x}^{\infty} \Big(A^{+}(x,y) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^{+} \exp(-\tau_k y) e(x, i\tau_k)\Big) \exp(-i\rho y)\,dy.$$

Согласно (2.4.8) имеем

$$\int\limits_{x}^{\infty} A^{+}(x,y)\exp(-i\rho y)\,dy = e(x,-\rho) - \exp(-i\rho x),$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi^{+}(x,y)\exp(-i\rho y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{x} \Phi^{+}(x,y)\exp(-i\rho y)\,dy + \\ + \exp(-i\rho x) - e(x,-\rho) - \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k^{+}}{\tau_k + i\rho} \exp(-i\rho x)\exp(-\tau_k x) e(x, i\tau_k).$$

Аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi^{-}(x,y)\exp(i\rho y)\,dy = \int\limits_{x}^{\infty} \Phi^{+}(x,y)\exp(i\rho y)\,dy + \\ + \exp(i\rho x) - g(x,-\rho) - \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k^{-}}{\tau_k + i\rho} \exp(i\rho x)\exp(\tau_k x) g(x, i\tau_k).$$

Сравнивая с (2.5.58), выводим

$$\begin{aligned} s^{+}(\rho)e(x,\rho) + e(x,-\rho) &= \frac{h^{-}(x,\rho)}{a(\rho)}, \\ s^{-}(\rho)g(x,\rho) + g(x,-\rho) &= \frac{h^{+}(x,\rho)}{a(\rho)}, \end{aligned} \tag{2.5.59}$$

где

$$\begin{aligned} h^{-}(x,\rho) &:= \exp(-i\rho x)a(\rho)\Big(1 + \int\limits_{-\infty}^{x} \Phi^{+}(x,y)\exp(i\rho(x-y))\,dy - \\ &\qquad - \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k^{+}}{\tau_k + i\rho} \exp(-\tau_k x) e(x, i\tau_k)\Big), \\ h^{+}(x,\rho) &:= \exp(i\rho x)a(\rho)\Big(1 + \int\limits_{x}^{\infty} \Phi^{-}(x,y)\exp(i\rho(y-x))\,dy - \\ &\qquad - \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k^{-}}{\tau_k + i\rho} \exp(\tau_k x) g(x, i\tau_k)\Big). \end{aligned} \tag{2.5.60}$$

2) Изучим свойства функций $h^{\pm}(x,\rho)$. В силу (2.5.59) имеем

$$\begin{aligned} h^-(x,\rho) &= a(\rho)\Big(s^+(\rho)e(x,\rho)+e(x,-\rho)\Big),\\ h^+(x,\rho) &= a(\rho)\Big(s^-(\rho)g(x,\rho)+g(x,-\rho)\Big). \end{aligned} \tag{2.5.61}$$

В частности, получаем, что функции $h^{\pm}(x,\rho)$ непрерывны при вещественных $\rho\neq 0$, и, в силу (2.5.53), $\overline{h^{\pm}(x,\rho)}=h^{\pm}(x,-\rho)$. Так как $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho a(\rho)\Big(s^{\pm}(\rho)+1\Big)=0$, то из (2.5.61) вытекает

$$\lim_{\rho\to 0}\rho h^{\pm}(x,\rho)=0. \tag{2.5.62}$$

Поэтому функции $\rho h^{\pm}(x,\rho)$ непрерывны при вещественных ρ. В силу (2.5.60) функции $\rho h^{\pm}(x,\rho)$ аналитичны в Ω_+, непрерывны в $\overline{\Omega_+}$ и (2.5.62) верно при $\rho\in\overline{\Omega_+}$. Учитывая (2.5.61) и (2.4.7), получаем

$$\langle e(x,\rho),h^-(x,\rho)\rangle=\langle h^+(x,\rho),g(x,\rho)\rangle=-2i\rho a(\rho). \tag{2.5.63}$$

Так как $|s^{\pm}(\rho)|<1$, то из (2.5.59) вытекает, что

$$\sup_{\rho\neq 0}|(a(\rho))^{-1}h^{\pm}(x,\rho)|<\infty. \tag{2.5.64}$$

при вещественных $\rho\neq 0$. Используя (2.5.60), вычисляем

$$h^+(x,i\tau_k)=ia_1(i\tau_k)\alpha_k^-g(x,i\tau_k),\ \ h^-(x,i\tau_k)=ia_1(i\tau_k)\alpha_k^+e(x,i\tau_k), \tag{2.5.65}$$

$$\lim_{\substack{|\rho|\to\infty\\ \operatorname{Im}\rho\geqslant 0}}h^{\pm}(x,\rho)\exp(\mp i\rho x)=1, \tag{2.5.66}$$

где $a_1(\rho)=\dfrac{d}{d\rho}a(\rho)$.

3) Из (2.5.59) вытекает

$$\begin{aligned} s^+(\rho)e(x,\rho)+e(x,-\rho)&=\frac{h^-(x,\rho)}{a(\rho)},\\ e(x,\rho)+s^+(-\rho)e(x,-\rho)&=\frac{h^-(x,-\rho)}{a(-\rho)}. \end{aligned}$$

Решая эту линейную алгебраическую систему, получаем

$$e(x,\rho)\Big(1-s^+(\rho)s^+(-\rho)\Big)=\frac{h^-(x,-\rho)}{a(-\rho)}-s^+(-\rho)\frac{h^-(x,\rho)}{a(\rho)}.$$

В силу (2.5.53)–(2.5.54) имеем

$$1-s^+(\rho)s^+(-\rho)=1-|s^+(\rho)|^2=\frac{1}{|a(\rho)|^2}=\frac{1}{a(\rho)a(-\rho)}.$$

Поэтому

$$\frac{e(x,\rho)}{a(\rho)}=s^-(\rho)h^-(x,\rho)+h^-(x,-\rho). \tag{2.5.67}$$

Используя (2.5.67) и второе соотношения из (2.5.59), вычисляем

$$h^-(x,\rho)g(x,-\rho)-h^-(x,-\rho)g(x,\rho)=G(\rho), \tag{2.5.68}$$

где

$$G(\rho):=\frac{1}{a(\rho)}\Big(h^+(x,\rho)h^-(x,\rho)-e(x,\rho)g(x,\rho)\Big). \tag{2.5.69}$$

Согласно (2.5.65) и (2.5.56) имеем

$$h^+(x,i\tau_k)h^-(x,i\tau_k)-e(x,i\tau_k)g(x,i\tau_k)=0, \quad k=\overline{1,N},$$

и, следовательно, функция $G(\rho)$ аналитична в Ω_+ и непрерывна в $\overline{\Omega_+}\setminus\{0\}$. В силу (2.5.66)

$$\lim_{\substack{|\rho|\to\infty\\ \operatorname{Im}\rho\geqslant 0}} h^+(x,\rho)h^-(x,\rho)=1.$$

Так как $a(\rho)=1+O(\rho^{-1})$ при $|\rho|\to\infty$, $\rho\in\overline{\Omega_+}$, то из (2.5.69) вытекает

$$\lim_{\substack{|\rho|\to\infty\\ \operatorname{Im}\rho\geqslant 0}} G(\rho)=0.$$

В силу (2.5.68), $G(-\rho)=-G(\rho)$ при вещественных $\rho\neq 0$. Продолжим $G(\rho)$ в нижнюю полуплоскость по формуле

$$G(\rho)=-G(-\rho), \quad \operatorname{Im}\rho<0. \tag{2.5.70}$$

Тогда функция $G(\rho)$ аналитична в $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ и

$$\lim_{|\rho|\to\infty} G(\rho)=0. \tag{2.5.71}$$

Далее, из (2.5.69), (2.5.47), (2.5.62) и (2.5.64) вытекает: $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^2 G(\rho)=0$, т. е. функция $\rho G(\rho)$ является целой по ρ. С другой стороны, используя (2.5.69), (2.5.62) и (2.5.64), получаем: $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho G(\rho)=0$ при вещественных ρ, и, следовательно, функция $G(\rho)$ является целой по ρ. Вместе с (2.5.71) и теоремой Лиувилля это дает $G(\rho)\equiv 0$, т. е.

$$h^+(x,\rho)h^-(x,\rho)=e(x,\rho)g(x,\rho), \quad \rho\in\overline{\Omega_+}, \tag{2.5.72}$$

$$h^-(x,\rho)g(x,-\rho)=h^-(x,-\rho)g(x,\rho) \quad \text{при вещественных } \rho\neq 0. \tag{2.5.73}$$

4) Рассмотрим теперь функцию $p(x,\rho):=h^+(x,\rho)(e(x,\rho))^{-1}$. Обозначим $\mathcal{E}=\{x:\ e(x,0)e(x,i\tau_1)\dots e(x,i\tau_N)=0\}$. Так как функция $e(x,\rho)$ является решением уравнения (2.5.24) и для $\rho\in\overline{\Omega_+}$,

$$|e(x,\rho)\exp(-i\rho x)-1|\leqslant\int_x^\infty |A^+(x,t)|\,dt\to 0 \ \text{ при } \ x\to\infty, \tag{2.5.74}$$

то $\mathcal{E}$ — конечное множество. Возьмем фиксированное $x\notin\mathcal{E}$. Пусть $\rho^*\in\overline{\Omega_+}$ является нулем функции $e(x,\rho)$, т. е. $e(x,\rho^*)=0$. Так как

$x \notin \mathcal{E}$, то $\rho^* \ne 0$, $\rho^* \ne i\tau_k$, $k = \overline{1,N}$; поэтому $\rho^* a(\rho^*) \ne 0$. В силу (2.5.63) это дает $h^-(x,\rho^*) \ne 0$. Согласно (2.5.72) имеем: $h^+(x,\rho^*) = 0$. Так как все нули функции $e(x,\rho)$ являются простыми (этот факт доказывается аналогично теореме 2.2.9), то заключаем, что функция $p(x,\rho)$ аналитична в Ω_+ и непрерывна в $\overline{\Omega_+} \setminus \{0\}$. Из (2.5.66) и (2.5.74) вытекает, что $p(x,\rho) \to 1$ при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in \overline{\Omega_+}$. В силу (2.5.72), (2.5.73) имеем: $p(x,\rho) = p(x,-\rho)$ при вещественных $\rho \ne 0$. Продолжим $p(x,\rho)$ в нижнюю полуплоскость по формуле $p(x,\rho) = p(x,-\rho)$, $\operatorname{Im}\rho < 0$. Тогда функция $p(x,\rho)$ аналитична в $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ и

$$\lim_{|\rho|\to\infty} p(x,\rho) = 1. \tag{2.5.75}$$

Так как $e(x,0) \ne 0$, то из (2.5.62) вытекает $\lim\limits_{\rho\to 0} \rho p(x,\rho) = 0$, и, следовательно, функция $p(x,\rho)$ является целой по ρ. Вместе с (2.5.75) это дает $p(x,\rho) \equiv 1$, т. е.

$$h^+(x,\rho) \equiv e(x,\rho). \tag{2.5.76}$$

Тогда с учетом (2.5.72) заключаем, что

$$h^-(x,\rho) \equiv g(x,\rho). \tag{2.5.77}$$

Отсюда, используя (2.5.59), приходим к (2.5.57). Лемма 2.5.4 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 2.5.4. Из (2.5.57) и (2.5.24) вытекает

$$q^-(x) = q^+(x) := q(x). \tag{2.5.78}$$

Тогда (2.5.23) влечет (2.4.2), и функции $e(x,\rho)$ и $g(x,\rho)$ являются решениями Йоста для потенциала q, определенного в (2.5.78).

Обозначим через $\widetilde{J}^\pm = \{\widetilde{s}^+(\rho),\ \widetilde{\lambda}_k,\ \widetilde{\alpha}_k^+;\ \rho \in \mathbf{R},\ k = \overline{1,\widetilde{N}}\}$ данные рассеяния для данного потенциала q и положим

$$\widetilde{a}(\rho) := -\frac{1}{2i\rho}\langle e(x,\rho), g(x,\rho)\rangle. \tag{2.5.79}$$

Используя (2.5.63) и (2.5.76), (2.5.77), вычисляем $\langle e(x,\rho), g(x,\rho)\rangle = -2i\rho a(\rho)$. Вместе с (2.5.79) это дает $\widetilde{a}(\rho) \equiv a(\rho)$, и, следовательно, $\widetilde{N} = N$, $\widetilde{\lambda}_k = \lambda_k$, $k = \overline{1,N}$. Далее, из (2.4.21) вытекает

$$\widetilde{s}^+(\rho)e(x,\rho) + e(x,-\rho) = \frac{g(x,\rho)}{a(\rho)},$$

$$\widetilde{s}^-(\rho)g(x,\rho) + g(x,-\rho) = \frac{e(x,\rho)}{a(\rho)}.$$

Сравнивая с (2.5.47), получаем $\widetilde{s}^\pm(\rho) = s^\pm(\rho)$, $\rho \in \mathbf{R}$. В силу (2.4.26) имеем

$$\widetilde{\alpha}_k^+ = \frac{d_k}{ia_1(\rho_k)}, \quad \widetilde{\alpha}_k^- = \frac{1}{id_k a_1(\rho_k)}. \tag{2.5.80}$$

С другой стороны, из (2.5.76), (2.5.77) и (2.5.65) вытекает

$$e(x,i\tau_k) = ia_1(i\tau_k)\alpha_k^- g(x,i\tau_k), \quad g(x,i\tau_k) = ia_1(i\tau_k)\alpha_k^+ e(x,i\tau_k),$$

т. е. $d_k = ia_1(i\tau_k)\alpha_k^+ = (ia_1(i\tau_k)\alpha_k^-)^{-1}$. Сравнивая с (2.5.80), заключаем, что $\widetilde{\alpha}^{\pm} = \alpha^{\pm}$, и теорема 2.5.4 доказана. □

Замечание 2.5.2. Существует связь между обратной задачей рассеяния и задачей Римана для аналитических функций. В самом деле, перепишем (2.4.27) в виде

$$Q^-(x,\rho) = Q^+(x,\rho)Q(\rho), \tag{2.5.81}$$

где

$$Q^-(x,\rho) = \begin{bmatrix} g(x,-\rho) & e(x,-\rho) \\ g'(x,-\rho) & e'(x,-\rho) \end{bmatrix}, \quad Q^+(x,\rho) = \begin{bmatrix} e(x,\rho) & g(x,\rho) \\ e'(x,\rho) & g'(x,\rho) \end{bmatrix},$$

$$Q(\rho) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a(\rho)} & \dfrac{b(-\rho)}{a(\rho)} \\ -\dfrac{b(\rho)}{a(\rho)} & \dfrac{1}{a(\rho)} \end{bmatrix}.$$

Для каждого x матрица-функция $Q^{\pm}(x,\rho)$ аналитична и ограничена при $\pm\mathrm{Im}\,\rho > 0$. В силу (2.4.26) и (2.4.53) матрица-функция $Q(\rho)$ может быть однозначно восстановлена по данным рассеяния J^+ (или J^-). Таким образом, обратная задача рассеяния сводится к задаче Римана (2.5.81). Отметим, что теорию решения задачи Римана можно найти, например, в [88]. Применяя преобразование Фурье к (2.5.81), как это показано выше, приходим к уравнениям Гельфанда–Левитана–Марченко (2.5.1), (2.5.2) или (2.5.21). Отметим, что использование задачи Римана в теории решения обратных задач представляет только методический интерес и не является независимым методом, так как может рассматриваться как частный случай метода спектральных отображений.

2.5.3. Безотражательные потенциалы. Возмущения дискретного спектра. Потенциал q, удовлетворяющий (2.4.2), называется *безотражательным*, если $b(\rho) \equiv 0$. В силу (2.4.26) и (2.4.53) мы имеем в этом случае

$$s^{\pm}(\rho) \equiv 0, \quad a(\rho) = \prod_{k=1}^{N} \frac{\rho - i\tau_k}{\rho + i\tau_k}. \tag{2.5.82}$$

Теорема 2.5.4 позволяет доказать существование безотражательных потенциалов и описать их все. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5.5. *Пусть заданы произвольные числа* $\lambda_k = -\tau_k^2 < 0$, $\alpha_k^+ > 0$, $k = \overline{1,N}$. *Положим* $s^+(\rho) \equiv 0$, $\rho \in \mathbf{R}$, *и рассмотрим данные* $J^+ = \{s^+(\rho),\ \lambda_k,\ \alpha_k^+;\ \rho \in \mathbf{R},\ k = \overline{1,N}\}$. *Тогда существует единственный безотражательный потенциал* q, *удовлетворяющий* (2.4.2), *для которого* J^+ *являются правыми данными рассеяния.*

Теорема 2.5.5 является очевидным следствием теоремы 2.5.4, так как для этого множества J^+ все условия теоремы 2.5.4 выполнены и верно (2.5.82).

Для безотражательных потенциалов уравнение (2.5.1) принимает вид

$$A^+(x,y) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^+ \exp(-\tau_k(x+y)) + \\ + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^+ \exp(-\tau_k y) \int_x^{\infty} A^+(x,t)\exp(-\tau_k t)\,dt = 0. \quad (2.5.83)$$

Ищем решение уравнения (2.5.83) в виде

$$A^+(x,y) = \sum_{k=1}^{N} P_k(x)\exp(-\tau_k y).$$

Подставляя это выражение в (2.5.83), получаем следующую линейную алгебраическую систему относительно $P_k(x)$:

$$P_k(x) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^+ \frac{\exp(-(\tau_k+\tau_j)x)}{\tau_k+\tau_j} P_j(x) = -\alpha_k^+ \exp(-\tau_k x), \quad k = \overline{1,N}. \quad (2.5.84)$$

Решая (2.5.84), вычисляем $P_k(x) = \Delta_k(x)/\Delta(x)$, где

$$\Delta(x) = \det\left[\delta_{kl} + \alpha_k^+ \frac{\exp(-(\tau_k+\tau_l)x)}{\tau_k+\tau_l}\right]_{k,l=\overline{1,N}} \quad (2.5.85)$$

и $\Delta_k(x)$ — определитель, получающийся из $\Delta(x)$ заменой k-го столбца на столбец свободных членов. Тогда

$$q(x) = -2\frac{d}{dx}A^+(x,x) = -2\sum_{k=1}^{N} \frac{\Delta_k(x)}{\Delta(x)} \exp(-\tau_k x),$$

и, следовательно,

$$q(x) = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\Delta(x). \quad (2.5.86)$$

Таким образом, (2.5.85) и (2.5.86) позволяют вычислять безотражательные потенциалы по заданным числам $\{\lambda_k,\ \alpha_k^+\}_{k=\overline{1,N}}$.

Пример 2.5.1. Пусть $N = 1$, $\tau = \tau_1$, $\alpha = \alpha_1^+$, $\Delta(x) = 1 + \alpha(2\tau)^{-1}\exp(-2\tau x)$. Тогда (2.5.86) дает

$$q(x) = -\frac{4\tau\alpha}{\left(\exp(\tau x) + \frac{\alpha}{2\tau}\exp(-\tau x)\right)^2}.$$

Обозначим $\beta = -(2\tau)^{-1}\ln(2\tau/\alpha)$. Тогда

$$q(x) = -\frac{2\tau^2}{\operatorname{ch}^2(\tau(x-\beta))}.$$

Если $q=0$, то $s^{\pm}(\rho)\equiv 0$, $N=0$, $a(\rho)\equiv 1$. Поэтому теорема 2.5.5 показывает, что все безотражательные потенциалы могут быть построены из нулевого потенциала и заданных чисел $\{\lambda_k,\ \alpha_k^+\}$, $k=\overline{1,N}$. Ниже мы кратко рассмотрим более общий случай возмущения дискретного спектра для произвольного потенциала q. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5.6. *Пусть* $J^+ = \{s^+(\rho),\ \lambda_k,\ \alpha_k^+;\ \rho\in\mathbf{R},\ k=\overline{1,N}\}$ — *правые данные рассеяния для некоторого вещественного потенциала* q, *удовлетворяющего* (2.4.2). *Возьмем произвольные числа* $\widetilde{\lambda}_k = -\widetilde{\tau}_k^2 < 0$, $\widetilde{\alpha}_k^+ > 0$, $k=\overline{1,\widetilde{N}}$, *и рассмотрим множество* $\widetilde{J}^+ = \{s^+(\rho),\ \widetilde{\lambda}_k,\ \widetilde{\alpha}_k^+;\ \rho\in\mathbf{R},\ k=\overline{1,\widetilde{N}}\}$ *с той же функцией* $s^+(\rho)$, *что и в* J^+. *Тогда существует вещественный потенциал* $\widetilde{q}$, *удовлетворяющий* (2.4.2), *для которого* $\widetilde{J}^+$ *являются правыми данными рассеяния.*

Доказательство. Проверим условия теоремы теоремы 2.5.4 для $\widetilde{J}^+$. Согласно (2.5.46) и (2.5.49) построим функции $\widetilde{a}(\rho)$ и $\widetilde{s}^-(\rho)$ по формулам

$$\widetilde{a}(\rho) := \prod_{k=1}^{\widetilde{N}} \frac{\rho - i\widetilde{\tau}_k}{\rho + i\widetilde{\tau}_k} \exp\Bigl(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1-|s^+(\xi)|^2)}{\xi-\rho}\,d\xi\Bigr), \quad \rho\in\Omega_+,$$
$$\widetilde{s}^-(\rho) := -s^+(-\rho)\frac{\widetilde{a}(-\rho)}{\widetilde{a}(\rho)}. \tag{2.5.87}$$

Вместе с (2.4.53) это дает

$$\widetilde{a}(\rho) = a(\rho)\prod_{k=1}^{\widetilde{N}} \frac{\rho - i\widetilde{\tau}_k}{\rho + i\widetilde{\tau}_k} \prod_{k=1}^{N} \frac{\rho + i\tau_k}{\rho - i\tau_k}. \tag{2.5.88}$$

В силу (2.4.26) имеем

$$s^-(\rho) = -s^+(-\rho)\frac{a(-\rho)}{a(\rho)}. \tag{2.5.89}$$

Используя (2.5.87)–(2.5.89), получаем

$$\widetilde{s}^-(\rho) = s^-(\rho). \tag{2.5.90}$$

Так как данные рассеяния J^+ удовлетворяют всем условиям теоремы 2.5.4, то из (2.5.88) и (2.5.90) вытекает, что $\widetilde{J}^+$ также удовлетворяют всем условиям теоремы 2.5.4. Тогда в силу теоремы 2.5.4 существует вещественный потенциал $\widetilde{q}$, удовлетворяющий (2.4.2), для которого $\widetilde{J}^+$

являются правыми данными рассеяния. ☐

2.5.4. Решение задачи Коши для уравнения КдФ.

Обратные спектральные задачи играют существенную роль при интегрировании некоторых важных эволюционных уравнений математической физики. В 1967 г. Гарднер, Грин, Краскл и Миура [89] обнаружили глубокую связь хорошо известного с конца XIX в. нелинейного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$q_t = 6qq_x - q_{xxx}$$

со спектральной теорией операторов Штурма–Лиувилля. Они сумели найти глобальное решение задачи Коши для уравнения КдФ сведением ее к обратной спектральной задаче. Эти исследование породили новое направление в математической физике (более подробно см. работы [1, 2, 157, 236, 304] и литературу в них). В этом пункте мы даем решение задачи Коши для уравнения КдФ и для этого используем идеи из [89, 157] и результаты этого параграфа по обратной задаче рассеяния.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения КдФ:

$$q_t = 6qq_x - q_{xxx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{2.5.91}$$

$$q_{|t=0} = q_0(x), \tag{2.5.92}$$

где $q_0(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая (2.4.2). Обозначим через Q_0 множество вещественных функций $q(x,t)$, $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, таких, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|q(x,t)|\,dt < \infty$$

для каждого фиксированного $T > 0$. Пусть Q_1 — множество функций $q(x,t)$ таких, что $q, \dot{q}, q', q'', q''' \in Q_0$. Здесь и далее «точка» обозначает дифференцирование по t, а «штрих» — дифференцирование по x. Будем искать решение задачи Коши (2.5.91), (2.5.92) в классе Q_1. Докажем сначала теорему единственности.

Теорема 2.5.7. *Задача Коши* (2.5.91)–(2.5.92) *имеет не более одного решения.*

Доказательство. Пусть $q, \widetilde{q} \in Q_1$ — решения задачи Коши (2.5.91)–(2.5.92). Положим $w := q - \widetilde{q}$. Тогда $w \in Q_1$, $w_{|t=0} = 0$ и $w_t = 6(qw_x + w\widetilde{q}_x) - w_{xxx}$. Умножая это равенство на w и интегрируя по x, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} ww_t\,dx = 6\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(qw_x + w\widetilde{q}_x)\,dx - \int\limits_{-\infty}^{\infty} ww_{xxx}\,dx.$$

Интегрирование по частям дает

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} ww_{xxx}\,dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_x w_{xx}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_x w_{xx}\,dx,$$

и, следовательно, $\int_{-\infty}^{\infty} ww_{xxx}\,dx = 0$. Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} qww_x\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q\Big(\frac{1}{2}\,w^2\Big)_x\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} q_x w^2\,dx,$$

то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} ww_t\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\widetilde{q}_x - \frac{1}{2}\,q_x\Big)w^2\,dx.$$

Обозначим

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} w^2\,dx, \quad m(t) = 12\max_{x\in\mathbf{R}}\Big|\widetilde{q}_x - \frac{1}{2}\,q_x\Big|.$$

Тогда $\dot{E}(t) \leqslant m(t)E(t)$, и, следовательно,

$$0 \leqslant E(t) \leqslant E(0)\exp\Big(\int\limits_0^t m(\xi)\,d\xi\Big).$$

Так как $E(0) = 0$, то заключаем, что $E(t) \equiv 0$, т. е. $w \equiv 0$. □

Наша следующая цель — построить решение задачи Коши (2.5.91)–(2.5.92) сведением к обратной задаче рассеяния на оси. Пусть $q(x,t)$ — решение задачи Коши (2.5.91)–(2.5.92). Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля

$$Ly := -y'' + q(x,t)y = \lambda y \tag{2.5.93}$$

с параметром t. Тогда решения Йоста для (2.5.93) и данные рассеяния также зависят от t. Покажем, что уравнение (2.5.91) равносильно уравнению

$$\dot{L} = [A, L], \tag{2.5.94}$$

где $Ay = -4y''' + 6qy' + 3q'y$, а $[A,L] := AL - LA$. В самом деле, так как $Ly = -y'' + qy$, то

$$\dot{L}y = \dot{q}y,\ ALy = -4(-y'' + qy)''' + 6q(-y'' + qy)' + 3q'(-y'' + qy),$$
$$LAy = -(-4y''' + 6qy' + 3q'y)'' + q(-4y''' + 6qy' + 3q'y),$$

и, следовательно, $(AL - LA)y = (6qq' - q''')y$. Уравнение (2.5.94) называется уравнением Лакса или представлением Лакса.

Лемма 2.5.5. *Пусть* $q(x,t)$ — *решение* (2.5.91), *и пусть* $y = y(x,t,\lambda)$ — *решение* (2.5.93). *Тогда* $(L-\lambda)(\dot y - Ay) = 0$, *т. е. функция* $\dot y - Ay$ *также является решением* (2.5.93).

В самом деле, дифференцируя (2.5.93) по t, получаем $\dot L y + (L-\lambda)\dot y = 0$, или, в силу (2.5.94), $(L-\lambda)\dot y = LAy - ALy = (L-\lambda)Ay$. □

Пусть $e(x,t,\rho)$ и $g(x,t,\rho)$ — решения Йоста (2.5.93), введенные в § 2.4. Положим $e_\pm = e(x,t,\pm\rho)$, $g_\pm = g(x,t,\pm\rho)$.

Лемма 2.5.6. *Справедливо следующее соотношение*

$$\dot e_+ = Ae_+ - 4i\rho^3 e_+. \tag{2.5.95}$$

Доказательство. По лемме 2.5.5 функция $\dot e_+ - Ae_+$ является решением уравнения (2.5.93). Так как функции $\{e_+, e_-\}$ образуют фундаментальную систему решений для (2.5.93), то

$$\dot e_+ - Ae_+ = \beta_1 e_+ + \beta_2 e_-,$$

где $\beta_k = \beta_k(t,\rho)$, $k = 1,2$, не зависят от x. При $x \to +\infty$ имеем

$$e_\pm \sim \exp(\pm i\rho x), \quad \dot e_+ \sim 0, \quad Ae_+ \sim 4i\rho^3 \exp(i\rho x),$$

следовательно, $\beta_1 = -4i\rho^3$, $\beta_2 = 0$, и (2.5.95) доказано. □

Лемма 2.5.7. *Справедливы следующие соотношения*:

$$\dot a = 0, \quad \dot b = -8i\rho^3 b, \quad \dot s^+ = 8i\rho^3 s^+, \tag{2.5.96}$$

$$\dot\lambda_j = 0, \quad \dot\alpha_j^+ = 8\varkappa_j^3 \alpha_j^+. \tag{2.5.97}$$

Доказательство. Согласно (2.4.18) имеем

$$e_+ = ag_+ + bg_-. \tag{2.5.98}$$

Дифференцируя (2.5.98) по t, получаем: $\dot e_+ = (\dot a g_+ + \dot b g_-) + (a\dot g_+ + b\dot g_-)$. Используя (2.5.95) и (2.5.98), вычисляем

$$a(Ag_+ - 4i\rho^3 g_+) + b(Ag_- - 4i\rho^3 g_-) = (\dot a g_+ + \dot b g_-) + (a\dot g_+ + b\dot g_-).$$

Так как $g_\pm \sim \exp(\pm i\rho x)$, $\dot g_\pm \sim 0$, $Ag_\pm \sim \pm 4i\rho^3 \exp(\pm i\rho x)$ при $x \to -\infty$, то

$$-8i\rho^3 \exp(-i\rho x) \sim \dot a \exp(i\rho x) + \dot b \exp(-i\rho x),$$

т. е. $\dot a = 0$, $\dot b = -8i\rho^3 b$. Следовательно, $\dot s^+ = 8i\rho^3 s^+$, и верно (2.5.96).

Собственные значения $\lambda_j = \rho_j^2 = -\varkappa_j^2$, $\varkappa_j > 0$, $j = \overline{1,N}$, являются нулями функции $a = a(\rho,t)$. Так как $\dot a = 0$, то $\dot\lambda_j = 0$. Обозначим $e_j = e(x,t,i\varkappa_j)$, $g_j = g(x,t,i\varkappa_j)$, $j = \overline{1,N}$. По теореме 2.4.3 имеем: $g_j = d_j e_j$, где $d_j = d_j(t)$ не зависят от x. Дифференцируя соотношение $g_j = d_j e_j$ по t и используя (2.5.95), вычисляем

$$\dot g_j = \dot d_j e_j + d_j \dot e_j = \dot d_j e_j + d_j A e_j - 4\varkappa_j^3 d_j e_j,$$

или

$$\dot g_j = \dot d_j (d_j)^{-1} g_j + Ag_j - 4\varkappa_j^3 g_j.$$

При $x \to -\infty$ имеем: $g_j \sim \exp(\varkappa_j x)$, $\dot{g}_j \sim 0$, $Ag_j \sim -4\varkappa_j^3 \exp(\varkappa_j x)$, и, следовательно, $\dot{d}_j = 8\varkappa_j^3 d_j$. Учитывая (2.4.32), получаем: $\dot{\alpha}_j^+ = 8\varkappa_j^3 \alpha_j^+$. □

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.5.8. *Пусть $q(x,t)$ — решение задачи Коши* (2.5.91)–(2.5.92), *и пусть $J^+(t) = \{s^+(t,\rho),\ \lambda_j(t),\ \alpha_j^+(t),\ j = \overline{1,N}\}$ — данные рассеяния для $q(x,t)$. Тогда*

$$s^+(t,\rho) = s^+(0,\rho)\exp(8i\rho^3 t),$$

$$\lambda_j(t) = \lambda_j(0), \quad \alpha_j^+(t) = \alpha_j^+(0)\exp(8\varkappa_j^3 t),$$

$$j = \overline{1,N} \quad (\lambda_j = -\varkappa_j^2). \qquad (2.5.99)$$

Формулы (2.5.99) дают эволюцию данных рассеяния по t, и мы получаем следующий алгоритм решения задачи Коши (2.5.91)–(2.5.92).

Алгоритм 2.5.2. *Пусть задана функция $q(x,0) = q_0(x)$.*

1) *Строим данные рассеяния $\{s^+(0,\rho),\ \lambda_j(0),\ \alpha_j^+(0),\ j = \overline{1,N}\}$.*

2) *Вычисляем $\{s^+(t,\rho),\ \lambda_j(t),\ \alpha_j^+(t),\ j = \overline{1,N}\}$ по формулам* (2.5.99).

3) *Находим функцию $q(x,t)$, решая обратную задачу рассеяния.*

Отметим еще раз ключевые моменты при решении задачи Коши (2.5.91), (2.5.92) методом обратной задачи.

1) Наличие представления Лакса (2.5.94).

2) Эволюция данных рассеяния по t.

3) Решение обратной задачи.

Среди решений уравнения КдФ (2.5.91) есть весьма важные частные решения вида $q(x,t) = f(x-ct)$. Такие решения называются *солитонами*. Подставляя $q(x,t) = f(x-ct)$ в (2.5.91), получаем: $f''' + 6ff' + cf' = 0$, или $(f'' + 3f^2 + cf)' = 0$. Ясно, что функция

$$f(x) = -\frac{c}{2\,\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{\sqrt{c}\,x}{2}\right)}$$

удовлетворяет этому уравнению. Поэтому функция

$$q(x,t) = -\frac{c}{2\,\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{\sqrt{c}\,(x-ct)}{2}\right)} \qquad (2.5.100)$$

является солитоном. Интересно отметить, что солитоны соответствуют безотражательным потенциалам. Рассмотрим задачу Коши (2.5.91)–(2.5.92) в случае, когда $q_0(x)$ является безотражательным потенциалом, т. е. $s^+(0,\rho) = 0$. Тогда в силу (2.5.99) имеем: $s^+(t,\rho) = 0$ при всех t, т. е. решение $q(x,t)$ задачи Коши (2.5.91), (2.5.92) является безотражательным потенциалом при всех t. Используя (2.5.86) и (2.5.100), получаем: $q(x,t) = -2\dfrac{d^2}{dx^2}\Delta(x,t)$, где

$$\Delta(x,t) = \det\left[\delta_{kl} + \alpha_k^+(0)\exp(8\varkappa_k^3 t)\frac{\exp(-(\varkappa_k + \varkappa_l)x)}{\varkappa_k + \varkappa_l}\right]_{k,l=\overline{1,N}} .$$

В частности, если $N=1$, то $\alpha_1^+(0) = 2\varkappa_1$ и

$$q(x,t) = -\frac{2\varkappa_1^2}{\operatorname{ch}^2(\varkappa_1(x - 4\varkappa_1^2 t))}.$$

Положив $c = 4\varkappa_1^2$, приходим к (2.5.100).

Глава 3

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ

Глава посвящена построению теории решения обратных задач для дифференциальных операторов

$$\ell y := y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)} \tag{3.0}$$

на полуоси и на конечном интервале. В качестве основной спектральной характеристики вводится и изучается так называемая матрица Вейля [265], наиболее полно выражающая спектральные свойства дифференциального оператора. Данная терминология связана с тем, что введенная матрица является обобщением классической функции Вейля для самосопряженного оператора Штурма–Лиувилля [165]. Использование концепции матрицы Вейля и метода спектральных отображений позволяет построить общую теорию решения обратной задачи для несамосопряженных дифференциальных операторов (3.0) при произвольном поведении спектра.

В § 3.1 дается постановка обратной задачи и доказывается теорема единственности восстановления дифференциального оператора по заданной матрице Вейля. В § 3.2 исследуется решение обратной задачи на полуоси и в основном излагаются результаты из [265]. В частности, приводится вывод основного уравнения обратной задачи, которое является особым линейным интегральным уравнением (см. (3.2.10)) в соответствующем банаховом пространстве, и доказывается его однозначная разрешимость. С использованием решения основного уравнения получена процедура решения обратной задачи и необходимые и достаточные условия ее разрешимости. В § 3.3 дается решение обратной задачи на конечном интервале. Здесь возникают специфические трудности, связанные с наличием нетривиальных структурных свойств матрицы Вейля в окрестностях точек спектра. Основное уравнение обратной задачи в данном случае будет линейным уравнением в пространстве последовательностей. Доказывается его однозначная разрешимость, получены необходимые и достаточные условия, алгоритм решения обратной задачи, исследуется устойчивость. Приводится контрпример, показывающий, что при выбрасывании из матрицы Вейля одного элемента единственность решения обратной задачи нарушается. В § 3.4 дается решение обратной задачи для самосопряженного случая. Другие, более специальные обратные задачи, когда для определения коэффициентов дифференциального оператора (3.0) задается не вся матрица Вейля, а лишь некоторая ее часть, изучались в [250]. При этом на дифференциальный оператор накладываются дополнительные условия. Такие «неполные» обратные задачи имеют свою специфику исследования.

Будем использовать следующие обозначения.

1. Если рассматривается некоторый дифференциальный оператор ℓ, то наряду с ним рассматривается дифференциальный оператор $\widetilde{\ell}$ того же вида, но

с другими коэффициентами. Если некоторый символ φ обозначает объект, относящийся к ℓ, то $\widetilde{\varphi}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к $\widetilde{\ell}$, а $\widehat{\varphi} = \varphi - \widetilde{\varphi}$.

2. Матрицу A с элементами a_{ij}, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, s}$, будем записывать одним из следующих способов: $A = [a_{ij}]_{i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,s}} = [a_{i1}, \ldots, a_{is}]_{i=\overline{1,r}} = [a_{1j}, \ldots \ldots, a_{rj}]^T_{j=\overline{1,s}}$, где i — номер строки, j — номер столбца, T — знак транспонирования.

3. Через E будем обозначать единичную матрицу соответствующей размерности или единичный оператор в соответствующем пространстве.

4. Если при $\lambda \to \lambda_0$

$$F(\lambda) = \sum_{k=-q}^{p} \alpha_k (\lambda - \lambda_0)^k + o((\lambda - \lambda_0)^p),$$

то $[F(\lambda)]^{\langle k \rangle}_{|\lambda=\lambda_0} = F_{\langle k \rangle}(\lambda_0) := \alpha_k$.

§ 3.1. Свойства спектральных характеристик

3.1.1. Матрица Вейля. Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы $L = L(\ell, U)$ вида

$$\ell y := y^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n-2} p_\nu(x) y^{(\nu)} = \lambda y = \rho^n y, \quad 0 \leqslant x \leqslant T \leqslant \infty, \tag{3.1.1}$$

$$U_{\xi a}(y) = y^{(\sigma_{\xi a})}(a) + \sum_{\nu=0}^{\sigma_{\xi a}-1} u_{\xi \nu a} y^{(\nu)}(a), \quad \xi = \overline{1, n}, \tag{3.1.2}$$

на полуоси ($T = \infty$) или на конечном отрезке ($T < \infty$). Здесь $p_\nu(x) \in \in L(0, T)$ — комлекснозначные суммируемые функции; $a = 0$ при $T = = \infty$ и $a = 0, T$ при $T < \infty$; $0 \leqslant \sigma_{\xi a} \leqslant n - 1$, $\sigma_{\xi a} \neq \sigma_{\eta a}$ $(\xi \neq \eta)$.

Известно [188, с. 53], что ρ-плоскость можно разбить на секторы S раствора $\dfrac{\pi}{n}$ $\left(\arg \rho \in \left(\dfrac{\nu\pi}{n}, \dfrac{(\nu+1)\pi}{n}\right),\ \nu = \overline{0, 2n-1}\right)$, в каждом из которых корни $R_1, R_2, \ldots, R_n$ уравнения $R^n - 1 = 0$ можно занумеровать так, чтобы

$$\mathrm{Re}(\rho R_1) < \mathrm{Re}(\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}(\rho R_n), \quad \rho \in S. \tag{3.1.3}$$

Пусть функции $\Phi(x, \lambda) = [\Phi_m(x, \lambda)]^T_{m=\overline{1,n}}$ являются решениями уравнения (3.1.1) при условиях $U_{\xi 0}(\Phi_m) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1, m}$, а также для $T < \infty$ $U_{\eta T}(\Phi_m) = 0$, $\eta = \overline{1, n-m}$, а для $T = \infty$ $\Phi_m(x, \lambda) = = O(\exp(\rho R_m x))$, $x \to \infty$, $\rho \in S$ в каждом секторе S со свойством (3.1.3). Здесь и в дальнейшем $\delta_{\xi m}$ — символ Кронекера. Обозначим $M_{mk}(\lambda) = U_{k0}(\Phi_m)$, $k = \overline{m+1, n}$. Функции $\Phi_m(x, \lambda)$ называются *решениями Вейля*, а функции $M_{mk}(\lambda)$ — *функциями Вейля*. Матрица $M(\lambda) = [M_{mk}(\lambda)]_{m,k=\overline{1,n}}$, где $M_{mk}(\lambda) = \delta_{mk}$, $k = \overline{1, m}$, называется *мат-*

рицей Вейля или спектром L. Рассмотрим фундаментальную систему решений уравнения (3.1.1): $C(x,\lambda)=[C_m(x,\lambda)]^T_{m=\overline{1,n}}$ при условиях $U_{\xi 0}(C_m)=\delta_{\xi m}$, $\xi=\overline{1,n}$. Тогда

$$\Phi(x,\lambda)=M(\lambda)C(x,\lambda). \qquad (3.1.4)$$

Постановка обратной задачи. По заданной матрице Вейля $M(\lambda)$ построить дифференциальное уравнение и линейные формы $L=(\ell,U)$.

В этом параграфе исследуется структура особенностей функций Вейля (теорема 3.1.1) и доказывается теорема единственности восстановления дифференциального уравнения и линейных форм (3.1.1), (3.1.2) на полуоси и на конечном отрезке при произвольном поведении спектра по заданной матрице Вейля $M(\lambda)$ (теорема 3.1.2). Ниже, в § 3.3, приведен контрпример, показывающий, что выбрасывание из матрицы Вейля одного элемента приводит к нарушению единственности решения обратной задачи.

Пусть $\alpha\in(0,T)$, $\rho_\alpha:=2n\max\limits_{\nu}\|p_\nu\|_{L(\alpha,T)}$. Известно [188, с. 58], что в каждом секторе S со свойством (3.1.3) существует фундаментальная система решений уравнения (3.1.1) $B_\alpha=\{y_k(x,\rho)\}_{k=\overline{1,n}}$ вида

$$y_k^{(\nu)}(x,\rho)=(\rho R_k)^\nu\exp(\rho R_k x)(1+O(\rho^{-1})),\quad |\rho|\to\infty,\quad x\geqslant\alpha, \qquad (3.1.5)$$

причем функции $y_k(x,\rho)$ удовлетворяют при $x\geqslant\alpha$, $r_k=k$ уравнениям

$$\begin{aligned}y_k(x,\rho)=\exp(\rho R_k x)\,-&\\ &-\int\limits_\alpha^x\sum_{j=1}^{r_k}R_j\exp(\rho R_j(x-t))\mathcal{M}_t(y_k)\,dt\,+\\ &+\int\limits_x^T\sum_{j=r_k+1}^{n}R_j\exp(\rho R_j(x-t))\mathcal{M}_t(y_k)\,dt,\end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_t(y_k):=\frac{1}{n}\,\rho^{1-n}\sum_{\mu=0}^{n-2}p_\mu(t)y_k^{(\mu)}(t,\rho). \qquad (3.1.6)$$

Функции $y_k^{(\nu)}(x,\rho)$, $\nu=\overline{0,n-1}$, при каждом $x\geqslant 0$ регулярны по $\rho\in S_\alpha:=\{\rho:\rho\in S,|\rho|>\rho_\alpha\}$, непрерывны при $x\geqslant 0$, $\rho\in\overline{S}_\alpha$ и имеют оценку

$$|y_k^{(\nu)}(x,\rho)(\rho R_k)^{-\nu}\exp(-\rho R_k x)-1|\leqslant\rho_\alpha|\rho|^{-1},\quad x\geqslant\alpha,\quad \rho\in\overline{S_\alpha}.$$

При $|\rho|\to\infty$, $\rho\in S$

$$\det[y_k^{(\nu-1)}(x,\rho)]_{k,\nu=\overline{1,n}}=\rho^{n(n-1)/2}\det[R_k^{\nu-1}]_{k,\nu=\overline{1,n}}(1+O(\rho^{-1})).$$

Кроме того, нам потребуется фундаментальная система решений уравнения (3.1.1)

$$B_{\alpha m} = \{y_1^0(x,\rho), \ldots, y_m^0(x,\rho), y_{m+1}(x,\rho), \ldots, y_n(x,\rho)\},$$

где $y_k(x,\rho) \in B_\alpha$, $k = \overline{m+1,n}$, а функции $y_k^0(x,\rho)$, $k = \overline{1,m}$, являются решениями уравнения (3.1.6) при $x \geqslant \alpha$, $r_k = m$. При этом функции $y_k^{0(\nu)}(x,\rho)$, $\nu = \overline{0,n-1}$, непрерывны при $x \in [0,T]$, $\rho \in \overline{S_\alpha}$, регулярны по $\rho \in S_\alpha$ при каждом $x \in [0,T]$ и

$$y_k^{0(\nu)}(x,\rho) = O(\rho^\nu \exp(\rho R_m x)), \quad x \geqslant \alpha, \quad |\rho| \to \infty, \quad \rho \in S.$$

Для случая $T = \infty$ введем также фундаментальную систему решений $B_\alpha^0 = \{y_{k0}(x,\rho)\}_{k=\overline{1,n}}$, где функции $y_{k0}(x,\rho)$ являются решениями уравнения (3.1.6) при $x \geqslant \alpha$, $r_k = k-1$. При этом функции $y_{k0}^{(\nu)}(x,\rho)$, $\nu = \overline{0,n-1}$, непрерывны при $x \geqslant 0$, $\rho \in \overline{S_\alpha}$, регулярны по $\rho \in S_\alpha$ при каждом $x \geqslant 0$ и

$$\begin{gathered}
y_{k0}^{(\nu)}(x,\rho) = (\rho R_k)^\nu \exp(\rho R_k x)(1 + O(\rho^{-1})), \quad x \geqslant \alpha,\ |\rho| \to \infty, \\
\lim_{x\to\infty} y_{k0}^{(\nu)}(x,\rho)(\rho R_k)^{-\nu} \exp(-\rho R_k x) = 1, \\
\det[y_{k0}^{(\nu-1)}(x,\rho)]_{k,\nu=\overline{1,n}} \equiv \rho^{n(n-1)/2} \det[R_k^{\nu-1}]_{k,\nu=\overline{1,n}}.
\end{gathered}$$

Обозначим

$$\begin{gathered}
\omega_\xi(R) = R^{\sigma_{\xi 0}}, \quad \Omega(j_1,\ldots,j_p) = \det[\omega_{j_\nu}(R_k)]_{\nu,k=\overline{1,p}}, \\
\Omega_\mu(j_1,\ldots j_p) = \det[\omega_{j_\nu}(R_k)]_{\nu=\overline{1,p};k=\overline{1,p+1}\setminus\mu}, \\
\mu_{mk}^0 = (\Omega(\overline{1,m})^{-1}\Omega(\overline{1,m-1},k), \\
a_{mk}^0 = (-1)^{m+k}(\Omega(\overline{1,m}))^{-1}\Omega_k(\overline{1,m-1}),
\end{gathered}$$

а также $\Gamma = \{\lambda:\ \operatorname{Im}\lambda = 0\}$, $\Gamma_{\pm 1} = \{\lambda:\ \pm\lambda \geqslant 0\}$; $\Pi, \Pi_{\pm 1}$ — λ-плоскость с разрезами $\Gamma, \Gamma_{\pm 1}$ соответственно.

Теорема 3.1.1. 1) *Пусть $T < \infty$. Тогда функция Вейля $M_{mk}(\lambda)$ является мероморфной по λ, причем*

$$\begin{gathered}
M_{mk}(\lambda) = (\Delta_{mm}(\lambda))^{-1}\Delta_{mk}(\lambda), \\
\Delta_{mk}(\lambda) := (-1)^{m+k} \det[U_{\xi T}(C_\nu)]_{\xi=\overline{1,n-m};\nu=\overline{m,n}\setminus k}.
\end{gathered} \tag{3.1.7}$$

2) *Пусть $T = \infty$. Тогда функция Вейля $M_{mk}(\lambda)$ является регулярной в $\Pi_{(-1)^{n-m}}$ за исключением не более чем счетного ограниченного множества полюсов Λ'_{mk}. При $(-1)^{n-m}\lambda \geqslant 0$ за исключением ограниченных множеств $\Lambda_{mk}^\pm$ существуют конечные пределы $M_{mk}^\pm = \lim\limits_{z\to 0, \operatorname{Re} z>0} M_{mk}(\lambda \pm iz)$.*

Доказательство. Пусть $T = \infty$, $\{y_k(x,\rho)\}_{k=\overline{1,n}}$ — фундаментальная система решений B_0 дифференциального уравнения (3.1.1). Обозначим

$$\Delta^0_{mk}(\rho) = \det[U_{\xi 0}(y_\nu)]_{\nu=\overline{1,m};\,\xi=\overline{1,m-1},k}.$$

Тогда имеем

$$\Phi_m(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} a_{mk}(\rho) y_k(x,\rho).$$

Из условий на решения Вейля $\Phi_m(x,\lambda)$ получаем

$$a_{mk}(\rho) = 0, \quad k > m,$$
$$\sum_{k=1}^{m} a_{mk}(\rho) U_{\xi 0}(y_k) = \delta_{\xi m}, \quad \xi = \overline{1,m}.$$

Отсюда находим

$$\begin{gathered} \Phi_m(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{m} a_{mk}(\rho) y_k(x,\rho), \\ a_{mk}(\rho) = (-1)^{m+k}(\Delta^0_{mm}(\rho))^{-1} \det[U_{\xi 0}(y_\nu)]_{\xi=\overline{1,m-1};\,\nu=\overline{1,m}\setminus k}. \end{gathered} \tag{3.1.8}$$

Так как $M_{mk}(\lambda) = U_{k0}(\Phi_m(x,\lambda))$, то из (3.1.8) вытекает, что

$$M_{mk}(\lambda) = (\Delta^0_{mm}(\rho))^{-1}\Delta^0_{mk}(\rho). \tag{3.1.9}$$

Отсюда, используя асимптотические свойства (3.1.5) функций $y_k^{(\nu)}(x,\rho)$, имеем при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in \overline{S}$:

$$\begin{gathered} a_{mk}(\rho) = \rho^{-\sigma_{m0}}(a^0_{mk} + O(\rho^{-1})), \\ \Phi_m(x,\lambda) = \rho^{-\sigma_{m0}} \sum_{k=1}^{m} \exp(\rho R_k x)(a^0_{mk} + O(\rho^{-1})), \end{gathered} \tag{3.1.10}$$

$$\begin{gathered} \Delta^0_{mk}(\rho) = \rho^{\sigma_{10}+\ldots+\sigma_{m-1,0}+\sigma_{k0}}\Omega(\overline{1,m-1},k)(1 + O(\rho^{-1})), \\ M_{mk}(\lambda) = \rho^{\sigma_{k0}-\sigma_{m0}}\mu^0_{mk}(1 + O(\rho^{-1})). \end{gathered} \tag{3.1.11}$$

Повторяя предыдущие рассуждения для фундаментальной системы решений $B_{\alpha m}$, получаем

$$\begin{gathered} M_{mk}(\lambda) = (\Delta^1_{mm}(\rho))^{-1}\Delta^1_{mk}(\rho), \\ \Delta^1_{mk}(\rho) = \det[U_{\xi 0}(y^0_\nu)]_{\nu=\overline{1,m};\,\xi=\overline{1,m-1},k}. \end{gathered} \tag{3.1.12}$$

Обозначим $G = \{\rho : \arg\rho \in (((-1)^{n-m} - 1)\dfrac{\pi}{2n}, ((-1)^{n-m} + 3)\dfrac{\pi}{2n})\}$. Область G состоит из двух секторов S с одним и тем же набором $\{R_\xi\}_{\xi=\overline{1,m}}$. Следовательно, функции $\Delta^1_{mk}(\rho)$ являются регулярными при $\rho \in G$, $|\rho| > \rho_\alpha$, и непрерывными при $\rho \in \overline{G}$, $|\rho| \geqslant \rho_\alpha$. Отсюда, с учетом (3.1.9), (3.1.11), (3.1.12) и произвольности α, получаем утверждение теоремы при $T = \infty$. Положим $\Lambda_{mk} = \Lambda'_{mk} \cup \Lambda^+_{mk} \cup \Lambda^-_{mk}$, $\Lambda = \bigcup\limits_{m,k} \Lambda_{mk}$.

Пусть теперь $T < \infty$. Из условий на решения Вейля $\Phi_m(x,\lambda)$ получаем

$$\Phi_m(x,\lambda) = (\Delta_{mm}(\lambda))^{-1} \times \\ \times \det[C_\nu(x,\lambda), U_{1T}(C_\nu), \ldots, U_{n-m,T}(C_\nu)]_{\nu=\overline{m,n}}. \qquad (3.1.13)$$

Отсюда следует утверждение теоремы при $T < \infty$. ☐

При $T < \infty$ обозначим $\Lambda_m = \{\lambda_{lm}\}_{l\geqslant 1}$ — множество нулей (с учетом кратностей) целой функции $\Delta_{mm}(\lambda)$; $\Lambda = \bigcup\limits_{m=1}^{n-1} \Lambda_m$. Числа λ_{lm} совпадают с собственными значениями краевых задач S_m для дифференциального уравнения (3.1.1) с краевыми условиями $U_{\xi 0}(y) = U_{\eta T}(y) = 0$, $\xi = \overline{1,m}$, $\eta = \overline{1,n-m}$. В самом деле, пусть λ_0 — собственное значение, а $\psi(x)$ — соответствующая собственная функция краевой задачи S_m. Тогда

$$\psi(x) = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu C_\mu(x,\lambda_0),$$

причем

$$\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu U_{\xi 0}(C_\mu(x,\lambda_0)) = 0, \quad \xi = \overline{1,m},$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu U_{\eta T}(C_\mu(x,\lambda_0)) = 0, \quad \eta = \overline{1,n-m}.$$

Так как $\psi(x) \not\equiv 0$, то эта линейная однородная алгебраическая система имеет ненулевые решения, и, следовательно, определитель системы равен нулю, т. е. $\Delta_{mm}(\lambda_0) = 0$. Повторяя все рассуждения в обратном порядке, получаем, что если $\Delta_{mm}(\lambda_0) = 0$, то λ_0 — собственное значение краевой задачи S_m.

Известно, что при $l \to \infty$ имеют место асимптотические формулы

$$\lambda_{lm} = (-1)^{n-m} \left(\frac{\pi}{T}\left(\sin\frac{\pi m}{n}\right)^{-1} \left(l + \chi_{m0} + O\left(\frac{1}{l}\right)\right)\right)^n. \qquad (3.1.14)$$

При этом, начиная с некоторого, все собственные значения простые. Обозначим через $G_{\delta m}$ λ-плоскость с выброшенными кругами $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\lambda_0 \in \Lambda_m$; $G_\delta = \bigcap\limits_{m=1}^{n-1} G_{\delta,m}$. Положим

$$s_{mk} = \sigma_{k0} + \sum_{\xi=1}^{m-1} \sigma_{\xi 0} + \sum_{\eta=1}^{n-m} \sigma_{\eta T} - \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\Delta^1_{mk}(\rho)=\det[U_{10}(y_\nu),\ldots$$
$$\ldots,U_{m-1,0}(y_\nu),U_{k0}(y_\nu),U_{1T}(y_\nu),\ldots,U_{n-m,T}(y_\nu)]_{\nu=\overline{1,n}},\qquad(3.1.15)$$

где $\{y_\nu(x,\rho)\}_{\nu=\overline{1,n}}$ — фундаментальная система решений B_0 в секторе S со свойством (3.1.3). Тогда

$$\begin{gathered}\Phi_m(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}a_{mk}(\rho)y_k(x,\rho),\\ a_{mk}(\rho)=\frac{(-1)^{m+k}}{\Delta^1_{mm}(\rho)}\det[U_{10}(y_\nu),\ldots,U_{m-1,\,0}(y_\nu),\\ U_{1T}(y_\nu),\ldots,U_{n-m,T}(y_\nu)]_{\nu=\overline{1,n}\setminus k}.\end{gathered}\qquad(3.1.16)$$

Представим функции $C_\nu(x,\lambda)$ в виде

$$C_\nu(x,\lambda)=\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_{\nu\mu}(\rho)y_\mu(x,\rho).$$

Тогда $\det[U_{\xi0}(C_\nu)]_{\xi,\nu=\overline{1,n}}=\det[U_{\xi0}(y_\nu)]_{\xi,\nu=\overline{1,n}}\det[\alpha_{\nu\mu}]_{\nu\mu=\overline{1,n}}$, и, аналогично,

$$\Delta_{mk}(\lambda)=\Delta^1_{mk}(\rho)\det[\alpha_{\nu\mu}]_{\nu,\mu=\overline{1,n}}.$$

Следовательно,

$$\Delta_{mk}(\lambda)=\Delta^1_{mk}(\rho)\left(\det[U_{\xi0}(y_\nu)]_{\xi,\nu=\overline{1,n}}\right)^{-1}.$$

Отсюда, используя (3.1.15), (3.1.16) и асимптотические свойства (3.1.5) функций $y_k^{(\nu)}(x,\rho)$, получим при $|\lambda|\to\infty$, $\arg((-1)^{n-m}\lambda)=\beta\neq0$, $\rho\in\in S$:

$$\begin{gathered}a_{mk}(\rho)=\rho^{-\sigma_{m0}}\left(a^0_{mk}+O(\rho^{-1})\right),\quad k=\overline{1,m},\\ a_{mk}(\rho)=O\left(\rho^{-\sigma_{m0}}\exp(\rho(R_m-R_k)T)\right),\quad k=\overline{m+1,n},\end{gathered}\qquad(3.1.17)$$

$$\Delta_{mk}(\lambda)=\rho^{s_{mk}}\frac{\Omega(\overline{1,m-1},k)}{\Omega(\overline{1,n})}\det[R_\nu^{\sigma_{jT}}]_{\nu=\overline{m+1,n};j=\overline{1,n-m}}\times$$
$$\times\exp\Bigl(T\rho\sum_{j=m+1}^{n}R_j\Bigr)\Bigl(1+O\left(\rho^{-1}\right)\Bigr),\qquad(3.1.18)$$

$$\begin{gathered}M_{mk}(\lambda)=\rho^{\sigma_{k0}-\sigma_{m0}}\mu^0_{mk}(1+(\rho^{-1})),\\ \Phi_m(x,\lambda)=\rho^{-\sigma_{m0}}\sum_{k=1}^{m}\exp(\rho R_kx)(a^0_{mk}+O(\rho^{-1})),\quad x\in[0,T),\end{gathered}\qquad(3.1.19)$$

а также

$$|\Delta_{mm}(\lambda)| > C|\rho|^{s_{mm}}\Big|\exp\Big(T\rho\sum_{j=m+1}^{n} R_j\Big)\Big|, \quad \lambda\in G_{\delta,m},$$
$$|\Phi_m^{(\nu)}(x,\lambda)| < C|\rho|^{\nu-\sigma_{m0}}|\exp(\rho R_m x)|, \quad \lambda\in G_{\delta,m}, \tag{3.1.20}$$

$$\Delta_{mk}(\lambda) = O\Big(\rho^{s_{mk}}\exp\Big(T\rho\sum_{j=m+1}^{n} R_j\Big)\Big), \quad |\lambda|\to\infty. \tag{3.1.21}$$

3.1.2. Вспомогательные утверждения. Обозначим через W_ν множество функций $f(x)$, $0<x<T$, таких, что $f(x), f'(x), \ldots, f^{(\nu-1)}(x)$ абсолютно непрерывны и $f^{(k)}(x)\in L(0,T)$, $k=\overline{0,\nu}$. Пусть $N\geqslant 0$ — фиксированное целое число. Будем говорить, что $L\in V_N$, если $p_\nu(x)\in W_{\nu+N}$, $\nu=\overline{0,n-2}$. В дальнейшем считаем, что $L\in V_N$. Доопределим $p_n(x)=1$, $p_{n-1}(x)=0$, $u_{\xi\nu a}=\delta_{\nu,\sigma_{\xi a}}$, $\nu\geqslant\sigma_{\xi a}$. Обозначим

$$\langle y(x),z(x)\rangle = \langle y(x),z(x)\rangle_\ell := \sum_{\nu,j=0}^{n-1}\mathcal{L}_{\nu j}(x)y^{(\nu)}(x)z^{(j)}(x), \tag{3.1.22}$$

$$\mathcal{L}_{\nu j}(x) = \sum_{s=j}^{n-\nu-1}(-1)^s C_s^j p_{s+\nu+1}^{(s-j)}(x), \quad \nu+j\leqslant n-1,$$
$$\mathcal{L}_{\nu j}(x)=0, \quad \nu+j>n-1, \tag{3.1.23}$$

где $C_s^j := s!(j!(s-j)!)^{-1}$. Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы $L^*=(\ell^*,U^*)$:

$$\ell^* z = (-1)^n z^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n-2}(-1)^\nu (p_\nu(x)z)^{(\nu)} = \lambda z, \tag{3.1.24}$$

$$U_{\xi a}^*(z) = z^{(\sigma_{\xi a}^*)}(a) + \sum_{\nu=0}^{\sigma_{\xi a}^*-1} u_{\xi\nu a}^* z^{(\nu)}(a), \quad \sigma_{\xi a}^* = n-1-\sigma_{n+1-\xi,a}, \tag{3.1.25}$$

где линейные формы $U_a^* = [(-1)^{n-1-\sigma_{ka}}U_{n-k+1,a}^*]_{k=\overline{1,n}}^T$ определяются из соотношения

$$\langle y,z\rangle_{|x=a} = U_a(y)U_a^*(z) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1-\sigma_{ka}}U_{ka}(y)U_{n-k+1,a}^*(z),$$
$$U_a = [U_{\xi a}]_{\xi=\overline{1,n}}.$$

Ясно, что $L^*\in V_N$. Таким образом, для любых достаточно гладких функций $y(x), z(x)$ имеем

$$\ell y\, z - y\,\ell^* z = \frac{d}{dx}\langle y,z\rangle. \tag{3.1.26}$$

В частности, если функции $y(x,\lambda), z(x,\mu)$ являются решениями дифференциальных уравнений $\ell y = \lambda y$, $\ell^* z = \mu z$, то

$$\frac{d}{dx}\langle y, z\rangle = (\lambda - \mu) yz. \tag{3.1.27}$$

Для определенности здесь и в §§ 3.2–3.4 считаем, что $\sigma_{\xi 0} = n - \xi$. Пусть функции $\Phi^*_m(x,\lambda)$, $m = \overline{1,n}$, являются решениями уравнения (3.1.24) при условиях $U^*_{\xi 0}(\Phi^*_m) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1,m}$, а также для $T < \infty$ $U^*_{\eta T}(\Phi^*_m) = 0$, $\eta = \overline{1, n-m}$, а для $T = \infty$ $\Phi^*_m(x,\lambda) = O(\exp(\rho R^*_m x))$, $x \to \infty$, $\rho \in S$, $R^*_m = -R_{n-m+1}$. Обозначим $M^*_{mk}(\lambda) = U^*_{k0}(\Phi^*_m)$, $\Phi^*(x,\lambda) = [(-1)^{k-1}\Phi^*_{n-k+1}(x,\lambda)]_{k=\overline{1,n}}$, $M^*(\lambda) = U^*_0(\Phi^*(x,\lambda))$. Введем решения дифференциального уравнения (3.1.24) $C^*(x,\lambda) = [(-1)^{k-1}C^*_{n-k+1}(x,\lambda)]_{k=\overline{1,n}}$ при условиях $U^*_{\xi 0}(C^*_m) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1,n}$. Тогда

$$\Phi^*(x,\lambda) = C^*(x,\lambda) M^*(\lambda). \tag{3.1.28}$$

Свойства функций Вейля $M^*_{mk}(\lambda)$ совершенно аналогичны свойствам функций Вейля $M_{mk}(\lambda)$. При $T < \infty$

$$M^*_{mk}(\lambda) = (\Delta^*_{mm}(\lambda))^{-1}\Delta^*_{mk}(\lambda),$$
$$\Delta^*_{mk}(\lambda) = (-1)^{m+k}\det[U^*_{\xi T}(C^*_\nu)]_{\xi=\overline{1,n-m};\,\nu=\overline{m,n}\setminus k}\,.$$

При $T = \infty$ функции $M^*_{mk}(\lambda)$ являются регулярными в $\Pi_{(-1)^m}$ за исключением не более чем счетного множества полюсов $\Lambda^{*,\prime}_{mk}$, и при $(-1)^m\lambda \geqslant 0$, за исключением ограниченных множеств $\Lambda^{*,\pm}_{mk}$, существуют конечные пределы $M^{*,\pm}_{mk}(\lambda) = \lim\limits_{z\to 0} M^*_{mk}(\lambda \pm iz)$, $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Лемма 3.1.1. *Справедливо соотношение*

$$M^*(\lambda) = (M(\lambda))^{-1}.$$

В самом деле, воспользуемся соотношением (3.1.27). При $\lambda = \mu$ имеем

$$\frac{d}{dx}\langle \Phi_k(x,\lambda), \Phi^*_j(x,\lambda)\rangle = 0,$$

или

$$\langle \Phi_k(x,\lambda), \Phi^*_j(x,\lambda)\rangle\Big|_0^A = 0, \quad A > 0.$$

Так как при $k + j \leqslant n$

$$\lim_{A\to T}\langle \Phi_k(x,\lambda), \Phi^*_j(x,\lambda)\rangle_{|x=A} = 0,$$

$$\langle \Phi_k(x,\lambda), \Phi^*_j(x,\lambda)\rangle_{|_{x=0}} = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} U_{\nu 0}(\Phi_k) U^*_{n-\nu+1,0}(\Phi^*_j) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} M_{k\nu}(\lambda) M^*_{j,n-\nu+1}(\lambda),$$

то получаем

$$\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}M_{k\nu}(\lambda)M^*_{j,n-\nu+1}(\lambda)=0, \tag{3.1.29}$$

т. е. $M(\lambda)M^*(\lambda)=E$. Лемма 3.1.1 доказана. □

Пусть $y(x)$ — некоторая достаточно гладкая функция. Обозначим $\vec{y}(x)=[y^{(\nu)}(x)]^T_{\nu=\overline{0,n-1}}$.

Лемма 3.1.2. *Пусть функции* $y_k(x)$, $k=\overline{1,n-1}$, *являются решениями дифференциального уравнения* (3.1.1), *а* $z_j(x)=\det[y_k^{(\nu)}(x)]_{k=\overline{1,n-1},j=\overline{0,n-1}\backslash n-j-1}$. Тогда

$$z_j(x)=\sum_{s=0}^{j}(-1)^s(p_{n-s}(x)z_0(x))^{(j-s)},\quad j=\overline{0,n-1}, \tag{3.1.30}$$

$$\ell^*z_0(x)=\lambda z_0(x),\quad \det(\vec{y}_1(x),\ldots,\vec{y}_{n-1}(x),\vec{y}(x))=\langle y(x),z_0(x)\rangle. \tag{3.1.31}$$

Доказательство. Соотношения (3.1.30) докажем по индукции. Для $j=0$ (3.1.30) очевидно. Предположим, что (3.1.30) верно для $j=\overline{0,\mu-1}$. Так как $z'_\mu(x)=z_{\mu+1}(x)+(-1)^\mu p_{n-\mu-1}(x)z_0(x)$, то используя (3.1.30) при $j=\mu-1$, получим

$$z_\mu=\sum_{s=0}^{\mu-1}(-1)^s(p_{n-s}(x)z_0(x))^{(\mu-s)}+$$
$$+(-1)^\mu p_{n-\mu}(x)z_0(x)=\sum_{s=0}^{\mu}(-1)^s(p_{n-s}(x)z_0(x))^{(\mu-s)}.$$

Далее, очевидно, что $z'_{n-1}(x)=(\lambda-p_0(x))(-1)^n z_0(x)$. С другой стороны, из (3.1.30) получаем

$$z'_{n-1}(x)=\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s(p_{n-s}(x)z_0(x))^{(n-s)}.$$

Следовательно, $\ell^*z_0(x)=\lambda z_0(x)$. Разлагая $\det[\vec{y}_1(x),\ldots,\vec{y}_{n-1}(x),\vec{y}(x)]$ по последнему столбцу и учитывая (3.1.30), получим

$$\det[\vec{y}_1(x),\ldots,\vec{y}_{n-1}(x),\vec{y}(x)]=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j y^{(n-1-j)}(x)z_j(x)=$$
$$=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j y^{(n-1-j)}(x)\sum_{s=0}^{j}(-1)^s(p_{n-s}(x)z_0(x))^{(j-s)}=\langle y(x),z_0(x)\rangle.$$

Лемма 3.1.2 доказана. □

Лемма 3.1.3. *Имеет место равенство*

$$\Phi_m^*(x,\lambda) = \det[\Phi_n^{(s)}(x,\lambda),\ldots$$
$$\ldots,\Phi_{n-m+2}^{(s)}(x,\lambda),\Phi_{n-m}^{(s)}(x,\lambda),\ldots,\Phi_1^{(s)}(x,\lambda)]_{s=\overline{0,n-2}}. \quad (3.1.32)$$

Доказательство. Через $y_m^*(x,\lambda)$ обозначим правую часть равенства (3.1.32). Пусть $y(x)$ — некоторая достаточно гладкая функция. Из (3.1.31) следует, что $\ell^* y_m^*(x,\lambda) = \lambda y_m^*(x,\lambda)$ и

$$\det[\vec{\Phi}_n(x,\lambda),\ldots,\vec{\Phi}_{n-m+2}(x,\lambda),\vec{\Phi}_{n-m}(x,\lambda),\ldots,\vec{\Phi}_1(x,\lambda),\vec{y}(x)]_{|x=a} =$$
$$= \langle y(x), y_m^*(x,\lambda)\rangle_{|x=a} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}U_{ka}(y)U_{n-k+1,a}^*(y_m^*). \quad (3.1.33)$$

При $a=0$ в (3.1.33) последовательно берем $y(x) = \Phi_n(x,\lambda)$, …, $y(x) = \Phi_{n-m+1}(x,\lambda)$ и получаем: $U_{\xi 0}^*(y_m^*) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1,m}$. При $T<\infty$, $a = T$, взяв в соотношении (3.1.33) последовательно $y(x) = \Phi_1(x,\lambda),\ldots$ …, $y(x) = \Phi_{n-m}(x,\lambda)$, имеем: $U_{\eta T}^*(y_m^*) = 0$, $\eta = \overline{1,n-m}$. При $T=\infty$ из определения функций $y_m^*(x,\lambda)$ и асимптотических свойств решений Вейля $\Phi_m^{(s)}(x,\lambda)$ получаем: $y_m^*(x,\lambda) = O(\exp(\rho R_m^* x))$, $x\to\infty$, $\rho\in S$. Следовательно, $y_m^*(x,\lambda) = \Phi_m^*(x,\lambda)$. Лемма 3.1.3 доказана. □

3.1.3. Теорема единственности. Получим теперь *теорему единственности* решения обратной задачи. Обозначим

$$C^0(x,\lambda) = [\vec{C}_m(x,\lambda)]_{m=\overline{1,n}},\quad \Phi^0(x,\lambda) = [\vec{\Phi}_m(x,\lambda)]_{m=\overline{1,n}}.$$

Тогда равенство (3.1.4) принимает вид

$$\Phi^0(x,\lambda) = C^0(x,\lambda)M^T(\lambda). \quad (3.1.34)$$

Так как $\det M(\lambda)\equiv 1$, то, используя (3.1.34) и теорему Остроградского–Лиувилля, находим

$$\det\Phi^0(x,\lambda) = \det C^0(x,\lambda) = (-1)^{n(n-1)/2}. \quad (3.1.35)$$

Пусть $L,\widetilde{L}\in V_N$. Определим матрицу $\mathcal{P}(x,\lambda) = [\mathcal{P}_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=\overline{1,n}}$ по формуле $\mathcal{P}(x,\lambda) = \Phi^0(x,\lambda)(\widetilde{\Phi}^0(x,\lambda))^{-1}$ или в координатах:

$$\mathcal{P}_{jk}(x,\lambda) = \det[\widetilde{\Phi}_\nu^{(n-1)}(x,\lambda),\ldots,\widetilde{\Phi}_\nu^{(k)}(x,\lambda),\Phi_\nu^{(j-1)}(x,\lambda),$$
$$\widetilde{\Phi}_\nu^{(k-2)}(x,\lambda),\ldots,\widetilde{\Phi}_\nu(x,\lambda)]_{\nu=\overline{1,n}} =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu+k-n-1}\Phi_\nu^{(j-1)}(x,\lambda)\det[\widetilde{\Phi}_n^{(s)}(x,\lambda),\ldots$$
$$\ldots,\widetilde{\Phi}_{\nu+1}^{(s)}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}_{\nu-1}^{(s)}(x,\lambda),\ldots,\widetilde{\Phi}_1^{(s)}(x,\lambda)]_{s=\overline{0,n-1}\setminus k-1}. \quad (3.1.36)$$

Отметим, что идея использования отображений пространств решений дифференциальных уравнений для исследования обратной задачи принадлежит З.Л. Лейбензону [159, 160]. Из (3.1.36) и асимптотических свойств решений Вейля $\Phi_m(x,\lambda)$, $\widetilde{\Phi}_m(x,\lambda)$ при $|\lambda|\to\infty$ получаем оценки

$$\begin{gathered}|\mathcal{P}_{jk}(x,\lambda)| < C|\rho|^{j-k}, \quad j,k=\overline{1,n},\\ |\mathcal{P}_{1k}(x,\lambda)-\delta_{1k}| < C|\rho|^{-1}, \quad k=\overline{1,n}\end{gathered} \tag{3.1.37}$$

(для $T<\infty$ $\lambda\in G_\delta$). Обозначим

$$\langle [y_\nu]^T_{\nu=\overline{0,n-1}}, [z_j]^T_{j=\overline{0,n-1}}\rangle_\ell := \sum_{\nu,j=0}^{n-1}\mathcal{L}_{\nu j}(x)y_\nu z_j,$$

где функции $\mathcal{L}_{\nu j}(x)$ определяются по формуле (3.1.23).

Лемма 3.1.4. *Пусть* $\widetilde{y}(x)$ — *некоторая достаточно гладкая функция. Тогда*

$$\mathcal{P}(x,\lambda)\vec{\widetilde{y}}(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\langle\widetilde{y}(x), \widetilde{\Phi}^*_{n-k+1}(x,\lambda)\rangle_{\widetilde{\ell}}\vec{\Phi}_k(x,\lambda), \tag{3.1.38}$$

$$\begin{gathered}\langle(\mathcal{P}(x,\lambda)-\mathcal{P}(x,\mu))\vec{\widetilde{\Phi}_k}(x,\lambda), \vec{\Phi}^*_j(x,\mu)\rangle_\ell = \\ = \langle\Phi_k(x,\lambda), \Phi^*_j(x,\mu)\rangle_\ell - \langle\widetilde{\Phi}_k(x,\lambda), \widetilde{\Phi}^*_j(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}.\end{gathered} \tag{3.1.39}$$

Доказательство. Воспользуемся соотношениями (3.1.36). Имеем

$$\begin{gathered}\mathcal{P}(x,\lambda)\vec{\widetilde{y}}(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\vec{\Phi}_k(x,\lambda)\det[\vec{\widetilde{\Phi}}_n(x,\lambda), \ldots \\ \ldots, \vec{\widetilde{\Phi}}_{k+1}(x,\lambda), \vec{\widetilde{\Phi}}_{k-1}(x,\lambda), \ldots, \vec{\widetilde{\Phi}}_1(x,\lambda), \vec{\widetilde{y}}(x)].\end{gathered}$$

Отсюда, используя леммы 3.1.2 и 3.1.3, получаем формулу (3.1.38). Далее, так как

$$\mathcal{P}(x,\lambda)\vec{\widetilde{\Phi}}_k(x,\lambda) = \vec{\Phi}_k(x,\lambda),$$

то

$$\langle\mathcal{P}(x,\lambda)\vec{\widetilde{\Phi}}_k(x,\lambda), \vec{\Phi}^*_j(x,\mu)\rangle_\ell = \langle\Phi_k(x,\lambda), \Phi^*_j(x,\mu)\rangle_\ell. \tag{3.1.40}$$

В силу (3.1.38)

$$\begin{gathered}\langle\mathcal{P}(x,\mu)\vec{\widetilde{\Phi}}_k(x,\lambda), \vec{\Phi}^*_j(x,\mu)\rangle_\ell = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\langle\widetilde{\Phi}_k(x,\lambda), \widetilde{\Phi}^*_{n-s+1}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}\times \\ \times\langle\Phi_s(x,\mu), \Phi^*_j(x,\mu)\rangle_\ell.\end{gathered}$$

Согласно (3.1.27) $\langle \Phi_s(x,\mu), \Phi_j^*(x,\mu)\rangle_\ell$ не зависит от x. Используя условия на решения Вейля при $x = 0$ и $x = T$, находим: $\langle \Phi_s(x,\mu), \Phi_j^*(x,\mu)\rangle_\ell = (-1)^{s-1}\delta_{s,n-j+1}$. Таким образом,

$$\langle \mathcal{P}(x,\mu)\vec{\widetilde{\Phi}}_k(x,\lambda), \vec{\Phi}_j^*(x,\mu)\rangle_\ell = \langle \widetilde{\Phi}_k(x,\lambda), \widetilde{\Phi}_j^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}},$$

что вместе с (3.1.40) дает (3.1.39). Лемма 3.1.4 доказана. □

Теорема 3.1.2. *Если* $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$, *то* $L = \widetilde{L}$. *Другими словами, задание матрицы Вейля* $M(\lambda)$ *однозначно определяет дифференциальное уравнение и линейные формы* (3.1.1)–(3.1.2).

Доказательство. Преобразуем матрицу $\mathcal{P}(x,\lambda)$. Для этого воспользуемся формулой (3.1.34):

$$\mathcal{P}(x,\lambda) = \Phi^0(x,\lambda)(\widetilde{\Phi}^0(x,\lambda))^{-1} =$$
$$= C^0(x,\lambda)M^T(\lambda)(\widetilde{M}^T(\lambda))^{-1}(\widetilde{C}^0(x,\lambda))^{-1} = C^0(x,\lambda)(\widetilde{C}^0(x,\lambda))^{-1}.$$

Отсюда и из (3.1.35) заключаем, что при каждом фиксированном x матрица-функция $P(x,\lambda)$ является целой аналитической по λ. Пользуясь оценками (3.1.37) и теоремой Лиувилля [206, с. 209], получаем: $\mathcal{P}_{11}(x,\lambda) \equiv 1$, $\mathcal{P}_{1k}(x,\lambda) \equiv 0$, $k = \overline{2,n}$. Но тогда $\Phi_m(x,\lambda) \equiv \widetilde{\Phi}_m(x,\lambda)$ при всех x, λ, m и, следовательно, $L = \widetilde{L}$. Теорема 3.1.2 доказана. □

§ 3.2. Восстановление дифференциальных операторов на полуоси

Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы $L \in V_N$ вида (3.1.1), (3.1.2) на полуоси ($T = \infty$). В этом параграфе дается решение обратной задачи восстановления L по матрице Вейля $M(\lambda)$ при произвольном поведении спектра. Получено основное уравнение обратной задачи. Указываются необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяет матрица Вейля $M(\lambda)$. Приводится процедура построения коэффициентов дифференциального уравнения и линейных форм по матрице Вейля $M(\lambda)$. Основные результаты параграфа содержатся в теоремах 3.2.1, 3.2.3.

3.2.1. Основное уравнение обратной задачи. Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.2.1. *Функции*

$$M_{mk}(\lambda) - M_{m,m+1}(\lambda)M_{m+1,k}(\lambda),\ M^*_{n-m,k}(\lambda) - M^*_{n-m,m+1}(\lambda)M^*_{n-m+1,k}(\lambda),$$
$$\Phi_m(x,\lambda) - M_{m,m+1}(\lambda)\Phi_{m+1}(x,\lambda),\ \Phi^*_{n-m}(x,\lambda) - M_{m,m+1}(\lambda)\Phi^*_{n-m+1}(x,\lambda)$$

регулярны при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^{n-m}} \setminus \Lambda$.

Доказательство. 1) Так как $M_{m,k}(\lambda) = M^*_{m,k}(\lambda) = \delta_{mk},\ k \leqslant m$, то из (3.1.29) при $k+j=n,\ k+j=n-1$ имеем

$$M^*_{n-m,n-m+1}(\lambda) = M_{m,m+1}(\lambda) \quad , \tag{3.2.1}$$

$$-M^*_{n-m-1,n-m+1}(\lambda) = M_{m,m+2}(\lambda) - M_{m,m+1}(\lambda)M_{m+1,m+2}(\lambda),$$
$$-M_{n-m-1,n-m+1}(\lambda) = M^*_{m,m+2}(\lambda) - M^*_{m,m+1}(\lambda)M^*_{m+1,m+2}(\lambda).$$

Отсюда вытекает регулярность при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^{n-m}} \setminus \Lambda$ функций

$$M_{mk}(\lambda) - M_{m,m+1}(\lambda)M_{m+1,k}(\lambda),$$
$$M^*_{n-m,k}(\lambda) - M^*_{n-m,n-m+1}(\lambda)M^*_{n-m+1,k}(\lambda)$$

при $k = m+2$. При $k < m+2$ меняем местами линейные формы U_{k0} и $U_{m+2,0}$ и повторяем предыдущие рассуждения.

2) Докажем по индукции, что функции $\Phi_{n-m}(x,\lambda) - M^*_{m,m+1}(\lambda)\Phi_{n-m+1}(x,\lambda)$ регулярны при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^m} \setminus \Lambda$. В силу (3.1.4) и леммы 3.1.1 имеем: $C(x,\lambda) = M^*(\lambda)\Phi(x,\lambda)$, или

$$C_{n-m}(x,\lambda) = \Phi_{n-m}(x,\lambda) - \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j M^*_{m-j,m+1}(\lambda) \times \\ \times \Phi_{n-m+j+1}(\lambda),\ m = \overline{1,n-1}. \tag{3.2.2}$$

Отсюда при $m=1$ следует, что функция $\Phi_{n-1}(x,\lambda) - M^*_{12}(\lambda)\Phi_n(x,\lambda)$ является целой аналитической по λ. Предположим, что для $j = \overline{1,m-1}$ регулярность функций

$$\Phi_{n-j}(x,\lambda) - M^*_{j,j+1}(\lambda)\Phi_{n-j+1}(x,\lambda)$$

при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^j} \setminus \Lambda$ доказана. Тогда, используя соотношение (3.2.2), получим, что функция

$$\Phi_{n-m}(x,\lambda) - M^*_{m,m+1}(\lambda)\Phi_{n-m+1}(x,\lambda) - \sum_{j=1}^{[\frac{m-1}{2}]}(M^*_{m-2j,m+1}(\lambda) - \\ - M^*_{m-2j,m-2j+1}(\lambda)M^*_{m-2j+1,m+1}(\lambda))\Phi_{n-m+2j+1}(x,\lambda)$$

регулярна при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^m} \setminus \Lambda$. Следовательно, функция

$$\Phi_{n-m}(x,\lambda) - M^*_{m,m+1}(\lambda)\Phi_{n-m+1}(x,\lambda)$$

регулярна при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^m} \setminus \Lambda$. Таким образом, с учетом (3.2.1) доказана регулярность функций $\Phi_m(x,\lambda) - M_{m,m+1}(\lambda)\Phi_{m+1}(x,\lambda)$ при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^{n-m}} \setminus \Lambda$. Аналогично устанавливается и регулярность функций $\Phi^*_{n-m}(x,\lambda) - M_{m,m+1}(\lambda)\Phi^*_{n-m+1}(x,\lambda)$. Лемма 3.2.1 доказана. □

Отметим, что поскольку $L \in V_N$, то асимптотическую формулу (3.1.11) для $M_{mk}(\lambda)$ можно уточнить, а именно:

$$M_{mk}(\lambda)=\rho^{m-k}\mu^0_{mk}\Big(1+\sum_{i=1}^{n+N-1}\frac{\mu_{mki}}{\rho^i}+o\Big(\frac{1}{\rho^{n+N-1}}\Big)\Big), \quad |\rho|\to\infty, \quad \rho\in S.$$

Пусть $L, \widetilde{L} \in V_N$. Рассмотрим в λ-плоскости замкнутый контур $\gamma = \gamma_{-1}\cup\gamma_0\cup\gamma_1$ (с обходом против часовой стрелки), где γ_0 — ограниченный замкнутый контур, охватывающий множество $\Lambda\cup\widetilde{\Lambda}\cup\{0\}$ $(\Lambda\cup\widetilde{\Lambda}\cup\{0\}\subset \mathrm{int}\gamma_0)$, а $\gamma_{\pm1}$ — двусторонний разрез вдоль луча $\{\lambda:\ \pm\lambda>0,\ \lambda\notin \mathrm{int}\gamma_0\}$ (см. рис. 3.2.1). Обозначим $J_\gamma=\{\lambda:\ \lambda\notin\gamma\cup\mathrm{int}\gamma_0\}$.

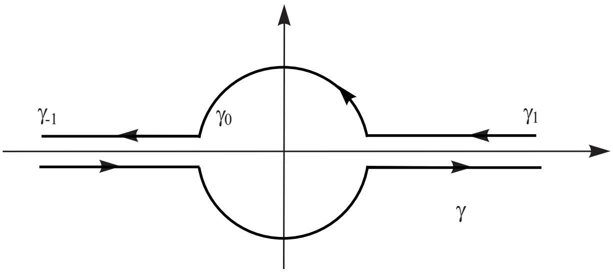

рис. 3.2.1

Лемма 3.2.2. *Справедливы соотношения*

$$\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\Phi(x,\lambda)-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\,\Phi(x,\mu)\,d\mu, \quad \lambda\in J_\gamma, \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\langle\Phi(x,\lambda),\Phi^*(x,\mu)\rangle_\ell}{\lambda-\mu}-\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}^*(x,\xi)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\xi}\,\frac{\langle\Phi(x,\xi),\Phi^*(x,\mu)\rangle_\ell}{\xi-\mu}\,d\xi, \quad \lambda,\mu\in J_\gamma. \quad (3.2.4)$$

В (3.2.3) (*и везде в дальнейшем, где это необходимо*) *интеграл понимается в смысле главного значения* [88, с. 27].

Доказательство. Обозначим $\gamma_R=(\gamma\bigcap\{\lambda:|\lambda|\leqslant R\})\bigcup\{\lambda:|\lambda|=R\}$. Так как

$$\frac{1}{\lambda-\mu}\Big(\frac{1}{\lambda-\xi}-\frac{1}{\mu-\xi}\Big)=\frac{1}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}, \quad (3.2.5)$$

то согласно интегральной формуле Коши [206, с. 166] имеем

$$\mathcal{P}_{1k}(x,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R}\frac{\mathcal{P}_{1k}(x,\xi)}{\lambda-\xi}\,d\xi,$$

$$\frac{\mathcal{P}_{jk}(x,\lambda)-\mathcal{P}_{jk}(x,\mu)}{\lambda-\mu}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R}\frac{\mathcal{P}_{jk}(x,\xi)}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\,d\xi,$$

$$\lambda,\mu\in J_\gamma\cap\{\xi:\ |\xi|<R\}.$$

Используя оценки (3.1.37), получаем

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}\frac{\mathcal{P}_{1k}(x,\xi)-\delta_{1k}}{\lambda-\xi}\,d\xi=0,$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}\frac{\mathcal{P}_{jk}(x,\xi)}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\,d\xi=0,$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered}\mathcal{P}_{1k}(x,\lambda)=\delta_{1k}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\mathcal{P}_{1k}(x,\xi)}{\lambda-\xi}\,d\xi,\quad \lambda\in J_\gamma,\\ \frac{\mathcal{P}_{jk}(x,\lambda)-\mathcal{P}_{jk}(x,\mu)}{\lambda-\mu}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\mathcal{P}_{jk}(x,\xi)}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\,d\xi,\quad \lambda,\mu\in J_\gamma.\end{gathered}\tag{3.2.6}$$

В силу (3.1.38), (3.2.6) имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\mathcal{P}_{1k}(x,\lambda)\widetilde{y}^{(k-1)}(x)=\widetilde{y}(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\sum_{k=1}^{n}\mathcal{P}_{1k}(x,\xi)\widetilde{y}^{(k-1)}(x)\,\frac{d\xi}{\lambda-\xi}=$$

$$=\widetilde{y}(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\widetilde{y}(x),\widetilde{\Phi}^*(x,\xi)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\xi}\,\Phi(x,\xi)\,d\xi.$$

Полагая здесь $\widetilde{y}(x)=\widetilde{\Phi}_j(x,\lambda)$ и учитывая равенство

$$\Phi_j(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{P}_{1k}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}_j^{(k-1)}(x,\lambda),$$

получаем соотношение (3.2.3). Аналогично из (3.1.38), (3.2.6) имеем

$$\frac{\mathcal{P}(x,\lambda)-\mathcal{P}(x,\mu)}{\lambda-\mu}\vec{\widetilde{y}}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\mathcal{P}(x,\xi)\vec{\widetilde{y}}(x)}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\frac{\langle\widetilde{y}(x),\widetilde{\Phi}^*_{n-s+1}(x,\xi)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\vec{\Phi}_s(x,\xi)\,d\xi.$$

Отсюда, с учетом (3.1.39), выводим

$$\frac{\langle \Phi_k(x,\lambda), \Phi_j^*(x,\mu)\rangle_\ell}{\lambda-\mu} - \frac{\langle \widetilde{\Phi}_k(x,\lambda), \widetilde{\Phi}_j^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu} =$$

$$= \Big\langle \frac{\mathcal{P}(x,\lambda)-\mathcal{P}(x,\mu)}{\lambda-\mu} \vec{\widetilde{\Phi}}_k(x,\lambda), \vec{\Phi}_j^*(x,\mu)\Big\rangle_\ell =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\langle \widetilde{\Phi}_k(x,\lambda), \widetilde{\Phi}^*(x,\xi)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\xi} \cdot \frac{\langle \Phi_(x,\xi), \Phi_j^*(x,\mu)\rangle \ell}{\xi-\mu}\, d\xi.$$

Лемма 3.2.2 доказана. ☐

Обозначим

$$Y = [\delta_{j,k-1}]_{j=\overline{1,n-1},k=\overline{1,n}}, \quad M_\partial(\lambda) = \mathrm{diag}[M_{m,m+1}(\lambda)]_{m=\overline{1,n-1}},$$
$$A_0(\lambda) = \widehat{M}(\lambda)\widetilde{M}^{-1}(\lambda), \quad \widetilde{A}_0(\lambda) = \widehat{M}(\lambda)M^{-1}(\lambda).$$

При вещественных λ определим матрицы

$$f(x,\lambda) = [f_k(x,\lambda)]^T_{k=\overline{2,n}}, \quad f^*(x,\lambda) = [(-1)^{k-1}f^*_{n-k+1}(x,\lambda)]_{k=\overline{1,n-1}}$$

по формулам

$$f_k(x,\lambda) = \chi((-1)^{n-k+1}\lambda)\Phi_k(x,\lambda), \quad f^*_k(x,\lambda) = \chi((-1)^{k-1}\lambda)\Phi^*_k(x,\lambda),$$

где $\chi(\lambda)$ — функция Хевисайда. При $\lambda \in \gamma$ положим

$$a(\lambda) = \chi_{+1}(\lambda)\chi_{-1}(\lambda)YA_0(\lambda)Y^T, \quad N(\lambda) = E + \frac{1}{2}a(\lambda),$$
$$\widetilde{a}(\lambda) = \chi_{+1}(\lambda)\chi_{-1}(\lambda)Y\widetilde{A}_0(\lambda)Y^T, \quad \widetilde{N}(\lambda) = E - \frac{1}{2}\widetilde{a}(\lambda),$$

где $\chi_{\pm1}(\lambda) = 1$ при $\lambda \in \gamma_0 \cup \gamma_{\pm1}$ и $\chi_{\pm1}(\lambda) = 0$ при $\lambda \in \gamma_{\mp1}$. При $\lambda, \mu \in \gamma$ определим матрицы

$$\varphi(x,\lambda) = [\varphi_k(x,\lambda)]^T_{k=\overline{2,n}}, \quad g^*(x,\lambda) = [g^*_k(x,\lambda)]_{k=\overline{2,n}},$$
$$G^*(x,\lambda) = [G^*_k(x,\lambda)]_{k=\overline{1,n}}, \quad r(x,\lambda,\mu) = [r_{kj}(x,\lambda,\mu)]_{k,j=\overline{2,n}}$$

по формулам

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{cases} Y\Phi(x,\lambda) & \lambda \in \gamma_0, \\ f(x,\lambda) & \lambda \in \gamma_1 \cup \gamma_{-1}, \end{cases}$$

$$g^*(x,\lambda) = \begin{cases} -\Phi^*(x,\lambda)A_0(\lambda)Y^T & \lambda \in \gamma_0, \\ -f^*(x,\lambda)\widehat{M}_\partial(\lambda) & \lambda \in \gamma_1 \cup \gamma_{-1}, \end{cases}$$

$$r(x,\lambda,\mu) = \frac{\langle \varphi(x,\lambda), g^*(x,\mu)\rangle_\ell}{\lambda-\mu}, \quad G^*(x,\lambda) = g^*(x,\lambda)Y.$$

Аналогично определим матрицы $\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$, $\widetilde{g}^*(x,\lambda)$, $\widetilde{G}^*(x,\lambda)$, $\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)$ с $\widetilde{\Phi}(x,\lambda)$, $\widetilde{f}(x,\lambda)$, $\widetilde{\Phi}^*(x,\lambda)$, $\widetilde{f}^*(x,\lambda)$, $\widetilde{A}_0(\lambda)$ вместо $\Phi(x,\lambda)$, $f(x,\lambda)$, $\Phi^*(x,\lambda)$, $f^*(x,\lambda)$, $A_0(\lambda)$. Наконец, матрицы

$$\widetilde{\Gamma}(\lambda,\mu)=[\widetilde{\Gamma}_{ij}(\lambda,\mu)]_{j,\nu=\overline{1,n}},\qquad \widetilde{A}(\mu)=[\widetilde{A}_{j\nu}(\mu)]_{j,\nu=\overline{1,n}},\qquad \mu\in\gamma,$$

определим по формулам

$$\begin{gathered}\widetilde{\Gamma}(\lambda,\mu)=-\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{G}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}\,|x=0},\\ \widetilde{A}_{j\nu}(\mu)=\delta_{j,\nu-1}\chi_{(-1)^{n-j}}(\mu)\widehat{M}_{j,j+1}(\mu),\qquad \mu\in\gamma_1\cup\gamma_{-1},\\ \widetilde{A}(\mu)=\widetilde{A}_0(\mu),\qquad \mu\in\gamma_0.\end{gathered}$$

Так как $\widetilde{G}^*(x,\mu)=-\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\widetilde{A}(\mu)$, то

$$\widetilde{\Gamma}(\lambda,\mu)=\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}\,|x=0}\,\widetilde{A}(\mu)=\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{M}^{-1}(\mu)\widetilde{A}(\mu),$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered}\widetilde{\Gamma}_{j\nu}(\lambda,\mu)=\delta_{j+1,\nu}\chi_{(-1)^{n-j}}(\mu)\widehat{M}_{j,j+1}(\mu),\qquad \nu\leqslant j+1,\\ \widetilde{\Gamma}_{j\nu}(\lambda,\mu)=\chi_{+1}(\mu)\chi_{-1}(\mu)\widehat{M}_{j\nu}(\mu)+\widetilde{\widetilde{\Gamma}}_{j\nu}(\lambda,\mu),\qquad \nu>j+1,\end{gathered}\tag{3.2.7}$$

где функции $\widetilde{\widetilde{\Gamma}}_{j\nu}(\lambda,\mu)$ построены по M_{ks}, $\widetilde{M}_{ks}$ при $s-k<\nu-j$. Далее,

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_0(\lambda)A_0(\lambda)&=\widehat{M}(\lambda)M^{-1}(\lambda)\widehat{M}(\lambda)\widetilde{M}^{-1}(\lambda)=\\ &=\widehat{M}(\lambda)\widetilde{M}^{-1}(\lambda)-\widehat{M}(\lambda)M^{-1}(\lambda)=A_0(\lambda)-\widetilde{A}_0(\lambda),\end{aligned}$$

т. е.

$$A_0(\lambda)-\widetilde{A}_0(\lambda)=\widetilde{A}_0(\lambda)A_0(\lambda),\tag{3.2.8}$$

и, следовательно, $a(\lambda)-\widetilde{a}(\lambda)=\widetilde{a}(\lambda)a(\lambda)$. Отсюда получаем

$$\widetilde{N}(\lambda)N(\lambda)-\frac{1}{4}\,\widetilde{a}(\lambda)a(\lambda)=E,\qquad \widetilde{N}(\lambda)a(\lambda)-\widetilde{a}(\lambda)N(\lambda)=0.\tag{3.2.9}$$

Теорема 3.2.1. *Справедливы соотношения*

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\widetilde{N}(\lambda)\varphi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu,\qquad \lambda\in\gamma,\tag{3.2.10}$$

$$\widetilde{N}(\lambda)r(x,\lambda,\mu)-\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)N(\mu)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\xi)r(x,\xi,\mu)\,d\xi=0.\tag{3.2.11}$$

Уравнение (3.2.10) является искомым основным уравнением обратной задачи.

Доказательство. В силу (3.1.4), (3.1.28) и леммы 3.1.1 имеем

$$\widetilde{\Phi}^{*(\nu)}(x,\mu)\Phi^{(j)}(x,\mu) = \widetilde{C}^{*(\nu)}(x,\mu)\widetilde{M}^{-1}(\mu)M(\mu)C^{(j)}(x,\mu) =$$

$$= \widetilde{C}^{*(\nu)}(x,\mu)\widetilde{M}^{-1}(\mu)\widehat{M}(\mu)C^{(j)}(x,\mu) + \widetilde{C}^{*(\nu)}(x,\mu)C^{(j)}(x,\mu) =$$

$$= \widetilde{\Phi}^{*(\nu)}(x,\mu)\widehat{M}(\mu)M^{-1}(\mu)\Phi^{(j)}(x,\mu) + \widetilde{C}^{*(\nu)}(x,\mu)C^{(j)}(x,\mu) =$$

$$= \widetilde{\Phi}^{*(\nu)}(x,\mu)\widetilde{A}_0(\mu)\Phi^{(j)}(x,\mu) + \widetilde{C}^{*(\nu)}(x,\mu)C^{(j)}(x,\mu) =$$

$$= -\widetilde{g}^{*(\nu)}(x,\mu)\varphi^{(j)}(x,\mu) + \widetilde{C}^{*(\nu)}(x,\mu)C^{(j)}(x,\mu), \quad \mu \in \gamma_0.$$

Следовательно, при $\mu \in \gamma_0$ функция

$$\widetilde{\Phi}^{*(\nu)}(x,\mu)\Phi^{(j)}(x,\mu) + \widetilde{g}^{*(\nu)}(x,\mu)\varphi^{(j)}(x,\mu)$$

является целой по μ. Далее из леммы 3.2.1 вытекает, что функция

$$\widetilde{\Phi}^{*(\nu)}(x,\mu)\Phi^{(j)}(x,\mu) - \widetilde{f}^{*(\nu)}(x,\mu)\widehat{M}_{\partial}(\mu)f^{(j)}(x,\mu)$$

регулярна при $\mu \in \Gamma \setminus \Lambda$. Отсюда следует, что функция

$$\widetilde{\Phi}^{*(\nu)}(x,\mu)\Phi^{(j)}(x,\mu) + \widetilde{g}^{*(\nu)}(x,\mu)\varphi^{(j)}(x,\mu)$$

регулярна при $\mu \in \Gamma \setminus \Lambda$. Таким образом, из соотношений (3.2.3), (3.2,4) с использованием теоремы Коши получим

$$\widetilde{\Phi}(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\langle \widetilde{\Phi}(x,\lambda), \widetilde{g}^{*}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\varphi(x,\mu)\,d\mu, \quad \lambda \in J_{\gamma}, \quad (3.2.12)$$

$$\frac{\langle \Phi(x,\lambda), \Phi^{*}(x,\mu)\rangle_{\ell}}{\lambda-\mu} - \frac{\langle \widetilde{\Phi}(x,\lambda), \widetilde{\Phi}^{*}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu} + {}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\langle \widetilde{\Phi}(x,\lambda), \widetilde{g}^{*}(x,\xi)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\xi}\,\frac{\langle \varphi(x,\xi), \Phi^{*}(x,\mu)\rangle_{\ell}}{\xi-\mu}\,d\xi = 0,$$

$$\lambda, \mu \in J_{\gamma}. \quad (3.2.13)$$

В силу непрерывности из (3.2.12) при $\lambda \in \gamma_1 \cup \gamma_{-1}$ имеем

$$\widetilde{f}(x,\lambda) = f(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\langle \widetilde{f}(x,\lambda), \widetilde{g}^{*}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\varphi(x,\mu)\,d\mu. \quad (3.2.14)$$

Учитывая (3.1.27) получаем при $\mu \in \gamma_0$

$$\frac{\langle Y\widetilde{\Phi}(x,\lambda), \widetilde{g}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu} =$$

$$= \frac{\langle Y\widetilde{\Phi}(x,\lambda), \widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}\,|x=0}\widetilde{A}_0(\mu)Y^T}{\lambda-\mu} + \int_0^x Y\widetilde{\Phi}(t,\lambda)\widetilde{g}^*(t,\mu)dt =$$

$$= \frac{Y\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{M}^{-1}(\mu)\widetilde{A}_0(\mu)Y^T}{\mu-\lambda} + \int_0^x Y\widetilde{\Phi}(t,\lambda)\widetilde{g}^*(t,\mu)\,dt.$$

Следовательно, из (3.2.12), используя формулы Сохоцкого [88, с. 38], вычисляем

$$Y\widetilde{\Phi}(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda) - \frac{1}{2}\,\widetilde{a}(\lambda)\varphi(x,\lambda) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\langle Y\widetilde{\Phi}(x,\lambda), \widetilde{g}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\varphi(x,\mu)\,d\mu, \quad \lambda \in \gamma_0,$$

что вместе с (3.2.14) дает (3.2.10).

Далее, из (3.2.13), повторяя предыдущие рассуждения, получаем

$$\widetilde{N}(\lambda)\,\frac{\langle \varphi(x,\lambda), \Phi^*(x,\mu)\rangle_{\ell}}{\lambda-\mu} - \frac{\langle \widetilde{\varphi}(x,\lambda), \widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \widetilde{r}(x,\lambda,\xi)\frac{\langle \varphi(x,\xi), \Phi^*(x,\mu)\rangle_{\ell}}{\lambda-\mu}\,d\xi = 0,$$

$$\lambda \in \gamma,\ \mu \in J_\gamma, \quad (3.2.15)$$

Так как при $\xi \in \gamma_0$

$$\frac{\langle \varphi(x,\xi), \Phi^*(x,\mu)\rangle_{\ell}}{\xi-\mu} = \frac{YM(\xi)M^{-1}(\mu)}{\xi-\mu} + \int_0^x \varphi(t,\xi)\Phi^*(t,\mu)\,dt,$$

то из (3.2.15), используя формулы Сохоцкого, имеем

$$\widetilde{N}(\lambda)\frac{\langle \varphi(x,\lambda), \Phi^*(x,\mu)\rangle_{\ell}}{\lambda-\mu} - \frac{\langle \widetilde{\varphi}(x,\lambda), \widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu} - \frac{1}{2}\,\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)Y +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \widetilde{r}(x,\lambda,\xi)\frac{\langle \varphi(x,\xi), \Phi^*(x,\mu)\rangle_{\ell}}{\xi-\mu}\,d\xi = 0, \quad \lambda \in \gamma, \quad \mu \in \gamma_0.$$

Умножая обе части этого равенства на $-A_0(\mu)Y^T$ справа и используя (3.2.8), получаем

$$\widetilde{N}(\lambda)r(x,\lambda,\mu)-\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)(E+a(\mu))+\frac{1}{2}\,\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)a(\mu)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\xi)r(x,\xi,\mu)\,d\xi=0,\quad \lambda\in\gamma,\quad \mu\in\gamma_0. \tag{3.2.16}$$

В силу непрерывности из (3.2.15) имеем

$$\widetilde{N}(\lambda)\frac{\langle\varphi(x,\lambda),f^*(x,\mu)\rangle_\ell}{\lambda-\mu}-\frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{f}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\xi)\frac{\langle\varphi(x,\xi),f^*(x,\mu)\rangle_\ell}{\xi-\mu}\,d\xi=0,\quad \lambda\in\gamma,\quad \mu\in\gamma_1\cup\gamma_{-1}.$$

Отсюда, и из (3.2.16) выводим (3.2.11). Теорема 3.2.1 доказана. ☐

В дальнейшем для простоты считаем, что $L,\widetilde{L}\in V_N$ выбраны так, что

$$\widehat{M}_{m,m+1}(\lambda)=O(\rho^{-n-2}),\quad |\lambda|\to\infty. \tag{3.2.17}$$

Покажем, что имеют место оценки

$$\begin{gathered}|\widetilde{g}_j^{*(\nu)}(x,\mu)|<C|\theta|^{\nu-j-n}|\exp(-\theta R_jx)|,\\ |\widetilde{g}^{*(\nu)}(x,\mu)\varphi^{(s)}(x,\mu)|<C|\theta|^{\nu+s-2n},\quad \mu=\theta^n,\ \mu\in\gamma_1\cup\gamma_{-1}.\end{gathered} \tag{3.2.18}$$

В самом деле, при $\mu\in\gamma_1\cup\gamma_{-1}$

$$\widetilde{g}_j^{*(\nu)}(x,\mu)=(-1)^{j-1}\chi_{(-1)^{n-j+1}}(\mu)\widetilde{\Phi}^{*(\nu)}_{n-j+2}(x,\mu)\widehat{M}_{j-1,j}(\mu),$$
$$|\widetilde{\Phi}^{*(\nu)}_{n-j+2}(x,\mu)|<C|\theta|^{\nu+2-j}|\exp(-\theta R_{j-1}x)|.$$

При $j=n-2\nu,\ \nu=\overline{0,[n/2]}$

$$\widetilde{g}_j^{*(\nu)}(x,\mu)=0\quad(\mu\in\gamma_1),\quad \mathrm{R}e(\theta(R_j-R_{j-1}))=0\quad(\mu\in\gamma_{-1}),$$

а при $j=n-2\nu-1,\ \nu=\overline{0,[n/2]}$

$$\widetilde{g}_j^{*(\nu)}(x,\mu)=0\quad(\mu\in\gamma_{-1}),\quad \mathrm{R}e(\theta(R_j-R_{j-1}))=0\quad(\mu\in\gamma_1).$$

Отсюда, с учетом (3.2.17), получаем первую оценку (3.2.18). Так как

$$|\varphi_j^{(s)}(x,\mu)|<C|\theta|^{j+s-n}|\exp(\theta R_jx)|,$$

то

$$|\widetilde{g}^{*(\nu)}(x,\mu)\varphi^{(s)}(x,\mu)|\leqslant\sum_{j=2}^{n}|\widetilde{g}_j^{*(\nu)}(x,\mu)\varphi_j^{(s)}(x,\mu)|<C|\theta|^{\nu+s-2n}.$$

Обозначим

$$\varkappa_{\nu s}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \widetilde{g}^{*(\nu)}(x,\mu)\varphi^{(s)}(x,\mu)\,d\mu, \quad \nu+s \leqslant n-1, \tag{3.2.19}$$

$$\begin{gathered} t_{j\nu}(x) = -\sum_{\beta=\nu+1}^{j} C_j^{\beta} C_{\beta-1}^{\nu}\varkappa_{\beta-\nu-1,j-\beta}(x), \quad j>\nu, \\ t_{j\nu}(x) = \delta_{j\nu}, \quad j \leqslant \nu; \quad j,\nu = \overline{0,n}, \end{gathered} \tag{3.2.20}$$

$$\begin{aligned} \xi_\nu(x) = \sum_{s=0}^{n-\nu-1}\sum_{j=\nu+1}^{n-s} (C_{j+s}^{j} C_{j-1}^{\nu}\widetilde{p}_{j+s}(x)\varkappa_{j-\nu-1,s}(x) + \\ + \delta_{s0}(-1)^{j-\nu}\sum_{r=0}^{j-\nu-1} C_{j-\nu-1}^{r}\widetilde{p}_j^{(j-\nu-1-r)}(x)\varkappa_{r0}(x)), \\ \nu = \overline{0,n-2}, \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

$$\varepsilon_\nu(x) = \xi_\nu(x) - \sum_{j=\nu+1}^{n-2}\varepsilon_j(x)t_{j\nu}(x), \quad \nu = \overline{0,n-2}. \tag{3.2.22}$$

Следующая лемма устанавливает связи между коэффициентами дифференциальных уравнений и линейных форм L и $\widetilde{L}$.

Лемма 3.2.3. *Справедливы соотношения*

$$p_\nu(x) = \widetilde{p}_\nu(x) + \varepsilon_\nu(x), \quad \widetilde{u}_{\xi\nu0} = \sum_{j=0}^{n-1} u_{\xi j0}t_{j\nu}(0). \tag{3.2.23}$$

Доказательство. Дифференцируя соотношение (3.2.12) по x и учитывая (3.1.27), (3.2.19), (3.2.20), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{n} t_{j\nu}\widetilde{\Phi}^{(\nu)}(x,\lambda) = \Phi^{(j)}(x,\lambda) + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^{*}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\varphi^{(j)}(x,\mu)\,d\mu, \quad \lambda \in J_\gamma. \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \widetilde{\ell}\widetilde{\Phi}(x,\lambda) - \ell\Phi(x,\lambda) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^{*}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu = \\ = \lambda\widetilde{\Phi}(x,\lambda) - \lambda\Phi(x,\lambda) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^{*}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\,\mu\varphi(x,\mu)\,d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.2.12) вытекает, что

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\ell\Phi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^{*}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\,\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\langle\widetilde{\Phi}(x,\mu),\widetilde{g}^{*}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}\,\varphi(x,\mu)\,d\mu,\quad \lambda\in J_{\gamma}.\quad(3.2.25)$$

Из (3.2.25), с учетом (3.2.24), (3.1.22), имеем

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\sum_{j=0}^{n}p_j(x)\sum_{\nu=0}^{n}t_{j\nu}(x)\widetilde{\Phi}^{(\nu)}(x,\lambda)+\sum_{\nu,j=0}^{n-1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\nu j}(x)\widetilde{\Phi}^{(\nu)}(x,\lambda)\varkappa_{j0}(x),$$

и, следовательно,

$$p_{\nu}(x)=\widetilde{p}_{\nu}(x)-\sum_{j=\nu+1}^{n}p_j(x)t_{j\nu}(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\nu j}(x)\varkappa_{j0}(x),$$

или

$$\widehat{p}_{\nu}(x)=-\sum_{j=\nu+1}^{n}\widehat{p}_j(x)t_{j\nu}(x)-\sum_{j=\nu+1}^{n}\widetilde{p}_j(x)t_{j\nu}(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\nu j}(x)\varkappa_{j0}(x).$$

Используя (3.1.23), (3.2.20), (3.2.21), вычисляем

$$\xi_{\nu}(x)=\sum_{j=\nu+1}^{n}\widetilde{p}_j(x)t_{j\nu}(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\nu j}(x)\varkappa_{j0}(x),$$

и, следовательно,

$$\widehat{p}_{\nu}(x)=\xi_{\nu}(x)-\sum_{j=\nu+1}^{n}\widehat{p}_j(x)t_{j\nu}(x).$$

Таким образом, $\widehat{p}_{\nu}(x)=\varepsilon_{\nu}(x)$, и первое соотношение (3.2.23) доказано.

Так как $\widetilde{g}^{*(\nu)}(x,\mu)\varphi^{(j)}(x,\mu)=\widetilde{G}^{*\nu}(x,\mu)\Phi^{(j)}(x,\mu)$, то из (3.2.24) при $x=0$ имеем

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\Bigl(\sum_{j=0}^{n-1}u_{\xi j0}t_{j\nu}(0)\Bigr)\widetilde{\Phi}^{(\nu)}(0,\lambda)=U_{\xi0}(\Phi(x,\lambda))+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{G}^{*}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}\,|x=0}}{\lambda-\mu}\,U_{\xi0}(\Phi(x,\mu))\,d\mu,$$

или

$$\widetilde{\widetilde{U}}_{\xi 0}(\widetilde{\Phi}(x,\lambda)) = U_{\xi 0}(\Phi(x,\lambda)) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\widetilde{\Gamma}(\lambda,\mu)}{\mu-\lambda}\, U_{\xi 0}(\Phi(x,\mu))\, d\mu,$$

где

$$\widetilde{\widetilde{U}}_{\xi 0}(y) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\Bigl(\sum_{j=0}^{n-1} u_{\xi j 0} t_{j\nu}(0)\Bigr) y^{(\nu)}(0).$$

Согласно (3.2.7) $\widetilde{\Gamma}_{i\nu}(\lambda,\mu) = 0,\ j \geqslant \nu$, и, следовательно,

$$\widetilde{\widetilde{U}}_{\xi 0}(\widetilde{\Phi}_m(x,\lambda)) = \delta_{\xi m}, \quad \xi \leqslant m.$$

Отсюда и из условий на решения Вейля $\widetilde{\Phi}_m(x,\lambda))$ получаем

$$\sum_{\nu=0}^{n-\xi-1} \breve{u}_{\xi\nu 0} \widetilde{\Phi}_m^{(\nu)}(0,\lambda) \equiv 0, \quad 1 \leqslant \xi \leqslant m \leqslant n,$$

где

$$\breve{u}_{\xi\nu 0} = \widetilde{u}_{\xi\nu 0} - \sum_{j=0}^{n-1} u_{\xi j 0} t_{j\nu}(0).$$

Следовательно, $\breve{u}_{\xi\nu 0} = 0$, т. е. верно второе соотношение (3.2.23). □

Отметим, что попутно мы получили формулу

$$\widetilde{U}_{\xi 0}(\widetilde{\Phi}_m(x,\lambda)) = U_{\xi 0}(\Phi_m(x,\lambda)) + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\widetilde{\Gamma}_{mj}(\lambda,\mu)}{\mu-\lambda}\, U_{\xi 0}(\widetilde{\Phi}_j(x,\mu))\, d\mu. \quad (3.2.26)$$

Обозначим $\gamma'' = \{\lambda :\ \lambda \in \gamma_1 \cup \gamma_{-1},\ d(\lambda,\gamma_0) \geqslant \alpha_0 > 0\}$, $\gamma' = \gamma \setminus \gamma''$, где $d(\lambda,\gamma_0) := \inf|\lambda-\mu|$, $\mu \in \gamma_0$. Таким образом $\gamma = \gamma' \cup \gamma''$.

Лемма 3.2.4. *Имеют место оценки*

$$|\widetilde{r}_{kj}(x,\lambda,\mu)| < \frac{C_x|\exp((\rho R_k - \theta R_j)x)|}{|\rho|^{n-k}|\theta|^{n+j}(|\rho-\theta|+1)} \quad (3.2.27)$$

при $\lambda \in \gamma,\ \mu \in \gamma''$ *или* $\lambda \in \gamma'',\ \mu \in \gamma$;

$$|\widetilde{r}_{kj}^{(\nu+1)}(x,\lambda,\mu)| < \frac{C_x|\exp((\rho R_k - \theta R_j)x)|}{|\rho|^{n-k}|\theta|^{n+j}}\,(|\rho|+|\theta|)^{\nu} \quad (3.2.28)$$

при $\lambda,\mu \in \gamma,\ \nu = \overline{0, n-1}$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \gamma,\ \mu \in \gamma''$ или $\lambda \in \gamma'',\ \mu \in \gamma$. Пусть $|\rho-\theta| \leqslant \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ —достаточно малое фиксированное число. Тогда либо $\lambda,\mu \in \gamma_1$, либо $\lambda,\mu \in \gamma_{-1}$ и, следовательно,

$$\widetilde{g}_j^*(x,\mu) = (-1)^{j-1}\chi_{(-1)^{n-j+1}}(\mu)\widetilde{\Phi}_{n-j+2}^*(x,\mu)\widehat{M}_{j-1,j}(\mu).$$

При $k = j - 1$ либо $\varphi_k(x,\lambda) \equiv 0$, либо $\widetilde{g}_j^*(x,\mu) \equiv 0$, т. е. $r_{kj}(x,\lambda,\mu) \equiv 0$. При $k \neq j - 1$ в силу (3.1.27) и равенств

$$\widetilde{r}_{kj}(0,\lambda,\mu) = 0 \quad (k \geqslant j), \qquad \lim_{x\to\infty} \widetilde{r}_{kj}(x,\lambda,\mu) = 0 \quad (k \leqslant j-2)$$

имеем

$$\widetilde{r}_{kj}(x,\lambda,\mu) = \int_a^x \widetilde{\varphi}_k(t,\lambda)\widetilde{g}_j^*(t,\mu)\,dt,$$

где $a = 0$ при $k \geqslant j$ и $a = \infty$ при $k \leqslant j - 2$. Отсюда, используя оценки (3.2.18) и

$$|\widetilde{\varphi}_k^{(s)}(x,\lambda)| < C|\rho|^{k+s-n}|\exp(\rho R_k x)|, \tag{3.2.29}$$

получаем оценку (3.2.27). Пусть теперь $|\rho - \theta| \geqslant \varepsilon_0$. Используя (3.1.22), (3.2.18), (3.2.29), имеем

$$|\widetilde{r}_{kj}(x,\lambda,\mu)| \leqslant \left|\frac{\langle\widetilde{\varphi}_k(x,\lambda),\widetilde{g}_j^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_x|\exp((\rho R_k - \theta R_j)x)|}{|\rho|^{n-k}|\theta|^{n+j}|\lambda-\mu|}\sum_{i=0}^{n-1}|\rho|^{n-i-1}|\theta|^i.$$

Покажем, что при $\lambda \in \gamma$, $\mu \in \gamma''$ или $\lambda \in \gamma''$, $\mu \in \gamma$

$$\frac{1}{|\lambda-\mu|}\sum_{i=0}^{n-1}|\rho|^{n-i-1}|\theta|^i \leqslant \frac{C}{|\rho-\theta|+1}, \quad |\rho-\theta| \geqslant \varepsilon_0.$$

В самом деле, если $\lambda \in \gamma_0$, $\mu \in \gamma''$ или $\lambda \in \gamma''$, $\mu \in \gamma_0$, то эта оценка очевидна. Если $\lambda,\mu \in \gamma_1$ или $\lambda,\mu \in \gamma_{-1}$, то $|\lambda - \mu| = ||\lambda| - |\mu||$, $|\rho - \theta| = ||\rho| - |\theta||$ и, следовательно,

$$\frac{1}{|\lambda-\mu|}\sum_{i=0}^{n-1}|\rho|^{n-i-1}|\theta|^i \leqslant \frac{1}{|\rho-\theta|} \leqslant \frac{C_0}{|\rho-\theta|+1}, \quad C_0 = \frac{\varepsilon_0+1}{\varepsilon_0}.$$

Если же $\lambda \in \gamma_1$, $\mu \in \gamma_{-1}$ или $\lambda \in \gamma_{-1}$, $\mu \in \gamma_1$, то $|\lambda - \mu| = |\lambda| + |\mu|$ и, следовательно,

$$\frac{1}{|\lambda-\mu|}\sum_{i=0}^{n-1}|\rho|^{n-i-1}|\theta|^i \leqslant \frac{2(n+1)}{|\rho|+|\theta|} \leqslant \frac{C}{|\rho-\theta|+1}.$$

Таким образом, оценка (3.2.27) доказана.

Далее, в силу (3.1.27) имеем

$$\widetilde{r}_{kj}^{(\nu+1)}(x,\lambda,\mu) = \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(\widetilde{\varphi}_k(x,\lambda)\widetilde{g}_j^*(x,\mu)\right), \quad \lambda,\mu \in \gamma.$$

Отсюда, с учетом (3.2.18), (3.2.29), получаем (3.2.28). Лемма 3.2.4 доказана. □

Отметим, что так как при $\lambda,\mu\in\gamma_0$

$$\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{g}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}\,|x=0} = -Y\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{M}^{-1}(\mu)\widetilde{A}_0(\mu)Y^T,$$

то, в силу (3.1.27), имеем при $\lambda,\mu\in\gamma_0$:

$$\widetilde{r}(x,\lambda,\mu) = \frac{Y\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{M}^{-1}(\mu)\widetilde{A}_0(\mu)Y^T}{\mu-\lambda} + \int\limits_0^x \widetilde{\varphi}(t,\lambda)\widetilde{g}^*(t,\mu)\,dt. \qquad (3.2.30)$$

Пусть для определенности $\arg\rho\in(0,\dfrac{2\pi}{n})$. Обозначим

$$\Omega(x,\lambda) = \mathrm{diag}\,[\rho^{k-n}\exp(\rho R_k x)]_{k=\overline{2,n}},$$
$$\varphi^+(x,\lambda) = \Omega^{-1}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda), \quad r^+(x,\lambda,\mu) = \Omega^{-1}(x,\lambda)r(x,\lambda,\mu)\Omega(x,\mu),$$
$$a^+(x,\lambda) = \Omega^{-1}(x,\lambda)a(\lambda)\Omega(x,\lambda), \;\; N^+(x,\lambda) = \Omega^{-1}(x,\lambda)N(\lambda)\Omega(x,\lambda).$$

Аналогично определим матрицы $\widetilde{\varphi}^+(x,\lambda)$, $\widetilde{r}^+(x,\lambda,\mu)$, $\widetilde{a}^+(x,\lambda)$, $\widetilde{N}^+(x,\lambda)$. Из (3.2.29), (3.2.30) и леммы 3.2.4 вытекает, что

$$|\widetilde{\varphi}^{+(\nu)}(x,\lambda)| < C|\rho|^\nu, \;\; \lambda\in\gamma, \;\nu=\overline{0,n-1},$$
$$|\widetilde{r}^+{}_{kj}(x,\lambda,\mu)| < \frac{C_x}{|\theta|^{2n}(|\rho-\theta|+1)}; \;\; \lambda\in\gamma, \quad \mu\in\gamma''\vee\lambda\in\gamma'', \quad \mu\in\gamma,$$
$$|\widetilde{r}_{kj}^{+(\nu+1)}(x,\lambda,\mu)| < C_x|\theta|^{-2n}(|\rho|+|\theta|)^\nu, \quad \lambda,\mu\in\gamma, \quad \nu=\overline{0,n-1}, \qquad (3.2.31)$$

причем функции $\widetilde{r}^+{}_{kj}(x,\lambda,\mu)$ непрерывны при $\lambda,\mu\in\gamma_1$, $\lambda,\mu\in\gamma_{-1}$, а при $\lambda,\mu\in\gamma_0$

$$\widetilde{r}^+(x,\lambda,\mu) = \frac{\widetilde{a}^+(x,\lambda)}{\mu-\lambda} + \widetilde{H}^+(x,\lambda,\mu),$$

где $\widetilde{H}^+(x,\lambda,\mu)$ — непрерывная функция. Аналогичные свойства имеют функции $r^+(x,\lambda,\mu)$, $\varphi^+(x,\lambda)$. Из теоремы 3.2.1 и равенств (3.2.9) вытекает следующая теорема.

Теорема 3.2.2. *Справедливы соотношения*

$$\widetilde{\varphi}^+(x,\lambda) = \widetilde{N}^+(x,\lambda)\varphi^+(x,\lambda) + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \widetilde{r}^+(x,\lambda,\mu)\varphi^+(x,\mu)\,d\mu, \quad \lambda\in\gamma, \qquad (3.2.32)$$

$$\widetilde{N}^+(x,\lambda)r^+(x,\lambda,\mu) - \widetilde{r}^+(x,\lambda,\mu)N^+(x,\mu) + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \widetilde{r}^+(x,\lambda,\xi)r^+(x,\xi,\mu)\,d\xi = 0, \quad \lambda,\mu\in\gamma, \qquad (3.2.33)$$

$$\begin{gathered}\widetilde{N}^+(x,\lambda)N^+(x,\lambda)-\frac{1}{4}\widetilde{a}^+(x,\lambda)a^+(x,\lambda)=E,\\ \widetilde{N}^+(x,\lambda)a^+(x,\lambda)-\widetilde{a}^+(x,\lambda)N^+(x,\lambda)=0.\end{gathered}\tag{3.2.34}$$

Введем теперь банахово пространство $B=L_2^{n-1}(\gamma')\oplus L_\infty^{n-1}(\gamma'')$ вектор-функций $z(\lambda)=[z_j(\lambda)]_{j=\overline{1,n-1}}$, $\lambda\in\gamma$, с нормой

$$\|z\|_B=\sum_{j=1}^{n-1}\Big(\|z_j\|_{L_2(\gamma')}+\|z_j\|_{L_\infty(\gamma'')}\Big).$$

При фиксированном $x\geqslant 0$ рассмотрим линейные операторы в B:

$$\begin{aligned}\widetilde{A}z(\lambda)&=\widetilde{N}^+(x,\lambda)z(\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \widetilde{r}^+(x,\lambda,\mu)z(\mu)\,d\mu,\quad \lambda\in\gamma,\\ Az(\lambda)&=\widetilde{N}^+(x,\lambda)z(\lambda)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma r^+(x,\lambda,\mu)z(\mu)\,d\mu,\quad \lambda\in\gamma.\end{aligned}\tag{3.2.35}$$

Лемма 3.2.5. *При фиксированном $x\geqslant 0$ операторы $A,\widetilde{A}$ являются линейными ограниченными операторами в B, причем $\widetilde{A}A=A\widetilde{A}=E$.*

Доказательство. Ограниченность операторов $A,\widetilde{A}$ очевидна. Используя формулу смены порядка интегрирования в особом интеграле [88, с. 60], получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \widetilde{r}^+(x,\lambda,\xi)\,d\xi\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma r^+(x,\xi,\mu)z(\mu)\,d\mu=$$
$$=\frac{1}{4}\widetilde{a}^+(x,\lambda)a^+(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \widetilde{r}^+(x,\lambda,\xi)r^+(x,\xi,\mu)\,d\xi\Big)z(\mu)\,d\mu.$$

Тогда из (3.2.33), (3.2.34), (3.2.35) вытекает, что

$$\begin{gathered}\widetilde{A}Az(\lambda)=(\widetilde{N}^+(x,\lambda)N^+(x,\lambda)-\frac{1}{4}\widetilde{a}^+(x,\lambda)a^+(x,\lambda))z(\lambda)-\\ -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\Big(\widetilde{N}^+(x,\lambda)r^+(x,\lambda,\mu)-\widetilde{r}^+(x,\lambda,\mu)N^+(x,\lambda)+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \widetilde{r}^+(x,\lambda,\xi)r^+(x,\xi,\mu)\,d\xi\Big)z(\mu)\,d\mu=z(\lambda),\end{gathered}$$

т. е. $\widetilde{A}A=E$. Аналогично доказывается, что $A\widetilde{A}=E$. Лемма 3.2.5 доказана. □

Следствие 3.2.1. *При $x \geqslant 0$ основное уравнение обратной задачи* (3.2.10) *имеет единственное решение в классе* $\Omega^{-1}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) \in B$, *причем* $\sup\limits_x \|\Omega^{-1}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\|_B < \infty$.

3.2.2. Необходимые и достаточные условия. Обозначим через $\mathbf{W}$ множество матриц $M(\lambda) = [M_{mk}(\lambda)]_{m,k=\overline{1,n}}$ таких, что: 1) $M_{mk}(\lambda) = \delta_{mk}$, $m \geqslant k$; $M_{mk}(\lambda) = O(\rho^{m-k})$, $|\lambda| \to \infty$, $m < k$; 2) функции $M_{mk}(\lambda)$ регулярны в $\Pi_{(-1)^{n-m}}$ за исключением не более чем счетного ограниченного множества полюсов Λ'_{mk} и непрерывны в $\overline{\Pi}_{(-1)^{n-m}}$ за исключением ограниченных множеств Λ_{mk}; 3) функции $M_{mk}(\lambda) - M_{m,m+1}(\lambda)M_{m+1,k}(\lambda)$ регулярны при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^{n-m}} \setminus \Lambda$, $\Lambda = \bigcup\limits_{m,k} \Lambda_{mk}$ (множество Λ свое для каждой матрицы $M(\lambda)$).

Теорема 3.2.3. *Для того чтобы матрица* $M(\lambda) \in \mathbf{W}$ *была матрицей Вейля для* $L \in V_N$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) (*асимптотика*) *существует* $\widetilde{L} \in V_N$ *такая, что* $\widehat{M}_{m,m+1}(\lambda) = O(\rho^{-n-2})$, $|\lambda| \to \infty$;

2) (*условие* P) *при* $x \geqslant 0$ *уравнение* (3.2.10) *имеет единственное решение в классе* $\Omega^{-1}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) \in B$, *причем* $\sup\limits_x \|\Omega^{-1}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\|_B < \infty$;

3) $\varepsilon_\nu(x) \in W_{\nu+N}$, $\nu = \overline{0, n-2}$, *где функции* $\varepsilon_\nu(x)$ *определяются по формулам* (3.2.19)–(3.2.22).

При выполнении этих условий дифференциальное уравнение и линейные формы $L = (\ell, U)$ *строятся по формулам* (3.2.23).

Пример 2.2.1 показывает существенность условий 2, 3 теоремы 3.2.3.

Необходимость условий теоремы 3.2.3 доказана выше в п. 3.2.1. Докажем их достаточность. Пусть $\varphi(x,\lambda)$ — решение уравнения (3.2.10).

Лемма 3.2.6. *Функции* $\varphi^{(\nu)}(x,\lambda)$, $\nu = \overline{0, n-1}$, *абсолютно непрерывны по x на каждом конечном интервале, и при фиксированном* $x \geqslant 0$ $\Omega^{-1}(x,\lambda)\rho^{-\nu}\varphi^{(\nu)}(x,\lambda) \in B$, $\nu = \overline{0, n}$.

Доказательство. Построим сначала обратный оператор при $x = 0$. Обозначим $B(\lambda) = \operatorname{diag}[\chi((-1)^{n-k+1}\lambda)]_{k=\overline{2,n}}$ при $\lambda \in \gamma_1 \cup \gamma_{-1}$ и $B(\lambda)$=E при $\lambda \in \gamma_0$. Тогда $\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = B(\lambda)Y\widetilde{\Phi}(x,\lambda)$. В силу (3.1.27) $\widetilde{r}(x,\lambda,\mu) = \widetilde{r}^0(\lambda,\mu) + \widetilde{r}^1(x,\lambda,\mu)$, где

$$\widetilde{r}^1(x,\lambda,\mu) = \int\limits_0^x \widetilde{\varphi}(t,\lambda)\widetilde{g}^*(t,\mu)\,dt, \quad \widetilde{r}^0(\lambda,\mu) = \widetilde{r}(0,\lambda,\mu) = \frac{\widetilde{\varkappa}(\lambda,\mu)}{\mu-\lambda},$$

$$\widetilde{\varkappa}(\lambda,\mu) = B(\lambda)Y\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{M}^*(\mu)\widetilde{A}(\mu)Y^T, \quad \widetilde{\varkappa}(\lambda,\lambda) = \widetilde{a}(\lambda).$$

Положим

$$r^0(\lambda,\mu)=\frac{\varkappa(\lambda,\mu)}{\mu-\lambda},\quad \varkappa(\lambda,\mu)=B(\lambda)YM(\lambda)M^*(\mu)A(\mu)Y^T,$$
$$M^*(\lambda)=M^{-1}(\lambda),\quad \varkappa(\lambda,\lambda)=a(\lambda).$$

Используя (3.2.5), равенства $M^*(\lambda)=M^{-1}(\lambda)$, $\widetilde{M}^*(\lambda)=\widetilde{M}^{-1}(\lambda)$ и аналитические свойства функций $M(\lambda)$, $\widetilde{M}(\lambda)$, получаем

$$\frac{M(\lambda)M^*(\mu)}{\lambda-\mu}-\frac{\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{M}^*(\mu)}{\lambda-\mu}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{M}^*(\xi)M(\xi)M^*(\mu)}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\,d\xi.$$

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 3.2.1, находим

$$\widetilde{N}(\lambda)r^0(\lambda,\mu)-\widetilde{r}^0(\lambda,\mu)N(\mu)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \widetilde{r}^0(\lambda,\xi)r^0(\xi,\mu)\,d\xi=0$$

и, аналогично,

$$N(\lambda)\widetilde{r}^0(\lambda,\mu)-r^0(\lambda,\mu)\widetilde{N}(\mu)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma r^0(\lambda,\xi)\widetilde{r}^0(\xi,\mu)\,d\xi=0.$$

Рассмотрим операторы

$$A_0y(\lambda)=N(\lambda)y(\lambda)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma r^0(\lambda,\mu)y(\mu)\,d\mu,$$
$$\widetilde{A}_0y(\lambda)=\widetilde{N}(\lambda)y(\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \widetilde{r}^0(\lambda,\mu)y(\mu)\,d\mu.$$

Как и при доказательстве леммы 3.2.5, убеждаемся, что $A_0,\widetilde{A}_0$ являются линейными и ограниченными операторами в B, причем $A_0\widetilde{A}_0=\widetilde{A}_0A_0=E$.

Проведем регуляризацию уравнения (3.2.10). Обозначим $\gamma^-=\{\lambda:\ \lambda\in\gamma_1\cup\gamma_{-1},\ |\lambda|\geqslant R\}$, $\gamma^+=\gamma\setminus\gamma^-$, где R — достаточно большое вещественное число. Рассмотрим оператор

$$Qy(\lambda)=\begin{cases} y(\lambda), & \lambda\in\gamma^- \\ N(\lambda)y(\lambda)-\dfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma r^0(\lambda,\mu)y(\mu)\,d\mu, & \lambda\in\gamma^+.\end{cases}$$

Ясно, что Q — линейный ограниченный оператор в B. Выберем R так, чтобы существовал ограниченный Q^{-1}. Это возможно, так как при больших R оператор Q «мало отличается» от A_0. Применяя оператор Q к обеим частям равенства (3.2.10), получаем

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \tilde{\tilde{r}}(x,\lambda,\mu)\varphi(\lambda,\mu)\,d\mu,$$

где

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x,\lambda) = \begin{cases} N(\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} r^0(\lambda,\mu)\tilde{\varphi}(x,\mu)\,d\mu, & \lambda\in\gamma^+, \\ \tilde{\varphi}(x,\lambda), & \lambda\in\gamma^-, \end{cases}$$

$$\tilde{\tilde{r}}(x,\lambda,\mu) = \begin{cases} \tilde{r}(x,\lambda,\mu), \quad \lambda\in\gamma^-, \\ N(\lambda)\tilde{r}(x,\lambda,\mu) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} r^0(\lambda,\xi)\tilde{r}(x,\xi,\mu)\,d\xi, \quad \lambda\in\gamma^+,\ \mu\in\gamma^-, \\ N(\lambda)\tilde{r}^1(x,\lambda,\mu) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} r^0(\lambda,\xi)\tilde{r}^1(x,\xi,\mu)\,d\xi + \\ \qquad + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} r^0(\lambda,\xi)\tilde{r}^0(x,\xi,\mu)\,d\xi, \quad \lambda,\mu\in\gamma^+. \end{cases}$$

Выполним замену:

$$\tilde{\tilde{\varphi}}^+(x,\lambda) = \Omega^{-1}(x,\lambda)\tilde{\tilde{\varphi}}(x,\lambda), \quad \varphi^+(x,\lambda) = \Omega^{-1}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda),$$
$$\tilde{\tilde{r}}^+(x,\lambda,\mu) = \Omega^{-1}(x,\lambda)\tilde{\tilde{r}}(x,\lambda,\mu)\Omega(x,\mu).$$

Тогда

$$\tilde{\tilde{\varphi}}^+(x,\lambda) = \varphi^+(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \tilde{\tilde{r}}^+(x,\lambda,\mu)\varphi^+(x,\mu)\,d\mu, \tag{3.2.36}$$

причем

$$\rho^{-\nu}\tilde{\tilde{\varphi}}^{+(\nu)}(x,\lambda)\in B, \quad \nu=\overline{0,n},$$
$$|\tilde{\tilde{r}}^+(x,\lambda,\mu)| \leqslant C_x|\theta|^{-2n}(|\rho-\theta|+1)^{-1},$$
$$|\tilde{\tilde{r}}^{+(\nu+1)}_{kj}(x,\lambda,\mu)| \leqslant C_x|\theta|^{-2n}(|\rho|+|\theta|)^{\nu}, \quad \nu=\overline{0,n-1}.$$

Оператор

$$\tilde{\tilde{A}}y(\lambda) = y(\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \tilde{\tilde{r}}^+(x,\lambda,\mu)y(\mu)\,d\mu, \quad B\to B,$$

при каждом $x\geqslant 0$ является линейным ограниченным оператором Фредгольма. Покажем, что $\tilde{\tilde{A}}^{-1}$ существует и ограничен. Для этого достаточно доказать, что однородное уравнение

$$y^+(\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \tilde{\tilde{r}}^+(x,\lambda,\mu)y^+(\mu)\,d\mu = 0, \quad y^+(\lambda)\in B,$$

имеет только нулевое решение. Обозначим $y(\lambda) = \Omega(x,\lambda)y^+(\lambda)$. Тогда

$$y(\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \tilde{\tilde{r}}(x,\lambda,\mu)y(\mu)\,d\mu = 0.$$

Положим
$$\widetilde{z}(\lambda) = \widetilde{N}(\lambda)y(\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \widetilde{r}(x,\lambda,\mu)y(\mu)\,d\mu.$$

Применяя оператор Q, получим
$$Q\widetilde{z}(\lambda) = y(\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \widetilde{\widetilde{r}}(x,\lambda,\mu)y(\mu)\,d\mu = 0.$$

Так как оператор Q обратим, то $\widetilde{z}(\lambda) = 0$. Тогда
$$\widetilde{N}(\lambda)y(\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \widetilde{r}(x,\lambda,\mu)y(\mu)\,d\mu = 0, \quad \Omega^{-1}(x,\lambda)y(\lambda) \in B.$$

Отсюда и из условия P теоремы 3.2.3 вытекает, что $y(\lambda) = 0$ и, следовательно, $y^{+}(\lambda) = 0$. Таким образом, оператор $\widetilde{\widetilde{A}}^{-1}$ существует и ограничен. Далее, используя уравнение Фредгольма (3.2.36), нетрудно получить, что функции $\varphi^{+(\nu)}(x,\lambda)$, $\nu = \overline{0, n-1}$, абсолютно непрерывны по x на каждом конечном интервале и при фиксированном $x \geqslant 0$ $\rho^{-\nu}\varphi^{+(\nu)}(x,\lambda) \in B$, $\nu = \overline{0,n}$. Лемма 3.2.6 доказана. □

Построим функции $\Phi(x,\lambda) = [\Phi_m(x,\lambda)]^{T}_{m=\overline{1,n}}$ по формуле
$$\Phi(x,\lambda) = \widetilde{\Phi}(x,\lambda) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\langle \widetilde{\Phi}(x,\lambda), \widetilde{g}^{*}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\varphi(x,\mu)\,d\mu, \ \lambda \in J_{\gamma}, \quad (3.2.37)$$
а также дифференциальное уравнение и линейные формы $L = (\ell, U)$ по формулам (3.2.23), где функции $\varepsilon_{\nu}(x), t_{j\nu}(x)$ определяются по формулам (3.2.19)–(3.2.22). Ясно, что $L \in V_N$.

Лемма 3.2.7. *Имеют место равенства*
$$\ell\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda), \ \lambda \in \gamma; \quad \ell\Phi(x,\lambda) = \lambda\Phi(x,\lambda), \ \lambda \in J_{\gamma}.$$

Доказательство. Дифференцируя соотношения (3.2.10), (3.2.37) по x и учитывая (3.1.27), (3.2.19), (3.2.20), вычисляем
$$\sum_{\nu=0}^{n} t_{j\nu}(x)\widetilde{\varphi}^{(\nu)}(x,\lambda) = \widetilde{N}(\lambda)\varphi^{(j)}(x,\lambda) + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\varphi^{(j)}(x,\mu)\,d\mu, \quad \lambda \in \gamma, \quad (3.2.38)$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} t_{j\nu}(x)\widetilde{\Phi}^{(\nu)}(x,\lambda) = \Phi^{(j)}(x,\lambda) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\varphi^{(j)}(x,\mu)\,d\mu,\quad \lambda\in J_\gamma. \quad (3.2.39)$$

Покажем, что имеют место равенства

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\widetilde{N}(\lambda)\ell\varphi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{g}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}\,\varphi(x,\mu)\,d\mu,\quad \lambda\in\gamma, \quad (3.2.40)$$

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\ell\Phi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\,\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}\,\varphi(x,\mu)\,d\mu,\quad \lambda\in J_\gamma. \quad (3.2.41)$$

В самом деле, в силу (3.2.23), (3.2.19)–(3.2.22) имеем

$$\widetilde{p}_\nu(x)=p_\nu(x)+\sum_{j=\nu+1}^{n}p_j(x)t_{j\nu}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\nu j}(x)\varkappa_{j0}(x).$$

Отсюда и из (3.2.38), (3.1.22) вытекает, что

$$\widetilde{N}(\lambda)\ell\varphi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),\widetilde{g}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}\,\varphi(x,\mu)\,d\mu=\sum_{j=0}^{n}p_j(x)\sum_{\nu=0}^{n}t_{j\nu}(x)\widetilde{\varphi}^{(\nu)}(x,\lambda)+$$

$$+\sum_{\nu,j=0}^{n-1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\nu j}(x)\varkappa_{j0}(x)\widetilde{\varphi}^{(\nu)}(x,\lambda)=\sum_{\nu=0}^{n}\widetilde{p}_\nu(x)\widetilde{\varphi}^{(\nu)}(x,\lambda)=\widetilde{\ell}\widetilde{\varphi}(x,\lambda).$$

Аналогично доказывается и (3.2.41).

Из (3.2.40) следует, что

$$\lambda\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\widetilde{N}(\lambda)\ell\varphi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(\lambda-\mu)\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu,$$

или

$$\widetilde{N}(\lambda)\Big(\ell\varphi(x,\lambda)-\lambda\varphi(x,\lambda)\Big)+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)\Big(\ell\varphi(x,\mu)-\mu\varphi(x,\mu)\Big)\,d\mu=0.$$

Обозначим $y(x,\lambda):=\ell\varphi(x,\lambda)-\lambda\varphi(x,\lambda)$, $y(x,\lambda)=[y_k(x,\lambda)]_{k=\overline{2,n}}$.

Тогда

$$\widetilde{N}(\lambda)y(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\widetilde{r}(x,\lambda,\mu)y(x,\mu)\,d\mu=0,\quad \lambda\in\gamma. \tag{$*$}$$

В силу леммы 3.2.6 $\dfrac{1}{\lambda}\Omega^{-1}(x,\lambda)y(x,\lambda)\in B$. Из (*) при $\lambda\in\gamma''$ имеем

$$y_k(x,\lambda)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\sum_{j=2}^{n}\widetilde{r}_{kj}(x,\lambda,\mu)y_j(x,\mu)\,d\mu.$$

Отсюда, с учетом леммы 3.2.4, получаем оценку

$$|y_k(x,\lambda)|\leqslant C_x|\rho|^{k-n}|\exp(\rho R_k x)|,\quad \lambda\in\gamma''.$$

Следовательно, $\Omega^{-1}(x,\lambda)y(x,\lambda)\in B$. Тогда, согласно условию P теоремы 3.2.3, однородное уравнение $(*)$ имеет только нулевое решение, т. е. $\ell\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda)$, $\lambda\in\gamma$.

Далее, из (3.2.41) вытекает, что

$$\lambda\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\ell\Phi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\,\mu\varphi(x,\mu)\,d\mu+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}\,\varphi(x,\mu)\,d\mu,$$

или

$$\ell\Phi(x,\lambda)=\lambda\Big(\widetilde{\Phi}(x,\lambda)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\,\varphi(x,\mu)\,d\mu\Big),$$

и, следовательно, с учетом (3.2.37), $\ell\Phi(x,\lambda)=\lambda\Phi(x,\lambda)$. Лемма 3.2.7 доказана. ☐

Лемма 3.2.8. *Функции $\Phi(x,\lambda)=[\Phi_m(x,\lambda)]^T_{m=\overline{1,n}}$ являются решениями Вейля для L.*

Доказательство. Из (3.2.37) следует, что при фиксированном $x\geqslant 0$ функции $\Phi^{(\nu)}(x,\lambda)$, $\nu=\overline{0,n}$, регулярны при $\lambda\in J_\gamma$. Кроме того, из (3.2.10), (3.2.37), как и при доказательстве теоремы 3.2.1, вытекает, что

$$\lim_{z\to\lambda, z\in J_\gamma} \Phi_m^{(\nu)}(x,z) = \varphi_m^{(\nu)}(x,\lambda), \quad \lambda\in\gamma_0\cup\gamma_{(-1)^{n-m+1}},\ m=\overline{2,n}.$$

Так как $\widetilde{g}^{*(\nu)}(x,\mu)\varphi^{(j)}(x,\mu) = \widetilde{G}^{*(\nu)}(x,\mu)\Phi^{(j)}(x,\mu)$, то из (3.2.39) получаем

$$\sum_{j=0}^{n-1} u_{\xi j0}\sum_{\nu=0}^{n} t_{j\nu}(0)\widetilde{\Phi}^{(\nu)}(0,\lambda) = U_{\xi0}(\Phi(x,\lambda)) + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda), \widetilde{G}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}_{|x=0} U_{\xi0}(\Phi(x,\mu))\,d\mu,$$

или

$$\widetilde{U}_{\xi0}(\widetilde{\Phi}(x,\lambda)) = U_{\xi0}(\Phi(x,\lambda)) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\widetilde{\Gamma}(\lambda,\mu)}{\mu-\lambda}U_{\xi0}(\Phi(x,\mu))\,d\mu.$$

Отсюда, с учетом (3.2.7), имеем

$$\widetilde{U}_{\xi0}(\widetilde{\Phi}_m(x,\lambda)) = U_{\xi0}(\Phi_m(x,\lambda)) + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\widetilde{\Gamma}_{mj}(\lambda,\mu)}{\mu-\lambda}U_{\xi0}(\Phi_j(x,\mu))\,d\mu. \quad (3.2.42)$$

Последовательно положив в (3.2.42) $\xi = n, n-1, \ldots, 1$ и учитывая, что $\widetilde{U}_{\xi0}(\widetilde{\Phi}_m(x,\lambda)) = \delta_{\xi m}$, $\xi=\overline{1,m}$, находим: $U_{\xi0}(\Phi_m(x,\lambda)) = \delta_{\xi m}$, $\xi=\overline{1,m}$.

Далее, используя оценки $\|\varphi^+(x,\lambda)\|_B < C$ и (3.2.18), получаем

$$\int\limits_\gamma |\widetilde{g}^{*(\nu)}(x,\mu)\varphi(x,\mu)|\,|d\mu| < C\exp(ax), \quad a>0, \quad \nu=\overline{0,n-1}. \quad (3.2.43)$$

В λ-плоскости рассмотрим область

$$G_\varepsilon^0 = \{\lambda:\ d(\lambda,\gamma_0)\geqslant\varepsilon,\ \arg(\pm\lambda)\notin(-\varepsilon,\varepsilon)\}, \quad \varepsilon>0.$$

Из (3.2.37) с учетом (3.1.22), (3.2.43) следует, что

$$|\Phi_m(x,\lambda)| < C|\rho|^{m-n}\exp(ax)|\exp\rho R_m x|, \quad x\geqslant 0, \quad \lambda\in G_\varepsilon^0.$$

Обозначим через $\Phi^0(x,\lambda) = [\Phi_m^0(x,\lambda)]_{m=\overline{1,n}}^T$ решения Вейля для L, $\breve{\Phi}_m(x,\lambda) = \Phi_m(x,\lambda) - \Phi_m^0(x,\lambda)$. Тогда функции $\breve{\Phi}_m(x,\lambda)$ регулярны при $\lambda\in J_\gamma$ и

$$|\breve{\Phi}_m(x,\lambda)| < C|\rho|^{m-n}\exp(ax)|\exp(\rho R_m x)|, \quad x\geqslant 0, \quad \lambda\in G_\varepsilon^0.$$

Кроме того, $\ell\breve{\Phi}_m(x,\lambda) = \lambda\breve{\Phi}_m(x,\lambda)$, $U_{\xi0}(\breve{\Phi}_m(x,\lambda)) = 0$, $\xi=\overline{1,m}$.

Покажем, что $\breve{\Phi}_m(x,\lambda)\equiv 0$. В самом деле, так как функции $[\Phi_m^0(x,\lambda)]_{m=\overline{1,n}}$ образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения $\ell y=\lambda y$, то

$$\breve{\Phi}_m(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jm}(\lambda)\Phi_j^0(x,\lambda).$$

Применяя последовательно линейные формы $U_{10},\dots,U_{m0}$, находим $\alpha_{jm}(\lambda)=0$, $j=\overline{1,m}$. Таким образом,

$$\breve{\Phi}_m(x,\lambda)=\sum_{j=m+1}^{n}\alpha_{jm}(\lambda)\Phi_j^0(x,\lambda),$$

причем функции $\alpha_{jm}(\lambda)$ регулярны при $\lambda\in J_\gamma$. Предположим, что при некотором $s\ (m+1\leqslant s\leqslant n)$ $\alpha_{sm}(\lambda)\not\equiv 0$, $\alpha_{jm}(\lambda)\equiv 0$, $j=\overline{s+1,n}$. Выберем $\lambda^*\in\overline{G}_\varepsilon^0$ так, чтобы $\alpha_{sm}(\lambda^*)\neq 0$, $\mathrm{R}e(\rho^*(R_s-R_{s-1}))>a$. Тогда

$$\Phi_s^0(x,\lambda^*)=\frac{1}{\alpha_{sm}(\lambda^*)}\Bigl(\breve{\Phi}_m(x,\lambda^*)-\sum_{j=m+1}^{s-1}\alpha_{jm}(\lambda^*)\Phi_j^0(x,\lambda^*)\Bigr),$$

и, следовательно, $|\Phi_s^0(x,\lambda^*)|<C^*\exp(ax)|\exp\rho^*R_{s-1}x|$, $x>0$. С другой стороны, из (3.1.10) вытекает, что

$$|\Phi_s^0(x,\lambda^*)|>C_1^*|\exp\rho^*R_sx|,\quad x>0.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\alpha_{jm}(\lambda)\equiv 0$, $j=\overline{m+1,n}$, т. е. $\breve{\Phi}_m(x,\lambda)\equiv 0$. Следовательно, $\Phi_m(x,\lambda)=\Phi_m^0(x,\lambda)$. Лемма 3.2.8 доказана. ☐

Лемма 3.2.9. *Матрица $M(\lambda)$ является матрицей Вейля для L.*

Доказательство. Обозначим через $M_{m\xi}^0(\lambda)=U_{\xi 0}(\Phi_m)$ функции Вейля для L, $\breve{M}_{m\xi}(\lambda)=M_{m\xi}(\lambda)-M_{m\xi}^0(\lambda)$. Согласно (3.2.26)

$$\widetilde{U}_{\xi 0}(\widetilde{\Phi}_m(x,\lambda))=U_{\xi 0}(\Phi_m(x,\lambda))+\\+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\widetilde{\Gamma}_{mj}^0(\lambda,\mu)}{\mu-\lambda}\,U_{\xi 0}(\Phi_j(x,\mu))\,d\mu,\qquad(3.2.44)$$

где $\widetilde{\Gamma}^0(\lambda,\mu)$ имеет тот же вид, что и $\widetilde{\Gamma}(\lambda,\mu)$, но с $M_{m\xi}^0$ вместо $M_{m\xi}$. Сравнивая (3.2.42) и (3.2.44), получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\Bigl(\widetilde{\Gamma}_{m\xi}(\lambda,\mu)-\widetilde{\Gamma}_{m\xi}^0(\lambda,\mu)\Bigr)\frac{d\mu}{\mu-\lambda}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\sum_{j=m+1}^{\xi-1}\Bigl(\widetilde{\Gamma}_{mj}(\lambda,\mu)-\\-\widetilde{\Gamma}_{mj}^0(\lambda,\mu)\Bigr)M_{j\xi}^0(\mu)\,\frac{d\mu}{\mu-\lambda}=0,\quad \xi>m,\quad \lambda\in J_\gamma.\qquad(3.2.45)$$

Покажем по индукции, что $\breve{M}_{m\xi}(\lambda) \equiv 0,\ \xi > m$. При $\xi = m+1$ из (3.2.45) с учетом (3.2.7), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \chi_{(-1)^{n-m}}(\mu)\breve{M}_{m,m+1}(\mu)\,\frac{d\mu}{\mu-\lambda} = 0, \quad \lambda \in J_\gamma,$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0 \cup \gamma_{(-1)^{n-m}}} \frac{\breve{M}_{m,m+1}(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu = 0,$$

и, следовательно, $\breve{M}_{m,m+1}(\lambda) \equiv 0$.

Предположим, что $\breve{M}_{mj}(\lambda) \equiv 0,\ j = \overline{m+1, \xi-1}$. Тогда, в силу (3.2.7)

$$\tilde{\Gamma}_{mj}(\lambda,\mu) = \tilde{\Gamma}^0_{mj}(\lambda,\mu),\ j = \overline{m+1,\xi-1}; \quad \tilde{\tilde{\Gamma}}_{m\xi}(\lambda,\mu) = \widetilde{\widetilde{\Gamma^0}}_{m\xi}(\lambda,\mu).$$

Таким образом, из (3.2.45) получаем

$$\int\limits_{\gamma_0} \frac{\breve{M}_{m\xi}(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu = 0, \quad \lambda \in J_\gamma. \tag{3.2.46}$$

Функция $\breve{M}_{m,\xi}(\lambda)$ регулярна при $\lambda \in J_\gamma$ и $\lambda \in \gamma_{(-1)^{n-m+1}}$. Далее, функции

$$M_{m\xi}(\lambda) - M_{m,m+1}(\lambda)M_{m+1,\xi}(\lambda),\ M^0_{m\xi}(\lambda) - M^0_{m,m+1}(\lambda)M^0_{m+1,\xi}(\lambda)$$

регулярны при $\lambda \in \gamma_{(-1)^{n-m}}$. Так как $\breve{M}_{mj}(\lambda) \equiv 0,\ j = \overline{m+1,\xi-1}$, то функция $\breve{M}_{m\xi}(\lambda)$ регулярна при $\lambda \in \gamma_{(-1)^{n-m}}$. Таким образом, функция $\breve{M}_{m\xi}(\lambda)$ регулярна при $\lambda \notin \mathrm{int}\gamma_0$ и $\breve{M}_{m\xi}(\lambda) = O(\rho^{-1}),\ |\lambda| \to \infty$. Тогда из (3.2.46) вытекает, что $\breve{M}_{m\xi}(\lambda) \equiv 0$. Лемма 3.2.9 доказана. □

Таким образом, теорема 3.2.3 полностью доказана.

Замечание 3.2.1. Метод, изложенный в § 3.2, позволяет решать обратную задачу и для дифференциальных операторов с несуммируемыми коэффициентами. В самом деле, пусть матрица $M(\lambda) \in \mathbf{W}$ удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 3.2.3. Тогда, согласно вышеуказанной процедуре, по $M(\lambda)$ можно построить дифференциальное уравнение и линейные формы вида (3.1.1), (3.1.2). При этом коэффициенты $p_k(x)$ уравнения (3.1.1) будут, вообще говоря, несуммируемыми функциями (см. пример 2.2.1).

Замечание 3.2.2. Мы упоминали выше, что существует другое обобщение функции Вейля оператора Штурма–Лиувилля. Сравним понятие введенной выше матрицы Вейля с понятием m-матрицы из [188] (где использовались несколько другие обозначения). Для простоты пусть $n = 4$ и $U_\xi(y) = y^{(\xi-1)}(0)$. Пусть функции $\Phi_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,4}$, являются решениями уравнения (3.1.1) для $n = 4$ при условиях $\Phi_k^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{\nu k}$, $\nu = \overline{1,k}$, $\Phi_k(x,\lambda) = O(\exp(\rho R_k x))$, $x \to \infty$, $\rho \in S_\mu$, в каждом секторе со свойством (3.1.3). Положим $M_{k\nu}(\lambda) = \Phi_k^{(\nu-1)}(0,\lambda)$, $\nu > k$. Таким образом,

$$\begin{gathered}
\Phi_1(0,\lambda) = 1, \quad \Phi_1(x,\lambda) = O(\exp(\rho R_1 x)), \quad x \to \infty, \\
\Phi_2(0,\lambda) = 0,\ \Phi_2'(0,\lambda) = 1, \quad \Phi_2(x,\lambda) = O(\exp(\rho R_2 x)), \quad x \to \infty, \\
\Phi_3(0,\lambda) = \Phi_3'(0,\lambda) = 0, \quad \Phi_3''(0,\lambda) = 1, \\
\Phi_3(x,\lambda) = O(\exp(\rho R_3 x)), \quad x \to \infty, \\
\Phi_4(0,\lambda) = \Phi_4'(0,\lambda) = \Phi_4''(0,\lambda) = 0,\ \Phi_4'''(0,\lambda) = 1, \\
M_{12}(\lambda) = \Phi_1'(0,\lambda),\ M_{13}(\lambda) = \Phi_1''(0,\lambda),\ M_{14}(\lambda) = \Phi_1'''(0,\lambda), \\
M_{23}(\lambda) = \Phi_2''(0,\lambda),\ M_{24}(\lambda) = \Phi_2'''(0,\lambda), \\
M_{34}(\lambda) = \Phi_3'''(0,\lambda),
\end{gathered}$$

и матрица Вейля $M(\lambda)$ имеет вид

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & M_{12}(\lambda) & M_{13}(\lambda) & M_{14}(\lambda) \\ 0 & 1 & M_{23}(\lambda) & M_{24}(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 & M_{34}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ясно, что

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(x,\lambda) \\ \Phi_2(x,\lambda) \\ \Phi_3(x,\lambda) \\ \Phi_4(x,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & M_{12}(\lambda) & M_{13}(\lambda) & M_{14}(\lambda) \\ 0 & 1 & M_{23}(\lambda) & M_{24}(\lambda) \\ 0 & 0 & 1 & M_{34}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(x,\lambda) \\ C_2(x,\lambda) \\ C_3(x,\lambda) \\ C_4(x,\lambda) \end{bmatrix},$$

где $C_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,4}$, — решения (3.1.1) для $n = 4$ при начальных условиях $C_k^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{\nu k}$, $\nu, k = \overline{1,4}$. Для функций $\Phi_k(x,\lambda)$ мы имеем шкалу роста: наименьшая экспонента при Φ_1, наибольшая — при Φ_4. При этом Φ_1 и Φ_2 убывают на бесконечности, а Φ_3 и Φ_4 растут.

Пусть теперь $\psi_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,2}$, являются решениями уравнения (3.1.1) для $n = 4$ при условиях

$$\begin{gathered}
\psi_1(0,\lambda) = 0,\ \psi_1'(0,\lambda) = -1,\ \psi_1(x,\lambda) \in L_2(0,\infty), \\
\psi_2(0,\lambda) = 1,\ \psi_2'(0,\lambda) = 0,\ \psi_2(x,\lambda) \in L_2(0,\infty),
\end{gathered}$$

и пусть

$$\begin{gathered}
m_{11}(\lambda) = \psi_1''(0,\lambda), \quad m_{12}(\lambda) = \psi_1'''(0,\lambda), \\
m_{21}(\lambda) = \psi_2''(0,\lambda), \quad m_{22}(\lambda) = \psi_2'''(0,\lambda).
\end{gathered}$$

Матрицу

$$m(\lambda) = \begin{bmatrix} m_{11}(\lambda) & m_{12}(\lambda) \\ m_{21}(\lambda) & m_{22}(\lambda) \end{bmatrix}$$

будем называть m-матрицей. Ясно, что,

$$\begin{bmatrix} \psi_1(x,\lambda) \\ \psi_2(x,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_2(x,\lambda) \\ C_1(x,\lambda) \end{bmatrix} + m(\lambda) \begin{bmatrix} C_3(x,\lambda) \\ C_4(x,\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\psi_1(x,\lambda) = -\Phi_2(x,\lambda), \quad \psi_2(x,\lambda) = \Phi_1(x,\lambda) - M_{12}(\lambda)\Phi_2(x,\lambda),$$
$$m_{11}(\lambda) = -M_{23}(\lambda), \quad m_{12}(\lambda) = -M_{24}(\lambda),$$
$$m_{21}(\lambda) = M_{13}(\lambda) - M_{12}(\lambda)M_{23}(\lambda), \quad m_{22}(\lambda) = M_{14}(\lambda) - M_{12}(\lambda)M_{24}(\lambda).$$

В самосопряженном случае задание m-матрицы $m(\lambda)$ равносильно заданию спектральной матрицы $\sigma(\lambda)$, причем

$$m(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda}.$$

Спектральная матрица $\sigma(\lambda)$ и m-матрица $m(\lambda)$ используются при исследовании *прямых* задач спектрального анализа для уравнения (3.1.1) в самосопряженном случае (подробнее см. [188]), но они неудобны при исследовании обратных задач. Матрица Вейля $M(\lambda)$ является более удачным и естественным объектом в теории обратных задач.

Отметим, что в самосопряженном случае имеют место следующие связи между $M_{kj}(\lambda)$:

$$M_{12}(\lambda) = M_{34}(\lambda), \quad M_{24}(\lambda) = -M_{13}(\lambda) + M_{12}(\lambda)M_{23}(\lambda).$$

§ 3.3. Восстановление дифференциальных операторов на конечном интервале

Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы $L \in V_N$ вида (3.1.1), (3.1.2) на конечном интервале ($T < \infty$). В этом параграфе дается решение обратной задачи восстановления L по матрице Вейля $M(\lambda)$. Используются обозначения и результаты из § 3.1. При решении обратной задачи на конечном отрезке возникают специфические трудности, связанные с наличием свойств S_1, S_2 матрицы Вейля $M(\lambda)$ (см. леммы 3.3.1, 3.3.2). Получены необходимые и достаточные условия на матрицу Вейля и процедура построения коэффициентов дифференциального уравнения и линейных форм по матрице Вейля $M(\lambda)$, исследована устойчивость решения обратной задачи. Основные результаты параграфа содержатся в теоремах 3.3.1–3.3.4. В п. 3.3.5 приводится контрпример, показывающий, что выбрасывание из матрицы Вейля одного элемента приводит к нарушению единственности решения обратной задачи.

3.3.1. Свойства матрицы Вейля. Будем говорить, что $L \in V'_N$, если $L \in V_N$ и функции $\Delta_{mm}(\lambda)$, $m = \overline{1, n-1}$, имеют лишь простые нули. Если $L \in V'_N$, то матрицы $M(\lambda)$, $M^*(\lambda)$ имеют лишь простые полюсы. Для простоты везде в дальнейшем считаем, что $L \in V'_N$.

Так как $L \in V_N$, то асимптотическую формулу (3.1.14) можно уточнить:

$$\lambda_{lm} = (-1)^{n-m}\Big(\frac{\pi}{T}\Big(\sin\frac{\pi m}{n}\Big)^{-1}\cdot\Big(l + \sum_{\nu=0}^{n+N-1}\frac{\chi_{m\nu}}{l^{\nu}} + \frac{\varkappa_{lm}}{l^{n+N-1}}\Big)\Big)^{n}, \tag{3.3.1}$$

где $\varkappa_{lm} = o(1)$ при $l \to \infty$. Обозначим $\beta_{lmk} = \operatorname*{Res}_{\lambda_{lm}} M_{mk}(\lambda)$. В силу (3.1.7) имеем

$$\beta_{lmk} = \frac{\Delta_{mk}(\lambda_{lm})}{\dot{\Delta}_{mm}(\lambda_{lm})},$$

и при $l \to \infty$

$$\begin{gathered}\beta_{lmk} = l^{n+m-k-1}\Big(\sum_{\nu=0}^{n+N-1}\frac{\chi_{mk\nu}}{l^{\nu}} + \frac{\varkappa_{lmk}}{l^{n+N-1}}\Big), \quad \chi_{mk0} \neq 0,\\ M_{m+1,k,\langle 0\rangle} = l^{m+1-k}\Big(\sum_{\nu=0}^{n+N-1}\frac{\eta_{mk\nu}}{l^{\nu}} + \frac{\overset{0}{\varkappa}_{lmk}}{l^{n+N-1}}\Big), \eta_{mk0} \neq 0,\end{gathered} \tag{3.3.2}$$

где $\varkappa_{lmk} = o(1)$, $\varkappa^{0}_{lmk} = o(1)$. Из (3.1.7), (3.1.20), (3.1.21) вытекает, что

$$|M_{mk}(\lambda)| < C|\rho|^{m-k}, \quad \lambda \in G_\delta \tag{3.3.3}$$

(G_δ — λ-плоскость с выброшенными кругами $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\lambda_0 \in \Lambda$) и, следовательно,

$$M_{mk}(\lambda) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\beta_{lmk}}{\lambda - \lambda_{lm}}. \tag{3.3.4}$$

Таким образом, функция Вейля $M_{mk}(\lambda)$ однозначно определяется заданием своих полюсов и вычетов $\{\lambda_{lm}, \beta_{lmk}\}_{l \geqslant 1}$.

Для $\lambda_0 \in \Lambda$ определим матрицу $\mathcal{N}(\lambda_0) = [\mathcal{N}_{jk}(\lambda_0)]_{j,k=\overline{1,n}}$ по формуле

$$\mathcal{N}(\lambda_0) = M_{\langle -1\rangle}(\lambda_0)(M_{\langle 0\rangle}(\lambda_0))^{-1}.$$

Так как $M_{mk}(\lambda) = \delta_{mk}$, $m \geqslant k$, то $\mathcal{N}_{jk}(\lambda_0) = 0$ при $j \geqslant k$. Покажем, что

$$\begin{gathered}\mathcal{N}(\lambda_0)\mathcal{N}(\lambda_0) = 0,\\ \Phi_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0) = \mathcal{N}(\lambda_0)\Phi_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0),\ \Phi^*_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0) = -\Phi^*_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)\mathcal{N}(\lambda_0).\end{gathered} \tag{3.3.5}$$

В самом деле, так как $M^*(\lambda)M(\lambda) = E$, то

$$\begin{gathered}M^*_{\langle -1\rangle}(\lambda_0)M_{\langle -1\rangle}(\lambda_0) = 0,\\ M^*_{\langle -1\rangle}(\lambda_0)M_{\langle 0\rangle}(\lambda_0) + M^*_{\langle 0\rangle}(\lambda_0)M_{\langle -1\rangle}(\lambda_0) = 0.\end{gathered}$$

Отсюда находим, что $\mathcal{N}(\lambda_0) = -(M^*_{\langle 0\rangle}(\lambda_0))^{-1}M^*_{\langle -1\rangle}(\lambda_0)$, и, следовательно,

$$\mathcal{N}(\lambda_0)\mathcal{N}(\lambda_0) = -(M^*_{\langle 0\rangle}(\lambda_0))^{-1}M^*_{\langle -1\rangle}(\lambda_0)M_{\langle -1\rangle}(\lambda_0)(M_{\langle 0\rangle}(\lambda_0))^{-1} = 0.$$

Далее, в силу (3.1.4), (3.1.28) и леммы 3.1.1, имеем: $C(x,\lambda) = M^*(\lambda)\Phi(x,\lambda)$ и $C^*(x,\lambda) = \Phi^*(x,\lambda)M(\lambda)$. Тогда

$$M^*_{\langle 0\rangle}(\lambda_0)\Phi_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0) + M^*_{\langle -1\rangle}(\lambda_0)\Phi^*_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0) = 0,$$
$$\Phi^*_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0)M_{\langle 0\rangle}(\lambda_0) + \Phi^*_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)M_{\langle -1\rangle}(\lambda_0) = 0.$$

Отсюда получаем (3.3.5).

Из равенств (3.1.13) и $\ell\Phi_m(x,\lambda) = \lambda\Phi_m(x,\lambda)$ имеем

$$U_{n-m+1,T}(\Phi_m(x,\lambda)) = (-1)^{n-m}(\Delta_{mm}(\lambda))^{-1}\Delta_{m-1,m-1}(\lambda), \tag{3.3.6}$$

$$\begin{gathered}\ell\Phi_{m,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0) = \lambda_0\Phi_{m,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0),\\ \ell\Phi_{m,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0) = \lambda_0\Phi_{m,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0) + \Phi_{m,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0).\end{gathered} \tag{3.3.7}$$

Установим два важных свойства матрицы Вейля. Доопределим $\Lambda_0 = \Lambda_n = \varnothing$.

Лемма 3.3.1 (свойство S_1). *Если* $\lambda_0 \notin \Lambda_m$, *то* $\mathcal{N}_{j,m+1}(\lambda_0) = \ldots = \mathcal{N}_{jn}(\lambda_0) = 0$, $j = \overline{1,m}$. *Если, кроме того,* $\lambda_0 \in \Lambda_{\nu+1}\bigcap\ldots\bigcap\Lambda_{m-1}$, $\lambda_0 \notin \Lambda_\nu$, $1 \leqslant \nu+1 < m \leqslant n$, *то* $\mathcal{N}_{\nu+1,m}(\lambda_0) \neq 0$.

Доказательство. Первое утверждение леммы докажем по индукции. Так как $\lambda_0 \in \Lambda_m$, то из (3.1.13) вытекает, что $\Phi_{m,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0) = 0$. С другой стороны, в силу (3.3.5)

$$\Phi_{m,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0) = \mathcal{N}_{m,m+1}(\lambda_0)\Phi_{m+1,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0) + \ldots + \mathcal{N}_{mn}(\lambda_0)\Phi_{n,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0).$$

Применяя к этому равенству линейные формы $U_{m+1,0},\ldots,U_{n0}$, последовательно находим: $\mathcal{N}_{m,m+1}(\lambda_0) = \ldots = \mathcal{N}_{mn}(\lambda_0) = 0$.

Предположим, что $\mathcal{N}_{j,m+1}(\lambda_0) = \ldots = \mathcal{N}_{jn}(\lambda_0) = 0$, $j = \overline{m-s+1,m}$, $s \geqslant 1$. Согласно (3.3.5) имеем

$$\Phi_{m-s,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0) = \mathcal{N}_{m-s,m-s+1}(\lambda_0)\Phi_{m-s+1,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0) + \ldots$$
$$\ldots + \mathcal{N}_{m-s,n}(\lambda_0)\Phi_{n,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0),$$

или

$$\Phi_{m-s,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0) - \sum_{i=1}^{s}\mathcal{N}_{m-s,m-s+i}(\lambda_0)\Phi_{m-s+i,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0) =$$
$$= \sum_{i=s+1}^{n-m+s}\mathcal{N}_{m-s,m-s+i}(\lambda_0)\Phi_{m-s+i,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0) \overset{df}{=} \psi(x). \tag{3.3.8}$$

Так как $\Phi_{m,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0) = 0$, то, в силу (3.3.7), функции $\Phi_{m-s,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0)$, $\Phi_{m,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)$ являются решениями уравнения $\ell y = \lambda_0 y$. Далее, используя (3.3.5) и предположение индукции, получаем

$$\sum_{i=1}^{s-1} \mathcal{N}_{m-s,m-s+i}(\lambda_0)\Phi_{m-s+i,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s-1} \mathcal{N}_{m-s,m-s+i}(\lambda_0) \sum_{\nu=m-s+i+1}^{m} \mathcal{N}_{m-s+i,\nu}(\lambda_0)\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0) =$$

$$= \sum_{\nu=m-s+2}^{m} \Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0) \sum_{i=1}^{\nu-m+s-1} \mathcal{N}_{m-s,m-s+i}(\lambda_0)\mathcal{N}_{m-s+i,\nu}(\lambda_0) = 0,$$

и, следовательно, функция $\sum_{i=1}^{s-1} \mathcal{N}_{m-s,m-s+i}(\lambda_0)\Phi_{m-s+i,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)$ является решением уравнения $\ell y = \lambda_0 y$. Отсюда и из (3.3.8) вытекает, что $\ell\psi(x) = \lambda_0\psi(x)$. Вновь используя (3.3.8), получаем

$$U_{\xi 0}(\psi) = U_{\xi T}(\psi) = 0, \ \xi = \overline{1,m}, \ \eta = \overline{1,n-m}.$$

Так как λ_0 не является собственным значением краевой задачи S_m, то $\psi(x) \equiv 0$. Применяя теперь к равенству (3.3.8) линейные формы $U_{m+1,0},\ldots,U_{n0}$, последовательно находим: $\mathcal{N}_{m-s,k}(\lambda_0) = 0$, $k = \overline{m+1,n}$.

Доказательство второго утверждения леммы мы проведем от противного. Так как
$\Delta_{\nu\nu}(\lambda_0) \neq 0$, $\Delta_{ss}(\lambda_0) = 0$, $s = \overline{\nu+1,m-1}$, то из (3.3.6) следует, что

$$U_{n-s+1,T}(\Phi_{s,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)) \neq 0, \quad s = \overline{\nu+2,m-1}, \quad \Phi_{\nu+1,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0) \not\equiv 0.$$

Предположим, что $\mathcal{N}_{\nu+1,m}(\lambda_0) = 0$. Тогда

$$\Phi_{\nu+1,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0) = \mathcal{N}_{\nu+1,\nu+2}(\lambda_0)\Phi_{\nu+2,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0) + \ldots$$
$$\ldots + \mathcal{N}_{\nu+1,m-1}(\lambda_0)\Phi_{m-1,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0).$$

Применяя последовательно линейные формы $U_{n-m+2,T},\ldots,U_{n-\nu-1,T}$, получаем
$\mathcal{N}_{\nu+1,m-1}(\lambda_0) = \ldots = \mathcal{N}_{\nu+1,\nu+2}(\lambda_0) = 0$, т. е. $\Phi_{\nu+1,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0) \equiv 0$. □

Обозначим $A_s(\lambda_0) = [\mathcal{N}_{j\nu}(\lambda_0)]_{j=\overline{1,n-s},\ \nu=\overline{n-s,n}}$, $s = \overline{1,n-1}$.

Лемма 3.3.2 (свойство S_2). *Справедливо соотношение*

$$\operatorname{rank} A_s(\lambda_0) \leqslant 1, \quad s = \overline{1,n-1}.$$

Доказательство проведем по индукции. Покажем, что $\operatorname{rank} A_1(\lambda_0) \leqslant 1$. В самом деле, если $\Delta_{n-2,n-2}(\lambda_0) = \Delta_{n-1,n-1}(\lambda_0) = 0$, то из (3.3.6) имеем: $U_{2,T}(\Phi_{n-1,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0)) = 0$, $U_{2,T}(\Phi_{n-1,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)) \neq 0$. Применяя линейные формы $U_{2,T}$ к равенству $\Phi_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0)=\mathcal{N}(\lambda_0)\Phi_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)$, получаем

$$\mathcal{N}_{j,n-1}(\lambda_0)U_{2,T}(\Phi_{n-1,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0))+$$
$$+\mathcal{N}_{j,n}(\lambda_0)U_{2,T}(\Phi_{n,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0))=0,\ j=\overline{1,n-1},$$

и, следовательно, $\operatorname{rank}A_1(\lambda_0)\leqslant 1$. Если же $\Delta_{n-2,n-2}(\lambda_0)\neq 0$ или $\Delta_{n-1,n-1}(\lambda_0)\neq 0$, то по лемме 3.3.1 $\mathcal{N}_{jn}(\lambda_0)=0$, $j=\overline{1,n-1}$, т. е. $\operatorname{rank}A_1(\lambda_0)\leqslant 1$.

Предположим, что соотношения $\operatorname{rank}A_k(\lambda_0)\leqslant 1$ при $k=\overline{1,s-1}$ уже доказаны. Если $\Delta_{n-s-1,n-s-1}(\lambda_0)=\Delta_{n-s,n-s}(\lambda_0)=0$, то из (3.3.6) имеем

$$U_{s+1,T}(\Phi_{n-s,\langle -1\rangle}(x,\lambda_0))=0,\ U_{s+1,T}(\Phi_{n-s,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0))\neq 0$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=n-s}^{n}\mathcal{N}_{jk}(\lambda_0)U_{s+1,T}(\Phi_{k,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0))=0,\quad j=\overline{1,n-s}. \tag{3.3.9}$$

Возьмем фиксированную ненулевую строку матрицы $A_s(\lambda_0)$:

$$[\mathcal{N}_{\nu,n-s}(\lambda_0),\ldots,\mathcal{N}_{\nu n}(\lambda_0)]\neq[0,\ldots,0].$$

Так как $\operatorname{rank}A_{s-1}(\lambda_0)\leqslant 1$, то $\mathcal{N}_{jk}(\lambda_0)=\alpha_j\mathcal{N}_{\nu k}(\lambda_0)$, $k=\overline{n-s+1,n}$. Тогда из (3.3.9) вытекает, что

$$(\mathcal{N}_{j,n-s}(\lambda_0)-\alpha_j\mathcal{N}_{\nu,n-s}(\lambda_0))U_{s+1,T}(\Phi_{n-s,\langle 0\rangle}(x,\lambda_0))=0,$$

или $\mathcal{N}_{j,n-s}(\lambda_0)=\alpha_j\mathcal{N}_{\nu,n-s}(\lambda_0)$. Следовательно, $\operatorname{rank}A_s(\lambda_0)\leqslant 1$. Если $\Delta_{n-s-1,n-s-1}(\lambda_0)\neq 0$ или $\Delta_{n-s,n-s}(\lambda_0)\neq 0$, то по лемме 3.3.1,

$$\mathcal{N}_{j,n-s+1}(\lambda_0)=\ldots=\mathcal{N}_{jn}(\lambda_0)=0,\quad j=\overline{1,n-s},$$

т. е. $\operatorname{rank}A_s(\lambda_0)\leqslant 1$. Лемма 3.3.2 доказана. □

Через $\mathbf{W}$ обозначим множество мероморфных матриц $M(\lambda)=[M_{mk}(\lambda)]_{m,k=\overline{1,n}}$, $M_{mk}(\lambda)=\delta_{mk}$ $(m\geqslant k)$, имеющих только простые полюсы Λ (множество Λ свое для каждой матрицы $M(\lambda)$) и таких, что верно (3.3.3) и при каждом $\lambda_0\in\Lambda$ матрица $M(\lambda)$ обладает свойствами S_1, S_2, где множества $\Lambda_m=\{\lambda_{lm}\}_{l\geqslant 1}$, $\lambda_{lm}\neq\lambda_{l_0,m}$ $(l\neq l_0)$ определены следующим образом: если $\lambda_0\in\Lambda$, $\mathcal{N}_{kj}(\lambda_0)\neq 0$, то $\lambda_0\in\Lambda_k\bigcap\ldots\bigcap\Lambda_{j-1}$.

Очевидно, что если $M(\lambda)\in\mathbf{W}$, то при $\lambda_0\in\Lambda$ $\mathcal{N}(\lambda_0)\mathcal{N}(\lambda_0)=0$. Если $L\in V_N'$ и $M(\lambda)$ — матрица Вейля для L, то $M(\lambda)\in\mathbf{W}$.

Лемма 3.3.3. *Дана матрица* $M(\lambda)=[M_{mk}(\lambda)]_{m,k=\overline{1,n}}$, $M_{mk}(\lambda)=\delta_{mk}$ $(m\geqslant k)$, *регулярная в проколотой окрестности точки* λ_0 *и имеющая в этой точке простой полюс. Для того чтобы матрица* $M^*(\lambda):=(M(\lambda))^{-1}$ *имела в точке* λ_0 *простой полюс, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{N}(\lambda_0)\mathcal{N}(\lambda_0)=0$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $\mathcal{N}(\lambda_0)\mathcal{N}(\lambda_0) = 0$. Обозначим через X_p множество матриц $A = [A_{\nu j}]_{\nu, j=\overline{1,n}}$, у которых $A_{\nu j} = 0$ при $j - \nu < n - p$. Ясно, что если $A \in X_p$, $B \in X_q$, то $AB \in X_{p+q-n}$. Так как $M(\lambda)M^*(\lambda) = E$, то

$$M^*(\lambda) = \sum_{k=1-n}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k M^*_{\langle k\rangle}(\lambda_0),$$

$$\sum_{j=-1}^{n-k-1} M^*_{\langle -j-k\rangle}(\lambda_0) M_{\langle j\rangle}(\lambda_0), \ k = \overline{1, n-1}.$$

Отсюда, с учетом условия $\mathcal{N}(\lambda_0)\mathcal{N}(\lambda_0) = 0$, имеем

$$M^*_{\langle -k\rangle}(\lambda_0) = -M^*_{\langle 1-k\rangle}(\lambda_0)\mathcal{N}(\lambda_0) - \\ - \Big(\sum_{j=1}^{n-k-1} M^*_{\langle -j-k\rangle}(\lambda_0) M_{\langle j\rangle}(\lambda_0)\Big)(M_{\langle 0\rangle}(\lambda_0))^{-1},$$

$$M^*_{\langle 1-k\rangle}(\lambda_0)\mathcal{N}(\lambda_0) = -\Big(\sum_{j=1}^{n-k} M^*_{\langle -j-k+1\rangle}(\lambda_0) M_{\langle j\rangle}(\lambda_0)\Big) \times \\ \times (M_{\langle 0\rangle}(\lambda_0))^{-1}\mathcal{N}(\lambda_0), \ k = \overline{2, n-1}.$$

Так как $\mathcal{N}(\lambda_0) \in X_{n-1}$, $M^*_{\langle -k\rangle}(\lambda_0) \in X_{n-k}$, то отсюда находим

$$M^*_{\langle 1-k\rangle}(\lambda_0)\mathcal{N}(\lambda_0), \ M^*_{\langle -k\rangle}(\lambda_0) \in X_{n-k-2}, \ k = \overline{2, n-1}.$$

Повторяя этот прием конечное число раз, получим: $M^*_{\langle -k\rangle}(\lambda_0) = 0$, $k = \overline{2, n-1}$. □

Следствие 3.3.1. *Если* $M(\lambda) \in \mathbf{W}$, *то матрица* $M^*(\lambda) := (M(\lambda))^{-1}$ *имеет только простые полюсы.*

Пусть $\widetilde{L} \in V'_N$, $M(\lambda) \in \mathbf{W}$. Обозначим

$$\widetilde{D}(x, \lambda, \lambda_0) = \left[-\frac{\langle \widetilde{\Phi}(x,\lambda), \widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda - \mu}\right]^{\langle 0\rangle}_{|\mu=\lambda_0},$$

$$\widetilde{D}_{\langle k\rangle}(x, z_0, \lambda_0) = [\widetilde{D}(x, \lambda, \lambda_0)]^{\langle k\rangle}_{|\lambda=z_0}, \quad k = 0, -1.$$

Лемма 3.3.4. *Имеют место равенства*

$$\widetilde{D}(x, \lambda, \lambda_0)\mathcal{N}(\lambda_0) = \frac{\langle \widetilde{\Phi}(x,\lambda), \widetilde{\Phi}^*_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda - \lambda_0}, \\ \widetilde{\mathcal{N}}(z_0)\widetilde{D}_{\langle 0\rangle}(x, z_0, \lambda_0) = \left[-\frac{\langle \widetilde{\Phi}_{\langle -1\rangle}(x,z_0), \widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{z_0 - \mu}\right]^{\langle 0\rangle}_{|\mu=\lambda_0}, \qquad (3.3.10)$$

$$\widetilde{D}_{\langle -1\rangle}(x,z_0,\lambda_0)=\widetilde{\mathcal{N}}(z_0)\widetilde{D}_{\langle 0\rangle}(x,z_0,\lambda_0)-\delta(z_0,\lambda_0)E, \tag{3.3.11}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathcal{N}}(z_0)\widetilde{D}_{\langle 0\rangle}(x,z_0,\lambda_0)\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda_0)=\frac{\langle\widetilde{\Phi}_{\langle -1\rangle}(x,z_0),\widetilde{\Phi}^*_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{z_0-\lambda_0},\quad (z_0\neq\lambda_0),\\ \widetilde{\mathcal{N}}(z_0)\widetilde{D}_{\langle 0\rangle}(x,z_0,\lambda_0)\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda_0)=\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda_0)-\langle\widetilde{\Phi}_{\langle -1\rangle}(x,z_0),\widetilde{\Phi}^*_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}\quad (z_0=\lambda_0),\end{gathered} \tag{3.3.12}$$

где $\delta(z_0,\lambda_0)=0$ $(z_0\neq\lambda_0)$, $\delta(z_0,\lambda_0)=1$ $(z_0=\lambda_0)$.

Доказательство. В силу (3.1.27) и леммы 3.1.1

$$\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}^*(x,\lambda)\rangle_{\widetilde{\ell}}=\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{M}^*(\lambda)=E,$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=-1}^{s}\langle\widetilde{\Phi}_{\langle k\rangle}(x,\lambda_0),\widetilde{\Phi}^*_{\langle s-k\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}=\delta_{s0}E,\quad s=0,1. \tag{3.3.13}$$

Так как

$$\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_0)=-\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}^*_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\lambda_0}-\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}^*_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{(\lambda-\lambda_0)^2}, \tag{3.3.14}$$

то, с учетом (3.3.13), получим

$$\begin{gathered}\widetilde{D}_{\langle -1\rangle}(x,z_0,\lambda_0)=-\frac{\langle\widetilde{\Phi}_{\langle -1\rangle}(x,z_0),\widetilde{\Phi}^*_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{z_0-\lambda_0}-\\ -\frac{\langle\widetilde{\Phi}_{\langle -1\rangle}(x,z_0),\widetilde{\Phi}^*_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{(z_0-\lambda_0)^2},\\ \widetilde{D}_{\langle 0\rangle}(x,z_0,\lambda_0)=-\frac{\langle\widetilde{\Phi}_{\langle 0\rangle}(x,z_0),\widetilde{\Phi}^*_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{z_0-\lambda_0}+\\ +\frac{\langle\widetilde{\Phi}_{\langle -1\rangle}(x,z_0),\widetilde{\Phi}^*_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{(z_0-\lambda_0)^2}-\frac{\langle\widetilde{\Phi}_{\langle 0\rangle}(x,z_0),\widetilde{\Phi}^*_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{(z_0-\lambda_0)^2}+\\ +2\frac{\langle\widetilde{\Phi}_{\langle -1\rangle}(x,z_0),\widetilde{\Phi}^*_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{(z_0-\lambda_0)^3},\ z_0\neq\lambda_0,\\ \widetilde{D}_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0,\lambda_0)=-E+\langle\widetilde{\Phi}_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0),\widetilde{\Phi}^*_{\langle 1\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}},\\ \widetilde{D}_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0,\lambda_0)=\langle\widetilde{\Phi}_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0),\widetilde{\Phi}^*_{\langle 1\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}+\\ +\langle\widetilde{\Phi}_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0),\widetilde{\Phi}^*_{\langle 2\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}},\end{gathered} \tag{3.3.15}$$

и, следовательно,

$$\widetilde{D}_{\langle 0\rangle}(x,z_0,\lambda_0)=\left[-\frac{\langle\widetilde{\Phi}_{\langle 0\rangle}(x,z_0),\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{z_0-\mu}+\frac{\langle\widetilde{\Phi}_{\langle -1\rangle}(x,z_0),\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{(z_0-\mu)^2}\right]^{\langle 0\rangle}_{|\mu=\lambda_0}. \tag{3.3.16}$$

Согласно (3.3.5) имеем: $\widetilde{\Phi}^*_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0)\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda_0)=\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda_0)\widetilde{\Phi}_{\langle -1\rangle}(x,\lambda_0)=0$. Отсюда и из (3.3.14)–(3.3.16) вытекает утверждение леммы 3.3.4. ☐

Из леммы 3.3.4, с учетом равенств

$$\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\rangle_{|x=0}=\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{M}^*(\mu),$$
$$\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\rangle_{|x=T}=\widetilde{U}_T(\widetilde{\Phi}(x,\lambda))\widetilde{U}^*_T(\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)),$$

получаем следствие.

Следствие 3.3.2. *Справедливы соотношения*

$$\widetilde{D}_{k\nu}(0,\lambda,\lambda_0)=-\frac{\delta_{k\nu}}{\lambda-\lambda_0},\quad k\geqslant\nu;$$
$$\widetilde{D}_{k\nu}(0,\lambda,\lambda_0)=\mathcal{F}_{k\nu}(\widetilde{M}_{j,j+s},\ s=\overline{1,\nu-k},j=\overline{1,n-1}),\quad k<\nu;$$
$$\widetilde{D}_{k\nu}(T,\lambda,\lambda_0)=(\widetilde{D}(T,\lambda,\lambda_0)\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda_0))_{k\nu}=(\widetilde{\mathcal{N}}(z_0)\widetilde{D}_{\langle 0\rangle}(T,z_0,\lambda_0))_{k\nu}=0,\quad k<\nu;$$
$$(\widetilde{\mathcal{N}}(z_0)\widetilde{D}_{\langle 0\rangle}(T,z_0,\lambda_0)\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda_0))_{k\nu}=\delta(z_0,\lambda_0)\widetilde{\mathcal{N}}_{k\nu}(z_0),\quad k<\nu,$$

где $\mathcal{F}_{k\nu}$ — некоторая функция.

Обозначим

$$Y=[\delta_{j,k-1}]_{j=\overline{1,n-1},\ k=\overline{1,n}},$$
$$\mathcal{N}_0(\lambda_0)=\mathcal{N}(\lambda_0),\ \mathcal{N}_1(\lambda_0)=\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda_0),$$
$$\widetilde{P}_\varepsilon(x,\lambda,\lambda_0)=\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_0)\mathcal{N}_\varepsilon(\lambda_0)Y^T,$$
$$\widetilde{G}_\varepsilon(x,z_0,\lambda_0)=Y\widetilde{D}_{\langle 0\rangle}(x,z_0,\lambda_0)\mathcal{N}_\varepsilon(\lambda_0)Y^T,$$
$$\widetilde{g}^*_\varepsilon(x,\lambda_0)=-\widetilde{\Phi}^*_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)\mathcal{N}_\varepsilon(\lambda_0)Y^T,\ \varepsilon=0,1,$$
$$\widetilde{P}(x,\lambda,\lambda_0)=\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_0)\widehat{\mathcal{N}}(\lambda_0)Y^T,$$
$$\widetilde{G}(x,z_0,\lambda_0)=Y\widetilde{D}_{\langle 0\rangle}(x,z_0,\lambda_0)\widehat{\mathcal{N}}(\lambda_0)Y^T,$$
$$\widetilde{g}^*(x,\lambda_0)=-\widetilde{\Phi}^*_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)\widehat{\mathcal{N}}(\lambda_0)Y^T,$$
$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda_0)=Y\widetilde{\Phi}_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0),\ \widetilde{\Lambda}(\lambda_0)=\lambda_0E+Y\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda_0)Y^T,$$
$$\Lambda(\lambda_0)=\lambda_0E+Y\mathcal{N}(\lambda_0)Y^T.$$

Лемма 3.3.5. *Имеют место равенства*

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\varphi}(x,\lambda_0)=\widetilde{\Lambda}(\lambda_0)\widetilde{\varphi}(x,\lambda_0), \tag{3.3.17}$$

$$\widetilde{P}'_\varepsilon(x,\lambda,\lambda_0)=\widetilde{\Phi}(x,\lambda)\widetilde{g}^*_\varepsilon(x,\lambda_0),$$
$$\widetilde{G}'_\varepsilon(x,z_0,\lambda_0)=\widetilde{\varphi}(x,z_0)\widetilde{g}^*_\varepsilon(x,\lambda_0),\quad \varepsilon=0,1, \tag{3.3.18}$$

$$\widetilde{P}(x,\lambda,\lambda_0)\,(\lambda E-\Lambda(\lambda_0))=\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^*(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}, \tag{3.3.19}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Lambda}(z_0)\widetilde{G}(x,z_0,\lambda_0)-\widetilde{G}(x,z_0,\lambda_0)\Lambda(\lambda_0)-\\&\qquad-\delta(z_0,\lambda_0)Y\widehat{\mathcal{N}}(\lambda_0)Y^T=\langle\widetilde{\varphi}(x,z_0),\ \widetilde{g}^*(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}.\end{aligned}\tag{3.3.20}$$

Если $\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda_0)\mathcal{N}(\lambda_0)=0,$ *то*

$$\widetilde{P}_\varepsilon(x,\lambda,\lambda_0)\,(\lambda E-\Lambda(\lambda_0))=\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\ \widetilde{g}_\varepsilon^*(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}},\quad\varepsilon=0,1,\tag{3.3.21}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Lambda}(z_0)\widetilde{G}_\varepsilon(x,z_0,\lambda_0)-\widetilde{G}_\varepsilon(x,z_0,\lambda_0)\Lambda(\lambda_0)-\delta(z_0,\lambda_0)Y\mathcal{N}_\varepsilon(\lambda_0)Y^T=\\&\qquad=\langle\widetilde{\varphi}(x,z_0),\widetilde{g}_\varepsilon^*(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}},\quad\varepsilon=0,1.\end{aligned}\tag{3.3.22}$$

Доказательство. В силу (3.3.5), (3.3.7)

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\Phi}_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)=(\lambda_0E+\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda_0))\widetilde{\Phi}_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0),$$

откуда следует (3.3.17). Учитывая (3.1.27), вычисляем

$$\widetilde{D}'(x,\lambda,\lambda_0)=-\widetilde{\Phi}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}^*_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0),$$

и, следовательно, верно (3.3.18). Далее, из (3.3.10), (3.3.14) имеем

$$(\lambda-\lambda_0)\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_0)+\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_0)\widetilde{\mathcal{N}}(\lambda_0)=-\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}^*_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}.$$

Умножая это равенство на $\mathcal{N}_\varepsilon(\lambda_0)Y^T$, получаем

$$\begin{aligned}&\widetilde{P}_\varepsilon(x,\lambda,\lambda_0)\,(\lambda E-\Lambda(\lambda_0))+\widetilde{P}_1(x,\lambda,\lambda_0)Y\mathcal{N}_\varepsilon(\lambda_0)Y^T=\\&\qquad=\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}_\varepsilon^*(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}},\quad\varepsilon=0,1,\end{aligned}\tag{3.3.23}$$

откуда следует (3.3.19), (3.3.21). Из (3.3.11) вытекает, что

$$Y[\widetilde{P}_\varepsilon(x,\lambda,\lambda_0)]^{\langle -1\rangle}_{|\lambda=z_0}=Y\widetilde{\mathcal{N}}(z_0)[\widetilde{P}_\varepsilon(x,\lambda,\lambda_0)]^{\langle 0\rangle}_{|\lambda=z_0}-\delta(z_0,\lambda_0)Y\mathcal{N}_\varepsilon(\lambda_0)Y^T.$$

Используя (3.3.23), находим

$$\begin{aligned}&\widetilde{G}_\varepsilon(x,z_0,\lambda_0)\,(z_0E-\Lambda(\lambda_0))+Y[\widetilde{P}_\varepsilon(x,\lambda,\lambda_0)]^{\langle -1\rangle}_{|\lambda=\lambda_0}+\\&\qquad+\widetilde{G}_1(x,z_0,\lambda_0)Y\mathcal{N}(\lambda_0)Y^T=\langle\widetilde{\varphi}(x,z_0),\widetilde{g}_\varepsilon^*(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}.\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом равенства

$$Y\widetilde{\mathcal{N}}(z_0)[\widetilde{P}_\varepsilon(x,\lambda,\lambda_0)]^{\langle 0\rangle}_{|\lambda=z_0}=Y\widetilde{\mathcal{N}}(z_0)Y^T\widetilde{G}_\varepsilon(x,z_0,\lambda_0),$$

имеем

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Lambda}(z_0)\widetilde{G}(x,z_0,\lambda_0)-\widetilde{G}_\varepsilon(x,z_0,\lambda_0)\Lambda(\lambda_0)+\widetilde{G}_1(x,z_0,\lambda_0)Y\mathcal{N}(\lambda_0)Y^T-\\&\qquad-\delta(z_0,\lambda_0)Y\mathcal{N}_\varepsilon(\lambda_0)Y^T=\langle\widetilde{\varphi}(x,z_0),\widetilde{g}_\varepsilon^*(x,\lambda_0)\rangle_{\widetilde{\ell}}.\end{aligned}$$

Из этого равенства вытекают соотношения(3.3.20), (3.3.22). Лемма 3.3.5 доказана. □

3.3.2. Основное уравнение обратной задачи.

Рассмотрим $L,\ \widetilde{L} \in V'_N$. Обозначим

$$\xi_l = \sum_{m=1}^{n-1} \Big(|\lambda_{lm} - \widetilde{\lambda}_{lm}| + \sum_{k=m+1}^{n} |\mathcal{N}_{mk}(\lambda_{lm}) - \widetilde{\mathcal{N}}_{mk}(\widetilde{\lambda}_{lm})| l \Big) \, l^{1-n}$$

и везде в дальнейшем считаем, что числа λ_{lm} и $\widetilde{\lambda}_{lm}$ занумерованы так, что $\lambda_{lm} \neq \lambda_{l_0 m_0}$, $\widetilde{\lambda}_{lm} \neq \widetilde{\lambda}_{l_0 m_0}$, $\lambda_{lm} \neq \widetilde{\lambda}_{l_0 m_0}$ при $l \neq l_0$, $|m - m_0| = 1$. Очевидно, такая нумерация возможна, и она означает, что «склеенные» полюсы имеют одинаковые номера l.

Лемма 3.3.6. *Справедливы соотношения*

$$\widetilde{\Phi}(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) + \sum_{\lambda_0 \in I} \widetilde{P}(x, \lambda, \lambda_0) \varphi(x, \lambda_0), \tag{3.3.24}$$

$$\widetilde{\varphi}(x, z_0) = \varphi(x, z_0) + \sum_{\lambda_0 \in I} \widetilde{G}(x, z_0, \lambda_0) \varphi(x, z_0), \quad z_0 \in I, \tag{3.3.25}$$

$$\widetilde{G}(x, z_0, \varkappa_0) - G(x, z_0, \varkappa_0) = \sum_{\lambda_0 \in I} \widetilde{G}(x, z_0, \lambda_0) G(x, \lambda_0, \varkappa_0), \qquad z_0,\ \varkappa_0 \in I, \tag{3.3.26}$$

где $I = \Lambda \cup \widetilde{\Lambda}$, $\varphi(x, \lambda_0) = Y \Phi_{\langle 0 \rangle}(x, \lambda_0)$, $G(x, z_0, \lambda_0) = Y D_{\langle 0 \rangle}(x, z_0, \lambda_0) \times \times \widehat{\mathcal{N}}(\lambda_0) Y^T$, *причем ряды сходятся «со скобками»*:

$$\sum_{\lambda_0 \in I} = \lim_{k \to \infty} \sum_{\lambda_0 \in I_k}, \quad I_k = I \cap \{\lambda : |\lambda| \leqslant R_k\},$$

окружности $|\lambda| = R_k$ *отстоят на положительное расстояние от множества* I.

Доказательство. Используя (3.3.5), (3.3.10), вычисляем

$$\operatorname*{Res}_{\mu = \lambda_0} \left[-\frac{\langle \widetilde{\Phi}(x, \lambda), \widetilde{\Phi}^*(x, \mu) \rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda - \mu} \Phi(x, \mu) \right] = \widetilde{D}(x, \lambda, \lambda_0) \Phi_{\langle -1 \rangle}(x, \lambda_0) -$$
$$- \frac{\langle \widetilde{\Phi}(x, \lambda), \widetilde{\Phi}^*_{\langle -1 \rangle}(x, \lambda_0) \rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda - \lambda_0} \Phi_{\langle 0 \rangle}(x, \lambda_0) = \widetilde{D}(x, \lambda, \lambda_0) \widehat{\mathcal{N}}(\lambda_0) \Phi_{\langle 0 \rangle}(x, \lambda_0) =$$
$$= \widetilde{D}(x, \lambda, \lambda_0) \widehat{\mathcal{N}}(\lambda_0) Y^T \varphi(x, \lambda_0),$$

$$\operatorname*{Res}_{\xi = \lambda_0} \left[\frac{\langle \widetilde{\Phi}(x, \lambda), \widetilde{\Phi}^*(x, \xi) \rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda - \xi} \cdot \frac{\langle \Phi(x, \xi), \Phi^*(x, \mu) \rangle_{\ell}}{\xi - \mu} \right] =$$
$$= \widetilde{D}(x, \lambda, \lambda_0) \widetilde{\mathcal{N}}(\lambda_0) \left[\frac{\langle \Phi_{\langle 0 \rangle}(x, \lambda_0), \Phi^*(x, \mu) \rangle_{\ell}}{\lambda_0 - \mu} - \frac{\langle \Phi_{\langle -1 \rangle}(x, \lambda_0), \Phi^*(x, \mu) \rangle_{\ell}}{(\lambda_0 - \mu)^2} \right] -$$
$$- \widetilde{D}(x, \lambda, \lambda_0) \frac{\langle \Phi_{\langle -1 \rangle}(x, \lambda_0)(x, \lambda_0), \Phi^*(x, \mu) \rangle_{\ell}}{\lambda_0 - \mu}.$$

Следовательно, учитывая (3.3.10), (3.3.16), имеем

$$\operatorname*{Res}_{\mu=\lambda_0}\left[-\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\Phi(x,\mu)\right]=\widetilde{P}(x,\lambda,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0), \qquad (3.3.27)$$

$$\left[\operatorname*{Res}_{\xi=\lambda_0}\left(\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}^*(x,\xi)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\xi}\cdot\frac{\langle\Phi(x,\xi),\Phi^*(x,\mu)\rangle_{\ell}}{\xi-\mu}\right)\right]^{\langle 0\rangle}_{|\mu=\varkappa_0}=$$

$$=\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_0)\widehat{\mathcal{N}}(\lambda_0)D_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0,\varkappa_0). \qquad (3.3.28)$$

Рассмотрим в λ-плоскости контур $\gamma=\gamma^+\cup\gamma^-$, $\gamma^\pm=\{\lambda:\pm\mathrm{Im}\,\lambda=C_0,\ -\infty<\mp\mathrm{R}e\,\lambda<\infty\}$, выбранный так, чтобы $I\subset\{\lambda:|\mathrm{Im}\,\lambda|<C_0\}$. Положим $J_\gamma=\mathbf{C}\setminus\mathrm{int}\,\gamma$. Тогда верны соотношения (3.2.3), (3.2.4) (доказательство точно такое же, как и для случая полуоси). Используя (3.3.27), (3.3.28) и теорему о вычетах [206, с. 239], получаем соотношения (3.3.24), (3.3.26). Равенство (3.3.25) непосредственно вытекает из (3.3.24). Лемма 3.3.6 доказана. □

Замечание 3.3.1. При каждом фиксированном $x\in[0,T]$ соотношение (3.3.25) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\varphi(x,z_0)$, $z_0\in I$. Но ряд в (3.3.25) сходится только «со скобками». Поэтому (3.3.25) неудобно использовать в качестве основного уравнения обратной задачи. Ниже мы преобразуем (3.3.25) к линейному уравнению в соответствующем банаховом пространстве (см.(3.3.41)).

Обозначим

$$Y_k=\mathrm{diag}[\delta_{\nu k}]_{\nu=\overline{1,n-1}},\quad \lambda_{l0k}=\lambda_{lk},\quad \lambda_{l1k}=\widetilde{\lambda}_{lk},$$

$$\widetilde{\Lambda}_{l\varepsilon}=\sum_{k=1}^{n-1}Y_k\widetilde{\Lambda}(\lambda_{l\varepsilon k}),\quad \widetilde{\varphi}_{l\varepsilon}(x)=\sum_{k=1}^{n-1}Y_k\widetilde{\varphi}(x,\lambda_{l\varepsilon k}),$$

$$\widetilde{g}^*_{l\varepsilon}(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\widetilde{g}^*_\varepsilon(x,\lambda_{l\varepsilon k})Y_k,\quad \widetilde{P}^*_{l\varepsilon}(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n-1}\widetilde{P}^*_\varepsilon(x,\lambda,\lambda_{l\varepsilon k})Y_k,$$

$$\widetilde{G}_{(l_0\varepsilon_0),(l\varepsilon)}(x)=\sum_{k,k_0=1}^{n-1}Y_{k_0}\widetilde{G}_\varepsilon(x,\lambda_{l_0,\varepsilon_0,k_0},\lambda_{l\varepsilon k})Y_k,\quad \varepsilon,\varepsilon_0=0,1.$$

Аналогично определяются $\Lambda_{l\varepsilon}$, $\varphi_{l\varepsilon}(x)$, $G_{(l_0\varepsilon_0),(l\varepsilon)}(x)$. Рассмотрим V' — упорядоченное множество индексов $v=(l,\varepsilon)$, $l\geqslant 1$, $\varepsilon=0,1$ (ε меняется быстрее); V — упорядоченное множество индексов $j=(v,k)=(l,\varepsilon,k)$, $v\in V'$, $k=\overline{1,n-1}$ (k меняется быстрее). Введем матрицы

$$\widetilde{\varphi}(x)=[\widetilde{\varphi}_v(x)]^T_{v\in V'}=[\widetilde{\varphi}_j(x)]^T_{j\in V},\ \widetilde{g}^*(x)=[\widetilde{g}^*_v(x)]_{v\in V'}=[\widetilde{g}^*_j(x)]_{j\in V},$$

$$\widetilde{G}(x)=[\widetilde{G}_{v_0,v}(x)]_{v_0,v\in V'}=[\widetilde{G}_{j_0,j}(x)]_{j_0,j\in V},$$

$$v_0=(l_0,\varepsilon_0),\ j_0=(v_0,k_0)=(l_0,\varepsilon_0,k_0),$$

$$\widetilde{\Lambda} = \operatorname{diag}[\widetilde{\Lambda}_v]_{v\in V'},\ J = \operatorname{diag}[(-1)^{\varepsilon}E]_{v\in V'},\ J_1 = [\delta_{l_0,l}\theta_{v_0,v}]_{v_0,v\in V'},$$
$$\theta_{vv} = E,\ \theta_{(l,0),(l,1)} = -E,\ \theta_{(l,1),(l,0)} = 0,\ E = [\delta_{\mu k}]_{\mu,k=\overline{1,n-1}}.$$

Аналогично определяются матрицы φ, G, Λ. Обозначим

$$w^*_{lk}(x) = l^{k-n+1}\exp(-xl\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}),\quad w_{l0k}(x) = \xi_l w^*_{lk}(x),$$
$$w_{l1k}(x) = w^*_{lk}(x),\quad w(x) = \operatorname{diag}[w_j(x)]_{j\in V}.$$

Покажем, что имеет место оценка

$$|\widetilde{\varphi}^{(\nu)}_j(x)| < Cl^{\nu}w^*_{lk}(x),\quad j\in V.$$

В самом деле, по построению $\widetilde{\varphi}_j(x) = \widetilde{\varphi}_{l\varepsilon k}(x) = \widetilde{\Phi}_{k+1,\langle 0\rangle}(x,\lambda_{l\varepsilon k})$. Из асимптотической формулы (3.1.14) следует, что при достаточно больших l $(l > l^+)$ $\widetilde{\Delta}_{k+1}(\lambda_{l\varepsilon k}) \neq 0$ и, следовательно, $\widetilde{\varphi}_j(x) = \widetilde{\Phi}_{k+1}(x,\lambda_{l\varepsilon k})$. В силу (3.1.20) справедлива оценка

$$|\widetilde{\Phi}^{(\nu)}_{k+1}(x,\lambda)| < C|\rho|^{\nu-n+k+1}|\exp(\rho R_{k+1}x)|,\quad \rho\in S,\quad \lambda\in G_{\delta,k+1}.$$

Тогда, используя (3.1.14), находим: $|\widetilde{\Phi}^{(\nu)}_{k+1}(x,\lambda_{l\varepsilon k})| < Cl^{\nu}w^*_{lk}(x),\quad l > l^+$. Отсюда и вытекает искомая оценка для $|\widetilde{\varphi}^{(\nu)}_j(x)|$. Используя лемму Шварца [206, с. 363], получаем

$$|\widetilde{\varphi}^{(\nu)}_{l0k}(x) - \widetilde{\varphi}^{(\nu)}_{l1k}(x)| < C\xi_l l^{\nu}w^*_{lk}(x).$$

Аналогично

$$|\widetilde{g}^{*(\nu)}_j(x)| < Cl^{\nu}(w^*_{lk}(x))^{-1},\quad |\widetilde{g}^{*(\nu)}_{l0k}(x) - \widetilde{g}^{*(\nu)}_{l1k}(x)| < C\xi_l l^{\nu}(w^*_{lk}(x))^{-1},$$
$$|\widetilde{G}_{j_0,j}(x)| < \frac{C}{|l-l_0|+1}\cdot\frac{w^*_{l_0,k_0}(x)}{w^*_{lk}(x)},\quad |\widetilde{G}^{(\nu+1)}_{j_0,j}(x)| < C(l+l_0)^{\nu}\cdot\frac{w^*_{l_0,k_0}(x)}{w^*_{lk}(x)},$$
$$|\widetilde{G}_{j_0,(l0k)}(x) - \widetilde{G}_{j_0,(l1k)}(x)| < \frac{C\xi_l}{|l-l_0|+1}\cdot\frac{w^*_{l_0,k_0}(x)}{w_{lk}(x)},$$
$$|\widetilde{G}_{(l_0,0,k_0),j}(x) - \widetilde{G}_{(l_0,1,k_0),j}(x)| < \frac{C\xi_{l_0}}{|l-l_0|+1}\cdot\frac{w^*_{l_0,k_0}(x)}{w_{lk}(x)}.$$

Те же оценки верны и для $\varphi(x)$, $G(x)$.

С учетом введенных обозначений соотношения (3.3.24)–(3.3.26) принимают вид

$$\widetilde{\Phi}(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda) + \sum_{l=1}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{l0}(x,\lambda)\varphi_{l0}(x) - \widetilde{P}_{l1}(x,\lambda)\varphi_{l1}(x)\Big), \tag{3.3.29}$$

$$\widetilde{\varphi}_{l_0,\varepsilon_0}(x) = \varphi_{l_0,\varepsilon_0}(x) + \sum_{l=1}^{\infty}\Big(\widetilde{G}_{(l_0,\varepsilon_0),(l,0)}(x)\varphi_{l0}(x) - \widetilde{G}_{(l_0,\varepsilon_0),(l,1)}(x)\varphi_{l1}(x)\Big),$$

$$\widetilde{G}_{(l_0,\varepsilon_0),(l_1,\varepsilon_1)}(x) - G_{(l_0,\varepsilon_0),(l_1,\varepsilon_1)}(x) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty}\Big(\widetilde{G}_{(l_0,\varepsilon_0),(l,0)}(x)G_{(l,0),(l_1,\varepsilon_1)}(x) - \widetilde{G}_{(l_0,\varepsilon_0),(l,1)}(x)G_{(l,1),(l_1,\varepsilon_1)}(x)\Big),$$

или

$$\widetilde{\varphi}(x) = (E + \widetilde{G}(x)J)\varphi(x), \qquad (3.3.30)$$

$$(E + \widetilde{G}(x)J)(E - G(x)J) = E, \qquad (3.3.31)$$

причем, как и ранее, ряды в (3.3.30), (3.3.31) сходятся «со скобками». Далее, согласно лемме 3.3.5, имеем

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\Lambda}\widetilde{\varphi}(x), \qquad (3.3.32)$$

$$\widetilde{P}'_{l\varepsilon}(x,\lambda) = \widetilde{\Phi}(x,\lambda)\widetilde{g}^*_{l\varepsilon}(x), \quad \widetilde{G}'(x) = \widetilde{\varphi}(x)\widetilde{g}^*(x), \qquad (3.3.33)$$

$$\sum_{\varepsilon=0}^{1}(-1)^{\varepsilon}\Big(\widetilde{P}_{l\varepsilon}(x,\lambda)\,(\lambda E - \Lambda_{l\varepsilon}) - \langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda), \widetilde{g}^*_{l\varepsilon}(x)\rangle_{\widetilde{\ell}}\Big)\varphi_{l\varepsilon}(x) = 0, \qquad (3.3.34)$$

$$\Big(\widetilde{\Lambda}(E + \widetilde{G}(x)J) - (E + \widetilde{G}(x)J)\Lambda\Big)\varphi(x) = \langle\widetilde{\varphi}(x), \widetilde{g}^*(x)\rangle_{\widetilde{\ell}}\, J\varphi(x). \qquad (3.3.35)$$

Пусть

$$\sum_{l=1}^{\infty}\xi_l l^{n-1} < \infty.$$

Обозначим

$$\varkappa_{\nu s}(x) = \widetilde{g}^{*(\nu)}(x)J\varphi^{(s)}(x) = \sum_{l=1}^{\infty}\Big(\widetilde{g}^{*(\nu)}_{l0}(x)\varphi^{(s)}_{l0}(x) - \widetilde{g}^{*(\nu)}_{l1}(x)\varphi^{(s)}_{l1}(x)\Big),$$

$$\nu + s \leqslant n - 1. \qquad (3.3.36)$$

Функции $t_{j\nu}(x)$, $\xi_\nu(x)$, $\varepsilon_\nu(x)$ определим по формулам (3.2.20)–(3.2.22).

Лемма 3.3.7. *Справедливы соотношения*

$$p_\nu(x) = \widetilde{p}_\nu(x) + \varepsilon_\nu(x), \quad \widetilde{u}_{\xi\nu a} = \sum_{j=0}^{n-1}u_{\xi ja}t_{j\nu}(a), \quad a = 0, T. \qquad (3.3.37)$$

Доказательство. Дифференцируя соотношения (3.3.29) по x и учитывая (3.3.33), (3.3.36), (3.2.20), вычисляем

$$\sum_{\nu=0}^{n}t_{j\nu}(x)\widetilde{\Phi}^{(\nu)}(x,\lambda) = \Phi^{(j)}(x,\lambda) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{l0}(x,\lambda)\varphi^{(j)}_{l0}(x) - \widetilde{P}_{l1}(x,\lambda)\varphi^{(j)}_{l1}(x)\Big). \qquad (3.3.38)$$

Далее, с учетом (3.3.29), (3.3.32), (3.3.34), имеем

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\ell\Phi(x,\lambda)+\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{l0}(x,\lambda)\ell\varphi_{l0}(x)-\widetilde{P}_{l1}(x,\lambda)\ell\varphi_{l1}(x)\Big)+\\ +\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^{*}(x)\rangle_{\widetilde{\ell}}\,J\varphi(x).\qquad(3.3.39)$$

Из (3.3.39), с учетом (3.3.38), (3.1.22), как и при доказательстве леммы 3.2.3, получаем: $p_{\nu}(x)=\widetilde{p}_{\nu}(x)+\varepsilon_{\nu}(x)$, $\nu=\overline{0,n-2}$.

Обозначим

$$\widetilde{\widetilde{U}}_{\xi a}(y)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\Big(\sum_{j=0}^{n-1}u_{\xi ja}t_{j\nu}(a)\Big)y^{(\nu)}(a).$$

Из (3.3.38) следует, что

$$\widetilde{\widetilde{U}}_{\xi a}(\widetilde{\Phi}(x,\lambda))=U_{\xi a}(\Phi(x,\lambda))+\\ +\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{l0}(a,\lambda)U_{\xi a}(\varphi_{l0}(x))-\widetilde{P}_{l1}(a,\lambda)U_{\xi a}(\varphi_{l1}(x))\Big),$$

или, в координатах:

$$\widetilde{\widetilde{U}}_{\xi a}(\widetilde{\Phi}_{k}(x,\lambda))=U_{\xi a}(\Phi_{k}(x,\lambda))+\\ +\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{n}\bigg(\Big(\sum_{j=1}^{\nu-1}\widetilde{D}_{kj}(a,\lambda,\lambda_{l,\nu-1})\mathcal{N}_{j\nu}(\lambda_{l,\nu-1})\Big)\cdot\\ U_{\xi a}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\lambda_{l,\nu-1}))-\\ -\Big(\sum_{j=1}^{\nu-1}\widetilde{D}_{kj}(a,\lambda,\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1})\widetilde{\mathcal{N}}_{j\nu}(\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1})\Big)U_{\xi a}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1}))\bigg).$$

При $a=0$, используя следствие 3.3.2, получаем: $\widetilde{\widetilde{U}}_{\xi 0}(\widetilde{\Phi}_{k})=\delta_{\xi k}$, $\xi\leqslant k$, и, следовательно, $\widetilde{\widetilde{U}}_{\xi 0}=\widetilde{U}_{\xi 0}$. Аналогично доказывается, что $\widetilde{\widetilde{U}}_{\xi T}=\widetilde{U}_{\xi T}$. Лемма 3.3.7 доказана. ☐

Обозначим

$$\widetilde{\psi}(x)=w^{-1}(x)J_{1}\widetilde{\varphi}(x),\quad \widetilde{H}(x)=w^{-1}(x)J_{1}\widetilde{G}(x)JJ_{1}^{-1}w(x),\\ \psi(x)=w^{-1}(x)J_{1}\varphi(x),\quad H(x)=w^{-1}(x)J_{1}G(x)JJ_{1}^{-1}w(x).$$

Очевидно, что имеют место оценки

$$\begin{gathered}|\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}(x)| < Cl^\nu, \quad |\widetilde{H}_{j_0,j}(x)| < \frac{C\xi_l}{|l-l_0|+1},\\ |\widetilde{H}_{j_0,j}^{(\nu+1)}(x)| < C(l+l_0)^\nu \xi_l, \;\; j,\, j_0 \in V.\end{gathered} \tag{3.3.40}$$

Аналогичные оценки верны для $\psi(x)$, $H(x)$.

Тогда соотношения (3.3.30), (3.3.31) принимают вид

$$\widetilde{\psi}(x) = (E + \widetilde{H}(x))\psi(x), \tag{3.3.41}$$

$$(E + \widetilde{H}(x))(E - H(x)) = E, \tag{3.3.42}$$

причем ряды в (3.3.41), (3.3.42) сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,T]$. Уравнение (3.3.41) называется *основным уравнением* обратной задачи. Меняя местами L и $\widetilde{L}$, получаем аналогично

$$\psi(x) = (E - H(x))\widetilde{\psi}(x), \quad (E - H(x)(E + \widetilde{H}(x)) = E. \tag{3.3.43}$$

Рассмотрим банахово пространство m ограниченных последовательностей $\alpha = [\alpha_j]_{j\in V}$ с нормой $\|\alpha\|_m = \sup\limits_j |\alpha_j|$. Из (3.3.40), (3.3.42), (3.3.43) следует, что при каждом фиксированном $x \in [0,T]$ оператор $E + \widetilde{H}(x)$, действующий из m в m, является линейным ограниченным оператором,

$$\|\widetilde{H}(x)\|_{m\to m} = \sup_{j_0} \sum_j |\widetilde{H}_{j_0,j}(x)| < C \sum_l \xi_l, \tag{3.3.44}$$

причем оператор $E + \widetilde{H}(x)$ имеет ограниченный обратный.

3.3.3. Необходимые и достаточные условия. В этом пункте устанавливаются необходимые и достаточные условия разрешимости рассматриваемой обратной задачи.

Теорема 3.3.1.*Для того чтобы матрица $M(\lambda) \in \mathbf{W}$ была матрицей Вейля для $L \in V_N'$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) (*асимптотика*) *существует пара $\widetilde{L} \in V_N'$ такая, что*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \xi_l l^{n-1} < \infty;$$

2) (*условие P*) *при каждом фиксированном $x \in [0,T]$ линейный ограниченный оператор $E + \widetilde{H}(x)$, действующий из m в m, имеет ограниченный обратный*;

3) $\varepsilon_\nu(x) \in W_{\nu+N}$, $\nu = \overline{0, n-2}$, *где функции $\varepsilon_\nu(x)$ определяются по формулам* (3.3.36), (3.2.20)–(3.2.22), $\varphi(x) = J_1^{-1}w(x)(E + \widetilde{H}(x))^{-1}\widetilde{\psi}(x)$.

При выполнении этих условий дифференциальное уравнение и линейные формы $L = (\ell, U)$ строятся по формулам (3.3.37).

Необходимость условий теоремы 3.3.1 доказана выше в п. 3.3.1–3.3.3. Докажем их достаточность. Пусть $\psi(x) = [\psi_j(x)]_{j\in V}^T$ — решение уравнения (3.3.41). Нетрудно убедиться, что функции $\psi_j^{(\nu)}(x)$, $\nu = \overline{0, n-1}$, абсолютно непрерывны при $x \in [0, T]$ и $|\psi_j^{(\nu)}(x)| < Cl^\nu$. Определим функции $\varphi(x) = [\varphi_j(x)]_{j\in V}^T = [\varphi_v(x)]_{v\in V'}^T$ по формуле $\varphi(x) = J_1^{-1}w(x)\psi(x)$.Тогда

$$\widetilde{\varphi}(x) = (E + \widetilde{G}(x)J)\varphi(x), \tag{3.3.45}$$

причем $|\varphi_j^{(\nu)}(x)| < Cl^\nu w_{lk}^*(x)$, $|\varphi_{l0k}^{(\nu)}(x) - \varphi_{l1k}^{(\nu)}(x)| < C\xi_l l^\nu w_{lk}^*(x)$. Построим функции $\Phi(x,\lambda) = [\Phi_k(x,\lambda)]_{k=\overline{1,n}}^T$ по формуле

$$\Phi(x,\lambda) = \widetilde{\Phi}(x,\lambda) - \sum_{l=1}^{\infty}\Bigl(\widetilde{P}_{l0}(x,\lambda)\varphi_{l0}(x) - \widetilde{P}_{l1}(x,\lambda)\varphi_{l1}(x)\Bigr). \tag{3.3.46}$$

Из (3.3.45), (3.3.46) следует, что при фиксированном $x \in [0, T]$ функции $\Phi^{(\nu)}(x,\lambda)$, $\nu = \overline{0, n}$, являются мероморфными по λ и $\varphi_j(x) = \Phi_{k+1,\langle 0\rangle}(x, \lambda_{l\varepsilon k})$. Отметим также, что в силу леммы 3.3.5 имеют место формулы (3.3.32)–(3.3.35). Построим дифференциальное уравнение и линейные формы $L = (\ell, U)$ по формулам (3.3.37), где функции $\varepsilon_\nu(x)$, $t_{j\nu}(x)$ определены по формулам (3.3.36), (3.2.20)–(3.2.22). Ясно, что $L \in V_N$.

Лемма 3.3.8. *Имеют место равенства*

$$\ell\varphi(x) = \Lambda\varphi(x), \quad \ell\Phi(x,\lambda) = \lambda\Phi(x,\lambda).$$

Доказательство. Дифференцируя соотношения (3.3.45), (3.3.46) по x и учитывая (3.3.33), (3.3.36), (3.2.20), получаем

$$\sum_{\nu=0}^{n} t_{j\nu}(x)\widetilde{\varphi}^{(\nu)}(x) = (E + \widetilde{G}(x)J)\varphi^{(j)}(x), \tag{3.3.47}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} t_{j\nu}(x)\widetilde{\Phi}^{(\nu)}(x,\lambda) = \Phi^{(j)}(x,\lambda) + \\ + \sum_{l=1}^{\infty}\Bigl(\widetilde{P}_{l0}(x,\lambda)\varphi_{l0}^{(j)}(x) - \widetilde{P}_{l1}(x,\lambda)\varphi_{l1}^{(j)}(x)\Bigr). \tag{3.3.48}$$

Из (3.3.47), с учетом (3.1.22), (3.3.36), (3.3.37), (3.2.20)–(3.2.22), имеем

$$(E + \widetilde{G}(x)J)\ell\varphi(x) + \langle\widetilde{\varphi}(x), \widetilde{g}^*(x)\rangle_{\widetilde{\ell}}\, J\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\Bigl(\widetilde{p}_\nu(x) + \\ + \sum_{j=\nu+1}^{n} p_j(x)t_{j\nu}(x) + \sum_{j=0}^{n-1}\widetilde{\mathcal{L}}_{\nu j}\varkappa_{j0}(x)\Bigr)\widetilde{\varphi}^{(\nu)}(x) = \widetilde{\ell}\widetilde{\varphi}(x). \tag{3.3.49}$$

Аналогично доказывается справедливость соотношения

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\ell\Phi(x,\lambda)+\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{l0}(x,\lambda)\ell\varphi_{l0}(x)-\widetilde{P}_{l1}(x,\lambda)\ell\varphi_{l1}(x)\Big)+$$
$$+\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^{*}(x)\rangle_{\widetilde{\ell}}\,J\varphi(x).\quad(3.3.50)$$

Из (3.3.49), с учетом (3.3.32), (3.3.35), следует, что

$$\widetilde{\Lambda}\widetilde{\varphi}(x)=(E+\widetilde{G}(x)J)\ell\varphi(x)+\Big(\widetilde{\Lambda}(E+\widetilde{G}(x)J)-(E+\widetilde{G}(x)J)\Lambda\Big)\varphi(x),$$

или

$$(E+\widetilde{G}(x)J)(\ell\varphi(x)-\Lambda\varphi(x))=0.$$

Согласно условию P теоремы 3.3.1 заключаем, что $\ell\varphi(x)=\Lambda\varphi(x)$. Далее, из (3.3.50), с учетом (3.3.34), вытекает

$$\lambda\widetilde{\Phi}(x,\lambda)=\ell\Phi(x,\lambda)+\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{l0}(x,\lambda)\Lambda_{l0}\varphi_{l0}(x)-\widetilde{P}_{l1}(x,\lambda)\Lambda_{l1}\varphi_{l1}(x)\Big)+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^{*}_{l0}(x)\rangle_{\widetilde{\ell}}\,\varphi_{l0}(x)-\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\widetilde{g}^{*}_{l1}(x)\rangle_{\widetilde{\ell}}\,\varphi_{l1}(x)\Big)=$$
$$=\ell\Phi(x,\lambda)+\lambda\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{l0}(x,\lambda)\varphi_{l0}(x)-\widetilde{P}_{l1}(x,\lambda)\varphi_{l1}(x)\Big),$$

и, следовательно, $\ell\Phi(x,\lambda)=\lambda\Phi(x,\lambda)$. Лемма 3.3.8 доказана. □

Центральное место в доказательстве достаточности теоремы 3.3.1 занимает следующая лемма.

Лемма 3.3.9. *Справедливы соотношения*

$$U_{\xi 0}(\Phi_k(x,\lambda))=\delta_{\xi k},\ \xi=\overline{1,k};\quad U_{\xi T}(\Phi_k(x,\lambda))=0,\ \xi=\overline{1,n-k},$$

т. е. $\Phi(x,\lambda)$ *— решение Вейля для* L.

Доказательство. Используя равенства (3.3.48) и (3.3.37), получаем

$$\widetilde{U}_{\xi a}(\widetilde{\Phi}(x,\lambda))=U_{\xi a}(\Phi(x,\lambda))+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{l0}(a,\lambda)U_{\xi a}(\varphi_{l0}(x))-\widetilde{P}_{l1}(a,\lambda)U_{\xi a}(\varphi_{l1}(x))\Big),$$

или, в координатах:

$$\widetilde{U}_{\xi a}(\widetilde{\Phi}_k(x,\lambda)) = U_{\xi a}(\Phi_k(x,\lambda)) +$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{n}\Big(\Big(\sum_{j=1}^{\nu-1}\widetilde{D}_{kj}(a,\lambda,\lambda_{l,\nu-1})\mathcal{N}_{j\nu}(\lambda_{l,\nu-1})\Big)U_{\xi a}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\lambda_{l,\nu-1})) -$$
$$-\sum_{j=1}^{\nu-1}\widetilde{D}_{kj}(a,\lambda,\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1})\widetilde{\mathcal{N}}_{j\nu}(\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1})\Big)U_{\xi a}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1}))\Big). \qquad (3.3.51)$$

Пусть $a=0$. Последовательно положив в (3.3.51) $\xi = n, n-1, \ldots, 1$ и учитывая следствие 3.3.2, вычисляем : $U_{\xi 0}(\Phi_k(x,\lambda)) = \delta_{\xi k},\ \xi=\overline{1,k}$.

Пусть $a=T$. В дальнейших преобразованиях используются свойства $S_1,\ S_2$ и следствие 3.3.2. Запишем (3.3.51) в виде

$$\widetilde{U}_{\xi T}(\widetilde{\Phi}_k(x,\lambda)) = U_{\xi T}(\Phi_k(x,\lambda)) +$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{k}\widetilde{D}_{kj}(T,\lambda,\lambda_{l,j})\sum_{\nu=j+1}^{n}\mathcal{N}_{j\nu}(\lambda_{l,\nu-1})U_{\xi T}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\lambda_{l,\nu-1})) -$$
$$-\sum_{\nu=2}^{k}(\widetilde{D}\widetilde{\mathcal{N}})_{k\nu}(T,\lambda,\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1})U_{\xi T}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1}))\Big). \qquad (3.3.52)$$

Отсюда при $\lambda=\lambda_{l_0,k-1},\ \lambda=\widetilde{\lambda}_{l_0,k-1}$ имеем

$$\widetilde{U}_{\xi T}(\widetilde{\Phi}_{k,\langle 0\rangle}(x,\lambda_{l_0,k-1})) = U_{\xi T}(\Phi_{k,\langle 0\rangle}(x,\lambda_{l_0,k-1})) +$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{k}\widetilde{D}_{kj,\langle 0\rangle}(T,\lambda_{l_0,k-1},\lambda_{l,j})\sum_{\nu=j+1}^{n}\mathcal{N}_{j\nu}(\lambda_{l,\nu-1})U_{\xi T}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\lambda_{l,\nu-1})) -$$
$$-\sum_{\nu=2}^{k}(\widetilde{D}_{\langle 0\rangle}\widetilde{\mathcal{N}})_{k\nu}(T,\lambda_{l_0,k-1},\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1})U_{\xi T}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1}))\Big),$$
$$k=\overline{2,n}, \qquad (3.3.53)$$

$$\widetilde{U}_{\xi T}(\widetilde{\Phi}_{k,\langle 0\rangle}(x,\widetilde{\lambda}_{l_0,k-1})) = U_{\xi T}(\Phi_{k,\langle 0\rangle}(x,\widetilde{\lambda}_{l_0,k-1})) +$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{k}\widetilde{D}_{kj,\langle 0\rangle}(T,\widetilde{\lambda}_{l_0,k-1},\lambda_{l,j})\sum_{\nu=j+1}^{n}\mathcal{N}_{j\nu}(\lambda_{l,\nu-1})U_{\xi T}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\lambda_{l,\nu-1})) -$$
$$-\sum_{\nu=2}^{k}(\widetilde{D}_{\langle 0\rangle}\widetilde{\mathcal{N}})_{k\nu}(T,\widetilde{\lambda}_{l_0,k-1},\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1})\cdot U_{\xi T}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1}))\Big),$$
$$k=\overline{2,n}. \qquad (3.3.54)$$

Соотношения (3.3.53) оставляем без изменения, а соотношения (3.3.54) заменяем их линейными комбинациями. Для этого при фиксированном $\mu=\overline{1,n-1}$ умножаем (3.3.54) на $\widetilde{\mathcal{N}}_{\mu k}(\widetilde{\lambda}_{l_0,k-1})$ и суммируем по k от $\mu+1$ до n. Получаем

$$\sum_{l=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{j=1}^{\mu}(\widetilde{\mathcal{N}}\widetilde{D}_{\langle 0\rangle})_{\mu j}(T,\widetilde{\lambda}_{l_0,\mu},\lambda_{l,j})\times \\ \times\sum_{\nu=j+1}^{n}\mathcal{N}_{j\nu}(\lambda_{l,\nu-1})U_{\xi T}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\lambda_{l,\nu-1}))- \\ -\sum_{\nu=2}^{\mu}(\widetilde{\mathcal{N}}\widetilde{D}_{\langle 0\rangle}\widetilde{\mathcal{N}})_{\mu\nu}(T,\widetilde{\lambda}_{l_0,\mu},\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1})\times \\ \times U_{\xi T}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1}))\Bigr)=0, \quad (3.3.55)$$

$$\xi=\overline{1,n-\mu},\quad \mu=\overline{1,n-1},$$

При фиксированном s $(1\leqslant s\leqslant n-1)$ рассмотрим систему, состоящую из уравнений (3.3.55) при $\mu=\overline{1,s}$ и уравнений (3.3.53) при $k=\overline{2,s}$. Используя условие P теоремы 3.3.1 и свойство S_2, находим

$$U_{\xi T}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\widetilde{\lambda}_{l,\nu-1}))=U_{\xi T}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\lambda_{l,\nu-1}))=0,\quad \nu=\overline{1,s-1},$$
$$\sum_{\nu=s+1}^{n}\mathcal{N}_{j\nu}(\lambda_{l,\nu-1})U_{\xi T}(\Phi_{\nu,\langle 0\rangle}(x,\lambda_{l,\nu-1}))=0,\quad j=\overline{1,s},\ \xi=\overline{1,n-s}.$$

Подставляя эти соотношения в (3.3.52), приходим к равенствам $U_{\xi T}(\Phi_k(x,\lambda))=0$, $\xi=\overline{1,n-k}$. Лемма 3.3.9 доказана. ☐

Лемма 3.3.10. *Матрица $M(\lambda)$ является матрицей Вейля для L.*

Доказательство. Обозначим через $M^0_{k\xi}(\lambda)=U_{\xi 0}(\Phi_k)$, $M^0(\lambda)=[M^0_{k\xi}(\lambda)]_{k,\xi=\overline{1,n}}$ матрицу Вейля для L, $M^{0,*}(\lambda):=(M^0(\lambda))^{-1}$. Покажем по индукции, что $M_{k,k+\gamma}(\lambda)=M^0_{k,k+\gamma}(\lambda)$ при $\gamma\geqslant 1$.

Так как $\mathcal{N}(\lambda_0)=M_{\langle -1\rangle}(\lambda_0)(M_{\langle 0\rangle}(\lambda_0))^{-1}$, то

$$\mathcal{N}_{j\nu}(\lambda_0)=M_{j\nu,\langle -1\rangle}(\lambda_0)+\mathcal{F}_{j\nu}(M_{r,r+s},\ s=\overline{1,\nu-j-1},\ r\geqslant 1).\quad (3.3.56)$$

Из (3.3.51) при $a=0$, используя лемму 3.3.9, следствие 3.3.2 и (3.3.56), получаем

$$\widetilde{M}_{k,k+\gamma}(\lambda)=M^0_{k,k+\gamma}(\lambda)+\sum_{l=1}^{\infty}\Bigl(\frac{\widetilde{\beta}_{l,k,k+\gamma}}{\lambda-\widetilde{\lambda}_{lk}}-\frac{\beta_{l,k,k+\gamma}}{\lambda-\lambda_{lk}}\Bigr)+ \\ +\mathcal{F}^0_{k\gamma}(\widetilde{M}_{r,r+j},M_{r,r+j},\quad j=\overline{1,\gamma-1},\quad r\geqslant 1).\quad (3.3.57)$$

В частности, при $\gamma = 1$ имеем

$$M^0_{k,k+1}(\lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\beta_{l,k,k+1}}{\lambda - \lambda_{lk}} = M_{k,k+1}(\lambda).$$

Далее, равенство (3.3.46) можно записать в виде

$$\Phi(x,\lambda) = \widetilde{\Phi}(x,\lambda) - \sum_{\lambda_0 \in I} \widetilde{P}(x,\lambda,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0),$$

где $\varphi(x,\lambda_0) = Y\Phi_{\langle 0\rangle}(x,\lambda_0)$, $I = \Lambda \cup \widetilde{\Lambda}$. Тогда

$$\Phi_{\langle -1\rangle}(x,z_0) = \widetilde{\Phi}_{\langle -1\rangle}(x,z_0) - \sum_{\lambda_0 \in I} \widetilde{P}_{\langle -1\rangle}(x,z_0,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0).$$

В силу (3.3.11) имеем

$$\widetilde{P}_{\langle -1\rangle}(x,z_0,\lambda_0) = \widetilde{\mathcal{N}}(z_0)\widetilde{P}_{\langle 0\rangle}(x,z_0,\lambda_0) - \delta(z_0,\lambda_0)\widehat{\mathcal{N}}(\lambda_0)Y^T,$$

и, следовательно,

$$\Phi_{\langle -1\rangle}(x,z_0) = \widetilde{\mathcal{N}}(z_0)\widetilde{\Phi}_{\langle 0\rangle}(x,z_0) - \\ - \sum_{\lambda_0 \in I} \widetilde{\mathcal{N}}(z_0)\widetilde{P}_{\langle 0\rangle}(x,z_0,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0) + \widehat{\mathcal{N}}(z_0)Y^T\varphi(x,z_0) = \\ = \widetilde{\mathcal{N}}(z_0)\widetilde{\Phi}_{\langle 0\rangle}(x,z_0) + \widehat{\mathcal{N}}(z_0)\widetilde{\Phi}_{\langle 0\rangle}(x,z_0) = \mathcal{N}(z_0)\widetilde{\Phi}_{\langle 0\rangle}(x,z_0).$$

Отсюда вытекает, что $\mathcal{N}(\lambda_0) = M^0_{\langle -1\rangle}(\lambda_0)(M^0_{\langle 0\rangle}(\lambda_0))^{-1} \overset{df}{=} \mathcal{N}^0(\lambda_0)$. В силу свойства S_2 имеем: $\mathcal{N}^0(\lambda_0)\mathcal{N}^0(\lambda_0) = \mathcal{N}(\lambda_0)\mathcal{N}(\lambda_0) = 0$. Тогда, согласно лемме 3.3.3, матрица $M^{0,*}(\lambda)$ имеет лишь простые полюсы. Кроме того, получаем, что $\lambda_{lm} = \lambda^0_{lm}$, где $\{\lambda^0_{lm}\}_{l \geqslant 1}$ — собственные значения краевых задач S_m для L.

Из результатов, полученных в п. 3.3.3, вытекает, что

$$\widetilde{M}_{k,k+\gamma}(\lambda) = M^0_{k,k+\gamma}(\lambda) + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\widetilde{\beta}_{l,k,k+\gamma}}{\lambda - \widetilde{\lambda}_{lk}} - \frac{\beta^0_{l,k,k+\gamma}}{\lambda - \lambda_{lk}}\right) + \\ + \mathcal{F}^0_{k\gamma}(\widetilde{M}_{r,r+j},\, M^0_{r,r+j},\, j = \overline{1,\gamma-1},\, r \geqslant 1), \qquad (3.3.58)$$

где $\beta^0_{lk\xi} = \operatorname*{Res}_{\lambda_{lk}} M^0_{k\xi}(\lambda)$. Если $M_{r,r+j}(\lambda) = M^0_{r,r+j}(\lambda)$, $j = \overline{1,\gamma-1}$, $r \geqslant 1$, то, сравнивая (3.3.57) и (3.3.58), получаем: $M_{r,r+\gamma}(\lambda) = M^0_{r,r+\gamma}(\lambda)$. Лемма 3.3.10 доказана. ☐

Попутно доказано, что матрицы $M(\lambda)$, $M^*(\lambda)$ имеют только простые полюсы, т. е. $L \in V'_N$. Таким образом, теорема 3.3.1 полностью доказана.

3.3.4. Устойчивость решения обратной задачи. Вышеприведенный метод позволяет исследовать и устойчивость решения обратной задачи по матрице Вейля. Пусть $\widetilde{L} \in V'_N$, и пусть $L \in V'_N$ выбрана так, что

$$\Lambda^0 := \sum_{l=1}^{\infty} \xi_l l^{n-1} < \infty.$$

Величина Λ^0 будет характеризовать «близость» матриц Вейля $M(\lambda)$ и $M^*(\lambda)$.

Теорема 3.3.2. *Существует* $\delta > 0$ (*зависящее от* $\widetilde{L}$) *такое, что если* $\Lambda^0 < \delta$, *то*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant T} |p_\nu^{(j)}(x) - \widetilde{p}_\nu^{(j)}(x)| < C\Lambda^0, \ 0 \leqslant j \leqslant \nu \leqslant n-2; \quad |u_{\xi\nu a} - \widetilde{u}_{\xi\nu a}| < C\Lambda^0.$$

Здесь и далее в п. 3.3.4 одним и тем же символом C будем обозначать различные положительные константы в оценках, зависящие только от $\widetilde{L}$.

Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 3.3.11. *Существует* $\delta > 0$ (*зависящее от* $\widetilde{L}$) *такое, что если*

$$\Lambda^1 := \sum_{l=1}^{\infty} \xi_l l^{n-2} < \delta,$$

то

$$|\psi_j^{(\nu)}(x)| < Cl^\nu, \ |\psi_j^{(\nu)}(x) - \widetilde{\psi}_j^{(\nu)}(x)| < Cl^{\nu-1}\Lambda^1,$$
$$j \in V, \quad \nu = \overline{0, n-1}. \tag{3.3.59}$$

Доказательство проведем по индукции. При этом будем использовать оценки (3.3.40). Уравнение (3.3.41) запишем в координатах:

$$\widetilde{\psi}_{j_0}(x) = \psi_{j_0}(x) + \sum_{j \in V} \widetilde{H}_{j_0,j}(x)\psi_j(x), \quad j_0 \in V. \tag{3.3.60}$$

При фиксированном $x \in [0, T]$ это уравнение в банаховом пространстве m. Согласно (3.3.44) можно выбрать $\delta > 0$ так, чтобы при $\Lambda^1 < \delta$:

$$\|\widetilde{H}(x)\|_{m \to m} = \sup_{j_0 \in V} \sum_{j \in V} |\widetilde{H}_{j_0,j}(x)| < \frac{1}{2}.$$

Тогда из (3.3.60) имеем: $|\psi_j(x)| < C, \ \ j \in V$. Отсюда и из (3.3.60) получаем

$$|\psi_{j_0}(x) - \widetilde{\psi}_{j_0}(x)| < \sum_{j \in V} |\widetilde{H}_{j_0,j}(x)\psi_j(x)| <$$
$$< C \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi_l}{|l - l_0| + 1} < \frac{C}{l_0} \sum_{l=1}^{\infty} \xi_l l < \frac{C}{l_0} \Lambda^1.$$

Таким образом, оценки (3.3.59) при $\nu = 0$ доказаны.

Предположим, что оценки (3.3.59) доказаны при $\nu = \overline{0, s-1}$. Дифференцируя (3.3.60), вычисляем

$$\widetilde{\psi}_{j_0}^{(s)}(x) = \psi_{j_0}^{(s)}(x) + \sum_{j \in V} \sum_{\mu=0}^{n} C_s^{\mu} \widetilde{H}_{j_0,j}^{(\mu)}(x) \psi_j^{(s-\mu)}(x), \quad j_0 \in V, \tag{3.3.61}$$

или

$$\widetilde{\xi}_{j_0}(x) = \xi_{j_0}(x) + \sum_{j \in V} \widetilde{h}_{j_0,j}(x) \xi_j(x), \quad j_0 \in V, \tag{3.3.62}$$

где

$$\widetilde{h}_{j_0,j}(x) = \widetilde{H}_{j_0,j}(x) \frac{l^s}{l_0^s}, \quad \xi_j(x) = \frac{1}{l^s} \psi_j^{(s)}(x),$$
$$\widetilde{\xi}_{j_0}(x) = \frac{1}{l_0^s} \Big(\widetilde{\psi}_{j_0}^{(s)}(x) - \sum_{\mu=1}^{n} C_s^{\mu} \sum_{j \in V} \widetilde{H}_{j_0,j}^{(\mu)}(x) \psi_j^{(s-\mu)}(x) \Big).$$

Используя оценки (3.3.59) при $\nu = \overline{0, s-1}$ и (3.3.40), получаем

$$|\widetilde{\xi}_{j_0}(x)| < C, \ \sup_{j_0 \in V} \sum_{j \in V} |\widetilde{h}_{j_0,j}(x)| < C \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi_l}{|l - l_0| + 1} \frac{l^s}{l_0^s} < C\Lambda^1.$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $\Lambda^1 < \delta$:

$$\|\widetilde{h}(x)\|_{m \to m} = \sup_{j_0 \in V} \sum_{j \in V} |\widetilde{h}_{j_0,j}(x)| < \frac{1}{2}.$$

Тогда из (3.3.62) находим: $|\xi_j(x)| < C, \ j \in V$, или $|\psi_j^{(s)}(x)| < Cl^s, \quad j \in \in V$. Отсюда и из (3.3.61), (3.3.40) имеем

$$|\widetilde{\psi}_{j_0}^{(s)}(x) - \psi_{j_0}^{(s)}(x)| < C \sum_{\mu=0}^{s} \sum_{j \in V} |\widetilde{H}_{j_0,j}^{(\mu)}(x) \psi_j^{(s-\mu)}(x)| < C l_0^{s-1} \Lambda^1.$$

Лемма 3.3.11 доказана. □

Доказательство теоремы 3.3.2. Выберем $\delta > 0$, как в лемме 3.3.11. Пусть $\Lambda^0 < \delta$. Тогда, в силу леммы 3.3.11, имеют место оценки (3.3.59). Так как $J_1\varphi(x) = w(x)\psi(x)$, т. е.

$$\varphi_{l0k}(x) - \varphi_{l1k}(x) = \xi_l w_{lk}^*(x) \psi_{l0k}(x), \quad \varphi_{l1k}(x) = w_{lk}^*(x) \psi_{l1k}(x),$$

то из (3.3.59) получаем оценки

$$\begin{gathered} |\varphi_j^{(\nu)}(x)| < Cl^{\nu} w_{lk}^*(x), \\ |\varphi_{l0k}^{(\nu)}(x) - \varphi_{l1k}^{(\nu)}(x)| < C\xi_l l^{\nu} w_{lk}^*(x), \quad \nu = \overline{0, n-1}. \end{gathered} \tag{3.3.63}$$

Используя (3.3.36), (3.3.63) и полученные в п. 3.3.3 оценки для функций $\widetilde{g}_j^{*(\nu)}(x)$, $\widetilde{g}_{l0k}^{*(\nu)}(x)-\widetilde{g}_{l1k}^{*(\nu)}(x)$, находим

$$|\varkappa_{\nu s}^{(\mu)}(x)|<C\sum_{l=1}^{\infty}\xi_l l^{\nu+s+\mu},\quad \nu+s+\mu\leqslant n-1.$$

Следовательно, с учетом (3.2.20), (3.2.21), имеем

$$|t_{j\nu}^{(\mu)}(x)|<C\sum_{l=1}^{\infty}\xi_l l^{j-\nu-1+\mu},\quad |\xi_{\nu}^{(\mu)}(x)|<C\sum_{l=1}^{\infty}\xi_l l^{n-\nu-1+\mu}. \tag{3.3.64}$$

Из (3.3.37), (3.2.22) вытекает, что

$$\widehat{p}_\nu(x)=\xi_\nu(x)-\sum_{j=\nu+1}^{n-2}\widehat{p}_j(x)t_{j\nu}(x),\quad \nu=\overline{0,n-2}.$$

Отсюда, используя (3.3.64), последовательно при $\nu=n-2,n-3,\dots,0$ вычисляем $|\widehat{p}_\nu^{(j)}(x)|<C\Lambda^0$, $0\leqslant j\leqslant\nu$. Аналогично получаем оценку $|\widehat{u}_{\xi\nu a}|<C\Lambda^0$. Теорема 3.3.2 доказана. □

Иногда удобнее работать в пространстве $L_2(0,T)$. Будем говорить, что $L\in V'_{N2}$, если $L\in V'_N$ и $p_\nu^{(\nu+N)}(x)\in L_2(0,T)$. Отметим, что для $L\in V'_{N2}$ имеют место асимптотические формулы (3.3.1), (3.3.2), где $\{\varkappa_{lm}\}$, $\{\varkappa_{lmk}\}$, $\{\varkappa_{lmk}^0\}\in l_2$. Аналогично теореме 3.3.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 3.3.3. *Для того чтобы матрица $M(\lambda)\in\mathbf{W}$ была матрицей Вейля для $L\in V'_{N2}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) (*асимптотика*) *существует пара $\widetilde{L}\in V'_{N2}$ такая, что* $\sum_{l=1}^{\infty}(\xi_l l^{n+N-1})^2<\infty$;

2) *выполняется условие P.*

Отметим, что при «малых» возмущениях условие P автоматически выполняется, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3.4. *Пусть задана пара $\widetilde{L}\in V'_{N2}$. Тогда существует $\delta>0$ (зависящее от $\widetilde{L}$) такое, что если матрица $M(\lambda)\in\mathbf{W}$ удовлетворяет условию*

$$\Lambda^+:=\Big(\sum_{l=1}^{\infty}(\xi_l l^{n+N-1})^2\Big)^{\frac12}<\delta,$$

то существует единственная пара $L\in V'_{N2}$, для которого матрица $M(\lambda)$ является матрицей Вейля. При этом

$$\|p_\nu^{(j)}(x)-\widetilde{p}_\nu^{(j)}(x)\|_{L_2(0,T)}<C\Lambda^+,\ 0\leqslant j\leqslant\nu+N,$$

$$|u_{\xi\nu a}-\widetilde{u}_{\xi\nu a}|<C\Lambda^+, \tag{3.3.65}$$

где константа C зависит только от $\widetilde{L}$.

В самом деле, в силу (3.3.44) можно выбрать $\delta > 0$ так, что при $\Lambda^+ < \delta \quad \|\widetilde{H}(x)\|_{m\to m} < 1$, $x \in [0, T]$, и, следовательно, условие P выполняется. Доказательство оценок (3.3.65) аналогично доказательству теоремы 3.3.2.

3.3.5. Контрпример. Пусть для определенности $n = 3$. Покажем, что если из матрицы Вейля $M(\lambda)$ выбросить функцию Вейля $M_{13}(\lambda)$, то единственность решения обратной задачи нарушится. Другими словами, функции Вейля $M_{12}(\lambda)$, $M_{23}(\lambda)$ не определяют однозначно дифференциальное уравнение и линейные формы L.

Рассмотрим $\widetilde{L} = (\widetilde{\ell}, \widetilde{U})$ вида

$$\widetilde{\ell}y = y''', \quad \widetilde{U}_{1a}(y) = y''(a) + \widetilde{\alpha}_a y'(a),$$
$$\widetilde{U}_{2a}(y) = y'(a), \quad \widetilde{U}_{3a}(y) = y(a), \quad a = 0, T.$$

Пусть функции $\widetilde{X}_k(x, \lambda)$ являются решениями уравнения $y''' = \lambda y = \rho^3 y$ при условиях $\widetilde{X}_k^{(\nu-1)}(0, \lambda) = \delta_{\nu k}$, $\nu, k = \overline{1, 3}$. Тогда

$$\widetilde{X}_k(x, \lambda) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}(\rho R_j)^{1-k}\exp(\rho R_j x). \tag{3.3.66}$$

В частности, $\widetilde{X}_k(x, 0) = \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}$. Очевидно, что при $\lambda = 0$

$$\widetilde{\Delta}_{11}(0) = \widetilde{\Delta}_{22}(0) = \widetilde{\Delta}_{12}(0) = 0 \tag{3.3.67}$$

при любых $\widetilde{\alpha}_0$, $\widetilde{\alpha}_T$. Выберем коэффициенты $\widetilde{\alpha}_0$, $\widetilde{\alpha}_T$ так, чтобы функции $\widetilde{\Delta}_{11}(\lambda)$, $\widetilde{\Delta}_{22}(\lambda)$ имели только простые нули. Покажем, что такой выбор возможен. В силу симметрии достаточно рассмотреть функцию $\widetilde{\Delta}_{22}(\lambda) = \widetilde{X}_1''(T, \lambda) + \widetilde{\alpha}_T \widetilde{X}_1'(T, \lambda)$. Используя (3.3.66), вычисляем

$$\begin{gathered}\widetilde{\Delta}_{22}(\lambda) = \lambda\widetilde{X}_2(T, \lambda) + \widetilde{\alpha}_T\lambda\widetilde{X}_3(T, \lambda),\\ 3\dot{\widetilde{\Delta}}_{22}(\lambda) = (2\widetilde{X}_2(T, \lambda) + T\widetilde{X}_1(T, \lambda)) + \widetilde{\alpha}_T(\widetilde{X}_3(T, \lambda) + T\widetilde{X}_2(T, \lambda)).\end{gathered} \tag{3.3.68}$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество нулей функции

$$\widetilde{\Delta}(\lambda) := \lambda\widetilde{X}_2(T, \lambda)\Big(\widetilde{X}_3(T, \lambda) + T\widetilde{X}_2(T, \lambda)\Big) - \\ - \lambda\widetilde{X}_3(T, \lambda)\Big(2\widetilde{X}_2(T, \lambda) + T\widetilde{X}_1(T, \lambda)\Big),$$

и пусть $\mathcal{B}(\widetilde{\alpha}_T) = \{\lambda_0 : \widetilde{\Delta}_{22}(\lambda_0) = \dot{\widetilde{\Delta}}_{22}(\lambda_0) = 0\}$ — множество кратных нулей функции $\widetilde{\Delta}_{22}(\lambda)$. Ясно, что $\mathcal{B}(\widetilde{\alpha}_T)$ — конечное множество. Если

$\lambda_0 \in \mathcal{B}(\widetilde{\alpha}_T)$, то, в силу (3.3.68), $\widetilde{\Delta}(\lambda_0) = 0$, т. е. $\mathcal{B}(\widetilde{\alpha}_T) \subset \mathcal{B}$. Далее, если $\widetilde{\alpha}_T^0 \neq \widetilde{\alpha}_T$ и $\lambda_0 \in \mathcal{B}(\widetilde{\alpha}_T) \cap \mathcal{B}(\widetilde{\alpha}_T^0)$, то из (3.3.68) вытекает, что

$$\lambda_0 \widetilde{X}_2(T, \lambda_0) = \lambda_0 \widetilde{X}_3(T, \lambda_0) = 2\widetilde{X}_2(T, \lambda_0) + \\ + T\widetilde{X}_1(T, \lambda_0) = \widetilde{X}_3(T, \lambda_0) + T\widetilde{X}_2(T, \lambda_0) = 0.$$

Так как $2\widetilde{X}_2(T, 0) + T\widetilde{X}_1(T, 0) = 3T \neq 0$, то $\lambda_0 \neq 0$ и, следовательно, $X_1(T, \lambda_0) = X_2(T, \lambda_0) = X_3(T, \lambda_0) = 0$, что невозможно. Таким образом, если $\widetilde{\alpha}_T^0 \neq \widetilde{\alpha}_T$, то $\mathcal{B}(\widetilde{\alpha}_T) \cap \mathcal{B}(\widetilde{\alpha}_T^0) = \varnothing$. Отсюда, из соотношения $\mathcal{B}(\widetilde{\alpha}_T) \subset \mathcal{B}$ и непрерывности $\mathcal{B}(\widetilde{\alpha}_T)$ вытекает, что существует $\widetilde{\alpha}_T$, для которого $\mathcal{B}(\widetilde{\alpha}_T) = \varnothing$.

Определим теперь матрицу $M(\lambda) = [M_{mk}(\lambda)]_{m,k=\overline{1,3}}$, $M_{mk}(\lambda) = \delta_{mk}$, $m \geqslant k$, по формулам

$$M_{12}(\lambda) = \widetilde{M}_{12}(\lambda),\ M_{23}(\lambda) = \widetilde{M}_{23}(\lambda),\ M_{13}(\lambda) = \widetilde{M}_{13}(\lambda) + \frac{\theta}{\lambda}, \quad (3.3.69)$$

где θ — комплексное число. Из (3.3.67), (3.3.69) следует, что при достаточно малом θ $M(\lambda) \in \mathbf{W}$ и удовлетворяет условиям теореме 3.3.4. Тогда, согласно теореме 3.3.4, существует $L \in V_{N2}'$, для которого $M(\lambda)$ является матрицей Вейля.

§ 3.4. Самосопряженный случай

Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы $L = (\ell, U)$ вида (3.1.1)–(3.1.2) на полуоси ($T = \infty$). В § 3.1, 3.2 приведено решение обратной задачи в общем несамосопряженном случае. Центральную роль при этом играло основное уравнение обратной задачи. Одним из условий, при которых произвольная матрица $M(\lambda)$ будет матрицей Вейля для некоторого несамосопряженного дифференциального оператора, является разрешимость основного уравнения. В общем случае это условие труднопроверяемо. В связи с этим важной задачей является описание классов операторов, для которых разрешимость основного уравнения может быть доказана. Одним из таких классов является класс самосопряженных операторов. В этом параграфе исследуется обратная задача в самосопряженном случае. Доказывается однозначная разрешимость основного уравнения, получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи и алгоритм ее решения по матрице Вейля. Некоторые различия в обозначениях указаны ниже.

3.4.1. Свойства матрицы Вейля. Пусть для определенности $n = 2m$, $\sigma_\xi = n - \xi$. Обозначим

$$\langle y(x), z(x)\rangle_\ell = \sum_{\nu+j \leqslant n-1} \sum_{s=j}^{n-\nu-1} (-1)^s C_s^j p_{s+\nu+1}^{(s-j)}(x) y^{(\nu)}(x) \overline{z^{(j)}(x)}, \quad (3.4.1)$$

где $C_s^j = s!(j!(s-j)!)^{-1}$. Предположим, что $L = L^*$, где сопряженная пара $L^* = (\ell^*, U^*)$ определяется соотношениями

$$\ell^* z = z^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n-2} (-1)^\nu (\overline{p_\nu(x)} z)^\nu,$$

$$\langle y(x), z(x)\rangle_{\ell|_{x=0}} = \sum_{\xi=1}^{n} (-1)^{\xi-1} U_{\xi 0}(y) \overline{U^*_{n-\xi+1,0}(z)}. \qquad (3.4.2)$$

При любых достаточно гладких функциях $y(x)$, $z(x)$ имеем: $\ell y \,\overline{z} - y\,\overline{\ell z} = \dfrac{d}{dx}\langle y, z\rangle_\ell$. В частности, если функции $y(x,\lambda)$, $z(x,\mu)$ являются решениями уравнений $\ell y = \lambda y$, $\ell z = \mu y$, то

$$\frac{d}{dx}\langle y(x,\lambda), z(x,\overline{\mu})\rangle_{\ell|_{x=0}} = (\lambda - \mu) y(x,\lambda)\overline{z(x,\overline{\mu})}. \qquad (3.4.3)$$

В § 3.1 доказано, что функции Вейля $M_{k\xi}(\lambda)$ регулярны в $\Pi_{(-1)^k}$ за исключением не более чем счетного ограниченного множества полюсов $\Lambda'_{k\xi}$ и непрерывны в $\overline{\Pi}_{(-1)^k} \setminus \{0\}$ за исключением ограниченных множеств $\Lambda_{k\xi}$. При $|\lambda| \to \infty$ $M_{k\xi}(\lambda)\rho^{\xi-k} = O(1)$. Обозначим $\Lambda = \bigcup\limits_{k,\xi} \Lambda_{k,\xi}$,

$$M^{\pm}_{k\xi} = \lim M_{k\xi}(\lambda \pm iz), \quad z \to 0,\ \mathrm{R}e\, z > 0,\ -\infty < \lambda < \infty;$$
$$Q_{k\xi}(\lambda) = (2\pi i)^{-1}(M^-_{k\xi}(\lambda) - M^+_{k\xi}(\lambda)), \quad Q_k(\lambda) = Q_{k,k+1}(\lambda).$$

Наряду с L рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы $\widetilde{L}$ того же вида, но с нулевыми коэффициентами. Для упрощения выкладок ограничимся случаем отсутствия дискретного спектра. Будем говорить, что $L \in V_N^0$, если $p_\nu(x) \in W_{\nu+N}$, $\Lambda = \varnothing$, $M_{k\xi}(\lambda)\rho^{\xi-k} = O(1)$, $\lambda \to 0$; $\widehat{Q_k}(\lambda) = O(\rho^{-n-2})$, $|\lambda| \to \infty$, и $L \in V_N^1$, если $L \in V_N^0$, $L = L^*$. Решение обратной задачи будем искать в классах V_N^1. Отметим, что $\widetilde{L} \in V_N^1$ при любом $N \geqslant 0$. Условие $\widehat{Q_k}(\lambda) = O(\rho^{-n-2})$ не является ограничением и введено для упрощения выкладок.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $L \in V_N^1$. *Тогда матрица Вейля* $M(\lambda)$ *обладает следующими свойствами*:

1) $M_{k\xi}(\lambda) = \delta_{k\xi}, \quad k \geqslant \xi$;
2) *функции* $M_{k\xi}(\lambda)$ *регулярны в* $\Pi_{(-1)^k}$ *и непрерывны в* $\overline{\Pi}_{(-1)^k} \setminus \{0\}$;
3) *функции* $M_{k\xi}(\lambda)\rho^{\xi-k}$ *ограничены*;
4) *функции* $M_{k\xi}(\lambda) - M_{k,k+1}(\lambda)M_{k+1,\xi}(\lambda)$ *регулярны при* $\lambda \in \Gamma_{(-1)^k}$;
5) $\widehat{Q_k}(\lambda) = O(\rho^{-n-2}), |\lambda| \to \infty$;
6) $M_{k,k+1}(\lambda) = \overline{M_{n-k,n-k+1}(\overline{\lambda})}$;
7) $(-1)^m Q_m > 0,\ \lambda \in \Gamma_{(-1)^m}$.

Отметим, что $Q_k(\lambda) \equiv 0$ при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^{k-1}}$, и функции $\rho Q_k(\lambda)$ непрерывны и ограничены при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^k}$.

Свойства 1–5 частью очевидны, частью доказаны в §§ 3.1, 3.2. Они не связаны с самосопряженностью оператора. Докажем свойства 6 и 7.

В силу (3.4.3) имеем: $\dfrac{d}{dx}\langle\Phi_k(x,\lambda),\Phi_{n-k}(x,\overline{\lambda})\rangle_\ell=0$. Так как $R_{n-k}=-R_{k+1}$ и

$$|\Phi_k^{(\nu)}(x,\lambda)|\leqslant C|\rho|^{\nu+k-n}|\exp(\rho R_k x)|, \tag{3.4.4}$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\langle\Phi_k(x,\lambda),\Phi_{n-k}(x,\overline{\lambda})\rangle_\ell=0.$$

Следовательно, $\langle\Phi_k(x,\lambda),\Phi_{n-k}(x,\overline{\lambda})\rangle_\ell|_{x=0}=0$. Используя (3.4.2), получаем

$$\sum_{\xi=1}^{n}(-1)^{\xi-1}U_{\xi0}(\Phi_k(x,\lambda))\overline{U_{n-\xi+1,0}(\Phi_{n-k}(x,\overline{\lambda}))}=0,$$

т. е. $M_{k,k+1}(\lambda)=\overline{M_{n-k,n-k+1}(\overline{\lambda})}$. Отсюда, в частности, вытекает, что функция $Q_m(\lambda)$ вещественна. Пусть $f(x)\in W_2$ финитна и $f(0)=0$. Рассмотрим функцию

$$Y(x,\lambda)=\int\limits_0^\infty G(x,t,\lambda)f(t)\,dt,$$

где

$$G(x,t,\lambda)=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\begin{cases}\Phi_{n-j+1}(x,\lambda)\overline{\Phi_j(t,\overline{\lambda})}, & x<t,\\ \Phi_j(x,\lambda)\overline{\Phi_{n-j+1}(t,\overline{\lambda})}, & x>t.\end{cases}$$

Преобразуем $Y(x,\lambda)$ к виду

$$Y(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\Bigl(\int\limits_0^x\Phi_j(x,\lambda)\overline{\ell\Phi_{n-j+1}(t,\overline{\lambda})}f(t)\,dt+{}$$
$$+\int\limits_x^\infty\Phi_{n-j+1}(x,\lambda)\overline{\ell\Phi_j(t,\overline{\lambda})}f(t)\,dt\Bigr).$$

Интегрируя дважды по частям слагаемые со старшими производными и используя оценки (3.4.4) и соотношение

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\Phi_j^{(\nu)}(x,\lambda)\overline{\Phi_{n-j+1}(x,\overline{\lambda})}=\delta_{\nu,n-1},$$

вычисляем: $Y(x,\lambda)=\lambda^{-1}(-f(x)+Z(x,\lambda))$, где $Z(x,\lambda)=O(\rho^{-1})$, $|\rho|\to\infty$ равномерно по $x\geqslant0$. Следовательно,

$$\lim_{R\to\infty}\Bigl|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=R}Y(x,\lambda)\,d\lambda+f(x)\Bigr|=0. \tag{3.4.5}$$

Так как

$$\Phi_k(x,\lambda)=C_k(x,\lambda)+\sum_{\xi=k+1}^{n}M_{k\xi}(\lambda)C_\xi(x,\lambda)$$

и функции $M_{k\xi}(\lambda)\rho^{\xi-k}$ ограничены, то $G(x,t,\xi)=O(\rho^{1-n})$ равномерно на компактах и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\varepsilon}Y(x,\lambda)\,d\lambda=0. \tag{3.4.6}$$

Функции $\Phi_k(x,\lambda)-M_{k,k+1}(\lambda)\Phi_{k+1}(x,\lambda)$ регулярны при $\lambda\in\Gamma_{(-1)^k}$. Тогда из (3.4.5)–(3.4.6), применяя метод контурного интеграла, получим разложение

$$f(x)=\int\limits_{\Gamma_{(-1)^m}}F(\lambda)\Phi_{m+1}(x,\lambda)(-1)^mQ_m(\lambda)\,d\lambda, \tag{3.4.7}$$

$$F(\lambda):=\int\limits_0^\infty f(x)\overline{\Phi_{m+1}(x,\lambda)}\,dx$$

равномерно на компактах. Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty|f(x)|^2\,dx=\int\limits_{\Gamma_{(-1)^m}}|F(\lambda)|^2(-1)^mQ_m(\lambda)\,d\lambda. \tag{3.4.8}$$

Известными методами спектральной теории дифференциальных операторов можно доказать, что соотношения (3.4.7), (3.4.8) справедливы для всех функций $f(x)\in L_2(0,\infty)$ и $(-1)^mQ_m(\lambda)>0$, $\lambda\in\Gamma_{(-1)^m}$. Отметим, что соотношение $(-1)^mQ_m(\lambda)>0$ может быть выведено и непосредственно из свойств матрицы Вейля. Теорема 3.4.1 доказана. □

Теорема 3.4.2. *Пусть $L\in V_N^1$. Тогда матрица Вейля $M(\lambda)$ однозначно определяется заданием функций $Q_1(\lambda),\dots,Q_m(\lambda)$ по формулам*

$$Q_{n-k}(\lambda)=\overline{Q_k(\lambda)},\quad k=\overline{1,m-1}, \tag{3.4.9}$$

$$M_{k\xi}(\lambda)=\int\limits_{\Gamma_{(-1)^k}}\frac{Q_k(\mu)M_{k+1,\xi}(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu,\quad k<\xi,\ \lambda\in\Pi_{(-1)^k}. \tag{3.4.10}$$

В самом деле, функции $M_{k\xi}(\lambda)$ регулярны в $\Pi_{(-1)^k}$, непрерывны в $\overline{\Pi}_{(-1)^k}\setminus\{0\}$ и $M_{k\xi}(\lambda)\rho^{\xi-k}$ ограничены. Следовательно,

$$M_{k\xi}(\lambda)=\int\limits_{\Gamma_{(-1)^k}}\frac{Q_{k\xi}(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu. \tag{3.4.11}$$

Так как функции $M_{k\xi}(\lambda) - M_{k,k+1}(\lambda)M_{k+1,\xi}(\lambda)$ регулярны при $\lambda \in \in \Gamma_{(-1)^k}$, то $Q_{k\xi}(\lambda) = Q_k(\lambda)M_{k+1,\xi}(\lambda)$, и (3.4.10) доказано. Соотношение (3.4.9) является следствием свойства 6 теоремы 3.4.1. □

Замечание 3.4.1. Формула (3.4.10) верна и для случая $L \in V_N^0$, а также для любой матрицы $M(\lambda)$, обладающей свойствами 1–4 теоремы 3.4.1.

Введем обозначения: $\varphi(x,\lambda) = [\chi((-1)^{k-1}\lambda)\Phi_k(x,\lambda)]^T_{k=\overline{2,n}}$ — вектор-столбец,

$$\overline{q(x,\lambda)} = [(-1)^{k-1}\chi((-1)^{k-1}\lambda)\overline{\widetilde{\Phi}_{n-k+2}(x,\lambda)}\widehat{Q}_{k-1}(\lambda)]_{k=\overline{2,n}}$$

—вектор-строка, $\chi(\lambda)$ функция Хевисайда,

$$r(x,\lambda,\mu) = \frac{\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda), q(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}, \tag{3.4.12}$$

$$\gamma_\nu(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\overline{q^{(\nu)}(x,\lambda)}\varphi(x,\lambda)|\,d\lambda, \quad \gamma_{\nu s}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{q^{(\nu)}(x,\lambda)}\varphi^{(s)}(x,\lambda)\,d\lambda, \tag{3.4.13}$$

$$\left.\begin{aligned} &t_{j\nu}(x) = -\textstyle\sum_{\beta=\nu+1}^{j} C_j^\beta C_{\beta-1}^\nu \gamma_{\beta-\nu-1,j-\beta}(x), && j > \nu,\\ &t_{j\nu}(x) = \delta_{j\nu}, && j \leqslant \nu, \end{aligned}\right\} \tag{3.4.14}$$

$$\xi_\nu(x) = (-1)^\nu\gamma_{n-\nu-1,0}(x) + \sum_{s=0}^{n-\nu-1} C_n^s C_{n-s-1}^\nu \gamma_{n-\nu-s-1,s}(x), \tag{3.4.15}$$

$$\psi_\nu(x) = \xi_\nu(x) - \sum_{j=\nu+1}^{n-2} \psi_j(x)t_{j\nu}(x), \quad \nu = \overline{0, n-2}. \tag{3.4.16}$$

Теорема 3.4.3. *При фиксированном $x \geqslant 0$ вектор-функция $\varphi(x,\lambda)$ является решением линейного интегрального уравнения*

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x,\lambda,\mu)\varphi(x,\mu)\,d\mu. \tag{3.4.17}$$

Уравнение (3.4.17) называется основным уравнением обратной задачи.

Теорема 3.4.4. *Справедливы соотношения*

$$p_\nu(x) = \psi_\nu(x), \quad u_{\xi\nu0} + \sum_{j=\nu+1}^{n-1} u_{\xi j0}t_{j\nu}(0) = 0. \tag{3.4.18}$$

Теоремы 3.4.3, 3.4.4 являются очевидными следствиями теоремы 3.2.1 и леммы 3.2.3. Отметим, что (3.4.17) является интегральным уравнением Фредгольма, причем

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(\Omega(x,\lambda)r(x,\lambda,\mu)\Omega^{-1}(x,\mu))_{jk}|\, d\mu < \infty,$$

где $\Omega(x,\lambda) = \mathrm{diag}[\rho^{n-k}\exp(-\rho R_k x)]_{k=\overline{2,n}}$. Следовательно, оператор

$$Af(\lambda) = f(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x,\lambda)r(x,\lambda,\mu)\Omega^{-1}(x,\mu)f(\mu)\, d\mu$$

является линейным ограниченным оператором, действующим из B в B, где $B = L_\infty^{n-1}(-\infty,\infty)$ — банахово пространство вектор-функций $z(\lambda) = [z_j(\lambda)]_{j=\overline{1,n-1}}$, $\lambda \in (-\infty,\infty)$, $z_j(\lambda) \in L_\infty(-\infty,\infty)$ с нормой $\|z\|_B = \sum_{j=1}^{n-1} \|z_j\|_{L_\infty(-\infty,\infty)}$.

3.4.2. Решение обратной задачи. В этом пункте приведена теорема о разрешимости основного уравнения в самосопряженном случае и дано решение обратной задачи. Обозначим: $\mathbf{W}$ — множество матриц $M(\lambda) = [M_{k\xi}(\lambda)]_{k,\xi=\overline{1,n}}$, обладающих свойствами 1–7 теоремы 3.4.1.

Теорема 3.4.5. *Пусть* $M(\lambda) \in \mathbf{W}$. *Тогда при каждом фиксированном* $x \geqslant 0$ *уравнение* (3.4.17) *имеет и притом единственное решение в классе* $\Omega(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) \in B$.

Доказательство. Достаточно доказать, что однородное уравнение

$$h(x,\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} r(x,\lambda,\mu)h(x,\mu)\, d\mu = 0, \tag{3.4.19}$$

где $\Omega(x,\lambda)h(x,\lambda) \in B$, $h(x,\lambda) = [h_k(x,\lambda)]^T_{k=\overline{2,n}}$, имеет только нулевое решение.

Рассмотрим функцию

$$B(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} H_j(x,\lambda)\overline{H_{n-j+1}(x,\overline{\lambda})}, \tag{3.4.20}$$

где вектор-функция $H(x,\lambda) = [H_j(x,\lambda)]^T_{j=\overline{1,n}}$ определяется соотношением

$$H(x,\lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle \widetilde{\Phi}(x,\lambda), q(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu} h(x,\mu)\, d\mu. \tag{3.4.21}$$

Запишем (3.4.19), (3.4.21) в координатах:

$$h_k(x,\lambda) + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} \int\limits_{\Gamma_{(-1)^{j-1}}} \frac{\langle \widetilde{\varphi}_k(x,\lambda), \widetilde{\Phi}_{n-j+2}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu} \times$$

$$\times \widehat{Q}_{j-1}(\mu)h_j(x,\mu)\, d\mu = 0, \tag{3.4.22}$$

$$H_k(x,\lambda)+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1}\int\limits_{\Gamma_{(-1)^{j-1}}}\frac{\langle\widetilde{\Phi}_k(x,\lambda),\widetilde{\Phi}_{n-j+2}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\times$$

$$\times\widehat{Q}_{j-1}(\mu)h_j(x,\mu)\,d\mu=0. \qquad (3.4.23)$$

Ясно, что при фиксированном $x\geqslant 0$ функции $H_k(x,\lambda)$ регулярны в $\Pi_{(-1)^k}$ и $H_k(x,\lambda)=h_k(x,\lambda)$ при $\lambda\in\Gamma_{(-1)^{k-1}}$, $k=\overline{2,n}$. Из (3.4.23) также следует, что

$$H_k(x,\lambda)-M_{k,k+1}(\lambda)H_{k+1}(x,\lambda)=-\widehat{M}_{k,k+1}(\lambda)H_{k+1}(x,\lambda)+$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\int\limits_{\Gamma_{(-1)^{j-1}}}\frac{\langle\widetilde{\Phi}_k(x,\lambda)-\widetilde{M}_{k,k+1}(\lambda)\widetilde{\Phi}_{k+1}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}_{n-j+2}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\times$$

$$\times\widehat{Q}_{j-1}(\mu)h_j(x,\mu)\,d\mu.$$

Так как функции $\widetilde{\Phi}_k(x,\lambda)-\widetilde{M}_{k,k+1}(\lambda)\widetilde{\Phi}_{k+1}(x,\lambda)$ регулярны при $\lambda\in\Gamma_{(-1)^{k-1}}$ и так как в силу (3.4.3) при $|\lambda-\mu|\leqslant\delta_0$

$$\frac{\langle\widetilde{\Phi}_k(x,\lambda),\widetilde{\Phi}_{n-j+2}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}=$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}\delta_{j,k+1}}{\lambda-\mu}\int\limits_a^x\widetilde{\Phi}_k(t,\lambda)\overline{\widetilde{\Phi}_{n-j+2}(t,\mu)}\,dt \qquad (3.4.24)$$

($a=0$ при $j\leqslant k+1$, и $a=\infty$ при $j>k+1$), то все слагаемые в сумме при $j\neq k+1$ являются регулярными при $\lambda\in\Gamma_{(-1)^k}$. Поэтому

$$H_k(x,\lambda)-M_{k,k+1}(\lambda)H_{k+1}(x,\lambda)=-\widehat{M}_{k,k+1}(\lambda)H_{k+1}(x,\lambda)+$$

$$+(-1)^{k+1}\int\limits_{\Gamma_{(-1)^k}}\frac{\langle\widetilde{\Phi}_k(x,\lambda)-\widetilde{M}_{k,k+1}(\lambda)\widetilde{\Phi}_{k+1}(x,\lambda),\widetilde{\Phi}_{n-k+2}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\times$$

$$\times\widehat{Q}_k(\mu)H_{k+1}(x,\mu)\,d\mu+\Omega_{k1}(x,\lambda)=\Big(-\widehat{M}_{k,k+1}(\lambda)+$$

$$+\int\limits_{\Gamma_{(-1)^k}}\frac{\widehat{Q}_k(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu\Big)H_{k+1}(x,\lambda)+\Omega_{k2}(x,\lambda),$$

где функции $\Omega_{ks}(x,\lambda)$ регулярны при $\lambda\in\Gamma_{(-1)^k}$. Следовательно, функции $H_k(x,\lambda)-M_{k,k+1}(\lambda)H_{k+1}(x,\lambda)$ регулярны при $\lambda\in\Gamma_{(-1)^k}$.

Из вышеприведенных свойств функций $H_k(x,\lambda)$ вытекает, что при фиксированном $x \geqslant 0$ функция $B(x,\lambda)$ регулярна в $\Pi_{(-1)^m}$ и непрерывна в $\overline{\Pi}_{(-1)^m} \setminus \{0\}$, а функция

$$B(x,\lambda) + (-1)^m M_{m,m+1}(\lambda) H_{m+1}(x,\lambda)\overline{H_{m+1}(x,\overline{\lambda})}$$

регулярна при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^m}$. Кроме того, так как $\Omega(x,\lambda)h(x,\lambda) \in B$, то из (3.4.20), (3.4.22) и (3.4.23) следует, что

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=R} B(x,\lambda)\,d\lambda = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=\varepsilon} B(x,\lambda)\,d\lambda = 0.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{\Gamma_{(-1)^m}} (-1)^m Q_m(\lambda)|h_{m+1}(x,\lambda)|^2\,d\lambda = 0.$$

Так как $(-1)^m Q_m(\lambda) > 0$, то $h_{m+1}(x,\lambda) \equiv 0$.

Покажем теперь по индукции, что $h_j(x,\lambda) \equiv 0$ при $j < m+1$. Предположим, что при некотором $k < m$ соотношения $h_{m+1}(x,\lambda) = \ldots$ $\ldots = h_{k+1}(x,\lambda) \equiv 0$ уже доказаны. Из (3.4.23) и предположения индукции следует, что функция $\rho^{n-k}H_k(x,\lambda)$ является целой по ρ и $\lim \rho^{n-k}H_k(x,\lambda) = 0$ при $|\rho| \to \infty$. Отсюда получаем, что $H_k(x,\lambda) \equiv 0$ и, следовательно, $h_k(x,\lambda) \equiv 0$.

Далее, покажем по индукции, что $h_j(x,\lambda) \equiv 0$ при $j > m+1$. Предположим, что при некотором $k \geqslant m+1$ соотношения $h_2(x,\lambda) = \ldots$ $\ldots = h_k(x,\lambda) \equiv 0$ уже доказаны. Но тогда $H_j(x,\lambda) \equiv 0$ при $j = 2,\ldots,k$. Учитывая, что функция $H_k(x,\lambda) - M_{k,k+1}(\lambda)H_{k+1}(x,\lambda)$ регулярна при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^k}$, получаем: $Q_k(\lambda)H_{k+1}(x,\lambda) \equiv 0$, $\lambda \in \Gamma_{(-1)^k}$. Так как $Q_k(\lambda) =$ $= Q_k^0\rho^{-1} + O(\rho^{-2})$, $Q_k^0 \neq 0$ при $|\rho| \to \infty$, то в силу аналитичности имеем: $H_{k+1}(x,\lambda) \equiv 0$ и, следовательно, $h_{k+1}(x,\lambda) \equiv 0$. Теорема 3.4.5 доказана. □

Теорема 3.4.6. *Для того чтобы матрица* $M(\lambda) \in \mathbf{W}$ *была матрицей Вейля для* $L \in V_N^1$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{x\geqslant 0} \gamma_\nu(x) < \infty, \quad \psi_\nu(x) \in W_{\nu+N}, \quad \nu = \overline{0, n-2}, \tag{3.4.25}$$

где функции $\gamma_\nu(x)$ *и* $\psi_\nu(x)$ *строятся по формулам* (3.4.13)–(3.4.16), *а вектор-функция* $\varphi(x,\lambda)$ *является решением уравнения* (3.4.17). *При этом дифференциальное уравнение и линейные формы* $L = (\ell, U)$ *строятся по формулам* (3.4.18).

Доказательство. Необходимость теоремы очевидна. Докажем достаточность. Пусть $\varphi(x,\lambda)$ — решение уравнения (3.4.17),

$\Omega(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\in B$. Построим функции $\Phi(x,\lambda)=[\Phi_k(x,\lambda)]^T_{k=\overline{1,n}}$ по формуле

$$\Phi(x,\lambda)=\widetilde{\Phi}(x,\lambda)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),q(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\,\varphi(x,\mu)\,d\mu \tag{3.4.26}$$

и построим дифференциальное уравнение и линейные формы $L=(\ell,U)$ по формулам (3.4.18). Покажем, что $\Phi(x,\lambda)$ — решение Вейля, а $M(\lambda)$ — матрица Вейля для L.

Функции $\Phi_k(x,\lambda)$ регулярны в $\Pi_{(-1)^k}$, и $\Phi_k(x,\lambda)=\varphi_k(x,\lambda)$, $\lambda\in\Gamma_{(-1)^{k-1}}$. Нетрудно получить, что функции $\varphi^{(\nu)}(x,\lambda)$, $\nu=\overline{0,n-1}$, абсолютно непрерывны по x и при фиксированном $x\geqslant 0$ $\rho^{-\nu}\Omega(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\in B$. Дифференцируя соотношения (3.4.17) и (3.4.26) по x и учитывая (3.4.3), получаем

$$\sum_{\nu=0}^{n}t_{j\nu}(x)\widetilde{\varphi}^{(\nu)}(x,\lambda)=\varphi^{(j)}(x,\lambda)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}r(x,\lambda,\mu)\varphi^{(j)}(x,\mu)\,d\mu,$$

$$\sum_{\nu=0}^{n}t_{j\nu}(x)\widetilde{\Phi}^{(\nu)}(x,\lambda)=\Phi^{(j)}(x,\lambda)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),q(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\,\varphi^{(j)}(x,\mu)\,d\mu.$$

Следовательно, с учетом (3.4.12)–(3.4.17), имеем

$$\widetilde{U}_{\xi0}(\widetilde{\Phi}_k(x,\lambda))=U_{\xi0}(\Phi_k(x,\lambda))+ \\ +\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\langle\widetilde{\Phi}_k(x,\lambda),q(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\Big|_{x=0}U_{\xi0}(\varphi_k(x,\mu))\,d\mu, \tag{3.4.27}$$

$$\widetilde{\ell}\widetilde{\varphi}x,\lambda)=\ell\varphi(x,\lambda)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}r(x,\lambda,\mu)\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu+ \\ +\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle\widetilde{\varphi}(x,\lambda),q(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}\,\varphi(x,\mu)\,d\mu, \tag{3.4.28}$$

$$\widetilde{\ell}(\widetilde{\Phi}(x,\lambda))=\ell(\Phi(x,\lambda))+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),q(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\,\ell\varphi(x,\mu)\,d\mu+ \\ +\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle\widetilde{\Phi}(x,\lambda),q(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}\,\varphi(x,\mu)\,d\mu. \tag{3.4.29}$$

Обозначим: $h(x,\lambda) = \ell\varphi(x,\lambda) - \lambda\varphi(x,\lambda)$. Из (3.4.28), (3.4.17) и (3.4.12) вытекает, что

$$h(x,\lambda) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(x,\lambda,\mu)h(x,\mu)\,d\mu = 0,$$

причем $\Omega(x,\lambda)h(x,\lambda) \in B$. В силу теоремы 3.4.5 имеем: $h(x,\lambda) \equiv 0$, т. е. $\ell\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda)$. Отсюда и из (3.4.29), (3.4.26) вытекает, что

$$\ell\Phi_k(x,\lambda) = \lambda\Phi_k(x,\lambda), \quad k = \overline{1,n}. \tag{3.4.30}$$

Перепишем соотношение (3.4.27) в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_{\xi 0}(\widetilde{\Phi}_k(x,\lambda)) = U_{\xi 0}(\Phi_k(x,\lambda)) &+ \\ + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j-1} \int\limits_{\Gamma_{(-1)^{j-1}}} \frac{\langle \widetilde{\Phi}_k(x,\lambda), \widetilde{\Phi}_{n-j+2}(x,\mu)\rangle_{\widetilde{\ell}}}{\lambda-\mu}\Big|_{x=0} &\times \\ \times \widehat{Q}_{j-1}(\mu)U_{\xi 0}(\Phi_k(x,\mu))\,d\mu&.\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

Используя (3.4.24) при $j \leqslant k+1$ и (3.4.31), вычисляем

$$U_{\xi 0}(\Phi_k) = \delta_{\xi k}, \quad \xi \leqslant k, \tag{3.4.32}$$

$$U_{k+1,0}(\Phi_k) = \widetilde{M}_{k,k+1}(\lambda) + \int\limits_{\Gamma_{(-1)^k}} \frac{\widehat{Q}_k(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu = M_{k,k+1}(\lambda). \tag{3.4.33}$$

С учетом (3.4.1) запишем соотношение (3.4.26) в виде

$$\begin{aligned}\Phi_k(x,\lambda) = \widetilde{\Phi}_k(x,\lambda) - \sum_{\nu+j\leqslant n-1}\Big(\sum_{s=j}^{n-\nu-1}(-1)^s C_s^j p_{s+\nu+1}^{(s-j)}(x)\Big) &\times \\ \times \widetilde{\Phi}_k^{(\nu)}(x,\lambda) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{q^{(j)}(x,\mu)}\varphi(x,\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu&.\end{aligned} \tag{3.4.34}$$

Обозначим: $G_\varepsilon = \{\lambda : \ |\lambda| \geqslant \varepsilon, \arg(\pm\lambda) \notin (-\varepsilon,\varepsilon)\}$, $\varepsilon > 0$. В области G_ε имеем: $|\lambda-\mu| \geqslant C_\varepsilon|\lambda|$. Отделим в (3.4.34) слагаемое с $j = n-1$ и получим

$$\Phi_k(x,\lambda) = \widetilde{\Phi}_k(x,\lambda)(1 + A(x,\lambda)) + B_k(x,\lambda), \tag{3.4.35}$$

где

$$A(x,\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{q^{(n-1)}(x,\mu)}\varphi(x,\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu,$$

а для функций $B_k(x,\lambda)$ в силу (3.4.25) справедлива оценка

$$|B_k(x,\lambda)| \leqslant C|\rho|^{n-k+1}|\exp(\rho R_k x)|, \quad \lambda \in G_\varepsilon. \tag{3.4.36}$$

В силу (3.4.30), (3.4.32) функция $\Phi_n(x,\lambda)$ является решением Вейля для L. Поэтому $\Phi_n(x,\lambda) = a_n^0 \exp(\rho R_n x)(1+O(\rho^{-1}))$, $a_n^0 \neq 0$ при $|\rho| \to \to \infty$. Такая же асимптотика имеет место и для $\widetilde{\Phi}_n(x,\lambda)$. Из (3.4.35) при $k=n$ вычисляем: $A(x,\lambda) = (\widetilde{\Phi}_n(x,\lambda))^{-1}(\Phi_n(x,\lambda) - B_n(x,\lambda)) - 1$ и, следовательно, $A(x,\lambda) = O(\rho^{-1})$, $|\rho| \to \infty$. Отсюда и из (3.4.35)–(3.4.36) заключаем, что

$$|\Phi_k(x,\lambda)| \leqslant C|\rho|^{k-n}|\exp(\rho R_k x)|, \quad x \geqslant x_0 > 0, \quad \lambda \in G_\varepsilon.$$

Таким образом, функции $\Phi_k(x,\lambda)$, $k=\overline{1,n}$, являются решениями Вейля для L.

Обозначим через $M^0(\lambda)$ матрицу Вейля для L. Из (3.4.33) имеем: $M_{k,k+1}(\lambda) = M^0_{k,k+1}(\lambda)$ и, следовательно, $Q_k(\lambda) = Q_k^0(\lambda)$. Как и при доказательстве теоремы 3.4.5, можно получить, что функции $\Phi_k(x,\lambda) - M_{k,k+1}(x,\lambda)\Phi_{k+1}(x,\lambda)$ регулярны при $\lambda \in \Gamma_{(-1)^k}$. Функции $\Phi_k(x,\lambda)$, $M^0_{k\xi}$ непрерывны в $\overline{\Pi}_{(-1)^k} \setminus \{0\}$, и $M^0_{k\xi}(\lambda)\rho^{\xi-k} = O(1)$. Таким образом, $L \in V_N^0$. В силу замечания к теореме 3.4.2 имеем

$$M^0_{k\xi}(\lambda) = \int\limits_{\Gamma_{(-1)^k}} \frac{Q_k(\mu)M^0_{k+1,\xi}(\lambda)}{\lambda-\mu}\,d\mu. \tag{3.4.37}$$

Так как $M(\lambda) \in \mathbf{W}$, то имеет место формула (3.4.10). Сравнивая (3.4.10) с (3.4.37), получаем: $M^0(\lambda) = M(\lambda)$, т.е. $M(\lambda)$ является матрицей Вейля для L.

Осталось показать, что $L = L^*$. Очевидно, что $L^* \in V_N^0$. Пусть $N(\lambda)$ — матрица Вейля для L^*. Тогда $N_{k,k+1}(\lambda) = \overline{M_{n-k,n-k+1}(\overline{\lambda})}$, что аналогично свойству 6 теоремы 3.4.1, но для несамосопряженного случая. С другой стороны, по условию $M_{k,k+1}(\lambda) = \overline{M_{n-k,n-k+1}(\overline{\lambda})}$. Следовательно, $M_{k,k+1}(\lambda) = N_{k,k+1}(\lambda)$, $k = \overline{1,n-1}$, и в силу (3.4.10) $M(\lambda) = N(\lambda)$. Отсюда по теореме единственности решения обратной задачи по матрице Вейля имеем: $L = L^*$, т.е. $L \in V_N^1$. Теорема 3.4.6 доказана. $\square$

Глава 4

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Исследуется обратная задача спектрального анализа для несамосопряженных систем дифференциальных уравнений на полуоси. Дана постановка обратной задачи, доказана теорема единственности, получена конструктивная процедура решения обратной задачи и необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

§ 4.1. Свойства матрицы Вейля

4.1.1. Основные понятия. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений на полуоси:

$$\ell Y(x) := Q_0 Y'(x) + Q(x)Y(x) = \rho Y(x), \quad x > 0. \tag{4.1.1}$$

Здесь $Y = [y_k]^T_{k=\overline{1,n}}$ — вектор-столбец (T — знак транспонирования), ρ — спектральный параметр, $Q_0 = \mathrm{diag}[q_k]_{k=\overline{1,n}}$, $Q(x) = [q_{kj}(x)]_{k,j=\overline{1,n}}$, где $q_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$, — различные комплексные числа (т. е. $q_k \neq q_j$ при $k \neq j$), и $q_{kk}(x) \equiv 0$. Матрица $Q(x)$ называется потенциалом. Через W_N обозначим множество функций $f(x)$, $x > 0$, таких, что $f^{(\nu)}(x)$, $\nu = \overline{0, N-1}$, абсолютно непрерывны и $f^{(\nu)}(x) \in L(0,\infty)$, $\nu = \overline{0,N}$. Будем говорить, что $\ell \in V_N$, если $q_{kj}(x) \in W_N$, $k,j = \overline{1,n}$. Будем рассматривать оператор ℓ в классах V_N, $N \geqslant 1$. Обозначим $B_0 = Q_0^{-1}$, т. е. $B_0 = \mathrm{diag}[\beta_k]_{k=\overline{1,n}}$, где $\beta_k = 1/q_k$.

Обратным задачам для систем дифференциальных уравнений посвящено много работ (см. исторический очерк). Некоторые системы исследуются аналогично оператору Штурма–Лиувилля. К ним относятся системы Дирака, $AKNS$ и их обобщения. Для таких систем может быть использован метод оператора преобразования, и полученные результаты в основном аналогичны результатам для оператора Штурма–Лиувилля. Однако в общем случае решение обратных задач для систем вида (4.1.1) сталкивается с существенно более серьезными трудностями, характерными и для случая операторов высших порядков вида (3.1.1) с интегрируемыми коэффициентами. В данной главе исследуется обратная задача для несамосопряженных систем вида (4.1.1) на полуоси в общем случае, т. е. с произвольным расположением корней характеристического многочлена и с произвольным поведением спектра. В качестве основной спектральной характеристики для (4.1.1) вводится и изучается матрица Вейля, которая является аналогом матрицы Вейля, введенной в гл. 3 для оператора (3.1.1). Обратная задача для систем (4.1.1) оказывается существенно более трудной, чем для операторов (3.1.1), что связано с появлением новых качественных аспектов в поведении матрицы Вейля и в исследовании основного уравнения. Развивая идеи метода спектральных отображений, мы даем конструктивную процедуру решения обратной задачи восстановления системы (4.1.1) по заданной матрице Вейля, доказываем теорему единственности и получаем необходимые и достаточные условия разрешимости этой нелинейной обратной задачи.

Приведем постановку обратной задачи. Известно (см. [237, 209]), что ρ-плоскость можно разбить на секторы $S_j = \{\rho\colon\ \arg\rho \in (\theta_j, \theta_{j+1})\}$, $j = \overline{0, 2r-1}$, $0 \leqslant \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{2r-1} < 2\pi$, в каждом из которых существует перестановка $i_k = i_k(S_j)$ чисел $1, \ldots, n$, такая, что числа $R_k = R_k(S_j)$ вида $R_k = \beta_{i_k}$ обладают свойством

$$\operatorname{Re}(\rho R_1) < \ldots < \operatorname{Re}(\rho R_n), \quad \rho \in S_j. \tag{4.1.2}$$

Доопределим $\theta_{j+2kr} := \theta_j$, $S_{j+2kr} := S_j$, $k \in \mathbf{Z}$, и обозначим $\Gamma_j = \{\rho\colon\ \arg\rho = \theta_j\}$. Ясно, что $\Gamma_{j+2kr} := \Gamma_j$, $k \in \mathbf{Z}$. Отметим, что число $2r$ секторов S_j зависит от расположения чисел $\{\beta_k\}_{k=\overline{1,n}}$ на комплексной плоскости, причем $1 \leqslant r \leqslant n(n-1)/2$. Например, если все β_k лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, то $r = 1$. Этот случай называется вырожденным.

Пусть задана матрица $h = [h_{\xi\nu}]_{\xi,\nu=\overline{1,n}}$, $\det h \neq 0$, где $h_{\xi\nu}$ — комплексные числа. Рассмотрим линейные формы $U(Y) = [U_\xi(Y)]^T_{\xi=\overline{1,n}}$ вида $U(Y) = hY(0)$, т. е. $U_\xi(Y) = [h_{\xi 1}, \ldots, h_{\xi n}]Y(0)$. Обозначим $\Omega^0_{mk}(j_1, \ldots, j_m) = \det[h_{\xi, j_\nu}]_{\xi=\overline{1,m-1},k;\ \nu=\overline{1,m}}$, $\Omega^0_m(j_1, \ldots, j_m) := \Omega^0_{mm}(j_1, \ldots, j_m)$, $\Omega^0_0 := 1$. Пусть

$$\Omega^0_m(i_1, \ldots, i_m) \neq 0, \quad m = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{0, 2r-1}, \tag{4.1.3}$$

где $i_k = i_k(S_j)$ — вышеупомянутая перестановка для сектора S_j. Условие (4.1.3) будем называть условием информативности для пары $L = (\ell, U)$. Системы, которые не удовлетворяют условию информативности, обладают качественно другими закономерностями при постановке и исследовании обратных задач и в данной работе не рассматриваются. Без ограничения общности можно считать, что выполняются следующие условия нормировки: $\det h = 1$ и для некоторого фиксированного сектора (для определенности для сектора S_0) имеем: $\Omega^0_{mm}(i_1, \ldots, i_m) = 1$, $m = \overline{1, n-1}$. Везде в дальнейшем будем считать, что условия информативности и нормировки выполнены.

Отметим, что при любой матрице Q_0 условие информативности (4.1.3) выполняется для широкого класса матриц h. В самом деле, обозначим через Ω множество матриц h, у которых все миноры $\Omega^0_m(j_1, \ldots, j_m)$ отличны от нуля при любых $m = \overline{1, n}$ и $j_1, \ldots, j_m$ $(1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leqslant n)$. Ясно, что если $h \in \Omega$, то условие информативности (4.1.3) выполняется для любой матрицы Q_0 (т. е. для любой системы вида (4.1.1)).

Матрица Вейля. Пусть вектор-функции $\Phi_m(x,\rho)=[\Phi_{km}(x,\rho)]^T_{k=\overline{1,n}}$, $m=\overline{1,n}$, являются решениями системы (4.1.1) при условиях $U_\xi(\Phi_m)=\delta_{\xi m}$, $\xi=\overline{1,m}$, а также $\Phi_m(x,\rho)=O(\exp(\rho R_m x))$, $x\to\infty$, $\rho\in S_j$, в каждом секторе S_j со свойством (4.1.2). Здесь и в дальнейшем $\delta_{\xi m}$ — символ Кронекера. Ниже будет показано, что эти условия однозначно определяют решения $\Phi_m(x,\rho)$. Положим $M_{m\xi}(\rho)=U_\xi(\Phi_m)$, $\xi>m$, $M(\rho)=[M_{m\xi}(\rho)]_{m,\xi=\overline{1,n}}$, $M_{m\xi}(\rho)=\delta_{\xi m}$ при $\xi\leqslant m$, $\Phi(x,\rho)=[\Phi_1(x,\rho),\ldots,\Phi_n(x,\rho)]=[\Phi_{km}(x,\rho)]_{k,m=\overline{1,n}}$. Функции $\Phi_m(x,\rho)$ и $M_{m\xi}(\rho)$ называются решениями Вейля и функциями Вейля соответственно. Матрица $M(\rho)$ называется матрицей Вейля (МВ) или спектром $L=(\ell,U)$. Отметим, что МВ является треугольной матрицей и $\det M(\rho)\equiv 1$.

Постановка обратной задачи. Зафиксируем матрицу Q_0, т. е. числа $\beta_k=1/q_k$, $k=\overline{1,n}$, считаем известными и фиксированными. Обратная задача ставится следующим образом: по заданной МВ $M(\rho)$ построить пару $L=(\ell,U)$.

4.1.2. Свойства матрицы Вейля. По построению имеем

$$U(\Phi)=h\Phi(0)=\mathcal{N}(\rho),\quad \text{где}\quad \mathcal{N}(\rho)=M^T(\rho). \tag{4.1.4}$$

Пусть $C(x,\rho)=[C_{km}(x,\rho)]_{k,m=\overline{1,n}}$ — матричное решение системы (4.1.1) при начальных условиях $U(C)=hC(0,\rho)=E$ (здесь и далее через E обозначаем единичную матрицу соответствующей размерности или единичный оператор в соответствующем банаховом пространстве). Другими словами, вектор-столбцы $C_m(x,\rho)=[C_{km}(x,\rho)]^T_{k=\overline{1,n}}$, $m=\overline{1,n}$, являются решениями (4.1.1) при начальных условиях $U_\xi(C_m)=\delta_{\xi m}$, $\xi,m=\overline{1,n}$. Функции $C_{km}(x,\rho)$ являются целыми по ρ при каждом фиксированном x. Ясно, что

$$\Phi(x,\rho)=C(x,\rho)\mathcal{N}(\rho)\quad\text{или}\quad \Phi_m(x,\rho)=C_m(x,\rho)+\sum_{k=m+1}^{n}M_{mk}(\rho)C_k(x,\rho), \tag{4.1.5}$$

$$\det C(x,\rho)=\det\Phi(x,\rho)=\exp(\rho(\beta_1+\ldots+\beta_n)x). \tag{4.1.6}$$

В ρ-плоскости проведем разрезы вдоль лучей Γ_j и обозначим через $\Gamma_j^\pm=\{\rho:\ \arg\rho=\theta_j\pm 0\}$ берега разрезов. Положим $\overline{S}_j=S_j\cup\Gamma_j^+\cup\Gamma_{j+1}^-$ и обозначим $\Sigma=\mathbf{C}\setminus\Big(\bigcup\limits_{j=0}^{2r-1}\Gamma_j\Big)=\bigcup\limits_{j=0}^{2r-1}S_j$ — ρ-плоскость без разрезов вдоль лучей Γ_j, а $\overline{\Sigma}=\bigcup\limits_{j=0}^{2r-1}\overline{S}_j$ — замыкание Σ (различаем берега разрезов).

Зафиксируем $j=\overline{0,2r-1}$. При $\rho\in\Gamma_j$ строгие неравенства в (4.1.2) в некоторых местах превращаются в равенства. Пусть $m_i=m_i(j)$, $p_i=p_i(j)$, $i=\overline{1,s}$, таковы, что при $\rho\in\Gamma_j$

$$\operatorname{Re}(\rho R_{m_i-1})<\operatorname{Re}(\rho R_{m_i})=\ldots$$
$$\ldots=\operatorname{Re}(\rho R_{m_i+p_i})<\operatorname{Re}(\rho R_{m_i+p_i+1}),\quad i=\overline{1,s},$$

где $R_k=R_k(S_j)$. Обозначим $N_j:=\{m:\ m=\overline{m_1,m_1+p_1-1},\ldots,\overline{m_s,m_s+p_s-1}\}$, $J_m:=\{j:\ m\in N_j\}$, $\gamma_m=\bigcup\limits_{j\in J_m}\Gamma_j$. Пусть $\Sigma_m=\mathbf{C}\setminus\gamma_m$ — ρ-плоскость без разрезов вдоль лучей из γ_m, а $\overline{\Sigma}_m$ — замыкание Σ_m (различаем берега разрезов). Ясно, что область $\Sigma_m=\bigcup\limits_{\nu}S_{m\nu}$ состоит из секторов $S_{m\nu}$, каждый из которых является объединением нескольких секторов S_j с одним и тем же набором $\{R_\xi\}_{\xi=\overline{1,m}}$.

Пример 4.1.1. Пусть $n=4$, $\beta_1=1$, $\beta_2=2$, $\beta_3=3$, $\beta_4=-i$. Пусть $\rho=\sigma+i\tau$. Тогда $r=4$, $\Gamma_0=\{\rho:\ \tau=\sigma,\ \sigma>0\}$, $\Gamma_1=\{\rho:\ \tau=2\sigma,\ \sigma>0\}$, $\Gamma_2=\{\rho:\ \tau=3\sigma,\ \sigma>0\}$, $\Gamma_3=\{\rho:\ \sigma=0,\ \tau>0\}$, $\Gamma_4=\{\rho:\ \tau=\sigma,\ \sigma<0\}$, $\Gamma_5=\{\rho:\ \tau=2\sigma,\ \sigma<0\}$, $\Gamma_6=\{\rho:\ \tau=3\sigma,\ \sigma<0\}$, $\Gamma_7=\{\rho:\ \sigma=0,\ \tau<0\}$, $N_0=N_6=\{1\}$, $N_1=N_5=\{2\}$, $N_2=N_4=\{3\}$, $N_3=\{1,2\}$, $N_7=\{2,3\}$, $J_1=\{0,3,6\}$, $J_2=\{1,3,5\}$, $J_3=\{2,4,7\}$, $\gamma_1=\Gamma_0\cup\Gamma_3\cup\Gamma_6$, $\gamma_2=\Gamma_1\cup\Gamma_3\cup\Gamma_5$, $\gamma_3=\Gamma_2\cup\Gamma_4\cup\Gamma_7$.

Теорема 4.1.1. (i) *Функции Вейля* $M_{mk}(\rho)$, $k>m$ *являются аналитическими в* Σ_m *за исключением не более чем счетного ограниченного множества* Λ'_m *полюсов и непрерывны в* $\overline{\Sigma}_m$ (*т. е. они непрерывны в каждом секторе* $\overline{S}_{m\nu}$) *за исключением ограниченного множества* Λ_m. *Точнее, при* $j\in J_m$, $\rho\in\Gamma_j\setminus\Lambda_m$ *существуют конечные пределы* $M^{\pm}_{mk}(\rho)=\lim M_{mk}(z)$, $z\to\rho$, $z\in\Sigma_m$, $\pm(\arg z-\theta_j)>0$. *На* γ_m *функции* $M_{mk}(\rho)$ *имеют разрезы.*

(ii) *Если* $\ell\in V_N$, $N\geqslant 1$, *то при* $|\rho|\to\infty$, $\rho\in\overline{S}_j$ *имеем*

$$M_{mk}(\rho)=\sum_{\nu=0}^{N}\frac{\mu^{\nu}_{mk}}{\rho^{\nu}}+o\Big(\frac{1}{\rho^{N}}\Big),\tag{4.1.7}$$

где

$$\mu^0_{mk}=\frac{\Omega^0_{mk}(i_1,\ldots,i_m)}{\Omega^0_m(i_1,\ldots,i_m)},\quad i_k=i_k(S_j),\tag{4.1.8}$$

и коэффициенты $\mu^{\nu}_{mk}=\mu^{\nu}_{mk}(S_j)$ *зависят от* j,h *и* $Q^{(i)}(0)$, $i=\overline{0,\nu-1}$.

Доказательство. Пусть $\ell\in V_N$, $N\geqslant 1$. Зафиксируем $\alpha\geqslant 0$. Известно (см. [243, 217]), что при $x\geqslant 0$, $\rho\in\overline{\Sigma}$, $\rho\geqslant\rho_\alpha$ ($\rho_\alpha=O(\max\limits_{k,j}\|q_{kj}(x)\|_{L(\alpha,\infty)})$) существует фундаментальная система решений (ФСР) $\mathcal{D}_\alpha=\{Y_k(x,\rho)\}_{k=\overline{1,n}}$ системы (4.1.1) со следующими свойствами:

1) $Y_k(x,\rho)$ непрерывны при $x \geqslant 0$, $\rho \in \overline{S}_j$, $|\rho| \geqslant \rho_\alpha$ при каждом $j=\overline{0,2r-1}$;

2) $Y_k(x,\rho)$ аналитичны при $\rho \in S_j$, $|\rho| \geqslant \rho_\alpha$ при каждых $j=\overline{0,2r-1}$, $x \geqslant 0$;

3) для $|\rho| \to \infty$, $\rho \in \overline{\Sigma}$, равномерно по $x \geqslant \alpha$

$$Y_k(x,\rho)=\exp(\rho\beta_k x)\Big(\sum_{\mu=0}^{N}\frac{g_{\mu k}(x)}{\rho^\mu}+o\Big(\frac{1}{\rho^N}\Big)\Big),$$

$$g_{0k}(x)\equiv[\delta_{\nu k}]^T_{\nu=\overline{1,n}}. \qquad (4.1.9)$$

Зафиксируем $j=\overline{0,2r-1}$. Пусть $\rho \in \overline{S}_j$, $\alpha=0$. Обозначим

$$\Delta^0_{mk}(\rho)=\det[U_\xi(Y_{i_\nu})]_{\xi=\overline{1,m-1},k;\ \nu=\overline{1,m}}. \qquad (4.1.10)$$

С помощью ФСР $\mathcal{D}_\alpha$ имеем представление

$$\Phi_m(x,\rho)=\sum_{k=1}^{n} d_{mk}(\rho)Y_k(x,\rho), \quad m=\overline{1,n}.$$

Используя краевые условия на $\Phi_m(x,\rho)$, получаем

$$\Phi_m(x,\rho)=\sum_{k=1}^{m} d_{m,i_k}(\rho)Y_{i_k}(x,\rho), \qquad (4.1.11)$$

$$\sum_{k=1}^{m} d_{m,i_k}(\rho)U_\xi(Y_{i_k})=\delta_{\xi m}, \quad \xi=\overline{1,m}.$$

Поэтому

$$d_{m,i_k}(\rho)=\frac{(-1)^{m+k}}{\Delta^0_{mm}(\rho)}\det[U_\xi(Y_{i_\nu})]_{\xi=\overline{1,m-1};\ \nu=\overline{1,m}\setminus k}\,. \qquad (4.1.12)$$

В частности, из (4.1.9), (4.1.11) и (4.1.12) вытекает, что при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in \overline{S}_j$, равномерно по $x \geqslant 0$

$$\Phi_m(x,\rho)=\sum_{k=1}^{m}\exp(\rho R_k x)\Big([\delta_{m,i_k} d^0_{m,i_k}]^T_{k=\overline{1,n}}+O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big), \qquad (4.1.13)$$

где

$$d^0_{m,i_k}=\frac{(-1)^{m+k}}{\Omega^0_m(i_1,\ldots,i_m)}\det[h_{\xi,i_\nu}]_{\xi=\overline{1,m-1};\ \nu=\overline{1,m}\setminus k}\,, \quad i_k=i_k(S_j).$$

В частности, это дает

$$d^0_{m,i_m}=\frac{\Omega^0_{m-1}(i_1,\ldots,i_{m-1})}{\Omega^0_m(i_1,\ldots,i_m)}\neq 0. \qquad (4.1.14)$$

Так как $M_{mk}(\rho) = U_k(\Phi_m)$, то из (4.1.11) и (4.1.12) имеем

$$M_{mk}(\rho) = \frac{\Delta^0_{mk}(\rho)}{\Delta^0_{mm}(\rho)}\,.$$

Отсюда, с учетом (4.1.9) и (4.1.10), приходим к (4.1.7).

Фиксируем $\alpha \geqslant 0$, $m = \overline{1, n-1}$. Известным методом (см., например, [250]) можно доказать, что существует ФСР $\mathcal{D}_{\alpha m} = \{Y^0_{km}(x,\rho)\}_{k=\overline{1,n}}$, $x \geqslant 0$, $\rho \in \overline{\Sigma}$, $|\rho| \geqslant \rho_\alpha$ системы (4.1.1) со свойствами:
1) $Y^0_{km}(x,\rho) = Y_{i_k}(x,\rho)$, $k = \overline{m+1, n}$, $i_k = i_k(S_j)$;
2) при $k = \overline{1,m}$ функции $Y^0_{km}(x,\rho)$ аналитичны при $\rho \in \Sigma_m$, $|\rho| \geqslant \rho_\alpha$ и непрерывны при $x \geqslant 0$, $\rho \in \overline{\Sigma}_m$, $|\rho| \geqslant \rho_\alpha$;
3) $Y^0_{km}(x,\rho) = O(\exp(\rho R_m x))$, $|\rho| \to \infty$, $\rho \in \overline{\Sigma}_m$, равномерно по $x \geqslant \alpha$.

Таким образом, решения $Y^0_{km}(x,\rho)$, $k = \overline{1,m}$, аналитичны в секторах $S_{m\nu}$ более широких, чем S_j. Повторяя предыдущие рассуждения для ФСР $\mathcal{D}_{\alpha m}$, получаем

$$M_{mk}(\rho) = \frac{\Delta^1_{mk}(\rho)}{\Delta^1_{mm}(\rho)}, \quad \Delta^1_{mk}(\rho) := \det[U_\xi(Y^0_{\nu m})]_{\xi=\overline{1,m-1},k;\ \nu=\overline{1,m}}\,. \tag{4.1.15}$$

Функции $\Delta^1_{mk}(\rho)$ аналитичны при $\rho \in \Sigma_m$, $|\rho| \geqslant \rho_\alpha$ и непрерывны при $\rho \in \overline{\Sigma}_m$, $|\rho| \geqslant \rho_\alpha$. Отсюда, используя (4.1.15), (4.1.7) и произвольность α, получаем утверждение (i) теоремы 4.1.1. ☐

Отметим, что из (4.1.7) и (4.1.13) вытекают следующие оценки:

$$|M_{mk}(\rho)| \leqslant C,\ |\Phi_{km}(x,\rho)| \leqslant C|\exp(\rho R_m x)|,$$

$$\rho \in \overline{S}_j,\ |\rho| \geqslant \rho_0,\ R_m = R_m(S_j). \tag{4.1.16}$$

Обозначим $\Lambda' = \bigcup\limits_m \Lambda'_m$, $\Lambda = \bigcup\limits_m \Lambda_m$. Рассмотрим дифференциальную систему и линейные формы $L^* = (\ell^*, U^*)$ вида

$$\ell^* Z(x) := -Z'(x)Q_0 + Z(x)Q(x) = \rho Z(x), \tag{4.1.17}$$

$$U^*(Z) = Z(0)h^*,$$

где $Z = [z_k]_{k=\overline{1,n}}$ — вектор-строка, $h^* = [h^*_{k\xi}]_{k,\xi=\overline{1,n}} := Q_0 h^{-1}$. Тогда имеем: $U^*(Z) = [U^*_n(Z), \dots, U^*_1(Z)]$, где $U^*_{n-\xi+1}(Z) = Z(0)[h^*_{k\xi}]^T_{k=\overline{1,n}}$.

Ясно, что

$$Z(x)\ell Y(x) - \ell^* Z(x)Y(x) = \frac{d}{dx}\Big(Z(x)Q_0Y(x)\Big), \tag{4.1.18}$$

$$Z(0)Q_0Y(0) = U^*(Z)U(Y) = \sum_{\xi=1}^n U^*_{n-\xi+1}(Z)U_\xi(Y). \tag{4.1.19}$$

Кроме того, из (4.1.18) вытекает, что если $\ell Y(x,\rho)=\rho Y(x,\rho)$, $\ell^* Z(x,\mu)=\mu Z(x,\mu)$, то

$$(\rho-\mu)Z(x,\mu)Y(x,\rho)=\frac{d}{dx}\Big(Z(x,\mu)Q_0Y(x,\rho)\Big). \tag{4.1.20}$$

Обозначим $R_m^*:=-R_{n-m+1}$. Пусть вектор-функции $\Phi_m^*(x,\rho)=[\Phi_{km}^*(x,\rho)]_{k=\overline{1,n}}$, $m=\overline{1,n}$, являются решениями системы (4.1.17) при условиях $U_\xi^*(\Phi_m^*)=\delta_{\xi m}$, $\xi=\overline{1,m}$, а также $\Phi_m^*(x,\rho)=O(\exp(\rho R_m^* x))$, $x\to\infty$, $\rho\in S_j$, в каждом секторе S_j со свойством (4.1.2). Эти условия однозначно определяют решения $\Phi_m^*(x,\rho)$. Положим $\Phi^*(x,\rho)=[\Phi_{n-m+1}^*(x,\rho)]_{m=\overline{1,n}}^T=[\Phi_{n-m+1,k}^*(x,\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$, а также $M_{mk}^*(\rho)=U_k^*(\Phi_m^*)$, $M^*(\rho)=[M_{n-\xi+1,n-k+1}^*(\rho)]_{k,\xi=\overline{1,n}}$, $\mathcal{N}^*(\rho)=(M^*)^T(\rho)$.

Тогда

$$\Phi^*(0,\rho)h^*=U^*(\Phi^*)=\mathcal{N}^*(\rho). \tag{4.1.21}$$

Обозначим: $\gamma_m^*=\gamma_{n-m}$, $\Sigma_m^*=\Sigma_{n-m}$, $\Lambda_m^*=\Lambda_{n-m}$, $\Lambda_m'^*=\Lambda_{n-m}'$. Свойства матрицы $M^*(\rho)$ аналогичны свойствам матрицы $M(\rho)$. В частности, функции $M_{mk}^*(\rho)$, $k>m$ аналитичны в Σ_m^* за исключением множества $\Lambda_m'^*$ полюсов и непрерывны в $\overline{\Sigma}_m^*$ за исключением множества Λ_m^*. На γ_m^* функции $M_{mk}^*(\rho)$ имеют разрезы. При $|\rho|\to\infty$, $\rho\in\overline{S}_j$,

$$M_{mk}^*(\rho)=\sum_{\nu=0}^{N}\frac{\mu_{mk}^{*,\nu}}{\rho^\nu}+o\Big(\frac{1}{\rho^N}\Big), \tag{4.1.22}$$

где коэффициенты $\mu_{mk}^{*,\nu}=\mu_{mk}^{*,\nu}(S_j)$ зависят от j,h и $Q^{(i)}(0)$, $i=\overline{0,\nu-1}$. Кроме того,

$$|M_{mk}^*(\rho)|\leqslant C,\ |\Phi_{mk}^*(x,\rho)|\leqslant C|\exp(\rho R_m^* x)|,\ \ \rho\in\overline{S}_j,\ |\rho|\geqslant\rho_0. \tag{4.1.23}$$

Положим $C^*(x,\rho)=[C_{n-m+1}^*(x,\rho)]_{m=\overline{1,n}}^T$, где векторы $C_m^*(x,\rho)=[C_{mk}^*(x,\rho)]_{k=\overline{1,n}}$ являются решениями системы (4.1.17) при начальных условиях $U_\xi^*(C_m^*)=\delta_{\xi m}$, $\xi,m=\overline{1,n}$ (т. е. $U^*(C^*)=C^*(0,\rho)h^*=E$). Функции $C_{mk}^*(x,\rho)$ являются целыми по ρ при каждом фиксированном x. Ясно, что

$$\Phi^*(x,\rho)=\mathcal{N}^*(\rho)C^*(x,\rho)\quad\text{или}\quad \Phi_{n-m}^*(x,\rho)=C_{n-m}^*(x,\rho)+ \\ +\sum_{k=n-m+1}^{n}M_{n-m,k}^*(\rho)C_k^*(x,\rho), \tag{4.1.24}$$

$$\det C^*(x,\rho)=\det\Phi^*(x,\rho)=(\det Q_0)^{-1}\exp(-\rho(\beta_1+\ldots+\beta_n)x).$$

Лемма 4.1.1. *Справедливы соотношения*

$$\Phi^*(x,\rho) = (Q_0\Phi(x,\rho))^{-1}, \tag{4.1.25}$$

$$M^*(\rho) = M^{-1}(\rho), \quad \mathcal{N}^*(\rho) = \mathcal{N}^{-1}(\rho), \tag{4.1.26}$$

$$\begin{gathered} C(x,\rho) = \Phi(x,\rho)\mathcal{N}^*(\rho) \Leftrightarrow C_\nu(x,\rho) = \Phi_\nu(x,\rho) + \\ + \sum_{k=\nu+1}^{n} M^*_{n-k+1,n-\nu+1}(\rho)\Phi_k(x,\rho), \\ C^*(x,\rho) = \mathcal{N}(\rho)\Phi^*(x,\rho) \Leftrightarrow C^*_{n-\nu}(x,\rho) = \Phi^*_{n-\nu}(x,\rho) + \\ + \sum_{k=n-\nu+1}^{n} M_{n-k+1,\nu+1}(\rho)\Phi^*_k(x,\rho). \end{gathered} \tag{4.1.27}$$

Доказательство. Обозначим $Z = (Q_0\Phi)^{-1}$. Так как $ZQ_0\Phi = E$, то $Z'Q_0\Phi + ZQ_0\Phi' = 0$, или $Q_0\Phi' = -Z^{-1}Z'Q_0\Phi$. Так как Φ удовлетворяет (1.1), то $\rho\Phi - Q\Phi = -Z^{-1}Z'Q_0\Phi$, или $-Z^{-1}Z'Q_0 + Q = \rho E$. Таким образом,

$$\ell^* Z(x,\rho) = \rho Z(x,\rho). \tag{4.1.28}$$

Пусть $Z(x,\rho) = [Z_k(x,\rho)]^T_{k=\overline{1,n}}$, где $Z_k(x,\rho)$, $k = \overline{1,n}$, — строки матрицы $Z(x,\rho)$. Используя (4.1.19), вычисляем

$$E = Z(0,\rho)Q_0\Phi(0,\rho) = \sum_{\xi=1}^{n} U^*_{n-\xi+1}(Z)U_\xi(\Phi),$$

или

$$\sum_{\xi=1}^{n} U^*_{n-\xi+1}(Z_k)U_\xi(\Phi_m) = \delta_{mk}, \quad k,m = \overline{1,n}. \tag{4.1.29}$$

Последовательно подставляя в (4.1.29) значения $m = n, n-1, \ldots, 1$ и учитывая соотношения $U_\xi(\Phi_m) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1,m}$, получаем

$$U^*_{n-\xi+1}(Z_k) = \delta_{\xi k}, \quad \xi = \overline{k,n}. \tag{4.1.30}$$

Кроме того, в силу (4.1.16) имеем

$$|Z_k(x,\rho)| \leqslant C|\exp(\rho R^*_{n-k+1}x)|. \tag{4.1.31}$$

Из (4.1.28), (4.1.30) и (4.1.31) вытекает, что $Z_k(x,\rho) = \Phi^*_{n-k+1}(x,\rho)$, т. е. $Z(x,\rho) = \Phi^*(x,\rho)$, и (4.1.25) доказано. Далее, используя (4.1.25), (4.1.19), (4.1.4) и (4.1.21), выводим

$$E = \Phi^*(0,\rho)Q_0\Phi(0,\rho) = U^*(\Phi^*)U(\Phi) = \mathcal{N}^*(\rho)\mathcal{N}(\rho),$$

т. е. верно (4.1.26). Теперь, в силу (4.1.5) и (4.1.24), соотношения (4.1.27) становятся очевидными. ☐

Лемма 4.1.2. *Справедливы соотношения*

$$\Phi^*(0,\mu)Q_0\Phi(0,\rho) = \mathcal{N}^*(\mu)\mathcal{N}(\rho), \tag{4.1.32}$$

$$\frac{\Phi^*(x,\mu)Q_0\Phi(x,\rho)}{\rho-\mu} = \frac{\mathcal{N}^*(\mu)\mathcal{N}(\rho)}{\rho-\mu} + \int\limits_0^x \Phi^*(t,\mu)\Phi(t,\rho)\,dt. \tag{4.1.33}$$

Доказательство. В силу (4.1.4) и (4.1.21) имеем

$$\mathcal{N}^*(\mu)\mathcal{N}(\rho) = \Phi^*(0,\mu)h^*h\Phi(0,\rho) = \Phi^*(0,\mu)Q_0\Phi(0,\rho),$$

т. е. (4.1.32) доказано. Соотношение (4.1.33) является следствием (4.1.20) и (4.1.32). □

Установим теперь так называемые структурные свойства МВ, которые играют весьма важную роль при решении обратной задачи. При $\xi = \overline{0, n-2}$ построим функции $B^{\xi}_{mk}(\rho)$, $m = \overline{1, n-\xi-1}$, $k = \overline{m+\xi+1, n}$ по следующим рекуррентным формулам:

$$B^0_{mk}(\rho) = M_{mk}(\rho),$$

$$B^{\xi}_{mk}(\rho) = B^{\xi-1}_{mk}(\rho) - B^{\xi-1}_{m,m+\xi}(\rho)B^0_{m+\xi,k}(\rho). \tag{4.1.34}$$

Используя (4.1.34), можно записать явные формулы для $B^{\xi}_{mk}(\rho)$:

$$B^{\xi}_{mk}(\rho) = M_{mk}(\rho) + \\ + \sum_{\nu=1}^{\xi}(-1)^{\nu} \sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_\nu\leqslant\xi} M_{m,m+j_1}(\rho)M_{m+j_1,m+j_2}(\rho)\ldots M_{m+j_\nu,k}(\rho).$$

Лемма 4.1.3. *Функции $B^{\xi}_{mk}(\rho)$ аналитичны в $\Sigma_{m+\xi}\setminus\Lambda'_{m+\xi}$ непрерывны в $\overline{\Sigma}_{m+\xi}\setminus\Lambda_{m+\xi}$ и имеют разрезы на $\gamma_{m+\xi}$.*

Доказательство. В силу (4.1.26) при $k = m+\xi+1$ имеем

$$B^{\xi}_{m,m+\xi+1}(\rho) = -M^*_{n-m-\xi,n-m+1}(\rho). \tag{4.1.35}$$

Это дает утверждение леммы при $k = m+\xi+1$. Для $k > m+\xi+1$ меняем местами линейные формы U_k и $U_{m+\xi+1}$ и повторяем предыдущие рассуждения. □

Теорема 4.1.2.

$$\begin{gathered}\textit{Функции } B^{m-\nu}_{\nu k}(\rho) \textit{ аналитичны на } \Gamma_j\setminus\Lambda'_m \\ \textit{при } j\notin J_m,\quad 1\leqslant\nu\leqslant m\leqslant n-1,\quad m+1\leqslant k\leqslant n.\end{gathered} \tag{4.1.36}$$

В самом деле, так как $j\notin J_m$, то $\Gamma_j\subset\Sigma_m$, и, следовательно, (4.1.36) *следует из леммы* 4.1.3. □

Пример 4.1.2. Пусть $n = 4$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = -i$ (см. пример 4.1.1). Тогда (4.1.36) принимает вид: функции

$M_{1k}(\rho) - M_{12}(\rho)M_{2k}(\rho)$, $k = 3, 4$ аналитичны на $\Gamma_0, \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_6, \Gamma_7$ без Λ_2', а функции $M_{24}(\rho) - M_{23}(\rho)M_{34}(\rho)$, $M_{14}(\rho) - M_{12}(\rho)M_{24}(\rho) - M_{13}(\rho)M_{34}(\rho) + M_{12}(\rho)M_{23}(\rho)M_{34}(\rho)$, аналитичны на $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_6$ без Λ_3'. Отметим, что согласно теореме 4.1.1 функции $M_{1k}(\rho)$ имеют разрезы на $\Gamma_0, \Gamma_3, \Gamma_6$, функции $M_{2k}(\rho)$ имеют разрезы на $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5$, а функция $M_{34}(\rho)$ имеет разрез на $\Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_7$.

§ 4.2. Решение обратной задачи по матрице Вейля

4.2.1. Теорема единственности. Наряду с $L = (\ell, U)$ рассмотрим пару $\widetilde{L} = (\widetilde{\ell}, \widetilde{U})$ того же вида, но с другими матрицами $\widetilde{Q}, \widetilde{h}$ (напомним, что матрица Q_0 известна априори и фиксированна). Везде в дальнейшем считаем, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к L, то $\widetilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к $\widetilde{L}$, и $\widehat{\alpha} := \alpha - \widetilde{\alpha}$. Пусть $\ell, \widetilde{\ell} \in V_N$, $N \geqslant 1$. Определим матрицу $\mathcal{P}(x, \rho) = [\mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho)]_{\xi, k = \overline{1, n}}$ по формуле

$$\mathcal{P}(x, \rho) = \Phi(x, \rho)\widetilde{\Phi}^{-1}(x, \rho). \tag{4.2.1}$$

Другими словами,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho) = (\det \widetilde{\Phi}(x, \rho))^{-1} \det[\widetilde{\Phi}_{1\nu}(x, \rho), \ldots, \widetilde{\Phi}_{k-1,\nu}(x, \rho), \\ \Phi_{\xi\nu}(x, \rho), \widetilde{\Phi}_{k+1,\nu}(x, \rho), \ldots, \widetilde{\Phi}_{n\nu}(x, \rho)]_{\nu = \overline{1, n}}. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Перепишем (4.2.1) в виде

$$\mathcal{P}(x, \rho)\widetilde{\Phi}(x, \rho) = \Phi(x, \rho). \tag{4.2.3}$$

Лемма 4.2.1. (i) *При* $|\rho| \geqslant \rho_0$ *равномерно по* $x \geqslant 0$

$$|\mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho)| \leqslant C, \quad \xi, k = \overline{1, n}. \tag{4.2.4}$$

(ii) *При* $|\rho| \to \infty$, $\rho \in S_j$, $\arg \rho = \mathrm{const}$, *равномерно по* $x \geqslant 0$,

$$\mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho) = O\Big(\frac{1}{\rho}\Big), \ \xi \neq k, \quad \mathcal{P}_{kk}(x, \rho) = \mathcal{P}_k^j + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big),$$
$$\xi, k = \overline{1, n}, \tag{4.2.5}$$

где

$$\mathcal{P}_k^j := \frac{\Omega_{k-1}^0(i_1, \ldots, i_{k-1})}{\Omega_k^0(i_1, \ldots, i_k)} \cdot \frac{\widetilde{\Omega}_k^0(i_1, \ldots, i_k)}{\widetilde{\Omega}_{k-1}^0(i_1, \ldots, i_{k-1})}, \quad i_k = i_k(S_j). \tag{4.2.6}$$

Если $h = \widetilde{h}$, *то* (4.2.5) *верно при* $\rho \in \overline{S_j}$, *и* $\mathcal{P}_k^j = 1$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, 2r - 1}$.

Утверждения леммы вытекают из (4.2.2) в виду (4.1.13), (4.1.14) и (4.1.16). Докажем теперь теорему единственности решения обратной задачи восстановления L по МВ.

Теорема 4.2.1. *Если $M(\rho) = \widetilde{M}(\rho)$, то $L = \widetilde{L}$. Таким образом, задание МВ $M(\rho)$ однозначно определяет потенциал $Q(x)$ и матрицу h.*

Доказательство. Преобразуем матрицу $\mathcal{P}(x,\rho)$, используя (4.2.1) и (4.1.5). При условиях теоремы имеем

$$\mathcal{P}(x,\rho) = \Phi(x,\rho)\widetilde{\Phi}^{-1}(x,\rho) = C(x,\rho)\mathcal{N}(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^{-1}(\rho)\widetilde{C}^{-1}(x,\rho) = \\ = C(x,\rho)\widetilde{C}^{-1}(x,\rho).$$

Поэтому из (4.1.6) вытекает, что при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ матрица-функция $\mathcal{P}(x,\rho)$ является целой по ρ. Используя (4.2.4) и теорему Лиувилля [206, с. 209], выводим, что $\mathcal{P}_{\xi k}(x,\rho) \equiv \mathcal{P}_{\xi k}(x)$, т. е. функции $\mathcal{P}_{\xi k}$ не зависят от ρ. Вместе с (4.2.5) это дает: $\mathcal{P}_{\xi k}(x,\rho) \equiv 0$ при $\xi \neq k$ и $\mathcal{P}_{kk}(x,\rho) \equiv \mathcal{P}_k$. С другой стороны, $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k^j$, где $\mathcal{P}_k^j$ определены в (4.2.6). Так как h и $\widetilde{h}$ удовлетворяют условиям нормировки, то для сектора S_0 получаем, что $\Omega_k^0(i_1,\ldots,i_k) = \widetilde{\Omega}_k^0(i_1,\ldots,i_k)$, $k = \overline{0,n}$, и, следовательно, $\mathcal{P}_k = 1$, $k = \overline{1,n}$. Таким образом, $\mathcal{P}(x,\rho) \equiv E$, где E — единичная матрица. Вместе с (4.2.3) это дает: $\Phi(x,\rho) \equiv \widetilde{\Phi}(x,\rho)$, и, следовательно, $Q(x) = \widetilde{Q}(x)$. В силу (4.1.4) имеем: $h\Phi(0,\rho) = \mathcal{N}(\rho)$, поэтому $h = \widetilde{h}$. □

Следствие 4.2.1. *Задание чисел $\mu_{mk}^0 = \mu_{mk}^0(S_j)$ вида* (4.1.8) *при всех m,k,j однозначно определяет матрицу линейных форм $h = [h_{\xi\nu}]_{\xi,\nu=\overline{1,n}}$.*

В самом деле, если $Q(x) \equiv 0$, то $M_{mk}(\rho) \equiv \mu_{mk}^0(S_j)$, $\rho \in \overline{S_j}$, при всех m,k,j, и наше утверждение следует из теоремы 4.2.1. □

Замечание 4.2.1. Матрицу h можно конструктивно построить по заданным числам $\{\mu_{mk}^0(S_j)\}$. В самом деле, так как следствие 4.2.1 верно, в частности, и в вырожденном случае, а числа $\{\mu_{mk}^0(S_j)\}$ не зависят от $\{\beta_k\}$, то для построения h достаточно взять $\{\mu_{mk}^0(S_j)\}$ только для двух секторов S_0 и S_r: $\{\mu_{mk}^0(S_0)\}$ и $\{\mu_{mk}^0(S_r)\}$. Вместе с условиями нормировки это дает n^2 соотношений для построения n^2 чисел $h_{\xi\nu}$, $\xi,\nu = \overline{1,n}$. Нетрудно увидеть, что эти нелинейные уравнения могут быть сведены к линейной алгебраической системе относительно $h_{\xi\nu}$, $\xi,\nu = \overline{1,n}$, определитель которой в силу следствия 4.2.1 отличен от нуля.

4.2.2. Основное уравнение обратной задачи. Центральным местом при решении обратной задачи является получение и исследование так называемого основного уравнения, которое является особым линейным интегральным уравнением (см. (4.2.28)). В этом пункте дается вывод основного уравнения и доказывается его однозначная разрешимость в сответствующем банаховом пространстве. Опираясь на решение основного уравнения, мы получаем явные формулы для построения L по заданной МВ.

Рассмотрим пары $L = (\ell, U)$ и $\widetilde{L} = (\widetilde{\ell}, \widetilde{U})$, где $\ell, \widetilde{\ell} \in V_N$ при некотором $N \geqslant 1$, причем

$$\widehat{M}(\rho) = O(\rho^{-1}), \quad |\rho| \to \infty, \tag{4.2.7}$$

т. е. $\mu^0_{mk}(S_j) = \widetilde{\mu}^0_{mk}(S_j)$ при всех m, k, j. Согласно (4.1.7) и следствию 4.2.1, условие (4.2.7) равносильно условию $h = \widetilde{h}$. В ρ-плоскости рассмотрим контур $\omega = \omega^0 \cup \omega^+ \cup \omega^-$ (с обходом против часовой стрелки), где ω^0 — ограниченный замкнутый контур, охватывающий множество $\Lambda \cup \widetilde{\Lambda} \cup \{0\}$ (т. е. $\Lambda \cup \widetilde{\Lambda} \cup \{0\} \subset \operatorname{int} \omega^0$), и $\omega^\pm = \bigcup\limits_{j=0}^{2r-1} \omega_j^\pm$, $\omega_j^\pm = \Gamma_j^\pm \setminus \operatorname{int} \omega^0$. Обозначим $J_\omega = \{\rho : \ \rho \notin \omega \cup \operatorname{int} \omega^0)\}$.

Теорема 4.2.2. *Справедливы соотношения*

$$\widetilde{\Phi}(x, \rho) = \Phi(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\omega \Phi(x, \mu) \widetilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \widetilde{\Phi}(x, \rho) \frac{d\mu}{\mu - \rho},$$

$$\rho \in J_\omega, \tag{4.2.8}$$

$$\frac{\Phi^*(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \rho)}{\rho - \theta} - \frac{\widetilde{\Phi}^*(x, \theta) Q_0 \widetilde{\Phi}(x, \rho)}{\rho - \theta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\omega \Phi^*(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \mu) \widetilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \widetilde{\Phi}(x, \rho) \, \frac{d\mu}{(\mu - \theta)(\rho - \mu)} \, ,$$

$$\rho, \theta \in J_\omega \, . \tag{4.2.9}$$

В (4.2.8) (и везде в дальнейшем, где это необходимо) интеграл понимается в смысле главного значения ([88, с. 27]).

Доказательство. Обозначим $\omega_R = \Big(\omega \cap \{\rho : \ |\rho| \leqslant R\}\Big) \bigcup \{\rho : \ |\rho| \leqslant R\}$. По теореме Коши ([206, с. 166]) имеем

$$\mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho) - \delta_{\xi k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\omega_R} \frac{\mathcal{P}_{\xi k}(x, \mu) - \delta_{\xi k}}{\rho - \mu} \, d\mu,$$

$$\rho \in J_\omega \cap \{\xi : \ \xi < R\}, \quad \xi, k = \overline{1, n}. \tag{4.2.10}$$

Так как $h = \widetilde{h}$, то согласно лемме 4.2.1 получаем: $\mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho) - \delta_{\xi k} = O(\rho^{-1})$ при $|\rho| \to \infty$, $\ \xi, k = \overline{1, n}$, и, следовательно,

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu| = R} \frac{\mathcal{P}_{\xi k}(x, \mu) - \delta_{\xi k}}{\rho - \mu} \, d\mu = 0.$$

Поэтому при $R\to\infty$ (4.2.10) дает

$$\mathcal{P}_{\xi k}(x,\rho)-\delta_{\xi k}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\frac{\mathcal{P}_{\xi k}(x,\mu)}{\rho-\mu}\,d\mu,\quad \rho\in J_{\omega}\,,\quad \xi,k=\overline{1,n},$$

или, что то же самое,

$$\mathcal{P}(x,\rho)=E+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\frac{\mathcal{P}(x,\mu)}{\rho-\mu}\,d\mu,\quad \rho\in J_{\omega}\,. \tag{4.2.11}$$

Аналогично вычисляем

$$\frac{\mathcal{P}(x,\rho)-\mathcal{P}(x,\theta)}{\rho-\theta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\frac{\mathcal{P}(x,\mu)}{(\mu-\theta)(\rho-\mu)}\,d\mu,\quad \rho,\theta\in J_{\omega}\,. \tag{4.2.12}$$

Используя (4.2.11) и (4.2.3), выводим

$$\Phi(x,\rho)=\widetilde{\Phi}(x,\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\frac{\mathcal{P}(x,\mu)\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{\rho-\mu}\,d\mu.$$

Учитывая (4.2.1), получаем

$$\Phi(x,\rho)=\widetilde{\Phi}(x,\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\frac{\Phi(x,\mu)\widetilde{\Phi}^{-1}(x,\mu)\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{\rho-\mu}\,d\mu.$$

Вместе с (4.1.25) это дает (4.2.8). Покажем, что

$$\Phi^*(x,\theta)Q_0(\mathcal{P}(x,\rho)-\mathcal{P}(x,\theta))\widetilde{\Phi}(x,\rho)=$$
$$=\Phi^*(x,\theta)Q_0\Phi(x,\rho)-\widetilde{\Phi}^*(x,\theta)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho). \tag{4.2.13}$$

В самом деле, согласно (4.2.1) имеем: $(\Phi(x,\theta))^{-1}\mathcal{P}(x,\theta)=(\widetilde{\Phi}(x,\theta))^{-1}$, или $(Q_0\Phi(x,\theta))^{-1}Q_0\mathcal{P}(x,\theta)=(Q_0\widetilde{\Phi}(x,\theta))^{-1}Q_0$. Используя (4.1.25), получаем: $\Phi^*(x,\theta)Q_0\mathcal{P}(x,\theta)=\widetilde{\Phi}^*(x,\theta)Q_0$. Вместе с (4.2.3) это дает (4.2.13).

Из (4.2.12) и (4.2.13) вытекает, что

$$\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Phi(x,\rho)}{\rho-\theta}-\frac{\widetilde{\Phi}^*(x,\theta)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{\rho-\theta}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\mathcal{P}(x,\mu)\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{(\mu-\theta)(\rho-\mu)}\,d\mu,\ \rho,\theta\in J_{\omega}\,.$$

Ввиду (4.2.1) и (4.1.25) это дает (4.2.9). □

Замечание 4.2.2. Подынтегральные выражения в (4.2.8) и (4.2.9) на каждом разрезе $\omega_j^{\pm}$ устроены очень удачно: они, как легко видеть, состоят из слагаемых двух типов. Слагаемые первой группы имеют разрезы на Γ_j, но они убывают на бесконечности и после соответствующих преобразований дадут абсолютно сходящиеся интегралы. Слагаемые второй группы аналитичны на Γ_j и одновременно они содержат растущие на бесконечности экспоненты. Слагаемые второй группы, в силу их аналитичности, могут быть уничтожены за счет склейки берегов ω_j^+ и ω_j^- (и они должны быть уничтожены, чтобы убрать растущие экспоненты). Именно этим мы сейчас и займемся. Для этого докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4.2.2. *При $\nu = \overline{1, n-1}$, $\xi = \overline{0, n-\nu}$ имеют место соотношения*

$$\Phi_\nu(x,\rho) - \sum_{k=\nu+1}^{\nu+\xi} B_{\nu k}^{k-\nu-1}(\rho)\Phi_k(x,\rho) = C_\nu(x,\rho) + \\ + \sum_{k=\nu+\xi+1}^{n} B_{\nu k}^{\xi}(\rho) C_k(x,\rho). \quad (4.2.14)$$

Доказательство проводится индукцией по ξ. При $\xi = 0$ равенство (4.2.14) совпадает с (4.1.5). Предположим, что при некотором s соотношение (4.2.14) верно для $\xi = \overline{0, s-1}$. Умножая (4.2.14) при $\xi = 0$ на $B_{m,m+\nu}^{\nu-1}(\rho)$ и вычитая полученное соотношение из (4.2.14) для $\xi = s-1$, приходим к (4.2.14) при $\xi = s$. ☐

Следствие 4.2.2. *При $\nu = \overline{1, n-1}$, $\xi = \overline{0, n-\nu}$ справедливы соотношения*

$$\Phi_\nu(x,\rho) - \sum_{k=\nu+1}^{\nu+\xi} M_{n-k+1,n-\nu+1}^*(\rho)\Phi_k(x,\rho) = C_\nu(x,\rho) + \\ + \sum_{k=\nu+\xi+1}^{n} B_{\nu k}^{\xi}(\rho) C_k(x,\rho). \quad (4.2.15)$$

Соотношение (4.2.15) является следствием (4.2.14) и (4.1.35).

Лемма 4.2.3. *Фиксируем $j = \overline{0, 2r-1}$. Пусть $\overline{m, m+p-1} \in N_j$, $m-1, m+p \notin N_j$. Обозначим*

$$C_\nu^0(x,\rho) = \Phi_\nu(x,\rho) + \sum_{k=\nu+1}^{m+p} M_{n-k+1,n-\nu+1}^*(\rho)\Phi_k(x,\rho), \\ \nu = \overline{m, m+p-1},$$

$$C_{n-\nu}^{0,*}(x,\rho) = \Phi_{n-\nu}^*(x,\rho) + \sum_{k=n-\nu+1}^{n-m+1} M_{n-k+1,\nu+1}(\rho)\Phi_k^*(x,\rho), \\ \nu = \overline{m, m+p-1}.$$

Тогда вектор-функции $C_\nu^0(x,\rho)$ и $C_{n-\nu}^{0,*}(x,\rho)$, $\nu = \overline{m, m+p-1}$, являются аналитическими на $\Gamma_j \setminus \Lambda'$.

Доказательство. В силу (4.2.15)

$$C_\nu^0(x,\rho) = C_\nu(x,\rho) + \sum_{k=m+p+1}^{n} B_{\nu k}^{m+p-\nu}(\rho) C_k(x,\rho).$$

Так как $m+p \notin N_j$, то согласно теореме 4.1.2 функции $B_{\nu k}^{m+p-\nu}(\rho)$ являются аналитическими на $\Gamma_j \setminus \Lambda'$, и, следовательно, вектор-функции $C_\nu^0(x,\rho)$ аналитичны на $\Gamma_j \setminus \Lambda'$. Вектор-функции $C_{n-\nu}^{0,*}(x,\rho)$ изучаются аналогично. ☐

Определим матрицы $A(\rho) = [a_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$ и $\widetilde{A}(\rho) = [\widetilde{a}_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$ по формулам

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \mathcal{N}^*(\rho)\widehat{\mathcal{N}}(\rho) = -\widehat{\mathcal{N}}^*(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}(\rho), \\ \widetilde{A}(\rho) &= \widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho)\widehat{\mathcal{N}}(\rho) = -\widehat{\mathcal{N}}^*(\rho)\mathcal{N}(\rho). \end{aligned}$$

Очевидно, что $a_{mk}(\rho) = 0$, $\widetilde{a}_{mk}(\rho) = 0$ при $m \leqslant k$, а при $m > k$ имеем

$$a_{mk}(\rho) = \sum_{\xi=k+1}^{m} M^*_{n-m+1,n-\xi+1}(\rho)\widehat{M}_{k\xi}(\rho) = \\ = -\sum_{\xi=k}^{m-1} \widehat{M}^*_{n-m+1,n-\xi+1}(\rho)\widetilde{M}_{k\xi}(\rho), \quad (4.2.16)$$

$$\widetilde{a}_{mk}(\rho) = \sum_{\xi=k+1}^{m} \widetilde{M}^*_{n-m+1,n-\xi+1}(\rho)\widehat{M}_{k\xi}(\rho) = \\ = -\sum_{\xi=k}^{m-1} \widehat{M}^*_{n-m+1,n-\xi+1}(\rho)M_{k\xi}(\rho). \quad (4.2.17)$$

Лемма 4.2.4. *Матрицы-функции* $\Phi(x,\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho) - \Phi(x,\rho) \times A(\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho)$ *и* $\widetilde{\Phi}(x,\rho)\Phi^*(x,\rho) - \widetilde{\Phi}(x,\rho)\widetilde{A}(\rho)\Phi^*(x,\rho)$ *являются целыми по* ρ.

Доказательство. Используя (4.1.27) и (4.1.26), вычисляем

$$\Phi(x,\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho) = C(x,\rho)\mathcal{N}(\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho) = C(x,\rho)\widehat{\mathcal{N}}(\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho) + \\ + C(x,\rho)\widetilde{\mathcal{N}}(\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho) = \Phi(x,\rho)\mathcal{N}^*(\rho)\widehat{\mathcal{N}}(\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho) + \\ + C(x,\rho)\widetilde{C}^*(x,\rho) = \Phi(x,\rho)A(\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho) + C(x,\rho)\widetilde{C}^*(x,\rho).$$

Так как $C(x,\rho)\widetilde{C}^*(x,\rho)$ является целой по ρ при каждом x, то матрица-функция $\Phi(x,\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho) - \Phi(x,\rho)A(\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho)$ также является целой по ρ. Аналогично доказывается и второе утверждение леммы. ☐

Фиксируем $j = \overline{0, 2r-1}$. Пусть $N_j = \{\overline{m_1, m_1+p_1-1}, \ldots \ldots, \overline{m_s, m_s+p_s-1}\}$, $m_i - 1, m_i + p_i \notin N_j$, $i = \overline{1, s}$. Введем матрицы $A^{(j)}(\rho) = [a^{(j)}_{k\xi}(\rho)]_{k,\xi=\overline{1,n}}$, $\widetilde{A}^{(j)}(\rho) = [\widetilde{a}^{(j)}_{k\xi}(\rho)]_{k,\xi=\overline{1,n}}$, $\rho \in \Gamma_j^{\pm}$, где

$$a^{(j)}_{k\xi}(\rho) = \begin{cases} a_{k\xi}(\rho) & \text{при} \quad m_i \leqslant \xi < k \leqslant m_i + p_i, \quad i = \overline{1, s}, \\ 0 & \text{— в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\widetilde{a}^{(j)}_{k\xi}(\rho) = \begin{cases} \widetilde{a}_{k\xi}(\rho) & \text{при} \quad m_i \leqslant \xi < k \leqslant m_i + p_i, \quad i = \overline{1, s}, \\ 0 & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

Лемма 4.2.5. *Матрицы-функции* $\Phi(x,\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho) - \Phi(x,\rho) \times A^{(j)}(\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho)$ *и* $\widetilde{\Phi}(x,\rho)\Phi^*(x,\rho) - \widetilde{\Phi}(x,\rho)\widetilde{A}^{(j)}(\rho)\Phi^*(x,\rho)$ *являются аналитичными на* $\Gamma_j \setminus \Lambda'$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 4.2.4, но вместо (4.1.27) используется лемма 4.2.3, и вычисления проводятся по блокам, соответствующим $\overline{m_i, m_i + p_i - 1} \in N_j$, $i = \overline{1, s}$. ☐

Для $\rho \in \omega$ введем матрицы $A_0(\rho), \widetilde{A}_0(\rho), F(x,\rho) = [F_{\nu k}(x,\rho)]_{\nu,k=\overline{1,n}}$ по формулам

$$A_0(\rho) = \begin{cases} A^{(j)}(\rho), & \rho \in \omega_j^{\pm}, \\ A(\rho), & \rho \in \omega^0, \end{cases} \qquad \widetilde{A}_0(\rho) = \begin{cases} \widetilde{A}^{(j)}(\rho), & \rho \in \omega_j^{\pm}, \\ \widetilde{A}(\rho), & \rho \in \omega^0, \end{cases}$$

$$F(x,\rho) = \Phi(x,\rho)A_0(\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho). \tag{4.2.18}$$

Из (4.1.16), (4.1.23) и (4.2.16) вытекает, что

$$|F_{\nu k}(x,\rho)| \leqslant C\delta(\rho), \quad x \geqslant 0, \quad \rho \in \omega^{\pm}, \quad \nu, k = \overline{1, n}, \tag{4.2.19}$$

где

$$\delta(\rho) = \max_{m,k} |\widehat{M}_{mk}(\rho)|. \tag{4.2.20}$$

Используя леммы 4.2.4 и 4.2.5, перепишем соотношения (4.2.8), (4.2.9) в виде

$$\widetilde{\Phi}(x,\rho) = \Phi(x,\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega} F(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho}, \qquad \rho \in J_\omega\,, \tag{4.2.21}$$

$$\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Phi(x,\rho)}{\theta-\rho} - \frac{\widetilde{\Phi}^*(x,\theta)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{\theta-\rho} + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega} \frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0F(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{(\theta-\mu)(\mu-\rho)}\,d\mu = 0, \qquad \rho, \theta \in J_\omega\,. \tag{4.2.22}$$

Из (4.2.7), (4.2.19) и (4.2.20) вытекает, что интегралы в (4.2.21) и (4.2.22) сходятся абсолютно. Таким образом, мы убрали растущие экспоненты.

Определим матрицу $\Omega(\mu,\rho)=[\omega_{km}(\mu,\rho)]_{k,m=\overline{1,n}}$ по формуле

$$\Omega(\mu,\rho)=A_0(\mu)\widetilde{\mathcal N}^*(\mu)\widetilde{\mathcal N}(\rho). \tag{4.2.23}$$

Очевидно, что $\omega_{km}(\mu,\rho)\equiv 0$ при $k\leqslant m$. Из (4.1.32), (4.2.18) и (4.2.21) при $x=0$ вытекает, что

$$\Phi(0,\rho)=\widetilde\Phi(0,\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Phi(0,\mu)\Omega(\mu,\rho)\,\frac{d\mu}{\rho-\mu}\,.$$

Умножая это равенство слева на вектор-строку $[h_{\xi 1},\ldots,h_{\xi n}]$ и учитывая соотношение $h=\widetilde h$, вычисляем

$$\begin{gathered}U_\xi(\Phi_m(x,\rho))=\widetilde U_\xi(\widetilde\Phi_m(x,\rho))+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Bigl(\sum_{k=m+1}^{n}U_\xi(\Phi_k(x,\mu))\omega_{km}(\mu,\rho)\Bigr)\frac{d\mu}{\rho-\mu}\,.\end{gathered} \tag{4.2.24}$$

Лемма 4.2.6. *Справедливо соотношение*

$$\widetilde A_0(\rho)A_0(\rho)=A_0(\rho)\widetilde A_0(\rho)=\widetilde A_0(\rho)-A_0(\rho),\quad \rho\in\omega. \tag{4.2.25}$$

Доказательство. При $\rho\in\omega^0$ имеем

$$\begin{aligned}\widetilde A_0(\rho)A_0(\rho)&=\widetilde{\mathcal N}^*(\rho)\widehat{\mathcal N}(\rho)\mathcal N^*(\rho)\widehat{\mathcal N}(\rho)=\\ &=\widetilde{\mathcal N}^*(\rho)\widehat{\mathcal N}(\rho)-\mathcal N^*(\rho)\widehat{\mathcal N}(\rho)=\widetilde A_0(\rho)-A_0(\rho),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_0(\rho)\widetilde A_0(\rho)&=\mathcal N^*(\rho)\widehat{\mathcal N}(\rho)\widetilde{\mathcal N}^*(\rho)\widehat{\mathcal N}(\rho)=\\ &=\widetilde{\mathcal N}^*(\rho)\widehat{\mathcal N}(\rho)-\mathcal N^*(\rho)\widehat{\mathcal N}(\rho)=\widetilde A_0(\rho)-A_0(\rho),\end{aligned}$$

и (4.2.25) доказано. При $\rho\in\omega_j^{\pm}$ вычисления аналогичны и делаются по блокам, соответствующим структуре множеств N_j. ☐

Перейдем теперь непосредственно к выводу основного уравнения обратной задачи. При этом будем опираться на (4.2.21) (соотношение (4.2.22) будет использоваться для доказательства разрешимости основного уравнения). В контуре ω удобнее склеить берега разрезов. Для этого в ρ-плоскости рассмотрим контур $\omega^*:=\omega^0\cup\omega^1$, где $\omega^1=\bigcup\limits_{j=0}^{2r-1}\omega_j^1$, $\omega_j^1:=\{\rho:\ \rho\in\Gamma_j\setminus\omega^0\}$, причем ω_j^1 ориентирован в сторону возрастания модуля ρ. Из (4.1.33) вытекает, что

$$\begin{gathered}\Phi^{*\mp}(x,\rho)Q_0\Phi^{\pm}(x,\rho)\equiv\mathcal N^{*,\mp}(\rho)\mathcal N^{\pm}(\rho),\ \Phi^{*\pm}(x,\rho)Q_0\Phi^{\pm}(x,\rho)\equiv E,\\ \rho\in\omega^1.\end{gathered} \tag{4.2.26}$$

При $\rho\in\omega^*$ определим матрицы $\varphi(x,\rho)$, $\widetilde\varphi(x,\rho)$, $G(x,\rho)$, $\widetilde G(x,\rho)$,

$S(\rho)$ и $\widetilde{S}(\rho)$ по формулам

$$\varphi(x,\rho)=\begin{cases}[\Phi^+(x,\rho),\Phi^-(x,\rho)], & \rho\in\omega^1,\\ \Phi(x,\rho), & \rho\in\omega^0,\end{cases}$$

$$\widetilde{\varphi}(x,\rho)=\begin{cases}[\widetilde{\Phi}^+(x,\rho),\widetilde{\Phi}^-(x,\rho)], & \rho\in\omega^1,\\ \widetilde{\Phi}(x,\rho), & \rho\in\omega^0,\end{cases}$$

$$G(x,\rho)=\begin{bmatrix}-(\widetilde{A}_0(\rho)\Phi^*(x,\rho))^+Q_0\\ (\widetilde{A}_0(\rho)\Phi^*(x,\rho))^-Q_0\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{G}(x,\rho)=\begin{bmatrix}-(A_0(\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho))^+Q_0\\ (A_0(\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho))^-Q_0\end{bmatrix},\quad \rho\in\omega^1,$$

$$G(x,\rho)=\widetilde{A}_0(\rho)\Phi^*(x,\rho)Q_0,\quad \widetilde{G}(x,\rho)=A_0(\rho)\widetilde{\Phi}^*(x,\rho)Q_0,\quad \rho\in\omega^0,$$

$$S(\rho)=E+\frac{1}{2}\,\widetilde{A}_0(\rho),\quad \widetilde{S}(\rho)=E-\frac{1}{2}\,A_0(\rho),\quad \rho\in\omega^0,$$

$$S(\rho)=\begin{bmatrix}E+\frac{1}{2}\,\widetilde{A}_0^+(\rho) & -\frac{1}{2}\Big(\widetilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho)\Big)^+\mathcal{N}^-(\rho)\\ -\frac{1}{2}\Big(\widetilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho)\Big)^-\mathcal{N}^+(\rho) & E+\frac{1}{2}\,\widetilde{A}_0^-(\rho)\end{bmatrix},\quad \rho\in\omega^1,$$

$$\widetilde{S}(\rho)=\begin{bmatrix}E-\frac{1}{2}\,A_0^+(\rho) & \frac{1}{2}\Big(A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho)\Big)^+\widetilde{\mathcal{N}}^-(\rho)\\ \frac{1}{2}\Big(A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho)\Big)^-\widetilde{\mathcal{N}}^+(\rho) & E-\frac{1}{2}\,A_0^-(\rho)\end{bmatrix},\quad \rho\in\omega^1.$$

Здесь и далее $f^\pm := f_{|\omega^\pm}$. Обозначим

$$r(x,\mu,\rho)=\frac{G(x,\mu)\varphi(x,\rho)}{\mu-\rho},\quad \widetilde{r}(x,\mu,\rho)=\frac{\widetilde{G}(x,\mu)\widetilde{\varphi}(x,\rho)}{\mu-\rho},\quad \rho,\mu\in\omega^*.$$

Из (4.2.26) следует, что матрицы-функции

$$\mathcal{D}(\rho):=G(x,\rho)\varphi(x,\rho),\quad \widetilde{\mathcal{D}}(\rho):=\widetilde{G}(x,\rho)\widetilde{\varphi}(x,\rho) \tag{4.2.27}$$

не зависят от x.

Теорема 4.2.3. *Справедливы соотношения*

$$\widetilde{\varphi}(x,\rho)=\varphi(x,\rho)\widetilde{S}(\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}\varphi(x,\mu)\widetilde{r}(x,\mu,\rho)\,d\mu,\quad \rho\in\omega^*, \tag{4.2.28}$$

$$r(x,\theta,\rho)\widetilde{S}(\rho)-S(\theta)\widetilde{r}(x,\theta,\rho)+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}r(x,\theta,\mu)\widetilde{r}(x,\mu,\rho)\,d\mu=0,\quad \rho,\theta\in\omega^*. \tag{4.2.29}$$

Доказательство. Используя (4.1.33), (4.2.18), (4.2.26) и формулы Сохоцкого [88], получаем из (4.2.21):

$$\widetilde{\Phi}(x,\rho)=\Phi(x,\rho)\Big(E-\frac{1}{2}\,A_0(\rho)\Big)+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}F(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho},\quad \rho\in\omega^0,$$

$$\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)=\Phi^{\pm}(x,\rho)\pm\\ \pm\frac{1}{2}\Big((\Phi(x,\rho)A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^- -(\Phi(x,\rho)A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^+\Big)\widetilde{\mathcal{N}}^{\pm}(\rho)+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}F(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho},\quad \rho\in\omega^1.$$

Переходя к контуру ω^*, перепишем эти соотношения в виде

$$\widetilde{\Phi}(x,\rho)=\Phi(x,\rho)\Big(E-\frac{1}{2}\,A_0(\rho)\Big)+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^0}\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho}+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^1}\Big((\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu))^- -\\ -(\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu))^+\Big)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho},\quad \rho\in\omega^0,$$

$$\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)=\Phi^{\pm}(x,\rho)\Big(E-\frac{1}{2}\,A^{\pm}{}_0(\rho)\Big)+\frac{1}{2}(\Phi(x,\rho)A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^{\mp}\widetilde{\mathcal{N}}^{\pm}(\rho)+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^0}\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho}+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^1}\Big((\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu))^- -\\ -(\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu))^+\Big)Q_0\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho},\quad \rho\in\omega^1,$$

т. е. приходим к (4.2.28). Аналогично, используя (4.1.33), (4.2.18), (4.2.26) и формулы Сохоцкого, получаем из (4.2.22):

$$\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Phi(x,\rho)}{\theta-\rho}\Big(E-\frac{1}{2}\,A_0(\rho)\Big)-\frac{\widetilde{\Phi}^*(x,\theta)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{\theta-\rho}+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Phi(x,\mu)}{\theta-\mu}\cdot\frac{A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{\mu-\rho}\,d\mu=0,\\ \rho\in\omega^0,\quad \theta\in J_{\omega}\,,$$

$$\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Phi^{\pm}(x,\rho)}{\theta-\rho} - \frac{\widetilde{\Phi}^*(x,\theta)Q_0\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)}{\theta-\rho} \pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\,\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Big((\Phi(x,\rho)A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^- - (\Phi(x,\rho)A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^+\Big)\widetilde{\mathcal{N}}^{\pm}(\rho)}{\theta-\rho} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Phi(x,\mu)}{\theta-\mu}\cdot\frac{A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)}{\mu-\rho}\,d\mu = 0,$$

$$\rho\in\omega^1,\ \theta\in J_\omega\,.$$

Применяя теперь формулы Сохоцкого по θ, вычисляем

$$\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Phi(x,\rho)}{\theta-\rho}\Big(E-\frac{1}{2}\,A_0(\rho)\Big) - \frac{\widetilde{\Phi}^*(x,\theta)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{\theta-\rho} +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{A_0(\theta)\widetilde{\Phi}^*(x,\theta)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{\theta-\rho} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^1}\Bigg(\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Big((\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu))^-}{(\theta-\mu)(\mu-\rho)} -$$

$$-\ \frac{(\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu))^+\Big)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{(\theta-\mu)(\mu-\rho)}\Bigg)\,d\mu +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^0}\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{(\theta-\mu)(\mu-\rho)}\,d\mu = 0, \qquad \rho,\theta\in\omega^0,$$

$$\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Phi^{\pm}(x,\rho)}{\theta-\rho} - \frac{\widetilde{\Phi}^*(x,\theta)Q_0\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)}{\theta-\rho} + \frac{1}{2}\,\frac{A_0(\theta)\widetilde{\Phi}^*(x,\theta)Q_0\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)}{\theta-\rho} \pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\,\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Big((\Phi(x,\rho)A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^- - (\Phi(x,\rho)A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^+\Big)\widetilde{\mathcal{N}}^{\pm}(\rho)}{\theta-\rho} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^1}\Bigg(\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Big((\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu))^-}{(\theta-\mu)(\mu-\rho)} -$$

$$-\frac{(\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu))^+\Big)Q_0\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)}{(\theta-\mu)(\mu-\rho)}\Bigg)\,d\mu +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^0}\frac{\Phi^*(x,\theta)Q_0\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)}{(\theta-\mu)(\mu-\rho)}\,d\mu = 0,$$

$$\rho\in\omega^1,\ \theta\in\omega^0,$$

$$\frac{\Phi^{*\pm}(x,\theta)Q_0\Phi(x,\rho)}{\theta-\rho}\Big(E-\frac{1}{2}\,A_0(\rho)\Big)-\frac{\widetilde{\Phi}^{*\pm}(x,\theta)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{\theta-\rho}\mp$$

$$\mp\frac{1}{2}\mathcal{N}^{*\pm}(\theta)\frac{\Big((\mathcal{N}(\theta)A_0(\theta)\widetilde{\Phi}^*(x,\theta))^- -(\mathcal{N}(\theta)A_0(\theta)\widetilde{\Phi}^*(x,\theta))^+\Big)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{\theta-\rho}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^1}\Bigg(\frac{\Phi^{*\pm}(x,\theta)Q_0\Big((\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu))^-}{(\theta-\mu)(\mu-\rho)}-$$

$$-\frac{(\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu))^+\Big)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{(\theta-\mu)(\mu-\rho)}\Bigg)\,d\mu+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^0}\frac{\Phi^{*\pm}(x,\theta)Q_0\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)}{(\theta-\mu)(\mu-\rho)}\,d\mu=0,$$

$$\rho\in\omega^0,\ \theta\in\omega^1,$$

$$\frac{\Phi^{*\pm}(x,\theta)Q_0\Phi^{\pm}(x,\rho)}{\theta-\rho}-\frac{\widetilde{\Phi}^{*\pm}(x,\theta)Q_0\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)}{\theta-\rho}\pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\frac{\Phi^{*\pm}(x,\theta)Q_0\Big((\Phi(x,\rho)A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^- -(\Phi(x,\rho)A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^+\Big)\widetilde{\mathcal{N}}^{\pm}(\rho)}{\theta-\rho}\mp$$

$$\mp\frac{1}{2}\mathcal{N}^{*\pm}(\theta)\frac{\Big((\mathcal{N}(\theta)A_0(\theta)\widetilde{\Phi}^*(x,\theta))^- -(\mathcal{N}(\theta)A_0(\theta)\widetilde{\Phi}^*(x,\theta))^+\Big)Q_0\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)}{\theta-\rho}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^1}\Bigg(\frac{\Phi^{*\pm}(x,\theta)Q_0\Big((\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu))^-}{(\theta-\mu)(\mu-\rho)}-$$

$$-\frac{(\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu))^+\Big)Q_0\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)}{(\theta-\mu)(\mu-\rho)}\Bigg)\,d\mu+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^0}\frac{\Phi^{*\pm}(x,\theta)Q_0\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}^{\pm}(x,\rho)}{(\theta-\mu)(\mu-\rho)}\,d\mu=0,\quad \rho,\theta\in\omega^1.$$

Умножая эти соотношения слева на $\widetilde{A}_0^{\pm}(\theta)$ при $\theta\in\omega^1$ и на $\widetilde{A}_0(\theta)$ при $\theta\in\omega^0$ соответственно и используя лемму 4.2.6, приходим к (4.2.29). □

Меняя местами $L=(\ell,U)$ и $\widetilde{L}=(\widetilde{\ell},\widetilde{U})$, получаем симметрично к (4.2.28):

$$\varphi(x,\rho)=\widetilde{\varphi}(x,\rho)S(\rho)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}\widetilde{\varphi}(x,\mu)r(x,\mu,\rho)\,d\mu,\quad \rho\in\omega^*. \quad (4.2.30)$$

Соотношение (4.2.28) называется *основным уравнением* обратной задачи. В обратной задаче надо построить пару $L=(\ell,U)$ по заданной МВ $M(\rho)$. Для этого сначала выберем «модельную» пару $\widetilde{L}=(\widetilde{\ell},\widetilde{U})$ (например, с потенциалом $\widetilde{Q}(x)\equiv 0$) так, чтобы выполнялось (4.2.7). Тогда для каждого фиксированного $x\geqslant 0$ соотношение (4.2.28) является линейным интегральным уравнением относительно $\varphi(x,\rho)$. Перейдем теперь к исследованию разрешимости основного уравнения (4.2.28). Для этого введем банаховы пространства $\mathcal{B}_{p,\alpha}:=\{f(\rho):\ f(\rho)\rho^{-\alpha}\in L_p(\omega^*)\}$, $p>1$, $\alpha\geqslant 0$, с нормой $\|f\|_{\mathcal{B}_{p,\alpha}}:=\|f(\rho)\rho^{-\alpha}\|_{L_p(\omega^*)}$. Положим $\mathcal{B}_p:=\mathcal{B}_{p,1}$. Рассмотрим оператор

$$Hf(\rho):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}\frac{f(\mu)H_1(\mu)H_2(\rho)}{\mu^{\alpha}(\mu-\rho)}\,d\mu,\quad \rho\in\omega^*,\ \alpha\geqslant 0,$$

где H_1 и H_2 — ограниченные функции.

Лемма 4.2.7. *Оператор H является линейным ограниченным оператором из $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ в $\mathcal{B}_{p,\beta}$ при $p>1$, $\beta\geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть $f(\rho)\in\mathcal{B}_{p,\alpha}$. Тогда $f(\rho)H_1(\rho)\rho^{-\alpha}\in L_p(\omega^*)$, и, следовательно, $F(\rho):=Hf(\rho)\in L_p(\omega^*)$ и $\|F\|_{L_p}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{B}_{p,\alpha}}$. Так как $F\in L_p$, то $F\in\mathcal{B}_{p,\beta}$, $\beta\geqslant 0$, и $\|F\|_{\mathcal{B}_{p,\beta}}\leqslant C\|F\|_{L_p}$. Таким образом, для любой функции $f\in\mathcal{B}_{p,\alpha}$ имеем: $Hf\in\mathcal{B}_{p,\beta}$ и $\|Hf\|_{\mathcal{B}_{p,\beta}}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{B}_{p,\alpha}}$. □

Определим матрицу $D(x,\rho)$, $\rho\in\omega^*$, $x\geqslant 0$ следующим образом:
при $\rho\in\omega^0$: $D(x,\rho)=\operatorname{diag}[D_k(x,\rho)]_{k=\overline{1,n}}$, $D_k(x,\rho)=\exp(-\rho R_k x)$, $R_k=R_k(S_j)$;
при $\rho\in\omega_j^1$: $D(x,\rho)=\operatorname{diag}[D_k(x,\rho)]_{k=\overline{1,2n}}$, $D_k(x,\rho)=\exp(-\rho R_k x)$ при $k\leqslant n$, и $D_k(x,\rho)=\exp(-\rho R_{k-n}x)$ при $k>n$; $R_k=R_k(S_j)$. Обозначим

$$\begin{gathered}\psi(x,\rho)=\varphi(x,\rho)D(x,\rho),\ S^0(x,\rho)=D^{-1}(x,\rho)S(\rho)D(x,\rho),\\ G^0(x,\rho)=D^{-1}(x,\rho)G(x,\rho),\widetilde{\psi}(x,\rho)=\widetilde{\varphi}(x,\rho)D(x,\rho),\\ \widetilde{S}^0(x,\rho)=D^{-1}(x,\rho)\widetilde{S}(\rho)D(x,\rho),\ \widetilde{G}^0(x,\rho)=D^{-1}(x,\rho)\widetilde{G}(x,\rho),\\ r^0(x,\mu,\rho)=D^{-1}(x,\mu)r(x,\mu,\rho)D(x,\rho),\\ \widetilde{r}^0(x,\mu,\rho)=D^{-1}(x,\mu)\widetilde{r}(x,\mu,\rho)D(x,\rho).\end{gathered}$$

Очевидно, что

$$r^0(x,\mu,\rho)=\frac{G^0(x,\mu)\psi(x,\rho)}{\mu-\rho},\quad \widetilde{r}^0(x,\mu,\rho)=\frac{\widetilde{G}^0(x,\mu)\widetilde{\psi}(x,\rho)}{\mu-\rho}.$$

Из (4.1.16), (4.1.23), (4.2.16) и (4.2.17) вытекает, что для координат матриц $\psi, \widetilde{\psi}, G^0, \widetilde{G}^0$ имеют место оценки

$$|\psi_{k\nu}(x,\rho)|,\ |\widetilde{\psi}_{k\nu}(x,\rho)| \leqslant C, \qquad x \geqslant 0,\ \rho \in \omega^*,\ k,\nu = \overline{1,n}, \tag{4.2.31}$$

$$|G^0_{k\nu}(x,\rho)|,\ |\widetilde{G}^0_{k\nu}(x,\rho)| \leqslant C\delta(\rho), \quad x \geqslant 0,\ \rho \in \omega^*,\ k,\nu = \overline{1,n}, \tag{4.2.32}$$

где $\delta(\rho)$ определена в (4.2.20).

При фиксированном $x \geqslant 0$ рассмотрим операторы:

$$B^0 f(\rho) = f(\rho)S^0(x,\rho) - B^1 f(\rho),$$

$$B^1 f(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*} f(\mu) r^0(x,\mu,\rho)\,d\mu, \quad \rho \in \omega^*,$$

$$\widetilde{B}^0 f(\rho) = f(\rho)\widetilde{S}^0(x,\rho) + \widetilde{B}^1 f(\rho),$$

$$\widetilde{B}^1 f(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*} f(\mu) \widetilde{r}^0(x,\mu,\rho)\,d\mu, \quad \rho \in \omega^*,$$

где

$$f(\rho) = \begin{cases} [f^+(\rho), f^-(\rho)], & \rho \in \omega^1, \\ f^0(\rho), & \rho \in \omega^0, \end{cases}$$

и $f^0(\rho)$, $f^{\pm}(\rho)$ — $n \times n$ матрицы-функции.

Лемма 4.2.8. *Пусть при некотором* $\alpha \geqslant 1$,

$$\widehat{M}(\rho) = O(\rho^{-\alpha}), \quad |\rho| \to \infty. \tag{4.2.33}$$

Тогда при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ *операторы* B^1, $\widetilde{B}^1$ *являются линейными ограниченными операторами из* $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ *в* $\mathcal{B}_{p,\beta}$ *при* $p > 1$, $\beta \geqslant 0$, *а* B^0, $\widetilde{B}^0$ *являются линейными ограниченными операторами из* $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ *в* $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ *при* $p > 1$. *Кроме того,* $\widetilde{B}^0 B^0 = B^0 \widetilde{B}^0 = E$, *где* E *— единичный оператор.*

Доказательство. Ограниченность B^1 $\widetilde{B}^1$ следует из (4.2.31)–(4.2.33), (4.2.20) и леммы 4.2.7. Кроме того, в силу (4.2.33)

$$S^0(x,\rho) - E = \widetilde{S}^0(x,\rho) - E = O(\rho^{-\alpha}), \quad |\rho| \to \infty, \tag{4.2.34}$$

и, следовательно, B^0, $\widetilde{B}^0$ являются линейными ограниченными операторами из $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ в $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ при $p > 1$. Зафиксируем $x \geqslant 0$. Пусть $f(\rho) \in \mathcal{B}_{p,\alpha}$, $z(\rho) = f(\rho)D^{-1}(x,\rho)$,

$$\widetilde{B}z(\rho) := z(\rho)\widetilde{S}(\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*} z(\mu)\widetilde{r}(x,\mu,\rho)\,d\mu, \quad \rho \in \omega^*,$$

$$B(\rho) := z(\rho)S(\rho) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*} z(\mu) r(x,\mu,\rho)\,d\mu, \quad \rho \in \omega^*.$$

Покажем, что

$$\widetilde{B}Bz(\rho) = B\widetilde{B}z(\rho) = z(\rho).$$

В самом деле, используя лемму 4.1.2 и формулу смены порядка интегрирования в особом интеграле [88, с. 60], вычисляем

$$\widetilde{B}Bz(\rho) = z(\rho)S(\rho)\widetilde{S}(\rho) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*} z(\theta)\Big(r(x,\theta,\rho)\widetilde{S}(\rho) - S(\theta)\widetilde{r}(x,\theta,\rho)\Big)\,d\theta -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*} z(\theta)(r(x,\theta,\mu)\,d\theta\Big)\widetilde{r}(x,\mu,\rho)\,d\mu =$$

$$= z(\rho)\xi(\rho) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*} z(\theta)\Big(r(x,\theta,\rho)\widetilde{S}(\rho) - S(\theta)\widetilde{r}(x,\theta,\rho) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*} r(x,\theta,\mu)\widetilde{r}(x,\mu,\rho)\,d\mu\Big)\,d\theta,$$

где $\xi(\rho) = S(\rho)\widetilde{S}(\rho) - \mathcal{D}(\rho)\widetilde{\mathcal{D}}(\rho)/4$, а матрицы $\mathcal{D}(\rho)$ и $\widetilde{\mathcal{D}}(\rho)$ определены в (4.2.27). В силу (4.2.29) интеграл равен нулю и, следовательно,

$$\widetilde{B}Bz(\rho) = z(\rho)\xi(\rho), \quad \rho \in \omega^*. \tag{4.2.35}$$

Покажем, что $\xi(\rho) \equiv E$ — единичная матрица. При $\rho \in \omega^0$, используя леммы 4.1.2 и 4.2.6, получаем

$$\xi(\rho) = \Big(E + \frac{1}{2}\,\widetilde{A}_0(\rho)\Big)\Big(E - \frac{1}{2}\,A_0(\rho)\Big) - \frac{1}{4}\,\widetilde{A}_0(\rho)A_0(\rho) =$$

$$= E + \frac{1}{2}\Big(\widetilde{A}_0(\rho) - A_0(\rho) - \widetilde{A}_0(\rho)A_0(\rho)\Big) = E, \quad \rho \in \omega^0.$$

При $\rho \in \omega^1$ имеем

$$\xi(\rho) = \begin{bmatrix} E + \frac{1}{2}\,\widetilde{A}_0^+(\rho) & -\frac{1}{2}\Big(\widetilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho)\Big)^+\mathcal{N}^-(\rho) \\ -\frac{1}{2}\Big(\widetilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho)\Big)^-\mathcal{N}^+(\rho) & E + \frac{1}{2}\,\widetilde{A}_0^-(\rho) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} E - \frac{1}{2}\,A_0^+(\rho) & \frac{1}{2}\Big(A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho)\Big)^+\widetilde{\mathcal{N}}^-(\rho) \\ \frac{1}{2}\Big(A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho)\Big)^-\widetilde{\mathcal{N}}^+(\rho) & E - \frac{1}{2}\,A_0^-(\rho) \end{bmatrix} -$$

$$-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -\widetilde{A}_0^+(\rho) & -\Big(\widetilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho)\Big)^+\mathcal{N}^-(\rho) \\ \Big(\widetilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho)\Big)^-\mathcal{N}^+(\rho) & \widetilde{A}_0^-(\rho) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -A_0^+(\rho) & -\Big(A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho)\Big)^+\widetilde{\mathcal{N}}^-(\rho) \\ \Big(A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho)\Big)^-\widetilde{\mathcal{N}}^+(\rho) & A_0^-(\rho) \end{bmatrix},$$

и, следовательно,

$$\xi(\rho) = \begin{bmatrix} \xi_{11}(\rho) & \xi_{12}(\rho) \\ \xi_{21}(\rho) & \xi_{22}(\rho) \end{bmatrix},$$

где

$$\xi_{11}(\rho) = \xi_{22}(\rho) \equiv E,$$

$$2\xi_{12}(\rho) = \Big(A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho)\Big)^+\widetilde{\mathcal{N}}^-(\rho) - \Big(\widetilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho)\Big)^+\mathcal{N}^-(\rho) + \\ + \Big(\widetilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho)\Big)^+\mathcal{N}^-(\rho)A_0^-(\rho),$$

$$2\xi_{21}(\rho) = \Big(A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho)\Big)^-\widetilde{\mathcal{N}}^+(\rho) - \Big(\widetilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho)\Big)^-\mathcal{N}^+(\rho) + \\ + \Big(\widetilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho)\Big)^-\mathcal{N}^+(\rho)A_0^+(\rho).$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что $\xi_{12}(\rho) = \xi_{21}(\rho) \equiv \equiv 0$. Этот же факт можно получить и опираясь на (4.2.28) и (4.2.30). В самом деле, так как $\widetilde{\varphi}(x,\rho) = \widetilde{B}\varphi(x,\rho)$, $\varphi(x,\rho) = B\widetilde{\varphi}(x,\rho)$, то из (4.2.35) вытекает, что $\widetilde{\varphi}(x,\rho) = \widetilde{B}\varphi(x,\rho) = \widetilde{B}B\widetilde{\varphi}(x,\rho) = \widetilde{\varphi}(x,\rho)\xi(\rho)$, и, следовательно,

$$[\widetilde{\Phi}^+(x,\rho),\ \widetilde{\Phi}^-(x,\rho)] \begin{bmatrix} \xi_{11}(\rho) - E & \xi_{12}(\rho) \\ \xi_{21}(\rho) & \xi_{22}(\rho) - E \end{bmatrix} \equiv 0, \quad \rho \in \omega^1.$$

Так как $\xi_{11}(\rho) = \xi_{22}(\rho) \equiv E$, то $\widetilde{\Phi}^+(x,\rho)\xi_{12}(\rho) \equiv 0$, $\widetilde{\Phi}^-(x,\rho)\xi_{21}(\rho) \equiv 0$, поэтому $\xi_{12}(\rho) = \xi_{21}(\rho) \equiv 0$, $\rho \in \omega^1$.

Таким образом, мы доказали, что $\xi(\rho) \equiv E$, $\rho \in \omega^*$. Вместе с (4.2.35) это дает: $\widetilde{B}Bz(\rho) = z(\rho)$. Соотношение $B\widetilde{B}z(\rho) = z(\rho)$ доказывается аналогично. Так как

$$\widetilde{B}^0B^0f(\rho) = \widetilde{B}Bz(\rho)\,D(x,\rho) = z(\rho)D(x,\rho) = f(\rho),$$
$$B^0\widetilde{B}^0f(\rho) = B\widetilde{B}z(\rho)\,D(x,\rho) = z(\rho)D(x,\rho) = f(\rho),$$

то имеем: $\widetilde{B}^0B^0 = B^0\widetilde{B}^0 = E$, и лемма 4.2.8 доказана. □

Следующая теорема является очевидным следствием леммы 4.2.8.

Теорема 4.2.4. *Пусть* $M(\rho)$ *— МВ для пары* $L = (\ell, U)$. *Пусть пара* $\widetilde{L} = (\widetilde{\ell}, \widetilde{U})$ *выбрана так, что выполняется* (4.2.7). *Тогда для каждого фиксированного* $x \geqslant 0$ *основное уравнение* (4.2.28) *имеет единственное решение* $\varphi(x,\rho)$ *в классе* $\varphi(x,\rho)D(x,\rho) \in \mathcal{B}_p$ *при каждом* $p > 1$, *причем* $\sup\limits_{x \geqslant 0} \|\varphi(x,\rho)D(x,\rho)\|_{\mathcal{B}_p} < \infty$.

4.2.3. Алгоритм решения обратной задачи.

Получим теперь явные формулы для построения потенциала $Q(x)$ и процедуру решения обратной задачи. Для простоты предположим, что (4.2.33) верно при $\alpha = 2$, т. е.

$$\widehat{M}(\rho) = O(\rho^{-2}), \quad |\rho| \to \infty. \tag{4.2.36}$$

Обозначим

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Big(\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0 - Q_0\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\Big)\,d\mu. \tag{4.2.37}$$

В силу (4.2.36) интеграл в (4.2.37) сходится абсолютно.

Лемма 4.2.9. *Справедливы соотношения*

$$Q(x) = \widetilde{Q}(x) + \varepsilon(x), \quad h = \widetilde{h}. \tag{4.2.38}$$

Доказательство. Дифференцируя (4.2.21) по x и учитывая (4.2.18) и (4.1.20), вычисляем

$$\widetilde{\Phi}'(x,\rho) = \Phi'(x,\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Phi'(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho} - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\widetilde{\Phi}(x,\rho)\,d\mu. \tag{4.2.39}$$

Так как $\Phi(x,\rho)$ является решением системы (4.1.1), то $\Phi'(x,\rho) = (\rho B_0 - B(x))\Phi(x,\rho)$, где $B_0 = Q_0^{-1}$, $B(x) = B_0Q(x)$. Поэтому (4.2.39) можно записать в виде

$$(\rho B_0 - \widetilde{B}(x))\widetilde{\Phi}(x,\rho) = (\rho B_0 - B(x))\Phi(x,\rho) + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}(\mu B_0 - B(x))\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho} - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\widetilde{\Phi}(x,\rho)\,d\mu.$$

Заменяя здесь функцию $\Phi(x,\rho)$ на ее выражение из (4.2.21), вычисляем

$$\widehat{B}(x)\widetilde{\Phi}(x,\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}B_0\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)\,d\mu - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\widetilde{\Phi}(x,\rho)\,d\mu.$$

Умножая это соотношение слева на Q_0 и используя (4.2.37), получаем: $\widehat{Q}(x)\widetilde{\Phi}(x,\rho) = \varepsilon(x)\widetilde{\Phi}(x,\rho)$, и, следовательно, $Q(x) = \widetilde{Q}(x) + \varepsilon(x)$.

Далее, положим $x = 0$ в (4.2.21). Используя (4.1.4) и (4.1.32), получаем

$$\widetilde{h}^{-1}\widetilde{\mathcal{N}}(\rho) = h^{-1}\mathcal{N}(\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega} h^{-1}\mathcal{N}(\mu)A_0(\mu)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\mu)\widetilde{\mathcal{N}}(\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho}\,.$$

В силу (4.1.26) это дает

$$h\widetilde{h}^{-1} - E = \widehat{\mathcal{N}}(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega} \mathcal{N}(\mu)A_0(\mu)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\mu)\frac{d\mu}{\mu-\rho}\,,$$

и, следовательно, $h = \widetilde{h}$. □

Отметим, что лемма 4.2.9 остается верной и в более общем случае, когда вместо (4.2.36) мы имеем (4.2.7), но тогда интеграл в (4.2.37), вообще говоря, не будет абсолютно сходящимся. Отметим также, что в силу следствия 4.2.1 равенство $h = \widetilde{h}$ вытекает и непосредственно из (4.2.7).

Приведем теперь *процедуру* решения обратной задачи. Пусть задана МВ $M(\rho)$ пары $L = (\ell, U)$.

1) Выберем «модельную» пару $\widetilde{L} = (\widetilde{\ell}, \widetilde{U})$ так, чтобы выполнялось (4.2.36).

2) Построим матрицы-функции $\widetilde{\varphi}(x,\rho)$, $\widetilde{S}(\rho)$, $\widetilde{r}(x,\mu,\rho)$, $x \geqslant 0$, $\mu, \rho \in \omega^*$.

3) Решая основное уравнение (4.2.28), находим $\varphi(x,\rho)$ при $x \geqslant 0$, $\rho \in \omega^*$, т. е. находим $\Phi(x,\rho)$ при $x \geqslant 0$, $\rho \in \omega$.

4) Вычисляем матрицу-функцию $\varepsilon(x)$ по формуле (4.2.37).

5) Строим пару $L = (\ell, U)$ по формулам (4.2.38).

Замечание 4.2.3. При $N \geqslant 2$ выбор «модельной» пары $\widetilde{L}$ является тривиальной задачей и сводится к подбору коэффициентов асимптотики: $\widetilde{\mu}_{mk}^{\nu} = \mu_{mk}^{\nu}$, $\nu = 0, 1$. При $N = 1$ выбор $\widetilde{L}$ является более трудным и представляет собой самостоятельную задачу. С другой стороны, как было показано выше, при выборе $\widetilde{L}$ вместо (4.2.36) достаточно ограничиться более слабым условием (4.2.7), которое равносильно условию $\widetilde{h} = h$. В этом случае пункты (1)–(3) процедуры остаются без изменения, интеграл в (4.2.37) не сходится абсолютно, но функция $\varepsilon(x)$ существует. Кроме того, вместо пунктов (4), (5) процедуры для построения L можно использовать решения $\Phi(x,\rho)$ системы (4.1.1), а именно $Q(x) = \rho - Q_0\Phi'(x,\rho)\Phi^{-1}(x,\rho)$.

§ 4.3. Необходимые и достаточные условия разрешимости

4.3.1. Формулировка основной теоремы. В этом пункте приводятся необходимые и достаточные условия разрешимости нелинейной обратной задачи восстановления пары $L = (\ell, U)$ по МВ $M(\rho)$. Пусть задана матрица Q_0, т.е числа $\beta_k = 1/q_k$ известны априори и фиксированы. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество функций $M(\rho) = [M_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$ со свойствами:

1) $M_{mk}(\rho) \equiv \delta_{mk}$ при $m \geqslant k$;

2) функции $M_{mk}(\rho)$, $k > m$, аналитичны в Σ_m за исключением не более чем счетного ограниченного множества Λ'_m полюсов и непрерывны в $\overline{\Sigma}_m$ за исключением ограниченного множества Λ_m (множества Λ'_m и Λ_m, вообще говоря, свои для каждой матрицы $M(\rho)$ из $\mathcal{M}$);

3) функции $B^{m-\nu}_{\nu k}(\rho)$, определенные по (4.1.34), являются аналитическими на $\Gamma_j \setminus \Lambda'_m$ при $j \notin J_m$, $1 \leqslant \nu \leqslant m \leqslant n-1$, $m+1 \leqslant k \leqslant n$, т. е. верно (4.1.36).

Отметим, что из теорем 4.1.1 и 4.1.2 вытекает, что если $M(\rho)$ — МВ для пары $L = (\ell, U)$, то $M(\rho) \in \mathcal{M}$.

Теорема 4.3.1. *Для того чтобы матрица $M(\rho) \in \mathcal{M}$ была МВ для некоторой пары $L = (\ell, U)$, $\ell \in V_N$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) (*асимптотика*) *существует пара $\widetilde{L} = (\widetilde{\ell}, \widetilde{U})$ такая, что верно* (4.2.36);

2) (*условие P*) *при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ основное уравнение* (4.2.28) *имеет единственное решение $\varphi(x,\rho)$ в классе $\varphi(x,\rho)D(x,\rho) \in \mathcal{B}_p$, $p > 1$, причем*

$$\sup_{x \geqslant 0} \|\varphi(x,\rho)D(x,\rho)\|_{\mathcal{B}_p} < \infty;$$

3) $\varepsilon(x) \in W_N$, *где $\varepsilon(x)$ определена в* (4.2.37).

При этих условиях пара $L = (\ell, U)$ строится по формулам (4.2.38).

4.3.2. Доказательство основной теоремы. Необходимость условий теоремы 4.3.1 доказана выше. Докажем их достаточность. В силу (4.2.36), при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ оператор $\widetilde{B}^0$ является линейным ограниченным оператором в $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ при $p > 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$. Кроме того, $\widetilde{B}^0$ обратим в $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ при $p > 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$, $x \geqslant 0$. В самом деле, пусть $f(\rho) \in \mathcal{B}_{p,2}$ и $\widetilde{B}^0 f(\rho) = 0$, т. е.

$$f(\rho)\widetilde{S}^0(x,\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*} f(\mu)\widetilde{r}^0(x,\mu,\rho)\,d\mu = 0.$$

Отсюда легко видеть, что $f(\rho) \in \mathcal{B}_p$ и, в силу условия P теоремы 4.3.1, $f(\rho) = 0$.

Пусть $\varphi(x,\rho)$ — решение основного уравнения (4.2.28). Известным методом (см., например, [250]) можно доказать, что $\varphi(x,\rho)$ абсолютно непрерывна по x. Покажем, что

$$\rho^{-1}\varphi'(x,\rho)D(x,\rho)\in\mathcal{B}_p,\quad x\geqslant 0. \tag{4.3.1}$$

В самом деле, дифференцируя (4.2.28) по x, получаем

$$\widetilde{\varphi}'(x,\rho)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}\varphi(x,\mu)\widetilde{r}'(x,\mu,\rho)\,d\mu=$$
$$=\varphi'(x,\rho)\widetilde{S}(\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}\varphi'(x,\mu)\widetilde{r}(x,\mu,\rho)\,d\mu, \tag{4.3.2}$$

и, следовательно, $\widetilde{B}^0y(x,\rho)=P(x,\rho)$, где $y(x,\rho)=\varphi'(x,\rho)D(x,\rho)$,

$$P(x,\rho)=\widetilde{\varphi}'(x,\rho)D(x,\rho)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}\psi(x,\mu)D^{-1}(x,\mu)\widetilde{r}'(x,\mu,\rho)D(x,\rho)\,d\mu.$$

Очевидно, что $P(x,\rho)\in\mathcal{B}_{p,2}$, и, следовательно, $y(x,\rho)\in\mathcal{B}_{p,2}$, т. е. (4.3.1) доказано.

Построим матрицу $\Phi(x,\rho)$ по формуле

$$\Phi(x,\rho)=\widetilde{\Phi}(x,\rho)-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho}\,,\quad \rho\in J_\omega\,. \tag{4.3.3}$$

Матрица-функция $\Phi(x,\rho)$ является аналитической при $\rho\in J_\omega$. Кроме того, как и при доказательстве теоремы 4.2.3, получаем, что

$$\varphi(x,\rho)=\begin{cases}[\Phi^+(x,\rho),\Phi^-(x,\rho)], & \rho\in\omega^1,\\ \Phi(x,\rho), & \rho\in\omega^0,\end{cases}$$

Построим пару $L=(\ell,U)$ по формулам (4.2.38), где $\varepsilon(x)$ определена в (4.2.37). Ясно, что $\ell\in V_N$.

Лемма 4.3.1. *Справедливы соотношения*

$$\ell\varphi(x,\rho)=\rho\varphi(x,\rho),\ \rho\in\omega^*,\quad \ell\Phi(x,\rho)=\rho\Phi(x,\rho),\ \rho\in J_\omega\,.$$

Доказательство. Из (4.2.28) и (4.3.2) вытекает, что

$$\ell\widetilde{\varphi}(x,\rho)=\ell\varphi(x,\rho)\widetilde{S}(\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}\ell\varphi(x,\mu)\widetilde{r}(x,\mu,\rho)\,d\mu+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}Q_0\varphi(x,\mu)\widetilde{r}'(x,\mu,\rho)\,d\mu.$$

Так как $\ell\widetilde{\varphi}(x,\rho)=\widetilde{\ell}\widetilde{\varphi}(x,\rho)+\widehat{Q}(x)\widetilde{\varphi}(x,\rho)=\rho\widetilde{\varphi}(x,\rho)+\widehat{Q}(x)\widetilde{\varphi}(x,\rho)$, то последнее равенство принимает вид

$$\rho\widetilde{\varphi}(x,\rho)=\ell\varphi(x,\rho)\widetilde{S}(\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}\ell\varphi(x,\mu)\widetilde{r}(x,\mu,\rho)\,d\mu+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}Q_0\varphi(x,\mu)\widetilde{r}'(x,\mu,\rho)\,d\mu-\widehat{Q}(x)\widetilde{\varphi}(x,\rho).$$

В левой части этого равенства заменим функцию $\widetilde{\varphi}(x,\rho)$ на ее выражение из (4.2.28). Ввиду (4.2.38) получаем

$$\Big(\ell\varphi(x,\rho)-\rho\varphi(x,\rho)\Big)\widetilde{S}(\rho)+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}\Big(\ell\varphi(x,\mu)-\mu\varphi(x,\mu)\Big)\widetilde{r}(x,\mu,\rho)\,d\mu+J(x,\rho), \qquad (4.3.4)$$

где

$$J(x,\rho):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}\varphi(x,\mu)(\mu-\rho)\widetilde{r}(x,\mu,\rho)\,d\mu+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}Q_0\varphi(x,\mu)\widetilde{r}'(x,\mu,\rho)\,d\mu-\varepsilon(x)\widetilde{\varphi}(x,\rho).$$

Учитывая (4.1.20), нетрудно проверить, что $J(x,\rho)\equiv 0$. Обозначим $y(x,\rho):=\ell\varphi(x,\rho)-\rho\varphi(x,\rho)$. Тогда соотношение (4.3.4) принимает вид

$$y(x,\rho)\widetilde{S}(\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}y(x,\mu)\widetilde{r}(x,\mu,\rho)\,d\mu=0, \qquad (4.3.5)$$

или

$$f(x,\rho)\widetilde{S}^0(x,\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega^*}f(x,\mu)\widetilde{r}^0(x,\mu,\rho)\,d\mu=0, \qquad (4.3.6)$$

где $f(x,\rho)=y(x,\rho)D(x,\rho)$. В силу (4.3.1) и условия P теоремы 4.3.1, имеем: $\rho^{-1}f(x,\rho)\in\mathcal{B}_p$ при каждом $p>1$, т. е. $f(x,\rho)\in\mathcal{B}_{p,2}$. Так как при каждом фиксированном $x\geqslant 0$ оператор $\widetilde{B}^0$ является линейным ограниченным оператором в $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ при $p>1$, $0\leqslant\alpha\leqslant 2$, то из (4.3.6) вытекает, что $f(x,\rho)=0$, т. е. $y(x,\rho)=0$ и $\ell\varphi(x,\rho)=\rho\varphi(x,\rho)$, $\rho\in\omega^*$. Далее, дифференцируя (4.3.3) по x и учитывая (4.1.20), вычисляем

$$\widetilde{\Phi}'(x,\rho)=\Phi'(x,\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Phi'(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho}- \\ -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\widetilde{\Phi}(x,\rho)\,d\mu,$$

и, следовательно,

$$\ell\widetilde{\Phi}(x,\rho)=\ell\Phi(x,\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\ell\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho}-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}Q_0\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\widetilde{\Phi}(x,\rho)\,d\mu.$$

Так как $\ell\widetilde{\Phi}(x,\rho)=\widetilde{\ell}\widetilde{\Phi}(x,\rho)+\widehat{Q}(x)\widetilde{\Phi}(x,\rho)=\rho\widetilde{\Phi}(x,\rho)+\varepsilon(x)\widetilde{\Phi}(x,\rho)$, то получаем

$$\rho\widetilde{\Phi}(x,\rho)=\ell\Phi(x,\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\ell\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho}-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}Q_0\Phi(x,\mu)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)\widetilde{\Phi}(x,\rho)\,d\mu-\varepsilon(x)\widetilde{\Phi}(x,\rho).$$

В левой части этого равенства заменим функцию $\widetilde{\Phi}(x,\rho)$ на ее выражение из (4.3.3). Тогда получаем

$$\ell\Phi(x,\rho)-\rho\Phi(x,\rho)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Big(\ell\Phi(x,\mu)-\mu\Phi(x,\mu)\Big)A_0(\mu)\widetilde{\Phi}^*(x,\mu)Q_0\widetilde{\Phi}(x,\rho)\frac{d\mu}{\mu-\rho}\,.$$

Так как $\ell\varphi(x,\rho)=\rho\varphi(x,\rho)$ при $\rho\in\omega^*$, то имеем: $\ell\Phi(x,\mu)-\mu\Phi(x,\mu)=0$ при $\mu\in\omega$, и, следовательно, $\ell\Phi(x,\rho)=\rho\Phi(x,\rho)$. ☐

Лемма 4.3.2. *Матрица $\Phi(x,\rho)$ является решением Вейля для $L=(\ell,U)$.*

Доказательство. Из (4.1.32) и (4.3.3) при $x=0$ вытекает, что

$$\Phi(0,\rho)=\widetilde{\Phi}(0,\rho)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Phi(0,\mu)\Omega(\mu,\rho)\,\frac{d\mu}{\rho-\mu}\,,$$

где $\Omega(\mu,\rho)$ определена согласно (4.2.23). Умножая это равенство слева на вектор-строку $[h_{\xi1},\ldots,h_{\xi n}]$ и учитывая соотношение $h=\widetilde{h}$, вычисляем

$$U_\xi(\Phi_m(x,\rho))=\widetilde{U}_\xi(\widetilde{\Phi}_m(x,\rho))+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Big(\sum_{k=m+1}^{n}U_\xi(\Phi_k(x,\mu))\omega_{km}(\mu,\rho)\Big)\frac{d\mu}{\rho-\mu}\,. \qquad (4.3.7)$$

Последовательно положив $m = n, n-1, \dots, 1$ в (4.3.7) и учитывая, что $\widetilde{U}_\xi(\widetilde{\Phi}_m) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1, m}$, находим, что

$$U_\xi(\Phi_m) = \delta_{\xi m}, \quad \xi = \overline{1, m}. \tag{4.3.8}$$

Перепишем (4.3.3) в виде

$$\Phi_m(x,\rho) = \widetilde{\Phi}_m(x,\rho) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega} F(x,\mu)Q_0 \frac{d\mu}{\mu-\rho}\,\widetilde{\Phi}_m(x,\rho), \quad \rho \in J_\omega, \tag{4.3.9}$$

где $F(x,\mu)$ определена в (4.2.18). Используя (4.1.23), (4.2.16), (4.2.36) и условие P теоремы 4.3.1, получаем

$$|F_{\nu k}(x,\mu)| \leqslant C|\mu|^{-2}\exp(ax), \quad a > 0, \quad \mu \in \omega, \quad \nu, k = \overline{1, n}. \tag{4.3.10}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. В ρ-плоскости рассмотрим область $G_\varepsilon := \{\rho \in J_\omega : \operatorname{dist}(\rho,\omega) \geqslant \varepsilon\}$. Из (4.3.9) ввиду (4.3.10) и (4.1.16) вытекает, что

$$|\Phi_{km}(x,\rho)| \leqslant C\exp(ax)|\exp(\rho R_m x)|, \quad x \geqslant 0, \quad \rho \in G_\varepsilon.$$

Обозначим через $\Phi^0(x,\rho) = [\Phi^0_{km}(x,\rho)]_{k,m=\overline{1,n}}$ решение Вейля для пары $L = (\ell, U)$ и определим матрицу $\Psi(x,\rho) = [\Psi_{km}(x,\rho)]_{k,m=\overline{1,n}} = [\Psi_{km}(x,\rho)]^T_{k=\overline{1,n}}$ по формуле $\Psi(x,\rho) = \Phi(x,\rho) - \Phi^0(x,\rho)$. Тогда матрица-функция $\Psi(x,\rho)$ является аналитической в J_ω, причем

$$|\Psi_{km}(x,\rho)| \leqslant C\exp(ax)|\exp(\rho R_m x)|, \quad x \geqslant 0,\ \rho \in G_\varepsilon. \tag{4.3.11}$$

Покажем, что $\Psi(x,\rho) \equiv 0$. В самом деле, так как вектор-функции $\Phi^0_m(x,\rho) = [\Phi^0_{km}(x,\rho)]^T_{k=\overline{1,n}}$ образуют ФСР для системы (4.1.1), то имеем

$$\Psi_m(x,\rho) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu m}(\rho)\Phi^0_\nu(x,\rho).$$

Применяя последовательно линейные формы $U_1, \dots, U_m$ и учитывая (4.3.8), находим, что $\alpha_{\nu m}(\rho) = 0$ при $\nu = \overline{1, m}$. Таким образом,

$$\Psi_m(x,\rho) = \sum_{\nu=m+1}^{n} \alpha_{\nu m}(\rho)\Phi^0_\nu(x,\rho),$$

и функции $\alpha_{\nu m}(\rho)$ аналитичны при $\rho \in J_\omega$. Предположим, что при некотором s $(m+1 \leqslant s \leqslant n)$ имеем: $\alpha_{sm}(\rho) \not\equiv 0$, $\alpha_{\nu m}(\rho) \equiv 0$, $\nu = \overline{s+1, n}$. Выберем $\rho^* \in \overline{G}_\varepsilon$ так, что $\alpha_{sm}(\rho^*) \neq 0$ и $\mathrm{Re}(\rho^*(R_s - R_{s-1})) > a$. Тогда

$$\Phi^0_s(x,\rho^*) = \frac{1}{\alpha_{sm}(\rho^*)}\Big(\Psi_m(x,\rho^*) - \sum_{\nu=m+1}^{s-1} \alpha_{\nu m}(\rho^*)\Phi^0_\nu(x,\rho^*)\Big).$$

Поэтому, ввиду (4.3.11), получаем: $|\Phi^0_{ks}(x,\rho^*)| \leqslant C^*\exp(ax) \times |\exp(\rho^* R_{s-1}x)|$. С другой стороны, из (4.1.13) имеем: $\max\limits_k |\Phi^0_{ks}(x,\rho^*)| > C^*_1|\exp(\rho^* R_s x)|$. Это противоречие доказывает, что $\alpha_{\nu m}(\rho) \equiv 0$

при $\nu = \overline{m+1,n}$, т. е. $\Psi_m(x,\rho) \equiv 0$, $m = \overline{1,n}$. Следовательно, $\Phi(x,\rho) \equiv \Phi^0(x,\rho)$, т. е. $\Phi(x,\rho)$ является решением Вейля для пары $L = (\ell, U)$. □

Лемма 4.3.3. *Матрица $M(\rho)$ является МВ для $L = (\ell, U)$.*

Доказательство. Обозначим через $M^0(\rho) = [M^0_{m\xi}(\rho)]_{m,\xi=\overline{1,n}}$ МВ для L. Согласно (4.3.7) имеем

$$M^0_{m\xi}(\rho) = \widetilde{M}_{m\xi}(\rho) + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Big(\sum_{k=m+1}^{\xi} M^0_{k\xi}(\mu)\omega_{km}(\mu,\rho)\Big)\frac{d\mu}{\rho-\mu}\,, \quad \rho \in J_\omega. \quad (4.3.12)$$

Введем матрицу $\Omega^0(\mu,\rho) = [\omega^0_{km}(\mu,\rho)]_{k,m=\overline{1,n}}$ по формуле $\Omega^0(\mu,\rho) = A^0_0(\mu)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\mu)\widetilde{\mathcal{N}}(\rho)$, где $A^0_0(\rho)$ имеет тот же вид, что и $A_0(\rho)$, но с $M^0(\rho)$ вместо $M(\rho)$. По необходимости, ввиду (4.2.24), имеем

$$M^0_{m\xi}(\rho) = \widetilde{M}_{m\xi}(\rho) + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\Big(\sum_{k=m+1}^{\xi} M^0_{k\xi}(\mu)\omega^0_{km}(\mu,\rho)\Big)\frac{d\mu}{\rho-\mu}\,, \quad \rho \in J_\omega. \quad (4.3.13)$$

Используя (4.3.12) и (4.3.13), покажем индукцией по ξ, что

$$M^0_{m\xi}(\rho) \equiv M_{m\xi}(\rho), \quad \xi > m.$$

1) Пусть $\xi = m+1$. Из (4.3.12) и (4.3.13) вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\frac{\omega_{m+1,m}(\mu,\rho) - \omega^0_{m+1,m}(\mu,\rho)}{\rho-\mu}\,d\mu = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^0_m\cup\omega^0}\frac{M_{m,m+1}(\mu) - M^0_{m,m+1}(\mu)}{\rho-\mu}\,d\mu = 0, \quad \rho \in J_\omega\,, \quad (4.3.14)$$

где $\gamma^0_m := \gamma_m \setminus \operatorname{int}\omega^0$. Используя аналитические свойства $M_{m,m+1}(\rho)$ и $M^0_{m,m+1}(\rho)$ и очевидную оценку $|M_{m,m+1}(\rho) - M^0_{m,m+1}(\rho)| \leqslant C|\rho|^{-1}$, получаем из (4.3.14), что $M_{m,m+1}(\rho) \equiv M^0_{m,m+1}(\rho)$, и, следовательно, $a_{m+1,m}(\rho) \equiv a^0_{m+1,m}(\rho)$ и $\omega_{m+1,m}(\mu,\rho) \equiv \omega^0_{m+1,m}(\mu,\rho)$.

2) Предположим, что

$$M^0_{mj}(\rho) \equiv M_{mj}(\rho), \quad j = \overline{m+1,\xi-1}. \quad (4.3.15)$$

Тогда $\omega_{jm}(\mu,\rho)\equiv\omega^0_{jm}(\mu,\rho)$, $j=\overline{m+1,\xi-1}$. Отсюда и из (4.3.12)–(4.3.13) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega}\frac{\omega_{\xi m}(\mu,\rho)-\omega^0_{\xi m}(\mu,\rho)}{\rho-\mu}\,d\mu=0,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{m\xi}\cup\omega^0}\frac{M_{m\xi}(\mu)-M^0_{m\xi}(\mu)}{\rho-\mu}\,d\mu=0,\quad \rho\in J_\omega, \tag{4.3.16}$$

где γ_{mj} определяются по рекуррентным формулам $\gamma_{mj}=\gamma_{m,j-1}\cap\cap\gamma_{m+1,j}$, $\gamma_{m,m+1}:=\gamma^0_m$. Используя (4.3.15) и структурные свойства (4.1.36), получаем, что функции $M_{m\xi}(\rho)-M^0_{m\xi}(\rho)$ аналитичны на $\gamma^0_m\setminus\gamma_{m\xi}$. Поэтому контур в (4.3.16) может быть заменен на $\gamma^0_m\cup\omega^0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^0_m\cup\omega^0}\frac{M_{m\xi}(\mu)-M^0_{m\xi}(\mu)}{\rho-\mu}\,d\mu=0,\quad \rho\in J_\omega\,. \tag{4.3.17}$$

Используя аналитические свойства $M_{m\xi}(\rho)$ и $M^0_{m\xi}(\rho)$ и очевидную оценку

$$|M_{m\xi}(\rho)-M^0_{m\xi}(\rho)|\leqslant C|\rho|^{-1},$$

выводим из (4.3.17), что $M_{m\xi}(\rho)\equiv M^0_{m\xi}(\rho)$, и лемма 4.3.3 доказана. □

Таким образом, теорема 4.3.1 полностью доказана.

Исторический очерк

Ниже дается краткий обзор результатов по теории обратных задач спектрального анализа для обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы описываем только основные направления этой теории, упоминаем наиболее важные монографии и статьи и отсылаем читателя к ним для более детального знакомства с предметом.

Наиболее полные результаты в теории обратных задач известны для дифференциального оператора Штурма–Лиувилля

$$\ell y := -y'' + q(x)y. \tag{1}$$

Первый результат в этом направлении принадлежит В.А. Амбарцумяну [13]. Он показал, что если собственные значения краевой задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

суть $\lambda_k = k^2$, $k \geqslant 0$, то $q = 0$. Однако результат Амбарцумяна является исключением, и одного спектра, вообще говоря, недостаточно для однозначного определения оператора (1). Впоследствии Г. Борг [44] доказал, что два спектра дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля с одним общим краевым условием однозначно определяют функцию q. Н. Левинсон [162] предложил иной метод доказательства результата Г. Борга.

Важную роль в спектральной теории операторов Штурма–Лиувилля сыграл оператор преобразования. К решению обратных задач оператор преобразования первым применил В.А. Марченко [175–176] в 1950 г. Он доказал, что дифференциальный оператор Штурма–Лиувилля, заданный на полуоси или конечном интервале, однозначно определяется заданием спектральной функции. Для конечного интервала это соответствует заданию спектральных данных (см. п. 1.2.2). Метод оператора преобразования использовался и в фундаментальной работе И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана [96], в которой были получены необходимые и достаточные условия и метод восстановления дифференциального оператора Штурма–Лиувилля по его спектральной функции. В [90] аналогичные результаты получены для обратной задачи восстановления дифференциального уравнения Штурма–Лиувилля на конечном интервале по двум спектрам. Другой подход к исследованию обратных задач развит М.Г. Крейном [144, 145]. Большинство приложений обратных задач, относящихся к случаям полуоси и конечного интервала, связано с восстановлением потенциала по функции Вейля или ее аналогам.

В работе А.Н. Тихонова [238] получена теорема единственности решения обратной задачи Штурма–Лиувилля на полуоси по заданной функции Вейля. Задание функции Вейля равносильно заданию спектральной функции, однако обратная задача по функции Вейля и ее аналогам является более естественной как для оператора Штурма–Лиувилля, так и для других более сложных классов операторов и пучков операторов. Обратная задача теории рассеяния на полуоси и оси, тесно связанная с вышеуказанными обратными задачами, решалась в [4, 57, 69, 70, 80, 81, 127] и других работах. В работе М.Ш. Блоха [43] исследовалась обратная задача на всей оси по спектральной матрице-функции. Созданные методы решения обратных задач позволили также исследовать *устойчивость* решения обратных задач (см. [10, 44, 74, 116, 117, 177, 185, 210, 253]) и создавать вычислительные алгоритмы для их *численного решения* (см. [5, 29, 47, 58, 79, 134, 139, 169, 186, 189, 193, 214, 215, 218, 289, 306]). Интересный подход для операторов Штурма–Лиувилля описан в [203, 67, 120, 121, 181, 60]. Однако этот подход представляет только методический интерес и не имеет самостоятельного значения, так как метод оператора преобразования и созданный позднее метод спектральных отображений дают более сильные результаты и для более широких классов операторов.

В последние годы появилось много новых сфер приложений обратных задач для операторов Штурма–Лиувилля; упомянем кратко некоторые из них. Краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала связаны с разрывными свойствами среды. Например, разрывные обратные задачи встречаются в радиоэлектронике при синтезе параметров неоднородных линий передач с заданными техническими характеристиками ([168, 184]). Спектральная информация может быть использована для восстановления коэффициентов, характеризующих свойства одномерных разрывных сред ([146, 232]). Краевые задачи с условиями разрыва во внутренней точке появляются также в геофизических моделях земного шара ([17, 152]). Разрывные обратные задачи в различных постановках рассматривались в [87, 112, 140, 146, 207, 232, 279, 283]. Много приложений связано с дифференциальным уравнением вида

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y \tag{2}$$

с точками поворота, когда функция $r(x)$ имеет нули и (или) меняет знак. Точки поворота возникают в теории упругости, оптике, геофизике и других областях естествознания. Кроме того, широкий класс дифференциальных уравнений с неинтегрируемыми особенностями типа Бесселя и их возмущений может быть сведен к дифференциальным уравнениям с точками поворота. Обратные задачи для уравнений с особенностями и с точками поворота используются также при исследовании разрывных решений некоторых нелинейных интегрируемых эволюционных уравнений математической физики (см. [65]). Обратные задачи для уравнения (1) с особенностями и для уравнения (2) с точками поворота и особенностями изучались в [36, 39, 45, 53, 77, 83, 85, 91, 95, 195, 234, 277, 278, 282, 291]. Некоторые аспекты теории точек поворота и их приложений представлены в [104, 180, 244]. В работах [7, 15, 16, 64, 68, 107, 247] изучалась обратная задача для уравнения (2) при недостатке гладкости у функций r и p. Случай сингулярного потенциала исследовался в [119, 226]. В работах [48, 113, 114, 156, 183, 230, 249] рассматривалась так называемая узловая обратная задача, когда потенциал восстанавливается по нулям (узлам) собственных функций. Много работ посвящено *неполным* обратным задачам, когда только часть спектральной информации доступна для измерения и (или) имеется априорная информация об операторе или его спектре (см. [6, 9, 84, 98, 106, 118, 138, 182, 216, 219, 220, 239, 242, 307] и литературу в них). Иногда в неполных обратных задачах мы сталкиваемся с недостатком информации, что ведет к неединственности решения обратной задачи (см., например, [84] и [239]). Упомянем также обратные задачи для краевых задач с нераспадающимися краевыми условиями ([111, 141, 178, 201, 220, 233, 241, 252, 269, 285]) и с нелокальными краевыми условиями вида

$$\int\limits_0^T y(x)\,d\sigma_j(x) = 0$$

(см. [142, 143]). Частным случаем обратных задач, исследованных в [142, 143], являются многоточечные обратные задачи, рассмотренные в [99] и [199]. Обратные задачи для интегродифференциальных и интегральных операторов исследовались в [51, 52, 78, 150, 151, 171, 256, 262, 288]. В частности, в [51, 52, 256] изучалась обратная спектральная задача для одномерного возмущения интегрального вольтеррова оператора вида

$$(Af)(x) := \int\limits_0^x M(x,t)f(t)\,dt + g(x)\int\limits_0^\pi v(t)f(t)\,dt, \quad 0 < x < \pi,$$

и показаны связи этого класса обратных задач с обратными задачами для дифференциальных операторов.

Упомянем также обратные спектральные задачи для дискретных операторов (см. [25, 41, 101, 108, 109, 135, 191, 227, 272, 273, 275, 284]), для дифференциальных операторов с запаздыванием ([197, 198]), для нелинейных дифференциальных уравнений ([274]), для матричных операторов Штурма–Лиувилля ([18, 55, 59, 100, 194, 231, 302]), для дифференциальных операторов на графах ([37, 54, 97, 149, 200, 298]) и др.

Много приложений теории решения обратных задач связано с дифференциальными операторами высших порядков вида

$$ly := y^{(n)} + d\sum_{k=0}^{n-2} p_k(x)y^{(k)}, \quad n > 2. \tag{3}$$

По сравнению с оператором Штурма–Лиувилля обратные задачи для оператора (3) оказались значительно более трудными для исследования. В частности, метод оператора преобразования, сыгравший решающую роль для оператора Штурма–Лиувилля, не дает удовлетворительных результатов при $n > 2$, так как операторы преобразования при $n > 2$ имеют гораздо более сложную структуру, чем при $n = 2$ (см. [82, 161]). Исключение составляет случай аналитических коэффициентов $p_k(x)$, когда операторы преобразования имеют такой же «треугольный» вид, как и для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля (см. [131, 179, 221]). В работах Л.А. Сахновича [221–223] и И.Г. Хачатряна [132–133] с помощью треугольного оператора преобразования исследовалась обратная задача восстановления самосопряженных дифференциальных операторов на полуоси с аналитическими коэффициентами по спектральной матрице-функции, а также обратная задача рассеяния. В частности, И.Г. Хачатрян доказал, что в аналитическом случае задание спектральной матрицы-функции однозначно определяет коэффициенты оператора.

Так как метод оператора преобразования оказался неэффективным при $n > 2$, то постепенно трудами трех поколений математиков был создан более эффективный и универсальный «метод спектральных отображений», связанный с идеями метода контурного интеграла. Н. Левинсон [162] в 1949 г. первым применил идеи метода контурного интеграла к исследованию обратных задач для случая оператора Штурма–Лиувилля (1). Развивая идеи Н. Левинсона, следующий важный шаг в середине 60-х годов XX в. сделал З.Л. Лейбензон [159–160], предложивший вместо операторов преобразования использовать специальные отображения пространств решений дифференциальных уравнений. Однако прошло еще более 20 лет, прежде чем метод спектральных отображений приобрел современный вид, что позволило построить теорию решения обратных задач для дифференциальных операторов произвольных порядков в общем случае, причем как для сингулярных, так и для регулярных операторов (см. [250, 251, 259, 260, 265, 268, 270]). Метод спектральных отображений позволяет также исследовать обратные задачи и для других более сложных классов операторов и пучков операторов.

Другой трудностью при исследовании дифференциальных операторов (3) при $n > 2$ являлась постановка обратной задачи, особенно в сингулярном случае. В частности, спектральная матрица-функция оказывается здесь неподходящим объектом. Были предприняты неудачные попытки ([303, 19]) доказать теорему единственности для самосопряженных операторов по спектральной матрице-функции в случае суммируемых коэффициентов. Есть основания считать, что в этом случае спектральная матрица-функция не определяет однозначно коэффициенты оператора. Более того, для несамосопряженных операторов вида (3) само понятие спектральной меры теряет смысл. В работах [250, 251, 259, 260, 265, 268, 270] в качестве основной спектральной характеристики для дифференциального оператора (3) вводится и изучается так называемая матрица Вейля, которая наиболее полно выражает спектральные свойства оператора. Данная терминология связана с тем, что введенная матрица является обобщением классической функции Вейля для самосопряженного оператора Штурма–Лиувилля. Использование концепции матрицы Вейля и метода спектральных отображений позволяет построить общую теорию решения обратной задачи для несамосопряженного дифференциального оператора (3) как на полуоси, так и на конечном интервале (см. гл. 3). Обратная задача рассеяния на оси для дифференциального оператора (3) в различных постановках рассматривалась в [30, 31, 56, 71, 72, 126, 128, 129, 235] и других работах. Заметим, что использование задачи Римана в обратной задаче рассеяния (см., например, [30]) можно рассматривать как частный случай метода спектральных отображений.

Некоторые частные случаи обратной задачи для операторов (3) при различных дополнительных ограничениях на коэффициенты оператора или на его спектр исследовались в [27, 159, 160, 171, 254, 257, 259] и других работах. Так, например, в [27, 159, 160, 254, 259] изучалась обратная задача для операторов (3) на конечном интервале по различным дискретным спектральным характеристикам при дополнительном весьма жестком условии «разделенности спектра». При этом постановка обратной задачи жестко связана с априорным условием на спектр, и отказ от условия разделенности спектра существенно усложняет задачу и приводит к нарушению единственности ее решения. В [171, 257] вместо условия разделенности спектра использовалось другое априорное ограничение — аналитичность коэффициентов оператора.

Обратная задача для несамосопряженного дифференциального оператора (3) с *локально суммируемыми* коэффициентами исследовалась в [263], где восстановление оператора ведется по обобщенным функциям Вейля. Обратная задача для дифференциальных операторов высших порядков *с особенностью* изучалась в [147, 148, 266, 267, 271, 290, 292-294]. *Неполные* обратные задачи для операторов высших порядков и их приложения рассматривались в [130, 35, 76, 171, 196, 257–259, 275]. В частности, в [258] исследовалась обратная задача восстановления части коэффициентов дифференциального оператора (3) по части матрицы Вейля (остальные коэффициенты оператора известны априори). Для решения таких задач в [258] разработан так называемый метод эталонных моделей, позволяющий строить конструктивное решение для широкого класса обратных задач (см., например, [250, 257, 259, 274, 275, 284]). Данный метод применялся также для решения обратной задачи теории упругости восстановления параметров балки по частотам ее собственных колебаний (см. [261]). Эта задача может быть сведена к обратной задаче восстановления дифференциального оператора четвертого порядка:

$$(h^{\mu}(x)y'')'' = \lambda h(x)y, \quad \mu = 1, 2, 3,$$

по функции Вейля.

Отметим, что кроме введенной в [259, 260] матрицы Вейля существует также другое обобщение понятия функции Вейля оператора Штурма–Лиувилля (см., например, [188] и замечание 3.2.2 в данной книге), которое назовем m-матрицей и которое удобно для изучения *прямых* задач спектрального анализа в самосопряженном случае, а именно для изучения свойств корневых функций и для доказательства теорем о полноте и о разложении. Однако при исследовании обратных задач m-матрица оказалась неудачным объектом. Матрица Вейля, введенная в [259, 260], является более естественным и удобным объектом в теории решения обратных задач.

Много работ посвящено обратным задачам для *систем* дифференциальных уравнений (см. [3, 11, 12, 14, 23, 24, 32, 33, 46, 55, 59, 61, 66, 92, 93, 103, 115, 158, 167, 172, 194, 224, 225, 228, 229, 245, 246, 248, 276, 295, 296, 297, 299, 300, 301, 305, 308, 309, 310] и литературу в них). Некоторые системы исследуются аналогично оператору Штурма–Лиувилля. К ним относятся системы Дирака, $AKNS$ и их обобщения. Для таких систем может быть использован метод оператора преобразования, и полученные результаты в основном аналогичны результатам для оператора Штурма–Лиувилля. Метод оператора преобразования может быть также применен для систем с аналитическим потенциалом аналогично случаю оператора (3) (см., например, [172]). Однако в общем случае решение обратных задач для систем сталкивается с существенно более серьезными трудностями, аналогичными случаю операторов высших порядков вида (3) с интегрируемыми коэффициентами. Существует только несколько работ, посвященных обратным задачам для таких систем, причем в основном для случаев полуоси ([295, 296, 297, 299] и гл. 4 данной книги) и оси ([32, 33, 158, 308, 309, 310]). Случай конечного отрезка исследовался в [300, 301]. Для полуоси и конечного отрезка в качестве основной спектральной характеристики вводится и изучается матрица Вейля, которая является аналогом матрицы Вейля, введенной в гл. 3 для оператора (3). Методом спектральных отображений получено решение обратной задачи восстановления системы

$$Q_0 Y'(x) + Q(x)Y(x) = \rho Y(x), \quad Y = [y_k]_{k=\overline{1,n}}, \tag{4}$$

по заданной матрице Вейля в общем случае, т. е. при произвольном расположении корней характеристического уравнения и при произвольном поведении спектра (см. гл. 4). Для случая оси с использованием задачи Римана изучалась обратная задача рассеяния для систем вида (4).

Важным классом обратных задач являются обратные задачи для *пучков* дифференциальных операторов, когда дифференциальное уравнение и (или) краевые условия зависят от спектрального параметра нелинейно. Такие задачи для уравнений второго порядка изучались в [8, 34, 49, 62, 94, 110, 136, 187, 255, 280, 281, 286, 287], а для уравнений высших порядков и систем в [170, 276, 309].

Обширная литература посвящена еще одной области применения обратных спектральных задач. В 1967 г. Г. Гарднер, Ж. Грин, М. Краскал и Р. Миура [89] разработали замечательный метод решения некоторых важных нелинейных уравнений математической физики, таких как уравнение Кортевега–де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Буссинеска и другие, связанный с использованием обратных задач. Этот метод представлен в [1, 2, 157, 236, 304] и других работах.

Много работ посвящено обратным задачам для уравнений с частными производными. Это направление отражено достаточно подробно в [20, 21, 22, 38, 40, 42, 50, 57, 73, 122, 123, 124, 125, 137, 153–155, 190, 192, 205, 208, 211–213]. В § 2.5 данной книги исследуется обратная задача для волнового уравнения как модельная обратная задача для уравнений с частными производными, показана связь с обратными спектральными задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987.
2. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering // London Math. Soc. Lecture Note Series. — Cambridge: Cambridge University Press, 1991. V. 149.
3. *Ablowitz M., Kaup D., Newell A., Segur H.* The inverse scattering transform — Fourier analysis for nonlinear problems // Studies in Appl. Math. 1974. V. 53, №4. P. 249–315.
4. *Агранович З.С., Марченко В.А.* Обратная задача теории рассеяния. — Харьков, 1960.
5. *Ahmad F., Razzaghi M.* A numerical solution to the Gelfand-Levitan-Marchenko equation, Differential equations and computational simulations, II (Mississippi State, MS, 1995) // Appl. Math. Comput. 1998. V. 89, №1–3. P. 31–39.
6. *Aktosun T.* Inverse Schrödinger scattering on the line with partial knowledge of the potential // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 56, №1. P. 219–231.
7. *Aktosun T., Klaus M., van der Mee C.* Recovery of discontinuities in a non-homogeneous medium // Inverse Problems. 1996. V. 12. P. 1–25.
8. *Aktosun T., Klaus M., van der Mee C.* Inverse scattering in one-dimensional nonconservative media // Integral Equations Operator Theory. 1998. V. 30, №3. P. 279–316.
9. *Aktosun T.* Construction of the half-line potential from the Jost function // IPs. 2004. V. 20. P. 859–876.
10. *Алексеев А.А.* Устойчивость обратной задачи Штурма–Лиувилля для конечного интервала // ДАН СССР. 1986. Т. 287, №1. С. 11–13.
11. *Alpay D., Gohberg I.* Inverse spectral problem for differential operators with rational scattering matrix functions // J. Diff. Equations. 1995. V. 118, №1. P. 1–19.
12. *Alpay D., Gohberg I.* Inverse problems associated to a canonical differential system // Operator Theory: Advances and Applications. — Basel: Birkhauser, 2001. V. 127. P. 1–27.
13. *Ambarzumian V.A.* Über eine Frage der Eigenwerttheorie // Zs. f. Phys. 1929. V. 53. P. 690–695.
14. *Amour L.,* Inverse spectral theory for the AKNS system with separated boundary conditions // Inverse Problems. 1993. V. 9, №5. P. 507–523.
15. *Andersson L.-E.* Inverse eigenvalue problems with discontinuous coefficients // Inverse Problems. 1988. V. 4, №2. P. 353–397.

16. *Andersson L.E.* Inverse eigenvalue problems for a Sturm–Liouville equation in impedance form // Inverse Problems. 1988. V. 4. P. 929–971.

17. *Anderssen R.S.* The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of tortional eigenfrequencies of the Earth // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1997. V. 50. P. 303–309.

18. *Andersson E.* On the M-function and Borg-Marchenko theorems for vector-valued Sturm–Liouville equations // J. Math. Phys. 2003. V. 44, №12. P. 6077–6100.

19. *Andersson E.* A uniquenees theorem in the inverse spectral theory of a certain higher-order ordinary differential equation using Paley-Wiener methods // J. London Math. Soc. 2005. V. 72(2), №1. P. 169–184.

20. *Anger G.* Inverse Problems in Differential Equations. — New York: Plenum Press, 1990.

21. *Anikonov Y.E.* Multidimensional Inverse and Ill-Posed Problems for Differ. Equations. Utrecht: VSP, 1995.

22. *Аниконов Ю.Е.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1978.

23. *Arov D., Dym H.* The bitangential inverse spectral problem for canonical systems // J. Funct. Anal. 2004. V. 214, №2. P. 312–385.

24. *Арутюнян Т.Н.* Изоспектральные операторы Дирака // Известия АН Армении: сер. матем. 1994. Т. 29, №2. С. 3–14.

25. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1968.

26. *Баев А.В.* О решении обратных задач диссипативной теории рассеяния // ДАН СССР. 1990. Т. 315, №5. С. 1103–1104.

27. *Баранова Е.А.* О восстановлении диффереациальных операторов высших порядков по их спектрам // ДАН СССР. 1972. Т. 205, №6. С. 1271–1273.

28. *Бари Н.К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. зап. МГУ, сер. матем. 1951. Т. 148, №4. С. 69–107.

29. *Barnes D.C.* The inverse eigenvalue problem with finite data // SIAM J. Math. Anal. 1991. V. 22, №3. P. 732–753.

30. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and Inverse Scattering on the Line, Math. Surveys and Monographs. V. 28, Amer. Math. Soc., Providence: RI, 1988.

31. *Beals R.* The inverse problem for ordinary differential operators on the line // Amer. J. Math. 1985. V. 107. P. 281–366.

32. *Beals R.*, *Coifman R.R.* Scattering and inverse scattering for first order systems // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V. 37. P. 39–90.

33. *Beals R.*, *Coifman R.R.* Scattering and inverse scattering for first-order systems II // Inverse Problems. 1987. V. 3, №4. P. 577–593.

34. *Beals R.*, *Henkin G.M.*, *Novikova N.N.* The inverse boundary problem for the Rayleigh system // J. Math. Phys. 1995. V. 36, №12. P. 6688–6708.

35. *Бехири С.Э.*, *Казарян А.Р.*, *Хачатрян И.Г.* О воостановлении регулярного двучленного дифференциального оператора произвольного четного

порядка по спектру // Уч. зап. Ереванского ун-та: Естеств. науки. 1994. Т. 181, №2. С. 8–22.

36. *Белишев М.И.* Обратная спектральная индефинитная задача для уравнения $y'' + zp(x)y = 0$ на промежутке // Функц. анализ и его прилож. 1987. Т. 21, №2. С. 68–69.

37. *Belishev M.I.* Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Problems. 2004. V. 20. P. 647–672.

38. *Belov Yu.Ya.* Inverse Problems for Partial Differential Equations // Inverse and Ill-posed Problems Series. — Utrecht: VSP, 2002.

39. *Bennewitz C.* A Paley-Wiener theorem with applications to inverse spectral theory. Advances in DEs and math. physics (Birmingham, AL, 2002), 21–31, Contemp. Math., 327, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

40. *Березанский Ю.М.* О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера // Труды Моск. матем. о-ва. 1958. Т. 7. С. 3–51.

41. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.

42. *Blagoveshchenskii A.S.* Inverse Problems of Wave Processes // Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2001.

43. *Блох М.Ш.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной матрице-функции // ДАН СССР. 1953. Т. 92, №2. С. 209–212.

44. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe // Acta Math. 1946. V. 78. P. 1–96.

45. *Boumenir A.* The inverse spectral problem for the generalized second-order operator // Inverse Problems. 1994. V. 10, №5. P. 1079–1097.

46. *Boutet de Monvel A.*, *Shepelsky D.* Inverse scattering problem for anisotropic media // J. Math. Phys. 1995. V. 36, №7. P. 3443–3453.

47. *Brown B.M.*, *Samko V.S.*, *Knowles I.W.*, *Marletta M.* Inverse spectral problem for the Sturm–Liouville equation // Inverse Problems. 2003. V. 19. P. 235–252.

48. *Browne P.J.*, *Sleeman B.D.* Inverse nodal problems for Sturm–Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions // Inverse Problems. 1996. V. 12, №4. P. 377–381.

49. *Browne P.J.*, *Sleeman B.D.* A uniqueness theorem for inverse eigenparameter dependent Sturm–Liouville problems // Inverse Problems. 1997. V. 13, №6. P. 1453–1462.

50. *Бухгейм А.Л.* Введение в теорию обратных задач. — Новосибирск: Наука, 1988.

51. *Бутерин С.А.* Обратная задача спектрального анализа для интегральных операторов: Автореф. Дис…канд. мат. наук. — Саратов, 2003.

52. *Бутерин С.А.* Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для одномерного возмущения оператора свертки // Математика. Механика. — Саратов: Издательство СГУ. — 2003. Вып. 5. С. 8–10.

53. *Carlson R.* A Borg-Levinson theorem for Bessel operators // Pacific J. Math. 1996. V. 177, №1. P. 1–26.

54. *Carlson R.* Inverse eigenvalue problems on directed graphs. // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 351, №10. P. 4069–4088.

55. *Carlson R.* An inverse problem for the matrix Schrodinger equation // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 267. P. 564–575.

56. *Caudrey P.* The inverse problem for the third-order equation // Phys. Lett. 1980. V. 79A. P. 264–268.

57. *Chadan K.*, *Sabatier P.C.* Inverse Problems in Quantum Scattering Theory: Texts and Monographs in Physics. — 2nd ed. — New York-Berlin: Springer-Verlag, 1989.

58. *Chadan K.*, *Colton D.*, *Paivarinta L.*, *Rundell W.* An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems // SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation. Society for Industrial and Applied Mathematics. — Philadelphia: PA, 1997.

59. *Chakravarty N.K.* A necessary and sufficient condition for the existence of the spectral matrix of a differential system // Indian J. Pure Appl. Math. 1994. V. 25, №4. P. 365–380.

60. *Chelkak D.*, *Kargaev P.*, *Korotyaev E.* Inverse problem for harmonic oscillator perturbed by potential, characterization. //Comm. Math. Phys. 2004. V. 249, №1. P. 133–196.

61. *Chern H.*, *Shen C.-L.* On the n-dimensional Ambarzumyan's theorem // Inverse Problems. 1997. V. 13, №1. P. 15–18.

62. *Чугунова М.В.* Обратная краевая задача на конечном интервале // Функц. анализ. — Ульяновск: изд-во педаг. ун-та, 1994. Т. 35. С. 113–122.

63. *Clancy K.*, *Gohberg I.* Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators. — Basel: Birkhauser, 1981.

64. *Coleman C.F.*, *McLaughlin J.R.* Solution of the inverse spectral problem for an impedance with integrable derivative I, II // Comm. Pure Appl. Math. 1993. V. 46, №2. C. 145–184, 185–212.

65. *Constantin A.* On the inverse spectral problem for the Camassa–Holm equation // J. Funct. Anal. 1998. V. 155, №2. P. 352–363.

66. *Cox S.*, *Knobel R.* An inverse spectral problem for a nonnormal first order differential operator // Integral Equations Operator Theory. 1996. V. 25, №2. P. 147–162.

67. *Dahlberg B.*, *Trubowitz E.* The inverse Sturm–Liouville problem III // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V. 37. P. 255–267.

68. *Darwish A.A.* The inverse scattering problem for a singular boundary value problem // New Zeland J. Math. 1993. V. 22. P. 37–56.

69. *Degasperis A.*, *Shabat A.* Construction of reflectionless potentials with infinite discrete spectrum // Teoret. i Matem. Fizika. 1994. V. 100, №2. P. 230–247; English transl.: Theoretical and Mathem. Physics.1994. V. 100, №2. P. 970–984.

70. *Deift P.*, *Trubowitz E.* Inverse scattering on the line // Comm. Pure Appl. Math. 1979. V. 32. P. 121–251.
71. *Deift P.*, *Tomei C.*, *Trubowitz E.* Inverse scattering and the Boussinesq equation // Comm. Pure Appl. Math. 1982. V. 35. P. 567–628.
72. *Deift P.*, *Zhou X.* Direct and inverse scattering on the line with arbitrary singularities // Comm. Pure Appl. Math. 1991. V. 44, №5. P. 485–533.
73. *Denisov A.M.* Elements of the Theory of Inverse Problems // Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 1999. P. 272.
74. *Dorren H.J.S.*, *Muyzert E.J.*, *Snieder R.K.* The stability of one-dimensional inverse scattering // Inverse Problems. 1994. V. 10, №4. P. 865–880.
75. *Дубровский В.В.*, *Садовничий В.А.* О некоторых свойствах операторов с дискретным спектром // Дифферен. уравнения. 1979. Т. 15, №7. С. 1206–1211.
76. *Elcrat A.*, *Papanicolaou V.G.* On the inverse problem of a forth-order selfadjoint binomial operator // SIAM J. Math. Anal. 1997. V. 28, №4. P. 886–896.
77. *El-Reheem Z.F.A.* On the scattering problem for the Sturm–Liouville equation on the half-line with sign valued weight coefficient // Applicable Analysis. 1995. V. 57. P. 333–339.
78. *Еремин М.С.* Обратная задача для интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с особенностью // Дифферен. уравнения. 1988. Т. 24. С. 350–351.
79. *Fabiano R.H.*, *Knobel R.*, *Lowe B.D.* A finite-difference algorithm for an inverse Sturm–Liouville problem // IMA J. Numer. Anal. 1995. V. 15, №1. P. 75–88.
80. *Фаддеев Л.Д.* О связи S-матрицы и потенциала для одномерного оператора Шредингера // ДАН СССР. 1958. V. 121, №1. P. 63–66.
81. *Фаддеев Л.Д.* Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера // Труды ин-та им. В.А. Стеклова. 1964. Т. 73. С. 314–336.
82. *Фаге М.К.* Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной // Труды Моск. матем. о-ва. 1959. Т. 8. С. 3–48.
83. *Freiling G.*, *Yurko V.A.* Inverse problems for differential equations with turning points // Inverse Problems. 1997. V. 13. P. 1247–1263.
84. *Freiling G.*, *Yurko V.A.* On constructing differential equations with singularities from incomplete spectral information // Inverse Problems. 1998. V. 14. P. 1131–1150.
85. *Freiling G.*, *Yurko V.A.* Inverse spectral problems for differential equations on the half-line with turning points // J. Diff. Equations. 1999. V. 153. P. 419–453.
86. *Freiling G.*, *Yurko V.A.* Inverse Sturm–Liouville Problems and their Applications. — New York: NOVA Science Publishers, 2001.
87. *Freiling G.*, *Yurko V.A.* Inverse spectral problems for singular non-selfadjoint differential operators with discontinuties in an interior point // Inverse Problems. 2002. V. 18. P. 757–773.

88. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.

89. *Gardner G.*, *Green J.*, *Kruskal M.*, *Miura R.* A method for solving the Korteweg–de Vries equation // Phys. Rev. Letters. 1967. V. 19. P. 1095–1098.

90. *Гасымов М.Г.*, *Левитан Б.М.* Определение дифференциального оператора по двум спектрам // УМН. 1964. Т. 19, №2. С. 3–63.

91. *Гасымов М.Г.* Определение уравнения Штурма–Лиувилля с особенностью по двум спектрам // ДАН СССР. 1965. Т. 161. С. 274–276.

92. *Гасымов М.Г., Левитан Б.М.* Обратная задача для системы Дирака // ДАН СССР, 1966. Т. 167. С. 967–970.

93. *Гасымов М.Г.* Обратная задача рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$ // Труды моск. матем. о-ва. 1968. Т. 19. С. 41–119.

94. *Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш.* Определение оператора диффузии по спектральным данным // ДАН Азерб. ССР. 1981. Т. 37, №2. С. 19–23.

95. *Гасымов М.Г., Амиров Р.Х.* Прямые и обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов второго порядка с кулоновской особенностью // ДАН Азерб. ССР. 1985. Т. 41, №8. С. 3–7.

96. *Гельфанд И.М.*, *Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Известия АН СССР, сер. матем. 1951. Т. 15. С. 309–360.

97. *Герасименко Н.И.* Обратная задача рассеяния на некомпактном графе // Теорет. матем. физ. 1988. Т. 74, №2. С. 187–200.

98. *Gesztesy F.*, *Simon B.* Inverse spectral analysis with partial information on the potential // The case of an a.c. component in the spectrum, Helv. Phys. Acta. 1997. V. 70, №1, 2. P. 66–71.

99. *Gesztesy F.*, *Simon B.* On the determination of a potential from three spectra. Diff. operators and spectral theory, 85–92, Amer. Math. Soc. Transl. Ser.2, 189, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

100. *Gesztesy F.*, *Clark S.* Weyl-Titchmarsh M-function asymptotics for matrix-valued Schrödinger operators // Proc. London Math. Soc. 2001. V. 82(3), №3. P. 701–724.

101. *Gladwell G.M.L.* Inverse Problems in Scattering // An introduction, Solid Mechanics and its Applications. V. 23. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993.

102. *Гохберг И.Ц.*, *Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.

103. *Gohberg I.C.*, *Kaashoek M.A.*, *Sakhnovich A.L.* Pseudo-canonical systems with rational Weyl functions: explicit formulas and applications // J. Diff. Equations. 1998. V. 146, №2. P. 375–398.

104. *Гольденвейзер А.Л.*, *Лидский В.Б.*, *Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1979.

105. *Гончар А.А.*, *Новикова Н.Н.*, *Хенкин Г.М.* Многоточечные аппроксимации Паде в обратной задаче Штурма–Лиувилля // Математ. сб. 1991. Т. 182, №8. С. 1118–1128.

106. *Grebert B.*, *Weder R.* Reconstruction of a potential on the line that is a priori known on the half-line // SIAM J. Appl. Math. 1995. Т. 55, №1. С. 242–254.

107. *Гринберг Н.И.* Одномерная обратная задача рассеяния для волнового уравнения // Математ. сб. 1990. Т. 181, №8. С. 1114–1129.

108. *Гусейнов Г.Ш.*, *Набиев И.М.* Определение бесконечной несамосопряженной матрицы Якоби по ее обобщенной спектральной функции // Математ. заметки. 1978. Т. 23, №2. С. 237–248.

109. *Guseinov G.S.*, *Tuncay H.* On the inverse scattering problem for a discrete one-dimensional Schrödinger equation // Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser. A1 Math. Statist. 1995. V. 44, №1–2. С. 95–102.

110. *Гусейнов Г.Ш.* О спектральном анализе квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля, ДАН СССР. 1985. Т. 285, №6. С. 1292–1296.

111. *Гусейнов И.М.* Решение одного класса обратных краевых задач Штурма–Лиувилля // Математ. сб. 1995. Т. 186, №5. С. 35–48.

112. *Hald O.H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems // Comm. Pure Appl. Math. 1984. Т. 37. С. 539–577.

113. *Hald O.H.*, *McLaughlin J.R.* Solutions of inverse nodal problems // Inverse Problems. 1989. V. 5. P. 307–347.

114. *Hald O.H.*, *McLaughlin J.R.* Inverse problems: recovery of BV coefficients from nodes // Inverse Problems. 1998. V. 14, №2. P. 245–273.

115. *Hinton D.B.*, *Jordan A.K.*, *Klaus M.*, *Shaw J.K.* Inverse scattering on the line for a Dirac system // J. Math. Phys. 1991. V. 32, №11. P. 3015–3030.

116. *Hochstadt H.* The inverse Sturm–Liouville problem // Comm. Pure Appl. Math. 1973. V. 26. P. 715–729.

117. *Hochstadt H.* On the well-posedness of the inverse Sturm–Liouville problems // J. Diff. Equations. 1977. V. 23, №3. P. 402–413.

118. *Horvath M.* On the inverse spectral theory of Schrodinger and Dirac operators // Trans. AMS. 2001. V. 353, №10. P. 4155–4171.

119. *Hryniv R.O.*, *Mykytyuk Ya.V.* Inverse spectral problems for St-L operators with singular potentials // Inverse Problems. 2003. V. 19. P. 665–684.

120. *Isaacson E.L.*, *Trubowitz E.* The inverse Sturm–Liouville problem I // Comm. Pure Appl. Math. 1983. V. 36. P. 767–783.

121. *Isaacson E.L.*, *McKean H.P.*, *Trubowitz E.* The inverse Sturm–Liouville problem II // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V. 37. P. 1–11.

122. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. — New–York: Springer–Verlag, 1998.

123. *Kabanikhin S.I.*, *Lorenzi A.* Identification problems of wave phenomena. Theory and numerics. Inverse and Ill-posed Problems Series. — VSP, 1999.

124. *Кабанихин С.И.* Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. — Новосибирск: Наука, 1988.

125. *Kachalov A.*, *Kurylev Y.*, *Lassas M.* Inverse boundary spectral problems. Chapman and Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Math., 123. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.

126. *Kaup D.* On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems // Stud. Appl. Math. 1980. V. 62. P. 189–216.

127. *Kay J.*, *Moses H.* The determination of the scattering potential from the spectral measure function I, II, III // Nuovo Cimento. 1955. V. 2. P. 917–961; 1956. V. 3. P. 56–84, 276–304.

128. *Казарян А.Р.*, *Хачатрян И.Г.* Об обратной задаче рассеяния для дифференциального оператора произвольного порядка с суммируемыми на всей оси коэффициентами I // Известия АН Армении, сер. матем. 1994. Т. 29, №5. С. 50–75.

129. *Казарян А.Р., Хачатрян И.Г.* Об обратной задаче рассеяния для дифференциального оператора произвольного порядка с суммируемыми на всей оси коэффициентами II // Известия АН Армении. Сер. матем. 1995. Т. 30, №1. С. 39–65.

130. *Хачатрян И.Г.* О восстановлении дифференциального уравнения по спектру // Функц. анализ и его прилож. 1976. Т. 10, №1. С. 93–94.

131. *Хачатрян И.Г.* Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков // Известия АН Арм. ССР. Сер. матем. 1978. Т. 13, №3. С. 215–237.

132. *Хачатрян И.Г.* О некоторых обратных задачах для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси // Функц. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. №1. С. 40–52.

133. *Хачатрян И.Г.* Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси // ДАН Арм. ССР. 1983. Т. 77, №2. С. 55–58.

134. *Khanh B.D.* A numerical resolution of the Gelfand-Levitan equation // J. Comput. Appl. Math. 1996. V. 72, №2. P. 235–244.

135. *Хасанов А.Б.* Обратная задача теории рассеяния на полуоси для системы разностных уравнений // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Ташкент, 1986. С. 266–295.

136. *Khruslov E.Y.*, *Shepelsky D.G.* Inverse scattering method in electromagnetic sounding theory // Inverse Problems. 1994. V. 10, №1. C. 1–37.

137. *Kirsch A.* An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems // Applied Mathematical Sciences. V. 120. — Berlin: Springer-Verlag, 1996.

138. *Klibanov M.V.*, *Sacks P.E.* Use of partial knowledge of the potential in the phase problem of inverse scattering // J. Comput. Phys. 1994. V. 112. P. 273–281.

139. *Knobel R.*, *Lowe B.D.* An inverse Sturm–Liouville problem for an impedance // Z. Angew. Math. Phys. 1993. V. 44, №3. P. 433–450.

140. *Kobayashi M.* A uniqueness proof for discontinuous inverse Sturm–Liouville problems with symmetric potentials // Inverse Problems. 1989. V. 5, №5. P. 767–781.

141. *Korotyaev E.* Estimates of periodic potentials in terms of gap lengths // Commun. Math. Phys. 1998. V. 197. P. 521–526.

142. *Кравченко К.В.* О дифференциальных операторах с нелокальными краевыми условиями // Дифферен. уравнения. 2000. Т. 36, №4. С. 464–469.

143. *Кравченко К.В.* Обратная задача для дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями: Автореф. Дис...канд. мат. наук. — Саратов, 1997.

144. *Крейн М.Г.* Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля // ДАН СССР. 1951. Т. 76, №1. С. 21–24.

145. *Крейн М.Г.* Об одном методе эффективного решения обратной задачи // ДАН СССР. 1954. Т. 94, №6. С. 987–990.

146. *Krueger R.J.* Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties // J. Math. Phys. 1982. V. 23, №3. P. 396–404.

147. *Kudishin P.M.* Recovery of differential operators with a singular point // Proc. Inter. Conf. dedicated to 90th Anniversary of L.S. Pontryagin. — Moscow, MSU, 1998. P. 66.

148. *Кудишин П.М.* Обратная задача для дифференциальных операторов высших порядков с особенностью: Автореф. Дис...канд. мат. наук. — Саратов, 1998.

149. *Kurasov P.*, *Stenberg F.* On the inverse scattering problem on branching graphs // J. Phys. A: Math. Gen. 2002. V. 35. P. 101–121.

150. *Курышова Ю.В.* Об одной обратной задаче для интегро-дифференциальных операторов // Деп. в ВИНИТИ. 08.08.2001, №1835-В2001.

151. *Курышова Ю.В.* Обратная задача для интегродифференциальных операторов: Автореф. Дис...канд. мат. наук. — Саратов, 2002.

152. *Lapwood F.R.*, *Usami T.* Free Oscillations of the Earth. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

153. *Lavrentiev M.M.*, *Romanov V.G.*, *Vasiliev V.G.* Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations // Lecture Notes in Mathematics. V. 167. — Berlin: Springer-Verlag, 1970.

154. *Лаврентьев М.М.*, *Резницкая К.Г.*, *Яхно В.Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. — Новосибирск: Наука, 1982.

155. *Lavrentiev M.M.*, *Avdeev A.V.*, *Lavrentiev M.M.Jr.*, *Priimenko V.I.* Inverse Problems of Mathematical Physics // Inverse and Ill-Posed Problems Series. — Utrecht: VSP, 2003.

156. *Law C.K.*, *Yang C.-F.* Reconstructing the potential function and its derivatives using nodal data // Inverse Problems. 1998. V. 14, №2. P. 299–312.

157. *Лакс П.* Интегралы нелинейных уравнений эволюции и уединенные волны // Математика. 1969. Т. 13, №5. С. 128–150.

158. *Lee J.-H.* On the dissipative evolution equations associated with the Zakharov-Shabat system with a quadratic spectral parameter // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 316, №1. P. 327–336.

159. *Лейбензон З.Л.* Обратная задача спектрального анализа для дифференциальных операторов высших порядков // Труды моск. матем. о-ва. 1966. Т. 15. С. 70–144.

160. *Лейбензон З.Л.* Спектральные разложения отображений систем краевых задач // Труды моск. матем. о-ва. 1971. Т. 25. С. 15–58.

161. *Леонтьев А.Ф.* Оценка роста решения одного дифференциального уравнения при больших значениях параметра // СМЖ. 1960. Т. 1, №3. С. 456–487.

162. *Levinson N.* The inverse Sturm–Liouville problem // Math. Tidsskr. 1949. V. 13. P. 25–30.

163. *Левитан Б.М.* Теория операторов обобщенного сдвига. — М.: Наука, 1973.

164. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. — М.: Наука, 1984.

165. *Левитан Б.М.*, *Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. — М.: Наука, 1970.

166. *Левитан Б.М.*, *Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1986.

167. *Li S.Y.* The eigenvalue problem and its inverse spectrum problem for a class of differential operators // Acta Math. Sci. (Chinese). 1996. V. 16, №4. P. 391–403.

168. *Литвиненко О.Н.*, *Сошников В.И.* Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике. — М.: Сов. Радио, 1964.

169. *Lowe B.D.*, *Pilant M.*, *Rundell W.* The recovery of potentials from finite spectral data // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23, №2. P. 482–504.

170. *Лукомский Д.С.* Обратная задача для пучков дифференциальных операторов высших порядков: Автореф. Дис...канд. мат. наук. — Саратов, 2002.

171. *Маламуд М.М.* Подобие вольтерровых операторов и смежные вопросы теории дифференциальных уравнений дробных порядков // Труды моск. матем. о-ва. 1994. Т. 55. С. 73–148.

172. *Маламуд М.М.* Вопросы единственности в обратных задачах для систем дифференциальных уравнений на конечном интервале // Труды моск. матем. о-ва. 1999. Т. 60. С. 199–258.

173. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.

174. *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. — Киев: Наукова думка, 1972.

175. *Марченко В.А.* Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. 1950. Т. 72, №3. С. 457–460.

176. *Марченко В.А.* Некоторые вопросы теории линейных дифференциальных операторов второго порядка // Труды моск. матем. о-ва. 1952. Т. 1. С. 327–420.

177. *Марченко В.А.*, *Маслов К.В.* Устойчивость задачи восстановления оператора Штурма–Лиувилля по спектральной функции // Математ. сб. 1970. Т. 81(123). С. 525–551.

178. *Марченко В.А.*, *Островский И.В.* Характеристика спектра оператора Хилла // Математ. сб. 1975. Т. 97. С. 540–606.

179. *Мацаев В.И.* О существовании оператора преобразования для дифференциальных операторов высших порядков // ДАН СССР. 1960. Т. 130, №3. С. 499–502.

180. *McHugh J.* An historical survey of ordinary linear differential equations with a large parameter and turning points // Arch. Hist. Exact. Sci. 1970. V. 7. P. 277–324.

181. *McLaughlin J.R.* Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data // SIAM Rev. 1986. V. 28. P. 53–72.

182. *McLaughlin J.R.* On uniqueness theorems for second order inverse eigenvalue problems // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 118, №1. P. 38–41.

183. *McLaughlin J.R.* Inverse spectral theory using nodal points as data — a uniqueness result // J. Diff. Equations. 1988. V. 73. P. 354–362.

184. *Мещанов В.П.*, *Фельдштейн А.Л.* Автоматизированное проектирование направленных ответвителей СВЧ. — М.: Связь, 1980.

185. *Mizutani A.* On the inverse Sturm–Liouville problem // J. Fac. Sci Univ. Tokio, Sect.IA, Math. 1984. V. 31. P. 319–350.

186. *Mueller J.L.*, *Shores T.S.* Uniqueness and numerical recovery of a potential on the real line // Inverse Problems. 1997. V. 13, №3. P. 781–800.

187. *Nabiev I.M.* Inverse spectral problem for the diffusion operator on an interval // Mat. Fiz. Anal. Geom. 2004. V. 11, №3. P. 302–313.

188. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.

189. *Neher M.* Enclosing solutions of an inverse Sturm–Liouville problem with finite data // Computing. 1994. V. 53, №3–4. P. 379–395.

190. *Newton R.G.* Inverse Schrödinger Scattering in Three Dimensions, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, 1989.

191. *Никишин Е.М.* Дискретный оператор Штурма–Лиувилля и некоторые задачи теории функций // Труды семинара им. И.Г. Петровского. — М., 1984. Вып. 10. С. 3–77.

192. *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. — Киев: Наукова думка, 1991.

193. *Paine J.* A numerical method for the inverse Sturm–Liouville problem // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1984. V. 5, №1. P. 149–156.

194. *Paladhi B.R.* The inverse problem associated with a pair of second-order differential equations // Proc. London Math. Soc. (3) 1981. V. 43, №1. P. 169–192.

195. *Панахов Э.С.* Об обратной задаче по двум спектрам для дифференциального оператора с особенностью в нуле // ДАН АН Азерб. ССР. 1980. Т. 36, №10. С. 6–10.

196. *Papanicolaou V.G.*, *Kravvaritis D.* An inverse spectral problem for the Euler–Bernoulli equation for the vibrating beam // Inverse Problems. 1997. V. 13. №4. P. 1083–1092.

197. *Pikula M.* Determination of a Sturm–Liouville type differential operator with retarded argument from two spectra // Mat. Vestnik. 1991. V. 43, №3–4. P. 159–171.

198. *Pikula M.* On the determination of a differential equation with variable delay // Math. Montisnigri. 1996. V. 6. P. 71–91.

199. *Пивоварчик В.Н.* Восстановление потенциала уравнения Штурма–Лиувилля по трем спектрам краевых задач // Функц. анализ и его прилож. 1999. Т. 33, №3. С. 87–90.

200. *Pivovarchik V.N.* Inverse problem for the Sturm–Liouville equation on a simple graph // SIAM J. Math. Anal. 2000. V. 32, №4. P. 801–819.

201. *Плаксина О.А.* Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями // Математ. сб. 1986. Т. 131. С. 3–26.

202. *Покорный Ю.В.*, *Пенкин О.М.*, *Прядиев В.Л.*, *Боровских А.В.*, *Лазарев К.П.*, *Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004.

203. *Pöschel J.*, *Trubowitz E.* Inverse Spectral Theory. — New York: Academic Press, 1987.

204. *Повзнер А.Я.* О дифференциальных операторах типа Штурма–Лиувилля на полуоси // Математ. сб. 1948. Т. 23(65). С. 3–52.

205. *Prilepko A.I.*, *Orlovsky D.G.*, *Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York: Marcel Dekker, 2000.

206. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1967.

207. *Провоторов В.В.* О решении обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля с краевыми условиями внутри интервала // Функц.-дифферен. уравнения. — Пермь: изд-во политех. ин-та, 1989. С. 132–137.

208. *Ramm A.G.* Multidimensional Inverse Scattering Problems, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 51. Longman Scientific and Technical, Harlow; co-published in the United States with John Wiley and Sons, Inc., New York, 1992.

209. *Расулов М.Л.* Метод контурного интеграла. — М.: Наука, 1964.

210. *Рябушко Т.И.* Устойчивость восстановления оператора Штурма–Лиувилля по двум спектрам // Теория функций, функц. анализ и их прилож. — Харьков, 1972. Вып. 16. С. 186–198.

211. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984.

212. *Romanov V.G.*, *Kabanikhin S.I.*. Inverse Problems for Maxwell's Equations // Inverse and Ill-posed Problems Series. — Utrecht: VSP, 1994.

213. *Romanov V.G.* Investigation Methods for Inverse Problems // Inverse and Ill-posed Problems Series. — Utrecht: VSP, 2002.

214. *Rundell W.*, *Sacks P.E.* Reconstruction techniques for classical inverse Sturm–Liouville problems // Math. Comp. 1992. V. 58, №197. P. 161–183.

215. *Rundell W.*, *Sacks P.E.* The reconstruction of Sturm–Liouville operators // Inverse Problems. 1992. V. 8, №3. P. 457–482.

216. *Rundell W.*, *Sacks P.E.* On the determination of potentials without bound state data // J. Comput. Appl. Math. 1994. V. 55, №3. P. 325–347.

217. *Rykhlov V.S.* Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order // Results Math. 1999. V. 36, №3, 4. P. 342–53.

218. *Sacks P.E.* An iterative method for the inverse Dirichlet problem // Inverse Problems. 1988. V. 4, №4. P. 1055–1069.

219. *Sacks P.E.* Recovery of singularities from amplitude information // J. Math. Phys. 1997. V. 38, №7. P. 3497–3507.

220. *Садовничий В.А.* О некоторых постановках обратных задач спектрального анализа // УМН. 1983. V. 38, №5. С. 132.

221. *Сахнович Л.А.* Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами // Математ. сб. 1958. V. 46(88), №1. P. 61–76.

222. *Сахнович Л.А.* Метод оператора преобразования для уравнений высших порядков // Математ. сб. 1961. V. 55(97), №3. P. 347–360.

223. *Сахнович Л.А.* Об обратной задаче для уравнений четвертого порядка // Математ. сб. 1962. V. 56(98), №2. P. 137–146.

224. *Sakhnovich L.A.* Spectral Theory of Canonical Differential Systems. Method of Operator Identities // Translated from the Russian. Operator Theory: Advances and Appl. V. 107. — Basel: Birkhauser Verlag, 1999.

225. *Sakhnovich A.L.* Dirac type and canonical systems: spectral and Weyl-Titchmarsh matrix functions, direct and inverse problems // Inverse Problems. 2002. V. 18, №2. P. 331–348.

226. *Савчук А.М.*, *Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с распределенными потенциалами // Труды Моск. матем. о-ва. 2003. Т. 64. С. 159–212.

227. *Серебряков В.П.* О свойствах данных рассеяния дискретного уравнения Штурма–Лиувилля // Труды моск. матем. о-ва. 1986. V. 49. P. 130–140.

228. *Шабат А.Б.* Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений // Функц. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. С. 75–78.

229. *Шабат А.Б.* Обратная задача рассеяния // Дифферен. уравнения. 1979. Т. 15. №10. С. 1824–1834.

230. *Shen C.L.*, *Tsai T.M.* On a uniform approximation of the density function of a string equation using eigenvalues and nodal points and some related inverse nodal problems // Inverse Problems. 1995. V. 11, №5. P. 1113–1123.

231. *Shen C.L.*, *Shieh C.T.* Two inverse eigenvalue problems for vectorial Sturm–Liouville equations // Invers problems. 1998. V. 14, №5. P. 1331–1343.

232. *Shepelsky D.G.* The inverse problem of reconstruction of the medium‘s conductivity in a class of discontinuous and increasing functions, Spectral operator theory and related topics, 209–232, Advances in Soviet Math. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

233. *Станкевич И.В.* Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // Доклады АН СССР. 1970. V. 192, №1. С. 34–37.

234. *Сташевская В.В.* Об обратной задаче спектрального анализа для некоторого класса дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1953. Т. 93. С. 409–412.

235. *Суханов В.В.* Обратная задача для самосопряженного дифференциального оператора на оси // Математ. сб. 1988. Т. 137(179), №2. С. 242–259.

236. *Тахтаджян Л.А.*, *Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986.

237. *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. — Петроград, 1917.

238. *Тихонов А.Н.* О единственности решения задачи электроразведки // ДАН СССР. 1949. V. 69, №6. С. 797–800.

239. *Тихонравов А.В.* О принципиально достижимой точности решения задачи синтеза // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22, №6. С. 1421–1433.

240. *Титчмарш Е.* Теория функций. — М.: Наука, 1980.

241. *Tkachenko V.A.*, *Sansuc J.-J.* Characterization of the periodic and anti-periodic spectra of nonselfadjoint Hill's operators // Operator Theory, Advances and Appl. V. 98. — Basel: Birkhaeuser, 1997. P. 216–224.

242. *Trooshin I.*, *Mochizuki K.* Inverse problem for interior spectral data of the Sturm–Liouville operator // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2001. V. 9, №4. P. 425–433.

243. *Вагабов А.И.* Об уточнении одной асимптотической теоремы Тамаркина // Дифферен. уравнения. 1993. Т. 29, №1. С. 41–49.

244. *Wasow W.* Linear Turning Point Theory. — Berlin: Springer, 1985.

245. *Watson B.A.* Inverse spectral problems for weighted Dirac systems // Inverse Problems. 1999. V. 15, №3. P. 793–805.

246. *Winkler H.* The inverse spectral problem for canonical systems // Integral Equations Operator Theory. 1995. V. 22, №3. P. 360–374.

247. *Якубов В.Я.* Восстановление уравнения Штурма–Лиувилля с суммируемым весом // УМН. 1996. V. 51, №4. P. 175–176.

248. *Yamamoto M.* Inverse spectral problem for systems of ordinary differential equations of first order I // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 1988. V. 35, №3. P. 519–546.

249. *Yang X.-F.* A solution of the inverse nodal problem // Inverse Problems. 1997. V. 13. P. 203–213.

250. *Yurko V.A.* Inverse Spectral Problems for Linear Differential Operators and their Applications. — New York: Gordon and Breach, 2000.

251. *Yurko V.A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory // Inverse and Ill-posed Problems Series. — Utrecht: VSP, 2002.

252. *Юрко В.А.* Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями // Математ. заметки. 1975. Т. 18. Вып. 4. С. 569–576.

253. *Юрко В.А.* Об устойчивости восстановления операторов Штурма–Лиувилля // Дифф. уравнения и теория функций. — Саратов: изд-во СГУ, 1980. Вып. 3. С. 113–124.

254. *Юрко В.А.* О восстановлении дифференциальных операторов четвертого порядка // Дифферен. уравнения. 1983. Т. 19, №11. С. 2016–2017.

255. *Юрко В.А.* О краевых задачах с параметром в краевых условиях Известия АН Арм. ССР. Сер. матем. 1984. Т. 19, №5. С. 398–409.

256. *Юрко В.А.* Обратная задача для интегральных операторов // Математ. заметки. 1985. Т. 37. Вып. 5. С. 690–701.

257. *Юрко В.А.* Единственность восстановления двучленных дифференциальных операторов по двум спектрам // Математ. заметки. 1998. Т. 43. Вып. 3. С. 356–364.

258. *Юрко В.А.* Восстановление дифференциальных операторов высших порядков // Дифферен. уравнения. 1989. Т. 25, №9. С. 1540–1550.

259. *Юрко В.А.* Обратная задача для дифференциальных операторов — Саратов: изд-во СГУ, 1989.

260. *Юрко В.А.* Восстановление дифференциальных операторов по матрице Вейля // ДАН СССР. 1990. Т. 313, №6. С. 1368–1372.

261. *Юрко В.А.* Об одной задаче теории упругости // Прикл. Мат. Мех. 1990. Т. 54, №6. С. 998–1002.

262. *Юрко В.А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Математ. заметки. 1991. Т. 50. Вып. 5. С. 134–146.

263. *Юрко В.А.* Обратная задача для дифференциальных операторов на полуоси // Известия ВУЗов: Математика. 1991, №12. С. 67–76.

264. *Yurko V.A.* Solution of the Boussinesq equation on the half-line by the inverse problem method // Inverse Problems. 1991. V. 7. P. 727–738.

265. *Юрко В.А.* Восстановление несамосопряженных дифференциальных операторов на полуоси по матрице Вейля // Математ. сб. 1991. Т. 182, №3. С. 431–456.

266. *Юрко В.А.* Обратная задача для дифференциальных уравнений с особенностью // Дифферен. уравнения. 1992. Т. 28, №8. Р. 1355–1362.

267. *Yurko V.A.* On higher-order differential operators with a singular point // Inverse Problems. 1993. V. 9. P. 495–502.

268. *Юрко В.А.* Обратная задача для самосопряженных дифференциальных операторов на полуоси // Доклады РАН. 1993. Т. 333, №4. С. 449–451.

269. *Юрко В.А.* О дифференциальных операторах с нераспадающимися краевыми условиями // Функц. анализ и его прилож. 1994. Т. 28, №4. С. 90–92.

270. *Юрко В.А.* Об определении самосопряженных дифференциальных операторов на полуоси // Математ. заметки. 1995. Т. 57. Вып. 3. С. 451–462.

271. *Юрко В.А.* О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью // Математ. сборник. 1995. Т. 186, №6. С. 133–160.

272. *Юрко В.А.* Об интегрировании нелинейных динамических систем методом обратной спектральной задачи // Математ. заметки. 1995. Т. 57. Вып. 6. С. 945–949.

273. *Yurko V.A.* On higher-order difference operators // Journal of Difference Equations and Applications. 1995. V. 1. P. 347–352.

274. *Юрко В.А.* Об обратной задаче для нелинейного дифференциального уравнения // Дифферен. уравнения. 1995. Т. 31, №10. С. 1768–1769.

275. *Yurko V.A.* An inverse problems for operators of a triangular structure // Results in Mathematics. 1996. V. 30, №3/4. P. 346–373.

276. *Юрко В.А.* Обратная задача для систем дифференциальных уравнений с нелинейной зависимостью от спектрального параметра // Дифферен. уравнения. 1997. Т. 33. №3. С. 390–395.

277. *Yurko V.A.* Integral transforms connected with differential operators having singularities inside the interval // Integral Transforms and Special Functions. 1997. V. 5 , №3–4. P. 309–322.

278. *Юрко В.А.* О восстановлении дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля с особенностями внутри интервала // Математ. заметки. 1998. Т. 64, №1. С. 143–156.

279. *Юрко В.А.* О краевых задачах с условиями разрыва внутри интервала // Дифферен. уравнения. 2000. Т. 36, №8. С. 1139–1140.

280. *Yurko V.A.* An inverse problem for differential equations of the Orr-Sommerfeld type // Mathematische Nachrichten. 2000. V. 211. P. 177–183.

281. *Юрко В.А.* О восстановлении пучков дифференциальных операторов на полуоси // Математ. заметки. 2000. Т. 67. Вып. 2. С. 316–319.

282. *Yurko V.A.* Inverse problems for differential equations with singularities lying inside the interval // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2000. V. 8, №1. P. 89–103.

283. *Yurko V.A.* Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems // Integral Transforms and Special Functions. 2000. V. 10, №2. C. 141–164.

284. *Yurko V.A.* Inverse spectral problems for differential operators and their applications // J. Math. Sciences (New York). 2000. V. 98, №3. P. 319–426.

285. *Yurko V.A.* The inverse spectral problem for differential operators with nonseparated boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 250. P. 266–289.

286. *Юрко В.А.* Обратная задача для пучков дифференциальных операторов // Математический сборник. 2000. Т. 191, №10. С. 137–160.

287. *Yurko V.A.* Recovery of differential equations with nonlinear dependence on the spectral parameter // Appl. Anal. 2001. V. 78, №1, 2. P. 63–77.

288. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. —Саратов, изд-во Саратовского пединститута, 2001 — 499 с.

289. *Юрко В.А.*, *Игнатьев М.Ю.* Численные методы решения обратных спектральных задач // Известия СГУ, новая серия. 2001. Т. 1. Вып. 2. С. 55–64.

290. *Юрко В.А.* О дифференциальных операторах высших порядков с особенностью внутри интервала // Математические заметки 2002. Т. 71. Вып. 1. С. 152–156.

291. *Юрко В.А.* О восстановлении сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов с особенностью внутри интервала // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, №5. С. 645–659.

292. *Yurko V.A.* Integral transforms connected with higher-order differential operators with a singularity // Integral Transforms and Special Functions. 2002. V. 13. №6. P. 497–511.

293. *Yurko V.A.* Inverse spectral problems for higher-order differential operators with a singularity // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2002. V. 10. №4. P. 413–425.

294. *Yurko V.A.* Higher-order differential equations having a singularity in an interior point // Results in Mathematics. 2002. V. 42. P. 177–191.

295. *Юрко В.А.* О восстановлении несамосопряженных дифференциальных систем на полуоси по матрице Вейля // Математические заметки. 2004. Т. 76. Вып. 2. С. 316–320.

296. *Юрко В.А.* Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для систем дифференциальных уравнений на полуоси// Доклады РАН. 2004. Т. 396, №6. С. 755–758.

297. *Юрко В.А.* Обратная спектральная задача для сингулярных несамосопряженных дифференциальных систем // Матем. сборник. 2004. Т. 195, №12. С. 123–156.

298. *Yurko V.A.* Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. V. 21. P. 1075–1086.

299. *Yurko V.A.* An inverse problem for differential systems with multiplied roots of the characteristic polynomial // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2005. V. 13, №5. P. 503–512.

300. *Юрко В.А.* Обратная задача для дифференциальных систем на конечном интервале в случае кратных корней характеристического уравнения // Дифферен. уравнения. 2005. Т. 41, №6. С. 781–786.

301. *Yurko V.A.* Inverse spectral problems for differential systems on a finite interval // Results in Math. 2006. V. 48, №3–4. P. 371–386.

302. *Yurko V.A.* Inverse problems for matrix Sturm–Liouville operators // Russian J. Math. Phys. 2006. V. 13, №1. P. 111–118.

303. *Zachary W.W.* An inverse spectral theory of Gelfand-Levitan type for higher order differential operators // Lett. Math. Phys. 1984. V. 8, №5. P. 403–411.

304. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. — М., Наука, 1980.

305. *Замонов М.З., Хасанов А.Б.* Разрешимость обратной задачи для системы Дирака на оси //Вестник МГУ. Сер. матем. и мех. 1985, №6. С. 3–7.

306. *Жидков Е.П., Айрапетян Р.Г.* Численный метод решения обратной задачи квантовой теории рассеяния // Вестник МГУ. Сер. матем. и мех. 1996 №6. С. 38–40.

307. *Zhornitskaya L.A., Serov V.S.* Inverse eigenvalue problems for a singular Sturm–Liouville operator on $(0,1)$ // Inverse Problems. 1994. V. 10, №4. P. 975–987.

308. *Zhou X.* Direct and inverse scattering transforms with arbitrary spectral singularities // Comm. Pure Appl. Math. 1989. V. 42, №7. P. 895–938.

309. *Zhou X.* Inverse scattering transform for systems with rational spectral dependence // J. Diff. Equations. 1995. V. 115, №2. P. 277–303.

310. *Zhou X.* L_2-Sobolev space bijectivity of the scattering and inverse scattering transforms // Comm. Pure Appl. Math. 1998. V. 51, №7. P. 697–731.

311. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. — М.:Мир, 1965.