

Кабанихин С. И.

Обратные и некорректные задачи



ВЫСШЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

С. И. КАБАНИХИН

**ОБРАТНЫЕ
И НЕКОРРЕКТНЫЕ
ЗАДАЧИ**

Издание второе, переработанное

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по специальностям направлений подготовки:
«Прикладная математика и информатика», «Прикладная
математика», «Механика», «Прикладная механика»
(решение Бюро Президиума Научно-методического совета
по математике, протокол № 22 от 15.04.2008)

Печатается по постановлению Ученого Совета
Механико-математического факультета
Новосибирского государственного университета
(протокол № 2 от 24.03.2009)

СИБИРСКОЕ НАУЧНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
НОВОСИБИРСК
2009

УДК 519.6+517.9
ББК В161.62+В192
К12

Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. — 457 с.

В учебнике изложены методы исследования и решения обратных и некорректных задач линейной алгебры, интегральных и операторных уравнений, интегральной геометрии, спектральных обратных задач и обратных задач рассеяния; рассмотрены линейные некорректные задачи и коэффициентные обратные задачи для гиперболических, параболических и эллиптических уравнений; дан обширный справочный материал.

Для студентов учреждений высшего профессионального образования. Может быть полезен аспирантам, стажерам, инженерам, научным работникам, а также преподавателям вузов.

Рецензенты:

Заведующий отделом некорректных задач
Института математики и механики УрО РАН,
член-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор
В. В. Васин

Профессор кафедры математики
физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова,
доктор физ.-мат. наук
А. Г. Ягола

Заведующий лабораторией эволюционных уравнений
Института математики им. С. Л. Соболева,
доктор физ.-мат. наук, профессор
В. С. Белоносов

Научный редактор:

Заведующий лабораторией волновых процессов
Института математики им. С. Л. Соболева,
член-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор
В. Г. Романов

ISBN 5-98365-003-3

УДК 519.6+517.9
ББК В161.62+В192
К12

© Кабанихин С. И., 2009

Оглавление

От автора	8
Предисловие	9
Предисловие ко второму изданию	13
Глава 1. Определения и примеры	14
1.1. Об определении обратных и некорректных задач	14
1.2. Примеры обратных и некорректных задач	23
Глава 2. Некорректные задачи	39
2.1. Корректные и некорректные задачи	41
2.2. Об устойчивости в различных пространствах	43
2.3. Теорема В. К. Иванова. Квазирешение	46
2.4. Метод М. М. Лаврентьева	49
2.5. Метод регуляризации А. Н. Тихонова	52
2.6. Градиентные методы	60
2.7. Оценка скорости сходимости по функционалу	66
2.8. Оценка условной устойчивости и сильная сходимость градиентных методов решения некорректных задач	70
2.9. Псевдообратный оператор и сингулярное разложение оператора	78
Глава 3. Некорректные задачи линейной алгебры	88
3.1. Обобщение понятия решения. Псевдорешение	91
3.2. Метод регуляризации	93
3.3. Принципы выбора параметра регуляризации	97
3.4. Итерационные регуляризирующие алгоритмы	98
3.5. Сингулярное разложение	100

3.6. Алгоритм сингулярного разложения и метод С. К. Годунова	108
3.7. Метод квадратного корня	112
3.8. Дополнительные сведения и упражнения	113
Глава 4. Интегральные уравнения	122
4.1. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода	122
4.2. Регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода	129
4.3. Операторные уравнения Вольтерра с ограниченно липшиц-непрерывным ядром	135
4.4. Локальная корректность и теорема единственности в целом	139
4.5. Корректность в окрестности точного решения	141
4.6. Регуляризация нелинейных операторных уравнений первого рода	146
Глава 5. Интегральная геометрия	153
5.1. Задача Радона	154
5.2. Восстановление функции по сферическим средним	162
5.3. Определение функции одной переменной по значениям ее интегралов. Проблема моментов	163
5.4. Обратная кинематическая задача сейсмологии	168
Глава 6. Спектральные обратные задачи и обратные задачи рассеяния	179
6.1. Прямая задача Штурма — Лиувилля на конечном интервале	181
6.2. Обратные задачи Штурма — Лиувилля на конечном интервале	187
6.3. Метод Гельфанда — Левитана на конечном интервале	190
6.4. Обратные задачи рассеяния	196
6.5. Обратные задачи рассеяния во временной области	203
6.6. О взаимосвязях переходных функций	207
Глава 7. Линейные задачи для гиперболических уравнений	210
7.1. Восстановление функции по сферическим средним	210
7.2. Задача Коши для гиперболического уравнения с данными на времениподобной поверхности	213

7.3. Обратная задачи термоакустики.....	215
7.4. Линеаризованная многомерная обратная задача для волнового уравнения.....	217
Глава 8. Линейные задачи для параболических уравнений.....	232
8.1. О постановке обратных задач для параболических уравнений и их связи с соответствующими обратными задачами для гиперболических уравнений.....	233
8.2. Обратная задача теплопроводности с обратным временем (ретроспективная).....	237
8.3. Граничные обратные задачи и задачи продолжения.....	247
8.4. Внутренние задачи и задачи об источнике.....	248
Глава 9. Линейные задачи для эллиптических уравнений.....	253
9.1. Теорема единственности и оценка условной устойчивости на плоскости.....	254
9.2. Сведение начально-краевой задачи для уравнения Лапласа к обратной задаче и к операторному уравнению $Aq = f$	258
9.3. Исследование оператора A для уравнения Лапласа.....	259
9.4. Задача продолжения для уравнения с самосопряженным эллиптическим оператором.....	263
Глава 10. Коэффициентные обратные задачи для гиперболических уравнений.....	269
10.1. Обратные задачи для уравнения $u_{tt} = u_{xx} - q(x)u + F(x, t)$	270
10.1.1. Задача с распределенными начальными данными для уравнения $u_{tt} = u_{xx} - q(x)u + F(x, t)$	270
10.1.2. Задача с сосредоточенным источником для уравнения $u_{tt} = u_{xx} - q(x)u$	277
10.1.3. Разрешимость в целом обратной задачи для уравнения $u_{tt} = u_{xx} - q(x)u$	282
10.1.4. Связь обратной задачи Штурма — Лиувилля и обратной задачи с сосредоточенным источником.....	289
10.2. Обратные задачи акустики.....	293
10.2.1. Исследование одномерной обратной задачи акустики.....	301
10.2.2. Методы решения обратной задачи акустики.....	304
10.3. Одномерная обратная задача электродинамики.....	306
10.4. Локальная разрешимость многомерных обратных задач.....	313

10.5. Метод отображений Неймана — Дирихле для полупространства	321
10.6. Лучевые постановки обратных задач	325
10.6.1. Асимптотическое разложение фундаментального решения уравнения акустики	326
10.6.2. Трехмерная обратная задача для уравнения акустики	328
10.7. Двумерный аналог уравнения Гельфанда — Левитана — Крейна	334
Глава 11. Коэффициентные обратные задачи для параболических и эллиптических уравнений	341
11.1. Постановка коэффициентных обратных задач для параболического уравнения. Сведение к гиперболическим обратным задачам	342
11.2. Сведение к спектральным обратным задачам	344
11.3. Теоремы единственности	346
11.4. Градиентные методы	349
11.5. Теорема единственности в переопределенной постановке для эллиптического уравнения	354
11.6. Обратная задача в полубесконечном цилиндре	356
Глава 12. Приложение	360
12.1. Пространства	360
12.1.1. Евклидовы пространства	361
12.1.2. Гильбертовы пространства	366
12.1.3. Банаховы пространства	371
12.1.4. Метрические и топологические пространства	372
12.1.5. Примеры гильбертовых и банаховых пространств	380
12.2. Операторы	381
12.2.1. Операторы в топологических пространствах	382
12.2.2. Операторы в метрических пространствах	383
12.2.3. Операторы в линейных пространствах	384
12.2.4. Операторы в банаховых пространствах	386
12.2.5. Операторы в гильбертовых пространствах	391
12.2.6. Линейные операторы в конечномерных пространствах (матрицы)	396

12.3. Сопряженное пространство и сопряженный оператор	404
12.3.1. Функционалы	404
12.3.2. Сопряженное пространство	408
12.3.3. Сопряженный оператор	412
12.4. Элементы дифференциального исчисления в банаховых пространствах	416
12.5. Функциональные пространства	419
12.5.1. Функциональные пространства, используемые при рассмотрении стационарных краевых задач	419
12.5.2. Функциональные пространства, используемые при решении нестационарных задач	429
12.6. Уравнения математической физики	434
12.6.1. Дельта-функция Дирака и ее свойства	434
12.6.2. Основные уравнения математической физики	437
12.6.3. Классическая задача Коши для волнового уравне- ния	440
12.6.4. Фундаментальное решение дифференциального оператора	441
Список основных обозначений	445
Список основной литературы	449
Предметный указатель	451

От автора

Учебник посвящен одному из самых молодых разделов современной прикладной математики — обратным задачам естествознания. Основная проблема при изучении обратных задач заключается в том, что для глубокого их понимания необходима достаточно серьезная математическая подготовка. Для того чтобы несколько облегчить и сделать более эффективным процесс чтения и изучения обратных задач, автор включил в учебник дополнительную 12-ую главу, в которой изложены сведения из различных разделов математики, начиная с линейной алгебры и заканчивая математической физикой и функциональным анализом.

Первые пять глав учебника вполне доступны для студентов третьего курса. По глубокому убеждению автора, именно с третьего курса необходимо начинать знакомство с обратными и некорректными задачами. Последующие главы постепенно усложняются. Возрастает сложность задач, и многие этапы доказательства приходится опускать, адресуя читателя к более специальной литературе. Но такой стиль второй половины учебника позволяет ввести читателя в современный круг проблем, которыми в данный момент занимаются многочисленные научные коллективы практически во всех развитых странах.

Необходимо отметить, что очень многие важные вопросы не вошли в учебник. Однако книги и работы по этим вопросам упомянуты в списках литературы в конце каждой главы.

Данный учебник является первым в России (и, по-видимому, во всем мире) изданием, в котором предпринята попытка собрать под единой обложкой почти все основные направления теории обратных и некорректных задач. Поэтому почти неизбежно читатель может найти в тексте опечатки, не для всех понятные места и, возможно, (чего очень бы не хотелось!) некоторые ошибки. Автор будет очень признателен всем, кто пришлет ему (по адресу kabanikhin@mail.ru) свои отзывы, замечания, предложения по дополнению и/или изменению текста.

Предисловие

Начиная с середины XX века, термин “некорректные задачи” стремительно проникает в современную науку. Немногим более чем за пятьдесят лет изучения этих задач, стало ясно, что к ним можно отнести значительную часть задач (причем, наиболее сложных, вследствие их неустойчивости и, как правило, нелинейности) из различных разделов классической математики (вычислительной алгебры, дифференциальных и интегральных уравнений, уравнений в частных производных, функционального анализа). С другой стороны, именно обратные и некорректные задачи превратились в объект систематического изучения и применения в физике, геофизике, медицине, астрономии и, вообще, во всех областях знаний, в которых применимы математические методы. Дело в том, что решения обратных задач описывают такие важные свойства исследуемых сред, как плотность и скорость распространения волн, параметры упругости, проводимость, диэлектрическая и магнитная проницаемость, а также свойства и местоположение неоднородностей в области недоступности. Нетрудно понять, насколько интересна и важна такая информация для физиков, геофизиков, врачей и, вообще, исследователей таких объектов и областей, проникновение внутрь которых либо слишком трудоемко, либо опасно, либо вообще невозможно.

В учебнике читателю предлагаются краткие (и не только) и простые (но далеко не всегда) ответы на следующие вопросы:

— что означают термины “обратные задачи” и “некорректные задачи”?

— в каких разделах наук эти задачи возникают?

— в чем суть некорректности и как можно попытаться ее преодолеть?

— можно ли построить устойчивые методы решения неустойчивых задач?

Изложение ведется почти в точном соответствии с университетским курсом математики.

После примеров (глава 1) и общей теории (глава 2) приводятся методы изучения обратных и некорректных задач линейной алгебры (глава 3), интегральных уравнений (глава 4), интегральной геометрии (глава 5), спектральных обратных задач и обратных задач рассеяния (глава 6). Далее следуют главы 7–9, посвященные линейным некорректным задачам для гиперболических, параболических и эллиптических уравнений. Наиболее трудными для понимания являются главы 10, 11, посвященные коэффициентным (нелинейным) обратным задачам. Заметим, что именно эти задачи являются наиболее интересными для практики. Для облегчения знакомства с такой многогранной областью знаний, как обратные и некорректные задачи, в последней главе учебника изложены сведения из различных разделов математики, которые необходимы для понимания основного текста.

Публикации по обратным и некорректным задачам появились в первой половине двадцатого века. Они были связаны с физикой (обратные задачи квантовой теории рассеяния), геофизикой (обратные задачи электроразведки, сеймики, теории потенциала), астрономией и другими областями естествознания. С появлением мощных ЭВМ область приложений обратных и некорректных задач охватила практически все научные дисциплины, в которых используются математические методы. В прямых задачах математической физики исследователи стремятся найти (в явной форме или приближенно) функции, описывающие различные физические явления, например, распространение звука, тепла, сейсмических колебаний, электромагнитных волн и так далее. При этом свойства исследуемой среды (коэффициенты уравнений), а также начальное состояние процесса (в нестационарном случае) или его свойства на границе (в случае ограниченной области и/или в стационарном случае) предполагаются известными. Однако именно свойства среды часто являются неизвестными. И тогда возникают обратные задачи, в которых по информации о решении прямой задачи требуется определить коэффициенты уравнений. Эти задачи в большинстве случаев некорректны (неустойчивы по отношению к погрешностям измерений). С другой стороны, искомыми коэффициентами уравнений являются, как правило, такие важные характеристики исследуемых сред, как плотность, электропроводность, теплопроводность и так далее. Решение обратных задач может помочь также определить местоположение, форму и структуру включений, дефектов, источников (тепла, колебаний, напряжения, загрязнения) и так далее. Неудивительно, что при таком широком наборе приложений теория обратных и некорректных задач с момента своего появления стала одной из наиболее стремительно развивающихся областей современной науки. Сейчас уже почти невозможно подсчитать число научных публикаций, в которых в той или иной мере исследуются обратные и некорректные задачи. Но поскольку теория относительно молода, учебников и учебных пособий не хватает. И это понятно. Еще не

устоялись многие термины. По многим важным результатам еще продолжаются дискуссии, попытки их улучшения. Постоянно появляются новые подходы, понятия, теоремы.

Основной особенностью и целью данного учебника являются доступность изложения материала и попытка как можно более широко охватить стремительно развивающиеся области теории обратных и некорректных задач. Это продиктовано двумя обстоятельствами. С одной стороны, имеется большое количество книг, дающих полную картину развития того или иного направления теории обратных и некорректных задач, с другой — отсутствует издание, охватывающее все перечисленные в оглавлении вопросы, как говорится, под единой обложкой. В данной ситуации книга, использующая предыдущий опыт и демонстрирующая на простых и не очень простых примерах основные особенности теории и численных методов решения обратных и некорректных задач, будет полезна студентам 3-5 курсов университетов, а также аспирантам, стажерам, инженерам и исследователям из самых различных областей приложений математики.

Учебник написан на основе курсов лекций и спецкурсов, читаемых автором в течение более 25 лет на механико-математическом и геолого-геофизическом факультетах Новосибирского государственного университета, а также в ряде университетов Германии (университет Карлсруэ), Италии (университеты Милана, Перуджии), Казахстана (Казахстанско-Британский технический университет, Алматы), Китая (университет Ханчжоу), Швеции (Королевский технологический институт, Стокгольм), Японии (университет Токио) и других стран.

При написании учебника использованы известные книги и статьи российских и зарубежных авторов (см. список основной и дополнительной литературы). Содержание отдельных глав и учебника в целом неоднократно обсуждалось автором с академиками М. М. Лаврентьевым и С. К. Годуновым, с членами-корреспондентами РАН В. Г. Романовым, В. В. Васиным, с профессорами А. Г. Яголой, В. С. Белоносовым, М. Ю. Кокуриным, В. А. Юрко, а также с соавторами докторами физико-математических наук Г. Б. Бакановым, М. А. Бектемиевым, К. Т. Исаковым, А. Л. Карчевским и кандидатами физико-математических наук К. С. Абдиевым, А. С. Алексеенко, С. В. Мартаковым, А. Т. Нурситовой, Д. Б. Нурситовым, М. А. Шишленниковым, а также А. В. Пененко и Д. В. Нечаевым. Всем им автор выражает искреннюю благодарность за обсуждения и согласие включить результаты дискуссий и совместных работ в данный учебник. И безусловно, хотелось бы поблагодарить за постоянную поддержку всех сотрудников, работающих и работавших ранее в отделе Михаила Михайловича Лаврентьева.

Большинство результатов, вошедших в учебник, получены основателями и представителями научных коллективов Москвы, Новосибирска,

Екатеринбурга (Свердловск), Санкт-Петербурга (Ленинград). В книгу также вошли результаты совместных работ и дискуссий с моими соавторами: J. Gottlieb (Карлсруэ), M. Grasselli (Милан), A. Hasanoglu (Измит), S. He (Ханчжоу), B. Hofmann (Кемнитц), M. Klibanov (Шарлотт), R. Kowar (Линц), A. Lorenzi (Милан), O. Scherzer (Иннсбрук), M. Schieck (Кемнитц), S. Stroem (Стокгольм), M. Yamamoto (Токио). Всем им автор выражает признательность.

Большую помощь при оформлении учебника оказал Д. В. Нечаев.

И. Г. Кабанихина взяла на себя труд тщательно прочитать и проанализировать текст на предмет ясности и доступности изложения, настойчиво и методически выявляя трудные или нечетко написанные разделы, корректируя и подчас меняя эти разделы, за что автор выражает ей огромную признательность.

Трудно переоценить вклад рецензентов В. В. Васина, А. Г. Яголы и В. С. Белоносова, критические замечания и советы которых способствовали значительному улучшению содержания и качества учебника.

Работа над учебником была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 05-01-00171, 05-01-00559, 08-01-00312 и 08-01-90260), грантом Президента РФ (проект НШ-1172.2003.1), интеграционными проектами Сибирского отделения РАН (№ 16, № 26 и № 48), программой Рособразования "Университеты России" (проект УР.04.01.200), Международным фондом обратных задач (Алматы, Казахстан) и Благотворительным фондом обратных задач естествознания (Новосибирск, Россия).

Особую благодарность я хотел бы выразить своему Учителю, открывшему для меня удивительный и увлекательный мир обратных и некорректных задач, Владимиру Гавриловичу Романову, без которого эта книга не была бы задумана и написана.

Предисловие

ко второму изданию

После выхода первого издания автор получил много отзывов и, что особенно важно, советов и пожеланий, с учетом которых второе издание было переработано. Особенно много ценных советов высказали член-корреспондент РАН В. Г. Романов и профессор С. Я. Серовайский, которым автор выражает искреннюю признательность.

Во втором издании существенно переработано Приложение и исправлены замеченные опечатки и неточности.

Особую благодарность за обсуждения, помощь в подготовке рукописи и данного издания автор выражает проректору КазНПУ имени Абая профессору М. А. Бектемесову.

По мнению одних, Земля шарообразна, по мнению других — плоская и имеет форму барабана. Последние приводят в доказательство тот факт, что при заходе и восходе Солнца его скрытая за горизонтом часть отсекается прямой, а не дугοобразной линией, исходя тем самым из предположения, что, если бы Земля была шарοобразной, линия сечения должна была бы иметь форму дуги ...

Факт тот, что в затмениях ... линия всегда дугοобразна. Следовательно, раз Луна затмевается потому, что ее заслоняет Земля, то причина такой формы — округлость Земли, и Земля шарοобразна.

Аристотель “На небесах”, 350 лет до нашей эры.

Глава 1.

Определения и примеры

В данной главе мы рассмотрим основные определения и различные примеры обратных и некорректных задач. С одной стороны, такие задачи буквально пронизывают математику (см. правые колонки таблиц 1.1 и 1.2), с другой — эти задачи возникают практически в любой области знаний, в которой применимы математические методы. Подобные задачи решались учеными давно (см. эпиграф к главе), но только к середине XX века обратные и некорректные задачи стали изучаться систематически и постепенно завоевывать право называться перспективной областью современной науки.

1.1. Об определении обратных и некорректных задач

Каждый человек ежеминутно решает *обратные и некорректные* задачи. И решает, как правило, быстро и эффективно (если, конечно, находится в добром здравии и ясном сознании). Возьмем, к примеру, зрительное восприятие. Установлено, что за минуту глаз человека фиксирует лишь конечное число точек окружающего мира. А как же тогда человек видит все? Мозг (в этой ситуации — персональный компьютер) по

увиденным точкам восполняет (интерполирует и экстраполирует) все, что глаз не успел зафиксировать. Ясно, что воссоздать истинную картину (в общем случае — объемную и цветную!) по нескольким точкам можно лишь в случае, когда она хорошо знакома (большинство предметов мы уже видели, а иногда и трогали руками). То есть, несмотря на *некорректность (неединственность и неустойчивость)* задачи (восстановить по нескольким точкам наблюдаемый объект и все, что его окружает) мозг справляется с этой задачей довольно быстро. Почему? Он использует богатый жизненный опыт (*априорную информацию*). Достаточно мельком взглянуть на человека, чтобы понять, кто перед вами: старик или ребенок. Но если ставить перед собой задачу определения возраста человека с точностью до пяти лет, беглого взгляда, как правило, недостаточно.

Уже на примере, упомянутом в эпиграфе, видно, что рассмотрение только лишь тени Земли на поверхности Луны недостаточно для однозначного решения обратной задачи проективной геометрии (восстановления формы Земли). Многие полагают (писал Аристотель), что Земля имеет форму барабана на основании того, что линия горизонта на закате — прямая. И Аристотель приводит еще два доказательства шарообразности (привлекая дополнительную информацию): предметы в любой точке поверхности падают вертикально (к центру тяжести), а картина звездного неба меняется при движении наблюдателя по поверхности Земли.

Вообще говоря, при желании понять что-то достаточно сложное, решить задачу, вероятность ошибки в которой велика, мы обычно приходим к *неустойчивой (некорректной)* задаче. Можно сказать, что человек постоянно сталкивается с некорректными задачами. В самом деле, каждый понимает, как легко ошибиться, пытаясь восстановить прошлое по некоторым фактам настоящего (воссоздать картину преступления по имеющимся прямым и косвенным уликам, выявить причины возникновения болезни по результатам обследования и т. п.); или заглянуть в будущее (предсказать стихийное бедствие или хотя бы погоду через неделю); или “проникнуть” в зону недоступности (недра Земли — геофизика, мозг человека — ЯМР-томография) и понять, что там происходит.

В сущности, любая попытка расширить границы непосредственного (зрительного, слухового и т. п.) восприятия окружающего мира приводит к некорректным задачам.

Что же такое обратные и некорректные задачи? В отличие от обратных задач, для которых нет единого строгого определения, термин “некорректная задача” означает, что задача либо *не имеет решения* (в интересующем нас классе), либо, напротив, имеет *много* решений (как минимум два), либо процедура нахождения решения *неустойчива* (т. е. при малейшей ошибке измерений полученное решение может как угод-

но сильно отличаться от точного). Наибольшую сложность при решении представляет собой именно третье свойство некорректных задач — неустойчивость. Поэтому под некорректными задачами часто подразумевают неустойчивые.

Для определения различных классов *обратных задач* следует сначала договориться о том, что такое *прямая задача*. В самом деле, “обратное” бывает не иначе, как по отношению к чему-то “прямому”. Рассмотрим в качестве примера задачи математической физики.

В математической физике под *прямыми задачами* обычно понимают задачи моделирования каких-либо физических полей, процессов или явлений (электромагнитных, акустических, сейсмических, тепловых и т. п.). В прямых задачах требуется найти функцию, описывающую физическое поле или процесс в каждой точке исследуемой области и в каждый момент времени (если поле нестационарное). Для решения прямой задачи задаются

- 1) область, в которой процесс изучается;
- 2) уравнение, описывающее данный процесс;
- 3) начальные условия (если процесс нестационарный);
- 4) условия на границе исследуемой области.

Например, для уравнения акустики можно поставить начальнo-краевую прямую задачу следующим образом. В области

$$\begin{aligned} \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ с границей } \Gamma = \partial\Omega, \\ \mathbb{R}^n \text{ — евклидово пространство,} \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

требуется найти решение $u(x, t)$ уравнения акустики

$$c^{-2}(x)u_{tt} = \Delta u - \nabla \ln \rho(x) \cdot \nabla u + h(x, t), \quad (1.1.2)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (1.1.3)$$

и граничным условиям

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = g(x, t). \quad (1.1.4)$$

Здесь $u(x, t)$ — акустическое давление; $c(x)$ — скорость распространения звука в среде; $\rho(x)$ — плотность среды; $h(x, t)$ — функция источников. Эта задача (как большинство прямых задач математической физики) корректна, т. е. однозначно разрешима и устойчива по отношению к малым вариациям данных. Данными для решения прямой задачи (1.1.1)–(1.1.4) являются область Ω , коэффициенты $c(x)$, $\rho(x)$ и функция источника $h(x, t)$ в уравнении (1.1.2), начальные условия $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в (1.1.3) и граничные условия $g(x, t)$ в (1.1.4).

В обратной задаче помимо $u(x, t)$ неизвестны какие-либо функции, входящие в прямую задачу. Эти неизвестные называются *решением обратной задачи*. Для их определения к заданным уравнениям (1.1.2)–(1.1.4) добавляется какая-либо дополнительная информация о решении прямой задачи — *данные обратной задачи*. (Иногда к данным обратной задачи относят и известные коэффициенты прямой — вариантов бывает очень много). Пусть, например, дополнительной информацией будет значение решения прямой задачи (1.1.2)–(1.1.4) на границе

$$u|_{\Gamma} = f(x, t). \quad (1.1.5)$$

В обратной задаче требуется по данным $f(x, t)$ определить неизвестные функции, входящие в формулировку прямой задачи. В зависимости от того, какие из функций являются неизвестными, обратные задачи математической физики можно разделить на группы. Сделаем это на рассмотренном нами примере.

Классификация по искомым функциям. Обратная задача (1.1.2)–(1.1.5) называется *ретроспективной*, если требуется восстановить начальные условия, т. е. функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из (1.1.3). Обратная задача (1.1.2)–(1.1.5) называется *граничной*, если требуется найти функцию, входящую в граничное условие (функцию $g(x, t)$). Обратная задача (1.1.2)–(1.1.5) называется *задачей продолжения*, если начальные условия (1.1.3) неизвестны, а дополнительная информация (1.1.5) и граничные условия (1.1.4) заданы только на части границы $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ области Ω и требуется определить решение $u(x, t)$ уравнения (1.1.2) (продолжить решение внутрь области). Обратная задача (1.1.2)–(1.1.5) называется *задачей об источнике*, если требуется определить источник, т. е. функцию $h(x, t)$ из уравнения (1.1.2). Обратная задача (1.1.2)–(1.1.5) называется *коэффициентной*, если требуется восстановить коэффициенты ($c(x)$ и $\rho(x)$), входящие в основное уравнение.

Сразу же отметим, что данная классификация не является полной. Бывает так, что неизвестны и начальные, и граничные условия. Бывает, что неизвестной оказывается сама область Ω (или часть ее границы).

Классификация по дополнительной информации. Возможны и другие (помимо начально-краевой (1.1.2)–(1.1.4)) постановки прямой задачи акустики (спектральная, рассеяния, кинематическая и т.д.), в которых требуется найти соответствующие характеристики акустического процесса (собственные частоты, отраженные волны, времена пробега волны и т.д.). Измерения этих характеристик экспериментаторами порождают новые классы обратных задач акустики.

Наиболее доступными на практике являются измерения на границе исследуемой области (1.1.5), но иногда измерительные приборы могут быть размещены внутри объекта

$$u(x_m, t) = f_m(t), \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.1.6)$$

(внутренние задачи). В ретроспективных обратных задачах (по аналогии с задачами оптимального управления) используются так называемые “финальные” наблюдения

$$u(x, T) = \hat{f}(x). \quad (1.1.7)$$

При гармоническом режиме колебаний $u(x, t) = e^{i\omega t} \bar{u}(x, \omega)$ ставятся *обратные задачи рассеяния* и дополнительная информация задается, например, в виде

$$\bar{u}(x, \omega_\alpha) = \bar{f}(x, \alpha), \quad x \in X_1, \quad \alpha \in \Omega, \quad (1.1.8)$$

где X_1 — множество точек наблюдений; $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ — множество частот, на которых ведутся наблюдения. В некоторых случаях известны собственные частоты соответствующего дифференциального оператора

$$\Delta U - \nabla \ln \rho \cdot \nabla U = \lambda U$$

и различные характеристики собственных функций (*спектральные обратные задачи*). Иногда удается фиксировать в точках $\{x_k\}$ времена прихода волн, порожденных локальными источниками, сосредоточенными в точках $\{x^m\}$:

$$\tau(x^m, x_k) = \bar{f}(x^m, x_k), \quad x_k \in X_1, \quad x^m \in X_2.$$

В этом случае задача восстановления скорости $c(x)$ называется *обратной кинематической задачей*.

Классификация по уравнениям. Итак, только для уравнения акустики мы получаем набор M_1 различных обратных задач в зависимости от количества и вида неизвестных функций, совокупность которых будем обозначать символом q . С другой стороны, можно получить M_2 различных вариантов обратных задач в зависимости от количества и типа измеряемых величин (дополнительной информации) — данных обратной задачи, совокупность которых будем обозначать через f . Тогда символически обратную задачу можно записать в виде операторного уравнения

$$Aq = f, \quad (1.1.9)$$

где A — оператор, действующий из пространства искомых элементов Q в пространство измеряемых величин F .

В заключение заметим, что вместо уравнения акустики мы могли бы рассмотреть уравнение теплопроводности, переноса излучения, Лапласа, Пуассона или систему уравнений Ламе, Максвелла и т. п. — скажем, M_3 различных вариантов. Но тогда только для уравнений математической физики можно определить порядка $M_1 M_2 M_3$ различных обратных задач, многим из которых посвящены целые монографии.

Замечание 1.1.1. Разумеется, можно еще более обобщить понятие обратной задачи, поскольку иногда и сам закон (уравнение) неизвестен. В этом случае требуется по результатам опытов (наблюдений) установить закон (уравнение).

Открытию новых законов в математической форме (уравнений) предшествует множество экспериментов, размышлений и дискуссий, и этот сложный (исторический) процесс вряд ли стоит называть решением обратной задачи. Однако, термин “обратные задачи” все чаще проникает в самые разные разделы научной литературы. Например, появляются попытки взглянуть на математическую статистику как на обратную задачу по отношению к теории вероятностей. Очень много общего можно найти между теорией обратных задач и теорией управления, распознавания образов и многими другими областями знаний. Для того чтобы убедиться в популярности обратных задач, достаточно, например, набрать в поисковой системе www.amazon.com несколько слов, скажем “inverse problems books”. В момент написания этих строк (31 мая 2007 года) упомянутая система выдала 107 книг, в названии которых есть слова “inverse problems”. Причем в ссылке на каждую книгу есть совет: “see more references in this book”, т. е. в каждой из ста семи книг содержится еще список ссылок. А если убрать из темы поиска слово “books”, то по теме “inverse problems” система выдает уже 6687 наименований! Однако в данном учебнике мы ограничимся лишь несколькими математическими аспектами теории обратных задач.

О структуре оператора A . Символически прямую задачу можно записать в операторной форме

$$A_1(\Gamma, c, \rho, h, \varphi, \psi, g) = u.$$

Это означает, что оператор A_1 переводит множество *данных прямой задачи* в *решение прямой задачи* $u(x, t)$. Назовем A_1 *оператором прямой задачи*. В обратной задаче некоторые из данных прямой задачи неизвестны. Обозначим совокупность этих неизвестных через q , а сужение оператора A_1 на q через \bar{A}_1 . *Оператор измерений* A_2 переводит решение прямой задачи $u(x, t)$ в *дополнительную информацию* f , например, $A_2 u = u|_{\Gamma}$ или $A_2 u = u(x_k, t)$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда уравнение (1.1.9) принимает вид

$$Aq \equiv A_2 \bar{A}_1 q = f,$$

где оператор A является результатом последовательного применения (суперпозицией) двух операторов \bar{A}_1 и A_2 . Например, в ретроспективной обратной задаче $q = (\varphi, \psi)$, $f = u(x, T)$, $\bar{A}_1 q = u(x, t)$, $A_2 \bar{A}_1 q = u(x, T)$; в коэффициентной задаче $q = (c, \rho)$, $f = u|_{\Gamma}$, $\bar{A}_1 q = u(x, t)$, $A_2 \bar{A}_1 q = u|_{\Gamma}$ и т. д. Оператор прямой задачи A_1 обычно непрерывен (прямая задача корректна). Оператор измерений, как правило, также непрерывен (измерять стремятся устойчивые характеристики процесса). Суперпозиция $A_2 \bar{A}_1$ обычно бывает даже слишком хорошей ($A = A_2 \bar{A}_1$ в некорректных задачах чаще всего вполне непрерывный оператор). Тем труднее его обращать, т. е. решать обратную задачу $Aq = f$. На простейшем примере (A — постоянное число) это озна-

чает, что чем на меньшее число A мы умножим число q , тем меньше (вообще говоря) будет ошибка (в случае приближенно заданного q):

$$A(q + \delta q) = \tilde{f},$$

т. е. оператор прямой задачи хороший. Но при решении обратной задачи по приближенным данным $\tilde{f} = f + \delta f$ ошибка

$$\delta q = \tilde{q} - q = \frac{\delta f}{A}$$

может быть очень велика, если число A достаточно мало.

Интерес к обратным и некорректным задачам возник в начале XX века. В 1902 году Ж. Адамар сформулировал понятие корректности постановки задач для дифференциальных уравнений [2.43]. Корректной по Адамару называют задачу, решение которой существует, единственно и непрерывно зависит от данных (см. определение 2.1). Там же Адамар привёл пример некорректной задачи (задача Коши для уравнения Лапласа). В 1943 году А. Н. Тихонов указал на практическую важность подобных задач и возможность устойчивого их решения. В пятидесятых и шестидесятых годах XX века появился ряд новых подходов, которые стали основополагающими для теории некорректных задач и привлекли к ней внимание многих математиков. С появлением мощных компьютеров интерес к обратным и некорректным задачам стал стремительно расти. К настоящему времени обратные и некорректные задачи превратились в бурно развивающуюся область знаний, проникающую практически во все сферы математики, включая алгебру, анализ, геометрию, дифференциальные уравнения, математическую физику, функциональный анализ, вычислительную математику и т. д. В таблицах 1.1 и 1.2 даны примеры корректных и некорректных задач. Еще раз отметим, что так или иначе каждую некорректную задачу (см. правые колонки таблиц) можно сформулировать как обратную к некоторой корректной прямой задаче (соответствующие задачи из левых колонок таблиц).

С другой стороны теория обратных и некорректных задач широко применяется для решения практических задач почти во всех областях науки, в частности, в таких как:

- физика (квантовая механика, акустика, электродинамика и т. д.);
- геофизика (сейсморазведка, электроразведка, гравиразведка, магниторазведка, каротаж, магнитотеллурическое зондирование и т. д.);
- медицина (рентгеновская томография, ЯМР-томография, УЗИ и т. д.);
- экология (диагностика состояния воздуха, воды, космический мониторинг и т. д.);
- экономика (теория оптимального управления, финансовая математика и т. д.).

Таблица 1.1

Корректные задачи	Некорректные задачи
Арифметика	
Умножение на малое число A $Aq = f$	Деление на малое число A $q = A^{-1}f \quad (A \ll 1)$
Алгебра	
Умножение на матрицу $Aq = f$	Решение системы $Aq = f$ в случаях, если A плохо обусловлена, вырождена или прямоугольна
Анализ	
Интегрирование $f(x) = f(0) + \int_0^x q(\xi) d\xi$	Дифференцирование $q(x) = f'(x)$
Дифференциальные уравнения	
Задача Штурма — Лиувилля $u''(x) - q(x)u(x) = \lambda u(x),$ $u(0) - hu'(0) = 0,$ $u(1) - Hu'(1) = 0$	Обратная задача Штурма — Лиувилля $\{\lambda_n, \ u_n\ ^2\} \rightarrow q(x)$ Определение $q(x)$ по спектральным данным $\{\lambda_n, \ u_n\ \}$
Интегральная геометрия	
Определение интеграла от функции $q(x, y)$ вдоль кривой $\Gamma(\xi, \eta)$	Определение $q(x, y)$ по семейству интегралов $\int_{\Gamma(\xi, \eta)} q(x, y) ds = f(\xi, \eta)$
Интегральные уравнения	
Уравнения Вольтерра и Фредгольма второго рода $q(x) + \int_0^x K(x, \xi)q(\xi) d\xi = f(x)$ $q(x) + \int_a^b K(x, \xi)q(\xi) d\xi = f(x)$	Уравнения Вольтерра и Фредгольма первого рода $\int_0^x K(x, \xi)q(\xi) d\xi = f(x)$ $\int_a^b K(x, \xi)q(\xi) d\xi = f(x)$
Операторные уравнения $Aq = f$	
$\exists m > 0: \forall q \in Q$ $m\langle q, q \rangle \leq \langle Aq, q \rangle$	$A: D(A) \subset Q \rightarrow R(A) \subset F$ A — компактный линейный оператор

Таблица 1.2

Корректные задачи	Некорректные задачи
Гиперболические уравнения	
<p style="text-align: center;">Задача Коши</p> $u_{tt} = \Delta u, \quad t > 0$ $u _{t=0} = \varphi(x), \quad u_t _{t=0} = \psi(x)$ <p style="text-align: center;">Начально-краевая задача</p> $u _{\Gamma} = g$	<p style="text-align: center;">Задачи Дирихле и Неймана</p> <p style="text-align: center;">Задача Коши с данными на временеподобной поверхности</p> $u_{tt} = \Delta u, \quad x \in \Omega$ $u _{\Gamma_1} = f_1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right _{\Gamma_1} = f_2$
Параболические уравнения	
$u_t = \Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \Omega$ <p style="text-align: center;">Задача Коши</p> $u _{t=0} = f(x)$ <p style="text-align: center;">Начально-краевая задача</p> $u _{t=0} = 0$ $u _{\Gamma} = g(x, t)$	<p style="text-align: center;">Задача Коши с обратным временем</p> $-u_t = \Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \Omega$ $u _{t=0} = f$ <p style="text-align: center;">Начально-краевая задача с данными на части границы $\Gamma_1 \subset \Gamma$</p> $u_t = \Delta u, \quad x \in \Omega$ $u _{\Gamma_1} = f_1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right _{\Gamma_1} = f_2$
Эллиптические уравнения	
$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega$ $u _{\Gamma} = g \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right _{\Gamma} = f,$ <p style="text-align: center;">или $\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big _{\Gamma} = h$</p> <p style="text-align: center;">Задачи Дирихле, Неймана, Робина (смешанная)</p>	$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ <p style="text-align: center;">Задача Коши</p> <p style="text-align: center;">Начально-краевая задача с данными на части границы $\Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega$</p>
Прямые задачи	Обратные коэффициентные задачи
$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - q(x)u \\ u _{t=0} = \varphi(x), \quad u_t _{t=0} = \psi(x) \end{cases}$ $\begin{cases} u_t = \Delta u - q(x)u \\ u _{t=0} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \nabla(q(x)\nabla u) = 0, \quad x \in \Omega \\ u _{\Gamma} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right _{\Gamma} = f_2 \end{cases}$	$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - q(x)u \\ u _{t=0} = \varphi(x), \quad u_t _{t=0} = \psi(x) \\ u _{\Gamma} = f(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right _{\Gamma} = g \end{cases}$ $\begin{cases} u_t = \Delta u - q(x)u \\ u _{t=0} = 0, \quad u _{\Gamma} = f, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right _{\Gamma} = g \end{cases}$ $\begin{cases} \nabla(q(x)\nabla u) = 0 \\ u _{\Gamma} = g, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right _{\Gamma} = f \end{cases}$

Более подробные примеры приложений обратных и некорректных задач приведены в следующем разделе, а также в начале каждой главы и в разделах с соответствующими названиями.

Не вдаваясь более в детали математических определений, отметим, что в большинстве случаев *обратные* и *некорректные* задачи объединяет одно главное свойство — *неустойчивость*. В большинстве интересных случаев обратные задачи являются некорректными и, наоборот, некорректную задачу, как правило, можно свести к обратной по отношению к некоторой прямой (корректной) задаче.

Подводя итоги, можно сказать, что специалисты по обратным и некорректным задачам занимаются исследованием свойств и методов регуляризации неустойчивых задач. Иначе говоря, создаются и изучаются устойчивые методы приближения неустойчивых отображений. С информационной точки зрения теория обратных и некорректных задач изучает отображения таблиц данных с очень малой энтропией в таблицы с большой энтропией [1.1].

1.2. Примеры обратных и некорректных задач

Пример 1.2.1 (алгебра, система линейных алгебраических уравнений). Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Aq = f, \quad (1.2.1)$$

где A — матрица размера $m \times n$; q, f — векторы размерности n и m , соответственно. Пусть ранг матрицы равен $\min(m, n)$. При $m < n$ уравнение имеет много решений. При $n < m$ решение может не существовать. Если $m = n$ то система однозначно разрешима для любой правой части. В этом случае обратный оператор A^{-1} (матрица) существует и, следовательно, ограничен, как линейный оператор в конечномерном пространстве. Таким образом, выполнены все три условия корректности Адамара.

Выясним подробнее зависимость решения от возмущения правой части f в случае невырожденной матрицы A .

Вычитая из возмущенного уравнения

$$A(q + \delta q) = f + \delta f \quad (1.2.2)$$

исходное уравнение (1.2.1), получаем $A\delta q = \delta f$, откуда $\delta q = A^{-1}\delta f$, $\|\delta q\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta f\|$. Кроме того, $\|A\|\|q\| \geq \|f\|$.

Из этих соотношений мы имеем неулучшаемую оценку для относительной ошибки решения:

$$\frac{\|\delta q\|}{\|q\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}. \quad (1.2.3)$$

Таким образом погрешность определяется константой $\mu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$, которая называется *числом обусловленности* системы (матрицы). Системы с относительно большим числом обусловленности называют плохо обусловленными. Для нормированных матриц ($\|A\| = 1$) это означает, что в обратной матрице есть относительно большие элементы, и, следовательно, малые изменения правой части могут привести к относительно большим (хотя и конечным) изменениям в решении. Поэтому системы с плохо обусловленными матрицами можно считать практически неустойчивыми, хотя формально задача корректна и выполнено условие устойчивости $\|A^{-1}\| < \infty$.

Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

при достаточно большом n и $|a| > 1$ плохо обусловлена, так как обратная матрица содержит элементы вида a^{n-1} .

В случае возмущения матрицы оценка (1.2.3) принимает вид:

$$\frac{\|\delta q\|}{\|q\|} \leq \mu(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} / \left(1 - \mu(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

(при $\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$).

Пусть $m = n$ и определитель матрицы A равен нулю. Тогда решение системы (1.2.1) может не существовать, а если существует, то будет неединственным. Следовательно, для вырожденных матриц A ($\det A = 0$) задача $Aq = f$ является некорректной.

Пример 1.2.2 (анализ, суммирование рядов Фурье). Задача суммирования ряда Фурье состоит в нахождении функции $q(x)$ по ее коэффициентам Фурье.

Покажем, что задача суммирования рядов Фурье неустойчива к малым в метрике l_2 изменениям коэффициентов Фурье, если уклонение суммы оценивать в метрике C . Пусть

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos kx,$$

и придадим коэффициентам Фурье f_k функции $q(x)$ малые возмущения $\tilde{f}_k = f_k + \varepsilon/k$. Обозначим

$$\tilde{q}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k \cos kx.$$

Коэффициенты рядов Фурье в метрике l_2 отличаются на величину

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (f_k - \tilde{f}_k)^2 \right\}^{1/2} = \varepsilon \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right\}^{1/2} = \varepsilon \sqrt{\frac{\pi^2}{6}},$$

которая стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Но разность самих функций

$$q(x) - \tilde{q}(x) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos kx$$

может быть сделана сколь угодно большой, поскольку при $x = 0$ ряд расходится.

Таким образом, если уклонение суммы ряда брать в метрике C , то суммирование ряда Фурье не является устойчивым.

Пример 1.2.3 (геометрия). Пусть в пространстве расположено тело, которое можно освещать с различных сторон. Если известна форма тела, задача определения очертания тени является корректной. Обратная к ней задача восстановления формы тела по проекциям (теням) на различных плоскостях является корректной только для выпуклых тел, поскольку, очевидно, впадину таким образом обнаружить невозможно.

Мы уже отмечали, что одним из первых подобную задачу сформулировал и решил Аристотель. Наблюдая тень Земли на поверхности Луны, он пришел к выводу, что Земля имеет шарообразную форму.

Пример 1.2.4 (интегральная геометрия по прямым). В компьютерной томографии возникает задача определения функции двух переменных $q(x, y)$ по семейству интегралов

$$\int_{L(p, \varphi)} q(x, y) dl = f(p, \varphi),$$

взятых вдоль различных прямых $L(p, \varphi)$ (p и φ — параметры, определяющие прямую) в плоскости x, y . Эта задача не является корректной, поскольку нарушено условие существования решения для любой правой части $f(p, \varphi)$ (см. раздел 5.1).

Пример 1.2.5 (интегральная геометрия по окружностям). Рассмотрим задачу определения функции двух переменных $q(x, y)$ по интегралам от этой функции, вычисленным по семейству окружностей, центры которых лежат на фиксированной прямой.

Пусть функция $q(x, y)$ определена и непрерывна для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим семейство окружностей с центрами, лежащими на фиксированной прямой, в качестве которой, для определенности, возьмем координатную ось $y = 0$. Окружность $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, принадлежащую

этому семейству, обозначим через $L(a, r)$. Задача состоит в определении функции $q(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$\int_{L(x,r)} q(\xi, \tau) dl = f(x, r), \quad (1.2.4)$$

где $f(x, r)$ — функция, заданная для всех $x \in (-\infty, \infty)$ и $r > 0$.

В классе непрерывных функций решение этой задачи не является единственным, поскольку для любой непрерывной функции $\tilde{q}(x, y)$, обладающей свойством $\tilde{q}(x, y) = -\tilde{q}(x, -y)$, интегралы

$$\int_{L(x,r)} \tilde{q}(\xi, \tau) dl$$

равны нулю при всех $x \in \mathbb{R}$ и $r > 0$. В самом деле, заменяя переменные $\xi = x + r \cos \varphi$, $\tau = r \sin \varphi$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{L(x,r)} \tilde{q}(\xi, \tau) dl &= \int_0^{2\pi} \tilde{q}(x + r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \tilde{q}(x + r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi + \int_\pi^{2\pi} \tilde{q}(x + r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Последний интеграл с помощью замены переменной $\bar{\varphi} = 2\pi - \varphi$ и условия $\tilde{q}(x, y) = -\tilde{q}(x, -y)$ можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_\pi^{2\pi} \tilde{q}(x + r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi &= \int_\pi^0 \tilde{q}(x + r \cos \bar{\varphi}, -r \sin \bar{\varphi}) r d\bar{\varphi} = \\ &= - \int_0^\pi \tilde{q}(x + r \cos \bar{\varphi}, r \sin \bar{\varphi}) r d\bar{\varphi}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (1.2.5), получим

$$\int_{L(x,r)} \tilde{q}(\xi, \tau) dl = 0$$

для $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

Следовательно, если $q(x, y)$ — решение задачи (1.2.4), то функция $q(x, y) + \tilde{q}(x, y)$, где $\tilde{q}(x, y)$ — любая непрерывная функция со свойством $\tilde{q}(x, y) = -\tilde{q}(x, -y)$, также будет решением задачи (1.2.4). Поэтому задачу можно переформулировать как задачу об определении только четной по y части функции $q(x, y)$.

В рассмотренной задаче нарушено также первое условие корректности: при некоторых $f(x, r)$ решение может не существовать. Однако единственность решения в классе четных по y функций доказать можно методом, изложенным в разделе 5.2.

Пример 1.2.6 (дифференциальное уравнение). Скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству радиоактивного вещества с коэффициентом пропорциональности q_1 , называемым коэффициентом распада. Процесс радиоактивного распада описывается решением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = -q_1 u(t), \quad t \geq 0, \quad (1.2.6)$$

$$u(0) = q_0, \quad (1.2.7)$$

где $u(t)$ — количество вещества в данный момент времени, а q_0 — количество радиоактивного вещества в начальный момент времени.

Прямая задача: зная постоянные q_0 и q_1 , определить, как будет изменяться количество вещества $u(t)$ с течением времени. Очевидно, что эта задача корректна. Более того, её решение может быть представлено в явном виде:

$$u(t) = q_0 e^{-q_1 t}, \quad t \geq 0.$$

Предположим теперь, что коэффициент распада q_1 и первоначальное количество q_0 радиоактивного вещества неизвестны, но можно измерять количество радиоактивного вещества $u(t)$ для некоторых t . *Обратная задача* заключается в определении коэффициента q_1 в уравнении (1.2.6) и начального условия q_0 по дополнительной информации о решении прямой задачи $u(t_k) = f_k$, $k = 1, 2, \dots, N$ [5].

Упражнение 1.2.1. Используя явную формулу решения прямой задачи

$$u(t) = q_0 e^{-q_1 t},$$

исследовать обратную задачу на корректность в зависимости от количества точек измерения дополнительной информации $f_k = u(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Пример 1.2.7 (система дифференциальных уравнений). Процесс химической кинетики описывается решением задачи Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i}{dt} = q_{i1}u_1(t) + q_{i2}u_2(t) + \dots + q_{in}u_n(t), \quad (1.2.8)$$

$$u_i(0) = \bar{q}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.2.9)$$

Здесь $u_i(t)$ — концентрация i -го вещества в момент времени t . Постоянные параметры q_{ij} характеризуют зависимость скорости изменения концентрации i -го вещества от концентрации веществ, участвующих в процессе.

Прямая задача: определить $u_i(t)$, зная параметры q_{ij} и концентрации \bar{q}_i в начальный момент времени.

Для системы дифференциальных уравнений (1.2.8) может быть сформулирована следующая *обратная задача*. В течение некоторого интервала времени $t \in [t_1, t_2]$ измеряются концентрации веществ $u_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, и требуется определить величины параметров q_{ij} , т. е. по решению системы дифференциальных уравнений (1.2.8) требуется найти ее коэффициенты. Эта обратная задача может рассматриваться в двух вариантах. В первом случае начальные условия (1.2.9) известны, т. е. \bar{q}_i заданы и измеряются решения $u_i(t)$, соответствующие этим \bar{q}_i . Во втором варианте \bar{q}_i неизвестны и их нужно определить вместе с q_{ij} [5].

Пример 1.2.8 (дифференциальное уравнение второго порядка). Пусть по прямой движется частица единичной массы. Движение обусловлено тем, что на частицу действует сила $q(t)$, которая меняется во времени. Если в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат $x = 0$ и имела нулевую скорость, то в соответствии с законом Ньютона движение частицы будет описываться функцией $u(t)$, удовлетворяющей задаче Коши:

$$\ddot{u}(t) = q(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.2.10)$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0. \quad (1.2.11)$$

Здесь $u(t)$ — положение частицы в момент времени t . Предположим теперь, что сила $q(t)$, действующая на частицу, неизвестна, но в каждый момент времени (или в отдельных точках отрезка $[0, T]$) мы можем измерять положение частицы $u(t)$ и хотим по $u(t)$ восстановить $q(t)$. Таким образом, мы получили следующую *обратную задачу*: найти правую часть уравнения (1.2.10) (функцию $q(t)$), если известно решение задачи (1.2.10), (1.2.11) (функция $u(t)$).

Покажем неустойчивость этой обратной задачи.

Пусть $u(t)$ — решение прямой задачи для некоторого $q(t)$. Рассмотрим следующие возмущения решения прямой задачи:

$$u_n(t) = u(t) + \frac{1}{n} \cos(nt).$$

Этим возмущениям соответствуют правые части

$$q_n(t) = q(t) - n \cos(nt).$$

Очевидно, что $\|u - u_n\|_{C[0, T]} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а $\|q - q_n\|_{C[0, T]} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, задача определения правой части линейного дифференциального уравнения (1.2.10), (1.2.11) по его решению неустойчива.

Отметим, что если $u(t)$ задана при всех $t \in [0, T]$, то обратная задача сводится к двукратному дифференцированию.

Упражнение 1.2.2. Исследовать на устойчивость операцию дифференцирования.

Пример 1.2.9 (интегральное уравнение Фредгольма первого рода). Рассмотрим задачу решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (см. раздел 4.1)

$$\int_a^b K(x, s)q(s) ds = f(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (1.2.12)$$

в которой по заданному ядру $K(x, s)$ и функции $f(x)$ требуется найти решение $q(s)$. Предположим, что $K(x, s)$, $K_x(x, s)$, $K_s(x, s)$ непрерывны в прямоугольнике $c \leq x \leq d$, $a \leq s \leq b$, $f(x) \in C[c, d]$ и $q(s) \in C[a, b]$. Задача решения уравнения (1.2.12) является некорректной, поскольку решение существует не для любой функции $f(x) \in C[c, d]$. Для доказательства достаточно взять функцию $f(x)$, непрерывную на $[c, d]$, но не являющуюся дифференцируемой на этом отрезке. Для такой правой части $f(x)$ уравнение не может иметь непрерывное решение $q(s)$, поскольку из условий на ядро $K(x, s)$ следует, что для любой непрерывной функции $q(s)$ интеграл, стоящий в левой части (1.2.12), можно дифференцировать по параметру x .

Для уравнения (1.2.12) не выполнено также условие непрерывной зависимости решения от исходных данных. Рассмотрим последовательность функций

$$q_n(s) = q(s) + n \sin(n^2 s), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Подставляя вместо $q(s)$ выражение для $q_n(s)$ в уравнение (1.2.12), получаем

$$f_n(x) = \int_a^b K(x, s)q_n(s) ds = f(x) + \int_a^b K(x, s)n \sin(n^2 s) ds, \\ n = 0, 1, \dots$$

Оценим $\|f_n - f\|_{C[c, d]}$. Так как

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \left| \int_a^b K(x, s)n \sin(n^2 s) ds \right| = \\ = \left| -\frac{1}{n} \cos(n^2 s)K(x, s) \right|_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b K_s(x, s) \cos(n^2 s) ds \leq \frac{K_1}{n},$$

где постоянная K_1 не зависит от n , то

$$\|f_n - f\|_{C[c, d]} \leq \frac{K_1}{n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

С другой стороны, из определения последовательности $q_n(s)$ следует, что

$$\|q_n - q\|_{C[a, b]} \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, исходные данные $f_n(x)$ сколь угодно близки к $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$, а соответствующие решения $q_n(s)$ не сходятся к $q(s)$ при $n \rightarrow \infty$, что и означает отсутствие непрерывной зависимости.

Пример 1.2.10 (интегральное уравнение Вольтерра первого рода). Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра первого рода (см. раздел 4.1)

$$\int_0^x K(x, s)q(s) ds = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.2.13)$$

Предположим, что функция $K(x, s)$ непрерывна, имеет первые частные производные при $0 \leq s \leq x \leq 1$ и $K(x, x) = 1$ для $x \in [0, 1]$. Предположим также, что $q(s)$ ищется в пространстве $C[0, 1]$, а $f(x) \in C_0[0, 1]$, где $C_0[0, 1]$ — пространство непрерывных на $[0, 1]$ функций, таких, что $f(0) = 0$, с равномерной метрикой.

Упражнение 1.2.3. Показать, что задача решения уравнения (1.2.13) некорректна.

Пример 1.2.11 (задача Коши для уравнения Лапласа). Пусть $u = u(x, y)$ — решение следующей задачи (см. главу 9):

$$\Delta u = 0, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (1.2.14)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in \mathbb{R}, \quad (1.2.15)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (1.2.16)$$

Выберем данные $f(y)$ в виде

$$f(y) = f_n(y) = u(0, y) = \frac{1}{n} \sin(ny),$$

тогда решением задачи (1.2.14)–(1.2.16) является функция

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n} \sin(ny)(e^{nx} + e^{-nx}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.2.17)$$

Решение $u_n(x, y)$ при любом фиксированном $x > 0$ стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$, в то время как $f_n(y)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, сколь угодно малое изменение данных задачи в C^l или W_2^l (при любом $l < \infty$) приводит к отнюдь не малым вариациям решения, т. е. задача (1.2.14)–(1.2.16) является некорректной.

Пример 1.2.12 (обратная задача для уравнения в частных производных первого порядка). Пусть $q(x)$ непрерывна, а $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема для все $x \in \mathbb{R}$. Тогда задача Коши

$$u_x - u_y + q(x)u = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.2.18)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2.19)$$

поставлена корректно. Рассмотрим *обратную задачу* восстановления $q(x)$ по дополнительной информации о решении задачи (1.2.18), (1.2.19):

$$u(0, y) = \psi(y), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (1.2.20)$$

Решение задачи (1.2.18), (1.2.19) находится по формуле

$$u(x, y) = \varphi(x + y) \exp\left(\int_{x+y}^x q(\xi) d\xi\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Условие (1.2.20) приводит к равенству

$$\psi(y) = \varphi(y) \exp\left(\int_y^0 q(\xi) d\xi\right), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (1.2.21)$$

Таким образом, выполнение условий

- 1) $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывно дифференцируемы для $y \in \mathbb{R}$;
- 2) $\psi(y)/\varphi(y) > 0$, $y \in \mathbb{R}$; $\psi(0) = \varphi(0)$

необходимо и достаточно для существования решения обратной задачи, которое можно вычислить по формуле [12]

$$q(x) = -\frac{d}{dx} \left[\ln \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} \right], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.2.22)$$

Если же φ и ψ непрерывны, то задача будет некорректной.

Пример 1.2.13 (задача Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем). Задача Коши с обратным временем формулируется следующим образом: найти значения функции $u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (1.2.23)$$

и граничным условиям

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.2.24)$$

в начальный момент времени

$$u(x, 0) = q(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (1.2.25)$$

если известны ее значения в фиксированный момент времени $t = T > 0$:

$$u(x, T) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (1.2.26)$$

Эта задача является обратной по отношению к задаче определения функции $u(x, t)$, удовлетворяющей (1.2.23)–(1.2.25) с заданной функцией $q(x)$. Решение прямой задачи (1.2.23)–(1.2.25) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} q_n \sin nx, \quad (1.2.27)$$

где $\{q_n\}$ — коэффициенты Фурье функции $q(x)$:

$$q_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) \sin(nx) dx.$$

Полагая $t = T$ в (1.2.27), получим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} q_n \sin nx, \quad x \in [0, \pi], \quad (1.2.28)$$

откуда

$$q_n = f_n e^{n^2 T}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\{f_n\}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Но коэффициенты Фурье $\{q_n\}$ однозначно определяют функцию $q(x)$ из $L^2(0, \pi)$. Следовательно, решение обратной задачи единственно в $L^2(0, \pi)$. Заметим, что условие (1.2.25) выполняется в предельном смысле

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^{\pi} [u(x, t) - q(x)]^2 dx = 0.$$

Для существования решения обратной задачи (1.2.23)–(1.2.26) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 e^{2n^2 T} < \infty,$$

которое, очевидно, не может быть выполнено для любой функции $f \in L_2(0, \pi)$.

Пример 1.2.14 (коэффициентная обратная задача теплопроводности). Решение $u(x, t)$ краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$c\rho u_t = (ku_x)_x - \alpha u + f, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (1.2.29)$$

$$u(0, t) - \lambda_1 u_x(0, t) = \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2.30)$$

$$u(l, t) - \lambda_2 u_x(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2.31)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.2.32)$$

описывает многие физические процессы (распространение тепла в стержне, диффузию в полый трубке и т. д.). Коэффициенты, входящие в уравнение и граничные условия, представляют собой характеристики исследуемой среды. Если задача (1.2.29)–(1.2.32) описывает процесс распространения тепла в стержне, коэффициенты c и k являются соответственно коэффициентами теплоемкости и теплопроводности и характеризуют материал, из которого изготовлен стержень. В этом случае *прямая задача* состоит в определении температуры в стержне в точке x в момент времени t (функции $u(x, t)$) по известным величинам c , ρ , k , α , f , λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 , φ . Предположим теперь, что все коэффициенты

и функции, определяющие решение $u(x, t)$, известны, кроме коэффициента теплопроводности $k = k(x)$, но мы можем измерить температуру стержня в некоторой внутренней точке x_0 : $u(x_0, t) = f(t)$, $0 \leq t \leq T$. Возникает *обратная задача*: определить коэффициент теплопроводности $k(x)$, если задана функция $f(t)$ и все остальные функции в (1.2.29)–(1.2.32). Аналогично могут быть поставлены и другие обратные задачи, включая случаи $C = C(u)$, $k = k(u)$ и т. д. [1].

Пример 1.2.15 (интерпретация показаний физических приборов). Действия многих приборов, регистрирующих нестационарные физические поля, описываются следующей схемой: на вход прибора поступает сигнал $q(t)$, а на выходе прибора регистрируется функция $f(t)$. В простейшем случае функции $q(t)$, $f(t)$ связаны соотношением

$$\int_0^t g(t - \tau)q(\tau) d\tau = f(t). \quad (1.2.33)$$

Функция $g(t)$ в этом случае называется *импульсной переходной функцией* прибора. Теоретически $g(t)$ представляет собой функцию, которая регистрируется прибором в случае, когда на вход прибора поступает обобщенная функция $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака (см. определение в главе 12): $\int_0^t g(t - \tau)\delta(\tau) d\tau = g(t)$. На практике для получения функции $g(t)$ на вход подают достаточно короткий и мощный импульс. Тогда регистрируемая на выходе функция будет в определенном смысле близка к импульсной переходной функции.

Таким образом, задача интерпретации показаний прибора, т. е. определения формы поступившего сигнала (функции $q(t)$), сводится к решению интегрального уравнения первого рода (1.2.33) (см. раздел 4.2).

Связь между поступающим на вход прибора сигналом $q(t)$ и регистрируемой на выходе функцией $f(t)$ может быть и более сложной. В случае “линейного” прибора эта связь имеет вид

$$\int_0^t K(t, \tau)q(\tau) d\tau = f(t).$$

Возможна и нелинейная связь между функциями $q(t)$, $f(t)$ (см. раздел 4.6)

$$\int_0^t K(t, \tau, q) d\tau = f(t).$$

По данной схеме работают, в частности, приборы, регистрирующие переменные электромагнитные поля, режимы давлений и напряжений в сплошной среде, сейсмографы, регистрирующие колебания земной поверхности, и т. д.

Замечание 1.2.1. Для решения простейшего уравнения (1.2.33) могут быть использованы преобразования Фурье или Лапласа. Например, продолжим нулем все функции в (1.2.33) при $t < 0$ и пусть $\tilde{g}(\lambda)$, $\tilde{q}(\lambda)$, $\tilde{f}(\lambda)$ — преобразования Фурье функций $g(t)$, $q(t)$ и $f(t)$:

$$\tilde{g}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} g(t) dt, \quad \tilde{q}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} q(t) dt, \quad \tilde{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt.$$

Тогда по теореме о свертке

$$\tilde{g}(\lambda)\tilde{q}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda),$$

откуда, обращая преобразование Фурье, получаем формулу для решения (1.2.33):

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \tilde{q}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \frac{\tilde{f}(\lambda)}{\tilde{g}(\lambda)} d\lambda. \quad (1.2.34)$$

Вычисления по формуле (1.2.34) неустойчивы, так как функция $\tilde{g}(\lambda)$ — преобразование Фурье импульсной переходной функции прибора — для реальных приборов стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$, и, таким образом, сколь угодно малые помехи в определении $\tilde{f}(\lambda)$ для достаточно больших λ могут привести к большим изменениям в решении $q(t)$.

Замечание 1.2.2. В случае, если $g(t)$ постоянна, задача решения (1.2.33) есть задача дифференцирования.

Пример 1.2.16 (продолжение стационарных полей). К некорректным задачам, эквивалентным задаче Коши для уравнения Лапласа, приводят некоторые проблемы интерпретации гравитационных и магнитных полей, связанные с поисками полезных ископаемых. Если бы Земля была сферически-однородным шаром, то напряженность гравитационного поля на поверхности была бы постоянной. Неоднородности рельефа и распределения плотности вещества служат причиной того, что напряженность гравитационного поля на поверхности Земли отклоняется от среднего значения. Эти отклонения в процентном отношении невелики, но хорошо регистрируются физическими приборами — гравиметрами. Данные гравитационных наблюдений используются при разведке месторождений полезных ископаемых.

Задача гравиразведки заключается в том, чтобы по данным гравитационных измерений сделать выводы о расположении и форме неоднородностей под поверхностью.

Если расстояние между геологическими телами больше, чем расстояние от тел до поверхности Земли, то положения тел соответствуют локальным максимумам аномалий. В случае, когда расстояние между телами меньше расстояния от тел до поверхности, двум телам может соответствовать один локальный максимум. При разведке полезных ископаемых геофизические измерения и их интерпретация являются предварительным этапом. Основной этап обнаружения месторождений — это

бурение разведочных скважин и анализ данных бурения. Если на основании вида аномалии делается заключение о том, что она порождена одним телом, то место бурения естественно выбрать в центре аномалии. Однако, если заключение было ошибочным, то скважина может пройти между интересующими нас телами. Такая ситуация неоднократно встречалась в практике геологоразведочных работ. Поэтому было высказано следующее предложение: нужно рассчитать аномальное гравитационное поле на некоторой глубине под поверхностью Земли по данным гравитационных измерений на поверхности Земли (т. е. решить задачу Коши для уравнения Лапласа). Если на глубине аномалия сохранил один локальный максимум, то можно с большей достоверностью сделать вывод о том, что аномалия порождена лишь одним телом. Если же после пересчета появятся два локальных максимума, то можно сделать вывод о наличии двух тел, и соответственно изменить места бурения.

Аналогичная постановка задачи возникает и при интерпретации аномалий постоянного магнитного поля, так как потенциал и компоненты напряженности этого поля вне магнитных масс также удовлетворяют уравнению Лапласа.

При электроразведке постоянным током к двум точкам на поверхности Земли подводятся электроды и включается постоянный ток. На поверхности Земли измеряется разность потенциалов. Требуется на основании результатов измерений сделать выводы о внутреннем строении Земли. Если слой осадков — однородная проводящая среда, а сопротивление фундамента много выше, то линии тока будут обтекать рельеф фундамента. Следовательно, для определения рельефа фундамента достаточно найти линии тока в слое осадков. В однородной среде потенциал постоянного тока удовлетворяет уравнению Лапласа. Нормальная производная потенциала на поверхности Земли равна нулю, а сам потенциал измеряется. Таким образом, мы опять приходим к задаче Коши для уравнения Лапласа.

Контрольные вопросы

1. Попробуйте сосчитать, сколько различных обратных задач можно сформулировать для уравнения акустики.
2. В сущности, все основные задачи геофизики являются обратными. Почему?
3. Сколько разделов математики, а также каких естественных науки были затронуты в данной главе?
4. Сформулируйте несколько обратных задач для параболического уравнения $u_t = u_{xx} - q(x)u$ наподобие того, как это сделано для уравнения акустики.

5. Разделите обратные и некорректные задачи, возникающие в тексте, на линейные и нелинейные.
6. Запишите новые примеры обратных и некорректных задач из тех, о которых вам доводилось читать или размышлять ранее, а также составьте краткий отчет о том, что вы поняли (и чего не поняли), изучив главу. Автор будет искренне вам признателен, если вы пришлете ему этот отчет по адресу kabanikhin@mail.ru.

Дополнительная литература

- 1.1. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и динамическая динамика", 2002.
- 1.2. **Васин В. В., Пруткин И. Л., Тимерханова Л. Ю.** О восстановлении трехмерного рельефа геологической границы по гравитационным данным // Изв. АН СССР. 1996. Т. 11. С. 58–62.
- 1.3. **Вержбицкий В. В., Кабанихин С. И., Мартаков С. В.** Нестационарный диэлектрический каротаж на малых временах // Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 3. С. 386–388.
- 1.4. **Гласко В. Б.** Обратные задачи математической физики. Москва: МГУ, 1984.
- 1.5. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1971.
- 1.6. **Гончарский А. В., Черепашук А. М., Ягола А. Г.** Численные методы решения обратных задач астрофизики. Москва: Наука, 1978.
- 1.7. **Гончарский А. В., Черепашук А. М., Ягола А. Г.** Некорректные задачи астрофизики. Москва: Наука, 1985.
- 1.8. **Иванов В. К.** Интегральные уравнения первого рода и приближенное решение обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 5. С. 998–1000.
- 1.9. **Кабанихин С. И., Мартаков С. В., Табаровский Л. А., Шифон Н. Я.** Изучение диэлектрической проницаемости окколоскважинного пространства в ранней стадии процесса становления // Исследования по условной корректности задач математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989. С. 40–59.
- 1.10. **Кочиков И. В., Курамшина Г. М., Пентин Ю. А., Ягола А. Г.** Обратные задачи колебательной спектроскопии. Москва: Изд-во МГУ, 1993.
- 1.11. **Новиков П. С.** О единственности обратной задачи теории потенциала // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 3. С. 165–168.

- 1.12. **Прилепко А. И.** О единственности определения формы тела по значениям внешнего потенциала // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 1. С. 40–43.
- 1.13. **Романов В. Г.** Обратные задачи распространения сейсмических и электромагнитных волн // Методы решения некорректных задач и их приложения. Новосибирск: ВЦ СО АН, 1982. С. 111–118.
- 1.14. **Романов В. Г.** Об однозначности определения коэффициентов системы Максвелла // Неклассические задачи для уравнений математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН, 1982. С. 139–142.
- 1.15. **Романов В. Г.** Обратная задача Лэмба в линейном приближении // Численные методы в сейсмических исследованиях. Новосибирск: Наука, 1983. С. 170–192.
- 1.16. **Сретенский Л. Н.** О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала // Докл. АН СССР. 1954. Т. 99, № 1. С. 21–22.
- 1.17. **Anikonov Yu. E., Bubnov B. A., Erokhin G. N.** Inverse and Ill-Posed Sources Problems. VSP, The Netherlands, 1997.
- 1.18. **Anikonov Yu. E.** Formulas in Inverse and Ill-Posed Problems. VSP, The Netherlands, 1997.
- 1.19. **Anikonov Yu. E.** Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations. VSP, The Netherlands, 2001.
- 1.20. **Anikonov D. S., Prokhorov Iu. V., Nazarov V. G.** Poorly Visible Media in X-Ray Tomography. VSP, The Netherlands, 2003.
- 1.21. **Anikonov D. S., Kovtanyuk A. E., Prokhorov Iu. V.** Transport Equation and Tomography. VSP, The Netherlands, 2002.
- 1.22. **Antyufeev V. S.** Monte Carlo Method for Solving Inverse Problems of Radiation Transfer. VSP, The Netherlands, 2000.
- 1.23. **Bamberger A., Chavent G., Lailly P.** About the stability of the inverse problem in 1-D wave equations — application to the interpretation of seismic profiles // Appl. Math. Optim. 1979. V. 5. P. 1–47.
- 1.24. **Cherednichenko V. G.** Inverse Logarithmic Potential Problem. VSP, The Netherlands, 1996.
- 1.25. **Hasanov A.** An inverse coefficient problem for an elasto-plastic medium // SIAM J. Appl. Math. 1995. V. 55. P. 1736–1752.
- 1.26. **Hasanov A.** An inversion method for identification of elastoplastic properties for engineering materials from limited spherical indentation measurements // Inverse Problems in Science and Engineering. 2007. V. 15, N 6. P. 601–627.

- 1.27. **Hasanov A. Mueler J., Cohn S, and Redepenning J.** Numerical solution of a nonlocal identification problem related to nonlinear ion transport // *Computers and Mathematics with Applications*. 2000. V. 39. P. 225–235.
- 1.28. **Kunetz G.** Generalization des operateurs d'antiresonance a'un nombre quelcoque de reflecteurs // *Geophys. Prospecting*. 1964. V. 12. P. 283–289.
- 1.29. **Santosa F., Symes W. W.** An analysis of least-squares velocity inversion // *Geophysical monograph series*. 1989. N 4.
- 1.30. **Yagola A. G., Kochikov I. V., Kuramshina G. M., Pentin Yu. A.** *Inverse Problems of Vibrational Spectroscopy*. VSP, The Netherlands, 1999.

*Все счастливые семьи похожи друг на друга.
Каждая несчастливая семья несчастлива по-своему.*

Л. Н. Толстой

Глава 2.

Некорректные задачи

Универсального метода решения некорректных задач нет. Поэтому в каждом конкретном случае надо бороться с основным “несчастьем” — неустойчивостью — по-своему.

В данной главе кратко излагаются основы теории некорректных задач. Сначала даются определения корректности, некорректности и условной корректности задач (раздел 2.1). Разделы 2.2–2.4 посвящены результатам, полученным основоположниками теории некорректных задач А. Н. Тихоновым, В. К. Ивановым и М. М. Лаврентьевым. Теорема 2.2.1 о непрерывности обратного отображения $A^{-1} : A(M) \rightarrow M$ в случае, если M — компакт, а оператор A — непрерывный и взаимно однозначный, является основой теории условно-корректных задач и построения множества эффективных численных алгоритмов их решения [16]. Понятие квазирешения, введенное В. К. Ивановым (раздел 2.3), во-первых, обобщает понятие решения, во-вторых, восстанавливает все условия корректности, и в-третьих, приводит к новым алгоритмам приближенного решения некорректных задач. Метод М. М. Лаврентьева (раздел 2.4) позволяет построить численные алгоритмы решения широкого класса алгебраических систем уравнений (глава 3), линейных и нелинейных интегральных и операторных уравнений первого рода (глава 4). Фундаментальным для теории некорректных задач является понятие регуляризирующего семейства операторов (раздел 2.5). Коротко говоря, регуляризирующее семейство $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ (или регуляризирующая последовательность $\{R_n\}$), состоит из таких операторов R_α , каждый из которых позволяет устойчивым образом построить приближенное решение $q_\alpha = R_\alpha f$ уравнения $Aq = f$, которое стремится к точному решению q_T при $\alpha \rightarrow +0$. Вторым важным свойством регуляризирующих

операторов является возможность построения приближенного решения $q_{\alpha\delta} = R_{\alpha}f_{\delta}$ по приближенным данным f_{δ} , для которых решения уравнения $Aq = f_{\delta}$ может и не существовать. При этом во многих случаях удается доказать сходимую $q_{\alpha\delta}$ к точному решению q_{τ} при согласованном стремлении к нулю параметра регуляризации α и погрешности δ задания правой части f . Одним из самых эффективных и широко применяемых методов регуляризации является итерационная регуляризация, основанная на минимизации *целевого функционала* $J(q) = \|Aq - f\|^2$ и методах градиентного спуска (раздел 2.5). Основой градиентных методов является известное утверждение о том, что если в некоторой точке $q \in Q$ градиент $J'q$ функционала $J(q)$ не равен нулю, то, двигаясь в направлении антиградиента в точку $q + \delta q$, можно уменьшить значение функционала $J(q + \delta q)$ при условии, что шаг спуска достаточно мал. В самом деле, выбирая $\delta q = -\alpha J'q$, где α положителен, и вспоминая определение градиента (полагаем для простоты, что Q — гильбертово пространство), мы можем записать

$$J(q - \alpha J'q) - J(q) = \langle J'q, -\alpha J'q \rangle + o(\alpha \|J'q\|) = -\alpha \|J'q\|^2 + o(\alpha \|J'q\|),$$

откуда видно, что правая часть становится отрицательной при $\alpha \rightarrow +0$, а это означает, что при достаточно малых α имеем $J(q + \delta q) = J(q - \alpha J'q) < J(q)$. Поэтому, выбирая различными способами шаг спуска α_n , а иногда и корректируя направления спуска (см. метод сопряженных градиентов), можно построить минимизирующую последовательность $q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'q_n$, обладающую свойством $J(q_{n+1}) < J(q_n)$. При этом даже в случае некорректности задачи $Aq = f$ для многих градиентных методов оказывается возможным оценить скорость убывания функционала $J(q_n)$ (раздел 2.7). Сложнее обстоит дело с сильной сходимостью $\|q_n - q_{\tau}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, которая, разумеется, возможна лишь в случае, если хотя бы одно точное решение q_{τ} уравнения $Aq = f$ существует. Сравнительно простыми средствами (раздел 2.6) удается доказать монотонное стремление к нулю $\|q_n - q_{\tau}\| \searrow 0$ последовательностей, построенных по методам простой итерации, наискорейшего спуска, сопряженных градиентов. Однако, в силу некорректности, при численном решении особенно важно, во-первых, знать оценку скорости сходимости, и во-вторых, понять, на каком номере итерации следует остановиться. Давно замечено, что если некорректная задача $Aq = f$ решается градиентным методом и по приближенным данным f_{δ} ($\|f - f_{\delta}\| \leq \delta$), то минимизирующая последовательность $\{q_{n\delta}\}$ сначала приближается к точному решению, а затем, с ростом итераций, величина $\|q_{n\delta} - q_{\tau}\|$ может начать расти. Но как же тогда выбрать номер n , на котором следует остановиться? Наиболее часто применяемым на практике является принцип невязки, в основе которого лежит естественная гипотеза о том, что если невязка $\|Aq - f_{\delta}\|$ достигла уровня погрешности измерений δ , то вряд ли стоит продолжать процесс. Сказанное относится и

к выбору параметра регуляризации α с той лишь разницей, что вместо последовательного осуществления итераций, можно, например, выбрать набор параметров регуляризации $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$, вычислить соответствующие $q_{\alpha_j \delta}$ и сравнить невязки $\|Aq_{\alpha_j \delta} - f_\delta\|$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Если же удастся более глубоко исследовать задачу $Aq = f$ и получить оценку условной устойчивости (раздел 2.8), то можно, во-первых, оценить скорость сильной сходимости, а, во-вторых, сформулировать новое правило выбора номера остановки итерационного процесса.

2.1. Корректные и некорректные задачи

Пусть оператор A отображает топологическое пространство Q в топологическое пространство F ($A : Q \rightarrow F$). Для топологического пространства Q символом $\mathcal{O}(q)$ обозначим окрестность элемента $q \in Q$. Всюду в дальнейшем $D(A)$ — область определения, $R(A)$ — область значений оператора A .

Определение 2.1.1 (корректность задачи, корректность по Адамару). Задача $Aq = f$ *корректна на паре топологических пространств Q и F* , если выполнены следующие три условия:

- 1) для любого элемента $f \in F$ существует решение $q_T \in Q$ уравнения $Aq = f$ (*условие существования решения*), т. е. $R(A) = F$;
- 2) решение q_T уравнения $Aq = f$ единственно в Q (*условие единственности решения*), т. е. существует обратный оператор $A^{-1} : F \rightarrow Q$;
- 3) для любой окрестности $\mathcal{O}(q_T) \subset Q$ решения q_T уравнения $Aq = f$ найдется окрестность $\mathcal{O}(f) \subset F$ правой части f , такая, что при всех $f_\delta \in \mathcal{O}(f)$ элемент $A^{-1}f_\delta = q_\delta$ принадлежит окрестности $\mathcal{O}(q_T)$, т. е. оператор A^{-1} непрерывен (*условие устойчивости решения*).

Определение 2.1.1 можно конкретизировать, заменяя топологические пространства Q и F на метрические, банаховы, гильбертовы, евклидовы. Иногда более естественно брать в качестве Q топологическое пространство, а в качестве F — евклидово и так далее. Неизменными в понятии корректности остаются лишь требования существования, единственности и устойчивости решения.

Определение 2.1.2. Задача $Aq = f$ *некорректна* на паре пространств Q и F , если хотя бы одно из трех требований корректности не выполнено.

Из всех некорректных задач М. М. Лаврентьев предложил выделить класс условно-корректных. Пусть Q, F — топологические пространства и $M \subset Q$ — фиксированное множество. Через $A(M)$ обозначим образ множества M при отображении $A : Q \rightarrow F$, т. е. $A(M) = \{f \in F : \exists q \in M \text{ такой, что } Aq = f\}$. Очевидно, что $A(M) \subset F$.

Определение 2.1.3 (условная корректность, корректность по Тихонову). Задача $Aq = f$ называется *условно-корректной на множестве M* , если $f \in A(M)$ и выполнены следующие условия:

- 1) решение q_T уравнения $Aq = f, f \in A(M)$, единственно на множестве M ;
- 2) для любой окрестности $\mathcal{O}(q_T)$ решения уравнения $Aq = f$ существует такая окрестность $\mathcal{O}(f)$, что при любом $f_\delta \in \mathcal{O}(f) \cap A(M)$ решение уравнения $Aq = f_\delta$ содержится в $\mathcal{O}(q_T)$ (*условная устойчивость*).

Важно отметить, что во втором условии допускаются только такие вариации f_δ данных f , которые не выводят из класса существования $A(M)$.

Определение 2.1.4. Множество M из определения 2.1.3 называется *множеством корректности задачи $Aq = f$* .

Замечание 2.1.1. Для доказательства корректности задачи $Aq = f$ необходимо доказать теоремы существования, единственности и устойчивости решения. Для доказательства условной корректности задачи $Aq = f$ необходимо выбрать множество корректности M , доказать единственность решения в M и условную устойчивость q относительно малых вариаций данных (правой части) f , не выводящих решение за пределы множества корректности M .

Замечание 2.1.2. Важно отметить, что если для обоснования корректности задачи необходимо доказать существование решения, то в случае условной корректности существование решения предполагается. Разумеется, это не означает, что теорема существования решения не важна или что к доказательству этой теоремы не стоит стремиться. Просто условия существования решения q_T условно-корректной задачи $Aq = f$, которым с необходимостью должны удовлетворять данные f , в наиболее интересных и важных случаях оказываются слишком сложными для проверки и непосредственного применения в численных алгоритмах (см. критерий Пикара, условия разрешимости обратной задачи Штурма — Лиувилля и др.). В этом смысле показательно название статьи В. П. Маслова “Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризационного процесса” [2.21], которое

вскрывает одну из основных проблем исследования существенно некорректных задач. Поэтому введение понятия условной корректности переносит центр тяжести на поиск устойчивых методов приближенного решения некорректных задач. Однако проблема деталей математического изучения условий разрешимости каждой конкретной задачи не становится от этого менее интересной и важной! Отметим, что иногда при отсутствии точного решения можно построить регуляризирующие алгоритмы, сходящиеся к псевдорешению, или квазирешению [2.33].

В следующем разделе будет показано, что для компактных множеств корректности M из единственности решения следует его условная устойчивость.

2.2. Об устойчивости в различных пространствах

Одним из первых методов приближенного решения условно-корректных задач был метод подбора [16]. При его описании будем предполагать, что Q и F — метрические пространства, M — компакт. В качестве приближенного решения выбирается такой элемент q_k из множества корректности M , на котором невязка $\rho_F(Aq, f)$ достигает минимума, т. е.

$$\rho_F(Aq_k, f) = \inf_{q \in M} \rho_F(Aq, f)$$

(см. определение 2.3.1 квазирешения в разделе 2.3).

Пусть $\{q_n\}$ — такая последовательность элементов пространства Q , что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_F(Aq_n, f) = 0$. Обозначим через q_T точное решение задачи $Aq = f$. Если множество M компактно, то из $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_F(Aq_n, f) = 0$ вытекает $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_Q(q_n, q_T) = 0$. Это следует из теоремы:

Теорема 2.2.1. Пусть Q и F — метрические пространства, $M \subset Q$ компактно. Предположим, что отображение A взаимно однозначно отображает M на $A(M) \subset F$. Тогда, если A непрерывно, то и обратное отображение

$$A^{-1}: A(M) \rightarrow M$$

тоже непрерывно.

Доказательство. Пусть $f \in A(M)$ произвольно и $Aq_T = f$. Докажем, что A^{-1} непрерывно в f . Предположим, что это не так. Тогда существует $\varepsilon_* > 0$ такое, что при любом $\delta > 0$ найдется такой элемент $f_\delta \in A(M)$, что

$$\rho_F(f_\delta, f) < \delta \quad \text{и} \quad \rho_Q(A^{-1}(f_\delta), A^{-1}(f)) \geq \varepsilon_*.$$

Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется элемент $f_n \in A(M)$, удовлетворяющий соотношениям

$$\rho_F(f_n, f) < 1/n \quad \text{и} \quad \rho_Q(A^{-1}(f_n), A^{-1}(f)) \geq \varepsilon_*.$$

Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$$

Но $A^{-1}(f_n) \in M$, и в силу компактности M из последовательности $\{A^{-1}(f_n)\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность: $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{-1}(f_{n_k}) = \bar{q}$.

Так как $\rho_Q(\bar{q}, A^{-1}(f)) \geq \varepsilon_*$, то $\bar{q} \neq A^{-1}(f) = q_T$. С другой стороны, в силу непрерывности оператора A , последовательность $A(A^{-1}(f_{n_k}))$ сходится к $A(\bar{q})$. Кроме того, $\lim_{k \rightarrow \infty} A(A^{-1}(f_{n_k})) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f = Aq_T$. Отсюда получаем, что $A(\bar{q}) = A(q_T)$ и, следовательно, $\bar{q} = q_T$. Полученное противоречие доказывает теорему. \square

Символ \square здесь и всюду в дальнейшем означает конец доказательства.

Теорема 2.2.1 дает один из способов минимизации невязки. Пусть оператор A непрерывен и взаимно однозначно отображает M на $A(M)$, а множество M компактно. Пусть $\{\delta_n\}$ — убывающая последовательность положительных чисел: $\delta_n \searrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Возьмем вместо точной правой части f элемент $f_n \in A(M)$, такой, что $\rho_F(f, f_n) \leq \delta_n$. Для каждого n методом подбора можно найти элемент q_n , такой, что $\rho_F(Aq_n, f_n) \leq \delta_n$. Элементы q_n будут близки к точному решению q_T уравнения $Aq = f$. В самом деле, для непрерывного оператора A образ $A(M)$ компакта M является компактным множеством. Следовательно, по теореме 2.2.1 обратное отображение A^{-1} непрерывно на $A(M)$. Так как

$$\rho_F(Aq_n, f) \leq \rho_F(Aq_n, f_n) + \rho_F(f_n, f),$$

то справедливо неравенство

$$\rho_Q(Aq_n, f) \leq \delta_n + \delta_n = 2\delta_n.$$

Из этого неравенства и из непрерывности обратного отображения $A^{-1}: A(M) \rightarrow M$ следует, что $\rho_Q(q_n, q_T) \leq \varepsilon(2\delta_n)$, причем $\varepsilon(2\delta_n) \rightarrow 0$ при $\delta_n \rightarrow 0$.

Отметим, что из теоремы 2.2.1 вытекает существование такой функции $\omega(\delta)$, что

$$1) \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0;$$

$$2) \text{ для любых } q_1, q_2 \in M \text{ из неравенства } \rho_F(Aq_1, Aq_2) \leq \delta \text{ следует } \rho_Q(q_1, q_2) \leq \omega(\delta).$$

Определение 2.2.1. Пусть Q и F — метрические пространства, множество $M \subset Q$ — компакт, а оператор $A : Q \rightarrow F$ взаимно однозначно отображает M на $A(M) \subset F$ и непрерывен. Функцию

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{f_1, f_2 \in A(M) \\ \rho_F(f_1, f_2) \leq \delta}} \rho_Q(A^{-1}f_1, A^{-1}f_2)$$

будем называть *модулем непрерывности* оператора A^{-1} на множестве $A(M)$.

Если известен модуль непрерывности $\omega(\delta)$ или его мажоранта, то можно оценить норму уклонения точного решения от решения, соответствующего приближенным данным. В самом деле, пусть $q_T \in M$ — точное решение задачи $Aq = f$, а $q_\delta \in M$ — решение задачи $Aq = f_\delta$, и $\|f - f_\delta\| \leq \delta$. Тогда, если M — компакт, то $\|q_T - q_\delta\| \leq \omega(\delta)$ (см. также раздел 2.8). Поэтому важнейшим этапом исследования условно-корректной задачи, после доказательства теоремы единственности, является получение оценки условной устойчивости.

Замечание 2.2.1. Устойчивость зависит от топологий, выбранных в Q и F . Формально можно добиться непрерывности оператора A^{-1} , например, наделив F сильнейшей топологией. Если A — линейный взаимно однозначный оператор, а Q и F — нормированные пространства, то можно ввести в F норму следующим образом:

$$\|f\|_A = \|A^{-1}f\|.$$

В этом случае

$$\|A^{-1}\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|A^{-1}f\|}{\|f\|_A} = 1$$

и, значит, A^{-1} непрерывен. Однако на практике чаще всего используются пространства C^m и H^k (см. подраздел 12.1.5), в которых m и k не очень велики.

Замечание 2.2.2. Теорема 2.2.1 может быть обобщена на случай топологических пространств Q и F , где F — хаусдорфово (см. определение 12.1.36).

Некорректные задачи могут быть поставлены в форме вычисления значения оператора (вообще говоря, неограниченного) в точке

$$Tf = q, \quad f \in F, \quad q \in Q. \quad (2.2.1)$$

Если в задаче $Aq = f$ оператор A^{-1} существует, то эта задача эквивалентна задаче (2.2.1). Но, во-первых, оператор A^{-1} может не существовать. Во-вторых, во многих прикладных задачах (например, дифференцирование функции, суммирование рядов и др.) переход к виду $Aq = f$ бывает неудобен или вообще невозможен, хотя теоретически обе задачи можно исследовать по одной схеме [6, 2.22]. Переформулируем условия корректности по Адамару для задачи (2.2.1):

- 1) оператор определен на всем F , $D(T) = F$;
- 2) T — однозначное отображение;
- 3) оператор T непрерывен.

Задача (2.2.1) называется некорректной, если хотя бы одно из условий корректности нарушено. Наиболее важен и содержателен случай нарушения третьего условия (случай неустойчивости). При этом задача (2.2.1) сводится к задаче приближения неограниченного оператора ограниченным.

2.3. Теорема В. К. Иванова. Квазирешение

Возможны и другие подходы к некорректным задачам, связанные с обобщением понятия решения.

Пусть A — вполне непрерывный оператор (компактный) (это означает, что оператор A переводит всякое ограниченное множество в предкомпактное (более подробно см. гл. 12)). Построение устойчивого к малым изменениям f приближенного решения по формуле

$$q = A^{-1}f$$

возможно, если q ищется на компакте $M \subset Q$ и $f \in A(M) \subset F$.

Обратим внимание на тот факт, что принадлежность f множеству $A(M)$ является существенным условием для того, чтобы можно было искать приближенное решение в виде $q = A^{-1}f$, поскольку в противном случае символ $A^{-1}f$ может не иметь смысла. Однако, во-первых, задача установления принадлежности f множеству $A(M)$ сама по себе является сложной. Во-вторых, даже если $f \in A(M)$, неточность измерений может выводить f за рамки $A(M)$, т. е. f_δ может не принадлежать $A(M)$. Для того чтобы устранить затруднения, связанные с отсутствием решения уравнения $Aq = f$, вводится понятие квазирешения уравнения $Aq = f$, обобщающее понятие решения этого уравнения [2.9].

Определение 2.3.1. *Квазирешением* q_k уравнения $Aq = f$ на множестве $M \subset Q$ называется элемент $q_k \in M$, на котором достигается нижняя грань невязки

$$\rho_F(Aq_k, f) = \inf_{q \in M} \rho_F(Aq, f).$$

Если M — компакт, то квазирешение существует при всех $f \in F$, а если, кроме того, $f \in A(M)$, то квазирешение q_k совпадает с точным решением (q_k может быть неединственным!).

Можно указать достаточные условия, при которых квазирешение единственно и непрерывно зависит от правой части f .

Определение 2.3.2. Пусть элемент h и множество G принадлежат пространству F . Элемент $g \in G$ называется *проекцией элемента h на G* , если

$$\rho_F(h, g) = \rho_F(h, G) := \inf_{p \in G} \rho_F(h, p).$$

Проекция g элемента h на G обозначается равенством $g = P_G h$.

Теорема 2.3.1. Пусть уравнение $Aq = f$ имеет на компакте M не более одного решения и проекция каждого $f \in F$ на $A(M)$ единственна. Тогда квазирешение уравнения $Aq = f$ единственно и непрерывно зависит от f .

Доказательство этой теоремы, как и теоремы 2.3.2, можно найти в книгах [6, 16].

Отметим, что если условия теоремы 2.3.1 выполнены, то при переходе к квазирешению восстанавливаются все условия корректности. Следовательно, задача нахождения квазирешения на компакте корректно поставлена.

Замечание 2.3.1. Если решение уравнения $Aq = f$ не единственно, то квазирешения образуют некоторое подмножество D компакта M . В этом случае и без ограничений теоремы на множестве $A(M)$ имеется непрерывная зависимость множества D от f , но в смысле непрерывности многозначных отображений [2.9].

Если оператор A линеен, то теорема 2.3.1 конкретизируется следующим образом [2.9].

Теорема 2.3.2. Пусть оператор $A : Q \rightarrow F$ линеен и однородное уравнение $Aq = 0$ имеет только нулевое решение. Предположим также, что множество M выпукло и компактно, а всякая сфера в F строго выпукла. Тогда квазирешение уравнения $Aq = f$ на M единственно и непрерывно зависит от f .

Рассмотрим теперь случай, когда Q и F являются сепарабельными гильбертовыми пространствами. Пусть $A : Q \rightarrow F$ — вполне непрерывный оператор,

$$M = B(0, r) := \{q \in Q: \|q\| \leq r\}.$$

Обозначим через A^* оператор, сопряженный к оператору A .

Известно, что A^*A — самосопряженный положительный (т. е. для всех $q \neq 0$ $\langle A^*Aq, q \rangle > 0$) вполне непрерывный оператор, действующий из Q в Q .

Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность собственных значений оператора A^*A (упорядоченных по убыванию), а $\{\varphi_n\}$ — отвечающая им полная ортонормированная последовательность собственных функций (векторов).

Элемент A^*f представим в виде ряда

$$A^*f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n, \quad f_n = \langle A^*f, \varphi_n \rangle. \quad (2.3.1)$$

В этих условиях справедлива следующая теорема [2.9]:

Теорема 2.3.3. *Квазирешение уравнения $Aq = f$ на множестве $B(0, r)$ выражается формулами*

$$q_k = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \varphi_n, & \text{если } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\lambda_n^2} < r^2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n + \beta} \varphi_n, & \text{если } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\lambda_n^2} \geq r^2, \end{cases}$$

где β — корень уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{(\lambda_n + \beta)^2} = r^2.$$

Доказательство. В случае $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\lambda_n^2} < r^2$ квазирешение q_k , минимизирующее на $B(0, r)$ функционал $\rho_{F^2}^2(Aq, f) := J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$, можно получить, решая уравнение Эйлера — Лагранжа

$$A^*Aq = A^*f. \quad (2.3.2)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда

$$q_k = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \varphi_n.$$

Подставив этот ряд в уравнение (2.3.2) и воспользовавшись разложением (2.3.1) для A^*f , получим

$$A^*Aq_k = \sum_{n=1}^{\infty} q_n A^*A\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \lambda_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n.$$

Значит, $q_n = f_n/\lambda_n$. Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\lambda_n^2} < r^2$, то $q_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \varphi_n \in B(0, r)$ минимизирует на $B(0, r)$ функционал $J(q)$.

Если же $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\lambda_n^2} \geq r^2$, то, учитывая, что q_k должно принадлежать

$B(0, r)$, надо минимизировать функционал $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$ на сфере $\|q\|^2 = r^2$.

Методом неопределенных множителей Лагранжа эта задача сводится к нахождению безусловного экстремума функционала

$$J_\alpha(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle + \alpha \langle q, q \rangle.$$

Для нахождения минимума функционала J_α нужно решить соответствующее уравнение Эйлера

$$\alpha q + A^* A q = A^* f. \quad (2.3.3)$$

Подставим сюда $q_k = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \varphi_n$ и $A^* f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n$. Находим $q_n = f_n / (\alpha + \lambda_n)$. Параметр α определяем из условия $\|q\|^2 = r^2$, которое эквивалентно условию $w(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} = r^2$. Выбирая в качестве β корень уравнения $w(\alpha) = r^2$, мы завершаем доказательство теоремы. \square

Замечание 2.3.2. Корень уравнения $w(\alpha) = r^2$ существует, поскольку $w(0) \geq r^2$, а с ростом α величина $w(\alpha)$ монотонно убывает и при $\alpha \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

2.4. Метод М. М. Лаврентьева

Если в уравнении $Aq = f$ приближенно заданная правая часть f_δ не принадлежит $A(M)$, можно попытаться заменить это уравнение близким к нему уравнением

$$\alpha q + Aq = f_\delta, \quad \alpha > 0, \quad (2.4.1)$$

для которого задача будет корректной. Ниже мы докажем, что во многих случаях решение этого уравнения $q_{\alpha\delta}$ существует и стремится к точному решению q_T уравнения $Aq = f$ при $\alpha \rightarrow 0$ и при согласованном с α стремлении к нулю ошибки δ задания f [2.18].

Пусть Q и F — сепарабельные гильбертовы пространства, $F = Q$, A — линейный, вполне непрерывный, положительный и самосопряженный оператор.

Предположим, что для $f \in F$ существует q_T , такое, что $Aq_T = f$. Тогда решение $q_\alpha = (\alpha E + A)^{-1} f$ уравнения $\alpha q + Aq = f$ (существование q_α докажем ниже) будем считать приближенным решением уравнения $Aq = f$.

Если данные f известны с ошибкой, т. е. вместо f нам известен элемент f_δ , удовлетворяющий условию $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, то полагаем

$$q_{\alpha\delta} = (\alpha E + A)^{-1} f_\delta.$$

Уравнение (2.4.1) определяет семейство регуляризирующих операторов $R_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}$, $\alpha > 0$ (см. ниже определение 2.5.2). Рассмотрим

этот вопрос более подробно. Пусть $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная последовательность собственных функций, $\{\lambda_k\}$ ($0 < \dots \leq \lambda_{k+1} \leq \lambda_k \leq \dots \leq \lambda_1$) — соответствующая ей последовательность собственных значений оператора A . Предположим, что решение q_T уравнения

$$Aq = f \quad (2.4.2)$$

существует. Подставляя разложения

$$\begin{aligned} q_T &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \varphi_k, & q_k &= \langle q_T, \varphi_k \rangle, \\ f &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k, & f_k &= \langle f, \varphi_k \rangle, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

в (2.4.2), заключаем, что $q_k = f_k/\lambda_k$ и, значит,

$$q_T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} \varphi_k.$$

Поскольку $q_T \in Q$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_k}{\lambda_k} \right)^2 \quad (2.4.4)$$

сходится. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\alpha q + Aq = f. \quad (2.4.5)$$

По аналогии с предыдущим замечаем, что решение q_α уравнения (2.4.5) представимо в виде

$$q_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\alpha + \lambda_k} \varphi_k. \quad (2.4.6)$$

Учитывая, что $f_k = \lambda_k q_k$, оценим разность

$$\begin{aligned} q_T - q_\alpha &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \varphi_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k q_k}{\alpha + \lambda_k} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(q_k - \frac{\lambda_k q_k}{\alpha + \lambda_k} \right) \varphi_k \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\alpha + \lambda_k} \varphi_k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|q_T - q_\alpha\|^2 = \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2}. \quad (2.4.7)$$

Теперь уже нетрудно показать, что $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \|q_T - q_\alpha\| = 0$. В самом деле, пусть ε — произвольное положительное число. Оценим сверху ряд (2.4.7):

$$\begin{aligned} \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} &= \alpha^2 \sum_{k=1}^n \frac{q_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} + \alpha^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{q_k^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} \\ &\leq \frac{\alpha^2}{\lambda_n^2} \|q\|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k^2. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q_k^2$ сходится, то для $\varepsilon/2$ можно найти такой номер n , что второе слагаемое в правой части (2.4.8) будет меньше $\varepsilon/2$. Затем уже можно выбрать $\alpha > 0$ таким, что и первое слагаемое будет меньше $\varepsilon/2$. Следовательно, $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \|q_T - q_\alpha\| = 0$.

Рассмотрим теперь задачу с приближенными данными

$$Aq = f_\delta, \quad (2.4.9)$$

в которой $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, а также регуляризованную задачу (2.4.1):

$$\alpha q + Aq = f_\delta.$$

Пусть $f_{\delta,k} = \langle f_\delta, \varphi_k \rangle$. Тогда решение $q_{\alpha\delta}$ уравнения (2.4.1) представимо в виде ряда

$$q_{\alpha\delta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{\delta,k}}{\alpha + \lambda_k} \varphi_k.$$

Оценим теперь разность

$$\|q_T - q_{\alpha\delta}\| \leq \|q_T - q_\alpha\| + \|q_\alpha - q_{\alpha\delta}\|. \quad (2.4.10)$$

Первое слагаемое в правой части (2.4.10) стремится к нулю при $\alpha \rightarrow 0$.

Оценим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \|q_\alpha - q_{\alpha\delta}\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_k}{\alpha + \lambda_k} - \frac{f_{\delta,k}}{\alpha + \lambda_k} \right) \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f_k - f_{\delta,k})^2}{(\alpha + \lambda_k)^2} \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} (f_k - f_{\delta,k})^2 = \frac{1}{\alpha^2} \|f - f_\delta\|^2 \leq \frac{\delta^2}{\alpha^2}. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Докажем теперь, что $q_{\alpha\delta} \rightarrow q_T$ при согласованном стремлении к нулю α и δ . Пусть ε — произвольное положительное число. Сначала для $\varepsilon/2$ находим α , такое, что $\|q_T - q_\alpha\| < \varepsilon/2$. Затем находим $\delta > 0$, такое, чтобы выполнялось неравенство $\delta/\alpha < \varepsilon/2$. Тогда в силу (2.4.10) и (2.4.11) получаем

$$\|q_T - q_{\alpha\delta}\| \leq \|q_T - q_\alpha\| + \|q_\alpha - q_{\alpha\delta}\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

В дальнейшем мы применим метод М. М. Лаврентьева для регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого рода как в линейном (раздел 4.2), так и нелинейном (раздел 4.6) случаях.

В заключении отметим, что если оператор A не является положительным самосопряженным, то уравнение $Aq = f$ можно свести к уравнению с положительным самосопряженным оператором, применяя оператор A^* :

$$A^*Aq = A^*f.$$

В этом случае регуляризирующий оператор записывается в виде

$$R_\alpha = (\alpha E + A^*A)^{-1}A^*$$

(сравните с (2.4.3)).

2.5. Метод регуляризации А. Н. Тихонова

Во многих некорректных задачах $Aq = f$ класс возможных решений $M \subset Q$ не является компактом, а ошибки измерений данных f могут выводить за пределы класса существования решения $A(M)$. Для построения приближенных решений таких задач можно использовать предложенный А. Н. Тихоновым [2.31, 2.32] метод регуляризации.

Приведем сначала общее определение регуляризирующего алгоритма для задачи $Aq = f$ [2]. Предположим, что A — линейный ограниченный оператор, имеющий обратный. Пусть вместо оператора A и правой части f нам известны их приближения A_h и f_δ , удовлетворяющие условиям (Q и F — нормированные пространства)

$$\|A - A_h\| \leq h, \quad \|f - f_\delta\| \leq \delta.$$

Пусть \mathcal{A} — множество допустимых возмущений оператора A .

Определение 2.5.1. Семейство отображений $R_{\delta h} : f \times \mathcal{A} \rightarrow Q$ называется *регуляризирующим алгоритмом* для задачи $Aq = f$, если

$$\sup_{\substack{\|f - f_\delta\| \leq \delta, \\ f_\delta \in F, A_h \in \mathcal{A}}} \|R_{\delta h}(f_\delta, A_h) - A^{-1}f\| \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ для всех $f \in R(A) = A(Q)$. Множество $\{R_{\delta h}(f_\delta, A_h)\}$, $\delta \in (0, \delta_0]$, $h \in (0, h_0]$, называется *регуляризованным семейством приближенных решений* задачи $Aq = f$.

Если о решении q_T уравнения $Aq = f$ известна априорная информация, например, условие $q_T \in M \subset Q$, то в определении достаточно заменить множество $A^{-1}f$ на $A^{-1}f \cap M$. В большинстве случаев в дальнейшем будем предполагать, что оператор A задан точно.

Пусть теперь $A : Q \rightarrow F$, Q и F — метрические пространства, q_T — точное решение некорректной задачи $Aq = f$ для некоторого $f \in F$.

Определение 2.5.2 (регуляризирующее семейство). Семейство операторов $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ называется *регуляризирующим* для задачи $Aq = f$, если:

- 1) для любого $\alpha > 0$ оператор $R_\alpha : F \rightarrow Q$ непрерывен;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\alpha_* > 0$, такое, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_*)$

$$\rho_Q(R_\alpha f, q_T) < \varepsilon,$$

другими словами,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} R_\alpha f = q_T. \quad (2.5.1)$$

Если правая часть уравнения $Aq = f$ задана приближенно и известна погрешность δ исходных данных, $\rho_F(f_\delta, f) \leq \delta$, то регуляризирующее семейство $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ позволяет не только построить приближенное решение $q_{\alpha\delta} = R_\alpha f_\delta$, но и оценить отклонение приближенного решения $q_{\alpha\delta}$ от точного q_T . В самом деле, в силу неравенства треугольника

$$\rho_Q(q_{\alpha\delta}, q_T) \leq \rho_Q(q_{\alpha\delta}, R_\alpha f) + \rho_Q(R_\alpha f, q_T). \quad (2.5.2)$$

При $\alpha \rightarrow +0$ второе слагаемое в правой части (2.5.2) стремится к нулю. В силу некорректности задачи оценка первого слагаемого при $\alpha \rightarrow +0$, $\delta \rightarrow +0$ является сложной проблемой, решаемой в каждой конкретной задаче с учетом особенностей этой задачи, а также априорной и/или апостериорной информации о точном решении.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда Q, F — банаховы пространства, $A : Q \rightarrow F$ — линейный вполне непрерывный оператор, R_α — линейный оператор при всех $\alpha > 0$. Предположим, что для $f \in F$ существует единственное решение q_T и вместо f задано его приближение $f_\delta \in F$, такое, что

$$\|f - f_\delta\| \leq \delta. \quad (2.5.3)$$

Оценим норму разности между точным решением q_T и регуляризованным $q_{\alpha\delta} = R_\alpha f_\delta$:

$$\|q_T - q_{\alpha\delta}\| \leq \|q_T - R_\alpha f\| + \|R_\alpha f - R_\alpha f_\delta\|. \quad (2.5.4)$$

Обозначим $\|q_T - R_\alpha f\| = \gamma(q_T, \alpha)$. В силу свойства (2.5.1) регуляризирующего семейства первое слагаемое в правой части (2.5.4) стремится к нулю при $\alpha \rightarrow 0$, т. е. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma(q_T, \alpha) = 0$.

Из линейности R_α и условия (2.5.3) следует, что

$$\|R_\alpha f - R_\alpha f_\delta\| \leq \|R_\alpha\| \delta.$$

Напомним, что норма оператора $A : Q \rightarrow F$, где Q и F — банаховы пространства, определяется по формуле

$$\|A\| = \sup_{\substack{q \in Q \\ q \neq 0}} \frac{\|Aq\|}{\|q\|}.$$

В силу некорректности задачи норма $\|R_\alpha\|$ не может быть равномерно ограниченной, иначе $\lim_{\alpha \rightarrow +0} R_\alpha = A^{-1}$ и задача $Aq = f$ была бы классически корректной. Однако, если α и δ стремятся к нулю согласованно, то правая часть полученной оценки

$$\|q_T - q_{\alpha\delta}\| \leq \gamma(q_T, \alpha) + \|R_\alpha\|\delta \quad (2.5.5)$$

стремится к нулю. В самом деле, обозначим $\omega(q_T, \delta) = \inf_{\alpha > 0} \{\gamma(q_T, \alpha) + \|R_\alpha\|\delta\}$ и покажем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(q_T, \delta) = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Поскольку $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma(q_T, \alpha) = 0$, то найдется такое $\alpha_0(\varepsilon)$, что для всех $\alpha \in (0, \alpha_0(\varepsilon))$

$$\gamma(q_T, \alpha) < \varepsilon/2.$$

Обозначим $\mu_0(\varepsilon) = \inf_{\alpha \in (0, \alpha_0(\varepsilon))} \|R_\alpha\|$ и возьмем $\delta_0(\varepsilon) = \varepsilon/(2\mu_0(\varepsilon))$. Тогда при всех $\delta \in (0, \delta_0(\varepsilon))$

$$\inf_{\alpha > 0} \{\|R_\alpha\|\delta\} \leq \delta \inf_{\alpha \in (0, \alpha_0(\varepsilon))} \{\|R_\alpha\|\} \leq \varepsilon/2.$$

Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти $\alpha_0(\varepsilon)$ и $\delta_0(\varepsilon)$, такие, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_0(\varepsilon))$ и $\delta \in (0, \delta_0(\varepsilon))$

$$\|q_T - q_{\alpha\delta}\| < \varepsilon.$$

Для конкретных операторов A и семейств $\{R_\alpha\}_{\alpha > 0}$ зависимость между параметром регуляризации α и уровнем погрешности данных δ можно получить в явном виде.

Одним из наиболее известных способов построения регуляризирующего семейства является минимизация функционала А. Н. Тихонова

$$M(q, f_\delta, \alpha) = \|Aq - f_\delta\|^2 + \alpha\Omega(q - q^0).$$

Здесь q^0 — пробное решение; α — параметр регуляризации; Ω — стабилизирующий функционал, выбираемый обычно в виде нормы (или полунормы), например $\Omega(q) = \|q\|^2$. Стабилизатор Ω учитывает априорную информацию о степени гладкости точного решения (или о структуре решения) и определяет тип сходимости приближенных решений к точному при заданной зависимости $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. Например, при численном решении интегральных уравнений первого рода, решение которых существует, единственно и является достаточно гладким, метод Тихонова эффективен при $\Omega(q) = \|q\|_{W_2^1}^2$ (см. [2] и приведенную там библиографию).

Рассмотрим сначала простейший пример

$$M(q, f, \alpha) = \|Aq - f\|^2 + \alpha\|q\|^2, \quad \alpha > 0. \quad (2.5.6)$$

Теорема 2.5.1. Пусть Q и F — гильбертовы пространства, A — линейный вполне непрерывный оператор. Тогда для любых $f \in F$ и $\alpha > 0$ функционал $M(q, f, \alpha)$ достигает своей нижней грани на единственном элементе q_α .

Используя теорему 2.5.1, можно по приближенным данным $f_\delta \in F$, удовлетворяющим условию $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, построить приближенное решение $q_{\alpha\delta}$ и доказать его сходимости к точному решению q_T уравнения $Aq = f$ при согласованном стремлении к нулю параметров α и δ [5]. В самом деле, пусть нижняя грань функционала $M(q, f_\delta, \alpha)$ достигается в точке $q_{\alpha\delta}$, которая по теореме 2.5.1 существует и единственна.

Теорема 2.5.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.5.1. Предположим, что для некоторого $f \in F$ существует единственное решение q_T уравнения $Aq = f$. Обозначим через $\{f_\delta\}_{\delta>0}$ семейство приближенных данных, каждый элемент которого удовлетворяет условию $\|f - f_\delta\| < \delta$. Тогда, если при стремлении δ к нулю параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ выбирается так, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0$ и $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2/\alpha(\delta) = 0$, то элемент $q_{\alpha(\delta), \delta}$, на котором достигается минимум регуляризирующего функционала $M(q, f_\delta, \alpha)$, стремится к точному решению q_T уравнения $Aq = f$, т. е. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|q_{\alpha(\delta), \delta} - q_T\| = 0$.

Для более общего случая $A_h q = f_\delta$ справедлива следующая теорема [2.7]:

Теорема 2.5.3. Предположим, что оператор A_h и правая часть f_δ удовлетворяют условиям аппроксимации

$$\|A_h - A\| \leq h, \quad \|f - f_\delta\| \leq \delta, \quad (2.5.7)$$

$h \in (0, h_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$. Предположим также, что A и A_h линейные ограниченные операторы, действующие из Q в F , Q и F — гильбертовы пространства. Пусть q_n^0 — нормальное относительно q^0 решение задачи $Aq = f$ (т. е. элемент, доставляющий минимум функционалу $\|q - q^0\|$ на множестве Q_f всех решений задачи $Aq = f$). Тогда при любых $\alpha > 0$, $q_0 \in Q$, $h \in (0, h_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$ существует единственное решение $q_{h\delta}^\alpha$ задачи

$$\min \{ \|A_h q - f_\delta\|^2 + \alpha \|q - q^0\|^2, q \in Q \}, \quad (2.5.8)$$

и если параметр регуляризации α удовлетворяет условиям ($\Delta = \sqrt{h^2 + \delta^2}$)

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \alpha(\Delta) = 0, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(h + \delta)^2}{\alpha(\Delta)} = 0,$$

то

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \|q_{h\delta}^\alpha - q^0\| = 0.$$

Пример 2.5.1 (задача дифференцирования). Пусть функция $f(x) \in C^1(0, 1)$ задана приближенно с ошибкой

$$\|f - f_\delta\|_{C(0,1)} < \delta.$$

Требуется по функции $f_\delta(x) \in C(0, 1)$ вычислить приближенное значение производной $f'(x)$.

Некорректность данной задачи следует уже из того, что функция $f_\delta(x)$ вообще может не иметь производной. Но даже если $f'_\delta(x)$ существует, задача может оказаться неустойчивой. В самом деле, при добавлении к $f(x)$ ошибки вида $\delta \sin(x/\delta^2)$ получаем, что приближенная функция

$$f_\delta(x) = f(x) + \delta \sin(x/\delta^2)$$

стремится к $f(x)$ при $\delta \rightarrow 0$. В то же время, разность между производными

$$f'_\delta(x) - f'(x) = \frac{1}{\delta} \cos(x/\delta^2)$$

бесконечно растет.

Рассмотрим простейшее регуляризирующее семейство $R_\alpha f(x) = (f(x + \alpha) - f(x))/\alpha$, где $x \in (0, 1)$, $\alpha \in (0, 1 - x)$. Оценим отклонение $f'(x) - R_\alpha f'_\delta(x)$ в некоторой фиксированной точке $x \in (0, 1)$. В силу дифференцируемости $f(x)$

$$f(x + \alpha) = f(x) + f'(x)\alpha + o(\alpha).$$

Поэтому

$$\frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) = \frac{o(\alpha)}{\alpha}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |f'(x) - R_\alpha f'_\delta(x)| &\leq \left| f'(x) - \frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha} \right| \\ &+ \left| \frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha} - \frac{f_\delta(x + \alpha) - f_\delta(x)}{\alpha} \right| \leq \frac{o(\alpha, x)}{\alpha} + \frac{2\delta}{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

В данном случае, для того чтобы правая часть неравенства (2.5.9) стремилась к нулю, достаточно потребовать, чтобы α и δ стремились к нулю, но не произвольно, а с соблюдением условия $\delta/\alpha \rightarrow 0$, т. е. $\delta = o(\alpha)$.

Оценку (2.5.9) можно улучшить, если повысить требования на гладкость функции $f(x)$. Например, предположим существование второй производной $f''(x)$, ограниченной в некоторой окрестности $O(x, \varepsilon) = \{x' \in R : |x - x'| < \varepsilon\}$ точки x по модулю некоторой постоянной c_1 :

$$\sup_{x' \in O(x, \varepsilon)} |f''(x')| < c_1. \quad (2.5.10)$$

Возьмем $\alpha \in (0, \min\{\varepsilon, 1 - x\})$ и воспользуемся формулой Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x + \alpha) = f(x) + f'(x)\alpha + \frac{f''(x + \theta\alpha)\alpha^2}{2}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Отсюда

$$\left| \frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| \leq \frac{c_1\alpha}{2}.$$

Таким образом, вместо (2.5.9) мы получим оценку

$$|f'(x) - R_\alpha f_\delta(x)| \leq \frac{c_1\alpha}{2} + \frac{2\delta}{\alpha}. \quad (2.5.11)$$

Можно уточнить зависимость α от δ , например, если выбрать $\alpha > 0$ так, чтобы минимизировать правую часть (2.5.11). Минимум по α достигается на положительном решении уравнения

$$\frac{c_1}{2} = \frac{2\delta}{\alpha^2},$$

т. е. при $\alpha = 2\sqrt{\delta/c_1}$. В этом случае

$$|f'(x) - R_\alpha f_\delta(x)| \leq 2\sqrt{c_1\delta}.$$

Замечание 2.5.1. Можно построить и исследовать на сходимость и другие семейства регуляризирующих операторов, например: $R_\alpha f(x) = (f(x) - f(x - \alpha))/\alpha$, $R_\alpha f(x) = (f(x + \alpha) - f(x - \alpha))/(2\alpha)$.

Замечание 2.5.2. Мы оценивали уклонение $|f'(x) - R_\alpha f_\delta(x)|$ в окрестности произвольной фиксированной точки $x \in (0, 1)$. Ясно, что оценка (2.5.11) будет справедлива для всех $x \in (0, 1)$, если условие (2.5.10) заменить на $\|f''\|_{C(0,1)} < \text{const.}$ (Более подробно о точечной и равномерной регуляризации см. [6]).

Замечание 2.5.3. На практике часто функция $f(x)$ задана не только приближенно, но и лишь в нескольких отдельных точках исследуемого интервала. В этом случае можно использовать интерполяционные многочлены (Ньютона, Лагранжа, сплайны), а в качестве приближенной производной функции $f(x)$ взять производную интерполяционного многочлена. И в этом случае оценка уклонения приближенной производной от точной требует дополнительных предположений о гладкости искомой производной и согласования точности измерений с шагом дискретизации.

Замечание 2.5.4. Еще один способ регуляризации операции дифференцирования — это свертка приближенно заданной функции $f_\delta(x)$ с гладкой функцией $\omega_\alpha(x)$, обладающей свойствами

$$\text{a) } \operatorname{supp} \{\omega_\alpha(x)\} \subset [-\alpha, \alpha];$$

$$\text{б) } \int_{-\alpha}^{\alpha} \omega_\alpha(x) dx = 1.$$

Например, семейство $\{\omega_\alpha(x)\}$, $\alpha > 0$, можно выбрать в виде

$$\omega_\alpha(x) = \begin{cases} c_\alpha \exp\{-\alpha^2/(\alpha^2 - x^2)\}, & |x| \leq \alpha; \\ 0, & |x| > \alpha, \end{cases}$$

$$c_\alpha = \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - x^2}\right\} dx \right)^{-1}.$$

Легко проверить, что операторы R_α , определенные по формуле

$$R_\alpha f_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\delta(y) \omega'_\alpha(x-y) dy,$$

образуют семейство регуляризирующих операторов.

Регуляризирующая последовательность. Иногда при построении регуляризирующего семейства вместо вещественного параметра $\alpha \rightarrow 0$ выбирают натуральное число n стремящееся к бесконечности. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.5.2 (разложение по собственным функциям).

Пусть $F = Q$, Q — сепарабельное гильбертово пространство. Пусть, как и в разделе 2.3, A — линейный вполне непрерывный положительный самосопряженный оператор, а $\{\varphi_n\}$, $\{\lambda_n\}$ — соответствующие последовательности собственных функций и собственных значений оператора A ($\lambda_{k+1} \leq \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$). Точное решение q_T уравнения $Aq = f$ представимо в виде

$$q_T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} \varphi_k, \quad f_k = \langle f, \varphi_k \rangle. \quad (2.5.12)$$

Поскольку решение существует и принадлежит гильбертову пространству Q , ряды (2.5.12) и $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_k}{\lambda_k}\right)^2$ сходятся. Но если для $f_\delta \in F$, удовлетворяющего условию $\|f - f_\delta\| < \delta$, не существует решения уравнения $Aq = f_\delta$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{\delta k}}{\lambda_k}\right)^2$, $f_{\delta k} = \langle f_\delta, \varphi_k \rangle$, расходится (см. критерий Пикара (следствие 2.9.1)). Построим последовательность операторов $\{R_n\}$, таких, что

$$R_n f_\delta = \sum_{k=1}^n \frac{f_{\delta k}}{\lambda_k} \varphi_k, \quad (2.5.13)$$

и покажем, что она обладает всеми свойствами регуляризирующего семейства при $n \rightarrow \infty$. Операторы R_n , очевидно, непрерывны, $\|R_n\| = 1/\lambda_n$ и при всех $q \in Q$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n A q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k = q, \quad q_k = \langle q, \varphi_k \rangle.$$

Но тогда для точного решения (2.5.12) уравнения $Aq = f$ и регуляризованного решения $q_{\delta n} = R_n f_{\delta}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|q_T - q_{\delta n}\| &\leq \|q_T - R_n f\| + \|R_n f - R_n f_{\delta}\| \leq \|q_T - R_n A q_T\| + \|R_n(f - f_{\delta})\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k^2 + \|R_n\| \delta = \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k^2 + \frac{\delta}{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно сначала выбрать номер n_0 , такой, чтобы $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} q_k^2 < \varepsilon/2$, а затем выбрать $\delta > 0$ из условия $\delta < \lambda_n \varepsilon/2$. Тогда получаем, что при всех $n > n_0$ и $\delta \in (0, \lambda_n \varepsilon/2)$ выполнено неравенство $\|q_T - q_{\delta n}\| < \varepsilon$.

Пример 2.5.3 (метод последовательных приближений). Пусть выполнены все условия примера 2.5.2 и, дополнительно, $\lambda_1 < 1$. Определим последовательность $\{q_n\}$ по правилу

$$q_{n+1} = q_n - A q_n + f, \quad q_0 = f, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Покажем, что если существует точное решение $q_T \in Q$ уравнения $Aq = f$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q_T.$$

В самом деле,

$$q_n = \sum_{k=0}^n (E - A)^k f = \sum_{k=0}^n (E - A)^k A q_T$$

Упражнение 2.5.1. Доказать, что

$$q_T - q_n = (E - A)^{n+1} q_T. \quad (2.5.14)$$

Разложим (2.5.14) по базису $\{\varphi_n\}$:

$$q_T - q_n = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_k)^{n+1} q_n \varphi_k, \quad q_k = \langle q_T, \varphi_k \rangle.$$

Следовательно,

$$\|q_T - q_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_k)^{2(n+1)} q_k^2.$$

Упражнение 2.5.2. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|q_n - q\| = 0$.

Упражнение 2.5.3. Доказать, что последовательность операторов, определяемых равенством $R_n f = \sum_{k=0}^n (E - A)^k f$, является регуляризующей и $\|R_n\| = n + 1$.

В следующем разделе мы рассмотрим один из самых эффективных и наиболее часто применяемых на практике класс методов итеративной регуляризации — градиентные методы.

2.6. Градиентные методы

Скорость пули при низкой температуре сильно зависит от свойств мишени

И. Бродский

Идея замены исходного уравнения (задачи)

$$Aq = f \tag{2.6.1}$$

задачей поиска минимума целевого функционала

$$J(q) = \|Aq - f\|^2 \rightarrow \min \tag{2.6.2}$$

восходит к работам А. Лежандра [2.51] и К. Гаусса [2.42], предложивших метод наименьших квадратов для решения систем алгебраических уравнений. О. Коши [2.41] разработал метод наискорейшего спуска для решения задачи о минимуме функции n переменных. Л. В. Канторович [2.13] предложил решать линейные операторные уравнения $Aq = f$ в гильбертовых пространствах, минимизируя функционал $H(q) = \langle Aq, q \rangle - 2\langle f, q \rangle$ методом наискорейшего спуска, и исследовал его сходимость в случае $m\langle q, q \rangle \leq \langle Aq, q \rangle \leq M\langle q, q \rangle$, $m > 0$, наметив путь исследования и для случая $m = 0$. Вместо $H(q)$ мы будем использовать более распространенный на практике функционал $J(q)$. Отметим, что в случае $A = A^*$ градиент $H'q$ функционала $H(q)$ равен $2(Aq - f)$ и его убывание по q означает, что q приближается к решению уравнения $Aq = f$.

В данном разделе мы кратко изложим общую структуру нескольких градиентных методов решения операторного уравнения $Aq = f$ и обсудим вопросы сходимости этих методов в случае, когда задача $Aq = f$ некорректна. Более детально градиентные методы и их применение в обратных задачах изложены в [1].

Структура градиентных методов. Рассмотрим случай, когда Q , F — гильбертовы пространства, A — дифференцируемый по Фреше оператор, действующий из Q в F . Решение уравнения $Aq = f$ будем искать, минимизируя целевой функционал

$$J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle = \|Aq - f\|^2.$$

Лемма 2.6.1. Если оператор A дифференцируем по Фреше, то функционал $J(q)$ также дифференцируем и его градиент $J'q$ выражается через оператор A' по формуле

$$J'q = 2(A'q)^*(Aq - f). \quad (2.6.3)$$

Замечание 2.6.1. Если A — линейный оператор, то $J'q = 2A^*(Aq - f)$.

Доказательство формулы (2.6.3) следует из очевидных равенств

$$\begin{aligned} & J(q + \delta q) - J(q) \\ &= \langle A(q + \delta q) - f, A(q + \delta q) - f \rangle - \langle A(q + \delta q) - f, Aq - f \rangle \\ &\quad + \langle A(q + \delta q) - f, Aq - f \rangle - \langle Aq - f, Aq - f \rangle \\ &= \langle A(q + \delta q) - f, (A'q)\delta q \rangle + \langle (A'q)\delta q, Aq - f \rangle + o(\|\delta q\|) \\ &= \langle 2(A'q)\delta q, Aq - f \rangle + o(\|\delta q\|) \\ &= \langle \delta q, 2(A'q)^*(Aq - f) \rangle + o(\|\delta q\|). \end{aligned}$$

Простейшие из градиентных методов записываются в форме

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'q_n. \quad (2.6.4)$$

Здесь способ задания положительного параметра α_n определяет тот или иной метод. Всюду ниже предполагаем, что A — линейный оператор.

Теорема 2.6.1. Пусть $A : Q \rightarrow F$ — линейный непрерывный оператор, Q и F — гильбертовы пространства, а операторы A и A^* имеют нулевые ядра. Тогда функционал

$$J(q) = \|Aq - f\|^2$$

не может иметь более одной стационарной точки.

Доказательство. Предположим, что функционал $J(q)$ имеет две стационарные точки $q_1, q_2 \in Q$.

Тогда $J'q_1 = 0, J'q_2 = 0$. В силу леммы 2.6.1 для $j = 1, 2$ имеем $J'q_j = 2A^*(Aq_j - f) = 0$ и, значит, $Aq_j - f \in \text{Ker } A^*$.

Следовательно, $Aq_j = f$ и, в силу единственности решения уравнения $Aq = f$, заключаем, что $q_1 = q_2$. \square

Рассмотрим несколько градиентных методов

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'q_n, \quad q_n \in Q, \quad \alpha_n > 0, \quad (2.6.5)$$

для которых параметр спуска α_n либо фиксирован, либо выбирается из условия минимума некоторого функционала качества. Как и ранее, обозначим через q_T точное решение задачи $Aq = f$ (возможно, неединственное!)

Метод простой итерации (в теории некорректных задач — метод итераций Ландвебера). Параметр α_n фиксирован:

$$\alpha_n = \alpha \in (0, 1/\|A\|^2).$$

Метод минимальных ошибок. Параметр α_n выбирается из условия минимума по α величины

$$\begin{aligned} \|q_{n+1} - q_T\|^2 &= \|q_n - \alpha J'q_n - q_T\|^2 \\ &= \|q_n - q_T\|^2 - 2\alpha \langle q_n - q_T, J'q_n \rangle + \alpha^2 \|J'q_n\|^2. \end{aligned}$$

Упражнение 2.6.1. Доказать, что минимум по α достигается в точке

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\langle q_n - q_T, J'q_n \rangle}{\|J'q_n\|^2} = \frac{\langle q_n - q_T, 2A^*(Aq_n - f) \rangle}{\|J'q_n\|^2} \\ &= 2 \frac{\langle Aq_n - f, Aq_n - f \rangle}{\|J'q_n\|^2} = \frac{2J(q_n)}{\|J'q_n\|^2}. \end{aligned}$$

Отметим, что q_T входит в выражение $\|q_{n+1} - q_T\|^2$, но шаг спуска не зависит от q_T .

Замечание 2.6.2. Условия $J(q_n) \neq 0$ и $J'q_n \neq 0$ будут использоваться далее при анализе градиентных методов. Первое из условий должно проверяться перед каждым очередным шагом спуска. Если даже $J(q_n) \neq 0$, но очень мало, то дальнейшие вычисления могут не иметь смысла. Тем более, при $J(q_n) = 0$ процесс необходимо остановить, поскольку мы получили искомое решение: $q_T = q_n$.

Второе условие $J'q_n \neq 0$ означает, что мы не попадаем на минимум функционала.

Метод наискорейшего спуска. Параметр α_n выбирается из условия минимума по α выражения:

$$\begin{aligned} J(q_{n+1}) &= J(q_n - \alpha J'q_n) = \|Aq_n - \alpha AJ'q_n - f\|^2 \\ &= \|Aq_n - f\|^2 - 2\langle Aq_n - f, \alpha AJ'q_n \rangle + \alpha^2 \|AJ'q_n\|^2 \\ &= J(q_n) - \alpha \|J'q_n\|^2 + \alpha^2 \|AJ'q_n\|^2. \end{aligned}$$

Упражнение 2.6.2. Доказать, что минимум достигается в точке

$$\alpha_n = \frac{\|J'q_n\|^2}{2\|AJ'q_n\|^2}.$$

В случае, когда A имеет непрерывный обратный оператор, методы простой итерации, минимальных ошибок и наискорейшего спуска имеют линейную скорость сходимости. Для их реализации требуется минимальный (по сравнению с другими методами, например, методом сопряженных градиентов) объем вычислений на каждую итерацию.

Метод	Параметр спуска α
простой итерации	$\alpha = \text{const} \in (0, \ A\ ^{-2})$
минимальных ошибок	$\alpha_n = 2J(q_n)\ J'q_n\ ^{-2}$
наискорейшего спуска	$\alpha_n = (1/2)\ J'q_n\ ^2\ AJ'q_n\ ^{-2}$

Метод сопряженных градиентов. Сначала задается q_0 и вычисляется $p_0 = J'q_0$. Предположим, что q_n и p_n уже вычислены.

На шаге $n + 1$ сначала вычисляется вспомогательная функция

$$p_n = J'q_n + \|J'q_n\|^2\|J'q_{n-1}\|^{-2}p_{n-1},$$

далее — параметр спуска

$$\alpha_n = \frac{\langle J'q_n, p_n \rangle}{\|Ap_n\|^2},$$

а затем — приближенное решение

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n p_n.$$

Исследование вопросов сходимости градиентных методов. Рассмотрим случай, когда A — линейный непрерывный оператор, а уравнение $Aq = f$ имеет более одного решения. В этом случае можно ввести дополнительные условия на искомое решение, например, потребовать, чтобы решение было минимальным по норме или самым близким к некоторому заданному элементу $q^0 \in Q$.

Определение 2.6.1. *Нормальным* относительно некоторого $q^0 \in Q$ решением уравнения $Aq = f$ назовем то решение $q_n^0 \in Q_f$, которое имеет наименьшее уклонение от q^0 , т. е.

$$\|q_n^0 - q^0\| = \min_{q \in Q_f} \|q - q^0\|.$$

Замечание 2.6.3. Обычно элемент q^0 выбирают с учетом априорной информации об искомом решении.

Рассмотрим задачу нахождения нормального относительно некоторого $q^0 \in Q$ решения уравнения $Aq = f$. Обозначим область значений оператора A через

$$R(A) = A(Q) = \{f \in F : \exists q \in Q, \text{ такой, что } Aq = f\}. \quad (2.6.6)$$

Результаты по сходимости градиентных методов и их устойчивости к погрешностям в правой части, полученные для корректных задач, переносятся и на случай нахождения нормального относительно q^0 решения, если область значений $R(A)$ оператора A замкнута [1].

Если $R(A)$ не замкнуто, то и в случае единственности решения уравнения $Aq = f$ не всякая минимизирующая последовательность будет сходящейся, так как A^{-1} не ограничен. Однако можно показать, что

минимизирующая последовательность, построенная градиентными методами, сходится по функционалу ($J(q_n) \searrow 0$ при $n \rightarrow \infty$) и по норме ($\|q_n - q_n^0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$) к нормальному относительного начального приближения $q^0 = q_0$ решению уравнения $Aq = f$ [1].

Пусть A — линейный непрерывный оператор, не имеющий ограниченного обратного оператора. Предположим, что уравнение

$$Aq = f \quad (2.6.7)$$

имеет решение, но, возможно, неединственное.

Рассмотрим метод простой итерации (в некорректных задачах часто называемый методом Ландвебера) для решения уравнения (2.6.7):

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n, \quad (2.6.8)$$

$$q_0 \in Q, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \alpha = \text{const} \in (0, 1/\|A\|^2).$$

Ограничения на α потребуются при обосновании сходимости.

Лемма 2.6.2. При всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$J(q_n) - J(q_{n+1}) = \alpha \|J' q_n\|^2 - \alpha^2 \|AJ' q_n\|^2. \quad (2.6.9)$$

Доказательство. Распишем подробнее разность $J(q_n) - J(q_{n+1})$ с учетом (2.6.3) и (2.6.8):

$$\begin{aligned} J(q_n) - J(q_{n+1}) &= \|Aq_n - f\|^2 - \|Aq_n - \alpha J' q_n - f\|^2 \\ &= 2\langle Aq_n - f, \alpha J' q_n \rangle - \alpha^2 \|AJ' q_n\|^2 \\ &= \alpha \langle 2A^*(Aq_n - f), J' q_n \rangle - \alpha^2 \|AJ' q_n\|^2 = \alpha \|J' q_n\|^2 - \alpha^2 \|AJ' q_n\|^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Лемма 2.6.3. Пусть $q_T \in Q_f$ — одно из решений (2.6.7). Тогда при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеет место равенство

$$\|q_n - q_T\|^2 - \|q_{n+1} - q_T\|^2 = 4\alpha J(q_n) - \alpha^2 \|J' q_n\|^2. \quad (2.6.10)$$

Доказательство следует из простых равенств

$$\begin{aligned} \|q_n - q_T\|^2 - \|q_n - \alpha J' q_n - q_T\|^2 &= 2\alpha \langle q_n - q_T, J' q_n \rangle - \alpha^2 \|J' q_n\|^2 \\ &= 4\alpha \langle Aq_n - f, Aq_n - f \rangle - \alpha^2 \|J' q_n\|^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь метод наискорейшего спуска:

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J' q_n, \quad q_0 \in Q, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (2.6.11)$$

$$\alpha_n = \arg \min_{\alpha \geq 0} J(q_n - \alpha J' q_n). \quad (2.6.12)$$

Лемма 2.6.4. Последовательность, определяемая формулами (2.6.11), (2.6.12) обладает свойствами

$$J(q_n) - J(q_{n+1}) = \frac{\alpha_n}{2} \|J' q_n\|^2, \quad (2.6.13)$$

$$\alpha_n = \|J' q_n\|^2 / (2\|AJ' q_n\|^2). \quad (2.6.14)$$

Доказательство. Доказать (2.6.14) было предложено читателям в качестве упражнения (см. упражнение 2.6.2). Чтобы показать (2.6.13), подставим в (2.6.9) $\alpha = \alpha_n$ и сделаем очевидные преобразования:

$$\begin{aligned} J(q_n) - J(q_{n+1}) &= \alpha_n (\|J'q_n\|^2 - \alpha_n \|AJ'q_n\|^2) \\ &= \alpha_n \left(\|J'q_n\|^2 - \frac{\|J'q_n\|^2}{2\|AJ'q_n\|^2} \|AJ'q_n\|^2 \right) = \frac{\alpha_n}{2} \|J'q_n\|^2. \end{aligned}$$

□

Лемма 2.6.5. Пусть $q_T \in Q$ — одно из решений задачи (2.6.7). Тогда при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливо равенство

$$\|q_n - q_T\|^2 - \|q_{n+1} - q_T\|^2 = 2\alpha_n (J(q_n) + J(q_{n+1})). \quad (2.6.15)$$

Доказательство. Подставим α_n вместо α в (2.6.10) и воспользуемся формулой (2.6.13):

$$\begin{aligned} \|q_n - q_T\|^2 - \|q_{n+1} - q_T\|^2 &= 4\alpha_n J(q_n) - \alpha_n^2 \frac{2}{\alpha_n} (J(q_n) - J(q_{n+1})) \\ &= 2\alpha_n (J(q_n) + J(q_{n+1})). \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

□

Лемма 2.6.6. Если α_n выбрано из условия (2.6.12), то при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\|A\|^2} \leq \alpha_n. \quad (2.6.17)$$

Доказательство. Неравенство (2.6.17) следует из (2.6.14) и определения нормы оператора:

$$\alpha_n = \frac{\|J'q_n\|^2}{2\|AJ'q_n\|^2} \geq \frac{\|J'q_n\|^2}{2\|A\|^2\|J'q_n\|^2} = \frac{1}{2\|A\|^2}.$$

□

Теорема 2.6.2. Если решение задачи $Aq = f$ существует и единственно, то последовательность приближенных решений (2.6.11), (2.6.12), полученная методом наискорейшего спуска, сходится к точному решению q_T уравнения $Aq = f$.

Доказательство. Из лемм 2.6.4 и 2.6.5 следует, что

$$0 < J(q_{n+1}) < J(q_n), \quad (2.6.18)$$

$$0 < \|q_{n+1} - q_T\| < \|q_n - q_T\|, \quad (2.6.19)$$

т. е. последовательности $\{J(q_n)\}$, $\{\|q_n - q_T\|\}$ положительны и монотонно убывают, а значит, имеют предел.

Суммируем неравенство (2.6.15) по $n = \overline{0, k}$:

$$\|q_0 - q_T\|^2 - \|q_{k+1} - q_T\|^2 = 2 \sum_{n=0}^k \alpha_n (J(q_n) + J(q_{n+1})). \quad (2.6.20)$$

Поскольку последовательность $\{\|q_n - q_T\|\}$ имеет предел, из (2.6.20) следует, что для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$2 \sum_{n=0}^k \alpha_n (J(q_n) + J(q_{n+1})) \leq C,$$

где C — некоторая константа. С другой стороны, ввиду (2.6.17)

$$2 \sum_{n=0}^k \alpha_n (J(q_n) + J(q_{n+1})) \geq \frac{1}{\|A\|} \sum_{n=0}^k (J(q_n) + J(q_{n+1})) \geq \frac{2}{\|A\|} \sum_{n=0}^{k+1} J(q_n).$$

Следовательно, $\sum_{n=0}^k J(q_n) \leq C$ для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} J(q_n) < \infty. \quad (2.6.21)$$

Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} J(q_n) = 0$ и $\{q_n\}$ — минимизирующая последовательность.

Из (2.6.19) следует монотонность убывания последовательности $\{\|q_n - q_T\|\}$, а значит, ограниченность последовательности $\{q_n\}$. Поэтому существуют подпоследовательность $\{q_{n_k}\}$, $k \in \mathbb{N}$, и $q_c \in Q$, такие, что для всех $q \in Q$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle q, q_{n_k} \rangle = \langle q, q_c \rangle$.

Заметим, что из непрерывности A следует его слабая непрерывность. Действительно, для любого $\varphi \in F$ $A^* \varphi = w \in R(A^*) \subset Q$. Значит, $\langle q_{n_k}, w \rangle = \langle Aq_{n_k}, \varphi \rangle$ и $\langle w, q_c \rangle = \langle \varphi, Aq_c \rangle$. Следовательно, последовательность $\{Aq_{n_k}\}$, $k \in \mathbb{N}$, сходится слабо к Aq_c . Но $\{q_{n_k}\}$, $k \in \mathbb{N}$, также является минимизирующей последовательностью, т. е. $\{Aq_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится сильно (а значит, и слабо) к f . Поэтому $Aq_c = f$ и в силу единственности решения задачи $Aq = f$ заключаем, что $q_c = q_T$. Следовательно, теорема 2.6.2 доказана. \square

Более полный анализ рассмотренных и других градиентных методов содержится в [1].

2.7. Оценка скорости сходимости по функционалу

В этом разделе мы оценим скорость сходимости метода наискорейшего спуска по функционалу. Обратной задаче

$$Aq = f \quad (2.7.1)$$

сопоставим целевой функционал

$$J(q) = \|Aq - f\|^2. \quad (2.7.2)$$

Лемма 2.7.1. Пусть Q и F — гильбертовы пространства, $A : Q \rightarrow F$ — линейный ограниченный оператор. Тогда при всех $q, \delta q \in Q$

$$|J(q + \delta q) - J(q) - \langle \delta q, J'q \rangle| \leq \|A\|^2 \|\delta q\|^2. \quad (2.7.3)$$

Доказательство. Воспользовавшись определением функционала $J(q)$ и леммой 2.6.1 (в линейном случае), преобразуем выражение

$$\begin{aligned} & J(q + \delta q) - J(q) - \langle \delta q, J'q \rangle \\ &= \|Aq + A\delta q - f\|^2 - \|Aq - f\|^2 - \langle A\delta q, 2(Aq - f) \rangle \\ &= \langle Aq - f + A\delta q, Aq - f + A\delta q \rangle - \|Aq - f\|^2 - \langle A\delta q, 2(Aq - f) \rangle \\ &= \langle Aq - f, Aq - f \rangle + \langle A\delta q, Aq - f \rangle + \langle Aq - f, A\delta q \rangle + \|A\delta q\|^2 \\ &\quad - \|Aq - f\|^2 - \langle A\delta q, 2(Aq - f) \rangle = \|A\delta q\|^2, \end{aligned}$$

откуда следует требуемое неравенство (2.7.3). \square

Рассмотрим метод наискорейшего спуска

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'q_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad q_0 \in Q, \quad (2.7.4)$$

в котором параметр спуска определяется по правилу

$$\alpha_n = \arg \min_{\alpha \geq 0} J(q_n - \alpha J'q_n). \quad (2.7.5)$$

Теорема 2.7.1 (о сходимости по функционалу метода наискорейшего спуска). Пусть Q и F — гильбертовы пространства, а A — линейный ограниченный оператор. Предположим, что для некоторого $f \in F$ существует решение $q_T \in Q$ уравнения (2.7.1). Тогда последовательность $\{q_n\}$, определяемая равенствами (2.7.4), (2.7.5), сходится по функционалу к нулю (т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} J(q_n) = 0$) и верна оценка

$$J(q_n) \leq \frac{\|A\|^2 \|q_0 - q_T\|^2}{n}. \quad (2.7.6)$$

Доказательство. Подставив $q = q_n$, $\delta q = -\alpha J'q_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$) в (2.7.3), получим

$$|J(q_n - \alpha J'q_n) - J(q_n) + \alpha \|J'q_n\|^2| \leq \|A\|^2 \alpha^2 \|J'q_n\|^2. \quad (2.7.7)$$

Из (2.7.7) следует

$$J(q_n - \alpha J'q_n) - J(q_n) \leq \alpha(\alpha \|A\|^2 - 1) \|J'q_n\|^2. \quad (2.7.8)$$

По определению α_n , для всех $\alpha > 0$ выполняется неравенство

$$J(q_{n+1}) = J(q_n - \alpha_n J'q_n) \leq J(q_n - \alpha J'q_n).$$

Следовательно, (2.7.8) можно переписать в виде

$$J(q_{n+1}) - J(q_n) \leq J(q_n - \alpha J'q_n) - J(q_n) \leq \alpha(\alpha \|A\|^2 - 1) \|J'q_n\|^2,$$

откуда

$$\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)\|J'q_n\|^2 \leq J(q_n) - J(q_{n+1}), \alpha > 0. \quad (2.7.9)$$

Правая часть (2.7.9) не зависит от α . Следовательно, неравенство (2.7.9) выполнено для всех α и, в частности, для $\alpha = 1/(2\|A\|^2)$. Тогда из (2.7.9) следует, что

$$J(q_{n+1}) + \frac{1}{4\|A\|^2} \|J'q_n\|^2 \leq J(q_n). \quad (2.7.10)$$

Из (2.7.10) заключаем, что $0 < J(q_{n+1}) < J(q_n)$. Убывающая и ограниченная снизу последовательность $\{J(q_n)\}$ имеет предел.

Но тогда из (2.7.10) следует, что последовательность $\{\|J'q_n\|^2\}$ имеет предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|J'q_n\|^2 = 0. \quad (2.7.11)$$

В силу очевидных равенств

$$\begin{aligned} J(q_n) &= \langle Aq_n - f, Aq_n - f \rangle = \langle A(q_n - q_T), A(q_n - q_T) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle q_n - q_T, 2A^*A(q_n - q_T) \rangle = \frac{1}{2} \langle J'q_n, q_n - q_T \rangle, \end{aligned}$$

получаем

$$J(q_n) \leq \frac{1}{2} \|J'q_n\| \|q_0 - q_T\|, \quad (2.7.12)$$

откуда, ввиду (2.7.11), заключаем $\lim_{n \rightarrow \infty} J(q_n) = 0$.

Из неравенства (2.7.12) следует

$$\frac{2J(q_n)}{\|q_0 - q_T\|} \leq \|J'q_n\|. \quad (2.7.13)$$

Но тогда из (2.7.10) вытекает

$$\frac{J^2(q_n)}{\|A\|^2 \|q_0 - q_T\|^2} \leq J(q_n) - J(q_{n+1}). \quad (2.7.14)$$

Для получения оценки (2.7.6) сформулируем и докажем лемму, более общий вариант которой можно найти в [2.6].

Лемма 2.7.2. *Предположим, что элементы последовательности a_0, a_1, a_2, \dots положительны и удовлетворяют условиям:*

$$\frac{a_{n-1}^2}{B} \leq a_{n-1} - a_n, \quad B = \text{const} > 0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2.7.15)$$

Тогда при всех $k \in \mathbb{N}$

$$a_k < \frac{B}{k}. \quad (2.7.16)$$

Доказательство. Заметим, что последовательность $\{a_n\}$ убывающая. Разделим (2.7.15) на $a_n a_{n-1}$:

$$0 < \frac{a_{n-1}}{B a_n} \leq \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}.$$

Учитывая убывание последовательности, получаем

$$\frac{1}{B} \leq \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}.$$

Тогда, суммируя полученное неравенство по n от единицы до k , приходим к оценке

$$\frac{k}{B} \leq \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \right) = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_0} < \frac{1}{a_k},$$

откуда и следует (2.7.16). Лемма доказана. \square

Для завершения доказательства теоремы 2.7.1, точнее оценки (2.7.6), остается только применить к последовательности $\{J(q_n)\}$ лемму 2.7.2, используя в качестве (2.7.15) неравенство (2.7.14). \square

Теорема 2.7.2 (о сходимости по функционалу метода простой итерации). Пусть Q и F — гильбертовы пространства, A — линейный ограниченный оператор. Предположим, что для некоторого $f \in F$ существует точное решение q_T уравнения $Aq = f$. Тогда при любом $q_0 \in Q$ и $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$ последовательность $\{q_n\}$, определяемая равенствами

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n, \quad q_0 \in Q, \quad (2.7.17)$$

сходится по функционалу и верна оценка

$$J(q_n) \leq \frac{\|q_0 - q_T\|^2}{n\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)}. \quad (2.7.18)$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. В самом деле, из неравенств (2.7.9) и (2.7.13) следует

$$\frac{\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)}{\|q_0 - q_T\|^2} J^2(q_n) \leq J(q_n) - J(q_{n+1}). \quad (2.7.19)$$

Полагая в лемме 2.7.1

$$a_n = J(q_n), \quad B = \frac{\|q_0 - q_T\|^2}{\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)},$$

получим требуемую оценку (2.7.18).

2.8. Оценка условной устойчивости и сильная сходимость градиентных методов решения некорректных задач

Теорема А. Н. Тихонова гарантирует непрерывность оператора $A^{-1} : A(M) \rightarrow M$ при условии, что $M \subset Q$ — компакт, а оператор $A : Q \rightarrow F$ непрерывен и взаимно однозначно отображает M в $A(M)$. М. М. Лаврентьев ввел понятие условной корректности задачи $Aq = f$ и обратил внимание на то, что для условно-корректных задач из теоремы А. Н. Тихонова следует существование модуля непрерывности оператора A^{-1} на множестве $A(M)$ (см. определение 2.2.1), т. е. функции $\omega(A(M), \delta)$.

Если для оператора A известен вид функции $\omega(\delta, A(M))$ или ее мажоранты, то можно получить оценку условной устойчивости условно-корректной задачи $Aq = f$. В качестве примера рассмотрим две известные некорректные задачи (подробный анализ этих задач содержится в разделах с соответствующими названиями).

Пример 2.8.1. (подробнее см. главу 8). Рассмотрим задачу Коши для параболического уравнения с обратным временем:

$$\begin{aligned} u_t &= -u_{xx}, & x \in (0, 1), & \quad t \in (0, T), & \quad T > 0; \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in (0, 1); \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, & t \in (0, T). \end{aligned}$$

Пусть $u_T(x, t)$ — точное решение этой задачи. Если обозначить через $u_\delta(x, t)$ решение возмущенной задачи

$$\begin{aligned} u_t &= -u_{xx}, & x \in (0, 1), & \quad t \in (0, T); \\ u(x, 0) &= f_\delta(x), & x \in (0, 1); \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, & t \in (0, T); \end{aligned}$$

то из условий $\|u_T(\cdot, T)\|_{L_2(0,1)} \leq C$, $\|u_\delta(\cdot, T)\|_{L_2(0,1)} \leq C$, $\|f - f_\delta\|_{L_2(0,1)} \leq \delta$ следует

$$\|u_T(\cdot, t) - u_\delta(\cdot, t)\|_{L_2(0,1)} \leq (2C)^{t/T} \delta^{(T-t)/T}, \quad t \in (0, T).$$

Пример 2.8.2. (подробнее см. главу 9). Задача Коши для уравнения Лапласа имеет вид

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x > 0, y \in R; \quad (2.8.1)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in R; \quad (2.8.2)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad y \in R. \quad (2.8.3)$$

Ограничимся рассмотрением области $(x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, добавляя граничные условия

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (2.8.4)$$

Задача нахождения $u(x, y)$ в Ω будет решена, если найти след $u(x, y)$ при $x = 1$, а именно,

$$q(y) = u(1, y), \quad y \in (0, 1). \quad (2.8.5)$$

В самом деле, зная $q(y)$, можно решить корректную задачу Дирихле для уравнения Лапласа (2.8.1), (2.8.2), (2.8.4), (2.8.5), и найти точное решение $u_T(x, y)$ исходной задачи в Ω .

Предположим, что существует точное решение u_T задачи (2.8.1)–(2.8.4), которое имеет след (2.8.5) и $\|q\|_{L_2(0,1)} < C$. Тогда, если u_δ — решение возмущенной задачи ($\|f - f_\delta\|_{L_2(0,1)} \leq \delta$)

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & x \in (0, 1), & \quad y \in (0, 1); \\ u(0, y) &= f_\delta(y), & u_x(0, y) &= 0, & \quad y \in (0, 1); \\ u(x, 0) &= u(x, 1) = 0, & x &\in (0, 1); \end{aligned}$$

и при этом $q_\delta(y) = u_\delta(1, y)$ удовлетворяет оценке $\|q_\delta\|_{L_2(0,1)} \leq C$, то

$$\|u_T(x, \cdot) - u_\delta(x, \cdot)\|_{L_2(0,1)} \leq (2C)^x \delta^{1-x}, \quad x \in (0, 1).$$

Определение 2.8.1. Будем говорить, что для условно-корректной задачи $Aq = f$ получена оценка условной устойчивости на множестве корректности M , если найдена возрастающая вещественная функция $\beta(\delta)$, такая, что

- 1) $\lim_{\delta \rightarrow +0} \beta(\delta) = 0$;
- 2) для любых $f \in A(M)$, $f_\delta \in A(M)$, удовлетворяющих оценке $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, справедливо неравенство

$$\|q_T - q_\delta\| \leq \beta(\delta),$$

где $q_T \in M$ — решение уравнения $Aq = f$, а $q_\delta \in M$ — решение уравнения $Aq = f_\delta$.

Сильная сходимость метода наискорейшего спуска. Если оценка условной устойчивости $\beta(\delta)$ получена на множестве корректности

$$M = \{q \in Q : \|q\| \leq C\},$$

то из оценки скорости сходимости по функционалу можно вывести оценку скорости сильной сходимости градиентных методов. Рассмотрим, например, метод наискорейшего спуска

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J' q_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad q_0 \in Q, \quad (2.8.6)$$

$$\alpha_n = \arg \min_{\alpha \geq 0} J(q_n - \alpha J' q_n). \quad (2.8.7)$$

Теорема 2.8.1 (оценка скорости сильной сходимости метода наискорейшего спуска). Пусть $A : Q \rightarrow F$ — линейный непрерывный оператор, Q и F — гильбертовы пространства. Предположим, что для $f \in F$ существует решение $q_T \in Q$ задачи $Aq = f$ и что на множестве

$$M = \{q \in Q : \|q\| \leq 2\|q_T\|\}$$

получена оценка условной устойчивости $\beta(\delta)$. Тогда, если $\|q_T - q_0\| \leq \|q_T\|$, то имеет место оценка

$$\|q_T - q_n\| \leq \beta \left(\frac{\|A\| \|q_T - q_0\|}{\sqrt{n}} \right). \quad (2.8.8)$$

Доказательство. Из (2.6.19) и условий теоремы следует

$$\|q_T - q_n\| \leq \|q_T - q_0\| \leq \|q_T\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Значит,

$$\|q_n\| \leq 2\|q_T\|, \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е. $q_n \in M$.

В силу существования точного решения $q_T \in M$ уравнения $Aq = f$ получаем

$$J(q_n) = \|Aq_n - f\|^2 = \|Aq_n - Aq_T\|^2.$$

По теореме 2.7.1

$$\|Aq_n - Aq_T\|^2 \leq \frac{\|A\|^2 \|q_T - q_0\|^2}{n}.$$

По определению 2.8.1 оценки условной устойчивости из последнего неравенства вытекает (2.8.8). \square

Теорема 2.8.2. При выполнении условий теоремы 2.8.1 метод простой итерации (2.6.8) сходится со скоростью

$$\|q_T - q_n\| \leq \beta \left(\frac{\|q_T - q_0\|}{\sqrt{\alpha n} \sqrt{1 - \alpha \|A\|^2}} \right).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.8.1.

Замечание 2.8.1. Оценка условной устойчивости может быть получена, если предположить, что точное решение *истокопредставимо*, т. е. представимо в виде $q_T = Bv$, где B — достаточно хороший оператор, а v принадлежит некоторому шару. Поясним сказанное на простейшем примере. Пусть

$$M = \{q \in Q : q = Av, \|v\| \leq c\}.$$

Пусть A — самосопряженный компактный линейный оператор, $F = Q$ и $\{\lambda_n, \varphi_n\}$ — последовательность собственных значений и ортонормированных собственных функций оператора A . Тогда

$$q = \sum_k q_k \varphi_k, \quad f = Aq = \sum_k q_k \lambda_k \varphi_k,$$

$$v = \sum_k v_k \varphi_k, \quad f = AA v = \sum_k \lambda_k^2 v_k \varphi_k.$$

Здесь $q_k = \langle q, \varphi_k \rangle$, $v_k = \langle v, \varphi_k \rangle$. Тогда, если $q = Av$, $\|v\| \leq c$ и $\|f\| \leq \delta$, то

$$\|q\|^2 = \|Av\|^2 = \sum_k v_k^2 \lambda_k^2 \leq \sum_k |v_k| |v_k| \lambda_k^2$$

$$\leq \sqrt{\sum_k v_k^2} \sqrt{\sum_k v_k^2 \lambda_k^4} = \|v\| \|f\| \leq c\delta,$$

т. е.

$$\|q\| \leq \sqrt{c\delta}.$$

В более общем случае [2.4] множество корректности можно выбрать в виде

$$M_{pp} = \{q \in Q : q = (A^* A)^{p/2} v, v \in Q : \|v\| \leq \rho\}, \quad p > 0, \quad \rho > 0.$$

Тогда модуль непрерывности оператора A на M_{pp}

$$\omega(\delta, M_{pp}) = \sup_{q \in M_{pp}, \|Aq\| \leq \delta} \|q\|$$

можно оценить сверху, т. е. получить оценку условной устойчивости

$$\omega(\delta, M_{pp}) \leq \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}.$$

Регуляризирующие свойства градиентных методов. Предположим теперь, что все условия теоремы 2.8.2 выполнены, но функция f задана приближенно, причем приближение $f_\delta \in F \cap O(f, \delta)$ может не лежать в $A(M)$. Покажем, что при согласованном стремлении δ к нулю, а $n \rightarrow \infty$, можно получить приближение точного решения q_T с любой заданной точностью. Задачу минимизации функционала

$$J_\delta(q) = \|Aq - f_\delta\|^2 \quad (2.8.9)$$

будем решать методом простой итерации:

$$q_{\delta n+1} = q_{\delta n} - \alpha J' q_{\delta n}, \quad q_{\delta 0} = q_0, \quad (2.8.10)$$

$$\alpha \in \left(0, \frac{1}{2\|AA^*\|}\right) \quad (2.8.11)$$

(несколько усилив условие на параметр α). Исследуем, насколько может возрасти с ростом числа итераций n разность между $q_{\delta n+1}$ и q_{n+1} , где q_{n+1} вычислено по алгоритму метода простой итерации с точными

данными ($q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n$), но с тем же начальным приближением q_0 . Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} q_{n+1} - q_{\delta n+1} &= q_n - q_{\delta n} - \alpha J' q_n + \alpha J' q_{\delta n} = q_n - q_{\delta n} - \alpha (J' q_n - J' q_{\delta n}) \\ &= (I - \alpha 2A^* A)(q_n - q_{\delta n}) + 2\alpha A^* (f - f_{\delta}). \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

В силу (2.8.11) получаем из (2.8.12)

$$\|q_{n+1} - q_{\delta n+1}\| \leq \|q_n - q_{\delta n}\| + 2\alpha \|A^*\| \delta.$$

Но тогда

$$\|q_{n+1} - q_{\delta n+1}\| \leq \|q_1 - q_{\delta 1}\| + 2\alpha n \|A^*\| \delta. \quad (2.8.13)$$

Поскольку оба процесса начинаются с одного и того же начального приближения, имеем

$$\|q_1 - q_{\delta 1}\| \leq 2\alpha \|A^*\| \delta. \quad (2.8.14)$$

Но тогда из (2.8.13) и (2.8.14) следует, что

$$\|q_n - q_{\delta n}\| \leq \beta_2(n) \delta, \quad \forall n \in N, \quad (2.8.15)$$

где

$$\beta_2(n) = 2\alpha n \|A^*\| \delta. \quad (2.8.16)$$

Полученные оценки позволяют доказать следующее утверждение:

Теорема 2.8.3 (о регуляризирующих свойствах метода простой итерации). Пусть $A : Q \rightarrow F$ — линейный непрерывный оператор, Q и F — гильбертовы пространства. Предположим, что для $f \in F$ существует решение $q_T \in Q$ задачи $Aq = f$, а на множестве

$$M = \{q \in Q : \|q\| \leq 2\|q_T\|\}$$

найдена оценка условной корректности $\beta(\delta)$. Тогда при выполнении условий

$$\|q_T - q_0\| \leq \|q_T\|, \quad (2.8.17)$$

$$\|f - f_{\delta}\| \leq \delta \quad (2.8.18)$$

последовательность $q_{\delta, n}$ метода простой итерации (2.8.10), (2.8.11) удовлетворяет оценке

$$\|q_T - q_{\delta n}\| \leq \beta \left(\frac{\|q_T - q_0\|}{\sqrt{\alpha n} \sqrt{1 - \alpha \|A\|^2}} \right) + 2\alpha n \|A^*\| \delta. \quad (2.8.19)$$

Доказательство. Пусть $\{q_n\}$ — последовательность метода простой итерации построенная по точным данным, но с тем же начальным приближением q_0 . Тогда

$$\|q_T - q_{\delta n}\| \leq \|q_T - q_n\| + \|q_n - q_{\delta n}\|.$$

Первое слагаемое оценивается по теореме 2.8.2, а второе — с помощью оценки (2.8.15). \square

Замечание 2.8.2. Оценка (2.8.19) показывает, что последовательность $\{q_{\delta,n}\}$ метода простой итерации является регуляризирующей с параметром регуляризации n . Действительно, перепишем (2.8.19) в виде

$$\|q_{\Gamma} - q_{\delta n}\| \leq \beta_1(n) + \delta\beta_2(n), \quad (2.8.20)$$

где

$$\beta_1(x) = \beta\left(\frac{\|q_{\Gamma} - q_0\|}{\sqrt{\alpha x} \sqrt{1 - \alpha\|A\|^2}}\right), \quad \beta_2(x) = 2\alpha\|A^*\|x.$$

Поскольку $\beta_1(n)$ монотонно стремится к нулю, а $\beta_2(n)$ монотонно стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$, то номер остановки n_* итерационного процесса можно выбрать в окрестности точки x_* , которая является решением уравнения

$$\beta_1'(x) + \delta\beta_2'(x) = 0.$$

Замечание 2.8.3. Оценка (2.8.20) иллюстрирует и объясняет хорошо известный на практике эффект применения градиентных методов к решению некорректных задач с приближенными данными. Замечено, что на первых шагах итерационного процесса $q_{\delta n}$ приближается к точному решению, т. е. величина $\|q_{\delta n} - q_{\Gamma}\|$ уменьшается, но затем с ростом n величина $\|q_{\delta n} - q_{\Gamma}\|$ может начать расти. В самом деле, если для f_{δ} решение задачи $Aq = f_{\delta}$ существует, то работает оценка (2.8.8). Но если для f_{δ} нет решения, то теорема 2.8.1 теряет силу и начинается накопление погрешности с ростом n , функция $\beta_2(n)$ растет и после перехода n через $x_* = x_*(\delta)$ правая часть оценки (2.8.20) может неограниченно расти.

Упражнение 2.8.1. Исследовать на выпуклость функцию $\beta(x) = \beta_1(x) + \beta_2(x)$.

Замечание 2.8.4. Более подробный анализ метода содержится в [19].

Отметим, что если известна какая-либо оценка снизу оператора A , например, постоянная $m > 0$, такая, что при всех $q \in Q$ выполнено неравенство

$$m\langle q, q \rangle \leq \langle Aq, q \rangle,$$

то оценки и слабой, и сильной сходимости градиентных методов можно существенно улучшить [2.4, 2.14]. Нас же, напротив, интересует вопрос о сильной сходимости в случае сильной некорректности (оценку скорости сходимости по функционалу мы уже получили в теоремах 2.7.1, 2.7.2, поскольку линейный компактный оператор удовлетворяет условию этих теорем). Рассмотрим уже знакомый нам пример

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.8.21)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (2.8.22)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in (0, 1), \quad (2.8.23)$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (2.8.24)$$

В примере 2.5 было отмечено, что для решения этой задачи достаточно найти функцию $q(y)$, такую, что

$$u(1, y) = q(y), \quad (2.8.25)$$

а затем решить корректную задачу (2.8.21), (2.8.22), (2.8.24) и (2.8.25) (доказательство корректности данной задачи проведено в разделе 7.3). Другими словами, достаточно решить операторное уравнение

$$Aq = f. \quad (2.8.26)$$

Свойства оператора A подробно изучены в главе 9. В частности, показано, что $A : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$, $\|A\| \leq 1$. Там же получена оценка условной устойчивости задачи, которую в силу линейности оператора A можно записать в виде

$$\int_0^1 u^2(x, y) dy \leq \left(\int_0^1 f^2(y) dy \right)^{1-x} \left(\int_0^1 q^2(y) dy \right)^x, \quad x \in (0, 1). \quad (2.8.27)$$

Главное отличие от определения 2.8.1 оценки условной устойчивости заключается в том, что оценка (2.8.27) зависит от параметра x .

Тем не менее, она может быть использована для оценивания скорости сильной сходимости, правда, не самого градиентного метода (например, простой итерации)

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n, \quad \alpha \in (0, \|A\|^{-2}), \quad (2.8.28)$$

а порожденного этим методом итерационного процесса приближенного вычисления $u_n(x, y)$. Поясним изложенное более подробно. Предположим, что, решая операторное уравнение (2.8.26) методом (2.8.28), мы построим n -ое приближение $q_n(y) \in L_2(0, 1)$. В силу (2.7.7)

$$\|q - q_T\| \leq \|q_{n-1} - q_T\| \leq \dots \leq \|q_0 - q_T\|. \quad (2.8.29)$$

По теореме 2.7.2 заключаем, что

$$J(q_n) = \|Aq_n - f\|^2 \leq \frac{\|q_0 - q_T\|}{n\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)}.$$

Но $Aq_n = u_n(0, y)$, где $u_n(x, y)$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u_x(0, y) &= 0, & y \in (0, 1), \\ u(1, y) &= q_n(y), & y \in (0, 1), \\ u(x, 0) &= u(x, 1) = 0. \end{aligned} \quad (2.8.30)$$

В разделе 9.3 доказано, что решение $u_n(x, y)$ задачи (2.8.30) существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$\|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \sqrt{2} \|q_n\|_{L_2(0,1)}^2.$$

Более того, существует след $u_n(0, y) = f_n(y)$ этого решения, который удовлетворяет оценке

$$\|f_n\|_{L_2(0,1)} \leq \|q_n\|_{L_2(0,1)}.$$

В силу линейности рассматриваемой задачи, из оценки условной устойчивости (2.8.27) вытекает

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [u_n(x, y) - u_\tau(x, y)]^2 dy \\ & \leq \left(\int_0^1 [Aq_n - Aq_\tau]^2 dy \right)^{1-x} \left(\int_0^1 [q_n(y) - q_\tau(y)]^2 dy \right)^x, \quad x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Здесь u_τ — точное решение задачи (2.8.21)–(2.8.24).

В силу (2.8.29) заключаем, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [u_n(x, y) - u_\tau(x, y)]^2 dy \\ & \leq \left(\int_0^1 [Aq_n - f(y)]^2 dy \right)^{1-x} \|q_n - q_\tau\|^{2x}, \quad x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Теперь осталось применить теорему 2.7.2:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [u_n(x, y) - u_\tau(x, y)]^2 dy & \leq \frac{\|q_0 - q_\tau\|^{2-2x}}{[n\alpha(1-\alpha)\|A\|^2]^{1-x}} \|q_0 - q_\tau\|^{2x} \\ & = \frac{\|q_0 - q_\tau\|^2}{[n\alpha(1-\alpha)\|A\|^2]^{1-x}}, \quad x \in (0, 1). \end{aligned} \quad (2.8.31)$$

Итак, мы убедились, что оценка условной устойчивости (2.8.27) позволяет оценить скорость сильной сходимости, но не самого градиентного метода $q_{n+1} = q_n - \alpha_n J' q_n$, а итерационного процесса, им порожденного. Отметим, что при $x \rightarrow 1$ слева оценка (2.8.31) принимает вид

$$\|q_n - q_\tau\|^2 \leq \|q_0 - q_\tau\|^2.$$

Это напоминает о том, что предположение об ограниченности q_τ по норме не является достаточным для оценки скорости сходимости $\|q_n - q_\tau\|$. В этом случае можно усилить требование гладкости q_τ , либо предположить, что q_τ истокопредставимо [2.1, 2.2, 2.4, 2.38] или множество корректности компактно.

2.9. Псевдообратный оператор и сингулярное разложение оператора

В данном разделе мы изучим два важнейших (и взаимосвязанных) понятия — псевдообратный оператор и сингулярное разложение линейного оператора, которые были заимствованы из соответствующих разделов линейной алгебры (см. работы С. К. Годунова, В. В. Восводина, Z. Nashed и других в списке дополнительной и основной литературы) и позволяют наиболее детально и полно изучить особенности линейных некорректных задач и численные методы их решения. Результаты данного раздела можно рассматривать как обобщение соответствующих разделов главы 3 на общий случай сепарабельных гильбертовых пространств.

Любой непрерывный линейный оператор $A: Q \rightarrow F$, действующий из гильбертова пространства Q в гильбертово пространство F , порождает разложение пространств в прямые ортогональные суммы

$$\begin{aligned} Q &= N(A) \oplus N(A)^\perp = N(A) \oplus \overline{R(A^*)}, \\ F &= N(A^*) \oplus N(A^*)^\perp = N(A^*) \oplus \overline{R(A)}, \end{aligned}$$

где A^* — сопряженный к A оператор, $N(A)$ и $N(A^*)$ — ядра операторов A и A^* , $R(A)$ и $R(A^*)$ — образы операторов A и A^* , соответственно. Это разложение индуцирует пару ортогональных проекторов $P_{N(A)}$ и $P_{\overline{R(A)}}$, таких, что

$$\begin{aligned} P_{N(A)} : Q &\rightarrow Q, & R(P_{N(A)}) &= N(A); \\ P_{\overline{R(A)}} : F &\rightarrow F, & R(P_{\overline{R(A)}}) &= \overline{R(A)}. \end{aligned}$$

В свою очередь эта пара ортогональных проекторов единственным образом определяет псевдообратный оператор A^\dagger , который в данном случае называется также ортогональным обобщенным обратным, или обобщенным обратным оператором, и определяется соотношениями [2.54, 2.40]:

$$D(A^\dagger) = R(A) \oplus N(A^*), \quad (2.9.1)$$

$$AA^\dagger f = P_{\overline{R(A)}} f \quad \text{для всех } f \in D(A^\dagger), \quad (2.9.2)$$

$$A^\dagger Aq = (I - P_{N(A)})q \quad \text{для всех } q \in Q. \quad (2.9.3)$$

Псевдообратный оператор плотно определен в F и представляется на своей области определения в виде

$$A^\dagger = (A|_{R(A^*)})^{-1} P_{\overline{R(A)}},$$

где $A|_{R(A^*)}$ есть сужение оператора A на линейное многообразие $R(A^*)$. Причем A^\dagger является непрерывным на всем F тогда и только тогда, когда $\overline{R(A)} = R(A)$.

Псевдообратный оператор выделяется из всех других обобщенных обратных тем, что он тесно связан с псевдорешениями операторного уравнения

$$Aq = f. \quad (2.9.4)$$

Определение 2.9.1. Элемент $q_{\text{п}} \in Q$ называется *псевдорешением* уравнения $Aq = f$ (или решением в смысле наименьших квадратов), если

$$\|Aq_{\text{п}} - f\|^2 = \inf_{q \in Q} \|Aq - f\|^2.$$

Другими словами, $q_{\text{п}} = \arg \min_{q \in Q} \|Aq - f\|^2$.

Если при фиксированном $f \in F$ через $Q_f^{\text{п}}$ обозначить множество всех псевдорешений уравнения $Aq = f$, то

$$Q_f^{\text{п}} = \{q_{\text{п}} : \|Aq_{\text{п}} - f\| = \inf_{q \in Q} \|Aq - f\|\} = \{q : Aq = P_{R(A)} f\},$$

откуда следует, что $Q_f^{\text{п}}$ не пусто тогда и только тогда, когда $f \in R(A) \oplus N(A^*)$. В этом случае $Q_f^{\text{п}}$ есть выпуклое замкнутое множество и $Q_f^{\text{п}}$ содержит в себе элемент минимальной длины $q_{\text{нп}}$ — псевдорешение минимальной нормы [2.54], называемое также *нормальным* (относительно нулевого элемента) *псевдорешением* уравнения $Aq = f$. Связь $q_{\text{нп}}$ и псевдообратного оператора дается следующей теоремой [2.54].

Теорема 2.9.1. Уравнение $Aq = f$ имеет псевдорешение минимальной нормы $q_{\text{нп}}$ тогда и только тогда, когда $f \in R(A) \oplus N(A^*)$. При этом $q_{\text{нп}} = A^\dagger f$, где A^\dagger — псевдообратный оператор, определяемый соотношениями (2.9.1)–(2.9.3).

Задачи $Aq = f$ с компактным линейным оператором A составляют один из наиболее важных и интересных классов некорректных задач. Достаточно отметить, что к таким задачам относятся интегральные уравнения первого рода при достаточно общих предположениях относительно ядра. Наиболее естественным методом исследования (а зачастую и численного решения!) таких задач является метод сингулярного разложения, к знакомству с которым мы переходим.

Пусть сначала A — линейный компактный самосопряженный ($A = A^*$) оператор. И пусть для A существует собственная система $\{\lambda_n, \varphi_n\}$, которая состоит из ненулевых собственных значений $\{\lambda_n\}$ и полной ортогональной последовательности соответствующих собственных векторов $\{\varphi_n\}$ (т. е. таких, что $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$), с помощью которых оператор A может быть “диагонализирован”, т. е. представлен в виде

$$Aq = \sum_n \lambda_n \langle q, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

для всех $q \in Q$.

Если же оператор $A : Q \rightarrow F$ не является самосопряженным, но является линейным и компактным, а пространства Q и F гильбертовы и сепарабельны, то, используя связь между уравнением $Aq = f$ и *нормальным по отношению к нему уравнением* $A^*Aq = A^*f$, можно построить аналог собственной системы $\{\lambda_n, \varphi_n\}$, который будем называть сингулярной системой $\{\sigma_n, u_n, v_n\}$ оператора A . Сначала приведем формальное определение. Пусть $A : Q \rightarrow F$ — линейный компактный оператор, Q и F — сепарабельные (т. е. имеющие счетный базис) гильбертовы пространства. Совокупность $\{\sigma_n, u_n, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n \geq 0$, $u_n \in F$, $v_n \in Q$, будем называть *сингулярной системой оператора A* , если выполняются следующие условия:

- последовательность $\{\sigma_n\}$ состоит из неотрицательных чисел, таких, что $\{\sigma_n^2\}$ — последовательность собственных значений оператора A^*A , расположенных в порядке убывания с учетом кратности;
- последовательность $\{v_n\}$ состоит из соответствующих $\{\sigma_n^2\}$ собственных векторов оператора A^*A (и является ортогональной и полной, $\overline{R(A^*)} = \overline{R(A^*A)}$);
- последовательность $\{u_n\}$ определяется через $\{v_n\}$ по правилу $u_n = Av_n / \|Av_n\|$.

Последовательность $\{u_n\}$ является ортонормированной полной системой собственных векторов оператора AA^* , при этом

$$Av_n = \sigma_n u_n, \quad A^*u_n = \sigma_n v_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и справедливы разложения

$$Aq = \sum_n \sigma_n \langle q, v_n \rangle u_n, \quad A^*f = \sum_n \sigma_n \langle f, u_n \rangle v_n.$$

Бесконечные ряды в разложениях сходятся по норме гильбертовых пространств Q и F , соответственно, и называются *сингулярным разложением оператора A* (по аналогии с сингулярным разложением матрицы, см. главу 3).

Структура образа $R(A)$ и образа сопряженного оператора A^* описываются следующей теоремой [2.52, 2.12].

Теорема 2.9.2 (о сингулярном разложении компактного оператора). *Если $A : Q \rightarrow F$ есть линейный компактный оператор из сепарабельного гильбертова пространства Q в сепарабельное гильбертово пространство F , то существуют ортонормированные последовательности функций $\{v_n\} \subset Q$ (правые сингулярные векторы), $\{u_n\} \subset F$ (левые*

сингулярные векторы) и невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\{\sigma_n\}$ (сингулярные числа), такие, что

$$\overline{\text{span}\{v_n\}} = \overline{R(A^*)} = N(A)^\perp, \quad \overline{\text{span}\{u_n\}} = \overline{R(A)} = N(A^*)^\perp,$$

причем множество $\{\sigma_n\}$ не имеет предельных точек, отличных от нуля.

Отметим еще одно важное свойство, присущее компактным операторам [2.12, 2.14], — отличные от нуля сингулярные числа компактного оператора имеют конечную кратность.

Следствие 2.9.1. Если A — компактный оператор, то:

1. Справедлив критерий Пикара разрешимости задачи $Aq = f$: задача разрешима, т. е. $f \in R(A) \oplus N(A^*)$, в том и только в том случае, если

$$\sum_{\sigma_n \neq 0} \frac{\langle f, u_n \rangle^2}{\sigma_n^2} < \infty.$$

2. Для любого $f \in R(A) \oplus N(A^*)$ элемент

$$A^\dagger f = \sum_{\sigma_n \neq 0} \frac{\langle f, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n$$

есть нормальное псевдорешение уравнения $Aq = f$.

Замечание 2.9.1. Как было отмечено, оператор A^\dagger является ограниченным на всем пространстве F тогда и только тогда, когда его образ $R(A)$ является замкнутым подпространством F . В то же время, образ компактного оператора замкнут тогда и только тогда, когда он имеет конечную сингулярную систему $\{\sigma_n, u_n, v_n\}$. Следовательно, если сингулярная система компактного линейного оператора A бесконечна, то A^\dagger неограничен.

Если $f \in D(A^\dagger)$, то уравнение $Aq = f$ имеет единственное нормальное псевдорешение $q_{\text{нп}} = A^\dagger f$, при этом псевдорешения q_n , и только они, являются решением уравнения $A^* A q = A^* f$, которое называется нормальным по отношению к уравнению $Aq = f$.

Разложение

$$q_{\text{нп}} = A^\dagger f = \sum_n \frac{\langle f, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n$$

показывает, как ошибки в задании данных f влияют на результат $q_{\text{нп}}$: ошибки в задании компонент $f_n = \langle f, u_n \rangle$, соответствующие малым сингулярным числам σ_n , делятся на малое число σ_n и, значит, неограниченно увеличиваются с ростом n . Это позволяет построить пример

Адамара, показывающий неустойчивость задачи $Aq = f$, в которой оператор A линейный и компактный. В самом деле, пусть $q_T \in Q$ — точное решение задачи $Aq = f$, а возмущение в правой части f имеет вид δu_n , $\delta \in \mathbb{R}_+$. Тогда решение $q_{\delta n}$ задачи $Aq = f + \delta u_n$ отличается от точного на величину

$$q_T - q_{\delta n} = \frac{\langle \delta u_n, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n.$$

Но тогда, с одной стороны, ошибка задания правой части $\|f - f_{\delta n}\| = \delta$ не зависит от n и может быть сколь угодно малой. С другой стороны, соответствующая ошибка в решении $\|q_T - q_{\delta n}\| = \delta/\sigma_n$ стремится к бесконечности с ростом n , и тем быстрее, чем быстрее убывает последовательность сингулярных чисел $\{\sigma_n\}$. Таким образом, некорректность задачи $Aq = f$ непосредственно связана с характером убывания σ_n , что позволяет классифицировать некорректные задачи по степени некорректности. Так задачу $Aq = f$ называют *слабо некорректной*, если $\sigma_n = O(n^{-\gamma})$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}_+$, и *сильно некорректной* в других случаях (например, при $\sigma_n = O(e^{-n})$).

Сингулярное разложение оператора A позволяет построить метод регуляризации задачи $Aq = f$, основанный на проектировании:

$$q_{\delta n} = \sum_{j=1}^n \frac{\langle f_{\delta n}, u_j \rangle}{\sigma_j} v_j.$$

Можно показать, что

$$\|q_{\delta n} - q_{\text{нп}}\| = O\left(\sigma_{n+1} + \frac{\delta}{\sigma_n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Введем в рассмотрение системы подпространств и соответствующие им ортогональные проекторы:

$$Q_r = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\} \subset Q,$$

$$P_{Q_r} : Q \rightarrow Q, \quad P_{Q_r}(Q) = Q_r,$$

$$F_r = \text{span}\{u_1, \dots, u_r\} \subset F,$$

$$P_{F_r} : F \rightarrow F, \quad P_{F_r}(F) = F_r,$$

причем номера r выбираются так, чтобы $\lambda_r > \lambda_{r+1}$. Такое ограничение связано с тем, что при $\lambda_r = \lambda_{r+1}$ ортогональные проекторы P_{Q_r} , P_{F_r} определены некорректно в том смысле, что они оказываются зависящими от нумерации сингулярной системы.

Определение 2.9.2. Оператор $A_r^\dagger = A^\dagger P_{F_r} : F \rightarrow Q$ называется *r -псевдообратным оператором*, а элемент

$$q(r) = A_r^\dagger f = \sum_{n=1}^r \frac{\langle f, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n$$

обобщенным нормальным r -решением (в дальнейшем просто r -решением) операторного уравнения (2.9.4).

Этот оператор, очевидно, определен и ограничен на всем пространстве F и для всех $f \in F_r \subset R(A)$ справедливо равенство $A_r^\dagger f = A^\dagger f$, а для всех $f \in R(A) \oplus N(A^*)$ выполнено $A_r^\dagger f = P_{Q_r}(A^\dagger f)$. Далее, так как $\bigcup_{r \in \mathbb{N}} Q_r = R(A^*)$, очевидно, что для всех $f \in D(A^\dagger)$ и $\delta > 0$ существует $r(\delta, f)$, такой, что $\|A^\dagger f - A_r^\dagger f\| < \delta$. Таким образом, семейство операторов A_r^\dagger можно рассматривать как аппроксимирующее для псевдообратного оператора A^\dagger на его области определения.

При численном решении уравнения (2.9.4) ни сам оператор A , ни правая часть f не известны точно. Вместо них заданы A_h и f_δ , такие, что $\|A - A_h\| \leq h$, $\|f - f_\delta\| \leq \delta$ (погрешности численной аппроксимации оператора и ошибки измерений), причем правая часть f_δ уже, вообще говоря, не принадлежит области определения псевдообратного оператора A_h^\dagger (даже если $f \in D(A^\dagger)$). Поэтому не имеет смысла рассматривать поведение величины $\|A^\dagger f - A_h^\dagger f_\delta\|$ при $\delta, h \rightarrow 0$. В то же время, так как операторы A_r^\dagger и A_{hr}^\dagger определены и ограничены на всем пространстве F , разность $\|A_r^\dagger f - A_{hr}^\dagger f\|$ характеризует точность вычисления проекции решения уравнения (2.9.4) на первые r сингулярных векторов.

Понятие r -решения системы алгебраических уравнений [4] $Aq = f$ позволяет строить численно устойчивые алгоритмы решения, если число обусловленности матрицы

$$\mu_r(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_r(A)},$$

параметр зазора в сингулярном спектре

$$d_r(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_r(A) - \sigma_{r+1}(A)}$$

и параметр несовместности системы

$$\theta_r(A, f) = \frac{\|Aq(r) - f\|}{\sigma_r(A)\|q(r)\|}$$

не слишком велики. Во всяком случае, ограничение на величину допустимых возмущений h, δ выражается в терминах величин $\mu_r(A)$, $d_r(A)$, $\theta_r(A, f)$ [4].

Контрольные вопросы

1. Докажите, что если оператор A линеен и компактен, то оценку условной устойчивости задачи $Aq = f$ на шаре $B(0, C) = \{q \in Q: \|q\| < C\}$ построить невозможно.
2. Можно ли использовать оценку (2.8.31) для формулировки и доказательства теоремы, аналогичной теореме 2.8.3?

3. Ознакомьтесь более детально с понятиями числа обусловленности, параметра зазора в сингулярном спектре и параметра несовместности системы (например, по книге [4]) и проанализируйте их роль и значение в методе С. К. Годунова решения уравнения первого рода (глава 3).
4. Составьте краткую схему главы 2, отметив взаимосвязи и различия квазирешения, псевдорешения, нормального решения и т. д.
5. Проанализируйте регуляризирующие свойства градиентных методов.
6. Какие преимущества дает сингулярное разложение?

Дополнительная литература

- 2.1. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Итеративные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1989.
- 2.2. Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю. Итерационные методы решения нерегулярных уравнений. ЛЕНАНД, 2006.
- 2.3. Бухгейм А. Л. Операторные уравнения Вольтерра. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние., 1983.
- 2.4. Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. Москва: Наука, 1986.
- 2.5. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. Москва: Наука, 1981.
- 2.6. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. Москва: Наука, 1988.
- 2.7. Васин В. В. Методы решения неустойчивых задач. Свердловск: Уральский госуниверситет, 1989.
- 2.8. Иванов В. К. О линейных некорректных задачах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 2.
- 2.9. Иванов В. К. О некорректно поставленных задачах // Матем. сборник. 1963. Т. 61, № 2.
- 2.10. Иванов В. К. Некорректные задачи в топологических пространствах // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 5. С. 1065–1074.
- 2.11. Иосида К. Функциональный анализ. Москва: Мир, 1967.
- 2.12. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Москва: Мир, 1972.
- 2.13. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи матем. наук. 1948. Т. 3, № 6. С. 89–115.
- 2.14. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Москва: Наука, 1977.

- 2.15. **Козлов В. А., Мазья В. Г., Фомин А. В.** Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. 1991. Т. 31, № 1. С. 64–73.
- 2.16. **Красносельский М. А. и др.** Приближенное решение операторных уравнений. Москва: Наука, 1969.
- 2.17. **Крейн М. Г., Красносельский М. А.** Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2, вып. 3.
- 2.18. **Лаврентьев М. М.** Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1.
- 2.19. **Лисковец О. А.** Теория и методы решения некорректных задач // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1982. Т. 20. С. 116–178.
- 2.20. **Лоусон Ч., Хенсон Р.** Численное решение задач метода наименьших квадратов. Москва: Наука, 1986.
- 2.21. **Маслов В. П.** Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризационного процесса // Успехи матем. наук. 1968. Т. 23, № 3. С. 183–184.
- 2.22. **Морозов В. А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. Москва: Наука, 1987.
- 2.23. **Морозов В. А., Гордонова В. И.** Численные алгоритмы выбора параметра в методе регуляризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13, № 3. С. 539–545.
- 2.24. **Немировский А. С.** О регуляризирующих свойствах метода сопряженных градиентов для решения некорректных задач // ЖВМ и МФ. 1986. Т. 26, № 3. С. 332–347.
- 2.25. **Польский Н. И.** О сходимости некоторых приближенных методов анализа // Укр. мат. журнал. 1955. Т. 7, № 1.
- 2.26. **Польский Н. И.** Об одной общей схеме применения приближенных методов // Докл. АН СССР. 1956. Т. 111, № 6.
- 2.27. **Польский Н. И.** Проекционные методы в прикладной математике // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 4.
- 2.28. **Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. Москва: Мир, 1979.
- 2.29. **Тихонов А. Н.** Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.
- 2.30. **Тихонов А. Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
- 2.31. **Тихонов А. Н.** Регуляризация некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.

- 2.32. **Тихонов А. Н.** Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156, № 1.
- 2.33. **Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.** Численные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1990.
- 2.34. **Федотов А. М.** Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука, 1994.
- 2.35. **Ценг И. И.** Обобщенные обратные для неограниченных операторов между унитарными пространствами // Докл. АН СССР. 1949. № 67. С. 431–434.
- 2.36. **Ценг И. И.** Свойства и классификация обобщенных обратных для замкнутых операторов // Докл. АН СССР. 1949. № 67. С. 607–610.
- 2.37. **Ценг И. И.** Виртуальные решения и обобщенные обратные // Успехи мат. наук. 1956. № 11. С. 213–215.
- 2.38. **Bakushinsky A. B., Kokurin M. Yu.** Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems. Springer, 2004.
- 2.39. **Bastay G., Kozlov V. A., Turesson B. O.** Iterative methods for an inverse heat conduction problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2001. V. 9, N 4. P. 375–388.
- 2.40. **Beutler F. J., Root W. L.** The operator pseudoinverse in control and system identification // Generalized inverses and applications. N.-Y.; San-Francisko; London: Academic Press, 1976. P. 397–494.
- 2.41. **Cauchy A.** Comptes Rendus, 25 (1847), 536.
- 2.42. **Gauss C. G.** Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis. Hamburgi: Solem ambientium, 1809.
- 2.43. **Hadamard J.** Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Princeton: Bull. Univ., 1902.
- 2.44. **Hadamard J.** Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Paris: Herman, 1932.
- 2.45. **Hasanov A.** Inverse coefficient problems for monotone potential operators // Inverse Problems. 1997. V. 13. P. 1265–1278.
- 2.46. **Kabanikhin S. I.** Iterative methods of solving inverse problems for hyperbolic equations // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2002. P. 201–217.
- 2.47. **Kabanikhin S. I.** The rate of convergence of gradient methods is estimated *via* conditional stability of inverse and ill-posed problems // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2005. V. 13, N 3.
- 2.48. **Kabanikhin S. I.** Conditional stability stopping rule for gradient methods applied to inverse and ill-posed problems // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2006. V. 14, N 8. P. 805–812.
- 2.49. **Kabanikhin S. I., Schieck M.** Impact of conditional stability: Convergence rates for general linear regularization methods // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2008. V. 16, N 3. P. 267–282.

- 2.50. **Klibanov M. V., Timonov A.** Carleman estimates for coefficient inverse problems and numerical applications. VSP, The Netherlands, 2004.
- 2.51. **Legendre A. M.** Nouvelles methodes pour la determination des orbits des cometes. Paris: Courcier, 1806.
- 2.52. **Nashed M. Z.** Aspects of generalized inverses in analysis and regularization // Generalized Inverses and Applications. N.-Y.; San-Francisko; London: Academic Press, 1976. P. 193–244.
- 2.53. **Nashed M. Z.** Perturbations and approximations for generalized inverses and linear operator equations // Generalized Inverses and Applications. N.-Y.; San-Francisko; London: Academic Press, 1976. P. 325–396.
- 2.54. **Nashed M. Z., Votruba G. F.** A unified theory of generalized inverses // Generalized Inverses and Applications. N.-Y.; San-Francisko; London: Academic Press, 1976. P. 1–110.
- 2.55. **Tanana V. P.** Methods for Solution of Nonlinear Operator Equations. VSP, The Netherlands, 1997.
- 2.56. **Tanana V. P.** Methods for Solving Operator Equations. VSP, The Netherlands, 1997.

Решение линейной системы является самой фундаментальной в анализе проблемой. К этой проблеме пытаются сводить многие другие задачи и иногда, к своему ужасу, достигают успеха.

Р. Беллман

Глава 3.

Некорректные задачи линейной алгебры

Данная глава имеет исключительно важное значение для изучения и понимания численных методов решения линейных обратных и некорректных задач, поскольку все они так или иначе сводятся к системам линейных алгебраических уравнений. Поэтому в данной главе, как в зеркале, отображаются основные понятия теории некорректных задач, такие как регуляризация, квазирешение, нормальное решение и т. д.

Исследование некорректных задач линейной алгебры является не только необходимым этапом численного решения линейных некорректных задач. Математики решали практические задачи с переопределенными или недоопределенными системами уравнений задолго до появления термина “некорректная (или обратная) задача”. Именно в линейной алгебре начали изучать нормальное решение (позволяющее выбрать единственное среди множества возможных решений), псевдорешение (обобщенное решение, совпадающее с обычным, если решение существует), плохо обусловленные системы, сингулярное разложение, которое, подобно рентгеновскому снимку, высвечивает степень некорректности задачи и подсказывает пути численного решения.

Отметим, что в случае, когда A — матрица, задача отыскания нормального псевдорешения системы линейных алгебраических уравнений $Aq = f$ корректно поставлена (псевдообратный оператор вычисляется точно).

В разделе 3.1 мы введем понятия псевдорешения (обобщенного решения) системы линейных алгебраических уравнений $Aq = f$ ($q_{\text{п}} = \arg \min_{q \in \mathbb{R}^n} \|Aq - f\|$), нормальной системы $A^T Aq = A^T f$ и нормально-го псевдорешения $q_{\text{нп}} = \arg \min_{q_{\text{п}} \in Q_f^{\text{п}}} \|q_{\text{п}}\|$ ($Q_f^{\text{п}}$ — множество всех псевдорешений). В разделе 3.2 будут рассмотрены регуляризирующие алгоритмы построения решения системы $Aq = f$ по приближенным данным $\{A_h, f_h\}$, основанные на использовании регуляризирующего параметра α . В разделе 3.3 изложены способы выбора параметра регуляризации α , что является наиболее важной и сложной проблемой при регуляризации. В разделе 3.4 представлены итерационные алгоритмы решения некорректных задач линейной алгебры, в которых параметром регуляризации является номер итераций. Особое место в теории и численном решении некорректных задач линейной алгебры занимает сингулярное разложение, краткое описание которого приведено в разделах 3.5–3.6. Разумеется, процедура сингулярного разложения является сложной и трудоемкой задачей (см. краткое описание в разделе 3.6). Но если эта задача решена, т. е. $m \times n$ -матрица A представлена в виде произведения $A = U\Sigma V^T$, где U и V — ортогональные (в комплексном случае — унитарные) матрицы, а матрица Σ диагональна и неотрицательно определена, т. е. $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$, $0 \leq \sigma_p \leq \sigma_{p-1} \leq \dots \leq \sigma_1$, $p = \min\{m, n\}$, то полученное разложение дает почти исчерпывающие ответы на вопросы о том, какова степень некорректности задачи $Aq = f$. В разделе 3.7 изложен метод, специально приспособленный для симметричных матриц и особенно для ленточных матриц, которые возникают, например, при численной реализации метода Гельфанда — Левитана.

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n = f_1, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n = f_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_n = f_m. \end{cases}$$

Эту систему можно записать в матричном виде

$$Aq = f,$$

где A — действительная $m \times n$ -матрица коэффициентов системы, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T \in \mathbb{R}^m$ — вектор-столбец правых частей, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T \in \mathbb{R}^n$ — вектор-столбец неизвестных. Отметим, что в соответствии с принятыми в данной главе обозначениями $Q = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Мы будем изучать методы построения приближенных решений задачи $Aq = f$ в случае, когда эта задача некорректна ($m \neq n$, или A вырождена, или A плохо обусловлена и т. п.).

Как хорошо известно, если $m = n$ и $\det A \neq 0$, то существует единственное решение системы. В вырожденном случае ($\det A = 0$) и в случае $m \neq n$ система может не иметь решения или иметь бесконечно много решений. Если система не имеет решения, то вводится понятие нормального псевдорешения так, что любая система с произвольной матрицей A будет обладать этим решением, причем единственным. В случае, когда система уравнений имеет много решений, среди решений выбирается минимальное по норме, которое называется *нормальным решением* и обозначается q_n .

Рассмотрим подробнее случай невырожденной квадратной матрицы A . Как отмечалось выше, теоретически этот случай можно считать хорошим в смысле существования и единственности решения. Однако в теории вычислительных методов невырожденные матрицы подразделяют на две категории: “плохо обусловленные” и “хорошо обусловленные”. *Плохо обусловленными* называют матрицы, для которых решение системы уравнений практически является неустойчивым. Иначе говоря, небольшие погрешности в правой части системы или погрешности, неизбежно возникающие при численной реализации, приводят к существенному отклонению полученного решения от точного.

Одной из важных характеристик практической устойчивости решения системы линейных уравнений является число обусловленности. *Числом обусловленности* квадратной матрицы A называется величина

$$\mu(A) = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ \xi \neq 0}} \left\{ \frac{\|Ax\| \|\xi\|}{\|A\xi\| \|x\|} \right\}.$$

Для понимания влияния $\mu(A)$ на устойчивость, рассмотрим систему с возмущенной правой частью $A(q + \delta q) = f + \delta f$. Здесь через δq обозначено отклонение решения, вызванное возмущением δf правой части. Очевидно, что $A\delta q = \delta f$. Из определения числа обусловленности следует, что

$$\frac{\|\delta q\|}{\|q\|} \leq \mu(A) \frac{\|A\delta q\|}{\|Aq\|} = \mu(A) \frac{\|\delta f\|}{\|f\|},$$

и $\mu(A)$ — наименьшая константа, гарантирующая это неравенство. Таким образом, число обусловленности $\mu(A)$ позволяет оценить относительную погрешность решения $\|\delta q\|/\|q\|$ через относительную погрешность правой части $\|\delta f\|/\|f\|$. Плохо обусловленные системы — это системы с очень большим числом обусловленности $\mu(A)$.

Решение системы линейных алгебраических уравнений может быть некорректной задачей для прямоугольных матриц A ($m \neq n$), а также для квадратных вырожденных или плохо обусловленных матриц.

Методы решения систем линейных уравнений делятся на две основные группы — прямые и итерационные. *Прямые методы* дают решение

после выполнения заранее известного числа операций. Эти методы сравнительно просты и универсальны, но требуют, как правило, большого объема памяти ЭВМ и накапливают погрешности в процессе решения, поскольку вычисления на любом этапе используют результаты предыдущих операций. В связи с этим прямые методы применимы для сравнительно небольших ($n < 200$) систем с плотно заполненной матрицей и не близким к нулю определителем. К прямым методам относятся, например, метод Гаусса, метод Жордана, метод квадратного корня, метод сингулярного разложения и т. д. Прямые методы (иногда называемые *точными*, хотя в виду неизбежных погрешностей при численной реализации это название является условным) также успешно применяются для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Итерационные методы — это методы последовательных приближений. Объем вычислений заранее определить трудно, но они требуют меньшего объема памяти, чем прямые методы. Итерационные методы часто используются при регуляризации некорректных систем линейных уравнений. Однако, стоит отметить, что часто наиболее эффективным способом решения линейной системы является сочетание итерационного подхода с прямыми методами. В таких смешанных алгоритмах итерационные методы используются для уточнения решений, полученных с помощью прямых методов.

В данной главе мы рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений для прямоугольной матрицы A и опишем как итерационные (регуляризующие), так и некоторые прямые алгоритмы для ее решения.

3.1. Обобщение понятия решения. Псевдорешение

Прежде чем перейти к изложению методов приближенного решения системы уравнений $Aq = f$, обсудим понятие решения этой системы, которая в общем случае может быть переопределенной, недоопределенной или плохо обусловленной.

Здесь и далее $q \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^m$, A — вещественная матрица размера $m \times n$, которую называем $m \times n$ -матрицей в случае, когда необходимо указать ее размер.

Вектор $q_{\text{п}} \in \mathbb{R}^n$, реализующий минимум нормы невязки

$$J(q) = \|Aq - f\|^2 \rightarrow \min, \quad (3.1.1)$$

называется *псевдорешением* системы $Aq = f$ (см. определение 2.9.1), т. е. $q_{\text{п}} = \arg \min_{q \in \mathbb{R}^n} \|Aq - f\|^2$.

Поскольку для приращения функционала $J(q)$ справедливо представление

$$\delta J(q) = J(q + h) - J(q) = 2(Aq, Ah) - 2(Ah, f) + (Ah, Ah),$$

необходимым условием минимума будет

$$A^T Aq - A^T f = 0,$$

где A^T — транспонированная матрица. Следовательно, вектор $q_{\text{п}}$ являются решением системы уравнений

$$A^T A q = A^T f. \quad (3.1.2)$$

Определение 3.1.1. Система уравнений (3.1.2) называется *нормальной системой по отношению к системе $Aq = f$* .

Нетрудно доказать и обратное утверждение, а именно, что каждое решение системы (3.1.2) минимизирует невязку в (3.1.1) [3.12]. Таким образом, задачи (3.1.1) и (3.1.2) эквивалентны. Нетрудно убедиться, что задача (3.1.1) всегда имеет решение, хотя, возможно, не единственное. Поэтому в силу установленного факта эквивалентности, система (3.1.2) также разрешима для любых матриц A и векторов f . Таким образом, множество решений нормальной системы (3.1.2) совпадает с множеством псевдорешений системы $Aq = f$. Обозначим это множество через $Q_f^{\text{п}}$.

Рассмотрим задачу отыскания точки минимума функционала

$$\min \{ \|q - q^0\|^2 : q \in Q_f^{\text{п}} \}, \quad (3.1.3)$$

где q^0 — некоторый фиксированный вектор. Решение $q_{\text{нп}}^0$ задачи (3.1.3) существует и единственно, поскольку строго выпуклый функционал $\| \cdot \|^2_Q$ достигает на выпуклом замкнутом множестве $Q_f^{\text{п}}$ минимума в единственной точке.

Определение 3.1.2. Решение $q_{\text{нп}}^0$ задачи (3.1.3) будем называть *нормальным относительно q^0 псевдорешением* уравнения $Aq = f$. Нормальное относительно нулевого вектора (наименьшее по норме) псевдорешение системы $Aq = f$ называется *нормальным псевдорешением* этой системы (или нормальным обобщенным решением) и обозначается $q_{\text{нп}}$: $q_{\text{нп}} = \arg \min_{q_{\text{п}} \in Q_f^{\text{п}}} \|q_{\text{п}}\|$.

Если система $Aq = f$ разрешима, то нормальное относительно q^0 псевдорешение $q_{\text{нп}}^0$ совпадает с нормальным относительно q^0 решением этой системы, т. е. с решением, наименее уклоняющимся по норме от вектора q^0 . В частности, если система $Aq = f$ однозначно разрешима, то псевдорешение единственно и совпадает с обычным решением.

Нормальное псевдорешение существует, единственно и непрерывно зависит от ошибок в правой части f , поскольку псевдообратный оператор, действующий в конечномерном пространстве, ограничен.

Нормальное псевдорешение $q_{\text{нп}}$ неустойчиво по отношению к возмущениям элементов матрицы. Неустойчивость нормального псевдорешения проиллюстрируем на следующем примере.

Пример 3.1.1. Рассмотрим несовместную систему

$$\begin{cases} 1 q_1 + 0 q_2 = 1, \\ 0 q_1 + 0 q_2 = 1, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Перейдем к нормальной системе (3.1.2) с

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и построим множество псевдорешений системы $Aq = f$:

$$Q_f^H = \{(q_1, q_2) : q_1 = 1, q_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда нормальным псевдорешением системы $Aq = f$ будет вектор $q_{\text{нп}} = (1, 0)^T$.

Возмущенную систему возьмем в виде

$$\begin{cases} 1 q_1 + 0 q_2 = 1, \\ 0 q_1 + h q_2 = 1, \end{cases}$$

где h — малый параметр. Поскольку эта система имеет единственное решение $q_{\text{нп}h} = (1, 1/h)^T$, оно и будет единственным (и, значит, нормальным) псевдорешением возмущенной системы. Очевидно, $q_{\text{нп}h} \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$, т. е. $\|q_{\text{нп}} - q_{\text{нп}h}\| \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$, что доказывает неустойчивость нормального псевдорешения по отношению к возмущениям элементов матрицы.

3.2. Метод регуляризации

Рассмотрим понятие регуляризирующего алгоритма и связанного с ним понятия регуляризованного семейства приближенных решений, введенного А. Н. Тихоновым [3.19] (см. раздел 2.5). Всюду в данном разделе A — квадратная матрица.

Условимся различать в задаче $Aq = f$ точные данные $\{A, f\}$, которые нам неизвестны, и приближенные данные $\{A_h, f_\delta\}$, $h > 0$, $\delta > 0$, $\|A_h - A\| \leq h$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$ с уровнем погрешности h , δ . Рассмотрим способы построения семейства векторов, сходящихся к нормальному псевдорешению $q_{\text{нп}}$ уравнения $Aq = f$ при $h, \delta \rightarrow 0$. За приближенное решение нельзя, вообще говоря, принимать нормальное псевдорешение возмущенного уравнения

$$A_h q = f_\delta, \quad (3.2.1)$$

поскольку нормальное псевдорешение неустойчиво (см. пример 3.1.1).

Пусть в нашем распоряжении имеется семейство алгоритмов $\{R_\alpha\}_{\alpha > 0}$, каждый из которых паре $\{A_h, f_\delta\}$, $h > 0$, $\delta > 0$, однозначно сопоставляет вектор $R_\alpha(A_h, f_\delta) = q_{h\delta}^\alpha \in Q = R^n$. Если существует

зависимость параметра $\alpha = \alpha(h, \delta)$ от погрешностей δ, h исходных данных, такая, что $\lim_{h, \delta \rightarrow 0} \alpha(h, \delta) = 0$,

$$\lim_{h, \delta \rightarrow 0} \|q_{h\delta}^\alpha - q_{\text{нп}}\| = 0, \quad (3.2.2)$$

то $\{q_{h\delta}^\alpha\}, h > 0, \alpha > 0, \delta > 0$, называется *регуляризованным семейством* приближенных решений, а алгоритм R_α — *регуляризирующим алгоритмом* для задачи $Aq = f$. Напомним, что нормальное псевдорешение $q_{\text{нп}}$ системы $Aq = f$ совпадает с ее точным решением, если эта система однозначно разрешима, и с нормальным решением, если система $Aq = f$ имеет множество решений.

Если A^{-1} существует, т. е. A — невырожденная матрица, то для достаточно малых h обратная матрица A_h^{-1} тоже существует и решение уравнения (3.2.1) теоретически будет сходиться к решению уравнения $Aq = f$ при $h, \delta \rightarrow 0$. Однако, если A — плохо обусловленная матрица, т. е. ее число обусловленности

$$\mu(A) = \sup_{x \neq 0} \sup_{\xi \neq 0} \left\{ \frac{\|Ax\| \|\xi\|}{\|A\xi\| \|x\|} \right\}$$

велико, то уклонение решения возмущенной системы (3.2.1) от нормального псевдорешения системы $Aq = f$ даже при малых h, δ может оказаться недопустимо большим и задачу следует считать практически неустойчивой (некорректной).

Перейдем к описанию конкретных процедур построения регуляризованных приближенных решений $q_{h\delta}^\alpha$.

Рассмотрим сначала частный случай, когда A — симметричная положительно полуопределенная матрица, для которой система $Aq = f$ при данном векторе f разрешима. Применим к этому случаю схему регуляризации М. М. Лаврентьева (см. раздел 2.4).

Перейдем к регуляризованной системе

$$(A + \alpha I)q = f + \alpha q^0, \quad (3.2.3)$$

где α — положительный параметр, I — единичная матрица, q^0 — пробное решение, т. е. некоторое приближение к искомому решению (если информации о решении нет, то можно положить $q^0 = 0$).

При принятых условиях система (3.2.3) имеет единственное решение q^α , которое сходится при $\alpha \rightarrow 0$ к нормальному относительно q^0 решению $q_{\text{н}}^0$ (см. раздел 2.6). Справедлива следующая лемма [3.12].

Лемма 3.2.1. Пусть $\{A_h, f_\delta\}, h > 0, \delta > 0$, таковы, что $\|A_h - A\| \leq h, \|f_\delta - f\| \leq \delta$, и A_h — симметричная положительно полуопределенная матрица. Тогда система

$$(A_h + \alpha I)q = f_\delta + \alpha q^0 \quad (3.2.4)$$

однозначно разрешима и, если $\alpha(h, \delta) \rightarrow 0$, $(h + \delta)/\alpha(h, \delta) \rightarrow 0$ при $h, \delta \rightarrow 0$, то ее решение $q_{h\delta}^\alpha$ сходится к нормальному относительно q^0 решению q_n^0 уравнения $Aq = f$, т. е. к решению, наименее уклоняющемуся от вектора q^0 .

Согласно определению 2.5.1 решения систем (3.2.4) $\{q^{\alpha(h, \delta)}\}$ образуют регуляризованное семейство приближенных решений для системы $Aq = f$, причем выбор параметра по формуле $\alpha = \sqrt[p]{h + \delta}$ ($p > 1$) удовлетворяет необходимым требованиям, поскольку $\alpha = \sqrt[p]{h + \delta} \rightarrow 0$, $(h + \delta)/\sqrt[p]{h + \delta} = (h + \delta)^{1-1/p} \rightarrow 0$ при $h, \delta \rightarrow 0$.

Замечание 3.2.1. Пусть A — положительно полуопределенная вырожденная матрица и $\|A\| = 1$ (этого можно добиться подходящим масштабированием системы $Aq = f$). Тогда $\mu(A) = \infty$, в то время как $\mu(A + \alpha E) \leq (1 + \alpha)/\alpha$. Поэтому при разумном выборе параметра α можно добиться хорошей обусловленности систем (3.2.3), (3.2.4) и удовлетворительной аппроксимации $q^\alpha \simeq q_n^0$, хотя эти требования противоречивы.

Роль параметра регуляризации α хорошо видна, если записать решение q^α системы (3.2.3) (при $q^0 = 0$) в виде

$$q^\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{\lambda_i + \alpha} \varphi_i,$$

где λ_i — собственные значения ($\lambda_i \geq 0$), φ_i — ортонормированные собственные векторы матрицы A , $f_i = \langle f, \varphi_i \rangle$. Это представление показывает, что при малых λ_i добавление положительного параметра α существенно увеличивает знаменатель и тем самым ослабляет влияние возможных ошибок в соответствующих компонентах f_i ($\tilde{f}_i = f_i + \delta f_i$). В то же время, для $\lambda_i \gg 0$ влияние малого α пренебрежимо мало.

Теперь откажемся от требования симметричности и положительной полуопределенности матрицы A , предполагая, по-прежнему, что для данного f система $Aq = f$ разрешима. Пусть матрица B такова, что для некоторого α_0 матрица $A + \alpha_0 B$ является невырожденной и, следовательно, обратима. Тогда возможна регуляризация в форме

$$(A + \alpha B)q = f, \quad (3.2.5)$$

где параметр α произвольного знака и $|\alpha| \leq |\alpha_0|$.

Упражнение 3.2.1. Проанализируйте связь (3.2.5) со следующим утверждением [3.17].

Лемма 3.2.2. Пусть $\|(A + \alpha B)^{-1}A\| \leq C < \infty$ (при $\alpha \rightarrow 0$), $\|A_h - A\| \leq h$, $\|B_\mu - B\| \leq \mu$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta \|f\|$. Тогда при достаточно малых h , μ , δ система

$$(A_h + \alpha B_\mu)q = f_\delta \quad (3.2.6)$$

имеет единственное решение $q_{h\delta\mu}^\alpha$ и справедлива оценка погрешности

$$\|q_{h\delta\mu}^\alpha - q_{\text{н}}^B\| \leq C \left(|\alpha| + \mu + \frac{h + \delta}{|\alpha|} \right), \quad (3.2.7)$$

где $q_{\text{н}}^B$ — решение системы $Aq = f$, удовлетворяющее условию

$$\|Bq_{\text{н}}^B\| = \min \{ \|Bq\| : q \in Q_f \}$$

(Q_f — множество решений системы $Aq = f$).

Из оценки (3.2.7) вытекает, что если $\alpha(h, \delta, \mu) \rightarrow 0$ и $(h + \delta)/|\alpha(h, \delta, \mu)| \rightarrow 0$ при $h, \delta, \mu \rightarrow 0$, то имеет место сходимость

$$\lim_{h, \delta, \mu \rightarrow 0} \|q_{h\delta\mu}^\alpha - q_{\text{н}}^B\| = 0.$$

Наиболее важным моментом в описанной регуляризации является подбор матрицы B , для которой $A + \alpha_0 B$ невырождена и $\|(A + \alpha B)^{-1} A\| < \infty$. В работе А. Б. Назимова [3.17] можно найти способы построения матриц с таким свойством.

Иследуем, наконец, общую ситуацию, когда система $Aq = f$, вообще говоря, неразрешима. В этом случае искомым является нормальное относительно некоторого q^0 псевдорешение $q_{\text{нп}}^0$. Решается задача устойчивой аппроксимации $q_{\text{нп}}^0$, когда A и f заданы с погрешностью. Нормальное относительно q^0 псевдорешение $q_{\text{нп}}^0$ неустойчиво к возмущениям элементов матрицы, поэтому необходимо использовать регуляризацию. В качестве регуляризованного приближенного решения выберем вектор $q_{h\delta}^\alpha$, удовлетворяющий системе

$$(A_h^T A_h + \alpha I)q = A_h^T f_\delta + \alpha q^0. \quad (3.2.8)$$

Лемма 3.2.3. Пусть $\|A_h - A\| \leq h$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, $\alpha > 0$. Тогда система (3.2.8) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\|q_{\text{нп}}^0 - q_{h\delta}^\alpha\| \leq c_1 \alpha + \frac{h}{\alpha} (\|A q_{\text{нп}}^0 - f\| + 2c_2^2 \alpha^2)^{1/2} + \frac{1}{\alpha^{1/2}} (c_3 h + \delta), \quad (3.2.9)$$

где c_i ($i = 1, 2, 3$) — константы, которые зависят от нормы $\|q_{\text{нп}}^0\|$ нормального относительно q^0 псевдорешения.

Следствие 3.2.1. Пусть h, δ суть величины порядка ε , причем ε достаточно мало. Если уравнение $Aq = f$ имеет точное решение (т. е. $\|A q_{\text{нп}}^0 - f\| = 0$), то правая часть оценки (3.2.9) по характеру зависимости от α и ε есть функция вида

$$\varphi(\alpha, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\alpha^{1/2}}. \quad (3.2.10)$$

При $\alpha = \varepsilon^{2/3}$ она принимает значение порядка $\varepsilon^{2/3}$. Если система $Aq = f$ не разрешима ($\|A q_{\text{нп}}^0 - f\| \neq 0$), то правая часть неравенства (3.2.9) есть функция вида

$$\psi(\alpha, \varepsilon) = \alpha + \frac{\varepsilon}{\alpha} + \frac{\varepsilon}{\alpha^{1/2}}. \quad (3.2.11)$$

При $\alpha = \varepsilon^{1/2}$ она принимает значение порядка $\varepsilon^{1/2}$. Эти оценки получаются минимизацией функций φ и ψ по α (т. е. решением уравнений $\varphi'_\alpha(x) = 0$, $\psi'_\alpha(x) = 0$).

Таким образом, если входные данные системы $Aq = f$ заданы с точностью порядка ε , то нормальное относительно q^0 решение может быть определено с точностью порядка $\varepsilon^{2/3}$ в случае разрешимости точного уравнения $Aq = f$; в противном случае можно построить нормальное относительно q^0 псевдорешение с точностью порядка $\varepsilon^{1/2}$.

Заметим, что более сложный способ выбора параметра α позволяет аппроксимировать нормальное относительно q^0 псевдорешение с точностью порядка аппроксимации $h + \delta$ [3.10].

Задача (3.2.8) эквивалентна задаче на минимум

$$\min \{ \|A_h q - f_\delta\|^2 + \alpha \|q - q^0\|^2 : q \in \mathbb{R}^n \}. \quad (3.2.12)$$

В такой форме способ построения $q_{h\delta}^\alpha$ известен как вариационный метод регуляризации А. Н. Тихонова.

В некоторых случаях целесообразно использовать более общий вид стабилизирующего функционала, а именно,

$$\min \{ \|A_h q - f_\delta\|^2 + \alpha \|L(q - q^0)\|^2 : q \in \mathbb{R}^n \},$$

где L — невырожденная квадратная матрица, подходящий выбор которой позволяет повысить точность регуляризованного решения.

3.3. Принципы выбора параметра регуляризации

Параметр регуляризации α необходимо связывать с погрешностями δ , h исходных данных: $\alpha = \alpha(\delta, h)$. В прикладных задачах обычно уровень погрешности δ , h фиксирован (δ , h не стремятся к нулю) и нужно указать конкретное $\alpha(\delta, h)$, в определенном смысле, наилучшее. Дело в том, что при уменьшении α ухудшается обусловленность матриц регуляризованных систем и, следовательно, могут возникнуть вычислительные погрешности, а при увеличении α приближенное решение плохо аппроксимирует точное решение. Поэтому здесь необходим разумный компромисс.

Опишем некоторые принципы выбора параметра α .

Принцип невязки (α_n). Предположим, что погрешность имеется лишь в правой части системы $Aq = f$, т. е. $A_h \equiv A$ ($h = 0$), $\|f_\delta - f\| \leq \delta$. Обозначим через q_δ^α решение системы (3.2.8) при $h = 0$, $q^0 = 0$. Значение параметра α в принципе невязки выбирается таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\|Aq_\delta^\alpha - f_\delta\| = \delta$$

(см. [3.21, 3.16]).

Принцип обобщенной невязки ($\alpha_{\text{он}}$). Данный принцип охватывает общий случай задания погрешности: $\|A - A_h\| \leq h$, $\|f - f_\delta\| \leq \delta$. Параметр α находится из уравнения (здесь и далее $q_{h\delta}^\alpha$ — решение уравнения (3.2.8) при $q^0 = 0$)

$$\|A_h q_{h\delta}^\alpha - f_\delta\| = h \|q_{h\delta}^\alpha\| + \delta,$$

для решения которого разработаны численные методы и программы [3.22].

Для более детального знакомства с содержанием раздела можно использовать [3.23, 3.13, 3.30].

3.4. Итерационные регуляризирующие алгоритмы

Для решения плохо обусловленных систем $Aq = f$ могут быть использованы итерационные методы. Принципиальной здесь является необходимость формулировать правило остановки итерационного процесса в зависимости от уровня погрешности исходных данных, тогда как для хорошо обусловленных систем такой необходимости нет. Роль параметра регуляризации играет число итераций. Исследуем этот вопрос на примере метода простой итерации

$$q_{n+1} = (I - A^T A)q_n + A^T f, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4.1)$$

В случае приближенных данных $\{A_h, f_\delta\}$ вместо (3.4.1) имеем итерационную схему

$$q_{n+1} = (I - A_h^T A_h)q_n + A_h^T f_\delta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.4.2)$$

где $\|A - A_h\| \leq h$, $\|f - f_\delta\| \leq \delta$.

Будем предполагать, что система $Aq = f$ разрешима, $\|A\| \leq 1$, $\|A_h\| \leq 1$. Последнее условие не ограничивает класса решаемых задач, поскольку его выполнения можно всегда достичь, умножив уравнение $Aq = f$ на подходящую константу. Как и ранее, через q_n^0 обозначаем нормальное относительно q_0 решение, т. е. решение системы $Aq = f$, для которого норма $\|q_n^0 - q_0\|$ минимальна, где q_0 — начальное приближение в процессах (3.4.1), (3.4.2).

Определим правила выбора параметра n , при котором следует остановить процесс (3.4.2):

Правило 1. Зададим числа $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и выбираем такое $n(h, \delta)$, для которого впервые выполнено $\|q_n - q_{n-1}\| \leq a_1 h + a_2 \delta$.

Правило 2. Зададим числа $a_0 \geq \|q_n^0\|$, $a_1 > 1$ и выберем такой номер $n(h, \delta)$, для которого впервые выполнено $\|A_h q_n - f_\delta\| \leq a_0 h + a_1 \delta$. (Разумеется, в данном случае предполагается, что нам известна верхняя оценка для $\|q_n^0\|$!)

Правило 3. Зададим числа $a_1 > 1$, $a_2 > 1$ и $a > 0$ и выберем такой номер n , для которого впервые будет выполнено хотя бы одно из неравенств:

$$\|A_h q_n - f_\delta\| \leq a_1 \|q_n\| h + a_2 \delta, \quad n \geq a / (a_1 \|q_n\| h + a_2 \delta)^2.$$

Имеет место следующая теорема [3.1].

Теорема 3.4.1. Пусть последовательные приближения (3.4.2) останавливаются по любому из правил 1, 2 или 3. Тогда

$$\lim_{h, \delta \rightarrow 0} \|q_{n(h, \delta)} - q_n^0\| = 0. \quad (3.4.3)$$

При этом для числа итераций $n(h, \delta)$ в случае правила 1 справедливо соотношение

$$(h + \delta)n(h, \delta) \rightarrow 0 \quad \text{при } h, \delta \rightarrow 0,$$

а в случае правил 2 и 3 — соотношение

$$(h + \delta)^2 n(h, \delta) \rightarrow 0 \quad \text{при } h, \delta \rightarrow 0.$$

Соотношение (3.4.3) означает, что правила 1, 2 и 3 определяют регуляризирующие алгоритмы решения уравнения $Aq = f$.

Замечание 3.4.1. Теорема 3.4.1 справедлива и для так называемой неявной итерационной схемы

$$q_{n+1} = q_n - (A_h^T A_h + B)^{-1} (A_h^T A_h q_n - A_h^T f_\delta), \quad (3.4.4)$$

где B — положительно определенная матрица, перестановочная с $A_h^T A_h$. Для получения необходимой точности число итераций по схеме (3.4.4) обычно требуется выбрать меньше, чем по схеме (3.4.2). Но шаг итерации здесь более трудоемкий, поскольку нужно обращать матрицу $(A_h^T A_h + B)$. Заметим также, что в качестве матрицы B можно брать $B = \alpha I$, $\alpha > 0$.

Замечание 3.4.2. Если на решение системы $Aq = f$ налагается дополнительное ограничение $q \in M$ (M — выпуклое множество), то необходимо вместо схем (3.4.2), (3.4.4) использовать нелинейные итерационные процессы [3.2, 3.35]

$$q_{n+1} = \text{Pr}_M [(I - A_h^T A_h) q_n + A_h^T f_\delta],$$

$$q_{n+1} = \text{Pr}_M [(A_h^T A_h + B)^{-1} (B q_n + A_h^T f_\delta)],$$

где Pr_M — метрическая проекция, которая каждому вектору q ставит в соответствие вектор из множества M , ближайший к q .

Приведем примеры априорно заданных множеств M , для которых Pr_M выписывается явным образом:

$$M_1 = \{q \in \mathbb{R}^n : q_i \geq 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{Pr}_{M_1} q = q^+ = (q_1^+, q_2^+, \dots, q_n^+),$$

где

$$q_i^+ = \begin{cases} q_i, & \text{если } q_i \geq 0, \\ 0, & \text{если } q_i < 0; \end{cases}$$

$$M_2 = \{q \in \mathbb{R}^n : \|q - q^0\| \leq r\}, \quad \text{Pr}_{M_2} q = q^0 + \frac{q - q^0}{\|q - q^0\|} r;$$

$$M_3 = \{q \in \mathbb{R}^n : a_i \leq q_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{Pr}_{M_3} q = z,$$

где

$$z_i = \begin{cases} q_i & \text{при } a_i \leq q_i \leq b_i, \\ a_i & \text{при } q_i < a_i, \\ b_i & \text{при } q_i > b_i. \end{cases}$$

3.5. Сингулярное разложение

Сингулярное разложение является одним из самых распространенных и эффективных методов исследования и численного решения обратных и некорректных задач. Дело в том, что осуществляя сингулярное разложение матрицы (а в общем случае линейного компактного оператора, см. раздел 2.9), мы в результате получаем числовую характеристику степени некорректности задачи, а именно, характер убывания сингулярных чисел показывает степень неустойчивости решения задачи $Aq = f$ относительно малых вариаций данных f .

В данном разделе мы рассмотрим метод сингулярного разложения, используя результаты, изложенные в работах С. К. Годунова и его соавторов [3.7, 3.8, 4].

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений

$$Aq = f,$$

где A — действительная $m \times n$ -матрица, $q \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^m$, и требуется решить эту систему относительно неизвестного вектора q . Очевидно, что степень трудности решения такой системы зависит от структуры матрицы A . На языке линейной алгебры матрица A является представлением некоторого линейного оператора в конкретной координатной системе. Естественно попытаться так преобразовать эту координатную систему, чтобы линейный оператор в новой координатной системе был представлен матрицей более простого вида (например, матрицей блочной структуры с нулевыми блоками). Иными словами, матрицу A можно разложить на произведение матриц специального вида. В настоящее время разработан ряд алгоритмов, основанных на разложении матрицы A . Одним из достоинств этого подхода к решению системы линейных

уравнений является его универсальность, т. е. применимость как к хорошо обусловленным системам, так и к системам с вырожденной или плохо обусловленной матрицей.

При построении матричных разложений особую роль играют ортогональные преобразования, сохраняющие (по определению) норму вектора. Напомним, что любое ортогональное преобразование задается ортогональной матрицей, т. е. такой матрицей U , что $U^T U = U U^T = I$, где U^T — транспонированная матрица, I — единичная матрица. Свойство сохранения нормы вектора при ортогональных преобразованиях позволяет искать псевдорешения вырожденных систем путем замены исходной задачи минимизации невязки $\|Aq - f\|$ задачей минимизации функционала $\|U^T(Aq - f)\|$, в которой матрица $U^T A$ имеет более простую (например, блочную) структуру благодаря специальному построению ортогональной матрицы U .

Наиболее эффективными (но и ресурсоемкими) средствами для решения произвольных систем линейных уравнений являются так называемые полные ортогональные разложения, имеющие, по определению, вид $A = UKV^T$. Здесь U и V — ортогональные матрицы размеров $m \times m$ и $n \times n$, соответственно; K — $m \times n$ -матрица, имеющая следующую структуру

$$K = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где W — невырожденная квадратная матрица (того же ранга, что и исходная матрица A).

Самым известным из полных ортогональных разложений является *сингулярное разложение* $m \times n$ -матрицы A , т. е. разложение вида

$$A = U \Sigma V^T, \quad (3.5.1)$$

где V — ортогональная $n \times n$ -матрица, U — ортогональная $m \times m$ -матрица, Σ — диагональная $m \times n$ -матрица, у которой $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\sigma_{ii} = \sigma_i \geq 0$. Величины σ_i называются сингулярными числами матрицы A . Всюду считаем, что σ_i занумерованы в порядке невозрастания $\sigma_{i+1} \leq \sigma_i$.

Напомним, что *диагональной $m \times n$ -матрицей S* называют $m \times n$ -матрицу с элементами s_{ij} , удовлетворяющими условиям

$$s_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ s_i, & i = j. \end{cases}$$

Например, при $n > m$ диагональная $m \times n$ -матрица S имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & s_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

И в том, и в другом случае диагональную $m \times n$ -матрицу для краткости будем обозначать $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_p)$, $p = \min\{m, n\}$.

Теорема 3.5.1 (о сингулярном разложении). Для любой вещественной $m \times n$ -матрицы A можно подобрать ортогональные $m \times m$ -матрицу U и $n \times n$ -матрицу V , а также диагональную $m \times n$ -матрицу

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p), \quad p = \min\{m, n\},$$

такие, что

$$A = U\Sigma V^T, \quad (3.5.2)$$

$$0 \leq \sigma_p \leq \sigma_{p-1} \leq \dots \leq \sigma_2 \leq \sigma_1.$$

Числа $\sigma_i = \sigma_i(A)$, $i = \overline{1, p}$, определяются однозначно и называются сингулярными числами матрицы A .

Замечание 3.5.1. Теорема 3.5.1 справедлива и для комплексных $m \times n$ -матриц, но в этом случае матрицы U и V также будут комплексные и унитарные, а матрицу V^T в разложении надо заменить на $V^* = \overline{V^T}$.

Составим по $m \times n$ -матрице A блочную $(m+n) \times (m+n)$ -матрицу \mathcal{A} , которую будем называть расширенной матрицей:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} O_{nn} & A^T \\ A & O_{mm} \end{pmatrix}. \quad (3.5.3)$$

Упражнение 3.5.1. Докажите, что все собственные значения $\lambda_i(\mathcal{A})$ расширенной матрицы вещественны.

Полагая

$$\lambda_{n+m}(\mathcal{A}) \leq \lambda_{n+m-1}(\mathcal{A}) \leq \dots \leq \lambda_2(\mathcal{A}) \leq \lambda_1(\mathcal{A}),$$

убедитесь в том, что этот набор чисел совпадает с набором

$$\begin{aligned} -\sigma_1(A) \leq -\sigma_2(A) \leq \dots \leq -\sigma_p(A) \leq \underbrace{\dots}_{|n-m| \text{ нулей}} \leq \\ \leq \sigma_p(A) \leq \dots \leq \sigma_1(A), \end{aligned}$$

т. е. $\sigma_k(\mathcal{A}) = \lambda_k(\mathcal{A})$, $k = 1, 2, \dots, p$.

Поскольку скалярное произведение в \mathbb{R}^n порождает норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, можно определить *норму $m \times n$ -матрицы A* :

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Упражнение 3.5.2. Докажите, что введенная функция обладает всеми свойствами нормы.

Упражнение 3.5.3. Докажите, что $\|A\| = \sigma_1(A)$.

Пусть $\sigma_k(A)$ — сингулярное число $m \times n$ -матрицы A . В силу того что $\sigma_k(A) = \lambda_k(A)$, заключаем, что система уравнений

$$Aw = \sigma w \tag{3.5.4}$$

при каждом $\sigma = \sigma_k(A)$ имеет решение

$$w_{(k)} = (w_{(k)1}, w_{(k)2}, \dots, w_{(k)m+n})^T$$

(и возможно не одно, хотя общее число линейно независимых $w_{(k)}$ равно $m + n$). По вектору $w_{(k)}$ построим два вектора $v_{(k)} = (v_{(k)1}, v_{(k)2}, \dots, v_{(k)n})^T$ и $u_{(k)} = (u_{(k)1}, u_{(k)2}, \dots, u_{(k)m})^T$ по правилу $v_{(k)j} = w_{(k)j}$, $j = 1, 2, \dots, n$; $u_{(k)j} = w_{(k)n+j}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда в силу (3.5.4)

$$Av_{(k)} = \sigma_k(A)u_{(k)}, \quad A^T u_{(k)} = \sigma_k(A)v_{(k)}. \tag{3.5.5}$$

Вектор $v_{(k)}$ называется *правым сингулярным вектором матрицы A* , соответствующим сингулярному числу $\sigma_k(A)$, а вектор $u_{(k)}$ — *левым сингулярным вектором*.

Лемма 3.5.1 (о взаимной ортогональности сингулярных векторов). Пусть $v_{(k)}$ и $u_{(k)}$ — соответственно правые и левые сингулярные векторы матрицы A . Тогда $\langle u_{(k)}, u_{(j)} \rangle = 0$ и $\langle v_{(k)}, v_{(j)} \rangle = 0$ при $k \neq j$.

Из (3.5.4) и (3.5.5) вытекает

$$A^T Av_{(k)} = A^T \sigma_{(k)} u_{(k)} = \sigma_{(k)}^2 v_{(k)}, \quad AA^T u_{(k)} = \sigma_{(k)}^2 u_{(k)}$$

и, следовательно, правые сингулярные векторы $m \times n$ -матрицы A являются собственными векторами $n \times n$ -матрицы $A^T A$, а левые — $m \times m$ -матрицы AA^T .

Теорема 3.5.2. Для каждой $m \times n$ -матрицы A существует ортонормированная система из n правых сингулярных векторов и ортонормированная система из m левых сингулярных векторов, которые называются *сингулярными базисами матрицы A* .

Упражнение 3.5.4. Перепишем сингулярное разложение $m \times n$ -матрицы $A = U\Sigma V^T$ и $n \times m$ -матрицы $A^T = V\Sigma^T U^T$ в виде $AV = U\Sigma$, $A^T U = V\Sigma^T$. Докажите, что столбцы матрицы V являются правыми, столбцы матрицы U — левыми сингулярными векторами матрицы A .

Упражнение 3.5.5. По заданной $m \times n$ -матрице A построим $n \times n$ -матрицу $A^T A$ и $m \times m$ -матрицу AA^T . Пусть $e_{(1)}, e_{(2)}, \dots, e_{(n)}$ — ортонормированные собственные векторы матрицы $A^T A$. Докажите, что:

- векторы $Ae_{(1)}, Ae_{(2)}, \dots, Ae_{(n)}$ ортогональны;
- каждый ненулевой вектор $Ae_{(k)}$ является собственным вектором матрицы AA^T .

Упражнение 3.5.6. Квадратная матрица A является невырожденной в том и только в том случае, если все ее сингулярные числа $\sigma_i(A)$ положительны. Убедитесь в этом, доказав равенство

$$|\det A| = \prod_{i=1}^n \sigma_i(A).$$

Лемма 3.5.2. Квадратная $n \times n$ -матрица A нормальна ($AA^* = A^*A$) в том и только в том случае, если

$$|\lambda_i(A)| = \sigma_i(A), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Лемма 3.5.3. Пусть задано сингулярное разложение $m \times n$ -матрицы $A = U\Sigma V^T$ и A^\dagger — псевдообратная матрица. Тогда

$$A^\dagger = V\Lambda^\dagger U^T.$$

Здесь

$$\Lambda^\dagger = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-2}, \dots, \sigma_r^{-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-r}), \quad r = \text{rank } A, \quad p = \min\{m, n\},$$

т. е. Λ^\dagger — диагональная $m \times n$ -матрица, у которой по диагонали стоят числа, обратные ненулевым сингулярным числам матрицы A , а на остальных местах нули.

Еще одним замечательным свойством сингулярного разложения $m \times n$ -матрицы $A = U\Sigma V^T$ является явное представление ядра и образа отображения $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, а именно, правые сингулярные векторы $v_{(k)}$, соответствующие нулевым сингулярным числам, порождают ядро A , а левые сингулярные векторы $u_{(k)}$, соответствующие ненулевым сингулярным числам, порождают образ $R(A) \subset \mathbb{R}^n$.

Если известно сингулярное разложение (3.5.1) матрицы A , можно представить систему $Aq = f$ в виде

$$U\Sigma V^T q = f \quad (3.5.6)$$

или в эквивалентной форме (если положить $z = V^T q$, $g = U^T f$)

$$\Sigma z = g, \quad (3.5.7)$$

где $g \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор. Поскольку матрица Σ диагональна, эта система легко решается.

Рассмотрим для определенности случай, когда матрица A переопределена, т. е. количество неизвестных системы $Aq = f$ по меньшей мере не превышает количество строк ($n \leq m$). В этом случае систему $\Sigma z = g$ можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_j z_j &= g_j, & \text{если } j \leq n, \sigma_j \neq 0; \\ 0 z_j &= g_j, & \text{если } j \leq n, \sigma_j = 0; \\ 0 &= g_j, & \text{если } n < j \leq m; \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

где вторая подсистема пуста, если $r = n$ (система полного рода), третья подсистема пуста, если $n = m$.

Заметим, что для разрешимости исходного уравнения необходимо и достаточно, чтобы $g_j = 0$ всякий раз, когда $\sigma_j = 0$ или когда $j > n$. Если $\sigma_j = 0$, то соответствующему неизвестному z_j можно придать произвольное значение (которое играет роль параметра). Решение исходной системы вычисляется по формуле $q = Vz$.

Напомним, что ядро матрицы A — это множество $N(A)$ векторов q , для которых $Aq = 0$, а область значений — множество $R(A)$ векторов f , для которых система $Aq = f$ имеет решение. Покажем, что сингулярное разложение позволяет описать множества $N(A)$ и $R(A)$. Действительно, обозначим через u_j , v_j столбцы матриц U , V соответственно. Тогда из (3.5.1) следует

$$Av_j = \sigma_j u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.5.9)$$

(для этого достаточно умножить равенство (3.5.1) справа на матрицу V и учесть, что $V^T V = I$).

Если $\sigma_j = 0$, то из (3.5.9) получаем $Av_j = 0$, т. е. $v_j \in N(A)$. Если $\sigma_j \neq 0$, то $u_j \in R(A)$.

Пусть U_1 — набор сингулярных векторов, соответствующих ненулевым сингулярным числам, а U_0 — набор остальных сингулярных векторов. Аналогично определяем V_1 , V_0 . Тогда

- а) V_0 — ортонормированный базис ядра $N(A)$;
- б) U_1 — ортонормированный базис для области значений $R(A)$.

Сингулярное разложение дает дополнительную возможность для понимания и исследования уже известных нам понятий псевдорешения, устойчивости и обусловленности, регуляризации и т. п. Мы обсудим в

данном разделе только некоторые аспекты, детальное изложение и исследование которых содержится в [4].

Пусть $m \times n$ -матрица A имеет ранг $r \leq p = \min\{m, n\}$. Тогда в сингулярном разложении $A = U\Sigma V^T$ матрица Σ имеет вид $\Sigma = \text{diag}(\sigma_p, \sigma_{p-1}, \dots, \sigma_{p-r+1}, 0, \dots, 0)$. При $r < m$ для совместности системы (3.5.7) необходимо, чтобы $g_{r+1} = g_{r+2} = \dots = 0$. При $r < n$ переменные $z_{r+2}, z_{r+3}, \dots, z_n$ в уравнение (3.5.7) не входят и, значит, в случае совместности системы компоненты решения $z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_n$ могут быть выбраны произвольно.

Выберем z так, чтобы норма вектора невязки

$$\Sigma z - g = \begin{pmatrix} \sigma_p z_1 - g_1 \\ \sigma_{p-1} z_2 - g_2 \\ \vdots \\ \sigma_{p-r+1} z_r - g_r \\ -g_{r+1} \\ \vdots \\ -g_m \end{pmatrix}$$

была минимальной.

Упражнение 3.5.7. Докажите, что

$$\min \|\Sigma z - g\| = \sqrt{g_{r+1}^2 + g_{r+2}^2 + \dots + g_m^2}$$

и равенство достигается лишь в том случае, если

$$z_1 = g_1/\sigma_p, \quad z_2 = g_2/\sigma_{p-1}, \quad \dots, \quad z_r = g_r/\sigma_{p-r+1}. \quad (3.5.10)$$

При $n = r$ существует единственный вектор (с компонентами (3.5.10)), на котором $\|\Sigma z - g\|$ достигает минимума. При $r < n$ минимум будет достигаться на любом векторе $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, у которого первые r компонент определены формулами (3.5.10), а остальные произвольны (если остальные компоненты равны нулю, то получим вектор с минимальной нормой, на котором $\|\Sigma z - g\|$ минимальна). Следовательно, при любом $r \leq p := \min\{n, m\}$ можно найти единственный элемент z , который имеет наименьшую норму среди всех векторов, доставляющих минимум функционалу $\|\Sigma z - g\|$. Но поскольку $q = Vz$, с учетом равенств

$$\begin{aligned} Aq - f &= U\Sigma V^T - Ug = U(\Sigma z - g), \\ \|Aq - f\| &= \|\Sigma z - g\|, \quad \|z\| = \|q\|, \quad q = Vz \end{aligned}$$

нетрудно убедиться, что среди векторов, доставляющих минимальное значение норме невязки $\|Aq - f\|$, существует один и только один вектор с наименьшей нормой $q_{\text{нп}}$ — нормальное псевдорешение системы $Aq = f$.

Отметим, что при $r := \text{rank}(A) < p = \min\{m, n\}$ система $Aq = f$, вообще говоря, неразрешима, т. е. вектор невязки $y = Aq - f$ может быть отличен от нуля при всех q . Следовательно, равенство $Aq = f$ надо понимать в более широком смысле. Обобщение понятия решения приводит сначала к минимизации функционала $\|Aq - f\|$, в результате чего получаем множество Q_f^n всех псевдорешений системы $Aq = f$, а затем к еще одной минимизации (нахождение в Q_f^n вектора $q_{\text{нп}}$, имеющего минимальную норму). Однако вариационное определение не всегда удобно для конкретных вычислений, поэтому мы рассмотрим один из способов расширения системы $Aq = f$ до такой системы, решая которую можно найти и псевдорешение $q_{\text{нп}}$, и соответствующий вектор невязки $y_{\text{н}} = Aq_{\text{нп}} - f$ [4].

Теорема 3.5.3. *Решение расширенной системы*

$$\begin{aligned} Aq + y &= f, \\ A^T y &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

состоит из псевдорешения $q_{\text{нп}}$ системы $Aq = f$ и $y_{\text{н}}$ — соответствующего вектора невязки, причем $y_{\text{н}}$ определяется из (3.5.11) однозначно.

Итак, для нахождения нормального псевдорешения системы $Aq = f$ можно сначала решить расширенную систему (3.5.11) и найти $y_{\text{н}}$. Но тогда система $Aq = f - y_{\text{н}}$ будет совместной, поэтому для нахождения нормального псевдорешения $q_{\text{нп}}$ достаточно найти минимальное по норме решение системы $Aq = f - y_{\text{н}}$. При этом ясно, что $\|y_{\text{н}}\| = \min_q \|Aq - f\|$, т. е. число $\|y_{\text{н}}\|$ характеризует степень несовместности системы $Aq = f$. Следуя [4], число

$$\theta(A, f) = \frac{\min_{\|q\|=1} \|Aq - f\|}{\sigma_{p-r+1}(A)} = \frac{\|y_{\text{н}}\|}{\|q\| \sigma_{p-r+1}} \quad (3.5.12)$$

назовем *несовместностью системы* $Aq = f$.

Отметим в заключение, что сингулярные числа и сингулярные векторы матрицы A позволяют изучить различные аспекты некорректности задач линейной алгебры, включая учет влияния несовместности системы, определение и анализ углов между подпространствами, определение и теорию возмущений r -решений и многое другое. В главе 2 мы упомянули лишь простейший случай с тем, чтобы связать понятие r -решения с регуляризацией.

Укажем на одну существенную трудность, которая может возникнуть при реализации метода сингулярного разложения, когда в результате вычислений получены относительно малые сингулярные числа. В этом случае при определении z_j по формуле $z_j = g_j / \sigma_j$ может получиться большая погрешность. Поэтому ключом к правильному исполь-

зованию сингулярного разложения является введение границы τ , отражающей точность исходных данных и машинных вычислений. А именно, всякое $\sigma_i > \tau$ приемлемо и соответственно $z_j = y_j/\sigma_j$, а любое $\sigma_j < \tau$ следует считать нулевым и соответствующему z_j может быть придано произвольное значение (или можно положить $z_j = 0$, чтобы получить решение с минимальной нормой). Величина τ играет здесь роль параметра регуляризации.

3.6. Алгоритм сингулярного разложения и метод С. К. Годунова

Процесс решения произвольной системы уравнений с прямоугольной матрицей основан на приведении системы к каноническому виду. При сингулярном разложении в качестве канонического задается вид системы, имеющей диагональную матрицу коэффициентов (подробное описание алгоритма можно найти в [4]).

Приведение к диагональному виду осуществляется серией ортогональных преобразований пространства, в котором лежит правая часть системы, и другой серией ортогональных преобразований, действующих в пространстве, где разыскивается решение. Элементарные преобразования, входящие в эти серии, выбираются в виде ортогональных отражений относительно тех или иных, специально подобранных плоскостей или в виде цепочек двумерных вращений.

Сингулярное разложение произвольной прямоугольной матрицы A проводится в несколько этапов:

- 1) с помощью ортогональных преобразований отражения матрица A приводится к двухдиагональному виду D (прямоугольная матрица $D = (d_{ij})$ называется *двухдиагональной*, если $d_{ij} = 0$ при условии, что $i \neq j$ и $i \neq j + 1$);
- 2) для двухдиагональной матрицы D вычисляются ее сингулярные числа

$$0 \leq \sigma_n(D) \leq \sigma_{n-1}(D) \leq \dots \leq \sigma_1(D);$$
- 3) двухдиагональная матрица D приводится к диагональному виду Σ с помощью процедуры исчерпывания, использующей в качестве ортогональных преобразований цепочки двумерных вращений.

Приложение к задаче наименьших квадратов

На основе сингулярного разложения можно получить псевдорешение (или решение в смысле наименьших квадратов)

$$q_{\text{п}} = \arg \min \{ \|Aq - f\|^2 : q \in \mathbb{R}^n \}.$$

Поскольку ортогональные матрицы сохраняют норму, получаем

$$\|Aq - f\| = \|U^T(U\Sigma V^T q - f)\| = \|\Sigma z - g\|,$$

$$g = U^T f, \quad z = V^T q.$$

Вектор z , доставляющий минимум невязке, выражается формулой:

$$z_j = g_j/\sigma_j, \quad \text{если } \sigma_j \neq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

$$z_j \text{ — произвольно, если } \sigma_j = 0 \quad (j = k + 1, \dots, n),$$

причем $\|Aq - f\|^2 = \sum_{i=k+1}^m g_i^2$. Множество всех псевдорешений вычисляется по формуле $q_{\text{п}} = Vz$. Если положить $z_j = 0$ в случае $\sigma_j = 0$, то получим нормальное (т. е. минимальное по норме) псевдорешение.

Отметим, что численному исследованию метода наименьших квадратов посвящена монография [3.13].

При возникновении малых сингулярных чисел во избежание накопления погрешности необходимо предусмотреть операцию “зануления” малых сингулярных чисел, которую можно интерпретировать как специальную процедуру регуляризации.

Метод С. К. Годунова [4]. Опишем подробнее метод, предложенный С. К. Годуновым, поскольку он представляется одним из наиболее перспективных в случае, когда слишком большое число обусловленности и несовместность системы, казалось бы, уже не оставляют шансов на приемлемое решение.

Отметим, что использование метода наименьших квадратов $J(q) = \|Aq - f\|^2 \rightarrow \min$ или метода регуляризации А. Н. Тихонова (напомним здесь лишь простейший вариант) $M_\alpha(q) = J(q) + \alpha\|q\|^2 \rightarrow \min$ приводит соответственно к системам $A^T Aq = A^T f$ и $\alpha q + A^T Aq = A^T f$. Необходимо отметить, что помимо хорошо известных преимуществ указанных методов, имеются серьезные недостатки, в известном смысле усложняющие исходную некорректную задачу $Aq = f$. Во-первых, и без того плохая обусловленность матрицы A возводится в квадрат при переходе к $A^T A$. Во-вторых, характерные особенности изменения данных f сильно сглаживаются в результате применения оператора A^T (напомним, что матрица A , как правило, получается в результате дискретизации компактного оператора). В-третьих, добавление малого параметра α хотя и улучшает свойства оператора, который подлежит обращению, но при этом изменяет исходную задачу и порождает новую проблему выбора подходящего α .

Избавиться от первых двух недостатков позволяет метод М. М. Лаврентьева $\alpha q + Aq = f$, который обоснован в случае, если A — симметричная положительно полуопределенная матрица (см. леммы 3.2.1 и 3.2.2).

С. К. Годунов предложил метод регуляризации системы $Aq = f$ с прямоугольной $m \times n$ -матрицей A , основанный на решении расширенной системы

$$(1 - \alpha)Aq = (1 - \alpha)f, \quad (3.6.1)$$

$$\alpha Bq = 0. \quad (3.6.2)$$

Здесь α — параметр регуляризации, а система (3.6.2) описывает условия принадлежности искомого решения q некоторому заданному множеству корректности. Алгоритм вычисления нормального обобщенного r -решения системы (3.6.1)–(3.6.2) подробно описан в [4]. Важно отметить, что алгоритм не использует перехода к нормальной системе уравнений $A^T Aq = A^T f$. Предлагаем читателям рассмотреть алгоритм на следующем примере.

Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма

$$\int_0^5 \frac{q(t) dt}{t + s + 1} = f(s), \quad s \in [0, 4]. \quad (3.6.3)$$

Упражнение 3.6.1. Докажите, что не при всех $f \in C^1[0, 4]$ задача (3.6.3) имеет решение.

Упражнение 3.6.2. Убедитесь, что при бесконечно растущем (с ростом n) решении $q_n(t) = ne^{-n^4(t-1)^2}$ уравнения (3.6.3), правая часть удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} |f_n(s)| &= \left| \int_0^5 \frac{q_n(t) dt}{t + s + 1} \right| \leq \int_0^5 q_n(t) dt \leq n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^4(t-1)^2} dt \\ &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{n}. \end{aligned}$$

Упражнение 3.6.3. Для пробной функции

$$q(t) = \begin{cases} (1 - t/3)^2, & t \in [0, 3], \\ (t/3 - 1)^3, & t \in (3, 5], \end{cases}$$

вычислите правую часть $f(s)$ в (3.6.3) аналитически.

Упражнение 3.6.4. Разделив интервал $[0, 5]$ на 50, а интервал $[0, 4]$ — на 80 равных частей, замените интеграл в левой части (3.6.3) квадратурной формулой и, используя аналитическое решение, вычислите правую часть f_i полученной системы

$$\sum_{j=1}^{50} a_{ij} q_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, 80. \quad (3.6.4)$$

Таким образом, система (3.6.4) совместна и нам известно точное решение, включая вторые производные

$$q''(t) = \begin{cases} -2/3, & t \in [0, 3], \\ 2/3, & t \in (3, 5]. \end{cases} \quad (3.6.5)$$

Упражнение 3.6.5. Вычислите число обусловленности $\mu(A)$, несовместность $\theta(A, f)$ системы (3.6.4) и сингулярные числа матрицы A .

Замечание 3.6.1. Вычисления [4] показали, что $\mu(A) > 10^{15}$, $\theta(A, f) \approx 0,6 \cdot 10^{-15}$, а 39 наименьших сингулярных чисел меньше, чем 10^{-13} , т. е. задача (3.6.4) сильно некорректна.

Построим расширенную систему вида (3.6.1), (3.6.2). Выберем $\alpha = 10^{-8}$, а элементы матрицы

$$B = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,50} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3,50} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{50,1} & b_{50,2} & \dots & b_{50,50} \end{pmatrix}$$

определим по формулам

$$\begin{aligned} b_{j-1,j} &= b_{j+1,j} = 100, & b_{j,j} &= -200, \\ b_{i,j} &= 0 & \text{при } |i-j| &\geq 2. \end{aligned}$$

Такой выбор матрицы B , как нетрудно видеть, отражает условие относительной малости второй производной решения (3.6.5). Иначе говоря, дискретный аналог $Bq = b$ равенства (3.6.5) мы сначала умножим на $\alpha = 10^{-8}$, а затем положим равной нулю правую часть αb , получая $\alpha Bq = 0$.

Упражнение 3.6.6. Вычислите число обусловленности μ матрицы и несовместность θ расширенной системы (3.6.1), (3.6.2) при выбранных значениях α и B .

Замечание 3.6.2. Расчеты [4] показывают, что $\mu = 0,29 \cdot 10^6$, $\theta = 0,4 \cdot 10^{-6}$, а нормальное решение \tilde{q}_n системы (3.6.1), (3.6.2), построенное по приближенным данным $\|f - \tilde{f}\| \leq \|f\| \cdot 0,57 \cdot 10^{-3}$, уклоняется от точного решения q_T системы (3.6.4) на величину $\|q_T - \tilde{q}_n\| \leq 0,39 \cdot 10^{-1} \|q_T\|$.

Таким образом, расширение системы за счет привлечения дополнительной информации о точном решении существенно снижает число обусловленности и позволяет построить приближенное решение.

Упражнение 3.6.7. Исследуйте вопрос согласования точности δ задания правой части f ($\|f - f_\delta\| \leq \delta$) и параметра регуляризации α , используя лемму 3.2.2.

Важно отметить, что нормальное решение системы

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha)A \\ \alpha B \end{bmatrix} q = \begin{bmatrix} (1-\alpha)f \\ 0 \end{bmatrix}$$

с невырожденной составной матрицей коэффициентов может быть получено как решение нормальной системы уравнений

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha)A \\ \alpha B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (1-\alpha)A \\ \alpha B \end{bmatrix} q = \begin{bmatrix} (1-\alpha)A \\ \alpha B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (1-\alpha)f \\ 0 \end{bmatrix},$$

которая является системой с квадратной невырожденной матрицей коэффициентов

$$[(1-\alpha)^2 A^T A + \alpha^2 B^T B]q = (1-\alpha)^2 A^T f.$$

Однако, число обусловленности квадратной матрицы

$$(1-\alpha)^2 A^T A + \tau B^T B$$

равно квадрату числа обусловленности составной матрицы. В разобранном примере при $\alpha = 10^{-4}$ оно оказалось равным $(0,3 \cdot 10^6)^2 = 0,9 \cdot 10^{11}$. Именно это побуждает отыскивать нормальное решение с помощью методики, описанной в [4, §§ 5–7], минуя составление нормальной системы уравнений с очень плохо обусловленной матрицей.

3.7. Метод квадратного корня

При использовании схем регуляризации М. М. Лаврентьева или А. Н. Тихонова приближенное решение находится из систем (3.2.4), (3.2.8) с симметричной положительно определенной, а при разумном выборе α , и хорошо обусловленной $n \times n$ матрицей. Для их решения, наряду с итерационными процессами, можно использовать традиционные прямые методы типа Гаусса, Жордана и др. [3.3, 3.25]. Мы опишем здесь лишь метод квадратного корня, который специально приспособлен для уравнений с симметричными матрицами и отличается экономичностью и устойчивостью.

Метод квадратного корня основан на разложении Холецкого симметричной матрицы

$$A = U^T U, \quad (3.7.1)$$

где U — верхняя треугольная матрица. Обозначая через u_{ij} коэффициенты матрицы U и расписывая равенство (3.7.1) поэлементно, приходим к системе

$$\sum_{k=1}^n u_{ki} u_{kj} = a_{ij} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n). \quad (3.7.2)$$

Разрешая (3.7.2) относительно u_{ij} , получаем расчетные формулы для элементов матрицы U :

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}, \quad u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj} \right)$$

$$(j = i + 1, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n).$$

Теперь для вычисления решения системы достаточно решить две треугольные системы

$$U^T z = f, \quad Uq = z. \quad (3.7.3)$$

Особенно удобен метод квадратного корня для ленточных матриц [3.3], так как схема метода позволяет учитывать структуру матрицы и исключить операции с нулями.

Простая модификация метода квадратного корня ($u_{ij} = 0$ для любого значения i , при котором $u_{ii} = 0$) сохраняет вычислительную процедуру только для случая положительно полуопределенной матрицы. Кроме того, клеточные аналоги метода квадратного корня [3.2, 3.6] позволяют эффективно решать системы высокого порядка, привлекая память ЭВМ второго уровня.

3.8. Дополнительные сведения и упражнения

В приведенном ниже списке каждое предложение является либо определением, либо утверждением. Читателю предлагается понять, какие предложения являются утверждениями и доказать их.

В случае затруднения доказательства можно найти в книгах [3.5, 4].

Псевдорешение. Если система $Aq = f$ совместна, то среди ее решений существует одно, имеющее минимальную длину. Это решение q_n называется нормальным.

Среди всех решений системы $Aq = f$ нормальное решение является единственным, которое ортогонально ядру $N(A)$ матрицы A , и является единственным, которое принадлежит образу $R(A^T)$ матрицы A^T .

Вектор $y = Aq - f$ называется невязкой вектора q .

Псевдорешением q_n или обобщенным решением системы $Aq = f$ называется решение системы $A^T Aq = A^T f$.

Среди всех векторов пространства Q псевдорешения q_n и только они обеспечивают:

- ортогональность вектора невязки $y = Aq - f$ образу матрицы A ;
- минимальность длины вектора невязки $y = Aq - f$.

Пусть задана система $Aq = f$. Рассмотрим вектор \hat{f} , равный проекции вектора f на образ $R(A)$ матрицы A . Система $Aq = \hat{f}$ всегда совместна, и множество ее решений совпадает с множеством Q_f^n псевдорешений исходной системы.

Нормальным псевдорешением системы $Aq = f$ называется нормальное решение системы $A^T Aq = A^T f$.

Среди всех псевдорешений $q_{\text{н}} \in Q_f^{\text{н}}$ нормальное псевдорешение $q_{\text{нп}}$ и только оно обеспечивает:

- минимальность длины псевдорешения, т. е. $q_{\text{нп}} = \arg \min_{q_{\text{н}} \in Q_f^{\text{н}}} \|q_{\text{н}}\|$;
- ортогональность ядру $N(A)$ матрицы A , т. е. $q_{\text{нп}} \perp N(A)$;
- принадлежность образу $R(A^T)$ матрицы A^T , т. е. $q_{\text{нп}} \in R(A^T)$.

Нормальное псевдорешение $q_{\text{нп}}$ равно нулю тогда и только тогда, когда вектор правых частей f принадлежит ядру матрицы A^T , т. е. $q_{\text{нп}} = 0 \Leftrightarrow f \in N(A^T)$.

Если разрешимость системы линейных алгебраических уравнений $Aq = f$ не гарантируется, то всегда можно заменить решение этой системы решением системы $A^T Aq = A^T f$. При этом обеспечивается минимальность нормы невязки $Aq - f$, а в случае нахождения нормального псевдорешения обеспечивается также минимальность нормы самого псевдорешения. Переход от системы $Aq = f$ к системе $A^T Aq = A^T f$ называется первой трансформацией Гаусса или методом наименьших квадратов. Последнее название связано с тем, что формальное выписывание условий минимальности квадрата нормы невязки $\|Aq - f\|^2$ приводит к уравнению $A^T Aq = A^T f$.

Заметим, что все перечисленные свойства нормального псевдорешения эквивалентны. Поэтому, проверяя одно из них, можно быть уверенным, что выполняются и другие.

Псевдообратная матрица. В случае невырожденной матрицы решение системы $Aq = f$ находится с помощью обратной матрицы. Обратная матрица играет существенную роль при выполнении многих исследований, но она определена лишь для невырожденных матриц. Аналог обратной матрицы для вырожденных и прямоугольных матриц может быть построен на основе нормальных псевдорешений.

Пусть задана произвольная прямоугольная матрица A . Каждому вектору $f \in F$ поставим в соответствие вектор $q_{\text{нп}} \in Q$, являющийся нормальным псевдорешением системы $Aq = f$. Это соответствие порождает отображение $q_{\text{нп}} = A^\dagger f$ пространства F в пространство Q с помощью некоторого оператора A^\dagger . Оператор A^\dagger называется псевдообратным или обобщенным обратным.

Псевдообратный оператор является линейным.

Матрица псевдообратного оператора в естественных базисах называется псевдообратной или обобщенной обратной для матрицы A и обозначается A^\dagger .

Если матрица A имеет размер $m \times n$, то матрица A^\dagger имеет размер $n \times m$.

Для нормального псевдорешения $q_{\text{нп}}$ системы линейных алгебраических уравнений $Aq = f$ справедливо равенство $q_{\text{нп}} = A^\dagger f$.

Матрица, псевдообратная для нулевой, является нулевой.

Каждый вектор-столбец матрицы A^\dagger ортогонален ядру матрицы A .

Каждый вектор-столбец матрицы A^\dagger есть линейная комбинация вектор-столбцов сопряженной матрицы A^* (в вещественном случае $A^* = A^T$).

Матрица A^\dagger представима в виде $A^\dagger = A^*V$, где V — некоторая квадратная матрица.

Обозначим через a_i^* вектор-столбец с номером i матрицы A^* , через a_i^\dagger вектор-столбец с номером i матрицы A^\dagger . Система вектор-столбцов $a_{i_1}^\dagger, \dots, a_{i_r}^\dagger$ линейно зависима (линейно независима) тогда и только тогда, когда система линейно зависима (линейно независима) система вектор-столбцов $a_{i_1}^*, \dots, a_{i_r}^*$. Это верно для любой выборки индексов i_1, \dots, i_r .

Для любой матрицы A выполняется равенство $\text{rang } A^\dagger = \text{rang } A^*$.

Рассмотрим матричное уравнение $A^*AZ = A^*$, где $m \times n$ -матрица A задана, $n \times m$ -матрица Z неизвестна. Матрица A^\dagger удовлетворяет этому уравнению, т. е. $A^*AA^\dagger = A^*$.

Каждая вектор-строка матрицы A^* есть линейная комбинация вектор-строк матрицы A^\dagger .

Каждая вектор-строка матрицы A^\dagger есть линейная комбинация вектор-строк матрицы A^* .

Матрица A^\dagger представима в виде $A^\dagger = UA^*$, где U — некоторая квадратная матрица.

Образы и ядра псевдообратной матрицы A^\dagger и сопряженной матрицы A^* совпадают, т. е. $R(A^\dagger) = R(A^*)$, $N(A^\dagger) = N(A^*)$.

Среди всех решений матричного уравнения $A^*AZ = A^*$ матрица A^\dagger имеет минимальный ранг.

Среди всех решений матричного уравнения $A^*AZ = A^*$ матрица A^\dagger имеет минимальную сумму квадратов модулей элементов по каждому столбцу.

Среди всех решений матричного уравнения $A^*AZ = A^*$ матрица A^\dagger имеет минимальную сумму квадратов модулей всех элементов.

Рассмотрим $m \times n$ -матрицу A и единичную $n \times n$ -матрицу I . Составим $n \times n$ -матрицу $B(Z) = AZ - I$, где Z — любая $n \times m$ -матрица. Среди всех матриц Z матрица A^\dagger минимизирует сумму квадратов модулей всех элементов матрицы $B(Z)$, и среди всех матриц, минимизирую-

щих эту сумму, минимизирует сумму квадратов модулей всех элементов матрицы Z .

Если матрица A невырожденная, то $B(A^{-1}) = 0$ и, следовательно, сумма квадратов модулей элементов матрицы $B(Z)$ на матрице A^{-1} достигает своего абсолютного минимума. Матрица A^\dagger минимизирует эту сумму в случае произвольной матрицы A . Это обстоятельство также подчеркивает “похожесть” псевдообратной и обратной матриц.

До сих пор мы рассматривали свойства псевдообратной матрицы как свойства матрицы псевдообратного оператора в естественных базисах. Многие свойства псевдообратной матрицы удобнее изучать, используя эквивалентное матричное определение.

Матрица F является нулевой тогда и только тогда, когда является нулевой хотя бы одна из матриц F^*F или FF^* .

Пусть дана $m \times n$ -матрица A . Рассмотрим матричные соотношения

$$A^*AX = A^*, \quad X = UA^* = A^*V,$$

определяющие неизвестную $n \times m$ -матрицу X , где U и V — некоторые квадратные матрицы размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно. Этим соотношениям удовлетворяет матрица $X = A^\dagger$ и только она.

Определения псевдообратной матрицы эквивалентны.

Если $m \times n$ -матрица A имеет полный ранг, то

$$A^\dagger = \begin{cases} (A^*A)^{-1}A^*, & n \leq m, \\ A^*(AA^*)^{-1}, & n \geq m. \end{cases}$$

Отметим, что кроме указанных существует много других эквивалентных определений псевдообратной матрицы. Доказательство эквивалентности облегчается тем, что для псевдообратной матрицы известно матричное представление.

Пусть A — $m \times n$ -матрица ранга $r > 0$. Существуют $m \times r$ -матрица B и $r \times n$ -матрица C , такие, что $\text{rank } B = r$, $\text{rank } C = r$ и $A = BC$.

Разложение $A = BC$ называется *скелетным разложением матрицы* A .

В скелетном разложении в качестве столбцов матрицы B можно взять любые базисные столбцы матрицы A . Тогда столбцы матрицы C состоят из коэффициентов линейных комбинаций, с помощью которых выражаются все столбцы матрицы A через базисные.

Если матрица A представлена своим скелетным разложением $A = BC$, то

$$A^\dagger = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = C^*(B^*AC^*)^{-1}B^*,$$

$$A^* = C^*B^*, \quad A^\dagger = C^\dagger B^\dagger,$$

$$C^\dagger = C^*(CC^*)^{-1}, \quad B^\dagger = (B^*B)^{-1}B^*$$

суть скелетные разложения соответственно для матриц A^* , A^\dagger , C^\dagger , B^\dagger .

Матрицы A , A^\dagger , A^* связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned}(A^*)^\dagger &= (A^\dagger)^*, & (A^\dagger)^\dagger &= A, \\ (AA^\dagger)^* &= AA^\dagger, & (AA^\dagger)^2 &= AA^\dagger, \\ (A^\dagger A)^* &= A^\dagger A, & (A^\dagger A)^2 &= A^\dagger A, \\ A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger, & AA^\dagger A &= A.\end{aligned}$$

Пусть дана $m \times n$ -матрица A . Рассмотрим матричные соотношения

$$AXA = A, \quad X = UA^* = A^*V,$$

определяющие неизвестную $n \times m$ -матрицу X , где U и V — квадратные матрицы размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно. Этим соотношениям удовлетворяет матрица $X = A^\dagger$ и только она.

Уравнения Пенроуза. Пусть дана $m \times n$ -матрица A . Рассмотрим матричные соотношения

$$\begin{aligned}AXA &= A, & XAX &= X, \\ (XA)^* &= XA, & (AX)^* &= AX,\end{aligned}$$

определяющие $n \times m$ -матрицу X . Этим соотношениям удовлетворяет матрица $X = A^\dagger$ и только она.

Псевдорешения системы $Aq = f$ и только они являются решениями системы $Aq = AA^\dagger f$.

Сингулярное разложение. Какова бы ни была прямоугольная $m \times n$ -матрица A , матрицы A^*A и AA^* эрмитовы и имеют неотрицательные главные миноры.

Ненулевые собственные значения матриц A^*A и AA^* всегда совпадают и положительны.

Арифметические значения квадратных корней из общих собственных значений матриц A^*A и AA^* называются сингулярными (главными) числами матрицы A .

Всюду в дальнейшем будем обозначать ненулевые сингулярные числа матрицы A через $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ и предполагать, что они занумерованы в порядке невозрастания, т. е. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ ($r \leq p = \min(m, n)$). Сингулярные числа σ_{r+1}, \dots будем считать нулевыми (если $r < p$).

Пусть A — прямоугольная $m \times n$ -матрица. Обозначим через x_1, \dots, x_n ортонормированные собственные векторы матрицы A^*A . Тогда:

- система векторов Ax_1, \dots, Ax_n является ортогональной;
- ненулевой вектор Ax_k является собственным вектором матрицы AA^* и соответствует собственному значению σ_k^2 ;
- для всех k выполняется равенство $|Ax_k| = \sigma_k$.

Пусть A — прямоугольная $m \times n$ -матрица. Всегда существуют ортонормированные системы векторов x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_m , такие, что

$$Ax_k = \begin{cases} \sigma_k y_k, & k \leq r, \\ 0, & k > r, \end{cases} \quad A^* y_k = \begin{cases} \sigma_k x_k, & k \leq r, \\ 0, & k > r. \end{cases}$$

Ортонормированные системы x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_m называются сингулярными базисами матрицы A .

Квадратная матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда все ее сингулярные числа отличны от нуля:

$$|\det A|^2 = \det A^* A = \prod_{i=1}^m \sigma_i^2.$$

Пусть для матрицы A известно сингулярное разложение $A = U \Sigma V^T$. Тогда для псевдообратной матрицы A^\dagger имеем представление $A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^T$.

Предположим, что у диагональной $m \times n$ -матрицы Σ первые диагональные элементы $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ отличны от нуля, а остальные равны нулю. Матрица Σ^\dagger есть диагональная $n \times m$ -матрица, у которой первые диагональные элементы равны $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}$, а остальные равны нулю.

Для любой $m \times n$ -матрицы A с элементами a_{ij} и сингулярными числами σ_k выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{k=1}^{\min(m,n)} \sigma_k^2.$$

Для любой квадратной $m \times m$ -матрицы A с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и сингулярными числами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \geq \sum_{i=1}^m |\lambda_i|^2,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда матрица A нормальная.

Связь сингулярного разложения и регуляризации Тихонова. Пусть $A = U \Sigma V^T$, где Σ — диагональная $m \times n$ -матрица, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$, $p = \min\{m, n\}$. Тогда решение q_α уравнения

$$\alpha q + A^T A q = A^T f, \quad \alpha > 0,$$

имеет вид

$$q_\alpha = V \Sigma_\alpha U^T f, \quad \Sigma_\alpha = \text{diag} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha}, \frac{\sigma_2}{\sigma_2^2 + \alpha}, \dots, \frac{\sigma_p}{\sigma_p^2 + \alpha} \right).$$

Контрольные вопросы

1. Составьте общую схему главы в виде диаграммы.
2. Сравните основные понятия и методы с теми, которые изложены в главе 2.
3. Попытайтесь выполнить упражнения, приведенные в разделе 3.8.

Дополнительная литература

- 3.1. **Вайникко Г. М.** Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач // Автоматика и телемеханика. 1980. № 3. С. 84–92.
- 3.2. **Васин В. В.** Дискретизация, итерационно-аппроксимационные алгоритмы решения неустойчивых задач и их приложения: Диссертация (док. физ.-мат. наук). Свердловск, 1985.
- 3.3. **Воеводин В. В.** Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. Москва: Наука, 1966.
- 3.4. **Воеводин В. В.** Линейная алгебра. Москва: Наука, 1974.
- 3.5. **Воеводин В. В., Воеводин Вл. В.** Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ. СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
- 3.6. **Волович В. М.** О решении систем линейных уравнений клеточными методами // Вычисл. методы и программир. М.: Изд-во МГУ, 1965. Вып. 3. С. 106–133.
- 3.7. **Годунов С. К.** Решение систем линейных уравнений. М.: Наука, 1980.
- 3.8. **Годунов С. К.** Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002.
- 3.9. **Гордонова В. И., Морозов В. А.** Численные алгоритмы выбора параметров в методе регуляризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13, № 3. С. 539–545.
- 3.10. **Джумаев С.** О приближенном вычислении псевдорешения // Докл. АН Тадж. ССР. 1982. Т. 25, № 10. С. 584–587.
- 3.11. **Заикин П. Н., Меченов А. С.** Некоторые вопросы численного решения интегральных уравнений первого рода методом регуляризации // Отчет ВЦ МГУ. № 144-ТЗ. Изд-во МГУ, 1971.
- 3.12. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва: Наука, 1978.
- 3.13. **Лоусон Ч., Хенсон Р.** Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.

- 3.14. **Молчанов И. Н.** Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций. Киев: Наукова думка, 1987.
- 3.15. **Молчанов И. Н.** Проблемы создания пакетов программ линейной алгебры // Вычислительные методы линейной алгебры: Тр. Всесоюз. конф. (М., 23–25 августа 1982 г.). М., 1983. С. 187–202.
- 3.16. **Морозов В. А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. Москва: Наука, 1987.
- 3.17. **Назимов А. Б.** Исследование метода регуляризации сдвигом и его приложения: Диссертация ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 1986.
- 3.18. **Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К.** Оптимизация в технике: В 2 томах. Москва: Мир, 1986.
- 3.19. **Тихонов А. Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
- 3.20. **Тихонов А. Н.** О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1980. Т. 20, № 6. С. 1373–1383.
- 3.21. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1974.
- 3.22. **Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.** Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. Москва: Наука, 1983.
- 3.23. **Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.** Численные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1990.
- 3.24. **Уилкинсон Дх. Х., Райнш К.** Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. Москва: Машиностроение, 1976.
- 3.25. **Фадеев Д. К., Фадеева В. Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. Москва: Физматгиз, 1963.
- 3.26. **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений. Москва: Мир, 1980.
- 3.27. **Форсайт Дж., Моулер К.** Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Москва: Мир, 1969.
- 3.28. **Cline A. K., Moler C. B., Stewart C. W., Wilkinson J. H.** An estimate for the condition number of a matrix // SIAM J. Numer. Analysis. 1979. V. 16, N 2. P. 368–375.
- 3.29. **Fiedler M.** Special matrices and their applications in numerical mathematics. Dordrecht etc.: Mijhoff Publ., 1986.
- 3.30. **Golub G. H.** Least squares, singular values and matrix approximations // Aplikace matematiky. 1968. V. 13, N 1. P. 44–51.

- 3.31. **Greville T. N. E.** Some applications of the pseudoinverse of a matrix // *SIAM Rev.* 1960. V. 2, N 1. P. 15–22.
- 3.32. **Legendre A. M.** *Novelles methodes pour la determination des orbites des cometes.* Paris: Courcier, 1806.
- 3.33. **Mohamed J. L., Walsh J. E. (Eds).** *Numerical algorithms.* Oxford, 1986.
- 3.34. **Penrose R. A.** A generalized inverse for matrices // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1955. V. 51, N 3. P. 406–413.
- 3.35. **Vasin V. V.** Iterative methods for the approximate solution of ill-posed problems with a priori information and their applications // *Inverse and Ill-Posed Problems.* Boston etc.: Acad. Press, 1987. P. 211–229. (Notes & Reports in Math., in Sci. & Eng.; V. 4).

Глава 4.

Интегральные уравнения

Интегральные уравнения первого рода являются наилучшим объектом для первого знакомства с некорректными задачами в бесконечномерных пространствах. С одной стороны, проще примера не придумать. С другой — компактность интегральных операторов порождает практически непреодолимые (в общем случае) трудности в их обращении.

Сравнительная простота материала, изложенного в начальных разделах главы, не должна вводить в заблуждение читателя, которому было бы полезно для каждой из рассмотренных задач найти практический пример и, наоборот, попытаться построить и проанализировать какое-либо обобщение.

Наиболее сложными являются разделы 4.3–4.6, однако их результаты обобщаются на широкий класс коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений.

4.1. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Aq(x) = \int_a^b K(x, s)q(s) ds = f(x), \quad x \in (a, b). \quad (4.1.1)$$

Некорректность уравнения (4.1.1) можно проиллюстрировать на следующем простом примере. Пусть ядро $K(x, s)$ и функция $f(x)$ постоянны. Тогда уравнение (4.1.1) сводится к задаче восстановления кривой по известной площади фигуры, которую она ограничивает. Очевидно, такая задача имеет по крайней мере, континуум решений.

Предположим, что ядро $K(x, s)$ вещественно и симметрично, т. е. $K(s, x) = K(x, s)$. Предположим также, что $K(x, s) \in L_2((a, b)^2)$, $q \in$

$Q = L_2(a, b)$, $f(x) \in F = L_2(a, b)$. Тогда существует полная ортонормированная последовательность собственных функций $\{\varphi_n(x)\}$ и последовательность соответствующих собственных значений $\{\lambda_n\}$ ($\lambda_{n+1} \leq \lambda_n$), $\lambda_n \in \mathbb{R}$, оператора A , такие, что

$$A\varphi_n(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi_n(s) ds = \lambda_n\varphi_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Полнота системы $\{\varphi_n(x)\}$ означает, что любая функция $f(x) \in F$, такая, что $\|f\|_{L_2(a,b)} < \infty$, представима в виде ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n(x).$$

Ниже мы убедимся, что случай, когда все $\lambda_n \neq 0$, существенно отличается от общего. Ядро $K(x, s)$ представимо в виде ряда

$$K(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\varphi_n(x)\varphi_n(s),$$

который сходится по норме:

$$\|K(x, s)\| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty.$$

Следовательно, $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим случай вырожденного ядра $K(x, s)$, т. е. когда $\lambda_n \neq 0$ при $1 \leq n \leq n_0$ и все $\lambda_n = 0$ при $n > n_0$.

Подставив ядро

$$K(x, s) = \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n\varphi_n(x)\varphi_n(s)$$

в (4.1.1), получим

$$\begin{aligned} \int_a^b K(x, s)q(s)ds &= \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_n(s)q(s)ds \\ &= \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n(\varphi_n, q)\varphi_n(x) = f(x). \end{aligned}$$

Следовательно, задача (4.1.1) может иметь решение только в том случае, когда $f(x)$ является линейной комбинацией $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n_0}(x)$, т. е. записывается в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n_0} f_n\varphi_n(x).$$

Упражнение 4.1.1. Убедитесь, что в случае вырожденного ядра решением является функция

$$q(x) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{f_n}{\lambda_n} \varphi_n(x),$$

а соответствующий интегральный оператор — вырожденный (обратное, вообще говоря, неверно).

Упражнение 4.1.2. Докажите, что любая функция $q(x)$, представляемая в виде

$$q(x) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{f_n}{\lambda_n} \varphi_n(x) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

где $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, также будет решением уравнения (4.1.1).

Таким образом, в случае вырожденного ядра задача (4.1.1) может в зависимости от правой части $f(x)$ либо не иметь решения, либо иметь бесконечно много решений.

Рассмотрим случай, когда все $\lambda_n \neq 0$. Если $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} < \infty$, то $f(x)$ представима в виде ряда Фурье, сходящегося по норме пространства L_2 :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x), \quad f_n = \langle f, \varphi_n \rangle, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 = \|f\|^2.$$

$$\text{Положим } S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f_n}{\lambda_n} \right)^2.$$

Упражнение 4.1.3. Докажите, что при $S < \infty$ функция $q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \varphi_n(x)$ является решением уравнения (4.1.1).

Упражнение 4.1.4. Докажите, что при $S = \infty$ задача (4.1.1) не имеет решения.

Упражнение 4.1.5. Убедитесь, что задача (4.1.1) при условии, что $\lambda_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, не может иметь двух различных решений (решения, отличающиеся на множестве меры нуль, считаются совпадающими).

Таким образом, если $\lambda_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то задача (4.1.1) имеет не более одного решения, причем решение существует лишь для тех правых частей, для которых $S < \infty$.

Упражнение 4.1.6. Исследуйте задачу (4.1.1) в случае, когда имеется бесконечное число λ_n , отличных от нуля, и бесконечное число λ_n , равных нулю.

Разумеется, определение решения уравнения (4.1.1) в виде ряда возможно лишь в случае, когда $\{\lambda_n\}$ и $\{\varphi_n(x)\}$ заданы. Для численного решения практических задач вида (4.1.1) применяют следующие методы:

- дискретизация (4.1.1) в сочетании с методом регуляризации Тихонова [2];
- итеративная регуляризация [3];
- сингулярное разложение в сочетании с регуляризацией [4].

Задача с возмущенными данными. В задачах интерпретации результатов наблюдений, или, что то же самое, в задачах их обработки, часто возникает следующая ситуация. Исследователя интересует некоторая функция $q(x)$. Но в процессе эксперимента измеряется не $q(x)$, а другая функция $f(x)$, связанная с $q(x)$ соотношением $f(x) = \int_a^b K(x, s)q(s)ds$, причем значения функции $f(x)$ измеряются с ошибками.

Таким образом, изначально известно, что задача

$$\int_a^b K(x, s)q(s)ds = f(x)$$

имеет решение, но ее решение можно найти только приближенно из уравнения

$$\int_a^b K(x, s)q(s)ds = f_\delta(x). \quad (4.1.2)$$

Предполагается, что норма погрешности измерения $f(x)$ мала:

$$\|f - f_\delta\| \leq \delta. \quad (4.1.3)$$

Пусть $q_T(x)$ — решение задачи (4.1.1), а $q_\delta(x)$ — решение задачи (4.1.2). Обозначим $\tilde{q} = q_T - q_\delta$, $\tilde{f} = f - f_\delta$. Тогда $\tilde{q}(x)$ является решением интегрального уравнения

$$\int_a^b K(x, s)\tilde{q}(s)ds = \tilde{f}(x). \quad (4.1.4)$$

Положим $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n \varphi_n(x)$. Условие (4.1.3) означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{f}_n|^2 \leq \delta^2.$$

Рассмотрим сначала случай, когда все $\lambda_n \neq 0$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{f}_n}{\lambda_n}\right)^2$ расходится, то уравнение (4.1.4) не имеет решения. Даже если этот ряд сходится, нельзя гарантировать, что погрешность $\tilde{q}(x)$ будет стремиться к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

В самом деле, среди всех правых частей \tilde{f} с $\|\tilde{f}\| \leq \delta$ имеется правая часть $\tilde{f} = \varphi_n(x)$, соответствующая такому n , что $|\lambda_n| \leq \delta$. Тогда $\tilde{q} = (\delta/\lambda_n)\varphi_n(x)$, т. е. $\|\tilde{q}\| = \delta/|\lambda_n| > 1$.

Регуляризация. Рассмотрим уравнение

$$\alpha q(x) + \int_a^b K(x, s)q(s)ds = f_\delta(x), \quad \alpha > 0, \quad (4.1.5)$$

где α — параметр регуляризации.

Теорема 4.1.1. Пусть все собственные значения оператора

$$Aq = \int_a^b K(x, s)q(s)ds, \quad x \in (a, b),$$

положительны. Предположим, что для некоторого $f \in L_2(a, b)$ существует решение $q_T \in L_2(a, b)$ уравнения (4.1.1). Тогда найдутся $\alpha_*, \delta_* \in R_+$, такие, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_*)$, $\delta \in (0, \delta_*)$ и при любых $f_\delta \in L_2(a, b)$, удовлетворяющих (4.1.3), решение $q_{\alpha\delta}$ уравнения (4.1.5) существует и справедлива оценка

$$\|q_{\alpha\delta} - q_T\| \leq \frac{\delta}{\alpha} + \omega(\alpha). \quad (4.1.6)$$

Здесь функция $\omega(\alpha)$ стремится к нулю при $\alpha \rightarrow 0$.

Доказательство. Обозначим решение уравнения (4.1.5) через $q_{\alpha\delta}(x)$ и будем искать это решение в виде ряда по собственным функциям оператора A :

$$q_{\alpha\delta}(x) = \sum q_{\alpha\delta n} \varphi_n(x). \quad (4.1.7)$$

Пусть $\tilde{f}(x) = f_\delta(x) - f(x)$, тогда

$$f_\delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{\delta n} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{f}_n + f_n) \varphi_n(x), \quad (4.1.8)$$

где $f_{\delta n} = \langle f_\delta, \varphi_n \rangle$, $\tilde{f}_n = \langle \tilde{f}, \varphi_n \rangle$.

Умножим (4.1.5) на $\varphi_n(x)$ и проинтегрируем по x от a до b . Учитывая вид ядра, ортонормированность системы функций $\{\varphi_n(x)\}$, а также (4.1.7) и (4.1.8), получим

$$\alpha q_{\alpha\delta n} + \lambda_n q_{\alpha\delta n} = \tilde{f}_n + f_n = f_{\delta n}. \quad (4.1.9)$$

Следовательно, регуляризованное решение, построенное по приближенным данным, имеет вид

$$q_{\alpha\delta}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f\delta_n}{\alpha + \lambda_n} \varphi_n(x), \quad (4.1.10)$$

$$q_{\alpha\delta n} = \frac{f\delta_n}{\alpha + \lambda_n} = \frac{\tilde{f}_n + f_n}{\alpha + \lambda_n}. \quad (4.1.11)$$

Тогда погрешность

$$\tilde{q}(x) = q_T(x) - q_{\alpha\delta}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\tilde{f}_n + f_n}{\alpha + \lambda_n} \right) \varphi_n(x)$$

можно представить в виде суммы

$$\tilde{q}(x) = \tilde{\beta}_\alpha(x) + \beta_\alpha(x), \quad (4.1.12)$$

в которой

$$\tilde{\beta}_\alpha(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_n}{\alpha + \lambda_n} \varphi_n(x), \quad \beta_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha q_n}{\alpha + \lambda_n} \varphi_n(x).$$

Оценим сначала $\tilde{\beta}_\alpha$, учитывая, что $\lambda_n \geq 0$:

$$\|\tilde{\beta}_\alpha\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n^2 = \frac{\delta^2}{\alpha^2}. \quad (4.1.13)$$

Для оценки второго слагаемого $\beta_\alpha(x)$ вспомним, что по предположению теоремы точное решение $q_T(x)$ существует и принадлежит $L_2(a, b)$. Следовательно, норма q_T конечна. Обозначим

$$\|q_T\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 = q_*, \quad \omega(\alpha) = \|\beta_\alpha\|$$

и докажем, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \omega^2(\alpha) = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем такое α_* , что при всех $\alpha \in (0, \alpha_*)$ выполняется неравенство $\omega^2(\alpha) \leq \varepsilon$. Для $\varepsilon/2$ существует номер n_* , такой, что

$$\sum_{n=n_*}^{\infty} q_n^2 < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Значит,}$$

$$\sum_{n=n_*}^{\infty} \frac{\alpha^2 q_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{n_*-1} \frac{\alpha^2 q_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} \leq \alpha^2 \mu_* q_*,$$

где $\mu_* = \min_{n=1, n_*} \{1/\lambda_n\}$. Положим

$$\alpha_* = \sqrt{\varepsilon / (2\mu_* q_*)}.$$

Тогда при всех $\alpha \in (0, \alpha_*)$

$$\omega^2(\alpha) = \|\beta_\alpha\|^2 \leq \sum_{n=1}^{n_*-1} \frac{\alpha^2 q_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} + \sum_{n=n_*}^{\infty} \frac{\alpha^2 q_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} < \varepsilon.$$

Из (4.1.12) и (4.1.13) получаем

$$\|q_T - q_{\alpha\delta}\| \leq \|\tilde{\beta}_\alpha\| + \|\beta_\alpha\| \leq \frac{\delta}{2} + \omega(\alpha),$$

что и требовалось доказать. \square

Покажем, что описанный метод регуляризации применим и в случае, когда некоторые из λ_n могут обращаться в нуль.

Обозначим через N_1 множество таких номеров n , что $\lambda_n > 0$, а через N_0 — множество n , соответствующих $\lambda_n = 0$. (Каждое из этих множеств может быть как конечным, так и бесконечным; одновременно оба конечными быть не могут.) Пусть $q(x) = \sum_n q_n \varphi_n(x)$, $\sum_n q_n^2 < \infty$, — одно из решений уравнения (4.1.1). Тогда для любых $a_n \in \mathbb{R}$, таких, что $\sum_{n \in N_0} a_n^2 < \infty$ и $\sum_{n \in N_1} a_n^2 = 0$, функция $\sum_n (q_n + a_n) \varphi_n(x)$ также будет решением уравнения (4.1.1).

Положим $q^0(x) = \sum_{n \in N_1} q_n \varphi_n(x)$. Согласно изложенному ранее $q^0(x)$

также является решением уравнения (4.1.1).

Упражнение 4.1.7. Пусть $q(x) \neq q^0(x)$ — любое другое решение уравнения (4.1.1). Покажите, что

$$\|q\| > \|q^0\|. \quad (4.1.14)$$

Напомним, что решение уравнения (4.1.1) с минимальной нормой (в случае неединственного решения) называется нормальным. Из (4.1.14) следует, что $q^0(x)$ — нормальное решение задачи.

Теорема 4.1.2. Пусть $q^0(x) = \sum_{n \in N_1} q_n \varphi_n(x)$, $\|q^0\|^2 = \sum_{n \in N_1} q_n^2 < \infty$,

— нормальное решение уравнения (4.1.1). Тогда справедливо неравенство $\|q_{\alpha\delta} - q^0\| \leq \delta/\alpha + \omega(\alpha)$, где $\omega(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Доказательство несущественным образом отличается от доказательства теоремы 4.1.1.

Рассмотрим теперь случай, когда ядро $K(x, s)$ несимметрично. Определим сопряженный оператор A^* соотношением

$$A^*p(x) = \int_a^b K(s, x)p(s) ds, \quad p \in L_2(a, b).$$

Применим к уравнению (4.1.2) оператор A^* :

$$A^* Aq = A^* f_\delta.$$

В полученном уравнении ядро оператора $A^* A$ симметрично.

Обозначим через $q_{\alpha\delta}^*(x)$ решение уравнения

$$\alpha q(x) + A^* Aq = A^* f_\delta(x).$$

Упражнение 4.1.8. Докажите сходимость $q_{\alpha\delta}^* \rightarrow q$ к квазирешению уравнения (4.1.1) при согласованном стремлении к нулю α и ε .

4.2. Регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода

Интегральные уравнения Вольтерра первого рода

$$\int_0^x K(x, t)q(t)dt = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad (4.2.1)$$

можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_0^1 \bar{K}(x, t)q(t)dt = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

с ядром специального вида

$$\bar{K}(x, t) = \begin{cases} K(x, t), & t \in [0, x], \\ 0, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

Поэтому к уравнению (4.2.1) можно применить все рассуждения раздела 4.1. Однако наличие переменного предела интегрирования в (4.2.1) (вольтерровость уравнения) позволяет строить и другие методы регуляризации. Наиболее простым является дифференцирование. Предположим, что уравнение (4.2.1) имеет решение $q_T \in C[0, 1]$, а функции $K(x, t)$ и $f(x)$ имеют непрерывные производные по x . Тогда q_T будет также решением уравнения

$$q(x)K(x, x) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x}(x, t)q(t)dt = f'(x), \quad (4.2.2)$$

полученного из (4.2.1) дифференцированием по x .

Если $K(x, x) \neq 0$ при всех $x \in [0, 1]$, то уравнение (4.2.2) является частным случаем интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Ниже мы рассмотрим также вольтерровскую регуляризацию. Помимо дифференцирования и вольтерровской регуляризации можно применять дискретную регуляризацию уравнения (4.2.1), которая при определенных условиях приводит к так называемой саморегуляризации, где шаг дискретизации играет роль параметра регуляризации [4.2].

Интегральные уравнения Вольтерра второго рода в $C[0, T]$ и $L_2(0, T)$. Рассмотрим уравнение Вольтерра второго рода

$$q(x) = g(x) + \int_0^x P(x, t)q(t)dt, \quad x \in [0, T], \quad (4.2.3)$$

относительно неизвестной функции $q(x)$.

Покажем, что задача (4.2.3) корректна.

Теорема 4.2.1. Пусть $g \in C[0, T]$, $P(x, t) \in C(0 \leq t \leq x \leq T)$. Тогда задача (4.2.3) классически корректна в $C[0, T]$.

Доказательство. Определим оператор

$$(Vq)(x) = g(x) + \int_0^x P(x, t)q(t)dt, \quad x \in [0, T],$$

и норму, зависящую от параметра $\beta \geq 0$:

$$\|q\|_\beta = \sup_{x \in [0, T]} \{|q(x)|e^{-\beta x}\}.$$

Из определения нормы следует, что

$$\|q\|_0 = \|q\|_{C[0, T]}, \quad \|q\|_\beta \leq \|q\|_{C[0, T]} \leq e^{\beta T} \|q\|_\beta. \quad (4.2.4)$$

Обозначим

$$G_0 = \|g\|_{C[0, T]}, \quad P_0 = \sup_{x \in [0, T], t \in [0, x]} |P(x, t)|$$

и докажем, что при любых фиксированных $T > 0$, $\gamma > 0$, и любом β , удовлетворяющем условию

$$\max \{P_0, P_0(G_0 + \gamma)/\gamma\} < \beta, \quad (4.2.5)$$

оператор V отображает шар

$$B(g, \gamma, \beta) = \{p(x) \in C[0, T] : \|p - g\|_\beta \leq \gamma\}$$

в себя и является в этом шаре оператором сжатия. Пусть $r \in B(g, \gamma, \beta)$, т. е. $\|g - r\|_\beta \leq \gamma$ и, значит, $\|r\|_\beta \leq \|g\|_\beta + \gamma \leq G_0 + \gamma$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} |(Vr)(x) - g(x)| &\leq \int_0^x |P(x, t)r(t)| dt \leq P_0 \int_0^x |r(t)|e^{-\beta t} e^{\beta t} dt \\ &\leq P_0 \|r\|_\beta \int_0^x e^{\beta t} dt = P_0 \|r\|_\beta \frac{1}{\beta} (e^{\beta x} - 1), \quad x \in [0, T]. \end{aligned}$$

Но тогда для всех $x \in [0, T]$

$$|(Vr)(x) - g(x)|e^{-\beta x} \leq P_0 \|r\|_\beta \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta x}) \leq \frac{P_0}{\beta} \|r\|_\beta.$$

Значит, в силу (4.2.5)

$$\|Vr - g\|_\beta \leq \frac{P_0}{\beta} \|r\|_\beta \leq \frac{P_0(G_0 + \gamma)}{\beta} < \gamma,$$

т. е. $Vr \in B(g, \gamma, \beta)$.

Пусть теперь $r_1, r_2 \in B(g, \gamma, \beta)$. Тогда, рассуждая аналогично, оцениваем

$$\begin{aligned} |(Vr_1)(x) - (Vr_2)(x)| &\leq \int_0^x |P(x, t)| |r_1(t) - r_2(t)| dt \\ &\leq P_0 \|r_1 - r_2\|_\beta \frac{1}{\beta} (e^{\beta x} - 1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|Vr_1 - Vr_2\|_\beta \leq \frac{P_0}{\beta} \|r_1 - r_2\|_\beta.$$

В силу (4.2.5) $P_0/\beta < 1$. Значит, оператор V не только отображает шар $B(g, \gamma, \beta)$ в себя, но и является на этом шаре оператором сжатия. Следовательно, по теореме Банаха о неподвижной точке оператор V имеет в шаре единственную неподвижную точку

$$r(x) = (Vr)(x) = g(x) + \int_0^x K(x, t)r(t)dt,$$

которая, очевидно, и является решением уравнения (4.2.3). \square

Перейдем к доказательству единственности и устойчивости решения задачи (4.2.3) относительно малых изменений $g(x)$. Покажем сначала устойчивость. Пусть $q_j(x)$, $j = 1, 2$, являются непрерывными решениями уравнений

$$q_j(x) = g_j(x) + \int_0^x P(x, t)q_j(t)dt, \quad j = 1, 2, \quad (4.2.6)$$

соответственно. Функции g_1 , g_2 , P , как и ранее, предполагаются непрерывными. Тогда для $\tilde{q} = q_1 - q_2$ и $\tilde{g} = g_1 - g_2$ справедливо равенство

$$\tilde{q}(x) = \tilde{g}(x) + \int_0^x P(x, t)\tilde{q}(t)dt,$$

из которого получаем

$$|\tilde{q}(x)| \leq |\tilde{g}(x)| + P_0 \|\tilde{q}\|_\beta \frac{1}{\beta} (e^{\beta x} - 1).$$

Умножим полученное неравенство на $e^{-\beta x}$ и перейдем к верхней грани по $x \in [0, T]$ сначала справа, потом слева. В результате получим

$$\|\tilde{q}\|_\beta \leq \|\tilde{g}\|_\beta + \frac{P_0}{\beta} \|\tilde{q}\|_\beta.$$

Тогда

$$\left(1 - \frac{P_0}{\beta}\right) \|\tilde{q}\|_{\beta} \leq \|\tilde{g}\|_{\beta}$$

и, так как $\beta > P_0$ в силу (4.2.5),

$$\|\tilde{q}\|_{\beta} \leq \frac{\beta}{\beta - P_0} \|\tilde{g}\|_{\beta}.$$

Учитывая (4.2.4), получим окончательно

$$\|q_1 - q_2\|_{C[0,T]} \leq \frac{\beta}{\beta - P_0} e^{\beta T} \|g_1 - g_2\|_{C[0,T]}. \quad (4.2.7)$$

Из оценки устойчивости (4.2.7) следует также единственность решения. Теорема 4.2.1 доказана.

Замечание 4.2.1. Можно доказать, что если $g \in L_2(0, T)$ и $P(x, t) \in L_2(0 \leq t \leq x \leq T)$, то задача (4.2.3) классически корректна в $L_2(0, T)$.

Вольтерровская регуляризация уравнений первого рода. Приведенный выше пример сведения некорректной задачи (4.2.1) к корректной (4.2.2) редко применим на практике по двум основным причинам. Вместо правой части $f(x)$ обычно известно лишь некоторое ее приближение $f_{\delta}(x)$, и даже при наличии производной $f'_{\delta}(x)$ малые ошибки в задании $f(x)$ могут привести к очень большой погрешности в решении. С другой стороны, применение общего подхода, рассмотренного в разделе 4.1, т. е. сведение задачи (4.2.1) к уравнению Фредгольма второго рода

$$\alpha q(x) + A^* A q = A^* f_{\delta}(x),$$

приводит к потере вольтерровости (оператор $A^* A$ уже не будет вольтерровским), что значительно усложняет исследование и решение регуляризованного уравнения.

Рассмотрим вольтерровскую регуляризацию задачи (4.2.1) [4.14, 4.6], которую можно применить и к нелинейным операторным уравнениям Вольтерра первого рода [4.9], возникающим в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений (глава 10). Как и ранее, предположим, что решение уравнения (4.2.1), т. е.

$$\int_0^x K(x, t) q(t) dt = f(x),$$

существует, но вместо функции $f(x)$ нам известна функция $f_{\delta}(x)$, удовлетворяющая условию

$$\|f - f_{\delta}\|_{C[0,T]} \leq \delta.$$

Уравнение (4.2.1) приблизим интегральным уравнением Вольтерра второго рода с положительным параметром α :

$$\alpha q(x) + \int_0^x K(x, t) q(t) dt = f_{\delta}(x), \quad x \in (0, T). \quad (4.2.8)$$

Теорема 4.2.2. Предположим, что для $f \in C[0, T]$ существует решение $q_T \in C^1[0, T]$ уравнения (4.2.1) и $q_T(+0) = 0$. Предположим также, что $K, \frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}$ непрерывны и $K(x, x) \equiv 1$. Тогда найдутся положительные числа α_*, δ_*, K_* , такие, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_*)$, $\delta \in (0, \delta_*)$ решение $q_{\alpha\delta}$ уравнения (4.2.8) существует, единственно в $C[0, T]$ и удовлетворяет оценке

$$\|q_{\alpha\delta} - q\|_{C[0, T]} \leq K_* \left(\alpha + \frac{\delta}{\alpha} \right). \quad (4.2.9)$$

Доказательство. Существование и единственность решения $q_{\alpha\delta}(x)$ следует из теоремы 4.2.1. Обозначим

$$\tilde{f}(x) = f(x) - f_\delta(x), \quad \tilde{q}(x) = q_T(x) - q_{\alpha\delta}(x).$$

Тогда, подставляя q_T в (4.2.1), а $q_{\alpha\delta}$ — в (4.2.8) и вычитая из (4.2.1) почленно (4.2.8), получим после несложных преобразований

$$\alpha \tilde{q}(x) + \int_0^x K(x, t) \tilde{q}(t) dt = \alpha q_T(x) + \tilde{f}(x). \quad (4.2.10)$$

Для того чтобы оценить \tilde{q} , мы не можем воспользоваться методикой доказательства теоремы 4.2.1, поскольку уравнение (4.2.9) содержит малый параметр α . Поэтому мы усложним весовую функцию, вводя вместо $e^{\beta t}$ функцию $e^{-(x-\xi)/\alpha}$ и используя дополнительное интегрирование по переменной x . Заменяем в (4.2.9) переменную x на ξ , умножим получившееся уравнение на функцию $\alpha^{-2} e^{-(x-\xi)/\alpha}$ и проинтегрируем по ξ от 0 до x . В результате мы получим

$$\begin{aligned} & \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} \tilde{q}(\xi) + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\xi K(\xi, t) \tilde{q}(t) dt \right] d\xi \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} q_T(\xi) d\xi + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \tilde{f}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Теперь разделим (4.2.9) на α и вычтем из получившегося равенства (4.2.10). После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} & \tilde{q}(x) + \frac{1}{\alpha} \int_0^x K(x, t) \tilde{q}(t) dt - \frac{1}{\alpha} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \tilde{q}(\xi) d\xi \\ & - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \left[\int_0^\xi K(\xi, t) \tilde{q}(t) dt \right] d\xi \\ &= q_T(x) + \frac{1}{\alpha} \tilde{f}(x) - \frac{1}{\alpha} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} q_T(\xi) d\xi \\ & - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \tilde{f}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Интегрируем четвертое слагаемое в левой части (4.2.12) по частям дважды, используя условие $K(x, x) \equiv 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \left[\int_0^\xi K(\xi, t) \tilde{q}(t) dt \right] d\xi \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^x K(x, t) \tilde{q}(t) dt - \frac{1}{\alpha} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\int_0^\xi K(\xi, t) \tilde{q}(t) dt \right] d\xi \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^x K(x, t) \tilde{q}(t) dt - \frac{1}{\alpha} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \tilde{q}(\xi) d\xi \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \left[\int_0^\xi D^{(1,0)} K(\xi, t) \tilde{q}(t) dt \right] d\xi \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^x K(x, t) \tilde{q}(t) dt - \frac{1}{\alpha} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \tilde{q}(\xi) d\xi \\ &\quad - \int_0^x D^{(1,0)} K(x, t) \tilde{q}(t) dt - \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} D^{(1,0)} K(\xi, \xi) \tilde{q}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \left[\int_0^\xi D^{(2,0)} K(\xi, t) \tilde{q}(t) dt \right] d\xi. \end{aligned}$$

Здесь $D^{(n_1, n_2)} K(x_1, x_2) = \frac{\partial^{n_1}}{\partial x_1^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{\partial x_2^{n_2}} K(x_1, x_2)$.

Поменяем в последнем слагаемом порядок интегрирования и подставим правую часть получившегося равенства в (4.2.12):

$$\begin{aligned} & \tilde{q}(x) + \int_0^x D^{(1,0)} K(x, t) \tilde{q}(t) dt \\ &\quad - \int_0^x \left[\int_t^x e^{-(x-\xi)/\alpha} D^{(2,0)} K(\xi, t) d\xi \right] \tilde{q}(t) dt \\ &\quad + \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} D^{(1,0)} K(\xi, \xi) \tilde{q}(\xi) d\xi \\ &= \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} q'_T(\xi) d\xi + \frac{1}{\alpha} \tilde{f}(x) - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \tilde{f}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Теперь уже очевидно, что полученное равенство можно представить в виде

$$\tilde{q}(x) + \int_0^x B_\alpha(x, t) \tilde{q}(t) dt = \psi_{\alpha\delta}(x).$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_\alpha(x, t) &= \frac{1}{\alpha} K(x, t) - \frac{1}{\alpha} e^{-(x-t)/\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x K(\xi, t) e^{-(x-\xi)/\alpha} d\xi \\ &= D^{(1,0)} K(x, t) - D^{(1,0)} K(t, t) e^{-(x-t)/\alpha} - \int_t^x D^{(2,0)} K(\xi, t) e^{-(x-\xi)/\alpha} d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha\delta}(x) &= q_T(x) - \frac{1}{\alpha} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} q_T(\xi) d\xi + \frac{\tilde{f}(x)}{\alpha} \\ &\quad - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \tilde{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} q_T'(\xi) d\xi + \frac{\tilde{f}(x)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x e^{-(x-\xi)/\alpha} \tilde{f}(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Упражнение 4.2.1. Докажите, что при выполнении условий теоремы 4.2.2 найдутся постоянные K_1 и K_2 , такие, что

$$\max_x \int_0^x \left| D^{(1,0)} K(t, t) e^{-(x-t)/\alpha} + \int_t^x D^{(2,0)} K(\xi, t) e^{-(x-\xi)/\alpha} d\xi \right| dt \leq K_1 \alpha, \quad (4.2.13)$$

$$\max_x |\psi_{\alpha\delta}(x)| \leq K_2 \left(\alpha + \frac{\delta}{\alpha} \right). \quad (4.2.14)$$

Оценки (4.2.13) и (4.2.14) завершают доказательство теоремы 4.2.2.

□

4.3. Операторные уравнения Вольтерра с ограничено липшиц-непрерывным ядром

Техника весовых оценок, излагаемая в данном разделе и далее, позволяет исследовать широкий класс обратных задач и, самое главное, получать оценки скорости сходимости численных методов решения, таких как метод последовательных приближений (подраздел 10.2.2), метод итераций Ландвебера (подраздел 10.2.3), метод наискорейшего спуска (подраздел 10.2.4), метод Ньютона — Канторовича (подраздел 10.2.5) и метод обращения разностной схемы [7].

Многие обратные задачи для гиперболических и параболических уравнений могут быть приведены к уравнениям или к системам нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа. В общем виде обратную задачу можно записать как операторное уравнение Вольтерра второго рода

$$q(x) = f(x) + \int_0^x (K_x q)(\tau) d\tau, \quad x \in S, \quad (4.3.1)$$

где $S = [0, T]$, $T \in \mathbb{R}_+$, $\{K_x\}_{x \in S}$ — семейство нелинейных операторов Вольтерра (см. ниже определение 4.3.1), функция (или вектор-функция) $q(x)$ обозначает неизвестный коэффициент (или набор коэффициентов), $f(x)$ — данные обратной задачи.

Рассмотрим в качестве примера обратную задачу (подробно исследуемую в 10.1.1)

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.3.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad (4.3.3)$$

$$u(0, t) = f_1(t), \quad u_x(0, t) = f_2(t), \quad (4.3.4)$$

в которой по заданным функциям $\varphi_j(x)$, $f_j(t)$, $j = 1, 2$, требуется определить неизвестный коэффициент $q(x)$ уравнения (4.3.2).

Покажем некорректность задачи (4.3.2)–(4.3.4), а значит, и задачи (4.3.1).

Упростим задачу, полагая $\varphi_1 \equiv -1$, $\varphi_2 \equiv 0$, $f_2 \equiv 0$, $f(t) = f_1''(t)$ и вводя новую функцию $v(x, t) = u_{tt}(x, t)$. Дифференцируя (4.3.2), (4.3.4) дважды по t и учитывая, что

$$v(x, 0) = u_{tt}|_{t=0} = u_{xx}|_{t=0} - u(x, 0)q(x) = q(x),$$

$$v_t(x, 0) = u_{ttt}|_{t=0} = u_{txx}|_{t=0} - u_t(x, 0)q(x) = 0,$$

получим новую обратную задачу

$$v_{tt} = v_{xx} - q(x)v, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (4.3.5)$$

$$v(x, 0) = q(x), \quad v_t(x, 0) = 0, \quad (4.3.6)$$

$$v(0, t) = f(t), \quad v_x(0, t) = 0. \quad (4.3.7)$$

Продолжим $v(x, t)$ и $f(t)$ чётно по t и воспользуемся формулой Даламбера:

$$v(x, t) = \frac{1}{2}[f(t+x) + f(t-x)] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} q(\xi)v(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (4.3.8)$$

Положим в (4.3.8) $t = 0$ и воспользуемся первым из условий (4.3.6), в результате чего получим

$$q(x) = f(x) + \int_0^x \int_0^{x-\xi} q(\xi)v(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (4.3.9)$$

Таким образом, обратная задача (4.3.2)–(4.3.4) приведена к виду (4.3.1).

Здесь $(K_x q)(\xi) = \int_0^{x-\xi} q(\xi)v(\xi, \tau) d\tau$, а $qv(\xi, \tau)$ понимается как оператор, также зависящий от q .

Итак, мы получили нелинейное операторное уравнение (4.3.9) относительно неизвестного коэффициента $q(x)$. Отметим, что в уравнении (4.3.9) функция $v(\xi, \tau)$, зависящая от $q(x)$, вычисляется при известном $q(x)$ с помощью решения прямой задачи (4.3.5)–(4.3.6).

Покажем, что решение операторного уравнения (4.3.9) может не существовать на $[0, T]$ даже при бесконечно гладких данных f . Пусть, например, $f \equiv c = \text{const} > 0$. Тогда из (4.3.5), (4.3.7) вытекает, что v не зависит от t . Следовательно, в силу (4.3.6), $v(x, t) = q(x)$. Тогда (4.3.9) приобретает вид

$$q(x) = c + \int_0^x \int_0^{x-\xi} q^2(\xi) d\tau d\xi \quad (4.3.10)$$

или, в дифференциальной форме,

$$q''(x) = q^2(x), \quad (4.3.11)$$

$$q(0) = c, \quad q'(0) = 0. \quad (4.3.12)$$

Но решение задачи Коши (4.3.11)–(4.3.12) стремится к бесконечности при $x \rightarrow T_*$ = $\sqrt{\frac{3}{2}} \int_c^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^3 - c^3}}$.

В самом деле, введем новую переменную $p = q'$. Следовательно, $q'' = p'_q q' = p'_q p$. В силу (4.3.11),

$$p \frac{dp}{dq} = q^2.$$

Решая это уравнение с учетом (4.3.12), получим

$$q' = p = \sqrt{\frac{2}{3} (q^3 - c^3)},$$

откуда

$$x(q) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_c^q \frac{dy}{\sqrt{y^3 - c^3}}.$$

Но интеграл в правой части ограничен равномерно при всех $q \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, решение уравнения (4.3.10) бесконечно растет при $x \rightarrow T_*$.

Задача изучения операторных уравнений Вольтерра была поставлена М. М. Лаврентьевым [4.10]. Одной из основных трудностей, возникающих при изучении операторных уравнений, является нелинейность операторов K_x . Как мы убедились только что, не для любых данных $f(x)$ решение обратной задачи (4.3.1) существует. Изучение необходимых и достаточных условий на $f(x)$, $x \in [0, T]$, при выполнении которых решение существует для произвольного $T \in \mathbb{R}_+$, является сложной проблемой, решенной пока лишь в случае одномерных обратных задач для гиперболических уравнений (подраздел 10.1.5). Широкий класс операторных уравнений Вольтерра изучен в работах М. М. Лаврентьева [4.10], В. Г. Романова [4.12]. В данном разделе мы рассмотрим операторное уравнение (4.3.1) в предположении, что семейство операторов $\{K_x\}_{x \in S}$ обладает основными свойствами, присущими обратным задачам для гиперболических уравнений.

Решение операторного уравнения (4.3.1) будем искать в пространстве $C(S; X)$, $S = [0, T]$. Принадлежность q множеству $C(S; X)$ означает, что $q(x)$ — непрерывная функция переменной $x \in S$ со значениями в некотором вещественном банаховом пространстве X , норму в котором будем обозначать $\|\cdot\|$. Интеграл в (4.3.1) понимается как интеграл Бохнера [4.5].

Для многих одномерных и некоторых классов многомерных обратных задач после сведения обратных задач к виду (4.3.1) можно доказать следующие две группы результатов. Во-первых, обратная задача локально корректна, т. е. при достаточно малом $T \in \mathbb{R}_+$ решение уравнения (4.3.1) существует, единственно и непрерывно зависит от данных $f(x)$. Во-вторых, при любом $T \in \mathbb{R}_+$ решение обратной задачи единственно и условно устойчиво, т. е. малым вариациям $f(x)$, не выводящим данные за пределы класса существования решения, соответствуют малые вариации решения.

Ввиду того что данные обратной задачи всегда известны лишь приближенно, очень важным с точки зрения приложений является вопрос о том, какие вариации данных $f(x)$ не выводят из множества функций, для которых решение обратной задачи существует. Покажем, что при достаточно общих предположениях относительно свойств семейства операторов $\{K_x\}_{x \in S}$ множество данных $\{f(x)\}$, для которых существует решение операторного уравнения (4.3.1), открыто в $C(S; X)$, т. е. если для какого-либо $f(x)$ существует решение уравнения (4.3.1), то решение существует для всех $f_\delta(x)$, достаточно близких к $f(x)$.

Укажем эти свойства. Пусть $S_x = [0, x]$, $x \in S$, X , — некоторое банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$.

Следуя [4.5], введем следующие определения.

Определение 4.3.1. Оператор $K_x \in (C(S_x; X) \rightarrow C(S_x; X))$ назовем *оператором Вольтерра*, если из соотношения $q(\lambda) = r(\lambda)$, $q, r \in C(S_x; X)$, выполняющегося для всех $\lambda \in S_{x_1}$, $x_1 \in S_x$, следует, что для всех $\lambda \in S_{x_1}$ имеет место равенство

$$(K_x q)(\lambda) = (K_x r)(\lambda).$$

Определение 4.3.2. Семейство операторов $K_x \in (C(S_x; X) \rightarrow C(S_x; X))$, $x \in S$, будем называть *ограниченно липшиц-непрерывным*, если существует вещественная функция $\mu(y_1, y_2)$, возрастающая по y_1, y_2 и такая, что для любого $x \in S$ и любых $q_1, q_2 \in C(S; X)$ справедлива оценка

$$\|K_x q_1 - K_x q_2\|_{C(S_x; X)} \leq \mu(q_1^*(x), q_2^*(x)) \|q_1 - q_2\|_{C(S_x; X)}. \quad (4.3.13)$$

Здесь

$$q_j^*(x) = \|q_j\|_{C(S_x; X)}, \quad j = 1, 2;$$

$$\|q\|_{C(S_x; X)} = \sup_{\tau \in S_x} \{\|q(\tau)\|\}, \quad x \in S.$$

Определение 4.3.3. Будем говорить, что семейство операторов $\{K_x\}_{x \in S}$ принадлежит классу $\mathcal{K}(T, \mu)$, если при любом $x \in S = [0, T]$ оператор K_x есть оператор Вольтерра, $K_x \mathbf{0} = \mathbf{0}$ и семейство $\{K_x\}_{x \in S}$ ограничено липшиц-непрерывно.

Из данного определения непосредственно следует лемма.

Лемма 4.3.1. *Предположим, что семейство операторов $\{K_x\}_{x \in S}$ принадлежит классу $\mathcal{K}(T, \mu)$. Тогда для любых $x \in S$, $x_1 \in S_x$, $q_1, q_2 \in C(S; X)$ выполнено неравенство*

$$\|K_x q_1 - K_x q_2\|_{C(S_{x_1}; X)} \leq \mu(q_1^*(x), q_2^*(x)) \|q_1 - q_2\|_{C(S_{x_1}; X)}. \quad (4.3.14)$$

Доказательство. Пусть $x_1 \in S_x$. Положим для $j = 1, 2$

$$q_j^{x_1}(s) = \begin{cases} q_j(s), & 0 \leq s \leq x_1, \\ q_j(x_1), & x_1 < s \leq x. \end{cases}$$

Очевидно, $q_j^{x_1}(s) \in C(S_x; X)$, $j = 1, 2$. Так как K_x является оператором Вольтерра, то

$$\begin{aligned} \|K_x q_1 - K_x q_2\|_{C(S_{x_1}; X)} &\leq \|K_x q_1^{x_1} - K_x q_2^{x_1}\|_{C(S_x; X)} \\ &\leq \mu(q_1^*(x), q_2^*(x)) \|q_1^{x_1} - q_2^{x_1}\|_{C(S_x; X)} = \mu(q_1^*(x), q_2^*(x)) \|q_1 - q_2\|_{C(S_{x_1}; X)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

Пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $k \geq 0$, $q \in C(S; X)$. Определим (C, k) -норму и шар радиуса ε :

$$\|q\|_{C, k} = \sup_{x \in S} \{ \|q\|_{C(S_x; X)} \exp(-kx) \},$$

$$\Phi_k(T, q, \varepsilon) = \{ r \in C(S; X) : \|q - r\|_{C, k} < \varepsilon \}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться очевидными неравенствами, вытекающими из определения (C, k) -нормы, а именно,

$$\|q\|_{C, k} \leq \|q\|_{C(S; X)} \leq \exp(kT) \|q\|_{C, k}. \quad (4.3.15)$$

4.4. Локальная корректность и теорема единственности в целом

Теорема, которую мы сейчас сформулируем, была доказана В. Г. Романовым [4.11] для обратной одномерной задачи. В дальнейшем эта методика была применена для исследования обратных задач для системы уравнений теории упругости [10.28], системы уравнений Максвелла [15], уравнения переноса и его \mathcal{P}_n -приближения [4.13], уравнения акустики [4.7] и многих других.

Теорема 4.4.1. *Предположим, что $f \in C(S; X)$, а семейство операторов $\{K_x\}_{x \in S}$ принадлежит классу $\mathcal{K}(T, \mu)$. Тогда существует $T_* \in (0, T)$, такое, что при всех $t \in (0, T_*)$ решение операторного уравнения*

$$q(x) = f(x) + \int_0^x (K_x q)(\tau) d\tau, \quad x \in S_t, \quad (4.4.1)$$

существует и единственно в классе $C(S_t; X)$, а также непрерывно зависит от данных.

Доказательство. Построим решение, используя принцип неподвижной точки Банаха. Для $q \in C(S; X)$ определим оператор

$$(Uq)(x) = f(x) + \int_0^x (K_x q)(\tau) d\tau, \quad x \in S.$$

Поскольку семейство $\{K_x\}_{x \in S}$ принадлежит классу $\mathcal{K}(T, \mu)$, заключаем, что $U \in (C(S; X) \rightarrow C(S; X))$. В силу леммы 4.3.1 и свойств интеграла Бохнера [4.5] получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|(Uq)(x) - f(x)\| &= \left\| \int_0^x (K_x q)(\tau) d\tau \right\| \leq \int_0^x \|(K_x q)(\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_0^x \|K_x q\|_{C(S_\tau; X)} d\tau \leq \mu(q^*(T), 0) \int_0^x \|q\|_{C(S_\tau; X)} d\tau \\ &\leq \mu(q^*(T), 0)x \|q\|_{C(S_x; X)}, \quad x \in S. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Здесь $q^*(T) = \|q\|_{C(S; X)}$.

Фиксируем произвольное $\delta \in \mathbb{R}_+$, и пусть $q(x)$ принадлежит шару $\Phi_0(t, f, \delta)$, где $t \in S$. Поскольку (4.4.2) выполняется для всех $x \in S_t \subset S$, справедлива оценка

$$\|Uq - f\|_{C(S_t; X)} \leq \mu(\|f\|_{C(S_t; X)} + \delta, 0)t(\|f\|_{C(S_t; X)} + \delta) \leq \mu(P, 0)tP, \quad (4.4.3)$$

где $P = \|f\|_{C(S; X)} + \delta$. Положим

$$T_* = \min \left\{ T, \frac{\delta}{\mu(P, 0)P}, \frac{1}{\mu(P, P)} \right\}. \quad (4.4.4)$$

Тогда из неравенства (4.4.3) следует, что для всех $t \in (0, T_*)$ оператор U отображает шар $\Phi_0(t, f, \delta)$ в себя.

Повторив рассуждения, с помощью которых получена оценка (4.4.2), приходим к неравенству для любых $q_1, q_2 \in \Phi_0(t, f, \delta)$, $t \in S$:

$$\|Uq_1 - Uq_2\|_{C(S_t; X)} \leq \mu(P, P)t\|q_1 - q_2\|_{C(S_t; X)}, \quad t \in S. \quad (4.4.5)$$

Поскольку $T_* \leq 1/\mu(P, P)$, для всех $t \in (0, T_*)$ оператор U отображает шар $\Phi_0(t, f, \delta)$ в себя и является сжимающим на $\Phi_0(t, f, \delta)$. Используя принцип неподвижной точки Банаха, заключаем, что отображение U имеет в $\Phi_0(t, f, \delta)$, $t \in (0, T_*)$, неподвижную точку, т. е. существует элемент $q \in \Phi_0(t, f, \delta)$, такой, что

$$q(x) = f(x) + \int_0^x (K_x q)(\tau) d\tau, \quad x \in S_t.$$

□

Единственность решения и непрерывная зависимость от данных (при условии существования решения для точных и возмущенных данных) будут вытекать из следующего утверждения.

Теорема 4.4.2. *Предположим, что при $j = 1, 2$ для $f_j \in C(S; X)$ существуют решения $q_j \in C(S; X)$ соответствующих операторных уравнений*

$$q(x) = f_j(x) + \int_0^x (K_x q)(\tau) d\tau, \quad x \in S, \quad j = 1, 2. \quad (4.4.6)$$

Тогда, если семейство $\{K_x\}_{x \in S}$ принадлежит классу $\mathcal{K}(T, \mu)$, то имеет место оценка

$$\|q_1 - q_2\|_{C(S; X)} \leq \exp T \mu(q_1^*(T), q_2^*(T)) \|f_1 - f_2\|_{C(S; X)}. \quad (4.4.7)$$

Доказательство. Подставляя q_j , $j = 1, 2$, в соответствующие уравнения (4.4.6) и почленно вычитая их одно из другого, получим, как и ранее, неравенства

$$\begin{aligned} \|q_1(x) - q_2(x)\| &\leq \|f_1(x) - f_2(x)\| + \int_0^x \|(K_x q_1)(\tau) - (K_x q_2)(\tau)\| d\tau \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{C(S; X)} + \mu(q_1^*(T), q_2^*(T)) \int_0^x \|q_1 - q_2\|_{C(S_\tau; X)} d\tau, \quad x \in S. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|q_1 - q_2\|_{C(S_x; X)} &\leq \|f_1 - f_2\|_{C(S; X)} \\ &\quad + \mu(q_1^*(T), q_2^*(T)) \int_0^x \|q_1 - q_2\|_{C(S_\tau; X)} d\tau, \quad x \in S. \end{aligned}$$

Применив неравенство Гронуолла, получим искомое неравенство

$$\|q_1 - q_2\|_{C(S; X)} \leq \exp \{T \mu(q_1^*(T), q_2^*(T))\} \|f_1 - f_2\|_{C(S; X)}. \quad (4.4.8)$$

Из оценки (4.4.8) следует единственность решения уравнения (4.3.1) и непрерывная зависимость от данных. \square

Возвращаясь к доказательству теоремы 4.4.1, отметим, что в качестве параметра “малости” мы использовали размер области S_t (см. (4.4.4)). Однако в оценки (4.4.2) и (4.4.5) в качестве сомножителя входит функция μ , аргументы которой зависят от $\|f\|_{C(S; X)}$.

Возникает вопрос: “нельзя ли, не предполагая малости T_* , использовать в качестве параметра “малости” величину $\|f\|_{C(S; X)}$?”

Ответ положительный и ниже мы используем эту идею для доказательства корректности задачи (4.3.1) в окрестности точного решения.

4.5. Корректность в окрестности точного решения

Сначала покажем, что если норма $\|f\|_{C(S; X)}$ достаточно мала, то задача (4.3.1) является корректной. Из полученной теоремы будет выведена корректность задачи (4.3.1) в окрестности точного решения. Методика, изложенная в данном разделе, может быть использована для построения и обоснования численных алгоритмов приближенного решения задачи и, в частности, для оценки скорости сходимости метода обращения разностной схемы.

Теорема 4.5.1. Предположим, что семейство операторов $\{K_x\}_{x \in S}$ принадлежит классу $\mathcal{K}(T, \mu)$. Тогда можно указать $\delta \in \mathbb{R}_+$, такое, что при всех $f \in \Phi_0(T, \mathbf{0}, \delta)$ решение уравнения (4.3.1) в классе $C(S; X)$ существует, единственно и непрерывно зависит от данных.

Доказательство. Как и ранее, построим решение $q(x)$, используя принцип неподвижной точки Банаха. Для $q \in C(S; X)$ определим интегральный оператор

$$(Uq)(x) = f(x) + \int_0^x (K_x q)(\tau) d\tau, \quad x \in S.$$

Покажем, что если выбрать, например,

$$m > 2\mu(1, 1), \quad \delta = \frac{1}{2} \exp\{-mT\}, \quad (4.5.1)$$

то для любой

$$f \in \Phi_0(T, \mathbf{0}, \delta) \subset \Phi_m(T, \mathbf{0}, \delta) \quad (4.5.2)$$

оператор U будет, во-первых, отображать шар $\Phi_m(T, \mathbf{0}, 2\delta)$ в себя, а во-вторых, будет на $\Phi_m(T, \mathbf{0}, 2\delta)$ оператором сжатия в (C, m) -норме.

В самом деле, в силу условий теоремы и по лемме 4.3.1 имеем

$$\|(Uq)(x) - f(x)\| \leq \mu(q^*(T), 0) \int_0^x \|q\|_{C(S_\tau; X)} d\tau, \quad x \in S. \quad (4.5.3)$$

Оценим интеграл в правой части (4.5.3), используя (C, m) -норму:

$$\begin{aligned} \int_0^x \|q\|_{C(S_\tau; X)} d\tau &= \int_0^x \sup_{\lambda \in S_\tau} \{\|q(\lambda)\| \exp(-m\lambda) \exp(m\lambda)\} d\tau \\ &\leq \int_0^x \sup_{\lambda \in S_\tau} \{\|q(\lambda)\| \exp(-m\lambda)\} \exp(m\tau) d\tau \\ &\leq \|q\|_{C, m} \int_0^x \exp(m\tau) d\tau = m^{-1} \|q\|_{C, m} [\exp(mx) - 1], \quad x \in S. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Подставив (4.5.4) в (4.5.3) и умножив получившееся неравенство на $\exp(-mx)$, получим

$$\|(Uq)(x) - f(x)\| \exp(-mx) \leq m^{-1} \mu(q^*(T), 0) \|q\|_{C, m}, \quad x \in S.$$

Правая часть последнего неравенства не зависит от x . Следовательно, в левой части можно перейти к верхней грани:

$$\|Uq - f\|_{C, m} \leq m^{-1} \mu(q^*(T), 0) \|q\|_{C, m}. \quad (4.5.5)$$

Предположим, что $q \in \Phi_m(T, \mathbf{0}, 2\delta)$, т. е. $\|q\|_{C, m} \leq 2\delta$. Ввиду (4.3.15) и (4.5.1) имеем

$$q^*(T) = \|q\|_{C(S; X)} \leq 2\delta \cdot \exp(mT) = 1. \quad (4.5.6)$$

Подставив (4.5.6) в (4.5.5), получим

$$\|Uq - f\|_{C,m} \leq 2\delta m^{-1} \mu(1, 1). \quad (4.5.7)$$

Но тогда из условий (4.5.1) и (4.5.7) вытекает, что

$$\|Uq - f\|_{C,m} \leq \delta.$$

Так как $\|f\|_{C,m} \leq \delta$ для $f \in \Phi_m(T, \mathbf{0}, \delta)$, выполняется неравенство $\|Uq\|_{C,m} \leq 2\delta$, откуда следует, что оператор U отображает шар $\Phi_m(T, \mathbf{0}, 2\delta)$ в себя.

Пусть теперь $q_j \in \Phi_m(T, \mathbf{0}, 2\delta)$, $j = 1, 2$. Рассуждая так же, как при получении неравенства (4.5.5), приходим к оценке

$$\|Uq_1 - Uq_2\|_{C,m} \leq m^{-1} \mu(q_1^*(T), q_2^*(T)) \|q_1 - q_2\|_{C,m}. \quad (4.5.8)$$

Условия $q_j \in \Phi_m(T, \mathbf{0}, 2\delta)$, $j = 1, 2$, и неравенство (4.3.15) дают

$$q_j^*(T) \leq 2\delta \exp(mT), \quad j = 1, 2. \quad (4.5.9)$$

Подставляя (4.5.9) в (4.5.8) и учитывая, что μ — возрастающая функция, получаем

$$\|Uq_1 - Uq_2\|_{C,m} \leq m^{-1} \mu(2\delta \exp(mT), 2\delta \exp(mT)) \|q_1 - q_2\|_{C,m}. \quad (4.5.10)$$

Но тогда, поскольку m, δ выбраны из условий (4.5.1), заключаем из (4.5.10), что оператор U является на $\Phi_m(T, \mathbf{0}, 2\delta)$ оператором сжатия. Следовательно, в $\Phi_m(T, \mathbf{0}, 2\delta)$ существует единственная неподвижная точка q_T оператора U , которая и будет решением уравнения (4.3.1). Из (4.3.15) следует, что $q_T \in C(S; X)$. Единственность и непрерывная зависимость решения от данных в $C(S; X)$ доказывается так же, как и в теореме 4.4.2. \square

Таким образом, мы убедились, что предположение малости либо отрезка S (см. теорему 4.4.1), либо начальных данных f (см. теорему 4.5.1) позволяет доказать однозначную разрешимость уравнения (4.3.1) в $C(S; X)$, а также непрерывную зависимость решения от данных задачи. С другой стороны, пример обратной задачи, приведенный в начале раздела, показывает, что если не предполагать малости T или f , то решение уравнения (4.3.1) для произвольных T и $f \in C(S; X)$ может не существовать. Тем не менее, принадлежность семейства операторов $\{K_x\}_{x \in S}$ классу $\mathcal{K}(T, \mu)$ позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 4.5.2. Пусть семейство операторов $\{K_x\}_{x \in S}$ принадлежит классу $\mathcal{K}(T, \mu)$. Предположим, что для $f \in C(S; X)$ существует решение $q_T \in C(S; X)$ уравнения (4.3.1). Тогда найдется $\delta \in \mathbb{R}_+$, такое, что для всех $f_\delta \in \Phi_0(T, f, \delta)$ существует решение $q_\delta \in C(S; X)$ уравнения

$$q(x) = f_\delta(x) + \int_0^x (K_x q)(\tau) d\tau, \quad x \in S. \quad (4.5.11)$$

Это решение единственно в классе $C(S; X)$ и непрерывно зависит от данных.

Доказательство. Определим для $p \in C(S; X)$ оператор

$$(Vp)(x) = f(x) - f_\delta(x) + \int_0^x [(K_x q_T)(\tau) - (K_x(q_T - p))(\tau)] d\tau.$$

По условию $f, f_\delta, q_T \in C(S; X)$. Следовательно, $V \in (C(S; X) \rightarrow C(S; X))$. Нетрудно проверить, что, так как семейство $\{K_x\}_{x \in S}$ принадлежит классу $\mathcal{K}(T, \mu)$, то и семейство операторов $\{H_x\}_{x \in S}$, определяемое равенством $(H_x p)(\tau) = (K_x q_T)(\tau) - (K_x(q_T - p))(\tau)$, также будет принадлежать семейству $\mathcal{K}(T, \mu)$. По теореме 4.5.1 уравнение

$$p(x) = (Vp)(x), \quad x \in S, \quad (4.5.12)$$

имеет решение, если разность $f - f_\delta$ достаточно мала по норме $\|\cdot\|_{C,m}$. Точнее говоря, найдется $\delta > 0$, такое, что для всех $f_\delta \in \Phi_0(T, f, \delta)$ существует решение $p \in C(S; X)$ уравнения (4.5.12). В силу определения оператора V имеем

$$p_\delta(x) = f(x) - f_\delta(x) + \int_0^x (K_x q_T)(\tau) d\tau - \int_0^x [K_x(q_T - p_\delta)](\tau) d\tau, \quad x \in S. \quad (4.5.13)$$

Полагая $q_\delta(x) = q_T(x) - p_\delta(x)$ и учитывая, что $q_T(x)$ — решение уравнения (4.3.1), заключаем из (4.5.13), что $q_\delta(x)$ является решением уравнения (4.5.11), что и требовалось доказать. \square

Чтобы оценить величину параметра δ , входящего в формулировку теоремы 4.5.2, рассмотрим подробнее условия, при которых оператор V имеет неподвижную точку. Пусть $\tilde{f} = f - f_\delta$. Как и ранее, для $p \in C(S; X)$ получаем

$$\begin{aligned} \|(Vp)(x) - \tilde{f}(x)\| &\leq \int_0^x \|(K_x q_T)(\tau) - [K_x(q_T - p)](\tau)\| d\tau \\ &\leq \mu(q_T^*, p^*) \int_0^x \|p\|_{C(S_\tau; X)} d\tau, \quad x \in S. \end{aligned}$$

Здесь $q_T^* = \|q_T\|_{C(S; X)}$, $p^* = \|q_T - p\|_{C(S; X)}$. Вновь, используя (C, m) -норму, получаем

$$\|Vp - \tilde{f}\|_{C,m} \leq m^{-1} \mu(q_T^*, p^*) \|p\|_{C,m}. \quad (4.5.14)$$

Следовательно, если $\tilde{f} \in \Phi_m(T, 0, \delta)$, а $p \in \Phi_m(T, 0, 2\delta)$, то

$$\|Vp\|_{C,m} \leq \delta + 2\delta m^{-1} \mu(q_T^*, p^*); \quad (4.5.15)$$

и если предположить, что

$$2\mu(q_T^*, p^*) \leq m, \quad (4.5.16)$$

то из (4.5.15) следует, что $(Vp) \in \Phi_m(T, 0, 2\delta)$.

Пусть теперь $p_j \in \Phi_m(T, \mathbf{0}, 2\delta)$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\|Vp_1 - Vp_2\|_{C,m} \leq m^{-1}\mu(p_1^*, p_2^*)\|p_1 - p_2\|_{C,m}, \quad (4.5.17)$$

где $p_j^* = \|q - p_j\|_{C(S;X)}$, $j = 1, 2$.

Следовательно, оператор V является на $\Phi_m(T, \mathbf{0}, 2\delta)$ оператором сжатия для всех m , таких, что

$$\mu(p_1^*, p_2^*) < m. \quad (4.5.18)$$

С учетом (4.3.15) из условия $p_j \in \Phi_m(T, \mathbf{0}, 2\delta)$, $j = 1, 2$, следует, что

$$p_j^* \leq \|p_j\|_{C,m} \exp(mT) + q_T^* \leq 2\delta \exp(mT) + q_T^*, \quad j = 1, 2. \quad (4.5.19)$$

Выберем параметр m из условия

$$2\mu(2 + q_T^*, 2 + q_T^*) < m, \quad (4.5.20)$$

а δ определим через m по формуле

$$\delta = \exp(-mT). \quad (4.5.21)$$

При таком выборе m и δ (с учетом того, что μ — возрастающая функция) очевидно, что неравенства (4.5.16) и (4.5.18) выполнены при условии $\tilde{f} \in \Phi_m(T, \mathbf{0}, \delta)$, $p, p_1, p_2 \in \Phi_m(T, \mathbf{0}, 2\delta)$. Следовательно, оператор V отображает шар $\Phi_m(T, \mathbf{0}, 2\delta)$ в себя и является на этом шаре сжимающим оператором с постоянной сжатия

$$\omega = m^{-1}\mu(q_T^* + 2, q_T^* + 2). \quad (4.5.22)$$

Простой анализ оценок (4.5.20) и (4.5.21) показывает, что чем больше q_T^* и T , тем больше параметр m и, следовательно, тем меньше должно быть δ в условии (4.5.21). Другими словами, чем “глубже” мы хотим решить обратную задачу (4.3.1), тем более жесткие требования придется предъявить к точности измерения данных обратной задачи:

$$\|f - f_\delta\|_{C(S;X)} \leq \exp(-mT). \quad (4.5.23)$$

Отметим, что доказательство теоремы 4.5.2 не является конструктивным, поскольку, применяя метод последовательных приближений для решения (4.5.12), мы найдем лишь $p_T = q_T - q_\delta$, т. е. разность двух неизвестных функций. Для построения приближенного решения уравнения (4.3.1) можно применить метод последовательных приближений

$$q_{n+1} = f(x) + \int_0^x (K_x q_n)(\xi) d\xi,$$

сходимость которого можно оценить в случае, если начальное приближение $q_0(x)$ достаточно близко к точному решению.

4.6. Регуляризация нелинейных операторных уравнений первого рода

В практических задачах часто удастся найти только операторное уравнение первого рода относительно неизвестного коэффициента:

$$0 = f(x) + \int_0^x (K_x q)(\tau) d\tau, \quad x \in S. \quad (4.6.1)$$

Во многих случаях уравнения вида (4.6.1) могут быть сведены к уравнениям второго рода с помощью дифференцирования; однако, операция дифференцирования не является корректной в том смысле, что малым изменениям данных $f(x)$ в норме $C(S; X)$ могут соответствовать сколь угодно большие изменения производной. Задачу отыскания производной функции $f(x)$ также можно рассматривать как операторное уравнение Вольтерра первого рода

$$f(x) - f(0) = \int_0^x q(\tau) d\tau,$$

где $q(\tau) = f'(\tau)$.

Существует много способов регуляризации операции дифференцирования (см., например, [4.6]). Общий метод регуляризации операторного уравнения первого рода

$$Aq = f \quad (4.6.2)$$

был предложен М. М. Лаврентьевым [4.10] в случае, когда A — линейный вполне непрерывный положительный оператор. Предполагалось, что задача (4.6.2) корректна по Тихонову, а множество корректности состоит из функций $u = Bv$, $\|v\| \leq 1$, где B — линейный вполне непрерывный положительный оператор, коммутирующий с A . Было показано, что если задано приближение правой части уравнения (4.6.2), т. е. функция f_δ , удовлетворяющая условию $\|f - f_\delta\| < \delta$, то решение $q_{\alpha\delta}$ вспомогательного уравнения

$$\alpha q + Aq = f_\delta \quad (4.6.3)$$

существует и стремится к точному решению q_T уравнения (4.6.2), если $\alpha(\delta)$ стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Основываясь на методе М. М. Лаврентьева, А. М. Денисов [4.6] построил регуляризацию линейного уравнения Вольтерра первого рода (см. теорему 4.2.2)

$$f(x) = \int_0^x K(x, \tau)\phi(\tau) d\tau, \quad x \in S. \quad (4.6.4)$$

Аналогичный результат получен В. О. Сергеевым [4.14]. В качестве множества корректности был выбран класс функций, ограниченных в норме $C^1(S)$ некоторой постоянной. Было доказано [4.6], что если

$K(x, x) \equiv 1$ и производные $\frac{\partial^j}{\partial x^j} K(x, \tau)$, $j = \overline{0, 2}$, непрерывны, а $q_{\alpha\delta}$ — решение вспомогательного уравнения

$$\alpha q(x) + \int_0^x K(x, \tau) q(\tau) d\tau = f_\delta(x), \quad x \in S, \quad (4.6.5)$$

для функции f_δ , удовлетворяющей условию

$$\|f - f_\delta\| \leq \delta,$$

то имеет место оценка

$$\|q_{\alpha\delta} - q_T\| \leq \mathcal{D}_1 \left(\alpha + \frac{\delta}{\alpha} \right), \quad (4.6.6)$$

где \mathcal{D}_1 — положительная постоянная, не зависящая от α и δ .

Основываясь на методике А. М. Денисова [4.6], А. В. Баев [4.4] исследовал нелинейный аналог уравнения (4.6.4), возникающий при решении одномерной обратной динамической задачи сейсмоки, и построил регуляризирующий алгоритм по схеме, аналогичной (4.6.3).

Рассмотрим два способа регуляризации уравнения (4.6.1), первый из которых основан на регуляризации операции дифференцирования, а второй — на методе М. М. Лаврентьева.

Теорема 4.6.1. *Предположим, что для $f \in C^2(S; X)$ существует решение $q_T \in C^2(S; X)$ уравнения (4.6.1). Предположим также, что семейство операторов $\{K_x\}_{x \in S}$ дифференцируемо по x , для всех q выполнено равенство*

$$(K_x q)(x) \equiv q(x), \quad x \in S, \quad (4.6.7)$$

а семейство операторов $\left\{ \frac{\partial}{\partial x} K_x \right\}_{x \in S}$ принадлежит классу $\mathcal{K}(T, \mu)$.

Тогда существуют постоянные $\delta_0 \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{D}_0 \in \mathbb{R}_+$ и функция $\alpha = \alpha(\delta)$ ($\alpha(\delta)$ стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$), такие, что для всех $\delta \in (0, \delta_0)$ и при всех $f_\delta \in \Phi_0(T, f, \delta)$ решение $q_{\alpha\delta}$ уравнения

$$-q(x) = \frac{1}{\alpha} [f_\delta(x + \alpha) - f_\delta(x)] + \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x} K_x q \right)(\tau) d\tau, \quad x \in S_{T-\alpha}, \quad (4.6.8)$$

существует и единственно в $C(S_{T-\alpha}; X)$, а также имеет место оценка

$$\|q_T - q_{\alpha\delta}\|_{C(S_{T-\alpha}; X)} \leq \mathcal{D}_0 \left(\alpha + \frac{\delta}{\alpha} \right). \quad (4.6.9)$$

Доказательство. Продифференцировав (4.6.1) по x , получим

$$-q(x) = f'(x) + \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x} K_x q \right)(\tau) d\tau, \quad x \in S. \quad (4.6.10)$$

Используя условие $f \in C^2(S; X)$ и известные результаты по регуляризации операции дифференцирования, заключаем, что норма разности

$$f'(x) - \frac{1}{\alpha} [f_\delta(x + \alpha) - f_\delta(x)]$$

может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малом $\delta \in \mathbb{R}_+$ и при согласованном с δ выборе параметра регуляризации α . Но это означает, что к уравнению (4.6.8) применима теорема 4.5.2, из которой следует существование единственного решения $q_{\alpha\delta} \in C(S_{T-\alpha}; X)$. Оценка (4.6.9) получается так же, как оценка (4.4.7) в теореме 4.4.2.

Построим теперь вольтерровскую регуляризацию уравнения (4.6.1), основанную на методе М. М. Лаврентьева. Рассмотрим следующее вспомогательное операторное уравнение Вольтерра второго рода:

$$-\alpha q(x) = f(x) + \int_0^x (K_x q)(\tau) d\tau, \quad x \in S, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+. \quad (4.6.11)$$

Относительно семейства операторов $\{K_x\}_{x \in S}$ будем предполагать, что оно удовлетворяет условиям

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial x^n} K_x \right\}_{x \in S} \in \mathcal{K}(T, \mu), \quad n = 0, 1, 2, \quad (4.6.12)$$

а также условию (4.6.7).

Не ограничивая общности, можно предположить, что

$$f'(0) = 0. \quad (4.6.13)$$

(Предположение (4.6.13) равносильно тому, что значение $q(0)$ задано.)

Относительно вспомогательного уравнения (4.6.11) необходимо исследовать два вопроса: во-первых, существует ли решение уравнения (4.6.11) (разумеется, в предположении существования решения основного уравнения (4.6.13)) и, во-вторых, если решение q_α уравнения (4.6.11) существует, то сходится ли оно к решению q_T уравнения (4.6.1) при стремлении α к нулю. Положительный ответ на эти вопросы будет вытекать из результатов раздела 4.5.

Предположим сначала, что решение $q_\alpha(x)$ уравнения (4.6.11) существует и принадлежит $C^1(S; X)$. Обозначая $\nu = \alpha^{-1}$ и дифференцируя (4.6.11) по x , получаем после несложных преобразований

$$q'_\alpha(x) = -\nu[f'(x) + q_\alpha(x)] - \nu \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x} K_x q_\alpha \right) (\tau) d\tau, \quad x \in S. \quad (4.6.14)$$

Отметим, что в силу (4.6.1) $f(0) = 0$. Следовательно, из (4.6.11) вытекает соотношение $q_\alpha(0) = 0$, а из (4.6.14) — $q'_\alpha(0) = 0$.

Запишем очевидное тождество

$$\begin{aligned} \int_0^x q(\tau) d\tau &= \nu \int_0^x \exp\{\nu(\tau - x)\} \int_0^\tau q(\xi) d\xi d\tau \\ &+ \int_0^x \exp\{\nu(\tau - x)\} q(\tau) d\tau, \quad x \in S. \end{aligned}$$

Подставляя в это тождество функцию $q'_\alpha(\tau)$ вместо $q_\alpha(\tau)$ и учитывая равенство $q'_\alpha(0) = 0$, получим

$$q_\alpha(x) = \nu \int_0^x \exp\{\nu(\tau - x)\} q_\alpha(\tau) d\tau + \int_0^x \exp\{\nu(\tau - x)\} q'_\alpha(\tau) d\tau, \quad x \in S.$$

В последнее равенство подставим вместо $q'_\alpha(\tau)$ правую часть равенства (4.6.14) и проинтегрируем по частям:

$$q_\alpha(x) = R_0[f, q_\alpha](x) + \sum_{j=1}^2 R_j[f, q_\alpha, \nu](x), \quad x \in S.$$

Здесь R_j , $j = 0, 1, 2$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} R_0[f, q](x) &= -f'(x) - \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x} K_x q \right) (\tau) d\tau, \\ R_1[f, q, \nu](x) &= \int_0^x \exp\{\nu(\tau - x)\} \left[f''(\tau) - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} K_\tau q \right) (\tau) \right] d\tau, \\ R_2[f, q, \nu](x) &= \int_0^x \exp\{\nu(\tau - x)\} \int_0^\tau \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 \tau} K_\tau q \right) (\xi) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, решение $q_\alpha \in C^1(S; X)$ уравнения (4.6.11) будет также решением уравнения

$$q(x) = R_0[f, q](x) + \sum_{j=1}^2 R_j[f, q, \nu](x), \quad x \in S. \quad (4.6.15)$$

Отметим, что (4.6.10) можно (с учетом введенных обозначений) переписать в виде

$$q(x) = R_0[f, q](x), \quad x \in S. \quad (4.6.16)$$

□

Теорема 4.6.2. Предположим, что $f \in C^2(S; X)$ и $f'(0) = 0$, а решение q_T уравнения (4.6.1) существует и принадлежит $C^2(S; X)$. Предположим также, что семейство операторов $\{K_x\}_{x \in S}$ удовлетворяет условиям (4.6.7) и (4.6.12). Тогда найдется $\alpha_* \in \mathbb{R}_+$, такое, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_*)$ уравнение (4.6.15) однозначно разрешимо в $C(S; X)$ и имеет место оценка

$$\|q_T - q_\alpha\|_{C(S; X)} \leq D_* \alpha, \quad (4.6.17)$$

где постоянная D_* зависит от $\|q_T\|_{C(S; X)}$, $\|f\|_{C^2(S; X)}$, T и степени роста функции μ .

Доказательство этой теоремы можно найти в [7].

Теорема 4.6.3. Предположим, что выполнены условия теоремы 4.6.2. Тогда существует такое $\alpha_* \in \mathbb{R}_+$, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_*)$ уравнение (4.6.11) однозначно разрешимо в $C(S; X)$ и имеет место оценка (4.6.16).

Доказательство. Так как условия теоремы 4.6.2 выполнены, найдется $\alpha_* > 0$, такое, что для всех $\alpha \in (0, \alpha_*)$ существует единственное решение $q_\alpha(x)$ уравнения (4.6.15). Докажем, что $q_\alpha(x)$ является также решением уравнения (4.6.11).

Применяя в правой части (4.6.15) формулу интегрирования по частям, получаем

$$q_\alpha(x) = -\nu \int_0^x \exp\{\nu(\tau - x)\} \left[f'(\tau) + \int_0^\tau \left(\frac{\partial}{\partial \tau} K_\tau q_\alpha \right) (\xi) d\xi \right] d\tau$$

или, что то же самое,

$$q_\alpha(x) = \nu \int_0^x \exp\{\nu(\tau - x)\} q_\alpha(\tau) d\tau - \nu \int_0^x \exp\{\nu(\tau - x)\} \times \left[f'(\tau) + q_\alpha(\tau) + \int_0^\tau \left(\frac{\partial}{\partial \tau} K_\tau q_\alpha \right) (\xi) d\xi \right] d\tau. \quad (4.6.18)$$

По условиям теоремы 4.6.2 функция $q_\alpha(x)$ дифференцируема. Значит, имеет место тождество

$$\int_0^x \exp\{\nu(\tau - x)\} q'_\alpha(\tau) d\tau = q_\alpha(x) - \nu \int_0^x \exp\{\nu(\tau - x)\} q_\alpha(\tau) d\tau.$$

Но тогда из (4.6.18) вытекает, что

$$\int_0^x \exp\{\nu(\tau - x)\} \omega(\tau) d\tau = 0, \quad x \in S,$$

где

$$\omega(x) = q'_\alpha(x) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x) + \int_0^x (K_x q_\alpha)(\tau) d\tau \right].$$

Следовательно, $\omega(x) \equiv 0$, $x \in S$, и поскольку $f(0) = 0$, $q'_\alpha(0) = 0$, получим окончательно

$$-q_\alpha(x) = \nu \left[f(x) + \int_0^x (K_x q_\alpha)(\tau) d\tau \right],$$

т. е. $q_\alpha(x)$ является решением уравнения (4.6.11), что и требовалось доказать. \square

Предположим теперь, что вместо точного значения f имеется приближенное f_δ , удовлетворяющее условию

$$\|f - f_\delta\|_{C(S; X)} \leq \delta.$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$-\alpha q(x) = f_\delta(x) + \int_0^x (K_x q)(\tau) d\tau, \quad x \in S. \quad (4.6.19)$$

Теорема 4.6.4. *Предположим, что выполнены условия теоремы 4.6.2. Тогда существует такое $\alpha_* \in \mathbb{R}_+$, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_*)$, $\delta \in (0, (\alpha/2) \exp(-T\gamma))$ решение $q_{\alpha\delta}$ уравнения (4.6.19) существует и единственно в $C(S, X)$, а также имеет место оценка*

$$\|q_T - q_{\alpha\delta}\|_{C(S;X)} \leq D_* \alpha + \frac{2\delta}{\alpha} \exp(T\gamma), \quad (4.6.20)$$

где q_T — решение уравнения (4.6.1); постоянная D_* зависит от $q_T^* = \|q_T\|_{C(S;X)}$, $\|f\|_{C^2(S;X)}$, T и μ ; $\gamma = (2/\alpha)\mu(q_T^* + 2, q_T^* + 2)$.

Доказательство этой теоремы также можно найти в [7].

Итак, мы показали, что решение операторного уравнения первого рода

$$0 = f_\delta(x) + \int_0^x (K_x q)(\tau) d\tau, \quad x \in S,$$

можно приблизить решением регуляризованного уравнения (4.6.19) с точностью, определяемой оценкой (4.6.20).

Контрольные вопросы

1. С какими главами связаны результаты главы 4?
2. Приведите примеры интегральных уравнений первого рода из различных прикладных областей (см. главу 1) и исследуйте их.
3. Исследуйте простейшую обратную задачу для системы уравнений Максвелла (см. главу 10), сведя ее к операторному уравнению Вольтерра.

Дополнительная литература

- 4.1. Апарцын А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода. Теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.
- 4.2. Апарцын А. С. Дискретизованные методы регуляризации некоторых интегральных уравнений первого рода в методе численного анализа и оптимизации. Новосибирск, 1987. С. 263–297.
- 4.3. Вайникко Г. М., Хямарик У. А. Проекционные методы и саморегуляризация в некорректных задачах // Изв. вузов. Математика. 1985. № 10. С. 3–17.
- 4.4. Баев А. В. О решении одной обратной задачи для волнового уравнения с помощью регуляризирующего алгоритма // ЖВМ и МФ. 1985. Т. 25, № 1. С. 140–146.
- 4.5. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. Москва: Мир, 1978.

- 4.6. **Денисов А. М.** О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, № 4. С. 1053–1056.
- 4.7. **Кабанихин С. И.** Приближенный метод решения обратной задачи для уравнения акустики // Приближенные методы решения и вопросы корректности обратных задач. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981. С. 55–62.
- 4.8. **Кабанихин С. И.** О разрешимости обратных задач для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 788–791.
- 4.9. **Кабанихин С. И.** Регуляризация операторного уравнения Вольтерра первого рода с ограниченно липшиц-непрерывным ядром // Докл. АН СССР. 1989. Т. 39, № 3. С. 549–552.
- 4.10. **Лаврентьев М. М.** Обратные задачи и специальные операторные уравнения первого рода. Москва: Наука, 1972.
- 4.11. **Романов В. Г.** Одномерная обратная задача для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211, № 5. С. 1083–1084.
- 4.12. **Романов В. Г.** О некоторых классах единственности решения операторных уравнений Вольтерра первого рода // Функцион. анализ и его прил. 1975. Т. 9, № 1. С. 81–82.
- 4.13. **Романов В. Г., Кабанихин С. И., Бобоев К. Б.** Обратная задача электродинамики для \mathcal{P}_N -приближения кинетического уравнения переноса // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 2. С. 296–299.
- 4.14. **Сергеев В. О.** Регуляризация уравнения Вольтерра I рода // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 3. С. 531–534.

Глава 5.

Интегральная геометрия

В данной главе изучаются задачи интегральной геометрии. В общем виде это задачи восстановления функции на некотором линейном пространстве по множеству значений этой функции на заданном семействе вложенных в это пространство многообразий. Мы рассмотрим задачу Радона о восстановлении функции по значениям ее интегралов вдоль всевозможных прямых (раздел 5.1), задачу восстановления функции по ее сферическим средним (раздел 5.2), проблему моментов (раздел 5.3), прямую и обратную кинематическую задачу сейсмологии (раздел 5.4). Идеи и методы интегральной геометрии имеют исключительно важное значение в томографии. Термин “томография” (от греч. *tomos* — кусок, слой) чаще всего обозначает метод неразрушающего послойного исследования внутренней структуры объекта посредством многократного его просвечивания.

Коротко *томографией* можно назвать способ определения внутренней структуры непрозрачных тел. На практике применяется *компьютерная томография*, использующая сложные математические вычисления на мощных компьютерах. Основные математические задачи компьютерной томографии (и вообще компьютерной диагностики объектов) сводятся к операторным уравнениям первого рода $Aq = f$. Рассмотрим несколько примеров компьютерной томографии.

Пример 1 (рентгеновская компьютерная томография (РКТ)). Если обычный рентгеновский снимок показывает лишь общие контуры внутренней структуры тела, искаженные наложениями и тенями, то после математической обработки (РКТ) появляется цифровое изображение с широкими возможностями регулировки диапазона контрастности, яркости изображения. Развитие и применение

РКТ сделало возможным обнаружение внутренних травматических повреждений человека, некротических явлений, опухолей и других заболеваний, а также определение с большой степенью точности формы и координат пораженных участков.

Пример 2 (дефектоскопия). Помимо рентгеновского излучения в дефектоскопии используются и более жесткое гамма-излучение, различные тяжелые частицы и электроны, электромагнитные, акустические волны и т. п.

Пример 3 (микроскопия). В настоящее время почти все исследования биологических структур проводятся при помощи электронных микроскопов с использованием принципов томографии.

Пример 4 (геофизика). Располагая в одной из скважин источники излучений (электромагнитных, сейсмических), а в другой — приемники, мы приходим к задаче восстановления межскважинного пространства, т. е. снова к задаче томографии.

Пример 5 (астрофизика). Принципы компьютерной томографии использовались при составлении карты СВЧ-излучения Солнца, восстановлении рентгеновской структуры астрономических объектов, оценке распределения плотности электронов на сферической поверхности вокруг Солнца.

Пример 6 (экология). Неоценимо значение компьютерной томографии в космическом зондировании атмосферы, особенно при определении концентрации загрязняющих примесей.

Пример 7 (ЯМР-томография). Все более широко распространенной и эффективной становится диагностика на основе явления ядерно-магнитного резонанса, которая позволяет практически без риска для пациентов (в отличие от рентгеновской томографии) визуализировать внутреннюю структуру человеческого тела, очаги поражения мягких тканей, суставов и т. д.

5.1. Задача Радона

Рассмотрим сечение исследуемого объекта (тела) плоскостью (x, y) . Предполагаем, что все рентгеновские лучи лежат в этой плоскости. Луч, проходя через тело, фиксируется детектором. Измерения проводятся для всевозможных направлений луча. Пусть $q(x, y)$ — коэффициент поглощения рентгеновских лучей в точке (x, y) . Тогда относительное уменьшение интенсивности излучения на малом отрезке Δl в точке (x, y) равно $q(x, y) \Delta l$. Пусть J_0 — начальная интенсивность луча, J_1 — его интенсивность после прохождения через тело. Тогда

$$\frac{J_1}{J_0} = \exp \left\{ - \int_L q(x, y) dl \right\},$$

где L — прямая в плоскости сечения, совпадающая с направлением пучка. Так как величина J_1/J_0 измеряется для всевозможных прямых, ле-

жащих в плоскости сечения, то в результате приходим к задаче определения функции $q(x, y)$ по интегралам

$$\int_L q(x, y) dl,$$

взятым по всем прямым L , лежащим в плоскости сечения.

Задача восстановления функции двух переменных по значениям ее интегралов вдоль прямых была поставлена и решена Радонам (1917). Интенсивное развитие работ по томографии и их применение в медицине началось примерно через полвека после работы Радона. Мы рассмотрим задачу Радона, используя методику, изложенную А. М. Денисовым [5].

Уравнение прямой на плоскости можно задать следующим образом:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = p. \quad (5.1.1)$$

Здесь $|p|$ — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую; φ — угол между осью x и перпендикуляром. Семейство прямых на плоскости представляет собой двухпараметрическое семейство $L(p, \varphi)$, $p \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Из уравнения (5.1.1) следует, что пары (p, φ) и $(-p, \varphi + \pi)$ задают одну и ту же прямую.

Преобразованием Радона функции $q(x, y)$ называется интеграл $f(p, \varphi)$ от функции $q(x, y)$ по прямой $L(p, \varphi)$

$$f(p, \varphi) = \int_{L(p, \varphi)} q(x, y) dl. \quad (5.1.2)$$

Перейдем от уравнения (5.1.1) к параметрическому представлению прямой

$$x = p \cos \varphi - t \sin \varphi, \quad y = p \sin \varphi + t \cos \varphi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда формулу (5.1.2) можно записать следующим образом:

$$f(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} q(p \cos \varphi - t \sin \varphi, p \sin \varphi + t \cos \varphi) dt. \quad (5.1.3)$$

Отметим, что преобразование Радона существует не для всякой функции $q(x, y)$. Из формулы (5.1.3) следует, что оно не определено, например, для $q(x, y) = \text{const} \neq 0$.

Рассмотрим сначала задачу обращения преобразования Радона для радиально-симметричной функции $q(x, y)$, обращающейся в ноль вне круга радиуса R с центром в начале координат. Пусть $q(x, y) = q_0(\sqrt{x^2 + y^2})$ для $x^2 + y^2 \leq R^2$, где $q_0(x)$ непрерывна на отрезке $[0, R]$ и $q(x, y) = 0$ при $x^2 + y^2 > R^2$. Вычислим преобразование Радона от этой функции. Очевидно, что $f(p, \varphi) = 0$ при $|p| > R$. Пусть $|p| < R$, тогда

$$\begin{aligned} f(p, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} q(p \cos \varphi - t \sin \varphi, p \sin \varphi + t \cos \varphi) dt \\ &= \int_{-\sqrt{R^2 - p^2}}^{\sqrt{R^2 - p^2}} q_0(\sqrt{p^2 + t^2}) dt \end{aligned}$$

или

$$f(p, \varphi) = 2 \int_0^{\sqrt{R^2 - p^2}} q_0(\sqrt{p^2 + t^2}) dt, \quad |p| < R. \quad (5.1.4)$$

Из представления (5.1.4) для преобразования Радона следует, что в рассматриваемом случае оно не зависит от переменной φ и четно по переменной p . Учитывая это, в дальнейшем будем обозначать преобразование Радона через $f(p)$, где $p \in [0, R]$. Заменяя в (5.1.4) переменную $\theta = \sqrt{p^2 + t^2}$, получим

$$\int_p^R \frac{2q_0(\theta)\theta d\theta}{\sqrt{\theta^2 - p^2}} = f(p), \quad 0 \leq p \leq R. \quad (5.1.5)$$

Таким образом, обращение преобразования Радона в случае радиально-симметричной финитной функции $q(x, y)$ сводится к решению интегрального уравнения первого рода с переменным пределом интегрирования (5.1.5). Ядро уравнения (5.1.5)

$$G(p, \theta) = \frac{2\theta}{\sqrt{\theta^2 - p^2}} = \frac{2\theta}{\sqrt{\theta - p}\sqrt{\theta + p}}, \quad 0 \leq p \leq \theta \leq R,$$

имеет интегрируемую особенность. Исследование подобных уравнений было начато Абелем. Отметим, что интеграл, стоящий в левой части уравнения (5.1.5), определен для любой функции $q_0(\theta) \in C[0, R]$.

Получим явную формулу для решения уравнения (5.1.5). Умножим (5.1.5) на $p(p^2 - s^2)^{-1/2}$ и проинтегрируем по p от s до R :

$$\int_s^R p(p^2 - s^2)^{-1/2} \int_p^R \frac{2q_0(\theta)\theta d\theta}{\sqrt{\theta^2 - p^2}} dp = \int_s^R p(p^2 - s^2)^{-1/2} f(p) dp. \quad (5.1.6)$$

Обозначим выражение, стоящее в левой части этого равенства, через $J(q_0)$ и преобразуем его, изменив порядок интегрирования:

$$J(q_0) = \int_s^R 2q_0(\theta)\theta \left(\int_s^\theta \frac{p dp}{\sqrt{(p^2 - s^2)(\theta^2 - p^2)}} \right) d\theta.$$

Вводя новую переменную

$$z = \frac{2p^2 - \theta^2 - s^2}{\theta^2 - s^2}$$

и учитывая, что

$$p^2 = \frac{(\theta^2 - s^2)z}{2} + \frac{\theta^2 + s^2}{2},$$

получаем

$$\begin{aligned} & \int_s^\theta \frac{p dp}{\sqrt{(p^2 - s^2)(\theta^2 - p^2)}} \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{(\theta^2 - s^2) dz}{\sqrt{(\theta^2 - s^2)z/2 + (\theta^2 - s^2)/2} \sqrt{(\theta^2 - s^2)/2 - (\theta^2 - s^2)z/2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{2} \arcsin(z) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J(q_0) = \pi \int_s^R q_0(\theta) \theta d\theta$$

и (5.1.6) можно записать в виде

$$\pi \int_s^R q_0(\theta) \theta d\theta = \int_s^R p \sqrt{p^2 - s^2} f(p) dp.$$

Дифференцирование этого равенства по s дает формулу для решения уравнения (5.1.5):

$$q_0(s) = -\frac{1}{\pi s} \frac{d}{ds} \int_s^R p \sqrt{p^2 - s^2} f(p) dp. \quad (5.1.7)$$

Из этого представления следует, что решение уравнения (5.1.5) единственно в пространстве непрерывных функций, а значит, радиально-симметричная функция $q(x, y) = q_0(\sqrt{x^2 + y^2})$ однозначно определяется своим преобразованием Радона.

Перейдем теперь к исследованию задачи восстановления функции $q(x, y)$ по ее преобразованию Радона $f(p, \varphi)$ в общей постановке. Будем предполагать, что функция $q(x, y)$ принадлежит множеству бесконечно дифференцируемых на плоскости функций, таких, что

$$\sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \left| x^k y^l \frac{\partial^n q(x, y)}{\partial x^p \partial y^j} \right| < \infty \quad (5.1.8)$$

для всех неотрицательных целых чисел k, l, n, p, j ($n = p + j$).

Покажем, что для функций $q(x, y)$, обладающих свойством (5.1.8), преобразование Радона $f(p, \varphi)$ существует и для него при $p \in (-\infty, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ выполняется оценка

$$|f(p, \varphi)| \leq \frac{C}{(1 + p^2)^{3/2}}, \quad (5.1.9)$$

где C — положительная постоянная.

Из условия (5.1.8) следует, что существует положительная постоянная C_1 , такая, что для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$|q(x, y)| \leq \frac{C_1}{[(1 + x^2)(1 + y^2)]^2}.$$

Из оценки (5.1.8) и формулы (5.1.3) для преобразования Радона следует, что

$$\begin{aligned} f(p, \varphi) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |q(p \cos \varphi - t \sin \varphi, p \sin \varphi + t \cos \varphi)| dt \\ &\leq C_1 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + (p \cos \varphi - t \sin \varphi)^2)^{-2} (1 + (p \sin \varphi + t \cos \varphi)^2)^{-2} dt. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} (1 + (p \cos \varphi - t \sin \varphi)^2)(1 + (p \sin \varphi + t \cos \varphi)^2) \\ \geq 1 + (p \cos \varphi - t \sin \varphi)^2 + (p \sin \varphi + t \cos \varphi)^2 = 1 + p^2 + t^2, \end{aligned}$$

то

$$|f(p, \varphi)| \leq C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + p^2 + t^2)^2}.$$

Тогда, учитывая равенство

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + \operatorname{const},$$

имеем

$$|f(p, \varphi)| \leq \frac{C}{(1 + p^2)^{3/2}},$$

т. е. оценка (5.1.9) доказана.

Установим связь между преобразованиями Фурье (см. главу 12) функций $q(x, y)$ и ее преобразованием Радона $f(p, \varphi)$. Из оценки (5.1.8) следует, что для функции $q(x, y)$ существует двумерное преобразование Фурье

$$\hat{q}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega_1 x - i\omega_2 y) q(x, y) dx dy.$$

Из оценки (5.1.9) следует, что для любого φ существует одномерное преобразование Фурье функции $f(p, \varphi)$ по переменной p :

$$\hat{f}(\omega, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega p) f(p, \varphi) dp.$$

Покажем, что преобразования Фурье $\hat{q}(\omega_1, \omega_2)$ и $\hat{f}(\omega, \varphi)$ связаны между собой следующим образом:

$$\hat{q}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega, \varphi). \quad (5.1.10)$$

Рассмотрим

$$\hat{q}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)) q(x, y) dx dy.$$

Заменим в интеграле переменные $x = p \cos \varphi - t \sin \varphi$, $y = p \sin \varphi + t \cos \varphi$. В силу очевидных равенств

$$\frac{D(x, y)}{D(p, t)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = 1,$$

$$\begin{aligned} & -i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi) \\ &= -i\omega(p \cos^2 \varphi - t \sin \varphi \cos \varphi + p \sin^2 \varphi + t \sin \varphi \cos \varphi) = -i\omega p \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} & \hat{q}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega p) \int_{-\infty}^{\infty} q(p \cos \varphi - t \sin \varphi, p \sin \varphi + t \cos \varphi) dt dp. \end{aligned}$$

Из формулы (5.1.3) следует

$$\hat{q}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega p) f(p, \varphi) dp.$$

Учитывая определение преобразования Фурье, имеем

$$\hat{q}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega, \varphi),$$

и формула (5.1.10) доказана.

Из формулы (5.1.10) следует, что функция $q(x, y)$ однозначно определяется преобразованием Радона. Действительно, пусть функции $q_1(x, y)$, $q_2(x, y)$ таковы, что $f_1(p, \varphi) = f_2(p, \varphi)$ для $p \in (-\infty, \infty)$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда их разность $q_0(x, y) = q_1(x, y) - q_2(x, y)$ будет иметь преобразование Радона $f_0(p, \varphi) = 0$ для $p \in (-\infty, \infty)$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$. Следовательно, преобразование Фурье от $f_0(p, \varphi)$ по первому аргументу $\hat{f}_0(\omega, \varphi)$ равно нулю для всех $\omega \in (-\infty, \infty)$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда из формулы (5.1.10) получим, что $\hat{q}_0(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) = 0$ для всех $\omega \in (-\infty, \infty)$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$. Заметим, что для любых $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$ система уравнений $\omega \cos \varphi = \omega_1$, $\omega \sin \varphi = \omega_2$ относительно ω и φ имеет решение $\omega \in (-\infty, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Следовательно, преобразование Фурье $\hat{q}_0(\omega_1, \omega_2)$ тождественно равно нулю при $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$, а значит, и $q_0(x, y) = 0$ для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Таким образом, $q_1(x, y) = q_2(x, y)$ для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Используя формулу (5.1.10), по заданной функции $f(p, \varphi)$ можно вычислить двумерное преобразование Фурье $\hat{q}(\omega_1, \omega_2)$, а затем $q(x, y)$. При реализации этого алгоритма на практике необходимо учитывать проблемы, связанные с вычислением прямых и обратных преобразований Фурье от функций, заданных приближенно. Другой особенностью алгоритма является то, что при его реализации необходимо пересчитывать

значения функции $\hat{q}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)$, заданной в полярной системе, в значения $\hat{q}(\omega_1, \omega_2)$ в декартовой системе координат (ω_1, ω_2) .

Рассмотрим теперь формулу обращения преобразования Радона, т. е. формулу вычисления $q(x, y)$ по $f(p, \varphi)$, полученную Раденом. Так как при вычислении значений искомой функции в некоторой точке можно считать, что начало координат находится в этой точке, ограничимся формулой для определения значения $q(0, 0)$.

Обозначим через D_α внешность окружности радиуса α с центром в нуле. Рассмотрим двойной интеграл

$$J = \iint_{D_\alpha} \frac{q(x, y) dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - \alpha^2}}. \quad (5.1.11)$$

С помощью замены переменных $x = \alpha \cos \varphi - t \sin \varphi$, $y = \alpha \sin \varphi + t \cos \varphi$ этот интеграл приводится к виду

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty q(\alpha \cos \varphi - t \sin \varphi, \alpha \sin \varphi + t \cos \varphi) dt$$

или

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^0 q(\alpha \cos \varphi - t \sin \varphi, \alpha \sin \varphi + t \cos \varphi) dt.$$

Следовательно,

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^\infty q(\alpha \cos \varphi - t \sin \varphi, \alpha \sin \varphi + t \cos \varphi) dt$$

и, с учетом (5.1.3),

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\alpha, \varphi) d\varphi. \quad (5.1.12)$$

С другой стороны, заменив в интеграле (5.1.11) переменные $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получим

$$J = \int_\alpha^\infty \int_0^{2\pi} \frac{q(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi dr}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}}.$$

Обозначив

$$\bar{q}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi, \quad (5.1.13)$$

приходим к равенству

$$J = 2\pi \int_\alpha^\infty \frac{\bar{q}(r) r dr}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}}.$$

Сравнив последнее равенство с (5.1.12), получим интегральное уравнение для неизвестной функции $\bar{q}(r)$

$$2 \int_\alpha^\infty \frac{\bar{q}(r) r dr}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}} = \bar{f}(\alpha), \quad 0 < \alpha < \infty, \quad (5.1.14)$$

где

$$\bar{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha, \varphi) d\varphi.$$

Заметим, что уравнение (5.1.14) совпадает с уравнением (5.1.5) с точностью до обозначений, за исключением того, что в уравнении (5.1.5) верхний предел конечен, а в (5.1.14) он бесконечен. Но и это различие произошло только вследствие того, что при выводе уравнения (5.1.5) предполагалось, что $q_0(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$ при $x^2 + y^2 > R^2$.

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} J(\bar{f}) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\bar{f}(\alpha)}{\alpha} = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{d\bar{f}(\alpha)}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{f}(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{f}(\alpha) d\alpha}{\alpha^2} \right). \end{aligned}$$

Используя (5.1.14), имеем

$$J(\bar{f}) = \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{q}(r)r dr}{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} - \int_\varepsilon^\infty \int_\alpha^\infty \frac{\bar{q}(r)r dr d\alpha}{\alpha^2 \sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} \right).$$

Меняя порядок интегрирования во втором интеграле, получаем

$$J(\bar{f}) = \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{q}(r)r dr}{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} - \int_\varepsilon^\infty \bar{q}(r) \int_\varepsilon^r \frac{r d\alpha}{\alpha^2 \sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} dr \right).$$

Так как

$$\int \frac{d\alpha}{\alpha^2 \sqrt{r^2 - \alpha^2}} = -\frac{\sqrt{r^2 - \alpha^2}}{r^2 \alpha} + \text{const},$$

то справедливо равенство

$$\int_\varepsilon^r \frac{r d\alpha}{\alpha^2 \sqrt{r^2 - \alpha^2}} = -\frac{\sqrt{r^2 - \alpha^2}}{r\alpha} \Big|_\varepsilon^r = \frac{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}}{r\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J(\bar{f}) &= \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^\infty \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} - \frac{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}}{r} \right) \bar{q}(r) dr \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{q}(r) dr}{r\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon \int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{q}(0) dr}{r\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} + \varepsilon \int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{q}(r) - \bar{q}(0) dr}{r\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} \right). \end{aligned}$$

Вычислим первый интеграл. В силу того что

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} = \frac{1}{\varepsilon} \text{arctg} \left(\frac{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right) + \text{const}, \quad (5.1.15)$$

имеем

$$\varepsilon \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\bar{q}(0) dr}{r\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} = \frac{\pi}{2} \bar{q}(0).$$

Обозначим второе слагаемое через J_2 и докажем, что оно стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Пусть $\omega(h)$ — модуль непрерывности функции $\bar{q}(r)$ на отрезке $[0, 1]$. Тогда для $\varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \varepsilon \int_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{|\bar{q}(r) - \bar{q}(0)| dr}{r\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} + \varepsilon \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{|\bar{q}(r) - \bar{q}(0)| dr}{r\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} \\ &\leq \varepsilon \omega(\sqrt{\varepsilon}) \int_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}} + 2\varepsilon C \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}}, \end{aligned}$$

где постоянная C такова, что $|\bar{q}(r)| \leq C$ для $r \geq 0$. Из (5.1.15) следует, что

$$|J_2| \leq \omega(\sqrt{\varepsilon}) \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right) + 2C \left[\frac{2}{\pi} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right) \right]$$

и $J_2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом,

$$J(\bar{f}) = \bar{q}(0)$$

и формула, полученная Радоном, имеет вид

$$q(0, 0) = \bar{q}(0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\bar{f}(\alpha)}{\alpha}.$$

Отметим, что на практике, как правило, не удается экспериментально определить функцию $f(p, \varphi)$ — преобразование Радона для всех значений p и φ . Недостаток информации может породить неединственность при восстановлении функции $q(x, y)$. Одним из возможных способов решения этой проблемы является сужение класса функций $q(x, y)$.

5.2. Восстановление функции по сферическим средним

Одним из примеров задач интегральной геометрии является задача восстановления функции $q(x, y_1, y_2)$ по средним значениям этой функции, вычисленным по сферам произвольного конечного радиуса r с центрами на плоскости $x = 0$.

Обозначим точку (x, y_1, y_2) в трехмерном пространстве через (x, y) , $y = (y_1, y_2)$, а функцию $q(x, y_1, y_2)$ — через $q(x, y)$. Пусть (ξ, η) ($\eta = (\eta_1, \eta_2)$) — переменная точка на сфере радиуса r с центром в точке $(0, y)$. В этих обозначениях задача восстановления функции $q(x, y)$ по сферическим средним $f(y, r)$, $r \geq 0$, сводится к интегральному уравнению

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\xi^2 + |\eta|^2 = r^2} q(\xi, y + \eta) d\omega = f(y, r). \quad (5.2.1)$$

Здесь через $d\omega$ обозначен элемент телесного угла с центром в точке $(0, y)$.

Особенности этой задачи будут исследованы в разделах 9.1, 9.2 (см. также [13]).

5.3. Определение функции одной переменной по значениям ее интегралов. Проблема моментов

При исследовании многих прикладных и теоретических проблем возникает задача определения функции $q(x)$ по значениям ее интегралов

$$\langle q, \varphi_n \rangle := \int_a^b q(x) \varphi_n(x) dx = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.3.1)$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ — заданная система функций.

Если система функций $\{\varphi_n(x)\}$ является полной ортонормированной системой в $L_2(a, b)$, то задача определения $q(x)$ из равенств (5.3.1) представляет собой задачу восстановления функции по ее коэффициентам Фурье f_n . Из общей теории рядов Фурье в гильбертовом пространстве следует, что для любой последовательности $\{f_n\} \in l_2$ существует единственная функция $q(x) \in L_2(a, b)$, такая, что равенства (5.3.1) выполнены при всех натуральных n и имеет место равенство Парсеваля

$$\|q\|_{L_2(a,b)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2.$$

Таким образом, если поставленную задачу сформулировать как задачу решения операторного уравнения $Aq = f$, $f = \{f_n\}$, где оператор A , определяемый равенствами (5.3.1), действует из пространства $L_2(a, b)$ в l_2 , то эта задача является корректной, поскольку решение уравнения существует и единственно для любой правой части $\{f_n\} \in l_2$, а непрерывная зависимость $q(x)$ от $\{f_n\}$ следует из равенства Парсеваля.

Предположим теперь, что оператор A действует из пространства $C[a, b]$ в l_2 , т. е. ищется непрерывная функция $q(x)$, удовлетворяющая равенствам (5.3.1). Эта задача является некорректной, поскольку если построить для произвольной $q(x) \in L_2(a, b) \setminus C[a, b]$ соответствующую ей последовательность коэффициентов Фурье $\{f_n\} \in l_2$, то в силу единственности определения функции по ее коэффициентам Фурье не существует непрерывной на $[a, b]$ функции с той же последовательностью коэффициентов Фурье $\{f_n\}$. Таким образом, корректность задачи восстановления функции $q(x)$ по значениям ее интегралов (5.3.1) существенно зависит от того, в каком пространстве ищется неизвестная функция $q(x)$. Методы определения непрерывных функций по их коэффициентам Фурье, заданным приближенно, изложены в монографии А. Н. Тихонова и В. А. Арсенина [16].

Рассмотрим теперь задачу определения функции $q(x)$ по значениям ее интегралов в случае, когда $\{\varphi_n(x)\}$ не является полной ортонормированной системой. Задача построения функции $q(x)$, удовлетворяющей равенствам (5.3.1), в которых $\{\varphi_n(x)\}$ — заданная последовательность функций, а $\{f_n\}$ — заданная последовательность чисел, называется *проблемой моментов*. Рассматривают конечномерный и бесконечномерный варианты в соответствии с количеством заданных функций $\varphi_n(x)$ и чисел f_n . Сформулируем задачу в более общей постановке. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, в котором задана последовательность элементов $\{\varphi_n(x)\}$, а также задана последовательность чисел $\{f_n\}$. Требуется определить элемент $q \in H$, такой, что $\langle q, \varphi_n \rangle_H = f_n$, $n = 1, 2, \dots, N$ (конечномерная проблема моментов) или $n \in \mathbb{N}$ (бесконечномерная проблема моментов). Если на искомый элемент q накладывается условие $\|q\| \leq l$, где l — некоторое заданное число, то задача называется *l-проблемой моментов*.

Рассмотрим бесконечномерную проблему моментов. Единственность решения этой задачи гарантируется полнотой системы элементов $\{\varphi_n\}$. Действительно, если система элементов $\{\varphi_n\}$ полна, то из равенств $\langle u, \varphi_n \rangle_H = 0$, $n = 1, 2, \dots$, следует, что $u = 0$, а значит, решение бесконечномерной проблемы моментов единственно.

Решение конечномерной проблемы моментов всегда неединственно. Действительно, пусть \bar{q} — решение конечномерной проблемы моментов $\langle \bar{q}, \varphi_n \rangle_H = f_n$, $n = 1, 2, \dots, N$. Обозначим через H_1 подпространство, ортогональное к конечномерному подпространству, порождаемому элементами $\varphi_1, \dots, \varphi_N$. Тогда решением данной проблемы моментов наряду с \bar{q} будет являться элемент $\bar{q} + \psi$, где ψ — произвольный элемент из H_1 .

Отметим, что решение конечномерной l -проблемы моментов при определенных условиях может быть единственным. Действительно, пусть $\{\varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, — ортонормированный базис в H . Рассмотрим конечномерную l -проблему моментов: $\langle q, \varphi_n \rangle_H = f_n$, $n = 1, 2, \dots, N$, $\|q\| \leq l$. Разложим элемент q в ряд по элементам φ_n :

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \langle q, \varphi_n \rangle \varphi_n = \sum_{n=1}^N f_n \varphi_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle q, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Из равенства Парсеваля

$$\|q\|^2 = \sum_{n=1}^N f_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle q, \varphi_n \rangle^2$$

следует, что если

$$M = \sum_{n=1}^N f_n^2 < l^2,$$

то решение конечномерной l -проблемы моментов существует и неединственно; если $M = l^2$, то решение существует и единственно; и, наконец, если $M > l^2$, то решения не существует.

Рассмотрим вопрос о разрешимости проблемы моментов. Очевидно, что, за исключением тривиальных случаев, исследование разрешимости бесконечномерной проблемы моментов более сложно, чем конечномерной. Однако вопрос о разрешимости бесконечномерной l -проблемы моментов может быть сведен к исследованию разрешимости конечномерных l -проблем моментов. Пусть дана система элементов $\varphi_n \in H$, $n \in \mathbb{N}$, и последовательность чисел f_n ; требуется найти элемент q , такой, что $\langle q, \varphi_n \rangle = f_n$ для $n \in \mathbb{N}$ и $\|q\| \leq l$.

Теорема 5.3.1. *Для разрешимости бесконечномерной l -проблемы моментов необходимо и достаточно, чтобы при любом натуральном N существовало решение конечномерной l -проблемы моментов для тех же φ_n и f_n .*

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна, так как если элемент q является решением бесконечномерной l -проблемы моментов, то он будет являться решением конечномерной l -проблемы моментов для любого натурального N .

Докажем достаточность. Обозначим через q_n решение конечномерной l -проблемы моментов

$$\langle q, \varphi_m \rangle = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad \|q\| \leq l.$$

Для любого элемента последовательности $\{q_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, выполнено условие $\|q_n\| \leq l$. Следовательно, из последовательности $\{q_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{q_{n_k}\}$, слабо сходящуюся к элементу q . Из слабой сходимости q_{n_k} к элементу q и ограниченности норм $\|q_{n_k}\| \leq l$ следует, что $\|q\| \leq l$. Так как $\langle q_{n_k}, \varphi_m \rangle = f_m$, $m = 1, 2, \dots, n_k$, то, переходя в этих равенствах к пределу при $n_k \rightarrow \infty$ и учитывая слабую сходимость q_{n_k} к q , получаем

$$\langle q, \varphi_n \rangle = f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, элемент q является решением бесконечномерной l -проблемы моментов, что и требовалось доказать. \square

Покажем, что в случае линейно независимой системы элементов $\{\varphi_n\}$ конечномерная проблема моментов разрешима всегда. Пусть задана линейно независимая система элементов φ_n , $n = 1, 2, \dots, N$, и числа f_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Рассмотрим ортонормированную систему элементов ψ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, полученную из φ_n в результате ортогонализации:

$$\psi_j = \frac{\omega_j}{\|\omega_j\|}, \quad \omega_j = \varphi_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle \varphi_j, \psi_k \rangle \psi_k.$$

Тогда

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^n \langle \varphi_n, \psi_j \rangle \psi_j, \quad \langle \varphi_n, \psi_n \rangle \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n \langle \varphi_n, \psi_j \rangle c_j = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

относительно неизвестных c_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Это система с треугольной матрицей, на диагонали которой стоят элементы $\langle \varphi_n, \psi_n \rangle$, отличные от нуля. Следовательно, система имеет единственное решение \bar{c}_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Покажем, что элемент

$$\bar{q}_N = \sum_{j=1}^N \bar{c}_j \psi_j$$

является решением конечномерной проблемы моментов. Действительно, так как $\langle \varphi_n, \psi_j \rangle = 0$ при $j > n$, то для всех $n = 1, 2, \dots, N$

$$\langle \bar{q}_N, \varphi_n \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^N \bar{c}_j \psi_j, \varphi_n \right\rangle = \sum_{j=1}^N \bar{c}_j \langle \psi_j, \varphi_n \rangle = f_n.$$

Таким образом, в случае линейно независимой системы элементов φ_n конечномерная проблема моментов имеет решение при любых числах f_n .

Исследуем условия существования решения конечномерной l -проблемы моментов. Пусть \bar{q}_N — построенное выше решение конечномерной проблемы моментов. Обозначим через B_N линейный оператор, действующий из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n и определяемый матрицей с элементами $b_{ij} = \langle \varphi_i, \psi_j \rangle$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. Поскольку эта матрица треугольная и на ее диагонали расположены ненулевые элементы, то при всех натуральных N оператор B_N имеет ограниченный обратный B_N^{-1} и справедлива оценка

$$\|\bar{q}_N\|_H = \sum_{n=1}^N \langle \bar{q}_N, \psi_j \rangle^2 \leq \|B_N^{-1}\|^2 \sum_{n=1}^N f_n^2.$$

Следовательно, элемент \bar{q}_N будет являться решением конечномерной l -проблемы моментов, если

$$\|B_N^{-1}\|^2 \sum_{n=1}^N f_n^2 \leq l^2.$$

Пусть система линейно независимых элементов φ_n такова, что $\|B_N^{-1}\| \leq B$ для всех натуральных N . Предположим также, что $\{f_n\} \in l_2$

и $\|\{f_n\}\|_{l_2} = \bar{f}$. Тогда, если $B\bar{f} \leq l$, то существует решение бесконечномерной l -проблемы моментов. Действительно, при этих предположениях для любого натурального N существует решение \bar{q}_N конечномерной проблемы моментов для набора чисел $f_i, i = 1, 2, \dots, N$. Тогда

$$\|\bar{q}_N\|_H \leq \|B_N^{-1}\| \left(\sum_{n=1}^N f_n^2 \right)^{1/2} \leq B \|\{f_n\}\|_{l_2} = B\bar{f}.$$

Следовательно, если $B\bar{f} \leq l$, то конечномерная l -проблема моментов имеет решение для любого натурального N и из теоремы 5.3.1 следует, что существует решение бесконечномерной l -проблемы моментов.

Замечание 5.3.1. Изложенные результаты непосредственно применимы для исследования исходной задачи (5.3.1) в случае, когда решение $q(x)$ ищется в пространстве $L_2(a, b)$.

Замечание 5.3.2. В научной литературе можно встретить термины “степенная проблема моментов” ($\varphi_n(x) = x^n$) или “тригонометрическая проблема моментов”. Ознакомиться с вопросами, связанными с проблемой моментов и ее приложениями, можно по [5.1].

Вернемся к задаче восстановления функции $q(x) \in L_2(a, b)$ по ее интегралам f_n , определяемым равенствами (5.3.1), где $\{\varphi_n(x)\}$ — заданная система функций. Эта задача имеет единственное решение, если система $\{\varphi_n(x)\}$ полна в $L_2(a, b)$. Однако выяснить, является ли заданная система функций $\{\varphi_n(x)\}$ полной, как правило, довольно трудно. Одним из наиболее известных классов полных систем в пространстве $L_2(a, b)$ являются системы собственных функций задачи Штурма — Лиувилля.

Другим примером такой системы является система степенных функций $\{x^n\}, n = 0, 1, \dots$, полнота которой следует из теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении функции, непрерывной на отрезке, алгебраическими многочленами. Рассмотрим более общую систему функций $\varphi_n(x) = x^{a_n}$, где a_n — некоторая последовательность положительных чисел. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.3.2. Пусть $q(x) \in L_2(0, 1)$, положительные числа $a_n, n \in \mathbb{N}$, таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \infty,$$

и

$$\int_0^1 q(x) x^{a_n} dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $q(x) = 0$.

Замечание 5.3.3. К исследованию полноты системы функций может быть сведена задача исследования единственности решения линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Действительно, если ядро $K(t, x)$ уравнения

$$\int_a^b K(t, x)q(x) dx = f(t), \quad c \leq t \leq d, \quad (5.3.2)$$

таково, что на отрезке $[c, d]$ существует последовательность точек t_n , такая, что система функций $\varphi_n(x) = K(t_n, x)$ полна в пространстве $L_2(a, b)$, то решение уравнения (5.3.2) единственно в $L_2(a, b)$.

5.4. Обратная кинематическая задача сейсмоки

Обратная кинематическая задача сейсмоки возникла при изучении внутренней структуры Земли по наблюдениям на поверхности Земли за распространением фронтов сейсмических волн, порождаемых землетрясениями.

Физическая картина распространения сейсмических волн вдоль земной поверхности напоминает картину распространения волн по поверхности спокойной воды от брошенного в нее камня. От эпицентра землетрясения движется фронт сейсмической волны, отделяющий покоящуюся среду от возмущенной. Форма фронта и скорость движения его точек по поверхности зависят от скорости сейсмической волны внутри Земли. Например, для сферически-симметричной модели Земли, когда скорость волны зависит только от глубины, фронты представляют собой окружности, движущиеся от эпицентра. Если же скорость волны зависит от всех трех координат, фронт ее распространения может представлять собой сложную кривую. Еще на рубеже XIX и XX столетий перед геофизиками встал вопрос о том, возможно ли, располагая картиной движения фронтов сейсмических волн по поверхности Земли от различных землетрясений, установить скорость сейсмических волн внутри Земли. Дело в том, что скорость волны зависит от упругих свойств тела, внутри которого она распространяется. Поэтому наличие информации о скорости распространения сейсмических волн внутри Земли позволяет делать выводы о внутреннем строении Земли.

Математическая модель процесса распространения сейсмических волн формулируется следующим образом [13]. Пусть D — область трехмерного пространства \mathbb{R}^3 с границей S , в которой происходит передача сигналов с конечной положительной скоростью $c(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Возьмем произвольную пару точек $x^0, x \in D$ и рассмотрим функционал

$$\tau(L) = \int_{L(x, x^0)} \frac{|dy|}{c(y)}, \quad (5.4.1)$$

где $L(x, x^0)$ — произвольная достаточно гладкая кривая, соединяющая точки x^0 и x ; $|dy|$ — элемент ее длины в евклидовой метрике:

$$|dy| = \left(\sum_{k=1}^3 dy_k^2 \right)^{1/2}. \quad (5.4.2)$$

Как видно из формулы (5.4.1), функционал $\tau(L)$ соответствует времени пробега сигнала по кривой $L(x, x^0)$. *Сейсмический луч* — это такая кривая $L(x, x^0)$, по которой время пробега сигнала минимально. Для достаточно сложных сред функция $c(x)$ сильно отличается от постоянной, поэтому пару точек x^0, x может соединять несколько лучей (или даже бесчисленное множество лучей), каждый из которых обладает тем свойством, что функционал (5.4.1) принимает на нем минимальное значение по сравнению со всеми другими значениями, отвечающими кривым, достаточно близким к рассматриваемому лучу. Таким образом, сейсмические лучи — это локальные экстремали функционала (5.4.1). Известно, что в n -мерном пространстве экстремали функционала (5.4.1) являются интегральными кривыми системы уравнений Эйлера, состоящей из n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Эти интегральные кривые подчинены дополнительному условию: они проходят через точки x^0, x . Обозначим луч, соединяющий точки x^0, x , через $\Gamma(x, x^0)$, а время пробега сигнала по этому лучу через $\tau(x, x^0)$. Тогда

$$\tau(x, x^0) = \int_{\Gamma(x, x^0)} \frac{|dy|}{c(y)}. \quad (5.4.3)$$

Поверхность, определяемая равенством $\tau(x, x^0) = \text{const}$ при фиксированном x^0 , является фронтом волны от точечного источника возмущений, сосредоточенного в точке x^0 . Пусть $\nu(x, x^0)$ — единичный вектор касательной к лучу $\Gamma(x, x^0)$, построенный в точке x и направленный в сторону возрастания τ . Тогда из (5.4.3) следует

$$\nabla_x \tau(x, x^0) = \frac{1}{c(x)} \nu(x, x^0). \quad (5.4.4)$$

Здесь через $\nabla_x \tau$ обозначен градиент функции τ , вычисленный по переменной точке x . Следствием равенства (5.4.4), которое выражает условие ортогональности фронтов и лучей, является уравнение

$$|\nabla_x \tau(x, x^0)|^2 = \frac{1}{c^2(x)}. \quad (5.4.5)$$

Заметим, что уравнение (5.4.4) тесно связано с волновым уравнением

$$u_{tt} = c^2(x) \Delta u, \quad c(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (5.4.6)$$

описывающим процесс распространения акустических колебаний в среде с постоянной плотностью. Действительно, если уравнение характеристической поверхности для волнового уравнения (5.4.6) представить

в виде $t = \tau(x)$, то функция $\tau(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$|\nabla_x \tau(x)|^2 = c^{-2}(x),$$

называемому *уравнением эйконала* (от греческого *eikon* — изображение). Уравнение (5.4.5) при условии

$$\tau(x, x^0) = O(|x - x^0|) \quad (5.4.7)$$

описывает характеристические поверхности $t = \tau(x, x^0)$, имеющие в фиксированной точке x^0 коническую точку. Такие поверхности называются *характеристическими коноидами*. Заметим, что x^0 является параметром в (5.4.5), а условие (5.4.7) заменяет данные Коши, отвечающие вырожденному случаю, когда поверхность, несущая эти данные, стягивается в точку x^0 .

Алгоритм построения характеристических коноидов $t = \tau(x, x^0)$ по заданной функции $c(x)$ основан на построении его образующих — отдельных линий, называемых *бихарактеристиками*, которые лежат на коноиде и в совокупности составляют его. Чтобы построить бихарактеристики, введем в рассмотрение вектор

$$p = (p_1, p_2, p_3) = \nabla_x \tau(x, x^0). \quad (5.4.8)$$

Обозначим $q(x) = 1/c(x)$. Продифференцировав уравнение эйконала $|p|^2 = q^2(x)$ по x_k , получим

$$pp_{x_k} = qq_{x_k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.4.9)$$

Из (5.4.8) следует, что $(p_i)_{x_k} = (p_k)_{x_i}$ и, значит, (5.4.9) можно привести к виду

$$p \nabla_x p_k = qq_{x_k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.4.10)$$

Разделим (5.4.10) на $q^2(x)$ и перепишем вдоль кривых $dx/dt = p \cdot q^{-2}(x)$:

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \ln q(x), \quad k = 1, 2, 3.$$

Вдоль этих же кривых $\tau(x, x^0)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\tau}{dt} = \nabla_x \tau \frac{dx}{dt} = q^{-2}(x) |p|^2 = 1.$$

Если выбрать параметр t так, чтобы $\tau = 0$ при $t = 0$, то тогда $t = \tau$ и параметр t будет равен времени прохождения сигнала от x^0 до x . Введем произвольный единичный вектор ν^0 и решим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = p \cdot q^{-2}(x), \quad \frac{dp}{dt} = \nabla \ln q(x), \quad (5.4.11)$$

$$x|_{t=0} = x^0, \quad p|_{t=0} = p^0 \equiv q(x^0)\nu^0. \quad (5.4.12)$$

В результате мы найдем x и p как функции от t и параметров x^0, p^0 :

$$x = h(t, x^0, p^0), \quad p = \psi(t, x^0, p^0). \quad (5.4.13)$$

Первое из равенств (5.4.13) при фиксированном x^0 определяет в пространстве переменных x, t двухпараметрическое семейство бихарактеристик, образующих характеристический коноид.

Проекцию бихарактеристики на пространство x называют *лучом*. Равенство $x = h(t, x^0, p^0)$ задает луч параметрически, а первое из равенств (5.4.11) показывает, что касательная к лучу имеет направление вектора p , откуда в силу (5.4.8) вытекает ортогональность лучей поверхностям $\tau(x, x^0) = t$.

Известно, что если произвольная гладкая кривая $L(x, x^0)$ соединяет пару точек x, x^0 , а $|dy|$ — элемент ее длины, то лучи являются экстремалими функционала

$$\tau(L) = \int_{L(x, x^0)} \frac{|dy|}{c(y)},$$

т. е. кривыми, на которых $\tau(L)$ достигает экстремума (вообще говоря, локального). Следовательно, если волна порождена точечным источником колебаний, расположенным в точке x^0 и действующим с момента времени $t = 0$, то лучи, введенные нами как проекции бихарактеристик уравнения эйконала на пространство x , есть не что иное, как сейсмические лучи, минимизирующие функционал $\tau(L)$. С другой стороны, сечение характеристического коноида плоскостью $t = t_0, t_0 > 0$, в проекции на пространство x (т. е. решение уравнения $\tau(x, x^0) = t_0$) определяет фронт волны в момент времени $t = t_0$.

Дифференциальные свойства решений задачи (5.4.11), (5.4.12) для открытой области $D \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей S подробно изучены в книге [13]. Приведем лишь необходимые в дальнейшем результаты. Обозначим $\bar{D} = D \cup S$.

Лемма 5.4.1. Если $q(x) \in C^{s+1}(\bar{D})$, $s \geq 1$,

$$q(x) \geq q_0 > 0, \quad x \in \bar{D}, \quad (5.4.14)$$

то для любой точки $x^0 \in D$ и любого единичного вектора ν^0 решение (5.4.13) задачи (5.4.11), (5.4.12) существует и единственно для всех t , при которых $h(t, x^0, p^0) \in \bar{D}$, и функции h, h_{tt}, ψ, ψ_t непрерывны по t, x^0, p^0 вместе с частными производными до порядка s .

Лемма 5.4.2. Пусть выполнены предположения леммы 5.4.1. Тогда решение задачи (5.4.11), (5.4.12) представимо в виде

$$x = \varphi(\xi, x^0), \quad p = \frac{1}{t} q^2(\varphi(\xi, x^0)) \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, x^0), \quad (5.4.15)$$

где $\xi = p^0 t q^{-2}(x^0)$, вектор-функция $\varphi(\xi, x^0) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ имеет s непрерывных производных по своим аргументам, $\partial\varphi/\partial\xi$ — матрица Якоби:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_2} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_3} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_3} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_3} \end{array} \right\|, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Используя данные Коши и (5.4.11), можно разложить $\varphi(\xi, x^0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\xi = 0$:

$$\varphi(\xi, x^0) = x^0 + \xi + O(|\xi|^2). \quad (5.4.16)$$

При фиксированных точке x^0 и $|\xi| = t/q(x^0)$ равенство $x = \varphi(\xi, x^0)$ представляет собой параметрическое задание поверхности $\tau(x, x^0) = t$.

Лемма 5.4.3. Пусть выполнены предположения леммы 5.4.1. Тогда в малой окрестности точки $\xi = 0$ функция $\varphi(\xi, x^0)$ имеет однозначную обратную функцию $\xi = g(x, x^0)$, которая s раз непрерывно дифференцируема по x и x^0 , причем $g(x^0, x^0) = 0$.

Отметим, что из (5.4.16) вытекает

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \Big|_{\xi=0} = E, \quad (5.4.17)$$

где E — единичная матрица. Таким образом, если зафиксировать x^0 и рассмотреть множество $\Delta(x^0)$ точек $x = \varphi(\xi, x^0)$, для которых $|\xi| \leq \delta$, то при достаточно малом δ между x и ξ существует взаимно однозначное соответствие. Поскольку $\xi = p^0 t/q^2(x^0)$, каждой паре x, x^0 соответствует единственный луч $\Gamma(x, x^0)$, который соединяет эти точки и лежит в $\Delta(x^0)$. В точке x^0 луч $\Gamma(x, x^0)$ имеет направление $\nu^0 = p^0/q(x^0)$. Вектор ν^0 и время пробега $\tau(x, x^0)$ определяются из формул

$$\begin{aligned} t &= \tau(x, x^0) = q(x^0)|g(x, x^0)|, \\ \nu^0 &= \nu^0(x, x^0) = g(x, x^0)/|g(x, x^0)|. \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

Из (5.4.16) следует, что

$$g(x, x^0) = x - x^0 + O(|x - x^0|^2). \quad (5.4.19)$$

Лемма 5.4.4. Пусть выполнены предположения леммы 5.4.1. Тогда при $x \neq x^0$ функции $\tau(x, x^0)$ и $\nu(x, x^0)$ s раз непрерывно дифференцируемы и в окрестности x^0 удовлетворяют оценкам

$$|D^\alpha \tau| \leq C|x - x^0|^{1-|\alpha|}, \quad |D^\alpha \nu^0| \leq C|x - x^0|^{-|\alpha|}, \quad (5.4.20)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \sum_{k=1}^6 \alpha_k$, $|\alpha| \leq s$, $\alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_3)^{\alpha_3} \alpha_6.$$

Вернемся к уравнению (5.4.5). Задача определения функции $\tau(x, x^0)$ при заданной функции $c(x)$ является прямой задачей для этого уравнения. Ее решение осуществляется с помощью представленного выше метода Гамильтона — Якоби, в котором одновременно строятся характеристики уравнения (5.4.5) и функция $\tau(x, x^0)$, т. е. лучи и фронты волнового процесса. Эта задача называется *прямой кинематической задачей сейсмологии*. В *обратной задаче* функция $c(x)$ неизвестна, но известен закон движения волновых фронтов по границе области, в которой распространяется волновой процесс. Приведем один из вариантов обратной кинематической задачи. Пусть в области D пространства \mathbb{R}^3 , ограниченной поверхностью S , происходит волновой процесс, порожденный точечным источником колебаний, приложенным в точке x^0 , и пусть известна функция $\tau(x, x^0)$ для всевозможных $x^0 \in S$, $x \in S$. Требуется найти скорость передачи сигналов $c(x)$ для $x \in D$.

Впервые обратная кинематическая задача сейсмологии была рассмотрена в 1905–1907 гг. Г. Герглотцем и Е. Вихертом в предположении сферической симметрии Земли ($c = c(r)$, $r = |x|$, центр системы координат совпадает с центром Земли), поскольку экспериментально было замечено, что времена пробега сейсмических волн между источником и приемником, расположенными на фиксированном расстоянии друг от друга, почти не зависят от района их расположения. Было обнаружено, что в случае $c = c(r)$ сейсмический луч $\Gamma(x, x^0)$ лежит в плоскости, проходящей через точки (x, x^0) и центр Земли, поэтому достаточно рассмотреть произвольное сечение Земли плоскостью большого круга, а точки x^0 и x выбирать только на границе этого круга. Г. Герглотц и Е. Вихерт показали, что точку x^0 можно фиксировать, а точку x перемещать по граничной окружности. Тогда, если функция

$$m(r) = \frac{r}{c(r)} \quad (5.4.21)$$

монотонно растет с увеличением r и непрерывно дифференцируема, то она однозначно определяется заданием функции $\tau = \tau(\alpha)$, называемой *годографом* волны. Здесь α — угловое расстояние между точками x^0, x ; $\tau(\alpha)$ — время пробега сигнала между этими точками. Оказалось, что можно локально восстановить функцию $c(r)$, а именно: если функция $\tau(\alpha)$ известна для $\alpha \in [0, \alpha_0]$, $\alpha_0 > 0$, то функция $c(r)$ находится в некотором слое $r_0 \leq r \leq R$, где R — радиус Земли, а r_0 определяется по α_0 , причем $r_0(\alpha_0)$ монотонно убывает с ростом α_0 и $r_0(\alpha_0) \rightarrow R$ при $\alpha_0 \rightarrow 0$.

Решение обратной кинематической задачи для сферически-симметричной модели Земли оказало большое влияние на развитие взглядов о строении Земли. Расчеты, проведенные по данным о временах пробега сейсмических волн, выявили характерные элементы строения Земли: земную кору, оболочку (мантию), ядро. Земная кора

представляет собой сравнительно небольшой по мощности слой средней толщиной около 30 км. Оболочка Земли отличается от земной коры значительно большими значениями скоростей сейсмических волн; довольно резкое нарастание их происходит на границе между земной корой и оболочкой. Толщина оболочки — порядка 3 тыс. км. Вещество ядра существенно отличается по своим физическим свойствам от вещества оболочки. Через него не проходят поперечные волны, в то время как в оболочке они распространяются. Отсутствие поперечных волн характерно для жидкости. Это дает основание предполагать, что вещество ядра Земли находится в жидком состоянии.

В настоящее время имеется несколько десятков скоростных моделей Земли, но все они незначительно различаются между собой — в среднем на величину порядка 10 %.

Рассмотрим теперь обратную задачу восстановления скорости $c(x)$ по наблюдениям за движением сейсмических волн по поверхности Земли в случае, когда скорость $c(x)$ зависит от всех координат.

Иначе говоря, пусть о решении прямой задачи

$$|\nabla_x \tau(x, x^0)|^2 = c^{-2}(x), \quad x \in D, \quad (5.4.22)$$

$$\tau(x, x^0) = 0(|x - x^0|) \quad \text{при} \quad x \rightarrow x^0,$$

известна дополнительная информация

$$\tau(x, x^0) = f(x, x^0), \quad x, x^0 \in S. \quad (5.4.23)$$

Требуется определить $c(x)$ из соотношений (5.4.22), (5.4.23).

Линеаризованная обратная кинематическая задача сейсмоки. В линеаризованной постановке обратной задачи мы предполагаем, что искомая функция $q(x) = 1/c(x)$ имеет вид

$$q(x) = q_0(x) + q_1(x),$$

причем функция $q_0(x)$ известна, $q_0(x) > 0$, а $q_1(x) \in C^2(\bar{D})$ мала по сравнению с $q_0(x)$ в норме $C^2(D)$.

Сначала мы ищем решение $\tau_0(x, x^0)$ прямой задачи

$$|\nabla_x \tau(x, x^0)|^2 = q_0^2(x), \quad x \in D,$$

$$\tau(x, x^0) = O(|x - x_0|).$$

Положим

$$\tau_1(x, x^0) = \tau(x, x^0) - \tau_0(x, x^0), \quad x^0 \in S, \quad x \in D;$$

$$f_1(x, x^0) = f(x, x^0) - \tau_0(x, x^0), \quad x, x^0 \in S.$$

Линеаризация обратной задачи (5.4.22), (5.4.23) заключается в постановке в (5.4.22), (5.4.23) вместо функций τ , q и f правых частей равенств

$$\tau = \tau_0 + \tau_1, \quad q = q_0 + q_1, \quad f = \tau_0 + f_1$$

с последующим отбрасыванием попарных произведений функций τ_1 , q_1 , f_1 , которые являются величинами более высокого порядка малости, чем q_1 . Таким образом, из (5.4.22) получим уравнение (линейное приближение)

$$\nabla_x \tau_1(x, x^0) \cdot \nabla \tau_0(x, x^0) = q_1(x) q_0(x), \quad x \in D, \quad (5.4.24)$$

а из (5.4.23) следует

$$\tau_1(x, x^0) = f_1(x, x^0), \quad x, x^0 \in S. \quad (5.4.25)$$

Разделим обе части (5.4.24) на $q_0(x)$ и проинтегрируем вдоль луча $\Gamma_0(x, x^0)$, построенного по функции $q_0(x)$. Поскольку единичный вектор $\nabla_x \tau_0(x, x^0)/q_0(x)$ является касательным к лучу $\Gamma_0(x, x^0)$ в точке x , имеет место следующее интегральное уравнение относительно неизвестной функции $q_1(x)$:

$$\int_{\Gamma_0(x, x^0)} q_1(y) |dy| = \tau_1(x, x^0), \quad x, x^0 \in S. \quad (5.4.26)$$

Здесь $|dy|$ — евклидов элемент длины кривой $\Gamma_0(x, x^0)$, а функции $\Gamma_0(x, x^0)$ и $\tau_1(x, x^0)$ известны. В итоге получаем задачу интегральной геометрии — восстановить функцию $q_1(x)$, $x \in D$, зная ее интегралы (5.4.26) по заданному семейству кривых $\{\Gamma_0(x, x^0)\}$, $x, x^0 \in S$.

Рассмотрим сначала случай, когда D — шар радиуса r_1 с центром в нуле,

$$D = B(0, r_1) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq r_1\},$$

а $q_0(x) = q_0(r)$, $r = |x|$. Можно показать [13], что в этом случае достаточно рассмотреть экваториальное сечение шара плоскостью $x_3 = 0$, считая $x = (x_1, x_2)$, а функцию $\tau(x, x^0)$ задать для точек x и x^0 , лежащих на границе этого сечения.

Теорема 5.4.1. *Предположим, что функция $q_0(r)$ принадлежит $C^2[r_0, r_1]$, $r_0 \in (0, r_1)$, и удовлетворяет условиям*

$$q_0(r) > 0, \quad q_0(r) + r q_0'(r) > 0, \quad r \in [r_0, r_1].$$

Тогда любая непрерывная функция $q_1(x_1, x_2)$ однозначно определяется в области $r_0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq r_1$ по функции $\tau_1(x, x^0)$, заданной для тех точек x, x^0 границы $r = r_1$, для которых лучи $\Gamma(x, x^0)$ содержатся в этой области.

Рассмотрим теперь случай, когда $D \subset \mathbb{R}^3$ — односвязная ограниченная область с границей S , заданной уравнением $F(x) = 0$. Предложим, что функция F удовлетворяет условиям

$$F \in C^3(\bar{D}), \quad F(x) < 0 \quad \text{для } x \in D, \quad |\nabla F|_s = 1$$

и поверхность S выпукла относительно лучей $\Gamma_0(x, \beta)$, т. е. любые две точки $x, \beta \in S$ можно соединить лучом, лежащим в D , и любой луч $\Gamma_0(x, \beta)$, $\beta \neq x$; $\beta, x \in S$, нигде не касается S .

Предположим, что семейство лучей $\Gamma_0(x, \beta)$, порожденное функцией $q_0(x) \geq \lambda_0 > 0$ класса $C^2(\bar{D})$, регулярно внутри \bar{D} в следующем смысле. Как было показано ранее, уравнение луча, проходящего через любую точку $\beta \in \bar{D}$ в направлении единичного вектора ν^0 , может быть записано в виде $x = \varphi(\xi, \beta)$, $\xi = \nu^0 \tau / q_0^2(x)$, где $\varphi \in C^1(\bar{D} \times \bar{D})$, $\varphi(0, \beta) = \beta$, $(\partial \varphi / \partial \xi)|_{\xi=0} = E$, E — единичная матрица. Условие регулярности означает, что существует однозначная обратная функция $\xi = g(x, \beta)$ класса $C^1(\bar{D} \times \bar{D})$. Из условия регулярности, в частности, следует, что определитель $|\partial \varphi / \partial \xi|$ нигде не равен нулю и, значит, положителен.

Определим функцию

$$w(x, \beta) = \int_{\Gamma_0(x, \beta)} q_1(y) |dy|, \quad (5.4.27)$$

$$|dy| = \left(\sum_{i=1}^3 dy_i^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда задачу (5.4.26) можно переформулировать следующим образом. Пусть функция $w(x, \beta)$ задана для всех $x, \beta \in S$. Требуется определить $q_1(x)$ для всех $x \in \bar{D}$.

Заметим, что, зная функцию $F(x)$, а также $w(x, \beta)$ и $\tau_0(x, \beta)$ при $x, \beta \in S$, можно определить функцию

$$\Phi(w, \tau_0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & w_{x_1} & w_{x_2} & w_{x_3} \\ 0 & 0 & F_{x_1}(x) & F_{x_2}(x) & F_{x_3}(x) \\ w_{\beta_1} & F_{\beta_1}(\beta) & \tau_{0x_1\beta_1} & \tau_{0x_2\beta_1} & \tau_{0x_3\beta_1} \\ w_{\beta_2} & F_{\beta_2}(\beta) & \tau_{0x_1\beta_2} & \tau_{0x_2\beta_2} & \tau_{0x_3\beta_2} \\ w_{\beta_3} & F_{\beta_3}(\beta) & \tau_{0x_1\beta_3} & \tau_{0x_2\beta_3} & \tau_{0x_3\beta_3} \end{vmatrix}.$$

Теорема 5.4.2. Предположим, что функции $F(x)$, $q_0(x)$, а значит, и $\Gamma(x, x^0)$, $\tau_0(x, x^0)$, удовлетворяют перечисленным выше условиям. Тогда, если $q_0 \in C^2(\bar{D})$, то имеет место оценка устойчивости

$$\int_D q_1^2(x) dx \leq \frac{1}{8\pi\lambda_0} \int_S \int_S \Phi(w, \tau_0) dS_x dS_\beta. \quad (5.4.28)$$

Обратная кинематическая задача сейсмоки в полной постановке. Рассмотрим теперь общий случай, когда в соотношении

$$\int_{\Gamma(x, \beta)} q(y) |dy| = \tau(x, \beta), \quad x, \beta \in S, \quad (5.4.29)$$

неизвестна функция $q(x)$, а также порожденное этой функцией семейство лучей $\Gamma(x, \beta)$.

Будем говорить, что $q(x)$ принадлежит классу $\Lambda(c_1, c_2)$, $0 < c_1 < c_2 < \infty$, если эта функция удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $c_1 \leq q(x)$, $x \in D$;
- 2) $q \in C^2(D)$, $\|q\|_{C^2(D)} \leq c_2$;
- 3) семейство лучей $\Gamma(x, \beta)$, отвечающее функции $q(x)$, регулярно в D .

Зная на $S \times S$ функцию $\tau(x, \beta)$ и используя уравнение эйконала, можно вычислить на $S \times S$ частные производные τ_{x_j} , τ_{β_j} , $\tau_{x_j \beta_i}$ для любых i, j . В самом деле, производные по касательным направлениям находятся непосредственно по $\tau(x, \beta)$, а производные по нормальям к $S \times S$ строятся с учетом уравнений

$$|\nabla_x \tau(x, \beta)| = q(x), \quad |\nabla_x \tau(\beta, x)| = q(\beta).$$

Следовательно, зная на S функцию $\tau(x, \beta)$, можно вычислить ее частные производные до второго порядка и определить норму

$$\|\tau\|^2 = \int_S \int_S \left[|\nabla_x \tau|^2 + |\nabla_\beta \tau|^2 + |x - \beta|^2 \sum_{i,j=1}^3 \tau_{x_i \beta_j}^2 \right] \frac{1}{|x - \beta|} dS_x dS_\beta.$$

Теорема 5.4.3. Для любых функций $q_1, q_2 \in \Lambda(c_1, c_2)$ и отвечающих им функций τ_1, τ_2 справедлива оценка

$$\|q_1 - q_2\|_{L_2(D)}^2 \leq C \|\tau_1 - \tau_2\|^2, \quad (5.4.30)$$

в которой постоянная C зависит только от констант c_1, c_2 .

Доказательство теорем 5.4.1–5.4.3 можно найти в [13].

Контрольные вопросы

1. В чем связь и в чем различие задач, рассмотренных в главах 4 и 5?
2. Найдите в главе 10 задачи, в которых используются результаты данной главы.

Дополнительная литература

- 5.1. Ахиезер И. М. Классическая проблема моментов. Москва: Физматгиз, 1961.

- 5.2. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.** Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Сер. Обобщенные функции. № 4. Москва: Физматгиз, 1962.
- 5.3. **Джон Ф.** Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. Москва: ИЛ, 1958.
- 5.4. **Наттерер Ф.** Математические аспекты компьютерной томографии. Москва: Мир, 1990.
- 5.5. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А.** Математические задачи компьютерной томографии. Москва: Наука, 1987.
- 5.6. **Anikonov D. S., Nazarov V. G., Prokhorov I. V.** Poorly Visible Media in X-ray Tomography // VSP, The Netherlands. 2002.
- 5.7. **Anikonov D. S., Kovtanyuk A. E., Prokhorov I. V.** Transport Equation and Tomography // VSP, The Netherlands. 2002.
- 5.8. **Radon J.** Über die bestimmung vor funktionen durch ihre integralwärte längs gewisser mäannigfritigkeiten // Ber. Verh. Sächs. Akad. 1917. N 69. P. 262–277.

Глава 6.

Спектральные обратные задачи и обратные задачи рассеяния

Несколько лет назад исполнилось 100 лет понятию о кванте (М. Планк) и 75 лет уравнению Шрёдингера, определяющему волновую функцию и с нею все свойства исследуемого объекта по заданному потенциалу (прямая задача). А чуть более полувека назад были получены уравнения для решения спектральных обратных задач (И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, М. Г. Крейн, В. А. Марченко). Это достойное гордости достижение отечественной математики принесло исследователям всепроникающее “математическое” зрение [6.8]. Для изучения атомов, ядер, частиц недостаточно глаза, вооруженного микроскопом. Однако с использованием методов обратных задач и мощных компьютеров удалось существенно расширить “квантовый” кругозор.

Практическое значение спектральных обратных задач и обратных задач рассеяния невозможно переоценить, поскольку все, что мы знаем о микромире (молекулах, атомах, мельчайших частицах) собирается и выводится из экспериментов, связанных с рассеянием. Это же можно сказать и о многих задачах, возникающих в медицине, геофизике, химии. С другой стороны, наши знания о макромире, сведения о других планетах, звездах, галактиках также основаны во многом на использовании данных рассеяния, на спектральном анализе.

В данной главе рассматриваются обратные задачи, для которых были получены самые первые результаты. Спектральные обратные зада-

чи и обратные задачи рассеяния имеют настолько глубокие внутренние взаимосвязи, что результаты, полученные в одном из этих разделов, как правило, переносятся в другой, и наоборот. В этом отношении знаменательны работы Ю. М. Березанского [6.4, 6.5], в которых не только была получена одна из первых теорем единственности решения многомерной обратной задачи спектрального анализа, но также были поставлены и решены многомерные обратные задачи рассеяния именно с использованием их связи со спектральными обратными задачами.

Разумеется, в одной главе невозможно отобразить все многообразие идей, методов и приложений спектральных обратных задач и обратных задач рассеяния. Мы ограничимся в основном одномерными задачами и кратким изложением метода Гельфанда — Левитана (раздел 6.3), одномерным вариантом обратной задачи рассеяния (раздел 6.4) и обратными задачами рассеяния во временной области (раздел 6.5), обращая особое внимание на взаимосвязи между всеми упомянутыми задачами.

Обратные задачи спектрального анализа заключаются в определении операторов по некоторым их спектральным характеристикам (см. определение 6.2). Наиболее полные результаты в спектральной теории дифференциальных операторов, и в частности, в теории обратных задач, получены для дифференциального оператора Штурма — Лиувилля. Основные результаты по обратным спектральным задачам, полученные во второй половине XX века, позволили создать методы решения некоторых нелинейных эволюционных уравнений, исследовать обратные задачи восстановления оператора по неполной спектральной информации при наличии дополнительной априорной информации об операторе, а также обратные задачи для операторов произвольного порядка и для других классов операторов (см., например, [6.23]).

В разделах 6.1–6.3 мы рассмотрим спектральную теорию операторов Штурма — Лиувилля на конечном интервале. Доказательства, а также основные методы решения обратных одномерных спектральных задач (метод оператора преобразования, метод спектральных отображений, метод эталонных моделей, метод Борга) изложены в [6.23].

В разделе 6.4 мы представим несколько постановок обратной задачи рассеяния, сведение к одномерной обратной задаче на полуоси, случаи быстро убывающего и финитного потенциала. В разделе 6.5, следуя работе [6.3], приведен ряд постановок обратной задачи рассеяния во временной области, их взаимосвязи. В разделе 6.6 обсуждаются связи между спектральной функцией $\rho(\lambda)$, функцией Йоста $j(k)$ и импульсной характеристикой среды $r(t)$. Что касается современного состояния теории и практики обратных спектральных задач и обратных задач рассеяния, для его описания необходимо специальное многотомное издание.

6.1. Прямая задача Штурма — Лиувилля на конечном интервале

Прямой задачей Штурма — Лиувилля называют задачу исследования спектра оператора Штурма — Лиувилля. Мы будем рассматривать задачу Штурма — Лиувилля для операторов, определенных на функциях $y(x) \in W_2^2(0, \pi)$, удовлетворяющих некоторым условиям на концах интервала $(0, \pi)$.

Дифференциальный оператор

$$l_q y(x) := -y''(x) + q(x)y(x),$$

определенный на множестве $D(l_q)$ функций $y(x) \in W_2^2(0, \pi)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0,$$

где $h \in \mathbb{R}$, $H \in \mathbb{R}$, $q(x) \in L_2(0, \pi)$, будем называть *оператором Штурма — Лиувилля* на конечном интервале. Функция $q(x)$ называется *потенциалом* оператора l_q . Здесь и далее штрих понимается как производная по x .

Значение параметра λ , при котором операторное уравнение

$$l_q y(x) = \lambda y(x)$$

имеет нетривиальное решение, называется *собственным значением* оператора l_q , а соответствующее решение — *собственной функцией*. Множество собственных значений оператора составляет его *спектр*.

Замечание 6.1.1. Соотношения

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, & x \in (0, \pi), \\ y'(0) - hy(0) &= 0, & y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \end{aligned}$$

иногда называют классической задачей Штурма — Лиувилля (при разделенных граничных условиях).

В этом разделе мы опишем простейшие свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма — Лиувилля на конечном интервале.

Поведение спектра. Для исследования свойств спектра оператора Штурма — Лиувилля введем понятие характеристической функции. Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ решения уравнения

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad (6.1.1)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$\begin{aligned} \varphi(0, \lambda) &= 1, & \varphi'(0, \lambda) &= h, \\ \psi(\pi, \lambda) &= 1, & \psi'(\pi, \lambda) &= -H. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

При каждом фиксированном x функции $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ являются це-

лыми аналитическими по λ . Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} U(\varphi) &:= \varphi'(0, \lambda) - h\varphi(0, \lambda) = 0, \\ V(\psi) &:= \psi'(\pi, \lambda) + H\psi(\pi, \lambda) = 0. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Обозначим

$$\Delta(\lambda) = \psi(x, \lambda)\varphi'(x, \lambda) - \psi'(x, \lambda)\varphi(x, \lambda). \quad (6.1.4)$$

Согласно формуле Остроградского — Лиувилля вронскиан $\psi\varphi' - \psi'\varphi$ не зависит от x . Функция $\Delta(\lambda)$ называется *характеристической функцией* оператора l_q . Подставляя $x = 0$ и $x = \pi$ в (6.1.4), получаем

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi). \quad (6.1.5)$$

Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ и имеет не более счетного множества нулей $\{\lambda_n\}$, $n = 0, 1, \dots$. Из (6.1.5) следует, что функции $\varphi(x, \lambda_n)$, $\psi(x, \lambda_n)$ являются решениями уравнения $l_q y(x) = \lambda_n y(x)$, т. е. собственными функциями оператора l_q . Таким образом, нули $\{\lambda_n\}$ характеристической функции (6.1.4) совпадают с собственными значениями оператора l_q . Собственные функции $\varphi(x, \lambda_n)$ и $\psi(x, \lambda_n)$ пропорциональны, т. е. существует последовательность чисел $\{\beta_n\}$, такая, что

$$\psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(x, \lambda_n), \quad \beta_n \neq 0. \quad (6.1.6)$$

Каждому собственному значению соответствует только одна (с точностью до постоянного множителя) собственная функция.

Числа

$$\alpha_n := \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx \quad (6.1.7)$$

называются *весовыми числами*, а совокупность $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ называется *спектральными данными* оператора l_q .

Весовые числа α_n связаны с числами β_n , входящими в формулы (6.1.6), соотношениями

$$\beta_n \alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n), \quad (6.1.8)$$

где $\dot{\Delta}(\lambda) = d\Delta(\lambda)/d\lambda$. Из (6.1.8) видно, что все нули функции $\Delta(\lambda)$ являются простыми, т. е. $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$.

Собственные значения $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ оператора Штурма — Лиувилля l_q на конечном интервале вещественны и имеют на $+\infty$ точку сгущения. При больших n справедливы асимптотические формулы для λ_n и соответствующих собственных функций $\varphi(x, \lambda_n)$:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (6.1.9)$$

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos \sqrt{\lambda_n} x + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (6.1.10)$$

где

$$\omega = h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt.$$

В случае, если известен спектр $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, можно однозначно определить характеристическую функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле

$$\Delta(\lambda) = \pi(\lambda_0 - \lambda) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}. \quad (6.1.11)$$

Замечание 6.1.2. Аналогичные результаты можно получить для операторов Штурма — Лиувилля с другими видами нераспадающихся краевых условий.

Рассмотрим, например, оператор $l_q^1 y(x) = -y''(x) + q(x)y(x)$ с областью определения $D(l_q^1) = \{y \in W_2^2(0, \pi) : U(y) = 0, y(\pi) = 0\}$. Все собственные значения $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ оператора l_q^1 являются простыми и совпадают с нулями характеристической функции $d(\lambda) := \varphi(\pi, \lambda)$, причем

$$d(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n - \lambda}{(n + 1/2)^2}. \quad (6.1.12)$$

Для спектральных данных $\{\mu_n, \alpha_n^1\}_{n \geq 0}$, $\alpha_n^1 := \int_0^\pi \varphi^2(x, \mu_n) dx$, оператора l_q^1 справедливы асимптотические формулы

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\omega^1}{\pi n} + \frac{\beta_n}{n}, \quad \{\beta_n\} \in l_2, \quad (6.1.13)$$

$$\alpha_n^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta_{n1}}{n}, \quad \{\beta_{n1}\} \in l_2, \quad (6.1.14)$$

где

$$\omega^1 = h + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt.$$

Спектры операторов l_q и l_q^1 связаны соотношениями

$$\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (6.1.15)$$

т. е. собственные значения двух операторов l_q и l_q^1 перемежаются.

Свойства собственных функций. Рассмотрим собственные функции $\varphi(x, \lambda_n)$ оператора Штурма — Лиувилля l_q на конечном интервале $(0, \pi)$, соответствующие собственным значениям λ_n и нормированные условием $\varphi(0, \lambda_n) = 1$, $\varphi'(0, \lambda_n) = h$. Собственные функции оператора l_q являются вещественными. Собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны в $L_2(0, \pi)$:

$$\int_0^\pi \varphi(x, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_m) dx = 0, \quad \lambda_m \neq \lambda_n.$$

Система собственных функций $\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$ оператора Штурма — Лиувилля, как оказалось, является не только ортогональной, но и полной, т. е. образует ортогональный базис в $L_2(0, \pi)$. Теорема о полноте системы собственных функций оператора Штурма — Лиувилля на конечном интервале была доказана В. А. Стекловым в конце XIX века.

Теорема 6.1.1. 1. Система собственных функций $\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$ оператора l_q полна в $L_2(0, \pi)$.

2. Пусть $f(x)$, $x \in [0, \pi]$, — абсолютно непрерывная функция. Тогда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi(x, \lambda_n), \quad f_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} f(t) \varphi(t, \lambda_n) dt, \quad (6.1.16)$$

причем ряд сходится равномерно на $[0, \pi]$.

3. Для $f(x) \in L_2(0, \pi)$ ряд (6.1.16) сходится в $L_2(0, \pi)$, причем имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |f_n|^2. \quad (6.1.17)$$

Доказательство теоремы 6.1.1 приводится в [6.23].

Следует заметить, что теоремы о полноте и разложении играют важную роль при решении задач математической физики с использованием метода разделения переменных (см., например, раздел 5.3).

Рассмотрим оператор Штурма — Лиувилля l_q при $h = H = 0$ и $q(x) \equiv 0$. В этом случае $\varphi(x, \lambda_n) = \cos nx$, $x \in (0, \pi)$, и, следовательно, n -ая собственная функция имеет ровно n нулей внутри интервала $(0, \pi)$. Оказывается, что это свойство собственных функций верно также и в общем случае. Другими словами, имеет место следующая теорема Штурма об осцилляции.

Теорема 6.1.2. Собственная функция $\varphi(x, \lambda_n)$ оператора l_q имеет ровно n нулей в интервале $0 < x < \pi$.

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 6.1.1. Пусть $u_j(x)$ — решения уравнений

$$u'' + g_j(x)u = 0, \quad j = 1, 2, \quad x \in [a, b], \quad (6.1.18)$$

причем $g_1(x) < g_2(x)$. Предположим, что при некоторых $x_1, x_2 \in [a, b]$ $u_1(x_1) = u_1(x_2) = 0$ и $u_1(x) \neq 0$, $x \in (x_1, x_2)$. Тогда существует $x^* \in (x_1, x_2)$, такое, что $u_2(x^*) = 0$. Другими словами, между любыми двумя нулями функции $u_1(x)$ лежит по крайней мере один нуль функции $u_2(x)$.

Доказательство. Предположим противное: $u_2(x) \neq 0$ для любого $x \in (x_1, x_2)$. Без ограничения общности можно считать, что $u_j(x) > 0$ при $x \in (x_1, x_2)$, $j = 1, 2$. Из (6.1.18) следует равенство

$$\frac{d}{dx} (u_1' u_2 - u_2' u_1) = (g_2 - g_1) u_1 u_2,$$

проинтегрировав которое от x_1 до x_2 , получим

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} (g_2 - g_1) u_1 u_2 dx &= (u_1' u_2 - u_2' u_1) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= u_1'(x_2) u_2(x_2) - u_1'(x_1) u_2(x_1). \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

Интеграл в (6.1.19) строго положителен. С другой стороны, так как $u_1'(x_1) > 0$, $u_1'(x_2) < 0$ и $u_2(x) \geq 0$ при $x \in [x_1, x_2]$, правая часть в (6.1.19) неположительна. Это противоречие и доказывает лемму. \square

Рассмотрим функцию $\varphi(x, \lambda)$ при вещественных λ . Нули $\varphi(x, \lambda)$ по x являются функциями от λ . Покажем, что эти нули непрерывно зависят от λ .

Лемма 6.1.2. Пусть $\varphi(x_0, \lambda_0) = 0$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, то функция $\varphi(x, \lambda)$ имеет ровно один нуль в интервале $|x - x_0| < \varepsilon$.

Доказательство. Нуль x_0 решения $\varphi(x, \lambda_0)$ дифференциального уравнения (6.1.2) является простым, так как если бы $\varphi'(x_0, \lambda_0) = 0$, то согласно теореме единственности решения задачи Коши имело бы место тождественное равенство $\varphi(x, \lambda_0) \equiv 0$. Следовательно, $\varphi'(x_0, \lambda_0) \neq 0$. Для определенности предположим, что $\varphi'(x_0, \lambda_0) > 0$. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы $\varphi'(x, \lambda_0) > 0$ при $|x - x_0| \leq \varepsilon_0$. Тогда $\varphi(x, \lambda_0) < 0$ при $x \in [x_0 - \varepsilon_0, x_0)$ и $\varphi(x, \lambda_0) > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon_0]$. Возьмем $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. В силу непрерывности $\varphi(x, \lambda)$ и $\varphi'(x, \lambda)$ можно найти такое $\delta > 0$, что при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $|x - x_0| < \varepsilon$ выполняются неравенства $\varphi'(x, \lambda) > 0$, $\varphi(x_0 - \varepsilon, \lambda) < 0$, $\varphi(x_0 + \varepsilon, \lambda) > 0$. Следовательно, функция $\varphi(x, \lambda)$ имеет ровно один нуль в интервале $|x - x_0| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. \square

Лемма 6.1.3. Предположим, что при некотором вещественном λ_1 функция $\varphi(x, \lambda_1)$ имеет t нулей в интервале $0 < x \leq a$. Пусть $\lambda_2 > \lambda_1$. Тогда функция $\varphi(x, \lambda_2)$ имеет не менее t нулей на том же интервале, причем k -й нуль $\varphi(x, \lambda_2)$ меньше, чем k -й нуль $\varphi(x, \lambda_1)$.

Доказательство. Пусть $x_1 > 0$ — наименьший положительный нуль функции $\varphi(x, \lambda_1)$. В силу леммы 6.1.1 достаточно доказать, что функция $\varphi(x, \lambda_2)$ имеет по крайней мере один нуль в интервале $0 < x < x_1$.

Так как $\varphi(0, \lambda_1) = 1$, а $\varphi(x_1, \lambda_1) = 0$, то $\varphi'(x_1, \lambda_1) < 0$. Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} 0 < (\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^{x_1} \varphi(x, \lambda_2) \varphi(x, \lambda_1) dx &= \langle \varphi(x, \lambda_2), \varphi(x, \lambda_1) \rangle \Big|_0^{x_1} \\ &= \varphi(x_1, \lambda_2) \varphi'(x_1, \lambda_1). \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi(x_1, \lambda_2) < 0$. Поскольку $\varphi(0, \lambda_2) = 1$, функция $\varphi(x, \lambda_2)$ имеет нуль в интервале $(0, x_1)$. \square

Доказательство (доказательство теоремы 6.1.2). Рассмотрим функцию $\varphi(x, \lambda)$ при вещественных λ . В силу (6.1.10) функция $\varphi(x, \lambda)$ не имеет нулей при достаточно больших по модулю отрицательных λ : $\varphi(x, \lambda) > 0$, $\lambda \leq -\lambda^* < 0$, $x \in [0, \pi]$. С другой стороны, $\varphi(\pi, \mu_n) = 0$, где $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ — собственные значения оператора l_q^1 .

Используя леммы 6.1.2 и 6.1.3, получаем, что если λ движется от $-\infty$ к ∞ , то нули функции $\varphi(x, \lambda)$ на интервале $[0, \pi]$ непрерывно движутся налево. Новые нули могут появиться только через точку $x = \pi$. Из этого следует, что

- 1) функция $\varphi(x, \mu_n)$ имеет ровно n нулей в интервале $x \in [0, \pi)$;
- 2) если $\lambda \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$, $n \geq 0$, $\mu_{-1} := -\infty$, то функция $\varphi(x, \lambda)$ имеет ровно n нулей в интервале $x \in [0, \pi]$.

Согласно (6.1.15)

$$\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots$$

и, следовательно, функция $\varphi(x, \lambda_n)$ имеет ровно n нулей в интервале $(0, \pi)$. \square

Операторы преобразования. Операторы преобразования, связывающие собственные функции двух различных операторов Штурма — Лиувилля при всех λ , впервые появились в теории операторов обобщенного сдвига Дельсарта и Левитана [6.11]. В теории решения обратных задач операторы преобразования использовались И. М. Гельфандом, Б. М. Левитаном и В. А. Марченко (см. раздел 6.3 и монографии [6.14, 6.12]).

Определим функции $C(x, \lambda) \in W_2^2(0, \pi)$, $S(x, \lambda) \in W_2^2(0, \pi)$ как решения дифференциального уравнения (6.1.1) с начальными условиями

$$C(0, \lambda) = 1, \quad C'(0, \lambda) = 0, \quad S(0, \lambda) = 0, \quad S'(0, \lambda) = 1.$$

Для функции $C(x, \lambda)$ имеет место представление

$$C(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt, \quad (6.1.20)$$

где $K(x, t)$ — вещественная непрерывная функция, причем

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt. \quad (6.1.21)$$

Доказательство представления функции $C(x, \lambda)$ в виде (6.1.20) можно найти в [6.23].

Оператор T , определяемый формулой

$$Tf(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)f(t) dt,$$

отображает функцию $\cos \sqrt{\lambda}x$, которая является решением уравнения $-y'' = \lambda y$ с нулевым потенциалом $q(x) \equiv 0$, в функцию $C(x, \lambda)$, которая есть решение уравнения (6.1.1) с некоторым потенциалом $q(x)$ (т. е. $C(x, \lambda) = T(\cos \sqrt{\lambda}x)$). Оператор T называется *оператором преобразования* для $C(x, \lambda)$. Важно отметить, что ядро $K(x, t)$ не зависит от λ .

Аналогично можно получить операторы преобразования для функций $S(x, \lambda)$ и $\varphi(x, \lambda)$:

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x P(x, t) \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} dt, \quad (6.1.22)$$

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x + \int_0^x G(x, t) \cos \sqrt{\lambda}t dt, \quad (6.1.23)$$

где $P(x, t)$ и $G(x, t)$ — вещественные непрерывные функции с той же гладкостью, что и функция $\int_0^x q(t) dt$, причем

$$G(x, x) = h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt, \quad (6.1.24)$$

$$P(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt. \quad (6.1.25)$$

Доказательство представлений (6.1.22), (6.1.23) также приведено в [6.23].

6.2. Обратные задачи Штурма — Лиувилля на конечном интервале

Обратные задачи Штурма — Лиувилля состоят в восстановлении оператора l_q (т. е. его потенциала $q(x) \in L_2(0, \pi)$ и коэффициентов h и H , входящих в краевые условия) по его спектральным характеристикам.

Первый результат в теории обратных спектральных задач принадлежит В. А. Амбарцумяну [6.24].

Рассмотрим уравнение $l_q y = \lambda y$ при условии $h = H = 0$, т. е.

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0. \quad (6.2.1)$$

Ясно, что если $q(x) = 0$ почти всюду на $(0, \pi)$, то собственные значения задачи (6.2.1) имеют вид $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$. Верно и обратное утверждение.

Теорема 6.2.1 (теорема Амбарцумяна). *Если собственные значения задачи (6.2.1) суть $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$, то $q(x) = 0$ почти всюду на $(0, \pi)$.*

Доказательство. Из (6.1.9) вытекает, что $\omega = 0$, т. е. $\int_0^\pi q(x) dx = 0$. Пусть $y_0(x)$ — собственная функция для наименьшего собственного значения $\lambda_0 = 0$. Тогда

$$y_0''(x) - q(x)y_0(x) = 0, \quad y_0'(0) = y_0'(\pi) = 0.$$

По теореме 6.1.2 функция $y_0(x)$ не имеет нулей в интервале $x \in [0, \pi]$. Учитывая соотношение

$$q(x) = \frac{y_0''(x)}{y_0(x)} = \left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)} \right)^2 + \left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)} \right)',$$

получаем

$$0 = \int_0^\pi q(x) dx = \int_0^\pi \frac{y_0''(x)}{y_0(x)} dx = \int_0^\pi \left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)} \right)^2 dx.$$

Таким образом, $y_0'(x) \equiv 0$, т. е. $y_0(x) \equiv \text{const}$, $q(x) = 0$ почти всюду на $(0, \pi)$, что и требовалось доказать. \square

Отметим, что, вообще говоря, задание спектра $\{\lambda_n\}$ оператора l_q не определяет оператор однозначно. Результат Амбарцумяна является исключением из правил.

Единственность восстановления дифференциального оператора l_q по спектральным данным. Рассмотрим теперь задачу восстановления оператора l_q по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$.

Наряду с l_q рассмотрим оператор \bar{l}_q того же вида, но с потенциалом $\bar{q}(x)$ и коэффициентами \bar{h} , \bar{H} . Если некоторый символ, скажем γ , обозначает объект, относящийся к оператору l_q , то символ $\bar{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к \bar{l}_q , а $\tilde{\gamma} := \gamma - \bar{\gamma}$.

Теорема 6.2.2. Если $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$, $\alpha_n = \bar{\alpha}_n$ при всех $n \geq 0$, то $l_q = \bar{l}_q$, т. е. $q(x) = \bar{q}(x)$ почти всюду на $(0, \pi)$, $h = \bar{h}$ и $H = \bar{H}$.

Таким образом, задание спектральных данных $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ однозначно определяет потенциал и коэффициенты краевых условий.

Существует два доказательства теоремы 6.2.2. Мы приведем доказательство, которое принадлежит В. А. Марченко [6.13] и использует оператор преобразования и равенство Парсевала (6.1.17). Этот метод работает также и для операторов Штурма — Лиувилля на полуоси и позволяет доказать теорему единственности восстановления оператора по его спектральной функции. Второе доказательство, приведенное в книге В. А. Юрко [6.23], принадлежит Н. Левинсону [6.27] и опирается на метод контурного интеграла. Левинсон первым применил идеи метода контурного интеграла к исследованию обратных спектральных задач.

Доказательство (по В. А. Марченко). Согласно (6.1.23), представим собственные функции $\varphi(x, \lambda)$ и $\bar{\varphi}(x, \lambda)$ операторов l_q и \bar{l}_q , соответственно, в виде

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x G(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt,$$

$$\bar{\varphi}(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x + \int_0^x \bar{G}(x, t) \cos \sqrt{\lambda}t \, dt.$$

Другими словами,

$$\varphi(x, \lambda) = (E + G) \cos \sqrt{\lambda}x, \quad \bar{\varphi}(x, \lambda) = (E + \bar{G}) \cos \sqrt{\lambda}x,$$

где

$$(E + G)f(x) = f(x) + \int_0^x G(x, t)f(t) \, dt,$$

$$(E + \bar{G})f(x) = f(x) + \int_0^x \bar{G}(x, t)f(t) \, dt.$$

Разрешая соотношения $\bar{\varphi}(x, \lambda) = (E + \bar{G}) \cos \sqrt{\lambda}x$ относительно $\cos \sqrt{\lambda}x$, находим

$$\cos \sqrt{\lambda}x = \bar{\varphi}(x, \lambda) + \int_0^x \bar{H}(x, t)\bar{\varphi}(t, \lambda) \, dt,$$

где $\bar{H}(x, t)$ — непрерывная функция, которая является ядром обратного оператора

$$(E + \bar{H}) = (E + \bar{G})^{-1}, \quad \bar{H}f(x) = \int_0^x \bar{H}(x, t)f(t) \, dt.$$

Следовательно,

$$\varphi(x, \lambda) = \bar{\varphi}(x, \lambda) + \int_0^x Q(x, t)\bar{\varphi}(t, \lambda) \, dt, \quad (6.2.2)$$

где $Q(x, t)$ — вещественная непрерывная функция.

Возьмем произвольную функцию $f(x) \in L_2(0, \pi)$. Из (6.2.2) вытекает равенство

$$\int_0^\pi f(x)\varphi(x, \lambda) \, dx = \int_0^\pi g(x)\bar{\varphi}(x, \lambda) \, dx,$$

где

$$g(x) = f(x) + \int_x^\pi Q(t, x)f(t) \, dt.$$

Следовательно, при всех $n \geq 0$ справедливы соотношения

$$f_n := \int_0^\pi f(x)\varphi(x, \lambda_n) \, dx, \quad \bar{g}_n := \int_0^\pi g(x)\bar{\varphi}(x, \lambda_n) \, dx.$$

Используя равенство Парсеваля (6.1.17), вычисляем

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f_n|^2}{\alpha_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\bar{g}_n|^2}{\alpha_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\bar{g}_n|^2}{\tilde{\alpha}_n} = \int_0^\pi |g(x)|^2 \, dx,$$

т. е.

$$\|f\|_{L_2} = \|g\|_{L_2}. \quad (6.2.3)$$

Рассмотрим оператор

$$Bf(x) = f(x) + \int_x^\pi Q(t, x)f(t) dt$$

и заметим, что $Bf = g$. В силу (6.2.3) $\|Bf\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$ при всех $f(x) \in L_2(0, \pi)$. Следовательно, $B^* = B^{-1}$, что возможно лишь при $Q(x, t) \equiv 0$. Таким образом, $\varphi(x, \lambda) \equiv \bar{\varphi}(x, \lambda)$, т. е. $q(x) = \bar{q}(x)$ почти всюду на $(0, \pi)$, $h = \bar{h}$, $H = \bar{H}$. \square

В симметричном случае, когда $q(x) = q(\pi - x)$, $H = h$, для определения потенциала $q(x)$ и коэффициента h достаточно задать только спектр $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$.

Теорема 6.2.3. Если $q(x) = q(\pi - x)$, $H = h$, $\bar{q}(x) = \bar{q}(\pi - x)$, $\bar{H} = \bar{h}$ и $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$, $n \geq 0$, то $q(x) = \bar{q}(x)$ почти всюду на $(0, \pi)$ и $h = \bar{h}$.

Доказательство. Если $q(x) = q(\pi - x)$, $H = h$ и $y(x)$ — некоторое решение уравнения (6.1.1), то $y_1(x) := y(\pi - x)$ также удовлетворяет (6.1.1). В частности, $\psi(x, \lambda) = \varphi(\pi - x, \lambda)$. Используя (6.1.6), вычисляем

$$\psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(x, \lambda_n) = \beta_n \psi(\pi - x, \lambda_n) = \beta_n^2 \varphi(\pi - x, \lambda_n) = \beta_n^2 \psi(x, \lambda_n).$$

Следовательно, $\beta_n^2 = 1$.

С другой стороны, из (6.1.6) вытекает, что $\beta_n \varphi(\pi, \lambda_n) = 1$. Применяя теорему 6.1.2, заключаем, что

$$\beta_n = (-1)^n.$$

Тогда из соотношений (6.1.8) следует, что $\alpha_n = (-1)^{n+1} \dot{\Delta}(\lambda_n)$ и $\bar{\alpha}_n = (-1)^{n+1} \dot{\bar{\Delta}}(\bar{\lambda}_n)$. Но тогда по теореме о нулях целой функции и из условий теоремы 6.2.3 получаем, что $\alpha_n = \bar{\alpha}_n$, $n \geq 0$. Теперь остается только применить теорему 6.2.2, чтобы получить требуемый результат, а именно: $q(x) = \bar{q}(x)$ почти всюду на $(0, \pi)$ и $h = \bar{h}$. \square

6.3. Метод Гельфанда — Левитана на конечном интервале

В предыдущем разделе мы рассматривали вопрос об однозначности восстановления оператора Штурма — Лиувилля по тем или иным наборам его спектральных характеристик. Теорема существования, в которой формулируются необходимые и достаточные условия для разрешимости обратной задачи Штурма — Лиувилля и предложен конструктивный способ построения оператора, была доказана И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [6.6]. Предложенный алгоритм восстановления оператора Штурма — Лиувилля по спектральным характеристикам получил название *метод Гельфанда — Левитана*. Подробное обоснование метода Гельфанда — Левитана можно найти в [6.12, 6.14, 6.23]. Наша цель —

ознакомить читателя с этим методом, не углубляясь в технические детали.

Восстановление дифференциального оператора по спектральным данным. Рассмотрим оператор Штурма — Лиувилля на конечном интервале

$$l_q y(x) = -y''(x) + q(x)y(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (6.3.1)$$

$$D(l_q) = \{y(x) \in W_2^2(0, \pi):$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0\}, \quad (6.3.2)$$

и предположим, что нам неизвестны потенциал $q(x) \in L_2(0, \pi)$ и коэффициенты h, H , входящие в краевые условия.

Пусть $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ — спектральные данные l_q . Будем решать обратную задачу восстановления l_q по заданным спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$.

Спектральные данные оператора l_q обладают асимптотическими свойствами [6.23]

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\beta_n}{n}, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta_{1n}}{n}, \quad \{\beta_n\}, \{\beta_{1n}\} \in l_2, \quad (6.3.3)$$

$$\alpha_n > 0, \quad \lambda_n \neq \lambda_m \quad (n \neq m). \quad (6.3.4)$$

Более точно,

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q(t) \cos 2nt \, dt + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\beta_{1n} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (\pi - t)q(t) \sin 2nt \, dt + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

т. е. главные части зависят от потенциала линейно.

Будем искать потенциал $q(x)$ и коэффициенты h, H оператора l_q , используя оператор преобразования для собственных функций оператора l_q :

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x + \int_0^x G(x, t) \cos \sqrt{\lambda}t \, dt, \quad (6.3.5)$$

где $G(x, t)$ — вещественная непрерывная функция, имеющая ту же гладкость, что и функция $\int_0^x q(t) \, dt$, и при $t = x$ удовлетворяющая соотношению

$$G(x, x) = h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) \, dt. \quad (6.3.6)$$

Из последнего равенства видно, что если мы найдем ядро $G(x, t)$ оператора преобразования, то по нему будет легко восстановить потенциал $q(x) = 2 \frac{d}{dx} G(x, x)$ и коэффициент $h = G(+0, +0)$.

Для того чтобы определить ядро $G(x, t)$, введем в рассмотрение функцию

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos \sqrt{\lambda_n} x \cos \sqrt{\lambda_n} t}{\alpha_n} - \frac{\cos nx \cos nt}{\alpha_n^0} \right), \quad (6.3.7)$$

где

$$\alpha_n^0 = \begin{cases} \pi/2, & n > 0, \\ \pi, & n = 0. \end{cases}$$

Ряд в правой части (6.3.7) сходится, функция $F(x, t)$ является непрерывной, и $\frac{d}{dx} F(x, x) \in L_2(0, \pi)$ (см., например, [6.12]).

Теорема 6.3.1. При каждом фиксированном $x \in (0, \pi]$ ядро $G(x, t)$ из представления (6.3.5) удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$G(x, t) + F(x, t) + \int_0^x G(x, s)F(s, t) ds = 0, \quad 0 < t < x. \quad (6.3.8)$$

Это уравнение называется уравнением Гельфанда --- Левитана.

Таким образом, теорема 6.3.1 позволяет свести нашу обратную задачу к решению уравнения (6.3.8). Отметим, что (6.3.8) является интегральным уравнением Фредгольма с параметром x .

Доказательство. Разрешая соотношение (6.3.5) относительно $\cos \sqrt{\lambda} x$, получаем

$$\cos \sqrt{\lambda} x = \varphi(x, \lambda) + \int_0^x H(x, t)\varphi(t, \lambda) dt, \quad (6.3.9)$$

где $H(x, t)$ — непрерывная функция. Используя представление (6.3.5), вычисляем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \frac{\varphi(x, \lambda_n) \cos \sqrt{\lambda_n} t}{\alpha_n} \\ &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{\cos \sqrt{\lambda_n} x \cos \sqrt{\lambda_n} t}{\alpha_n} + \frac{\cos \sqrt{\lambda_n} t}{\alpha_n} \int_0^x G(x, s) \cos \sqrt{\lambda_n} s ds \right). \end{aligned}$$

С другой стороны, из (6.3.9) следует

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \frac{\varphi(x, \lambda_n) \cos \sqrt{\lambda_n} t}{\alpha_n} \\ &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{\varphi(x, \lambda_n)\varphi(t, \lambda_n)}{\alpha_n} + \frac{\varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} \int_0^t H(t, s)\varphi(s, \lambda_n) ds \right). \end{aligned}$$

Приравняв правые части двух последних равенств и выполнив несложные вычисления, приходим к равенству

$$\Phi_N(x, t) = I_{N_1}(x, t) + I_{N_2}(x, t) + I_{N_3}(x, t) + I_{N_4}(x, t),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_N(x, t) &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{\varphi(x, \lambda_n) \varphi(t, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\cos nx \cos nt}{\alpha_n^0} \right), \\ I_{N_1}(x, t) &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{\cos \sqrt{\lambda_n} x \cos \sqrt{\lambda_n} t}{\alpha_n} - \frac{\cos nx \cos nt}{\alpha_n^0} \right), \\ I_{N_2}(x, t) &= \sum_{n=0}^N \frac{\cos nt}{\alpha_n^0} \int_0^x G(x, s) \cos ns \, ds, \\ I_{N_3}(x, t) &= \sum_{n=0}^N \int_0^x G(x, s) \left(\frac{\cos \sqrt{\lambda_n} t \cos \sqrt{\lambda_n} s}{\alpha_n} - \frac{\cos nt \cos ns}{\alpha_n^0} \right) ds, \\ I_{N_4}(x, t) &= - \sum_{n=0}^N \frac{\varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} \int_0^t H(t, s) \varphi(s, \lambda_n) ds. \end{aligned}$$

Пусть $f(x)$ — произвольная абсолютно непрерывная на интервале $[0, \pi]$ функция. Согласно теореме 6.1.1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq \pi} \int_0^\pi f(t) \Phi_N(x, t) dt = 0.$$

Кроме того, имеют место следующие равномерные по $x \in [0, \pi]$ сходимости:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) I_{N_1}(x, t) dt &= \int_0^\pi f(t) F(x, t) dt, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) I_{N_2}(x, t) dt &= \int_0^x f(t) G(x, t) dt, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) I_{N_3}(x, t) dt &= \int_0^\pi f(t) \left(\int_0^x G(x, s) F(s, t) ds \right) dt, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) I_{N_4}(x, t) dt &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{\varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} \int_0^\pi \varphi(s, \lambda_n) \left(\int_s^\pi H(t, s) f(t) dt \right) ds \\ &= - \int_x^\pi f(t) H(t, x) dt. \end{aligned}$$

Доопределим $G(x, t) = H(x, t) = 0$ при $x < t$. В силу произвольности $f(x)$ приходим к соотношению

$$G(x, t) + F(x, t) + \int_0^x G(x, s)F(s, t) ds - H(t, x) = 0.$$

Учитывая, что $H(t, x) = 0$ при $t < x$, получаем искомое равенство (6.3.8). \square

Таким образом, мы показали, что ядро $G(x, t)$ оператора преобразования для собственных функций $\varphi(x, \lambda)$ оператора l_q является решением уравнения Гельфанда — Левитана (6.3.8). При каждом фиксированном $x \in (0, \pi]$ уравнение (6.3.8) имеет единственное решение $G(x, t)$ в $L_2(0, x)$. Функция $G(x, t)$ является непрерывной и имеет ту же гладкость, что и функция $F(x, t)$. В частности, $\frac{\partial}{\partial x} G(x, x) \in L_2(0, \pi)$.

Докажем единственность решения уравнения Гельфанда — Левитана при фиксированном $x \in (0, \pi]$.

Заметим, что уравнение (6.3.8) является уравнением Фредгольма второго рода с параметром x . Поэтому, чтобы доказать единственность его решения, нам достаточно убедиться в том, что однородное уравнение

$$g(t) + \int_0^x F(s, t)g(s) ds = 0 \quad (6.3.10)$$

имеет только нулевое решение $g(t) = 0$.

Пусть $g(t)$ — решение уравнения (6.3.10). Тогда

$$\int_0^x g^2(t) dt + \int_0^x \int_0^x F(s, t)g(s)g(t) ds dt = 0$$

или

$$\int_0^x g^2(t) dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_0^x g(t) \cos \sqrt{\lambda_n} t dt \right)^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^0} \left(\int_0^x g(t) \cos nt dt \right)^2 = 0.$$

Используя равенство Парсеваля

$$\int_0^x g^2(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^0} \left(\int_0^x g(t) \cos nt dt \right)^2$$

для функции $g(t)$, продолженной нулем при $t > x$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_0^x g(t) \cos \rho_n t dt \right)^2 = 0.$$

Так как $\alpha_n > 0$, приходим к равенству

$$\int_0^x g(t) \cos \sqrt{\lambda_n} t dt = 0, \quad n \geq 0.$$

Система функций $\{\cos \sqrt{\lambda_n} t\}_{n \geq 0}$ полна в $L_2(0, \pi)$, и следовательно, $g(t) = 0$. Таким образом, мы показали, что уравнение (6.3.8) при любом фиксированном $x \in (0, \pi]$ имеет единственное решение $G(x, t)$ в $L_2(0, x)$.

Следующая теорема, которая является основным результатом раздела 6.3, дает алгоритм решения обратной задачи и необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Теорема 6.3.2. *Для того чтобы вещественные числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ были спектральными данными для некоторого оператора l_q вида (6.3.1), (6.3.2) с $q(x) \in L_2(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (6.3.3), (6.3.4).*

Оператор l_q строится по следующему алгоритму:

- 1) по заданным числам $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ строим функцию $F(x, t)$, используя формулу (6.3.7);
- 2) находим функцию $G(x, t)$ из уравнения (6.3.8);
- 3) вычисляем $q(x)$, h и H по формулам

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} G(x, x-0), \quad h = G(+0, +0), \quad (6.3.11)$$

$$H = \omega - h - \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt. \quad (6.3.12)$$

Как указывалось выше, подробное обоснование этой теоремы, лежащей в основе метода Гельфанда — Левитана, приведено в [6.6, 6.14, 6.12, 6.23].

Рассмотрим метод Гельфанда — Левитана на следующем простом примере.

Пример 6.3.1. Пусть $\lambda_n = n^2$ ($n \geq 0$), $\alpha_n = \pi/2$ ($n \geq 1$) и $\alpha_0 > 0$ — произвольное положительное число. Обозначим $a := 1/\alpha_0 - 1/\pi$. Воспользуемся алгоритмом теоремы 6.3.2:

- 1) согласно (6.3.7), $F(x, t) \equiv a$;
- 2) решая уравнение (6.3.8), находим

$$G(x, t) = -\frac{a}{1+ax};$$

- 3) в силу (6.3.11), (6.3.12),

$$q(x) = \frac{2a^2}{(1+ax)^2}, \quad h = -a, \quad H = \frac{a}{1+a\pi} = \frac{a\alpha_0}{\pi}.$$

Согласно (6.3.5),

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x - \frac{a}{1+ax} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}.$$

Восстановление дифференциального оператора l_q по двум спектрам. Рассмотрим, наряду с оператором l_q , оператор

$$l_q^1 y(x) = -y''(x) + q(x)y(x), \quad x \in (0, \pi),$$

$$D(l_q^1) = \{y \in W_2^2(0, \pi) : y'(0) - hy(0) = 0, \quad y(\pi) = 0\}.$$

Для оператора l_q^1 справедлива следующая теорема.

Теорема 6.3.3. *Для того чтобы вещественные числа $\{\mu_n, \alpha_n^1\}_{n \geq 0}$ были спектральными данными некоторого оператора l_q^1 с потенциалом $q(x) \in L_2(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu_n \neq \mu_m$ ($n \neq m$), $\alpha_n^1 > 0$ и выполнялись условия (6.1.13), (6.1.14).*

Пусть $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ и $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ — собственные значения операторов l_q и l_q^1 соответственно. Тогда имеют место асимптотические формулы (6.1.9) и (6.1.13), а также представления (6.1.11) и (6.1.12) для характеристических функций $\Delta(\lambda)$ и $d(\lambda)$ соответственно.

Теорема 6.3.4. *Для того чтобы вещественные числа $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n \geq 0}$ были спектрами операторов l_q и l_q^1 с $q(x) \in L_2(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись (6.1.9), (6.1.13) и (6.1.5). Функция $q(x)$ и числа h и H строятся по следующему алгоритму:*

- 1) по заданным спектрам $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ находим весовые числа α_n оператора l_q по формуле

$$\alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n)d(\lambda_n),$$

где $\Delta(\lambda)$ и $d(\lambda)$ вычисляются согласно (6.1.11) и (6.1.12);

- 2) по числам $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ находим $q(x)$, h и H , используя алгоритм теоремы 6.3.2.

Более подробные доказательства приведены в книге В. А. Юрко [6.23].

6.4. Обратные задачи рассеяния

Обратные задачи рассеяния являются одним из наиболее важных и обширных разделов обратных задач как в теории, так и в практических приложениях. На эту тему написаны сотни книг. В данном разделе мы ограничимся лишь несколькими постановками (в основном, одномерными) и их взаимосвязями со спектральными обратными задачами и нестационарными обратными задачами рассеяния. Полное изложение результатов можно найти в работах [6.4, 6.5, 6.19, 6.20, 6.13, 18, 6.12, 6.18, 6.9].

В прямой задаче рассеяния ищется решение стационарного уравнения Шрёдингера

$$-\Delta u + q(x)u = k^2 u, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (6.4.1)$$

имеющее вид

$$u(x) = e^{ik(\theta, x)} + u_p(x, \theta, k), \quad (6.4.2)$$

в котором u_p (рассеянная плоская волна) удовлетворяет на бесконечности условиям излучения

$$u_p(x, \theta, k) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right)u_p(x, \theta, k) = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (6.4.3)$$

при $r = |x| \rightarrow \infty$.

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, θ — заданный единичный вектор, принадлежащий единичной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим сначала случай, когда $q(x) \geq 0$ и носитель функции $q(x)$ принадлежит шару $B(r_0) = \{x \in \mathbb{R}^3: |x| \leq r_0\}$. Первое слагаемое $u_p(x, \theta, k) = e^{ik(x, \theta)}$ называют падающей в направлении θ волной с частотой k .

Известно, что рассеянная волна u_p имеет следующую структуру:

$$u_p(x, \theta, k) = A(\theta', \theta, k) \frac{e^{ikr}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \theta' = \frac{x}{|x|}. \quad (6.4.4)$$

Функция $A(\theta, \theta', k)$ называется амплитудой рассеяния в направлении орта $\theta' \in S^2$ плоской волны, падающей в направлении θ с частотой k . Представление (6.4.4) позволяет сформулировать ряд новых обратных задач рассеяния. Приведем несколько примеров, предварительно отметив, что, решив прямую задачу (6.4.1), (6.4.2), можно вычислить амплитуду рассеяния по формуле

$$A(\theta', \theta, k) = \lim_{|x| \rightarrow \infty, x/r = \theta'} r e^{-ikr} u_p(x, \theta, k). \quad (6.4.5)$$

Обратная задача 1 (для всех частот). Найти $q(x)$, если $A(\theta', \theta, k)$ задана для всех $\theta', \theta \in S^2$ и всех $k > 0$.

Обратная задача 2 (для фиксированной частоты (энергии)). Найти $q(x)$, если $A(\theta', \theta, k)$ задана для всех $\theta', \theta \in S^2$ и при одном $k > 0$.

Обратная задача 3 (для фиксированной падающей волны). Найти $q(x)$, если $A(\theta', \theta, k)$ задана при всех $\theta' \in S^2$, всех $k > 0$ и одном $\theta \in S^2$.

Обратная задача 4. Найти $q(x)$, если задана функция $A(-\theta, \theta, k)$ при всех $\theta \in S^2$ и всех $k > 0$.

Отметим, что $A(\theta', \theta, k)$ — аналитическая функция переменных θ', θ в \mathbb{C}^3 , а S^2 — аналитическое алгебраическое многообразие в \mathbb{C}^3 . Поэтому задание функции $A(\theta', \theta, k)$ на любом открытом в S^2 подмножестве однозначно определяет функцию на всем S^2 .

Доказательство теорем единственности обратных задач 1–4 можно найти, например, в книге [6.18].

Сведение обратной задачи квантовой теории рассеяния к одномерной постановке. Рассмотрим стационарное уравнение Шрёдингера для двух частиц в безразмерных переменных [6.12]:

$$-\Delta u + q(x)u = k^2 u, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \quad (6.4.6)$$

Если потенциал q зависит только от $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, то при решении задач для уравнения (6.4.6) можно использовать метод разделения переменных, полагая $u(x, y, z) = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{r}} Y_m^l(\beta, \gamma)$, где $x = r \sin \beta \cos \gamma$, $y = r \sin \beta \sin \gamma$, $z = r \cos \beta$, $Y_m^l(\beta, \gamma)$ — сферические гармоники. Тогда при каждом $\lambda = l + 1/2$, $l = 1, 2, 3, \dots$, получается уравнение

$$\varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r - \frac{\lambda^2}{r^2} \varphi - q(r)\varphi + k^2 \varphi = 0. \quad (6.4.7)$$

Если потенциал $q(r)$ удовлетворяет условию $\int_0^\infty r|q(r)|dr < \infty$, то для регулярного в нуле и нормированного решения уравнения (6.4.7) при фиксированных λ и k справедлива асимптотическая при $r \rightarrow \infty$ формула

$$\sqrt{r}\varphi(r, k, \lambda) = A(k, \lambda) \sin \left[kr - \frac{\pi}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) + \omega(k, \lambda) \right] + o(1).$$

Функция $A(k, \lambda)$ называется *амплитудой рассеяния*, $\omega(k, \lambda)$ — *фазой рассеяния* или *сдвигом фазы*.

Обратной задачей квантовой теории рассеяния в данном случае назовем задачу определения потенциальной функции $q(r)$ по известным значениям сдвига фазы $\omega(k, \lambda)$ при некоторых значениях k, λ .

Наиболее детально изучены две постановки обратной задачи квантовой теории рассеяния: при фиксированном угловом моменте $\lambda = \lambda_0 = l_0 + 1/2$, когда сдвиг фазы $\omega(k, \lambda)$ задается при всех ненулевых значениях k^2 , а также при фиксированной энергии, когда сдвиг фазы $\omega(k, \lambda)$ задается для одной фиксированной энергии $E = E_0 = k_0^2$, но при всех значениях $\lambda = l + 1/2$, $l = 0, 1, 2, \dots$.

Остановимся кратко на первой постановке в случае, когда $\lambda = 1/2$, и следовательно, уравнение (6.4.7) принимает вид

$$\varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r - \frac{1}{4r^2} \varphi - q(r)\varphi + k^2 \varphi = 0. \quad (6.4.8)$$

Для функции $\psi = \sqrt{r}\varphi$ уравнение (6.4.8) упрощается:

$$\psi_{rr} - q(r)\psi + k^2 \psi = 0. \quad (6.4.9)$$

В квантовой механике обычно возникает граничное условие $\psi(0, k) = 0$.

Вернемся к прежним обозначениям и рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (6.4.10)$$

$$y(0) = 0, \quad (6.4.11)$$

в которой $q(x)$ предполагается действительной, непрерывной и удовлетворяющей условию

$$\int_0^\infty x|q(x)| dx < \infty. \quad (6.4.12)$$

Условие (6.4.12) гарантирует, что непрерывный спектр оператора L , соответствующего задаче (6.4.10), (6.4.11), заполняет полуось $\lambda \geq 0$, а множество отрицательных собственных значений конечно [6.16]. Обозначим $\lambda = k^2$, а через $\varphi(x, k)$ — решение задачи (6.4.10), (6.4.11). Это решение можно пронормировать умножением на число, не зависящее от x , так, что разложение по собственным функциям оператора L принимает вид

$$f(x) = \sum_{j=1}^m \langle f, \varphi(x, k_j) \rangle \varphi(x, k_j) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \langle f, \varphi(x, k) \rangle \varphi(x, k) dk.$$

Здесь

$$\langle f, \varphi(x, k) \rangle = \int_0^\infty f(x) \varphi(x, k) dx,$$

$k_j = \sqrt{\lambda_j}$, $\text{Im } k_j > 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — собственные значения оператора L . При этом будут справедливы следующие асимптотические формулы при $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \varphi(x, k) &= s(k)e^{ixk} - e^{ixk} + o(1), \quad k \in \mathbb{R}, \\ \varphi(x, k_j) &= e^{ixk_j} [M_j + o(1)], \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

Здесь $s(k)$ — комплекснозначная функция, удовлетворяющая условиям $|s(k)| = 1$, $s(k)s(-k) = 1$, $k \in \mathbb{R}$, а числа M_1, M_2, \dots, M_m неотрицательны. Функция $s(k)$ называется *функцией рассеяния* краевой задачи (6.4.10), (6.4.11), а числа M_1, M_2, \dots, M_m — *нормировочными множителями*.

Определение 6.4.1. Данными рассеяния краевой задачи (6.4.10), (6.4.11) называется множество $S = \{s(k); k_1, k_2, \dots, k_m; M_1, M_2, \dots, M_m\}$, состоящее из функции рассеяния $s(k)$, отрицательных собственных значений k_1, k_2, \dots, k_m и нормировочных множителей M_1, M_2, \dots, M_m .

Рассмотрим кратко одну из постановок обратной задачи рассеяния [6.16], в которой требуется определить потенциал $q(x)$ по данным рассеяния S . Определим по данным рассеяния S ядро

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} [(s(k) - 1)] e^{ixk} dk - \sum_{j=1}^m M_k e^{ixk_j} \quad (6.4.14)$$

и запишем основное интегральное уравнение обратной задачи квантовой теории рассеяния (вывод и обоснование можно найти, например, в [6.12]):

$$K(x, y) - \int_x^\infty K(x, t) F(t + y) dt = F(x + y), \quad y \geq x. \quad (6.4.15)$$

Если данные рассеяния удовлетворяют определенным условиям, которые в терминах ядра F записываются в виде

$$\int_x^\infty x |F'(x)| dx < \infty, \quad (6.4.16)$$

то при каждом $x \geq 0$ уравнение (6.4.15) однозначно разрешимо и при этом

$$-2 \frac{d}{dx} K(x, x + 0) = q(x).$$

Замечание 6.4.1. Решение $K(x, y)$ обладает уже знакомым нам свойством: функция

$$y(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty K(x, t) e^{itk} dt \quad (6.4.17)$$

является решением уравнения (6.4.10) при $\lambda = k^2$.

Отметим, что основополагающие результаты по обратной задаче рассеяния для краевой задачи (6.4.9), (6.4.10) содержатся в [6.1]. В обзорной статье [6.20] изложено несколько различных подходов к обратным задачам и изучена связь между основными интегральными уравнениями обратной задачи Штурма — Лиувилля и обратной задачи теории рассеяния (там же можно найти обширную библиографию).

Случай финитного потенциала. Усилим условие (6.4.12), полагая, что $q(x)$ непрерывна и равна нулю при $\pi \leq x$. Рассмотрим ограниченные и отличные от нуля на R_+ решения задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in R_+, \quad (6.4.18)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (6.4.19)$$

которые называют собственными функциями. Соответствующие этим функциям $y(x, \lambda)$ значения λ — собственные числа — заполняют всю вещественную полуось R_+ , образуя непрерывный спектр. В самом деле,

обозначим через $y(x, \lambda)$ решение задачи Коши для уравнения (6.4.18) с данными Коши

$$y(0, \lambda) = 1, \quad y'(0, \lambda) = h. \quad (6.4.20)$$

При всех положительных λ это решение при $x \geq \pi$ представимо в виде

$$y(x, \lambda) = C(\lambda)[e^{i\sqrt{\lambda}x} - s(\lambda)e^{-i\sqrt{\lambda}x}],$$

причем $C(\lambda) \neq 0$. Следовательно, при любом $\lambda \in R_+$ существует отличное от нуля и ограниченное на бесконечности решение задачи (6.4.18), (6.4.20).

Если $\lambda \leq 0$, решение задачи (6.4.18), (6.4.20) при $x \geq \pi$ можно представить в виде

$$y(x, \lambda) = C_1(\lambda)e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2(\lambda)e^{\sqrt{-\lambda}x},$$

причем второе слагаемое неограниченно растет при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, собственную функцию можно получить лишь в случае $C_2(\lambda) = 0$. Анализ показывает, что при $\lambda < 0$ существует лишь конечное число собственных значений λ_j , $j = 1, 2, \dots, m$, и соответствующих им собственных функций

$$y_j(x) = y(x, \lambda_j) = m_n e^{-\sqrt{-\lambda_j}x}.$$

Совокупность $S = \{s(\lambda), \{\lambda_j, \|y_j\|\}, j = 1, 2, \dots, m\}$ назовем (как и ранее) данными рассеяния задачи (6.4.18), (6.4.19). В обратной задаче требуется по данным рассеяния определить $q(x)$ и h из (6.4.18), (6.4.19). Данные рассеяния однозначно определяют спектральную функцию оператора L с условиями (6.4.19).

Обозначим $k^2 = \lambda$. Поскольку $q(x) = 0$ при $x > \pi$, то уравнение (6.4.18) имеет решение $e(x, k)$, совпадающее с e^{ikx} при $x \geq \pi$ (решение Йоста). Эта функция голоморфна по переменной k во всей комплексной плоскости и вместе с производными $e_x = e^{(1)}$ и $e_{xx} = e^{(2)}$ по x представима в виде

$$e^{(m)}(x, k) = e^{ikx}[(ik)^m + \psi_m(x, k)], \quad m = 0, 1, 2, \quad (6.4.21)$$

причем $\psi_m(x, k) = 0$ для $x \geq \pi$, а при $x \in (0, \pi)$ удовлетворяют оценке

$$|\psi_m(x, k)| \leq (C_m(k) + 1)^{m-1} \exp\{\alpha(|\operatorname{Im} k| - \operatorname{Im} k)\}$$

с некоторыми положительными постоянными C_m и α .

Подставляя $e(x, k)$ в граничное условие (6.4.20), получим целую аналитическую функцию $j(k) = e'(0, k) - he(0, k)$.

Определение 6.4.2. Функция $j(k)$ называется *функцией Йоста* задачи (6.4.18), (6.4.19).

Лемма 6.4.1. Функция Йоста $j(k)$ не обращается в нуль при $\operatorname{Im}(k) \geq 0$, $k \neq 0$.

Доказательство приведено в работе [6.3].

Важнейшая роль функции Йоста в обратных задачах заключается в том, что с одной стороны она связана взаимно однозначным соответствием со спектральной функцией распределения оператора

$$l_q y = -y'' + q(x)y,$$

действующего в $L_2(0, \infty)$ и определенного для всех $y \in W_2^2(0, \infty)$, удовлетворяющих граничному условию $y'(0) - hy(0) = 0$, а с другой стороны, функция Йоста связана с данными обратной задачи

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.4.22)$$

$$(u_x - hu)_{x=0} = g(t), \quad u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (6.4.23)$$

$$u(0, t) = f(t). \quad (6.4.24)$$

Связь между функцией Йоста $j(k)$ и спектральной функцией $\rho(\lambda)$. Оператор A самосопряжен; значит, его спектр лежит на вещественной оси $\text{Im}(\lambda) = 0$ комплексной плоскости. Финитность q гарантирует [6.16], что полуось $\lambda > 0$ принадлежит непрерывному спектру, а на полуоси $\lambda < 0$ могут лежать только собственные значения. Предположим, что $q(x) > 0$ и отрицательных собственных значений нет.

Упражнение 6.4.1. Найдите условия на $q(x)$ и h , достаточные для отсутствия отрицательных собственных значений.

Решение $y(x, \lambda)$ задачи Коши (6.4.18), (6.4.20), определенное при всех $x \geq 0$ и при любом комплексном λ , порождает интегральное преобразование

$$U(\lambda) = \int_0^\infty u(x)y(x, \lambda) dx. \quad (6.4.25)$$

Это преобразование изометрически отображает $L_2(R_+)$ на некоторое весовое пространство $L_{2,\rho}(R)$, состоящее из всех ρ -измеримых функций $U(\lambda)$, таких, что

$$\int_R |U(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) < \infty.$$

Оператор L переводится преобразованием (6.4.25) в умножение на λ , а обратное к (6.4.25) отображение имеет вид

$$u(x) = \int_R U(\lambda)y(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (6.4.26)$$

где $\rho(\lambda)$ — вещественная, неубывающая и непрерывная справа функция.

Определение 6.4.3. Функция $\rho(\lambda)$ называется *спектральной функцией (распределения) оператора L* .

Множество точек роста спектральной функции совпадает со спектром L . Оператору с непрерывным спектром отвечает непрерывная функция $\rho(\lambda)$. Упомянутые выше свойства оператора L позволяют уточнить формулу обращения (6.4.25), ограничившись в ней интегрированием только по полуосу $\lambda \in (0, \infty)$.

Теорема 6.4.1. *Спектральная функция $\rho(\lambda)$ оператора L равна нулю при $\lambda \leq 0$, а при $\lambda > 0$ удовлетворяет уравнению*

$$\rho'(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi |j(\sqrt{\lambda})|^2}. \quad (6.4.27)$$

Формула (6.4.27) впервые была получена в теории рассеяния [6.20, 6.12, 18] для операторов Штурма — Лиувилля с граничным условием Дирихле. Случай граничного условия $y'_x(0, \lambda) - hy(0, \lambda) = 0$ был рассмотрен в [6.2]. Полное доказательство теоремы приведено в [6.3].

6.5. Обратные задачи рассеяния во временной области

В отличие от частотной постановки обратные задачи рассеяния во временной области имеют более наглядную интерпретацию. Допустим, нам неизвестен участок $(0, x_0)$ бесконечной струны, поперечные колебания которой описываются уравнением

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.5.1)$$

Предположим, что при $x < 0$ и $x > x_0$ струна однородна, т. е. $q(x) = 0$. В обратных задачах рассеяния требуется определить функцию $q(x)$, измеряя в каких-либо точках реакцию струны на проходящие по ней волны. Волны могут возбуждаться как вне исследуемого участка, так и внутри, причем во втором случае форма возбуждения также может быть неизвестна.

К подобным задачам сводится целый ряд практических задач. Рассмотрим это на примере обратной задачи сейсмоки, следуя [6.3].

Предположим, что плоские SH -волны распространяются в упругом полупространстве $z \geq 0$, механические свойства которого зависят только от глубины z , и эти волны поляризованы вдоль некоторой прямой, параллельной плоскости $z = 0$. Пусть на границе $z = 0$ отсутствуют нормальные напряжения. При этих условиях смещение w точек среды зависит только от времени t и глубины z и удовлетворяет уравнению

$$(\mu w_z)_z = \rho w_{tt}, \quad (6.5.2)$$

в котором $\rho(z)$ — плотность среды, $\mu(z)$ — модуль сдвига. Всюду в дальнейшем предполагаем, что $\rho(z)$ и $\mu(z)$ положительны, дважды непрерывно дифференцируемы, а при $z \geq z_0 > 0$ постоянны и равны известным значениям $\rho_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ соответственно.

Прямая задача 1 (с внутренними источниками). Предположим, что на поверхности $z = 0$ нет внешних воздействий, т. е.

$$w_z|_{z=0} = 0, \quad (6.5.3)$$

а колебания возбуждаются волной $\varphi_1(tc_0 + z)$, которая движется из области $z > z_0$ со скоростью $c_0 = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$. Будем предполагать, что $\varphi_1(z) = 0$ при $z < z_0$ и

$$w|_{t \leq 0} = \varphi_1(tc_0 + z). \quad (6.5.4)$$

Систему равенств (6.5.1)–(6.5.3) назовем задачей с внутренними источниками.

Прямая задача 2 (с внешними источниками).

Если источники колебаний находятся вне полупространства R_+ , то граничные условие (6.5.3) нужно заменить условием

$$2\mu w_z|_{z=0} = \varphi_2(t), \quad (6.5.5)$$

в котором $\varphi_2(t)$ считается равной нулю при $t \leq 0$. Предполагается, что до начала воздействия (6.5.4) колебания отсутствуют:

$$w|_{t \leq 0} \equiv 0. \quad (6.5.6)$$

Равенства (6.5.1), (6.5.4), (6.5.5) назовем внешней задачей.

Колебания, описываемые уравнением (6.5.1), распространяются со скоростью $c(z) = \sqrt{\mu(z)/\rho(z)}$. Уравнение (6.5.1) и его исследование существенно упрощаются, если от пространственной переменной z перейти к новой, численно равной времени пробега волны от нуля до z :

$$x = \alpha(z) := \int_0^z \frac{dy}{c(y)}, \quad z = \alpha^{-1}(x).$$

Определение 6.5.1. Величину

$$\sigma(x) = \sqrt{\mu(\alpha^{-1}(x))\rho(\alpha^{-1}(x))} = \rho(z(x))c(z(x))$$

называют *акустическим импедансом*.

Введем новые функции

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\sigma(x)} w(\alpha^{-1}(x), t), & q(x) &= (\ln \sqrt{\sigma(x)})'' + [(\ln \sqrt{\sigma(x)})']^2, \\ g_1(x) &= \sqrt{\sigma_0} \varphi_1(c_0(x - x_0) + z_0), & g_2(t) &= \frac{1}{2\sqrt{\sigma(0)}} \varphi_2(t) \end{aligned}$$

и обозначим

$$h = \frac{\sigma'(0)}{2\sigma(0)}, \quad x_0 = \alpha(z_0), \quad \sigma_0 = \sqrt{\mu_0\rho_0}.$$

В силу предположений относительно свойств функций ρ и μ коэффициент $q(x)$ непрерывен на $\overline{\mathbb{R}_+}$ и равен нулю при $x \geq x_0$. Носитель функции $g_1(x)$ принадлежит $[x_0, \infty)$.

В новых обозначениях задача 1 принимает вид:

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.5.7)$$

$$(u_x - hu)|_{x=0} = 0, \quad u|_{t \leq 0} = g_1(t+x), \quad (6.5.8)$$

а в задаче 2 условия (6.5.8) заменяются на граничное и начальное условия

$$(u_x - hu)|_{x=0} = g_2(t), \quad u|_{t \leq 0} \equiv 0. \quad (6.5.9)$$

В обратных задачах геофизики требуется определить акустический импеданс σ , а в преобразованном виде функцию $q(x)$, по заданным в каких-либо точках вне исследуемого интервала $(0, x_0)$ результатам измерения волнового процесса $u(x, t)$.

Обратная задача 1.1. Пусть о решении прямой задачи 1 известна дополнительная информация

$$u(0, t) = f_{11}(t), \quad t \geq 0. \quad (6.5.10)$$

Требуется по функциям $g_1(x)$ и $f_{11}(t)$ определить функцию $q(x)$ и постоянную h из соотношений (6.5.7), (6.5.8) и (6.5.10).

Обратная задача 1.2. Пусть о решении прямой задачи 1 известна дополнительная информация

$$u(\xi, t) = f_{12}(t), \quad \xi \geq x_0, \quad \xi = \text{const}. \quad (6.5.11)$$

Требуется определить $q(x)$ и h по заданным $g_1(x)$ и $f_{12}(t)$ из соотношений (6.5.7), (6.5.8) и (6.5.11).

Обратная задача 2.1. Пусть о решении прямой задачи 2 известна дополнительная информация

$$u(0, t) = f_{21}(t), \quad t \geq 0. \quad (6.5.12)$$

Требуется определить $q(x)$ и h по заданным $g_2(t)$, $f_{21}(t)$ из соотношений (6.5.7), (6.5.9) и (6.5.12).

Обратная задача 2.2. Пусть о решении прямой задачи 2 известна дополнительная информация

$$u(\xi, t) = f_{22}(t), \quad \xi = \text{const}, \quad \xi \geq x_0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (6.5.13)$$

Требуется определить $q(x)$ и h по заданным $g_2(t)$ и $f_{22}(t)$ из соотношений (6.5.7), (6.5.9) и (6.5.13).

Сформулированные обратные задачи изучаются, помимо геофизики, в теории рассеяния, томографии, дефектоскопии и многих других областях. Например, локационная задача 1.2 эквивалентна классической обратной задаче теории рассеяния. Задачи 1.1 и 2.2 можно интерпретировать как задачи просвечивания, а задачи 1.2 и 2.1 — как задачи локации. Все четыре обратные задачи эквивалентны между собой в том смысле, что любая из них может быть сведена к любой другой при помощи явных формул и преобразования Фурье. Поэтому результаты, полученные при исследовании любой из них, справедливы для остальных.

Для иллюстрации взаимосвязей между обратными задачами рассмотрим вспомогательную спектральную задачу

$$U_{xx} - q(x)U = -k^2 U, \quad x > 0, \quad (6.5.14)$$

$$U_x - kU = 0, \quad x = 0, \quad (6.5.15)$$

которая получается из (6.5.7) и первого из условий (6.5.8) после применения формального преобразования Фурье

$$U(x, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-ikt} u(x, t) dt.$$

Пусть, как и ранее, $e(x, k)$ обозначает решение Йоста уравнения (6.5.14), а $j(k) = e'(0, k) - he(0, k)$ — функция Йоста. Если в прямой задаче 1 $g_1 \in W_2^2(R)$ и $g_1(x) = 0$ вне $[x_0, \infty)$, то можно доказать существование такого решения $u(x, t)$ этой задачи, что его образ Фурье $U(x, k)$ при любом $k \neq 0$, $\text{Im}(k) \leq 0$, можно представить в виде

$$U(x, k) = G_1(k)[e(x, k) - \frac{j(k)}{j(-k)} \cdot e(x, -k)], \quad (6.5.16)$$

где $G_1(k)$ — образ Фурье функции g_1 . Аналогичное утверждение справедливо для прямой задачи 2, и если образ Фурье производной u_t решения задачи обозначить через $V(x, k)$, то справедлива формула

$$V(x, k) = G_2(k) \left[\frac{ik}{j(-k)} \right] e(x, -k), \quad (6.5.17)$$

где $G_2(k)$ — образ Фурье функции g_2 , $k \neq 0$, $\text{Im} k \leq 0$.

Формулы (6.5.16) и (6.5.17) позволяют связать образы Фурье данных обратных задач f_{ij} , $i, j = 1, 2$, с образами Фурье источников g_1, g_2 через функцию Йоста:

$$\begin{aligned} U(0, k) &= F_{11}(k) = P_{11}(k)G_1(k), \\ U(\xi, k) &= F_{12}(k) = P_{12}(k)G_1(k), \\ V(0, k) &= F_{21}(k) = P_{21}(k)G_2(k), \\ V(\xi, k) &= F_{22}(k) = P_{22}(k)G_2(k). \end{aligned} \quad (6.5.18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_{11}(\xi, k) &= -2 \frac{ik}{j(-k)}, & P_{12}(\xi, k) &= e^{ik\xi} - \frac{ik}{j(-k)} e^{-ik\xi}, \\ P_{21}(\xi, k) &= \frac{ik}{j(-k)} e(0, k), & P_{22}(\xi, k) &= \frac{ik}{j(-k)} e^{-ik\xi}. \end{aligned}$$

Функции $P_{ij}(\xi, k)$ называются *переходными функциями*.

Теорема 6.5.1. *На вещественной оси функция Йоста выражается через любую из переходных функций и наоборот.*

Доказательство можно найти в работе [6.3].

Отметим, что переходные функции есть не что иное, как реакция среды на импульсное воздействие $g_j(t) = \delta(t)$, $j = 1, 2$.

6.6. О взаимосвязях переходных функций

В заключение отметим связи между тремя функциями: спектральной функцией $\rho(\lambda)$, функцией Йоста $j(\sqrt{\lambda})$ и так называемой *импульсной характеристикой среды* $r(t)$, т. е. следом решения прямой задачи

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (6.6.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \delta(t), \quad (6.6.2)$$

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) + Hu(\pi, t) = 0 \quad (6.6.3)$$

при $x = 0$:

$$u(0, t) = r(t). \quad (6.6.4)$$

Отметим, что без ограничения общности в разделе 6.5 можно положить $x_0 = \pi$.

Решение прямой задачи (6.6.1)–(6.6.3) можно представить в виде ряда Фурье по собственным функциям $\{y_n(x)\}$ соответствующего оператора Штурма — Лиувилля

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n} \|y_n\|^2} y_n(x). \quad (6.6.5)$$

Вводя спектральную функцию

$$\rho(\lambda) = \sum_{n: \{\lambda_n < \lambda\}} \frac{\theta(\lambda - \lambda_n)}{\|y_n\|^2}, \quad (6.6.6)$$

формулу (6.6.5) можно записать в виде

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} y(x, \lambda) d\rho(\lambda). \quad (6.6.7)$$

Полагая в (6.6.7) $x = 0$ и учитывая (6.6.4), а также условие нормировки $y(0, \lambda) = 1$, получим выражение импульсной характеристики среды $r(t)$ через спектральную функцию

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} d\rho(\lambda). \quad (6.6.8)$$

Отметим, что формулы (6.6.6)–(6.6.8) справедливы и для случая непрерывного спектра (задача на полуоси).

Напомним выражение $\rho'(\lambda)$ через функцию Йоста

$$\rho'(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi |j(\sqrt{\lambda})|^2}. \quad (6.4.27)$$

Контрольные вопросы

1. Исследуйте связь метода Гельфанда — Левитана с методом, представленным в главе 11.
2. Запишите формулы, связывающие функцию Йоста, спектральную функцию и импульсную характеристику среды.

Дополнительная литература

- 6.1. **Агранович З., Марченко В.** Обратная задача теории рассеяния. Харьков: Изд. Харьковского университета, 1960.
- 6.2. **Алексеев А. С.** Некоторые обратные задачи теории распространения волн // Изв. АН СССР. 1962. Т. 11/12. С. 65–72, 1514–1531.
- 6.3. **Алексеев А. С., Белоносов В. С.** Спектральные методы в одномерных задачах теории распространения волн // Тр. ИВМ и МГ. Мат. модел. в геофизике. 1998. Т. 11. С. 7–39.
- 6.4. **Березанский Ю. М.** Об однозначности определения оператора Шредингера по его спектральной функции // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93, № 4. С. 591–594.
- 6.5. **Березанский Ю. М.** Об обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера // Тр. Моск. мат. общ. 1958. Т. 7. С. 3–51.
- 6.6. **Гельфанд И. М., Левитан Б. М.** Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. 1951. Т. 15, № 4. С. 309–360.
- 6.7. **Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.** Теория солитонов. Метод обратной задачи. Москва: Наука, 1980.
- 6.8. **Захаров В. Е., Чабанов В. М.** Послушная квантовая механика. Новый статус в подходе обратной задачи. Москва: Институт компьютерных исследований, 2002.
- 6.9. **Колтон Д., Кресс Р.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. Москва: Мир, 1987.
- 6.10. **Крейн М. Г.** Решение обратной задачи Штурма — Лиувилля // Докл. АН СССР. 1951. Т. 76, № 1. С. 21–24.
- 6.11. **Левитан Б. М.** Теория операторов обобщенного сдвига. Москва: Наука, 1973.
- 6.12. **Левитан Б. М.** Обратные задачи Штурма — Лиувилля. Москва: Наука, 1984.
- 6.13. **Марченко В. А.** Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка // Тр. Моск. мат. общ. 1952. Т. 1. С. 327–420.

- 6.14. **Марченко В. А.** Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
- 6.15. **Марченко В. А.** Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, I // Тр. Моск. матем. общества. 1952. Т. 1. С. 327–420.
- 6.16. **Наймарк М. А.** Линейные дифференциальные операторы. Москва: Наука, 1969.
- 6.17. **Нижник Л. П.** Обратная нестационарная задача рассеяния. Киев: Наукова думка, 1973.
- 6.18. **Рамм А. Г.** Многомерные обратные задачи рассеяния. Москва: Мир, 1994.
- 6.19. **Фаддеев Л. Д.** Единственность решения обратной задачи рассеяния // Вестник ЛГУ. 1956. Т. 7, № 2. С. 123–130.
- 6.20. **Фаддеев Л. Д.** Обратная задача квантовой теории рассеяния // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14, № 4. С. 57–119.
- 6.21. **Чудов Л. А.** Обратная задача Штурма — Лиувилля // Матем. сборник. 1949. Т. 25, № 67. С. 451–456.
- 6.22. **Шноль Э. Э.** Диссертация. Москва, МГУ, 1954.
- 6.23. **Юрко В. А.** Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
- 6.24. **Ambarzumijan V. A.** Uber eine frage der eigenwerttheorie // Zeitschr. fur Physik. 1929. N 53. P. 690–695.
- 6.25. **Borg G.** Eine umkehrung der sturm-liouvilleschen eigenwertaufgabe bestimung der differentailgleichung durch die eigenwerte // Acta. Math. 1946. V. 78. P. 1–96.
- 6.26. **Burridge R.** The Gelfand–Levitan, the Marchenko and Gopinath–Sondhi integral equation of inverse scattering theory, regarded in the context of inverse impulse-response problems // Wave Motion. 1980. Vol. 2. P. 305–323.
- 6.27. **Levinson N.** The inverse Sturm — Liouville problem // Math. Tidsskr. 1949. V. 13. P. 25–30.
- 6.28. **Lord Rayleigh J.** The Theory of Sound. New York: Dover Publ., 1945.
- 6.29. **Maltsev V. P., Semyanov K. A.** Characterisation of Bio-Particles from Light Scattering. VSP, The Netherlands, 2004.

Глава 7.

Линейные задачи для гиперболических уравнений

В данной главе сначала рассматривается задача Коши с данными на времениподобной поверхности. В разделах 7.1 и 7.2 исследуется задача восстановления функции по её сферическим средним и устанавливается связь этой задачи с некорректной задачей Коши [10.19, 12]. В разделе 7.3 в качестве примера изложен численный метод решения обратной задачи термоакустики. Раздел 7.4 посвящен линейризованной обратной задаче для волнового уравнения.

7.1. Восстановление функции по сферическим средним

Рассмотрим задачу восстановления функции $q(x, y_1, y_2)$ по средним значениям этой функции по сферам произвольного конечного радиуса r с центрами на плоскости $x = 0$. Точку в трехмерном пространстве будем обозначать через (x, y) , $y = (y_1, y_2)$, а функцию $q(x, y_1, y_2)$ — через $q(x, y)$. Пусть (ξ, η) ($\eta = (\eta_1, \eta_2)$) — переменная точка на сфере радиуса r , центр которой помещен в точку $(0, y)$. В этих обозначениях задача определения функции $q(x, y)$ по ее сферическим средним может быть сформулирована как задача решения интегрального уравнения

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\xi^2 + |\eta|^2 = r^2} q(\xi, y + \eta) d\omega = f(y, r) \quad (7.1.1)$$

при известной функции $f(y, r)$ ($r \geq 0$). Здесь через $d\omega$ обозначен элемент телесного угла с центром в точке $(0, y)$. Любая нечетная по переменной x

функция $q(x, y)$ удовлетворяет уравнению (7.1.1) при $f(y, r) \equiv 0$, поэтому будем считать, что $q(x, y)$ является четной функцией по x , непрерывно дифференцируемой по переменным y_1, y_2 .

Воспользуемся методом Р. Куранта [10.19]. Рассмотрим результат применения операции

$$B_i f := \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^R r^2 f(y, r) dr, \quad i = 1, 2,$$

к уравнению (7.1.1).

Используя формулу Гаусса — Остроградского, находим

$$\begin{aligned} B_i f &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^R r^2 \left[\iint_{\xi^2 + |\eta|^2 = r^2} q(\xi, y + \eta) d\omega \right] dr \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y_i} \iiint_{\xi^2 + |\eta|^2 \leq R^2} q(\xi, y + \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\xi^2 + |\eta|^2 \leq R^2} q_{\eta_i}(\xi, y + \eta) d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\xi^2 + |\eta|^2 = R^2} q(\xi, y + \eta) \cos(n, \eta_i) dS \\ &= \frac{1}{4\pi} R \iint_{\xi^2 + |\eta|^2 = R^2} q(\xi, y + \eta) \eta_i d\omega. \end{aligned}$$

Здесь через dS обозначен элемент площади поверхности сферы $\xi^2 + |\eta|^2 = R^2$, численно равный $R^2 d\omega$, а через $\cos(n, \eta_i)$ — косинус угла между нормалью n к сфере и осью η_i , при этом использовано равенство

$$\cos(n, \eta_i) = \frac{\eta_i}{R}.$$

Рассмотрим теперь оператор

$$L_i f = \left[\frac{1}{R} B_i f + y_i f(y, R) \right]_{R=r}.$$

Результат его применения к уравнению (7.1.1) приводит к равенству

$$L_i f = \frac{1}{4\pi} \iint_{\xi^2 + |\eta|^2 = r^2} q(\xi, y + \eta)(y_i + \eta_i) d\omega, \quad i = 1, 2, \quad (7.1.2)$$

т. е. действие оператора L_i на f равносильно вычислению сферического среднего от функции $q(x, y)y_i$ — первого момента функции $q(x, y)$ относительно i -й координаты. Поэтому, применив оператор L_j к $L_i f$, получим

$$L_j L_i f = \frac{1}{4\pi} \iint_{\xi^2 + |\eta|^2 = r^2} q(\xi, y + \eta)(y_i + \eta_i)(y_j + \eta_j) d\omega, \quad i, j = 1, 2.$$

Рассмотрим теперь фиксированную сферу с центром в точке $(0, y)$ радиуса r . Вычислив операторы L_i ($i = 1, 2$) по известной функции $f(y, r)$, мы найдем моменты первого порядка от функции $q(x, y)$ на этой сфере. Затем в результате повторного применения операторов L_i ($i = 1, 2$) найдем все моменты второго порядка на этой сфере по переменным y_1, y_2 , и т. д. Таким образом можно вычислить моменты любого порядка по y_1, y_2 . Например, сферическое среднее от функции $q(x, y)y_1^{k_1}y_2^{k_2}$ имеет вид

$$L_1^{k_1}L_2^{k_2}f = \frac{1}{4\pi} \iint_{\xi^2 + |\eta|^2 = r^2} q(\xi, y + \eta)(y_1 + \eta_1)^{k_1}(y_2 + \eta_2)^{k_2} d\omega, \quad (7.1.3)$$

$$k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots$$

В то же время функция $q(\xi, y + \eta)$ на взятой нами сфере является, очевидно, функцией двух переменных, так как на этой сфере $\xi = \pm\sqrt{r^2 - |\eta|^2}$. Учитывая ее четность относительно ξ , соотношение (7.1.3) можно записать в виде

$$L_1^{k_1}L_2^{k_2}f = \frac{1}{2\pi r} \iint_{|\eta| \leq r} q(\sqrt{r^2 - |\eta|^2}, y + \eta)(y_1 + \eta_1)^{k_1}(y_2 + \eta_2)^{k_2} \frac{d\eta}{\sqrt{r^2 - |\eta|^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi r} \iint_{|\zeta - y| \leq r} q(\sqrt{r^2 - |\zeta - y|^2}, \zeta)\zeta_1^{k_1}\zeta_2^{k_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{r^2 - |\zeta - y|^2}}.$$

Здесь через $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ обозначена переменная $y + \eta$. Последняя формула показывает, что относительно функции двух переменных $((y, r) — фиксированы!)$

$$\phi(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{q(\sqrt{r^2 - |\zeta - y|^2}, \zeta)}{\sqrt{r^2 - |\zeta - y|^2}}$$

известны все степенные моменты по внутренности круга фиксированного радиуса:

$$L_1^{k_1}L_2^{k_2}f = \frac{1}{2\pi r} \iint_{|\zeta - y| \leq r} \phi(\zeta)\zeta_1^{k_1}\zeta_2^{k_2} d\zeta, \quad k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1.4)$$

Ясно, что такими моментами функция $\phi(\zeta)$ определяется однозначно. Для приближенного решения по системе функций $\zeta_1^{k_1}\zeta_2^{k_2}$ ($k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots$) строим полную систему ортогональных внутри круга $|\zeta - y| \leq r$ полиномов $P_n(\zeta) = P_n(\zeta_1, \zeta_2)$ с помощью метода ортогонализации. Вычисляем коэффициенты Фурье s_n от функции $\phi(\zeta)$ по этой системе многочленов,

$$s_n = \iint_{|\zeta - y| \leq r} \phi(\zeta)P_n(\zeta) d\zeta = 2\pi r P_n(L_1, L_2)f,$$

и находим функцию $\phi(\zeta)$ в виде ряда Фурье. Заметим, что особенность функции $\phi(\zeta)$ на границе круга интегрируема.

Мы показали, как с помощью вычисления некоторых операторов от функции $f(y, r)$ можно построить функцию $q(x, y)$ на каждой фиксированной сфере. Из построения ясно, что для того чтобы однозначно найти функцию $q(x, y)$ всюду (в указанном выше классе), достаточно функцию $f(y, r)$ задать внутри сколь угодно тонкого цилиндра

$$|y - y_0| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq r < \infty,$$

ось которого проходит через фиксированную точку y_0 (здесь ε — сколь угодно малое положительное число). Пусть теперь этот цилиндр имеет конечную высоту: $0 \leq r \leq r_0$ ($r_0 > 0$). Тогда с помощью описанного выше процесса можно найти функцию $q(x, y)$ на любой сфере, центр которого лежит внутри круга $|y - y_0| \leq \varepsilon$, $x = 0$, а радиус r заключен в пределах от 0 до r_0 . Следовательно, функция $q(x, y)$ вычисляется внутри некоторой трехмерной области D . Но, зная функцию $q(x, y)$ внутри D , мы можем вычислить от нее сферические средние по любой сфере с центром на плоскости $x = 0$, которая не выходит за пределы области D . Для этого достаточно, чтобы между радиусом сферы r и координатами ее центра $(0, y)$ выполнялись условия

$$\begin{aligned} r + |y - y_0| \leq r_0 + \varepsilon, & \quad \text{если } |y - y_0| \leq \varepsilon, \\ r \leq r_0, & \quad \text{если } |y - y_0| \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

Следовательно, можно найти функцию $f(y, r)$ в области, описываемой неравенствами (7.1.5).

Итак, мы установили, что задание функции $f(y, r)$ внутри цилиндра $|y - y_0| \leq \varepsilon$, $0 \leq r \leq r_0$ определяет функцию $f(y, r)$ внутри кругового усеченного конуса, у которого верхнее основание совпадает с верхним основанием цилиндра, а образующие наклонены к плоскости $r = 0$ под углом 45° . Это означает, что функцию $f(y, r)$ нельзя задавать произвольно. Более того, функция $f(y, r)$, представимая в виде (7.1.1), обладает свойством типа аналитичности: она однозначно определяется своими значениями в сколь угодно узком бесконечном цилиндре $|y - y_0| \leq \varepsilon$, $0 \leq r < \infty$. В то же время, ясно, что неаналитическим функциям $q(x, y)$ отвечают неаналитические $f(y, r)$.

7.2. Задача Коши для гиперболического уравнения с данными на времениподобной поверхности

Покажем, что задача решения уравнения (7.1.1) является классически некорректной. Рассмотрим функцию

$$v(x, y, t) = \frac{t}{4\pi} \iint_{\xi^2 + |\eta|^2 = t^2} q(x + \xi, y + \eta) dw, \quad (7.2.1)$$

которая с точностью до множителя t является сферическим средним по сфере радиуса t с центром в точке (x, y) . Будем считать, что функция $q(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема. Тогда можно убедиться непосредственно, что функция $v(x, y, t)$ в полупространстве $t \geq 0$ удовлетворяет волновому уравнению

$$v_{xx} + v_{y_1 y_1} + v_{y_2 y_2} = v_{tt}. \quad (7.2.2)$$

На границе полупространства $t > 0$ функция $v(x, y, t)$ обращается в нуль:

$$v(x, y, 0) = 0. \quad (7.2.3)$$

Кроме того,

$$v(x, y, t)|_{x=0} = tf(y, t). \quad (7.2.4)$$

Условие четности функции $q(x, y)$ по переменной x приводит к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, y, t)|_{x=0} = 0. \quad (7.2.5)$$

Смешанная задача (7.2.2), (7.2.3), (7.2.5), очевидно, эквивалентна задаче Коши с данными по пространственной переменной x , если функцию $f(y, t)$ продолжить четным образом по t и задачу рассматривать во всем пространстве x, y, t . Покажем, что задача (7.2.2)–(7.2.5) эквивалентна уравнению (7.1.1). Для этого достаточно показать, что из равенств (7.2.2)–(7.2.5), в которых функция $v(x, y, t)$ связана с функцией $q(x, y)$ формулой (7.2.1), следует равенство (7.1.1). Заметим, что при известной функции $v(x, y, t)$ функция $q(x, y)$ может быть найдена по формуле

$$q(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} v(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} v(x, y, t)|_{t=0}, \quad (7.2.6)$$

которая следует из равенства (7.2.4).

Пусть теперь $v(x, y, t)$ есть решение задачи (7.2.2)–(7.2.5). Обозначим через $q(x, y)$ предельное значение производной по t от функции $v(x, y, t)$ при $t \rightarrow 0$. Тогда функция $v(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (7.2.2) и условиям (7.2.3), (7.2.6), т. е. представляет собой решение задачи Коши с данными по t . Как известно, решение такой задачи дается формулой Кирхгофа, которая совпадает с формулой (7.2.1). Условие (7.2.5) приводит тогда к равенству

$$\iint_{\xi^2 + |\eta|^2 = t^2} q_\xi(\xi, y + \eta) dw = 0,$$

из которого, в силу единственности решения задачи интегральной геометрии, следует, что четная часть функции $q_x(x, y)$ равна нулю, т. е.

$q(x, y) = q(-x, y)$. А условие (7.2.4) приводит к уравнению (7.1.1), которое нужно решать в классе четных функций. Тем самым эквивалентность задачи интегральной геометрии задаче (7.2.2)–(7.2.5) установлена. Отсюда, в частности, следует единственность решения задачи (7.2.2)–(7.2.5).

Покажем, что эта задача неустойчива. Рассмотрим решение задачи (7.2.2)–(7.2.5) при

$$f(y, t) = \frac{1}{n^s} \frac{\sin nt}{t} \sin ny_1 \sin ny_2.$$

При достаточно больших n и s функция $f(y, t)$ мала вместе с любым конечным числом производных. Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение задачи (7.2.2)–(7.2.5) дается в этом случае формулой

$$v(x, y, t) = \frac{1}{n^s} \sin nt \sin ny_1 \sin ny_2 \operatorname{ch} nx. \quad (7.2.7)$$

При этом решение задачи при любом фиксированном x стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$. Тем же свойством обладает и функция $q(x, y)$, дающая решение задачи (7.2.1):

$$q(x, y) = \frac{1}{n^{s-1}} \sin ny_1 \sin ny_2 \operatorname{ch} nx.$$

А это и означает неустойчивость задачи, и следовательно, ее классическую некорректность. В силу единственности решения задача (7.2.1) условно-корректна. Действительно, рассмотрим множество M четных по переменной x функций $q(x, y)$, компактная в пространстве C (например, ограниченное множество функций с ограниченными заданной константой первыми производными). Пусть \tilde{F} — множество образов $f(y, r)$ функций $q(x, y) \in M$ при отображении (7.2.1). Тогда при условии, что решение $q(x, y) \in M$ задачи (7.2.1) существует, оно будет также условно устойчиво в силу теоремы 2.2.1.

7.3. Обратная задачи термоакустики

Физическая постановка. Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ упругой среды. Предположим, что с момента времени $t = 0$ область Ω подвергается электромагнитному излучению интенсивностью $I(t)$, которое частично поглощается средой [7.4]. Поглощенная энергия переходит в тепло, что приводит к увеличению температуры среды, к ее расширению и, в конечном итоге, к появлению волн акустического давления. Распространяясь по среде, волны акустического давления достигают границы Γ области, на части которой Γ_1 они могут быть измерены. Требуется определить коэффициент поглощения электромагнитного излучения в области Ω по измерениям акустического давления на части границы Γ_1 .

Используя модель невязкой жидкости и пренебрегая диффузионными потоками тепла, процесс распространения волн акустического давления u в среде можно описать следующим уравнением:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \alpha(x, y) \frac{\beta}{c_p} \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (7.3.1)$$

Здесь $c = 1/\sqrt{\rho\kappa}$ — скорость распространения акустических волн (ρ — плотность; κ — сжимаемость); $\alpha(x, y)$ — коэффициент поглощения энергии электромагнитного излучения; β — коэффициент термического расширения; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

В качестве начального условия берется условие отсутствия волн акустического давления до начала облучения:

$$u|_{t < 0} = 0. \quad (7.3.2)$$

Как правило, в задачах термоакустики длительность электромагнитного излучения очень мала, что позволяет задать (приближенно) $I(t)$ в виде дельта-функции Дирака

$$I(t) = I_0 \delta(t). \quad (7.3.3)$$

Учитывая (7.3.3), интегрируя два раза по t от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$ и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, получим следующую задачу:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad (7.3.4)$$

$$u|_{t=0} = \alpha(x, y) \frac{\beta}{c_p} I_0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \quad (7.3.5)$$

Постановка прямой и обратной задач. Рассмотрим случай, когда

$$\Omega = \{(x, y) \mid x \in (0, a), y \in (-b, b)\}, \quad 0 < a < b,$$

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \mid x = 0, y \in [-b, b]\}.$$

Предполагаем, что функция $\alpha(x, y)$ достаточно гладкая и финитная:

$$\text{supp } \alpha(x, y) \subset (0, a) \times (-b + a, b - a). \quad (7.3.6)$$

Положим $c = 1$, $q(x, y) = \alpha(x, y)\beta I_0/c_p$, $\Pi = \{(x, y) \mid x \in (-a, a), y \in (-b, b)\}$ и рассмотрим прямую задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y) \in \Pi, \quad t \in (0, a), \quad (7.3.7)$$

$$u(x, y, 0) = q(x, y), \quad (x, y) \in \Pi, \quad (7.3.8)$$

$$u_t(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Pi, \quad (7.3.9)$$

$$u|_{\partial\Pi} = 0, \quad t \in (0, a). \quad (7.3.10)$$

Обратную задачу сформулируем следующим образом: найти $q(x, y) = u(x, y, 0)$, используя соотношения (7.3.7), (7.3.9), (7.3.10) и дополнительную информацию

$$u(0, y, t) = f(y, t), \quad (y, t) \in (-b, b) \times (0, a). \quad (7.3.11)$$

Упражнение 7.3.1. Запишите для обратной задачи (7.3.7)–(7.3.11) целевой функционал и найдите его градиент.

7.4. Линеаризованная многомерная обратная задача для волнового уравнения

В данном разделе мы рассмотрим задачу определения скорости распространения волн в полупространстве $(z, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ в случае, когда скорость представима в виде $c^2(z, y) = c_0^2(z) + c_1(z, y)$, функция c_1 много меньше c_0^2 и отлична от нуля лишь в конечной области полупространства [7.1]. Будем исследовать линеаризованный вариант обратной задачи [7.2, 7.3], для которого докажем теорему единственности, получим оценку условной устойчивости и построим регуляризирующее семейство, сходящееся к точному решению линеаризованной обратной задачи.

Постановка задачи. Предположим, что скорость распространения волн в полупространстве $(z, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, имеет следующую структуру:

$$c^2(z, y) = c_0^2(z) + c_1(z, y). \quad (7.4.1)$$

Предположим также, что функции c_0 и c_1 удовлетворяют условию A_0 :

1) $c_0 \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $c_0'(0) = 0$;

2) существуют постоянные $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{R}_+$, такие, что при всех $z \in \mathbb{R}_+$ выполнены неравенства

$$0 < M_1 \leq c_0(z) \leq M_2, \quad \|c_0\|_{C^2(\mathbb{R}_+)} < M_3; \quad (7.4.2)$$

3) функция $c_1(z, y)$ отлична от нуля лишь в области $(z, y) \in (0, h) \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}_1)$,

$$\mathcal{K}_n(\mathcal{D}_1) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_j| < \mathcal{D}_1, j = \overline{1, n}\},$$

где $h, \mathcal{D}_1 \in \mathbb{R}_+$ — фиксированные числа;

4) $c_1(z, y) \in C^2((0, h) \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}_1))$,

$$\alpha = \|c_1\|_{C^2((0, h) \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}_1))} \ll M_1. \quad (7.4.3)$$

Предположим, что до момента времени $t = 0$ среда находилась в покое:

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (z, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \quad (7.4.4)$$

и в момент времени $t = 0$ на границу $z = 0$ полупространства $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ падает волна заданной формы

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = r(y)\delta(t), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (7.4.5)$$

которая возбуждает в полупространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ волновой процесс

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(z, y)\Delta_{z, y}u, \quad (z, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (7.4.6)$$

Пусть известен след решения прямой задачи (7.4.4)–(7.4.6) на границе $z = 0$:

$$u|_{z=0} = f(y, t), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (7.4.7)$$

Обратной будем называть задачу определения $c(z, y)$ из соотношений (7.4.4)–(7.4.7) (в предположении, что $c_0(z)$ известна и выполняются условия (7.4.1), A_0).

Линеаризация. Прежде чем приступить к линеаризации обратной задачи (7.4.4)–(7.4.7), покажем, как на основе принципа конечной области зависимости решения гиперболического уравнения от его коэффициентов и от начальных и граничных условий можно локализовать обратную задачу, т. е. ограничиться заданием дополнительной информации (7.4.7) лишь на некотором ограниченном подмножестве гиперплоскости $z = 0$ и для некоторого конечного интервала времени.

В силу предположения (7.4.1) и условия A_0 минимальное возможное время, за которое возмущение, порожденное падающей волной (7.4.5), успеет достигнуть глубины h при всех $y \in \mathbb{R}^n$ и вернуться на поверхность $z = 0$, равно $T_h = 2h/(M_1 - \alpha)$.

Следовательно, волны, отраженные от неоднородности, соответствующей функции $c_1(z, y)$, в силу финитности этой функции, а также в силу условия A_0 , не успевают за время T_h достигнуть гиперплоскостей $|y_j| = \mathcal{D}$, $j = \overline{1, n}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + T_h(M_2 + \alpha)$.

Предположим, что падающая волна (7.4.5) является плоской волной на некотором участке поверхности $z = 0$, простирающемся над областью $(n + 1)$ -мерной неоднородности, т. е.

$$r(y)|_{y \in \mathcal{K}_n(\mathcal{D})} \equiv r_0, \quad r_0 = \text{const}, \quad r_0 \neq 0. \quad (7.4.8)$$

Тогда в силу изложенного ранее обратную задачу (7.4.4)–(7.4.7) можно заменить следующей:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(z, y) \Delta_{z, y} u, \quad (z, y) \in (0, h) \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}), \quad t \in (0, T_h); \quad (7.4.9)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} = r_0 \delta(t); \quad (7.4.10)$$

$$u|_{y_j = \mathcal{D}} = u|_{y_j = -\mathcal{D}}, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T_h), \quad j = \overline{1, n}; \quad (7.4.11)$$

$$u|_{z=0} = f(y, t), \quad y \in \mathcal{K}_n(\mathcal{D}), \quad t \in (0, T_h). \quad (7.4.12)$$

Используя предположение (7.4.3) о малости c_1 , проведем линеаризацию обратной задачи (7.4.9)–(7.4.12). Для этого представим решение $u(z, y, t)$ начально-краевой задачи (7.4.9)–(7.4.11) в виде

$$u(z, y, t) = u_0(z, t) + u_1(z, y, t),$$

где $u_0(z, t)$ есть решение следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = c_0^2(z) \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}, \quad z \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+; \quad (7.4.13)$$

$$u_0|_{t < 0} \equiv 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial z}|_{z=0} = r_0 \delta(t). \quad (7.4.14)$$

Отметим, что при $z = 0$ решение задачи (7.4.13), (7.4.14) тождественно совпадает с решением (7.4.4)–(7.4.6) в случае, если

$$r(y) = r_0, \quad t \in (0, T_h), \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_n(2\mathcal{D}).$$

Пренебрегая членом второго порядка малости $c_1 \Delta_{z,y} u_1$, для определения $u_1(z, y, t)$ получаем задачу

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_0^2(z) \Delta_{z,y} u_1 + c_1(z, y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}, \quad (7.4.15)$$

$$(z, y) \in (0, h) \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}), \quad t \in (0, T_h);$$

$$u_1|_{t < 0} \equiv 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad (7.4.16)$$

$$u_1|_{\partial \mathcal{K}_n(\mathcal{D})} = 0, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T_h). \quad (7.4.17)$$

Здесь $\partial \mathcal{K}_n(\mathcal{D})$ — граница области $\mathcal{K}_n(\mathcal{D})$.

В качестве дополнительной информации для определения $c_0(z)$ можно взять

$$u_0|_{z=0} = f(\hat{y}, t), \quad t \in (0, T_h), \quad (7.4.18)$$

где $\hat{y} \in \partial \mathcal{K}_n(\mathcal{D})$, поскольку в силу сделанных предположений $f(y, t)$ не зависит от y в некоторой окрестности границы области $\mathcal{K}_n(\mathcal{D})$ при $t \in (0, T_h)$.

Дополнительная информация о решении задачи (7.4.15)–(7.4.17) запишется в виде

$$u_1|_{z=0} = g(y, t), \quad y \in \mathcal{K}_n(\mathcal{D}), \quad t \in (0, T_h), \quad (7.4.19)$$

где $g(y, t) = f(y, t) - u_0(0, t)$.

Таким образом, решение обратной задачи (7.4.4)–(7.4.7) при $t \in (0, T_h)$ можно локально разделить на этапы:

1) решение обратной задачи (7.4.13), (7.4.14), (7.4.18) на глубину h и определение $c_0(z)$;

2) решение прямой задачи (7.4.13), (7.4.14) на глубину h и определение u_{0zz} ;

3) решение обратной задачи (7.4.15)–(7.4.17), (7.4.19), т. е. задачи определения $c_1(z, y)$ по заданным u_{0zz} и $g(y, t)$.

В дальнейшем функцию $c_0(z)$ считаем известной и удовлетворяющей первым двум пунктам условия A_0 .

Изучение структуры решения одномерной прямой задачи.

Приведем задачу (7.4.13), (7.4.14) к более удобному для исследования виду. С этой целью введем новую переменную

$$x = \psi(z), \quad \psi(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{c_0(\xi)}, \quad (7.4.20)$$

и новые функции

$$\begin{aligned} S(x) &= \sqrt{c_0(z)}/\sqrt{c_0(+0)}, & v(x, t) &= u_0(z, t)/S(x), \\ a(x) &= S''(x)/S(x) - 2[S'(x)]^2/S^2(x). \end{aligned} \quad (7.4.21)$$

В силу условия A_0 функция $\psi(z)$ имеет обратную $z = \psi^{-1}(x)$, поэтому функции S , v , q определены корректно.

Замечание 7.4.1. Если рассмотреть одномерную обратную задачу акустики

$$\begin{aligned} c^{-2}(z)v_{tt} &= v_{zz} - \rho'(z)v_z/\rho(z), & z \in \mathbb{R}_+, & t \in \mathbb{R}_+; \\ v|_{t<0} &= 0, & v_z|_{z=+0} &= \alpha\delta(t), & v(+0, t) &= f(t), \end{aligned}$$

где $\rho(z)$ — плотность среды, $c(z)$ — скорость распространения волн в среде, то, как будет показано в разделе 10.2, одновременно отыскать функции $\rho(z)$ и $c(z)$ невозможно, но их комбинацию $\sigma(x) = c(z)\rho(z)$ найти можно. После указанной замены переменной задача сводится к задаче определения акустической жесткости среды $\sigma(x)$:

$$\bar{v}_{tt} = \bar{v}_{xx} - \sigma'(x)\bar{v}_x/\sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+; \quad (7.4.22)$$

$$\bar{v}|_{t<0} = 0, \quad \bar{v}_x|_{x=+0} = \gamma\delta(t), \quad \bar{v}(+0, t) = f(t), \quad (7.4.23)$$

где $\bar{v}(x, t) = v(z, t)$ — акустическое давление; $\sigma(x) > 0$ — акустическая жесткость среды; $\gamma = \alpha c(+0)$. Решение обратной задачи (7.4.22), (7.4.23) заключается в нахождении функций $\bar{v}(x, t)$ и $\sigma(x)$ по известной дополнительной информации (7.4.23).

Вернемся к изучению структуры решения прямой задачи (7.4.13), (7.4.14). Если продолжить все рассматриваемые функции четным образом по x в \mathbb{R}_- , то $v(x, t)$ будет решением задачи

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a(x)v, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+; \quad (7.4.24)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2\gamma\delta(x). \quad (7.4.25)$$

Здесь $\gamma = -r_0/c_0(+0)$.

Решение задачи (7.4.24), (7.4.25) можно представить в виде

$$v(x, t) = \gamma\theta(t - |x|) + p(x, t).$$

Подставив данное представление в (7.4.24), получим, что $p(x, t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + a(x)p + \gamma\theta(t - |x|)a(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+; \quad (7.4.26)$$

$$p|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \quad (7.4.27)$$

Для $p(x, t)$ определим

$$\mathcal{A}_{x,t}[p(\xi, \tau)] \equiv \mathcal{A}_{x,t}[p] = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} p(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда, используя формулу Даламбера для представления решения задачи Коши (7.4.26), (7.4.27), приходим к интегральному уравнению Вольterra второго рода относительно $p(x, t)$:

$$p(x, t) = I(x, t) + \mathcal{A}_{x,t}[ap], \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7.4.28)$$

Здесь

$$I(x, t) = (\gamma/2)\mathcal{A}_{x,t}[a(\xi)\theta(\tau - |\xi|)].$$

Учитывая четность $a(x)$, свойства функции Хевисайда и совершая очевидные преобразования, получим полезные в дальнейшем равенства

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, t) = \frac{\gamma}{2} \int_0^t a(\xi)\theta(t - |\xi|) \Big|_{\xi=x-t+\tau}^{\xi=x+t-\tau} d\tau; \quad (7.4.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x, t) &= \frac{\gamma}{2} \theta(t)[\delta(t+x) + \delta(t-x)] \int_0^t a(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{\gamma}{4} \theta(t - |x|) \left[a\left(\frac{t+x}{2}\right) + a\left(\frac{t-x}{2}\right) - 4a(x) \right]. \end{aligned} \quad (7.4.30)$$

Лемма 7.4.1. *Предположим, что $a \in C(\mathbb{R})$. Тогда при любых $x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ решение интегрального уравнения (7.4.28) существует и единственно в $C(\Delta(x_0, t_0))$,*

$$\Delta(x_0, t_0) = \{(\xi, \tau) \mid \tau \in (0, t_0), \xi \in (x_0 - t_0 + \tau, x_0 + t_0 - \tau)\},$$

и имеет место оценка

$$\|p\|_{C(\Delta(x_0, t_0))} \leq (\gamma/2)t_0^2 M_4 e^{t_0 \sqrt{M_4}}, \quad (7.4.31)$$

где $M_4 = \|a\|_{C(\mathbb{R})}$.

Доказательство. Решение интегрального уравнения (7.4.28) будем искать в виде ряда

$$p(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x, t), \quad (x, t) \in \Delta(x_0, t_0), \quad (7.4.32)$$

слагаемые которого определим индукцией по k . При $k = 0$ полагаем $p_0(x, t) = I(x, t)$. Пусть $p_k(x, t)$ известно, тогда полагаем

$$p_{k+1}(x, t) = \mathcal{A}_{x,t}[ap_k], \quad (x, t) \in \Delta(x_0, t_0).$$

Обозначим

$$P_k(t) = \sup_{x \in [x_0 - t_0 + t, x_0 + t_0 - t]} |p_k(x, t)|, \quad t \in (0, t_0).$$

Индукцией по k докажем оценку

$$P_k(t) \leq \|I\|_{C(\Delta(x_0, t_0))} (\sqrt{M_4} t_0)^{2k} / (2k)!, \quad t \in (0, t_0). \quad (7.4.33)$$

Действительно, при $k = 0$ оценка (7.4.33) очевидна. Пусть (7.4.33) выполнена для некоторого $k > 0$. Докажем, что тогда она выполнена и для $k + 1$.

Оценим $\|I\|_{C(\Delta(x_0, t_0))}$:

$$\|I\|_{C(\Delta(x_0, t_0))} \leq (\gamma/2) \|\mathcal{A}_{x,t}[a(\xi)\theta(\tau - |\xi|)]\|_{C(\Delta(x_0, t_0))} \leq (\gamma/2) t_0^2 M_4.$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} |p_{k+1}(x, t)| &\leq \mathcal{A}_{x,t}[|ap_k|] \leq \frac{M_4}{2} \int_0^{t_0} \int_0^{t-\tau_0} P_k(\tau) d\xi d\tau \\ &\leq \frac{\gamma}{4} t_0^2 M_4^2 \int_0^{t_0} (t_0 - \tau) \frac{(\sqrt{M_4} \tau)^{2k}}{(2k)!} d\tau \\ &= \frac{\gamma}{2} t_0^2 M_4 \frac{(\sqrt{M_4} t_0)^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}, \quad t \in (0, t_0). \end{aligned}$$

В силу того что правая часть установленного неравенства не зависит от x , заключаем, что оценка (7.4.33) верна для всех k , откуда следует равномерная по $(x, t) \in \Delta(x_0, t_0)$ сходимость ряда (7.4.32) и неравенство (7.4.31).

Введя обозначение

$$S_n(x, t) = \sum_{k=0}^n p_k(x, t),$$

приходим к очевидному равенству

$$S_{n+1}(x, t) = I(x, t) + \mathcal{A}_{x,t}[aS_n], \quad (x, t) \in \Delta(x_0, t_0).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $p(x, t)$ есть непрерывное в $\Delta(x_0, t_0)$ решение интегрального уравнения (7.4.28).

□

Лемма 7.4.2. Пусть $a \in \bar{C}(\mathbb{R})$, $\bar{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ — множество функций $p(x, t)$, непрерывных в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ всюду, кроме, возможно, линии $t = |x|$. Тогда решение интегрального уравнения (7.4.28) имеет частные производные первого порядка по t и x , принадлежащие классу $\bar{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ и удовлетворяющие неравенствам

$$\sup_{\substack{(\xi, \tau) \in \Delta(x, t) \\ |\xi| \neq \tau}} |p'_{(m)}(\xi, \tau)| \leq \gamma t M_4 [1 + (\gamma/2) t^2 M_4 e^{t\sqrt{M_4}}], \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad m = 1, 2,$$

$$p'_{(1)}(x, t) = \frac{\partial p}{\partial x}(x, t), \quad p'_{(2)}(x, t) = \frac{\partial p}{\partial t}(x, t).$$

Доказательство. В силу леммы 7.4.1 и вида функции $I(x, t)$, правую часть равенства (7.4.28) можно один раз продифференцировать по x и по t , например:

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} I(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t q(\xi) p(\xi, \tau) \Big|_{\xi=x-t+\tau}^{\xi=x+t-\tau} d\tau, \quad (7.4.34)$$

$$t \in \mathbb{R}_+.$$

С учетом (7.4.29) и леммы 7.4.1 из (7.4.34) следует, что утверждение леммы 7.4.2 верно. \square

Лемма 7.4.3. Если $a \in C(\mathbb{R})$, то решение уравнения (7.4.28) имеет частную производную по x второго порядка, принадлежащую классу $C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-)$, имеющую вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x, t) = & \frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x, t) - a(x)p(x, t) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t [a(x+t-\tau)p'_{(2)}(x+t-\tau, \tau) \\ & + a(x-t+\tau)p'_{(2)}(x-t+\tau, \tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (7.4.35)$$

где $t \in \mathbb{R}_+$, и удовлетворяющую неравенству

$$\sup_{(\xi, \tau) \in \Delta(x, t), |\xi| \neq \tau} \left| \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2}(\xi, \tau) \right| \leq \gamma M_5,$$

где $M_5 = M_4[3/2 + T_h^2 M_4 + (1/2)T_h^2 M_4(1 + T_h^2 M_4)e^{T_h \sqrt{M_4}}]$.

Доказательство леммы 7.4.3 следует из лемм 7.4.1 и 7.4.2, в силу которых правую часть равенства (7.4.34) можно дифференцировать по x всюду, кроме ломаной $t = |x|$.

Теорема 7.4.1. Предположим, что c_0 удовлетворяет условию A_0 . Тогда решение задачи (7.4.13), (7.4.14) существует, принадлежит классу C^2 ($t > \psi(z) > 0$) и имеет структуру

$$u_0(z, t) = \gamma S(\psi(z))\theta(t - \psi(z))p(\psi(z), t), \quad (7.4.36)$$

$$t \in \mathbb{R}_+, \quad z \in \mathbb{R}_+.$$

Доказательство теоремы 7.4.1 следует непосредственно из лемм 7.4.1–7.4.3.

Теорема существования решения прямой задачи. Перейдем к исследованию прямой задачи (7.4.15)–(7.4.17). Определим

$$w(x, y, t) = u_1(z, y, t)/S(x), \quad q(x, y) = c_1(z, y), \quad b(x) = c_0(z),$$

где $z = \psi^{-1}(x)$ (см. (7.4.20)), и, используя четное продолжение по x , получим для w начально-краевую задачу

$$Lw = q(x, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad x \in (-h_1, h_1), \quad y \in \mathcal{K}_n(\mathcal{D}), \quad t \leq T_{h_1}; \quad (7.4.37)$$

$$w|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0; \quad (7.4.38)$$

$$w|_{\partial \mathcal{K}_n(\mathcal{D})} = 0. \quad (7.4.39)$$

Здесь

$$Lw = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b^2(x) \Delta_y - a(x) \right) w, \quad h_1 = \psi(h), \quad (7.4.40)$$

функции $v(x, t)$ и $a(x)$ определены в (7.4.21). Учитывая представление (7.4.36), нетрудно вычислить предел функции $w(x, y, t)$ при $|x| \rightarrow t - 0$:

$$\lim_{|x| \rightarrow t-0} w(x, y, t) = \gamma q(t, y)/4. \quad (7.4.41)$$

Следовательно, вместо задачи (7.4.37)–(7.4.39) можно ограничиться исследованием задачи

$$Lw = q(x, y) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (7.4.42)$$

$$(x, t) \in \Delta(T), \quad y \in \mathcal{K}_n(\mathcal{D}), \quad t \in (0, T_{h_1});$$

$$w(x, y, |x|) = \gamma q(x, y)/4, \quad x \in (-T, T); \quad (7.4.43)$$

$$w|_{\partial \mathcal{K}_n(\mathcal{D})} = 0. \quad (7.4.44)$$

Здесь $T \in (0, T_{h_1}/2)$; $\Delta(T) = \{(x, t) : x \in (-T, T), t \in (|x|, 2T - |x|)\}$.

Предположим, что классическое решение задачи (7.4.42)–(7.4.44), т. е. функция

$$w(x, y, t) \in C^2(\Delta(T) \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D})) \cap C^1(\overline{\Delta(T) \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D})}),$$

удовлетворяющая уравнению (7.4.42) и граничным условиям (7.4.43) и (7.4.44), существует. Умножим обе части (7.4.42) на w_t и проинтегрируем по области

$$\Omega(T, t) = \Delta_t(T) \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}), \quad t \in (0, 2T),$$

$$\Delta_t(T) = \Delta(T) \cap \{(x, t') \mid t' < t\}.$$

Применяя после стандартных преобразований формулу Остроградского, получим тождество

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|^2(t) + \left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\|^2(t) + \|b|\nabla_y w|^2\|(t) \right] = \\ & = \int_{S_t} (\Phi, \bar{n}) ds + \int_{\Omega(T, t)} \frac{\partial w}{\partial t} \left(aw + q \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx dy dt. \end{aligned} \quad (7.4.45)$$

Здесь $S_t = \partial(\Delta(T) \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D})) \cap \{(x, y, t) : t' < t\}$; \bar{n} — вектор внешней нормали к S_t ;

$$\Phi = \left(-\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x}, -b^2 \frac{\partial w}{\partial t} \nabla_y w, \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + b^2 |\nabla_y w|^2 \right] \right),$$

$$\|w\|^2(t) = \begin{cases} \int_{-t}^t \int_{\mathcal{K}_n(\mathcal{D})} w^2(x, y, t) dy dx, & t \in [0, T], \\ \int_{t-T}^T \int_{\mathcal{K}_n(\mathcal{D})} w^2(x, y, t) dy dx, & t \in [T, 2T]. \end{cases}$$

Лемма 7.4.4. Предположим, что $c_0(z)$, $c_1(z, y)$ удовлетворяют условию A_0 , а коэффициенты оператора L и начально-краевые условия задачи (7.4.42)–(7.4.44) построены по функциям $c_0(z)$, $c_1(z, y)$ указанным выше способом. Тогда классическое решение задачи (7.4.42)–(7.4.44) единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|w\|_1(t) \leq M_6 \|q\|_{W_2^1([-T, T] \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}))}, \quad t \in [0, 2T], \quad (7.4.46)$$

где постоянная M_6 зависит только от M_j , $j = \overline{1, 5}$ (здесь и далее $j = \overline{m, n}$ означает, что j пробегает все целые значения от m до n);

$$\|w\|_1^2(t) = \|w\|^2(t) + \|\nabla_{x,y,t} w\|^2(t), \quad t \in [0, 2T].$$

Доказательство. Из тождества (7.4.45) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|^2(t) + \left\| \frac{\partial w}{\partial x} \right\|^2(t) + M_1 \|\nabla_y w\|^2(t) \leq \\ & = \frac{\gamma}{8} \left\{ \left\| \frac{\partial q}{\partial x} \right\|^2(T) + M_2^2 \|\nabla_y q\|^2(T) + 2 \int_0^t \left[M_4 \|w\|(\tau) \left\| \frac{\partial w}{\partial \tau} \right\|(\tau) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \gamma M_5 \|q\|(\tau) \left\| \frac{\partial w}{\partial \tau} \right\|(\tau) \right] d\tau \right\}, \quad t \in [0, T]. \quad (7.4.47) \end{aligned}$$

Проинтегрируем очевидное равенство

$$w^2(x, y, t) = \frac{\gamma^2}{8} q^2(x, y) + 2 \int_{|x|}^t w(x, y, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} w(x, y, \tau) d\tau$$

по x, y в пределах области

$$\Delta(T) \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}) \cap \{(x, y, t') \mid t' = t\}$$

и, используя неравенство Гёльдера, получим

$$\|w\|^2(t) \leq \frac{\gamma^2}{8} \|q\|^2(t) + 2 \int_0^t \|w\|(\tau) \left\| \frac{\partial w}{\partial \tau} \right\|(\tau) d\tau. \quad (7.4.48)$$

Объединяя (7.4.47) и (7.4.48) и используя неравенства

$$\frac{m_3^2(m_1^2 + m_2^2)}{1 + m_3^2} \leq m_1^2 + m_2^2 m_3^2 \leq (m_1^2 + m_2^2)(1 + m_3^2),$$

а также неравенство Гронуолла, приходим к (7.4.46). \square

Для определения обобщенного решения задачи (7.4.42)–(7.4.44) и доказательства его существования воспользуемся некоторой модификацией метода Фурье: разделим переменные не как обычно — на пространственные и временную, а будем искать решение в виде суммы функций типа $X(x, t)Y(y)$.

Будем говорить, что функция $w(x, y, t)$ принадлежит классу $\mathcal{P}(T, \mathcal{D})$, если $w(x, y, t)$ непрерывна в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ по переменным $(x, t) \in \overline{\Delta(T)}$, т. е. если для любой пары $(x, t) \in \overline{\Delta(T)}$ выполняется условие

$$\lim_{(x', t') \rightarrow (x, t)} \|w(x', y, t') - w(x, y, t)\|_{L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))} = 0.$$

При доказательстве теоремы существования обобщенного решения задачи (7.4.42)–(7.4.44) используем очевидные модификации известных утверждений.

Лемма 7.4.5. Пусть последовательность $\{u_m(x, y, t)\}$, $u_m \in \mathcal{P}(T, \mathcal{D})$, сходится к функции $u(x, y, t)$ в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ равномерно по $(x, t) \in \overline{\Delta(T)}$. Тогда $u \in \mathcal{P}(T, \mathcal{D})$.

Лемма 7.4.6. Пусть последовательность функций $\{u_m(x, y, t)\}$, $u_m \in \mathcal{P}(T, \mathcal{D})$ сходится в себе в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ равномерно по $(x, t) \in \overline{\Delta(T)}$. Тогда существует $u \in \mathcal{P}(T, \mathcal{D})$, такая, что последовательность $\{u_m(x, y, t)\}$ сходится к $u(x, y, t)$ в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ равномерно по $(x, t) \in \overline{\Delta(T)}$.

Лемма 7.4.7. Пусть $c_0(z)$ и $c_1(z, y)$ удовлетворяют условию A_0 . Предположим, что существует такая последовательность функций $\{\bar{q}_m(x, y)\}$, $\bar{q}_m \in C^1([-T, T] \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$, $m = 1, 2, \dots$, что

$$1) \lim_{m \rightarrow \infty} \|q - \bar{q}_m\|_{W_2^1([-T, T] \times \mathcal{K}_n(\mathcal{D}))} = 0;$$

2) при каждом $m = 1, 2, \dots$ существует классическое решение $\bar{w}_m(x, y, t)$ задачи (7.4.42)–(7.4.44) для $q = \bar{q}_m(x, y)$.

Тогда существует функция $w \in \mathcal{P}(T, \mathcal{D})$, такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|w - \bar{w}_m\| = 0. \quad (7.4.49)$$

Доказательство. Применяя оценку (7.4.46) леммы 7.4.4 к разности $\bar{w}_m - \bar{w}_k$ и используя теоремы вложения С. Л. Соболева, получаем, что последовательность $\{\bar{w}_m\}$ сходится в себе в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ равномерно по $(x, t) \in \overline{\Delta(T)}$.

Следовательно, согласно лемме 7.4.6, существует $w \in \mathcal{P}(T, \mathcal{D})$, такая, что выполнено условие (7.4.49). \square

Функцию $w(x, y, t)$ назовем *обобщенным решением* задачи (7.4.42)–(7.4.44).

Используя (7.4.47) и лемму 7.4.5, можно показать, что таким образом определенное обобщенное решение удовлетворяет уравнению (7.4.42) в обобщенном смысле.

Теорема 7.4.2. Предположим, что $c_0(z)$ и $c_1(z, y)$ удовлетворяют условию A_0 . Тогда для любого $T \in (0, T_h)$ обобщенное решение задачи (7.4.42)–(7.4.44) существует и единственно.

Доказательство. Представим $q(x, y)$ в виде

$$q(x, y) = \sum_k q_k(x) Y_k(y). \quad (7.4.50)$$

Здесь $Y_k(y) = \exp\left(\frac{i\pi}{D} \langle k, y \rangle\right)$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\langle k, y \rangle = \sum_{j=1}^n k_j y_j$,

\sum_k означает суммирование по всем $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, n}$.

В силу условия A_0 ряд в (7.4.50) сходится в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ к $q(x, y)$ равномерно по $x \in [-T, T]$.

Обобщенное решение задачи (7.4.42)–(7.4.44) будем искать в виде ряда

$$w(x, y, t) = \sum_k w_k(x, t) Y_k(y), \quad (x, t) \in \Delta(T), \quad (7.4.51)$$

где $w_k(x, t)$ — классическое решение задачи

$$L_k w_k = q_k(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Delta(T); \quad (7.4.52)$$

$$w_k(x, |x|) = \gamma q_k(x)/4, \quad x \in [-T, T]; \quad (7.4.53)$$

$$L_k = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2(x)|k|^2 - a(x), \quad |k|^2 = \sum_{j=1}^n k_j^2. \quad (7.4.54)$$

Лемма 7.4.8. При выполнении условия теоремы 7.4.2 классическое решение задачи (7.4.52), (7.4.53) при любом $k \in \mathbb{Z}^n$ существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|w_k\|_{C(\overline{\Delta(T)})} \leq \frac{1}{4} (1 + 4T_h M_5) \|q_k\|_{C^1[-T, T]} e^{(1 + M_2^2 |k|^2) T_h}.$$

Доказательство леммы 7.4.8 основывается на том, что заменой переменных $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ задача (7.4.52), (7.4.53) приводится к задаче Гурса.

Таким образом, функции

$$\bar{q}_m(x, y) = \sum_{|k| \leq m} q_k(x) Y_k(y)$$

полностью удовлетворяют условиям леммы 7.4.7 и теорема 7.4.2 доказана. \square

Единственность решения обратной задачи и регуляризация.

Теорема 7.4.3. Предположим, что $c_0(z)$ удовлетворяет условию A_0 (пункты 1, 2). Тогда решение обратной задачи (7.4.15)–(7.4.17), (7.4.19) единственно в классе функций $c_1(z, y)$, удовлетворяющих условию A_0 (пункты 3, 4).

Доказательство теоремы 7.4.3 вытекает из теоремы 7.4.4 с учетом того, что предположения 1–3 теоремы 7.4.4 следуют из условия A_0 на функции $c_0(z)$ и $c_1(z, y)$.

Теорема 7.4.4. Предположим, что $c_0(z)$ удовлетворяет условию A_0 . Предположим также, что для каждой функции $g^{(m)}(y, t)$, $m = 1, 2$, выполнены условия:

$$1) g^{(m)}(y, t) = \sum_k g_k^{(m)}(t) Y_k(y), \quad m = 1, 2;$$

$$2) g^{(m)}(y, t) \text{ непрерывны в } L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D})) \text{ по } t \text{ на отрезке } [0, T_h];$$

3) для $g^{(m)}(y, t)$, $m = 1, 2$, существует решение $c_1^{(m)}(z, y)$, $m = 1, 2$, обратной задачи (7.4.15)–(7.4.17), (7.4.19), удовлетворяющее условию A_0 .

Тогда при любом $k \in \mathbb{Z}^n$ имеет место неравенство

$$\|q_k^{(1)} - q_k^{(2)}\|_{C[-T, T]} \leq \omega(k) \|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\|_{C[0, T_h]}, \quad (7.4.55)$$

где $T \in (0, T_h)$; $q^{(m)}(x, y) = c_1^{(m)}(\psi^{-1}(x), y) = \sum_k q_k^{(m)}(x) Y_k(y)$; $\omega(k) = M_9 e^{T_h \sqrt{M_8}}$; $M_8 = 4M_5[1 + T_h^2 e^{T_h \sqrt{|k|^2 M_2^2 + M_4}}]$; $M_9 = M_8/(\gamma M_5)$.

Доказательство. В силу теоремы 7.4.2 для

$$q^{(m)}(x, y) = \sum_k q_k^{(m)}(x) Y_k(y), \quad m = 1, 2,$$

существует обобщенное решение

$$w^{(m)}(x, y, t) = \sum_k w_k^{(m)}(x, t) Y_k(y), \quad m = 1, 2,$$

задачи (7.4.42)–(7.4.44), коэффициенты Фурье которого являются классическими решениями задач

$$L_k w_k^{(m)} = q_k^{(m)}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Delta(T); \quad (7.4.56)$$

$$w_k^{(m)}(x, |x|) = \gamma q_k^{(m)}(x)/4, \quad x \in [-T, T]; \quad (7.4.57)$$

$$m = 1, 2, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad T \in (0, T_h).$$

В силу единственности решения прямой задачи (7.4.42)–(7.4.44) имеем

$$w_k^{(m)}(0, t) = g_k^{(m)}(t), \quad m = 1, 2, \quad t \in [0, 2T]. \quad (7.4.58)$$

Четность $w_k^{(m)}(x, t)$ по x дает условие

$$\frac{\partial w_k^{(m)}}{\partial x}(0, t) = 0, \quad m = 1, 2. \quad (7.4.59)$$

Определим оператор

$$B_{x,t}[w_k] = \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} w_k(\xi, \tau) d\tau d\xi, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R},$$

и применим формулу Даламбера для представления решения задачи Коши для уравнения (7.4.56) с данными Коши (7.4.58), (7.4.59). Получим

$$w_k^{(m)}(x, t) = Q_k^{(m)}(x, t) + B_{x,t}[(|k|^2 b^2 - a)w_k^{(m)}], \quad (7.4.60)$$

$$(x, t) \in \Delta_1(T), \quad m = 1, 2,$$

где

$$Q_k^{(m)}(x, t) = G_k^{(m)}(x, t) + \Phi_k^{(m)}(x, t), \quad \Phi_k^{(m)}(x, t) = -B_{x,t}[q_k^{(m)}v''_{(1)}],$$

$$G_k^{(m)}(x, t) = [g_k^{(m)}(t+x) + g_k^{(m)}(t-x)]/2,$$

$$v''_{(1)}(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t),$$

$$\Delta_1(T) = \{(x, t) : x \in (0, T), x < t < 2T - x\}.$$

При любом мультииндексе k и $m = 1, 2$ интегральное уравнение Вольтерра (7.4.60) имеет единственное решение $w_k^{(m)} \in C(\Delta_1(T))$, которое может быть найдено методом последовательных приближений. Действительно, в силу предположений теоремы 7.4.4 функции $Q_k^{(m)}$, $|k|^2 b^2 - a$ непрерывны. Следовательно, решение $w_k^{(m)}$ можно представить в виде

$$w_k^{(m)}(x, t) = Q_k^{(m)}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} R_k(x, t, \xi, \tau) Q_k^{(m)}(\xi, \tau) d\tau d\xi,$$

$$(x, t) \in \Delta_1(T), \quad m = 1, 2.$$

При этом резольвента $R_k(x, t, \xi, \tau)$ непрерывна на $\Delta_1(T) \times \Delta_1(T)$ и удовлетворяет неравенству

$$\|R_k\|_{C_4(\Delta_1(T) \times \Delta_1(T))} \leq e^{T_h \sqrt{|k|^2 M_2^2 + M_4}} \equiv M_7. \quad (7.4.61)$$

Положим $x = t - 0$ и воспользуемся условием (7.4.57):

$$\frac{\gamma}{4} q_k^{(m)}(t) = Q_k^{(m)}(t - 0, t) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\xi}^{2t-\xi} R_k(t - 0, t, \xi, \tau) Q_k^{(m)}(\xi, \tau) d\tau d\xi,$$

$$t \in [0, T], \quad m = 1, 2. \quad (7.4.62)$$

Отметим, что из (7.4.62) уже следует теорема 7.4.4, достаточно лишь переписать (7.4.62) в виде линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно $q_k^{(m)}(t)$:

$$\frac{\gamma}{4} q_k^{(m)}(t) = -B_{t,t}[q_k^{(m)} v''_{(1)}] + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\xi}^{2t-\xi} R_k(t - 0, t, \xi, \tau) \Phi_k^{(m)}(\xi, \tau) d\tau d\xi$$

$$+ G_k^{(m)}(t - 0, t) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\xi}^{2t-\xi} R_k(t - 0, t, \xi, \tau) G_k^{(m)}(\xi, \tau) d\tau d\xi, \quad (7.4.63)$$

$$t \in [0, T], \quad m = 1, 2.$$

Модуль ядра интегрального уравнения (7.4.63) допускает оценку сверху величиной M_8 , модуль правой части (7.4.63) оценивается величиной $M_9 \|g_k^{(m)}\|_{C[0,2T]}$. В силу линейности (7.4.63) относительно $q_k^{(m)}$ заключаем, что неравенство (7.4.55) полностью доказано. \square

Теорема 7.4.5. *Предположим, что s_0 удовлетворяет условию A_0 . Предположим также, что для $g(y, t)$, непрерывной в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ по t на отрезке $[0, T_h]$, существует решение обратной задачи (7.4.15)–(7.4.17), (7.4.19), удовлетворяющее условию A_0 . Пусть $g_\varepsilon(y, t)$ непрерывна в $L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))$ по t на $[0, T_h]$ и удовлетворяет неравенству*

$$\max_{t \in [0, T_h]} \|g - g_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))} \leq \varepsilon.$$

Обозначим

$$b_N^{(\varepsilon)}(x, y) = \sum_{|k| \leq N} q_k^{(\varepsilon)}(x) Y_k(y),$$

где $q_k^{(\varepsilon)}(x)$ есть решение интегрального уравнения (7.4.63), в которое вместо $g_k^{(m)}(t)$ подставлен коэффициент Фурье $g_k^{(\varepsilon)}(t)$ функции $g_\varepsilon(y, t)$:

$$g_\varepsilon(y, t) = \sum_k g_k^{(\varepsilon)}(t) Y_k(y).$$

Тогда имеет место оценка

$$\|q - b_N^{(\varepsilon)}\|_{L_2(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))} \leq \omega(N)\varepsilon + M/N, \quad t \in [0, T], \quad (7.4.64)$$

где

$$M = \max_{x \in [0, T_h]} \|q\|_{W_2^1(\mathcal{K}_n(\mathcal{D}))}.$$

Доказательство следует из теоремы 7.4.4.

Оценка (7.4.64) показывает, что $b_N^{(\varepsilon)}$ — регуляризующее семейство для обратной задачи (7.4.15)–(7.4.17), (7.4.19).

Контрольные вопросы

1. Сравните степень некорректности задач данной главы и глав 7 и 8.
2. Приведите примеры практического применения обратной задачи из раздела 9.4.

Дополнительная литература

- 7.1. **Кабанихин С. И., Шишленин М. А.** Линеаризованная многомерная обратная задача для волнового уравнения // Обратные задачи и информационные технологии. 2001. Т. 1, № 2. С. 83–114.
- 7.2. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г.** О трех линеаризованных обратных задачах для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 171, № 6. С. 1279–1281.
- 7.3. **Романов В. Г.** Одна задача интегральной геометрии и линеаризованная обратная задача для гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 6. С. 1364–1374.
- 7.4. **Kabanikhin S. I., Bektemesov M. A., Nechaev D. V.** Numerical solution of 2D thermoacoustic problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2005. V. 13, N 3. P. 265–276.

Глава 8.

Линейные задачи для параболических уравнений

Линейные задачи для параболических уравнений очень важны для практики и необычайно разнообразны по степени сложности. Наряду с простыми, встречаются такие сложные, как задача Коши для уравнения Лапласа, или еще сложнее.

В данной главе мы сначала обсудим различные постановки линейных обратных задач теплопроводности и сравним их с аналогичными постановками для гиперболических уравнений на основе связи между решениями соответствующих прямых задач (раздел 8.1). Затем подробно остановимся на одной из самых популярных (уступающей, пожалуй, только задаче Коши для уравнения Лапласа) некорректных задач — задаче Коши с обратным временем (раздел 8.2). На этом примере мы рассмотрим несколько методов приближенного решения задачи (Латтеса — Лионса, разделения переменных, интегральных уравнений), получим оценку условной устойчивости и приведем задачу к операторному уравнению $Aq = f$. Свойства оператора A и сопряженного к нему оператора A^* аналогичны свойствам соответствующих операторов для уравнения Лапласа (см. главу 9). Их обоснование будет изложено в следующей главе. Сказанное относится также к задачам продолжения и граничным обратным задачам (раздел 8.3), тем не менее мы представим несколько доказательств, чтобы читатель мог сопоставить их сходства и различия. В заключение (раздел 8.4) дано несколько примеров линейных обратных задач. Отметим, что более полный анализ изложенных задач можно найти в [1, 8.1, 8.6].

8.1. О постановке обратных задач для параболических уравнений и их связи с соответствующими обратными задачами для гиперболических уравнений

Обратные и некорректные задачи для параболических уравнений являются одним из наиболее сложных и практически важных классов обратных задач. Устойчивость этих задач хуже, чем у соответствующих обратных задач для гиперболических уравнений (см. главы 7, 10), образно говоря, “хуже на одно обращение преобразования Лапласа”. Это означает, что если мы хотим применить к обратным задачам для параболических уравнений методы, разработанные в гиперболическом случае, то это можно сделать, обратив преобразование Лапласа (см. ниже (8.1.8)), что, естественно, создает дополнительную неустойчивость. Поэтому основными методами численного решения обратных задач для параболических уравнений являются оптимизационные, а также их комбинации с методами, использующими свойствами оператора прямой задачи.

Линейные обратные и некорректные задачи для параболических уравнений подразделяют на следующие основные группы:

- 1) задачи с обратным временем или, что то же самое, задачи восстановления начального состояния по измерениям в некоторый фиксированный момент времени (ретроспективные обратные задачи);
- 2) задачи продолжения решения внутрь исследуемой области с границы этой области (или ее части) (задачи продолжения);
- 3) граничные обратные задачи о восстановлении решения на недоступной части границы;
- 4) задачи восстановления источников, т. е. определения правой части параболического уравнения;
- 5) внутренние обратные задачи, т. е. задачи восстановления решения по его значениям во внутренних точках исследуемой области.

Разумеется, данную классификацию можно сделать более детальной, разбив каждую из перечисленных групп на классы, но мы остановимся лишь на самых простых примерах. Более подробно о классификации и применении теории и численных методов решения обратных задач теплопроводности изложено в [1, 10, 8.1].

Заметим, что граничные обратные задачи, задачи продолжения и восстановления источников взаимосвязаны. Например, решая задачу продолжения вплоть до недоступной границы, мы приходим к решению граничной обратной задачи. А продолжая решение в направлении источника, получаем больше информации о его местоположении, форме и интенсивности.

На примере приведенной классификации можно проиллюстрировать различие решения обратных задач для уравнений гиперболического и параболического типов. В случае двух переменных (x, t) задача продолжения, граничная обратная задача и задача с обратным временем для гиперболического уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ корректны, в то время, как для параболического уравнения все эти задачи существенно некорректны. В многомерном случае задача с обратным временем для гиперболического уравнения $u_{tt} = Lu$, где оператор L определяется в разделе 7.4 формулой (9.4.6), корректна; более того, она сводится к точно такой же задаче заменой $t = -t'$.

Некорректность задачи продолжения [8.8]. Рассмотрим задачу продолжения решения параболического уравнения

$$u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8.1.1)$$

в полупространстве $x > 0$ по измерениям на границе $x = 0$:

$$u(0, t) = f(t), \quad (8.1.2)$$

$$u_x(0, t) = g(t). \quad (8.1.3)$$

Эта задача некорректна. Действительно, положим $f_n(t) = 2n^{-1} \sin(2n^2 t)$, $g(t) \equiv 0$. Тогда функция

$$u_n(x, t) = n^{-1} [e^{nx} \sin(2n^2 t + nx) + e^{-nx} \sin(2n^2 t - nx)]$$

будет, очевидно, решением уравнения (8.1.1), удовлетворяющим условиям (8.1.2), (8.1.3). Но f_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, в то время как $u_n(x, t)$ растет при любом $x > 0$, откуда следует неустойчивость задачи (8.1.1)–(8.1.3). (Выбор конкретных функциональных пространств для завершения анализа некорректности оставляем читателю.)

Для сравнения рассмотрим аналогичную задачу продолжения для гиперболического уравнения

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & x > 0, & \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) &= f(t), & u_x(0, t) &= g(t). \end{aligned}$$

Эта задача решается явно

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(t+x) + f(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} g(\tau) d\tau,$$

и, очевидно, корректна, если ее рассматривать в любой конечной области $\Delta(T) = \{x \in (0, T), t \in (-T+x, T-x)\}$.

Связь между обратными задачами для уравнений гиперболического и параболического типов. При исследовании обратных задач для параболических и эллиптических уравнений можно переходить к эквивалентным обратным задачам для гиперболических уравнений. Пусть в связанной ограниченной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, с гладкой границей S , рассматривается смешанная задача для параболического уравнения

$$u_t = Lu + f(x, t), \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = \psi(x, t). \quad (8.1.4)$$

Здесь n — кономаль к S ; L — равномерно эллиптический оператор с непрерывными коэффициентами, зависящими только от пространственной переменной $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

$$\mu \sum_{i=1}^n \nu_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\nu_i \nu_j \leq \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \nu_i^2 \quad \text{для любых } \nu_i \in \mathbb{R}, \quad 0 < \mu < \infty.$$

Задаче (8.1.4) сопоставим задачу для гиперболического уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} &= L\tilde{u} + \tilde{f}(x, t), \\ \tilde{u}|_{t=0} &= \varphi(x), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right|_S = \tilde{\psi}(x, t). \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

Предположим, что функции \tilde{f} , $\tilde{\psi}$ достаточно гладкие, растут при $t \rightarrow \infty$ не быстрее, чем $Ce^{\alpha t}$, и связаны с функциями f , ψ соотношениями

$$f(x, t) = \int_0^\infty \tilde{f}(x, \tau)G(t, \tau) d\tau, \quad \psi(x, t) = \int_0^\infty \tilde{\psi}(x, \tau)G(t, \tau) d\tau, \quad (8.1.6)$$

где

$$G(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\tau^2/(4t)}.$$

Покажем, что если \tilde{u} — решение задачи (8.1.5) и выполняются соотношения (8.1.6), то функция

$$u(x, t) = \int_0^\infty \tilde{u}(x, \tau)G(t, \tau) d\tau \quad (8.1.7)$$

является решением задачи (8.1.4).

В самом деле, поскольку $G_t = G_{\tau\tau}$ при $t > 0$, то

$$\begin{aligned} u_t &= \int_0^\infty \tilde{u}(x, \tau)G_t(t, \tau) d\tau = \int_0^\infty \tilde{u}(x, \tau)G_{\tau\tau}(t, \tau) d\tau \\ &= \tilde{u}G_\tau|_0^\infty - \int_0^\infty \tilde{u}_\tau(x, \tau)G_\tau(t, \tau) d\tau \\ &= \tilde{u}G_\tau|_0^\infty - \tilde{u}_\tau G|_0^\infty + \int_0^\infty \tilde{u}_{\tau\tau}(x, \tau)G(t, \tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty G(t, \tau)\tilde{u}_{\tau\tau}(x, \tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty G(t, \tau)[L\tilde{u}(x, \tau) + \tilde{f}(x, \tau)] d\tau = \int_0^\infty G(t, \tau)L\tilde{u}(x, \tau) d\tau + f(x, t), \end{aligned}$$

$$Lu = \int_0^\infty G(t, \tau) L\tilde{u}(x, \tau) d\tau.$$

Следовательно, при $t > 0$

$$u_t - Lu - f = \int_0^\infty (\tilde{u}_{\tau\tau} - L\tilde{u} - \tilde{f})G(t, \tau) d\tau = 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty \tilde{u}(x, \tau)G(t, \tau) d\tau \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \tilde{u}(x, 2\sqrt{t}\tau) e^{-\tau^2} d\tau = \tilde{u}(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_S &= \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}|_S G(t, \tau) d\tau = \int_0^\infty \tilde{\psi}(x, \tau)G(t, \tau) d\tau = \psi(x, t). \end{aligned}$$

Таким образом, формула (8.1.7) позволяет найти решение задачи (8.1.4) через решение задачи (8.1.5), если данные этих задач связаны формулами (8.1.6). Известно, что решение задачи (8.1.4) единственно при довольно общих предположениях об операторе L и поверхности S и связано с \tilde{u} формулой (8.1.7). Заметим, что равенство (8.1.7) обратимо при каждом фиксированном x , так как его можно представить в форме преобразования Лапласа с параметром преобразования $p = 1/(4t)$:

$$u\left(x, \frac{1}{4p}\right) = \sqrt{\frac{p}{\pi}} \int_0^\infty e^{-zp} \tilde{u}(x, \sqrt{z}) \frac{dz}{\sqrt{z}}. \quad (8.1.8)$$

Поэтому формула (8.1.7) устанавливает между решениями задач (8.1.4) и (8.1.5) взаимно однозначное соответствие.

Предположим теперь, что для параболического уравнения $u_t = Lu + f(x, t)$ рассматривается обратная задача об определении $f(x, t)$ или коэффициентов оператора L по дополнительной информации о решении задачи (8.1.4) на границе S :

$$u|_S = g(x, t), \quad t \geq 0. \quad (8.1.9)$$

Функции $g(x, t)$ поставим в соответствие функцию $\tilde{g}(x, t)$, $x \in S$, однозначно определяемую из уравнения

$$g(x, t) = \int_0^\infty \tilde{g}(x, \tau)G(t, \tau) d\tau, \quad x \in S, \quad t \geq 0. \quad (8.1.10)$$

Положим

$$\tilde{u}|_S = \tilde{g}(x, t), \quad t \geq 0. \quad (8.1.11)$$

и рассмотрим обратную задачу (8.1.5), (8.1.11).

При довольно общих предположениях о коэффициентах оператора L решение задачи (8.1.5) удовлетворяет оценке

$$|\tilde{u}(x, t)| \leq C e^{\alpha t}, \quad x \in S.$$

Формула (8.1.7) и эквивалентная ей формула (8.1.8) показывают, что функция $u(x, t)$ является в области $t > 0$ аналитической функцией аргумента t . Поэтому функцию $g(x, t)$ в формуле (8.1.9) достаточно задать в сколь угодно малой окрестности точки $t = 0$, например, в интервале $0 \leq t < \delta$, $\delta > 0$.

Таким образом, многие теоремы единственности решения линейных обратных задач для параболических уравнений можно получить из соответствующих теорем для гиперболических обратных задач.

8.2. Обратная задача теплопроводности с обратным временем (ретроспективная)

Во многих практических задачах требуется восстановить распределение температуры тела в начальный момент времени $t = 0$ по измеренной температуре при $t = T > 0$. Такие задачи называются ретроспективными или начально-краевыми задачами для уравнения теплопроводности с обратным временем [1]. Если, например, рассматривается стержень длиной l с фиксированной на концах температурой (без ограничения общности можно считать температуру на концах нулевой), то получим следующую ретроспективную задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l), \quad \tau \in (0, T), \quad (8.2.1)$$

$$v(0, \tau) = v(l, \tau) = 0, \quad \tau \in (0, T), \quad (8.2.2)$$

$$v(x, T) = f(x), \quad x \in (0, l). \quad (8.2.3)$$

Требуется найти $v(x, \tau)$ в области $(0, l) \times (0, T)$.

Заменяя в (8.2.1)–(8.2.3) переменную $\tau = T - t$ и обозначая $u(x, t) = v(x, \tau)$, приходим к эквивалентной задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T), \quad (8.2.4)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (8.2.5)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, l), \quad (8.2.6)$$

в которой требуется определить $u(x, t)$ в области $(0, l) \times (0, T)$.

Заметим, что задача (8.2.4)–(8.2.6) является некорректной, поскольку сколь угодно малым изменениям правой части f могут соответствовать сколь угодно большие изменения решения u . В самом деле, при

$f(x) = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n x}{l}$ решение $u(x, t) = \frac{1}{n} e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{l^2}} \sin \frac{\pi n x}{l}$ растет неограниченно с ростом n , в то время как данные задачи $f(x)$ стремятся к нулю.

Рассмотрим несколько примеров регуляризации задачи (8.2.4)–(8.2.6).

Метод квазиобращения Лягтеса — Лионса. Опишем процедуру регуляризации задачи (8.2.4)–(8.2.6), предложенную в [22].

Обозначим через $u_\alpha(x, t)$ решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \\ u(0, t) = u(l, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(0, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

Нетрудно убедиться, что решение $u_\alpha(x, t)$ задачи (8.2.7) можно построить методом Фурье:

$$u_\alpha(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \exp \left\{ \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 \left(1 - \alpha \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 \right) t \right\} \sin \left(\frac{\pi k x}{l} \right), \quad (8.2.8)$$

где f_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Семейство операторов R_α , переводящих функции $f(x)$ в решение $u_\alpha(x, t)$ вида (8.2.8), т. е. определенных по правилу $R_\alpha f = u_\alpha$, будет регуляризирующим семейством по отношению к задаче (8.2.4)–(8.2.6).

Для нормы оператора R_α справедлива оценка

$$\|R_\alpha\| \leq e^{t/(4\alpha)}. \quad (8.2.9)$$

Можно оценить величину уклонения u_α от точного решения u задачи (8.2.4)–(8.2.6) при условии

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 e^{2(\pi k/l)^2 T} \right\}^{1/2} \leq C.$$

В этом случае

$$\|u_\alpha - u\|(t) = \left(\int_0^l (u_\alpha(x, t) - u(x, t))^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{4Ct}{(T-t)^2} \alpha e^{-2}.$$

Доказать эту оценку и оценку (8.2.9) предлагаем читателю в качестве упражнения.

Регуляризация на основе разделения переменных. Рассмотрим задачу (8.2.4)–(8.2.6), в которой требуется определить функцию $u(x, t)$.

Обозначим через f_k коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$f_k = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx.$$

Если функция $f(x)$ такова, что решение $u(x, t)$ рассматриваемой задачи Коши существует, то

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{(\pi k/l)^2 t} \sin \frac{\pi k x}{l}. \quad (8.2.10)$$

Рассмотрим последовательность линейных операторов R_n :

$$(R_n f)(x, t) = \sum_{k=1}^n f_k e^{(\pi k/l)^2 t} \sin \frac{\pi k x}{l}. \quad (8.2.11)$$

Операторы определения коэффициентов Фурье f_k и конечного суммирования непрерывны, откуда следует непрерывность операторов R_n . Сходимость последовательности $\{R_n f\}$ к точному решению $u(x, t)$ следует из представления решения (8.2.10) и сходимости ряда Фурье в пространстве L_2 .

Получим оценку эффективности применения данного регуляризирующего семейства к приближенным данным. Предположим, что рассматриваемая задача Коши поставлена корректно по Тихонову и множество корректности M определяется неравенством

$$\left[\int_0^l u^2(x, T) dx \right]^{1/2} \leq C. \quad (8.2.12)$$

Очевидно, что

$$\|R_n\| = e^{(\pi n/l)^2 t}.$$

Из (8.2.10), (8.2.11) следует, что

$$\|(R_n f)(x, t) - u(x, t)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k^2 e^{2(\pi k/l)^2 t}. \quad (8.2.13)$$

В силу (8.2.12) заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 e^{2(\pi k/l)^2 T} \leq C^2. \quad (8.2.14)$$

Легко видеть, что сумма в правой части (8.2.13) достигает при условии (8.2.14) максимального значения в случае, когда

$$f_k = 0, \quad k \neq n+1, \quad f_{n+1} = C e^{-(\pi(n+1)/l)^2 T},$$

и, значит,

$$\|(R_n f)(x, t) - u(x, t)\| \leq C e^{-(\pi(n+1)/l)^2 (T-t)}.$$

Следовательно, если данные задачи Коши известны с ошибкой δ , т. е. $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, то справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|(R_n f_\delta)(x, t) - u(x, t)\| &\leq \|R_n(f_\delta - f)\| + \|R_n f - u\| \\ &\leq e^{(\pi n/l)^2 t} \delta + C e^{-(\pi(n+1)/l)^2 (T-t)}. \end{aligned} \quad (8.2.15)$$

Упражнение 8.2.1. Пусть ошибка задания данных f фиксирована. Найдите номер $n = n(\delta)$, при котором правая часть оценки (8.2.15) будет минимальной.

Подробное рассмотрение аналогичных вопросов в рамках теории операторно-дифференциальных уравнений можно найти в [8.2].

Сведение к интегральному уравнению. Метод интегральных уравнений является одним из основных в исследовании задач математической физики. Задачи математической физики, корректные в классическом смысле, обычно сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма или Вольтерра второго рода. Задачи некорректные сводятся, как правило, к интегральным уравнениям первого рода. Нетрудно убедиться, что решение задачи (8.2.4)–(8.2.6) эквивалентно решению интегрального уравнения вида

$$\int_0^l K(x, \xi) q(\xi) d\xi = f(x), \quad (8.2.16)$$

где

$$K(x, \xi) = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\pi k/l)^2 T} \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi k \xi}{l}.$$

Оценка условной устойчивости. В задаче Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем естественно предположить принадлежность решения $u(x, t)$ множеству

$$M = \{u(x, t) : C_1 \leq u(x, t) \leq C_2\},$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы. Действительно, если функция $u(x, t)$ описывает изменения концентрации в процессе диффузии, т. е. $u(x, t)$ является отношением массы некоторого вещества в элементарном слое ко всей массе вещества в этом слое, то, очевидно,

$$0 \leq u(x, t) \leq 1.$$

Если же $u(x, t)$ — распределение температуры стержня, то, например,

$$C_1 \leq u(x, t) \leq C_2,$$

где C_1 — температура абсолютного нуля, C_2 — температура плавления стержня.

Из теоремы Тихонова следует существование функции $\omega(\tau)$ — модуля непрерывности обратного оператора — в случае, если множество корректности компактно. Оценка функции $\omega(\tau)$ имеет важное значение при исследовании некорректных задач. Как было отмечено выше, в задаче Коши для уравнения теплопроводности естественно в качестве множества корректности рассматривать множество ограниченных функций. Получим оценку условной устойчивости для множества функций, ограниченных в L_2 .

Итак, пусть $u(x, t)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T), \quad (8.2.17)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8.2.18)$$

Обозначим через $\rho(t)$ функцию

$$\rho(t) = \int_0^l u^2(x, t) dx.$$

Дифференцируя функцию $\rho(t)$ дважды, получим

$$\rho'(t) = 2 \int_0^l u u_t dx,$$

$$\rho''(t) = 2 \int_0^l u_t^2 dx + 2 \int_0^l u u_{tt} dx.$$

Преобразуем второе слагаемое в выражении для $\rho''(t)$:

$$\int_0^l u u_{tt} dx = \int_0^l u u_{xxxx} dx = \int_0^l u_{xx}^2 dx = \int_0^l u_t^2 dx.$$

Следовательно,

$$\rho''(t) = 4 \int_0^l u_t^2 dx.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(t) = \ln \rho(t).$$

Дифференцируя дважды функцию $\varphi(t)$, получим

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \frac{1}{\rho^2(t)} [\rho''(t) \rho(t) - (\rho'(t))^2] \\ &= \frac{1}{\rho^2(t)} \left[4 \int_0^l u_t^2 dx \cdot \int_0^l u^2 dx - 4 \left(\int_0^l u u_t dx \right)^2 \right], \end{aligned}$$

откуда в силу неравенства Коши — Буняковского

$$\varphi''(t) \geq 0. \quad (8.2.19)$$

Неравенство (8.2.19) означает, что функция $\varphi(t)$ выпукла, откуда следует, что функция $\varphi(t)$ на отрезке $[0, T]$ не превосходит линейной функции, принимающей на концах отрезка те же значения, что и $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) \leq \frac{T-t}{T} \varphi(0) + \frac{t}{T} \varphi(T). \quad (8.2.20)$$

Потенцируя неравенство (8.2.20), получим

$$\rho(t) \leq [\rho(0)]^{(T-t)/T} [\rho(T)]^{t/T}. \quad (8.2.21)$$

Пусть теперь $u(x, t)$ — функция, удовлетворяющая (8.2.17), (8.2.18). Предположим, что выполняются условия

$$\left[\int_0^l u^2(x, T) dx \right]^{1/2} \leq C, \quad (8.2.22)$$

$$\left[\int_0^l u^2(x, 0) dx \right]^{1/2} \leq \delta, \quad (8.2.23)$$

где C и δ — некоторые константы. Из (8.2.21) и (8.2.22), очевидно, следует

$$\left[\int_0^l u^2(x, t) dx \right]^{1/2} \leq (C)^{t/T} (\delta)^{(T-t)/T}. \quad (8.2.24)$$

Таким образом, в задаче Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем в случае, если множество корректности задается неравенством (8.2.22), имеет место оценка условной устойчивости (8.2.24)

Сведение задачи Коши для уравнения теплопроводности к обратной задаче и к операторному уравнению. Некорректная задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T), \quad (8.2.25)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, l), \quad (8.2.26)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (8.2.27)$$

может быть сформулирована в форме обратной задачи к некоторой прямой (корректной) задаче. Действительно, рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T), \quad (8.2.28)$$

$$u(x, T) = q(x), \quad x \in (0, l), \quad (8.2.29)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (8.2.30)$$

в которой по заданной функции $q(x)$ нужно определить функцию $u(x, t)$.

Задача (8.2.28)–(8.2.30) является корректной. Поэтому задача (8.2.25)–(8.2.27) сводится к следующей обратной задаче: по дополнительной информации о решении прямой задачи (8.2.28)–(8.2.30)

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, l), \quad (8.2.31)$$

требуется определить функцию $q(x)$.

Рассмотрим оператор

$$A: q(x) := u(x, T) \longrightarrow f(x) := u(x, 0),$$

где $u(x, t)$ — решение задачи (8.2.28)–(8.2.30).

Тогда в операторном виде обратную задачу можно записать следующим образом:

$$Aq = f,$$

где $f(x)$ — заданная функция, $q(x)$ — искомая функция.

Метод наискорейшего спуска в задаче Коши для уравнения теплопроводности. Рассмотрим обратную задачу (8.2.28)–(8.2.31) в операторном виде

$$Aq = f. \quad (8.2.32)$$

Будем решать эту задачу, минимизируя целевой функционал $J(q) = \|Aq - f\|_{L_2(0,l)}^2$ с помощью метода наискорейшего спуска. Этот метод состоит в последовательном вычислении приближений q_n по схеме

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'(q_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где q_0 — некоторое начальное приближение, $J'(q)$ — градиент рассматриваемого функционала, а параметр спуска α_n определяется из следующего условия

$$\alpha_n = \arg \min_{\alpha > 0} (J(q_n - \alpha J'(q_n))). \quad (8.2.33)$$

Покажем, как вычисляется градиент функционала в рассматриваемой обратной задаче. Вычислим приращение функционала $J(q)$:

$$\begin{aligned} J(q + \delta q) - J(q) &= \|A(q + \delta q) - f\|_{L_2(0,l)}^2 - \|Aq - f\|_{L_2(0,l)}^2 \\ &= 2\langle Aq - f, A\delta q \rangle + \|A\delta q\|_{L_2(0,l)}^2 \\ &= 2 \int_0^l [u(x, 0) - f(x)] \delta u(x, 0) dx + \int_0^l (\delta u(x, 0))^2 dx, \end{aligned}$$

где $u(x, t)$ — решение задачи прямой задач (8.2.28)–(8.2.30), а $\delta u(x, t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T), \quad (8.2.34)$$

$$u(x, T) = \delta q(x), \quad x \in (0, l), \quad (8.2.35)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (8.2.36)$$

Обозначим через $\psi(x, t)$ решение сопряженной задачи

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (8.2.37)$$

$$\psi(x, 0) = \mu(x), \quad (8.2.38)$$

$$\psi(0, t) = \psi(l, t) = 0, \quad (8.2.39)$$

Учитывая (8.2.34)–(8.2.39), получим соотношения, связывающие решения задач (8.2.34)–(8.2.36) и (8.2.37)–(8.2.39):

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^l \int_0^T \psi(x, t) (\delta u_t(x, t) + \delta u_{xx}(x, t)) dx dt \\
 &= \int_0^l \int_0^T \psi(x, t) \delta u_t(x, t) dx dt + \int_0^l \int_0^T \psi(x, t) \delta u_{xx}(x, t) dx dt \\
 &= \int_0^l \psi(x, t) \delta u(x, t) dx \Big|_0^T - \int_0^l \int_0^T \psi_t(x, t) \delta u(x, t) dx dt \\
 &\quad + \int_0^l \psi(x, t) \delta u_x(x, t) dt \Big|_0^l - \int_0^l \int_0^T \psi_x(x, t) \delta u_x(x, t) dx dt \\
 &= \int_0^l \psi(x, t) \delta u(x, t) dx \Big|_0^T - \int_0^l \int_0^T \psi_t(x, t) \delta u(x, t) dx dt \\
 &\quad - \int_0^l \psi_x(x, t) \delta u(x, t) dt \Big|_0^l + \int_0^l \int_0^T \psi_{xx}(x, t) \delta u(x, t) dx dt \\
 &= \int_0^l (\psi(x, T) \delta u(x, T) - \psi(x, 0) \delta u(x, 0)) dx \\
 &\quad - \int_0^l \int_0^T (\psi_t(x, t) - \psi_{xx}(x, t)) \delta u(x, t) dx dt \\
 &= \int_0^l \psi(x, T) \delta u(x, T) dx - \int_0^l \psi(x, 0) \delta u(x, 0) dx.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^l \psi(x, T) \delta q(x) dx - \int_0^l \psi(x, 0) \delta u(x, 0) dx = 0.$$

Положим $\mu(x) = 2(u(x, 0) - f(x))$ в сопряженной задаче (8.2.37)–(8.2.39). Тогда

$$\begin{aligned}
 J(q + \delta q) - J(q) &= \int_0^l \psi(x, 0) \delta u(x, 0) dx + \int_0^l (\delta u(x, 0))^2 dx \\
 &= \int_0^l \psi(x, T) \delta q(x) dx + \int_0^l (\delta u(x, 0))^2 dx \\
 &= \langle \psi(\cdot, T), \delta q(\cdot) \rangle + \int_0^l (\delta u(x, 0))^2 dx.
 \end{aligned}$$

Сравнив полученное выражение для приращения функционала с определением градиента функционала

$$J(q + \delta q) - J(q) = \langle J'(q), \delta q \rangle + o(\|\delta q\|),$$

закключаем, что $J'(q) \simeq 2A^*(Aq - f) = \psi(x, T)$, где ψ есть решение сопряженной задачи (8.2.37)–(8.2.39), в которой в качестве $\mu(x)$ взята функция $2(Aq - f) = 2(u(x, 0) - f(x))$.

Многомерная постановка. В связанной ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем

$$u_t = -L(x)u, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (8.2.40)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (8.2.41)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (8.2.42)$$

в которой требуется определить функцию $u(x, t) \in L_2(\Omega \times (0, T))$ по заданной функции $f(x) \in L_2(\Omega)$. Здесь $L(x)$ — эллиптический оператор:

$$L(x)u = \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x)D_j u) - c(x)u, \quad D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.2.43)$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\nu_i\nu_j \geq \sum_{i=1}^n \nu_i^2 \quad \text{для любого } \nu_i \in \mathbb{R}, \quad (8.2.44)$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad x \in \Omega, \quad (8.2.45)$$

$$0 \leq c(x) \leq C_1.$$

Некорректность задачи. Задача (8.2.40)–(8.2.42) является некорректной, поскольку сколь угодно малым изменениям правой части f могут соответствовать сколь угодно большие изменения решения u .

Задачу (8.2.40)–(8.2.42) можно сформулировать в форме обратной задачи по отношению к следующей прямой (корректной) задаче:

$$u_t = -L(x)u, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (8.2.46)$$

$$u(x, T) = q(x), \quad x \in \Omega, \quad (8.2.47)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (8.2.48)$$

Предполагается, что функция $q(x)$ удовлетворяет условию согласования

$$q|_{\partial\Omega} = 0. \quad (8.2.49)$$

В прямой задаче (8.2.46)–(8.2.49) требуется определить $u(x, t)$ в $\Omega \times (0, T)$ по известной функции $q(x)$, заданной в момент времени T .

Обратная задача заключается в определении функции $q(x)$ из соотношений (8.2.46) – (8.2.48) по дополнительной информации

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (8.2.50)$$

Функцию $u \in L_2(\Omega \times (0, T))$ будем называть *обобщенным решением прямой задачи* (8.2.46)–(8.2.48), если для любых $w \in H^{2,1}(\Omega \times (0, T))$,

таких, что

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (8.2.51)$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (8.2.52)$$

имеет место равенство

$$\int_0^T \int_{\Omega} u(w_t - L(x)w) dx dt - \int_{\Omega} q(x)w(x, T) dx = 0. \quad (8.2.53)$$

Если $q \in L_2(\Omega)$, то прямая задача (8.2.46)–(8.2.48) имеет единственное обобщенное решение $u \in L_2(\Omega \times (0, T))$, непрерывно зависящее от начальных данных:

$$\|u\|_{L_2(\Omega \times (0, T))} \leq \sqrt{T} \|q\|_{L_2(\Omega)}, \quad (8.2.54)$$

а для следа $u(0, x) \in L_2(\Omega)$ верна оценка

$$\|u(x, 0)\|_{L_2(\Omega)} < \|q\|_{L_2(\Omega)}. \quad (8.2.55)$$

Аналогичные утверждения и оценки получены для сопряженной задачи. Подробный теоретический анализ прямой и сопряженной задачи, а также доказательство следующей теоремы приведены в книге [8].

Теорема 8.2.1 (оценка условной устойчивости). Для любых функций $q, f \in L_2(\Omega)$ решение $u(x, t) \in L_2(\Omega \times (0, T))$ прямой задачи (8.2.46)–(8.2.48) удовлетворяет неравенству

$$\int_{\Omega} u^2(x, t) dx \leq \|q\|_{L_2(\Omega)}^{2t/T} \|f\|_{L_2(\Omega)}^{2(T-t)/T}. \quad (8.2.56)$$

Введем оператор

$$A : q(x) \mapsto u(x, 0),$$

где $u(x, t)$ — решение прямой задачи (8.2.46)–(8.2.49).

Обратная задача (8.2.46)–(8.2.50) имеет операторный вид

$$Aq = f.$$

Задачу будем решать, минимизируя функционал $J(q) = \|Aq - f\|_{L_2(\Omega)}^2$ методом наискорейшего спуска. Оценка скорости сходимости метода дана в следующей теореме.

Теорема 8.2.2. Пусть для $f \in L_2(\Omega)$ существует решение $q_T \in L_2(\Omega)$ задачи $Aq = f$, начальное приближение удовлетворяет условию $\|q_0 - q_T\| \leq C$. Тогда последовательность решений $\{u_n\}$ прямых задач для соответствующих итераций q_n сходится к точному решению $u \in L_2(\Omega)$ задачи (8.2.40)–(8.2.42) и верна оценка

$$\|u_n - u\|_{L_2(\Omega \times [0, T_0])}^2 \leq \frac{C^2 T}{n^{1-T_0/T}}, \quad T_0 \in (0, T). \quad (8.2.57)$$

Доказательство. Из теоремы 8.2.1 и теоремы о сходимости по функционалу следует неравенство

$$\int_{\Omega} (u_n - u)^2(x, t) dx \leq C^{2t/T} \left(\frac{C^2}{n}\right)^{(T-t)/T} = \frac{C^2}{n^{1-t/T}}, \quad t \in [0, T].$$

Проинтегрировав его по t от 0 до T_0 , получим

$$\|u_n - u\|_{L_2(\Omega \times [0, T_0])}^2 \leq \frac{C^2 T n^{T_0/T} - 1}{n \ln n} \leq \frac{C^2 T}{n^{1-T_0/T}},$$

что и требовалось доказать. \square

8.3. Граничные обратные задачи и задачи продолжения

Предположим, что мы наблюдаем процесс распространения тепла в некоторой среде (диффузионный процесс). При этом на одной части границы изучаемой области проводятся измерения потока тепла (вещества) и температуры (концентрации вещества), а на другой — непосредственные измерения невозможны или затруднены. Требуется определить температуру (или концентрацию вещества) внутри области вплоть до границы недоступности. Задачи такого типа встречаются в геофизике [8.3], теории ядерных реакторов, аэроавиатике [8.1, 8.5] и т. д.

Рассмотрим математическую модель этого физического процесса в двумерном случае.

Предположим, что $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in (0, 1), y \in (0, 1)\}$ — изучаемая область. Процесс распространения тепла в области Ω в течение времени $t \in [0, T]$, $T \in \mathbb{R}^+$, описывается с помощью начально-краевой задачи для параболического уравнения:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (8.3.1)$$

$$u(0, y, t) = f(y, t), \quad y \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (8.3.2)$$

$$u_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (8.3.3)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (8.3.4)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (8.3.5)$$

Здесь функция $u(x, y, t)$ описывает температуру среды в точке $(x, y) \in \Omega$ в момент времени $t \in [0, T]$. Требуется найти $u(x, y, t)$ в $\Omega \times (0, T)$ по измерениям температуры $f(y, t)$ на части границы области Ω .

Заменим условие (8.3.3) в задаче (8.3.1)–(8.3.5) условием

$$u(1, y, t) = q(y, t), \quad y \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (8.3.6)$$

где $q(y, t)$ — заданная функция. Назовем задачу определения функции $u(x, y, t)$ из соотношений (8.3.1), (8.3.3)–(8.3.6) прямой задачей. Тогда задача (8.3.1)–(8.3.5) является обратной к задаче (8.3.1), (8.3.3)–(8.3.6), поскольку сводится к нахождению функции $q(y, t)$ из соотноше-

ний (8.3.1), (8.3.3)–(8.3.6) по дополнительной информации о решении прямой задачи

$$u(0, y, t) = f(y, t), \quad y \in (0, 1), \quad t \in (0, T).$$

Как и прежде, введем в рассмотрение оператор

$$Aq : q(y, t) = u(1, y, t) \mapsto f(y, t) = u(0, y, t),$$

где $u(x, y, t)$ — решение прямой задачи (8.3.1), (8.3.3)–(8.3.6), и запишем обратную задачу (8.3.1)–(8.3.6) в операторном виде $Aq = f$. Можно доказать [8], что оператор A действует из пространства $L_2((0, 1) \times (0, T))$ в $L_2((0, 1) \times (0, T))$ и ограничен по норме: $\|A\| \leq 1$. Следовательно, задачу (8.3.1)–(8.3.6) можно решать градиентным методом (см. главу 2) и, в частности, методом наискорейшего спуска.

8.4. Внутренние задачи и задачи об источнике

В данном разделе мы приведем несколько постановок линейных некорректных обратных задач для параболических уравнений, к численному решению которых можно применить градиентные методы.

Определение начального условия по дополнительному измерению в точке. Рассмотрим краевую задачу

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (8.4.1)$$

$$u(x, 0) = q(x), \quad x \in (0, 1), \quad (8.4.2)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (8.4.3)$$

где $q(x)$ — заданная функция, $u(x, t)$ — искомая функция. Эта задача является корректной.

Предположим теперь, что функция $q(x)$ неизвестна, а о решении задачи (8.4.1)–(8.4.3) известна дополнительная информация

$$u(x_0, t) = f(t), \quad x_0 \in [0, 1], \quad t \in (t_0, t_1), \quad 0 < t_0 < t_1 < T. \quad (8.4.4)$$

Задача восстановления функции $q(x)$ по функции $f(t)$ из соотношений (8.4.1)–(8.4.4) является обратной задачей по отношению к задаче (8.4.1)–(8.4.3).

Решение прямой задачи представимо в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k e^{-\pi^2 k^2 t} \sqrt{2} \cos(\pi k x),$$

$$q_k = \sqrt{2} \int_0^1 q(\xi) \cos(\pi k \xi) d\xi, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Подставляя представление $u(x, t)$ в виде ряда Фурье в (8.4.4), получаем интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно $q(x)$:

$$f(t) = \int_0^1 K(t, x_0, \xi) q(\xi) d\xi, \quad x_0 \in [0, 1], \quad t \in (t_0, t_1), \quad (8.4.5)$$

где

$$K(t, x_0, \xi) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\pi k \xi) e^{-\pi^2 k^2 t} \cos(\pi k x_0). \quad (8.4.6)$$

Теорема 8.4.1. Если $x_0 = 0$, то решение уравнения (8.4.5) единственно в пространстве $L_2(0, 1)$.

Доказательство. В силу линейности уравнения (8.4.5) достаточно доказать, что однородное уравнение $Aq = 0$ имеет только нулевое решение [5].

Подставив $f = 0$, $x_0 = 0$ в (8.4.5), получим

$$\int_0^1 q(\xi) d\xi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2 t} \int_0^1 q(\xi) \cos(\pi k \xi) d\xi = 0, \quad t \in (t_0, t_1). \quad (8.4.7)$$

Пусть $\alpha \in (0, t_0)$. Тогда в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \alpha$ функция

$$\Phi(z) = \int_0^1 q(\xi) d\xi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2 z} \int_0^1 q(\xi) \cos(\pi k \xi) d\xi \quad (8.4.8)$$

является аналитической в силу теоремы Вейерштрасса и оценки

$$|e^{-\pi^2 k^2 z}| \leq e^{-\pi^2 k^2 \alpha}, \quad \operatorname{Re} z \geq \alpha.$$

Равенство (8.4.7) означает, что аналитическая функция $\Phi(z)$ обращается в ноль на отрезке действительной оси (t_0, t_1) , лежащем в области аналитичности $\Phi(z)$. Следовательно, по теореме единственности для аналитических функций $\Phi(z) = 0$ при всех z , таких, что $\operatorname{Re} z \geq \alpha$. Переходя в (8.4.7) к пределу при $t \rightarrow +\infty$, получаем $\int_0^1 q(\xi) d\xi = 0$.

Следовательно,

$$e^{-\pi^2 t} \int_0^1 q(\xi) \cos(\pi \xi) d\xi + \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2 t} \int_0^1 q(\xi) \cos(\pi k \xi) d\xi = 0.$$

Умножим последнее равенство на $e^{\pi^2 t}$ и снова перейдем к пределу при $t \rightarrow \infty$. Получим

$$\int_0^1 q(\xi) \cos(\pi \xi) d\xi = 0.$$

Действуя аналогично, приходим к системе равенств

$$\int_0^1 q(\xi) \cos(\pi k \xi) d\xi = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.4.9)$$

В силу полноты системы функций $\{\cos(\pi k x)\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ в пространстве $L_2(0, 1)$, из (8.4.9) следует $q(x) \equiv 0$. \square

Упражнение 8.4.1. Исследуйте случай, когда $x_0 \neq 0$.

Определение краевого условия. В качестве прямой задачи рассмотрим задачу нахождения функции $u(x, t)$, $x \in (0, 1)$, $t \in [0, T]$ из соотношений

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (8.4.10)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (8.4.11)$$

$$u(0, t) = q(t), \quad t \in (0, T], \quad (8.4.12)$$

$$u_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (8.4.13)$$

где $q(t)$ — некоторая заданная функция. В обратной задаче $q(t)$ является искомой функцией, а о решении прямой задачи (8.4.10)–(8.4.13) известна дополнительная информация

$$u(1, t) = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (8.4.14)$$

Теорема единственности решения этой обратной задачи доказана в [11.5].

Теорема 8.4.2. *Предположим, что функция $u(x, t) \in C^{2,1}([0, 1] \times [0, T])$ удовлетворяет уравнению (8.4.10) в $[0, 1] \times [0, T]$. Пусть $u(1, t) = 0$ и $u_x(1, t) = 0$ при $t \in [0, T]$. Тогда $u(x, t) \equiv 0$ в $[0, 1] \times [0, T]$.*

Заметим, что в теореме 8.4.2 не требуется задание начального условия. Теорема единственности остается справедливой, если измерение дополнительной информации (8.4.14) проведено во внутренней точке отрезка: $u(x_0, t) = f(t)$, $x_0 \in (0, 1)$ [5].

Задачу определения функции $u(x, t)$, $x \in (0, l)$, $t \in (0, T]$ по известным функциям $q_1(x)$, $q_2(x)$ из соотношений

$$u_t = u_{xx} + q_1(x)q_2(t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \quad (8.4.15)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (8.4.16)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (8.4.17)$$

будем называть прямой задачей.

Предположим, что $q_1(x)$ известна и функция $u(x, t)$ измерена в некоторой фиксированной точке $x_0 \in [0, l]$:

$$u(x_0, t) = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (8.4.18)$$

Задача определения функции $q_2(t)$ по заданным x_0 , $q_1(x)$, $f(t)$ из соотношений (8.4.15)–(8.4.18) является обратной к задаче (8.4.15)–(8.4.17).

Решение прямой задачи можно найти методом разделения переменных:

$$u(x, t) = q_{10} \int_0^t q_2(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} q_{1k} \sqrt{2} \cos(\pi k x) \int_0^t q_2(\tau) e^{-\pi^2 k^2 (t-\tau)} d\tau, \quad (8.4.19)$$

$$q_{1k} = \sqrt{2} \int_0^l q_1(\xi) \cos(\pi k \xi) d\xi, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8.4.20)$$

$$q_{10} = \int_0^l q_1(\xi) d\xi.$$

При $x = x_0$ равенство (8.4.18) примет вид

$$q_{10} \int_0^t q_2(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} q_{1k} \int_0^t q_2(\tau) e^{-\pi^2 k^2 (t-\tau)} d\tau \cdot \sqrt{2} \cos(\pi k x_0) = f(t),$$

$$t \in [0, T].$$

Предположим, что $q_1 \in C^2[0, 1]$, $q_2 \in C[0, 1]$. Поменяв местами порядок интегрирования и суммирования, получим для q_2 интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t K(t, \tau) q_2(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (8.4.21)$$

с ядром

$$K(t, \tau) = q_{10} + \sum_{k=1}^{\infty} q_{1k} e^{-\pi^2 k^2 (t-\tau)} \sqrt{2} \cos(\pi k x_0).$$

Имеет место следующая теореме [5].

Теорема 8.4.3. Пусть данные обратной задачи (8.4.15)–(8.4.18) удовлетворяют условиям

- 1) $q_1(x) \in C^4[0, 1]$, $q_1'(0) = q_1'(1) = 0$, $q_1(x_0) \neq 0$;
- 2) $f(t) \in C^4[0, T]$, $f(0) = 0$.

Тогда решение $q_2(t)$ уравнения (8.4.21) существует и единственно в $C[0, T]$.

Доказательство. Поскольку $q_1 \in C^4[0, T]$, найдется постоянная $c > 0$, такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|q_{1k}| < Ck^{-4}$. Следовательно, ядро $K(t, \tau)$ уравнения (8.4.21) непрерывно и имеет непрерывную частную производную $K_t(t, \tau)$ при $0 \leq \tau \leq t \leq T$. Дифференцируем (8.4.21) по t :

$$K(t, t) q_2(t) + \int_0^t K_t(t, \tau) q_2(\tau) d\tau = f'(t), \quad t \in [0, T]. \quad (8.4.22)$$

Заметим, что $K(t, t) = q_1(x_0) \neq 0$. Следовательно, уравнение Вольтерра второго рода (8.4.22) с непрерывным ядром $K_t(t, \tau)$ и непрерывной правой частью $f'(t)$ имеет единственное решение $q_2(t)$ из $C[0, T]$, которое является и решением уравнения (8.4.21). \square

Отметим, что если $q_1(x_0) = 0$, то решение обратной задачи (8.4.15)–(8.4.18) может быть неединственным. Доказать это можно, выбирая $x_0 = 1/2$, а функцию $q_1(x)$ так, чтобы при всех $x \in [0, 1]$ $q_1(x) = -q_1(1/2 - x)$.

Упражнение 8.4.2. Исследуйте прямую задачу (8.4.15)–(8.4.17) в случае $q_2(t) \equiv 1$.

Контрольные вопросы

1. Сравните полученные результаты с аналогичными результатами главы 7.
2. Попробуйте оценить степень некорректности задач данной главы, а там, где это возможно, вычислить сингулярные числа.

Дополнительная литература

- 8.1. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. (мл.). Некорректные обратные задачи теплопроводности. Москва: Мир, 1989.
- 8.2. Крейн С. Г. О классах корректности для некоторых граничных задач // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 6. С. 1162–1165.
- 8.3. Ballani L., Greiner-Mai H., Stromeyer D. Determining the magnetic field in the core-mantle boundary zone by non-harmonic downward continuation // Geophys. J. Intern. 2002. V. 149. P. 347–389.
- 8.4. Danilaev P. G. Coefficient inverse problems for parabolic type equations and their application. VSP, The Netherlands, 2001.
- 8.5. Griedt W. H. The determination of transient temperatures and heat transfer of a gas-metal interface applied to a 40-mm gun barrel // Jet Propulsion. 1995. V. 25. P. 158–162.
- 8.6. Hào D. N. Methods for inverse heat conduction problems. Universität-Gesamthochschule Siegen, 1995.
- 8.7. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. VSP, The Netherlands, 1999.
- 8.8. Púcci C. On the improperly posed Cauchy problems for parabolic equations // Sympos. Numeric. Treatment Partial Different. Equations with Real Characteristics. 1959. P. 140–144.

Глава 9.

Линейные задачи для эллиптических уравнений

Задача Коши для уравнения Лапласа стала первой, на некорректность которой обратили внимание математики [2.43]. Но эта задача оказалась настолько важной для практики, что ее исследования не прекращались на протяжении всего XX века. За теоремами единственности и условной устойчивости и первыми алгоритмами построения приближенного решения [9.9, 9.2, 9.3, 9, 9.16, 9.5, 11.5, 9.7, 9.8] последовало огромное количество публикаций, посвященных численному решению этой задачи и ее различным обобщениям и модификациям. К таким относятся ранние публикации [9.10, 9.6], а также более поздние работы [2.15, 9.15, 9.12, 9.11, 9.13, 9.14], разрабатывающие итерационные методы для минимизации соответствующего функционала невязки.

В данной главе мы на простейшем примере продемонстрируем методику доказательства теорем единственности и условной устойчивости (раздел 9.1). Далее сведем начально-краевую задачу для уравнения Лапласа к некоторой обратной задаче и затем к операторному уравнению $Aq = f$ (раздел 9.2). Исследуя свойства оператора A и сопряженного к нему оператора A^* , мы, в частности, покажем их ограниченность (раздел 9.3). Как следует из результатов главы 2, оценки условной устойчивости и ограниченности линейного оператора A достаточно не только для обоснования сходимости, но и для оценки скорости сходимости градиентных методов минимизации целевого функционала $A(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$. Далее мы перенесем все полученные результаты на многомерный случай эллиптического уравнения с дивергентной

главной частью (раздел 9.4), завершая изложение оценками скорости сходимости по функционалу и скорости сильной сходимости метода наилучшего спуска.

Разумеется, существует еще множество других постановок линейных обратных и некорректных задач для эллиптических уравнений, например, задача определения правой части уравнений Пуассона $\Delta u = q$. Но исследование единственности и условной устойчивости решения в интересных для практики случаях гораздо более сложно.

9.1. Теорема единственности и оценка условной устойчивости на плоскости

В области $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1), y \in (0, 1)\}$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (9.1.1)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in (0, 1), \quad (9.1.2)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (9.1.3)$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (9.1.4)$$

К этой задаче сводятся двумерные задачи Коши для уравнения Лапласа, которые имеют широкое практическое применение, например, в задаче определения потенциала электростатического поля внутри Земли.

Рассматриваемая задача некорректна по Адамару. Решение задачи единственно (см. теорему 9.1.1), но неустойчиво. В самом деле, для

$$f(y) = \frac{1}{n} \sin(ny)$$

решение задачи (9.1.1)–(9.1.4) выражается формулой

$$u(x, y) = \frac{1}{n} \sin(ny) \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2}.$$

Следовательно, функция $f(y)$ с ростом n может стать сколь угодно малой, а решение $u(x, y)$ неограниченно растет при $n \rightarrow \infty$.

Упражнение 9.1.1. Используя полученные частные решения, определите функциональные пространства, в которых задача (9.1.1)–(9.1.4) некорректна.

Теорема 9.1.1 (о единственности решения). Решение задачи (9.1.1)–(9.1.4) единственно в классе функций $u \in C^4(\bar{\Omega})$, представимых в виде ряда Фурье

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \sin\left(\frac{ky}{\pi}\right) \quad (9.1.5)$$

с коэффициентами Фурье $u_k \in C^4[0, 1]$.

Доказательство. Если $u \in C^4(\bar{\Omega})$, то $f(y) \in C^4[0, 1]$. Подставив (9.1.5) в (9.1.1)–(9.1.4), получим

$$u_k'' - k^2 u_k = 0, \quad (9.1.6)$$

$$u_k(0) = f_k, \quad (9.1.7)$$

$$u_k'(0) = 0, \quad (9.1.8)$$

где f_k — коэффициенты Фурье функции $f(y)$.

Проинтегрируем (9.1.6) дважды от 0 до x :

$$u_k(x) = f_k + k^2 \int_0^x \int_0^\xi u_k(\zeta) d\zeta d\xi. \quad (9.1.9)$$

Введем, как и в главе 4, вспомогательную норму

$$\|u_k\|_{k,m} := \sup_{x \in [0,1]} \{ |u_k(x)| e^{-kmx} \}, \quad m \in \mathbb{R}^+,$$

и заметим, что для любого $m > 0$

$$\sup_{x \in [0,1]} |u_k(x)| = \|u_k\|_{C[0,1]} \leq \|u_k\|_{k,m} e^{km}. \quad (9.1.10)$$

Используя (9.1.9), оценим $|u_k(x)|$ для любого $x \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} |u_k(x)| &\leq |f_k| + k^2 \int_0^x \int_0^\xi |u_k(\zeta)| e^{-\zeta km} e^{\zeta km} d\zeta d\xi \\ &\leq |f_k| + k^2 \|u_k\|_{k,m} \int_0^x \int_0^\xi e^{\zeta km} d\zeta d\xi \\ &\leq |f_k| + k^2 \|u_k\|_{k,m} \int_0^x \frac{e^{\xi km} - 1}{km} d\xi \\ &\leq |f_k| + k^2 \|u_k\|_{k,m} \frac{e^{xkm} - 1}{k^2 m^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, для любого $x \in (0, 1)$

$$|u_k(x)| \leq |f_k| + \|u_k\|_{k,m} \frac{e^{xkm}}{m^2}. \quad (9.1.11)$$

Умножив (9.1.11) на e^{-xkm} , получим

$$\begin{aligned} |u_k| e^{-xkm} &\leq |f_k| e^{-xkm} + \frac{\|u_k\|_{k,m}}{m^2}, \\ \|u_k\|_{k,m} &\leq |f_k| + \frac{\|u_k\|_{k,m}}{m^2}. \end{aligned}$$

Тогда для любого $m > 1$ справедливо неравенство

$$\|u_k\|_{k,m} \leq \frac{m^2}{m^2 - 1} |f_k|. \quad (9.1.12)$$

Комбинируя (9.1.10) с (9.1.12), получаем

$$\|u_k\|_{C[0,1]} \leq \frac{m^2}{m^2 - 1} |f_k| e^{km}, \quad (9.1.13)$$

откуда и следует единственность решения задачи (9.1.1)–(9.1.4). \square

Теорема 9.1.2 (об условной устойчивости). Пусть для $f \in C^2(0, 1)$ существует решение $u \in C^2(\bar{\Omega})$ задачи (9.1.1)–(9.1.4). Тогда верна следующая оценка условной устойчивости:

$$\int_0^1 u^2(x, y) dy \leq \left(\int_0^1 f^2(y) dy \right)^{1-x} \left(\int_0^1 u^2(1, y) dy \right)^x. \quad (9.1.14)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = \int_0^1 u^2(x, y) dy. \quad (9.1.15)$$

Продифференцируем (9.1.15) дважды по x :

$$g'(x) = 2 \int_0^1 u(x, y) u_x(x, y) dy, \quad (9.1.16)$$

$$g''(x) = 2 \int_0^1 u_x^2(x, y) dy + 2 \int_0^1 u(x, y) u_{xx}(x, y) dy. \quad (9.1.17)$$

Преобразуем второе слагаемое в (9.1.17) с учетом (9.1.1):

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x, y) u_{xx}(x, y) dy &= - \int_0^1 u(x, y) u_{yy}(x, y) dy \\ &= -(u u_y)(x, 1) + (u u_y)(x, 0) + \int_0^1 u_y^2(x, y) dy = \int_0^1 u_y^2(x, y) dy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$g''(x) = 2 \int_0^1 u_x^2(x, y) dy + 2 \int_0^1 u_y^2(x, y) dy. \quad (9.1.18)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^1 u_y^2(x, y) dy &= 2 \int_0^1 u_y(x, y) u_{yx}(x, y) dy \\ &= 2(u_y u_x)(1, y) - 2(u_y u_x)(0, y) - 2 \int_0^1 u_x(x, y) u_{yy}^2(x, y) dy \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^1 u_x^2(x, y) dy. \end{aligned} \quad (9.1.19)$$

Проинтегрируем (9.1.19) по x от 0 до $x^0 \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_y^2(x^0, y) dy - \int_0^1 u_y^2(0, y) dy &= \int_0^1 u_x^2(x^0, y) dy - \int_0^1 u_x^2(0, y) dy \\ &= \int_0^1 u_x^2(x^0, y) dy. \end{aligned} \quad (9.1.20)$$

Из краевых условий (9.1.2) следует

$$\int_0^1 u_y^2(0, y) dy = \int_0^1 [f'(y)]^2 dy.$$

Учитывая (9.1.20) и произвольность выбора $x^0 \in (0, 1)$, из (9.1.18) получаем

$$g''(x) = 4 \int_0^1 u_x^2(x, y) dy + 2 \int_0^1 [f'(y)]^2 dy.$$

Введем функцию

$$G(x) = \ln g(x).$$

Дифференцируя $G(x)$ два раза, получим

$$G''(x) = \frac{1}{g^2(x)} [g''(x)g(x) - [g'(x)]^2].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} G''(x) = \frac{1}{g^2(x)} \left\{ \left[4 \int_0^1 u_x^2(x, y) dy + 2 \int_0^1 [f'(y)]^2 dy \right] \int_0^1 u^2(x, y) dy \right. \\ \left. - \left(2 \int_0^1 u(x, y) u_x(x, y) dy \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Докажем, что $G''(x) > 0$, $x \in [0, 1]$. Действительно, в силу неравенства Коши — Буняковского,

$$\left(\int_0^1 u(x, y) u_x(x, y) dy \right)^2 \leq \int_0^1 u^2(x, y) dy \int_0^1 u_x^2(x, y) dy.$$

Поэтому

$$G''(x) \geq \frac{2}{g^2(x)} \int_0^1 u^2(x, y) dy \int_0^1 |f'(y)|^2 dy > 0.$$

Это означает, что функция $G(x)$ выпукла на $[0, 1]$. Тогда для $x \in (0, 1)$ имеем

$$G(x) \leq (1-x)G(0) + xG(1),$$

и после потенцирования приходим к неравенству

$$g(x) \leq [g(0)]^{1-x} [g(1)]^x, \quad x \in (0, 1),$$

т. е.

$$\int_0^1 u^2(x, y) dy \leq \left(\int_0^1 f^2(y) dy \right)^{1-x} \left(\int_0^1 u^2(1, y) dy \right)^x, \quad x \in (0, 1),$$

что и требовалось доказать. \square

Упражнение 9.1.2. Проанализируйте доказательство теоремы 9.1.2 и покажите, что требования на гладкость функций $u(x, y)$ и $f(y)$ можно ослабить.

9.2. Сведение начально-краевой задачи для уравнения Лапласа к обратной задаче и к операторному уравнению $Aq = f$

Рассмотрим начально-краевую задачу (9.1.1)–(9.1.4). Как будет показано в разделе 9.3, если условие (9.1.3) заменить условием

$$u(1, y) = q(y), \quad y \in (0, 1),$$

где $q(y) \in L_2(0, 1)$ — заданная функция, то задача станет корректной. Это означает, что задача (9.1.1)–(9.1.4) определения функции $u(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, сводится к задаче нахождения функции $q(y) = u(1, y)$, $y \in (0, 1)$.

Таким образом, начально-краевую задачу (9.1.1)–(9.1.4) можно трактовать как обратную к задаче

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (9.2.1)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (9.2.2)$$

$$u(1, y) = q(y), \quad y \in (0, 1), \quad (9.2.3)$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (9.2.4)$$

где $q(x)$ — заданная функция [9.15].

Действительно, по дополнительной информации

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in (0, 1), \quad (9.2.5)$$

о решении прямой задачи (9.2.1)–(9.2.4) требуется восстановить неизвестную функцию $q(y)$, $y \in (0, 1)$.

Из теоремы 9.1.1 следует, что обратная задача (9.2.1)–(9.2.5) не может иметь более одного решения.

Рассмотрим оператор

$$A: q(y) := u(1, y) \mapsto f(y) := u(0, y),$$

где $u(x, y)$ — решение задачи (9.2.1)–(9.2.4).

Тогда обратную задачу (9.2.1)–(9.2.5) можно записать в виде операторного уравнения

$$Aq = f. \quad (9.2.6)$$

Далее будет показано, что оператор A действует из $L_2(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$ и ограничен по норме.

9.3. Исследование оператора A для уравнения Лапласа

В данном разделе используется не совсем обычное определение обобщенного решения прямой задачи (9.2.1)–(9.2.4) из пространства L_2 (обычно обобщенное решение уравнения Лапласа определяют в соболевском пространстве H^1). Однако, приводимое ниже определение более удобно для исследования градиентных методов решения соответствующей обратной задачи.

Определение 9.3.1. Функцию $u \in L_2(\Omega)$ будем называть *обобщенным* (или *слабым*) *решением прямой задачи* (9.2.1)–(9.2.4), если для любых $w \in H^2(\Omega)$, таких, что

$$w_x(0, y) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (9.3.1)$$

$$w(1, y) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (9.3.2)$$

$$w(x, 0) = w(x, 1) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (9.3.3)$$

имеет место равенство

$$\int_{\Omega} u \Delta w \, dx \, dy - \int_0^1 q(y) w_x(1, y) \, dy = 0. \quad (9.3.4)$$

Функцию $w \in H^2(\Omega)$, удовлетворяющую (9.3.1)–(9.3.3) будем называть *тест-функцией*.

Нетрудно убедиться, что если $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, то обобщенное решение задачи (9.2.1)–(9.2.4) будет и классическим.

Теорема 9.3.1 (о корректности прямой задачи). Если $q \in L_2(0, 1)$, то обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$ задачи (9.2.1)–(9.2.4) существует, единственно и верна оценка

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \sqrt{2} \|q\|_{L_2(0,1)}^2. \quad (9.3.5)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\bar{q} \in C_0^\infty(0, 1)$. Здесь $C_0^\infty(0, 1)$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций с носителем, принадлежащим интервалу $(0, 1)$. Тогда для каждой такой функции задача (9.2.1)–(9.2.4) имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение, которое далее будем обозначать через \bar{u} [9.4].

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta w = \bar{u}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (9.3.6)$$

$$w_x(0, y) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (9.3.7)$$

$$w(1, y) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (9.3.8)$$

$$w(x, 0) = w(x, 1) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (9.3.9)$$

Проинтегрируем тождество

$$w\bar{u} = w\Delta w = (ww_x)_x - w_x^2 + (ww_y)_y - w_y^2$$

по области Ω :

$$\int_{\Omega} w\bar{u} \, dx \, dy = - \int_{\Omega} [w_x^2 + w_y^2] \, dx \, dy.$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} [w_x^2 + w_y^2] \, dx \, dy \leq \|w\|_{L_2(\Omega)} \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}. \quad (9.3.10)$$

Из равенств

$$0 = w(1, y) = w(x, y) + \int_x^1 w_{\xi}(\xi, y) \, d\xi,$$

$$w(x, y) = w(x, 0) + \int_0^y w_{\eta}(x, \eta) \, d\eta = \int_0^y w_{\eta}(x, \eta) \, d\eta$$

вытекает

$$2w(x, y) = \int_0^y w_{\eta}(x, \eta) \, d\eta - \int_x^1 w_{\xi}(\xi, y) \, d\xi.$$

Следовательно,

$$|w(x, y)| \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 |w_{\eta}(x, \eta)| \, d\eta + \int_0^1 |w_{\xi}(\xi, y)| \, d\xi \right).$$

В силу неравенства Коши — Буняковского

$$\int_0^1 |w_{\eta}(x, \eta)| \, d\eta \leq \left(\int_0^1 w_{\eta}^2(x, \eta) \, d\eta \right)^{1/2}.$$

Поскольку $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, приходим к неравенству

$$|w(x, y)|^2 \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 w_{\eta}^2(x, \eta) \, d\eta + \int_0^1 w_{\xi}^2(\xi, y) \, d\xi \right).$$

Проинтегрировав полученное неравенство по Ω , получим

$$\|w\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (w_x^2 + w_y^2) \, dx \, dy. \quad (9.3.11)$$

Сопоставляя (9.3.11) с (9.3.10), получаем

$$\|w\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\int_{\Omega} (w_x^2 + w_y^2) \, dx \, dy \leq \frac{1}{2} \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (9.3.12)$$

Теперь проинтегрируем по Ω выражение $w_x \bar{u} = w_x(w_{xx} + w_{yy})$, используя граничные условия (9.3.7)–(9.3.9):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_x(w_{xx} + w_{yy}) dx dy \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (w_x^2)_x + (w_x w_y)_y - w_{xy} w_y \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 w_x^2(1, y) dy - \frac{1}{2} \int_0^1 w_x^2(0, y) dy + \int_0^1 (w_x w_y)(x, 1) dx \\ &\quad - \int_0^1 (w_x w_y)(x, 0) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (w_y^2)_x dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 w_x^2(1, y) dy - \frac{1}{2} \int_0^1 w_y^2(1, y) dy + \frac{1}{2} \int_0^1 w_y^2(0, y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 w_x^2(1, y) dy + \frac{1}{2} \int_0^1 w_y^2(0, y) dy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^1 w_x^2(1, y) dy \leq 2 \int_{\Omega} |w_x \bar{u}| dx dy \leq 2 \|w_x\|_{L_2(\Omega)} \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из (9.3.12) вытекает неравенство

$$\|w_x\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 w_x^2(1, y) dy \leq \sqrt{2} \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (9.3.13)$$

Возьмем решение $w(x, y)$ вспомогательной задачи (9.3.6)–(9.3.9) в качестве тест-функции (см. определение 9.3.1) и подставим его в (9.3.4). Заменяя q , u на \bar{q} , \bar{u} в (9.3.4) и учитывая (9.3.13), получаем

$$\|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \left(\int_0^1 w_x^2(1, y) dy \right)^{1/2} \|\bar{q}\|_{L_2(0,1)} \leq \sqrt[4]{2} \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)} \|\bar{q}\|_{L_2(0,1)}.$$

Таким образом, приблизив функцию $q \in L_2(0, 1)$ последовательностью функций $\bar{q}_j \in C_0^\infty(0, 1)$, мы получим последовательность решений $\bar{u}_j \in C_0^\infty(\Omega)$, которая будет стремиться к решению $u \in L_2(\Omega)$ в силу непрерывности скалярного произведения и будет верна оценка (9.3.5). Теорема доказана. \square

Теорема 9.3.2. Если $q \in L_2(0, 1)$, то решение прямой задачи (9.2.1)–(9.2.4) имеет след $u(0, y) \in L_2(0, 1)$ и верна оценка

$$\|u(0, y)\|_{L_2(0,1)} < \|q\|_{L_2(0,1)}. \quad (9.3.14)$$

Доказательство. Как и в теореме 9.3.1, рассмотрим произвольное $\bar{q} \in C_0^\infty(0, 1)$ и заметим, что при $q = \bar{q}$ существует единственное бесконечно дифференцируемое решение задачи (9.2.1)–(9.2.4), которое далее будем обозначать через \bar{u} . Тождество

$$0 = \bar{u}\Delta\bar{u} = (\bar{u}_x\bar{u})_x - \bar{u}_x^2 + (\bar{u}_y\bar{u})_y - \bar{u}_y^2$$

проинтегрируем по ξ от 0 до x и по y от 0 до 1. В результате мы получим

$$0 = \frac{1}{2} \int_0^1 (\bar{u}^2)_x(x, y) dy - \int_0^1 \int_0^x (\bar{u}_x^2 + \bar{u}_y^2) d\xi dy,$$

откуда

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (\bar{u}^2)_x(x, y) dy > 0.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по x от 0 до 1:

$$\int_0^1 \bar{u}^2(1, y) dy > \int_0^1 \bar{u}^2(0, y) dy,$$

т. е.

$$\|\bar{u}(0, y)\|_{L_2(0,1)}^2 < \|\bar{q}\|_{L_2(0,1)}^2.$$

Приближая $q(x) \in L_2(0, 1)$ последовательностью функций $\tilde{q}_j \in C_0^\infty(0, 1)$, можно показать, что соответствующая последовательность $\tilde{u}_n(0, y)$ имеет предел, для которого справедлива оценка (9.3.14). Теорема доказана. \square

Из теоремы 9.3.2 следует, что оператор A (см. раздел 9.2) действует из $L_2(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$ и его норма не превышает единицы: $\|A\| \leq 1$. Отметим, что эти свойства оператора A позволяют получить оценку скорости сходимости метода простых итераций (см. раздел 2.7).

Рассмотрим задачу, сопряженную к прямой задаче (9.2.1)–(9.2.4):

$$\Delta\psi = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (9.3.15)$$

$$\psi_x(0, y) = \mu(y), \quad y \in (0, 1), \quad (9.3.16)$$

$$\psi(1, y) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (9.3.17)$$

$$\psi(x, 0) = \psi(x, 1) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (9.3.18)$$

Определение 9.3.2. Функцию $\psi \in L_2(\Omega)$ будем называть *обобщенным решением сопряженной задачи* (9.3.15)–(9.3.18), если для любых $v \in H^2(\Omega)$, таких, что

$$v_x(0, y) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (9.3.19)$$

$$v(1, y) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (9.3.20)$$

$$v(x, 0) = v(x, 1) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (9.3.21)$$

имеет место равенство

$$\int_{\Omega} \psi \Delta v dx dy - \int_0^1 \mu(y)v(0, y) dy = 0. \quad (9.3.22)$$

Если $\psi \in C^2(\Omega)$, то обобщенное решение (9.3.15)–(9.3.18) будет и классическим.

Теорема 9.3.3 (о корректности сопряженной задачи). Если $\mu \in L_2(0, 1)$, то задача (9.3.15)–(9.3.18) имеет единственное обобщенное решение $\psi \in L_2(\Omega)$ и верна оценка

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\mu\|_{L_2(0,1)}. \quad (9.3.23)$$

Теорема 9.3.4. Если $\mu \in L_2(0, 1)$, то производная решения сопряженной задачи имеет след $\psi_x(1, y) \in L_2(0, 1)$ и верна оценка

$$\|\psi_x(1, y)\|_{L_2(0,1)} < \|\mu\|_{L_2(0,1)}. \quad (9.3.24)$$

Доказательство теорем 9.3.3 и 9.3.4 аналогично доказательству теорем 9.3.1 и 9.3.2, и мы предлагаем читателю самостоятельно убедиться в их справедливости.

9.4. Задача продолжения для уравнения с самосопряженным эллиптическим оператором

Рассмотрим в области $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in (0, l), y \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n\}$ задачу продолжения

$$u_{xx} + L(y)u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (9.4.1)$$

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in \mathcal{D}, \quad (9.4.2)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \quad (9.4.3)$$

$$u|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad x \in (0, l), \quad (9.4.4)$$

с условием согласования

$$f|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad x \in (0, l), \quad (9.4.5)$$

где

$$L(y)u = \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(y)D_j u) - c(y)u, \quad D_i u = \frac{\partial u}{\partial y_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.4.6)$$

Будем предполагать, что \mathcal{D} — связная ограниченная область с липшицевой границей, а оператор $L(y)$ обладает следующими свойствами:

$$C_1 \sum_{j=1}^n \nu_j^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y) \nu_i \nu_j \quad \text{для любых } \nu_i \in \mathbb{R}, \quad (9.4.7)$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$0 \leq c(y) \leq C_2, \quad (9.4.8)$$

$$a_{ij} \in C^1(\bar{\mathcal{D}}), \quad c \in C(\bar{\mathcal{D}}). \quad (9.4.9)$$

Здесь $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ — некоторые константы.

Задача (9.4.1)–(9.4.4) некорректна. Пример Адамара в случае, когда $\mathcal{D} = (0, 1)$, $c(y) \equiv 0$, $\{a_{ij}\}$ — единичная матрица, уже был рассмотрен в разделе 9.1.

Рассмотрим некорректную задачу (9.4.1)–(9.4.4) как обратную к прямой задаче

$$u_{xx} + L(y)u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (9.4.10)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \quad (9.4.11)$$

$$u(l, y) = q(y), \quad y \in \mathcal{D}, \quad (9.4.12)$$

$$u|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad x \in (0, l), \quad (9.4.13)$$

с условием согласования

$$q|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad x \in (0, l). \quad (9.4.14)$$

В прямой задаче (9.4.10)–(9.4.13) требуется определить $u(x, y)$ в Ω по известной функции $q(y)$, заданной на части границы $x = l$ рассматриваемой области Ω .

Обратная задача заключается в определении функции $q(y)$ из соотношений (9.4.10)–(9.4.13) по дополнительной информации

$$u(0, y) = f(y), \quad y \in \mathcal{D}. \quad (9.4.15)$$

Определение 9.4.1. Функцию $u \in L_2(\Omega)$ будем называть *обобщенным решением прямой задачи* (9.4.10)–(9.4.13), если для любых $w \in H^2(\Omega)$, таких, что

$$w_x(0, y) = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \quad (9.4.16)$$

$$w(l, y) = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \quad (9.4.17)$$

$$w|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad x \in (0, l), \quad (9.4.18)$$

имеет место равенство

$$\int_{\Omega} u(w_{xx} + L(y)w) dx dy - \int_{\mathcal{D}} q(y)w_x(l, y) dy = 0. \quad (9.4.19)$$

Следующие теоремы 9.4.1–9.4.4 являются обобщениями теорем 9.3.1–9.3.4. Их доказательство можно найти в [8].

Теорема 9.4.1 (о корректности прямой задачи). *Предположим, что выполнены условия (9.4.6)–(9.4.9) и \mathcal{D} — связная ограниченная область с липшицевой границей. Если $q \in L_2(\mathcal{D})$, то задача (9.4.10)–(9.4.14) имеет единственное обобщенное решение $u \in L_2(\Omega)$ и верна оценка*

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{2l + 2C_3l^3} \|q\|_{L_2(\mathcal{D})}. \quad (9.4.20)$$

Теорема 9.4.2. *Если $q \in L_2(\mathcal{D})$, то решение прямой задачи (9.4.10)–(9.4.14) имеет след $u(0, y) \in L_2(\mathcal{D})$ и верна оценка*

$$\|u(0, y)\|_{L_2(\mathcal{D})} < \|q\|_{L_2(\mathcal{D})}. \quad (9.4.21)$$

Наряду с прямой задачей (9.4.10)–(9.4.14) рассмотрим сопряженную задачу

$$\psi_{xx} + L(y)\psi = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (9.4.22)$$

$$\psi_x(0, y) = \mu(y), \quad y \in \mathcal{D}, \quad (9.4.23)$$

$$\psi(l, y) = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \quad (9.4.24)$$

$$\psi|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad x \in (0, l), \quad (9.4.25)$$

где по заданной функции $\mu(y)$ требуется найти $\psi(x, y)$.

Определение 9.4.2. Функцию $\psi \in L_2(\Omega)$ будем называть *обобщенным решением сопряженной задачи* (9.4.22)–(9.4.25), если для любых $v \in H^2(\Omega)$, таких, что

$$v_x(0, y) = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \quad (9.4.26)$$

$$v(l, y) = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \quad (9.4.27)$$

$$v|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad x \in (0, l), \quad (9.4.28)$$

имеет место равенство

$$\int_{\Omega} \psi(v_{xx} + L(y)v) dx dy - \int_{\mathcal{D}} \mu(y)v(0, y) dy = 0. \quad (9.4.29)$$

Теорема 9.4.3 (о корректности сопряженной задачи). Если $\mu \in L_2(\mathcal{D})$, то задача (9.4.22)–(9.4.25) имеет единственное обобщенное решение $\psi \in L_2(\Omega)$ и верна оценка

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} \leq l\sqrt{2l} \|\mu\|_{L_2(\mathcal{D})}. \quad (9.4.30)$$

Теорема 9.4.4. Пусть для $\mu \in L_2(\mathcal{D})$ функция $\psi \in L_2(\Omega)$ — обобщенное решение сопряженной задачи (9.4.22)–(9.4.25). Тогда след $\psi_x(l, y)$ существует и верна оценка

$$\|\psi_x(l, y)\|_{L_2(\mathcal{D})} < \|\mu\|_{L_2(\mathcal{D})}. \quad (9.4.31)$$

Теорема 9.4.5 (оценка условной устойчивости задачи продолжения). Пусть $q, f \in L_2(\mathcal{D})$. Тогда, если существует решение $u \in C^2(\bar{\Omega})$ прямой задачи (9.4.10)–(9.4.13), то оно удовлетворяет неравенству

$$\int_{\mathcal{D}} u^2(x, y) dy \leq \|q\|_{L_2(\mathcal{D})}^{2x/l} \|f\|_{L_2(\mathcal{D})}^{2(l-x)/l}. \quad (9.4.32)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 9.1.2.

Метод наискорейшего спуска. Введем оператор

$$A : q(y) \mapsto u(0, y),$$

где $u(x, y)$ — решение прямой задачи (9.4.10)–(9.4.13).

Тогда сопряженный к A оператор имеет вид:

$$A^* : \mu(y) \mapsto \psi_x(l, y), \quad (9.4.33)$$

где $\psi(x, y)$ — решение сопряженной задачи (9.4.22)–(9.4.25).

Из теорем 9.4.2 и 9.4.4 следует, что операторы A и A^* действуют из $L_2(D)$ в $L_2(D)$ и их нормы не превышают единицы: $\|A\| \leq 1$, $\|A^*\| \leq 1$.

Таким образом, обратная задача (9.4.1)–(9.4.4) имеет следующий операторный вид:

$$Aq = f. \quad (9.4.34)$$

Мы будем решать задачу (9.4.34), минимизируя функционал

$$J(q) = \|Aq - f\|_{L_2(D)}^2. \quad (9.4.35)$$

Для этого используем метод наискорейшего спуска:

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J' q_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.4.36)$$

где $J'q$ — градиент функционала $J(q)$, а α_n — параметр спуска:

$$J'q = 2A^*(Aq - f), \quad (9.4.37)$$

$$\alpha_n = \arg \min_{\alpha \geq 0} (q_n - \alpha J' q_n). \quad (9.4.38)$$

Заметим, что из равенства (9.4.37) следует, что

$$J'q = \psi_x(l, y), \quad (9.4.39)$$

где $\psi(x, y)$ — решение сопряженной задачи (9.4.22)–(9.4.25) с $\mu(y) = 2[Aq - f]$.

Для $q, \delta q \in L_2(D)$ верно неравенство

$$|J(q + \delta q) - J(q) - \langle \delta q, J'(q) \rangle| < \|\delta q\|^2. \quad (9.4.40)$$

Для того чтобы определить параметр спуска α_n , заметим, что, ввиду (9.4.37), выражение $J(q_n - \alpha J' q_n)$ есть квадратный трехчлен относительно α . Следовательно, его минимум достигается в точке

$$\alpha_n = \frac{\|J' q_n\|^2}{2\|A(J' q_n)\|^2} = \frac{\|A^*(Aq_n - f)\|^2}{2\|AA^*(Aq_n - f)\|^2}. \quad (9.4.41)$$

Если для $f \in L_2(D)$ существует решение q_T обратной задачи $Aq = f$, то для параметра спуска α_n и итерации q_{n+1} метода наискорейшего спуска, определяемой формулой (9.4.36), выполняются неравенства

$$\frac{1}{2\|A\|^2} \leq \alpha_n \leq \frac{\|q_n - q_T\|^2}{2\|Aq_n - f\|^2}, \quad (9.4.42)$$

$$\|q_{n+1} - q_T\| < \|q_n - q_T\|.$$

Теорема 9.4.6 (о скорости сходимости по функционалу). Пусть для $f \in L_2(\mathcal{D})$ существует решение $q_T \in L_2(\mathcal{D})$ задачи $Aq = f$. Тогда, если начальное приближение удовлетворяет условию $\|q_0 - q_T\| \leq C$, то итерации q_n метода наискорейшего спуска сходятся по функционалу и верна оценка

$$J(q_n) \leq \frac{C^2}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказательство теоремы в более общей постановке приведено в главе 2.

Зная оценку скорости сходимости итераций q_n по функционалу, можно оценить скорость сходимости последовательности $\{u_n\}$ решений прямых задач (9.4.10)–(9.4.14) для соответствующих q_n .

Обозначим $\Omega_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in (0, l_0), y \in \mathcal{D}\}$, $l_0 \in (0, l)$.

Теорема 9.4.7. Пусть для $f \in L_2(\mathcal{D})$ существует решение $q_T \in L_2(\mathcal{D})$ задачи $Aq = f$ и начальное приближение q_0 удовлетворяет условию $\|q_0 - q_T\| \leq C$. Тогда последовательность $\{u_n\}$ решений прямых задач (9.4.10)–(9.4.14) для соответствующих итераций q_n сходится к точному решению $u_T \in L_2(\Omega)$ задачи (9.4.1)–(9.4.5) и верна оценка

$$\|u_n - u_T\|_{L_2(\Omega_0)}^2 \leq lC^2 n^{-(l-l_0)/l}.$$

Доказательство. Из теорем 9.4.5 и 9.4.6 следует неравенство

$$\int_{\mathcal{D}} (u_n - u_T)^2(x, y) dy \leq C^{2x/l} \left(\frac{C^2}{n}\right)^{(l-x)/l} = C^{2n^{x/l-1}}. \quad (9.4.43)$$

Проинтегрировав (9.4.43) по x от 0 до l_0 ($l_0 \in (0, l)$), получим

$$\|u_n - u_T\|_{L_2(\Omega_0)}^2 \leq \frac{lC^2 n^{l_0/l} - 1}{n \ln n} \leq lC^2 n^{-\frac{l-l_0}{l}},$$

что и требовалось доказать. \square

Контрольные вопросы

1. Проанализируйте особенности обобщенного решения, используемого в данной главе.
2. Убедитесь в том, что оператор A^* , определенный формулой (9.4.33), является сопряженным к оператору A .

Дополнительная литература

- 9.1. **Кабанихин С. И., Карчевский А. Л.** Оптимизационный алгоритм решения задачи Коши для эллиптического уравнения // Докл. АН СССР. 1998. Т. 359, № 4. С. 445–447.

- 9.2. **Лаврентьев М. М.** О задаче Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102, № 2. С. 205–206.
- 9.3. **Лаврентьев М. М.** О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.
- 9.4. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Москва: Наука, 1973.
- 9.5. **Мергелян С. Н.** Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107, № 5. С. 644–647.
- 9.6. **Чудов Л. А.** Разностные методы решения задачи Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 4. С. 798–801.
- 9.7. **Aronszajn N.** A unique continuation theorem for solution of elliptic partial differential equations or inequalities of second order // J. Math, pures et appl. 1957. V. 9, N 36. P. 235–249.
- 9.8. **Calderon A. P.** Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 16–36.
- 9.9. **Carleman T.** Les fonctions quasi analytiques. Paris, 1926.
- 9.10. **Douglas J.** A numerical method for analytic continuation. Boundary Problems Different. Equat. Madison: Univ. Wisconsin Press, 1960.
- 9.11. **Eldén L.** Numerical solution of ill-posed Cauchy problems for PDE's // Minicourse on Applied Inverse Problems. 2002. V. 7, N 11. P. 7–81.
- 9.12. **Hào D. N., Lesnic D.** The Cauchy problem for Laplace's equation via the conjugate gradient method // IMA J. Applied Math. 2000. N 65. P. 199–217.
- 9.13. **Johansson T.** An iterative procedure for solving a Cauchy problem for second order elliptic equations // Linköping Studies in Science and Technology. 2003. N 832. P. 47–60.
- 9.14. **Kabanikhin S. I., Bektemesov M. A., Nechaev D. V.** Optimizational method for continuation of solution to two-dimensional elliptic equation // Inverse Problems in Engineering Mechanics. 2003. P. 447–456.
- 9.15. **Kabanikhin S. I., Karchevsky A. L.** Optimizational method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1995. V. 3, N 1. P. 21–46.
- 9.16. **Púcci C.** Sui problema di cauchy non ben posti // Atti Accad. Naz.d. Lincei. 1955. V. 18, N 5. P. 473–477.

Глава 10.

Коэффициентные обратные задачи для гиперболических уравнений

Посмотрев на объем главы 10, читатель может оценить, как много результатов содержится в теории обратных задач для гиперболических уравнений. С физической точки зрения это объясняется тем, что волны, проникая внутрь исследуемого объекта, выносят на поверхность достаточно много информации о его строении и свойствах. Например, даже обычным простукиванием можно иногда обнаружить пустоты в стене. Представьте, насколько труднее было бы сделать это с помощью нагревания (обратная задача теплопроводности) или пытаться просто давить на стену (обратная задача для эллиптического уравнения). С точки зрения математики также понятно, что чем устойчивее оператор прямой задачи, тем, как правило, сложнее его “обращать”. Например, найти вторую производную по приближенно заданной функции сложнее, чем первую. Примерно то же самое происходит и с коэффициентными обратными задачами. Решение прямых задач для параболических и, тем более, эллиптических уравнений чаще всего обладает хорошими свойствами гладкости. Чем лучше эти свойства, тем сложнее, как правило, решать обратные задачи. Решения прямых задач для гиперболических уравнений, наоборот, могут иметь разрывы, сингулярные составляющие сложной структуры и пр. Именно поэтому в обратных задачах для гиперболических уравнений получено много теоретических результатов

и разработано (по сравнению с обратными задачами для параболических и эллиптических уравнений) гораздо больше различных методов их решения.

10.1. Обратные задачи для уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u + F(x, t)$$

Задачи, рассматриваемые в этой главе, делятся на два типа. Одни из них имеют скорее методический характер, и основное их назначение — наиболее наглядно проиллюстрировать метод исследования; другие задачи имеют непосредственные физические приложения. Мы начнем изучение обратных задач для гиперболических уравнений с исследования задачи первого типа, а именно, задачи с распределенными начальными данными для уравнения $u_{tt} = u_{xx} - q(x)u + F(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Многие результаты, полученные для этой задачи, могут быть обобщены на случай нескольких пространственных переменных. Однако, теория обратных задач для уравнения

$$u_{tt} = \Delta u - q(x)u + F$$

не так богата результатами, как в одномерном случае. Дело в том, что некорректность в целом одномерных обратных задач связана с их нелинейностью, что можно преодолеть, используя фундаментальный подход Гельфанда — Левитана — Крейна. В многомерном же случае обратные задачи усложняются некорректностью, связанной с тем, что дополнительная информация часто задается на времениподобной поверхности. А это является серьезной проблемой даже в линейном случае, как мы уже убедились в главе 7. В данном разделе мы используем результаты и методику, изложенную в [13].

10.1.1. Задача с распределенными начальными данными для уравнения $u_{tt} = u_{xx} - q(x)u + F(x, t)$

Обозначим $L_q u = u_{tt} - u_{xx} + q(x)u$ и рассмотрим задачу Коши

$$L_q u = F(x, t), \quad (x, t) \in D = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}; \quad (10.1.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (10.1.2)$$

В *прямой задаче* требуется определить функцию $u(x, t)$ по известным функциям $q(x)$, $F(x, t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Прямая задача является корректной, если подходящим образом подобраны функциональные пространства для данных задачи и пространство решений. В частности, задача (10.1.1), (10.1.2) корректна, если $q, \varphi, \psi \in C(\mathbb{R})$, а $F, u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. При этом функция $u(x, t)$ является, вообще говоря, обобщенным решением задачи (10.1.1), (10.1.2). Ниже будет показано, что более жесткие требования к данным этой задачи, а именно, $q \in C(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $F, F_t \in C(\mathbb{R} \times (0, T])$,

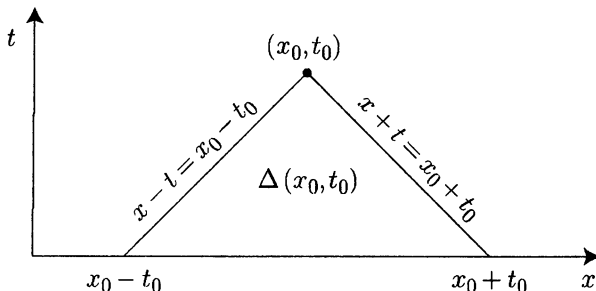


Рис. 1

гарантируют существование в $\mathbb{R} \times (0, T]$ классического решения задачи (10.1.1), (10.1.2), т. е. $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, T])$.

Обратная задача с распределенными начальными данными для уравнения (10.1.1) формулируется следующим образом: найти $q(x) \in C(\mathbb{R})$, если о решении прямой задачи (10.1.1), (10.1.2) известна дополнительная информация

$$u(x_0, t) = f_1(t), \quad u_x(x_0, t) = f_2(t), \quad t \geq 0, \quad (10.1.3)$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ — некоторая фиксированная точка. Другими словами, требуется по известным функциям $F(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ найти функции $q(x)$ и $u(x, t)$, удовлетворяющие (10.1.1)–(10.1.3).

Поскольку функции f_1 и f_2 являются следами функций u , u_x на прямой $x = x_0$, то они не могут быть произвольными, в частности, они должны удовлетворять некоторым условиям гладкости в зависимости от гладкости данных q , φ , ψ , F . Иначе говоря, необходимые условия на f_1 , f_2 вытекают из свойств решений прямой задачи (10.1.1), (10.1.2), к изучению которых мы и перейдем.

Обозначим через $\Delta(x_0, t_0)$ треугольник на полуплоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, ограниченный осью x и характеристиками уравнения (10.1.1), проведенными через точку (x_0, t_0) (см. рис. 1).

Лемма 10.1.1. *Если для каких-либо $t_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ функции q , φ , ψ , F таковы, что $q(x) \in C[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$, $\varphi(x) \in C^2[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$, $\psi(x) \in C^1[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$, $F, F_t \in C(\Delta(x_0, t_0))$, то в области $\Delta(x_0, t_0)$ существует единственное классическое решение прямой задачи (10.1.1), (10.1.2).*

Доказательство. Задача (10.1.1), (10.1.2) сводится к линейному интегральному уравнению относительно функции $u(x, t)$. Действительно, перепишем уравнение (10.1.1) в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = F(x, t) - q(x)u(x, t). \quad (10.1.4)$$

По формуле Даламбера решение задачи (10.1.4), (10.1.2) представимо в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-t) + \varphi(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} [F(\xi, \tau) - q(\xi)u(\xi, \tau)] d\xi d\tau.$$

Следовательно, решение $u(x, t)$ задачи (10.1.1), (10.1.2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x, t) = u_0(x, t) - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} q(\xi)u(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Delta(x_0, t_0), \quad (10.1.5)$$

где

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-t) + \varphi(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Уравнение (10.1.5) определяет единственное непрерывное в $\Delta(x_0, t_0)$ решение. Для того чтобы доказать это, воспользуемся методом последовательных приближений, представив $u(x, t)$ в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t), \quad (10.1.6)$$

где $u_n(x, t)$, $n \geq 1$, находятся по формулам

$$u_n(x, t) = -\frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} q(\xi)u_{n-1}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (10.1.7)$$

$$(x, t) \in \Delta(x_0, t_0), \quad n \geq 1.$$

Докажем равномерную сходимость ряда (10.1.6) в области $\Delta(x_0, t_0)$.

Заметим, что в условиях леммы $u_0 \in C^2(\Delta(x_0, t_0))$. Из формулы (10.1.7) следует, что все u_n непрерывны в $\Delta(x_0, t_0)$. Обозначим

$$U_n(t) = \max_{x_0+(t-t_0) \leq x \leq x_0-(t-t_0)} |u_n(x, t)|, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

$$\|u\|_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{(x,t) \in \Delta(x_0, t_0)} |D^\alpha u(x, t)|, \quad k = 0, 1, 2, \quad (10.1.8)$$

где

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_j = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2.$$

Тогда из (10.1.7) следует оценка

$$\begin{aligned} U_n(t) &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \max_{x_0+(t-t_0) \leq x \leq x_0-(t-t_0)} \left| \int_{\tau-t+x}^{-\tau+t+x} q(\xi) u_{n-1}(\xi, \tau) d\xi \right| d\tau \\ &\leq \|q\|_0 \int_0^t (t-\tau) U_{n-1}(\tau) d\tau, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq t \leq t_0. \end{aligned}$$

Применяя последовательно эту оценку для $n = 1, 2, \dots$, получим

$$U_n(t) \leq (\|q\|_0)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \|u_0\|_0, \quad n \geq 1. \quad (10.1.9)$$

Из неравенства (10.1.9) следует, что

$$|u_n(x, t)| \leq U_n(t) \leq \|u_0\|_0 \frac{(\|q\|_0 t_0^2)^n}{(2n)!}.$$

Поскольку числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_0\|_0 \frac{(\|q\|_0 t_0^2)^n}{(2n)!}$ сходится, то по признаку

Вейерштрасса ряд (10.1.6) сходится равномерно в области $\Delta(x_0, t_0)$ и определяет непрерывную в области $\Delta(x_0, t_0)$ функцию $u(x, t)$, которая является решением уравнения (10.1.5). Решение единственно, так как однородное уравнение

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, t)} q(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (10.1.10)$$

имеет только нулевое решение в классе непрерывных функций в области $\Delta(x_0, t_0)$. Действительно, обозначив

$$U(t) = \max_{x_0-(t_0-t) \leq x \leq x_0+(t_0-t)} |u(x, t)|,$$

заметим, что из (10.1.10) следует интегральное неравенство

$$U(t) \leq \|q\|_0 \int_0^t (t-\tau) U(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_0].$$

Решением этого неравенства, как известно, является только $U(t) \equiv 0$. Следовательно, $u(x, t) \equiv 0$ при $(x, t) \in \Delta(x_0, t_0)$.

Мы доказали существование единственного непрерывного решения уравнения (10.1.5). Покажем, что это решение имеет непрерывные производные до второго порядка в области $\Delta(x_0, t_0)$ и определяет классическое решение задачи (10.1.1), (10.1.2). Перепишем (10.1.5) в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x, t) - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} q(\xi) \left[\int_0^{t-|x-\xi|} u(\xi, \tau) d\tau \right] d\xi, \\ &(x, t) \in \Delta(x_0, t_0). \end{aligned} \quad (10.1.11)$$

Так как $u_0 \in C^2(\Delta(x_0, t_0))$, выражение в правой части равенства (10.1.11) имеет по переменным x и t частные производные первого порядка. Поэтому и левая часть равенства (10.1.11), т. е. функция $u(x, t)$, имеет частные производные первого порядка:

$$u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_0(x, t) - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} q(\xi) u(\xi, t - |x - \xi|) d\xi, \quad (10.1.12)$$

$$u_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t) - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} q(\xi) u(\xi, t - |x - \xi|) \operatorname{sign}(\xi - x) d\xi. \quad (10.1.13)$$

Полученные равенства показывают, что u_t, u_x являются непрерывными функциями в области $\Delta(x_0, t_0)$ и имеют частные производные первого порядка по переменным x и t . Значит, функция $u(x, t)$ имеет в области $\Delta(x_0, t_0)$ частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_0(x, t) - \frac{1}{2} [q(x+t)u(x+t, 0) + q(x-t)u(x-t, 0)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} q(\xi) u_t(\xi, t - |x - \xi|) d\xi, \end{aligned} \quad (10.1.14)$$

$$\begin{aligned} u_{xt}(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} u_0(x, t) - \frac{1}{2} [q(x+t)u(x+t, 0) - q(x-t)u(x-t, 0)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} q(\xi) u_t(\xi, t - |x - \xi|) \operatorname{sign}(\xi - x) d\xi, \end{aligned} \quad (10.1.15)$$

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x, t) - \frac{1}{2} [q(x+t)u(x+t, 0) + q(x-t)u(x-t, 0)] \\ &\quad + q(x)u(x, t) - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} q(\xi) u_t(\xi, t - |x - \xi|) d\xi. \end{aligned} \quad (10.1.16)$$

Из формул (10.1.14)–(10.1.16) следует, что $u_{tt}, u_{xx}, u_{xt} \in C(\Delta(x_0, t_0))$, т. е. $u \in C^2(\Delta(x_0, t_0))$. Таким образом, лемма доказана. \square

Очевидно, что при выполнении условий леммы 10.1.1 данные обратной задачи $f_1(t), f_2(t)$ должны обладать следующей гладкостью:

$$f_1(t) \in C^2[0, t_0], \quad f_2(t) \in C^1[0, t_0]. \quad (10.1.17)$$

Функции $f_1(t), f_2(t)$ также должны удовлетворять некоторым условиям согласования с данными прямой задачи. Эти условия вытекают из сопоставления значений функции $u(x, t)$ и ее производных в точке $(x_0, 0)$, вычисляемых по данным (10.1.2), (10.1.3):

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= f_1(0), & \psi(x_0) &= f_1'(0), \\ \varphi'(x_0) &= f_2(0), & \psi'(x_0) &= f_2'(0). \end{aligned} \quad (10.1.18)$$

Условия (10.1.17), (10.1.18), являющиеся необходимыми условиями существования решения обратной задачи, являются также и достаточными для существования ее решения в малом.

Теорема 10.1.1. Если для каких-либо $t_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнены условия леммы 10.1.1, условия (10.1.17), (10.1.18) и условие

$$|\varphi(x)| \geq \alpha > 0, \quad x \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0], \quad (10.1.19)$$

то для достаточно малых $h > 0$ решение $q(x)$ обратной задачи (10.1.1)–(10.1.3) на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$ существует и единственно в классе $C[x_0 - h, x_0 + h]$.

Доказательство. Положим $x = x_0$ в формулах (10.1.14), (10.1.15) и воспользуемся данными (10.1.3):

$$\begin{aligned} f_1''(t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_0(x_0, t) - \frac{1}{2} [q(x_0 + t)u(x_0 + t, 0) + q(x_0 - t)u(x_0 - t, 0)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{x_0 - t}^{x_0 + t} q(\xi)u_t(\xi, t - |x_0 - \xi|) d\xi, \end{aligned} \quad (10.1.20)$$

$$\begin{aligned} f_2'(t) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} u_0(x, t)|_{x=x_0} \\ &\quad - \frac{1}{2} [q(x_0 + t)u(x_0 + t, 0) - q(x_0 - t)u(x_0 - t, 0)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{x_0 - t}^{x_0 + t} q(\xi)u_t(\xi, t - |x_0 - \xi|) \operatorname{sign}(\xi - x_0) d\xi, \quad t \in [0, t_0]. \end{aligned} \quad (10.1.21)$$

Из этих формул, с учетом (10.1.2), находится $q(x)$ для $x \geq x_0$ и $x \leq x_0$:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{\varphi(x)} \left\{ -f_1''(x - x_0) - f_2'(x - x_0) \right. \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) u_0(x, t) \right]_{x=x_0, t=x-x_0} \\ &\quad \left. - \int_{x_0}^x q(\xi)u_t(\xi, x - \xi) d\xi \right\}, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + t_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{\varphi(x)} \left\{ -f_1''(x_0 - x) + f_2'(x_0 - x) \right. \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) u_0(x, t) \right]_{x=x_0, t=x_0-x} \\ &\quad \left. - \int_x^{x_0} q(\xi)u_t(\xi, \xi - x) d\xi \right\}, \quad x_0 - t_0 \leq x \leq x_0. \end{aligned}$$

Эти два равенства можно объединить в одно:

$$\begin{aligned} q(x) &= q_0(x) + \frac{1}{\varphi(x)} \int_{x_0}^x q(\xi)u_t(\xi, |x - \xi|) d\xi \operatorname{sign}(x_0 - x), \\ &\quad x \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0], \end{aligned} \quad (10.1.22)$$

где

$$q_0(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \left\{ -f_1''(|x-x_0|) - f_2'(|x-x_0|) \operatorname{sign}(x-x_0) + \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \operatorname{sign}(x-x_0) \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) u_0(x, t) \right]_{x=x_0, t=|x-x_0|} \right\}. \quad (10.1.23)$$

Несмотря на наличие разрывного множителя $\operatorname{sign}(x-x_0)$, функция $q_0(x)$ является непрерывной на отрезке $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ в силу условий согласования (10.1.18). Действительно, поскольку

$$-f_2'(0) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} u_0(x, t) \Big|_{x=x_0, t=0} = -f_2'(0) + \psi'(x_0) = 0,$$

множитель, стоящий перед $\operatorname{sign}(x-x_0)$, обращается при $x=x_0$ в нуль.

Рассмотрим в области $\Delta(x_0, t_0)$ систему нелинейных интегральных уравнений второго рода (10.1.5), (10.1.12), (10.1.22) относительно функций u, u_t, q . В этой системе уравнений меру области интегрирования будем рассматривать как малый параметр. Благодаря наличию этого малого параметра, к системе уравнений применим принцип сжимающих отображений. В самом деле, перепишем систему уравнений (10.1.5), (10.1.12), (10.1.22) в виде операторного уравнения

$$q = Aq, \quad (10.1.24)$$

где $q = (q_1, q_2, q_3)$ — вектор-функция двух переменных x, t с компонентами

$$q_1(x, t) = u(x, t), \quad q_2(x, t) = u_t(x, t), \quad q_3(x, t) \equiv q_3(x) = q(x),$$

а оператор A определен на множестве функций $q \in C(\Delta(x_0, t_0))$ и в соответствии с равенствами (10.1.5), (10.1.12), (10.1.22) имеет вид $A = (A_1, A_2, A_3)$:

$$\begin{aligned} A_1 q &= u_0(x, t) - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, t)} q_3(\xi) q_1(\xi, \tau) d\xi d\tau, \\ A_2 q &= \frac{\partial}{\partial t} u_0(x, t) - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} q_3(\xi) q_1(\xi, t - |x - \xi|) d\xi, \\ A_3 q &= q_0(x) + \frac{\operatorname{sign}(x_0 - x)}{\varphi(x)} \int_{x_0}^x q_3(\xi) q_2(\xi, |x - \xi|) d\xi. \end{aligned} \quad (10.1.25)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \|q\|(t_0) &= \max_{1 \leq k \leq 3} \max_{(x, t) \in \Delta(x_0, t_0)} |q_k(x, t)|, \\ q_0(x, t) &= \left(u_0(x, t), \frac{\partial}{\partial t} u_0(x, t), q_0(x) \right) \end{aligned}$$

и рассмотрим в пространстве $C(\Delta(x_0, h))$, $0 < h \leq t_0$, множество $M(h)$ функций $q(x, t)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|q - q_0\|(h) \leq \|q_0\|(t_0). \quad (10.1.26)$$

Покажем, что при достаточно малых h оператор A осуществляет сжимающее отображение множества $M(h)$ в себя. В самом деле, для $q \in M(h)$ справедливо неравенство

$$\|q\|(h) \leq 2\|q_0\|(h).$$

Оценивая интегралы, входящие в формулы (10.1.25), находим

$$\|Aq - q_0\|(h) \leq 4\|q_0\|^2(t_0) \max\left(\frac{h^2}{2}, h, \frac{h}{\alpha}\right).$$

Поэтому для

$$h \leq h^* = \min\left(\frac{1}{\sqrt{2\|q_0\|(t_0)}}, \frac{\min(\alpha, 1)}{4\|q_0\|(t_0)}, t_0\right) \quad (10.1.27)$$

оператор A переводит множество $M(h)$ в себя.

Пусть $q^{(1)}, q^{(2)}$ — любые два элемента из множества $M(h)$, $h \leq h^*$. Тогда, используя очевидные неравенства

$$\begin{aligned} |q_k^{(1)} q_s^{(1)} - q_k^{(2)} q_s^{(2)}| &\leq |q_k^{(1)} - q_k^{(2)}| |q_s^{(1)}| + |q_k^{(2)}| |q_s^{(1)} - q_s^{(2)}| \\ &\leq 4\|q_0\|(t_0) \|q^{(1)} - q^{(2)}\|(h), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \|Aq^{(1)} - Aq^{(2)}\|(h) &\leq 4\|q_0\|(t_0) \|q^{(1)} - q^{(2)}\|(h) \max\left(\frac{h^2}{2}, h, \frac{h}{\alpha}\right) \\ &\leq \frac{h}{h^*} \|q^{(1)} - q^{(2)}\|(h). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что при любом $h < h^*$ оператор A осуществляет сжимающее отображение множества $M(h)$ в себя. Тогда в силу теоремы Банаха на множестве $M(h)$ существует единственная неподвижная точка отображения, т. е. существует единственное решение уравнения (10.1.24). Следовательно, решая систему уравнений (10.1.5), (10.1.12), (10.1.22), например, методом последовательных приближений, мы однозначно построим в области $\Delta(x_0, h)$ для $h \in (0, h^*)$ функции u, u_t, q . Тем самым определяется решение $q(x)$ на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$. \square

10.1.2. Задача с сосредоточенным источником для уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u$$

Уравнение $u_{tt} = u_{xx} - q(x)u$ является, в некотором смысле, наилучшим объектом для изучения обратных задач для гиперболических уравнений. Во-первых, это уравнение имеет непосредственную связь с классической обратной задачей Штурма — Лиувилля (см. подраздел 10.1.4).

Во-вторых, обратные задачи для уравнения $u_{tt} = u_{xx} - q(x)u$ сводятся к системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода, что позволяет доказать их локальную корректность и условную корректность в целом (см. подраздел 10.1.2 и главу 4). В-третьих, результаты, полученные для уравнения $u_{tt} = u_{xx} - q(x)u$, могут быть перенесены на уравнение акустики $c^{-2}(x)v_{tt} = v_{xx} - (\ln \rho(x))'v_x$ (см. раздел 10.2) и на ряд других, например, $c^{-2}(x)v_{tt} = v_{xx}$, $v_{tt} = v_{xx} - (\ln \sigma(x))'v_x$ (см. также подраздел 12.6.3). И, наконец, рассматриваемое уравнение связано с соответствующим уравнением параболического типа $v_t = v_{xx} - q(x)v$ (см. раздел 11.2).

Прямая задача с сосредоточенным источником состоит в нахождении обобщенного решения $u(x, t)$ задачи Коши

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (10.1.28)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x). \quad (10.1.29)$$

В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $q(x)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи (10.1.28), (10.1.29)

$$u(0, t) = f_1(t), \quad u_x(0, t) = f_2(t), \quad t \geq 0. \quad (10.1.30)$$

Свойства решения прямой задачи. Из основного свойства дельта-функции Дирака

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\delta(x) dx = \psi(0)$$

для любой непрерывной финитной функции $\psi(x)$ и формулы Даламбера следует, что обобщенное решение задачи (10.1.28), (10.1.29) является кусочно-непрерывным решением интегрального уравнения

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \theta(t - |x|) - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, t)} q(\xi)u(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (10.1.31)$$

Здесь $\theta(\cdot)$ — эта-функция Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Из (10.1.31) следует, что

$$u(x, t) \equiv 0, \quad t < |x|, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (10.1.32)$$

В самом деле, рассмотрим область $\Delta(x_1, t_1)$ с произвольной фиксированной точкой $(x_1, t_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, такой, что $t_1 < |x_1|$. Тогда для точек $(x, t) \in \Delta(x_1, t_1)$ из формулы (10.1.31) следует, что

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, t)} q(\xi)u(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Delta(x_1, t_1). \quad (10.1.33)$$

Обозначим

$$Q_1 = \max_{x_1-t_1 \leq x \leq x_1+t_1} |q(x)|, \quad U(t) = \max_{x_1-(t_1-t) \leq x \leq x_1+(t_1-t)} |u(x, t)|.$$

Тогда из (10.1.33) получим неравенство

$$U(t) \leq Q_1 t_1 \int_0^t U(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

Из леммы Гронуолла следует, что $U(t) \equiv 0$, $t \in [0, t_1]$, и, таким образом, $u(x, t) \equiv 0$ в области $\Delta(x_1, t_1)$. Учитывая произвольность выбора точки (x_1, t_1) , мы убеждаемся в справедливости (10.1.32).

Из равенства (10.1.32) следует, что носитель функции $u(x, t)$ содержится целиком в области $\{(x, t) : t \geq |x|\}$.

Пусть $D = \{(x, t) : t > |x|\}$. В дальнейшем мы будем рассматривать функцию $u(x, t)$ только в области D . Из формул (10.1.31), (10.1.32) следует, что

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \iint_{\square(x, t)} q(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in D. \quad (10.1.34)$$

Здесь $\square(x, t) = \{(\xi, \tau) : |\xi| \leq \tau \leq t - |x - \xi|\}$. Область $\square(x, t)$ имеет вид прямоугольника (см. рис. 2), образованного характеристиками уравнения (10.1.28), проходящими через точки $(0, 0)$ и (x, t) .

Лемма 10.1.2. Если для какой-либо точки $(x_1, t_1) \in D$ функция $q(x)$ непрерывна на интервале $[(x_1 - t_1)/2, (x_1 + t_1)/2]$, то решение уравнения (10.1.34) существует и принадлежит классу $C^2(\square(x_1, t_1))$.

Мы ограничимся схемой доказательства этой леммы.

С помощью метода последовательных приближений, полагая

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_n(x, t) = -\frac{1}{2} \iint_{\square(x, t)} q(\xi) u_{n-1}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad n \geq 1,$$

$$(x, t) \in \square(x_1, t_1),$$

можно показать, что сумма ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

даст решение уравнения (10.1.34). Это решение непрерывно в области $\square(x_1, t_1)$, поскольку функции $u_n(x, t)$, очевидно, непрерывны, а ряд $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$ равномерно сходится в $\square(x_1, t_1)$, что следует из легко проверяемых по индукции неравенств:

$$|u_n(x, t)| \leq \frac{1}{2^{n+1}} [\|q\|_0 (t_1 - |x_1|)]^n \frac{t_1^n}{n!},$$

$$(x, t) \in \square(x_1, t_1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

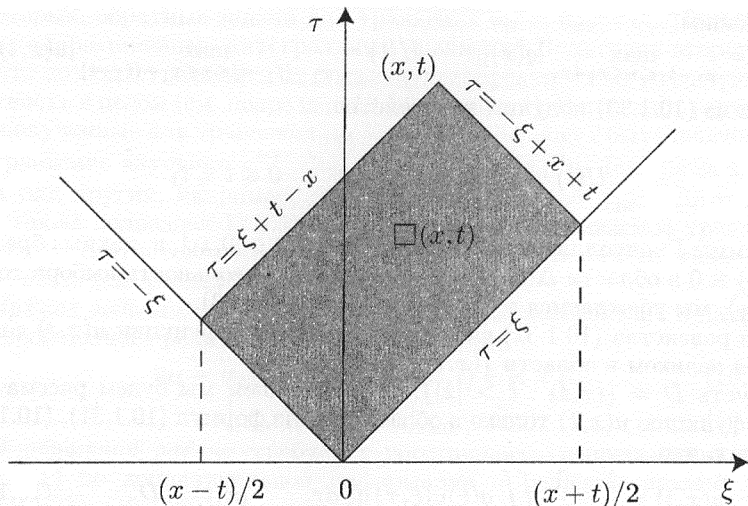


Рис. 2

Требуемая гладкость решения проверяется с помощью дифференцирования равенства (10.1.34). Единственность непрерывного решения уравнения (10.1.34) следует из существования у однородного уравнения только нулевого решения. Доказательство этого аналогично доказательству равенства (10.1.32).

Из формулы (10.1.34), в частности, следует, что на границе области D функция $u(x, t)$ постоянна и равна $1/2$:

$$u(x, |x|) = 1/2. \quad (10.1.35)$$

Сведение обратной задачи с сосредоточенным источником к системе интегральных уравнений Вольтерра. Выпишем частные производные функции $u(x, t)$ в D . Для этого в (10.1.34) заменим двойной интеграл повторным:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_{(x-t)/2}^{(x+t)/2} \int_{|\xi|}^{t-|x-\xi|} q(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in D.$$

Дифференцируя последнее равенство, получим

$$u_t = \frac{1}{2} \int_{(x-t)/2}^{(x+t)/2} q(\xi) u(\xi, t - |x - \xi|) d\xi, \quad (10.1.36)$$

$$u_x = -\frac{1}{2} \int_{(x-t)/2}^{(x+t)/2} q(\xi)u(\xi, t - |x - \xi|) \operatorname{sign}(\xi - x) d\xi, \quad (10.1.37)$$

$$u_{xt} = -\frac{1}{4} \left[q\left(\frac{x+t}{2}\right) - q\left(\frac{x-t}{2}\right) \right] - \frac{1}{2} \int_{(x-t)/2}^{(x+t)/2} q(\xi)u_t(\xi, t - |x - \xi|) \operatorname{sign}(\xi - x) d\xi, \quad (10.1.38)$$

$$u_{tt} = -\frac{1}{4} \left[q\left(\frac{x+t}{2}\right) + q\left(\frac{x-t}{2}\right) \right] - \frac{1}{2} \int_{(x-t)/2}^{(x+t)/2} q(\xi)u_t(\xi, t - |x - \xi|) d\xi. \quad (10.1.39)$$

Из леммы 10.1.2 и равенств (10.1.35)–(10.1.38) вытекает лемма, характеризующая необходимые свойства данных обратной задачи.

Лемма 10.1.3. Если $q(x) \in C[-T/2, T/2]$, $T > 0$, то $f_1 \in C^2[0, T]$, $f_2 \in C^1[0, T]$ и

$$f_1(+0) = 1/2, \quad f_1'(+0) = f_2(+0) = f_2'(+0) = 0. \quad (10.1.40)$$

Просуммировав формулы (10.1.38), (10.1.39) при $x = 0$ и положив затем $t = 2|x|$, получим

$$q(x) = q_0(x) - 4 \operatorname{sign}(x) \int_0^x q(\xi)u_t(\xi, 2|x| - \xi) d\xi. \quad (10.1.41)$$

Здесь

$$q_0(x) = -4[f_1''(2|x|) + f_2'(2|x|) \operatorname{sign}(x)].$$

Уравнения (10.1.41), (10.1.34), (10.1.36) определяют в D замкнутую систему интегральных уравнений относительно трех функций u , u_t , q . Используя эту систему, нетрудно доказать следующие теоремы.

Теорема 10.1.2. Если при каком-либо $t_0 > 0$ функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ таковы, что $f_1 \in C^2[0, t_0]$, $f_2 \in C^1[0, t_0]$ и выполнены условия (10.1.40), то для некоторого $h \in (0, t_0/2)$ решение обратной задачи (10.1.28)–(10.1.30) в классе функций $q(x) \in C[-h, h]$ существует и единственно.

Теорема 10.1.3. При выполнении условий теоремы 10.1.2 функция $q(x) \in C[-t_0/2, t_0/2]$ однозначно определяется информацией (10.1.30) для $t \in (0, t_0]$.

Теорема 10.1.4. Пусть $q(x)$, $\bar{q}(x)$ — два решения обратной задачи (10.1.28)–(10.1.30) с данными f_1 , f_2 и \bar{f}_1 , \bar{f}_2 соответственно. Тогда имеет место оценка

$$|q(x) - \bar{q}(x)| \leq c(\|f_1'' - \bar{f}_1''\|_{C[0,t_0]} + \|f_2' - \bar{f}_2'\|_{C[0,t_0]}), \quad x \in [-t_0/2, t_0/2],$$

в которой постоянная c зависит только от $\|q\|_{C[-t_0/2, t_0/2]}$, $\|\bar{q}\|_{C[-t_0/2, t_0/2]}$ и параметра t_0 .

Доказательство этих теорем аналогично доказательству теоремы 10.1.1.

Рассмотрим теперь случай, когда дополнительная информация о решении задачи Коши (10.1.28), (10.1.29) задается в точке $x_1 \neq 0$:

$$u(x_1, t) = f_1(t), \quad u_x(x_1, t) = f_2(t), \quad t > 0. \quad (10.1.42)$$

Оказывается, что ситуация с однозначностью решения обратной задачи при этом существенно меняется. Пусть для определенности $x_1 > 0$. Тогда имеет место следующая теорема о единственности решения обратной задачи, доказанная В. Г. Романовым [13].

Теорема 10.1.5. Данные (10.1.42) о решении задачи Коши (10.1.28), (10.1.29) однозначно определяют функцию $q(x)$ в области $x \geq x_1 > 0$.

10.1.3. Разрешимость в целом обратной задачи для уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u$$

Исследование задачи (10.1.28)–(10.1.30) может быть проведено на основе другого подхода, который позволяет выяснить необходимые и достаточные условия ее разрешимости в целом.

Рассмотрим обратную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \quad (10.1.43)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x); \quad (10.1.44)$$

$$u(0, t) = f(t), \quad u_x(0, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (10.1.45)$$

Продолжим $u(x, t)$ с помощью нечетного продолжения на отрицательные t :

$$u(x, t) = -u(x, -t), \quad t < 0.$$

Функция $f(t)$ продолжается также нечетным образом:

$$f(t) = -f(-t), \quad t < 0.$$

В силу условия (10.1.40) $f(+0) = 1/2$. Следовательно, функция $f(t)$ будет иметь в нуле разрыв первого рода:

$$f(+0) = 1/2, \quad f(-0) = -1/2.$$

Продолженная таким образом функция $u(x, t)$ удовлетворяет для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ уравнению

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u \quad (10.1.46)$$

и условию

$$u(x, t) \equiv 0, \quad t < |x|. \quad (10.1.47)$$

Предположим, что решение обратной задачи (10.1.43)–(10.1.45) существует. Тогда функция $u(x, t)$ удовлетворяет дополнительным условиям

$$u(0, t) = f(t), \quad u_x(0, t) = 0, \quad (10.1.48)$$

причем $f(t)$ при $t \neq 0$ дважды непрерывно дифференцируема.

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши:

$$w_{tt} = w_{xx} - q(x)w, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (10.1.49)$$

$$w|_{x=0} = \delta(t), \quad w_x|_{x=0} = 0. \quad (10.1.50)$$

Решение этой задачи удовлетворяет интегральному уравнению

$$w(x, t) = \frac{1}{2} [\delta(t-x) + \delta(t+x)] + \frac{1}{2} \iint_{\Delta_1(x, t)} q(\xi) w(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (10.1.51)$$

где $\Delta_1(x, t) = \{(\xi, \tau) : 0 < \xi \leq x, t-x+\xi < \tau < t+x-\xi\}$ — треугольник, образованный характеристиками, проходящими через точку (x, t) и ось t .

Нетрудно показать, что

$$w(x, t) \equiv 0, \quad 0 < x < |t|. \quad (10.1.52)$$

Поэтому фактической областью интегрирования в уравнении (10.1.51) для точек $(x, t) \in D_1 = \{(x, t) : x \geq |t|\}$ будет прямоугольник $\square_1(x, t) = \{(\xi, \tau) : |\tau| \leq \xi \leq x - |t - \tau|\}$, образованный характеристиками, выходящими из точек $(0, 0)$, (x, t) .

Обозначим

$$\tilde{w}(x, t) = w(x, t) - \frac{1}{2} [\delta(t-x) + \delta(t+x)]. \quad (10.1.53)$$

Кусочно-непрерывная функция $\tilde{w}(x, t)$ есть решение уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, t) = \frac{1}{4} \theta(x - |t|) & \left[\int_0^{(x+t)/2} q(\xi) d\xi + \int_0^{(x-t)/2} q(\xi) d\xi \right] + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\square_1(x, t)} q(\xi) \tilde{w}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (10.1.54)$$

вытекающего из (10.1.51). Из уравнения (10.1.54) следует, что $\tilde{w}(x, t) \equiv 0$ для $x < |t|$, \tilde{w} чётна по переменной t , имеет непрерывные первые производные внутри области D_1 и

$$\tilde{w}(x, x-0) = \frac{1}{4} \int_0^x q(\xi) d\xi, \quad x > 0. \quad (10.1.55)$$

Решение задачи (10.1.46), (10.1.48) может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) w(x, t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) w(x, \tau) d\tau. \quad (10.1.56)$$

В самом деле, используя (10.1.49), (10.1.50), получим

$$L_q u = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) L_q w(x, t - \tau) d\tau = 0, \\ u|_{x=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t), \quad u_x|_{x=0} = 0,$$

где $L_q \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x)$. Учитывая (10.1.52) и (10.1.53), преобразуем формулу (10.1.56):

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(t-x) + f(t+x)] + \int_{-x}^x f(t-\tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau. \quad (10.1.57)$$

Из (10.1.47) следует, что

$$\frac{1}{2} [f(t-x) + f(t+x)] + \int_{-x}^x f(t-\tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau = 0, \quad (10.1.58) \\ x > |t|.$$

При каждом фиксированном $x > 0$ соотношение (10.1.58) является интегральным уравнением первого рода относительно функции $\tilde{w}(x, t)$, $t \in (-x, x)$. Рассмотрим это уравнение более детально. Заметим, что ядро $f(t-\tau)$ этого уравнения при $t = \tau$ имеет конечный разрыв: $f(+0) = 1/2$, $f(-0) = -1/2$. Следовательно, дифференцируя уравнение (10.1.58) по t , получим уравнение второго рода типа Фредгольма:

$$\tilde{w}(x, t) + \int_{-x}^x f'(t-\tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2} [f'(t-x) + f'(t+x)], \quad (10.1.59) \\ x > 0, \quad t \in (-x, x).$$

Ядро $f'(t-\tau)$ уравнения (10.1.59) является непрерывным и в силу чётности функции $f'(t)$ симметрическим.

Поскольку решение $\tilde{w}(x, t)$ уравнения (10.1.59) чётно по переменной t , это уравнение можно переписать в виде

$$\tilde{w}(x, t) + \int_0^x [f'(t-\tau) + f'(t+\tau)] \tilde{w}(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2} [f'(t-x) + f'(t+x)], \\ x > 0, \quad t \in [0, x]. \quad (10.1.60)$$

Уравнение (10.1.60) эквивалентно уравнению (10.1.58) при дополнительном условии, что решение $\tilde{w}(x, t)$ уравнения (10.1.60) является четной функцией по аргументу t . В самом деле, любое четное по t решение уравнения (10.1.58) является решением уравнения (10.1.60). С другой стороны, любое решение уравнения (10.1.60), продолженное четным образом по t для значений $t \in (-x, 0)$, удовлетворяет уравнению (10.1.59), которое получено из уравнения (10.1.58) дифференцированием по t , и также удовлетворяет условию

$$\int_{-x}^x f(-\tau)\tilde{w}(x, \tau) d\tau = 0,$$

совпадающему с равенством (10.1.58) при $t = 0$. Отсюда вытекает, что любое решение уравнения (10.1.60) при четном продолжении по t является решением уравнения (10.1.58). Тем самым установлена эквивалентность уравнений (10.1.58) и (10.1.60).

Допустим, что уравнение (10.1.60) для каждого $x > 0$ однозначно разрешимо в классе непрерывных функций. Тогда его решение определяет непрерывную в области D_1 функцию $\tilde{w}(x, t)$ (с учетом ее четного продолжения в ту часть области D_1 , где $t < 0$). Так как правая часть (10.1.59) непрерывно дифференцируема в D_1 , а ядро $f'(t-s)$ кусочно-непрерывно дифференцируемо, то решение уравнения (10.1.59) будет непрерывно дифференцируемым в D_1 . Из уравнения (10.1.60), в частности, следует, что $\tilde{w}_t(x, +0) = 0$. Поэтому четное продолжение в область $t < 0$ происходит с сохранением непрерывности частных производных.

Из (10.1.55) следует, что

$$q(x) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}(x, x-0), \quad x > 0. \quad (10.1.61)$$

Для отрицательных значений x можно аналогично получить уравнение, которое отличается от (10.1.60) только тем, что верхний предел x заменен на $|x|$. Отсюда вытекает, что $\tilde{w}(-x, t) = \tilde{w}(x, t)$ и, значит, $q(-x) = q(x)$.

Итак, для того чтобы построить решение обратной задачи в точке $x > 0$, достаточно решить уравнение (10.1.60) и найти $q(x)$ по формуле (10.1.61).

Как известно из теории уравнений Фредгольма, для малых значений x уравнение (10.1.60) однозначно разрешимо. В данном случае справедливо следующее утверждение.

Лемма 10.1.4. Если решение обратной задачи (10.1.43)–(10.1.45) существует, то уравнение (10.1.60) однозначно разрешимо при всех $x > 0$.

Доказательство. Для однозначной разрешимости уравнения (10.1.60) при фиксированном x необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение

$$\tilde{w}(x, t) + \int_0^x [f'(t - \tau) + f'(t + \tau)] \tilde{w}(x, \tau) d\tau = 0, \quad (10.1.62)$$

$$t \in [0, x],$$

имело только тривиальное решение $\tilde{w} \equiv 0$. Предположим, что это не так, т. е. существует такое $x_0 > 0$, что при $x = x_0$ уравнение (10.1.62) имеет решение $\tilde{w}(x_0, t) \neq 0$, $t \in [0, x_0]$. Продолжим функцию $\tilde{w}(x_0, t)$ четным образом на отрезок $(-x_0, x_0)$ и тождественным нулем вне интервала $(-x_0, x_0)$. Тогда из (10.1.62) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \tilde{w}(x_0, \tau) d\tau = 0, \quad t \in (-x_0, x_0).$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t - \tau) \tilde{w}(x_0, \tau) d\tau. \quad (10.1.63)$$

Очевидно, что

$$L_q \Phi = 0, \quad 0 < x < x_0, \quad (10.1.64)$$

$$\Phi|_{x=0} = 0, \quad t \in (-x_0, x_0), \quad \Phi_x|_{x=0} = 0. \quad (10.1.65)$$

Следовательно, $\Phi(x, t) \equiv 0$ для $(x, t) \in \Delta_1(x_0, 0)$. Используя полученный результат, получим из (10.1.63) равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t - \tau) \tilde{w}(x_0, \tau) d\tau = 0, \quad (x, t) \in \Delta_1(x_0, 0). \quad (10.1.66)$$

Дифференцируя это равенство по t и полагая $t = 0$, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, -\tau) \tilde{w}(x_0, \tau) d\tau = 0, \quad x \in [0, x_0]. \quad (10.1.67)$$

Учитывая четность функций $u_t(x, t)$ и $\tilde{w}(x_0, t)$, равенство (10.1.66) можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, \tau) \tilde{w}(x_0, \tau) d\tau = 0, \quad x \in [0, x_0]. \quad (10.1.68)$$

Функция $u(x, t)$ как решение задачи Коши (10.1.28), (10.1.29) имеет в области $x > 0$, $t > 0$ следующую структуру:

$$u(x, t) = \theta(t - x) \left[\frac{1}{2} + \tilde{u}(x, t) \right].$$

Здесь $\tilde{u}(x, t)$ — функция, непрерывная в области $t \geq x \geq 0$ вместе с частными производными до второго порядка, причем $\tilde{u}(x, x) = 0$. Следовательно,

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2} \delta(t - x) + \theta(t - x) \tilde{u}_t(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0.$$

Поэтому равенство (10.1.68) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2} \tilde{w}(x_0, x) + \int_x^{x_0} \tilde{u}_t(x, t) \tilde{w}(x_0, t) dt = 0, \quad x \in [0, x_0]. \quad (10.1.69)$$

Равенство (10.1.69) является однородным интегральным уравнением Вольтерра второго рода с непрерывным ядром относительно функции $\tilde{w}(x_0, t)$. Следовательно, $\tilde{w}(x_0, t) \equiv 0$, $t \in [0, x_0]$. Но это противоречит предположению о существовании нетривиального решения уравнения (10.1.62). Таким образом, лемма доказана. \square

Из леммы 10.1.4 вытекает единственность решения обратной задачи. Справедлива лемма, обратная к лемме 10.1.4.

Лемма 10.1.5. Если для какого-либо $T > 0$ выполнены условия $f(t) \in C^2(0, T]$, $f(+0) = 1/2$, $f'(+0) = 0$ и уравнение (10.1.60), в котором $f(t)$ доопределена на $t \in [-T, 0)$ нечетным образом, однозначно разрешимо для всех $x \in (0, T/2]$, то решение обратной задачи существует на отрезке $[-T/2, T/2]$.

Доказательство. Пусть сначала $f(t) \in C^3(0, T]$. Обозначим через $D_1(T)$ ту часть области D_1 , в которой $x \leq T/2$. Решение $\tilde{w}(x, t)$ уравнения (10.1.60) при четном продолжении по t для значений $t < 0$ в области $D_1(T)$ дважды непрерывно дифференцируемо.

Положим

$$q(x) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}(x, x-0), \quad 0 < x \leq \frac{T}{2}, \quad q(-x) = q(x),$$

$$w(x, t) = \frac{1}{2} [\delta(t-x) + \delta(t+x)] + \theta(x-|t|) \tilde{w}(x, t), \quad 0 < x \leq \frac{T}{2}, \quad (10.1.70)$$

$$\hat{w}(x, t) = L_q w(x, t), \quad 0 \leq x \leq \frac{T}{2}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (10.1.71)$$

Несмотря на то что функция $w(x, t)$ определена для $x \in (0, T/2]$, функция $\hat{w}(x, t)$ кусочно-непрерывна для $x \in [0, T/2]$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \hat{w}(x, t) &= \frac{1}{2} L_q [\delta(t-x) + \delta(t+x)] + L_q [\theta(x-|t|) \tilde{w}(x, t)] \\ &= \frac{1}{2} q(x) [\delta(t-x) + \delta(t+x)] \\ &\quad - [\delta(t-x) + \delta(t+x)] 2 \frac{d}{dx} \tilde{w}(x, x-0) + \theta(x-|t|) L_q \tilde{w}(x, t) \\ &= \theta(x-|t|) L_q \tilde{w}(x, t). \end{aligned}$$

Функция $w(x, t)$ в области $D_1(T)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) w(x, \tau) d\tau = 0, \quad (x, t) \in D_1(T), \quad (10.1.72)$$

или, что то же самое,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)w(x, t - \tau) d\tau = 0, \quad (x, t) \in D_1(T). \quad (10.1.73)$$

Применив к этому уравнению оператор L_q , получим уравнение для функции $\hat{w}(x, t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\hat{w}(x, t - \tau) d\tau = 0, \quad (x, t) \in D_1(T). \quad (10.1.74)$$

Учитывая, что $\hat{w}(x, t) \equiv 0$ для $x < |t|$, уравнение (10.1.74) можно записать в виде

$$\int_x^{-x} f(t - \tau)\hat{w}(x, \tau) d\tau = 0, \quad (x, t) \in D_1(T).$$

Дифференцируя это уравнение по t и используя условия

$$\hat{w}(x, -t) = \hat{w}(x, t), \quad f(+0) = \frac{1}{2}, \quad f(-0) = -\frac{1}{2},$$

получаем уравнение

$$\hat{w}(x, t) + \int_0^x [f'(t - \tau) + f'(t + \tau)]\hat{w}(x, \tau) d\tau = 0, \quad (10.1.75)$$

$$(x, t) \in D_1(T).$$

В силу однозначной разрешимости уравнения (10.1.60) из равенства (10.1.75) вытекает

$$\hat{w}(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D_1(T).$$

Следовательно, $\hat{w} \equiv 0$ в полосе $0 \leq x \leq T/2$. Таким образом, функция $w(x, t)$ является решением уравнения

$$L_q w = 0.$$

Так как $f'(0) = 0$, то из уравнения (10.1.60) следует, что $\tilde{w}(0, 0) = 0$. Переходя к пределу $x \rightarrow +0$ в (10.1.70), находим

$$w(0, t) = \delta(t), \quad w_x|_{x=0} = 0, \quad t \in \mathbb{R};$$

значит, $w(x, t)$ является в полосе $0 < x \leq T/2$ решением задачи Коши (10.1.49), (10.1.50).

Тогда функция $u(x, t)$, определенная равенством (10.1.56), является в полосе $0 \leq x \leq T/2$ решением уравнения (10.1.46), удовлетворяет условиям (10.1.48) для $t \in (-T, T)$ и, как следует из равенства (10.1.72), условию (10.1.47). Ее четное продолжение по x при этом также является решением уравнения (10.1.46) и удовлетворяет условиям (10.1.47), (10.1.48). Очевидно, что, к тому же,

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x). \quad (10.1.76)$$

Таким образом, решение обратной задачи существует, причем $q(x) \in C^1[-T/2, T/2]$.

Пусть теперь $f \in C^2[0, T]$. Рассмотрим такую последовательность функций $f_n(t) \in C^3[0, T]$, что $f_n(t) \rightarrow f(t)$ по норме пространства $C^2[0, T]$. Последовательности $\{f_n\}$ соответствуют последовательности функций $\{\tilde{w}_n(x, t)\}$, $\{q_n(x)\}$, $\{u_n(x, t)\}$. Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$ функции $\tilde{w}_n \in C^2(D_1(T))$ сходятся по норме пространства $C^1(D_1(T))$ к некоторой предельной функции $\tilde{w}(x, t) \in C^1(D_1(T))$, а функции $q_n(x)$ и $u_n(x, t)$ сходятся равномерно к $q(x) \in C[-T/2, T/2]$ и к некоторой кусочно-непрерывной функции $u(x, t)$, соответственно. При этом для предельных функций имеют место равенства (10.1.46), (10.1.48), (10.1.76), понимаемые в смысле обобщенных функций. Тем самым лемма доказана. \square

Из лемм 10.1.4 и 10.1.5 следует теорема, дающая необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости обратной задачи на отрезке $[-T/2, T/2]$.

Теорема 10.1.6. *Для однозначной разрешимости обратной задачи (10.1.43), (10.1.44), (10.1.48) на отрезке $[-T/2, T/2]$ в классе непрерывных функций необходимо и достаточно, чтобы*

- 1) функция $f(t)$ удовлетворяла условиям $f(t) \in C^2[0, T]$, $f(+0) = 1/2$, $f'(0) = 0$;
- 2) интегральное уравнение (10.1.60) (где $f(-t) = -f(t)$, $t \in [0, T]$) было однозначно разрешимо при любых $x \in (0, T/2]$.

Второе из условий теоремы может быть заменено эквивалентным ему условием положительной определенности оператора A_x , действующего согласно формуле

$$A_x \varphi = \varphi(t) + \int_0^x [f'(t - \tau) + f'(t + \tau)] \varphi(\tau) d\tau, \quad x \in [0, T/2],$$

т. е. условием, что $\langle A_x \varphi, \varphi \rangle_{L_2[0, x]} > 0$ при всех $x \in [0, T/2]$ и при всех $\varphi \in L_2[0, x]$.

10.1.4. Связь обратной задачи Штурма — Лиувилля

и обратной задачи с сосредоточенным источником

В данном разделе мы выведем формулу, связывающую спектральные данные с данными обратной задачи с сосредоточенным источником [13]. Как мы уже не раз отмечали, формулы такого рода очень важны, поскольку позволяют переносить результаты, полученные для одной обратной задачи на другую.

Напомним, что выражение

$$l_q y = -y'' + q(x)y, \quad x \in (a, b), \quad (10.1.77)$$

вместе с граничными условиями

$$(y' - hy)|_{x=a} = 0, \quad (y' + Hy)|_{x=b} = 0, \quad (10.1.78)$$

где $q \in C[a, b]$; h, H, a, b — конечные вещественные числа, определяет в $L_2[a, b]$ оператор l_q , называемый *оператором Штурма — Лиувилля* на отрезке $[a, b]$. *Собственными значениями* этого оператора называют такие λ , при которых существуют нетривиальные решения $y(x, \lambda)$ уравнения

$$y'' - q(x)y = -\lambda y, \quad x \in (a, b), \quad (10.1.79)$$

удовлетворяющие граничным условиям (10.1.78). Функции $y(x, \lambda)$ называются *собственными функциями* оператора (10.1.77), (10.1.78), соответствующими собственному значению λ .

В *прямой задаче Штурма — Лиувилля* требуется найти все собственные числа и собственные функции оператора Штурма — Лиувилля.

Отметим, что все собственные функции, соответствующие данному собственному значению λ , пропорциональны, и мы всегда можем их нормировать условием

$$y(a, \lambda) = 1, \quad y'(a, \lambda) = h.$$

Напомним, что оператор Штурма — Лиувилля имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}$, которые вещественны и могут быть упорядочены по возрастанию, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots < \lambda_n < \dots$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Последовательность соответствующих собственных функций $\{y_n(x)\}$, где $y_n(x) = y(x, \lambda_n)$, ортогональна и полна в $L_2[a, b]$. Это означает, что для любой $f \in L_2[a, b]$ ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \quad f_n = \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_a^b f(x) y_n(x) dx, \quad (10.1.80)$$

сходится по норме $L_2[a, b]$ к $f(x)$. Значит, для любой $f \in L_2[a, b]$ выполняется равенство Парсеваля

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \|y_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, y_n \rangle^2}{\|y_n\|^2}.$$

Последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\|y_n\|\}$ называют *спектральными данными*.

Обратная задача Штурма — Лиувилля состоит в том, чтобы найти функцию $q(x)$, если известны спектральные данные.

Эту же задачу можно сформулировать и в терминах спектральной функции $\rho(\lambda)$ оператора Штурма — Лиувилля, которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\rho(\lambda) = \sum_{n: \{\lambda_n < \lambda\}} \frac{1}{\|y_n\|^2} \theta(\lambda - \lambda_n). \quad (10.1.81)$$

Здесь суммирование осуществляется по всем n , для которых $\lambda_n < \lambda$.

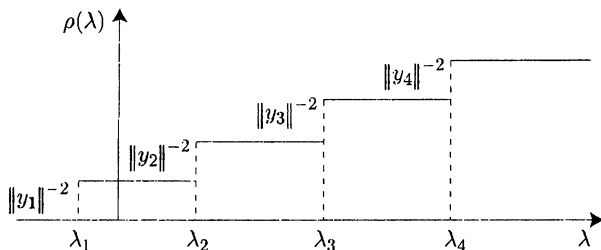


Рис. 3

Для того чтобы пояснить, что означает спектральная функция, рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} y''(x) - q(x)y(x) &= -\lambda y(x), & x \in [a, b], \\ y(a, \lambda) &= 1, & y'(a, \lambda) = h. \end{aligned} \quad (10.1.82)$$

Обозначим через $y(x, \lambda)$ решение задачи (10.1.82), а для произвольной функции $g(x) \in L_2[a, b]$ определим функцию

$$\tilde{g}(\lambda) = \int_a^b g(x)y(x, \lambda) dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (10.1.83)$$

Поскольку $y(x, \lambda_n) = y_n(x)$, то функция $g(x)$ определяется последовательностью $\{\tilde{g}(\lambda_n)\}$ при помощи ряда Фурье

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}(\lambda_n)}{\|y_n\|^2} y_n(x). \quad (10.1.84)$$

Но, используя спектральную функцию (10.1.81), формулу (10.1.84) можно записать в виде, аналогичном (10.1.83):

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\lambda)y(x, \lambda) d\rho(\lambda). \quad (10.1.85)$$

График спектральной функции $\rho(\lambda)$ приведен на рис. 3.

Функция $\rho(\lambda)$ является кусочно-постоянной и имеет конечные разрывы в точках $\lambda = \lambda_n$. При этом величина скачка равна $\|y_n\|^{-2}$.

Таким образом, в спектральной функции $\rho(\lambda)$ содержится вся информация о спектральных данных. Следовательно, обратную задачу Штурма — Лиувилля можно сформулировать следующим образом: восстановить оператор l_q по его спектральной функции. Данная постановка удобна тем, что может быть легко перенесена на случай, когда $b = \infty$.

Обратная задача Штурма — Лиувилля тесно связана с обратной задачей, рассматриваемой в подразделах 10.1.2, 10.1.3. Действительно, зная спектральную функцию $\rho(\lambda)$ оператора l_q , можно определить

дополнительную информацию $f(t)$ следующей обратной задачи: найти $q(x) \in C(a, b)$ из соотношений

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad (x, t) \in (a, b) \times \mathbb{R}_+, \quad (10.1.86)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x - a), \quad (10.1.87)$$

$$(u_x - hu)|_{x=a} = 0, \quad (u_x + Hu)|_{x=b} = 0, \quad t > 0, \quad (10.1.88)$$

$$u|_{x=a} = f(t), \quad t \in (0, 2(b - a)). \quad (10.1.89)$$

Эту задачу можно было бы исследовать, сведя ее к интегральному уравнению. Возможен, однако, и другой подход к ее исследованию, который основан на методе Фурье разделения переменных. Представим решение $u(x, t)$ прямой задачи (10.1.86)–(10.1.88) в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)y_n(x),$$

где $y_n(x)$ — собственные функции оператора l_q ($y_n(a) = 1$, $y_n'(a) = h$). Из (10.1.86), (10.1.87) следует, что функции $T_n(t)$ удовлетворяют уравнению

$$T_n'' + \lambda_n T_n = 0 \quad (10.1.90)$$

и условиям

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = \|y_n\|^{-2}. \quad (10.1.91)$$

Решение задачи Коши (10.1.90), (10.1.91) имеет вид

$$T_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} \|y_n\|^2} \sin \sqrt{\lambda_n} t. \quad (10.1.92)$$

Если $\lambda_n < 0$, то в формуле (10.1.92) следует использовать равенство

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{-\lambda_n} t}{\sqrt{-\lambda_n}}.$$

Ввиду (10.1.92), решение прямой задачи (10.1.86)–(10.1.88) представимо в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n} \|y_n\|^2} y_n(x). \quad (10.1.93)$$

Эту формулу можно переписать, используя спектральную функцию $\rho(\lambda)$:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} y(x, \lambda) d\rho(\lambda). \quad (10.1.94)$$

Полагая $x = a$, найдем связь между спектральной функцией $\rho(\lambda)$ и функцией $f(t)$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} d\rho(\lambda). \quad (10.1.95)$$

Зная функцию $\rho(\lambda)$, можно по формуле (10.1.95) вычислить $f(t)$ для $t \in (0, 2(b-a))$, решить обратную задачу (10.1.86)–(10.1.89) и, следовательно, построить оператор l_q .

Если, наоборот, функция $f(t)$ известна для $t \in (0, 2(b-a))$, то решаем обратную задачу (10.1.86)–(10.1.89), т. е. находим $q(x)$. Далее, решая прямую спектральную задачу, однозначно определяем $\rho(\lambda)$. Таким образом, между функциями $f(t)$, $t \in (0, 2(b-a))$, и спектральными функциями $\rho(\lambda)$ существует взаимно однозначное соответствие.

Формула, связывающая спектральные данные $\{\lambda_n\}$, $\{\|y_n\|\}$ и данные $f(t)$ обратной задачи (10.1.86)–(10.1.89), следует непосредственно из (10.1.93) и имеет вид

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad t \in (0, 2(b-a)).$$

10.2. Обратные задачи акустики

Рассмотрим одномерную обратную задачу акустики

$$\frac{1}{c^2(z)} v_{tt} = v_{zz} - \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} v_z, \quad z > 0, \quad t > 0, \quad (10.2.1)$$

$$v|_{t < 0} \equiv 0, \quad z > 0, \quad (10.2.2)$$

$$v_z|_{z=0} = \delta(t), \quad t > 0, \quad (10.2.3)$$

$$v(+0, t) = g(t), \quad t > 0, \quad (10.2.4)$$

где $\rho(z) > 0$ — плотность среды; $c(z) > 0$ — скорость распространения волн в среде. Прямая (обобщенная начально-краевая) задача (10.2.1)–(10.2.3) заключается в определении акустического давления $v(z, t)$ по известным $c(z)$ и $\rho(z)$. В обратной задаче (10.2.1)–(10.2.4) по дополнительной информации (10.2.4) надо найти либо $c(z)$, либо $\rho(z)$, либо некоторую их комбинацию. Покажем, что одновременно отыскать функции $c(z)$ и $\rho(z)$ в одномерной постановке невозможно, но можно найти их произведение $c(\psi(x))\rho(\psi(x))$, где $x = \varphi(z) := \int_0^z \frac{dz}{c(z)}$ — новая переменная, $\psi(\varphi(z)) = z$. Заметим, что для $\varphi(z)$ существует обратная функция $\psi(x)$, поскольку $c(z) > 0$.

Обозначим

$$u(x, t) = v(\psi(x), t), \quad a(x) = c(\psi(x)), \quad b(x) = \rho(\psi(x)).$$

Упражнение 10.2.1. Покажите, что обратная задача (10.2.1)–(10.2.4) в переменных (x, t) имеет вид

$$u_{tt} = u_{xx} - (a'/a + b'/b)u_x, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad x > 0,$$

$$u_x(+0, t) = c(+0)\delta(t), \quad t > 0, \quad u(+0, t) = g(t), \quad t > 0.$$

Обозначая $\sigma(x) = a(x)b(x)$, $c_0 = c(+0)$ и учитывая, что

$$a'/a + b'/b = (\ln a)' + (\ln b)' = (\ln(ab))' = (\ln \sigma)' = \sigma'/\sigma,$$

получим обратную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} u_x, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (10.2.5)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad x > 0, \quad (10.2.6)$$

$$u_x(+0, t) = c_0 \delta(t), \quad t > 0, \quad (10.2.7)$$

$$u(+0, t) = g(t), \quad t > 0, \quad (10.2.8)$$

в которой по дополнительной информации (10.2.8) требуется найти функции $u(x, t)$ и $\sigma(x) > 0$.

Упражнение 10.2.2. Докажите, что если $\sigma \in C^1(\mathbb{R}_+)$, то решение прямой задачи (10.2.5)–(10.2.7) имеет вид

$$u(x, t) = s(x)\theta(t-x) + \tilde{u}(x, t), \quad (10.2.9)$$

где $\tilde{u}(x, t)$ — непрерывная при $x \geq 0$ и гладкая при $t > x > 0$ функция, $s(x) = -c_0 \sqrt{\sigma(x)/\sigma(+0)}$, θ — тэта-функция Хевисайда.

Упражнение 10.2.3. Учитывая (10.2.9), убедитесь, что система (10.2.5)–(10.2.8) эквивалентна следующей обратной задаче относительно $u(x, t)$ и $s(x)$:

$$u_{tt} = u_{xx} - 2 \frac{s'(x)}{s(x)} u_x, \quad t > x > 0, \quad (10.2.10)$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad t > 0, \quad (10.2.11)$$

$$u(x, x+0) = s(x), \quad x > 0, \quad (10.2.12)$$

$$u|_{x=+0} = g(t), \quad t > 0. \quad (10.2.13)$$

Обратная задача (10.2.10)–(10.2.13) предпочтительнее первоначальной постановки (10.2.1)–(10.2.4) по нескольким причинам. Во-первых, прямая задача (10.2.10)–(10.2.12), в отличие от прямой задачи (10.2.1)–(10.2.3), не имеет сингулярных составляющих. Во-вторых, в обратной задаче (10.2.10)–(10.2.13) не два, а один неизвестный коэффициент $s(x)$. Поэтому после доказательства локальной теоремы существования решения этой задачи (см. теорему 10.2.4) станет ясно, что решение исходной обратной задачи (10.2.1)–(10.2.4) не является единственным, поскольку для одной функции $\sigma(x) = c(\psi(x))\rho(\psi(x))$ можно подобрать бесконечно много пар функций $\tilde{c}(\psi(x)) = Cc(\psi(x))$, $\tilde{\rho}(\psi(x)) = C^{-1}\rho(\psi(x))$, $C = \text{const}$, удовлетворяющих исходной обратной задаче. В-третьих, обратную задачу (10.2.10)–(10.2.13) оказывается возможным свести

к системе нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа (см. далее (10.2.16), (10.2.14), (10.2.17)), для которой мы получим серию результатов, включая теоремы о корректности и о сходимости различных методов численного решения.

Сведение к системе интегральных уравнений. Обозначим

$$q_1(x, t) = u_x(x, t), \quad q_2(x) = \frac{1}{s(x)}, \quad q_3(x) = 2 \frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}.$$

Отметим, что поскольку

$$q_2'(x) = -\frac{s'(x)}{s^2(x)} = -\frac{1}{2} q_3(x)q_2(x), \quad s(+0) = -c_0,$$

имеет место равенство

$$q_2(x) = -\frac{1}{c_0} - \frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi)q_2(\xi) d\xi. \quad (10.2.14)$$

Используя формулу Даламбера для задачи Коши (10.2.10), (10.2.11), (10.2.12), находим, что

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(t-x) + g(t+x)] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} q_3(\xi)q_1(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (10.2.15)$$

Дифференцируя (10.2.15) по x , получаем формулу

$$u_x(x, t) = q_1(x, t) = \frac{1}{2} [-g'(t-x) + g'(t+x)] + \frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi)[q_1(\xi, t+x-\xi) + q_1(\xi, t-x+\xi)] d\xi. \quad (10.2.16)$$

Положив в (10.2.15) $t = x + 0$ и используя равенство (10.2.12), мы приходим к соотношениям

$$s(x) = \frac{1}{2} [g(+0) + g(2x)] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi}^{2x-\xi} q_3(\xi)q_1(\xi, \tau) d\tau d\xi, \\ s'(x) = g'(2x) + \int_0^x q_3(\xi)q_1(\xi, 2x-\xi) d\xi.$$

Умножив последнее равенство почленно на (10.2.14), получим

$$q_3(x) = \left[-\frac{1}{c_0} - \frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi)q_2(\xi) d\xi \right] \\ \times \left[2g'(2x) + 2 \int_0^x q_3(\xi)q_1(\xi, 2x-\xi) d\xi \right]. \quad (10.2.17)$$

Уравнения (10.2.16), (10.2.14), (10.2.17) образуют систему нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Заметим, что если решение задачи (10.2.16), (10.2.14), (10.2.17) существует и $u \in$

$L_2(\Delta(l)) \cap C^2(\Delta(l))$, $s \in C^1(0, l)$, $g \in C^2(0, 2l)$, где $\Delta(l) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < t < 2l - x\}$, $l > 0$, то по формуле $\sigma(x) = (\sigma(+0)/c_0^2)s^2(x)$ можно найти решение обратной задачи (10.2.5)–(10.2.8) при условии, что $\sigma(+0)$ известно.

Формулировка обратной задачи в операторной форме
 $Aq = f$. Исследовать одномерную обратную задачу для уравнения акустики (10.2.10)–(10.2.13) будем в операторной форме

$$Aq = f, \quad (10.2.18)$$

где, в соответствии с (10.2.16), (10.2.14), (10.2.17),

$$Aq := q + Bq, \quad (10.2.19)$$

$$q(x, t) = (q_1, q_2, q_3)^\top, \quad (10.2.20)$$

$$q_1(x, t) = u_x(x, t), \quad q_2(x) = 1/s(x), \quad q_3(x) = 2s'(x)/s(x),$$

$$f(x, t) = (f_1, f_2, f_3)^\top, \quad (10.2.21)$$

$$f_1(x, t) = [g'(t+x) - g'(t-x)]/2,$$

$$f_2(x) = -1/c_0, \quad f_3(x) = -2g'(2x)/c_0,$$

$$Bq = (B_1q, B_2q, B_3q)^\top, \quad (10.2.22)$$

$$B_1q = -\frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi) [q_1(\xi, t+x-\xi) + q_1(\xi, t-x+\xi)] d\xi,$$

$$B_2q = \frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi) q_2(\xi) d\xi,$$

$$B_3q = 2B_2q[g'(2x) + B_4q] + (2/c_0)B_4q,$$

$$B_4q = \int_0^x q_3(\xi) q_1(\xi, 2x-\xi) d\xi.$$

Заметим, что если $\{u(x, t), s(x)\}$ — решение задачи (10.2.10)–(10.2.13), то вектор-функция $q(x, t)$, построенная по формуле (10.2.20), является решением задачи (10.2.18)–(10.2.22).

Определение 10.2.1. Будем говорить, что элемент $q(x, t) = (q_1, q_2, q_3)^\top$ принадлежит пространству $\bar{L}_2(l)$, если

$$q_1(x, t) \in L_2(\Delta(l)), \quad q_k(x) \in L_2(0, l), \quad k = 2, 3,$$

где $\Delta(l) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < t < 2l - x\}$, $l > 0$.

Введем в пространстве $\bar{L}_2(l)$ скалярное произведение

$$\langle q^{(1)}, q^{(2)} \rangle_{\bar{L}_2(l)} = \iint_{\Delta(l)} q_1^{(1)}(x, t) q_1^{(2)}(x, t) dx dt + \sum_{k=2}^3 \int_0^l q_k^{(1)}(x) q_k^{(2)}(x) dx \quad (10.2.23)$$

и согласованную с ним норму

$$\|q\|_{\vec{L}_2(l)}^2 := \langle q, q \rangle_{\vec{L}_2(l)} = \|q_1\|_{L_2(\Delta(l))}^2 + \sum_{k=2}^3 \|q_k\|_{L_2(0,l)}^2.$$

Упражнение 10.2.4. Удостоверьтесь, что операция, определенная формулой (10.2.23), является скалярным произведением, а $\vec{L}_2(l)$ — гильбертовым пространством.

Упражнение 10.2.5. Докажите, что если $q(x, t) \in \vec{L}_2(l)$ — решение задачи (10.2.18)–(10.2.22), то пара $\{u(x, t), s(x)\}$, где $u(x, t)$ построена по формуле (10.2.15), $s(x) = 1/q_2(x)$, является решением задачи (10.2.10)–(10.2.13).

Свойства оператора А. Изучим свойства оператора A вида (10.2.19), (10.2.22).

Лемма 10.2.1 (об ограниченности оператора А). *Предположим, что оператор A определен формулами (10.2.19), (10.2.22), и пусть $g' \in L_2(0, 2l)$. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\begin{aligned} \|B_1 q\|_{L_2(\Delta(l))}^2 &\leq \|q\|_{\vec{L}_2(l)}^4 l, \\ \|B_2 q\|_{L_2(0,l)}^2 &\leq (1/4) \|q\|_{\vec{L}_2(l)}^4 l, \\ \|B_3 q\|_{L_2(0,l)}^2 &\leq (3/2)(4/c_0^2 + \beta) \|q\|_{\vec{L}_2(l)}^4 + (3/2) \|q\|_{\vec{L}_2(l)}^8, \end{aligned}$$

где $\beta := \|g'\|_{L_2(0,2l)}^2$. Следовательно, $A: \vec{L}_2(l) \rightarrow \vec{L}_2(l)$.

Доказательство. Пусть $q = (q_1, q_2, q_3)^\top \in \vec{L}_2(l)$, $x \in (0, l)$. Оценим покомпонентно Bq :

$$\begin{aligned} |B_1 q| &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^x q_3^2(\xi) d\xi \right)^{1/2} \left(\left(\int_0^x q_1^2(\xi, t+x-\xi) d\xi \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^x q_1^2(\xi, t-x+\xi) d\xi \right)^{1/2} \right), \end{aligned}$$

$$|B_1 q|^2 \leq \frac{1}{2} \|q\|_{\vec{L}_2(l)}^2 \left[\int_0^x q_1^2(\xi, t+x-\xi) d\xi + \int_0^x q_1^2(\xi, t-x+\xi) d\xi \right],$$

$$\begin{aligned} \|B_1 q\|_{L_2(\Delta(l))}^2 &\leq \frac{1}{2} \|q\|_{\vec{L}_2(l)}^2 \int_0^l \int_x^{2l-x} \int_0^x (q_1^2(\xi, t+x-\xi) + q_1^2(\xi, t-x+\xi)) d\xi dt dx \\ &\leq \|q\|_{\vec{L}_2(l)}^2 \int_0^l \int_0^x \int_\xi^{2l-\xi} q_1^2(\xi, t) dt d\xi dx \leq \|q\|_{\vec{L}_2(l)}^4 l. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$|B_2q|^2 \leq \frac{1}{4} \int_0^x q_3^2(\xi) d\xi \int_0^x q_2^2(\xi) d\xi \leq \frac{1}{4} \|q\|_{\bar{L}_2(t)}^4,$$

$$\|B_2q\|_{L_2(0,t)}^2 \leq \frac{1}{4} \|q\|_{\bar{L}_2(t)}^4.$$

И, наконец,

$$|B_3q| \leq 2|B_2q| |g'(2x)| + 2|B_4q| (|B_2q| + 1/c_0),$$

$$|B_3q|^2 \leq 12|B_2q|^2 |g'(2x)|^2 + 12|B_4q|^2 (|B_2q|^2 + 1/c_0^2).$$

Оценим $\|B_4q\|_{L_2(0,t)}^2$:

$$|B_4q|^2 \leq \int_0^x q_3^2(\xi) d\xi \int_0^x q_1^2(\xi, 2x - \xi) d\xi \leq \|q\|_{\bar{L}_2(t)}^2 \int_0^x q_1^2(\xi, 2x - \xi) d\xi,$$

$$\|B_4q\|_{L_2(0,t)}^2 \leq \|q\|_{\bar{L}_2(t)}^2 \int_0^l \int_0^x q_1^2(\xi, 2x - \xi) d\xi dx$$

$$= \|q\|_{\bar{L}_2(t)}^2 \int_0^l \int_\xi^l q_1^2(\xi, 2x - \xi) dx d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \|q\|_{\bar{L}_2(t)}^2 \int_0^l \int_\xi^{2l-\xi} q_1^2(\xi, t) dt d\xi \leq \frac{1}{2} \|q\|_{\bar{L}_2(t)}^4.$$

Тогда

$$\|B_3q\|_{L_2(0,t)}^2 \leq 3\|q\|_{\bar{L}_2(t)}^4 \int_0^l [g'(2x)]^2 dx + 12 \left(\frac{1}{4} \|q\|_{\bar{L}_2(t)}^4 + \frac{1}{c_0^2} \right) \int_0^l |B_4q|^2$$

$$\leq (3/2) \|q\|_{\bar{L}_2(t)}^4 \beta + (3/2) (\|q\|_{\bar{L}_2(t)}^4 + 4/c_0^2) \|q\|_{\bar{L}_2(t)}^4$$

$$= (3/2) (4/c_0^2 + \beta) \|q\|_{\bar{L}_2(t)}^4 + (3/2) \|q\|_{\bar{L}_2(t)}^8.$$

Лемма доказана. \square

Лемма 10.2.2 (о существовании производной Фреше $A'(q)$).

Если $q \in \bar{L}_2(l)$, $g' \in L_2(0, 2l)$, то оператор A , определяемый формулами (10.2.19), (10.2.22), дифференцируем по Фреше, т. е. существует $A'(q) : \bar{L}_2(l) \rightarrow \bar{L}_2(l)$, и $A'(q)p = p + B'(q)p$ для $p \in \bar{L}_2(l)$, где $B'(q)p = (B'_1(q)p, B'_2(q)p, B'_3(q)p)^T$,

$$B'_1(q)p = -\frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi) [p_1(\xi, t + x - \xi) + p_1(\xi, t - x + \xi)] d\xi$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^x p_3(\xi) [q_1(\xi, t + x - \xi) + q_1(\xi, t - x + \xi)] d\xi,$$

$$B'_2(q)p = \frac{1}{2} \int_0^x [q_3(\xi)p_2(\xi) + q_2(\xi)p_3(\xi)] d\xi,$$

$$B'_3(q)p = 2B'_2(q)p[g'(2x) + B_4q] + 2B'_4(q)p[B_2q + 1/c_0],$$

$$B'_4(q)p = \int_0^x [q_3(\xi)p_1(\xi, 2x - \xi) + p_3(\xi)q_1(\xi, 2x - \xi)] d\xi.$$

Более того, имеют место следующие оценки:

$$\|B'_1(q)p\|_{L_2(\Delta(l))}^2 \leq 4\|q\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 \|p\|_{\tilde{L}_2(l)}^2,$$

$$\|B'_2(q)p\|_{L_2(0,l)}^2 \leq \|p\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 \|q\|_{\tilde{L}_2(l)}^2,$$

$$\|B'_3(q)p\|_{L_2(0,l)}^2 \leq 8(\beta + 4/c_0^2)\|q\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 \|p\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 + 16\|q\|_{\tilde{L}_2(l)}^6 \|p\|_{\tilde{L}_2(l)}^2.$$

Лемма 10.2.3 (о свойствах сопряженного оператора $[A'(q)]^*$).

Пусть оператор A определяется формулами (10.2.19), (10.2.22) и $g' \in L_2(0, 2l)$. Тогда для любого $q \in \tilde{L}_2(l)$ оператор $A'(q) : \tilde{L}_2(l) \rightarrow \tilde{L}_2(l)$ имеет сопряженный оператор $[A'(q)]^* : \tilde{L}_2(l) \rightarrow \tilde{L}_2(l)$, причем $[A'(q)]^*r = r + [B'(q)]^*r$ и оператор $[B'(q)]^*$ действует на $r \in \tilde{L}_2(l)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} [B'_1(q)]^*r &= -\frac{1}{2}q_3(x) \left\{ \int_x^{(x+t)/2} r_1(\xi, t+x-\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{l-(t-x)/2} r_1(\xi, t-x+\xi) d\xi - 2 \left[B_2q \left(\frac{t+x}{2} \right) + \frac{1}{c_0} \right] r_3 \left(\frac{t+x}{2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$[B'_2(q)]^*r = \frac{1}{2}q_3(x) \int_x^l \{r_2(\xi + 2r_3(\xi))[g'(2\xi) + B_4q(\xi)]\} d\xi,$$

$$\begin{aligned} [B'_3(q)]^*r &= -\frac{1}{2} \int_x^l \left\{ \int_\xi^{2l-\xi} [q_1(x, t+\xi-x) + q_1(x, t-\xi+x)] r_1(\xi, t) dt \right. \\ &\quad \left. - q_2(x)r_2(\xi) - 2q_2(x)r_3(\xi)[g'(2\xi) + B_4q(\xi)] \right. \\ &\quad \left. - 4q_1(x, 2\xi-x) \left[B_2q(\xi) + \frac{1}{c_0} \right] r_3(\xi) \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Кроме того, имеют место оценки:

$$\begin{aligned} \|[B'_1(q)]^*r\|_{L_2(\Delta(l))}^2 &\leq 2l\|r\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 \|q\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 \\ &\quad + 2(\|q\|_{\tilde{L}_2(l)}^4 + 4/c_0^2)\|r\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 \|q\|_{\tilde{L}_2(l)}^2, \end{aligned}$$

$$\|[B'_2(q)]^*r\|_{L_2(0,l)}^2 \leq (3/4)\|q\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 \|r\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 (l + 2\beta + 2\|q\|_{\tilde{L}_2(l)}^4),$$

$$\|[B'_3(q)]^*r\|_{L_2(0,l)}^2 \leq 3\|r\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 \|q\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 (8/c_0^2 + \beta + 3l/2 + 3\|q\|_{\tilde{L}_2(l)}^4).$$

Лемма 10.2.4. Пусть оператор A определяется формулами (10.2.19), (10.2.22), $g' \in L_2(0, 2l)$. Тогда для любого $q \in \vec{L}_2(l)$ существует обратный к $A'(q)$ оператор $[A'(q)]^{-1}: \vec{L}_2(l) \rightarrow \vec{L}_2(l)$ и имеет место следующая оценка:

$$\|[A'(q)]^{-1}r\|_{\vec{L}_2(l)} \leq M_1 \|r\|_{\vec{L}_2(l)}, \quad (10.2.24)$$

где $M_1 = M_1(l, c_0, \beta, \|q\|) = \text{const}$.

Доказательство. Обозначим для некоторого $r \in \vec{L}_2(l)$

$$[A'(q)]^{-1}r = p. \quad (10.2.25)$$

Тогда

$$A'(q)p = p + B'(q)p = r \quad (10.2.26)$$

и значение оператора $[A'(q)]^{-1}$ на элементе r определяется как решение линейного операторного уравнения (10.2.26), которое является системой линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. \square

Упражнение 10.2.6. Докажите, что решение (10.2.26) существует и единственно в $\vec{L}_2(l)$.

Умножив (10.2.26) скалярно на p , получим

$$\|p\|^2 = \langle r, p \rangle - \langle B'(q)p, p \rangle \leq \|r\| \|p\| + \|p\| \|[B'(q)]^*p\|.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\vec{L}_2(l)}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\vec{L}_2(l)}$. Следовательно,

$$\|p\| \leq \|r\| + \|[B'(q)]^*p\|,$$

откуда

$$\|p\|^2 \leq 2\|r\|^2 + 2\|[B'(q)]^*p\|^2. \quad (10.2.27)$$

Пусть $p = (p_1, p_2, p_3)^\top \in \vec{L}_2(l)$. Обозначим

$$\|p\|^2(l, x) = \|p_1\|^2(l, x) + \|p_2\|^2(x) + \|p_3\|^2(x),$$

где

$$\|p_1\|^2(l, x) = \int_x^l \int_\xi^{2l-\xi} p_1^2(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$\|p_k\|^2(x) = \int_x^l p_k^2(\xi) d\xi, \quad k = 2, 3.$$

Пользуясь леммой 10.2.3, можно доказать, что

$$\|[B'(q)]^*p\|^2(l, x) \leq \int_x^l \mu_0(\xi) \|p\|^2(l, \xi) d\xi, \quad (10.2.28)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_0(x) = & q_3^2(x) \left(2l + \|q\|^4 + \frac{4}{c_0^2} \right) + \frac{3}{2} q_3^2(x) \left(\frac{l}{2} + \beta + \|q\|^4 \right) \\ & + \frac{7}{2} \|q\|^2 + \frac{7}{4} (l + 2\beta + 2\|q\|^4) q_2^2(x) + 7 \left(\|q\|^4 + \frac{4}{c_0^2} \right) \int_x^l q_1^2(x, 2\zeta - x) d\zeta. \end{aligned} \quad (10.2.29)$$

Из (10.2.27), (10.2.28) следует, что

$$\|p\|^2(l, x) \leq 2\|r\|^2 + 2 \int_x^l \mu_0(\xi) \|p\|^2(l, \xi) d\xi.$$

Применив к этому выражению лемму Беллмана — Гронуолла, получим (10.2.24) с постоянной

$$M_1 = \sqrt{2} \exp \left(\int_0^l \mu_0(\xi) d\xi \right). \quad (10.2.30)$$

10.2.1. Исследование одномерной обратной задачи акустики

Условная устойчивость в H^1 . Обратная задача (10.2.5)–(10.2.8) является условно устойчивой, если решение задачи $\sigma(x)$ и данные $g(t)$ принадлежат специальным классам функций.

Определение 10.2.2 (класс решений обратной задачи). Будем говорить, что $\sigma(x) \in \Sigma(l, M_0, c_0, \rho_0, \sigma_*)$, если $\sigma(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\sigma(x) \in H^1(0, l)$;
- 2) $\|\sigma\|_{H^1(0, l)} \leq M_0, M_0 = \text{const}$;
- 3) $0 < \sigma_* \leq \sigma(x), x \in (0, l), \sigma_* = \text{const}$;
- 4) $\sigma(+0) = c_0 \rho_0, c_0 = c(+0), \rho_0 = \rho(+0)$.

Определение 10.2.3 (класс данных обратной задачи). Будем говорить, что $g(t) \in \mathcal{G}(l, \beta, c_0)$, если g удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $g(t) \in H^1(0, 2l)$;
- 2) $\|g'\|_{L_2(0, 2l)}^2 \leq \beta, \beta = \text{const}$;
- 3) $g(+0) = -c_0$.

Теорема 10.2.1. Пусть для $g^{(1)}, g^{(2)}$ из класса $\mathcal{G}(l, \beta, c_0)$ существуют $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)} \in \Sigma(l, M_0, c_0, \rho_0, \sigma_*)$ — решения соответствующих обратных задач (10.2.5)–(10.2.8). Тогда

$$\begin{aligned} \|\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}\|_{H^1(0, l)}^2 & \leq C \|g^{(1)} - g^{(2)}\|_{H^1(0, 2l)}^2, \\ C & = C(l, M_0, \beta, c_0, \rho_0, \sigma_*) = \text{const}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 10.2.1 можно найти в [8].

Корректность обратной задачи для достаточно малых данных. Рассмотрим нелинейную систему интегральных уравнений Вольтерра в операторном виде

$$q(x, t) + Bq(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Delta(l). \quad (10.2.31)$$

Компоненты Bq определены после формулы (10.2.22). Введем оператор

$$Vq = f - Bq, \quad (x, t) \in \Delta(l). \quad (10.2.32)$$

Лемма 10.2.5. Если $f \in \vec{L}_2(l)$, то

$$V : \vec{L}_2(l) \longrightarrow \vec{L}_2(l). \quad (10.2.33)$$

Определим k -нормы ($k \geq 0$) для $q \in \vec{L}_2(l)$:

$$\|q_1\|_k^2(x) = \int_0^x \|q_1\|_{(1)}^2(\xi) \exp\{-2k\xi\} d\xi, \quad x \in (0, l),$$

$$\|q_1\|_{(1)}^2(x) = \int_x^{2l-x} q_1^2(x, t) dt, \quad x \in (0, l),$$

$$\|q_j\|_k^2(x) = \int_0^x q_j^2(\xi) \exp\{-2k\xi\} d\xi, \quad x \in (0, l), \quad j = 2, 3,$$

$$\|q\|_k^2(x) = \sum_{j=1}^3 \|q_j\|_k^2(x), \quad \|q\|_k := \|q\|_k(l).$$

Для $f \in \vec{L}_2(l)$, $\varepsilon > 0$, $k \geq 0$ определим шар

$$B(f, \varepsilon, k) = \{q \in \vec{L}_2(l) : \|f - q\|_k < \varepsilon\}.$$

Лемма 10.2.6. Предположим, что оператор V определяется по формуле (10.2.32). Пусть k удовлетворяет соотношению

$$16l^2 + 2l + 3/2 < k \quad (10.2.34)$$

и выполняются условия

$$\|f\|_{\vec{L}_2(l)}^2 < \frac{1}{2} \exp\{-2kl\}, \quad (10.2.35)$$

$$\varepsilon^2 < \frac{1}{2} \exp\{-2kl\}. \quad (10.2.36)$$

Тогда

$$V(B(f, \varepsilon, k)) \subset B(f, \varepsilon, k). \quad (10.2.37)$$

Лемма 10.2.7. Пусть $f \in \vec{L}_2(l)$, $c_0 \neq 0$, $l > 0$, $k \in (M(l, c_0), \infty)$, где

$$M(l, c_0) = \max\{24/c_0^2 + 5l + 4c_0^2 + 16, 16l^2 + 2l + 3/2\}.$$

Тогда, если f и $\varepsilon > 0$ удовлетворяют (10.2.35) и (10.2.36), то V является сжимающим оператором в $B(f, \varepsilon, k)$ с константой сжатия $\nu^2 = M(l, c_0)/k$.

Теорема 10.2.2 (о корректности для достаточно малых данных). Пусть $f \in \tilde{L}_2(l)$, $l > 0$, $c_0 \neq 0$,

$$k \in (M(l, c_0), \infty), \quad (10.2.38)$$

$$\varepsilon^2 \in \left(0, \frac{1}{2} e^{-2kl}\right). \quad (10.2.39)$$

Тогда, если

$$\|f\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 < \varepsilon^2, \quad (10.2.40)$$

то система (10.2.31) имеет единственное решение $q \in \tilde{L}_2(l)$, непрерывно зависящее от данных f .

Схема доказательства. Согласно лемме 10.2.6 и теореме Банаха о неподвижной точке оператор V имеет единственную неподвижную точку $\bar{q} \in B(f, \varepsilon, k)$, являющуюся решением уравнения

$$q(x, t) = Vq(x, t), \quad (x, t) \in \Delta(l). \quad (10.2.41)$$

Докажем устойчивость. Допустим, что $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ — решения соответствующих уравнений

$$q^{(j)} = f^{(j)} + Bq^{(j)}, \quad j = 1, 2. \quad (10.2.42)$$

Обозначив

$$\tilde{q} = q^{(1)} - q^{(2)}, \quad \tilde{f} = f^{(1)} - f^{(2)},$$

получим

$$\tilde{q} = \tilde{f} + Bq^{(1)} - Bq^{(2)}. \quad (10.2.43)$$

Так же, как в разделе 4.4, мы можем показать, что

$$\|\tilde{q}\|_k \leq \|\tilde{f}\|_k + \nu \|\tilde{q}\|_k,$$

где $\nu \in (0, 1)$ — константа сжатия оператора V , определенная в лемме 10.2.7. Следовательно,

$$\|\tilde{q}\|_k \leq \frac{1}{1-\nu} \|\tilde{f}\|_k \leq \frac{1}{1-\nu} \|\tilde{f}\|. \quad (10.2.44)$$

Используя свойство k -нормы

$$\|\tilde{q}\|_{\tilde{L}_2(l)} \leq e^{2kl} \|\tilde{q}\|_k,$$

мы получим из (10.2.44) соотношение

$$\|\tilde{q}\|_{\tilde{L}_2(l)} \leq \frac{1}{1-\nu} e^{2kl} \|\tilde{f}\|_{\tilde{L}_2(l)}. \quad (10.2.45)$$

Из неравенства (10.2.45) следует непрерывная зависимость решения $q(x, t)$ системы (10.2.31) от начальных данных $f(x, t)$.

Теорема 10.2.3 (о корректности в малом). Пусть $f \in \tilde{L}_2(l_0)$, $l_0 > 0$, $c_0 \neq 0$. Тогда существует величина $l_* \in (0, l_0)$, такая, что для любого $l \in (0, l_*)$ система (10.2.31) однозначно разрешима в $\tilde{L}_2(l)$ и ее решение $q(x, t)$ непрерывно зависит от данных $f \in \tilde{L}_2(l)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 10.1.1 с той лишь разницей, что вместо C -норм нужно использовать L_2 -нормы.

Теорема 10.2.4 (о корректности в окрестности точного решения). Пусть для некоторых $l > 0$ и $f \in \tilde{L}_2(l)$ существует $q_T \in \tilde{L}_2(l)$ — решение задачи (10.2.18)–(10.2.22). Тогда найдется $\delta > 0$, такое, что для любого $f^\delta \in B(f, \delta)$ существует решение $q^\delta \in \tilde{L}_2(l)$ возмущенной задачи $Aq = f^\delta$, непрерывно зависящее от f^δ . Здесь

$$B(f, \delta) := B(f, \delta, 0) = \{q \in \tilde{L}_2(l) : \|q - f\| < \delta\}.$$

Доказательство этой теоремы совпадает с доказательством теоремы 4.8, если заменить C -нормы на L_2 -нормы.

10.2.2. Методы решения обратной задачи акустики

Метод последовательных приближений. Запишем схему метода последовательных приближений для рассматриваемой задачи (10.2.18)–(10.2.22). Пусть задано начальное приближение q_0 . Полагая, что известно n -ое приближение q_n ; тогда q_{n+1} вычисляется следующим образом:

$$q_{n+1} = f - Aq_n. \quad (10.2.46)$$

Теорема 10.2.5 (о сходимости метода последовательных приближений). Пусть $l > 0$ и для $f \in \tilde{L}_2(l)$ существует решение $q_T \in \tilde{L}_2(l)$ задачи $Aq = f$. Тогда можно указать такие $\delta_* > 0$ и $\nu_* \in (0, 1)$, что если $q_0 \in B(q_T, \delta_*)$, то итерации метода последовательных приближений сходятся к решению q_T задачи $Aq = f$ при $n \rightarrow \infty$ и верна оценка

$$\|q_T - q_n\|_{\tilde{L}_2(l)} \leq \nu_*^n \delta_*. \quad (10.2.47)$$

Метод итераций Ландвебера (метод простой итерации). Метод итераций Ландвебера для рассматриваемой задачи $Aq = f$ состоит в следующем. Пусть задано начальное приближение q_0 . Полагая, что известно n -ое приближение q_n , вычисляем q_{n+1} по формуле

$$q_{n+1} = q_n - \alpha [A'(q_n)]^* (Aq_n - f), \quad \alpha > 0. \quad (10.2.48)$$

Теорема 10.2.6 (о сходимости метода итераций Ландвебера). Пусть $l > 0$ и для $f \in \tilde{L}_2(l)$ существует решение $q_T \in \tilde{L}_2(l)$ задачи $Aq = f$. Тогда найдутся такие $\nu_* \in (0, 1)$, $\delta_* > 0$, $\alpha_* > 0$, что если $q_0 \in B(q_T, \delta_*)$, $\alpha \in (0, \alpha_*)$, то итерации Ландвебера q_{n+1} сходятся к решению q_T задачи $Aq = f$ при $n \rightarrow \infty$ и верна оценка

$$\|q_T - q_n\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 \leq \nu_*^n \delta_*^2. \quad (10.2.49)$$

Метод наискорейшего спуска. Рассмотрим функционал

$$J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle_{\tilde{L}_2(l)} = \|Aq - f\|_{\tilde{L}_2(l)}^2. \quad (10.2.50)$$

Метод наискорейшего спуска для задачи $Aq = f$ определяется рекуррентными формулами

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J' q_n. \quad (10.2.51)$$

Здесь q_0 — заданное начальное приближение, $J' q$ — градиент функционала (10.2.50), параметр спуска α_n определяется из условия

$$J(q_n - \alpha_n J' q_n) = \inf_{\alpha > 0} (J(q_n - \alpha J' q_n)), \quad \alpha_n > 0. \quad (10.2.52)$$

Напомним, что

$$J' q = 2[A'(q)]^*(Aq - f). \quad (10.2.53)$$

Теорема 10.2.7 (о единственности стационарной точки).

Пусть задача $Aq = f$ имеет единственное решение $q_T \in \tilde{L}_2(l)$. Если уравнение $J' q = 0$ также имеет только одно решение в $\tilde{L}_2(l)$, то это решение совпадает с q_T .

Теорема 10.2.8 (о сходимости метода наискорейшего спуска). Пусть $l > 0$ и для $f \in \tilde{L}_2(l)$ существует решение $q_T \in \tilde{L}_2(l)$ задачи $Aq = f$. Тогда можно указать такие $\delta_* > 0$, $\nu_* \in (0, 1)$, $M_* > 0$, что если $q_0 \in B(q_T, \delta_*)$, то итерации q_n метода наискорейшего спуска сходятся к q_T при $n \rightarrow \infty$ и верна оценка

$$\|q_n - q_T\|_{\tilde{L}_2(l)}^2 \leq M_* \nu_*^n \delta_*^2. \quad (10.2.54)$$

Метод Ньютона — Канторовича. Итерации метода Ньютона — Канторовича вычисляются по формуле

$$q_{n+1} = q_n + [A'(q_n)]^{-1}(f - Aq_n). \quad (10.2.55)$$

Начальное приближение q_0 , как и ранее, считается заданным.

Теорема 10.2.9 (о сходимости метода Ньютона — Канторовича). Пусть $l > 0$ и для $f \in \tilde{L}_2(l)$ существует решение $q_T \in \tilde{L}_2(l)$ задачи $Aq = f$. Тогда можно указать такие $\delta_* > 0$ и $\nu_* \in (0, 1)$, что если $q_0 \in B(q_T, \delta_*)$, то итерации q_n метода Ньютона — Канторовича сходятся к точному решению q_T при $n \rightarrow \infty$ и верна оценка

$$\|q_n - q_T\|_{\tilde{L}_2(l)} \leq \nu_*^n \|q_0 - q_T\|_{\tilde{L}_2(l)}. \quad (10.2.56)$$

10.3. Одномерная обратная задача электродинамики

Рассмотрим постановку прямой и обратной задач для системы уравнений Максвелла [15]

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \operatorname{rot} \mathbf{H} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{CT}} = \mathbf{0}, \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (10.3.1)$$

Здесь $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^\top$, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^\top$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей; ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; σ — проводимость среды; \mathbf{j}^{CT} — плотность сторонних токов.

Поверхность Земли в данной модели считается плоской. Все физическое пространство \mathbb{R}^3 переменных $x = (x_1, x_2, x_3)$ разделим на два полупространства:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_-^3 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 < 0\} \quad (\text{воздух}), \\ \mathbb{R}_+^3 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\} \quad (\text{земля}). \end{aligned}$$

Параметры ε, μ, σ считаем в \mathbb{R}_-^3 постоянными, а в $\overline{\mathbb{R}_+^3}$ — гладкими функциями.

Функции ε, μ, σ на границе $x_3 = 0$ имеют конечный разрыв, поэтому система (10.3.1) понимается в следующем смысле: считается, что для векторов \mathbf{E}, \mathbf{H} система (10.3.1) выполнена отдельно для точек $x \in \mathbb{R}_-^3$ и $x \in \mathbb{R}_+^3$, а при $x_3 = 0$ тангенциальные компоненты векторов \mathbf{E}, \mathbf{H} удовлетворяют условиям непрерывности

$$E_j|_{x_3=-0} = E_j|_{x_3=+0}, \quad H_j|_{x_3=-0} = H_j|_{x_3=+0}, \quad j = 1, 2. \quad (10.3.2)$$

Предполагается, что электромагнитное поле до момента времени $t = 0$ отсутствует, т. е.

$$\mathbf{E}|_{t < 0} \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}|_{t < 0} \equiv \mathbf{0}, \quad (10.3.3)$$

а затем индуцируется сторонним (внешним) током $\mathbf{j}^{\text{CT}} = \mathbf{j}^{\text{CT}}(x, t)$.

Задачу нахождения векторов \mathbf{E}, \mathbf{H} из соотношений (10.3.1)–(10.3.3) при заданных коэффициентах ε, μ, σ и стороннем токе \mathbf{j}^{CT} называют *прямой задачей электродинамики*.

В разведочной геофизике наибольший интерес представляют задачи по определению коэффициентов ε, μ, σ как функций точки $x \in \mathbb{R}_+^3$ (предполагается, что в \mathbb{R}_-^3 эти коэффициенты, а также \mathbf{j}^{CT} , известны и постоянны). Для этого на плоскости $x_3 = 0$ задаются тангенциальные компоненты электромагнитного поля, отвечающие решению задачи (10.3.1)–(10.3.3):

$$E_j|_{x_3=0} = \varphi_j(x_1, x_2, t), \quad H_j|_{x_3=0} = \psi_j(x_1, x_2, t), \quad j = 1, 2. \quad (10.3.4)$$

Обратная задача электродинамики состоит в определении ε , μ , σ по известным функциям φ_j , ψ_j , $j = 1, 2$.

В этом разделе мы предполагаем, что носитель функции \mathbf{j}^{CT} лежит в области $D^- = \{(x, t) \in \mathbb{R}^4: x \in \mathbb{R}_-^3, t \geq 0\}$, где $\mathbb{R}_-^3 = \{x \in \mathbb{R}^3: x_3 \leq 0\}$.

Функции φ_j , ψ_j связаны между собой линейными соотношениями. В самом деле, если функции φ_j известны, то, решая начально-краевую задачу (10.3.1)–(10.3.3) в области D^- с условиями $E_j|_{x_3=0} = \varphi_j$, $j = 1, 2$, можно однозначно найти \mathbf{E} , \mathbf{H} и тем самым вычислить ψ_j , $j = 1, 2$. Таким образом, в (10.3.4) независимы только две функции, например, φ_1 , φ_2 или ψ_1 , ψ_2 .

Отметим, что обычно система уравнений (10.3.1) дополняется следующими соотношениями:

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0, \quad (10.3.5)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho. \quad (10.3.6)$$

В дальнейшем эти соотношения не рассматриваются, так как (10.3.5) является следствием (10.3.1)–(10.3.3), а (10.3.6) можно рассматривать как независимое уравнение для определения плотности зарядов ρ . Для нахождения вектора \mathbf{E} достаточно решить задачу (10.3.1)–(10.3.3).

Пусть источник стороннего тока имеет вид

$$\mathbf{j}^{\text{CT}} = (0, 1, 0)^\top g(x_1)\delta(x_3)\theta(t). \quad (10.3.7)$$

Задание стороннего тока в виде (10.3.7) соответствует мгновенному включению тока, параллельного оси x_2 , сосредоточенного на земной поверхности $x_3 = 0$ и распределенного по оси x_1 с плотностью $g(x_1)$ (в частности, это может быть бесконечно длинный кабель). Предположим также, что коэффициенты системы уравнений Максвелла не зависят от переменной x_2 :

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon(x_1, x_3) \geq \varepsilon_0 > 0, \quad \mu = \mu(x_1, x_3) \geq \mu_0 > 0, \\ \sigma = \sigma(x_1, x_3) \geq 0, \quad \forall (x_1, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (10.3.8)$$

Нетрудно показать [7], что при предположениях (10.3.3), (10.3.7), (10.3.8) в системе уравнений Максвелла ненулевыми останутся только три компоненты E_2 , H_1 , H_3 и при этом сама система будет иметь вид

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} H_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} H_1 + \sigma E_2 + g(x_1)\delta(x_3)\theta(t) = 0, \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H_1 - \frac{\partial}{\partial x_3} E_2 = 0, \quad \mu \frac{\partial}{\partial t} H_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} E_2 = 0. \end{cases} \quad (10.3.9)$$

Пусть известна дополнительная информация вида

$$E_2|_{x_3=0} = \varphi_2(x_1, t), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (10.3.10)$$

Необходимым условием того, что функция $\varphi_2(x_1, t)$ является следом решения задачи (10.3.9) с начальными условиями $(E_2, H_1, H_3)|_{t < 0} \equiv 0$ является равенство

$$\varphi_2(x_1, +0) = g(x_1)/2.$$

Если функция $\varphi_2(x_1, t)$ задана, а коэффициенты системы (10.3.9) известны при $x_3 \leq 0$, мы можем, используя (10.3.10) как граничное условие, решить прямую задачу при $x_3 \leq 0$ и таким образом определить

$$H_1|_{x_3=+0} = \psi_1(x_1, t). \quad (10.3.11)$$

Задание функции $\psi_1(x_1, t)$ позволяет избежать вычисления прямой задачи при $x_3 < 0$ (в воздухе).

После исключения из системы (10.3.9) частных производных компонент H_1, H_3 получим относительно E_2 уравнение второго порядка

$$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_2 + \sigma \frac{\partial}{\partial t} E_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_1} E_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_3} E_2 \right) - g(x_1) \delta(x_3) \theta'(t),$$

$$x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_3 \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (10.3.12)$$

с начальным условием

$$E_2|_{t < 0} \equiv 0 \quad (10.3.13)$$

и граничными данными

$$E_2|_{x_3=+0} = \varphi_2(x_1, t), \quad \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_3} E_2 \right) \Big|_{x_3=+0} = \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(x_1, t). \quad (10.3.14)$$

Если коэффициенты уравнения (10.3.12) не зависят от переменной x_1 , то можно применить преобразование Фурье $F_{x_1}[\cdot]$ и перейти к постановке одномерной задачи для образа Фурье \tilde{E}_2 функции E_2 :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{E}_2}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \tilde{E}_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{E}_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\lambda^2}{\mu} \tilde{E}_2 - \tilde{g} \delta(x_3) \delta(t), \quad (10.3.15)$$

$$\tilde{E}_2|_{t < 0} \equiv 0, \quad \tilde{E}_2|_{x_3=0} = \tilde{\varphi}_2, \quad \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \tilde{E}_2}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=+0} = \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial t}, \quad (10.3.16)$$

где λ — параметр преобразования Фурье; \tilde{g} , $\tilde{\varphi}_2$, $\tilde{\psi}_1$ — образы Фурье по x_1 функций g , φ_2 , ψ_1 соответственно.

Предположим, что μ — положительная постоянная. Введем следующие обозначения:

$$v(x_3, t) = v(\lambda, x_3, t) = \tilde{E}_2(\lambda, x_3, t), \quad g^\lambda = \tilde{g}(\lambda),$$

$$f_0^\lambda(t) = \tilde{\varphi}_2(\lambda, t), \quad f_1^\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_1(\lambda, t).$$

Тогда из (10.3.15), (10.3.16) получим

$$v_{tt} + \frac{\sigma}{\varepsilon} v_t = \frac{1}{\mu \varepsilon} (v_{x_3 x_3} - \lambda^2 v) - \frac{1}{\varepsilon} g^\lambda \delta(x_3) \delta(t), \quad x_3 \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (10.3.17)$$

$$v|_{t<0} \equiv 0, \quad (10.3.18)$$

$$v|_{x_3=0} = f_0^\lambda(t), \quad t \geq 0, \quad (10.3.19)$$

$$v_{x_3}|_{x_3=+0} = \mu f_1^\lambda(t), \quad t \geq 0. \quad (10.3.20)$$

Прямая задача заключается в определении функции $v(x_3, t)$ из соотношений (10.3.17), (10.3.18) по известным $\varepsilon(x_3)$, μ , $\sigma(x_3)$.

В обратной задаче требуется найти $\varepsilon(x_3)$ или $\sigma(x_3)$ (или обе функции $\varepsilon(x_3)$ и $\sigma(x_3)$) из соотношений (10.3.17)–(10.3.20) по известным функциям $f_0^\lambda(t)$ и $f_1^\lambda(t)$ при некотором фиксированном $\lambda = \lambda_0$ (или при двух значениях $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2$).

При исследовании прямых и обратных задач для уравнения (10.3.17) удобно перейти к новой переменной

$$x = x(x_3) = \int_0^{x_3} \sqrt{\mu\varepsilon(\xi)} d\xi, \quad x_3 = \omega(x),$$

и к новым функциям

$$a(x) = \frac{\sigma(\omega(x))}{\varepsilon(\omega(x))}, \quad b(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon(\omega(x))}},$$

$$u(x, t) = v(\omega(x), t), \quad \gamma = -g^\lambda \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}}.$$

Тогда (10.3.17), (10.3.18) примут вид

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - Pu(x, t) + \gamma\delta(x)\delta(t), \quad (10.3.21)$$

$$u|_{t<0} \equiv 0. \quad (10.3.22)$$

Здесь

$$Pu(x, t) = a(x)u_t(x, t) + \frac{b'(x)}{b(x)} u_x(x, t) + (\lambda b(x))^2 u(x, t).$$

Лемма 10.3.1. Если $a \in C^1(\mathbb{R})$, то решение прямой задачи (10.3.21), (10.3.22) существует, единственно в $C^2(t \geq |x|)$ и имеет вид

$$u(x, t) = s(x)\theta(t - |x|) + \tilde{u}(x, t),$$

где $\tilde{u}(x, t)$ — непрерывная функция, $s(x)$ — решение следующей задачи:

$$\begin{cases} s'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{b'(x)}{b(x)} - a(x) \operatorname{sign} x \right) s(x), & x \in \mathbb{R}, \\ s(0) = \gamma/2. \end{cases} \quad (10.3.23)$$

Доказательство этой леммы приводится в [15].

Следовательно, начальное условие (10.3.22) можно заменить условиями на характеристиках

$$u|_{t=|x|} = s(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (10.3.24)$$

а уравнение (10.3.21) можно заменить следующим:

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - Pu(x, t), \quad 0 < |x| < t. \quad (10.3.25)$$

Поскольку все коэффициенты предполагаются известными для $x_3 < 0$, мы ограничимся областью

$$\Delta(l) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < t < 2l - x\}.$$

В *прямой задаче* нужно найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую соотношениям

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - Pu(x, t), \quad (x, t) \in \Delta(l), \quad (10.3.26)$$

$$u|_{t=x} = s(x), \quad x \in (0, l), \quad (10.3.27)$$

$$u_x(0, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}} f_1^\lambda(t), \quad t \in (0, 2l), \quad (10.3.28)$$

по известным функциям $a(x)$, $b(x)$, $f_1^\lambda(t)$. Отметим, что одно из дополнительных условий обратной задачи (10.3.20) используется здесь для решения прямой задачи (10.3.26)–(10.3.28) при $x > 0$.

Пусть известна дополнительная информация:

$$u(0, t) = f_0^\lambda(t), \quad t \in (0, 2l). \quad (10.3.29)$$

В *обратной задаче* требуется восстановить $a(x)$ из соотношений (10.3.26)–(10.3.28) по известной дополнительной информации (10.3.29). Функция $b(x)$ считается известной.

Сведение обратной задачи (10.3.26)–(10.3.29) к системе интегральных уравнений и к операторному уравнению $Aq = f$. Рассмотрим обратную задачу (10.3.26)–(10.3.29) в области $\Delta(l)$. Заметим, что функция $s(x)$ есть решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$s(x) = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x \left[\frac{b'(\xi)}{b(\xi)} - a(\xi) \right] s(\xi) d\xi, \quad x \in (0, l). \quad (10.3.30)$$

Обращая в (10.3.26) оператор $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ с учетом (10.3.28), (10.3.29), получаем

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2} [f_0^\lambda(t+x) + f_0^\lambda(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}} f_1^\lambda(\xi) d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} Pu(\xi, \tau) d\tau d\xi, \quad (x, t) \in \Delta(l). \end{aligned} \quad (10.3.31)$$

К (10.3.31) добавим еще два уравнения, полученных в результате дифференцирования обеих частей равенства (10.3.31) по x и по t :

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2} [(f_0^\lambda)'(t+x) - (f_0^\lambda)'(t-x)] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}} (f_1^\lambda(t+x) + f_1^\lambda(t-x)) + \frac{1}{2} \int_0^x (Pu(\xi, t+x-\xi) + Pu(\xi, t-x+\xi)) d\xi, \quad (10.3.32)$$

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2} [(f_0^\lambda)'(t+x) + (f_0^\lambda)'(t-x)] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}} (f_1^\lambda(t+x) - f_1^\lambda(t-x)) + \frac{1}{2} \int_0^x [Pu(\xi, t+x-\xi) - Pu(\xi, t-x+\xi)] d\xi. \quad (10.3.33)$$

Положим в (10.3.31) $t = x + 0$ и воспользуемся условием (10.3.27):

$$s(x) = \frac{1}{2} [f_0^\lambda(2x) + f_0^\lambda(0)] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}} \int_0^{2x} f_1^\lambda(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^x \int_\xi^{2x-\xi} Pu(\xi, \tau) d\tau d\xi.$$

Продифференцируем обе части полученного равенства по x с учетом (10.3.30):

$$s'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{b'(x)}{b(x)} - a(x) \right] s(x) = [f_0^\lambda]'(2x) + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}} f_1^\lambda(2x) + \int_0^x Pu(\xi, 2x-\xi) d\xi.$$

Нетрудно установить, что функция $[s(x)]^{-1}$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$[s(x)]^{-1} = \frac{2}{\gamma} - \frac{1}{2} \int_0^x \left[\frac{b'(\xi)}{b(\xi)} - a(\xi) \right] [s(\xi)]^{-1} d\xi. \quad (10.3.34)$$

Учитывая это, после несложных преобразований получим

$$a(x) = \frac{b'(x)}{b(x)} - \frac{4}{\gamma} [[f_0^\lambda]'(2x) + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}} f_1^\lambda(2x)] - \frac{4}{\gamma} \int_0^x Pu(\xi, 2x-\xi) d\xi + [[f_0^\lambda]'(2x) + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}} f_1^\lambda(2x) + \int_0^x Pu(\xi, 2x-\xi) d\xi] \times \int_0^x \left[\frac{b'(\xi)}{b(\xi)} - a(\xi) \right] [s(\xi)]^{-1} d\xi. \quad (10.3.35)$$

Таким образом, уравнения (10.3.31)–(10.3.35) образуют систему интегральных уравнений относительно функций $u(x, t)$, $u_x(x, t)$, $u_t(x, t)$, $[s(x)]^{-1}$, $a(x)$.

Запишем эту систему в операторной форме в области $\Delta(t)$:

$$Aq := q + Bq = f. \quad (10.3.36)$$

Здесь

$$q(x, t) = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)^\top, \quad f(x, t) = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^\top, \quad (10.3.37)$$

$$Bq = (B_1q, B_2q, B_3q, B_4q, B_5q)^\top, \quad (10.3.38)$$

$$q_1(x, t) = u(x, t), \quad q_2(x, t) = u_x(x, t), \quad q_3(x, t) = u_t(x, t),$$

$$q_4(x) = [s(x)]^{-1}, \quad q_5(x) = a(x).$$

$$f_1(x, t) = \frac{1}{2} [f_0^\lambda(t+x) + f_0^\lambda(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}} f_1^\lambda(\xi) d\xi,$$

$$f_2(x, t) = \frac{1}{2} [(f_0^\lambda)'(t+x) - (f_0^\lambda)'(t-x)] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}} [f_1^\lambda(t+x) + f_1^\lambda(t-x)],$$

$$f_3(x, t) = \frac{1}{2} [(f_0^\lambda)'(t+x) + (f_0^\lambda)'(t-x)] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}} [f_1^\lambda(t+x) - f_1^\lambda(t-x)],$$

$$f_4 = \frac{2}{\gamma},$$

$$f_5(x) = \frac{b'(x)}{b(x)} - \frac{4}{\gamma} [(f_0^\lambda)'(2x) + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}} f_1^\lambda(2x)] = b_1(x) + \frac{4}{\gamma} g_0(x),$$

$$B_1q = -\frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} Lq(\xi, \tau) d\tau d\xi, \quad (10.3.39)$$

$$B_2q = -\frac{1}{2} \int_0^x [Lq(\xi, t+x-\xi) + Lq(\xi, t-x+\xi)] d\xi, \quad (10.3.40)$$

$$B_3q = -\frac{1}{2} \int_0^x [Lq(\xi, t+x-\xi) - Lq(\xi, t-x+\xi)] d\xi, \quad (10.3.41)$$

$$B_4q = \frac{1}{2} \int_0^x [b_1(\xi) - q_5(\xi)] q_4(\xi) d\xi, \quad (10.3.42)$$

$$B_5q = 2g_0(x)B_4q + \left(\frac{4}{\gamma} - 2B_4q\right) \int_0^x Lq(\xi, 2x-\xi) d\xi, \quad (10.3.43)$$

$$Lq(x, t) = b_0(x)q_1(x, t) + b_1(x)q_2(x, t) + q_5(x)q_3(x, t),$$

$$b_0(x) = (\lambda b(x))^2, \quad b_1(x) = \frac{b'(x)}{b(x)},$$

$$g_0(x) = -(f_0^\lambda)'(2x) - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(+0)}} f_1^\lambda(2x).$$

Считаем, что $q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \in \vec{L}_2(l)$, если

$$q_j(x, t) \in L_2(\Delta(l)), \quad j = 1, 2, 3, \quad q_j(x) \in L_2(0, l), \quad j = 4, 5.$$

Определим в пространстве $\vec{L}_2(l)$ скалярное произведение и норму:

$$\begin{aligned} \langle q^{(1)}, q^{(2)} \rangle_{\vec{L}_2(l)} &= \sum_{j=1}^3 \int_0^l \int_x^{2l-x} q_j^{(1)}(x, t) q_j^{(2)}(x, t) dt dx \\ &\quad + \sum_{j=4}^5 \int_0^l q_j^{(1)}(x) q_j^{(2)}(x) dx, \\ \|q\|_{\vec{L}_2(l)}^2 &= \langle q, q \rangle_{\vec{L}_2(l)}. \end{aligned}$$

В обратной задаче требуется найти вектор $q \in \vec{L}_2(l)$ из (10.3.36) по известному $f \in \vec{L}_2(l)$.

Операторное уравнение (10.3.36) исследуется точно так же, как уравнение (10.2.18) для обратной задачи акустики (см. раздел 10.2).

10.4. Локальная разрешимость многомерных обратных задач

О разрешимости многомерных обратных задач почти ничего неизвестно. Тем более интересным является первый шаг в многомерную разрешимость [10.23, 10.24], использующий метод шкал банаховых пространств аналитических функций [10.20]. Излагаемый материал основан на работах В. Г. Романова [10.24, 14].

В этом разделе рассматривается обратная задача определения коэффициента $q(x, y)$ гиперболического уравнения (10.4.3) в пространстве переменных $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, при условии, что начальные данные равны нулю, а граничное условие Неймана задано на $\partial\mathbb{R}_+^{n+1} \times [0, T]$, $\partial\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : x = 0\}$, $T > 0$, и имеет вид $u_x|_{x=0} = -g(y)\delta'(t)$, где g — аналитическая функция. Предполагается, что решение соответствующей начально-краевой задачи задано для $(x, y, t) \in \partial\mathbb{R}_+^{n+1} \times [0, T]$ и является аналитической функцией по переменной y .

Обозначим через $\mathbb{A}_s(r)$, $r > 0$, $s > 0$, пространство вещественных функций $\varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$\|\varphi\|_s(r) := \sup_{|y| \leq r} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{s^{|\alpha|}}{\alpha!} |D^\alpha \varphi(y)| < \infty, \quad (10.4.1)$$

где α — мультииндекс,

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1} + \dots + \partial y_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! := (\alpha_1)! \dots (\alpha_n)!.$$

Пространство $\mathbb{A}_s(r)$ с нормой (10.4.1) является банаховым пространством аналитических функций. Считая параметр r фиксированным, а параметр s переменным, мы получим *шкалу банаховых пространств аналитических функций* $\{\mathbb{A}_s(r)\}$, $s > 0$. Очевидно, что если $\varphi(y) \in \mathbb{A}_s(r)$, то $\varphi(y) \in \mathbb{A}_{s'}(r)$ для всех $s' \in (0, s)$. Следовательно, $\mathbb{A}_s(r) \subset \mathbb{A}_{s'}(r)$ при $s' < s$. Кроме того, если $\varphi(y) \in \mathbb{A}_s(r)$, то $D^\alpha \varphi(y) \in \mathbb{A}_{s'}(r)$ для всех $s' \in (0, s)$ и любого α , а также справедливо неравенство

$$\|D^\alpha \varphi\|_{s'}(r) \leq C_\alpha \frac{\|\varphi\|_s(r)}{(s - s')^{|\alpha|}},$$

где постоянная C_α зависит только от α .

В самом деле,

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \varphi\|_{s'}(r) &= \sup_{|y| \leq r} \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \frac{(s')^{|\beta|}}{\beta!} |D^{\alpha+\beta} \varphi(y)| \\ &\leq \|\varphi\|_s(r) (s')^{-|\alpha|} \sup_{\beta} \left[\frac{(\alpha + \beta)!}{\beta!} \left(\frac{s'}{s}\right)^{|\alpha+\beta|} \right] \\ &\leq \|\varphi\|_s(r) (s')^{-|\alpha|} \sup_{k \geq |\alpha|} \left[k^{|\alpha|} \left(\frac{s'}{s}\right)^k \right] \leq C_\alpha \frac{\|\varphi\|_s(r)}{(s - s')^{|\alpha|}}, \end{aligned}$$

где $C_\alpha = |\alpha|^{|\alpha|}$. Из этого неравенства, в частности, следует

$$\|\Delta \varphi\|_{s'}(r) \leq \frac{4n}{(s - s')^2} \|\varphi\|_s(r), \quad s > s' > 0. \quad (10.4.2)$$

Будем в дальнейшем опускать фиксированный параметр r и использовать обозначения $\|\varphi\|_s$, \mathbb{A}_s вместо $\|\varphi\|_s(r)$ и $\mathbb{A}_s(r)$. Будем рассматривать функции, которые являются аналитическими по $y \in \mathbb{R}^n$ и зависят от переменных $(x, t) \in G$, где G — некоторая компактная область с кусочно-гладкой границей.

Определение 10.4.1. Будем говорить, что функция $w = w(x, y, t)$ принадлежит $\mathbb{C}(\mathbb{A}_s, G)$, если $w \in \mathbb{A}_s$ для всех $(x, t) \in G$, непрерывна в G как элемент пространства \mathbb{A}_s и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\|w\|_{\mathbb{C}(\mathbb{A}_s, G)} := \sup_{(x, t) \in G} \|w\|_s(x, t) < \infty.$$

Очевидно, что $\mathbb{C}(\mathbb{A}_s, G)$ — банахово пространство.

Прямая начально-краевая задача

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - \Delta u - q(x, y)u &= 0, \\ x \in \mathbb{R}_+, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (10.4.3)$$

$$u|_{t < 0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = -g(y)\delta'(t), \quad (10.4.4)$$

которая состоит в нахождении функции $u(x, y, t)$ по заданным $q(x, y)$ и $g(y)$, является корректной.

В обратной задаче требуется определить функции $q(x, y)$ и $u(x, y, t)$ по функции $g(y)$ и по следу решения задачи (10.4.3), (10.4.4), заданному на гиперплоскости $x = 0$:

$$u|_{x=0} = F(y, t), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (10.4.5)$$

Нетрудно показать, что функция $F(y, t)$ представима в виде

$$F(y, t) = g(y)\delta(t) + f(y, t)\theta(t), \quad (10.4.6)$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

В самом деле, для решения задачи (10.4.3), (10.4.4) справедливо представление

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= g(y)\delta(t - x) + \alpha(x, y)\theta(t - x) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x, y)\theta_k(t - x), \end{aligned} \quad (10.4.7)$$

где

$$\theta_k(t) := \frac{t^k}{k!} \theta(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Это представление аналогично асимптотическому разложению решения, изложенному в [14, раздел 2.2].

Следовательно, функция $u(x, y, t)$ может быть представлена в виде

$$u(x, y, t) = g(y)\delta(t - x) + \bar{u}(x, y, t)\theta(t - x). \quad (10.4.8)$$

Нетрудно проверить, что

$$\alpha(x, y) := \bar{u}(x, y, x + 0) = \frac{1}{2} \left[x \Delta g(y) + g(y) \int_0^x q(\xi, y) d\xi \right]. \quad (10.4.9)$$

Из формулы (10.4.8) следует представление (10.4.6) для функции $F(y, t)$, а из (10.4.9) вытекает равенство

$$f(y, +0) = 0, \quad (10.4.10)$$

которое является необходимым условием разрешимости обратной задачи. В силу того что при $x > t$ имеет место равенство $u(x, y, t) \equiv \bar{u}(x, y, t)$, мы далее будем опускать знак черты над функцией u , когда она рассматривается для значений $x > t$.

Обозначим

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= \frac{1}{2} [f(x+t, y) + f(x-t, y)], \\ q_0(x, y) &= \frac{1}{g(y)} [-\Delta g(y) + 2f_t(y, t)|_{t=2x}]. \end{aligned} \quad (10.4.11)$$

Теорема 10.4.1. Пусть выполнено условие (10.4.10), функции $g(y)$, $1/g(y)$ принадлежат A_{s_0} при некотором $s_0 > 0$, а функции $f(y, t)$, $f_t(y, t)$ принадлежат пространству $C(A_{s_0}, [0, T])$ при некотором $T > 0$. Обозначим

$$R_0 := \max [\|(g(y))^{-1}\|_{s_0}, \max_{0 \leq x \leq T/2} \|q_0(x, y)\|_{s_0}(x), \max_{0 \leq t \leq T} \|f(y, t)\|_{s_0}(t)]. \quad (10.4.12)$$

Тогда можно найти такое число $a = a(s_0, T, R_0) \in (0, T/(2s_0))$, что для любого $s \in (0, s_0)$ существует единственное решение $q_T(x, y)$, $u_T(x, y, t)$ обратной задачи (10.4.3)–(10.4.5) в пространстве $C(A_{s_0}, G_s)$, где $G_s = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a(s_0 - s), x \leq t \leq T - x\}$. Кроме того, справедливы оценки

$$\|u_T - u_0\|_s(x, t) \leq R_0, \quad \|q_T - q_0\|_s(x) \leq \frac{R_0}{s_0 - s}, \quad (x, t) \in G_s. \quad (10.4.13)$$

Доказательство. Используя (10.4.9), заменим задачу (10.4.3)–(10.4.5) следующей:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - \Delta u - qu &= 0, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t > x > 0, \\ u_x|_{x=0} &= 0, \quad u|_{t=x} = \alpha(x, y), \\ u|_{x=0} &= f(y, t), \end{aligned} \quad (10.4.14)$$

где $f(y, t)$ связано с данными задачи (10.4.3)–(10.4.5) равенством (10.4.6).

Поскольку данные Коши u и u_x определены на плоскости $x = 0$, можно использовать формулу Даламбера. В результате мы получим для $u(x, y, t)$ интегро-дифференциальное уравнение

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) - \frac{1}{2} \int_{\Delta(x, t)} (\Delta u + qu)(\zeta, y, \tau) d\zeta d\tau, \quad (10.4.15)$$

в котором

$$\Delta(x, t) = \{(\zeta, \tau) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \zeta \leq x, \zeta + t - x \leq \tau \leq t + x - \zeta\}$$

— характеристический треугольник в плоскости ζ, τ с вершиной в точке (x, t) и основанием на оси τ . Дифференцируем (10.4.15) по t и по x и сложим полученные равенства, полагая $t = x$ и учитывая (10.4.9):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=x} &= \frac{1}{2}(g(y)q(x, y) + \Delta g(y)) \\ &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)_{t=x} - \int_0^x (\Delta u + qu)(\zeta, y, 2x - \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что, ввиду (10.4.11), функция $q(x, y)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$q(x, y) = q_0(x, y) - \frac{2}{g(y)} \int_0^x (\Delta u + qu)(\zeta, y, 2x - \zeta) d\zeta. \quad (10.4.16)$$

Полученную систему двух уравнений (10.4.15), (10.4.16) относительно $q(x, y)$, $u(x, y, t)$ можно решить модифицированным методом Ниренберга [14]. Пусть последовательность $a_0, a_1, \dots, a_m, \dots$ определена соотношениями

$$a_{m+1} = a_m \left(1 + \frac{1}{(m+1)^2}\right)^{-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.4.17)$$

и число a — формулой

$$a = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a_0 \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{(m+1)^2}\right)^{-1}. \quad (10.4.18)$$

Положительное число $a_0 < T/(2s_0)$ будет выбрано позже. Построим последовательные приближения по формулам

$$\begin{aligned} u_{m+1}(x, y, t) &= u_0(x, y, t) - \frac{1}{2} \int_{\Delta(x, t)} (\Delta u_m + q_m u_m)(\zeta, y, \tau) d\zeta d\tau, \\ q_{m+1}(x, y) &= q_0(x, y) - \frac{2}{g(y)} \int_0^x (\Delta u_m + q_m u_m)(\zeta, y, 2x - \zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (10.4.19)$$

для $m = 0, 1, 2, \dots$. Тогда функции

$$v_m = u_{m+1} - u_m, \quad p_m = q_{m+1} - q_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (10.4.20)$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} v_0(x, y, t) &= -\frac{1}{2} \int_{\Delta(x, t)} (\Delta u_0 + q_0 u_0)(\zeta, y, \tau) d\zeta d\tau, \\ p_0(x, y) &= -\frac{2}{g(y)} \int_0^x (\Delta u_0 + q_0 u_0)(\zeta, y, 2x - \zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (10.4.21)$$

$$v_{m+1}(x, y, t) = -\frac{1}{2} \int_{\Delta(x,t)} (\Delta v_m + p_m u_{m+1} + q_m v_m)(\zeta, y, \tau) d\zeta d\tau, \quad (10.4.22)$$

$$p_{m+1}(x, y) = -\frac{2}{g(y)} \int_0^x (\Delta v_m + p_m u_{m+1} + q_m v_m)(\zeta, y, 2x - \zeta) d\zeta$$

для $m = 0, 1, 2, \dots$. Докажем, что при подходящем выборе a_0 выполнены неравенства

$$\lambda_m := \max \left\{ \sup_{(x,t,s) \in F_m} \left[\|v_m\|_s(x, t) \frac{a_m(s_0 - s) - x}{x} \right], \sup_{(x,t,s) \in F_m} \left[\|p_m\|_s(x, t) \frac{(a_m(s_0 - s) - x)^2}{a_m x} \right] \right\} < \infty, \quad (10.4.23)$$

$$\|u_{m+1} - u_0\|_{s_0}(x, t) \leq R_0, \quad \|q_{m+1} - q_0\|_{s_0}(x) \leq \frac{R_0}{s_0 - s} \quad (10.4.24)$$

для $(x, t, s) \in F_{m+1}$. Здесь

$$F_m := \{(x, t, s) : (x, t) \in G, 0 < x < a_m(s_0 - s), 0 < s < s_0\}, \quad (10.4.25)$$

$$G := \{(x, t) : 0 \leq x \leq t \leq T - x\}.$$

Из соотношений (10.4.21) следует, что

$$\begin{aligned} \|v_0\|_s(x, t) &\leq \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\zeta}^{t+x-\zeta} (\|\Delta u_0\|_s(\zeta, \tau) + \|q_0\|_s(\zeta) \|u_0\|_s(\zeta, \tau)) d\tau d\zeta \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\zeta}^{t+x-\zeta} \left(\frac{4nR_0}{(s(\zeta) - s)^2} + R_0^2 \right) d\tau d\zeta, \end{aligned} \quad (10.4.26)$$

если $(x, t, s) \in F_0$ и $s(\zeta) = (s_0 + s - \zeta/a_0)/2$. Здесь используется тот факт, что $u_0(x, y, t) \in \mathbb{C}(\mathbb{A}_{s_0}, G_s)$, а также неравенство (10.4.2) для функции Δu_0 , рассматриваемой как элемент пространства \mathbb{A}_s , и оценки $\|q_0\|_s(x) < R_0$, $\|u_0\|_s(x, t) < R_0$ для $s \in (0, s_0)$ и $(x, t) \in G$.

Заметим, что если $(x, t, s) \in F_0$, то $(\zeta, \tau, s) \in F_0$; следовательно, $\zeta < a_0(s_0 - s)$ или, что то же самое, $s < s_0 - \zeta/a_0$. Поэтому $s(\zeta) \in (s, s_0)$ и $s(\zeta) - s = (s_0 - s - \zeta/a_0)/2$.

Тогда

$$\begin{aligned} \|v_0\|_s(x, t) &\leq \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\zeta}^{t+x-\zeta} \left(\frac{16na_0^2 R_0}{((s_0 - s)a_0 - \zeta)^2} + R_0^2 \right) d\tau d\zeta \\ &\leq a_0^2 R_0 (16n + R_0 s_0^2) \int_0^x \frac{(x - \zeta) d\zeta}{((s_0 - s)a_0 - \zeta)^2} \leq \frac{xa_0^2 R_0 (16n + R_0 s_0^2)}{(s_0 - s)a_0 - x}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \|p_0\|_s(x) &\leq \left\| \frac{2}{g(y)} \right\|_{s_0} \int_0^x \left(\frac{16na_0^2 R_0}{[(s_0 - s)a_0 - \zeta]^2} + R_0^2 \right) d\zeta \\ &\leq 2R_0 x \left(\frac{16na_0^2 R_0}{[(s_0 - s)a_0 - x]^2} + R_0^2 \right) \leq \frac{2xa_0^2 R_0^2 (16n + R_0 s_0^2)}{[(s_0 - s)a_0 - x]^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, если обозначить $\mu_0 = a_0(16n + R_0 s_0^2) \max(a_0, 2R_0)$, то

$$\lambda_0 \leq R_0 \mu_0 < \infty.$$

Кроме того, для $(x, t, s) \in F_1$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_0\|_s(x, t) = \|v_0\|_s(x, t) &\leq \frac{\lambda_0 x}{a_0(s_0 - s) - x} \leq \frac{\lambda_0 a_1}{a_0 - a_1} \\ &= \frac{\lambda_0}{a_0/a_1 - 1} = \lambda_0 \leq \mu_0 R_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|q_1 - q_0\|_s(x) = \|p_0\|_s(x) &\leq \frac{\lambda_0 a_0 x}{(a_0(s_0 - s) - x)^2} \leq \frac{\lambda_0 a_0 a_1}{(a_0 - a_1)^2 (s_0 - s)} \\ &= \frac{\lambda_0 a_0/a_1}{(a_0/a_1 - 1)^2 (s_0 - s)} \leq \frac{2\lambda_0}{s_0 - s} \leq \frac{2\mu_0 R_0}{s_0 - s}. \end{aligned}$$

Выберем a_0 так, чтобы выполнялось неравенство $2\mu_0 \leq 1$. Тогда соотношения (10.4.24) справедливы для $m = 0$. Используем теперь метод математической индукции. Предположим, что соотношения (10.4.23), (10.4.24) выполняются для $m \leq k$, если число a_0 выбрано подходящим образом. Тогда для $(x, t, s) \in F_{k+1}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \|v_{k+1}\|_s(x, t) &\leq \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\zeta}^{t+x-\zeta} \left(\frac{4n\|v_k\|_s(\zeta, \tau)}{(s(\zeta) - s)^2} \right. \\ &\quad \left. + \|p_k\|_s(\zeta)\|u_{k+1}\|_s(\zeta, \tau) + \|q_k\|_s(\zeta)\|v_k\|_s(\zeta, \tau) \right) d\tau d\zeta \\ &\leq \int_0^x (x - \zeta) \left(\frac{4n\lambda_k \zeta}{(s(\zeta) - s)^2 [a_{k+1}(s_0 - s(\zeta)) - \zeta]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2R_0^2 \lambda_k a_k \zeta}{[a_{k+1}(s_0 - s(\zeta)) - \zeta]^2} + \frac{\lambda_k \zeta}{a_{k+1}(s_0 - s(\zeta)) - \zeta} \frac{R_0(1 + s_0)}{s_0 - s} \right) d\zeta, \end{aligned}$$

в которых зависимость $s(\zeta)$ выбрана в виде $s(\zeta) = (s_0 + s - \zeta/a_{k+1})/2 > s$.

Оценивая последний интеграл, находим

$$\begin{aligned} & \|v_{k+1}\|_s(x, t) \\ & \leq 2\lambda_k \int_0^x \frac{16na_{k+1}^2 + 4R_0a_k a_{k+1}s_0 + R_0(1+s_0)s_0a_{k+1}^2}{(a_{k+1}(s_0-s) - \zeta)^3} (x-\zeta)\zeta d\zeta \\ & \leq 2\lambda_k a_0^2(16n + R_0s_0(5+s_0)) \frac{x}{a_{k+1}(s_0-s) - x} \end{aligned}$$

для $(x, t, s) \in F_{k+1}$. Подобные вычисления приводят к оценке

$$\|p_{k+1}\|_s(x) \leq \lambda_k a_0^2 R_0(16n + R_0s_0(5+s_0)) \frac{xa_{k+1}}{(a_{k+1}(s_0-s) - x)^2}$$

при тех же значениях переменных (x, t, s) . Таким образом,

$$\lambda_{k+1} \leq \lambda_k \rho < \infty, \quad (10.4.27)$$

где

$$\rho := a_0(16n + R_0s_0(5+s_0)) \max(2a_0, R_0).$$

С другой стороны, для $(x, t, s) \in F_{k+2}$ имеем

$$\begin{aligned} \|u_{k+2} - u_0\|_s(x, t) &= \left\| \sum_{m=0}^{k+1} v_m \right\|_s(x, t) \leq \sum_{m=0}^{k+1} \|v_m\|_s(x, t) \\ &\leq \sum_{m=0}^{k+1} \frac{\lambda_m x}{a_m(s_0-s) - x} \leq \sum_{m=0}^{k+1} \frac{\lambda_m a_{k+2}}{a_m - a_{k+2}} < \sum_{m=0}^{k+1} \frac{\lambda_m a_{m+1}}{a_m - a_{m+1}} \\ &= \sum_{m=0}^{k+1} \lambda_m (m+1)^2 \leq \lambda_0 \sum_{m=0}^{k+1} \rho^m (m+1)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|q_{k+2} - q_0\|_s(x) &\leq \sum_{m=0}^{k+1} \|p_m\|_s(x, t) \leq \sum_{m=0}^{k+1} \frac{\lambda_m a_m x}{(a_m(s_0-s) - x)^2} \\ &\leq \frac{1}{s_0-s} \sum_{m=0}^{k+1} \frac{\lambda_m a_m a_{k+2}}{(a_m - a_{k+2})^2} \leq \frac{2\lambda_0}{s_0-s} \sum_{m=0}^{k+1} \rho^m (m+1)^4. \end{aligned}$$

Выберем $a_0 \in (0, T/(2s_0))$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\rho < 1, \quad 2\mu_0 \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (m+1)^4 \leq 1. \quad (10.4.28)$$

Тогда

$$\|u_{k+2} - u_0\|_s(x, t) \leq R_0, \quad \|q_{k+2} - q_0\|_s(x) \leq \frac{R_0}{s_0-s}, \quad (x, t, s) \in F_{k+2},$$

и, значит, метод индукции обоснован.

Поскольку выбор a_0 не зависит от номера итерации m , все последовательные приближения u_m и q_m принадлежат пространству \mathbb{A}_s как функции от y для всех $(x, t, s) \in F = \bigcap_{m=0}^{\infty} F_m$. Следовательно, $u_m \in \mathbb{C}(\mathbb{A}_s, G_s)$, $q_m \in \mathbb{C}(\mathbb{A}_s, G_s)$ и u_m, q_m удовлетворяют соотношениям

$$\|u_m - u_0\|_s(x, t) \leq R_0, \quad \|q_m - q_0\|_s(x) \leq \frac{R_0}{s_0 - s}, \quad (x, t, s) \in F.$$

Ряды

$$\sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, y, t), \quad \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x, y)$$

равномерно сходятся по y в норме пространства \mathbb{A}_s для $s \in (0, s_0)$, а по переменным $(x, t) \in G_s$ — в норме пространства $C(G_s)$. Поэтому $u_m \rightarrow u$, $q_m \rightarrow q$ и предельные функции u, q принадлежат пространству $\mathbb{C}(\mathbb{A}_s, G_s)$ для всех $s \in (0, s_0)$. Единственность решения доказывается по той же схеме, что и в одномерных обратных задачах, но с применением неравенств, полученных в данном разделе. \square

Пусть F — множество всевозможных пар $(g(y), f(y, t)) \in \mathbb{A}_{s_0} \times \mathbb{C}(\mathbb{A}_{s_0}, [0, T])$, удовлетворяющих соотношениям (10.4.10), (10.4.12) для фиксированного числа R_0 . Справедлива следующая теорема устойчивости [14].

Теорема 10.4.2. Если для $(g, f) \in F$ и $(\hat{g}, \hat{f}) \in F$ существуют решения (u, q) и (\hat{u}, \hat{q}) соответствующих уравнений (10.4.15), (10.4.16), то они удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\|u - \hat{u}\|_s(x, t) \leq C\varepsilon, \quad \|q - \hat{q}\|_s(x) \leq \frac{C\varepsilon}{s_0 - s}, \quad (10.4.29)$$

$$(x, t) \in G_s, \quad s \in (0, s_0),$$

в которых

$$\varepsilon = \max [\|g - \hat{g}\|_{s_0}, \|\Delta(g - \hat{g})\|_{s_0}, \max_{0 \leq t \leq T} \|f - \hat{f}\|_{s_0}(t), \max_{0 \leq t \leq T} \|f_t - \hat{f}_t\|_{s_0}(t)]$$

и постоянная C зависит только от s_0 и R_0 .

Замечание 10.4.1. Изложенный метод может быть использован также для исследования более общих обратных задач и нелинейных интегральных уравнений [2.3, 14].

10.5. Метод отображений Неймана — Дирихле для полупространства

Рассмотрим задачу определения коэффициента уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \Delta_y u - q(x, y)u, \quad (10.5.1)$$

$$y \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in [0, T],$$

в случае, когда о решении начально-краевой задачи с данными

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0, \\ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, y): y \in \mathbb{R}^n, x > 0\}, \end{aligned} \quad (10.5.2)$$

$$u_x(0, y, t) = g(y, t), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (10.5.3)$$

известна дополнительная информация

$$u(0, y, t) = f_g(y, t), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T]. \quad (10.5.4)$$

В разделе 10.4 было показано, что если $g(y, t) = -g(y)\delta'(t)$, то $q(x, y)$ однозначно определяется из (10.5.1)–(10.5.4) в классе функций, аналитических по y и непрерывных по x . Оказывается, что единственность решения в классе $L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ (см. определение 12.5.6) удается доказать лишь в переопределенной постановке. Ракеш [10.41] распространил метод Сильвестера — Ульмана [10.42] на обратную задачу (10.5.1)–(10.5.4). Изложим кратко схему исследования (метод Сильвестера — Ульмана применяется также в разделе 11.4 для доказательства единственности решения обратной задачи эллиптического уравнения).

Определим отображение Неймана — Дирихле

$$\Lambda_q : L_2(\mathbb{R}^n \times [0, T]) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^n \times [0, T]),$$

которое каждой функции $g(y, t) \in L_2(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ сопоставляет функцию $f_g(y, t) \in H^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ — след решения прямой задачи (10.5.1)–(10.5.3) на плоскости $x = 0$. Определение классов функций $L_2(G)$ и $H^1(G) = W_2^1(G)$, где G — связная открытая область в \mathbb{R}^n , приводятся в главе 12 (см. определения 12.5.4, 12.5.9).

Обозначим через $B(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ открытый шар радиуса r с центром в нуле:

$$B(r) = \left\{ (x, y) : \sqrt{x^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2} < r \right\}.$$

Теорема 10.5.1. *Предположим, что функции q_1, q_2 принадлежат пространству $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ и постоянны вне замкнутого шара $\overline{B(r)}$.*

Тогда, если $(\pi + 1)r < T$, то из условия

$$\Lambda_{q_1}(g) \equiv \Lambda_{q_2}(g), \quad g \in L_2(\mathbb{R}^n \times [0, T]),$$

следует $q_1 \equiv q_2$.

Доказательство. Предположим, что вне шара $\overline{B(r)}$ функции q_1 и q_2 равны одной и той же постоянной k (общий случай будет следовать из леммы 10.5.3).

Пусть $g(y, t)$ — достаточно гладкая функция, имеющая при каждом $t \in [0, T]$ компактный носитель. Обозначим $p = q_2 - q_1$, $w = u_1 - u_2$,

где u_j — решение прямой задачи (10.5.1)–(10.5.3) с граничными данными $g(y, t)$ и фиксированным коэффициентом $q(x, y) = q_j(x, y)$, $j = 1, 2$. Заметим, что поскольку $g(y, t)$ имеет компактный носитель при фиксированном $t \in [0, T]$, решения u_j также будут иметь компактный носитель при фиксированном $t \in [0, T]$.

Из условия $\Lambda_{q_1}(g) = \Lambda_{q_2}(g)$ следует, что

$$w_{tt} = w_{xx} + \Delta_y w - q_1 w + p u_2, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (10.5.5)$$

$$w(x, y, 0) = 0, \quad w_t(x, y, 0) = 0, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (10.5.6)$$

$$w(0, y, t) = 0, \quad w_x(0, y, t) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T]. \quad (10.5.7)$$

Отметим, что $p(x, y) \equiv 0$ вне шара $\overline{B(r)}$.

Пусть $\varepsilon = (T - (\pi + 1)r)/6$, $T_* = T - \pi(r + \varepsilon)$, а функция $v(x, y, t)$ удовлетворяет условиям

$$v_{tt} = v_{xx} + \Delta_y v - q_1(x, y)v, \quad (10.5.8)$$

$$(x, y) \in H = \{(x, y) \in \overline{B(r)} : x > 0\},$$

$$v(x, y, T_*) = 0, \quad v_t(x, y, T_*) = 0, \quad (x, y) \in H, \quad (10.5.9)$$

и является достаточно гладкой.

Тогда, используя (10.5.5) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{T_*} \int_H p u_2 v \, dx \, dy \, dt &= \int_0^{T_*} \int_H (w_{tt} - w_{xx} - \Delta_y w + q_1 w) v \, dx \, dy \, dt \\ &= \int_0^{T_*} \int_H (v_{tt} - v_{xx} - \Delta_y v + q_1 v) w \, dx \, dy \, dt \\ &+ \int_0^{T_*} \int_{\partial H} \left(w \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) dS \, dt + \int_H (w_t v - w v_t) \Big|_{t=0}^{t=T_*} dx \, dy, \end{aligned}$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по нормали к поверхности полусферы H . Можно показать (см. [10.41]), что

$$w(x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu}(x, y, t) = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \partial H, \quad t \in [0, T_*].$$

Следовательно,

$$\int_0^{T_*} \int_H p(x, y) u_2(x, y, t) v(x, y, t) \, dx \, dy \, dt = 0 \quad (10.5.10)$$

для всех $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, всех соответствующих решений u_2 задачи (10.5.1)–(10.5.3) (при $q = q_2$) и всех гладких v , удовлетворяющих (10.5.8)–(10.5.9). Для того чтобы показать, что из (10.5.10) следует $p(x, y) \equiv 0$, выделим семейства функций u_2 и v , которые концентрируются вдоль некоторых прямых, лежащих в пространстве (x, y) . Построение таких функций основано на следующей лемме [10.41].

Лемма 10.5.1. Пусть $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ — произвольный единичный вектор, $\sigma > 0$, функция $\alpha(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ финитна и

$$\text{supp } \{\alpha\} \subset N_\varepsilon = \{(x, y) \in B(2\varepsilon) : x < -\varepsilon\}. \quad (10.5.11)$$

Тогда для любых локально ограниченных функций $q(x, y)$ можно построить функции $v(x, y, t)$ и $u_2(x, y, t)$ вида

$$v(x, y, t) = \alpha((x, y) + tz)e^{-i\sigma((x, y), z) + t} + \beta_1(x, y, t), \quad (10.5.12)$$

$$u_2(x, y, t) = \alpha((x, y) + tz)e^{+i\sigma((x, y), z) + t} + \beta_2(x, y, t),$$

такие, что u_2 является решением (10.5.1)-(10.5.3) при соответствующем выборе $g(y, t)$, v удовлетворяет (10.5.8), (10.5.9) и имеют место оценки

$$\|\beta_1\|_{L_2(H \times [0, T_*])} \leq \frac{c}{\sigma}, \quad \|\beta_2\|_{L_2(\mathbb{R}_+^{n+1} \times [0, T])} \leq \frac{c}{\sigma},$$

в которых постоянная c зависит только T , α и q .

Используя лемму 10.5.1, мы зададим функции v и u_2 в виде (10.5.12) и подставим их в (10.5.10):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{T_*} \int_H p(x, y) u_2(x, y, t) v(x, y, t) dx dy dt \\ &= \int_0^{T_*} \int_H p(x, y) \alpha^2((x, y) + tz) dx dy dt + \gamma(z, \sigma). \end{aligned}$$

Можно показать [10.41], что

$$|\gamma(z, \sigma)| \leq \frac{c}{\sigma},$$

где постоянная c не зависит от σ . Поэтому

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_0^{T_*} \int_H p(x, y) u_2(x, y, t) v(x, y, t) dx dy dt \\ &= \int_0^{T_*} \int_H p(x, y) \alpha^2((x, y) + tz) dx dy dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left[\int_0^{T_*} p((x, y) - tz) dt \right] \alpha^2(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали то, что $p(x, y) = 0$ вне H .

Учитывая полноту класса функций $\alpha^2(x, y)$ с условием (10.5.11) в $L^2(N_\varepsilon)$, заключаем, что

$$\int_0^{T_*} p(a - tz) dt = 0$$

при всех $a \in N_\varepsilon$, $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| = 1$. В силу финитности $p(x, y)$, получаем

$$\int_0^\infty p(a - tz) dt = 0$$

при всех $a \in N_\varepsilon$, $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| = 1$.

Остается применить лемму 10.5.2 [10.33] и лемму 10.5.3 [10.41], чтобы завершить доказательство теоремы.

Лемма 10.5.2. Пусть $p(x, y)$ — ограниченная на \mathbb{R}^{n+1} функция с компактным носителем, выпуклая оболочка которого отделена от некоторого бесконечного подмножества $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда, если для всех $a \in A$ и $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| = 1$, выполняется равенство

$$\int_0^\infty p(a + sz) ds = 0,$$

то $p(x, y) \equiv 0$.

Лемма 10.5.3. Предположим, что k_j ($j = 1, 2$) — действительные числа и при $j = 1, 2$ функции $u^j(x, y, t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} u_{tt}^j &= u_{xx}^j + \Delta_y u^j - k_j u^j, & y \in \mathbb{R}^n, & x \geq 0, & t \in [0, T], \\ u^j(x, y, 0) &= 0, & u_t^j(x, y, 0) &= 0, & y \in \mathbb{R}^n, & x \geq 0, \\ \frac{\partial u^j}{\partial x}(0, y, t) &= g(y, t), & y \in \mathbb{R}^n, & t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Если $u^1(0, 0, t) = u^2(0, 0, t)$ для $t \in [0, T]$ при всех $g \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, таких, что $\text{supp } g \subset \{y: \|y\| < 2T\} \times [0, T]$, то $k_1 = k_2$.

□

10.6. Лучевые постановки обратных задач

В данном разделе мы рассмотрим один из подходов к исследованию многомерных обратных задач, позволяющий доказывать теоремы единственности и получать оценки условной устойчивости решения обратных задач определения параметров среды в зоне недоступности $D \subset \mathbb{R}^n$, в то время как источники возбуждений и приемники расположены только на границе $S = \partial D$ исследуемой области. Мы ограничимся случаем \mathbb{R}^3 и рассмотрением уравнения акустики [10.28]

$$u_{tt} = c^2(x)\Delta u - c^2(x)\nabla \ln \rho \nabla u + \delta(x - x^0)\delta(t), \quad (10.6.1)$$

$$x \in D \subset \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R},$$

с нулевыми начальными данными

$$u|_{t < 0} \equiv 0. \quad (10.6.2)$$

Здесь $c(x) > 0$ — скорость распространения волны в среде, $\rho(x) > 0$ — плотность среды, $\delta(x - x^0) = \delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0)$, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, $D \subset \mathbb{R}^3$ — открытая область.

Доказательства и исследование обратных задач для более общих уравнений содержатся в книгах В. Г. Романова [13, 14].

Пусть, как и ранее (см. разделы 5.4, 5.5), $D \subset \mathbb{R}^3$ — связная открытая ограниченная область с C^1 гладкой границей $S = \partial D$, $\tau(x, x^0)$ — решение задачи

$$|\nabla_x \tau(x, x^0)|^2 = c^{-2}(x), \quad x \in D, \quad (10.6.3)$$

при условии

$$\tau(x, x^0) = O(|x - x^0|) \quad \text{при} \quad x \rightarrow x^0. \quad (10.6.4)$$

Как мы уже показали в разделе 5.4, значение $\tau(x, x^0)$ равно времени пробега сигнала со скоростью $c(x)$ от точки x^0 до точки x . С другой стороны, функция $\tau(x, x^0)$ определяет риманову метрику с элементом длины

$$d\tau = \frac{1}{c(x)} \left(\sum_{j=1}^3 (dx_j)^2 \right)^{1/2}.$$

Геодезическая линия, определяемая этой метрикой, совпадает с лучом $\Gamma(x, x^0)$, вдоль которого сигнал приходит из x^0 в x за кратчайшее время.

10.6.1. Асимптотическое разложение фундаментального решения уравнения акустики

Фундаментальное решение общего гиперболического уравнения второго порядка состоит из сингулярной части, сосредоточенной на характеристическом коноиде, и регулярной части с носителем, лежащим в замыкании внутренней части характеристического коноида [10.22, 13]. Мы выпишем структуру фундаментального решения уравнения акустики (10.6.1), следуя методике В. Г. Романова [13].

Определение 10.6.1. Функция $U(x, t, x^0, t^0)$, $x, x^0 \in \mathbb{R}^3$, $t, t^0 \in \mathbb{R}$, называется *фундаментальным решением уравнения акустики*, если она удовлетворяет условиям

$$U_{tt} - c^2(x)\Delta U + c^2(x)\nabla \ln \rho(x)\nabla U = \delta(x - x^0)\delta(t - t^0), \quad (10.6.5)$$

$$U|_{t < 0} \equiv 0. \quad (10.6.6)$$

Коэффициенты уравнения (10.6.5) зависят только от x . Поэтому $U(x, t, x^0, t^0) = U(x, t - t^0, x^0, 0)$ и без ограничения общности можно считать $t^0 = 0$ и обозначать фундаментальное решение через $U(x, t, x^0)$.

Рассмотрим в \mathbb{R}^3 риманову метрику

$$d\tau = \frac{1}{c(x)} \left(\sum_{j=1}^3 (dx_j)^2 \right)^{1/2}. \quad (10.6.7)$$

Предположим, что $c(x) \in C^{l+4}(\mathbb{R}^3)$, $\rho(x) \in C^{l+3}(\mathbb{R}^3)$, $l \geq 7$, и функции $c(x)$, $\rho(x)$ при $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$ принимают постоянные положительные значения c_0 , ρ_0 . Предположим также, что любая пара точек

$x, x^0 \in D$ может быть соединена единственной в \mathbb{R}^3 геодезической $\Gamma(x, x^0)$ метрики (10.6.7), целиком лежащей в D . Расстояние между x и x^0 в метрике (10.6.7) определяется функцией $\tau(x, x^0)$ — решением задачи (10.6.3), (10.6.4). В работе [13] показано, что при фиксированной точке x^0 точка x может быть задана римановыми координатами $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где $\xi = \tau(x, x^0)\tilde{\xi}$, $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3)$ — вектор, направленный в точке x^0 по касательной к геодезической $\Gamma(x, x^0)$ в сторону точки x и такой, что

$$\sum_{j=1}^3 c^{-2}(x^0)\tilde{\xi}_j^2 = 1.$$

Обозначим $x = h(\xi, x^0)$. Функция $h(\xi, x^0)$ имеет по переменной ξ обратную функцию $\xi = g(x, x^0) \in C^{l+3}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Якобиан перехода от римановых координат к декартовым положителен: $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, x^0) \right| > 0$.

Кроме того, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x^0, x^0) \right| = 1$ и

$$\tau^2(x, x^0) = c^{-2}(x^0) \sum_{j=1}^3 g_j^2(x, x^0). \quad (10.6.8)$$

Следовательно, $\tau^2 \in C^{l+3}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Теорема 10.6.1. Если $l \geq 2s + 7$, $s \geq -1$, то фундаментальное решение задачи (10.6.1), (10.6.2) имеет вид

$$U(x, t, x^0) = \theta(t) \sum_{k=-1}^s a_k(x, x^0) \theta_k(t^2 - \tau^2(x, x^0)) + U_s(x, t, x^0). \quad (10.6.9)$$

Здесь $\theta(t)$ — функция Хевисайда, $\theta_{-1} = \delta(t)$,

$$\theta_k(t) = \frac{t^k}{k!} \theta(t), \quad k \geq 0,$$

функции $a_k(x, x^0)$ вычисляются с использованием оператора

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2(x)\Delta_x + c^2(x)\nabla_x \ln \rho \nabla_x$$

по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} a_{-1}(x, x^0) &= \frac{1}{2\pi c^3(x^0)} \left| \frac{\partial}{\partial x} g(x, x^0) \right|^{1/2} \\ &\times \exp \left[\frac{1}{2} \int_{\Gamma(x, x^0)} (c^2(\xi)\nabla_\xi \ln \rho(\xi)\nabla_\xi \tau(\xi, x^0) + \nabla_\xi c^2(\xi)\nabla_\xi \tau(\xi, x^0)) d\tau \right], \end{aligned} \quad (10.6.10)$$

$$a_0(x, x^0) = -\frac{a_{-1}(x, x^0)}{8\pi\tau(x, x^0)} \int_{\Gamma(x, x^0)} [a_{-1}(\xi, x^0)]^{-1} L_\xi a_{-1}(\xi, x^0) d\tau, \quad (10.6.11)$$

$$a_k(x, x^0) = \frac{a_{-1}(x, x^0)}{8\pi} \int_0^1 [a_{-1}(\xi, x^0)]^{-1} \times \eta^k L_\xi a_{k-1}(\xi, x^0) \Big|_{\xi=h(\eta g(x, x^0), x^0)} d\eta, \quad k \geq 1.$$

Здесь $a_k \in C^{l-2k}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, функция $U_s(x, t, x^0)$ при $s = -1$ кусочно непрерывна, при $s = 0$ непрерывна, а при $s \geq 1$ непрерывна вместе с частными производными $D_x^\alpha D_t^\beta D_{x^0}^\gamma U_s(x, t, x^0)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $|\alpha| + |\gamma| < l - 2s - 3$, $|\alpha| + \beta + |\gamma| \leq s - 1$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$. Кроме того, функция $U_s(x, t, x^0)$ ($s \geq -1$) представима в виде

$$U_s(x, t, x^0) = \theta_{s+1}(t^2 - \tau^2(x, x^0)) \tilde{U}_s(x, t, x^0),$$

где \tilde{U}_s — функция, ограниченная в любой замкнутой области.

Доказательство теоремы приведено в [13, стр. 125–134].

10.6.2. Трехмерная обратная задача для уравнения акустики

Рассмотрим обратную задачу восстановления коэффициентов $c(x)$, $\rho(x)$ уравнения акустики, если относительно решения прямой задачи

$$u_{tt} = c^2(x) \Delta u - c^2(x) \nabla \ln \rho(x) \nabla u + \delta(x - x^0) \delta(t), \quad (10.6.12)$$

$$x \in D \subset \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0 \quad (10.6.13)$$

известна дополнительная информация на границе S области D :

$$u(x, t, x^0) = f(x, t, x^0), \quad (10.6.14)$$

$$x, x^0 \in S, \quad -\infty < t < \tau(x, x^0) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Сформулируем сначала условия, гарантирующие единственность и условную устойчивость решения задачи нахождения скорости распространения волн $c(x)$ из соотношений (10.6.12)–(10.6.14). Эта задача тесно связана с обратной кинематической задачей сейсмологии (см. раздел 5.4). Действительно, пусть $x^0 \in S$, x — фиксированная точка на границе S . Если $t < \tau(x, x^0)$, фронт волны еще не дошел до точки x и, следовательно, решение задачи (10.6.12), (10.6.13) равно нулю. Начиная с момента $t = \tau(x, x^0)$, решение становится отличным от нуля и зависит, вообще говоря, от коэффициентов уравнения (10.6.12). Таким образом, время пробега сигнала $\tau(x, x^0)$ является функционалом решения задачи (10.6.12), (10.6.13). Поэтому, если решение известно как

функция $f(x, t, x^0)$ времени t для всех точек $x \in S$ при всевозможных $x^0 \in S$, то эта функция содержит в себе информацию о временах пробега $\tau(x, x^0)$ между точками границы S области D . Таким образом, мы приходим к обратной кинематической задаче сейсмоки, которая заключается в определении функции скорости $c(x)$, а также порожденного этой функцией семейства лучей $\Gamma(x, x^0)$, по временам пробега из уравнения

$$\int_{\Gamma(x, x^0)} \frac{|dy|}{c(y)} = \tau(x, x^0), \quad x, x^0 \in S. \quad (10.6.15)$$

Итак, пусть D — односвязная ограниченная область с гладкой границей S , заданной в виде $F(x) = 0$, где $F \in C^3(\bar{D})$ и $F(x) < 0$, $x \in D$, $|\nabla_x F| \Big|_{x \in S} = 1$. Предположим, что поверхность S выпукла относительно лучей $\Gamma(x, x^0)$ и семейство лучей регулярно в \bar{D} .

Определим множество $\Lambda(C_1, C_2)$ функций $c(x) \in C^2(D)$, удовлетворяющих при фиксированных константах C_1, C_2 условиям:

- 1) $0 < C_1 \leq c^{-1}(x)$ при всех $x \in D$;
- 2) $\|c^{-1}\|_{C^2(D)} \leq C_2 < \infty$;
- 3) семейство лучей $\Gamma(x, x^0)$, порожденное функцией $c(x)$, регулярно в D .

Используя уравнение эйконала, можно по $\tau(x, x^0)$, заданной на $S \times S$, вычислить на этом множестве частные производные $\tau_{x_i}, \tau_{x_i^0}, \tau_{x_i x_j^0}$, $i, j = \overline{1, 3}$, поскольку производные в касательных направлениях находятся непосредственно по функции $\tau(x, x^0)$, а в направлениях, нормальных к $S \times S$, имеем

$$|\nabla_x \tau(x, x^0)| = \frac{1}{c(x)}, \quad |\nabla_x \tau(x^0, x)| = \frac{1}{c(x^0)}.$$

Для оценки условной устойчивости задачи определения скорости удобно ввести следующую норму

$$\|\tau\|^2 = \int_S \int_S \left[|\nabla_x \tau(x, x^0)|^2 + |\nabla_{x^0} \tau(x, x^0)|^2 + |x - x^0|^2 \sum_{i, j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \tau(x, x^0)}{\partial x_i \partial x_j^0} \right)^2 \right] \frac{dS_x dS_{x^0}}{|x - x^0|}.$$

Теорема 10.6.2 (условная устойчивость задачи определения скорости). Для любых функций $c_{(1)}, c_{(2)} \in \Lambda(C_1, C_2)$ и отвечающих им функций $\tau_{(1)}(x, x^0), \tau_{(2)}(x, x^0)$ имеет место оценка

$$\|c_{(1)} - c_{(2)}\|_{L_2(D)}^2 \leq C \|\tau_{(1)} - \tau_{(2)}\|^2.$$

Здесь постоянная C зависит только от постоянных C_1 и C_2 .

Доказательство теоремы приведено в работе [13].

Исследуем теперь задачу восстановления плотности среды $\rho(x)$ из соотношений (10.6.12)–(10.6.14) в предположении, что условия, гарантирующие устойчивость задачи нахождения $c(x)$ соблюдены. Мы будем также предполагать, что функции $c(x)$, $\rho(x)$ являются достаточно гладкими положительными функциями в \mathbb{R}^3 и принимают постоянные значения $c_0 > 0$, $\rho_0 > 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus D$.

Докажем вспомогательную лемму, приводящую формулу (10.6.10) для $a_{-1}(x, x^0)$ к более простому виду.

Лемма 10.6.1. Пусть $c(x)$, $\rho(x)$ — гладкие положительные функции: $c(x) \in C^{l+4}(\mathbb{R}^3)$, $\rho(x) \in C^{l+3}(\mathbb{R}^3)$, $l \geq 7$. Тогда при $x, x^0 \in \mathbb{R}^3$ имеет место формула

$$a_{-1}(x, x^0) = A(x, x^0) \exp(R(x)/2), \quad (10.6.16)$$

где

$$R(x) = \ln \rho(x),$$

$$A(x, x^0) = \frac{1}{2\pi c^3(x^0)} \left| \frac{\partial g(x, x^0)}{\partial x} \right|^{1/2} \exp\left(-\frac{R(x^0)}{2}\right) \frac{c(x)}{c(x^0)}. \quad (10.6.17)$$

Доказательство. Поскольку $c(x) \in C^{l+4}(\mathbb{R}^3)$, $l \geq 7$, функция $|\partial g(x, x^0)/\partial x|^{1/2}$ также принадлежит классу $C^{l+3}(\mathbb{R}^3)$. Учитывая, что вдоль геодезической $\Gamma(x, x^0)$ метрики (10.6.7) имеют место равенства

$$\frac{1}{2} c^2(\xi) \nabla_\xi \ln \rho(\xi) \nabla_\xi \tau(\xi, x^0) = \frac{d}{d\tau} [\ln \sqrt{\rho(\xi)}],$$

$$c^2(\xi) \nabla_\xi \ln c^2(\xi) \nabla_\xi \tau(\xi, x^0) = \frac{d}{d\tau} [\ln c^2(\xi)],$$

получим соотношение

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma(x, x^0)} [c^2(\xi) \nabla_\xi \ln \rho(\xi) \nabla_\xi \tau(\xi, x^0) + \nabla_\xi c^2(\xi) \nabla_\xi \tau(\xi, x^0)] d\tau$$

$$= \ln \left[\sqrt{\frac{\rho(x)}{\rho(x^0)}} \frac{c(x)}{c(x^0)} \right]. \quad (10.6.18)$$

Используя формулу (10.6.18), из равенства (10.6.10) находим

$$a_{-1}(x, x^0) = \frac{1}{2\pi c^3(x^0)} \left| \frac{\partial g(x, x^0)}{\partial x} \right|^{1/2} \sqrt{\frac{\rho(x)}{\rho(x^0)}} \frac{c(x)}{c(x^0)},$$

т. е. в обозначениях (10.6.17)

$$a_{-1}(x, x^0) = A(x, x^0) \exp(R(x)/2),$$

что и требовалось доказать. \square

Используя теорему 10.6.1 об асимптотическом разложении фундаментального решения, переформулируем задачу в виде задачи интегральной геометрии. С этой целью преобразуем выражение $L_x a_{-1}(x, x^0)/a_{-1}(x, x^0)$, входящее в формулу (10.6.11). По определению оператора L_x , получаем

$$L_x a_{-1}(x, x^0) = -c^2(x) \Delta_x a_{-1}(x, x^0) + c^2(x) \nabla_x R(x) \nabla_x a_{-1}(x, x^0). \quad (10.6.19)$$

Учитывая формулу (10.6.16), мы можем выписать соотношения

$$\Delta_x a_{-1}(x, x^0) = [\Delta_x A(x, x^0) + \nabla_x A(x, x^0) \nabla_x R(x) + (\Delta_x R(x)/2 + |\nabla_x R(x)|^2/4) A(x, x^0)] \exp(R(x)/2),$$

$$\nabla_x a_{-1}(x, x^0) = \nabla_x A(x, x^0) \exp(R(x)/2) + (1/2) A(x, x^0) \exp(R(x)/2) \nabla_x R(x).$$

Из этих равенств и (10.6.16) находим

$$\frac{\Delta_x a_{-1}(x, x^0)}{a_{-1}(x, x^0)} = \frac{\Delta_x A(x, x^0)}{A(x, x^0)} + \frac{\Delta_x R(x)}{2} + \nabla_x \ln A(x, x^0) \nabla_x R(x) + \frac{1}{4} |\nabla_x R(x)|^2, \quad (10.6.20)$$

$$\frac{\nabla_x a_{-1}(x, x^0)}{a_{-1}(x, x^0)} = \nabla_x \ln A(x, x^0) + \frac{\nabla_x R(x)}{2}. \quad (10.6.21)$$

Из (10.6.19)–(10.6.21) следует представление для $\frac{L_x a_{-1}(x, x^0)}{a_{-1}(x, x^0)}$:

$$\frac{L_x a_{-1}(x, x^0)}{a_{-1}(x, x^0)} = \frac{c^2(x)}{2} \left[-\Delta_x R(x) + \frac{|\nabla_x R(x)|^2}{2} - \frac{2\Delta_x A(x, x^0)}{A(x, x^0)} \right]. \quad (10.6.22)$$

Из формул (10.6.11), (10.6.22) при $x, x^0 \in S$ находим равенство

$$\int_{\Gamma(x, x^0)} \frac{c^2(\xi)}{2} \left[\Delta_\xi R(\xi) - \frac{1}{2} |\nabla_\xi R(\xi)|^2 \right] d\tau = W(x, x^0), \quad (10.6.23)$$

$$x, x^0 \in S,$$

где

$$W(x, x^0) = 8\pi\tau(x, x^0) \frac{a_0(x, x^0)}{a_{-1}(x, x^0)} - \int_{\Gamma(x, x^0)} c^2(\xi) \frac{\Delta_\xi A(\xi, x^0)}{A(\xi, x^0)} d\tau. \quad (10.6.24)$$

Покажем, что функция $W(x, x^0)$ однозначно определяется по решению $c(x)$ задачи (10.6.15). Действительно, если $c(x) \in C^{l+4}(\mathbb{R}^3)$ — решение задачи (10.6.15), то по нему можно однозначно определить функцию $\tau(x, x^0)$ в области $\mathbb{R}^3 \times S$. Функции $A(x, x^0)$ и $a_{-1}(x, x^0)$ можно

построить в областях $\mathbb{R}^3 \times S$ и $S \times S$ соответственно, используя лемму 10.6.1.

Из формулы (10.6.9) находим

$$a_0(x, x^0) = \lim_{t \rightarrow \tau(x, x^0) + 0} [f(x, t, x^0) - a_{-1}(x, x^0) \delta(t^2 - \tau^2(x, x^0))],$$

$$x \in S, \quad x^0 \in S.$$

Отметим, что поскольку выражение, стоящее в квадратных скобках, есть функция, непрерывная для значений $t \geq \tau(x, x^0)$, формула корректна. Из этой формулы следует, что по заданной информации (10.6.14) при $x \in S$, $x^0 \in S$, $\tau(x, x^0) > 0$ может быть определена также и функция $a_0(x, x^0)$. Таким образом, функция $W(x, x^0)$, задаваемая формулой (10.6.24), однозначно определяется в области $(x, x^0) \in S \times S$ решением $c(x)$ задачи (10.6.15). Кроме того, семейство геодезических $\Gamma(x, x^0)$, $x \in S$, $x^0 \in S$, в метрике (10.6.7) также однозначно строится по функции $c(x)$, $x \in D$.

Поэтому равенство (10.6.23) приводит к задаче интегральной геометрии, заключающейся в определении функции

$$H(x) \equiv \frac{c^2(x)}{2} \left[\Delta_x R(x) - \frac{1}{2} |\nabla_x R(x)|^2 \right]$$

по известным значениям $W(x, x^0)$ интегралов от $H(x)$ вдоль кривых из заданного семейства $\{\Gamma(x, x^0)\}$, $x \in S$, $x^0 \in S$.

Задача интегральной геометрии

$$\int_{\Gamma(x, x^0)} H(\xi) |d\xi| = W(x, x^0),$$

$$|d\xi| = \left(\sum_{j=1}^3 (d\xi_j)^2 \right)^{1/2}, \quad x, x^0 \in S,$$

заключающаяся в отыскании функции $H(x)$ в области \bar{D} по известной для $x, x^0 \in S$ функции $W(x, x^0)$, исследуется в работе В. Г. Романова [13]. Оценка устойчивости ее решения содержится в следующей теореме [13, стр. 95–101].

Теорема 10.6.3. Пусть D — односвязная ограниченная область с границей S , уравнение которой задано в виде $F(x) = 0$, где $F(x) \in C^3(\bar{D})$, $F(x) < 0$ при $x \in D$, $|\nabla_x F(x)||_{x \in S} = 1$. Пусть, кроме того, S выпукла относительно лучей $\Gamma(x, \alpha)$ и семейство лучей регулярно внутри \bar{D} . Тогда для поставленной выше задачи интегральной геометрии в предположении

$$c(x) \in C^2(\bar{D}), \quad 1/c(x) \geq C_1 > 0, \quad H(x) \in C^1(\bar{D})$$

имеет место оценка устойчивости

$$\int_D H^2(x) dx \leq \frac{1}{8\pi C_1} \int_S \int_S \Phi(W, \tau)(x, x^0) dS_x dS_{x^0},$$

в которой

$$\Phi(W, \tau)(x, x^0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & W_{x_1}(x, x^0) & W_{x_2}(x, x^0) & W_{x_3}(x, x^0) \\ 0 & 0 & F_{x_1}(x) & F_{x_2}(x) & F_{x_3}(x) \\ W_{x_1^0}(x, x^0) & F_{x_1^0}(x^0) & \tau_{x_1 x_1^0}(x, x^0) & \tau_{x_2 x_1^0}(x, x^0) & \tau_{x_3 x_1^0}(x, x^0) \\ W_{x_2^0}(x, x^0) & F_{x_2^0}(x^0) & \tau_{x_1 x_2^0}(x, x^0) & \tau_{x_2 x_2^0}(x, x^0) & \tau_{x_3 x_2^0}(x, x^0) \\ W_{x_3^0}(x, x^0) & F_{x_3^0}(x^0) & \tau_{x_1 x_3^0}(x, x^0) & \tau_{x_2 x_3^0}(x, x^0) & \tau_{x_3 x_3^0}(x, x^0) \end{vmatrix}.$$

Отметим, что в функцию $\Phi(W, \tau)(x, x^0)$ входят производные от функции $W(x, x^0)$ по x, x^0 только в направлениях, касательных к поверхности S .

Таким образом, решение обратной задачи восстановления коэффициента $\rho(x)$ сведено к последовательному решению задачи интегральной геометрии, связанной с определением функции $H(x)$ при $x \in \bar{D}$ по функции $W(x, x^0)$, $x \in S$, $x^0 \in S$, а затем решению следующей задачи Дирихле: определить функцию $R(x) \in C^{l+3}(D)$, которая при $x \in S$ постоянна и равна $\ln \rho_0$, а при $x \in D$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_x R(x) - |\nabla_x R(x)|^2/2 = 2H(x)/c^2(x). \quad (10.6.25)$$

Существование единственного решения этой задачи для области с малым диаметром доказывается методом, изложенным в книге [10.19]. Исследование вопросов единственности и устойчивости решения задач для квазилинейного уравнения (10.6.25) сводится к исследованию аналогичных вопросов для линейного эллиптического уравнения. Приведем оценку устойчивости решения задачи Дирихле для уравнения (10.6.25).

Введем класс функций

$$\mathcal{R}(M, \rho_0) = \{R(x) \in C^{11}(\bar{D}) : \|R\|_{C^1(\bar{D})} \leq M, R(x) = \ln \rho_0 \text{ при } x \in S\},$$

где M — произвольное фиксированное число.

Пусть $R_1(x), R_2(x) \in \mathcal{R}(M, \rho_0)$ — решения уравнения (10.6.25) при $H(x) = H_1(x)$ и $H(x) = H_2(x)$ соответственно. Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{R}(x) &= R_1(x) - R_2(x), & \tilde{H}(x) &= H_1(x) - H_2(x), \\ \rho_j(x) &= \exp\{R_j(x)\}, & j &= 1, 2, & a(x) &= 1/\sqrt{\rho_1(x)\rho_2(x)}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях выполняются равенства

$$\nabla_x(a(x)\nabla_x \tilde{R}(x)) = \frac{2a(x)}{c^2(x)} \tilde{H}(x), \quad \tilde{R}|_{x \in S} = 0. \quad (10.6.26)$$

Для задачи Дирихле (10.6.26) имеет место следующая оценка:

$$\|\tilde{R}\|_{L_2(D)}^2 \leq C \|\tilde{H}\|_{L_2(D)}, \quad (10.6.27)$$

где C — постоянная, величина которой зависит от M , ρ_0 , $\text{diam } D$, c_0 .

Из неравенства (10.6.27) и теоремы 10.6.3 вытекает следующая теорема об устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 10.6.4. Пусть M , ρ_0 — фиксированные положительные числа, $\rho_0 < \exp\{M\}$; $c(x) \in C^{11}(\bar{D})$ — известная положительная функция, принимающая при $x \in S$ постоянное значение c_0 . Пусть $\rho_1(x), \rho_2(x) \in \mathcal{M}(M, \rho_0) = \{\rho(x) : \rho(x) = \exp\{R(x)\}, R(x) \in \mathcal{R}(M, \rho_0)\}$ — решения обратной задачи (10.6.12)–(10.6.14), отвечающие функциям $f_1(x, t, x^0)$, $f_2(x, t, x^0)$ соответственно. Тогда имеет место оценка

$$\|\ln \rho_1 - \ln \rho_2\|_{L_2(D)}^2 \leq C \int_S \int_S |\Phi(\tilde{W}, \tau)| dS_x dS_{x^0},$$

где C — постоянная, величина которой зависит от M , ρ_0 , c_0 , $\text{diam } D$;

$$\tilde{W}(x, x^0) = \frac{4\tau(x, x^0)c^3(x^0)}{|\partial g(x, x^0)/\partial x|^{1/2}} \lim_{t \rightarrow \tau(x, x^0)+0} [f_1(x, t, x^0) - f_2(x, t, x^0)];$$

$\Phi(W, \tau)$ определяется в условиях теоремы 10.6.3; функции $g(x, x^0)$, $\tau(x, x^0)$ определены после формулы (10.6.7).

10.7. Двумерный аналог уравнения Гельфанда — Левитана — Крейна

В данном разделе мы построим многомерный аналог уравнения Гельфанда — Левитана — Крейна для задачи определения плотности из уравнения акустики. Как и в разделе 10.5, нам потребуются бесконечное множество источников и, соответственно, намного больше информации, чем это обычно требуется для доказательства теоремы единственности. Преимуществом же данного подхода является сведение нелинейной задачи к системе линейных уравнений, а также возможность вычисления неизвестного коэффициента без многократного решения прямой задачи. Полученные в данном разделе формулы допускают обоснование только в классе аналитических по y функций, однако численные расчеты показывают, что формула (10.7.12) достаточно хорошо приближает искомый коэффициент.

Рассмотрим последовательность прямых задач

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\rho u^{(k)} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{x,y} + \nabla_{x,y} \ln \rho(x, y) \nabla_{x,y} \right] u^{(k)} = 0, \\ x > 0, \quad y &\in [-\pi, \pi], \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{aligned} \quad (10.7.1)$$

$$u^{(k)}|_{t < 0} \equiv 0; \quad (10.7.2)$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}(+0, y, t) = e^{iky} \cdot \delta(t); \quad (10.7.3)$$

$$u^{(k)}|_{y=\pi} = u^{(k)}|_{y=-\pi}. \quad (10.7.4)$$

Здесь и всюду в дальнейшем предполагаем, что все рассматриваемые функции являются достаточно гладкими и 2π -периодическими по переменной y . Предполагаем, что след решения прямой задачи (10.7.1)–(10.7.4) существует и может быть измерен:

$$u^{(k)}(0, y, t) = f^{(k)}(y, t). \quad (10.7.5)$$

Обратная задача состоит в восстановлении коэффициента $\rho(x, y)$ из соотношений (10.7.1)–(10.7.5). При этом $\rho(0, y)$ считается известной.

Необходимым условием существования решения обратной задачи (10.7.1)–(10.7.5) является следующее:

$$f^{(k)}(y, +0) = -e^{iky}, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Введём вспомогательную последовательность прямых задач:

$$\mathcal{A}_\rho w^{(m)} = 0, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad (10.7.6)$$

$$w^{(m)}(0, y, t) = e^{imy} \cdot \delta(t), \quad \frac{\partial w^{(m)}}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad (10.7.7)$$

$$w^{(m)}|_{y=\pi} = w^{(m)}|_{y=-\pi}.$$

Нетрудно показать, что решение задачи (10.7.6), (10.7.7) имеет вид

$$w^{(m)}(x, y, t) = S^{(m)}(x, y) [\delta(x+t) + \delta(x-t)] + \tilde{w}^{(m)}(x, y, t), \quad (10.7.8)$$

где функция $\tilde{w}^{(m)}(x, y, t)$ кусочно-гладкая и

$$S^{(m)}(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho(x, y)}{\rho(0, y)}} e^{imy}.$$

Продолжим нечетным образом функции $u^{(k)}(x, y, t)$ и $f^{(k)}(y, t)$ по переменной t . Очевидно, что

$$u^{(k)}(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) w^{(m)}(x, y, s) ds \quad (10.7.9)$$

при $x > 0, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$. Здесь $f_m^{(k)}(t)$ — коэффициенты Фурье функции $f^{(k)}(y, t)$.

Применим к левой и правой частям равенства (10.7.9) следующую операцию

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{(\cdot)}{\rho(\xi, y)} d\xi.$$

Обозначим

$$V^m(x, y, t) = \int_0^x \frac{w^{(m)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi. \quad (10.7.10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{u^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{m=1}^{\infty} V^m(x, y, s) f_m^{(k)}(t-s) ds \\ &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(+0) V^m(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t-s) V^m(x, y, s) ds \\ &= -2V^k(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t-s) V^m(x, y, s) ds. \end{aligned}$$

Определим функцию G^k при $x > |t|$:

$$G^k(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{u^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy.$$

Очевидно, что если $u^{(k)}(x, y, t)$, $\rho(x, y)$ — решение задачи (10.7.1)–(10.7.5), то

$$G_x^k(x, t) = 0, \quad G_t^k(x, t) = 0, \quad |t| < x.$$

Следовательно, $G^k(x, t) = \text{const}$ при $|t| < x$. Найдем величину этой константы. Продолжим функции $u^{(k)}(x, y, t)$, $\rho(x, y)$ чётным образом по x . Тогда $u^{(k)}(x, y, t)$ является решением следующей задачи:

$$A_\rho u^{(k)} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t > 0; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} \right|_{t=0} = -2e^{iky} \delta(x), \quad u^{(k)}|_{y=\pi} = u^{(k)}|_{y=-\pi}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} G^k(x, t) &= \lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^x \frac{u_t^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-x}^x \frac{u_t^{(k)}(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi dy = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\Phi^m(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} V^m(x, y, t) dy,$$

получим систему интегральных уравнений для функции $\Phi^m(x, t)$:

$$\Phi^k(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t-s) \Phi^m(x, s) ds - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, \quad (10.7.11)$$

где $|t| < x$, $k \in \mathbb{Z}$. Система (10.7.11) — многомерный аналог уравнения Гельфанда — Левитана — Крейна. Используя (10.7.7) и (10.7.10), можно найти значение функции $V^m(x, y, t)$ при $t = x$:

$$V^m(x, y, x - 0) = \frac{e^{imy}}{2\sqrt{\rho(x, y)\rho(0, y)}}.$$

Следовательно,

$$\Phi^m(x, x - 0) = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imy}}{2\sqrt{\rho(x, y)\rho(0, y)}} dy.$$

Решение обратной задачи (10.7.1)–(10.7.5) находится по формуле

$$\frac{1}{\sqrt{\rho(x, y)}} = - \frac{\sqrt{\rho(0, y)}}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi^m(x, x - 0) e^{-imy}. \quad (10.7.12)$$

Итак, для того чтобы найти решение $\rho(x, y)$ обратной задачи (10.7.1)–(10.7.5) в точке $x_0 > 0$, необходимо решить уравнение (10.7.11) с фиксированным параметром $x = x_0$ и вычислить $\rho(x_0, y)$ по формуле (10.7.12).

Очевидно, что изложенный подход можно обобщить на случай пространственной переменной $y \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 10.7.1. Аналогично можно построить систему уравнений Гельфанда — Левитана для задачи определения коэффициента уравнения $u_{tt} = \Delta u - q(x)u$ (см. [21]).

Контрольные вопросы

1. Проанализируйте взаимосвязи задач, рассмотренных в главе 10, с задачами, изученными в главах 2, 4, 5, 6.
2. Почему глава 10 является самой (не считая Приложения) большой и насыщенной как теоремами, так и численными методами решения обратных задач?

Дополнительная литература

- 10.1. **Алексеев А. С.** Обратные динамические задачи сейсмологии. Москва: Наука, 1967. Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных.
- 10.2. **Алексеев А. С., Кабанихин С. И.** Обратные задачи и новые технологии в геофизике // Тр. Международной конференции “Математические методы в геофизике”. 2003. Т. 1. С. 7–39.
- 10.3. **Белишев М. И.** Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 524–527.

- 10.4. **Белишев М. И., Благовещенский А.** Динамические обратные задачи теории рассеяния волн. Санкт-Петербург: СПбГУ, 1999.
- 10.5. **Благовещенский А. С.** Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн // Тр. Ленингр. ун-та. 1966. Т. 1. С. 68–81.
- 10.6. **Благовещенский А. С.** О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны // Тр. Матем. инст. АН СССР. 1971. Т. 115. С. 28–38.
- 10.7. **Благовещенский А. С., Кабанихин С. И.** Об обратной задаче теории распространения волн в полубесконечном нерегулярном волноводе // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 4. С. 603–607.
- 10.8. **Вержбицкий В. В., Кабанихин С. И., Мартаков С. В.** Нестационарный диэлектрический каротаж на малых временах // Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 3. С. 386–388.
- 10.9. **Жобер Ж.** Линеаризованная прямая и обратная динамические задачи распространения сейсмических волн // Численные методы в сейсмических исследованиях. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1983. С. 193–207.
- 10.10. **Кабанихин С. И.** Применение энергетических неравенств к одной обратной задаче для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 61–67.
- 10.11. **Кабанихин С. И.** Линейная регуляризация многомерных обратных задач для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309, № 4. С. 405–407.
- 10.12. **Кабанихин С. И.** О регуляризации многомерных обратных задач для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1990. Т. 40, № 3. С. 579–583.
- 10.13. **Кабанихин С. И., Бимуратов С. Ш.** Решение одномерной обратной задачи электродинамики методом Ньютона-Канторовича // ЖВМ и МФ. 1993. Т. 32, № 12. С. 1729–1743.
- 10.14. **Кабанихин С. И., Грасселли М., Лоренци А.** Обратная задача для интегродифференциального уравнения // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 3. С. 415–426.
- 10.15. **Кабанихин С. И., Искаков К. Т.** Обоснование метода наискорейшего спуска в интегральной постановке обратной задачи для гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 567–584.
- 10.16. **Кабанихин С. И., Искаков К. Т.** Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск: НГУ, 2001.

- 10.17. **Кабанихин С. И., Шишленин М. А.** Сравнительный анализ численных методов решения обратной задачи для волнового уравнения // Обратные задачи и информационные технологии. 2002. Т. 1, № 1. С. 49–72.
- 10.18. **Кабанихин С. И., Шишленин М. А.** Решение обратной задачи методами граничного управления и Гельфанда — Левитана // Обратные задачи и информационные технологии. 2003. Т. 2, № 1. С. 47–69.
- 10.19. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. Москва: Гостехиздат, 1951. Т. 1, 2.
- 10.20. **Овсянников Л. В.** Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 4.
- 10.21. **Романов В. Г.** Дифференциальные свойства фундаментального решения уравнения второго порядка гиперболического типа // Некорректные математические задачи и проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СО АН, 1979. С. 110–121.
- 10.22. **Романов В. Г.** Обратная задача Лэмба в линейном приближении // Численные методы в сейсмических исследованиях. Новосибирск: Наука, 1983. С. 170–192.
- 10.23. **Романов В. Г.** Вопросы корректности задачи определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 125–134.
- 10.24. **Романов В. Г.** О локальной разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений в классе функций, аналитических по части переменных // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 4. С. 807–811, 819–842.
- 10.25. **Романов В. Г., Кабанихин С. И., Пухначева Т. П.** Обратные задачи электродинамики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984.
- 10.26. **Романов В. Г., Кабанихин С. И., Бобоев К. Б.** Обратная задача электродинамики для \mathcal{P}_N -приближения кинетического уравнения переноса // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 2. С. 296–299.
- 10.27. **Тихонов А. Н.** О единственности решения задачи электроразведки // Докл. АН СССР. 1949. Т. 69, № 6. С. 797–800.
- 10.28. **Яхно В. Г.** Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990.
- 10.29. **Anikonov Yu. E.** Multidimensional Inverse and Ill-Posed Problems for Differential Equations // VSP, The Netherlands. 1995.
- 10.30. **Ayapbergenova A. T., Kabanikhin S. I., Lorenzi A.** Justification of optimization methods for inverse integro-differential hyperbolic problems // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2003. Vol. 12, No. 1.

- 10.31. **Blagoveshchenskii A. S.** Inverse Problems of Wave Processes // VSP, The Netherlands. 2001.
- 10.32. **Hanke M., Neubauer A., Scherzer O.** A convergence analysis of Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems // Numer. Math. 1995. V. 72. P. 21–37.
- 10.33. **Hamaker C., Smith K. T., Solmin D. C., Wagner S. C.** The divergent beam x-ray transform // Rocky Mountain Journal of Mathematics. Numer. Math. 1980. P. 253–283.
- 10.34. **He S., Kabanikhin S. I.** An optimization approach to a three-dimensional acoustic inverse problem in the time domain // J. Math. Phys. 1995. V. 36, N 8. P. 4028–4043.
- 10.35. **Isakov V.** An inverse hyperbolic problem for the wave equation // Communications PDE. 1991. N 16. P. 1183–1195.
- 10.36. **Kabanikhin S. I., Ayapbergenova A. T.** Estimation of the rate of convergence of the Landweber iteration method in an inverse problem of acoustics // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2002. V. 2. P. 75–97.
- 10.37. **Kabanikhin S. I., Isakov K. T., Yamamoto M.** H_1 -conditional stability with explicit lipshitz constant for a one-dimensional inverse acoustic problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2001. V. 9, N 3. P. 249–268.
- 10.38. **Kabanikhin S. I., Kowar R., Scherzer O.** On Landweber iteration for the solution of a parameter identification problem in a hyperbolic partial differential equation of second order // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1998. V. 6, N 5. P. 403–430.
- 10.39. **Kabanikhin S. I., Kowar R., Scherzer O., Vasin V. V.** Numerical comparison of iterative regularization methods for a parameter estimation in a hyperbolic PDE // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2001. V. 9, N 6. P. 615–626.
- 10.40. **Kabanikhin S. I., Scherzer O., Shishlenin M. A.** Iteration methods for a solving a two-dimensional problem for hyperbolic equation by the iteration method // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2003. V. 11, N 1. P. 1–23.
- 10.41. **Rakesh.** An inverse problem for the wave equation in the half plane // Inverse Problems. 1993. V. 9, N 3. P. 433–441.
- 10.42. **Sylvester J., Uhlmann G.** A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem // Annals of Mathematics. 1987. V. 125. P. 153–169.

Глава 11.

Коэффициентные обратные задачи для параболических и эллиптических уравнений

Коэффициентные обратные задачи для параболических и эллиптических уравнений являются наиболее сложными и практически важными задачами. Как было показано в разделе 8.1, устойчивость этих задач хуже, чем у соответствующих обратных задач для гиперболических уравнений. Поэтому практически единственным методом численного решения коэффициентных обратных задач для параболических и эллиптических уравнений является оптимизационный, а также его различные модификации с использованием свойств прямых задач (принцип максимума, монотонность решения, гладкость и т. п.).

Задачам определения коэффициентов параболических уравнений посвящена обширная литература. Укажем лишь три книги, в которых излагаются общая теория [10], численные методы и приложения к задачам тепломассопереноса [1], прикладные вопросы [8.1]. Наиболее трудным является класс задач, в которых требуется определить коэффициенты уравнения. В разделах 11.1–11.4 мы рассмотрим одномерные обратные задачи для параболических уравнений. Заметим, что многие результаты, изложенные в этих разделах, могут быть перенесены на многомерный случай и даже на квазилинейные уравнения. В разделах 11.5 и 11.6 приведены теоремы о единственности решения многомерных обратных задач для уравнений эллиптического типа.

Практическое применение методы решения коэффициентных задач для уравнения теплопроводности находят, например, в задаче определения зависимости теплофизических характеристик слитка в процессе закалки стали. Еще одна практическая задача, которая приводит к рассматриваемым постановкам, состоит в определении характеристик теплозащитных материалов, разрушающихся при взаимодействии с высокотемпературным газом. Традиционные методы обычно не позволяют достаточно точно моделировать естественные условия нагрева и разрушения материалов по уровням температур, скоростям нагрева, структурным изменениям в материале. В геофизике подобные задачи возникают при определении теплофизических свойств промерзающих (протаивающих) грунтов, в задачах геоэлектрики, геотермики и многих других.

11.1. Постановка коэффициентных обратных задач для параболического уравнения.

Сведение к гиперболическим обратным задачам

Рассмотрим следующую коэффициентную обратную задачу для параболического уравнения. Предположим, что о решении прямой начально-краевой задачи

$$u_t - (k(x)u_x)_x + q(x)u = 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in (0, 1), \quad (11.1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, 1), \quad (11.1.2)$$

$$k(0)u_x(0, t) = \alpha_1(t), \quad t \in (0, T), \quad (11.1.3)$$

$$k(1)u_x(1, t) = \alpha_2(t), \quad t \in (0, T), \quad (11.1.4)$$

известна дополнительная информация

$$u(0, t) = f_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (11.1.5)$$

$$u(1, t) = f_2(t), \quad t \in [0, T]. \quad (11.1.6)$$

Функции $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $u_0(x)$ известны, требуется определить один из коэффициентов уравнения (11.1.1), считая второй известным (в некоторых случаях удается определить комбинацию коэффициентов).

Обратная задача (11.1.1)–(11.1.6) сводится к коэффициентной обратной задаче для гиперболического уравнения

$$v_{tt} - (k(x)v_x)_x + q(x)v = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (11.1.7)$$

$$v(x, 0) = u_0(x), \quad v_t(x, 0) = 0, \quad (11.1.8)$$

$$v(0, t) = g_1(t), \quad k(0)v_x(0, t) = h_1(t), \quad (11.1.9)$$

$$v(1, t) = g_2(t), \quad k(1)v_x(1, t) = h_2(t), \quad (11.1.10)$$

при условии, что граничные условия (11.1.9)–(11.1.10) этой задачи связаны с граничными условиями (11.1.3)–(11.1.6) задачи для параболиче-

ского уравнения формулами

$$f_j(t) = \int_0^\infty g_j(\tau)G(t, \tau)d\tau, \quad j = 1, 2, \quad (11.1.11)$$

$$\alpha_j(t) = \int_0^\infty h_j(\tau)G(t, \tau)d\tau, \quad j = 1, 2, \quad (11.1.12)$$

$$G(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\tau^2/(4t)}.$$

Действительно, как было показано в разделе 8.1, если $v(x, t)$ удовлетворяет соотношениям (11.1.7)–(11.1.10), то функция

$$u(x, t) = \int_0^\infty v(x, t)G(t, \tau) d\tau \quad (11.1.13)$$

удовлетворяет равенствам (11.1.1)–(11.1.6).

Формула (11.1.13) устанавливает взаимно однозначное соответствие между решениями задач (11.1.1)–(11.1.6) и (11.1.7)–(11.1.10). Поэтому теоремы единственности, доказанные для коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений, могут быть перенесены на соответствующие обратные задачи для параболических уравнений.

В частности, задача об определении коэффициента $q(x)$ уравнения

$$u_t = u_{xx} - q(x)u \quad (11.1.14)$$

по информации о решениях задачи Коши

$$u|_{t=0} = \delta(x) \quad (11.1.15)$$

с граничными условиями

$$u|_{x=0} = f_1(t), \quad u_x|_{x=0} = f_2(t) \quad (11.1.16)$$

сводится к следующей обратной задаче:

$$\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} - q(x)\tilde{u}, \quad (11.1.17)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \delta(x), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = 0, \quad \tilde{u}|_{x=0} = \tilde{f}_1(t), \quad \tilde{u}_x|_{x=0} = \tilde{f}_2(t),$$

где функции \tilde{f}_k связаны с f_k формулами

$$f_k(t) = \int_0^\infty G(t, \tau)\tilde{f}_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2.$$

Задача (11.1.17) получается из задачи с сосредоточенным источником (10.1.28)–(10.1.30) однократным дифференцированием по переменной t . Используя результаты раздела 10.1, заключаем, что в обратной задаче (11.1.14)–(11.1.16) коэффициент $q(x) \in C(-\infty, \infty)$ однозначно определяется заданием функций f_1, f_2 на отрезке $[0, \varepsilon]$, где ε – произвольное положительное число.

Метод доказательства теорем единственности решения обратных задач для параболических уравнений, основанный на сведении к обратным задачам для соответствующих гиперболических уравнений, применим для широкого круга обратных задач с данными на части границы, включая обратную задачу для квазистационарного приближения системы уравнений Максвелла [15].

11.2. Сведение к спектральным обратным задачам

Коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений при определенных условиях на заданные и искомые функции могут быть сведены к соответствующим постановкам обратной задачи Штурма — Лиувилля [5].

Рассмотрим прямую начально-краевую задачу, которая состоит в нахождении функции $u(x, t)$ из соотношений

$$u_t = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0, \quad (11.2.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad (11.2.2)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (11.2.3)$$

$$u_x(\pi, t) = g(t), \quad t > 0, \quad (11.2.4)$$

где $q(x)$ и $g(t)$ — известные функции.

Предположим, что функция $u(x, t)$ достаточно гладкая, а именно, $u, u_x \in C([0, \pi] \times [0, \infty))$, $u_t, u_{xx} \in C((0, \pi) \times (0, \infty))$; функция $q(x)$ строго положительна и непрерывна на интервале $[0, \pi]$; а функция $g(x)$ удовлетворяет следующим условиям: $g \in C^2[0, \infty)$; $g(+0) = g'(+0) = 0$; $g(t) = 0$ при $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 > 0$; $g(t) \neq 0$.

Введем функцию $\psi(x) = u(x, t_0)$. Заметим, что в силу того, что функция $g(x)$ обращается в нуль при $t \geq t_0$ и $g(t) \neq 0$, функция $\psi(x)$ принадлежит классу $C^1[0, \pi]$ и удовлетворяет краевым условиям (11.2.3)–(11.2.4). Значит, если $q(x)$, $u(x, t)$ удовлетворяют (11.2.1)–(11.2.4), то при $t > t_0$ функция $u(x, t)$ является решением прямой задачи

$$u_t = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in (0, \pi), \quad t > t_0, \quad (11.2.5)$$

$$u(x, t_0) = \psi(x), \quad x \in [0, \pi], \quad (11.2.6)$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq t_0. \quad (11.2.7)$$

Пусть λ_n — упорядоченные по возрастанию собственные значения, а $y_n(x)$ — нормированные собственные функции задачи Штурма — Лиувилля

$$\begin{aligned} y'' - q(x)y &= -\lambda y, & x \in (0, \pi), \\ y'(0) &= y'(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (11.2.8)$$

Применяя метод разделения переменных, запишем решение задачи (11.2.5)–(11.2.7) в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k e^{-\lambda_k(t-t_0)} y_k(x), \quad (11.2.9)$$

где $\psi_k = \int_0^\pi \psi(\xi) y_k(\xi) d\xi$.

Используя свойства функций $g(x)$ и $q(x)$, можно показать, что $\lambda_0 > 0$ (значит, и все последующие λ_n строго положительны). Следовательно,

в силу (11.2.7), функции $u(x, t)$, $u_t(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ равномерно по $x \in [0, \pi]$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Применим к $u(x, t)$ преобразование Лапласа

$$v(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x, t) dt.$$

В силу (11.2.1)–(11.2.4) для комплексных p , таких, что $\operatorname{Re} p > 0$, $v(x, p)$ является решением краевой задачи

$$v''(x) - q(x)v(x) = pv, \quad (11.2.10)$$

$$v'(0, p) = 0, \quad (11.2.11)$$

$$v'(\pi, p) = \nu(p), \quad (11.2.12)$$

где

$$\nu(p) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-pt} dt.$$

Рассмотрим решение задачи Коши

$$w'' - q(x)w = pw, \quad (11.2.13)$$

$$w(0, p) = 1, \quad w'(0, p) = 0. \quad (11.2.14)$$

Поскольку $v'(0, p) = w'(0, p) = 0$, то $v(x, p)$ и $w(x, p)$ линейно зависимы и, значит, $v(x, p) = c(p)w(x, p)$, причем $c(p)$ можно найти из условия (11.2.12): $c(p) = \nu(p)/w'(\pi, p)$. Поэтому

$$v(x, p) = \nu(p)w(x, p)/w'(\pi, p). \quad (11.2.15)$$

Зная решение $w(x, p)$ задачи Коши (11.2.13)–(11.2.14), можно определить собственные значения соответствующих задач Штурма — Лиувилля, что видно из следующих лемм.

Лемма 11.2.1. Если p_0 является нулем функции $w(\pi, p)$, то $\lambda = -p_0$ является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (11.2.16)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Лемма 11.2.2. Если p_0 является нулем функции $w'(\pi, p)$, то $\mu = -p_0$ является собственным значением задачи

$$-y'' + q(x)y = \mu y, \quad (11.2.17)$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

Доказательства лемм 11.2.1, 11.2.2 основаны на том, что если $w(x, p)$ удовлетворяет уравнению (11.2.13), то функция $y(x) = w(x, p_0)$ удовлетворяет уравнению $-y'' + q(x)y = -p_0 y$.

Таким образом, между нулями функции $w(\pi, p)$ и собственными значениями задачи (11.2.16) можно установить взаимно однозначное соответствие. Аналогично связаны нули функции $w'(\pi, p)$ и собственные значения задачи (11.2.17).

11.3. Теоремы единственности

Сведение задачи (11.2.1)–(11.2.4) к задаче Штурма — Лиувилля может быть использовано при доказательстве единственности решения обратных задач для гиперболических уравнений.

Обратная задача 1. Пусть о решении прямой задачи (11.2.1)–(11.2.4) известна дополнительная информация

$$u(\pi, t) = f(t), \quad t > 0. \quad (11.3.1)$$

Требуется определить пару функций $\{q(x), u(x, t)\}$ из соотношений (11.2.1)–(11.2.4), (11.3.1) по заданным $g(t)$ и $f(t)$.

Заметим, что задача нахождения пары функций $\{q(x), u(x, t)\}$ из соотношений (11.2.1)–(11.2.4), (11.3.1) проще для исследования, чем задача нахождения одного коэффициента $q(x)$. Дело в том, что при обосновании единственности решения обратной задачи используются свойства гладкости решения $u(x, t)$ прямой задачи, которые во второй постановке пришлось бы доказывать, исходя из свойств $q(x)$. В предложенной постановке эти свойства гарантируются выбором соответствующего класса решений.

Определение 11.3.1. Будем говорить, что пара функций $\{q(x), u(x, t)\}$ принадлежит классу \mathcal{K}_1 , если

- 1) $q \in C[0, \pi]$, $q(x) > 0$, $x \in [0, \pi]$;
- 2) $u, u_x \in C([0, \pi] \times [0, \infty))$, $u_t, u_{xx} \in C((0, \pi) \times (0, \infty))$.

Теорема 11.3.1. Пусть $g(t)$ удовлетворяет условиям

- 1) $g \in C^2[0, \infty)$,
- 2) $g(+0) = g'(+0) = 0$,
- 3) $g(t) = 0$ при $0 < t_0 \leq t$,
- 4) $g(t) \neq 0$.

Тогда решение обратной задачи 1 единственно в классе \mathcal{K}_1 .

Доказательство. Предположим, что обратная задача 1 имеет в классе \mathcal{K}_1 два решения $\{(q_j(x), u_j(x, t))\}$, $j = 1, 2$. Построим функции $v_j(x, p)$ и $w_j(x, p)$, отвечающие этим решениям. Используя (11.2.15) при $\operatorname{Re} p > 0$, получаем

$$\frac{w_1(\pi, p)}{w_1'(\pi, p)} = \frac{w_2(\pi, p)}{w_2'(\pi, p)}. \quad (11.3.2)$$

Особыми точками аналитических функций $w_j(\pi, p)/w_j'(\pi, p)$ являются нули функций $w_j'(\pi, p)$, $j = 1, 2$. В силу (11.3.2) нули и особые

точки функции $w_1(\pi, p)/w'_1(\pi, p)$ совпадают с нулями и особыми точками функции $w_2(\pi, p)/w'_2(\pi, p)$. Покажем, что нули функции $w_j(\pi, p)$ и $w'_j(\pi, p)$, $j = 1, 2$, не совпадают. Если бы нули функций $w_j(\pi, p)$ и $w'_j(\pi, p)$ совпадали, например, при $p = p_0$, то решение задачи Коши

$$\begin{aligned} w''_j - (q_j(x) + p_0)w_j &= 0, \\ w_j(\pi, p_0) &= 0, \quad w'_j(\pi, p_0) = 0 \end{aligned}$$

равнялось бы нулю при $x \in [0, \pi]$, что противоречит условию $w_j(0, p_0) = 1$. Следовательно, в силу (11.3.2), все нули функций $w_1(\pi, p)$ и $w_2(\pi, p)$ совпадают, и все нули функций $w'_1(\pi, p)$ и $w'_2(\pi, p)$ тоже совпадают. Значит, совпадают и соответствующие собственные значения $\lambda_n^1 = \lambda_n^2$, $\mu_n^1 = \mu_n^2$ задач (11.2.16) и (11.2.17), в которых вместо $q(x)$ подставлены $q_1(x)$ и $q_2(x)$. Из теоремы 6.12 следует, что $q_1(x) = q_2(x)$, $x \in [0, \pi]$.

Функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ являются решениями прямой задачи (11.2.1)–(11.2.4) с коэффициентом $q(x) = q_1(x) = q_2(x)$. Следовательно, функция $\tilde{u}(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx} - q(x)\tilde{u}, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0, \quad (11.3.3)$$

$$\tilde{u}(x, 0) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad (11.3.4)$$

$$\tilde{u}_x(0, t) = \tilde{u}_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (11.3.5)$$

Умножая (11.3.3) на \tilde{u} и интегрируя по области $(0, \pi) \times (0, t)$, получаем, с учетом (11.3.4), (11.3.5), равенство

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \tilde{u}^2(\xi, t) d\xi + \int_0^t \int_0^\pi [\tilde{u}_x^2(\xi, \tau) + q(\xi)\tilde{u}^2(\xi, \tau)] d\xi d\tau = 0.$$

В силу предположения о положительности $q(x)$ $\tilde{u}(x, t) \equiv 0$ и теорема доказана. \square

Обратная задача 2. Пусть дополнительная информация о решении прямой задачи (11.2.1)–(11.2.4) задана на левом конце отрезка $(0, \pi)$:

$$u(0, t) = f_0(t), \quad t > 0. \quad (11.3.6)$$

Требуется найти пару функций $\{q(x), u(x, t)\}$ из соотношений (11.2.1)–(11.2.4), (11.3.6) по заданным $g(t)$, $f_0(t)$.

Определение 11.3.2. Будем говорить, что пара функций $\{q(x), u(x, t)\}$ принадлежит классу \mathcal{K}_2 , если эта пара принадлежит классу \mathcal{K}_1 и, кроме того, $q(x) = q(\pi - x)$, $x \in [0, \pi]$.

Теорема 11.3.2. Если $g(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 11.3.1, то решение обратной задачи 2 единственно в классе \mathcal{K}_2 .

Доказательство. Эта теорема доказывается аналогично теореме 11.3.1. Пусть $\{q(x), u(x, t)\}$ — решение обратной задачи 2 из класса \mathcal{K}_2 . Для преобразования Лапласа $v(x, p)$ функции $u(x, t)$ справедливо представление

$$v(x, p) = \frac{\nu(p)w(x, p)}{w'(x, p)},$$

в котором $w(x, p)$ есть решение задачи Коши (11.2.13)–(11.2.14).

Предположим теперь, что в \mathcal{K}_2 имеется два решения $\{q_1(x), u_1(x, t)\}$, $\{q_2(x), u_2(x, t)\}$ обратной задачи 2, которым соответствуют $v_j(x, p)$, $w_j(x, p)$, $j = 1, 2$.

Тогда из (11.3.6) вытекает $v_1(0, p) = v_2(0, p)$ и, следовательно,

$$\frac{1}{w'_1(\pi, p)} = \frac{1}{w'_2(\pi, p)}. \quad (11.3.7)$$

С учетом равенства (11.3.7) можно доказать, что соответствующие собственные значения задач (11.2.17) с коэффициентами $q_1(x)$ и $q_2(x)$ совпадают.

Далее остается использовать теорему о единственности решения обратной задачи Штурма — Лиувилля для потенциалов, симметричных относительно середины отрезка $(0, \pi)$ (см. главу 6), чтобы завершить доказательство теоремы. \square

Обратная задача 3. Пусть теперь неизвестной является также и функция $g(t)$. Решением обратной задачи 3 назовем три функции $\{q(x), g(t), u(x, t)\}$, которые удовлетворяют условиям (11.2.1)–(11.2.4), (11.3.1).

Оказывается, если к условиям теоремы 11.3.1 на $g(t)$ добавить требование неотрицательности $g(t)$, $t \geq 0$, то решение будет единственно.

Определение 11.3.3. Будем говорить, что тройка функций $\{q(x), g(t), u(x, t)\}$ принадлежит классу \mathcal{K}_3 , если выполнены условия:

- 1) $q \in C[0, \pi]$, $q(x) > 0$, $x \in [0, \pi]$;
- 2) $u, u_x \in C([0, \pi] \times [0, \infty))$; $u_t, u_{xx} \in ((0, \pi) \times (0, \infty))$;
- 3) $g \in C^2[0, \infty)$, $g(+0) = g'(+0) = 0$, $g(t) \geq 0$, $t > 0$;
 $g(t) = 0$ при $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 > 0$;
- 4) $g(t) \neq 0$.

Теорема 11.3.3. Решение обратной задачи 3 единственно в классе \mathcal{K}_3 .

Доказательство. Предположим, что в \mathcal{K}_3 найдется два решения $\{q_j(x), g_j(t), u_j(x, t)\}$, $j = 1, 2$, обратной задачи 3. Рассуждая как и ранее, получим

$$\frac{\nu_1(p)w_1(\pi, p)}{w_1'(\pi, p)} = \frac{\nu_2(p)w_2(\pi, p)}{w_2'(\pi, p)}. \quad (11.3.8)$$

Функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ отличны от нуля только на $(0, t_0)$; следовательно, их образы Лапласа $\nu_j(p)$, $j = 1, 2$, являются аналитическими во всей комплексной плоскости и, значит, не имеют особых точек. Поскольку $g_j(t) \geq 0$ и $g_j(t) \not\equiv 0$, заключаем, что $\nu_j(p) > 0$ для всех $p \in \mathbb{R}$ и $\nu_j(p)$ не имеют на действительной оси ни особых точек, ни нулей. Как и при доказательстве теоремы 11.3.1, из равенства (11.3.8) выводим, что нули функций $w_1(\pi, p)$ и $w_2(\pi, p)$ совпадают, так же как и нули функций $w_1'(\pi, p)$ и $w_2'(\pi, p)$. Следовательно, $q_1(x) = q_2(x)$, $x \in [0, \pi]$. Тогда $w_1(x, p) = w_2(x, p)$ и из (11.3.8) следует, что $\nu_1(p) = \nu_2(p)$ для всех p . Следовательно, $g_1(t) = g_2(t)$, откуда $u_1(x, t) = u_2(x, t)$, $x \in [0, \pi]$, $t \geq 0$. Теорема доказана. \square

11.4. Градиентные методы

В данном разделе мы рассмотрим градиентные методы определения коэффициентов параболических уравнений.

Подобные методы представлены в [11.8, 1]. Модификация вариационного подхода используется в статье [11.11], где с помощью сопряженных уравнений строится интегральное уравнение, связывающее вариацию коэффициента уравнения с вариацией функций, рассматриваемых как дополнительная информация.

Рассмотрим прямую задачу в области $\mathcal{D} = (0, 1) \times (0, T)$:

$$u_t - (k(x)u_x)_x + q(x)u = 0, \quad (x, t) \in \mathcal{D}, \quad (11.4.1)$$

$$k(0)u_x(0, t) = \alpha_1(t), \quad t \in (0, T), \quad (11.4.2)$$

$$k(1)u_x(1, t) = \alpha_2(t), \quad t \in (0, T), \quad (11.4.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, 1). \quad (11.4.4)$$

Предположим, что дополнительная информация о решении прямой задачи (11.4.1)–(11.4.4) задана в виде

$$u(0, t) = f_1(t), \quad t \in (0, T), \quad (11.4.5)$$

$$u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (11.4.6)$$

Мы рассмотрим два варианта обратных задач. В первом случае функции α_1 , α_2 , u_0 , f_1 , q известны, требуется найти $k(x)$. Во втором — α_1 , α_2 , u^0 , f_1 , k известны, требуется найти $q(x)$.

Целевой функционал и его градиент в общем виде. Предположим сначала, что неизвестны обе функции $k(x)$ и $q(x)$. Введем целевой функционал

$$J(k, q) = \int_0^T (u(0, t; k, q) - f_1(t))^2 dt, \quad (11.4.7)$$

где $u(x, t; k, q)$ – решение прямой задачи (11.4.1)–(11.4.4).

Покажем, что градиент $J' = (\nabla_k J(k, q), \nabla_q J(k, q))$ функционала (11.4.7) можно приблизить вектор-функцией, компоненты которой вычисляются по формулам

$$\nabla_k J(k, q)(x) \cong - \int_0^T u_x(x, t) \psi_x(x, t) dt, \quad (11.4.8)$$

$$\nabla_q J(k, q)(x) \cong - \int_0^T u(x, t) \psi(x, t) dt, \quad (11.4.9)$$

где $u(x, t)$ — решение прямой задачи (11.4.1)–(11.4.4), $\psi(x, t)$ — решение сопряженной задачи

$$\psi_t + (k(x)\psi_x)_x - q(x)\psi = 0, \quad (x, t) \in \mathcal{D}, \quad (11.4.10)$$

$$k(0)\psi_x(0, t) = 2(u(0, t) - f_1(t)), \quad t \in (0, T), \quad (11.4.11)$$

$$k(1)\psi_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (11.4.12)$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (11.4.13)$$

Пусть сначала $q(x)$ считается известной. Докажем формулу (11.4.8).

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} J(k + \delta k, q) - J(k, q) &= \int_0^T \delta u(0, t; k, q) 2[u(0, t; k, q) - f_1(t)] dt \\ &\quad + \int_0^T \delta u^2(0, t; k, q) dt, \end{aligned}$$

где $\delta u(x, t; k, q) = u(x, t; k + \delta k, q) - u(x, t; k, q)$. Вариация $\delta u(x, t; k, q)$ является решением следующей задачи:

$$\delta u_t - (k(x) \delta u_x)_x + q(x) \delta u = (\delta k(x) u_x(x, t; k + \delta k, q))_x, \quad (11.4.14)$$

$$k(0) \delta u_x(0, t) = -\delta k(0) u_x(0, t; k + \delta k, q), \quad (11.4.15)$$

$$k(1) \delta u_x(1, t) = -\delta k(1) u_x(1, t; k + \delta k, q), \quad (11.4.16)$$

$$\delta u(x, 0) = 0. \quad (11.4.17)$$

Умножив обе части равенства (11.4.14) на решение $\psi(x, t)$ задачи (11.4.10)–(11.4.13) и проинтегрировав по области $[0, 1] \times [0, T]$, получим

тождество

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^T (\delta u_t - (k(x)\delta u_x)_x + q\delta u)\psi \, dt \, dx \\ = \int_0^1 \int_0^T (\delta k(x)u_x(x, t, k + \delta k))_x \psi \, dt \, dx. \end{aligned} \quad (11.4.18)$$

Преобразуем отдельно левую и правую части этого тождества. Проинтегрируем правую часть по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^T (\delta k(x)u_x(x, t; k + \delta k))_x \psi \, dt \, dx \\ = \int_0^T \delta k(x)u_x(x, t; k + \delta k)\psi \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt \\ - \int_0^1 \int_0^T \delta k(x)u_x(x, t; k + \delta k)\psi_x \, dt \, dx. \end{aligned} \quad (11.4.19)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^T (\delta u_t - (k(x)\delta u_x)_x + q(x)\delta u)\psi \, dt \, dx \\ = - \int_0^1 \int_0^T (\psi_t + (k(x)\psi_x)_x - q(x)\psi)\delta u \, dt \, dx + \int_0^1 \delta u \psi \Big|_{t=0}^{t=T} \, dx \\ - \int_0^T k(x)\delta u_x \psi \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt + \int_0^T k(x)\delta u \psi_x \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt. \end{aligned} \quad (11.4.20)$$

Воспользуемся тем, что $\psi_t + (k(x)\psi_x)_x - q(x)\psi = 0$, $\psi(x, T) = 0$ и $\delta u(x, 0) = 0$. Тогда правая часть равенства (11.4.20) примет вид

$$- \int_0^T k(x)\delta u_x \psi \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt + \int_0^T k(x)\delta u \psi_x \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt. \quad (11.4.21)$$

Преобразуем далее выражение (11.4.21), используя (11.4.15), (11.4.16):

$$\int_0^T \delta k(x)u_x(x, t; k + \delta k, q)\psi \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt + \int_0^T k(x)\delta u \psi_x \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt.$$

Возвращаясь к тождеству (11.4.18) и учитывая (11.4.19), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T \delta k(x)u_x(x, t; k + \delta k, q)\psi \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt + \int_0^T k(x)\delta u \psi_x \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt \\ = \int_0^T \delta k(x)u_x(x, t; k + \delta k, q)\psi \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt \\ - \int_0^1 \int_0^T \delta k(x)u_x(x, t; k + \delta k, q)\psi_x \, dt \, dx. \end{aligned} \quad (11.4.22)$$

Сократив в левой и правой частях равенства (11.4.22) одинаковые слагаемые, приходим к

$$\int_0^T k(x) \delta u \psi_x \Big|_{x=0}^{x=1} dt = - \int_0^1 \int_0^T \delta k(x) u_x(x, t; k + \delta k, q) \psi_x dt dx. \quad (11.4.23)$$

Так как $k(1)\psi_x(1, t) = 0$ и $k(0)\psi_x(0, t) = 2[u(0, t; k, q) - f_1(t)]$, получаем

$$\begin{aligned} J(k + \delta k, q) - J(k, q) = & - \int_0^1 \int_0^T \delta k(x) u_x \psi_x dt dx \\ & - \int_0^1 \int_0^T \delta k(x) \delta u_x(x, t; k, q) \psi_x dt dx + \int_0^T \delta u^2(0, t; k, q) dt. \end{aligned} \quad (11.4.24)$$

При достаточной гладкости данных можно показать, что в правой части равенства (11.4.24) второе и третье слагаемое малы. Следовательно,

$$\nabla_k J(k, q)(x) \cong - \int_0^T u_x(x, t) \psi_x(x, t) dt,$$

т. е. формула (11.4.8) доказана.

Формулу (11.4.9) выведем для обратной задачи

$$v_t = v_{xx} - q(x)v, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (11.4.25)$$

$$v(x, 0) = \mu(x), \quad x \in (0, 1), \quad (11.4.26)$$

$$v_x(0, t) = \alpha_1(t), \quad t \in (0, T), \quad (11.4.27)$$

$$v_x(1, t) = \alpha_2(t), \quad t \in (0, T), \quad (11.4.28)$$

$$v(0, t) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (11.4.29)$$

где $q(x)$ — искомая функция. О том, как от уравнения (11.4.1) можно перейти к уравнению вида (11.4.25), изложено в конце этого раздела.

Найдем приближенно градиент функционала

$$J(q) = \int_0^T (v(0, t; q) - f(t))^2 dt.$$

Как и ранее, рассмотрим разность

$$J(q + \delta q) - J(q) = 2 \int_0^T \delta v(0, t; q) [v(0, t; q) - f(t)] dt + \int_0^T \delta v^2(0, t; q) dt.$$

Здесь $\delta v(x, t; q) = v(x, t; q + \delta q) - v(x, t; q)$. Вариация $\delta v(x, t; q)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \delta v_t = \delta v_{xx} - q(x) \delta v - \delta q(x) v(x, t; q + \delta q), \\ x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (11.4.30)$$

$$\delta v(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (11.4.31)$$

$$\delta v_x(0, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (11.4.32)$$

$$\delta v_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (11.4.33)$$

Пусть $\psi(x, t; q)$ — решение сопряженной задачи

$$\psi_t = -\psi_{xx} + q(x)\psi, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (11.4.34)$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (11.4.35)$$

$$\psi_x(0, t) = 2[v(0, t) - f(t)], \quad t \in (0, T), \quad (11.4.36)$$

$$\psi_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (11.4.37)$$

Умножим обе части равенства (11.4.30) на функцию $\psi(x, t)$ и проинтегрируем по области $[0, 1] \times [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^T \delta v_t \psi \, dt \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^T (\delta v_{xx} - q(x)\delta v - \delta q(x)v(x, t; q + \delta q)) \psi \, dt \, dx. \end{aligned} \quad (11.4.38)$$

Проинтегрируем по частям выражение

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^T (\delta v_t - \delta v_{xx} + q(x)\delta v) \psi \, dt \, dx \\ &= - \int_0^1 \int_0^T (\psi_t - \psi_{xx} - q(x)\psi) \delta v \, dt \, dx \\ & \quad + \int_0^1 \delta v \psi \Big|_{t=0}^{t=T} dx - \int_0^T \delta v_x \psi \Big|_{x=0}^{x=1} dt + \int_0^T \delta v \psi_x \Big|_{x=0}^{x=1} dt. \end{aligned}$$

Имеем

$$\int_0^T \delta v \psi_x \Big|_{x=0}^{x=1} dt = - \int_0^1 \int_0^T \delta q(x)v(x, t; q + \delta q)\psi \, dt \, dx.$$

Тогда, учитывая условия (11.4.31)–(11.4.33) и (11.4.35)–(11.4.37), получим

$$\begin{aligned} & J(q + \delta q) - J(q) \\ &= - \int_0^1 \int_0^T \delta q(x)v(x, t; q + \delta q)\psi \, dt \, dx + \int_0^T \delta v^2(0, t; q) \, dt, \end{aligned} \quad (11.4.39)$$

откуда

$$\nabla J(q)(x) \cong - \int_0^T v(x, t)\psi(x, t) \, dt.$$

Случай кусочно-постоянной среды. Предположим, что искомая функция $q(x)$ кусочно-постоянна и имеет вид

$$q(x) = \begin{cases} q_1, & x \in [0, 1/3], \\ q_2, & x \in [1/3, 2/3], \\ q_3, & x \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

В этом случае приближение градиента функционала $J(q)$ вычисляется по формуле

$$J'(q) \equiv \nabla J(q) \cong \left(- \int_0^T \int_0^{1/3} v(x,t)\psi(x,t) dx dt, \right. \\ \left. - \int_0^T \int_{1/3}^{2/3} v(x,t)\psi(x,t) dx dt, - \int_0^T \int_{2/3}^1 v(x,t)\psi(x,t) dx dt \right).$$

Связь между уравнениями (11.4.1) и (11.4.25). Покажем, что между уравнениями (11.4.1) и (11.4.25) существует взаимосвязь. Действительно, пусть

$$u_t = (k(z)u_z)_z - q(z)u, \quad z \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (11.4.40)$$

Предположим, что коэффициент $k(z)$ имеет вид $k(z) = c^2(z)$. Тогда, подставив $k(z) = c^2(z)$ в уравнение (11.4.40), перейдем к уравнению

$$c^{-2}(z)u_t = u_{zz} + 2 \frac{c'(z)}{c(z)} u_z - \frac{q(z)}{c^2(z)} u. \quad (11.4.41)$$

Сделаем замену переменной в (11.4.41), положив

$$x = \varphi(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)}, \quad z = \varphi^{-1}(x) = \psi(x).$$

Введя новые функции

$$v(x,t) = u(\psi(x), t), \quad a(x) = c(\psi(x)), \quad b(x) = q(\psi(x)),$$

мы получим уравнение

$$v_t = v_{xx} + \frac{a'(x)}{a(x)} v_x - \frac{b(x)}{a^2(x)} v. \quad (11.4.42)$$

Обозначим

$$w(x,t) = v(x,t)\sqrt{a(x)}, \quad \gamma(x) = \frac{1}{2} [\ln a(x)]'' - \frac{b(x)}{a^2(x)}.$$

Тогда уравнение (11.4.42) примет вид

$$w_t = w_{xx} - \gamma(x)w. \quad (11.4.43)$$

Таким образом, мы показали, как от уравнения (11.4.1) можно перейти к уравнению вида (11.4.25).

11.5. Теорема единственности в переопределенной постановке для эллиптического уравнения

Коэффициентные обратные задачи для эллиптических уравнений являются еще более сложными объектами исследования, чем соответствующие задачи для параболических уравнений. Например, для доказательства единственности задачи определения всего лишь одного коэффициента эллиптического уравнения требуется дополнительная информация о бесконечном количестве решений соответствующих прямых

задач! Альтернативными в этой ситуации являются различные упрощения обратных задач, например, сокращение количества переменных, от которых зависит искомым коэффициент (раздел 11.5), значительное сужение класса искомым коэффициентов и т. п.

Первый результат по единственности в целом решения обратной задачи для уравнения

$$L_q u := \operatorname{div}(q \nabla u) = \sum_{j=1}^n (q(x) u_{x_j})_{x_j} = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad (11.5.1)$$

где $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) — ограниченная область с гладкой границей S , получен в работе [10.42]. Для доказательства единственности решения потребовалось привлечь не одну, а всю совокупность прямых задач Дирихле

$$L_q u = 0, \quad u|_S = g(x) \quad (11.5.2)$$

со всевозможными $g \in H^{1/2}(S)$. Дополнительная информация о решении прямой задачи (11.5.2) имеет вид

$$q(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_S = f_g(x), \quad (11.5.3)$$

где ν — единичный внешний нормальный вектор к поверхности S , и состоит из семейства функций $\{f_g\}$. Иными словами, задается отображение Дирихле — Неймана

$$\Lambda_q : g \in H^{1/2}(S) \rightarrow f_g,$$

которое каждой функции $g \in H^{1/2}(S)$ ставит в соответствие значение на S нормальной производной (11.5.3) решения прямой задачи (11.5.2). Обратная задача состоит в восстановлении функции $q(x)$, $x \in \mathcal{D}$, по известному отображению $\Lambda_q(g)$, $g \in H^{1/2}(S)$.

Обозначим

$$Q_q(g) = \int_{\mathcal{D}} q |\nabla u|^2 dx, \quad 0 < \varepsilon < q \in C^\infty(\overline{\mathcal{D}}),$$

где u — решение задачи (11.5.1). По теореме Гаусса — Остроградского

$$Q_q(g) = \int_S \Lambda_q(g) q ds,$$

т. е. $Q_q(g)$ — квадратичная форма линейного отображения $\Lambda_q(g)$. Следовательно, рассматриваемая задача нахождения $q(x)$ по известному отображению $\Lambda_q(g)$ эквивалентна задаче восстановления $q(x)$ по $Q_q(g)$, заданному для всех $g \in H^{1/2}(S)$.

Теорема 11.5.1. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) — ограниченная область с гладкой границей S . Предположим, что $q_1, q_2 \in C^\infty(\overline{\mathcal{D}})$ и положительны при всех $x \in \overline{\mathcal{D}}$. Тогда, если для всех $g \in H^{1/2}(S)$

$$Q_{q_1}(g) = Q_{q_2}(g), \quad (11.5.4)$$

то $q_1(x) = q_2(x)$ для всех $x \in \mathcal{D}$.

Доказательство теоремы 11.5.1 основано на использовании сильно осциллирующих функций g и соответствующих им специальных решений задачи Дирихле (11.5.2).

11.6. Обратная задача в полубесконечном цилиндре

Пусть область \mathcal{D}_0 пространства переменных x, y ($x \in \mathbb{R}^n$) имеет вид полубесконечного цилиндра с образующими, параллельными оси y [13]:

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad x \in \mathcal{D}, \quad \overline{\mathbb{R}}_+ = \{y : y \geq 0\}.$$

Рассмотрим в области \mathcal{D}_0 уравнение

$$u_{yy} + Lu + g(x, y) = 0, \quad (11.6.1)$$

где L — равномерно эллиптический оператор по переменным x_1, \dots, x_n с коэффициентами, не зависящими от y . Обозначим границу области \mathcal{D} через S . Рассмотрим задачу нахождения решения уравнения (11.6.1), удовлетворяющего условиям

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \psi(x, y), \quad \Gamma = S \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (11.6.2)$$

и условию убывания решения при $y \rightarrow \infty$.

Наряду с задачей (11.6.1)–(11.6.2) рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} = L\tilde{u} + \tilde{g}(x, t), \quad \tilde{u}|_{t=0} = \varphi(x), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} \Big|_S = \tilde{\psi}(x, t), \\ x \in \mathcal{D}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (11.6.3)$$

Предположим, что функции $\tilde{g}, \tilde{\psi}$ связаны с g, ψ формулами

$$g(x, y) = \int_0^\infty \tilde{g}(x, t)H(y, t) dt, \quad \psi(x, t) = \int_0^\infty \tilde{\psi}(x, t)H(y, t) dt. \quad (11.6.4)$$

Здесь $H(y, t) = \frac{2}{\pi} \frac{y}{y^2 + t^2}$ — решение уравнения Лапласа $H_{tt} + H_{yy} = 0$.

Для того чтобы гарантировать существование интегралов (11.6.4), мы предполагаем, что $\tilde{g}, \tilde{\psi}$ ограничены. Аналогичное предположение сделаем о решении задачи (11.6.3). Тогда единственное решение задачи (11.6.1), (11.6.2) определяется формулой

$$u(x, t) = \int_0^\infty \tilde{u}(x, t)H(y, t) dt. \quad (11.6.5)$$

Покажем справедливость этой формулы в предположении, что все операции, проводимые ниже, имеют смысл.

Заметим, что

$$\begin{aligned} u_{yy} &= \int_0^\infty \tilde{u}(x, t) H_{yy}(y, t) dt = - \int_0^\infty \tilde{u}(x, t) H_{tt}(y, t) dt \\ &= (-\tilde{u}H_t + \tilde{u}_t H)|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty \tilde{u}_{tt}(x, t) H(y, t) dt \\ &= - \int_0^\infty \tilde{u}_{tt}(x, t) H(y, t) dt, \\ Lu &= \int_0^\infty H(y, t) L\tilde{u}(x, t) dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$u_{yy} + Lu + g = \int_0^\infty (-\tilde{u}_{tt} + L\tilde{u} + \tilde{g})H(y, t) dt = 0.$$

В то же время,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_\Gamma = \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} \Big|_S H(y, t) dt = \int_0^\infty \tilde{\psi}(x, t) H(y, t) dt = \psi(x, y),$$

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^\infty \tilde{u}(x, t) H(y, t) dt \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{u}(x, y\tau) \frac{d\tau}{1 + \tau^2} = \tilde{u}(x, 0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $u(x, y)$, определяемая формулой (11.6.5), действительно является решением задачи (11.6.1), (11.6.2).

При каждом фиксированном x равенство (11.6.5) однозначно обратимо как интегральное преобразование с ядром Коши. Следовательно, если для эллиптического уравнения рассмотреть задачу об определении коэффициента, входящего в оператор L , по информации о решении задачи (11.6.1), (11.6.2) вида

$$u|_\Gamma = f(x, y), \quad (11.6.6)$$

то обратную задачу (11.6.1), (11.6.2), (11.6.6) можно свести к эквивалентной ей обратной задаче (11.6.3) с данными $\tilde{u}|_S = \tilde{f}(x, t)$, $t \geq 0$. При этом функции f и \tilde{f} связаны обратимым соответствием:

$$f(x, y) = \int_0^\infty \tilde{f}(x, t) H(y, t) dt, \quad x \in S, \quad y \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Из изложенного выше следует также, что переход от эллиптического уравнения к гиперболическому возможен только при соблюдении следующих двух условий. Во-первых, область, в которой рассматривается

уравнение, должна быть цилиндрической с образующими, параллельными оси y . Во-вторых, коэффициенты уравнения не должны зависеть от y . Это довольно серьезные ограничения, так как в прикладных задачах чаще всего переменные x, y равноправны.

Укажем в заключение еще на один класс обратных задач для эллиптических уравнений, которые можно свести к обратным задачам для гиперболических уравнений.

Рассмотрим задачу об определении функции $g(x)$ или коэффициента $c(x) \geq c_0 > 0$ из уравнения

$$\Delta u + \omega^2 c(x)u = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (11.6.7)$$

Предположим, что для последовательности чисел $\{\omega_k\}$ известно решение уравнения (11.6.6), удовлетворяющее условиям

$$u(x, \omega_k) = f(x, \omega_k), \quad x \in S, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11.6.8)$$

где S — некоторая поверхность.

Уравнение (11.6.7) возникает, если рассматривать установившиеся гармонические колебания, описываемые волновым уравнением

$$c(x)v_{tt} = \Delta v + g(x)e^{i\omega t}.$$

Представляя функцию v в виде

$$v = u(x)e^{i\omega t},$$

придем к уравнению (11.6.7). В случае $c = 1$ уравнение (11.6.7) называют *уравнением Гельмгольца*.

Рассмотрим задачу Коши

$$c(x)w_{tt} = \Delta w + g(x)\delta(t), \quad w|_{t < 0} \equiv 0. \quad (11.6.9)$$

Если $c(x)$ и $g(x)$ ограничены, то решение задачи (11.6.9) можно оценить: $|w| \leq Ce^{\alpha t}$. Поэтому существует преобразование Лапласа $\tilde{w}(x, p)$ функции $w(x, t)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha$, и $\tilde{w}(x, p)$ аналитична по переменной p . При определенных условиях (например, $c = 1$, $g(x)$ — финитная функция) функция $\tilde{w}(x, p)$ допускает аналитическое продолжение на мнимую ось $p = i\omega$. При этом $\tilde{w}(x, i\omega) = u(x, \omega)$. Следовательно,

$$\tilde{w}(x, i\omega_k) = f(x, \omega_k), \quad x \in S, \quad k = 1, 2, \dots$$

Если $\omega_k \rightarrow \omega_0$, где ω_0 — внутренняя точка области аналитичности функции $\tilde{w}(x, i\omega)$, то значения $\tilde{w}(x, i\omega_k)$ позволяют найти $\tilde{w}(x, p)$ во всей области аналитичности, а следовательно, вычислить

$$w|_S = \tilde{f}(x, t). \quad (11.6.10)$$

В результате приходим к обратной задаче (11.6.9), (11.6.10), эквивалентной задаче (11.6.7), (11.6.8).

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные отличия обратных задач для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типа относительно устойчивости, сходимости численных алгоритмов.
2. Приведите примеры связи решений прямых задач для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типа.
3. Попытайтесь построить примеры Адамара для задач главы 11.

Дополнительная литература

- 11.1. **Иванов В. К.** Обратная задача потенциала для тела, близкого к данному // Изв. АН СССР. 1956. Т. 20, № 6. С. 793–818.
- 11.2. **Иванов В. К.** Интегральные уравнения первого рода и приближенное решение обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 5. С. 998–1000.
- 11.3. **Искендеров А. Д.** Об одной обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 5. С. 890–898.
- 11.4. **Искендеров А. Д., Тагиев Р. К.** Задачи оптимизации с управлениями в коэффициентах параболических уравнений // Дифф. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1324–1334.
- 11.5. **Ландис Е. М.** Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений // Успехи матем. наук. 1959. Т. 2, № 1. С. 21–85.
- 11.6. **Музылев Н. В.** Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1980. Т. 20, № 2. С. 388–400.
- 11.7. **Danilaev P. G.** Coefficient inverse problems for parabolic type equations and their application. VSP, The Netherlands, 2001.
- 11.8. **Hào D. N.** Methods for inverse heat conduction problems. Universität-Gesamthochschule Siegen, 1995.
- 11.9. **Hasanov A.** Inverse coefficient problems for elliptic variational inequalities with a nonlinear monotone operator // Inverse Problems. 1998. V. 14. P. 1151–1169.
- 11.10. **Hasanov A.** Simultaneous determination of source terms in a linear parabolic problem from the final overdetermination: weak solution approach // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 330. P. 766–779.
- 11.11. **Hasanov A., DuChateau P., Pektas B.** An adjoint problem approach and coarse-fine mesh method for identification of the diffusion coefficient in a linear parabolic equation // Inverse Problems. 2006. V. 14, N 4. P. 1–29.
- 11.12. **Kozhanov A. I.** Composite type equations and inverse problems. VSP, The Netherlands, 1999.

Мы все учились понемногу
Чему-нибудь и как-нибудь

А. С. Пушкин

Глава 12.

Приложение

В этой главе изложены некоторые определения, формулировки теорем из алгебры, теории дифференциальных и интегральных уравнений функционального анализа и математической физики, которые необходимы при изучении обратных и некорректных задач.

12.1. Пространства

Понятие *пространства* используется в математике для определения множеств, наделенных некоторой структурой. Например, на множестве могут быть определены операции (сложение, умножение на число) или функции (норма, метрика). В зависимости от структуры пространства его элементы называют точками, векторами, событиями и т. д. Подмножество пространства называется *подпространством*, если структура пространства порождает на этом подмножестве структуру такого же типа.

Большая часть результатов, представленных в этой книге, излагается в рамках гильбертовых и банаховых пространств, в основе которых лежит линейное (или, что то же самое, векторное) пространство. Поэтому мы начнем с определения линейного пространства.

Определение 12.1.1. Множество \mathcal{L} называется *вещественным линейным (векторным) пространством*, если в нем введены операции сложения элементов и умножения на скаляр (т. е. каждой паре элементов x и y пространства \mathcal{L} поставлен в соответствие элемент $x + y \in \mathcal{L}$ и каждому $x \in \mathcal{L}$ и действительному числу α поставлен в соответствие элемент $\alpha x \in \mathcal{L}$) и при этом выполняются следующие аксиомы:

- 1) $x + y = y + x$, $\alpha(\beta x) = \beta(\alpha x)$ — коммутивность;
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — ассоциативность;
- 3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ — дистрибутивность;
- 4) существует элемент $\mathbf{0} \in \mathcal{L}$, называемый *нулевым*, такой, что $\mathbf{0} \cdot x = \mathbf{0}$;
- 5) $1 \cdot x = x$.

Замечание 12.1.1. Если скаляр α берется из поля комплексных чисел \mathbb{C} , то пространство \mathcal{L} называется *комплексным линейным пространством*.

Линейной комбинацией элементов $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathcal{L}$ называется элемент $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in \mathcal{L}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ называются *коэффициентами линейной комбинации*.

Система элементов $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathcal{L}$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, что $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \neq 0$ и $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \mathbf{0}$. В противном случае система называется *линейно независимой*.

Число элементов максимальной линейно независимой системы называется *размерностью пространства* \mathcal{L} и обозначается $\dim \mathcal{L}$. Если $\dim \mathcal{L} < \infty$, то \mathcal{L} называется *конечномерным линейным пространством*, в противном случае — *бесконечномерным*.

12.1.1. Евклидовы пространства

Простейшим примером конечномерного вещественного линейного пространства является пространство \mathbb{R}^n , состоящее из упорядоченных наборов n действительных чисел:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Элементы $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ называются *векторами*, а числа x_i его *компонентами*. Операции сложения и умножения на скаляр в пространстве \mathbb{R}^n осуществляются покомпонентно:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \end{aligned} \quad (12.1.1)$$

Пространство \mathbb{R}^n имеет размерность n . Действительно, если, например, рассмотреть систему векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ из \mathbb{R}^n , таких, что i -я компонента вектора e_i равна единице, а все остальные компоненты

равны нулю, то, очевидно, эта система линейно независима и максимальна, поскольку любой вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ представим (причем единственным образом) в виде суммы $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Система $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ является базисом в пространстве \mathbb{R}^n .

Определение 12.1.2. Система векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ в пространстве \mathbb{R}^n называется *базисом*, если каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ однозначно представляется в виде линейной комбинации $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$.

Любая линейно независимая система из n векторов является базисом в \mathbb{R}^n .

Помимо операций (12.1.1), определяющих структуру линейного пространства \mathbb{R}^n , на множестве пар векторов этого пространства можно задать функцию

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (12.1.2)$$

где x_i и y_i — компоненты векторов $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$, соответственно. Нетрудно убедиться в том, что функция, определяемая формулой (12.1.2), обладает следующими свойствами:

$$1) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle; \quad (12.1.3)$$

$$2) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle; \quad (12.1.4)$$

$$3) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad (12.1.5)$$

$$4) \quad \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \text{причем} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}. \quad (12.1.6)$$

Определение 12.1.3. Вещественная функция $\langle x, y \rangle$ в линейном пространстве \mathcal{L} называется *скалярным произведением*, если она удовлетворяет аксиомам (12.1.3)–(12.1.6).

Функция (12.1.2) в пространстве \mathbb{R}^n является скалярным произведением.

Замечание 12.1.2. Скалярное произведение в пространстве комплекснозначных векторов \mathbb{C}^n определяется по формуле

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i,$$

а аксиома (12.1.3) имеет вид $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

С помощью скалярного произведения в линейном пространстве \mathcal{L} можно определить длину $\|x\|$ вектора x и угол φ между векторами x и y по формулам

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad (12.1.7)$$

$$\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}. \quad (12.1.8)$$

Функция $\|x\|$, определяемая равенством (12.1.7), является нормой в линейном пространстве \mathcal{L} со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$.

Определение 12.1.4. Вещественная функция $\|x\|$ называется *нормой* в линейном пространстве \mathcal{L} , если она удовлетворяет следующим аксиомам:

$$1) \quad \|x\| > 0, \quad \text{причем} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad (12.1.9)$$

$$2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{или} \quad \alpha \in \mathbb{C}); \quad (12.1.10)$$

$$3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (12.1.11)$$

Для скалярного произведения $\langle x, y \rangle$ и нормы $\|x\|$, определенной формулой (12.1.7), справедливо *неравенство Коши — Буняковского*: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. Заметим, что из этого неравенства следует, что формула (12.1.8) имеет смысл для всех ненулевых векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. В частности, $\varphi = \pi/2$ при $\langle x, y \rangle = 0$.

Определение 12.1.5. Ненулевые вектора $x \in \mathcal{L}$ и $y \in \mathcal{L}$ называются *ортгогональными*, если $\langle x, y \rangle = 0$.

Определение 12.1.6. Базис $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ в пространстве \mathbb{R}^n называется *ортгогональным*, если входящие в него векторы попарно ортгогональны: $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$ для любых $i \neq j$. Ортгогональный базис называется *ортонормированным*, если $\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = 1$ для всех $1 \leq i \leq n$.

Базис $\{e_1, \dots, e_n\}$, состоящий из векторов e_i со всеми нулевыми компонентами кроме i -й компоненты, равной единице, является ортонормированным базисом в пространстве \mathbb{R}^n .

Следует заметить, что норма вектора в пространстве \mathbb{R}^n может быть задана различными способами. Норма

$$\|x\|_{\text{сф}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2},$$

связанная со скалярным произведением формулой (12.1.7), называется *евклидовой* (или *сферической*) *нормой*. *Кубическая норма* вектора $x \in \mathbb{R}^n$ определяется следующим образом:

$$\|x\|_{\text{куб}} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

а октаэдрическая норма вычисляется по формуле

$$\|x\|_{\text{окт}} = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Замечание 12.1.3. В пространстве \mathbb{C}^n соответствующие нормы определяются по тем же формулам.

Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливы соотношения

$$\|x\|_{\text{куб}} \leq \|x\|_{\text{окт}} \leq n\|x\|_{\text{куб}}, \quad (12.1.12)$$

$$\|x\|_{\text{куб}} \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|_{\text{куб}}. \quad (12.1.13)$$

Определение 12.1.7. Нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ в линейном пространстве \mathcal{L} называются *эквивалентными*, если существуют такие числа $p, q \in \mathbb{R}$, что при любом $x \in \mathcal{L}$ выполнены неравенства $\|x\|_1 \leq p\|x\|_2$, $\|x\|_2 \leq q\|x\|_1$.

Как следует из соотношений (12.1.12), (12.1.13), кубическая, октаэдрическая и евклидова нормы эквивалентны. Верно более общее утверждение: все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны.

Определение 12.1.8. Линейное пространство с определенной на нем нормой называется *нормированным пространством*.

Заметим, что нормированные пространства $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\text{эф}})$ и, например, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\text{куб}})$, хотя и состоят из одних и тех же элементов (n -мерных вещественных векторов), существенно отличаются друг от друга своими свойствами, поскольку в пространстве $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\text{куб}})$ невозможно определить такую скалярную функцию $\langle x, y \rangle$, которая была бы связана с $\|\cdot\|_{\text{куб}}$ соотношением (12.1.7).

В нормированном пространстве можно определить расстояние между элементами x и y с помощью функции

$$\rho(x, y) = \|x - y\|. \quad (12.1.14)$$

Определение 12.1.9. Вещественная неотрицательная функция $\rho(x, y)$ на множестве \mathcal{M} называется *метрикой*, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

$$1) \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (\text{аксиома тождества}); \quad (12.1.15)$$

$$2) \quad \rho(x, y) = \rho(y, x) \quad (\text{аксиома симметрии}); \quad (12.1.16)$$

$$3) \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad (\text{аксиома треугольника}). \quad (12.1.17)$$

Замечание 12.1.4. В аксиомах (12.1.15)–(12.1.17), в отличие от аксиом нормы (12.1.9)–(12.1.11) и аксиом скалярного произведения (12.1.3)–(12.1.6), не используются операции сложения и умножения на скаляр. Это означает, что метрика может быть определена не только в линейном пространстве.

Определение 12.1.10. Множество \mathcal{M} называется *метрическим пространством*, если для любых его элементов $x, y \in \mathcal{M}$ определена метрика $\rho(x, y)$.

Очевидно, что функция $\rho(x, y) = \|x - y\|$ удовлетворяет аксиомам метрики. Следовательно, любое нормированное пространство является метрическим.

Определение 12.1.11. Конечномерное векторное пространство \mathbb{E}^n со структурой скалярного произведения $\langle x, y \rangle$ и согласованными с ним нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ и метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ называется *евклидовым пространством*.

Простейшим примером евклидова пространства является пространство \mathbb{R}^n с функцией скалярного произведения (12.1.2) и евклидовой нормой $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$.

Теперь мы вплотную подошли к фундаментальному понятию функционального анализа — сходимости. Собственно говоря, та структура (скалярное произведение, норма, метрика), которая позволяет оценить расстояние между элементами пространства, вводится, главным образом, для определения и исследования сходимости его элементов и основанных на сходимости других важных свойств и понятий. Очевидно, чем богаче структура пространства, тем больше результатов в этом пространстве может быть получено. С другой стороны, некоторые результаты лаконичнее формулируются и доказываются в более общих пространствах. Например, спектральные задачи удобнее рассматривать над полем комплексных чисел, поскольку спектр линейного непрерывного оператора, вообще говоря, содержится в комплексном банаховом пространстве.

Определение 12.1.12. Элемент x метрического пространства \mathcal{M} называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, $x_n \in \mathcal{M}$, и обозначается $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n(\varepsilon)$, что для всех $n > n(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Последовательность называется *сходящейся* (по метрике пространства \mathcal{M}), если она имеет предел.

Определение 12.1.13. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > n(\varepsilon)$ и $m > 0$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$.

Очевидно, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Обратное неверно. Проиллюстрируем это на простом

примере. Рассмотрим пространство рациональных чисел \mathbb{Q} с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$, и пусть x_0 — какое-либо иррациональное число, т. е. $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Построим последовательность рациональных чисел $\{x_n\}$, сходящуюся к x_0 в пространстве \mathbb{R} . Очевидно, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной в пространстве \mathbb{Q} , но не сходится ни к одному рациональному числу (действительно, если бы $x_n \rightarrow y$ в \mathbb{Q} , то $x_n \rightarrow y$ в \mathbb{R} , откуда бы следовало $y = x_0$).

Определение 12.1.14. Метрическое пространство \mathcal{M} называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность точек пространства \mathcal{M} является сходящейся.

Как следует из приведенного выше примера, пространство \mathbb{R} действительных чисел является полным, а пространство \mathbb{Q} рациональных чисел — неполным пространством относительно метрики $\rho(x, y) = |x - y|$.

12.1.2. Гильбертовы пространства

Характерной особенностью евклидова пространства является наличие в нем конечномерного ортонормированного базиса. Попытка избавится от условия конечномерности пространства с сохранением основной его структуры и, в частности, наличия ортонормированного (счетного) базиса, приводит нас к важному классу сепарабельных гильбертовых пространств.

Определение 12.1.15. Линейное пространство \mathcal{H} называется *гильбертовым*, если в нем определена функция скалярного произведения $\langle x, y \rangle$ (см. определение 12.1.3) и оно является полным относительно метрики $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$, порожденной скалярным произведением.

Простейшим примером бесконечномерного гильбертова пространства является пространство l_2 (или \mathbb{R}^∞) всевозможных бесконечных последовательностей действительных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ со сходящейся суммой квадратов:

$$\sum_i x_i^2 < \infty.$$

Здесь и всюду в дальнейшем символ \sum_i означает суммирование по всем натуральным i , т. е. $\sum_i a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Скалярное произведение, а также соответствующие норма и метрика, в пространстве l_2 вычисляются по формулам:

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i, \quad (12.1.18)$$

$$\|x\| = \left(\sum_i x_i^2 \right)^{1/2}, \quad (12.1.19)$$

$$\rho(x, y) = \left(\sum_i (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}. \quad (12.1.20)$$

Рассмотренное гильбертово пространство l_2 обладает важным свойством — сепарабельностью. В сепарабельных гильбертовых пространствах можно построить счетный ортонормированный базис, т. е. такой набор векторов $e_1, e_2, \dots, e_i, \dots$, что $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, $i \neq j$, и любой вектор $x \in l_2$ однозначно представим в виде сходящегося (по метрике (12.1.20)) ряда $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$.

Для того чтобы дать точное определение сепарабельных пространств, необходимо ввести понятия открытых и замкнутых множеств.

Определение 12.1.16. Множество $B(x, r) = \{y \in \mathcal{M} : \rho(x, y) < r\}$ в метрическом пространстве \mathcal{M} называется *открытым шаром* с центром в точке x радиуса r . Множество $\overline{B(x, r)} = \{y \in \mathcal{M} : \rho(x, y) \leq r\}$ называется *замкнутым шаром*.

Определение 12.1.17. Открытый шар радиуса ε с центром в точке x называется ε -*окрестностью* точки x : $O_\varepsilon(x) = B(x, \varepsilon)$.

Определение 12.1.18. Точка $x \in X \subset \mathcal{M}$ называется *внутренней точкой* множества X , если существует такое ε , что $O_\varepsilon(x) \subset X$.

Определение 12.1.19. Множество $X \subset \mathcal{M}$ называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней.

Очевидно, что любой открытый шар является открытым множеством.

Определение 12.1.20. Точка $x \in \mathcal{M}$ называется *предельной точкой* множества $X \subset \mathcal{M}$, если в любой ее окрестности содержится бесконечно много точек множества X . Точка $x \in X$ называется *изолированной точкой* множества X , если существует ее окрестность, не содержащая других точек множества X . Точка x называется *точкой прикосновения* множества X , если в любой ее окрестности содержатся точки множества X .

Любая точка прикосновения является либо предельной, либо изолированной точкой.

Определение 12.1.21. Совокупность \overline{X} всех точек прикосновения множества X называется *замыканием* множества X .

Определение 12.1.22. Множество X называется *замкнутым*, если $\overline{X} = X$.

Замкнутый шар является замкнутым множеством.

Определение 12.1.23. Множество X называется *всюду плотным* (в пространстве \mathcal{M}), если $\overline{X} = \mathcal{M}$.

Определение 12.1.24. Пространство, содержащее счетное всюду плотное множество, называется *сепарабельным*.

Во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве существует счетный ортонормированный базис. Верно и обратное утверждение: гильбертово пространство, имеющее счетный ортонормированный базис, является сепарабельным.

Пусть $\{\varphi_i\}$ — счетный ортонормированный базис гильбертова пространства \mathcal{H} . Разложение элемента $x \in \mathcal{H}$ по базису $\{\varphi_i\}$

$$x = \sum_i x_i \varphi_i$$

называется *рядом Фурье*, а числа x_i называются *коэффициентами Фурье* элемента x по ортонормированному базису $\{\varphi_i\}$ и вычисляются по формуле

$$x_i = \langle x, \varphi_i \rangle.$$

Если $\{\varphi_i\}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства \mathcal{H} , то для любого $x \in \mathcal{H}$ выполняется *равенство Парсеваля*

$$\|x\|^2 = \sum_i |\langle x, \varphi_i \rangle|^2.$$

Ортонормированный базис $\{\varphi_i\}$ гильбертова пространства \mathcal{H} может быть построен с помощью *процесса ортогонализации*: если $\{\psi_i\}$ — произвольный базис пространства \mathcal{H} , то элементы φ_i вычисляются по рекуррентным формулам

$$\varphi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}, \quad \varphi'_i = \psi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \psi_i, \varphi_j \rangle \varphi_j, \quad \varphi_i = \frac{\varphi'_i}{\|\varphi'_i\|}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Наличие счетного ортонормированного базиса в пространстве существенно улучшает его структуру и облегчает исследование. Тем не менее, даже в случае, когда гильбертово пространство не является сепарабельным, оно обладает геометрическими свойствами (см. ниже (12.1.21)), которые выгодно отличают его от более общих (например, банаховых, см. подраздел 12.1.3) пространств без функции скалярного произведения, поскольку через скалярное произведение выражается угол между векторами и вводится понятие ортогональности векторов.

Примером несепарабельного гильбертова пространства является пространство $L_2(-\infty, \infty)$ (см. подраздел 12.1.5). Стоит отметить, что именно в силу отсутствия сепарабельности в неограниченных областях решение задач математической физики получается не в виде ряда Фурье, связанного со счётным базисом, а в виде интеграла Фурье, имеющего несчётную природу.

Пусть \mathcal{H}_0 — замкнутое подпространство гильбертова пространства \mathcal{H} . Тогда \mathcal{H}_0 является гильбертовым пространством со скалярным произведением, заимствованным из \mathcal{H} . Обозначим через \mathcal{H}_0^\perp множество векторов, ортогональных всем векторам множества \mathcal{H}_0 . Множество \mathcal{H}_0^\perp называется *ортогональным дополнением* множества \mathcal{H}_0 . Поскольку функция скалярного произведения линейна и непрерывна, \mathcal{H}_0^\perp является замкнутым линейным подпространством пространства \mathcal{H} и, следовательно, гильбертовым пространством. Пересечение подпространств \mathcal{H}_0 и \mathcal{H}_0^\perp содержит единственный элемент, который равен нулю: $\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_0^\perp = \{0\}$.

Лемма 12.1.1. Пусть \mathcal{H} — гильбертово пространство, \mathcal{H}_0 — его замкнутое подпространство и $x \in \mathcal{H}$. Тогда существует единственный элемент $x_0 \in \mathcal{H}_0$, ближайший к x , который называется (*ортогональной*) проекцией элемента x на подпространство \mathcal{H}_0 : $x_0 = \operatorname{arg} \min_{y \in \mathcal{H}_0} \|x - y\|$.

Пример 12.1.1. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ — плоскость с евклидовой нормой, \mathcal{H}_0 — прямая, проходящая через начало координат и точка $x \in \mathcal{H}$ не лежит на этой прямой. Тогда проекцией x_0 точки x на \mathcal{H}_0 будет основание перпендикуляра, опущенного из x на \mathcal{H}_0 .

Теорема 12.1.1. Пусть \mathcal{H} — гильбертово пространство, а \mathcal{H}_0 — его замкнутое подпространство. Тогда любой элемент $x \in \mathcal{H}$ имеет единственное представление вида

$$x = x_0 + h, \quad x_0 \in \mathcal{H}_0, \quad h \in \mathcal{H}_0^\perp.$$

Если \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 — гильбертовы пространства, пересекающиеся только в нуле, то множество $\mathcal{H} = \{x + y : x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2\}$ тоже является гильбертовым пространством. Это множество называется *прямой суммой* пространств \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 и обозначается $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Из теоремы 12.1.1 следует, что гильбертово пространство \mathcal{H} представимо в виде прямой суммы

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp, \quad (12.1.21)$$

где \mathcal{H}_0 — любое замкнутое подпространство пространства \mathcal{H} .

В гильбертовых пространствах наряду со сходимостью элементов по метрике $\rho(x, y) = \|x - y\|$ (см. определение 12.1.12) вводится понятие слабой сходимости.

В соответствии с определением сходимости в метрическом пространстве последовательность $\{x_n\}$ элементов гильбертова пространства \mathcal{H} сходится (по норме \mathcal{H}), или, что то же самое, *сильно сходится* к элементу $x \in \mathcal{H}$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *слабо сходящейся* к x , а x — *слабым пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого $y \in \mathcal{H}$ выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$.

В конечномерных пространствах понятия сильной и слабой сходимости эквивалентны. В бесконечномерном гильбертовом пространстве из сильной сходимости следует слабая сходимост, но обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 12.1.2. Пусть последовательность элементов $\{x_n\}$ гильбертова пространства \mathcal{H} слабо сходится к $x \in \mathcal{H}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

В теореме 12.1.2 условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$ можно заменить на условие $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$.

Теорема 12.1.3. Если последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ слабо сходится к x , то существует ее подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, средние арифметические которой

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{n_i}$$

сильно сходятся к x .

Определение 12.1.25. Множество X метрического пространства \mathcal{M} называется (слабо) *предкомпактным*, если из любой последовательности элементов этого множества можно выделить (слабо) сходящуюся (в пространстве \mathcal{M}) подпоследовательность.

Замкнутое множество X (см. определение 12.1.22) содержит пределы всех своих сходящихся последовательностей.

Определение 12.1.26. Множество X метрического пространства \mathcal{M} называется (слабо) *компактным*, если любая последовательность в X содержит подпоследовательность, (слабо) сходящуюся к точке из X .

Определение 12.1.27. Множество X гильбертова пространства называется *слабо замкнутым*, если оно содержит любую точку, являющуюся слабым пределом какой-либо последовательности $\{x_n\} \subset X$.

(Слабо) замкнутое (слабо) предкомпактное множество является (слабо) *компактным*.

Множество является слабо предкомпактным в том и только том случае, когда оно ограничено, т. е. содержится в шаре конечного радиуса.

Любой замкнутый шар слабо компактен.

Теорема 12.1.4. Замкнутый единичный шар в бесконечномерном гильбертовом пространстве не является компактным множеством.

В евклидовом пространстве всякое замкнутое ограниченное множество компактно. Слабая компактность в конечномерном пространстве совпадает с сильной компактностью.

12.1.3. Банаховы пространства

Как отмечалось ранее, линейное пространство \mathcal{L} с функцией скалярного произведения $\langle x, y \rangle$ является нормированным ($\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$) и, следовательно, метрическим ($\rho(x, y) = \|x - y\|$). Представим теперь, что в линейном пространстве \mathcal{L} задана только норма $\|x\|$, т. е. вещественная функция, удовлетворяющая соотношениям (12.1.9)–(12.1.11). Естественно возникает вопрос: “Можно ли по этой функции восстановить функцию скалярного произведения $\langle x, y \rangle$ таким образом, чтобы имело место соотношение $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$?” Ответ в общем случае отрицательный. Даже в конечномерном пространстве (см. подраздел 12.1.1) не всякая норма порождается некоторым скалярным произведением. Для того чтобы в нормированном пространстве можно было ввести согласованное с нормой скалярное произведение, необходимо и достаточно, чтобы для любых элементов x, y этого пространства выполнялось равенство параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Нормированное пространство называется *унитарным*, если в нем можно ввести скалярное произведение, связанное с нормой соотношением $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

Определение 12.1.28. Нормированное пространство, полное относительно метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$, называется *банаховым* пространством.

Пространство \mathbb{R}^n с евклидовой нормой $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ является евклидовым пространством. В то же время пространство \mathbb{R}^n с кубической или октаэдрической нормой — только лишь банахово пространство.

Проиллюстрировать различие геометрических свойств гильбертовых и банаховых пространств можно на простом примере. Пусть $\mathcal{B} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\text{окт}})$ — пространство векторов $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ с нормой $\|x\|_{\text{окт}} = |x_1| + |x_2|$. В этом пространстве единичным шаром является квадрат с вершинами в точках $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$ и $(0, 1)$. Возьмем в качестве подпространства $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ прямую, проходящую через начало координат под углом 45° к оси абсцисс. Любой вектор $y \in \mathcal{B}_0$ имеет координаты (y_1, y_1) , т. е. $y = (y_1, y_1)$. Пусть $x' = (0, 1) \in \mathcal{B}$. Найдем проекцию x' на подпространство \mathcal{B}_0 , т. е. такой вектор $y' = (y'_1, y'_1)$, что

$$\min_{y \in \mathcal{B}_0} \|x' - y\| = \|x' - y'\|. \quad (12.1.22)$$

Поскольку $\|x' - y\| = |1 - y_1| + |y_1|$, равенство (12.1.22) выполняется для любых векторов $y' \in \mathcal{B}_0$ таких, что $0 \leq y'_1 \leq 1$.

Таким образом, минимальное расстояние от вектора $x' \in B$ до подпространства B_0 достигается на бесконечном множестве векторов $y' \in B_0$. Ясно, что на плоскости \mathbb{R}^2 с евклидовой метрикой указанный минимум достигается на одном векторе. В некоторых нормированных пространствах в случае, когда B_0 — бесконечномерное подпространство, этот минимум может не достигаться вообще.

Определение 12.1.29. Если B_1 — замкнутое подпространство пространства B и существует подпространство $B_2 \subset B$, такое, что $B_1 \cap B_2 = \{0\}$ и $B = B_1 \oplus B_2$, то говорят, что B_1 *дополняемо* до пространства B , а B_2 называется *прямым дополнением* подпространства B_1 .

Прямое дополнение не единственно.

Прямая сумма является линейным подпространством. Следующая теорема формулирует необходимые и достаточные условия для того, чтобы прямая сумма была замкнутой.

Теорема 12.1.5. Пусть B — банахово пространство, а B_1 и B_2 — подпространства B , пересекающиеся только в нуле. Прямая сумма $B_1 \oplus B_2 = \{x+y: x \in B_1, y \in B_2\}$ является замкнутым подпространством тогда и только тогда, когда существует константа $k \geq 0$, такая, что

$$\|x+y\| \geq k(\|x\| + \|y\|), \quad x \in B_1, \quad y \in B_2.$$

Из теоремы 12.1.5 следует, что любое конечномерное подпространство банахова пространства может быть дополнено до полного пространства.

Напомним, что в гильбертовом пространстве \mathcal{H} любое замкнутое подпространство $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ имеет прямое дополнение: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$. Оказывается, это свойство характеризует гильбертово пространство в классе банаховых пространств

Теорема 12.1.6 (теорема Й. Линденштраусса и Л. Цаффрири). Если в банаховом пространстве B любое замкнутое подпространство имеет прямое дополнение, то B изоморфно некоторому гильбертову пространству \mathcal{H} .

Определение 12.1.30. Банахово пространство B называется *строго выпуклым*, если из соотношений $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ и $x \neq y$ следует $\|x+y\| < 2$. Пространство B называется *равномерно выпуклым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из неравенств $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ и $\|x-y\| \leq \varepsilon$ следует $\|x+y\| \leq 2(1-\delta(\varepsilon))$.

12.1.4. Метрические и топологические пространства

Наличие функции нормы в пространстве означает, что пространство является линейным и метрическим с метрикой $\rho(x, y) = \|x-y\|$, называемой *инвариантной метрикой*. Попытки выйти за рамки линейных пространств неизбежно приводит нас к потере функции нормы, но

структура метрики может быть сохранена (см. замечание 12.1.4). Напомним, что пространства со структурой метрики называются метрическими пространствами. Определение сходящейся последовательности элементов метрического пространства было дано ранее (см. определение 12.1.12). Также такие фундаментальные понятия, как открытые и замкнутые множества, ε -окрестность, компактные множества были определены в общем случае метрических пространств (см. определения 12.1.16–12.1.22, 12.1.25, 12.1.27). Метрическое пространство может обладать свойствами сепарабельности (см. определения 12.1.23, 12.1.24) и полноты (см. определение 12.1.14).

Определение 12.1.31. Полное метрическое пространство M_0 называется *пополнением* метрического пространства M , если M является подпространством M_0 и $\bar{M} = M_0$.

Всякое метрическое пространство имеет пополнение.

Теорема 12.1.7 (принцип вложенных шаров). Для того чтобы метрическое пространство было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность замкнутых вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.

Открытые и замкнутые множества метрического пространства M обладают следующими свойствами:

- 1) множество $M \setminus X$, дополнительное к замкнутому множеству X , открыто, а множество, дополнительное к открытому, замкнуто;
- 2) объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств открыто;
- 3) пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Определение 12.1.32. Семейство открытых множеств τ метрического пространства M называется *метрической (или открытой) топологией* пространства M .

Замечание 12.1.5. Метрическая топология, порожденная инвариантной метрикой, называется *нормированной топологией*.

Теперь перейдем к определению наиболее общего класса пространств — топологических пространств.

Определение 12.1.33. Ввести в какое-либо множество T топологию — значит выделить некоторое семейство τ подмножеств множества T таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) все множество T и пустое множество \emptyset входят в семейство τ ;
- 2) объединение любого числа элементов семейства τ является элементом семейства τ ;
- 3) пересечение конечного числа элементов множества τ является элементом множества τ .

Множество T с введенной в нем топологией τ называется *топологическим пространством* (T, τ) , элементы множества T называются *точками* пространства (T, τ) , элементы семейства τ — *открытыми множествами* пространства (T, τ) , а множества, дополнительные к множествам семейства τ , называются *замкнутыми множествами* пространства (T, τ) .

Очевидно, что метрическое пространство M является топологическим пространством с метрической топологией.

Определение 12.1.34. Топологическое пространство, топологию которого порождает некоторая метрика, называется *метризуемым*.

Отнюдь не всякое топологическое пространство метризуемо. Следует также иметь в виду, что одна и та же топология может порождаться разными метриками.

Окрестностью точки $x \in T$ топологического пространства (T, τ) называют любое открытое множество $O(x) \in \tau$, содержащее точку x . Точка x множества A называется *внутренней точкой* этого множества, если существует окрестность точки x , содержащаяся в A . Замыкание множества в топологическом пространстве определяется так же, как в метрическом (см. определения 12.1.20, 12.1.21).

Теорема 12.1.8. Множество X топологического пространства (T, τ) замкнуто (т. е. является дополнением к открытому множеству) тогда и только тогда, когда $X = \overline{X}$.

Операция замыкания в топологическом пространстве обладает следующими свойствами:

- 1) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;
- 2) $X \subseteq \overline{X}$;
- 3) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$;
- 4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Эти свойства называются *аксиомами замыкания* или *аксиомами Куратовского*.

Замечание 12.1.6. Топологическое пространство (T, τ) можно было задать альтернативным способом как множество T с операцией замыкания на его подмножествах, удовлетворяющей аксиомам 1–4. Тогда замкнутые множества определялись бы как множества, совпадающие со своим замыканием, а открытые — как множества, дополнительные к замкнутым. В результате мы пришли бы к тому же классу топологических пространств.

Определение 12.1.35. Семейство \mathcal{E}_x окрестностей точки x называется *базисом окрестностей* точки x , если любая окрестность точки x содержит некоторую окрестность из семейства \mathcal{E}_x . Совокупность \mathcal{E} базисов \mathcal{E}_x во всевозможных точках пространства называется *базисом пространства*.

Базис пространства обладает следующими свойствами:

- 1) любая окрестность из \mathcal{E}_x содержит точку x ;
- 2) если $O_1(x), O_2(x) \in \mathcal{E}_x$, то существует $O(x) \in \mathcal{E}_x$, такая, что $O(x) \subset O_1(x) \cap O_2(x)$;
- 3) для любой окрестности $O(x) \in \mathcal{E}_x$ существует $O'(x) \in \mathcal{E}_x$, такая, что $O'(x) \subset O(x)$, причем для любого $y \in O'(x)$ найдется $O(y) \in \mathcal{E}_y$, такая, что $O(y) \subset O(x)$.

Топологию пространства часто удобно описывать в терминах сходимости направлений (*сходимость по Муру — Смитту*). Введем понятие направления, которое является обобщением понятия последовательности точек.

Множество \mathcal{A} называется *упорядоченным*, если для некоторых пар его элементов α_1 и α_2 определено *отношение порядка* $\alpha_1 \geq \alpha_2$, причём выполнены следующие условия:

- 1) $\alpha \geq \alpha$ для любого $\alpha \in \mathcal{A}$;
- 2) если $\alpha_1 \geq \alpha_2$ и $\alpha_2 \geq \alpha_3$, то $\alpha_1 \geq \alpha_3$;
- 3) если $\alpha_1 \geq \alpha_2$ и $\alpha_2 \geq \alpha_1$, то $\alpha_1 = \alpha_2$.

Отображение $\alpha \rightarrow x_\alpha$ множества \mathcal{A} в T называется *направлением* (а также *сетью* или *обобщенной последовательностью*) и обозначается $\{x_\alpha\}$, если \mathcal{A} — упорядоченное множество, направленное по возрастанию, т. е. такое множество, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ существует такое $\alpha \in \mathcal{A}$, что $\alpha \geq \alpha_1$ и $\alpha \geq \alpha_2$. Примером направления является множество всех конечных подмножеств в множестве натуральных чисел \mathbb{N} , упорядоченных по включению. Если $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, то $\{x_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) — обычная последовательность.

Направление $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in \mathcal{A}$) элементов топологического пространства (T, τ) называется *сходящимся* к $x \in T$ в топологии τ , если для любой окрестности $O(x)$ точки x существует $\alpha(O(x)) \in \mathcal{A}$, такое, что

$x_\alpha \in O(x)$ для всех $\alpha \geq \alpha(O(x))$. Точка x называется *пределом* (или *предельной точкой*) направления $\{x_\alpha\}$. Сходимость направления обозначается так: $x_\alpha \xrightarrow{A} x$ или $x = \lim_{\alpha} x_\alpha$.

Множество $X \subset T$ в топологическом пространстве (T, τ) замкнуто тогда и только тогда, когда предел любого сходящегося направления из X принадлежит X .

Замечание 12.1.7. Если топологическое пространство таково, что каждая его точка обладает счетным базисом окрестностей, то вместо направлений можно говорить об обычных последовательностях. В частности, в метрическом пространстве понятие сходимости последовательности по метрике эквивалентно понятию сходимости направления в метрической топологии.

Топологические пространства, удовлетворяющие лишь трем аксиомам топологического пространства (см. определение 12.1.33), могут иметь очень сложную структуру, или, наоборот, их строение может оказаться настолько примитивным, что средствами топологии их изучать нельзя. Так, например, будет, если положить $\tau = \{T, \emptyset\}$. В этом пространстве, называемым антидискретным, любая точка имеет единственную окрестность — множество T . Следовательно, любая последовательность в антидискретном пространстве сходится к любой точке. Для того чтобы избежать такой ситуации, обычно вводят дополнительные аксиомы, выделяющие более узкие классы топологических пространств — например, следующую аксиому отделимости Хаусдорфа, которая гарантирует важнейшее свойство единственности предела направления.

Определение 12.1.36. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым* (или *отделимым*), если всякие две различные его точки имеют непересекающиеся окрестности.

Теорема 12.1.9. В хаусдорфовом пространстве никакое сходящееся направление не может иметь двух различных пределов.

Определение 12.1.37. Если \mathcal{L} — линейное и одновременно топологическое пространство с топологией, относительно которой операции сложения $(x+y)$ и умножения на число (λx) непрерывны по обоим своим аргументам для любых $x, y \in \mathcal{L}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то \mathcal{L} называется *топологическим линейным пространством* и обозначается (\mathcal{L}, τ) .

Непрерывность алгебраических операций сложения и умножения на скаляр относительно топологии τ означает, что

1) для каждой пары элементов $x, y \in \mathcal{L}$ и окрестности $O(x+y)$ элемента $x+y$ найдутся окрестность $O(x)$ элемента x и окрестность $O(y)$ элемента y , такие, что

$$O(x) + O(y) \subset O(x+y);$$

2) каковы бы ни были элемент $x \in \mathcal{L}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и окрестность $O(\lambda x)$ элемента λx , найдутся окрестность $O(x)$ элемента x и число $\delta > 0$, такие, что при любом λ' , для которого $|\lambda' - \lambda| < \delta$, имеет место включение

$$\lambda' O(x) \subset O(\lambda x).$$

Специфической особенностью топологического линейного пространства (\mathcal{L}, τ) является тот факт, что каждая окрестность любой его точки $x \in \mathcal{L}$ имеет вид $x + O(0)$, где $O(0)$ — окрестность нулевого элемента 0 .

Таким образом, топология в топологическом линейном пространстве определяется базисом окрестностей нулевого элемента.

Определение 12.1.38. Множество X линейного пространства \mathcal{L} называется *выпуклым*, если оно содержит вместе с любыми двумя своими элементами $x, y \in X$ и весь соединяющий их отрезок: $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y; \lambda \in [0, 1]\} \subset X$. Множество $X \subset \mathcal{L}$ называется *уравновешенным*, если для любого $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, такого, что $|\lambda| \leq 1$, имеем $\lambda x \in X$. Выпуклое уравновешенное множество называется *абсолютно выпуклым*. Множество $X \subset \mathcal{L}$ называется *поглощающим*, если для любого $x \in \mathcal{L}$ существует такое число $\lambda(x) > 0$, что $x \in \lambda X$ для всех $\lambda, |\lambda| \geq \lambda(x)$.

В топологическом линейном пространстве (\mathcal{L}, τ) существует базис окрестностей нуля, состоящий из уравновешенных поглощающих множеств.

Определение 12.1.39. Множество X топологического линейного пространства (\mathcal{L}, τ) называется *ограниченным*, если для любой окрестности нуля $O(0)$ в пространстве (\mathcal{L}, τ) существует число λ , такое, что $X \subset \lambda O(0)$.

Если X_1 и X_2 — ограниченные множества линейного топологического пространства (\mathcal{L}, τ) , то следующие множества ограничены в (\mathcal{L}, τ) : $X_1 \cup X_2$, $X_1 + X_2$, λX_1 ($\lambda \in \mathbb{R}$), \bar{X}_1 .

Конечное множество ограничено.

Теорема 12.1.10. Для того чтобы множество X топологического линейного пространства (\mathcal{L}, τ) было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы, каковы бы ни были последовательность $\{x_n\} \subset X$ и последовательность $\{\lambda_n\}$ вещественных чисел, $\lambda_n \rightarrow 0$, имела место сходимости $\lambda_n x_n \rightarrow 0$.

Теорема 12.1.11. Для того чтобы топологическое линейное пространство (\mathcal{L}, τ) было *нормируемым* (т. е. в (\mathcal{L}, τ) можно было ввести норму так, чтобы нормированная топология совпала с топологией τ), необходимо и достаточно, чтобы в (\mathcal{L}, τ) существовала выпуклая ограниченная окрестность нуля.

Определение 12.1.40. Хаусдорфово топологическое линейное пространство называется *локально выпуклым*, если в нем существует базис окрестностей нуля, состоящий из выпуклых множеств.

Нормированное пространство является локально выпуклым, поскольку любой шар в нормированном пространстве является выпуклым множеством.

В нормированном пространстве \mathcal{N} совокупность открытых шаров $B(0, \varepsilon) = \{x \in \mathcal{N} : \|x\| < \varepsilon\}$, где ε — произвольное вещественное число, образует базис окрестностей нуля пространства \mathcal{N} . Базис окрестностей нуля локально выпуклого пространства определяется с помощью семейства полунорм.

Определение 12.1.41. Вещественная функция $p(x)$, определенная на линейном пространстве \mathcal{L} , называется *полуаддитивной*, если для любой пары элементов $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$

$$p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2),$$

положительно однородной, если для $\lambda \geq 0$

$$p(\lambda x) = \lambda p(x),$$

однородной, если для любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda x) = |\lambda|p(x).$$

Полуаддитивная, положительно однородная функция называется *калибровочной функцией*. Однородная калибровочная функция называется *полунормой*.

Если p — неотрицательная калибровочная функция, то для любого $\lambda > 0$ множества $\{x \in \mathcal{L} : p(x) < \lambda\}$ и $\{x \in \mathcal{L} : p(x) \leq \lambda\}$ — выпуклые и поглощающие. Если p — полунорма, то эти множества абсолютно выпуклы.

Каждому выпуклому поглощающему множеству $V \subset \mathcal{L}$ соответствует неотрицательная калибровочная функция p_V , называемая *функцией Минковского* (множества V), которая определяется по формуле

$$p_V(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+, x \in \lambda V\},$$

причем

$$\{x \in \mathcal{L} : p_V(x) < 1\} \subset V \subset \{x \in \mathcal{L} : p_V(x) \leq 1\}.$$

Если V , кроме того, абсолютно выпукло, то p_V — полунорма.

Если \mathcal{L} — линейное пространство, а $\{p_\xi\}$ ($\xi \in \Theta$) — произвольное семейство полунорм на нем, тогда множества вида

$$\left\{x \in \mathcal{L} : \max_{1 \leq i \leq n} p_{\xi_i}(x) < \varepsilon\right\} \quad (\varepsilon > 0, \quad \xi_1, \dots, \xi_n \in \Theta)$$

образуют базис окрестностей нуля некоторой топологии в \mathcal{L} , т. е. семейство полунорм порождает топологию на \mathcal{L} . Если семейство полунорм $\{p_\xi\}$ ($\xi \in \Theta$) обладает свойством, что для любого ненулевого $x \in \mathcal{L}$ найдется номер $\xi \in \Theta$, такой, что $p_\xi(x) \neq 0$, то порожденная им топология является топологией локально выпуклого пространства. Все полунормы из определяющего набора непрерывны.

Топология всякого локально выпуклого пространства порождается некоторым набором полунорм. Действительно, локально выпуклое пространство имеет базис абсолютно выпуклых окрестностей нуля \mathcal{E}_0 ; следовательно, его топология порождается семейством полунорм $\{p_V\}$ ($V \in \mathcal{E}_0$), где p_V — функционал Минковского окрестности V .

Порождающий набор полунорм определен неоднозначно. Если локально выпуклое пространство обладает счетным порождающим набором полунорм $\{p_i\}$, то оно метризуемо:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x - y)}{1 + p_k(x - y)}.$$

Одним из важнейших понятий общей топологии является понятие компактного пространства, введенное в начале 20-х годов XX в. П. С. Александровым и П. С. Урысоном.

Определение 12.1.42. Топологическое пространство (T, τ) называется *компактным* (или *бикompактным*), если, каково бы ни было семейство $\{X_k\}$ ($k \in K$) открытых множеств, образующих *покрытие* пространства (T, τ) , т. е. такое, что

$$\bigcup_{k \in K} X_k = T,$$

существует конечное число множеств $X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_n}$, также покрывающих пространство (T, τ) . Пространство (T, τ) называется *локально-компактным*, если каждая его точка имеет окрестность, замыкание которой компактно.

Топологическое пространство (T, τ) компактно тогда и только тогда, когда каждое направление в T имеет предельную точку. Напомним, что точка $x \in T$ является предельной точкой направления $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in \mathcal{A}$), если для любой окрестности $O(x)$ точки x и любого $\alpha \in \mathcal{A}$ существует такой индекс α' , что $\alpha' \geq \alpha$ и $x_{\alpha'} \in O(x)$.

Множество $X \subset T$ топологического пространства (T, τ) называется *компактным*, если рассматриваемое как топологическое пространство (с топологией, индуцированной топологией τ) оно компактно. Множество $X \subset T$ называется *предкомпактным*, если замыкание его компактно. Ясно, что любое множество в компактном пространстве предкомпактно.

Компактное множество в хаусдорфовом пространстве (в частности, в метрическом) замкнуто.

Следует отметить, что приведенные определения компактных и предкомпактных множеств не совпадают с определениями 12.1.25, 12.1.26 для метрических пространств. В топологических пространствах свойство множества в каждой последовательности его элементов (т. е.

в случае $\mathcal{A} = \mathbb{N}$) содержать сходящуюся подпоследовательность носит название *секвенциальной компактности* или *секвенциальной предкомпактности* в зависимости от того, принадлежат или нет предельные точки данному множеству. В общем случае компактность не влечет секвенциальную компактность и наоборот. Однако в метрических пространствах понятия компактности и секвенциальной компактности совпадают (см. замечание 12.1.7).

12.1.5. Примеры гильбертовых и банаховых пространств

Пространство l_p состоит из всех бесконечных последовательностей действительных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{l_p} = \left\{ \sum_n |x_n|^p \right\}^{1/p},$$

где $p \geq 1$ — фиксированное число. Линейные операции определяются по координатам. При $p > 1$ пространство l_p является банаховым пространством. При $p = 2$ пространство l_2 , снабженное скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = \sum_n x_n y_n, \quad x, y \in l_2,$$

является гильбертовым пространством.

Пространство $C[a, b]$ состоит из вещественных функций $x(t)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и имеющих норму

$$\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}.$$

Сложение функций и умножение на число определяются обычным образом. Пространство $C[a, b]$ является банаховым пространством.

Пространство $C^m[a, b]$ ($m \geq 1$ — фиксированное число) состоит из m раз равномерно дифференцируемых функций $x(t)$ с нормой

$$\|x\|_{C^m} = \|x\|_C + \sum_{k=1}^m \|x^{(k)}\|_C.$$

Здесь $x^{(k)}$ — производная порядка k функции $x(t)$. Пространства $C^m[a, b]$ являются банаховыми.

Пространство $L_p[a, b]$ ($1 < p < +\infty$) состоит из вектор-функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, интегрируемых по Лебегу на отрезке $[a, b]$ со степенью p :

$$\|x\|_{L_p} = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Пространство $L_p[a, b]$ является банаховым пространством. При $p = 2$ пространство $L_2[a, b]$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle_{L_2} = \int_a^b x(t)y(t) dt$$

и нормой

$$\|x\|_{L_2} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{L_2}} = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Пространства Соболева $H^k(G)$ являются замыканием по норме $\|\cdot\|_{H^k(G)}$ множеств функций $x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, которые имеют в области G частные производные до порядка k включительно и для которых конечна величина

$$\|x\|_{H^k(G)}^2 = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_G (D^\alpha x)^2 dG,$$

где $\alpha = (k_1, \dots, k_n)$ — мультииндекс,

$$D^\alpha x \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} x}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad k_i \geq 0, \quad |\alpha| \equiv k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

Пространство $H^k(G)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle_{H^k(G)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \langle D^\alpha x, D^\alpha y \rangle_{L_2(G)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_G D^\alpha x D^\alpha y dG.$$

Замечание 12.1.8. Пространства C^m , L_p и H^k рассмотрены более подробно в подразделе 12.5.1.

12.2. Операторы

В разделе 12.1 было введено понятие пространства и описаны наиболее значительные виды пространств. В целях большей наглядности материал излагался согласно историческому процессу развития математики — от частного (пространство векторов \mathbb{R}^n) к общему (топологическое пространство (T, τ)). Этот раздел организован в обратном порядке: определения оператора и его свойств даны в наиболее общем пространстве, допускающем эти определения. По мере продвижения от общих к конкретным пространствам введенные понятия будут детализироваться, приобретать новые качества.

Важнейшим понятием в анализе является понятие отображения одного множества в другое.

Пусть даны два произвольных множества X, Y и известно правило A , по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Будем говорить в этом случае, что задано *отображение* A множества X в множество Y .

Элемент $y = Ax \in Y$, соответствующий элементу $x \in X$ при отображении A , называется *образом элемента* x , а x — *прообразом*, или одним из прообразов элемента y .

Пусть $M \subset X$. Тогда $A(M)$ обозначает множество таких элементов из Y , которые являются образами элементов $x \in M$. Множество $A(M)$ называется *образом множества M* при отображении A . Если $A(X) = Y$, то говорят, что A отображает множество X на множество Y .

Отображение A множества X в множество Y называется *взаимно однозначным*, если $Ax_1 = Ax_2$ влечет $x_1 = x_2$. Взаимно однозначное отображение множества X на множество Y называется *биекцией*.

Отображение $A : X \rightarrow Y$ называется *обратимым*, если для любого $y \in A(X)$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение. Если A обратимо, отображение $A^{-1} : Y \rightarrow X$, ставящее в соответствие каждому элементу $y \in A(X)$ единственное решение уравнения $Ax = y$, называется *обратным* к A . Очевидно, что отображение A обратимо тогда и только тогда, когда A взаимно однозначно отображает X на $A(X)$.

12.2.1. Операторы в топологических пространствах

Предположим, что множества X и Y принадлежат топологическим пространствам (T_1, τ_1) и (T_2, τ_2) : $X \subset T_1, Y \subset T_2$. В этом случае отображение A множества X на множество Y часто называют *оператором*, действующим из T_1 в T_2 , с областью определения X и областью значений Y . Символически это записывают в виде $A : T_1 \rightarrow T_2$. Для области определения и области значений оператора A приняты обозначения $D_A = X, R_A = A(X) = Y$.

Определение 12.2.1. Отображение $A : T_1 \rightarrow T_2$ называется *секвенциально непрерывным в точке $x \in D_A$* , если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D_A$, сходящейся к x в топологии τ_1 , соответствующая последовательность $\{Ax_n\} \subset R_A$ сходится в топологии τ_2 к точке $Ax \in R_A$.

Определение 12.2.2. Отображение $A : T_1 \rightarrow T_2$ называется *непрерывным*, если прообраз каждого открытого множества открыт. Отображение A называется *непрерывным в точке $x \in T_1$* , если прообраз произвольной окрестности точки Ax является окрестностью точки x .

Если $A : T_1 \rightarrow T_2$ — отображение топологического пространства (T_1, τ_1) в (T_2, τ_2) , то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) отображение A непрерывно;
- 2) прообраз каждого замкнутого множества замкнут;
- 3) отображение A непрерывно в каждой точке $x \in T_1$;
- 4) для любой точки $x \in T_1$ и любой окрестности $O(Ax)$ точки Ax существует окрестность $O(x)$ точки x , такая, что $A(O(x)) \subset O(Ax)$.

Отображение A называется (секвенциально) *непрерывным на множестве $M \subset D_A$* , если оно (секвенциально) непрерывно в каждой точке этого множества.

Отображение $A: T_1 \rightarrow T_2$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого $x \in T_1$ и любого направления $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$), такого, что $x_\alpha \xrightarrow{A} x$, имеет место сходимость $Ax_\alpha \xrightarrow{A} Ax$.

12.2.2. Операторы в метрических пространствах

Пусть M_1 и M_2 — метрические пространства. Оператор $A: M_1 \rightarrow M_2$ является непрерывным в точке $x \in D_A$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что если $y \in D_A$ и $\rho(x, y) < \delta$, то $\rho(Ax, Ay) < \varepsilon$.

В метрических пространствах понятия непрерывности и секвенциальной непрерывности операторов совпадают. Непрерывный оператор переводит каждую сходящуюся последовательность в пространстве M_1 в сходящуюся последовательность в пространстве M_2 .

Определение 12.2.3. Отображение $A: M \rightarrow M$ метрического пространства M в себя называется *сжимающим*, если существует число $0 < \alpha < 1$, такое, что

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) \quad (12.2.1)$$

для любых $x, y \in M$.

С. Банахом была доказана теорема, получившая название *принципа сжимающих отображений*. Поскольку в книге мы неоднократно обращались к этой теореме, приведем ее доказательство.

Теорема 12.2.1 (принцип сжимающих отображений). *Всякое сжимающее отображение полного метрического пространства M в себя имеет и притом только одну неподвижную точку, т. е. такую точку $x \in M$, что $Ax = x$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in M$ и построим последовательность точек $\{x_n\}$ по правилу

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1, \quad \dots, \quad x_n = Ax_{n-1}, \quad \dots$$

Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в M . Действительно, если $m > n$, то

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(Ax_{n-1}, Ax_{m-1}) \leq \alpha \rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq \dots \\ &\leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \alpha^n \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \\ &\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \{1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}\} \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_0, x_1), \end{aligned}$$

где $\alpha < 1$. Следовательно, $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $m > n$. В силу полноты пространства M существует предел $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Поскольку сжимающее отображение A непрерывно, получаем $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$. Таким образом, неподвижная точка существует.

Докажем единственность неподвижной точки. Допустим $Ax = x$ и $Ay = y$. Тогда $\rho(x, y) \leq \alpha\rho(x, y)$, т. е. $\rho(x, y) = 0$, откуда следует $x = y$. \square

Упражнение 12.2.1. Следуя доказательству теоремы 12.2.1, оцените скорость сходимости последовательности $\{x_n\}$ к неподвижной точке.

Замечание 12.2.1. Часто приходится рассматривать оператор A такой, что неравенство (12.2.1) выполняется не во всем пространстве M , а лишь в некоторой замкнутой окрестности точки x' . Пусть эта окрестность — замкнутый шар $\overline{B(x', r)}$ радиуса r с центром в точке x' . Принцип сжимающих отображений остается в силе при условии, что оператор A отображает шар $\overline{B(x', r)}$ в себя. При этом последовательные приближения $x_n \in \overline{B(x', r)}$ и рассуждения, приведенные выше, сохраняются.

В частности, если $\rho(x', Ax') \leq r(1 - \alpha)$, то оператор, удовлетворяющий условию (12.2.1), переводит шар $\overline{B(x', r)}$ в себя. Действительно, для любого $x \in \overline{B(x', r)}$

$$\begin{aligned} \rho(x', Ax) &\leq \rho(Ax, Ax') + \rho(Ax', x') \\ &\leq \alpha\rho(x, x') + r(1 - \alpha) \leq \alpha r + r - r\alpha = r. \end{aligned}$$

Это означает, что оператор A осуществляет сжимающее отображение шара $\overline{B(x', r)}$ в себя. Поэтому, в силу принципа Банаха, оператор A имеет в шаре $\overline{B(x', r)}$ единственную неподвижную точку.

Говорят, что два отображения A и A_1 метрического пространства M в себя *коммутируют*, если для всякого $x \in M$ справедливо равенство $A(A_1x) = A_1(Ax)$.

Теорема 12.2.2 (обобщение принципа сжимающих отображений). Пусть A и A_1 — отображения полного метрического пространства M в себя. Если A_1 — сжимающее отображение и отображения A и A_1 коммутируют, то уравнение $Ax = x$ имеет решение.

12.2.3. Операторы в линейных пространствах

Если оператор $A : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ действует в топологических линейных пространствах (\mathcal{L}_1, τ_1) и (\mathcal{L}_2, τ_2) , можно исследовать особенности его поведения при суммировании аргумента и умножении на скаляр.

Определение 12.2.4. Оператор $A : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$, отображающий линейное пространство \mathcal{L}_1 в линейное пространство \mathcal{L}_2 , называется *линейным оператором*, если выполнены следующие аксиомы:

- 1) оператор A *аддитивен*, т. е. $A(x + y) = Ax + Ay, \forall x, y \in \mathcal{L}_1$;
- 2) A — *однородный* оператор, т. е. $A(\alpha x) = \alpha Ax, \forall x \in \mathcal{L}_1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (или $\alpha \in \mathbb{C}$).

Если $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$, то A называется линейным оператором в пространстве \mathcal{L} .

Пример линейного оператора. Пусть

$$y(t) = \int_0^1 K(s, t)x(s) ds,$$

где $K(s, t)$ — непрерывная в квадрате $0 \leq s, t \leq 1$ функция. Тогда, если $x(s) \in C[0, 1]$, то, очевидно, $y(t) \in C[0, 1]$. Выполнение условий 1 и 2 определения 12.2.4 здесь очевидно. Следовательно, оператор

$$Ax = \int_0^1 K(s, t)x(s) ds,$$

отображающий пространство $C[0, 1]$ в пространство $C[0, 1]$, является линейным.

Введем понятие *суммы линейных операторов* $A : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ и $B : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ следующим образом: $(A + B)x = Ax + Bx$, $x \in \mathcal{L}_1$. Очевидно, $(A + B)$ — линейный оператор, отображающий \mathcal{L}_1 в \mathcal{L}_2 . *Произведение линейного оператора A на скаляр $\alpha \in \mathbb{R}$ (или $\alpha \in \mathbb{C}$)* определяется аналогично, а именно, $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$ для любого $x \in \mathcal{L}_1$. *Произведение линейных операторов $B : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_3$ и $A : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$* определяется по правилу $(BA)x = B(Ax)$, $x \in \mathcal{L}_1$. Произведение AB является линейным оператором и отображает \mathcal{L}_1 в \mathcal{L}_3 .

Определение 12.2.5. Совокупность всех линейных операторов $A : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$, отображающих линейное пространство \mathcal{L}_1 в \mathcal{L}_2 образует линейное пространство с введенными выше операциями сложения операторов и умножения оператора на скаляр. Это пространство называется *пространством линейных операторов*.

Определение 12.2.6. Линейный оператор $A : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$, отображающий одно топологическое линейное пространство (\mathcal{L}_1, τ_1) в другое (\mathcal{L}_2, τ_2) , называется *ограниченным*, если он переводит ограниченные множества в ограниченные (см. определение 12.1.39).

Теорема 12.2.3. Пусть (\mathcal{L}_1, τ_1) и (\mathcal{L}_2, τ_2) — топологические линейные пространства, A — линейный оператор, отображающий \mathcal{L}_1 в \mathcal{L}_2 . Тогда из непрерывности оператора A следует его ограниченность.

В общем случае линейных топологических пространств из ограниченности оператора не следует его непрерывность. Однако, если топологическое линейное пространство метризуемо, то следующие утверждения являются эквивалентными:

- 1) оператор A непрерывен;
- 2) оператор A ограничен;
- 3) если $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то множество $\{Ax_n\}$ ограничено;
- 4) $Ax_n \rightarrow 0$ при $x_n \rightarrow 0$.

12.2.4. Операторы в банаховых пространствах

Пусть $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ — нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_{\mathcal{N}_1}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{N}_2}$, соответственно. Линейный оператор $A : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ ограничен, если существует такая постоянная C , что для любых $x \in \mathcal{N}_1$

$$\|Ax\|_{\mathcal{N}_2} \leq C\|x\|_{\mathcal{N}_1}. \quad (12.2.2)$$

Линейный оператор $A : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

Определение 12.2.7. Пусть A — линейный ограниченный оператор, отображающий одно нормированное пространство \mathcal{N}_1 в другое \mathcal{N}_2 . *Нормой $\|A\|$ оператора A называется наименьшая из постоянных C , удовлетворяющих условию (12.2.2).*

Норма оператора вычисляется по формуле

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{N}_1}=1} \|Ax\|_{\mathcal{N}_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathcal{N}_2}}{\|x\|_{\mathcal{N}_1}}. \quad (12.2.3)$$

Пространство линейных ограниченных операторов $A : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$, отображающих нормированное пространство \mathcal{N}_1 в \mathcal{N}_2 , является нормированным пространством с нормой (12.2.3) и обозначается $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.

Теорема 12.2.4. *Пространство линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(\mathcal{N}, \mathcal{B})$, отображающих нормированное пространство \mathcal{N} в банахово пространство \mathcal{B} , является банаховым пространством.*

В пространстве операторов можно определить различные виды сходимости, различные топологии.

Определение 12.2.8. Сходимость по норме в пространстве линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ называется *равномерной сходимостью*. Иначе говоря, если последовательность $\{A_n\}$, $A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, сходится по норме к оператору A , т. е. $\|A_n - A\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то говорят, что $\{A_n\}$ *сходится к A равномерно* при $n \rightarrow \infty$.

Определение 12.2.9. Говорят, что последовательность операторов $\{A_n\}$ *поточечно сходится* при $n \rightarrow \infty$ к оператору A в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, если для любого $x \in \mathcal{N}_1$ справедливо соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax$.

Из равномерной сходимости последовательности $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ следует поточечная. Обратное неверно.

Следующую теорему относят к одному из основных принципов функционального анализа, так называемому *принципу равномерной ограниченности*.

Теорема 12.2.5 (теорема Банаха). Пусть последовательность $\{A_n\}$ линейных ограниченных операторов, отображающих банахово пространство \mathcal{B} в нормированное пространство \mathcal{N} , поточечно сходится при $n \rightarrow \infty$ к оператору A . Тогда числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена, следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} A_n x = 0$ равномерно относительно $n \in \mathbb{N}$ и оператор $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ ограничен.

Теорема 12.2.6. Пусть \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 — банаховы пространства. Тогда пространство $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ является полным пространством в смысле поточечной сходимости.

Теорема 12.2.7 (теорема Банаха об обратном операторе). Пусть A — линейный непрерывный оператор, взаимно однозначно отображающий банахово пространство \mathcal{B}_1 на банахово пространство \mathcal{B}_2 . Тогда обратный оператор A^{-1} тоже непрерывен.

Если обратный оператор $A^{-1} : \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1$ ограничен, то его норму можно найти по формуле

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} = \inf_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathcal{B}_2}}{\|x\|_{\mathcal{B}_1}}.$$

Если $A_0 : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{B}$ — линейный ограниченный оператор, заданный на линейном подпространстве \mathcal{L}' , всюду плотном в нормированном пространстве \mathcal{N} (т. е. $\overline{\mathcal{L}'} = \mathcal{N}$), со значениями в банаховом пространстве \mathcal{B} , то оператор A_0 может быть *продолжен* на все пространство \mathcal{N} без увеличения своей нормы. Другими словами, можно определить оператор $A : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{B}$, такой, что $Ax = A_0x$, $x \in \mathcal{L}'$, $\|A\|_{\mathcal{N}} = \|A_0\|_{\mathcal{L}'}$.

Указанный процесс продолжения называется *продолжением по непрерывности*. Если оператор не является ограниченным, то его продолжение обычно называют *расширением*. Теория расширений операторов является самостоятельной областью функционального анализа.

Определение 12.2.10. Линейный непрерывный оператор $P : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_0$, отображающий нормированное пространство \mathcal{N} на его замкнутое подпространство $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$, называется *проектором* (из \mathcal{N} в \mathcal{N}_0), если P оставляет элементы \mathcal{N}_1 на месте, т. е. $P(x) = x$ для любого $x \in \mathcal{N}_0$.

Замкнутое подпространство $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ банахова пространства \mathcal{B} дополняемо до пространства \mathcal{B} (см. определение 12.1.29), если существует проектор P из \mathcal{B} в \mathcal{B}_0 .

Компактные и вполне непрерывные операторы. Важнейший класс операторов, аппроксимируемых конечномерными, а именно вполне непрерывные операторы, впервые был рассмотрен Гильбертом в пространстве L_2 .

Определение 12.2.11. Оператор $A : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$, отображающий нормированное пространство \mathcal{N}_1 в нормированное пространство \mathcal{N}_2 , называется *компактным*, если он переводит каждое ограниченное множество в предкомпактное. Если при этом A непрерывен, то он называется *вполне непрерывным*.

Поскольку компактный оператор ограничен, каждый компактный линейный оператор вполне непрерывен.

Конечномерные операторы, т. е. линейные непрерывные операторы с конечномерной областью значений, компактны.

Компактные операторы обладают следующими свойствами:

- 1) область значений R_A компактного оператора A сепарабельна;
- 2) линейная комбинация $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ компактных операторов $A_1 : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ и $A_2 : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ есть компактный оператор;
- 3) если $A \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, а $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3)$, где \mathcal{N}_3 — нормированное пространство, и один из этих операторов компактен, то и произведение $A_1 A$ также компактно;
- 4) если $\{A_n\}$ — последовательность компактных линейных операторов из \mathcal{N}_1 в банахово пространство \mathcal{N}_2 , сходящаяся к оператору A по норме пространства $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0,$$

то A — компактный оператор.

Из последнего свойства следует, что только вполне непрерывный оператор может быть с любой точностью аппроксимирован конечномерными операторами.

Спектр оператора. Одна из главных задач, связанная с изучением линейных операторов в гильбертовом и банаховом пространствах, состоит в отыскании векторов, сохраняющих под действием оператора свое направление, т. е. удовлетворяющих уравнению $Ax = \lambda x$, где λ — число. Это уравнение удобнее рассматривать в комплексном пространстве, в частности, придавая λ комплексные значения. В связи с этим введем некоторые вспомогательные понятия, относящиеся к комплексным пространствам и позволяющие включить вещественный случай в комплексный.

Пусть Z — комплексное нормированное пространство. Говорят, что Z имеет *вещественное ядро*, если на Z определен оператор C , отображающий Z в себя и называемый *инволюцией*, который обладает свойствами:

- 1) $C(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \bar{\lambda}_1 C(z_1) + \bar{\lambda}_2 C(z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in Z$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$;
- 2) $C^2(z) = z$, $\forall z \in Z$;
- 3) $\|C(z)\| = \|z\|$, $\forall z \in Z$.

Множество элементов, для которых $C(z) = z$, называется *вещественным ядром* пространства Z и обозначается $\text{Re } Z$; элементы этого множества называются *вещественными*.

Каждый элемент $z \in Z$ представим в виде

$$z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

где $x = \operatorname{Re} z = [z + C(z)]/2$ называется *вещественной частью* элемента z , а $y = \operatorname{Im} z = [z - C(z)]/(2i)$ — *мнимой частью* элемента z . Очевидно, $C(z) = \bar{z} = x - yi$.

Вещественное ядро $X = \operatorname{Re} Z$ является вещественным нормированным пространством, полным, если полно исходное пространство Z .

Любое вещественное пространство X можно рассматривать как вещественное ядро некоторого комплексного пространства, именно пространства Z , состоящего из упорядоченных пар элементов X : $z = (x, y)$ ($x, y \in X$). Действия в пространстве Z вводятся по следующим правилам:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$$\lambda(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y), \quad \text{где } \lambda = \alpha + \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$\|(x, y)\| = \max_{\varphi} \|x \cos \varphi + y \sin \varphi\|.$$

Чтобы убедиться, что $X = \operatorname{Re} Z$, достаточно положить

$$C((x, y)) = (x, -y).$$

При этом вещественными в пространстве Z будут все элементы вида $(x, 0)$ и только они. отождествляя элемент $(x, 0)$ с элементом x , можно вместо (x, y) использовать обычное обозначение $x + yi$. Пространство Z называется *комплексификацией* X .

Пусть Z_1 и Z_2 — комплексные пространства с вещественными ядрами $X_1 = \operatorname{Re} Z_1$ и $X_2 = \operatorname{Re} Z_2$. Непрерывный линейный оператор $\tilde{A} : Z_1 \rightarrow Z_2$ называется *вещественным*, если $\tilde{A}(\operatorname{Re} Z_1) \subset \operatorname{Re} Z_2$. Таким образом, вещественный оператор индуцирует непрерывный линейный оператор из вещественного пространства X_1 в вещественное пространство X_2 .

Наоборот, если A — непрерывный линейный оператор, отображающий пространство X_1 в пространство X_2 , и $X_1 = \operatorname{Re} Z_1$, $X_2 = \operatorname{Re} Z_2$, то, полагая

$$\tilde{A}(z) = \tilde{A}(x + yi) = Ax + iAy, \quad z = x + yi,$$

получим непрерывный линейный оператор \tilde{A} из комплексного пространства Z_1 в комплексное пространство Z_2 . Очевидно, на X_1 оператор \tilde{A} совпадает с A . Оператор \tilde{A} называется *комплексным расширением* оператора A .

Итак, пусть $A : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ — линейный непрерывный оператор, отображающий комплексное банахово пространство \mathcal{B} в себя. Если первоначально пространство \mathcal{B} вещественное, возьмем вместо A его комплексное расширение \tilde{A} . Рассмотрим уравнение

$$T_{\lambda}(x) = \lambda x - Ax = y \tag{12.2.4}$$

и исследуем его поведение в зависимости от комплексного параметра λ .

В отношении разрешимости уравнения (12.2.4) комплексная плоскость разбивается на два множества: множество $\rho(A)$ тех значений $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых уравнение (12.2.4) имеет единственное решение для любой правой части $y \in \mathcal{B}$ (следовательно, оператор T_λ имеет непрерывный обратный) и множество $\sigma(A)$ остальных значений λ . Точки множества $\rho(A)$ называются *регулярными значениями* оператора A , множество $\rho(A)$ называется *резольвентным множеством*, а оператор $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ — *резольвентой* оператора A . Множество $\sigma(A)$ называется *спектром* оператора A .

Если при некотором λ однородное уравнение

$$T_\lambda(x) = \lambda x - Ax = 0 \quad (12.2.5)$$

имеет отличные от нуля решения, то λ называется *собственным значением* оператора A . Очевидно, множество $\sigma_0(A)$ всех собственных значений оператора A содержится в множестве $\sigma(A)$. Каждое решение уравнения (12.2.5) называется *собственным вектором*, отвечающим данному собственному значению. Решения уравнения (12.2.5) при фиксированном λ образуют подпространство \mathcal{B}_λ , которое называется *собственным* (или *корневым*) *подпространством*, отвечающим собственному значению λ . Размерность \mathcal{B}_λ называется *кратностью собственного значения* λ . Если $\dim \mathcal{B}_\lambda = 1$, то собственное значение называют *простым*.

Приведенные определения собственного значения и собственного вектора обобщают известные понятия из линейной алгебры на случай бесконечномерного пространства. В евклидовом пространстве \mathbb{E}^n спектр линейного оператора (т. е. спектр матрицы) состоит из всех его собственных значений. В бесконечномерном пространстве спектр линейного ограниченного оператора имеет более сложную структуру.

В конечномерном пространстве могут быть две возможности:

1) уравнение (12.2.5) имеет ненулевое решение, т. е. λ — собственное значение для оператора (матрицы) A ; оператор $T_\lambda^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}$, где I — единичная матрица, в этом случае не существует;

2) существует ограниченный (определенный на всей пространстве) оператор $T_\lambda^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}$, т. е. λ — регулярная точка.

В бесконечномерном пространстве имеется еще и третья возможность: оператор T_λ^{-1} существует, т. е. уравнение $T_\lambda x = 0$ имеет лишь нулевое решение, но этот оператор определен не на всем пространстве. Таким образом, спектр оператора состоит из тех значений λ , при которых оператор T_λ не имеет ограниченного обратного, определенного во всем пространстве.

Спектр линейного ограниченного оператора можно классифицировать, разбив его на три непересекающихся множества:

1) *точечный спектр* — множество всех собственных значений $\sigma_0(A)$ оператора A ;

2) *непрерывный спектр* — те значения λ , для которых оператор T_λ обладает обратным $T_\lambda^{-1} = R_\lambda$ с плотной областью определения, которая не совпадает со всем пространством: $\overline{D_{R_\lambda}} = \mathcal{B}$;

3) *остаточный спектр* — те значения λ , при которых резольвентный оператор $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ существует, но его область определения не плотна во всем пространстве: $\overline{D_{R_\lambda}} \neq \mathcal{B}$.

Резольвента R_λ непрерывного линейного оператора A в комплексном банаховом пространстве \mathcal{B} разлагается в ряд по степеням λ^{-1} :

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda^2} A + \dots + \frac{1}{\lambda^n} A^{n-1} + \dots \quad (12.2.6)$$

$$\left(|\lambda| > \frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \right).$$

Разложение (12.2.6) имеет место также при $|\lambda| > 1/r$, где $1/r$ — радиус наименьшего круга с центром в начале координат, целиком содержащего спектр. Число $1/r$ называется *спектральным радиусом* оператора A .

Следует отметить, что переход от вещественного к комплексному случаю при рассмотрении уравнения $Ax = \lambda x$ совершается, в частности, в целях гарантирования непустоты спектра $\sigma(A)$ непрерывного линейного оператора A .

12.2.5. Операторы в гильбертовых пространствах

Рассмотрим оператор $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, действующий из гильбертова пространства \mathcal{H}_1 в гильбертово пространство \mathcal{H}_2 .

Определение 12.2.12. Оператор $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ называется *слабо непрерывным в точке* $x \in D_A$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in D_A$, слабо сходящейся к x , последовательность $\{Ax_n\}$ слабо сходится к Ax . Оператор A называется *деминепрерывным в точке* $x \in D_A$, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D_A$, сходящейся к точке x , последовательность $\{Ax_n\}$ слабо сходится к Ax . Оператор A называется *слабо непрерывным (деминепрерывным)*, если он слабо непрерывен (деминепрерывен) в каждой точке $x \in D_A$.

Для линейных операторов в гильбертовых пространствах из непрерывности следует слабая непрерывность. Для нелинейных операторов это не так. Например, функционал $J(x) = \|x\|$, $x \in \mathcal{H}_1$, непрерывен, но не является слабо непрерывен.

Важный класс операторов в гильбертовом пространстве образуют операторы ортогонального проектирования. Пусть \mathcal{H}_0 — подпространство гильбертова пространства \mathcal{H} . Согласно лемме 12.1.1 каждому $x \in \mathcal{H}$ однозначно соответствует его проекция $P(x) = x_0 \in \mathcal{H}_0$ на подпространство \mathcal{H}_0 . Тем самым в \mathcal{H} определен оператор $P = P_{\mathcal{H}_0}$, который называется *оператором ортогонального проектирования* (на подпространство \mathcal{H}_0).

Операторы ортогонального проектирования в гильбертовых пространствах часто называют операторами проектирования, предполагая ортогональность проекции на подпространство само собой разумеющейся. Мы также в дальнейшем будем употреблять термин “оператор проектирования”, имея в виду оператор ортогонального проектирования.

Оператор проектирования линеен и ограничен: $\|P\| = 1$. Следовательно, оператор $P_{\mathcal{H}_0}$ является проектором (см. определение 12.2.10). Операторы проектирования обладают следующими свойствами:

- 1) для любого $x \in \mathcal{H}$ элементы Px и $x - Px$ ортогональны;
- 2) $x \in \mathcal{H}_0 \Leftrightarrow Px = x$;
- 3) $x \perp \mathcal{H}_0 \Leftrightarrow Px = 0$.

Класс операторов проектирования характеризуется следующей теоремой.

Теорема 12.2.8. Для того чтобы линейный оператор P , определенный на всем гильбертовом пространстве \mathcal{H} , был оператором проектирования, необходимо и достаточно, чтобы оператор был идемпотентен, т. е.

$$\langle P^2 x_1, x_2 \rangle = \langle P x_1, x_2 \rangle \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{H}, \quad (12.2.7)$$

и симметричен:

$$\langle P x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, P x_2 \rangle \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{H}. \quad (12.2.8)$$

Два проектора P_1 и P_2 в гильбертовом пространстве \mathcal{H} называются ортогональными, если $P_1 P_2 = 0$. Операторы проектирования $P_{\mathcal{H}_1}$ и $P_{\mathcal{H}_2}$ ортогональны тогда и только тогда, когда ортогональны подпространства \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 .

Теорема 12.2.9. Пусть $P_{\mathcal{H}_1}, P_{\mathcal{H}_2}, \dots, P_{\mathcal{H}_n}$ операторы проектирования в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Для того, чтобы оператор $P = P_{\mathcal{H}_1} + P_{\mathcal{H}_2} + \dots + P_{\mathcal{H}_n}$ был оператором проектирования, необходимо и достаточно, чтобы проекторы $P_{\mathcal{H}_1}, P_{\mathcal{H}_2}, \dots, P_{\mathcal{H}_n}$ были попарно ортогональны. В этом случае $P = P_{\mathcal{H}_0}$, где $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n$.

Теорема 12.2.10. Произведение $P = P_{\mathcal{H}_1} P_{\mathcal{H}_2}$ двух операторов проектирования $P_{\mathcal{H}_1}$ и $P_{\mathcal{H}_2}$ является оператором проектирования тогда и только тогда, когда они перестановочны:

$$P_{\mathcal{H}_1} P_{\mathcal{H}_2} = P_{\mathcal{H}_2} P_{\mathcal{H}_1},$$

причем $P = P_{\mathcal{H}_0}$, где $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.

Следующие четыре условия эквивалентны:

- а) $\|P_{\mathcal{H}_1} x\| \geq \|P_{\mathcal{H}_2} x\|$ для любого $x \in \mathcal{H}$;
- б) $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2$;
- в) $P_{\mathcal{H}_1} P_{\mathcal{H}_2} = P_{\mathcal{H}_2}$;
- г) $P_{\mathcal{H}_2} P_{\mathcal{H}_1} = P_{\mathcal{H}_2}$.

Теорема 12.2.11. Разность $P = P_{\mathcal{H}_1} - P_{\mathcal{H}_2}$ двух операторов проектирования является оператором проектирования тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$. В этом случае P есть оператор проектирования на $\mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_2$.

Теорема 12.2.12. Пусть $\{P_{\mathcal{H}_n}\}$ — монотонная последовательность операторов проектирования. Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ существует

$$Px = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\mathcal{H}_n} x,$$

причем оператор P является оператором проектирования на подпространство \mathcal{H}_0 , где

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n},$$

если последовательность $\{P_{\mathcal{H}_n}\}$ возрастающая, и

$$\mathcal{H}_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n,$$

если $\{P_{\mathcal{H}_n}\}$ — убывающая последовательность.

Из этой теоремы следует, что если $\{P_{\mathcal{H}_n}\}$ — совокупность попарно ортогональных операторов проектирования, то при любом $x \in \mathcal{H}$ сходится ряд

$$Px = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\mathcal{H}_n} x$$

и оператор P является оператором проектирования.

Отметим также, что оператор проектирования $P_{\mathcal{H}_0}$ является вполне непрерывным только в том случае, если \mathcal{H}_0 конечномерно.

Вполне непрерывный оператор в бесконечномерном гильбертовом пространстве не имеет ограниченного обратного.

Примером линейного оператора в гильбертовом пространстве, не являющегося непрерывным, может служить оператор дифференцирования, действующий из пространства $L_2[a, b]$ в пространство $L_2[a, b]$:

$$Ux = \frac{dx}{dt}, \quad x(t) \in \mathcal{D}_L,$$

где \mathcal{D}_L — множество дифференцируемых функций из $L_2[a, b]$. Заметим, что \mathcal{D}_L всюду плотно в $L_2[a, b]$: $\overline{\mathcal{D}_L} = L_2[a, b]$. Чтобы показать неограниченность оператора U , рассмотрим функции

$$x_n(t) = \sin \left(n\pi \frac{t-a}{b-a} \right)$$

и вычислим $\|x_n\|_{L_2}$ и $\|Ux\|_{L_2}$:

$$\|x_n\|_{L_2[a,b]}^2 = \int_a^b \sin^2 \left(n\pi \frac{t-a}{b-a} \right) dt = \frac{b-a}{2},$$

$$\|Ux_n\|_{L_2[a,b]}^2 = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} \int_a^b \cos^2 \left(n\pi \frac{t-a}{b-a} \right) dt = \frac{n^2\pi^2}{b-a} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Как видно, оператор U не ограничен и, значит, не является непрерывным. Таким образом, задача вычисления значений оператора U является неустойчивой, т.е. малым в метрике L_2 отклонениям от функции $x(t)$ могут соответствовать сколь угодно большие отклонения в ее производной $Ux = dx/dt$.

Если же рассматривать оператор дифференцирования как оператор $U_1 : H^1[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$, то он будет ограничен, так как

$$\|U_1x\|_{L_2[a,b]}^2 = \left\| \frac{dx}{dt} \right\|_{L_2[a,b]}^2 \leq \|x\|_{L_2[a,b]} + \left\| \frac{dx}{dt} \right\|_{L_2[a,b]}^2 = \|x\|_{H^1[a,b]}^2.$$

Следовательно, $\|U_1\| \leq 1$, и оператор U_1 является непрерывным.

Если \mathcal{H} — сепарабельное гильбертово пространство, то линейные ограниченные операторы A , определенные на всем пространстве \mathcal{H} , допускают матричное представление.

Действительно, пусть $\{\varphi_i\}$ — ортонормированный базис в \mathcal{H} . Положим $\langle A\varphi_k, \varphi_i \rangle = a_{ik}$, $i, k = 1, 2, \dots$. Числа a_{ik} — коэффициенты Фурье в разложении вектора $A\varphi_k$ по базису $\{\varphi_i\}$:

$$A\varphi_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}\varphi_i, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle A\varphi_k, \varphi_i \rangle|^2 < \infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

Покажем, что по матрице $\{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$ и ортонормированному базису $\{\varphi_k\}$ можно однозначно восстановить оператор A . Задача состоит в нахождении значения Ax для любого вектора $x \in \mathcal{H}$. Пусть

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k \quad \text{и} \quad x_n = \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k.$$

Тогда $Ax_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} \xi_i \right) \varphi_k$. В силу непрерывности оператора A получаем

$$c_k = \langle Ax, \varphi_k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Ax_n, \varphi_k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_{ki} \xi_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} \xi_i.$$

Следовательно, для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ справедливо равенство

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \quad \text{где } c_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} \xi_i.$$

Таким образом, мы получили матричное представление оператора A в базисе $\{\varphi_k\}$.

Введем понятие абсолютной нормы оператора для линейных ограниченных операторов, определенных на всем сепарабельном гильбертовом пространстве.

Пусть \mathcal{H} — сепарабельное гильбертово пространство и A — линейный ограниченный оператор, определенный всюду в \mathcal{H} . Пусть $\{f_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ — два произвольных ортонормированных базиса в \mathcal{H} . Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Af_k, \varphi_i \rangle|^2 < \infty.$$

Класс операторов, для которых выполняется это неравенство, называется *классом Шмидта*. Величина

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Af_k, \varphi_i \rangle|^2 \right)^{1/2} \quad (12.2.9)$$

не зависит от выбора базисов $\{f_k\}$ и $\{\varphi_i\}$ и называется *абсолютной нормой* оператора A .

Отметим некоторые свойства абсолютной нормы оператора A :

1) норма оператора не превосходит его абсолютной нормы:
 $\|A\| \leq \|A\|_2$;

2) если B — произвольный ограниченный оператор, то
 $\|BA\|_2 \leq \|B\| \|A\|_2$, $\|AB\|_2 \leq \|B\| \|A\|_2$;

3) если A и B — линейные операторы, то
 $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$.

Положив $f_k = \varphi_k$, $k = 1, 2, \dots$, в формуле (12.2.9), получим

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle A\varphi_k, \varphi_i \rangle|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \right)^{1/2},$$

где $a_{ik} = \langle A\varphi_k, \varphi_i \rangle$. Таким образом, если $\|A\|_2 < \infty$, т. е. оператор A принадлежит классу Шмидта, то оператор A допускает матричное представление, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty.$$

Более того, операторы класса Шмидта являются вполне непрерывными.

Примером оператора из класса Шмидта является интегральный оператор Гильберта — Шмидта.

Пусть $x(t) \in L_2[a, b]$ и $K(s, t) \in L_2([a, b] \times [a, b])$, т. е.

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(s, t)| ds dt < \infty. \quad (12.2.10)$$

Определим интегральный оператор $A : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$ по следующему правилу:

$$Ax = \int_a^b K(s, t)x(t) dt. \quad (12.2.11)$$

Оператор $A : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$ вида (12.2.11) с ядром $K(s, t)$, удовлетворяющим условию (12.2.10), называется *интегральным оператором Гильберта — Шмидта*. Интегральный оператор Гильберта — Шмидта принадлежит классу Шмидта, причем его абсолютная норма вычисляется по формуле

$$\|A\|_2^2 = \int_a^b \int_a^b |K^2(s, t)| ds dt.$$

Следовательно, оператор A является вполне непрерывным и для его нормы справедлива оценка сверху

$$\|A\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K^2(s, t)| ds dt \right)^{1/2}.$$

Для таких операторов не существует ограниченного обратного, т. е. решение уравнения $Ax = y$ является некорректной задачей.

В заключение отметим, что линейные вполне непрерывные операторы $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, отражающие сепарабельное гильбертово пространство \mathcal{H}_1 в сепарабельное гильбертово пространство \mathcal{H}_2 , имеют сингулярное разложение (см. теорему 2.9.2).

12.2.6. Линейные операторы в конечномерных пространствах (матрицы)

Линейные операторы $A : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$, переводящие конечномерное нормированное пространство \mathcal{N}_1 ($\dim \mathcal{N}_1 = n$) в конечномерное нормированное пространство \mathcal{N}_2 ($\dim \mathcal{N}_2 = m$), имеют матричную структуру: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Действительно, пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис в \mathcal{N}_1 и $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ — базис в \mathcal{N}_2 . Тогда любой вектор $x \in \mathcal{N}_1$ пред-

ставим в виде $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ и

$$Ax = \sum_{j=1}^n x_j A e_j = y \equiv \sum_{i=1}^m y_i \varphi_i.$$

Каждый из векторов $Ae_j \in \mathcal{N}_2$ можно разложить по базису $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$:

$Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \varphi_i$. Тогда связь между координатами векторов x и $y = Ax$

будет задаваться матрицей $A_{e,\varphi} = [a_{ij}]_{m \times n}$ по формуле $y_\varphi = A_{e,\varphi} x_e$, где x_e — столбец координат вектора x в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$, а y_φ — столбец координат вектора y в базисе $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$.

Таким образом, изучение линейных операторов в конечномерных пространствах сводится к изучению матриц.

Норма матрицы $A: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ согласована с нормами пространств \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 следующим образом:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathcal{N}_2}}{\|x\|_{\mathcal{N}_1}}. \quad (12.2.12)$$

Если \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 — пространства \mathbb{R}^n с кубической нормой $\|x\|_{\text{куб}} =$

$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, то $\|A\|_{\text{куб}} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. В случае, когда $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \mathbb{R}^n$

с октаэдрической нормой $\|x\|_{\text{окт}} = \sum_{i=1}^n |x_i|$, соответствующая норма мат-

рицы A вычисляется по формуле $\|A\|_{\text{окт}} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

Рассмотрим линейный оператор $A: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^m$, действующий из евклидова пространства \mathbb{E}^n в евклидово пространство \mathbb{E}^m , т. е. прямоугольную матрицу A , у которой m строк и n столбцов. Матрицы такого вида будем называть $m \times n$ -матрицами.

Определение 12.2.13. Операция, которая элементы a_{ij} матрицы A переставляет с пересечения i -й строки и j -го столбца на пересечение j -й строки и i -го столбца называется *транспонированием*. Полученная в результате такой перестановки матрица называется *транспонированной матрицей* и обозначается A^T . Если $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, то $A^T = [a_{ij}^T]_{n \times m}$, где $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Заметим, что если λ — собственное значение квадратной $n \times n$ -матрицы A , а x — соответствующий собственный вектор, то

$$|\lambda| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|.$$

Таким образом, для любого собственного значения $\lambda(A)$ квадратной матрицы A справедливо неравенство

$$|\lambda(A)| \leq \|A\|.$$

Отметим еще одно свойство нормы матрицы (12.2.12), подчиненной норме векторов, а именно: норма любой прямоугольной подматрицы Δ матрицы A не превосходит нормы матрицы A : $\|\Delta\| \leq \|A\|$.

Квадратная матрица A *подобна* матрице B , если существует невырожденная матрица C ($\det C \neq 0$) такая, что $A = CBC^{-1}$.

Если матрица A подобна матрице B , то их характеристические многочлены совпадают, т. е.

$$\det(A - I\lambda) = \det(B - I\lambda),$$

где $I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ — единичная матрица. Следовательно, подобные матрицы имеют один и тот же набор собственных значений.

Определение 12.2.14. Квадратная матрица A называется *симметричной*, если $A = A^T$.

Определение 12.2.15. Квадратная матрица A называется *ортогональной*, если ее транспонированная матрица является обратной, т. е. $AA^T = A^T A = I$.

Отметим некоторые свойства ортогональных матриц:

- 1) вектор-столбцы (а также вектор-строки) ортогональной $n \times n$ -матрицы составляют ортонормированный базис в пространстве \mathbb{R}^n ;
- 2) детерминант всякой ортогональной матрицы равен ± 1 ;
- 3) ортогональные матрицы и только они являются матрицами перехода от одного ортогонального базиса к другому;
- 4) ортогональные преобразования сохраняют норму вектора, т. е. если A — ортогональная матрица, то $\|Ax\| = \|x\|$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$;
- 5) произведение ортогональных матриц является ортогональной матрицей.

Определение 12.2.16. Представление квадратной матрицы A в виде произведения симметричной матрицы K и ортогональной матрицы W называется *полярным разложением*: $A = KW$.

Для любой квадратной матрицы можно построить ее полярное разложение.

Симметричная матрица K приводима с помощью ортогональных преобразований к диагональному виду, т. е. существует такая ортогональная матрица U , что $K = U\tilde{\Sigma}U^T$, где $\tilde{\Sigma} = \text{diag}(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n)$ — диагональная матрица.

Введем диагональную ортогональную матрицу $\theta = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ следующим образом:

$$\theta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{\sigma}_i \geq 0, \\ -1, & \text{если } \tilde{\sigma}_i < 0, \end{cases} \quad 1 < i \leq n.$$

Очевидно равенство $\tilde{\Sigma} = \Sigma\theta$, где $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_i = |\tilde{\sigma}_i| \geq 0$, $1 \leq i \leq n$.

Таким образом, любая квадратная матрица A представима в виде

$$A = KW = U\Sigma\theta U^T W = U\Sigma V^T,$$

где $V = W^T U\theta$. Заметим, что V — ортогональная матрица, так как является произведением трех ортогональных матриц.

Определение 12.2.17. Представление квадратной матрицы A в виде $A = U\Sigma V^T$ называется *сингулярным разложением*, если U и V ортогональные $n \times n$ -матрицы, а Σ — диагональная матрица с неотрицательными диагональными элементами: $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$.

Заметим, что поскольку операция перестановки строк и столбцов матрицы является ортогональным преобразованием, всегда можно выбрать ортогональные матрицы U, V таким образом, чтобы диагональные элементы $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ матрицы Σ были расположены в любом нужном порядке, например, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

Рассмотрим симметричную матрицу $A^T A = AA^T$ и выразим ее через матрицы U, Σ и V :

$$A^T A = V\Sigma U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T,$$

$$AA^T = U\Sigma V^T V\Sigma U^T = U\Sigma^2 U^T.$$

Поскольку $U^T = U^{-1}$ и $\det U \neq 0$, матрицы AA^T и Σ^2 подобны и упорядоченные по убыванию диагональные элементы σ_i матрицы Σ связаны с собственными значениями λ_i матрицы AA^T (полагаем $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$) соотношениями $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $1 \leq i \leq n$.

Таким образом, элементы σ_i и их кратности определяются однозначно по матрице A . Они называются *сингулярными числами* матрицы A . Ортогональные матрицы U и V в сингулярном разложении $A = U\Sigma V^T$ могут быть выбраны не единственным образом.

Заметим, что поскольку $|\det U| = |\det V^T| = 1$, то

$$|\det A| = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n.$$

Следовательно, ранг матрицы A равен количеству ее положительных сингулярных чисел. В частности, $\det A \neq 0$ тогда и только тогда, когда

$\min_{1 \leq i \leq n} \sigma > 0$. В этом случае сингулярное разложение обратной матрицы A^{-1} будет иметь вид

$$A^{-1} = V \Sigma^{-1} U^T,$$

где $\Sigma^{-1} = \text{diag}(1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \dots, 1/\sigma_n)$.

Отметим, что если A — симметричная матрица ($A = A^T$), то ее сингулярные числа $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ только порядком могут отличаться от абсолютных величин собственных значений.

Рассмотрим теперь прямоугольную матрицу A размера $m \times n$.

Определение 12.2.18. Представление прямоугольной матрицы A размера $m \times n$ в виде $A = U \Sigma V^T$, где U и V — ортогональные матрицы размеров $m \times m$ и $n \times n$, соответственно, Σ — диагональная $m \times n$ -матрица с неотрицательными элементами $\sigma_{ii} = \sigma_i \geq 0$ называется *сингулярным разложением* матрицы A . Числа $\sigma_i \geq 0$, $1 \leq i \leq \min(m, n)$ называются *сингулярными числами* матрицы A .

Набор сингулярных чисел прямоугольной матрицы A определяется матрицей A однозначно и не зависит от выбора ортогональных матриц U и V . Отсюда следует, что сингулярные числа матрицы являются ее ортогональными инвариантами. Другими словами, умножение матрицы на любые ортогональные матрицы слева и справа не меняет набор ее сингулярных чисел.

Пусть прямоугольная $m \times n$ -матрица A имеет набор сингулярных чисел σ_i , $1 \leq i \leq p$, где $p = \min(m, n)$. Всюду в дальнейшем считаем, что сингулярные числа упорядочены по невозрастанию: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$.

Покажем, что норма матрицы A , подчиненная евклидовой норме вектора, совпадает с максимальным сингулярным числом матрицы A : $\|A\| = \sigma_1$. Напомним, что если A — прямоугольная $m \times n$ -матрица и $y = Ax$, $y \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, то евклидова норма векторов x и y вычисляется по формулам

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

$$\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2},$$

а норма матрицы A , подчиненная данной норме вектора, определяется как

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Поскольку ортогональные преобразования сохраняют норму вектора, они также не меняют норму матрицы, подчиненную данной норме

вектора:

$$\|UAV\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|UAVx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|AVx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|AVx\|}{\|Vx\|} = \|A\|.$$

Здесь A — прямоугольная $m \times n$ -матрица, U и V — ортогональные матрицы размера $m \times m$ и $n \times n$, соответственно.

Следовательно, если $A = U\Sigma V^T$ — сингулярное разложение матрицы A , то $\|\Sigma\| = \|U^TAV\| = \|A\|$. Учитывая диагональную структуру матрицы Σ , получаем

$$\|A\| = \|\Sigma\| = \max_{\|x\|=1} \|\Sigma x\| = \max_{\|x\|=1} \left(\sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \dots + \sigma_p^2 x_p^2} \right) = \sigma_1,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично устанавливается соотношение

$$\min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \begin{cases} \sigma_p, & \text{если } m \geq n, \\ 0, & \text{если } m < n. \end{cases}$$

Пусть $\sigma_j(A)$ — j -е сингулярное число матрицы A в упорядоченном наборе $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_j \geq \dots \geq \sigma_p$. Тогда справедливы следующие утверждения (доказательство можно найти в [4]):

1) для любых $m \times n$ -матриц A и B имеет место соотношение

$$|\sigma_j(A+B) - \sigma_j(A)| \leq \|B\|, \quad 1 \leq j \leq p;$$

2) если T , A , R — невырожденные квадратные $n \times n$ -матрицы, причем T и R близки к единичной матрице I , т. е. $\|T-I\| \leq \eta$, $\|R-I\| \leq \eta$, $\eta \geq 0$, то справедливо неравенство

$$|\sigma_j(A) - \sigma_j(TAR)| \leq \sigma_j(A)(2\eta + \eta^2), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Определение 12.2.19. Пусть σ — сингулярное число $m \times n$ -матрицы A . Вектор $v \in \mathbb{R}^n$ называется *правым сингулярным вектором* матрицы A , соответствующим сингулярному числу σ , а вектор $u \in \mathbb{R}^m$ — *левым сингулярным вектором*, если u и v являются нетривиальным решением однородной системы уравнений

$$\begin{aligned} Av &= \sigma u, \\ A^T u &= \sigma v. \end{aligned}$$

Заметим, что если v и u — сингулярные векторы матрицы A , соответствующие сингулярному числу σ , то

$$\begin{aligned} A^T Av &= A^T \sigma u = \sigma^2 v, \\ AA^T u &= A \sigma v = \sigma^2 u, \end{aligned}$$

что означает, что правые сингулярные векторы матрицы A являются собственными векторами симметричной матрицы $A^T A$ (при $\lambda = \sigma^2$), а левые — собственными векторами матрицы AA^T .

Обозначим через $u^{(j)}$ — левый сингулярный вектор матрицы A , соответствующий сингулярному числу σ_j ($1 \leq j \leq p$), а через $v^{(j)}$ — соответствующий правый сингулярный вектор. Тогда $\langle u^{(j)}, u^{(i)} \rangle = 0$ и $\langle v^{(j)}, v^{(i)} \rangle = 0$, если $\sigma_i \neq \sigma_j$. Иначе говоря, правые (левые) сингулярные векторы $v^{(j)}$ и $v^{(i)}$ ($u^{(j)}$ и $u^{(i)}$), соответствующие различным сингулярным числам σ_j и σ_i , ортогональны.

Если A — квадратная невырожденная матрица порядка n , то существует ортонормированная система из n правых сингулярных векторов и ортонормированная система из n левых сингулярных векторов.

В случае прямоугольной $m \times n$ -матрицы A ранга r , $r \leq p = \min(m, n)$, введем понятие ядра матрицы как линейного пространства решений уравнения $Ax = 0$. Размерность ядра матрицы A равна $n - r$, а размерность ядра A^T равна $m - r$. Построим ортонормированный базис в ядре матрицы A и назовем $(n - r)$ базисных векторов “нулевыми” правыми сингулярными векторами. Аналогично $(m - r)$ векторов ортонормированного базиса ядра A^T назовем “нулевыми” левыми сингулярными векторами матрицы A . Тогда для каждой прямоугольной $m \times n$ -матрицы существует ортонормированная система из n правых сингулярных векторов (включая “нулевые”) и ортонормированная система из m левых сингулярных векторов (включая “нулевые”).

Заметим, что если $A = U\Sigma V^T$ — сингулярное разложение прямоугольной матрицы A , то из равенства $A^T = V\Sigma^T U^T$ следует

$$AV = U\Sigma, \quad A^T U = V\Sigma^T.$$

Учитывая диагональную структуру матрицы $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$, нетрудно убедиться в том, что столбцы матрицы U являются левыми сингулярными векторами матрицы A , в то время как столбцы матрицы V являются правыми сингулярными векторами.

Определим некоторые числовые характеристики матрицы.

Определение 12.2.20. Фробениусовой нормой $m \times n$ -матрицы A называется число

$$\mathcal{F} = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Фробениусова норма матрицы обладает следующими свойствами:

$$1) \mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(A^T) = \left(\sum_{j=1}^p \sigma_j^2(A) \right)^{1/2}, \text{ где } p = \min(m, n);$$

2) фробениусова норма является ортогональным инвариантом матрицы A , т. е.

$$\mathcal{F}(UAV) = \mathcal{F}(A),$$

где $U \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $V \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ — ортогональные матрицы;

3) справедливо неравенство

$$\|A\| \leq \mathcal{F}(A) = \sqrt{p} \|A\|,$$

где $\|A\|$ совпадает с максимальным сингулярным числом матрицы A .

Норму матрицы A можно также оценить с помощью числовой характеристики

$$\mathcal{M}(A) = \max \left\{ \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \max_j \sum_{i=1}^m |a_{i,j}| \right\},$$

для которой имеет место соотношение

$$\|A\| \leq \mathcal{M}(A) \leq \max(\sqrt{m}, \sqrt{n}) \|A\|.$$

Определение 12.2.21. Числом обусловленности квадратной $n \times n$ -матрицы A называется величина

$$\mu(A) = \sup_{x \neq 0, \xi \neq 0} \left\{ \frac{\|Ax\| \|\xi\|}{\|A\xi\| \|x\|} \right\},$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Если матрица A вырождена, то $\mu(A) = \infty$. В случае невырожденной матрицы A ее число обусловленности выражается через сингулярные числа $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A) > 0$ следующим образом:

$$\mu(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}.$$

Из этого соотношения непосредственно вытекают следующие свойства числа обусловленности невырожденных матриц:

1) $\mu(A) \geq 1$, $\mu(I) = 1$, где I — единичная матрица;

$$2) \mu(\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)) = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |a_i|}{\min_{1 \leq i \leq n} |a_i|};$$

3) $\mu(cA) = \mu(A)$, $c = \text{const}$;

4) $\mu(A^{-1}) = \mu(A)$;

5) $\mu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Рассмотрим систему алгебраических линейных уравнений $Aq = f$ и систему с возмущенной правой частью $A(q + \Delta q) = f + \Delta f$. Здесь Δq — возмущение решения, соответствующее возмущению Δf правой части. Тогда

$$\frac{\|\Delta q\|}{\|q\|} \leq \mu(A) \frac{\|\Delta f\|}{\|f\|}.$$

Это неравенство оценивает относительную погрешность решения через относительную погрешность правой части. По этой причине $\mu(A)$ называется также числом обусловленности системы $Aq = f$.

Рассмотрим теперь систему $(A + \Delta A)(q + \Delta q) = f + \Delta f$, получившуюся из системы $Aq = f$ возмущением Δf правой части и возмущением ΔA матрицы A . Будем считать, что $\det A \neq 0$,

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \leq \alpha, \quad \frac{\|\Delta f\|}{\|f\|} \leq \gamma.$$

Тогда, если $\alpha\mu(A) < 1$, то

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \leq (\alpha + \beta) \frac{\|\mu A\|}{\|1 - \alpha\mu(A)\|}.$$

Как видно из последнего неравенства, чем меньше число обусловленности системы $Aq = f$, тем устойчивее ее решение.

Возмущение определителя $|\det(A + \Delta A) - \det A|$ также можно оценить через число обусловленности $\mu(A)$:

$$\left| \frac{\det(A + \Delta A) - \det A}{\det A} \right| \leq \frac{n\mu(A)\|\Delta A\|/\|A\|}{1 - n\mu(A)\|\Delta A\|/\|A\|}.$$

Доказательство двух последних неравенств можно найти в книге [4].

12.3. Сопряженное пространство и сопряженный оператор

Понятия сопряженного пространства и сопряженного оператора базируются на понятии функционала в топологическом пространстве.

12.3.1. Функционалы

Определение 12.3.1. Функционалом $J(x)$ на множестве D называется отображение $J : D \rightarrow \mathbb{C}$, которое каждому $x \in D$ ставит в соответствие некоторое комплексное число.

Поскольку функционалы являются частным случаем отображений, на них переносятся все результаты раздела 12.2.

Ниже мы будем рассматривать действительнозначные функционалы $J : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 12.3.2. Функционал $J(x)$, определенный на множестве D , называется *ограниченным снизу (сверху)*, если существует постоянная C , такая, что для любого $x \in D$ выполнено неравенство $J(x) \geq C$ ($J(x) \leq C$), т. е. $\inf_{x \in D} J(x) > -\infty$ ($\sup_{x \in D} J(x) < \infty$). Функционал $J(x)$ называется *ограниченным* на множестве D , если он ограничен на D и снизу, и сверху.

Определение 12.3.3. Функционал $J(x)$, определенный на множестве D топологического пространства (T, τ) , называется τ -секвенциально полунепрерывным снизу (сверху) в точке $x \in D$, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D$, сходящейся к точке x в топологии τ , справедливо неравенство $\liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n) \geq J(x)$ ($\limsup_{n \rightarrow \infty} J(x_n) \leq J(x)$).

Функционал $J(x)$ называется τ -секвенциально полунепрерывным снизу (сверху) на множестве $X \subset D$, если он τ -секвенциально полунепрерывен снизу (сверху) в каждой точке этого множества.

Функционал $J(x): T \rightarrow \mathbb{R}$ секвенциально непрерывен в топологии τ (или τ -секвенциально непрерывен) в точке $x \in D$ (на множестве $X \subset D$), если он τ -секвенциально полунепрерывен снизу и сверху в точке x (на множестве X).

Определение 12.3.4. Последовательность элементов $\{x_n\} \subset D$ называется минимизирующей для функционала $J(x)$ на множестве D , если $\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = J^* = \inf_{x \in D} J(x)$.

Следующая теорема является аналогом известной теоремы Вейерштрасса.

Теорема 12.3.1. Предположим, что функционал $J(x)$ определен на множестве D топологического пространства (T, τ) , причем D секвенциально компактно в топологии τ , а $J(x)$ τ -секвенциально полунепрерывен снизу на D . Тогда $J^* = \inf_{x \in D} J(x) > -\infty$ и $X_* = \{x \in D: J(x) = J^*\} \neq \emptyset$.

Множество X_* также секвенциально компактно в топологии τ . Любая минимизирующая последовательность $\{x_n\} \subset D$ для функционала $J(x)$ на D секвенциально компактна и сходится к X_* в топологии τ .

Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к некоторому множеству $X \subset T$ топологического пространства (T, τ) означает, что для любой окрестности $O(X)$ множества X (т. е. для любого множества из семейства τ , содержащего X) существует такой номер $n(O(X))$, что $x_n \in O(X)$ для всех $n \geq n(O(X))$.

Замечание 12.3.1. В топологических пространствах можно определить полунепрерывность снизу и сверху, если перейти от последовательности к направлению. Если топологическое пространство метризуемо, определение 12.3.3 и теорему 12.3.1 можно переформулировать в терминах компактных множеств и полунепрерывных снизу функционалов (см. замечание 12.1.7).

Из теоремы 12.3.1 следует, что непрерывный функционал, отображающий компактное метрическое пространство в \mathbb{R} , ограничен и достигает своих верхней и нижней границ.

Рассмотрим теперь функционал $J: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ в линейном пространстве \mathcal{L} .

Определение 12.3.5. Функционал $J(x)$, определенный на выпуклом множестве D (см. определение 12.1.38) линейного пространства \mathcal{L} , называется *выпуклым*, если для любых $x, y \in D$ и любого числа $\lambda \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$J[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda J(x) + (1 - \lambda)J(y).$$

Если знак равенства в этом соотношении возможен для $x \neq y$ только при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ или при $x = y$, то функционал $J(x)$ называется *строго выпуклым*.

Теорема 12.3.2. Пусть $J(x)$ — строго выпуклый функционал, определенный на выпуклом множестве D линейного пространства \mathcal{L} . Тогда если $J(x_1) = J(x_2) = J^* \equiv \inf_{x \in D} J(x)$ для $x_1, x_2 \in D$, то $x_1 = x_2$.

Свойство выпуклости функционала может быть усилено в банаховом и гильбертовом пространствах.

Определение 12.3.6. Функционал $J: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, определенный на выпуклом множестве $D \subset \mathcal{B}$ банахова пространства \mathcal{B} , называется *строго равномерно выпуклым на D* , если существует числовая функция $\delta(t)$, определенная при $0 \leq t \leq \text{diam } D \equiv \sup_{x, y \in D} \|x - y\|$ и такая, что $\delta(+0) = 0$, $\delta(t)$ монотонно возрастает в области определения и выполняется соотношение

$$J[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda J(x) + (1 - \lambda)J(y) - \lambda(1 - \lambda)\delta(\|x - y\|)$$

для всех $x, y \in D$ и $\lambda \in [0, 1]$.

Функция $\delta(t)$ называется *модулем выпуклости* для J на D .

Строго равномерно выпуклые функционалы являются строго выпуклыми. Строго равномерно выпуклый функционал сохраняет свойство строгой равномерной выпуклости при суммировании с выпуклым функционалом.

Определение 12.3.7. Функционал $J: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, определенный на выпуклом множестве D гильбертова пространства \mathcal{H} , называется *сильно выпуклым*, если существует постоянная $\varkappa > 0$ такая, что

$$J[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda J(x) + (1 - \lambda)J(y) - \lambda(1 - \lambda)\varkappa\|x - y\|^2$$

для любых $x, y \in D$ и любого $\lambda \in [0, 1]$.

Очевидно, сильно выпуклый функционал является строго равномерно выпуклым функционалом с модулем выпуклости $\delta(t) = \varkappa t^2$ ($\varkappa > 0$). Функционал $J(x) = \|x\|^2$ в гильбертовом пространстве является сильно выпуклым с $\varkappa = 1$.

Пусть J — линейный непрерывный функционал, определенный на линейном подпространстве $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$, не обязательно всюду плотном в линейном пространстве \mathcal{L} . Функционал J может быть продолжен на все пространство с сохранением нормы. Соответствующая теорема, известная под названием *принципа продолжения Хана — Банаха* играет важную роль в анализе.

Теорема 12.3.3 (принцип продолжения Хана — Банаха). Пусть на вещественном линейном пространстве \mathcal{L} задана калибровочная функция $p(x)$ (см. определение 12.1.41) и пусть вещественный линейный функционал $J_0(x)$, определенный на линейном подпространстве $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$, удовлетворяет условию

$$J_0(x) \leq p(x), \quad x \in \mathcal{L}'.$$

Тогда существует вещественный линейный функционал $J(x)$, определенный на всем \mathcal{L} и такой, что $J(x) = J_0(x)$ при $x \in \mathcal{L}'$ и $J(x) \leq p(x)$ для всех $x \in \mathcal{L}$.

В случае, когда \mathcal{L} — линейное вещественное нормированное пространство и J_0 — ограниченный функционал на $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$, в качестве калибровочной функции можно взять $p(x) = \|x\|_{\mathcal{L}} \|J_0\|_{\mathcal{L}'}$, $x \in \mathcal{L}$. Тогда справедливо равенство $\|J\|_{\mathcal{L}} = \|J_0\|_{\mathcal{L}'}$, т. е. функционал J_0 продолжается до непрерывного функционала J на \mathcal{L} с сохранением нормы.

Теорема Хана — Банаха верна и для комплексных пространств, хотя и в менее общей форме.

Теорема 12.3.4. Пусть в произвольном линейном пространстве \mathcal{L} задана полуорма $p(x)$ (см. определение 12.1.41). Пусть $J_0(x)$ — линейный функционал, заданный на линейном подпространстве $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$, такой, что

$$|J_0(x)| \leq p(x), \quad x \in \mathcal{L}'.$$

Тогда существует линейный функционал $J(x)$, определенный на всем \mathcal{L} , совпадающий с $J_0(x)$ на \mathcal{L}' и удовлетворяющий на \mathcal{L} условию

$$|J(x)| \leq p(x), \quad x \in \mathcal{L}.$$

Из теоремы Хана — Банаха вытекает ряд следствий для случая, когда \mathcal{L} — локально выпуклое пространство (см. определение 12.1.40).

Следствие 12.3.1. Пусть $J_0(x)$ — линейный непрерывный функционал, определенный на линейном подпространстве $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ локально выпуклого пространства \mathcal{L} . Существует линейный непрерывный функционал $J(x)$ на \mathcal{L} , являющийся распространением функционала $J_0(x)$.

Следствие 12.3.2. Для любой точки x_0 линейного пространства \mathcal{L} и полуормы $p(x)$ существует линейный функционал $J(x)$ на \mathcal{L} , для которого $|J(x)| \leq p(x)$ и $J(x_0) = p(x_0)$.

Следствие 12.3.3. Пусть \mathcal{L} — локально выпуклое пространство. Если $J(x) = 0$ для любого непрерывного линейного функционала J на \mathcal{L} , то $x = 0$.

Замечание 12.3.2. Следствие 12.3.3 устанавливает важнейшее свойство локально выпуклых пространств — наличие достаточного множества непрерывных линейных функционалов. Благодаря этому свойству, теория локально выпуклых пространств значительно богаче результатами, чем теория топологических линейных пространств. Кроме того, почти все конкретные пространства, встречающиеся в функциональном анализе, локально выпуклы.

12.3.2. Сопряженное пространство

Как упоминалось выше (см. определение 12.2.5), совокупность линейных операторов, отображающих одно линейное пространство в другое, образует линейное пространство. В частности, множество всех линейных функционалов на линейном пространстве общего вида образует линейное пространство, которое называют сопряжённым (алгебраическое сопряжение). Мы будем рассматривать пространства, сопряжённые к топологическим линейным пространствам, где к требованию линейности функционалов добавляется их непрерывность (топологическое сопряжение).

Определение 12.3.8. Линейное пространство $(\mathcal{L}, \tau)^*$ всех линейных непрерывных функционалов, заданных на топологическом линейном пространстве (\mathcal{L}, τ) , называется *сопряжённым к (\mathcal{L}, τ) пространством*.

В силу замечания 12.3.2 сопряженное пространство часто рассматривают в предположении, что \mathcal{L} — локально выпуклое пространство (в частности, нормированное — в этом случае, по теореме 12.1.4, \mathcal{L}^* является банаховым пространством). Если \mathcal{L} — локально выпуклое пространство, то \mathcal{L}^* разделяет точки на \mathcal{L} . В случае произвольного топологического линейного пространства \mathcal{L} может оказаться, что $\mathcal{L}^* = \{0\}$ (хотя бывает, что \mathcal{L}^* разделяет точки на \mathcal{L} и в случае, когда \mathcal{L} не является локально выпуклым пространством).

Сопряженное пространство является частным случаем пространства линейных операторов и в нем, в частности, можно ввести равномерную и поточечную сходимости (см. определения 12.2.8, 12.2.9).

Рассмотрим сначала случай, когда исходное пространство нормировано.

Определение 12.3.9. Пусть \mathcal{N} — нормированное пространство, а \mathcal{N}^* — его сопряженное пространство. *Сильной топологией* в пространстве \mathcal{N}^* называется топология, отвечающая введенной в \mathcal{N}^* норме:

$$\|l\|_{\mathcal{N}^*} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{N}} \leq 1} |l(x)|.$$

Иначе, за окрестность нуля в пространстве \mathcal{N}^* принимается совокупность функционалов $\{l\} \subset \mathcal{N}^*$, для которых $|l(x)| < \varepsilon$, когда x принадлежит замкнутому единичному шару $\{x \in \mathcal{N}: \|x\| \leq 1\}$. Выбирая всевозможные ε , получаем базис окрестностей нуля.

Сходимость в сопряженном пространстве, определяемая сильной топологией, совпадает с равномерной сходимостью (см. определение 12.2.8). Часто ее называют также *сильной сходимостью*.

Определение 12.3.10. Пусть \mathcal{N} — нормированное пространство, а \mathcal{N}^* — ему сопряженное. *Слабой топологией* в пространстве \mathcal{N}^* называется топология, определяемая базисом окрестностей нуля пространства \mathcal{N}^* , состоящим из множеств вида

$$\{l \in \mathcal{N}^* : |l(x_i)| < \varepsilon, x_i \in B_n\},$$

где ε — произвольное положительное число, B_n — произвольное конечное множество в \mathcal{N} : $B_n = \{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{N}$, $n < \infty$.

Слабая топология определяет в пространстве \mathcal{N}^* *слабую сходимость*: последовательность функционалов $l_m \in \mathcal{N}^*$ называется *слабо сходящейся* к функционалу $l \in \mathcal{N}^*$ при $m \rightarrow \infty$, если для любого элемента $x \in \mathcal{N}$ выполнено соотношение $l_m(x) \rightarrow l(x)$ при $m \rightarrow \infty$.

Точно так же, как и в пространстве \mathcal{N}^* , в исходном нормированном пространстве \mathcal{N} кроме основной топологии (*сильной топологии*), отвечающей введенной в \mathcal{N} норме, можно указать и другую локально выпуклую топологию.

Определение 12.3.11. *Слабая топология* в нормированном пространстве \mathcal{N} определяется базисом окрестности нуля пространства \mathcal{N} , состоящим из множеств вида

$$\{x \in \mathcal{N} : |l_i(x)| < \varepsilon, l_i \in B_n^*\},$$

где ε — произвольное положительное число, B_n^* — произвольное конечное множество в \mathcal{N}^* : $B_n^* = \{l_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{N}^*$, $n < \infty$.

Слабая топология определяет в пространстве \mathcal{N} слабую сходимость. Последовательность элементов $x_m \in \mathcal{N}$ называется *слабо сходящейся* к элементу $x \in \mathcal{N}$ при $m \rightarrow \infty$, если для любого элемента $l \in \mathcal{N}^*$ выполнено соотношение $l(x_m) \rightarrow l(x)$, $m \rightarrow \infty$.

Отметим, что сильная сходимость последовательности $\{x_n\} \subset \mathcal{N}$ влечет за собой слабую сходимость к тому же пределу. Сильная сходимость последовательности $\{x_n\}$ к элементу $x \in \mathcal{N}$ обозначается в виде $x_n \rightarrow x$, а слабая сходимость — в виде $x_n \rightharpoonup x$.

Если \mathcal{N} — равномерно выпуклое банахово пространство (см. определение 12.1.30), то из $x_n \rightarrow x$ в \mathcal{N} и $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ следует $x_n \rightarrow x$.

В конечномерном пространстве сильная и слабая сходимости совпадают.

Замечание 12.3.3. Определения 12.3.9–12.3.11 остаются справедливыми и в том случае, когда исходное пространство является топологическим линейным пространством (\mathcal{L}, τ) . В этом случае единичный шар в определениях 12.3.9–12.3.11 надо заменить ограниченным множеством в (\mathcal{L}, τ) .

Компактность, ограниченность, замкнутость и другие свойства в пространстве (\mathcal{L}, τ) со слабой топологией носят название слабой компактности, слабой ограниченности, слабой замкнутости и т. д.

Как упоминалось выше, пространство \mathcal{N}^* , сопряженное нормированному пространству \mathcal{N} , является банаховым пространством. Поэтому можно построить пространство \mathcal{N}^{**} , сопряженное к \mathcal{N}^* , и т. д. Пространство \mathcal{N}^{**} называется *вторым сопряженным пространством*.

Всякий элемент $x_0 \in \mathcal{N}$ определяет линейный непрерывный функционал на \mathcal{N}^* : $L_{x_0}(l) = l(x_0)$, где x_0 — фиксированный элемент из \mathcal{N} , а l пробегает все пространство \mathcal{N}^* . Таким образом, мы получили отображение всего пространства \mathcal{N} на некоторое подмножество пространства \mathcal{N}^{**} . Такое отображение пространства \mathcal{N} в \mathcal{N}^{**} называется *естественным отображением*. Это отображение взаимно однозначно, а также изоморфно (т. е. из того, что $x \leftrightarrow L_x$ и $y \leftrightarrow L_y$, следует $x + y \leftrightarrow L_x + L_y$ и $\lambda x \leftrightarrow L_{\lambda x}$, где λ — число) и изометрично (т. е. $\|x\| = \|L_x\|$).

Определение 12.3.12. Если естественное отображение нормированного пространства \mathcal{N} отображает его на все пространство \mathcal{N}^{**} , то пространство \mathcal{N} называется *рефлексивным*. В этом случае пространства \mathcal{N} и \mathcal{N}^{**} можно не различать: $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{**}$.

Каждое равномерно выпуклое банахово пространство рефлексивно.

Пространство \mathcal{B}^* , сопряженное к банахову пространству \mathcal{B} , является полным в смысле слабой сходимости. Другими словами, если последовательность функционалов $\{l_m\} \subset \mathcal{B}^*$ фундаментальна в каждой точке $x \in \mathcal{B}$, то существует линейный функционал $l(x)$ такой, что $l_m(x) \rightarrow l(x)$ для любого $x \in \mathcal{B}$.

Отметим некоторые свойства слабой сходимости.

Последовательность линейных ограниченных функционалов l_m , отображающих банахово пространство \mathcal{B} в \mathbb{R} , слабо сходится к функционалу l тогда и только тогда, когда последовательность $\{\|l_m\|\}$ ограничена и $l_m(x) \rightarrow l(x)$ для любого x из некоторого множества X , линейные комбинации элементов которого лежат всюду плотно в \mathcal{B} .

Последовательность $\{x_m\} \in \mathcal{B}$ слабо сходится к $x \in \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{\|x_m\|\}$ ограничена и $l(x_m) \rightarrow l(x)$ для любого l из некоторого множества L линейных функционалов, линейные комбинации элементов которого лежат всюду плотно в \mathcal{B}^* .

Если линейный ограниченный оператор A отображает одно нормированное пространство \mathcal{N}_1 в другое \mathcal{N}_2 и последовательность $\{x_m\} \subset \mathcal{N}_1$

слабо сходится к $x \in \mathcal{N}_1$, то последовательность $\{Ax_m\} \subset \mathcal{N}_2$ слабо сходится к $Ax \in \mathcal{N}_2$.

Слабо сходящаяся последовательность $\{x_m\}$ элементов нормированного пространства \mathcal{N} ограничена, т. е. нормы элементов этой последовательности ограничены в совокупности.

Для банахова пространства \mathcal{B} справедлив аналог теоремы 12.3.1.

Теорема 12.3.5. Пусть D — (слабо) компактное множество банахова пространства \mathcal{B} , а функционал $J(x)$ определен на D и полунепрерывен на D снизу (см. определение 12.3.3 и замечание 12.3.1). Тогда $J^* = \inf_{x \in D} J(x) > -\infty$ и множество $X_* = \{x \in D: J(x) = J^*\}$ не пусто и (слабо) компактно. Любая минимизирующая последовательность для функционала J на D (слабо) сходится к X_* .

Для проверки слабой компактности множеств оказываются полезными следующие утверждения:

- всякое ограниченное слабо замкнутое множество рефлексивного банахова пространства слабо компактно;
- выпуклое замкнутое множество банахова пространства слабо замкнуто;
- для выпуклых функционалов имеется также критерий слабой полунепрерывности.

Теорема 12.3.6. Пусть D — выпуклое множество банахова пространства. Выпуклый на D функционал $J(x)$ слабо полунепрерывен снизу на D тогда и только тогда, когда $J(x)$ полунепрерывен снизу на D .

Заметим, что функционал $J(x) = \|x\|^\gamma$ ($\gamma \geq 1$) слабо полунепрерывен снизу на банаховом пространстве \mathcal{B} .

Всякий шар в пространстве \mathcal{N}^* , сопряженном к сепарабельному нормированному пространству \mathcal{N} , слабо компактен.

Теорема 12.3.7. Если D — выпуклое замкнутое множество рефлексивного банахова пространства, а функционал $J(x)$ определен и строго равномерно выпуклый на D (см. определение 12.3.6), то множество $X_* = \{x \in D: J(x) = J^* = \inf_{x \in D} J(x)\}$ не пусто и состоит из единственной точки $x^* \in D$, к которой сходится всякая минимизирующая для J на D последовательность.

Рассмотрим теперь линейные непрерывные функционалы, определенные на гильбертовом пространстве \mathcal{H}

Теорема 12.3.8 (теорема Ф. Рисса). *Всякий линейный непрерывный функционал $l(x)$, определенный на гильбертовом пространстве \mathcal{H} , представим в виде $l(x) = \langle l, x \rangle$, где элемент $l \in \mathcal{H}$ однозначно определяется функционалом $l(x)$. При этом $\|l(x)\| = \|l\|_{\mathcal{H}}$.*

Из теоремы Рисса следует, что слабая сходимость последовательности $\{x_m\} \subset \mathcal{H}$ ($x_m \rightarrow x \in \mathcal{H}$) эквивалентна сходимости скалярных произведений $\langle x_m, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ при $m \rightarrow \infty$ для любого $y \in \mathcal{H}$. Слабая сходимость в гильбертовых пространствах уже была рассмотрена в подразделе 12.1.2. Из теоремы 12.3.8 вытекает также, что сопряженное пространство \mathcal{H}^* можно отождествить с \mathcal{H} : $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$. Гильбертово пространство заведомо рефлексивно.

Примеры сопряженных пространств

1. Сопряженным к евклидову пространству \mathbb{E} является само пространство \mathbb{E} : $\mathbb{E}^* = \mathbb{E}$.

2. Рассмотрим пространство l_1 числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$. Сопряженным к нему будет пространство $l_1^* = l_{\infty}$ ограниченных числовых последовательностей (ξ_1, ξ_2, \dots) , т. е. таких, что $\sup_{1 \leq i < \infty} |\xi_i| < \infty$. Пространство l_{∞} (как и l_1) не рефлексивно.

3. Сопряженным к пространству l_p ($\infty > p > 1$) (см. подраздел 12.1.5) является пространство l_q , такое, что $1/p + 1/q = 1$, $\infty > p, q > 1$. Следовательно, пространство l_p рефлексивно: $l_p^{**} = l_p$. Пространство l_2 является самосопряженным: $l_2^* = l_2$. Аналогичный результат справедлив для функционального пространства L_p : $L_p^* = L_q$, $1/p + 1/q = 1$, $\infty > p, q > 1$, $L_2^* = L_2$ (см. замечание 12.5.1).

12.3.3. Сопряженный оператор

Определение 12.3.13. Пусть A — линейный ограниченный оператор, отображающий гильбертово пространство \mathcal{H}_1 в гильбертово пространство \mathcal{H}_2 . Оператор $A^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ называется *сопряженным* к оператору A , если для всех $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ выполнено равенство

$$\langle y, Ax \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle A^*y, x \rangle_{\mathcal{H}_1}. \quad (12.3.1)$$

Замечание 12.3.4. Если линейный непрерывный оператор A определен не на всем пространстве \mathcal{H}_1 , то у него может быть много сопряженных операторов. Точнее, ограниченный оператор A имеет единственный сопряженный тогда и только тогда, когда его область определения D_A всюду плотна в пространстве \mathcal{H}_1 . Поскольку непрерывный оператор A можно продолжить с сохранением непрерывности на все пространство \mathcal{H}_1 , обычно считают, что линейный оператор A определен и непрерывен на всем пространстве \mathcal{H}_1 .

Если линейный оператор A непрерывен, то A^* также непрерывен, причем $\|A^*\| = \|A\|$.

Отметим некоторые свойства сопряженных операторов:

- 1) $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$;
- 2) $(A^*)^* = A$;
- 3) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$;
- 4) $(AB)^* = B^*A^*$.

Теорема 12.3.9. Если A — ограниченный линейный оператор, определенный всюду в \mathcal{H} , и если A^*A вполне непрерывен, то и оператор A вполне непрерывен.

Из теоремы 12.3.9 следует, что если A — вполне непрерывный оператор, то тем же свойством обладает A^* .

Будем говорить, что последовательность операторов $\{A_m\}$ в гильбертовом пространстве \mathcal{H} ($A_m : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$) слабо сходится к оператору $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, если для любых $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle A_m x, y \rangle \rightarrow \langle Ax, y \rangle.$$

Очевидно, что если $\{A_m\}$ слабо сходится к A , то и $\{A_m^*\}$ слабо сходится к A^* при $m \rightarrow \infty$.

Из поточечной сходимости $A_m \rightarrow A$ не следует, вообще говоря, поточечная сходимость $A_m^* \rightarrow A^*$ при $m \rightarrow \infty$.

Приведем пример сопряженного оператора.

Пусть оператор $A : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$ задан формулой

$$Ax = \int_a^b K(t, \tau)x(\tau) d\tau.$$

Сопряженный оператор A^* определяется из условия $\langle Ax, y \rangle_{L_2} = \langle x, A^*y \rangle_{L_2}$ для любых $x, y \in L_2[a, b]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle_{L_2} &= \int_a^b y(t) \int_a^b K(t, \tau)x(\tau) d\tau dt \\ &= \int_a^b x(\tau) \int_a^b K(t, \tau)y(t) dt d\tau \\ &= \int_a^b x(t) \int_a^b K^*(t, \tau)y(\tau) d\tau dt = \langle x, y^* \rangle_{L_2}, \end{aligned}$$

где $y^* = A^*y = \int_a^b K^*(t, \tau)y(\tau) dt$, $K^*(t, \tau) = K(\tau, t)$.

В евклидовом пространстве, где линейные ограниченные операторы имеют матричную структуру $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, сопряженным операторам в ортонормированном базисе отвечают сопряженные матрицы $A^* = [a_{ij}^*]_{n \times m}$, ($a_{ji}^* = \bar{a}_{ij}$). Если A — вещественная матрица, то $A^* = A^T$.

Определение 12.3.14. Оператор $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, совпадающий со своим сопряжением, называется *самосопряженным*.

Оператор проектирования P на подпространство \mathcal{H}_0 гильбертова пространства \mathcal{H} является самосопряженным: $P = P^*$.

В вещественном евклидовом пространстве симметричная матрица соответствует самосопряженному оператору.

Отметим некоторые свойства самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Пусть $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — самосопряженный оператор. Тогда

- 1) при любом $x \in \mathcal{H}$ выражение $\langle Ax, x \rangle$ вещественное;
- 2) имеет место соотношение

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|;$$

- 3) собственные значения оператора A вещественны;
- 4) собственные подпространства \mathcal{H}_{λ_1} и \mathcal{H}_{λ_2} , отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 оператора A , ортогональны;
- 5) компактный самосопряженный оператор имеет по крайней мере одно собственное значение.

Теорема 12.3.10. Множество собственных значений компактного самосопряженного оператора A не более чем счетно. При этом

$$A = \sum_i \lambda_i P_{\lambda_i},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — различные собственные значения оператора A , P_{λ_i} — оператор проектирования на собственное подпространство \mathcal{H}_{λ_i} (сходимость ряда понимается по норме в пространстве операторов).

Понятие сопряженного оператора используется при анализе разрешимости уравнения $Ax = y$, где $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ — линейный непрерывный оператор из \mathcal{H}_1 в \mathcal{H}_2 .

Определение 12.3.15. Множество $\text{Ker}(A) = \{x \in \mathcal{H}_1 : Ax = 0\}$ называется *ядром* линейного оператора $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$.

Если A ограничен, то $\text{Ker}(A)$ является подпространством пространства \mathcal{H}_1 .

Теорема 12.3.11. Если $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ — линейный непрерывный оператор, то $\mathcal{H}_1 = \text{Ker}(A) \oplus \overline{R_A^*}$, $\mathcal{H}_2 = \text{Ker}(A^*) \oplus \overline{R_A}$.

Из теоремы 12.3.11 следует, что необходимым условием разрешимости уравнения $Ax = y$ с линейным непрерывным оператором A является ортогональность элемента y ядру $\text{Ker}(A^*)$ оператора A^* . Если $R_A = \overline{R_A}$, то это условие является также и достаточным. Если $\text{Ker}(A) = \{0\}$ и $R_A = \overline{R_A}$, то линейный непрерывный оператор A

осуществляет взаимно однозначное отображение пространства \mathcal{H}_1 на подпространство $R_A \subset \mathcal{H}_2$ и по теореме Банаха об обратном операторе существует непрерывный обратный оператор $A^{-1} : R_A \rightarrow \mathcal{H}_1$. Таким образом, для непрерывных линейных операторов, не имеющих ограниченного обратного, в частности, для вполне непрерывных операторов, область их значений не замкнута: $R_A \neq \overline{R_A}$.

Теорема 12.3.12. Пусть $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ — непрерывный линейный оператор. Для того чтобы существовал непрерывный обратный оператор A^{-1} , необходимо и достаточно, чтобы существовал непрерывный обратный оператор $(A^*)^{-1}$. При этом

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Рассмотрим в качестве примера интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \int_a^b K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau + f(t),$$

где f и K — заданные функции, φ — искомая функция. Это уравнение можно записать в виде

$$\varphi = K\varphi + f, \quad (12.3.2)$$

где K — интегральный оператор. Относительно разрешимости таких уравнений с произвольным вполне непрерывным оператором K , заданном в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , была доказана важная теорема, известная под названием *альтернативы Фредгольма*.

Положив $A = I - K$, где I — единичный оператор, перепишем уравнение (12.3.2) в виде

$$Ax = y, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Теорема 12.3.13 (альтернатива Фредгольма). Справедливы следующие утверждения:

а) неоднородное уравнение $Ax = y$ разрешимо только для тех векторов $y \in \mathcal{H}$, которые ортогональны всем решениям сопряженного однородного уравнения $A^*y = 0$, $A^* = I - K^*$;

б) неоднородное уравнение $Ax = y$ однозначно разрешимо при любом $y \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда однородное уравнение $Ax = 0$ имеет только нулевое решение;

в) однородные уравнения $Ax = 0$ и $A^*y = 0$ имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

В заключение этого раздела следует отметить, что определение 12.3.13 сопряженного оператора A^* было дано для случая, когда оператор A отображает гильбертово пространство \mathcal{H}_1 в гильбертово пространство \mathcal{H}_2 . Однако сопряженный оператор можно определить и для более общих пространств. Пусть заданы, например, два нормированных пространства \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 и оператор $A : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$. Пусть

$l_2(y)$ — линейный функционал на \mathcal{N}_2 . Если $y = Ax$, $x \in \mathcal{N}_1$, $y \in \mathcal{N}_2$, то $l_2(y) = l_2(Ax) = l_1(x)$, где l_1 — функционал (очевидно, линейный) на \mathcal{N}_1 . Таким образом, каждому $l_2 \in \mathcal{N}_2^*$ ставится в соответствие функционал $l_1 \in \mathcal{N}_1^*$, т. е. построен оператор $A^* : \mathcal{N}_2^* \rightarrow \mathcal{N}_1^*$. Этот оператор называется *сопряженным* к оператору A , равенство $l_2(y) = l_1(x)$ записывается в виде $l_1 = A^*l_2$. Функционалы в нормированных (или линейных) пространствах часто записывают в виде, аналогичном виду функционала в гильбертовом пространстве: $l_1(x) = \langle l_1, x \rangle = \langle x, l_1 \rangle$, $x \in \mathcal{N}_1$, $l_1 \in \mathcal{N}_1^*$. Функцию $\langle \cdot, \cdot \rangle$, так определенную на $\mathcal{N}^* \times \mathcal{N}$, называют *скалярным произведением между \mathcal{N}^* и \mathcal{N}* . В частности, элементы x и l_1 называются *ортгоналными* (в нормированном пространстве!), если $l_1(x) = \langle l_1, x \rangle = \langle x, l_1 \rangle = 0$. В этой форме равенство $l_2(y) = l_1(x)$ приобретает вид, аналогичный (12.3.1):

$$l_2(y) = \langle y, l_2 \rangle = \langle Ax, l_2 \rangle = l_1(x) = \langle x, l_1 \rangle = \langle x, A^*l_2 \rangle.$$

В случае банаховых пространств все свойства сопряженного оператора, справедливые для гильбертова пространства, сохраняются.

12.4. Элементы дифференциального исчисления в банаховых пространствах

Пусть $A : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ — оператор, действующий из одного банахова пространства \mathcal{B}_1 в другое \mathcal{B}_2 , с открытой областью определения D_A . Возьмем фиксированный элемент $x_0 \in D_A$ и предположим, что существует такой непрерывный линейный оператор $U \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, что при любом $x \in \mathcal{B}_1$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(x_0 + tx) - A(x_0)}{t} = U(x). \quad (12.4.1)$$

В этом случае говорят, что линейный оператор U является *производной* оператора A в точке x_0 и обозначают

$$U = A'(x_0).$$

Часто так определенную производную называют *производной Гато*, или *слабой производной*, а элемент $U(x)$ — *дифференциалом Гато*.

Обозначим через $S(\mathbf{0}, 1)$ множество всех $x \in \mathcal{B}_1$ с $\|x\| = 1$. Если предельное соотношение (12.4.1) выполняется равномерно относительно $x \in S(\mathbf{0}, 1)$, то говорят, что оператор A *дифференцируем* в точке x_0 , а производную $A'(x_0)$ называют в этом случае *производной Фреше* или *сильной производной*. Сильную производную принято обозначать A'_{x_0} .

Дифференцируемость оператора A в точке x_0 означает, иначе говоря, что существует такой линейный оператор $A'_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, что при любом $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $\|\Delta x\| < \delta$ ($\Delta x \in \mathcal{B}_1$) следует

$$\|A(x_0 + \Delta x) - A(x_0) - A'_{x_0}(\Delta x)\| \leq \varepsilon \|\Delta x\|.$$

Укажем некоторые свойства производной.

1) Если оператор A дифференцируем в точке x_0 , то его производная A'_{x_0} определяется единственным образом.

2) Если оператор A дифференцируем в точке x_0 , то он непрерывен в этой точке (одного предположения о наличии слабой производной недостаточно).

3) Пусть $C = \alpha A + \beta B$. Тогда, если существуют производные $A'(x_0)$ и $B'(x_0)$, то существует и

$$C'(x_0) = \alpha A'(x_0) + \beta B'(x_0).$$

При этом, если A и B дифференцируемы (по Фреше) в точке x_0 , то будет дифференцируемым и оператор C .

4) Если $A \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, т. е. A — линейный непрерывный оператор, то A дифференцируем в каждой точке $x_0 \in \mathcal{B}_1$ и $A'_{x_0} = A$.

5) Пусть A — оператор, переводящий открытое множество $D_A \subset \mathcal{B}_1$ в открытое множество $R_A \subset \mathcal{B}_2$, а B — оператор, отображающий множество $D_B = R_A \subset \mathcal{B}_2$ в некоторое банахово пространство \mathcal{B}_3 . Положим $C = BA$, и пусть B дифференцируем в точке $y_0 = Ax_0$, $x_0 \in D_A$, а A имеет производную в точке x_0 . Тогда оператор C имеет производную в точке x_0 и

$$C'(x_0) = B'(A(x_0))A'(x_0) = B'(y_0)A'(x_0).$$

Если A дифференцируем в точке x_0 , то C также дифференцируем: $C'_{x_0} = B'_{y_0} A'_{x_0}$, где $y_0 = Ax_0$.

6) Если в условиях предположения п. 5 оператор B непрерывен и линеен, то

$$C'(x_0) = BA'(x_0).$$

Говорят, что оператор A дифференцируем на множестве $X \subset D_A$, если он дифференцируем в каждой точке этого множества.

Пусть в открытом множестве $D_A \subset \mathcal{B}_1$ банахова пространства \mathcal{B}_1 существует производная A' оператора A , отображающего D_A в банахово пространство \mathcal{B}_2 . Производную A' можно рассматривать как оператор, отображающий D_A в пространство $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Поэтому имеет смысл говорить о производной этого оператора в точке $x_0 \in D_A$, которую, если она существует, называют *второй производной* оператора A и обозначают $A''(x_0)$. Если оператор A' дифференцируем, то говорят, что A *дважды дифференцируем*. Аналогично определяется третья производная и т. д.

Рассмотрим теперь случай, когда оператор A действует из банахова пространства \mathcal{B} в множество действительных чисел \mathbb{R} , т. е. является функционалом.

Пусть $J : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал, определенный на открытом множестве $D \subset \mathcal{B}$. Дифференцируемость функционала $J(x)$ в точке $x_0 \in D$

означает, что существует элемент $J'_{x_0} \in \mathcal{B}^*$, такой, что для любого Δx ($\Delta x \in \mathcal{B}$, $x + \Delta x \in D$) справедливо равенство

$$J(x_0 + \Delta x) - J(x_0) = J'_{x_0}(\Delta x) + o(\Delta x), \quad (12.4.2)$$

где $o(\Delta x)/\|\Delta x\| \rightarrow 0$ при $\|\Delta x\| \rightarrow 0$.

Функционал $J(x)$ называется *непрерывно дифференцируемым* на множестве D , если он дифференцируем на D и $\|J'(x + \Delta x) - J'(x)\|_{\mathcal{B}^*} \rightarrow 0$ при $\|\Delta x\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ для всех $x, x + \Delta x \in D$.

Примером непрерывно дифференцируемого функционала является функционал $J(x) = \|x\|_{\mathcal{H}}^2$, определенный на гильбертовом пространстве \mathcal{H} : $J'_x = 2x$.

Введенное понятие дифференцируемости позволяет сформулировать критерий выпуклости функционалов

Теорема 12.4.1. Если D — выпуклое множество банахова пространства \mathcal{B} , а $J(x)$ — непрерывно дифференцируемый на D функционал, то для выпуклости его на D необходимо и достаточно, чтобы для любых $x, y \in D$ выполнялось одно из следующих неравенств:

$$J(x) \geq J(y) + J'_y(x - y), \quad (J'_x - J'_y)(x - y) \geq 0.$$

Следующая теорема формулирует необходимые и достаточные условия минимума дифференцируемого функционала на выпуклом множестве.

Теорема 12.4.2. Пусть D — выпуклое множество банахова пространства \mathcal{B} , а $J(x)$ — непрерывно дифференцируемый на D функционал. Для того чтобы функционал $J(x)$ достигал минимума в точке $x^* \in D$, т. е. $J(x^*) = \inf_{x \in D} J(x) \equiv J^*$, необходимо выполнение неравенства

$$J'_{x^*}(x - x^*) \geq 0 \quad (12.4.3)$$

для всех $x \in D$. Если x^* — внутренняя точка D , то условие (12.4.3) эквивалентно равенству $J'_{x^*} = 0$. Если функционал $J(x)$, кроме того, выпуклый на D , то условие (12.4.3) является также и достаточным.

Пусть $J(x) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Если $J(x)$ дифференцируем в точке $x \in \mathcal{H}$, то его производная J'_x является линейным непрерывным функционалом. По теореме Рисса существует единственный элемент $y \in \mathcal{H}$, такой, что $J'_x(\Delta x) = \langle y, \Delta x \rangle$ для любых $\Delta x \in \mathcal{H}$. Такой элемент называется *градиентом* функционала $J(x)$ в точке x и обозначается J'_x .

Градиент определяет направление наискорейшего возрастания функционала.

Рассмотрим в качестве примера функционал

$$J(x) = \frac{1}{2} \|Ax - y\|^2,$$

где $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ — дифференцируемый в точке $x \in D_A$ оператор, \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 — гильбертовы пространства, $y \in \mathcal{H}_2$ — некоторая фиксированная точка. Найдем формулу для градиента $J'x$ в точке x . Преобразуем разность

$$\begin{aligned} J(x + \Delta x) - J(x) &= \frac{1}{2} \|A(x + \Delta x) - y\|^2 - \frac{1}{2} \|Ax - y\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|Ax - y + A'_x(\Delta x) + o(\Delta x)\|^2 - \frac{1}{2} \|Ax - y\|^2 \\ &= \langle Ax - y, A'_x(\Delta x) \rangle + \frac{1}{2} \|A'_x(\Delta x) + o(\Delta x)\|^2 + \langle Ax - y, o(\Delta x) \rangle \\ &= \langle A_x^*(Ax - y), \Delta x \rangle + o(\Delta x). \end{aligned}$$

Следовательно, $J'x = A_x^*(Ax - y)$. Если $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ — линейный непрерывный оператор, то $J'x = A^*(Ax - y)$.

12.5. Функциональные пространства

В подразделе 12.1.5 были приведены примеры функциональных пространств: пространства непрерывно дифференцируемых функций $C^m[a, b]$, пространства интегрируемых функций $L_p[a, b]$ и пространства Соболева $H^k(G) = W_2^k(G)$. В этом разделе пространства C^m и L_p будут рассмотрены для вектор-функций $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (пространства $C^m(G)$ и $L_p(G)$), а также для функций, отображающих интервал $S \subset \mathbb{R}$ в произвольное банахово пространство X (пространства $C^m(S; X)$ и $L_p(S; X)$). В подразделе 12.5.1 будут определены пространства Соболева $W_p^k(G)$ и сформулирована теорема вложения Соболева в случае, когда область $G \subset \mathbb{R}^n$ имеет регулярную границу.

12.5.1. Функциональные пространства, используемые при рассмотрении стационарных краевых задач

Пусть \mathbb{R}^n — n -мерное евклидово пространство и $G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество.

Пространства непрерывно дифференцируемых функций.

Определение 12.5.1. Через $C^m(\overline{G})$ обозначается множество функций $u(x)$, определенных на замыкании \overline{G} открытого множества G и обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x)$ является m раз непрерывно дифференцируемой на G ;

2) каждую частную производную $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ порядка $|\alpha| =$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq m$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс из неотрицательных целых чисел, можно продолжить до непрерывной функции на \overline{G} .

Если \bar{G} компактно, то $C^m(\bar{G})$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|u\|_{C^m(\bar{G})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \bar{G}} |D^\alpha u(x)|. \quad (12.5.1)$$

Сходимость последовательности $\{u_k\} \subset C^m(\bar{G})$ по норме (12.5.1) означает равномерную сходимость всех производных порядка $\leq m$ на компакте \bar{G} .

Множество $C^0(\bar{G})$ непрерывных функций на \bar{G} обычно обозначают $C(\bar{G})$.

Определение 12.5.2. Через $C_0^m(G)$ обозначается множество всех определенных и m раз непрерывно дифференцируемых на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ функций с компактными (в G) носителями. *Носителем* непрерывной на G функции $u(x)$ называется множество

$$\text{supp } u = \overline{\{x : u(x) \neq 0\}} \cap G.$$

В соответствии с определением 12.5.2 $C_0^\infty(G)$ обозначает множество бесконечно дифференцируемых на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ функций с компактными (в G) носителями.

На множестве $C_0^\infty(G)$ можно ввести локально выпуклую топологию с помощью системы полуноrm (см. определение 12.1.41)

$$\rho_\alpha(u) = \sum_{\alpha} \sup | \rho_\alpha(x) D^\alpha u(x) |, \quad u \in C_0^\infty(G). \quad (12.5.2)$$

Здесь $\rho = \{\rho_\alpha\}$ пробегает все семейства непрерывных функций на G с локально конечными семействами носителей. Семейство носителей $\{\text{supp } \rho_\alpha\}$ непрерывных на G функций ρ_α называется *локально конечным* в G , если каждое компактное множество в G имеет непустые пересечения лишь с конечным числом множеств семейства.

Заметим, что суммирование в (12.5.2) при каждом фиксированном $u \in C_0^\infty(G)$ распространяется вследствие локальной конечности семейства $\{\text{supp } \rho_\alpha\}$ только на конечное число мультииндексов α .

Определение 12.5.3. Через $\mathcal{D}(G)$ обозначается локально выпуклое пространство $C_0^\infty(G)$ с порождающей системой полуноrm (12.5.2).

Лемма 12.5.1. Последовательность $\{u_k\} \subset \mathcal{D}(G)$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда в G существует компактное множество K , такое, что

1) $\text{supp } u_k \subset K$ для $k = 1, 2, \dots$;

2) последовательность $\{D^\alpha u_k\}$ равномерно сходится в K к нулю для каждого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Пространства интегрируемых функций. Прежде чем определить пространство интегрируемых функций, напомним некоторые понятия из теории меры Лебега в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n .

Мерой n -мерного замкнутого интервала $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\text{mes}(S) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Так как всякое открытое множество $O \subset \mathbb{R}^n$ представимо в виде не более чем счетного объединения замкнутых интервалов S_j без общих внутренних точек

$$O = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j,$$

то мера открытого множества O определяется как сумма мер этих интервалов:

$$\text{mes}(O) = \sum_{j=1}^{\infty} \text{mes}(S_j).$$

Так определенная мера (возможно, равная $+\infty$) не зависит от способа представления множества O в виде объединения замкнутых интервалов без общих внутренних точек.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество. *Внешней мерой* множества G называется число

$$\overline{\text{mes}}(G) = \inf_{O \supset G} \text{mes}(O),$$

причем нижняя грань берется по всем открытым множествам O , содержащим G . Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым*, если

$$\inf_{O \supset G} \overline{\text{mes}}(O \setminus G) = 0.$$

В этом случае полагают $\text{mes}(G) = \overline{\text{mes}}(G)$.

Вещественная функция $u(x)$, определенная на измеримом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, называется *измеримой*, если для каждого $a \in \mathbb{R}$ измеримо множество $\{x \in G : u(x) > a\}$.

Любая непрерывная на открытом или замкнутом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ функция измерима.

Функция $u(x)$, определенная на измеримом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, называется *простой*, если она на некотором конечном числе попарно непесекающихся измеримых множеств G_j , $j = 1, \dots, k$, с $\text{mes}(G_j) < \infty$ принимает постоянные значения c_j , а на множестве $G \setminus \bigcup_{j=1}^k G_j$ равна нулю. *Интегралом* от простой функции $u(x)$ по множеству G называется число

$$\int_G u(x) dx = \sum_{j=1}^k c_j \text{mes}(G_j).$$

Принято говорить, что некоторое условие выполняется *почти всюду* на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ (или для *почти всех* его точек), если множество точек, где это условие не выполняется, имеет нулевую меру.

Функция $u(x)$, определенная почти всюду на измеримом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, называется *интегрируемой (по Лебегу)* по множеству (или на множестве) G , если существует последовательность $\{u_i(x)\}$ простых функций, которая сходится к $u(x)$ почти всюду на G и для которой последовательность $\left\{ \int_G u_i(x) dx \right\}$ сходится. Предел этой последовательности называют *интегралом (Лебега)* от функции $u(x)$ по G :

$$\int_G u(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_G u_i(x) dx.$$

Две функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, определенные на G , называются *эквивалентными*, если $u_1(x) = u_2(x)$ для почти всех $x \in G$. Если функция $u_1(x)$ интегрируема по G , то интегрируема по G и любая ей эквивалентная функция $u_2(x)$ и их интегралы совпадают. Поэтому мы не будем различать функции, эквивалентные между собой на G . Будем также полагать в дальнейшем, что G — некоторое измеримое множество в \mathbb{R}^n .

Лемма 12.5.2 (лемма Фату). Пусть $\{u_i\}$ — последовательность неотрицательных интегрируемых на G функций, таких, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_G u_i(x) dx < \infty.$$

Тогда функция $u(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x)$ интегрируема по G , причем

$$\int_G u(x) dx \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \int_G u_i(x) dx.$$

Теорема 12.5.1 (теорема Лебега). Пусть $\{u_i\}$ — последовательность интегрируемых функций на G , почти всюду на G сходящаяся к функции u . Если существует интегрируемая на G функция v , такая, что $|u_i(x)| \leq v(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) почти всюду на G , то функция u также интегрируема на G и

$$\int_G u(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_G u_i(x) dx.$$

Определение 12.5.4. Через $L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$, обозначается множество всех измеримых функций $u : G \rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$\int_G |u(x)|^p dx < \infty.$$

Множество $L_p(G)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|u\|_{L_p(G)} = \left(\int_G |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Заметим, что если $u(x)$ и $v(x)$ — функции, совпадающие почти всюду на множестве G , то $\|u - v\|_{L_p(G)} = 0$. Следовательно, в пространстве $L_p(G)$ функции, совпадающие почти всюду, отождествляются.

Пространство $L_2(G)$ (при $p = 2$) является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = \int_G u(x)v(x) dx.$$

Определение 12.5.5. Через $L_{p,r}(G)$, $1 \leq p < \infty$, обозначается множество всех вектор-функций $u = \{u_1, \dots, u_r\}$ с $u_i \in L_p(G)$ ($i = 1, \dots, r$).

Множество $L_{p,r}(G)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|u\|_{L_{p,r}(G)} = \left(\int_G \left(\sum_{i=1}^r |u_i(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}.$$

Пространство $L_{2,r}(G)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = \int_G \sum_{i=1}^r u_i(x)v_i(x) dx.$$

Определение 12.5.6. Измеримая функция $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ называется *существенно ограниченной* на G , если она эквивалентна некоторой ограниченной функции, т. е. если существует такая постоянная M , что $|u(x)| \leq M$ при почти всех $x \in G$. Нижнюю грань всех допустимых постоянных M обозначают через $\text{vrai max}_{x \in G} |u(x)|$. Множество всех (классов, эквивалентных друг другу) измеримых существенно ограниченных функций обозначается через $L^\infty(G)$.

Множество $L^\infty(G)$ есть банахово пространство относительно нормы

$$\|u\|_{L^\infty(G)} = \text{vrai max}_{x \in G} |u(x)|.$$

Показатели p и q ($1 < p < \infty$) называются *сопряженными*, если $1/p + 1/q = 1$. Показателем, сопряженным к $p = 1$ ($p = \infty$), по определению считается $q = \infty$ ($q = 1$).

Лемма 12.5.3 (неравенство Гельдера). Если p и q — сопряженные показатели, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L_p(G)$, $v \in L_q(G)$, то $uv \in L_1(G)$ и

$$\left| \int_G u(x)v(x) dx \right| \leq \|u\|_{L_p(G)} \|v\|_{L_q(G)}.$$

При $1 < p < \infty$ банаховы пространства $L_p(G)$ и $L_{p,r}(G)$ равномерно выпуклы (см. определение 12.1.30) и, следовательно, рефлексивны. Пространства $L_1(G)$ и $L_\infty(G)$ не рефлексивны.

При $1 \leq p < \infty$ банаховы пространства $L_p(G)$ сепарабельны.

Для того чтобы охарактеризовать слабую сходимость в пространстве $L_p(G)$, рассмотрим сопряженное к $L_p(G)$ пространство. Для линейных функционалов из пространства $(L_p(G))^*$, сопряженного к $L_p(G)$ ($1 \leq p < \infty$), справедливо следующее утверждение.

Лемма 12.5.4. Если $\varphi \in (L_p(G))^*$, $1 \leq p < \infty$, то существует точно один элемент $v \in L_q(G)$ (где q — сопряженный с p показатель), такой, что

$$\varphi(u) = \langle \varphi, u \rangle = \int_G u(x)v(x) dx \quad \forall u \in L_p(G).$$

Замечание 12.5.1. В силу неравенства Гельдера каждый элемент $v \in L_q(G)$ порождает некоторый непрерывный линейный функционал на $L_p(G)$. Поэтому линейные функционалы $\varphi \in (L_p(G))^*$, $1 \leq p < \infty$, можно отождествить с однозначно соответствующим им согласно лемме 12.5.4 “порождающим” элементом $v \in L_q(G)$. Следовательно, сопряженным к банахову пространству $L_p(G)$ служит пространство $L_q(G)$. При $p = 2$ мы получаем в точности теорему Рисса о представлении линейных функционалов (см. теорему 12.3.8) для случая гильбертова пространства $L_2(G)$.

В силу леммы 12.5.4 слабая сходимость последовательности $\{u_k\} \subset L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$, к элементу $u \in L_p(G)$ означает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_G u_k(x)v(x) dx = \int_G u(x)v(x) dx \quad \forall v \in L_q(G).$$

Поскольку пространства $L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, являются банаховыми, то они слабо полные, т. е. полные относительно слабой сходимости.

Из каждой сходящейся в $L_p(G)$ ($1 \leq p \leq \infty$) последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на G .

Лемма 12.5.5. Пусть $1 \leq p < \infty$ и последовательность $\{u_k\} \subset L_p(G)$ такова, что $u_k \rightarrow u$ в $L_p(G)$ и $u_k(x) \rightarrow v(x)$ для почти всех $x \in G$. Тогда $u = v$.

Лемма 12.5.6. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ открыто и $1 \leq p < \infty$. Тогда подмножество $C_0^\infty(G)$ пространства $L_p(G)$ всюду плотно.

Пространства Соболева. Прежде чем дать определение пространства Соболева, введем понятие обобщенной функции (распределения).

Определение 12.5.7. Распределениями (обобщенными функциями) на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ называются элементы сопряженного к $\mathcal{D}(G)$ (см. определение 12.5.3) пространства $\mathcal{D}^*(G)$. Пространство $\mathcal{D}(G)$ называется *пространством основных функций*.

Пространство $\mathcal{D}^*(G)$ становится локально выпуклым, если задать базис окрестностей распределения $\varphi \in \mathcal{D}^*(G)$ с помощью множеств

$$\{f \in \mathcal{D}^*(G) : |f(u_i) - \varphi(u_i)| < \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m\}, \quad (12.5.3)$$

где $\{u_1, \dots, u_m\}$ — произвольная (конечная) система элементов из $\mathcal{D}(G)$, ε_i ($1 \leq i \leq m$) — произвольные положительные числа. Сходимость последовательности распределений $\{\varphi_k\}$ к распределению φ в $\mathcal{D}^*(G)$ означает поточечную сходимость, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(u) = \varphi(u) \quad \text{для каждого } u \in \mathcal{D}(G).$$

Локально-выпуклую топологию пространства $\mathcal{D}^*(G)$, порожденную базисом окрестностей (12.5.3), будем называть простой топологией.

Определение 12.5.8. Пусть D^α — дифференциальный оператор

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. (Обобщенная) производная $D^\alpha \varphi$ распределения φ на G задается формулой

$$(D^\alpha \varphi)(u) = (-1)^{|\alpha|} \varphi(D^\alpha u), \quad u \in \mathcal{D}(G).$$

Лемма 12.5.7. Отображение $\varphi \rightarrow D^\alpha \varphi$ является непрерывным отображением пространства $\mathcal{D}^*(G)$ (наделенного простой топологией) в себя.

Следует отметить, что если $v(x)$ — m раз непрерывно дифференцируемая функция на G , то производные порядка $\leq m$ от $v(x)$ в смысле обычного дифференциального исчисления и в смысле теории распределений совпадают между собой, поскольку для каждого мультииндекса α ($|\alpha| < m$) и всякой функции $u \in \mathcal{D}(G)$ справедливо равенство

$$\int_G (D^\alpha v(x)) u(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G v(x) (D^\alpha u(x)) dx.$$

Обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках $x \in G$. Тем не менее, можно говорить об обращении в нуль обобщенной функции в области.

Говорят, что обобщенная функция f равна нулю на открытом множестве $Q \subset G$, если для всех функций $u \in \mathcal{D}$, таких, что $\text{supp } u \subset Q$, выполнено равенство $f(u) = 0$.

Это определение дает возможность ввести понятие носителя обобщенной функции f .

Объединение всех открытых множеств $Q \subset G$, в которых f равна нулю, называется нулевым множеством обобщенной функции f , а его дополнение до G называется носителем обобщенной функции и обозначается через $\text{supp } f$. Обобщенная функция f называется финитной, если ее носитель ограничен.

Простейшим примером обобщенной функции является функционал, порождаемый локально интегрируемой в \mathbb{R}^n функцией $f(x)$:

$$f(u) = \int f(x)u(x) dx, \quad u \in \mathcal{D}. \quad (12.5.4)$$

Функция $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *локально интегрируемой* в \mathbb{R}^n , если для любого ограниченного множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ она абсолютно интегрируема на множестве Q . Обобщенные функции, определяемые локально интегрируемыми в \mathbb{R}^n функциями по формуле (12.5.4), называются *регулярными обобщенными функциями*, остальные обобщенные функции — *сингулярными обобщенными функциями*.

Примером сингулярной обобщенной функции является δ -функция Дирака (см. подраздел 12.6.1)

$$\delta(u) = u(0), \quad u \in \mathcal{D}.$$

Очевидно, $\text{supp } \delta = \{0\}$.

Определение 12.5.9. Пусть G — открытое связное множество в \mathbb{R}^n . Через $W_p^k(G)$ ($1 \leq p < \infty$, $k \geq 0$) обозначается множество всех распределений $\varphi \in \mathcal{D}^*(G)$, являющихся вместе со всеми своими производными $D^\alpha \varphi$ порядка $|\alpha| \leq k$ функциями из $L_p(G)$. Эти множества $W_p^k(G)$ называются *пространствами Соболева* (или *соболевскими пространствами*).

При $1 \leq p < \infty$ соболевское пространство $W_p^k(G)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|\varphi\|_{W_p^k(G)} = \left(\int_G \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha \varphi|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}. \quad (12.5.5)$$

При $1 \leq p < \infty$ пространства $W_p^k(G)$ сепарабельны, при $1 < p < \infty$ они к тому же равномерно выпуклы и, следовательно, рефлексивны. Пространство Соболева $W_2^k(G)$ (при $p = 2$), которое принято обозначать $H^k(G)$, является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle_{H^k(G)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_G D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

Ниже мы сформулируем теорему вложения Соболева для случая, когда G — ограниченная область с достаточно гладкой границей.

Определение 12.5.10 (по Кальдерону). Граница Γ области $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *регулярной*, если существуют такое конечное открытое покрытие $\{X_j\}$ этой границы, такое конечное множество открытых (конечных) конусов K_j и такое $\varepsilon > 0$, что

- 1) для любой точки $x_0 \in \Gamma$ шар радиуса ε с центром в точке x_0 целиком лежит в некотором множестве X_{i_0} покрытия $\{X_i\}: B(x_0, \varepsilon) \subset X_{i_0}$;
 2) для каждой точки из $X_i \cap G$ конус с вершиной в этой точке, получаемый параллельным переносом некоторого конуса K_j , целиком лежит в G .

Ограниченная область G имеет регулярную границу тогда и только тогда, когда существуют константы $R > 0$ и $L > 0$, такие, что для каждой точки $x_0 \in \Gamma$ можно указать такую ее окрестность $O(x_0)$, получающуюся с помощью параллельного переноса и вращения из множества

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} < R, |x_n| < 2LR\},$$

что выполняются следующие условия:

- 1) точка $0 \in X_0$ переходит в x_0 ;
 2) пересечению $O(x_0) \cap \Gamma$ соответствует поверхность

$$x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} < R,$$

где функция f липшиц-непрерывна, т. е.

$$|f(x_1, \dots, x_{n-1}) - f(y_1, \dots, y_{n-1})| \leq L \left(\sum_{i=1}^{n-1} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2};$$

- 3) пересечению $O(x_0) \cap G$ соответствует множество

$$\{x \in X_0 : \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} < R, f(x_1, \dots, x_{n-1}) < x_n < 2LR\}.$$

Для ограниченной области G с регулярной границей Γ можно определить $(n-1)$ -мерную лебегову поверхностную меру σ_{n-1} , взяв в качестве значения этой меры для части гиперплоскости $O(x_0) \cap \Gamma$ интеграл

$$\sigma_{n-1}(O(x_0) \cap \Gamma) = \int_{K_0} \sqrt{1 + |\text{grad } f|^2} dx_1 \dots dx_{n-1},$$

где

$$K_0 = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) : \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} < R\},$$

$$\text{grad } f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \right\}.$$

Область с регулярной границей для почти всех $x \in \Gamma$ (относительно меры σ_{n-1}) обладает однозначно определенным (внешним) *нормальным* вектором, т. е. таким вектором $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ с $|\nu| = \sqrt{\nu_1^2 + \dots + \nu_n^2} = 1$, что

$$\left\langle \nu, \frac{x - y}{|x - y|} \right\rangle \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow x; \quad x, y \in \Gamma.$$

Здесь (\cdot, \cdot) обозначает скалярное произведение в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n .

Если G — ограниченная область с регулярной границей, то для каждой вектор-функции $u = (u_1, \dots, u_n)$ с $u_i \in C^1(G)$ справедлива формула Гаусса (называемая также формулой Гаусса — Остроградского, или формулой Стокса):

$$\int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n u_i \nu_i d\sigma_{n-1}.$$

Обозначим через $L_p(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$, множество всех функций $u: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$\int_{\Gamma} |u(x)|^p d\sigma_{n-1} < \infty.$$

Множество $L_p(\Gamma)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|u\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |u(x)|^p d\sigma_{n-1} \right)^{1/p}.$$

Теорема 12.5.2 (теорема вложения Соболева). Пусть G — ограниченная область с регулярной границей и $1 \leq p < \infty$. Тогда

$$W_p^k(\Gamma) \subset W_r^j(G)$$

для $0 \leq j < k$ и каждого r , удовлетворяющего условию

$$\frac{1}{p} - \frac{k-j}{n} \leq \frac{1}{r} < 1.$$

Кроме того,

$$\|\varphi\|_{W_r^j(G)} \leq C \|\varphi\|_{W_p^k(G)} \quad \forall \varphi \in W_p^k(G),$$

где постоянная C зависит от G , j , k , p и r . Если $\frac{1}{p} - \frac{k-j}{n} < 0$, то

$$W_p^k(G) \subset C^j(\bar{G})$$

и

$$\|\varphi\|_{C^j(\bar{G})} \leq C \|\varphi\|_{W_p^k(G)} \quad \forall \varphi \in W_p^k(G).$$

В пространстве $W_p^1(G)$ можно ввести другие нормы, эквивалентные норме (12.5.5), что вытекает из следующей леммы.

Лемма 12.5.8. Пусть G — ограниченная область с регулярной границей Γ , G_1 — подмножество положительной меры в G и Γ_1 — подмножество положительной $((n-1)$ -мерной) поверхностной меры в Γ . Тогда для $\varphi \in W_p^1(G)$ ($p \geq 1$) справедливы неравенства

$$\int_G |\varphi|^p dx \leq C_1 \left\{ \int_G \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{p/2} dx + \left| \int_{G_1} \varphi dx \right|^p \right\},$$

$$\int_G |\varphi|^p dx \leq C_2 \left\{ \int_G \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{p/2} dx + \left| \int_{\Gamma_1} \varphi d\sigma_{n-1} \right|^p \right\}$$

с постоянными $C_1 = C_1(n, p, G_1, G)$ и $C_2 = C_2(n, p, \Gamma_1, G)$.

Первое из этих неравенств при $p = 2$ и $G_1 = G$ известно как *неравенство Пуанкаре*. Вторую оценку часто называют *неравенством Фридриха*.

12.5.2. Функциональные пространства, используемые при решении нестационарных задач

Если нужно описать некоторый нестационарный процесс, протекающий в пространственной области G в течение интервала времени S , то можно работать с функциями времени и положения, т.е. с функциями u , которые ставят в соответствие каждой паре $\{t, x\} \in S \times G$ вещественное число или вектор $u(t, x)$. При таком подходе время и пространство выступают совершенно равноправно. Оказывается, однако, что значительно удобнее другой подход к математическому описанию нестационарных процессов. При этом подходе работают с функциями времени, которые каждому моменту времени t ставят в соответствие функцию $u(t, \cdot)$ положения (например, каждому моменту времени ставится в соответствие распределение температуры или скорости в области G). Таким образом, рассматриваются функции, определенные на временном (ограниченном или неограниченном) интервале $S \subset \mathbb{R}$, со значениями в некотором пространстве функций положения X . Такие функции называют *абстрактными функциями*. Будем предполагать, что X — произвольное банахово пространство с нормой $\| \cdot \|$.

При исследовании зависящих от времени задач целесообразно ввести в рассмотрение некоторые пространства функций, действующих из S в X , в частности, пространства дифференцируемых и интегрируемых функций.

Пространства непрерывно дифференцируемых функций.

Определение 12.5.11. Функция $u: S \rightarrow X$ называется *дифференцируемой в точке $t \in S$* , если существует такой элемент $x \in X$, для которого выполняется условие

$$\lim_{h \rightarrow 0, t+h \in S} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - x \right\| = 0.$$

Этот элемент x называют *производной от u в точке t* и обычно обозначают через $u'(t)$.

Функция $u: S \rightarrow X$ называется *дифференцируемой*, если она дифференцируема в каждой точке интервала S . Функция $u': S \rightarrow X$, которая каждому $t \in S$ ставит в соответствие производную от u в точке t , называют *производной от u* .

Определение 12.5.12. Говорят, что функция $u : S \rightarrow X$ слабо дифференцируема в точке $t \in S$, если существует элемент $x \in X$ для которого выполняется условие

$$\lim_{h \rightarrow 0, t+h \in S} \left\langle f, \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - x \right\rangle = 0, \quad \forall f \in X^*,$$

где X^* — пространство, сопряженное к пространству X ; $\langle f, y \rangle = f(y)$, $f \in X^*$, $y \in X$. Этот элемент x называется *слабой производной от u в точке t* и также обычно обозначается через $u'(t)$.

Функцию $u : S \rightarrow X$ называют *слабо дифференцируемой*, если она слабо дифференцируема в каждой точке интервала S . Функцию $u' : S \rightarrow X$, которая каждому $t \in S$ ставит в соответствие слабую производную от u в точке t , называется *слабой производной от u* .

Замечание 12.5.2. Из определений 12.5.11 и 12.5.12 следует, что производная функции $u : S \rightarrow X$, если она существует, одновременно является и слабой производной от u . Поэтому обозначение одним и тем же символом u' как производной, так и слабой производной функции $u : S \rightarrow X$, не должно приводить к недоразумениям. Если специально не отмечено, то из контекста всегда ясно, о какой производной идет речь.

Исходя из определений 12.5.11 и 12.5.12, можно обычным образом по индукции ввести понятия m -кратной дифференцируемости и m -кратной слабой дифференцируемости, m -производной и m -й слабой производной функции $u : S \rightarrow X$.

Определение 12.5.13. Мы обозначаем через $C^m(S; X)$ множество всех функций $u : S \rightarrow X$, обладающих непрерывными производными до порядка m включительно, и через $C_\omega^m(S; X)$ — множество всех функций $u : S \rightarrow X$, обладающих деминепрерывными слабыми производными до порядка m включительно.

Замечание 12.5.3. Функция $u : S \rightarrow X$ деминепрерывна (см. определение 12.2.12) тогда и только тогда, когда для каждого $f \in X^*$ непрерывна функция $\langle f, u(\cdot) \rangle : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Множество $C^0(S; X)$ ($C_\infty^0(S; X)$) — это множество всех непрерывных (деминепрерывных) функций, отображающих S в X . Эти множества мы записываем также как $C(S; X)$ ($C_\omega(S; X)$).

Отметим, что если $u \in C_\omega^m(S; X)$, то

$$\langle f, u(\cdot) \rangle \in C^m(S), \quad \forall f \in X^*.$$

Если X слабо полно, то верно и обратное. При этом

$$\langle f, u^{(j)}(\cdot) \rangle = \frac{d^j}{dt^j} \langle f, u(\cdot) \rangle, \quad j = 0, \dots, m.$$

Лемма 12.5.9. Для $u \in C_\omega^1(S; X)$ при любых $s, t \in S$, $s < t$, имеем

$$\sup_{s \leq \tau \leq t} \|u'(\tau)\| < \infty$$

и

$$\|u(t) - u(s)\| \leq (t - s) \sup_{s \leq \tau \leq t} \|u'(\tau)\|.$$

Если интервал S компактен, то множество $C^m(S; X)$, образующее линейное пространство с естественными линейными операциями, становится банаховым пространством при наделении его нормой

$$\|u\|_{C^m(S; X)} = \sum_{j=0}^m \sup_{t \in S} \|u^{(j)}(t)\|,$$

а на множестве $C_\omega^m(S; X)$ можно задать топологию локально выпуклого пространства с помощью семейства полунорм

$$p_{f,j}(u) = \sup_{t \in S} |\langle f, u^{(j)}(t) \rangle|, \quad f \in X^*, \quad j = 0, \dots, m.$$

В случае, когда X слабо полно, локально выпуклое пространство $C_\omega^m(S; X)$ полно.

Теорема 12.5.3 (аппроксимационная теорема Вейерштрасса). Если интервал S компактен, то множество многочленов

$$\left\{ p(t) = \sum_{j=0}^m a_j t^j, \quad t \in S, \quad a_j \in X, \quad j = 0, \dots, m \right\}$$

плотно в $C(S; X)$.

Пространство интегрируемых функций. Сначала мы введем понятия измеримости и интегрируемости функций, действующих из временного интервала $S \subset \mathbb{R}$ в банахово пространство X . Эти понятия восходят к Бохнеру.

Аналогично интегралу Лебега, интеграл Бохнера определяется сначала для простой функции. Функция $u : S \rightarrow X$ является простой, если в S имеется конечное число попарно непересекающихся измеримых по Лебегу подмножеств S_i ($i = 0, \dots, n$) с $\text{mes}(S_i) < \infty$, таких, что функция u на каждом множестве S_i принимает постоянное значение x_i и $u(t) = 0$ для $t \in S \setminus \bigcup_{i=1}^n S_i$. *Интеграл Бохнера* от простой функции определяется по формуле

$$\int_S u(t) dt = \sum_{i=1}^n \text{mes}(S_i) x_i.$$

Определение 12.5.14. В случае когда для простой функции $u : S \rightarrow X$ в качестве множеств S_i можно выбрать интервалы, она называется *ступенчатой*.

Определение 12.5.15. Говорят, что функция $u : S \rightarrow X$ измерима по Бохнеру, если существует такая последовательность простых функций $\{u_n\}$, что

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{для почти всех } t \in S. \quad (12.5.6)$$

Если, кроме того, такая последовательность удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S \|u(t) - u_n(t)\| dt = 0, \quad (12.5.7)$$

то функция u называется *интегрируемой по Бохнеру*. Интеграл Бохнера от такой функции u по измеримому по Лебегу множеству $B \subset S$ определяется формулой

$$\int_B u(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S u_n(t) C_B(t) dt, \quad (12.5.8)$$

где C_B — индикаторная функция множества B :

$$C_B(t) = \begin{cases} 1, & t \in B, \\ 0, & t \notin B. \end{cases}$$

В случае $B = [a, b]$ вместо $\int_B u(t) dt$ мы, как обычно, пишем $\int_a^b u(t) dt$. При $b < a$ полагаем

$$\int_a^b u(t) dt = - \int_b^a u(t) dt.$$

Заметим, что из измеримости по Бохнеру функции u следует, что вещественнозначная функция $\|u(\cdot) - u_n(\cdot)\|$ измерима по Лебегу на S . Поэтому условие (12.5.7) имеет смысл. Если оно выполнено, то предел в (12.5.8) существует и не зависит от выбора последовательности простых функций, обладающей свойствами (12.5.6) и (12.5.7), так что определение 12.5.15 корректно.

Отметим некоторые свойства измеримых и интегрируемых по Бохнеру функций.

Теорема 12.5.4. Если пространство X сепарабельно, то функция $u : S \rightarrow X$ точно тогда измерима по Бохнеру, когда для каждого $f \in X^*$ функция $\langle f, u(\cdot) \rangle : S \rightarrow \mathbb{R}$ измерима по Лебегу.

Теорема 12.5.5. Если для функции $u : S \rightarrow X$ существует последовательность $\{u_n\}$ измеримых по Бохнеру функций, такая, что

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{в } X \text{ для почти всех } t \in S,$$

то она также измерима по Бохнеру.

Теорема 12.5.6. Измеримая по Бохнеру функция $u : S \rightarrow X$ точно тогда интегрируема по Бохнеру, когда функция $\|u(\cdot)\| : S \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. В этом случае для любого измеримого (по Лебегу) множества $B \subset S$ имеет место оценка

$$\left\| \int_B u(t) dt \right\| \leq \int_B \|u(t)\| dt.$$

Теорема 12.5.7. Если функция $u : S \rightarrow X$ интегрируема по Бохнеру, то функция $v : S \rightarrow X$, определенная по правилу

$$v(t) = \int_{t_0}^t u(s) ds, \quad t_0 \in S,$$

почти всюду на S дифференцируема, причем

$$v'(t) = u(t) \quad \text{для почти всех } t \in S.$$

Теорема 12.5.8. Если функция $u : S \rightarrow X$ интегрируема по Бохнеру и множество $B \subset S$ измеримо, то для любого $f \in X^*$

$$\int_B \langle f, u(t) \rangle dt = \left\langle f, \int_B u(t) dt \right\rangle.$$

Теорема 12.5.9. Пусть интервал S компактен. Тогда каждая функция $u \in C_\omega(S; X)$ интегрируема по Бохнеру. Если $u \in C_\omega(S; X)$ и функция $v : S \rightarrow X$ определена формулой

$$v(t) = \int_{t_0}^t u(s) ds, \quad t_0 \in S,$$

то $v \in C_\omega^1(S; X)$ и $v' = u$. Если $u \in C(S; X)$, то $v \in C^1(S; X)$.

Теорема 12.5.10. Каждая функция $u \in C_\omega^1(S; X)$ дифференцируема почти всюду на S .

Определение 12.5.16. Через $L_p(S; X)$, $1 \leq p < \infty$, обозначается множество всех измеримых по Бохнеру функций $u : S \rightarrow X$, для которых

$$\int_S \|u(t)\|^p dt < \infty.$$

Множество $L_p(S; X)$, $1 \leq p < \infty$, образующее линейное пространство с естественными линейными операциями, превращается в банахово пространство при наделении его нормой

$$\|u\|_{L_p(S; X)} = \left(\int_S \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p}.$$

Множество ступенчатых функций из S в X (см. определение 12.5.14) плотно в $L_p(S; X)$, $1 \leq p < \infty$.

Если X — гильбертово пространство, то пространство $L_2(S; X)$ со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = \int_S \langle u(t), v(t) \rangle_X dt, \quad u, v \in L_2(S; X),$$

также является гильбертовым.

Лемма 12.5.10 (неравенство Гёльдера). Если $u \in L_p(S; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, и $v \in L_q(S; X^*)$, $1/p + 1/q = 1$, то $\langle v(\cdot), u(\cdot) \rangle \in L_1(S)$ и

$$\int_S \langle v(t), u(t) \rangle dt \leq \|u\|_{L_p(S; X)} \|v\|_{L_q(S; X^*)}.$$

Теорема 12.5.11. Если пространство X рефлексивно, сепарабельно и $1 < p < \infty$, то каждый элемент $f \in (L_p(S; X))^*$ допускает точно одно представление в виде

$$f(u) = \int_S \langle v(t), u(t) \rangle dt, \quad \text{для каждого } u \in L_p(S; X),$$

с функцией $v \in L_q(S; X^*)$, $1/p + 1/q = 1$. Соответствие $f \rightarrow v$, $f \in (L_p(S; X))^*$ линейно и

$$\|f\|_{(L_p(S; X))^*} = \|v\|_{L_q(S; X^*)}.$$

12.6. Уравнения математической физики

12.6.1. Дельта-функция Дирака и ее свойства

Функция, о которой пойдет речь в данном подразделе, рассматривалась в работах французских математиков О. Коши, С. Пуассона, а также немецкого математика и механика Г. Кирхгофа. Широко использовал дельта-функцию О. Хевисайд, крупнейший английский математик, физик, инженер, в своем фундаментальном труде — “Электромагнитная теория”, т. 2.

Дельта-функция — это современное название, тогда она называлась иначе. О. Хевисайд называл ее импульсной функцией. Уже после О. Хевисайда эту функцию рассматривал французский математик А. Лебег. Но в работах О. Хевисайда эта функция стала действенным инструментом, позволяющим эффективно решать задачи математической физики. В его книге приводится много представлений импульсной функции — разложение ее в ряд Фурье, в интеграл Фурье, разложение по различным системам функций. Эти разложения в наше время приводятся во многих учебниках по математической физике.

Отметим здесь, что О. Хевисайд считал дельта-функцию самой обычной функцией — такой же, как и все остальные. Заново же дельта-функцию ввел в математическую физику в 1928 г. английский физик-теоретик П. Дирак в своем классическом труде “Принципы квантовой механики” (в современной физико-математической литературе эта функция носит его имя и обозначается, как правило, греческой буквой $\delta(x)$), заметив, что дельта-функцию нельзя, строго говоря, рассматривать как обычную функцию.

Теперь же, после небольшого вступления, приступим к формулировке определения дельта-функции Дирака и изложению ее основных свойств.

Дельта-функция Дирака является представителем сингулярных обобщенных функций. К понятию дельта-функции Дирака $\delta(x)$, как обобщенной функции, можно прийти, рассматривая ее в качестве предела функциональных последовательностей, обладающих определенными свойствами.

Рассмотрим, например, последовательность кусочно-постоянных функций $\{\delta_n(x)\}$, $x \in \mathbb{R}$, определенных по правилу

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n/2, & |x| < 1/n, \\ 0, & |x| > 1/n. \end{cases}$$

Можно заметить, что при любом значении n функция $\delta_n(x)$ обладает рядом свойств. Отметим эти свойства:

1) $\delta_n(x) = \delta_n(-x)$ (четность);

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1$;

3) для любой непрерывной функции $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x) dx = f(x^*),$$

где x^* — некоторая точка из интервала $(-1/n, 1/n)$;

4) справедливо соотношение

$$\delta_n(x) = \frac{d}{dx} \Phi_n(x), \quad x \neq \pm \frac{1}{n},$$

$$\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^x dx = \begin{cases} 0, & x < -1/n, \\ (1 + nx)/2, & |x| < 1/n, \\ 1, & x > 1/n. \end{cases}$$

Следует отметить, что при $n \rightarrow \infty$ функция $\Phi_n(x)$ стремится в пределе к ступенчатой тета-функции Хевисайда $\theta(x)$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Свойствами 1–3 обладают также другие последовательности функций $\delta_n(x)$:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x|, & |x| < 1/n, \\ 0, & |x| > 1/n; \end{cases}$$

$$\delta_n(x) = \begin{cases} (n/2)(1 + \cos(n\pi x)), & |x| < 1/n, \\ 0, & |x| > 1/n; \end{cases}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если у рассмотренных выше последовательностей функций $\delta_n(x)$ устремить n к бесконечности, то мы придем к соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

которое показывает, что предельный элемент этих функциональных последовательностей не является, вообще говоря, функцией в классическом понимании. Поэтому предел при $n \rightarrow \infty$ следует понимать не в смысле равномерной сходимости, а в смысле слабой сходимости последовательности. Последовательность $\{g_n(x)\}$ сходится слабо на интервале (a, b) , если для любой непрерывной функции $f(x)$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) g_n(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

который и определяет предельный элемент $g(x)$ слабо сходящейся последовательности $\{g_n(x)\}$, даже если этот предельный элемент не является функцией в классическом смысле.

Итак, назовем предельный элемент, к которому в случае слабой сходимости сходятся рассмотренные выше последовательности $\{\delta_n(x)\}$, обобщенной дельта-функцией и обозначим ее символом $\delta(x)$.

Свойства 1–3 функций $\delta_n(x)$ не зависят от значения n . Поэтому эти свойства можно приписать и предельному элементу, т.е. считать, что

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \delta(-x); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1; \end{aligned} \quad (12.6.1)$$

для любой непрерывной функции $f(x)$ выполняется

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0). \quad (12.6.2)$$

Формулу (12.6.1) можно рассматривать как следствие формулы (12.6.2) при $f(x) \equiv 1$. Поэтому интегральное соотношение (12.6.2) следует выделить как основное свойство дельта-функции, рассматривая фактически формулу (12.6.2) как определение дельта-функции Дирака в случае слабой сходимости и понимая ее как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_n(x) dx = f(0).$$

Учитывая свойство 4) рассмотренной последовательности кусочно-постоянных функций и проводя предельный переход при $n \rightarrow \infty$, можно получить формулу

$$\delta(x) = \theta'(x), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

которая определяет обобщенную дельта-функцию как производную разрывной тета-функции Хевисайда. Естественно, что и эту формулу следует понимать как предельную в смысле слабой сходимости.

Наряду с дельта-функцией $\delta(x)$ для описания сосредоточенного воздействия в точке $x = x^0$ вводят дельта-функцию вида $\delta(x - x^0)$, определяемую интегральным соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x^0) dx = f(x^0),$$

где $f(x)$ — любая непрерывная функция.

Аналогично вводится пространственная дельта-функция $\delta(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Например, дельта-функция в трехмерном пространстве определяется δ -последовательностями вида $\{\delta_n(x_1)\delta_n(x_2)\delta_n(x_3)\}$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, составленными из произведений $\delta_n(x_1)\delta_n(x_2)\delta_n(x_3)$. Поэтому, по определению,

$$\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$$

и

$$\delta(x - x^0) = \delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0),$$

где $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{R}^3$.

Основным свойством, определяющим такую пространственную обобщенную функцию, является интегральное соотношение

$$\iiint_{\Omega} f(x)\delta(x - x^0) dx = \begin{cases} f(x^0), & x^0 \in \Omega, \\ 0, & x^0 \notin \Omega, \end{cases}$$

где $f(x)$ — непрерывная в области Ω функция. При этом область Ω может совпадать со всем пространством \mathbb{R}^3 .

Для $f(x) \equiv 1$ имеем

$$\iiint_{\Omega} \delta(x - x^0) dx = \begin{cases} 1, & x^0 \in \Omega, \\ 0, & x^0 \notin \Omega. \end{cases}$$

12.6.2. Основные уравнения математической физики

Математическое описание многих физических процессов приводит к дифференциальным и интегральным уравнениям или даже к интегродифференциальным уравнениям. Широкий класс физических процессов описывается линейными дифференциальными уравнениями второго порядка.

Уравнение малых поперечных колебаний струны имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F,$$

где $u(x, t)$ — величина отклонения струны от положения равновесия в точке x в момент времени t , $\rho(x)$ — плотность струны, T_0 — величина натяжения струны, свободный член $F(x, t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения. Если плотность ρ постоянна, $\rho(x) = \rho$, то уравнение колебания струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (12.6.3)$$

где $f = F(x, t)/\rho$, а $a^2 = T_0/\rho$ — постоянная. Уравнение также называется *одномерным волновым уравнением*.

Уравнение малых поперечных колебаний мембраны

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F$$

в случае постоянной плотности $\rho = \rho(x)$ сводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}, \quad (12.6.4)$$

и называется *двумерным волновым уравнением*.

Трехмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f \quad (12.6.5)$$

описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяют плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

Волновые уравнения (12.6.3)–(12.6.5) можно записать единой формулой

$$\square_a u = f, \quad (12.6.6)$$

где \square_a — *волновой оператор (оператор Даламбера)*:

$$\square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \quad (\square = \square_1),$$

Δ — *оператор Лапласа*:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Распространение тепла в изотропной однородной среде описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f = \frac{F}{c\rho}, \quad (12.6.7)$$

где $u(x, t)$ — температура среды в точке $x \in \mathbb{R}^3$ в момент времени t ; постоянные ρ , c и k обозначают соответственно плотность, удельную теплоемкость и коэффициент теплопроводности среды; $F(x, t)$ — интенсивность источников тепла в точке x в момент времени t . Уравнение (12.6.7) называется *уравнением теплопроводности*. Число n пространственных переменных x_1, x_2, \dots, x_n в этом уравнении может быть любым.

Если в волновом уравнении (12.6.6) внешнее возмущение $f(x, t)$ является периодическим с частотой ω и амплитудой $a^2 f(x)$, т. е.

$$f(x, t) = a^2 f(x) e^{i\omega t},$$

а периодические возмущения $u(x, t)$ имеют ту же частоту и неизвестную амплитуду $u(x)$,

$$u(x, t) = u(x) e^{i\omega t},$$

то функция $u(x)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad (12.6.8)$$

называемое *уравнением Гельмгольца*. При $k = 0$ уравнение (12.6.8) принимает вид

$$\Delta u = -f \quad (12.6.9)$$

и называется *уравнением Пуассона*, а если к тому же $f = 0$, то уравнение (12.6.9) называется *уравнением Лапласа*:

$$\Delta u = 0.$$

Приведем определения интегральных уравнений.

Уравнение вида

$$q(t) = \int_a^b K(t, \tau) q(\tau) d\tau + f(t), \quad t \in [a, b], \quad (12.6.10)$$

где $q(t)$ — искомая функция, $f(t)$ — заданная на $[a, b]$ функция, а функция $K(t, \tau)$, называемая *ядром интегрального уравнения*, определена в области $[a, b] \times [a, b]$ и суммируема с квадратом, т. е.

$\int_a^b \int_a^b K^2(s, \tau) ds d\tau < \infty$, называется *интегральным уравнением Фредгольма второго рода*, а уравнение

$$\int_a^b K(t, \tau) q(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in [a, b], \quad (12.6.11)$$

— *интегральным уравнением Фредгольма первого рода*.

Если ядро $K(t, \tau)$ имеет специальный вид

$$K(t, \tau) = \begin{cases} k(t, \tau), & a \leq \tau \leq t, \\ 0, & t < \tau \leq b, \end{cases}$$

то уравнения (12.6.10), (12.6.11) принимают вид

$$q(t) = \int_a^t k(t, \tau) q(\tau) d\tau + f(t),$$

$$\int_a^t k(t, \tau) q(\tau) d\tau = f(t)$$

и называются *интегральными уравнениями Вольтерра второго и первого рода*, соответственно. Функция $k(t, \tau)$, удовлетворяющая условию $\int_a^b \int_a^t k^2(t, \tau) d\tau dt < \infty$, называется *ядром интегрального уравнения Вольтерра*. В некоторых задачах рассматриваются непрерывные ядра.

12.6.3. Классическая задача Коши для волнового уравнения

Классическая задача Коши для волнового уравнения имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad (12.6.12)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x), \quad (12.6.13)$$

где

$$f \in C^2(t \geq 0), \quad u_0 \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in C^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } n = 3, 2; \quad (12.6.14)$$

$$f \in C^1(t \geq 0), \quad u_0 \in C^2(\mathbb{R}), \quad u_1 \in C^1(\mathbb{R}) \quad \text{при } n = 1. \quad (12.6.15)$$

Решение задачи Коши (12.6.12)–(12.6.15) существует, единственно и выражается:

- *формулой Кирхгофа при $n = 3$:*

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B(x, at)} \frac{f(\xi, t - |x - \xi|/a)}{|x - \xi|} d\xi$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} u_1(\xi) dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{S(x, at)} u_0(\xi) dS \right];$$

- *формулой Пуассона при $n = 2$:*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{B(x, a(t-\tau))} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x - \xi|^2}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \int_{B(x, at)} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - \xi|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{B(x, at)} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - \xi|^2}};$$

- формулой Даламбера при $n = 1$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)].$$

Это решение непрерывно зависит от данных f , u_0 , u_1 задачи Коши в следующем смысле: если

$$|f - \tilde{f}| \leq \varepsilon, \quad |u_0 - \tilde{u}_0| \leq \varepsilon_0, \quad |u_1 - \tilde{u}_1| \leq \varepsilon_1, \\ |\text{grad}(u_0 - \tilde{u}_0)| \leq \varepsilon'_0$$

(последнее неравенство не нужно при $n = 1$), то соответствующие решения u и \tilde{u} в любой полосе $0 \leq t \leq T$ удовлетворяют оценкам

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq \frac{T^2}{2} \varepsilon + T\varepsilon_1 + \varepsilon_0 + aT\varepsilon'_0 \quad (n = 2, 3),$$

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq \frac{T^2}{2} \varepsilon + T\varepsilon_1 + \varepsilon_0 \quad (n = 1).$$

Таким образом, задача Коши для волнового уравнения (12.6.12), (12.6.13) корректна при предположениях (12.6.14), (12.6.15).

12.6.4. Фундаментальное решение дифференциального оператора

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ все функции класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, убывающие при $|x| \rightarrow \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Сходимость в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ определим следующим образом: последовательность функций $\{u_k\}$ из $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ сходится к функции $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $u_k \rightarrow u$ при $k \rightarrow \infty$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, если для всех α и β последовательность функций $\{x^\beta D^\alpha u_k(x)\}$ равномерно сходится к $x^\beta D^\alpha u(x)$ при $k \rightarrow \infty$ на \mathbb{R}^n . Очевидно, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — линейное пространство. Кроме того, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ и из сходимости в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ следует сходимость в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Обобщенной функцией медленного роста называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Будем полагать обобщенную функцию медленного роста комплекснозначной. Обозначим через $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^n)$ множество всех обобщенных функций медленного роста. Сходимость в $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^n)$ определим как слабую сходимость последовательности функционалов: последовательность обобщенных функций $\{f_k\}$ из $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^n)$ сходится к обобщенной функции $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^n)$, если для любой $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ $f_k(u) \rightarrow f(u)$, $k \rightarrow \infty$.

Линейное множество $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^n)$ с введенной в нем сходимостью называется *пространством обобщенных функций медленного роста* $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ и из сходимости в $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^n)$ следует сходимость в $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$.

Замечательное свойство класса обобщенных функций медленного роста состоит в том, что операция преобразования Фурье не выводит за пределы этого класса.

Поскольку основные функции из $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ абсолютно интегрируемы на \mathbb{R}^n , можно определить функцию

$$F[u](\xi) = \int u(x)e^{i(\xi, x)} dx, \quad u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),$$

называемую *преобразованием Фурье функции* $u(x)$. Функция $F[u](\xi)$ ограничена и непрерывна в \mathbb{R}^n . Преобразование Фурье F отображает $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ и притом взаимно однозначно.

Преобразование Фурье обобщенной функции $\varphi \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$F[\varphi](u) = \varphi(F[u]), \quad \varphi \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^n), \quad u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

Преобразование Фурье — линейная и непрерывная операция из $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим произвольное линейное дифференциальное уравнение порядка m с коэффициентами $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad u, f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n).$$

Это уравнение можно переписать в операторной форме:

$$L(x, D)u = f(x), \quad (12.6.16)$$

где

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Обобщенным решением уравнения (12.6.16) в области G называется всякая обобщенная функция $u \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая этому уравнению в области G в обобщенном смысле, т. е. для любой $v \in \mathcal{D}(G)$

$$(L(x, D)u)(v) = f(v).$$

Если $f \in C(G)$ и обобщенное решение $u(x)$ уравнения (12.6.16) в области G принадлежит классу $C^m(G)$, то оно является и классическим решением этого уравнения в области G .

Пусть $L(D)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами:

$$L(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha.$$

Фундаментальным решением (функцией влияния) оператора $L(D)$ называется обобщенная функция $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая в \mathbb{R}^n уравнению

$$L(D)\mathcal{E} = \delta(x).$$

Фундаментальное решение $\mathcal{E}(x)$ оператора $L(D)$, вообще говоря, не единственно. Оно определяется с точностью до слагаемого $\mathcal{E}_0(x)$, являющегося произвольным решением однородного уравнения $L(D)\mathcal{E}_0 = 0$.

Теорема 12.6.1. Для того чтобы обобщенная функция \mathcal{E} из $\mathcal{L}'(\mathbb{R}^n)$ была фундаментальным решением оператора $L(D)$, необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Фурье $F[\mathcal{E}]$ удовлетворяло уравнению

$$L(-i\xi)F[\mathcal{E}] = 1,$$

где

$$L(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Фундаментальное решение \mathcal{E}_n волнового оператора

$$\square_a \mathcal{E}_n = \delta(x, t)$$

в пространстве $\mathcal{L}'(\mathbb{R}^n)$ определяется с помощью преобразования Фурье:

$$\mathcal{E}_n(x, t) = \theta(t) F_\xi^{-1} \left[\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \right].$$

При $n = 3, 2, 1$ фундаментальные решения волнового оператора \square_a имеют вид

$$\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2),$$

$$\mathcal{E}_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}},$$

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|).$$

Оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ имеет следующие фундаментальные решения:

$$\mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|,$$

$$\mathcal{E}_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{-n+2}, \quad n \geq 3.$$

Вывод этих формул, а также подробное изложение теории обобщенных функций в приложении к уравнениям математической физики можно найти в [12.1].

Дополнительная литература

- 12.1. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1983.
- 12.2. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. Москва: Мир, 1978.
- 12.3. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. Москва: Наука, 1977.
- 12.4. **Садовничий В. А.** Теория операторов. Москва: МГУ, 1986.

Список основных обозначений

$D(A)$ — область определения оператора A , $D(A) \subseteq Q$

$R(A)$ — область значений оператора A , $R(A) \subseteq F$

$A(M) = \{f \in F : \exists q \in M : Aq = f\}$ — образ множества $M \subseteq Q$,
в частности $A(Q) = R(A)$

I — единичный оператор (матрица), $\forall q \in Q \quad Iq = q$

$P \cap Q = \{ \text{множество всех } x, \text{ таких, что } x \in P \text{ и } x \in Q \}$

$P \cup Q = \{ \text{множество всех } x, \text{ таких, что } x \in P \text{ или } x \in Q \}$

A^* — оператор, сопряженный к оператору A

Q^* — пространство, сопряженное к пространству Q

A^{-1} — оператор, обратный к A , т. е. $AA^{-1} = I$

$\text{Ker } A = N(A) = \{q \in D_A : Aq = 0\}$ — ядро оператора A

$\mathcal{L}(Q, F)$ — пространство всех линейных непрерывных операторов,
отображающих нормированное пространство Q
в нормированное пространство F

N^\perp — ортогональное дополнение к подпространству $N \subset Q$,
 $N^\perp = \{q \in Q : \forall p \in N \langle q, p \rangle = 0\}$

$\langle q, p \rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве
или значение функционала $q \in Q^*$
на элементе $p \in Q$: $\langle q, p \rangle = q(p)$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество всех натуральных чисел

$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ — множество всех целых чисел

\mathbb{Q} — множество всех рациональных чисел

\mathbb{R} — множество всех вещественных чисел

\mathbb{C} — множество всех комплексных чисел

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}$,
 $i = \overline{m, n}$ означает, что i пробегает все целые значения от m до n

\mathbb{E}^n — евклидово пространство со скалярным произведением

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i,$$

\bar{b}_i — число, комплексно сопряжённое к b_i

\mathcal{H} — гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$

\mathcal{B} — банахово пространство с нормой $\| \cdot \|$

\mathcal{N} — нормированное пространство с нормой $\| \cdot \|$

\mathcal{M} — метрическое пространство с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$

\mathcal{L} — линейное пространство с операциями сложения и умножения на скаляр

$A|_M$ — сужение оператора A на $M \subset D(A)$

q_T — точное решение задачи $Aq = f$

q_n^0 — нормальное относительно некоторого q_0 решение задачи $Aq = f$

q_n — нормальное (относительно нулевого элемента) решение задачи $Aq = f$

q_n — псевдорешение

q_n^0 — нормальное относительно q^0 псевдорешение

q_K^M — квазирешение на множестве $M \subset Q$

q_{np} — нормальное псевдорешение (т. е. нормальное относительно нулевого элемента псевдорешение)

$C(G)$ — пространство функций, непрерывных на G

$C^m(G)$ — пространство функций, непрерывных на множестве G вместе со своими производными до порядка $m \in \mathbb{N}$,
 $C^0(G) = C(G)$

$L_p(G)$ — пространство функций, интегрируемых со степенью p на множестве G

$W_k^p(G)$ — пространство Соболева, $k, p \in \mathbb{N}$, $H^p(G) = W_2^p(G)$,
 $H^0(G) = L_2(G)$

$\delta(x)$ — дельта-функция Дирака

$\theta(x)$ — тэта-функция Хевисайда, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$\inf E$ — нижняя грань множества $E \subset M$, $c = \inf E \in M$ если,
 во-первых, $\forall x \in E \quad x \geq c$,
 и во-вторых, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in E: c < y < c + \varepsilon$
 (по аналогии определяется $\sup E$ — верхняя грань
 множества E)

$J : Q \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал

$J'q$ — градиент функционала

$q_* = \arg \min_P J(q)$ — элемент, на котором функционал $J(q)$ достигает ми-
 нимального значения среди всех q , удовлетворяющих
 условию P

$B(q, \varepsilon)$ — открытый шар с центром в точке q радиуса ε ,
 $B(q, \varepsilon) = \{p \in Q : \rho(p, q) < \varepsilon\}$

$S(q, \varepsilon)$ — сфера с центром в точке q радиуса ε ,
 $S(q, \varepsilon) = \{p \in Q : \rho(p, q) = \varepsilon\}$

$m \times n$ -матрица — матрица, у которой m строк и n столбцов

$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_p)$ — диагональная $m \times n$ -матрица, $p = \min\{m, n\}$,
 элементы a_{ij} которой удовлетворяют условию

$$a_{ij} = \begin{cases} a_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$\{a_n\}$ — последовательность a_1, a_2, a_3, \dots

$\text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ — линейная оболочка элементов a_1, a_2, \dots ,
 $\text{span}\{a_n\} = \left\{ \sum_n \beta_n a_n, \beta_n \in \mathbb{R} \right\}$ (суммирование мо-
 жет быть по конечному набору элементов)

$\det A$ — определитель $n \times n$ -матрицы A определяется

$$\text{индукцией по } n: \det A = \sum_{s=1}^n (-1)^{k+s} a_{ks} A_{ks},$$

где A_{ks} — определитель $(n-1) \times (n-1)$ -матрицы,

полученной из A вычеркиванием k -й строки и s -го столбца

$$\Delta v = \Delta_x v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \text{ — оператор Лапласа в } \mathbb{R}^n$$

$$\square v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta_x v \text{ — оператор Даламбера}$$

$$\nabla g(x) = \nabla_x g(x) = \operatorname{grad}_x g(x) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right) \text{ —}$$

градиент функции $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{div} u = \operatorname{div}_x u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \text{ — дивергенция}$$

вектор-функции $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, $x \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} u = \operatorname{rot}_x u = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^T \text{ — ротор}$$

вектор-функции $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, $x \in \mathbb{R}^3$

Список основной литературы

1. **Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.** Экстремальные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1988.
2. **Васин В. В., Агеев А. Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.
3. **Вайникко Г. М.** Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту: Изд-во ТГУ, 1982.
4. **Годунов С. К., Антонов А. Г., Кирилюк О. И., Костин В. И.** Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1992.
5. **Денисов А. М.** Введение в теорию обратных задач. Москва: МГУ, 1994.
6. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва: Наука, 1978.
7. **Кабанихин С. И.** Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
8. **Кабанихин С. И., Бектемесов М. А., Нурсеитова А. Т.** Итерационные методы решения обратных задач и некорректных задач с данными на части границы. Алматы–Новосибирск: ОФ “Международный фонд обратных задач”, 2006.
9. **Лаврентьев М. М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1962.

10. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука Сиб. отд-ние, 1980.
11. **Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.** Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Институт математики, 1999.
12. **Романов В. Г.** Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1973.
13. **Романов В. Г.** Обратные задачи математической физики. Москва: Наука, 1984.
14. **Романов В. Г.** Устойчивость в обратных задачах. Москва: Научный Мир, 2005.
15. **Романов В. Г., Кabanikhin С. И.** Обратные задачи геоэлектрики. Москва: Наука, 1991.
16. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. 3 изд. Москва: Наука, 1986.
17. **Тихонов А., Леонов А., Ягола А.** Нелинейные некорректные задачи. Москва: Наука, 1995.
18. **Шадан К., Сабатье П.** Обратные задачи квантовой теории рассеяния. Москва: Мир, 1980.
19. **Engl H. W., Hanke M., Neubauer A.** Regularization of inverse problems. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1996.
20. **Kabanikhin S. I., Lorenzi A.** Identification Problems of Wave Phenomena. VSP, The Netherlands, 1999.
21. **Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., Shishlenin M. A.** Direct methods of solving multidimensional inverse hyperbolic problems. VSP, The Netherlands, 2004.
22. **Lattes R., Lions J.-L.** Méthode de quasi réversibilité et applications. Paris: Dunod, 1967.
23. **Romanov V. G.** Investigation Methods for Inverse Problems. VSP, The Netherlands, 2002.
24. **Romanov V. G., Kabanikhin S. I.** Inverse Problems for Maxwell's Equations. VSP, The Netherlands, 1994.

Предметный указатель*

А

акустический импеданс, 204
амплитуда рассеяния, 198

Б

бихарактеристика, 170

В

весовые числа, 182

Д

данные

 обратной задачи, 17
 рассеяния, 199
 спектральные, 182, 290

дельта-функция Дирака, 278, 434

З

задача

 Коши для уравнения Лапласа, 30
 Коши для волнового уравнения, 440
 Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем, 31
 Радона, 154

* В силу того, что глава 12 практически полностью состоит из формулировок теорем и определений, многие теоремы и определения этой главы не включены в предметный указатель

И

интегральное уравнение

Вольтерра первого рода, 30, 129, 440

Вольтерра второго рода, 130, 440

Фредгольма первого рода, 29, 122, 439

Фредгольма второго рода, 439

К

квазирешение, 46

корректность

по Адамару, 41

условная (по Тихонову), 42

множество корректности, 42

критерий Пикара, 81

М

матрица

диагональная, 101

нормальная, 104

ортогональная, 398

плохо обусловленная, 24, 90

прямоугольная (или $m \times n$), 91, 397

расширенная, 102

метод

Гельфанда — Левитана, 190

Годунова, 108, 109

градиентный, 60

итерационный, 91

квадратного корня, 112

Лаврентьева, 49

минимальных ошибок, 62

наискорейшего спуска, 62, 243, 305

Ньютона — Канторовича, 305

отображений Неймана — Дирихле, 321

последовательных приближений, 59, 304

простой итерации (Ландвебера), 62, 304

прямой, 90

сопряженных градиентов, 63

модуль непрерывности, 44

Н

некорректность задачи, 41

сильная, 82

слабая, 82

несовместность системы, 107

норма, 363

$m \times n$ -матрицы, 103, 397

(C, k) -норма, 139

нормировочный множитель, 199

О

обратная задача

акустики, 293

внутренняя, 18, 233

восстановления источника, 233

границная, 17, 233, 247

интегральной геометрии, 25, 162

кинематическая, 18

коэффициентная, 17

об источнике, 17, 248

продолжения, 17, 233, 247

рассеяния, 18, 197

ретроспективная, 17, 233, 237

спектральная, 18

теплопроводности, 32

Штурма — Лиувилля, 290

электродинамики, 306

оценка условной устойчивости

задачи продолжения, 265

на множестве корректности, 71

ретроспективной задачи, 240, 246

оператор

волновой (Даламбера), 438

Вольтерра, 138

вполне непрерывный, 46, 387

измерений, 19

Лапласа, 438

линейный, 384

преобразования, 187

прямой задачи, 19

псевдообратный, 78

r -псевдообратный, 82

сопряженный, 412

П

параметр

зазора в сингулярном спектре, 83

несовместности системы, 83

потенциал оператора Штурма — Лиувилля, 181

- преобразование
 Радона, 155
 Фурье, 442
- принцип
 невязки, 97
 обобщенной невязки, 98
 сжимающих отображений, 383
- проблема моментов, 164
 l -проблема моментов, 164
- проекция элемента на множество, 47, 369
- пространство
 банахово, 371
 гильбертово, 366
 евклидово, 361
 линейное (векторное), 360
 метрическое, 365
 Соболева $H^k(G)$, 381
 сопряженное, 408
 топологическое, 374
 $C[a, b]$, 380
 $C^m[a, b]$, 380
 l_p , 380
 $L_p[a, b]$, 380
 $\tilde{L}_2(l)$, 296
- прямая задача
 с сосредоточенным источником, 278
 Штурма — Лиувилля, 290
- псевдорешение, 79, 91
 нормальное, 79, 92
 нормальное относительно q^0 , 92
- Р**
- равенство Парсевала, 184
- регуляризация
 Латгеса — Лионса, 238
 на основе разделения переменных, 238
 Тихонова, 52
- регуляризирующий алгоритм, 52, 94
- регуляризованное семейство приближенных решений, 52, 94
- рентгеновская компьютерная томография, 153
- решение
 в смысле наименьших квадратов, 79
 истокопредставимое, 72
 нормальное, 90

- нормальное относительно q^0 , 63
- обобщенное, 226, 442
 - прямой задачи, 245, 259, 264
 - сопряженной задачи, 262, 265
- обобщенное нормальное r -решение, 82
- фундаментальное
 - оператора, 443
 - уравнения акустики, 326

С

- сейсмический луч, 169
- семейство операторов
 - класса $\mathcal{K}(T, \mu)$, 138
 - ограниченно липшиц-непрерывное, 138
 - регуляризирующее, 53
- сингулярная система оператора, 80
- сингулярное разложение
 - $m \times n$ -матрицы, 101, 400
 - оператора, 80
- сингулярные векторы
 - $m \times n$ -матрицы, 103, 401
 - оператора, 80
- сингулярные числа
 - $m \times n$ -матрицы, 102, 400
 - оператора, 81
- собственные
 - значения оператора, 181, 290
 - функции оператора, 181, 290
- спектр оператора, 181, 388

Т

- теорема
 - Амбарцумяна, 187
 - Иванова, 46
 - о сингулярном разложении, 102
- тэта-функция Хевисайда, 278

У

уравнение

волновое, 438

Гельмгольца, 358, 439

Гельфанда — Левитана, 192

Лапласа, 439

нормальное по отношению к $Aq = f$, 80, 92

Пуассона, 439

теплопроводности, 439

эйконала, 170

условие

единственности решения, 41

существования решения, 41

устойчивости решения, 41

условная устойчивость, 42

Ф

фаза рассеяния, 198

функция

Йоста, 201

импульсная переходная, 33

переходная, 206

рассеяния, 199

спектральная, 202

характеристическая оператора l_q , 182

Х

характеристический коноид, 170

Ц

целевой функционал, 40, 60

Ч

число обусловленности, 24, 83, 90

Ш

шкала банаховых пространств аналитических функций, 314

Профессор

Сергей Игоревич Кабанихин

Новосибирский государственный университет

ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

Технический редактор *Д. В. Нечаев*

Дизайнер *Е. С. Кабанихина*

Подписано в печать 27.05.09. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 27,9. Усл. печ. л. 26,8. Тираж 1000 экз.

Сибирское научное издательство
630090, Новосибирск, просп. Лаврентьева, 6
E-mail: sibsp@mail.ru

Отпечатано в типографии "ИИИ ОФСЕТ"
630115, Новосибирск, ул. Арбузова, 4/а