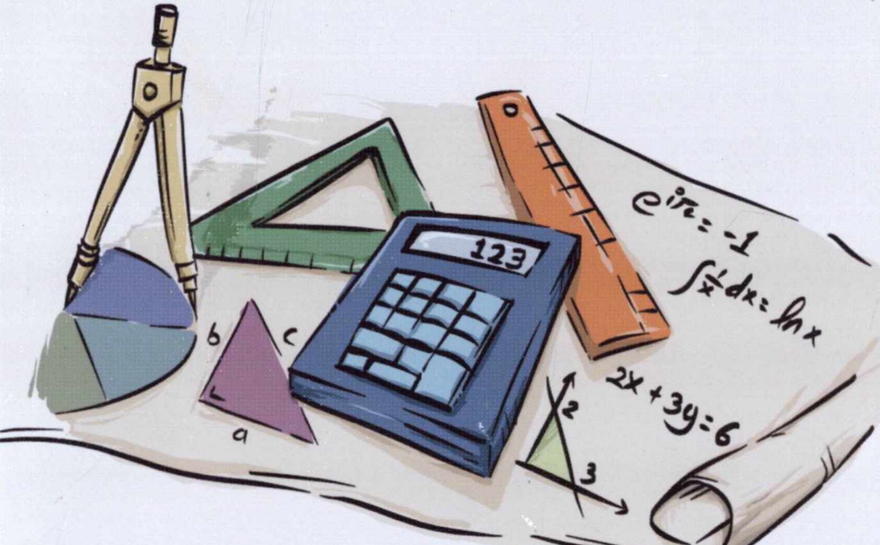
ABDULLAYEVA B., ABDUVALIYEVA D.,
MEYLIYEV S., ABDURAHMONOVA D.,
ISMOILOV E.

MATEMATIKA



O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

ABDULLAYEVA B., ABDUVALIYEVA D., MEYLIYEV S.,
ABDURAHMONOVA D., ISMOILOV E.

MATEMATIKA

(Ta’lim yo’nalishi: 5111700 - ‘‘Boshlang’ich ta’lim va sport-tarbiyaviy ish’’ yo’nalishi talabalari uchun)

TOSHKENT-2022

Nizomiy nomidagi Toshkent davlat pedagogika universiteti Kengashi va Respublika Muvofiqlashtirish komissiyasi majlisining qaroriga binoan darslik chop etishga tavsiya etiladi.

Ushbu darslik oliy o'quv yurtlarining " Boshlang'ich ta'lim va sport-tarbiyaviy ish" yo'nalishi talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, bakalavrlar tayyorlash uchun "Matematika" fanining tasdiqlangan namunaviy o'quv dasturi asosida yaratilgan. Unda chiziqli algebra, vektorlar, chiziqli tenglamalar sistemasi, analitik geometriya elementlari, ikkinchi tartibli egri chiziqlar, fazoda to'g'ri chiziq va tekislik tenglamalari, matematik analiz elementlari, differentsial hisob va integral hisobi bo'yicha nazariy ma'lumotlar, ular asosida yechilgan misol va masalalar hamda talabalar mustaqil yechishlari uchun topshiriqlar to'plamlari va talabalar mustaqil yechishlari uchun testlar keltirilgan.

Настоящий учебник предназначен для студентов высших учебных заведений по направлению «Начальное образование и спортивное образование» и составлен на основе утвержденного типового учебного плана «Математика» для подготовки бакалавров. Он включает в себя линейную алгебру, векторы, системы линейных уравнений, элементы аналитической геометрии, кривые второго порядка, уравнения прямых и плоскостей в пространстве, элементы математического анализа, теоретические знания дифференциального и интегрального исчисления, примеры и задачи, а также в виде наборов заданий для самостоятельного решения учащимися и тестов для самостоятельного решения учащимися.

This textbook is designed for students of higher education in the field of "Primary education and sports education" and is based on the approved standard curriculum of "Mathematics" for the preparation of bachelors. It includes linear algebra, vectors, systems of linear equations, elements of analytic geometry, second-order curves, equations of straight lines and planes in space, elements of mathematical analysis, theoretical knowledge of differential calculus and integral calculus. examples and problems as well as sets of assignments for students to solve independently and tests for students to solve independently.

Tuzuvchi: Abdullayeva B., Abduvaliyeva D., Meyliyev S., Abdurahmonova D., Ismoilov E.

Taqrizchilar:

Toshkent Davlat Pedagogika universiteti "Matematika va ta'limda axborot texnologiyalari" kafedrasi p.f.n dotsent v.b.Sh.B.Bekchonova

Namangan davlat universiteti f.-m.f.n dotsent T.U.Abdullayev

SO‘Z BOSHI

Mamlakatimizda so’ngi yillarda ta’lim tizimini tubdan islohot qilishga katta ahamiyat berildi. Hududlarda yangi oliy ta’lim muassasalarining tashkil etilishi, kadrlar tayyorlashning zamonaviy ta’lim yo`nalishlari va mutahasisliklari hamda sirtqi va kechki bo`limlarning ochilishi, oliy ta’lim muassasalariga qabul kvotalarining oshirilishi mazkur yo`nalishdagi muhim islohotlar hisoblanadi.

2018-yil 5-iyun, O’zbekiston Respublikasi Prezidentining ”Oliy ta’lim muassasalari ta’lim sifatini oshirish va ularning mamlakatda amalga oshirilayotgan keng qamrovli islohotlarda faol ishtirokini ta’minlash bo`yicha qo’shimcha chora-tadbirlar to`g`risida” gi PQ-3775-son, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirirshda davlat tomonidan qo’llab-quvvatlash, O’zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanoviskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora tadbirlari to’g’risida” gi, 2019-yil 9-oktabrdagi PF-5847-son “O’zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to’g’risida”gi qaror va farmonlari qabul qilindi va unda o’quv mashg’ulotlarini talabalarni innovatsion fikrlashga yo`naltirilgan o’qitish texnologiyalari va interfaol uslublarni joriy etish asosida tashkil etish, asosiy e’tiborni talabalarning mustaqil ta’lim olishi bilan bog’liq mexanizmlarni amalga oshirishga qaratish1 hamda oliy ta’lim bilan qamrov darajasini oshirish, xalqaro standartlar asosida yuqori malakali, kreativ va tizimli fikrlaydigan, mustaqil qaror qabul qila oladigan kadrlar tayyorlash, ularning intellektual qobiliyatlarini namoyon etishi va ma’naviy barkamol shaxs sifatida shakllanishi uchun zarur shart-sharoitlar yaratish2 kabi vazifalarning ijrosini ta’minlash ta’kidlab o‘tilgan.

Yuqori malakali, raqobatbardosh, zamonaviy talablarga javob bera oladigan mutaxassis kadrlar tayyorlashda ularga chuqur matematik bilimlar berish va bu bilimlarni masalalarni yechishga tatbiq eta olishga o‘rgatish katta ahamiyatga ega.

---

1 O’zbekiston Respublikasi Prezidentining ”Oliy ta’lim muassasalari ta’lim sifatini oshirish va ularning mamlakatda amalga oshirilayotgan keng qamrovli islohotlarda faol ishtirokini ta’minlash bo`yicha qo’shimcha chora-tadbirlar to`g`risida”gi PQ - 3775-son qarori. 2018 yil 5 iyun.

2 O’zbekiston Respublikasi Prezidentining ”O’zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to’g’risida”gi PF-5847-son farmoni. 2019 yil 9 oktabr.

Shu sababli “Boshlang`ich ta`lim va sport tarbiyaviy ish”. yo‘nalishi bo‘yicha ta’lim oluvchi bakalavrlarning o‘quv rejalarida “Matematika” fanini o‘qitish ko‘zda tutilgan. Hozirgi davrda bu fanni o‘qitish alohida ahamiyatga ega bo‘lgani uchun oxirgi yillarda chet ellarda bu fan bo‘yicha juda ko‘p o‘quv-uslubiy adabiyotlar yaratilmoqda. Ulardan bir qismi darslikning adabiyotlar ro‘yxatida ko‘rsatilgan va bu ro‘yxatni Internet tizimi yordamida ancha kengaytirish mumkin.

Ta’lim sohasida islohotlar amalga oshirilayotgan bir paytda boshlang‘ich sinflar uchun yangi «Matematika» o‘quv darsliklari yaratilayotgan bir vaqtda Davlat ta’lim standartida ko‘rsatilgan fanlar bo‘yicha o‘quv adabiyotlarini yangi avlodini yaratish zarurligi tug‘ilmoqda. Bundan tashqari darsliklarga bo’lgan talab ham kuchaymoqda. Darslikda bakalavriat ta’lim yo’nalishi talabalari uchun namunaviy fan dasturi bo’yicha tuzilgan mavzular sodda va tushunarli ko’rinishda hamda qiziqarli misollar, chizmalar va albatta namunaviy testlar bilan boyitilgan.

Ushbu darslik oliy o’quv yurtlarining barcha tabalari (“Boshlang`ich ta`lim va sport tarbiyaviy ish” yo‘nalishi) uchun “Matematika” fanining namunaviy dasturida rejalashtirilgan mavzularni o‘z ichiga olgan bo’lib, VIII bobni o’z ichiga oladi:

I. Chiziqli algebra.
II. Vektorlar.
III. Chiziqli tenglamalar sistemasi.
IV. Analitik geometriya.
V. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.
VI. Fazoda to’g’ri chiziq va tekislik tenglamasi.
VII. Matematik analiz elementlari.
VIII. Integral hisob.
IX. Ehtimollar nazariyasi.
X. Matematik statistik elementlari.

Bu mavzular bo‘lg‘usi mutaxasislar uchun zarur bo‘lgan chiziqli algebra, vektorlar, chiziqli tenglamalar sistemasi, analitik geometriya elementlari, ikkinchi tartibli egri chiziqlar, fazoda to’g’ri chiziq va tekislik tenglamalari, matematik analiz elementlari, differensial hisob va integral hisobi asosiy bo‘limlarini tashkil etadi.

Mavzular bo'yicha nazariy ma'lumotlar, ular asosida yechilgan misol va masalalar hamda talabalar mustaqil yechishlari uchun testlar keltirilgan. Ayrim tasdiqlarning isbotlari talabalarga havola etilgan. Bundan tashqari bir qator mavzular kengaytirilgan va nisbatan chuqurroq yoritilgan bo'lib, o'qituvchi ulardan talabalarning mustaqil ishini tashkil etish uchun foydalanishi mumkin.

Qo'llanmani o'qib chiqib o'zining fikr va mulohazalarini bildirgan Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika universiteti "Matematika va ta'limda axborot texnologiyalari" kafedrasi p.f.n dotsent v.b Sh.B.Bekchonova, Namangan davlat universiteti f.-m.f.n dotsent T.U.Abdullayevlarga mualliflar o'z minnatdorchiliklarini bildiradi. Mualliflar ushbu darslik kamchiliklardan holi degan fikrdan uzoqda bo'lganligi tufayli uni takomillashtirish bo'yicha kitobxonlarning taklif va mulohazalarini minnatdorchilik bilan qabul etadi.

Mualliflar

I BOB. CHIZIQLI ALGEBRA

1-§. Matritsalar va ular ustida amallar

1-ta'rif. Sonlarning m ta satr va n ta ustundan iborat to'g'ri to'rtburchak shaklida, jadval ko'rinishida yozilishi $m \times n$ o'lchovli ***matritsa*** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

yoki $A = (a_{ij}), i = 1, m; j = 1, n.$

Bu yerda m satrlar soni, n ustunlar soni.

Bu matritsadagi a_{ij}, $(i = 1, m; j = 1, n)$ sonlar uning ***elementlari*** deyiladi.

m -satrlar soni, n -ustunlar soni.

2-ta'rif. Agar $m = 1$ bo`lsa, ***satr matritsa***; $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$, agar $n = 1$ bo`lsa, ***ustun matritsa***; $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ deyiladi.

3-ta'rif. Agar m = n bo`lsa, ***kvadrat matritsa***, n uning tartibi deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Kvadrat matritsaning $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlari joylashgan diogonal ***bosh diogonal***, $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ elementlari joylashgan diagonal ***yordamchi diagonal*** deyiladi.

4-ta'rif. Bosh diagonal elementlari noldan farqli, qolgan elementlari nolga teng bo'lgan matritsa, ***diagonal matritsa*** deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

5-ta'rif. Bosh diagonal elementlari 1 ga teng bo'lgan diagonal matritsa, ***birlik matritsa*** deyiladi va E harfi bilan belgilanadi.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Agar $a_{ij} = a_{ji}$ bo`lsa, matritsa ***simmetrik*** deyiladi.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $va\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Agar ***A*** va ***B*** matritsalarning o'lchovlari o'zaro teng bo'lsa, ular ***nomdosh*** matritsalar deyiladi.

7-ta'rif. A matritsaning har bir a_{ij} elementi B matritsaning unga mos b_{ij} elementiga teng bo`lsa, bu ikki nomdosh matritsalar ***teng*** deyiladi va $A = B$ kabi yoziladi.

Faqat nomdosh matritsalargina teng bo`lishi mumkin.

Nomdosh bo`lmagan matritsalar umuman ***tengmas*** deb hisoblanadi.

Matritsalar ustida quyidagi amallarni bajarish mumkin;

a) matritsani songa ko'paytirish;

b)matritsani matritsaga qo`shish (ayirish);

c)matritsani matritsaga ko`paytirish;

a) matritsani songa ko'paytirish;

Biror matritsani songa ko`paytirish uchun, uning har bir elementi shu songa ko`paytiriladi, ya'ni;

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ matritsa va λ –ixtiyoriy son berilga.

$$\lambda A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 6A = \begin{pmatrix} 6\cdot 5 & 6\cdot 4 & 6\cdot(-1) \\ 6\cdot 0 & 6\cdot 2 & 6\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 & -6 \\ 0 & 12 & 42 \end{pmatrix}.$$

b) matritsani matritsaga qo`shish (ayirish);

Bir xil *mxn* o'lchamli A va B matritsalarning ***yig`indisi*** deb, o`sha o`lchamli shunday $C = A + B$ matritsaga aytiladiki, uning har bir elementi A va B matritsalarning mos elementlari yig'indisidan iborat bo'ladi.

Bir xil o'lchamli matritsalarni qo'shish (ayirish) mumkin. Xar xil o'lchamli matritsalarni qo'shish (ayirish) mumkin emas.

Masalan,

$$A = A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

matritsalar uchun

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+1 & 3+0 & -1+1 \\ 0+2 & 7+(-3) & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Masalan,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A+B \text{ matritsani toping.}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 4+2 & 1+1 \\ -1+1 & 0+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ikki matritsalarning ***ayirmasi*** ham ularning yig`indisi kabi aniqlanadi va $C = A - B$ kabi yoziladi.

Masalan,

$$A = A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

matritsalar uchun

$$A - B = \begin{pmatrix} 5-1 & 3-0 & -1-1 \\ 0-2 & 7-(-3) & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matritsani matritsaga qo`shish, ayrish va songa ko`paytirish amallari chiziqli amallardir.

Xossalari.

$1^0. A + B = B + A$ –o`rin almashtirish qonuni;

$2^0.\ (A + B) + C = A + (B + C)$ –qo`shishga nisbatan guruhlash qonuni;

$3^0.\ \mu(\lambda A) = \lambda(\mu A)$ –songa ko`paytirishning o`rin almashtirish qonuni; λ,μ-ixtiyoriy sonlar;

$4^0.\ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ –matritsalarni qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni.

$5^0.\ (\lambda + \mu)A = \lambda A + \lambda B$ –sonlarni qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni.

8-ta'rif. ***A*** matritsani satr elementlarini ustun, ustun elementlarini satr ko'rinishda yozilishi uni ***transpornirlash*** deyiladi va A^T bilan belgilanadi.

c) Matritsani matritsaga ko`paytirish.

9-ta'rif. $m \times k$ o`lchamli $A$ matritsaning $k \times n$ o`lchamli B matritsaga ***ko`paytmasi*** deb, $m \times n$ o`lchamli shunday $C = (c_{ij})\ (i = 1, m; j = 1, n)$ matritsaga aytiladiki, uning $c_{ij}\ (i = 1, m; j = 1, n)$ elementi A matritsa i-satri elementlarini B matritsa j - ustunining mos elementlariga ko`paytmalari yig`indisiga teng, ya'ni

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} \qquad (6)$$

Umumiy holda, $AB \neq BA$. Agar $AB = BA$ bo`lsa, u holda $A$ va $B$ matritsalar kommutativlanadigan yoki o`rin almashinadigan deb ataladi.

A matritsani ustunlar soni B matritsani satrlar soniga teng bo'lgandagina, A va B matritsalarni ko'paytirsa bo'ladi.

Masalan,

$$A_{3\times2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun m=3, p=q=2, n = 2 bo'lgani uchun ularning ko'paytirish mumkin va ko'paytma matritsa AB=C_{3x2} quyidagicha bo'ladi:

$$C_{3\times2} = \begin{pmatrix} 3\cdot6+1\cdot1 & 3\cdot(-4)+1\cdot2 \\ 0\cdot6+(-2)\cdot1 & 0\cdot(-4)+(-2)\cdot2 \\ 4\cdot6+5\cdot1 & 4\cdot(-4)+5\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -10 \\ -2 & -4 \\ 29 & -6 \end{pmatrix}.$$

Masalan,

$$A=\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}$$ $A \cdot B$ matritsani toping.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.26+(-12).15 & 7.45+(-12).26 \\ -4.26+7.15 & -4.45+7.26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Xosalari

1^0. $(AB)C = A(BC)$- gruhlash qonuni;

2^0. $AE = EA = A$

3^0. $(A+B)C = AC + BC$

4^0. $(\lambda A)B = \lambda(AB)$

5^0. $(AB)^T = B^T A^T$

6^0. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

7^0. $(A+B)^T = A^T + B^T$

8^0. $(A^T)^T = A$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Agar $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $2A + B$ ni toping.

2. Agar $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A + 3B$ ni toping.

3. Agar $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -11 & 10 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A - B$ ni toping.

4. Agar $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A + 3B$ ni toping.

5. Agar $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $5A - B$ ni toping.

6. Agar $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A + 2B$ ni toping.

7. Agar $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $3A - B$ ni toping.

8. Agar $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A + B$ ni toping.

9. Agar $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $5A - 2B$ ni toping.

10. Agar $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $-A + 2B$ ni toping.

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ga teng. $A \cdot B$ ni toping.

12. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ ga teng. $A \cdot B$ ni toping.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ga teng. $A \cdot B$ ni toping.

14. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ga teng. $2A \cdot B$ ni toping.

15. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ga teng. -$3A \cdot B$ ni toping.

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ga teng. $A \cdot B$ ni toping.

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ ga teng. $A \cdot 2B$ ni toping.

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ ga teng. $3A \cdot B$ ni toping.

19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ga teng. $7A \cdot B$ ni toping.

20. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ga teng. $A \cdot B$ ni toping.

21. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ va $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ga teng. $A*B$ ni toping.

22. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ va $B=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ga teng. $A*B$ ni toping.

23. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ga teng. $2A+5B$ ni toping.

24. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ga teng. $A+B$ ni toping.

25. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ va $B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ga teng. $3A$-$2B$ ni toping.

***C* matritsani toping:**

1. $C = A^T B - 2B^T, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $C = AB^T - A^T, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

3. $C = AB + 4A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

4. $C = A \cdot B^T - 3B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$

5. $C = A^T B - BA^T, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$

6. $C = A^T B - 4B, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$

7. $C = 2A^T B - BA^T, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}.$

8. $C = (A+B)(2B-A)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

9. $C = (B+AB)^T$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $C = (A-BA)^T$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

11. $C = B - A \cdot A^T$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 20 & 19 \\ 18 & 17 \end{pmatrix}$.

12. $C = (AB+BA)^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $C = A^TB - 2B^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$.

14. $C = 2A(A-B)^T$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$.

15. $C = 3B - B^TA^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

16. $C = AB^T + A$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

17. $C = A^T(B+A)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

18. $C = (A-B)B^T$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

19. $C = (B^T + A)^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

20. $C = (A+3B)^TB$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2-§. Determinantlar va ularning xossalari

1-ta'rif. Ikkinchi tartibli kvadrat matritsaga mos keluvchi ***ikkinchi tartibli determinant*** deb, quyidagi belgi va tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

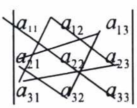
Xuddi shunga o'xshash, **uchinchi tartibli determinant** deb, quyidagi songa aytiladi:

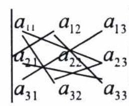
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (2)$$

3-tartibli determinantlarni uchburchaklar usulida, Sarryus usulida hamda biror satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblash mumkin.

1. Uchburchaklar usuli:

(+) 

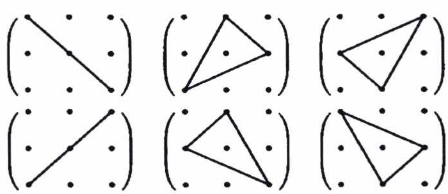
(-) 

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

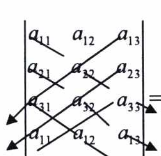
Bu "uchburchak qoidasi" deyiladi. Osonroq eslab qolish uchun hisoblash shaklini keltiramiz;

«+»

«–»



2. Sarryus usuli:



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

3. Birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblash:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Misollar:

1. $a)$ $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5-(-4)\cdot 2 = 15+8 = 23$

$b)$ $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} - (-1)\cdot a = a+a = 2a$

2. 3-tartibli determinantlarni uchburchaklar usuli, Sarryus usuli hamda biror ixtiyoriy satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblang:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot(-5) + 1\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot(-3)\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot(-5) - 1\cdot(-1)\cdot 1 =$$

$$= 15 + 4 - 2 + 12 + 10 + 1 = 40$$

$$b)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 2 + 4 + 12 + 1 + 10 = 40$$

$$c)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 16 + 14 + 10 = 40$$

n-tartibli determenantni hisoblash formulasi:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}.$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}M_{1k}.$$

Faqatgina kvadrat matritsalar uchun, ya'ni satrlari va ustunlari soni teng bo'lgan matritsalar uchungina determinant aniqlangan.

III tartibli determinantni hisoblashga doir misol keltiramiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 0 + 6\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot(-1)\cdot(-2) -$$
$$-(-2)\cdot 5\cdot 3 - 6\cdot 1\cdot 0 - 4\cdot(-1)\cdot(2) = 112.$$

2-ta'rif. Determinantning ixtiyoriy $a_{ij}\ (i = 1,n; j = 1,n)$ elementining ***minori*** deb, shu element turgan satr va ustunni o'chirish natijasida hosil bo'lgan, tartibi bittaga kamaygan determinantga aytiladi va $M_{ij}\ (i = 1,n; j = 1,n)$ bilan belgilanadi. Determinant $a_{ij}\ (i = 1,n; j = 1,n)$ elementining ***algebraik to'ldiruvchisi***

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ formula bilan aniqlanadi, ya'ni u minorning ishorasini aniqlaydi. Bu formula $n \geq 3$ bo'lgandagi determinantlarni tartibini pasaytirib hisoblashda qo'llaniladi.

Xossalari

1^0. Agar determinant transpornirlansa, uning qiymati o'zgarmaydi.

2^0. Agar determinantning ixtiyoriy satr (ustun) elementlari nollardan iborat bo'lsa, uning qiymati nolga teng bo'ladi.

3^0. Agar determinantning ixtiyoriy ikkita satr (ustun) elementlari o'rinlari almashtirilsa, uning qiymati qarama-qarshisiga o'zgaradi.

4^0. Agar determinantning ixtiyoriy ikkita satr (ustun)i bir xil elementlardan tashkil topgan bo'lsa, uning qiymati nolga teng bo'ladi.

5^0. Determinantning ixtiyoriy satr (ustun) elementlaridan umumiy ko'paytuvchini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

6^0 .Agar determinantning ixtiyoriy ikkita satr (ustun) elementlari proportsional bo`lsa, uning qiymati nolga teng bo`ladi.

7^0. Agar determinantning biror satr (ustun) elementlari ikkita qo`shiluvchining yig`indisidan iborat bo`lsa, u holda bu determinant qiymati quyidagi ikkita determinantlarning yig`indisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_1 \\ a_{12} & a_{22}+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$$

8^0. Agar determinantning ixtiyoriy satr (ustun) elementlari biror songa ko`paytirilib boshqa satr (ustun) elementlariga qo`shilsa, uning qiymati o`zgarmaydi.

9^0. Determinantning qiymati ixtiyoriy satr (ustun) elementlarini ularning mos algebraik to`ldiruvchilariga ko`paytmalari yig`indisiga teng bo`ladi.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \cdots + a_{in}\cdot A_{in}$$

yoki

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j} + A_{2j} + \cdots + a_{2n}\cdot A_{2n}$$

Bular determinantning tartibini pasaytirib hisoblash formulasi deyiladi.

10^0. Determinantning ixtiyoriy satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) elementlarining algebraik to`ldiruvchilariga ko`paytmalari yig'indisi nolga teng bo`ladi.

Masalan, ushbu IV tartibli determinantni hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 5\cdot 2\cdot(-1) = 30 .$$

Diagonal matritsaning determinanti uning diagonal elementlari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Determinantlarni hisoblang.

a). Ikkinchi tartibli determinantni hisoblang.

1. $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = ?$

2. $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = ?$

3. $\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} = ?$

4. $\begin{vmatrix} \sin x & cosx \\ -cosx & sinx \end{vmatrix} = ?$

5. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = ?$

6. $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} = ?$

7. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = ?$

8. $\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = ?$

9. $\begin{vmatrix} 21 & -2 \\ 23 & -1 \end{vmatrix} = ?$

10. $\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -6 & -9 \end{vmatrix} = ?$

11. $\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} = ?$

12. $\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = ?$

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = ?$

14. $\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = ?$

15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = ?$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = ?$

17. $\begin{vmatrix} 1 & -12 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = ?$

18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -13 & 4 \end{vmatrix} = ?$

19. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = ?$

20. $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = ?$

b) Uchinchi tartibli determinantni hisoblang.

b).

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = ?$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = ?$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = ?$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = ?$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = ?$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = ?$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = ?$

8. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = ?$

9. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = ?$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = ?$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = ?$

12. $\begin{vmatrix} sinx & 0 & cosx \\ 0 & 1 & 0 \\ -cosx & 0 & sinx \end{vmatrix} = ?$

13. $\begin{vmatrix} 23 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -20 & -3 & -1 \end{vmatrix} = ?$

14. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 11 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$

15. $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = ?$

16. $\begin{vmatrix} 13 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 21 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = ?$

17. $\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = ?$

18. $\begin{vmatrix} sinx & 0 & 0 \\ -3 & tgx & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$

19. $\begin{vmatrix} e^x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & e^{-x} \end{vmatrix} = ?$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = ?$

c). Determinantlarni tartibini pasaytirish usuli bilan hisoblang.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -7 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = ?$

5. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -7 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$

6. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = ?$

7. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = ?$

8. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$

10. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = ?$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$

12. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$

14. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = ?$

15. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 8 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$

16. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = ?$

17. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = ?$

18. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$

20. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = ?$

3-§. Teskari matritsa

1-ta'rif. Agar kvadrat A matritsa uchun $AB = BA = E$ tenglik o`rinli bo`lsa, u holda B matritsa A matritsa uchun ***teskari matritsa*** deyiladi.

A matritsaga teskari matritsa A^{-1} kabi belgilanadi.

2-ta'rif. Agar A matritsaning determinanti nolga teng bo'lsa, ***xos*** matritsa, noldan farqli bo'lsa, ***xosmas*** matritsa deyiladi.

Teorema 1. A kvadrat matritsa teskari matritsaga ega bo'lishi uchun A matritsa xosmas matritsa bo'lishi zarur va yetarli.

Teskari matritsa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

formula bilan topiladi[3].

Ushbu

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

matritsa berilgan bo'lsa, A matritsa uchun $detA \neq 0$ bo'lsa, teskari matritsa 2 usulda topiladi:

1. Klassik usul. **2. Jordan usuli.**

Misol 1.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ matritsa uchun teskari A^{-1} matritsani klassik usulda toping.

Klassik usulda teskari matritsa

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

formula bo'yicha hisoblanadi. Bu yerda $|A|$ berilgan matritsa determinanti. A_{ij} (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3) berilgan matritsaning algebraik to'ldiruvchilari.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-2+12-20-2+15+16=43-24=19\neq 0.$$

3 Писменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис-пресс, 2009. 608 с.

Demak, A matritsa maxsus emas matritsa. A^{-1} teskari matritsa mavjud. Algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-1+8=7 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-(-3+4)=-1$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=12-2=10 \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-(-5-4)=9$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2-2=-4 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=-(8-10)=2$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-10-1=-11 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-(-4-3)=7$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=2-15=-13$$

A_{ij} larni (1) formulaga qo'yamiz:

$A^{-1}=1/19\begin{pmatrix} 7 & -1 & 10 \\ 9 & -4 & 2 \\ -11 & 7 & -13 \end{pmatrix}$ teskari matritsaning to'g'ri topilganini

$$AA^{-1}=E \qquad (3)$$

formula bo'yicha tekshiramiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}*1/19\begin{pmatrix} 7 & -1 & 10 \\ 9 & -4 & 2 \\ -11 & 7 & -13 \end{pmatrix}=1/19*\begin{pmatrix} 14+27-22 & -2-12+14 & 20+6-26 \\ 35+9-44 & -5-4+28 & 50+2-52 \\ 7-18+11 & -1+8-7 & 10-4+13 \end{pmatrix}=$$

$$=1/19*\begin{pmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

Demak, A^{-1} to'g'ri topilgan.

Misol 2. $$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa determinantining algebraik to'ldiruvchilari

$A_{11}=5$, $A_{12}=-12$, $A_{13}=-20$, $A_{21}=3$, $A_{22}=-2$, $A_{23}=-12$,
$A_{31}=4$, $A_{32}=6$, $A_{33}=10$

bo‘lgani uchun unga birkitilgan matritsa quyidagicha bo‘ladi:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -12 & -2 & 6 \\ -20 & -12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Yuqorida ko‘rilgan matritsa uchun $|A|=26\neq 0$ ekanligidan va unga birkitilgan matritsadan foydalanib, A^{-1} teskari matritsani topamiz:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\overline{A}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -12 & -2 & 6 \\ -20 & -12 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{26} & \frac{3}{26} & \frac{2}{13} \\ -\frac{6}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{10}{13} & -\frac{6}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

Misol 3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ matritsa uchun teskari A^{-1} matritsani Jordan usulida toping.

$|A|=16\neq 0$ teskari matritsa mavjud. Berilgan matritsani birlik matritsa hisobida kengaytirib, faqat satrlar ustida elementar almashtirishlar bajaramiz, bu usulni to chap tomonda A matritsa o’rnida birlik matritsa hosil bo’lguncha davom ettiramiz, o’ng tomonda hosil bo’lgan matritsa berilgan matritsaga nisbatan teskari matritsa bo’ladi.

$(A|E)\sim(E|A^{-1})$ – Jordan usuli algoritmi.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/16 & -5/16 & -1/16 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 14/16 & 6/16 & -2/16 \\ 0 & 0 & 1 & -1/16 & -5/16 & -1/16 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11/16 & -7/16 & 5/16 \\ 0 & 1 & 0 & 14/16 & 6/16 & -2/16 \\ 0 & 0 & 1 & -1/16 & -5/16 & -1/16 \end{array}\right) \qquad A^{-1}=1/16\begin{pmatrix} -11 & -7 & 5 \\ 14 & 6 & -2 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

teskari matritsa to'g'ri topilganini (3) formulaga qo'yib, tekshiramiz:

$$AA^{-1}=1/16\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} -11 & -7 & -5 \\ 14 & 6 & -2 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=1/16\begin{pmatrix} -11+28-1 & -7+12-5 & 5-4-1 \\ 11-14+3 & 7-6+15 & -5+2+3 \\ -44+42+2 & -28+18+10 & 20-6+2 \end{pmatrix}=$$

$$=1/16\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

demak, teskari matritsa to'g'ri topilgan.

Mustaqil yechish uchun misollar

***A* matritsaga teskari matritsa A^{-1} ni toping va $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ ekanini tekshiring:**

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ 14. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 16. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ 18. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 20. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

4-§. Matritsaning rangi

Ushbu

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

matritsa berilgan.

1-ta'rif. A matritsaning k-tartibli ***minori*** deb, bu matritsadan ixtiyoriy k ta satr va k ta ustunni ajratishdan hosil bo'lgan kvadrat matritsaning determinantiga aytiladi.

2-ta'rif. A Matritsaning ***rangi*** deb, uning noldan farqli minorlarining eng katta tartibiga yoki matritsaning chiziqli bog`lanmagan ustun yoki satrlarining eng katta soniga aytiladi va **rangA** kabi belgilanadi.

3-ta'rif. Quyidagi almashtirishlar, chiziqli almashtirish deb ataladi:

a) ixtiyoriy ikkita satr (ustun) elementlarini o'rnini almashtirish;

b) ixtiyoriy satr (ustun) elementlarini biror songa ko'paytirib, boshqa satr (ustun) ning mos elementlariga qo'shish;

c) faqat nollardan iborat satr (ustun) ni o'chirish;

Chiziqli almashtirishlar matritsa rangini o'zgartirmaydi. Shu sababli, elementar almashtirishlardan foydalanib, matritsaning bosh diogonal elementlaridan (kvadrat matritsa bo'lishi shart emas) pastdagi barcha elementlar nolga keltiriladi. Bu holda matritsaning rangi bosh diogonaldagi noldan farqli elementlar soniga teng bo'ladi.

Masalan, $A_{4\times 3}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

matritsaning rangini aniqlaymiz. Bu matritsaning noldan farqli elementi mavjud va shu sababli r(A) ≥ 1. Endi noldan farqli ixtiyoriy bir, masalan $a_{11}= -2$ elementni, o'z ichiga olgan va noldan farqli bo'lgan II tartibli minor mavjud yoki yo'qligini aniqlaymiz:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2-9=-11 \neq 0.$$

Demak, r(A) ≥ 2 bo'ladi. Bu noldan farqli II tartibli minorni o'z ichiga olgan ikkita III tartibli minorlarni qaraymiz:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Bu yerdan ko'rilayotgan matritsaning rangi r(A)=2 ekanligi kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, n-tartibli maxsusmas A matritsaning rangi r(A)=n bo'ladi.

Matritsa rangi ikki usulda topiladi:

1. Matritsa rangi ta'rifga asoslangan "***minorlar ajratish***" usuli.

2. Elementar almashtirishlar bajarib, diagonal matritsaga keltirishga asoslangan "***Gauss algoritmi***".

Misol . Matritsa rangini hisoblang:

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ A matritsa $3x5$ tartibli, demak, uning rangi 3 dan yuqori bo'lmaydi. 3-tartibli minorlarni hisoblaymiz:

$$M_1=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-4-10-12+12+4+10=0 \qquad M_2=\begin{vmatrix}2 & -1 & -2\\ 4 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 8\end{vmatrix}=-32-2+8-8+32+2=0$$

$$M_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 7\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=-8-14-16+16+8-14=0 \qquad M_4=\begin{vmatrix}-1 & 3 & -2\\ -2 & 5 & 1\\ -1 & 1 & 8\end{vmatrix}=-40-3+4-10+48+1=0$$

$$M_5=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 4\\ -2 & 5 & 7\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=-10-21-8+20+12+7=0 \qquad M_6=\begin{vmatrix}3 & -2 & 4\\ 5 & 1 & 7\\ 1 & 8 & 2\end{vmatrix}=6-14+160-4+20-168=0$$

$$M_7=\begin{vmatrix}-1 & -2 & 4\\ -2 & 1 & 7\\ -1 & 8 & 2\end{vmatrix}=-2+14-64+4+56-8=0 \qquad \begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 7\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=20+42+16-40-14-24=0$$

$$M_9=\begin{vmatrix}2 & 3 & -2\\ 4 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 8\end{vmatrix}=80+6-8+20-2-96=0 \qquad M_{10}=\begin{vmatrix}2 & -2 & 4\\ 4 & 1 & 7\\ 2 & 8 & 2\end{vmatrix}=4+128-28-8+16-112=0$$

Barcha 3-tartibli minorlar nolga teng. Endi 2-tartibli minorlarni hisoblaymiz:

$$M_1^1=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-5+6=1 \qquad M_1^1\neq 0 \quad r(A)=2$$

Bu usulda noldan farqli minor topilgunga qadar hisoblashlar davom etadi. Shuning uchun, tartibi kattaroq matritsa rangini hisoblash bir muncha qiyinchiliklarga olib keladi.

Misol 2. Matritsa rangini elementarni almashtirishlar yordamida nollar yig'ib hisoblaymiz:

$$A=\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

bu matritsaning rangi $\begin{pmatrix}31 & 17 & 43\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ matritsa rangiga teng.

$$\begin{vmatrix} 31 & 17 & 43 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 40 \neq 0 \qquad r\begin{pmatrix} 31 & 17 & 43 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

Demak, berilgan matritsaning rangi ham 3 ga teng. $r(A)=3$.

Mustaqil yechish uchun misollar

Berilgan A matritsaning rangini toping:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 61 \\ 2 & 5 & 1 & -23 \\ 17 & -1 & 20 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 & 2; \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -10 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

15. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

22. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

23. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

20. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 5 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

24. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

21. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

25. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

II BOB. . n-O'LCHOVLI ARIFMETIK FAZO. VEKTORLAR SISTEMASI

1-§. Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar

1-ta'rif. Boshi A nuqtada, oxiri B nuqtada bo'lgan yo'naltirilgan kesma ***vektor*** deyiladi va u $\overrightarrow{AB}$ yoki $\vec{a}$ kabi belgilanadi.

Vektorning o`lchami uning koordinatalari (komponentalari) orqali aniqlanadi.

2-ta'rif. Koordinatasi (komponentasi) n ta bo'lgan vektor, **n o'lchovli vektor** deyiladi.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad (1)$$

$n = 1; 2; 3$ bo`lganda geometrik vektorlar hosil bo`ladi, ya'ni ularni chizmada tasvirlash mumkin. $n > 3$ bo`lganda vektorni geometrik tasvirlab bo`lmaydi.

3-ta'rif. Ikkita vektorning o`lchamlari bir xil va mos koordinatalari teng bo`lsa, ular ***o`zaro teng vektorlar*** deyiladi.

4-ta'rif. Vektorning ***moduli yoki uzunligi*** deb, uning koordinatalari kvadratlari yig`indisidan chiqarilgan kvadrat ildizga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \qquad (2)$$

5-ta'rif. Barcha koordinatalari nollardan iborat bo`lgan vektor ***nol vektor*** deyiladi va u quyidagicha yoziladi:

$$\vec{0} = (0, 0, \dots, 0) \qquad (3)$$

Bunday vektor tayin yo'nalishga ega emas, uning moduli nolga teng.

Uzunligi birga teng vektor birlik vektor deyiladi.

6-ta'rif. Bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar ***kollinear vektorlar*** deyiladi.

Agar ikki vektor o'zaro kollinear, bir xil yo'nalgan va modullari teng bo'lsa, bu vektorlar ***teng*** vektorlar deyiladi.

7-ta'rif. Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar ***komplanar vektorlar*** deyiladi.

Vektorlar ustida songa ko`paytirish, qo`shish va ayirish kabi chiziqli amallarni bajarish mumkin.

8-ta'rif. $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorni λ haqiqiy songa ***ko`paytmasi*** deb,

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \qquad (4)$$

vektorga aytiladi, ya'ni vektorni songa ko`paytirish uchun uning barcha koordinatalari shu songa ko`paytiriladi.

Agar $\lambda > 0$ bo'lsa, yo'nalish o'zgarmaydi, $\lambda < 0$ bo'lsa, yo'nalish qarama-qarshisiga o'zgaradi. Vektor uzunligi $|\lambda|$ marta ortadi.

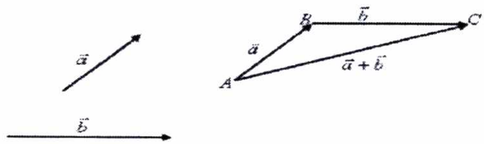
9-ta'rif. $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *va* $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektorlarning ***yig`indisi*** (ayirmasi) deb,

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \pm (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots, a_n \pm b_n) \qquad (5)$$

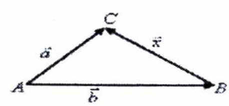
formula bilan aniqlanuvchi vektorga aytiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b}$ kabi belgilanadi. (1- chizma)

Vektorlarni qo'shish ta'rifidan istalgan *A*, *B* va *C* uchta nuqta uchun



1-chizma

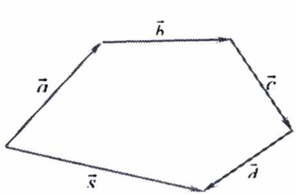


2-chizma

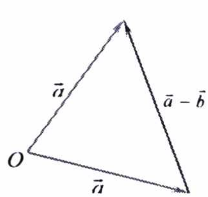
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikni vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasi deyiladi. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, shunday $\vec{x}$ vektorga aytiladiki, ular uchun $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$ tenglik o'rinli bo'ladi. U holda $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$. (2- chizma)

Para-m qoidasida ham chimalar 3-shaklda to'trta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{s}$ tasvirlangan.

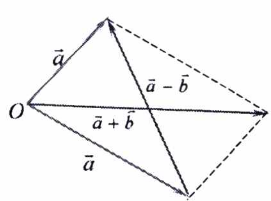
$\vec{a}$ va $\vec{b}$ *vektorlarning ayirmasi* deb, $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi



3-shakl



4-shakl



5-shakl

bo‘lgan $(-\vec{b})$ vektor yig‘indisiga aytiladi, ya’ni $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

$\vec{a}-\vec{b}$ ayirmani topish uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorni umumiy O nuqtaga qo‘yamiz. Bunda $\vec{b}$ vektor oxiridan $\vec{a}$ vektor oxiriga yo‘nalgan vektor $\vec{a}-\vec{b}$ vektorni beradi (4-shakl).

$\vec{a}$ vektor OX o’q bilan φ burchak hosil qilsin. U holda vektorning bu o’qdagi proektsiyasi;

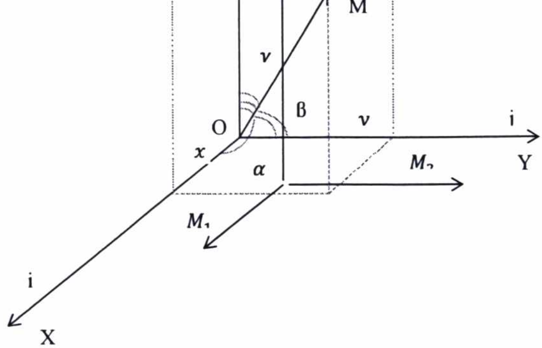
$$pr_x\vec{a} = |\vec{a}| \cdot cos\varphi \qquad (6)$$

formula bilan topiladi.

Bir nechta vektorlar yig’indisini o’qdagi proektsiyasi qo’shiluvchi vektorlar proektsiyalarining yig’indisiga teng:

$$pr_x(\vec{a}+\vec{b}+\cdots+\vec{c}) = pr_x\vec{a}+pr_x\vec{b}+\cdots+pr_x\vec{c} \qquad (7)$$

O`zaro perpendikulyar kesishuvchi uchta o`qlar, ularning kesishish nuqtasi bo`lgan koordinata boshi va birlik masshtabga ega bo`lgan tartiblangan sistema, fazoda to`g`ri burchakli ***dekart koordinatalar sistemasi*** deyiladi.



6-rasm

10-ta'rif. Nuqtaning radius-vektori $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ ning o'qlardagi $x = OM_1$, $y = OM_2$ va $z = OM_3$ proektsiyalari $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ vektorning ***to'g'ri burchakli koordinatalari*** deyiladi.

OX ***–abtsissa,*** OY ***–ordinata*** va OZ ***–applikata o`qlari*** deyiladi.

$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ radius-vektorning moduli yoki uzunligi:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (8)$$

formula bilan topiladi. Koordinata o'qlaridagi i, j, k birlik vektorlar ***ortlar*** deyiladi. Radius-vektorlar ortlar orqali quyidagicha ifodalanadi.

$$\vec{r} = xi + yj + zk \qquad (9)$$

U holda $\vec{a} = xi + yj + zk$ vektorni **λ songa ko'paytmasi** deb;

$$\lambda\vec{a} = \lambda xi + \lambda yj + \lambda zk \qquad (10)$$

ga aytiladi.

$\vec{a} = x_1 i + y_1 j + z_1 k \; va \; \vec{b} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ vektorlarni yig'indisi (ayirmasi) deb,

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2)i + (y_1 \pm y_2)j + (z_1 \pm z_2)k \qquad (11)$$

ga atiladi.

Masalan, ***a***=(4,–2,1) va ***b***=(5,9,0) vektorlar uchun

a+***b***=(4+5,–2+9,1+0)=(9,7,1) , ***a***–***b***=(4–5,–2–9,1–0)=(–1, –11,1).

$A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari:

$$\begin{cases} a_x = pr_x\overrightarrow{AB} = X = x_2 - x_1 \\ a_y = pr_y\overrightarrow{AB} = Y = y_2 - y_1 \\ a_z = pr_z\overrightarrow{AB} = Z = z_2 - z_1 \end{cases} \qquad (12)$$

formula bilan topiladi.

Agar $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektor koordinata o'qlari bilan α, β va γ burchaklar tashkil etsa, u holda bu vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari:

$$cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \qquad cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \qquad cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} \qquad (13)$$

formula bilan topiladi.

Har qanday vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari kvadratlarining yig'indisi 1 ga teng:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 \qquad (14)$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $\vec{a}(3;1;2)$ va $\vec{b}(0;-2;-3)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisini toping.

2. $\vec{a}(2;1)$ va $\vec{b}(4;-3)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{b}$ va $\vec{a}-\vec{b}$ vektorlarni toping va geometrik tasvirlang.

3. $\vec{a}(1;-3)$ va $\vec{b}(-4;-1)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{b}$ vektorning uzunligini toping va geometrik tasvirlang.

4. $A(1;4)\ va\ B(-3;0)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligini toping va geometrik tasvirlang.

5. $\vec{a}(-3;1;0)$ va $\vec{b}(2;5;-1)$ vektorlar berilgan. $|2\vec{a}-\vec{b}|$ ni topin.

6. $M(0;3;-4)$ nuqta yasalsin va uning radius-vektori uzunligi hamda yo'nalishini aniqlang.

7. $r = 2i + 3j - 6k$ vektor yasalsin va uning radius-vektorining uzunligi, yo'nalishi va yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

8. M nuqtaning radius-vektori OX o'qi bilan 45^0 va OY o'qi bilan 60^0 burchak tashkil etadi. Bu $\overrightarrow{OM}$ vektorning uzunligi $r = 6$ ga teng. Agar M nuqtaning applikatasi manfiy bo'lsa, uning koordinatalarini aniqlang va $r = \overrightarrow{OM}$ vektorni $i;\ j;\ k$ ortlar orqali ifodalang.

9. $A(1;2;3)\ va\ B(3;-4;6)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektor va uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini toping. Uning uzunligi va yo'nalishini aniqlang. $\vec{a}$ vektorni koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklarini aniqlang.

10. $\overrightarrow{OA} = i + j\ va\ \overrightarrow{OB} = k - 3j$ vektorlarga yasalgan parallelogramning dioganallarini toping.

11. $\vec{a}(3;0;2)$ va $\vec{b}(0;-1;-3)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisini toping.

12. $\vec{a}(2;1)$ va $\vec{b}(4;-3)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{b}$ va $\vec{a}-\vec{b}$ vektorlarni toping va geometrik tasvirlang.

13. $\vec{a}(1;-5)$ va $\vec{b}(-4;-1)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{b}$ vektorning uzunligini toping va geometrik tasvirlang.

14. $A(1;4)\ va\ B(-5;0)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligini toping va geometrik tasvirlang.

15. $\vec{a}(-3;0;0)$ va $\vec{b}(2;5;-1)$ vektorlar berilgan. $|2\vec{a}-\vec{b}|$ ni topin.

16. $M(0;3;-4)$ nuqta yasalsin va uning radius-vektori uzunligi hamda yo'nalishini aniqlang.

17. $r = i + 3j - 6k$ vektor yasalsin va uning radius-vektorining uzunligi, yo'nalishi va yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

18. M nuqtaning radius-vektori OX o'qi bilan 45^0 va OY o'qi bilan 60^0 burchak tashkil etadi. Bu $\overrightarrow{OM}$ vektorning uzunligi $r = 6$ ga teng. Agar M nuqtaning applikatasi manfiy bo'lsa, uning koordinatalarini aniqlang va $r = \overrightarrow{OM}$ vektorni $i;\ j;\ k$ ortlar orqali ifodalang.

19. $A(1;0;3)\ va\ B(5;-4;6)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektor va uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini toping. Uning uzunligi va yo'nalishini aniqlang. $\vec{a}$ vektorni koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklarini aniqlang.

20. $\overrightarrow{OA} = 3i + j\ va\ \overrightarrow{OB} = k - 2j$ vektorlarga yasalgan parallelogramning dioganallarini toping.

2-§. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi

1-ta'rif. Ikki vektorning ***skalyar ko`paytmasi*** deb, shu vektorlar modullarining ular orasidagi burchak kosinusi ko`paytmasiga aytiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ko'rinishda belgilanadi. Demak,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\varphi \qquad (1)$$

Endi n o`lchovli vektorlarning skalyar ko`paytmasiga ta'rif beramiz.

Agar vektorlar $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ va $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ koordinatalar ko'rinishida berilsa, skalyar ko'paytma;

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_n\cdot b_n \qquad (2)$$

formula bilan topiladi, ya'ni ikki vektorning skalyar ko`paytmasi shu vektorlar mos koordinatalari ko`paytmalarining yig`indisiga teng.

Skalyar ko`paytmaning xossalari.

1^0. $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$, agar $\vec{a}=0$ bo'lsa, $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ bo'ladi;

2^0. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$-o'rin almashtirish qonuni;

3^0. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$-taqsimot qonuni;

4^0. $(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$-bu yerda $\lambda=const.$

5^0. Ortlarning skalyar ko'paytmasi:

$$i\cdot j=0,\quad j\cdot k=0,\quad i\cdot k=0,\quad i\cdot i=1,\quad j\cdot j=1,\quad k\cdot k=1$$

Ikki vektor orasidagi burchak:

$$cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_n\cdot b_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}} \qquad (3)$$

Masalan, a=(1,0,1) va b=(0,1,1) vektorlar orasidagi φ burchak uchun

$$cos\varphi=\frac{1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

natijani olamiz va undan $\varphi=60^0$ ekanligini topamiz.

(3) formulada z_1=0, z_2=0 deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $a=(x_1, y_1)$ va $b=(x_2, y_2)$ vektorlar orasidagi φ burchak

$$cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

formula bilan topilishini ko'ramiz.

Parallellik sharti:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n} \qquad (4)$$

Perpendikulyarlik sharti:

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n = 0 \qquad (5)$$

Masalan, $\boldsymbol{a}$=(3,6) va $\boldsymbol{b}$=(5,-2) vektorlarning skalyar ko‘paytmasi

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = x_1y_2 + y_1y_2 = 3\cdot5+6\cdot(-2)=15-12=3.$$

Xuddi shunday tarzda fazodagi $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi uchun

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (3)$$

formula o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $\vec{a}(-1;1;0)\ va\ \vec{b}(1;-2;2)$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

2. Uchlari $A(2;-1;3),\ B(1;1;1)\ va\ C(0;0;5)$ nuqtalarda bo’lgan ABC uchburchakning burchaklarini toping.

3. Tekislikda uchlari $O(0;0), A(2;0)\ va\ B(1;-1)$ nuqtalarida bo’lgan uchburchak berilgan. Shu uchburchakning OB tomoni bilan OM medianasi orasidagi burchakni toping.

4. $\vec{a}(2;1;0)\ va\ \vec{b}(0;-2;1)$ vektorlarga yasalgan parallelogramm dioganallari orasidagi burchakni toping.

5. $\vec{a} = i + j + 2k\ \ va\ \vec{b} = i - j + 4k$ vektorlar berilgan. $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ ni toping.

6. $(2i - j)\cdot j + (j - 2k)\cdot k + (i - 2k)^2$ ifodani soddalashtiring.

7. $A(-2;3;-4), B(3;2;5), C(1;-1;2)\ va\ D(3;2;-4)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorning $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ vektordagi proyeksiyani toping.

8.Uchlari $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0)\ va\ C(3;-2;1)$ nuqtalarda bo’lgan uchburchak berilgan. Uchburchakning B uchidagi tashqi burchagini toping.

9. Parallelogramning ketma-ket uchta $A(-3;-2;0), B(3;-3;1)\ va\ C(5;0;2)$ uchlari berilgan. Uning to’rtinchi uchi D hamda $\overrightarrow{AC}\ va\ \overrightarrow{BD}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

10. $m \ va \ n$ lar o'zaro 120^0 burchak tashkil etuvchi birlik vektorlar bo'lsa. $\vec{a} = 2m + 4n \ va \ \vec{b} = m - n$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

11. $\vec{a}(-1;1;0) \ va \ \vec{b}(1;-2;2)$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

12. Uchlari $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1) \ va \ C(0;0;5)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakning burchaklarini toping.

13. Tekislikda uchlari $O(0;0), A(2;0) \ va \ B(1;-1)$ nuqtalarida bo'lgan uchburchak berilgan. Shu uchburchakning OB tomoni bilan OM medianasi orasidagi burchakni toping.

14. $\vec{a}(2;1;0) \ va \ \vec{b}(0;-2;1)$ vektorlarga yasalgan parallelogramm dioganallari orasidagi burchakni toping.

15. $\vec{a} = i + j + 2k \ \ va \ \vec{b} = i - j + 4k$ vektorlar berilgan. $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ ni toping.

16. $(2i - j) \cdot j + (j - 2k) \cdot k + (i - 2k)^2$ ifodani soddalashtiring.

17. $A(-2;3;-4), B(3;2;5), C(1;-1;2) \ va \ D(3;2;-4)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorning $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ vektordagi proyeksiyani toping.

18. Uchlari $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0) \ va \ C(3;-2;1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan. Uchburchakning B uchidagi tashqi burchagini toping.

19. Parallelogramning ketma-ket uchta $A(-3;-2;0), B(3;-3;1) \ va \ C(5;0;2)$ uchlari berilgan. Uning to'rtinchi uchi D hamda $\overrightarrow{AC} \ va \ \overrightarrow{BD}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

20. $m \ va \ n$ lar o'zaro 120^0 burchak tashkil etuvchi birlik vektorlar bo'lsa, $\vec{a} = 2m + 4n \ va \ \vec{b} = m - n$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

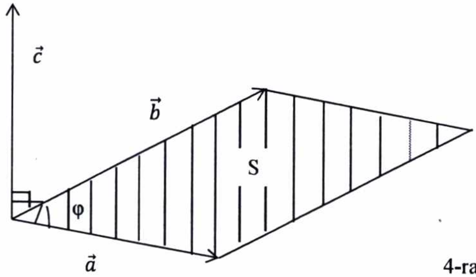
3-§. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi

1-ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ***vektor ko'paytmasi*** deb, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ko'rinishda belgilanuvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

1. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar;

2. $\vec{c}$ vektor uchidan qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng qisqa burilish soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning bunday joylashuvi o'ng uchlik deyiladi) bo'ladi;

3. $\vec{c}$ vektorning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuziga teng, ya'ni $|\vec{c}| = S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\varphi$ ($\varphi - \vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak)



4-rasm

Vektor ko'paytmaning xossalari.

1^0. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

2^0. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ –taqsimot qonuni.

3^0. Ortlarning vektor ko'paytmasi:

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j, \quad j \times i = -k, \quad k \times j = -i,$$
$$i \times k = -j, \quad i \times i = 0, \quad j \times j = 0, \quad k \times k = 0 \qquad (6)$$

4^0. Agar vektorlar $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ va $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ ko'rinishda berilsa, u holda vektor ko'payma;

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (7)$$

ga teng bo'ladi.

5^0. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuzi:

$$S_{par} = |\vec{a} \times \vec{b}| \qquad (8)$$

Misol: ***a***=(2; 3; –1) va ***b***=(3; –1; –4) vektorlarga yasalgan parallelogramm yuzasini toping.

Yechish: Bunda (3) tenglikdan $a\times b=-13i+5j-11k=(-13, 5, -11)$ ekanligi ma'lum. Shu sababli (4) formulaga asosan

$$S=\sqrt{(-13)^2+5^2+(-11)^2}=\sqrt{169+25+121}=\sqrt{315}=3\sqrt{35}$$

shu vektorlarga yasalgan uchburchak yuzi:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| \qquad (9)$$

Misol: $a=(2; 3; -1)$ va $b=(3; -1; -4)$ vektorlarning vektorial ko'paytmasini toping.

Yechish: (7) formulaga asosan

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}=-13i+5j-11k=(-13, 5, -11).$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $\vec{a}=3i, \vec{b}=2k$ bo'lsa, $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ ni toping va shaklini chizing.
2. Uchlari $A(7;3;4), B(1;0;6)$ va $C(4;5;-2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak-ning yuzini toping.
3. $\vec{a}(2;0;1)$ va $\vec{b}(1;2;2)$ vektorlarga parallelogramm yasalgan. Parallelogrammning yuzi va balandligini toping.
4. Ushbu $i\times(j+k)-j\times(i+k)+k\times(i+j+k)$ ifodani soddalashtiring.
5. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro 45^0 burchak tashkil etadi. Agar $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$ bo'lsa, $\vec{a}-2\vec{b}$ va $3\vec{a}+2\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuzini toping.
6. $\vec{a}=-j+k$ va $\vec{b}=i+j+k$ vektorlarga yasalgan uchburchakning yuzini toping.
7. m va n o'zaro 30^0 burchak tashkil etuvchi birlik vektorlar bo'lsa, $\vec{a}=m+2n$ va $\vec{b}=2m+n$ vektorlarga yasalgan uchburchakning yuzini toping.
8. $\vec{a}=2i+3j$ va $\vec{b}=i-j+2k$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ ni toping.

9. $\vec{a} = 3i, \vec{b} = 2k$ bo'lsa, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ni toping va shaklini chizing.

10. Uchlari $A(7;3;4), B(1;0;6)$ va $C(4;5;-2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak-ning yuzini toping.

11. $\vec{a}(2;0;1)$ va $\vec{b}(1;2;2)$ vektorlarga parallelogramm yasalgan. Parallelogrammning yuzi va balandligini toping.

12. Ushbu $i \times (j + k) - j \times (i + k) + k \times (i + j + k)$ ifodani soddalashtiring.

13. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro 45^0 burchak tashkil etadi. Agar $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$ bo'lsa, $\vec{a} - 2\vec{b}$ va $3\vec{a} + 2\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuzini toping.

14. $\vec{a} = -j + k$ va $\vec{b} = i + j + k$ vektorlarga yasalgan uchburchakning yuzini toping.

15. m va n o'zaro 30^0 burchak tashkil etuvchi birlik vektorlar bo'lsa, $\vec{a} = m + 2n$ va $\vec{b} = 2m + n$ vektorlarga yasalgan uchburchakning yuzini toping.

16. $\vec{a} = 2i + 3j$ va $\vec{b} = i - j + 2k$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ni toping.

17. $\vec{a} = 3i, \vec{b} = 2k$ bo'lsa, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ni toping va shaklini chizing.

18. Uchlari $A(7;3;4), B(1;0;6)$ va $C(4;5;-2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak-ning yuzini toping.

19. $\vec{a}(2;0;1)$ va $\vec{b}(1;2;2)$ vektorlarga parallelogramm yasalgan. Parallelogrammning yuzi va balandligini toping.

20. Ushbu $i \times (j + k) - j \times (i + k) + k \times (i + j + k)$ ifodani soddalashtiring.

4-§. Uch vektorning aralash ko'paytmasi

1-ta'rif. $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning ***aralash ko'paytmasi*** deb $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ko'rinishdagi ifodaga aytiladi.

Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar o'zlarining koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, u holda

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (1)$$

1^0. Aralash ko'paytmaning istalgan ikkita ko'paytuvchisining o'rinlari o'zaro almashtirilsa, ko'paymaning ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = -(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b} = -\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a} \qquad (2)$$

2^0. Agar berilgan uchta vektorda ikkitasi o'zaro teng yoki parallel bo'lsa, aralash ko'paytma 0 ga teng bo'ladi.

3^0. Skalyar ko'paytma- $(\cdot)$ va vektor ko'paytma- $(\times)$ amallarining o'rinlarini almashtirish mumkin:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c});$$

shuning uchun ham aralash ko'paymani $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ko'rinishda, ya'ni qavslarni va ko'paytirish amallarini ko'rsatmasdan yozish qabul qilingan.

$\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga yasalgan parallelepipedning hajmi:

$$V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| \qquad (3)$$

$\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga yasalgan piramidaning hajmi:

$$V_{pir} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| \qquad (4)$$

Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar o'zaro komplanar bo'lsa, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, va aksincha $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ bo'lsa, berilgan uch vektor komplanar bo'ladi.

Masalan, $\boldsymbol{a}$=(3,1,–2), $\boldsymbol{b}$=(4,0,1), $\boldsymbol{c}$=(0,2,–1) vektorlarning aralash ko'paytmasini (1) formula bo'yicha topamiz:

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -18.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $\vec{a} = 3i + 4j, \vec{b} = -3j + k \ va \ \vec{c} = 2j + 5k$ vektorlarga yasalgan parallelepipedning hajmini toping.

2. Uchlari $O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0) \ va \ C(1;2;4)$ nuqtalarda bo'lgan piramida hajmini toping. ABC yog'ining yuzi va shu yoqqa tushirilgan balandligini hisoblang.

3. $A(2;-1;-2), D(1;2;1), C(2;3;0)$ va $D(5;0;-6)$ nuqtalarning bir tekislikda yotishini ko'rsating.

4. $\vec{a}(-1;3;2)$, $\vec{b}(2;-3;-4)$ va $\vec{c}(-3;12;6)$ vektorlarning o'zaro komplanar ekanligini ko'rsating. $\vec{c}$ vektorni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

5. $\vec{a} = 2i - j, \vec{b} = j + 3k$ va $\vec{c} = 3i + k$ vektorlarning aralash ko'paytmasini toping.

6. $\vec{a} = 3i + 4j, \vec{b} = -3j + k$ va $\vec{c} = 2j + 5k$ vektorlarga yasalgan parallelepipedning hajmini toping.

7. Uchlari $O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0)$ va $C(1;2;4)$ nuqtalarda bo'lgan piramida hajmini toping. ABC yog'ining yuzi va shu yoqqa tushirilgan balandligini hisoblang.

8. $A(2;-1;-2), D(1;2;1), C(2;3;0)$ va $D(5;0;-6)$ nuqtalarning bir tekislikda yotishini ko'rsating.

9. $\vec{a}(-1;3;2)$, $\vec{b}(2;-3;-4)$ va $\vec{c}(-3;12;6)$ vektorlarning o'zaro komplanar ekanligini ko'rsating. $\vec{c}$ vektorni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

10. $\vec{a} = 2i - j, \vec{b} = j + 3k$ va $\vec{c} = 3i + k$ vektorlarning aralash ko'paytmasini toping.

11. $\vec{a} = 3i + 4j, \vec{b} = -3j + k$ va $\vec{c} = 2j + 5k$ vektorlarga yasalgan parallelepipedning hajmini toping.

12. Uchlari $O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0)$ va $C(1;2;4)$ nuqtalarda bo'lgan piramida hajmini toping. ABC yog'ining yuzi va shu yoqqa tushirilgan balandligini hisoblang.

13. $A(2;-1;-2), D(1;2;1), C(2;3;0)$ va $D(5;0;-6)$ nuqtalarning bir tekislikda yotishini ko'rsating.

14. $\vec{a}(-1;3;2)$, $\vec{b}(2;-3;-4)$ va $\vec{c}(-3;12;6)$ vektorlarning o'zaro komplanar ekanligini ko'rsating. $\vec{c}$ vektorni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

15. $\vec{a} = 2i - j, \vec{b} = j + 3k$ va $\vec{c} = 3i + k$ vektorlarning aralash ko'paytmasini toping.

16. $\vec{a} = 3i + 4j, \vec{b} = -3j + k \ va\ \vec{c} = 2j + 5k$ vektorlarga yasalgan parallelepipedning hajmini toping.

17. Uchlari $O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0) \ va\ C(1;2;4)$ nuqtalarda bo'lgan piramida hajmini toping. ABC yog'ining yuzi va shu yoqqa tushirilgan balandligini hisoblang.

18. $A(2;-1;-2), D(1;2;1), C(2;3;0) \ va\ D(5;0;-6)$ nuqtalarning bir tekislikda yotishini ko'rsating.

19. $\vec{a}(-1;3;2),\ \vec{b}(2;-3;-4)\ va\ \vec{c}(-3;12;6)$ vektorlarning o'zaro komplanar ekanligini ko'rsating. $\vec{c}$ vektorni $\vec{a}\ va\ \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

20. $\vec{a} = 2i - j, \vec{b} = j + 3k\ va\ \vec{c} = 3i + k$ vektorlarning aralash ko'paytmasini toping.

5 §.Vektorlar sistemasi

1-ta'rif. $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$ vektorlarning ***chiziqli kombinatsiyasi*** deb,

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$$

yig`indiga aytiladi. Bu yerda $\lambda_1; \lambda_2; \dots \lambda_n$ haqiqiy sonlar bo'lib, bu ***chiziqli kombinatsiyaning koeffitsiyentlari*** deyiladi.

2-ta'rif. $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$ chekli sondagi vektorlar uchun kamida bittasi noldan farqli shunday $\lambda_1; \lambda_2; \dots \lambda_n$ sonlar topilsaki, ular uchun

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = 0 \qquad (1)$$

tenglik bajarilsa, u holda berilgan $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$ sistema ***chiziqli bog`langan sistema*** deyiladi.

3-ta'rif. Agar (3) tenglik faqat $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ bo`lgandagina bajarilsa, u holda $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$ sistema, ***chiziqli erkli yoki chiziqli bog`lanmagan sistema*** deyiladi.

4-ta'rif. Agar $\overrightarrow{\lambda_i}(i = 1, n)$ sonlar uchun

$$\vec{a} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} \qquad (2)$$

tenglik bajarilsa, u holda $\vec{a}$ vektor $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi yoki $\vec{a}$ vektor $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$ vektorlarning ***chiziqli kombinatsiyasidan iborat*** deyiladi.

Fazodagi chekli vektorlar sistemasining chiziqli bog`lanishi quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$ vektorlar sistemasining:

a) kamida bitta vektori nol vektordan iborat bo`lsa;

b) qandaydir 2 ta vektori proportsional bo`lsa, bu sistema chiziqli bog`langan bo`ladi.

2^0. Agar $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$ sistema chiziqli bog`langan bo`lsa, istalgan $\overrightarrow{b_1}; \overrightarrow{b_2}; \dots; \overrightarrow{b_k}$ sistema uchun

$$\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}; \overrightarrow{b_1}; \overrightarrow{b_2}; \dots; \overrightarrow{b_k} \qquad (3)$$

sistema ham chiziqli bog`langan bo`ladi.

3^0. Berilgan V fazoda $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$ sistema chiziqli bog`lanmagan bo`lsa, uning har qanday qism sistemasi ham chiziqli bog`lanmagan bo`ladi.

4^0. $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$ vektorlar sistemasining istalgan vektori bu sistema orqali chiziqli ifodalanadi, ya'ni

$$\overrightarrow{a_i} = 0 \cdot \overrightarrow{a_1} + 0 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + 1 \cdot \overrightarrow{a_i} + 0 \cdot \overrightarrow{a_{i+1}} + \dots + 0 \cdot \overrightarrow{a_n}$$

5^0. $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog`langan bo`lish uchun, ulardan kamida bittasi qolganlari orqali chiziqli ifodalanishi zarur va yetarlidir.

5-ta'rif. Agar V vektorlar fazosining o`zaro chiziqli bog`lanmagan shunday

$$\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$$

vektorlar sistemasi mavjud bo`lsaki, bu vektorlar fazosining qolgan barcha vektorlari shu sistema orqali chiziqli ifodalansa, u holda $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$ vektorlar sistemasi V ***vektor fazoning bazisi*** deyiladi.

6-ta'rif. Chekli vektorlar sistemasining ***rangi*** deb undagi chiziqli bog`lanmagan vektorlarning maksimal soniga aytiladi.

Misol. Quyidagi vektorlar sistemasining bazislaridan birini quring va rangini aniqlang:

$a_1(1;2;-1;3)$, $a_2(0;3;4;1)$, $a_3(-2;-1;6;-5)$, $a_4(5;1;2;-4)$

Yechish: $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=\theta$ vektor tenglama umumiy yechimini Gauss-Jordan usulida quramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -19 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -19 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Yechilgan sistemadan x_1, x_2, x_4 – erkli bo'lmagan noma'lumlar, x_3 esa erkli noma'lum ekanligi ko'rinib turibdi. Demak, berilgan vektorlar sistemasining bazisi $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ va $\boldsymbol{a_4}$ vektorlar sistemasi bo'lib, sistemaning ranggi bazisidagi vektorlar soni 3 ga teng.

7-ta'rif. Agar V vektor fazoning biror

$\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_n}$ (4)

vektorlari sistemasining istalgan ikki vektorlari o`zaro ortogonal bo`lsa, u holda (4) sistema ***ortogonal vektorlar sistemasi*** deyiladi.

Misol. Quyidagi vektorlar sistemasi ortogonalmi?

$\boldsymbol{a_1}(0;5;-2)$, $\boldsymbol{a_2}(29;-2;-5)$, $\boldsymbol{a_3}(2;4;10)$

Yechish:

$(\boldsymbol{a_1} \cdot \boldsymbol{a_2})=0-10+10=0$

$(\boldsymbol{a_1} \cdot \boldsymbol{a_3})=0+20-20=0$

$(\boldsymbol{a_2} \cdot \boldsymbol{a_3})=58-8-50=0$

Berilgan vektorlar sistemasi ortogonal vektolar sistemasi ekan.

Misol. $\boldsymbol{a_1}(1;1;1)$, $\boldsymbol{a_2}(0;1;1)$, $\boldsymbol{a_3}(0;0;1)$ vektorlar sistemasi ustida ortogonal sistema quring.

rang $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})=3$ chiziqli erkli sistema ekan.

$\boldsymbol{b_1}=\boldsymbol{a_1}(1;1;1)$

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1 \cdot a_2)}{(b_1 \cdot b_1)} b_1 = (0;1;1) - \frac{2}{3}(1;1;1) = \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(b_1 \cdot a_3)}{(b_1 \cdot b_1)} b_1 - \frac{(b_2 \cdot a_3)}{(b_2 \cdot b_2)} b_2 = (0;0;1) - \frac{1}{3}(1;1;1) - \frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \left(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Berilgan vektorlar sistemasi ustida qurilgan ortogonal sistema vektorlarini butun koordinatali vektorlarga aylantirib, (1;1;1); (-2;1;1); (0;-1;1) natijani olamiz.

8-ta'rif. Agar ortogonal sistema qaralayotgan fazoning bazisi bo`lsa, bunday sistemaga ***ortogonal bazis*** deyiladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $\vec{a}(3;1;2)$ va $\vec{b}(0;-2;-3)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisini toping.

2. $\vec{a}(2;1)$ va $\vec{b}(4;-3)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{b}$ va $\vec{a}-\vec{b}$ vektorlarni toping va geometrik tasvirlang.

3. $\vec{a}(1;-3)$ va $\vec{b}(-4;-1)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{b}$ vektorning uzunligini toping va geometrik tasvirlang.

4. $A(1;4)$ va $B(-3;0)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligini toping va geometrik tasvirlang.

5. $\vec{a}(-3;1;0)$ va $\vec{b}(2;5;-1)$ vektorlar berilgan. $|2\vec{a}-\vec{b}|$ ni topin.

6. $M(0;3;-4)$ nuqta yasalsin va uning radius-vektori uzunligi hamda yo'nalishini aniqlang.

7. $r = 2i + 3j - 6k$ vektor yasalsin va uning radius-vektorining uzunligi, yo'nalishi va yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

8. M nuqtaning radius-vektori OX o'qi bilan 45^0 va OY o'qi bilan 60^0 burchak tashkil etadi. Bu $\overrightarrow{OM}$ vektorning uzunligi $r = 6$ ga teng. Agar M nuqtaning applikatasi manfiy bo'lsa, uning koordinatalarini aniqlang va $r = \overrightarrow{OM}$ vektorni i; j; k ortlar orqali ifodalang.

9. $A(1;2;3)$ va $B(3;-4;6)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektor va uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini toping. Uning uzunligi va yo'nalishini aniqlang. $\vec{a}$ vektorni koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklarini aniqlang.

10. $\overrightarrow{OA}=i+j$ va $\overrightarrow{OB}=k-3j$ vektorlarga yasalgan parallelogramning dioganallarini toping.

11. $\vec{a}(-1;1;0)$ va $\vec{b}(1;-2;2)$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

12. Uchlari $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$ va $C(0;0;5)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakning burchaklarini toping.

13. Tekislikda uchlari $O(0;0), A(2;0)$ va $B(1;-1)$ nuqtalarida bo'lgan uchburchak berilgan. Shu uchburchakning OB tomoni bilan OM medianasi orasidagi burchakni toping.

14. $\vec{a}(2;1;0)$ va $\vec{b}(0;-2;1)$ vektorlarga yasalgan parallelogramm dioganallari orasidagi burchakni toping.

15. $\vec{a}=i+j+2k$ va $\vec{b}=i-j+4k$ vektorlar berilgan. $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ ni toping.

16. $(2i-j)\cdot j+(j-2k)\cdot k+(i-2k)^2$ ifodani soddalashtiring.

17. $A(-2;3;-4), B(3;2;5), C(1;-1;2)$ va $D(3;2;-4)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektorning $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ vektordagi proyeksiyani toping.

18. $\vec{a}(-1;1;0)$ va $\vec{b}(1;-2;2)$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

19. Uchlari $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$ va $C(0;0;5)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakning burchaklarini toping.

20. Tekislikda uchlari $O(0;0), A(2;0)$ va $B(1;-1)$ nuqtalarida bo'lgan uchburchak berilgan. Shu uchburchakning OB tomoni bilan OM medianasi orasidagi burchakni toping.

Quyida berilgan vektorlar sistemasining ranggi va bazislari topilsin:

1. a_1=(5;2;-3;1); a_2=(4;1;-2;3); a_3=(1;1;-1;2); a_4=(3;4;-1;2)

2. a_1=(2;-1;3;5); a_2=(4;-3;1;3); a_3=(3;-2;3;4); a_4=(4;-1;15;17);a_5=(7;-6; -7;0)

3. a_1=(2;1;-3;1); a_2=(4;2;-6;2); a_3=(6;3;-9;3); a_4=(1;1;1;1)

4. a_1=(1;2;3); a_2=(2;3;4); a_3=(3;2;3); a_4=(4;3;4) a_5=(1;1;1)

5. a_1=(5;2;-3;1); a_2=(4;1;-2;3); a_3=(1;1;-1;-2); a_4=(3;4;-1;2)

6. a_1=(2;-1;3;5); a_2=(4;-3;1;3); a_3=(3;-2;3;4); a_4=(4;-1;15;17); a_5=(-7;-6;-7;0)

III BOB.CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

1-§.Chiziqli tenglamalar sistemasi. Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi haqida Kroner-Kapelli teoremasi.

1-ta'rif. n noma'lumli m ta *chiziqli tenglamalar sistemasi* deb

,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

ga aytiladi. Bu yerda a_{ij} (i - satr, j - ustun, $i = 1,m; j = 1,n$), b_i ($i = 1,m$) lar berilgan sonlar bo`lib, $a_{ij}$ lar sistemaning koeffitsiyentlari, $b_i$ ($i = 1,m$ ) - lar esa ozod hadlar, $x_i$ ($i = 1,m$ ) - lar *o`zgaruvchilar yoki noma'lumlar* deyiladi va ular ixtiyoriy qiymatlar qabul qiladilar.

2-ta'rif. Agar $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sonlarni $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lar o`rniga mos ravishda qo`yganimizda (1) sistemaning har bir tenglamasi to`g`ri sonli tenglikka aylansa, u holda $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ vektor berilgan sistemaning *yechimi* deyiladi.

3-ta'rif. Agar (1) sistemaning yechimi bo`lsa, u ***birgalikda;*** yechimi bo`lmasa, ***birgalikda emas;*** faqat bitta yechimi bo`lsa, u ***aniq sistema;*** cheksiz ko`p yechimi bo`lsa, u ***aniqmas sistema*** deyiladi.

4-ta'rif. Agar b_i ($i = 1,m$) ozod hadlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, ***bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistema*** deyiladi.

5-ta'rif. Agar b_i ($i = 1,m$) ozod hadlarning barchasi nolga teng, ya'ni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

bo'lsa, ***bir jinsli tenglamalar sistemasi*** deyiladi.

Teorema (Kroneker – Kapelli teoremasi)

Kroneker-Kapelli teoremasi (1) chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda yoki birgalikda emasligini aniqlaydi.

(1) chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy va ozod hadlar hisobiga kengaytirilgan matritsasini tuzamiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right) \qquad (3)$$

Teorema. Agar A matritsa rangi B matritsa rangiga teng bo'lib, noma'lumlar soniga ham teng bo'lsa, ya'ni $r(A)=r(B)=m$ bo'lsa, (1) tenglamalar sistemasi aniq bo'ladi, sistema birgalikda bo'lib, yagona yechimga ega bo'ladi.

Agar $r(A)=r(B)<m$ bo'lsa, (1) sistema birgalikda bo'lib, cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Agar $r(A)<r(B)$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi, sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Misol. Quyidagi sistemalarni birgalikda yoki birgalikda emasligini tekshiramiz:

$$a)\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

Buning uchun asosiy va kengaytirilgan matritsa rangini topamiz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix}$$

2-satr elementlaridan 1-satr elementlarini ayiramiz:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix}\quad r(A)=2\qquad B=\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1\\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4\end{array}\right)$$

bu matritsa rangin toppish uchun yana yuqoridagi ishni takrorlaymiz, natijada B matritsa quyidagi ko'rinishni oladi.

$$B\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4\end{array}\right),\qquad B_1=\begin{pmatrix}7 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 25 & 22 & 4\end{pmatrix}$$

matritsa rangini topamiz:

$$M=|B_1|=\begin{vmatrix}7 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 25 & 22 & 4\end{vmatrix}=225-154=71;\qquad r(B_1)=3$$

Demak, $r(B)=3$ bo'lib, $r(A)\neq r(B)$ va sistema birgalikda emas.

$$b)\ \begin{cases}x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1\\ 2x_1-\ x_2+2x_3-\ x_4=0\\ 5x_1+3x_2+8x_3+\ x_4=1\end{cases}$$

Ozod hadlar hisobiga kengaytirilgan matritsa tuzamiz:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1\end{array}\right)$$

3-satr elementlaridan 1-satr elementlarini ayiramiz:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

A matritsa B matritsaning qismi bo'lgani uchun $r(A)=r(B)=2$ ekanini ko'rish mumkin. Demak, sistema birgalikda.

Berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarining birgalikda yoki birgalikda emasligini tekshiring.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=1 \\ x_1+x_2+3x_3=2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+4x_3=1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x+3y+2z=9 \\ x+2y-3z=14 \\ 3x+4y+z=16 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ x_1+4x_2-3x_3=7 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2x_1-x_2=3 \\ 3x_1-5x_2=1 \\ 4x_1-7x_2=1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3 \\ x_1+4x_2-2x_3+3x_4=2 \\ -x_1-2x_2-12x_3-7x_4=-4 \\ 3x_1+11x_2+x_3-4x_4=7 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1+2x_2=4 \\ x_1-4x_2=-1 \\ 7x_1+10x_2=12 \\ 5x_1+6x_2=8 \\ 3x_1-16x_2=-5 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3=1 \\ 2x_1+10x_2+8x_3=3 \\ 3x_1+15x_2+12x_3=5 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=-1 \\ x_1+9x_2+6x_3=3 \\ x_1+3x_2+4x_3=1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=18 \\ 3x_1-x_2+4x_3=4 \\ 2x_1+x_2+5x_3=0 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=5 \\ x_1-3x_2+5x_3=4 \\ 2x_1+x_2+5x_3=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+4x_2-3x_3=2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+4x_2-3x_3=5 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2 \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4 \end{cases}$

$$15.\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14 \\ 3x_1+2x_2+x_3=10 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-x_3=5 \\ x_1+x_2=3 \end{cases} \qquad 16.\ \begin{cases} 3x_1+2x_2=4 \\ x_1-4x_2=-1 \\ 7x_1+10x_2=12 \\ 5x_1+6x_2=8 \\ 3x_1-16x_2=-5 \end{cases} \qquad 17.\ \begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2 \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5 \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3 \end{cases}$$

2-§. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning ***Kramer formulasi*** determinantlaridan foydalanib, sistema yechimini topishdir.

Sistema yechimi Kramer formulalari deb atalgan quyidagi formulalar bo'yicha topiladi:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},\ \ldots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Bu yerda Δ noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan kvadrat matritsa determinanti, Δ_1, Δ_2, Δ_3, ..., Δ_n lar asosiy matritsada mos ravishda 1, 2, 3, ..., n-ustun elementlarini ozod hadlar bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinantlar. Shuni ta'kidlash kerakki, sistemada noma'lumlar va tenglamalar soni teng bo'lgan hollarda Kramer formulasini qo'llash maqsadga muvofiq.

Agar $\Delta\neq0$ bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

Agar $\Delta=0$ bo'lib, Δ_1, Δ_2, Δ_3 lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, sistema yechimga ega emas.

Agar $\Delta=0$ bo'lib, $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=\ldots=\Delta_n=0$ bo'lsa, sistema aniqmas, cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Formulani 3 noma'lumli 3 ta chiziqli tenglamalar sistemasi misolida keltiramiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

sistema uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Buni misollarda ko'ramiz:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$ sistemani Kramer formulasi bilan yeching.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4+8+9-8-3+12=14$$

$\Delta \neq 0$ bo'lgani uchun sistema aniq, yagona yechim Kramer formulalari yordamida topiladi.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -32+8+30-8+40-24=14$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -20+32+12-40-4+48=28$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8+80+72-64-24-30=42$$

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1, \quad x_2 = \frac{28}{14} = 2, \; x_3 = \frac{42}{14} = 3. \quad (1;2;3)$$

b) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 8 \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$ sistemani Kramer formulasi yordamida yeching.

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 2 & 3\\ 2 & 8 & -1\\ 9 & 1 & 8\end{vmatrix}=256+6-18-216-32+4=266-266=0$$

$\Delta=0$ Kramer teoremasiga ko'ra, sistema yoki aniqmas, yoki birgalikdamas. Δ_1 ni hisoblaymiz:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-2 & 2 & 3\\ 8 & 8 & -1\\ 0 & 1 & 8\end{vmatrix}=-128+24-128-2=-234\neq 0$$

$\Delta=0$, $\Delta_1\neq 0$ bo'lgani uchun Kramer teoremasiga ko'ra sistema aniqlanmagan.

$c)\ \begin{cases}-2x_1+x_2-x_3=7\\ 4x_1+5x_2-3x_3=-5\\ x_1+3x_2-2x_3=1\end{cases}$ sistemani Kramer formulasiga ko'ra yeching.

$$\Delta=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 4 & 5 & -3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=20-3-12+5+8-18=33-33=0$$

$\Delta=0$, demak, sistema yoki aniqmas, yoki birgalikdamas. Δ_1, Δ_2, Δ_3 larni hisoblaymiz:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}7 & 1 & -1\\ -5 & 5 & -3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=-70+15-3+5-10+63=83-83=0$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-2 & 7 & -1\\ 4 & -5 & -3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=-20-21-4-5+56-6=56-56=0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 7\\ 4 & 5 & -5\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-10-5+84-35-4-30=84-84=0$$

$\Delta=0$, $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$ bo'lgani uchun sistema aniqmas, cheksiz ko'p yechimga ega.

Sistemani Gauss algoritmi bilan yechamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & -1 & 7\\ 4 & 5 & -3 & -5\\ 1 & 3 & -2 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & -1 & 7\\ 0 & 7 & -5 & 9\\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -1 & -1 & 7\\ 0 & 7 & -5 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

berilgan tenglama $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = x_3 + 7 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3x_3 - 5 \\ x_3 \in R \end{cases}$ sistemaga teng kuchli. Bu tenglamani Kramer formulasi bilan yechish mumkin.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -10-4= -14$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_3+7 & 1 \\ 3x_3-5 & 5 \end{vmatrix} =5(x_3+7)-3x_3+5=5x_3+35-3x_3+5=2x_3+40=2(x_3+20)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & x_3+7 \\ 4 & 3x_3-5 \end{vmatrix} = -2(3x_3-5)-4(x_3+7) = -6x_3+10-4x_3-28 = -10x_3-18 = -2(5x_3+9)$$

$$x_1 = \frac{2(x_3+20)}{-14} = -\frac{x_3+20}{7}, \qquad x_2 = \frac{-2(5x_3+9)}{-14} = \frac{5x_3+9}{7}$$

Sistema yechimi $\left(-\frac{x_3+20}{7}; \frac{5x_3+9}{7}; x_3\right)$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

1. $\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x+2y-4z=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3=-1 \\ x_1-5x_2+x_3=7 \\ 2x_1+x_2-3x_3=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+x_3=-1 \\ x_1-x_2+2x_3=5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20 \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11 \\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40 \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x-y-6z+3t+1=0 \\ 7x-4y+2z-15t+32=0 \\ x-2y-4z+9t-5=0 \\ x-y+2z-6t+8=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-\ \ y-\ \ z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 2x_1-\ x_2+\ x_3=\ 4 \\ 3x_1+2x_2-\ x_3=\ 1 \\ x_1+\ x_2-2x_3=-3 \end{cases}$

3-§. Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa, Gauss va Gauss-Jordan usullari bilan yechish

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yechish. Berilgan (1) sistemani

$$AX=B \qquad (2)$$

matritsa ko'rinishida yozib olamiz.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(2) tenglamani har ikki tomonini chapdan A^{-1} teskari matritsaga ko'paytiramiz.

$A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot B,$ $\qquad A^{-1}\cdot A=E$ $\qquad$ bo'lgani uchun

$$X=A^{-1}\cdot B \qquad (3)$$

tenglik hosil bo'ladi.

(3) formula bilan topilgan X ustun matritsa sistemaning yechimi bo'ladi.

Misol. a) misolni shu usul bilan yechamiz:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ x_3=\ 8 \\ 3x_1+2x_2+\ x_3=10 \\ 4x_1+3x_2-2x_3=\ 4 \end{cases}$$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ matritsa uchun teskari matritsa mavjud, chunki $\Delta=|A|=14\neq 0$.

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7 & 7 & 0\\ 10 & -6 & 2\\ 1 & 5 & -4\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7 & 7 & 0\\ 10 & -6 & 2\\ 1 & 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\ 10\\ 4\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-56+70\\ 80-60+8\\ 8+50-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix};$$

Javob: $(1;2;3)$.

Gaussning klassik usuli – bu berilgan sistemaning umumiy yechimini topishdan iborat bo'lib, bunda sistemaning tenglamalari ustida elementar almashtirishlar bajarib berilgan sistema trapetsiyali yoki uchburchakli ko'rinishga keltiriladi. So'ng oxirgi tenglamadan boshlab noma'lumlar ketma-ket topiladi.

$$b)\ \begin{cases}x_1+2x_2-4x_3=-4\\ 3x_1-2x_2+x_3=11\\ 4x_1-5x_2+x_3=9\end{cases}\sim\begin{cases}x_1+2x_2-4x_3=-4\\ -8x_2+13x_3=23\\ -13x_2+17x_3=25\end{cases}\sim\begin{cases}x_1+2x_2-4x_3=-4\\ -8x_2+13x_3=23\\ -\frac{33}{8}x_3=-\frac{99}{8}\end{cases}$$

$x_3=3$, $x_2=2$, $x_1=4$ *Javob*: $(4;2;3)$.

Gauss-Jordan usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish Gauss usuli va teskari matritsa qurish Jordan algoritmiga asoslangan. Gauss-Jordan usuliga sxema ko'rinishida quyidagicha yoziladi: $(A|B)\sim(E|X)$.

$(A|B)$-asosiy matritsani ozod hadlar hisobiga kengaytirilgan matritsa.

E-birlik matritsa. X-tenglama yechimini ifodalovchi ustun matritsa.

$$c)\ \begin{cases}x_1+x_2-6x_3-4x_4=6\\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2\\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6\\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7\end{cases}$$

sistemani Gauss-Jordan usuli bilan yeching.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -6 & -4 & 6\\ 3 & -1 & -6 & -4 & 2\\ 2 & 3 & 9 & 2 & 6\\ 3 & 2 & 3 & 8 & -7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -6 & -4 & 6\\ 0 & -4 & 12 & 8 & -16\\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6\\ 0 & -1 & 21 & 20 & -25\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -6 & -4 & 6\\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6\\ 0 & -1 & 21 & 20 & -25\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-6&-4&6\\0&1&-3&-2&4\\0&0&24&12&-10\\0&0&18&18&-21\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-6&-4&6\\0&1&-3&-2&4\\0&0&1&1/2&-5/12\\0&0&18&18&-21\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-3&-2&2\\0&1&-3&-2&4\\0&0&1&1/2&-5/12\\0&0&0&9&-27/2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1/2&3/4\\0&1&0&-1/2&11/4\\0&0&1&1/2&-5/12\\0&0&0&1&-3/2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&1/3\\0&0&0&1&-3/2\end{array}\right)$$

Javob: (0; 2; 1/3; -3/2).

d) $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=1\\x_1+x_2-2x_3=3\\2x_1+2x_2-4x_3=6\end{cases}$ sistema birgalikda, chunki

$$r\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-2\\2&2&-4\end{pmatrix}=r\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\1&1&-2&3\\2&2&-4&6\end{array}\right)$$

sistema cheksiz ko'p yechimga ega, umumiy yechimni Gauss-Jordan usuli yordamida topamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\1&1&-2&3\\2&2&-4&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\1&1&-2&3\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\1&1&-1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&2&-3&2\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&1&-3/2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/2&2\\0&1&-3/2&1\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}x_1-\dfrac{1}{2}x_3=2\\x_2-\dfrac{3}{2}x_3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}x_3+2\\x_2=\dfrac{3}{2}x_3+1\end{cases}$$

Javob: $\left(\dfrac{1}{2}x_3+2;\ \dfrac{3}{2}x_3+1;\ x_3\right)\quad x_3\in R$.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yeching.

1. $\begin{cases} 2x+y+4z+8t=-1 \\ x+3y-6z+2t=3 \\ 3x-2y+2z-2t=8 \\ 2x+y-2z=4 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5 \\ 3x_1-x_2+2x_3=-5 \\ 7x_1+x_2-x_3=10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=1 \\ 4x_1+3x_2+3x_3=4 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-7 \\ 3x_1-3x_2+x_3=12 \\ 5x_1-x_2-4x_3=-5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2 \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3 \\ 3x_1+x_2+3x_3+4x_4=-7 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3=0 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4+6=0 \\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4+8=0 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4+8=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x-y+3z=9 \\ 3x-5y+z=-4 \\ 4x-7y+z=5 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2x-5y+3z+t=5 \\ 3x-7y+3z-t=-1 \\ 5x-9y+6z+2t=7 \\ 4x-6y+3z+t=8 \end{cases}$

Quyidagi tenglamalar sistemasini Gauss, Gauss-Jordan usuli bilan yeching:

1. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=3 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-1 \\ 3x_1+2x_2-x_3=2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1-3x_2-x_3=1 \\ 3x_1+x_2+4x_3=-1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3+x_4=2 \\ 2x_1+x_2+4x_3+3x_4=1 \\ x_1+5x_2-x_3+x_4=-4 \\ 3x_1-x_2+6x_3+5x_4=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-4x_4=3 \\ x_1-2x_2+x_3-3x_4=-1 \\ 3x_1+4x_2-5x_3+x_4=4 \\ 2x_1-4x_2+2x_3-6x_4=5 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=4 \\ x_1+3x_2+x_3=0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x_1+x_2=0 \\ -x_1+2x_2=5 \\ 2x_1-4x_2=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3 \\ x_1+2x_2-x_3-4x_4=-1 \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=35 \\ x_1+3x_2+6x_3+10x_4+15x_5=70 \\ x_1+4x_2+10x_3+20x_4+35x_5=126 \\ x_1+5x_2+15x_3+35x_4+70x_5=210 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=5 \\ x_1+2x_2-2x_3+3x_4=-6 \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=-1 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x_1-2x_2-5x_3=1 \\ 4x_1+x_2-2x_3=-3 \\ -x_1+3x_2+7x_3=2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -x_1+2x_2-x_3=4 \\ 3x_1+x_2-2x_3=1 \\ 4x_1-x_2+x_3=-3 \end{cases}$ 13. $\begin{cases} x_1-3x_2=-5 \\ -x_1+x_2=1 \\ 4x_1-x_2=2 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x_1-x_2-3x_3=6 \\ -2x_1+2x_2+6x_3=-9 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ x_2+3x_3+x_4=15 \\ 4x_1+x_3+x_4=11 \\ x_1+x_2+5x_4=23 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3-x_4=-2 \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-5 \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1 \\ x_1+2x_2+3x_3-6x_4=-10 \end{cases}$

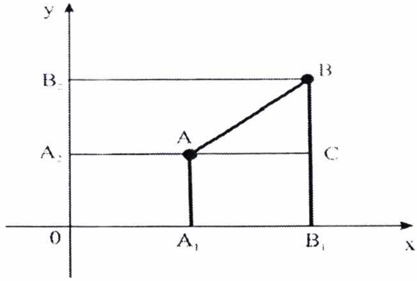
17. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3+5x_4-7=0 \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4-3=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3+3x_4-2=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-8x_4+7=0 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=2 \\ 2x_1+3x_2+7x_3+10x_4+13x_5=12 \\ 3x_1+5x_2+11x_3+16x_4+21x_5=17 \\ 2x_1-7x_2+7x_3+7x_4+2x_5=57 \\ x_1+4x_2+5x_3+3x_4+10x_5=7 \end{cases}$

IV BOB. ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI

1§. Tekislik va fazoda iIkki nuqta orasidagi masofa

Aytaylik, XOY koordinata tekisligida ikkita $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin.

AB masofani A va B nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalovchi formulani keltirib chiqarish masalasini qaraymiz. A nuqtadan koordinata o‘qlariga mos ravishda AA_1 va AA_2 perpendikulyarlarni tushiramiz. U holda $OA_1=x_1$ va $OA_2=y_1$ bo‘ladi. Shuningdek, B nuqtadan o‘qlarga BB_1 va BB_2 perpendikulyarlarni tushiramiz. Bu holda $OB_1=x_2$ va $OB_2=y_2$ bo‘ladi. A nuqta orqali Ox o‘qqa parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziq BB_1 to‘g‘ri chiziq bilan C nuqtada kesishadi.



ABC to‘g‘ri burchakli uchburchakdan (Pifagor teoremasiga ko‘ra)

$$AB^2=AC^2+BC^2$$

AC va BS kesmalarni A va B nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalaymiz:

$AC = A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = x_2 - x_1,$

$BC = A_2B_2 = OB_2 - OA_2 = y_2 - y_1.$

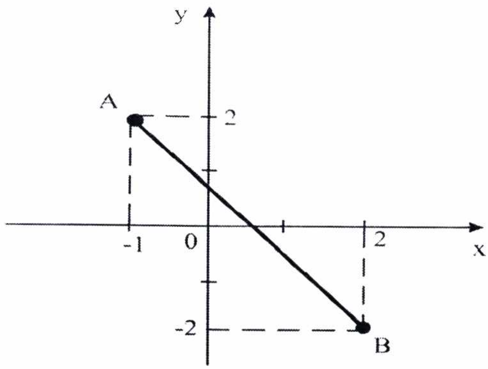
Demak, $AB^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (4)

bo‘ladi. Bu formula tekislikdagi to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida berilgan ikkinuqta orasidagi masofani topish formulasideb ataladi va amaliyotda keng qo‘llaniladi.

Misol. A(-1,2) va B (2,-2) nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. $x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = 2, y_2 - 2$ ekanligini e’tiborga olib, (1) formuladan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$AB = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ (uzunlik birligi)



R^3 fazodagi $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2 ; z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (4)$$

Masalan, $M_1(2,1)$ va $M_2(-3,0)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-1}{0-1} \Rightarrow -(x-2) = -5(y-1) \Rightarrow x - 5y + 3 = 0 .$$

2§.Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

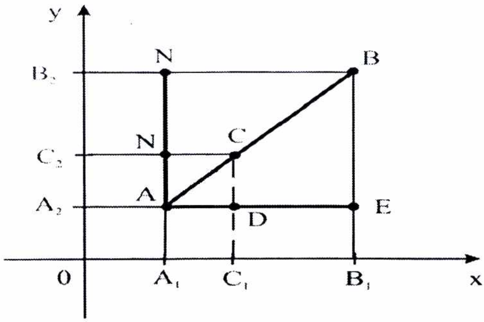
Aytaylik, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ nuqtalar va λ son berilgan bo'lsin. AB kesmani λ nisbatda bo'lish masalasini qaraymiz, ya'ni A va B nuqtalar orasida yotuvchi shunday C nuqtani topish kerakki,

$$\frac{AC}{CB} = \lambda$$

bo'lsin, C nuqtaning koordinatalarini (x,y) deylik. x va y larni A va B nuqtalarning koordinatalari va λ paramert orqali ifodalovchi ushbu

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

formulalarni keltirib chiqaramiz. Bu formulalar **kesmani λ nisbatda bo'lish** formulalari deb ataladi



A, C va *B* nuqtalardan O_x va O_y o‘qlarga perpendikulyarlar tushiramiz. U holda $OA_1=x_1$, $OC_1=x$, $OB_1=x_2$, $OA_2=y_1$, $OC_2=y$, $OB_2=y_2$ bo‘ladi. *A* nuqta orqali *Ox* o‘qqa parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziq CC_1 to‘g‘ri chiziq bilan esa *D* nuqtada kesishadi. $\angle BAE$ burchakni qaraymiz. *CD* va *BE* parallel to‘g‘ri chiziqlar uning tomonlaridan proportsional kesmalar ajratadi (bu maktab elementar geometriya kursidan ma’lum):

$$\frac{AD}{DE}=\frac{AC}{CB}=\lambda \quad (*)$$

Endi *AD* va *DE* kesmalarni *A, V, C* nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalaymiz:

$$AD=A_1C_1=OC_1-OA_1=x-x_1,$$

$$DE=C_1B_1=OB_1-OA_1=x_2-x.$$

U vaqtda (*) dan:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda \Rightarrow x-x_1=\lambda x_2-\lambda x \Rightarrow (1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2 \Rightarrow x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};$$

Xuddi shunga o‘xshash, isbot qilinadiki, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

Xususan, $\lambda=1$ desak, $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ bo‘ladi.

Bu formulalar **kesmani teng ikkiga bo‘lish formulalari** deyiladi.

Misol. Uchlari A(1,2), B(0,5), C(-2,3) nuqtalarda bo’lgan uchburchakning medianalari kesishgan nuqtasining koordinatasini toping.

Yechish. AD mediana bo'lsin, u holda D(x, y) nuqta BC tomon o'rta nuqtasi bo'lib $x_D=-1$, $y_D=4$, D(-1, 4) bo'ladi.

Uchburchak medianalar kesishgan nuqtasi O(x, y) bo'lsin, u holda

$$\frac{AO}{OD}=\lambda=2:1,\ \lambda=2$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{1+2(-1)}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2+2\cdot 4}{3}=\frac{10}{3}$$

Demak, $O(-\frac{1}{3},\ \frac{10}{3})$.

Fazoda berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin, bu nuqtalar orasidagi masofani hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz.

$$\rho(M_1M_2)=\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Haqiqatan $\overline{OM_1}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$, $\overline{OM_2}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$

$$\overline{OM_2}-\overline{OM_1}=\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1)\bar{i}+(y_2-y_1)\bar{j}+(z_2-z_1)\bar{k}$$

$$\overline{M_1M}=\sqrt{\overline{M_1M}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Uchlari $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$,…,$M(x_n;y_n)$ nuqtalarda bo'lgan ko'pburchak yuzi:

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}x_n & y_n\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right|$$

formula bilan topiladi.

Uchlari $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2), \dots, A_n(x_n,y_n)$, nuqtalarda bo'lgan qavariq ko'p burchak uchlariga mos ravishda $m_1, m_2, \dots, m_n$ og'irliklar qo'yilgan bo'lsa, u holda og'irlik markazi koordinatasi

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n};\qquad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}\qquad (4)$$

formula bilan topiladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Uchlari $A(1;1)$ va $B(10;4)$ nuqtalarda bo'lgan AB kesmani $2:1$ nisbatda bo'luvchi nuqtani toping.

2. Uchlari $A(-3;2)$ va $B(5;-4)$ nuqtalarda bo'lgan kesmani teng ikkiga bo'luvchi $N(x;y)$ nuqtaning koordinatasini toping.

3. Uchlari $A(-1;-1)$ va $B(4;-6)$ nuqtalarda bo'lgan kesmani 3:2 nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalari yig'indisini toping.

4. Uchlari $A(-2;4)$, $B(3;-1)$ va $C(2;3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak uchlariga mos ravishda 60, 40 va 100 kg toshlar (og'irliklar) osilgan. Og'irlik markazi $M(x;y)$ ni toping.

5. Uchlari $A(5;-3)$, $B(-1;-1)$ va $C(7;1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlarining o'rtalarini toping.

6. Uchlari $O(0;0)$, $A(8;0)$ va $B(0;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning OC medianasi uzunligini toping.

7. Uchlari $A(1;-1)$, $B(6;4)$ va $C(2;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning og'irlik markazini toping.

Ko'rsatma. Uchburchakning og'irlik markazi medianalar kesishish nuqtasida yotadi.

8. Uchlari $A(2;0)$, $B(5;3)$ va $C(2;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzini hisoblang.

9. $A(-1;2)$, $B(1;3)$ va $C(5;5)$ nuqtalarning bir to'g'ri chiziqda yotishini ko'rsating.

10. Uchlari $A(3;1)$, $B(4;6)$ va $C(6;3)$ nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning yuzini hisoblang.

11. $F(2;2)$ nuqtadan va OX o'qdan teng uzoqlashgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini tuzingva grafigini chizing.

12. Koordinatalar boshidan $A(-5;12)$ nuqtagacha bo'lgan masofani toping.

13. $A(3;1)$ va $B(5;4)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

14. Uchlari $A(1;0)$, $B(1;3)$ va $C(6;3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlari uzunliklarini toping va grafigini yasang.

15. Koordonatalar boshidan va $A(6;0)$ nuqtadan 5 birlik masofada yotuvchi nuqtalar topilsin.

16. Abstsissalar o'qida $A(0;3)$ nuqtadan 5 birlik masofada yotuvchi nuqtalar topilsin.

17. $A(1;1)$ va $B(5;4)$ nuqtalar hamda OX o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan A_1, B_1 nuqtalar yasalsin. Bu nuqtalarni tutashtirish natijasida hosil bo'lgan ABA_1B_1 trapetsiyaning tomonlar uzunliklarini toping.

18. Uchlari $A(2;0)$, $B(5;3)$ va $C(2;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzini hisoblang.

19. $A(-1;2)$, $B(1;3)$ va $C(5;5)$ nuqtalarning bir to'g'ri chiziqda yotishini ko'rsating.

20. Uchlari $A(3;1)$, $B(4;6)$ va $C(6;3)$ nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning yuzini hisoblang.

3§. Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamasi

1. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

Bu yerda A, B, C lar o'zgarmas sonlar.

a) $C = 0$ bo'lsa, $y = -\frac{A}{B}x$ –to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi.

b) $B = 0$ bo`lsa, $x = -\frac{C}{A}$ –to`g`ri chiziq $OX$ o`qqa parallel bo`ladi.

c) $A = 0$ bo`lsa, $y = -\frac{C}{B}$ –to`g`ri chiziq $OY$ o`qqa parallel bo`ladi.

d) $A = C = 0$ bo`lsa, $y = 0$ –to`g`ri chiziq $OX$ o`qdan iborat bo`ladi.

e) $B = C = 0$ bo`lsa, $x = 0$ to`g`ri chiziq $OY$ o`qdan iborat bo`ladi.

2. To`g`ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.

$$y = kx + b \qquad (2)$$

Bu yerda k parametr-to'g'ri chiziqning OX o'qini musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchakning tangensiga teng, ya'ni $k = tg\alpha$, b –ozod son.

Masalan, umumiy tenglamasi $4x–6y+3=0$ bo'lgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini topamiz:

$$4x-6y+3=0 \Rightarrow 6y=4x+3 \Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2} \Rightarrow k=\frac{2}{3}, \quad b=\frac{1}{2}.$$

3.To`g`ri chiziqning kesmalar bo`yicha tenglamasi.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3)$$

Bu yerda a va b to`g`ri chiziqni OX va OY o`qlardan mos ravishda ajratgan kesmalari.

Masalan, umumiy tenglamasi $2x+3y-6=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini topamiz:

$$2x+3y-6=0 \Rightarrow \frac{2}{6}x+\frac{3}{6}y-1=0 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1.$$

4 .Ikki nuqtadan o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasi.

$A(x_1;y_1)$ va $B(x_2;y_2)$ nutalardan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi;

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (4)$$

Masalan, $M_1(2,1)$ va $M_2(-3,0)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-1}{0-1} \Rightarrow -(x-2)=-5(y-1) \Rightarrow x-5y+3=0.$$

5. Berilgan nuqtadan berilgan yo`nalish bo`yicha o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasi;

$A(x_0;y_0)$ nuqtadan o’tuvchi va OX o’qini musbat yo’nalishi bilan α burchak hosil qiluvchi ($k=tg\alpha$) to’g’ri chiziq tenglamasi;

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (5)$$

Masalan, $M_0(5,-3)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi

$$y+3=k(x-5) \Rightarrow y=kx-(5k+3)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar $k=2$ desak, $M_0(5,-3)$ nuqtadan o‘tuvchi aniq bir to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y=2x-13$ hosil bo‘ladi.

6. Ikki to`g`ri chiziq orasidagi burchak.

$y_1=k_1x+b_1$ to’g’ri chiziqdan $y_2=k_2x+b_2$ to’g’ri chiziqqacha soat strelkasiga qarama-qarshi yo’nalishda hisoblanuvchi φ burchak

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (6)$$

formula bilan topiladi.

To'g'ri chiziqlar umumiy ko'rinishda

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \ va \ A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

berilsa, ikki to`g`ri chiziq orasidagi burchak ularning normal vektorlari $\overrightarrow{n_1}(A_1; B_1)$ va $\overrightarrow{n_2}(A_2; B_2)$ orasidagi burchak

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (7)$$

ga teng bo`ladi. Misol sifatida umumiy tenglamalari $5x-y+7=0$ va $3x+2y-1=0$ bo'lgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni (7) formulaga asosan topamiz:

$$\cos\varphi = \frac{5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{26 \cdot 13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^0.$$

Ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti:

$$k_1 = k_2 \ yoki \ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (8)$$

Ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \qquad yoki \qquad A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0 \qquad (9)$$

Misol sifatida burchak koeffitsiyentli tenglamalari

$$y = -3x + 5, \quad y = \frac{1}{3}x - 1$$

bilan berilgan to'g'ri chiziqlarni qaraymiz. Bu yerda $k_1=-3$ va $k_2=1/3$ bo'lgani uchun $k_1k_2= -1$. Demak, (9) shart bajarilmoqda va shu sababli L_1 va L_2 o'zaro perpendikular joylashgan.

Parallel bo'lmagan ikki $A_1x + B_1y + C_1 = 0 \ va \ A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topish uchun ularning tenglamalarini birgalikda yechish kerak.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \qquad (10)$$

$A(x_0; y_0)$ nuqtadan $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa;

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| \qquad (11)$$

Masala: $M_0(-3,-1)$ nuqtadan umumiy tenglamasi $4x+3y-1=0$ bo'lgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan D masofani toping va ular o'zaro qanday joylashganini aniqlang.

Yechish: (11) formulaga asosan

$$d = \frac{|4\cdot(-3)+3\cdot(-1)-4|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|-19|}{5} = 3{,}8.$$

Bunda

$$Ax_0 + By_0 + C = 4\cdot(-3)+3\cdot(-1)-4 = -19 < 0$$

bo'lgani uchun $M_0(-3,-1)$ nuqta L to'g'ri chiziqdan pastda joylashganligini ko'ramiz.

$Ax + By + C = 0 \ va \ Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklar bissektrisalarining tenglamalari;

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\frac{Ax_1 + By_1 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \qquad (12)$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. OY o'qdan $b = 5$ kesma ajratib, OX o'q bilan 1) 30^0 ;2) 45^0; 3) 60^0 burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziqlarning tenglamasini tuzing va grafigini yasang.
2. Koordinatalar boshidan o'tib, OX o'qi bilan; 1) 45^0; 2) 90^0; 3) 120^0 burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziqlarning tenglamasini tuzing va grafigini yasang.
3. OX o'qidan 5 birlik va OY o'qidan 4 birlik ajratuvchi to'g'ri chiziqlar tenglamalarini tuzing va grafigini chizing.
4. 1) $2x + 3y = 6$; 2) $x - 3y = 4$ to'g'ri chiziq tenglamalarini o'qlardan ajratgan kesmalar bo'yicha yozing.
5. Koordinatalar boshidan va $A(3; -4)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing va grafigini yasang.
6. Uchlari $A(1; 2)$, $B(4; 4)$, $C(7; 0)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlarining tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

7. $A(-3;1)$ nuqtadan o'tuvchi va OX o'qining musbat yo'nalishi bilan 1) 30^0; 2) 45^0; 3) 60^0 tashkil etuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

8. Quyidagi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping:

1) $y = 2x + 3$ va $y = -\frac{1}{2}x + 4$; 2) $5x - y = -7$ va $2x - 3y = -1$;

3) $2x + y = 0$ va $3x - y - 4 = 0$; 4) $x + 2y = 0$ va $2x + 4y = 7$;

9. 1) $3x - 2y - 5 = 0$, 2). $6x - 4y + 1 = 0$, 3). $6x + 4y - 3 = 0$, 4). $2x + 3y - 6 = 0$ to'g'ri chiziqlardan parallel va perpendikulyar bo'lganlarini ko'rsating.

10. Uchlari $A(1;2)$, $B(4;5)$ va $C(7;2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlari tenglamalarini tuzing va uning ichki burchaklarini toping.

11. Uchlari $A(-1;1)$, $B(3;3)$ va $C(5;0)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning medianalari tenglamalarini yozing.

12. Uchlari $A(-2;0)$, $B(2;4)$ va $C(3;-1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning balandliklari tenglamalarini tuzing.

13. $x + y - 4 = 0$ va $2x - 2y + 5 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklar bissektrisalarining tenglamasini tuzing.

14. 1) $2x + 3y = 6$; 2) $x - 3y = 4$ to'g'ri chiziq tenglamalarini o'qlardan ajratgan kesmalar bo'yicha yozing.

15. Koordinatalar boshidan va $A(3;-4)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

16. Uchlari $A(1;2)$, $B(4;4)$, $C(7;0)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlarining tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

17. $A(-3;1)$ nuqtadan o'tuvchi va OX o'qining musbat yo'nalishi bilan 1) 30^0; 2) 45^0; 3) 60^0 tashkil etuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

18. Quyidagi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping:

1) $y = 2x + 3$ va $y = -\frac{1}{2}x + 4$; 2) $5x - y = -7$ va $2x - 3y = -1$;

3) $2x + y = 0$ va $3x - y - 4 = 0$; 4) $x + 2y = 0$ va $2x + 4y = 7$;

19. 1) $3x-2y-5=0$, 2). $6x-4y+1=0$, 3). $6x+4y-3=0$, 4). $2x+3y-6=0$ to'g'ri chiziqlardan parallel va perpendikulyar bo'lganlarini ko'rsating.

20. Uchlari $A(1;2)$, $B(4;5)$ va $C(7;2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlari tenglamalarini tuzing va uning ichki burchaklarini toping.

V BOB. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR

Ikkinchi tartibli sirtlarning umumiy tenglamasi

1-ta'rif. Tenglamalari x va y o`zgaruvchi koordinatalarga nisbatan ikkinchi darajada bo`lgan chiziqlar ***ikkinchi tartibli egri chiziqlar*** deyiladi.

Tekislikdagi ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad (1)$$

Bu yerda A,B,C,D,E,F –lar o`zgarmas koeffitsiyentlar bo`lib, A,B,C koeffitsiyentlardan kamida bittasi noldan farqli bo`lishi shart.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning xususiy hollari aylana, ellips, giperbola va parabolada iborat.

1§. Aylana

2-ta'rif. Berilgan M(a; b) nuqtadan berilgan R masofada yotgan nuqtalarning geometrik o'rni, ***aylana*** deyiladi.

Markazi $M(a;b)$ nuqtada, radiusi R ga teng aylana tenglamasi (5-rasm);

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (2)$$

Markazi $M(a;0)$ nuqtada, radiusi R ga teng aylana tenglamasi (6-rasm);

$$(x-a)^2+y^2=R^2 \quad (3)$$

Markazi $M(0;b)$ nuqtada, radiusi R ga teng aylana tenglamasi (7-rasm);

$$x^2+(y-b)^2=R^2 \quad (4)$$

Markazi koordinatalar $O(0;0)$ boshida va radiusi R ga teng aylana tenglamasi (8-rasm);

$$x^2+y^2=R^2 \quad (5)$$

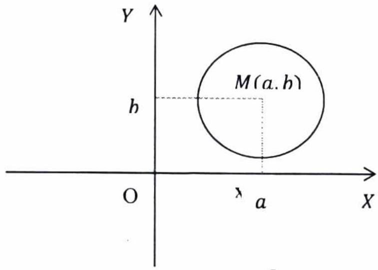
Ikkinchi tartibli umumiy tenglama aylana tenglamasi bo`lish uchun:

1. x^2 va y^2 hadlar oldidagi koeffitsiyentlar teng bo`lishi;

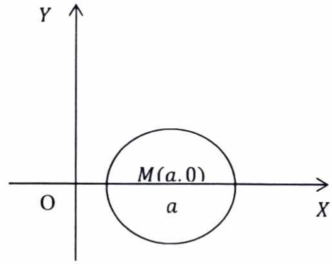
2. $x \cdot y$ ko`paytma oldidagi koeffitsiyentning nolga teng bo`lishi zarur va yetarlidir.

$M(x_0; y_0)$ nuqtadan aylanaga o'tkazilgan urinma tenglamasi;

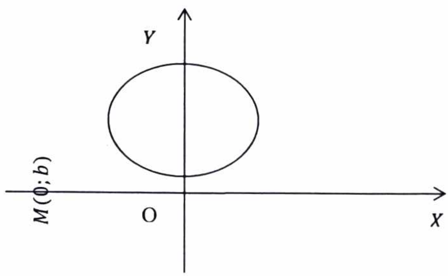
$$x \cdot x_0 + y \cdot y_0 = R^2 \qquad (6)$$



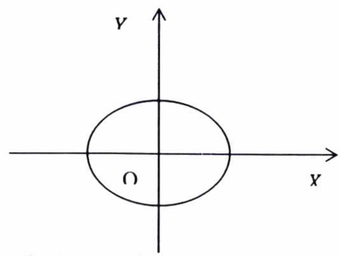
5-rasm.



6- rasm.



7-rasm.



8-rasm

Masalan, $x^2+y^2-2x+6y$- lamani qaraymiz. Bu tenglamada

A=C=1, D=–1, E=3, F=–15, $D^2+E^2-AF=1+9-(-15)=25>0$.

Demak, bu tenglama markazi M(1, –3) va radiusi R=5 bo'lgan aylanani ifodalaydi. Haqiqatan ham

$$x^2+y^2-2x+6y-15=0 \Rightarrow (x-1)^2-1+(y+3)^2-9-15=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=25=5^2.$$

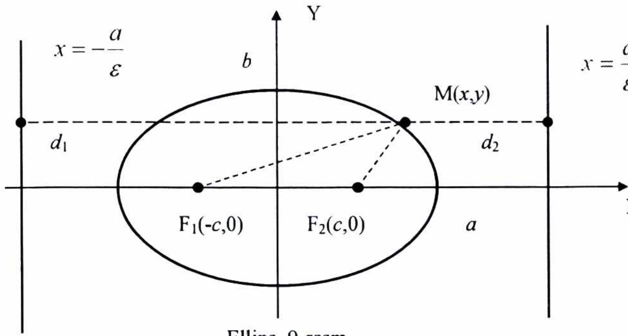
2§.Ellips

3-ta'rif. Ixtiyoriy nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ ikki nu`qtasigacha bo'lgan masofalar yig`indisi o`zgarmas $2a$ ga teng bo`lgan tekislikdagi nu`qtalarning geometrik o`rni ***ellips*** deb ataladi.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7)$$

(7)-ellipsning *kanonik tenglamasi* deyiladi.

Bu yerda, $a^2 - c^2 = b^2$



Ellips. 9-rasm

Koordinata o`qlari ellipsning simmetriya o`qlari deyiladi. Fokuslar yotgan simmetriya o`qi ellipsning ***fokal o`qi*** deyiladi. Simmetriya o`qlarining kesishgan nuqtasi ***ellips markazi*** deyiladi. (7) ko`rinishdagi kanonik tenglama bilan berilgan ellips uchun fokal o`q $OX$ o`qi bo`lib, uning markazi koordinatalar boshidir.

Ellipsning simmetriya o`qlari bilan kesishgan nuqtalari $A_1(a;0), A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ ***-uning uchlari*** deyiladi. $A_1A_2 = 2a$ -ellipsning ***katta o`qi***, $B_1B_2 = 2b$ –uning ***kichiq o`qi*** deyiladi.

4-ta'rif. Ellipsning fokuslari orasidagi masofani uning katta o`qiga nisbati ellipsning ***ekssentrisiteti*** deyiladi va u ε harfi bilan belgilanadi, ya'ni

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \qquad (8)$$

$0 < c < a$ bo`lgani uchun $0 < \varepsilon < 1$ bo`ladi.

5-ta'rif. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning F_1 va F_2 fokuslarigacha bo'lgan $r_1 = |F_1M| \; va \; r_2 = |F_2M|$ masofalar shu nuqtaning ***fokal radiusi*** deyiladi.

$$r_1 = a + \varepsilon x; \qquad r_2 = a - \varepsilon x \qquad (9)$$

6-ta'rif. Ellipsning ***direktrissalari*** deb, uning katta o`qiga perpendikulyar bo`lgan va ellips markazidan $\left|\pm\frac{a}{\varepsilon}\right|$ masofada o'tuvchi ikkita L_1va L_2 to`g`ri chiziqqa aytiladi.

Xossa. Ellipsning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasidan fokuslarigacha bo`lgan masofalarning mos direktrissalargacha bo`lgan masofalarga nisbati ε- ekssentrisitetga teng, ya'ni

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \qquad (10)$$

$M(x_0; y_0)$ nuqtadan ellipsga o'tkazilgan urinma tenglamasi;

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1 \qquad (11)$$

Misol: $x^2+4y^2=4$ tenglama ellipsni ifodalashini ko'rsating va uning barcha xarakteristikalarini toping.

Yechish: Dastlab berilgan tenglamani ikkala tomonini 4 soniga bo'lamiz:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Bu yerdan berilgan tenglama yarim o'qlari a=2 va b=1 bo'lgan ellipsni ifodalashini ko'ramiz. Unda $c^2=a^2-b^2=3$ bo'lgani uchun qaralayotgan ellipsning fokuslari $F_1(-\sqrt{3},0)$ va $F_2(\sqrt{3},0)$ nuqtalarda joylashganligini ko'ramiz. Bu natijalardan foydalanib, ellipsning ekssentrisiteti va direktrisalarini topamiz:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ellipsga tegishli $M(x,y)$ nuqtaning fokal radiuslari

$$r_1 = a + \varepsilon x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x, \; r_2 = a + \varepsilon x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

formulalar bilan topiladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipsni grafigini chizing, uning ekstsentrisiteti va fokuslarini toping.
2. Agar ellipsning fokuslari orasidagi masofa 10 ga teng bo'lib, katta yarim o'q $a = 13$ ga teng bo'lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.

3. Ekstsentrisiteti $\varepsilon = 0{,}5$, katta yarim o'qi $a = 8$ ga teng bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

4. $9x^2 + 25y^2 = 225$ ellipsnng yarim o'qlari, fokuslari, ekstsentrisitetini toping. Direktritsalari tenglamasini tuzing. Grafigini yasang.

5. $A(5; 4\sqrt{3})$ va $B(0; 8)$ nuqtalardan o'tuvchi ellips koordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik. Uning tenglamasini tuzing. A nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofalar (fokal radius-vektorlar) ni toping.

6. $9x^2 + 25y^2 = 225$ ellipsda shunday $M(x; y)$ nuqta topingki, undan o'ng fokusgacha bo'lgan masofa chap fokusgacha bo'lgan masofadan 4 marta katta bo'lsin.

7. $x^2 + y^2 = 100$ aylanadagi barcha nuqtalarning ordinatalarini ikki barabar qisqartirishdan hosil bo'lgan yangi egri chiziq tenglamasini tuzing.

8. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellips fokuslaridan o'tuvchi va markazi ellipsning yuqori uchida bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.

9. $x^2 + y^2 = 4$ aylanadagi har bir nuqtaning abstsissasi uch baravar ortirishdan hosil bo'lgan egri chiziqni tenglamasini tuzing.

10. Ellips fokuslarining biridan katta o'qining uchlarigacha bo'lgan masofalar 5 va 1 ga teng. Uning kanonik tenglamasini tuzing.

11. Markazi $M(4; 3)$ nuqtada va radiusi $R = 5$ bo'lgan aylana tenglamasini tuzing va grafigini yasang. $A(3; -1)$, $\mathrm{B}(4; -2)$ va $C(-1; -2)$ nuqtalar aylanada yotadimi?

12. $A(3; 4)$ nuqta berilgan. Diametri OA dan iborat aylana tenglamasini tuzing.

13. $x^2 + 4x + y^2 - 5 = 0$ aylanalarni markazi va radiusini toping hamda grafiklarini chizing.

14. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ aylana bilan $x - y - 5 = 0$ to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalarini toping va grafigini yasang.

15. $A(1; 2)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlariga urinuvchi aylana tenglamasini tuzing va grafiklarini yasang.

16. $A(4;4)$ nuqtadan va $x^2+y^2+4x-4y=0$ aylana bilan $x+y=0$ to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtalaridan o'tuvchi aylana tenglamasini yozing.

17. Markazi $M(4;3)$ nuqtada va radiusi $R=5$ bo'lgan aylana tenglamasini tuzing va grafigini yasang. $A(3;-1)$, $B(4;-2)$ va $C(-1;-2)$ nuqtalar aylanada yotadimi?

18. $A(3;4)$ nuqta berilgan. Diametri OA dan iborat aylana tenglamasini tuzing.

19. $x^2+4x+y^2-5=0$ aylanalarni markazi va radiusini toping hamda grafiklarini chizing.

20. $x^2+y^2-8x-4y+11=0$ aylana bilan $x-y-5=0$ to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalarini toping va grafigini yasang.

3§.Giperbola

7-ta'rif. Ixtiyoriy nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi $F_1(c;0)$; $F_2(-c;0)$ ikki nu`qtasigacha bo'lgan masofalar ayirmasi o`zgarmas $2a$ ga teng bo`lgan tekislikdagi nu`qtalarning geometrik o`rni ***giperbola*** deb ataladi.

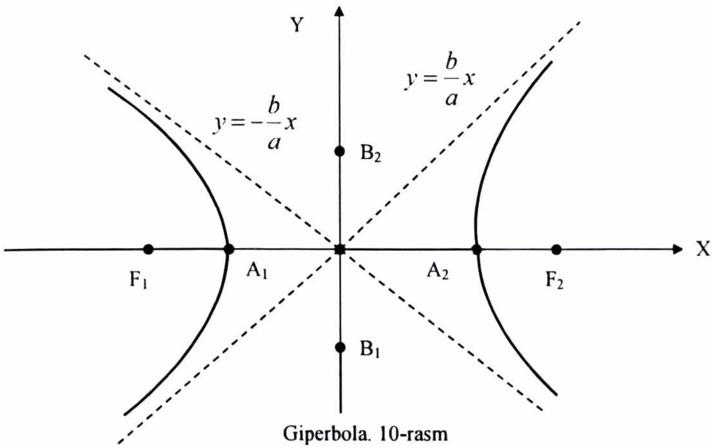
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (12)$$

(12)-giperbolaning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Bu yerda, $c^2-a^2=b^2$.

Koordinata o`qlari giperbolaning ***simmetriya o`qlari*** deyiladi. Fokuslar yotgan simmetriya o`qi giperbolaning ***fokal o`qi*** deyiladi. Simmetriya o`qlarining kesishgan nuqtasi, ya'ni koordinatalar boshi ***giperbolaning markazi*** deyiladi. $A_1(a;0)$ va $A_2(-a;0)$ nuqtalar giperbolaning ***uchlari*** deyiladi.

Giperbolaning OY o`q bilan umumiy nuqtasi yo`q. Shuning uchun $|A_1A_2|=2a$ –kesma uning ***haqiqiy o`qi,*** $|B_1B_2|=2b$ –kesma esa uning ***mavhum o`qi*** deyiladi.



Giperbola. 10-rasm

8-ta'rif. Giperbolaning A_1A_2 *va* B_1B_2 o`qlariga yasalgan to`g`ri to`rtburchak diagonallari davomida hosil bo`lgan;

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad (13)$$

to`g`ri chiziqlar giperbolaning ***asimptotalari*** deyiladi.

Giperbolaning ekssentrisiteti ham ellips kabi

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} \qquad (14)$$

formula bilan ifodalanadi. Faqat giperbola uchun $\varepsilon > 1$, chunki $c > a$.

Giperbolaning istalgan $M(x;y)$ nuqtasidan uning $F_1(c;0)$ *va* $F_2(-c;0)$ fokuslarigacha bo`lgan masofalari shu M nuqtaning ***fokal radiuslari*** deyiladi.

$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x, r_2 = -a + \varepsilon x \text{ - o'ng shox uchun;} \\ r_1 = a - \varepsilon x, r_2 = -a - \varepsilon x - \text{chap shox uchun.} \end{cases} \qquad (15)$$

9-ta'rif. Giperbolaning ***direktrissalari*** deb, uning haqiqiy o`qiga perpendikulyar bo`lgan va ellips markazidan $\left|\pm\frac{a}{\varepsilon}\right|$ masofada o'tuvchi ikkita L_1 *va* L_2 to`g`ri chiziqqa aytiladi.

Xossa. Giperbolaning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasidan fokuslarigacha bo`lgan masofalarning mos direktrissalargacha bo`lgan masofalarga nisbati ε ekssentrisitetga teng, ya'ni

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \qquad (16)$$

$M(x_0; y_0)$ nuqtadan giperbolaga o'tkazilgan urinma tenglamasi;

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1 \qquad (17)$$

Misol: Quyidagi kanonik tenglamasi bilan berilgan giperbolaning barcha xarakteristikalarini toping:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Bu giperbolaning abssissasi $x=8$, ordinatasi $y>0$ bo'lgan M nuqtasining fokal radiuslarini aniqlang.

Yechish: Berilgan tenglamani (12) kanonik tenglama bilan taqqoslab, giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o'qlari $a=4$, $b=3$ ekanligini ko'ramiz. Bu holda $c^2=a^2+b^2=16+9=25 \Rightarrow c=5$ bo'lgani uchun giperbolaning fokuslari $F_1(-5,0)$ va $F_2(5,0)$ nuqtalarda joylashganligini aniqlaymiz. Berilgan giperbolaning asimptotalari

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{4}x = \pm 0{,}75x,$$

ekssentrisiteti $\varepsilon = c/a = 5/4 = 1{,}25$, direktrisalarining tenglamasi esa $x = \pm a/\varepsilon = \pm 4/1{,}25 = \pm 3{,}2$ bo'ladi. Endi giperbolaning berilgan $M(8,y)$ nuqtasining fokal radiuslarini topamiz. Bu nuqta giperbolaning o'ng shoxida joylashgan va shu sababli (4) formulani "+" ishora bilan qaraymiz:

$$r_1 = a + \varepsilon x = 4 + 1{,}25 \cdot 8 = 14, \qquad r_2 = -a + \varepsilon x = -4 + 1{,}25 \cdot 8 = 6.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $x^2 - 4y^2 = 16$ giperbola va uning asimptotalari grafigini chizing. Giperbolaning fokuslari, ekstsentrisiteti va asimptotalari orasidagi burchakni toping.

2. $x^2 - 4y^2 = 16$ giperbolada ordinatasi 1 ga teng M nuqta olingan. Undan fokuslarigacha bo'lgan masofalarni toping.

3. 1) Fokuslar orasidagi masofa $2c = 10$, uchlari orasidagi masofa $2a = 8$;

2) haqiqiy yarim o'qi $a = 2\sqrt{5}$, ekstsentrisiteti $\varepsilon = \sqrt{1{,}2}$ bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

4. Uchlari $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo'lgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

5. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ giperbola berilgan. Uning yarim o'qlarini, fokuslari koordinatalarini, ekstsentrisitetini, direktrisasi va asimptotalari tenglamalarini tuzing. Grafigini chizing.

6. Mavhum o'qi $2b = 4$ ga teng, fokusi $F_1(\sqrt{5}; 0)$ nuqtada bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing.

7. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ giperbolaning fokusidan asimptotalarigacha bo'lgan masofa va asimptotalari orasidagi burchakni toping.

8. Biror uchidan fokuslarigacha masofalari 9 va 1 ga teng bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.

9. Markazi $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ giperbolaning o'ng fokusida bo'lgan, koordinatalar boshidan o'tuvchi aylana bilan shu giperbola asimptotalarining kesishish nuqtalarini toping.

10. Fokuslari orasidagi masofa 6 ga va ekstsentrisiteti $\frac{3}{2}$ ga teng bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing. Fokuslari abstsissalar o'qida yotadi.

11. $x^2 - 4y^2 = 16$ giperbola va uning asimptotalari grafigini chizing. Giperbolaning fokuslari, ekstsentrisiteti va asimptotalari orasidagi burchakni toping.

12. $x^2 - 4y^2 = 16$ giperbolada ordinatasi 1 ga teng M nuqta olingan. Undan fokuslarigacha bo'lgan masofalarni toping.

13. 1) Fokuslar orasidagi masofa $2c = 10$, uchlari orasidagi masofa $2a = 8$;

2) haqiqiy yarim o'qi $a = 2\sqrt{5}$, ekstsentrisiteti $\varepsilon = \sqrt{1{,}2}$ bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

14. Uchlari $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo'lgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

15. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ giperbola berilgan. Uning yarim o'qlarini, fokuslari koordinatalarini, ekstsentrisitetini, direktrisasi va asimptotalari tenglamalarini tuzing. Grafigini chizing.

16. Mavhum o'qi $2b=4$ ga teng, fokusi $F_1(\sqrt{5};0)$ nuqtada bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing.

17. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ giperbolaning fokusidan asimptotalarigacha bo'lgan masofa va asimptotalari orasidagi burchakni toping.

18. Biror uchidan fokuslarigacha masofalari 9 va 1 ga teng bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.

19. Markazi $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ giperbolaning o'ng fokusida bo'lgan, koordinatalar boshidan o'tuvchi aylana bilan shu giperbola asimptotalarining kesishish nuqtalarini toping.

20. Fokuslari orasidagi masofa 6 ga va ekstsentrisiteti $\frac{3}{2}$ ga teng bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing. Fokuslari abstsissalar o'qida yotadi.

4§.Parobola

10-ta'rif. Tekislikning har bir nuqtasidan fokus deb ataluvchi $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ nuqtasigacha va direktrisa deb ataluvchi $x=-\frac{p}{2}$ to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofalari o`zaro teng bo`lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o`rniga ***parabola*** deb ataladi.

Uchi koordinatalar boshida, simmetriya o'qi OX o'qidan iborat bo'lgan parobolaning kanonik tenglamasi;

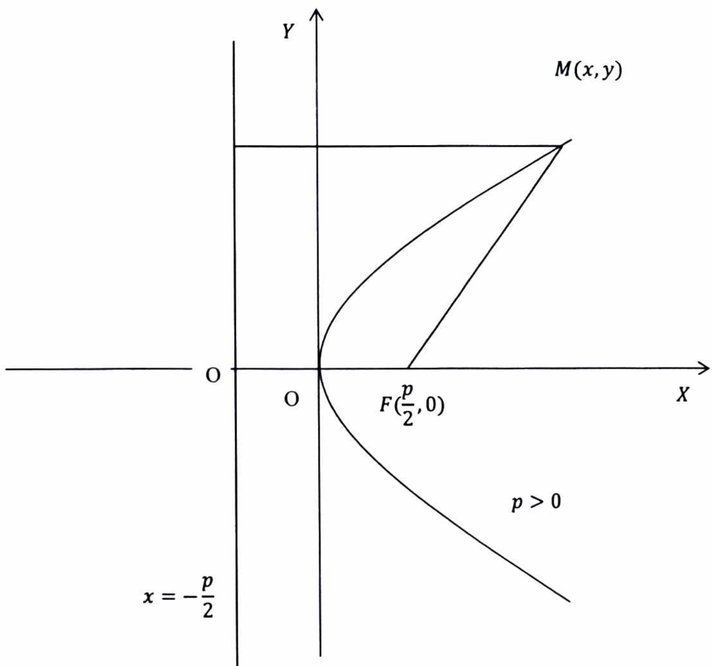
$$y^2=2px \qquad (18)$$

Agar parabolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokusigacha bo`lgan masofani $r$ bilan, shu nuqtadan direktrisasigacha bo`lgan masofani d bilan belgilasak, parabola ta'rifiga asosan:

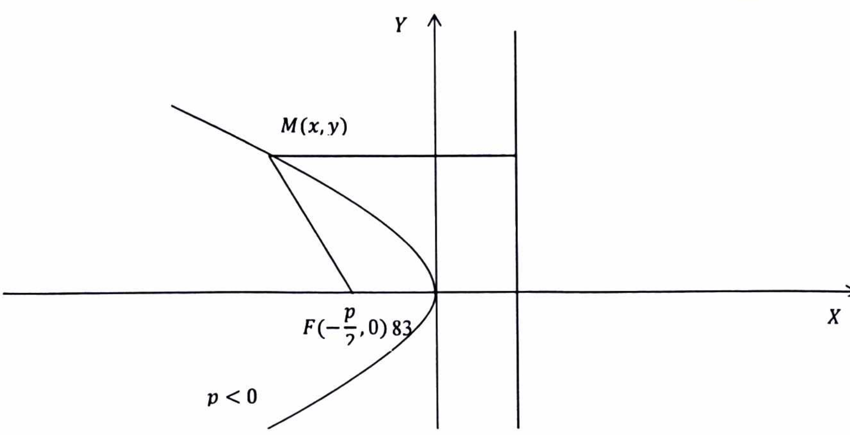
$$r = d$$

tenglik o`rinli bo`ladi. U holda parabolaning ekssentrisiteti;

$$\varepsilon = \frac{r}{d} = 1 \qquad (19)$$

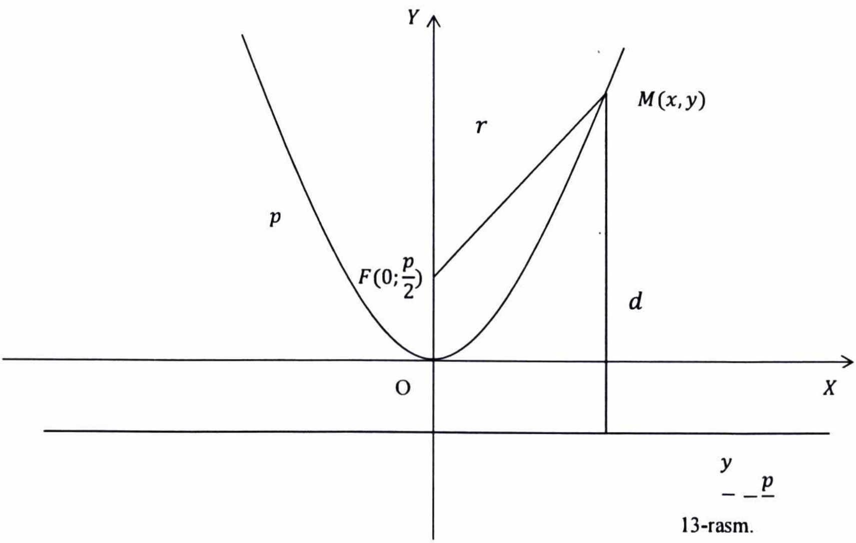


11-rasm.



Uchi koordinatalar boshida, simmetriya o'qi OY o'qidan iborat bo'lgan parobolaning kanonik tenglamasi;

$$x^2 = 2py \qquad (20)$$



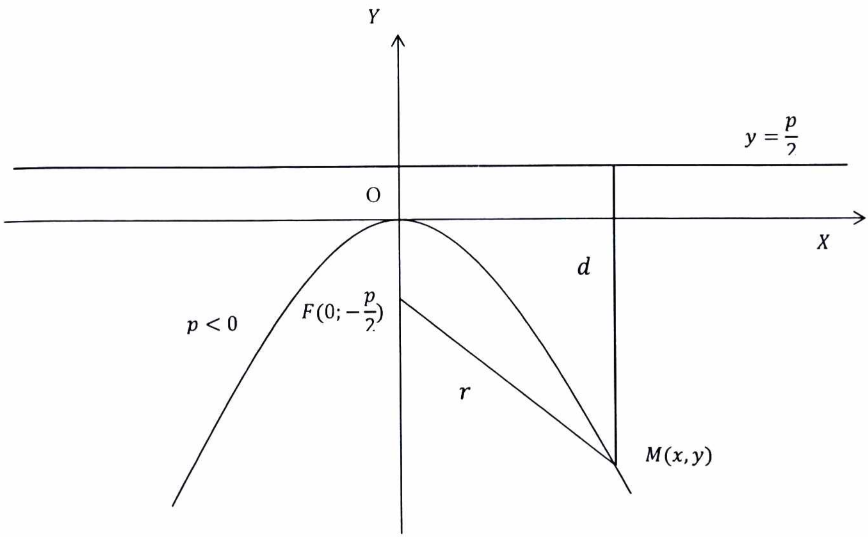
13-rasm.

$M(x_0; y_0)$ nuqtadan parabolaga o'tkazilgan urinma tenglamasi: Simmetriya o'qi OX o'qidan iborat parabola uchun;

$$y \cdot y_0 = p(x + x_0) \qquad (21)$$

Simmetriya o'qi OY o'qidan iborat parabola uchun;

$$x \cdot x_0 = p(y + y_0) \qquad (22)$$



14-rasm.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $F(0; 2)$ nuqtadan va $y = 4$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini tuzing. Bu egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping va grafigini yasang.

2. Koordinatalar boshidan va $x = -4$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda bo'lgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini tuzing. Bu egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping va grafigini yasang.

3. 1). $y^2 = 4x$; 2). $y^2 = -4x$; 3). $x^2 = 4y$; 4). $x^2 = -4y$ tenglamalar bilan berilgan parabolalar hamda ularning fokuslari va direktrisalarini yasang. Direktrisa tenglamasini tuzing.

4. 1). $A(0;0)$ va $B(1;-3)$ nuqtalardan o'tuvchi va OX o'qqa nisbatan simmetrik; 2). $O(0;0)$ va $C(2;-4)$ nuqtalardan o'tuvchi va OY nisbatan simmetrik bo'lgan parabola tenglamasini tuzing.

5. $x^2+y^2+4y=0$ aylana va $x+y=0$ to'g'ri chziqning kesishgan nuqtalaridan o'tib, OY o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan parabolaning va uning direktrisasini tenglamalarini tuzing hamda grafigini yasang.

6. $y^2=6x$ parabola berilgan. Uning fokusini toping va direktrisa tenglamasini tuzing. Grafigini yasang.

7. $y^2=-4x$ parabolaning fokusidan o'tuvchi va OX o'q bilan 120^0 burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing hamda hosil bo'lgan vatarning uzunligini toping.

8. $y^2=8x$ parabolaning $y=-x$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinma tenglamasini tuzing.

9. $F(0;2)$ nuqtadan va $y=4$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini tuzing. Bu egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping va grafigini yasang.

10. Koordinatalar boshidan va $x=-4$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda bo'lgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini tuzing. Bu egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping va grafigini yasang.

11. 1). $y^2=4x$; 2). $y^2=-4x$; 3). $x^2=4y$; 4). $x^2=-4y$ tenglamalar bilan berilgan parabolalar hamda ularning fokuslari va direktrisalarini yasang. Direktrisa tenglamasini tuzing.

12. 1). $A(0;0)$ va $B(1;-3)$ nuqtalardan o'tuvchi va OX o'qqa nisbatan simmetrik; 2). $O(0;0)$ va $C(2;-4)$ nuqtalardan o'tuvchi va OY nisbatan simmetrik bo'lgan parabola tenglamasini tuzing.

13. $x^2+y^2+4y=0$ aylana va $x+y=0$ to'g'ri chziqning kesishgan nuqtalaridan o'tib, OY o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan parabolaning va uning direktrisasini tenglamalarini tuzing hamda grafigini yasang.

14. $y^2 = 6x$ parabola berilgan. Uning fokusini toping va direktrisa tenglamasini tuzing. Grafigini yasang.

15. $y^2 = -4x$ parabolaning fokusidan o'tuvchi va OX o'q bilan 120^0 burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing hamda hosil bo'lgan vatarning uzunligini toping.

16. $y^2 = 8x$ parabolaning $y = -x$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinma tenglamasini tuzing.

17. $F(0; 2)$ nuqtadan va $y = 4$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini tuzing. Bu egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping va grafigini yasang.

18. Koordinatalar boshidan va $x = -4$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda bo'lgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini tuzing. Bu egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping va grafigini yasang.

19. 1). $y^2 = 4x$; 2). $y^2 = -4x$; 3). $x^2 = 4y$; 4). $x^2 = -4y$ tenglamalar bilan berilgan parabolalar hamda ularning fokuslari va direktrisalarini yasang. Direktrisa tenglamasini tuzing.

20. 1). $A(0; 0)$ va $B(1; -3)$ nuqtalardan o'tuvchi va OX o'qqa nisbatan simmetrik; 2). $O(0; 0)$ va $C(2; -4)$ nuqtalardan o'tuvchi va OY nisbatan simmetrik bo'lgan parabola tenglamasini tuzing.

VI BOB. FAZODA TO`G`RI CHIZIQ VA TEKISLIK TENGLAMALARI

1-§.Tekislik tenglamasi

1-ta'rif. Quyidagi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

tenglama ***tekislikning umumiy tenglamasi*** deyiladi.

Bu yerda A, B, C va D berilgan sonlar bo'lib, A, B, C lar noma'lumlar oldidagi koeffitsient, D ozod son deyiladi.

$\vec{n}(A; B; C)$ vektor tekislikka perpendikulyar bo'lib, uning normal (yo'naltiruvchi) vektori deyiladi.

1^0.1. Agar $D = 0$ bo`lsa, $Ax + By + Cz = 0$ tekislik koordinatalar boshidan o`tadi.

2.a) Agar $A = 0$ bo`lsa, $By + Cz + D = 0$ tekislik $OX$ o`qiga parallel bo`ladi.

b) Agar $B = 0$ bo`lsa, $Ax + Cz + D = 0$ tekislik $OY$ o`qiga parallel bo`ladi.

c) Agar $C = 0$ bo`lsa, $Ax + By + D = 0$ tekislik $OZ$ o`qiga parallel bo`ladi.

3.a) Agar $A = D = 0$ bo`lsa, $By + Cz = 0$ tekislik $OX$ o`qidan o`tadi.

b) Agar $B = D = 0$ bo`lsa, $Ax + Cz = 0$ tekislik $OY$ o`qidan o`tadi.

c) Agar $C = D = 0$ bo`lsa, $Ax + By = 0$ tekislik $OZ$ o`qidan o`tadi.

4.a) Agar $A = B = 0$ bo`lsa, $Cz + D = 0$ tekislik $XOY$ tekislikka parallel bo`ladi.

b) Agar $A = C = 0$ bo`lsa, $By + D = 0$ tekislik $XOZ$ tekislikka parallel bo`ladi.

c) Agar $B = C = 0$ bo`lsa, $Ax + D = 0$ tekislik $YOZ$ tekislikka parallel bo`ladi.

2^0. Koordinata tekisliklarining tenglamalari: $x = 0,\ y = 0\ va\ z = 0.$

3^0.Tekislikning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalar bo'yicha tenglamasi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (2)$$

4^0. Berilgan uchta $M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2)\ va\ M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Misol sifatida berilgan uchta $M_1(1,2,3)$, $M_2(-1,0,0)$ va $M_3(3,0,1)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini topamiz:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-4(x-1)+6(y-2) -4(z-3) -4(z-3)+4(y-2)+6(x-1)=0\Rightarrow$$

$$2(x-1)+10(y-2) -8(z-3)=0 \Rightarrow (x-1)+5(y-2) -4(z-3)=0\Rightarrow x + 5y -4z+1=0.$$

5^0. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (4)$$

Masalan, $M_0(1,2,3)$ nuqtadan $2x-2y+z-3=0$ umumiy tenglama bilan ifodalanuvchi tekislikkacha bo'lgan d masofani topamiz:

$$d = \frac{|2\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + 1\cdot 3 + (-3)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}.$$

6^0. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *va* $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tekisliklar orasidagi burchak, ularning normal $\vec{m}(A_1; B_1; C_1)$ *va* $\vec{n}(A_2; B_2; C_2)$ vektorlari orasidagi burchakka teng:

$$cos\varphi = \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (5)$$

Masalan, umumiy tenglamalari $x+2y+2z+7=0$ va $16x+12y-15z-1=0$ bo'lgan tekisliklar orasidagi ikki yoqli α burchakni topamiz:

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 16 + 2\cdot 12 + 2\cdot(-15)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}\cdot\sqrt{16^2 + 12^2 + (-15)^2}} = \frac{10}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{625}} = \frac{2}{15} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{2}{15}$$

a) tekisliklarning parallellik sharti:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (6)$$

b) tekisliklarning perpendikulyarlik sharti:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (7)$$

Masalan, umumiy tenglamalari $6x+3y-2z+7=0$ va $x+2y+6z-1=0$ bo'lgan P_1 va P_2 tekisliklar uchun

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 6\cdot 1 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 6 = 0$$

bo'lgani uchun ular perpendikulardir.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. 1). $2x + 3y - z + 5 = 0$; 2). $x + y - z = 0$; 3). $y - 3z + 4 = 0$;
4). $x + 2z - 5 = 0$; 5). $3x - 6 = 0$ tekisliklarni yasang.

2. $M(0;-1;3)$ va $N(1;3;5)$ nuqtalar berilgan. M nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}=\overrightarrow{MN}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

3. $M(0;1;3)$ va $N(2;4;5)$ nuqtalardan o'tuvchi va OX o'qiga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

4. OZ o'qdan va $M(2;-4;3)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

5. OX o'qqa parallel, OY va OZ o'qlaridan 5 va 4 birlik kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

6. $M(-1;2;1)$, $N(2;3;-2)va$ $P(3;4;2)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

7. $M(1;2;3)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinatalar o'qlaridan teng kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

8. $x-2y+2z-8=0$ va $x+z-6=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

9. $M(1;2;0)$ nuqtadan o'tuvchi va $x+2y-3z=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

10. $M(-1;-1;2)$ nuqtadan o'tuvchi va $x-2y+z=4$ hamda $x+2y-2z=-4$ tekisliklarga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

11. $M(-1;2;0)$ va $N(1;1;2)$ nuqtalardan o'tuvchi hamda $x+2y+2z-4=0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

12. $3x-y+z=0$ va $x+3y+4=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

13. Quyidagi tekisliklar 1). $x+y-z=-4$; 2). $2x+2y-2z=0$;
3). $3x-y+2z=5$; 4). $2x+y+z=-3$ orasidan parallel va perpendikulyarlarini ko'rsating.

14. $4x+3y-5z-8=0$ va $4x+3y-5z+12=0$ parallel tekisliklar orasidagi masofani toping.

15. $2x-y+3z-9=0$; $3x+y-4z+6=0$ va $x+2y+2z-3=0$ tekisliklarning kesishish nuqtasini toping.

16. $M(-1;2;1)$, $N(2;3;-2)va$ $P(3;4;2)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

17. $M(1;2;3)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinatalar o'qlaridan teng kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

18. $x-2y+2z-8=0$ va $x+z-6=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

19. $M(1;2;0)$ nuqtadan o'tuvchi va $x+2y-3z=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

20. $M(-1;-1;2)$ nuqtadan o'tuvchi va $x-2y+z=4$ hamda $x+2y-2z=-4$ tekisliklarga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

2§. Fazoda to'g'ri chiziq

1^0. $M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{s}(m;n;p)$ yo'naltiruvchi vektorga ega bo'lgan to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (1)$$

2^0. (1) tenglamadagi har bir nisbatni t parametrga tenglab, to'g'ri chiziqning

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases} \qquad (2)$$

parametrik tenglamasini hosil qilamiz.

Masalan, kanonik tenglamasi

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-2}$$

bo'lgan to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$x=5+3t,\quad y=-1+4t,\quad z=-2t$$

ko'rinishda bo'ladi.

3^0. Berilgan $M(x_1,y_1,z_1)$ va $N(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (3)$$

Masalan, $M_1(5,-1,2)$ va $M_2(-3,6,4)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x-5}{-3-5}=\frac{y+1}{6+1}=\frac{z-2}{4-2}\Rightarrow\frac{x-5}{-8}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-2}{2}$$

4^0. Fazodagi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (4)$$

bu yerda

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$$

Bu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori

$$\vec{s}=\vec{m}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Masalan, kanonik tenglamasi

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-4}{6}$$

bo'lgan to'g'ri chiziqning umumiy tenglamalaridan birini topamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{z-4}{6} \\ \dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-4}{6} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3(x-3)=z-4 \\ 6(y+1)=-5(z-4) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3x-z-5=0 \\ 6y+5z-14=0 \end{cases}.$$

5^0. (4) tenglamadan bir marta y ni, ikkinchi marta x yo'qotib, to'g'ri chiziqnin proektsiyalari bo'yicha yozilgan tenglamasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x=mz+x_0 \\ y=nz+y_0 \end{cases} \qquad (6)$$

(6) tenglamani ushbu

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{1}$$

kanonik ko'rinishda yozish mumkin.

6^0. $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ va $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$.

to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, ularning yo'naltiruvchi vektorla $\vec{s_1}(m_1;n_1;p_1)$ va $\vec{s_2}(m_2;n_2;p_2)$ orasidagi burchakka teng:

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \qquad (7)$$

a) Ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti:

$$\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = 0 \ \ yoki \ \ m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \qquad (8)$$

b) Ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (9)$$

c) Ikki to'g'ri chiziqning ustma-ust tushish sharti:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad va \quad \frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1} \qquad (10)$$

d) Ikki to'g'ri chiziqning kesishish sharti:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

e) Ikki to'g'ri chiziqning ayqash bo'lishlik sharti:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (12)$$

Masalan, kanonik tenglamalari

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}, \qquad \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchakni topamiz:

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 2 + (-4)(-2) + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^0.$$

Kanonik tenglamalari

$$L_1 : \frac{x-1}{-6} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-4}{8}; \quad L_2 : \frac{x-5}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z+7}{4}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar esa parallel, chunki

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} = 2,$$

ya'ni (9) shart bajariladi.

7^0. a). $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa:

$$d=\frac{|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{s}|}$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} m & n \\ x_0-x_1 & y_0-y_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n & p \\ y_0-y_1 & z_0-z_1\end{vmatrix}^2\begin{vmatrix} p & m \\ z_0-z_1 & x_0-x_1\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (13)$$

bu yerda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ to'g'ri chiziqqa tegishli nuqta va $\vec{s}(m;n;p)$ vektor to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori.

$b).\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ va\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$

ikki ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa:

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}|}{|\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}|}=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2\end{vmatrix}^2}} \qquad (14)$$

bu yerda $M_1(x_1, y_1, z_1)\ va\ M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar mos ravishda to'g'ri chiziqlarga tegishli, $\overrightarrow{s_1}(m_1;n_1;p_1)\ va\ \overrightarrow{s_2}(m_2;n_2;p_2)$ lar esa ularning yo'naltiruvchi vektorlari.

3§.To'g'ri chiziq va tekislik

$1^0.\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ to'g'ri chiziq va $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik orasidagi burchak:

$$sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (1)$$

Bu yerda $\vec{s}(m;n;p)$ –to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori, $\vec{k}(A;B;C)$-tekislikning normal vektori.

Masalan, kanonik tenglamasi

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{\sqrt{2}}=\frac{z-1}{1}$$

bo'lgan L to'g'ri chiziq va umumiy tenglamasi

$$x + y\sqrt{2} - z + 1 = 0$$

bo‘lgan P tekislik orasidagi burchak

$$\sin\alpha = \frac{1\cdot 1 + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + 1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{1}{2} = 30^0.$$

a) To’g’ri chiziq va tekislikning parallellik sharti:

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (2)$$

b) Ularning perpendikulyarlik sharti:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (3)$$

1-misol: L to‘g‘ri chiziqning

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{n} = \frac{z+3}{-2}$$

kanonik tenglamasidagi n parametr qanday qiymat qabul etganda u umumiy tenglamasi $x-3y+6z+7=0$ bo‘lgan tekislikka parallel bo‘ladi ?

Yechish: To‘g‘ri chiziq va tekislikning (2) parallellik shartidan foydalanamiz:

$$3\cdot 1+(-3)n+(-2)\cdot 6=0 \Rightarrow n=-3.$$

2-misol: L to‘g‘ri chiziqning

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$$

kanonik tenglamasidagi n va P tekislikning $3x-2y+Cz+1=0$ umumiy tenglamasidagi C parametrlarning qanday qiymatida ular o‘zaro perpendikular bo‘ladilar ?

Yechish: To‘g‘ri chiziq va tekislikning (3) perpendikularlik shartidan

foydalanamiz: $\frac{m}{3} = \frac{4}{-2} = \frac{-3}{C} \Rightarrow m = -6, \quad C = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$

c) To’g’ri chiziqning tekislikda yotish sharti:

$$Am + Bn + Cp = 0 \quad va \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (4)$$

d) To’g’ri chiziq bilan tekislikning kesishgan nuqtasi. To’g’ri chiziq tenglamalarini parametrik $x = mt + x_0$, $y = nt + y_0$, $z = pt + z_0$ ko’rinishda yozib, tekislikning $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglamasidagi x; y; z larni o’rniga qo’yamiz.

Natijada t ga nisbatan tenglama hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan tenglamadan t_0 ni topib, so'ngra kesishgan nuqta koordinatalari $(x_1; y_1; z_1)$ topilad.

e) Ikki to'g'ri chiziqning bir tekislikda yotish sharti:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $y = 3x - 1; 3x + 2z = 2$ to'g'ri chiziq bilan $2x + y + z = 0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

2. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+2}{3}$ to'g'ri chiziq $2x + y - z = 0$ tekislikka parallel ekanligini ko'rsating.

3. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{3}$ to'g'ri chiziq va $3x - 3y + 2z + 1 = 0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

4. $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ to'g'ri chiziq va $x + 2y - 2z = 0$ tekislikning holatini aniqlang.

5. $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ to'g'ri chiziq va $3x - y + 2z = 5$ tekislikning kesishish nuqtasini toping.

6. $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va $x + 4y - 3z = -7$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

7. $M(1; 0; -2)$ nuqtadan $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{1}$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

8. $M(4; 3; 0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}(-1; 2; 4)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

9. $M(1; 2; -3)$ va $N(4; 1; -2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

10. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{-5}$ va $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{2}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

11. $M(-1;2;1)$ nuqtadan o'tuvchi va $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+y-z=5 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

12. $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} 3x-2y+8=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak kosinusini toping.

13. $M(4;3;0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}(-1;2;4)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

14. $M(1;2;-3)$ va $N(4;1;-2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

15. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{-5}$ va $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{2}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

16. $M(-1;2;1)$ nuqtadan o'tuvchi va $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+y-z=5 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

17. $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} 3x-2y+8=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak kosinusini toping.

18. $M(4;3;0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}(-1;2;4)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

19. $M(1;2;-3)$ va $N(4;1;-2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

20. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{-5}$ va $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{2}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

VII BOB. MATEMATIK ANALIZ ELEMENTLARI

1-§. To'plamlar va ular ustida amallar

To`plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan biri bo'lib, unga ta'rif berilmaydi, balki, uni misollar orqali tushintiriladi.

To`plam tushunchasi to`plamlar nazariyasining asoschisi bo`lgan nemis matematigi Georg Kantor tomonidan (1845-1908 y.) kiritilgan.

1-ta'rif. To`plamni tashkil qiluvchi obektlar uning ***elementlari*** deyiladi.

To`plamlar lotin yoki grek alifbosining katta harflari $A, B, C, D, \ldots$ lar bilan, uning elementlari esa, shu alifboning kichik harflari $a, b, c, d, \ldots$ lar bilan belgilanadi.

To`plam ikki turga bo'linadi: chekli to'plam va cheksiz to'plam.

2-ta'rif. CHekli elementlardan tashkil topgan to`plam ***chekli to`plam***, cheksiz elementlardan tashkil topgan to'plam esa aksincha, ***cheksiz to`plam*** deyiladi.

«a element A to`plamga tegishli» bo'lsa $a \in$ A, tegishli bo'lmasa, $a \notin$ A kabi belgilanadi.

3-ta'rif. Birorta ham elementga ega bo`lmagan to`plam ***bo`sh to`plam*** deyiladi va u $\emptyset$ kabi belgilanadi.

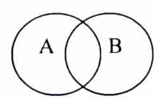
4-ta'rif. Agar B to`plamning har bir elementi A to`plamning ham elementi bo`lsa, B to`plam A to`plamning ***qismi*** yoki ***qismiy to'plami*** deyiladi va B $\subset$ A kabi belgilanadi.

5-ta'rif. Agar A to`plam B to'plamning qismi, B to'plam A to'plamning qismi,ya'ni A $\subset$ B va B $\subset$ A bo'lsa, u holda A va B to`plamlar bir biriga ***teng to'plamlar*** deyiladi va A = B kabi belgilanadi.

6-ta'rif. Agar B to`plamning barcha elementlari A to`plamning elementi bo`lib, shu bilan birga A to'plamda yana B ga tegishli bo`lmagan elementlar ham bor bo`lsa, B to`plam A to`plamning ***xos qism to`plami*** deyiladi.

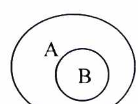
7-ta'rif. *A* to`plamning o`zi va bo`sh to`plam, *A* to`plamning ***xosmas qism to`plami*** deyiladi.

Ikkita to`plam orasidagi munosabatlar quyidagicha bo`ladi:



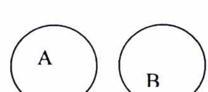
1- rasm

1. A={a,b,c,d,e} va B= {b,d,k,e} to`plamlar kesishadi va ular bir-biriga qism to`plam bo`lmaydi:



2- rasm

2. A={a,b,c,d,e} va B={c,d,e} to`plamlar berilgan bo`lsin. *B* to`plam *A* to`plamning xos qism to`plam ekanligi quyidagi ko`rinishda tasvirlanadi:

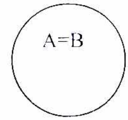


3. Kesishmaydigan A={a,b,c,d,e} va B={m,n,k,p}

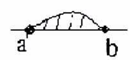
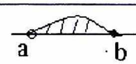
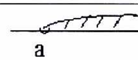
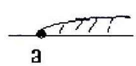
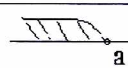
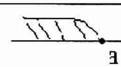
to`plamlar quyidagi ko`rinishda tasvirlanadi:

3-rasm

4. Teng A={a,b,c,d,e} va B={b,d,a,e,c} to`plamlar ustma-ust tushgan doiralar bilan tasvirlanadi



4-rasm

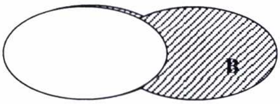
To'plamosti	Belgilanishi	Tasvirlanishi	Nomlanishi
$x/x\in R, a<x<b$	(a, b)		Interval
$x/x\in R, a\le x\le b$	[a, b]		Kesma
$x/x\in R, a\le x<b$	[a, b)		Yarim interval yoki yarim kesma
$x/x\in R, a<x\le b$	(a, b]		Yarim interval yoki yarim kesma
$x/x\in R, x>a$	$(a:+\infty)$		Ochiq nur
$x/x\in R, x\ge a$	$[a:+\infty)$		Nur yoki yarim to'g'ri chiziq
$x/x\in R, x<a$	$(-\infty:a)$		Ochiq nur
$x/x\in R, x\le a$	$(-\infty:a]$		Nur

N-natural sonlar to'plami, Z – butun sonlar to'plami, N_0 – butun nomanfiy sonlar to'plami, Q – ratsional sonlar to'plami, R – haqiqiy sonlar to'plami.

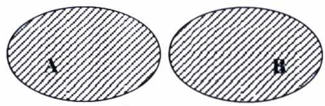
R to'plamning to'plam ostisini koordinatalar o'qida tasvirlash mumkin. Agar $a, b\in R$ va $a<b$ bo'lsa, quyidagi belgilashni kiritish mumkin.

8-ta'rif. A va B to`plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlarning ***yig'indisi (birlashmasi)*** deyiladi va A ∪ B kabi yoziladi.

To`plamlarning birlashmasi geometrik nuqtai nazardan figuralarning barcha nuqtalaridan tashkil topgan to`plamni bildiradi.



7-rasm



8-rasm

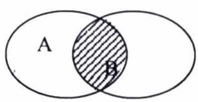
7,8-rasmlarda shtrixlangan soha A ***va*** B ***to`plamlarning birlashmasini bildiradi.***

Misollar.

1. $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,c,d,e,f\}$ ***to`plamlarning birlashmasi*** $A\bigcup B=\{a,b,c,d,e,f\}$ ***ga teng.***

2. $A=\{3,4,5,6\}$ ***va*** $B=\{6,7,8,9,10\}$ ***to`plamlar uchun*** $A\bigcup B=\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ***ga teng.***

9-ta'rif. A va B to`plamlarning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlarning ***ko'paytmasi (kesishmasi)*** deyiladi va $A\cap B$ kabi yoziladi.



5-rasm

6-rasm

5-rasmda shtrixlangan qism A ***va*** B ***to`plamlar kesishmasini, 6-rasmda*** $[CB]$ ***kesma*** $[AB]$ ***va*** $[CD]$ ***kesmalar kesishmasini ifodalaydi.***

Masalan,

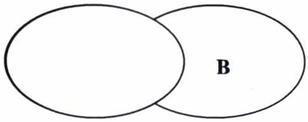
1. $A=\{a,b,c,d,e\}$ ***va*** $B=\{a,c,d,e,f\}$ ***to`plamlar uchun:*** $A\bigcap B=\{a,c,d,e\}$ ***ga teng.***

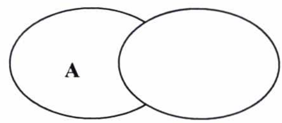
2. $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ***va*** $C=\{5,6,9,10,11\}$ ***to`plamlarning kesishmasi ushbuga teng:*** $A\bigcap C=\{5,6\}$

3. $A=\{2,3,4\}$ ***va*** $B=\{7,8,9\}$ ***to`plamlarning kesishmasi bo`sh to`plam:*** $A\bigcap B=\varnothing$

10-ta'rif. A to`plamning B to`plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan tashkil topgan to'plam A to'plamdan B to'plamning ***ayirmasi*** deyiladi va $A\backslash B$ kabi yoziladi.

To`plamlarning ayirmasi 9-rasmda ko`rsatilgan shtrixlangan sohani bildiradi





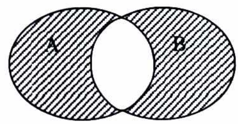
$A\backslash B$ ***9-rasm*** $B\backslash A$

Misollar.

1. $A=\{1,2,3,4\}$ *va* $B=\{3,4,5,6,7,8\}$ ***uchun*** $A\setminus B=\{1,2\}$
2. $A=\{1,2,3,4,5\}$ *va* $B=\{6,7,8\}$ ***uchun*** $A\setminus B=\{1,2,3,4,5\}$
3. $A=\{1,2,3\}$ *va* $B=\{1,2,3,4,5\}$ ***uchun*** $A\setminus B=\varnothing$

11-ta'rif. A to'plamaning B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan va B to'plamning A to'plamga tegishli bo`lmagan elementlaridan tashkil topgan to`plam A va B to`plamlarning ***simmetrik ayirmasi*** deyiladi va $A\Delta B$ kabi yoziladi.

Ta'rifdan ko`rinadiki, simmetrik ayirma $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ dan iborat ekan.



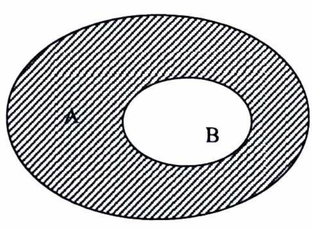
10-rasm

12-ta'rif. Birinchi elementi A to'plamdan, ikkinchi elementi B to'plamdan olingan $(a;b)(a\in A, b\in B)$ ko'rinishdagi juftliklardan tuzilgan to'plamga A va B to'plamlarning ***Dekart ko'paytmasi*** yoki ***to'g'ri ko'paytmasi*** deyiladi va $A\times B$ kabi yoziladi.

Misol. $A=\{4,5,7\}$ ***va*** $B=\{-1,2,3,4\}$ ***to`plamlar berilgan bo`lsin. U holda*** A ***va*** B ***to`plamlarning dekart ko`paytmasi quyidagicha bo`ladi:***

$$A\times B=\{(4;-1),(4;2),(4;3),(4;4),(5;-1),(5;2),(5;3),(5;4),(7;-1),(7;2),(7;3),(7;4)\}$$

13-ta'rif. Agar A to'plam B to`plamning qismi ya'ni $A\subset B$ bo'lsa, ushbu $B\setminus A=\{x: x\in B, x\notin A\}$ to`plam A to'plamni B to'plamga ***to'ldiruvchi to'plam*** deyiladi va CA yoki C_BA kabi belgilanadi.



11-rasm

To`plamlar ustida amallarning xossalari

1^0-xossa. Kommutativlik;

$A \cap B = B \cap A$ (1)

$A \cup B = B \cup A$ (2)

2^0-xossa. Assotsiativlik;

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (3)

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (4)

3^0-xossa. Distributivlik;

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (5)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (6)

4^0-xossa. Idempotentlik;

$A \cup A = A$ (7)

$A \cap A = A$ (8)

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi munosabatlarni o'rinli bo'lishini ko'rsating:

1. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
2. $A \cap (A \cup B) = A$.
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.
6. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.
7. $A \cup (CA \cap B) = A \cup B$.
8. $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$.
9. $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
10. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.
11. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.
12. $A \cup (CA \cap B) = A \cup B$.
13. $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$.

14. $(A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

15. $(A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B) \cap (CA \cup CB)$.

16. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ va $B = \{2,4,6,8,10,12\}$ bo'lsin. U holda $A \cup B = ?$ va $A \cap B = ?$ ni toping.

17. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ va $B = \{2,4,6,8,10,12\}$ bo'lsin. U holda $A\backslash B = ?$ va $B\backslash A = ?$ ni toping.

18. $A = \{1,3,5,7,9\}$ va $B = \{2,4,6,8,10\}$ bo'lsin. U holda $A\Delta B = ?$ ni toping.

19. $A = \{2n-1\ toq\ sonlar\}$ va $B = \{N - natural\ sonlar\}$ bo'lsin. U holda $CA = ?$ ni toping.

20. $A = \{1,2,3,4,5\}$ va $B = \{2,4,6,8\}$ bo'lsin. U holda $A \times B = ?$ ni toping.

2§. Sonli ketma-ketliklar

1-ta'rif. Natural sonlar to'plamida berilgan funksiya, ya'ni $x_n = f(n)$, $n \in N$ funksiya ***sonli ketma-ketlik*** deb ataladi. Boshqacha so'z bilan aytganda, sonlarning biror qoida yoki qonun bilan ketma-ket kelishi sonli ***ketma-ketlik*** deyiladi va $\{x_n\}$ bilan belgilanadi.

$$\{x_n\} = \{x_{1,} x_2, \quad \dots, x_n \dots\} \qquad (1)$$

2-ta'rif. Ketma-ketlikning n -hadi, x_n –uning ***umumiy hadi*** deyiladi.

$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sonli ketma-ketlik va $a \in R$ o'zgarmas son berilgan bo'lsin. Ular ustida quidagi amallarni bajarish mumkin:

a) Songa ko'paytirish:

$$\{ax_n\} = \{ax_1;\ ax_2; \dots; ax_n \dots\} \qquad (2)$$

b) Qo'shish (ayirish):

$$\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\} = \{x_1 \pm y_1; x_2 \pm y_2; \dots; x_n \pm y_n \dots\} \qquad (3)$$

c). Ko'paytirish:

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\} = \{x_1 \cdot y_1; x_2 \cdot y_2; \dots; x_n \cdot y_n \dots\} \qquad (4)$$

d) Bo'lish:

$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{x_1}{y_1}; \frac{x_2}{y_2}; \dots; \frac{x_n}{y_n}\right\} \qquad (5).$$

Bu yerda, $y_n \neq 0$.

3-ta'rif. Shunday M soni mavjud bo'lsaki, istalgan $n \in N$ uchun $x_n \leq M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik ***yuqoridan chegaralangan*** ketme-ketlik deyiladi.

4-tarif. Shunday m soni mavjud bo'lsaki, istalgan $n \in N$ uchun $x_n \geq m$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik ***quyidan chegaralangan*** ketma-ketlik deyiladi.

5-ta'rif. Ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan ketma-ketlik, ***chegaralangan ketma-ketlik*** deyiladi.

6-ta'rif. Agar $\forall\ n \in N$ uchun $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n < x_{n+1})$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ***o'suvchi (qat'iy o'suvchi) ketma-ketlik*** deyiladi.

7-ta'rif. Agar $\forall\ n \in N$ uchun $x_n \geq x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ***kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketlik*** deyiladi.

8-ta'rif. O'suvchi va kamayuvchi ketme-ketliklar ***monoton ketma-ketliklar*** deyiladi.

9-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ soni topilsaki, barcha $n > n_0$ natural sonlar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ***limiti*** deyiladi va $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ kabi belgilanadi yoki

Agar $\forall\varepsilon > 0$ son uchun $P_0(x_0, y_0)$ nuqtaning shunday δ – atrofi topilsaki, bu atrofning istalgan $P(x,y)$ nuqtasi (P_0 nuqta bundan istisno bo'lishi mumkin) uchun

$$|f(P) - A| < \varepsilon \quad (\text{yoki } |f(x,y) - A| < \varepsilon\,)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda A songa ikki o'zgaruvchi $z = f(x,y) = f(P)$ funksiyasining $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi limiti yoki $P \to P_0$ dagi **limiti** deyiladi va $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$ yoki $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ kabi yoziladi.

Misol. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} \dfrac{x^2 + y^2}{3x - 2y}$ ni toping.

Y e c h i s h. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} x=3$ va $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} y=-1$.

U holda

$$\lim_{(x,y)\to(3,-1)}\frac{x^2+y^2}{3x-2y}=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)}(x^2+y^2)}{\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)}(3x-2y)}=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)}x^2+\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)}y^2}{3\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)}x-2\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)}y}=\frac{3^2+(-1)^2}{3\cdot3-2(-1)}=\frac{10}{11}$$

10-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u ***yaqinlashuvchi*** aks holda (limit mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa) ***uzoqlashuvchi ketma-ketlik*** deyiladi.

11-ta'rif. Agar $\lim_{n\to\infty} x_n=0$ bo'lasa, u holda $\{x_n\}$ ***cheksiz kichik miqdor*** deb ataladi.

12-ta'rif. Agar $\forall M>0$ son olinganda ham shunday $n_0\in N$ son topilsaki, $\forall n>n_0$ uchun $|x_n|>M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ***cheksiz katta miqdor*** deb ataladi.

Agar $\forall M>0$ son olinganda ham shunday $n_0\in N$ son topilsaki, $\forall n>n_0$ uchun $x_n>M$ $(x_n<-M)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti $+\infty(-\infty)$ deb olinadi va $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty, (\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty)$ kabi belgilanadi.

Yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ va $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ bo'lsin.

U holda

1^0. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\pm b$

2^0. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\cdot b$

3^0. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{a}{b}$ $(b\neq0)$ bo'ladi.

4^0. Agar $\forall n\in N$ uchun $x_n\le y_n$ bo'lsa, u holda $a\le b$ bo'ladi.

5^0. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.

Eslatma! Ketma-ketlikni chegarlanganligidan uning yaqinlashuvchiligi kelib chiqavermaydi.

Misol: $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$. Chegarlangan, ammo yaqinlashuvchi emas.

Misol sifatida ushbu limitni hisoblanishini to'liq ko'rsatamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(4-3n^{-1})}{n(2+7n^{-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-3n^{-1}}{2+7n^{-1}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(4-3n^{-1})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+7n^{-1})}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}3n^{-1}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}7n^{-1}}=\frac{4-3\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}}{2+7\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}}=\frac{4-3\cdot 0}{2+7\cdot 0}=\frac{4}{2}=2.$$

Birinchi ajoyib limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad yoki \quad \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\right)$$

Ikkinchi ajoyib limit

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad yoki \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Muxim limitlar:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\sin x}{x}=1$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, x}{x}=1$

6. $Agar\ \lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1,\quad \lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty\ bo'lsa, u\ holda$

$$\lim_{x\to x_0}u^v=\lim_{x\to x_0}\left(\left(1+(u-1)\right)^{\frac{1}{u-1}}\right)^{(u-1)v}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)v}$$

bo'ladi.

3§. Funksiya

1-ta'rif. Agar D to'plamdan olingan har bir x songa biror qoida yoki qonunga ko'ra E to'plamdan olingan yagona $y \in R$ son mos qo'yilgan bo'lsa, D to'plamda ***funksiya berilgan*** deyiladi va $f: x \to y$ yoki $y = f(x)$ ko'rinishda belgilanadi. Bu yerda ***x —erkli o'zgaruvchi (funksiya argumenti), y —erksiz o'zgaruvchi (x —o'zgaruvchining funksiyasi)*** deyiladi.

D —to'plam funksiyaning ***aniqlanish sohasi (to'plami)***, E to'plam funksiyaning ***qiymatlar sohasi (to'plami)*** deyiladi.

Misol.

$f(x) = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\frac{3x-1}{2}$ funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

Birinchi qo'shiluvchi $1-2x \geq 0$ da, ikkinchi qo'shiluvchi esa $-1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1$ bo'lganda haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi. Shunday qilib, funksiyaning aniqlanish sohasini topish uchun

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ \frac{3x-1}{2} \leq 1 \\ \frac{3x-1}{2} \geq -1 \end{cases}$$ tengsizliklar sistemasini yechib, topamiz

$x \leq \frac{1}{2}$, $x \leq 1$, $x \geq -\frac{1}{3}$

Demak, $D(f) = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$

Misol.

$y = 1 + 2^{x+1}$ funksiyani qiymatlar to'plamini toping:

$y = 2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ ko'rsatkichli funksiya, uning qiymatlar to'plami $y \in (0; +\infty)$, demak berilgan funksiyaning qiymatlar to'plami $(1; +\infty)$ bo'ladi yoki berilgan funksiyaning qiymatlar to'plami uning teskari funksiyasi $x = \log_2(y-1) - 1$ ning aniqlanish sohasi $y > 1$ bilan ustma-ust tushadi, shuning uchun $E(y) = (1; +\infty)$.

Funksiya uch xil usulda beriladi.

a) analitik usul (formula ko'rinishda);

b) jadval usuli;

c) grafik usul.

2-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M (o'zgarmas m) son topilsaki, $\forall x \in D$ uchun $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq m)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya D to'plamda ***yuqoridan (quyidan) chegaralangan*** deb ataladi.

Agar $f(x)$ funksiya ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday M va m sonlar topilsaki, $\forall x \in D$ uchun

$$m \leq f(x) \leq M$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya D to'plamda ***chegaralangan*** deyiladi.

3-ta'rif. Agar $x_1 < x_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall x_1, x_2 \in D$ uchun

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya D to'plamda ***o'suvchi (qat'iy o'suvchi)*** deyiladi.

4-ta'rif. Agar $x_1 < x_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall x_1, x_2 \in D$ uchun

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya D to'plamda ***kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi)*** deyiladi.

5-ta'rif. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar ***monoton funksiyalar*** deyiladi.

6-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas $\mathrm{T}(\mathrm{T} \neq 0)$ soni mavjud bo'lsaki,

$\forall x \in \mathrm{D}$ uchun $f(x+T) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya ***davriy funksiya*** deyiladi va bu shartni qanoatlantiruvchi musbat T ning eng kichigi (agar u mavjud bo'lsa) ***funksiyaning davri*** deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$ davri T=2π, $y=\mathrm{tg}x$ esa davri T=π bo'lgan davriy funksiyalardir. $y=\{x\}=x-[x]$ funksiya qiymati argument x qiymatining nomanfiy kasr qismiga teng bo'ladi. Masalan, $\{1.2\}=0.2$, $\{2.98\}=0.98$, $\{\pm 8\}=0$, $\{-1.7\}= 0.3$ (bunda $-1.7= -2+0.3$ deb qaraladi). Bu holda $D\{f\}=(-\infty;\infty)$ va $E\{f\}=[0,1)$ bo'lib, ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ va $n\in N=\{1,2,3.\cdots\}$ uchun $\{x+n\}=\{x\}$ bo'ladi. Bundan $f(x)=\{x\}$ davri T=1 bo'lgan davriy funksiya ekanligini ko'rish mumkin. $y=x^2$ yoki $y=e^x$ funksiyalar esa davriymas funksiyalarga misol bo'ladi.

7-ta'rif. Agar $\forall x \in D$ uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ ***juft funksiya*** *deyiladi.*

Masalan, $y = 2^x + 2^{-x}$,

$f(-x) = 2^{-x} + 2^x = f(x)$ bo'lganligi uchun bu juft funksiyadir.

$f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ **toq funksiya** deyiladi, aks holda, ya'ni

$f(-x) \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$ bo'lsa, funksiya **juft ham emas, toq ham emas** deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$ –juft funksiya, $f(x)=x^3$ esa toq funksiya bo'ladi. Lekin har qanday funksiya juft yoki toq bo'lishi shart emas. Masalan, $f(x)=x^2-3x+1$ yoki $f(x)=2x-3$ funksiyalar na juft va na toqdir.

3.1. Funksiyaning limiti

8-ta'rif. (Geyne ta'rifi). Agar D to'plamning nuqtalaridan tuzilgan x_0 ga intiluvchi (x_0 nuqta bu to'plamga tegili bo'lishi ham, tegishli bo'lmasligi ham mumkin) har qanday $\{x_n\}$ $(x_n \neq x_0,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona A (chekli yoki cheksiz) soniga intilsa, shu A soniga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

kabi belgilanadi.

9-ta'rif. (Koshi ta'rifi) Agar $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\exists \delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A son $f(x)$ funksiyaning $\boldsymbol{x_0}$ ***nuqtadagi limiti*** deyiladi.

10-ta'rif. Agar D to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va har bir hadi x_0 dan katta (kichik) bo'lib, x_0 ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ $(x_n \neq x_0,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona A soniga intilsa, shu A soniga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng (chap) limiti deyiladi va $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$ $\quad(\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A)$ kabi belgilanadi.

Funksiyaning o'ng va chap limitlari, uning bir tomonli limitlari deyiladi.

Teorema. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada A limitga ega bo'lishi uchun uning shu nuqtada o'ng va chap limitlari mavjud bo'lib, ular $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x)$ teng bo'lishlari zarur va yetarli.

Birinchi ajoyib limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad yoki \quad \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1\right)$$

Ikkinchi ajoyib limit

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad yoki \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Muxim limitlar:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arc\sin x}{x} = 1$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\, x}{x} = 1$

6. $Agar \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty\ bo'lsa, u\ holda$

$$\lim_{x\to x_0} u^v = \lim_{x\to x_0}\left(\left(1+(u-1)\right)^{\frac{1}{u-1}}\right)^{(u-1)v} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)v}$$

bo'ladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to 1} x^2e^x = \lim_{x\to 1} x^2\cdot\lim_{x\to 1} e^x = 1\cdot e = e, \quad \lim_{x\to 1}(x^2+e^x) = \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} e^x = 1+e,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1} e^x}{\lim\limits_{x\to 1} x^2}=\frac{e}{1}=e,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}(2-\frac{3}{x})=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=2-0=2.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

1. $y=\lg(x^2-4x+3)$ 2. $y=\arcsin(3x-4)$

3. $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$ 4. $y=\sqrt{Sin(x)}-\sqrt{9-x^2}$

5. $y=\arcsin\dfrac{1+x^2}{2x}$ 6. $y=3x-1$

7. $y=\sqrt{x-4}$ 8. $y=\sqrt[3]{x^2+x-5}$

9. $y=\frac{5}{x+4}$ 10. $y=\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+2}$

11. $y=5+sin3x$ 12. $y=\lg(9-x^2)$

13. $y=|x|+15$ 14. $y=lgsinx$

15. $y=\sqrt{\frac{x+7}{x-6}}$ 16. $y=\sqrt{cosx+3}$

17. $y=\sqrt{sin2x-4}$ 18. $y=\frac{1}{x^3-8}$

19. $y=e^{\frac{1}{x}}$ 20. $y=5+sin5x$

2. Quyidagi funksiyalarning qiymatlar to'plamini toping:

1. $y=Sin(x)-Cos(x)$ 4. $y=x+\dfrac{1}{x}$

2. $y=\sqrt{-x^2-x+2}$ 5. $y=\dfrac{x+1}{x-2}$

3. $y=\dfrac{1}{x^2+1}+1$ 6. $y=\dfrac{1}{\arcsin(1-x)}$.

3. Quydagi ketma-ketliklarni chegaralanganligini isbotlang.

1). $x_n=1+\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n},\qquad (n\geq 2)$

2). $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad (n \geq 1)$

3). $x_n = \frac{n^2}{2^n}$

4). $x_n = \frac{n}{n^2 + 1}$

4. Quydagi ketma-ketliklarning chegaralanmaganligini isbotlang.

1). $x_n = \frac{2^n}{n^2}$

2). $x_n = (-1)^n \cdot n$

3). $x_n = n!$

5.Quyidagi funksiyalarni juft yoki toqligini tekshiring.

1. $f(x) = x^2 sinx$

2. $f(x) = x^2 - x + 1$

3. $f(x) = |x| + 7$

4. $f(x) = x^3 cos^2 x$

5. $f(x) = \sqrt{x^3 + |x| + 4}$

6. $f(x) = e^{tg\alpha}$

7. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

8. $f(x) = \lg(x^4 + x^2 - 1)$

9. $f(x) = \frac{|sinx|}{1 + cosx}$

10. $f(x) = |tg\alpha - 1|$.

6.Funksiyaning limitini hisoblang.

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$; 2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - x - 6}$;

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 1}{3x^2 - 2x + 7}$; 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$;

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 6}{x^3 + 1}$; 6. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^3 + 6x}{1 - 3x^3}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$ 8. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x - 2)^2}{x^3 - 8}$;

9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$;   10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin10x}{x}$ 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\frac{x}{4}}{x}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$;   14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos2x}{xsinx}$;

15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-3x+6}{x^3+1}$;   16. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+6x}{1-3x^3}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^3-8}$;

19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$;   20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$;

4-§. Funksiyaning uzluksizligi

$y=f(x)$ funksiyaning limiti to'g'risida quyidagilarni aytish mumkin:

1^0. $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud, chekli va

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0);$$

2^0. $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud, chekli va

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0);$$

3^0. $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud va $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$;

4^0. $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud emas.

Yuqoridagilardan 1-hol muhimdir.

1-ta'rif: Agar $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud va u $f(x_0)$ ga teng, ya'ni $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

2-ta'rif: (Geyne ta'rifi). Agar D to'plamning nuqtalaridan tuzilgan x_0 ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0,\ n=1,2,3,\ldots)$ ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt $f(x_0)$ ga intilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi

3-ta'rif. (Koshi ta'rifi). Agar $\forall\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\exists\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya $\boldsymbol{x_0}$ nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi.

Masalan, oldingi paragrafda $f(x)=x^2$ funksiya uchun $x\to 3$ holda hisoblangan limit qiymatidan foydalanib,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x^2 = 9 = 3^2 = f(3)$$

ekanligini ko'ramiz. Demak, $f(x)=x^2$ funksiya $x=3$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

4-ta'rif. Agar $x \to x_0 + 0$ $(x \to x_0 - 0)$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng (chap) limiti mavjud va $f(x_0)$ ga teng, ya'ni $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ $(\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0))$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***o'ngdan (chapdan) uzluksiz*** deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'rifdan ko'rinadiki, agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ham o'ngdan, ham chapdan bir vaqtda uzluktsiz bo'lsa, funksiya shu ***nuqtada uzluksiz*** deyiladi.

Masalan,

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 3 \\ 2x-1, & x < 3 \end{cases}$$

funksiya $x=3$ nuqtada o'ngdan uzluksiz, chunki

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3} (2x+1) = 7 = f(3).$$

Ammo bu funksiya $x=3$ nuqtada chapdan uzluksiz emas, chunki

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3} (2x-1) = 5 \neq f(3).$$

Aksincha,

$$y = f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ x^2-1, & x > 1 \end{cases}$$

funksiya $x=1$ nuqtada chapdan uzluksiz, o'ngdan esa uzluksiz emas.

5-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya D to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya D ***to'plamda uzluksiz*** deyiladi.

$f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya shu ***intervalda uzluksiz*** deyiladi.

$f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lib, a nuqtada o'ngdan, b nuqtada esa chapdan uzluksiz bo'lsa, funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'ladi.

Masalan, yuqorida ko'rsatilganga asosan, $f(x)=x^2$ funksiya ixtiyoriy (a,b) oraliqda uzluksizdir. $y=(1-x^2)^{-1}$ funksiya esa $(-1,1)$ va uning ichida joylashgan ixtiyoriy oraliqda uzluksiz bo'ladi, ammo $x=\pm1$ nuqtalardan kamida bittasi kirgan sohalarda uzluksiz bo'lmaydi.

1^0 Funksiya ning chegaralanganligi haqidagi teorema.

Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u shu kesmada chegaralangan funksiyadir, ya'ni shunday o'zgarmas chekli $m;\ M$ sonlar mavjudki, barcha $x \in [a;b]$ qiymatlar uchun $m \le f(x) \le M$ tengsizlik o'rinli.

2^0 Funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatining mavjudligi haqidagi teorema.

Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda berilgan funksiya shu kesmada o'zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi, ya'ni shunday $x_1;\ x_2 \in [a;b]$ mavjudki, barcha $x \in [a;b]$ uchun

$f(x_1) \le f(x)\ va\ f(x) \le f(x_2)$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

3^0 Oraliq qiymat haqidagi teorema.

Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, shu bilan birga $m\ va\ M$ lar funksiyaning $[a;b]$ dagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa, u holda bu funksiya shu kesmada $m\ va\ M$ orasidagi barcha oraliq qiymatlarni qabul qiladi, ya'ni $m < \mu < M$ shartni qanoatlantiruvchi istalgan μ son uchun kamida bitta shunday $c \in [a;b]$ nuqta mavjudki, uning uchun $f(c) = \mu$ tenglik to'g'ri bo'ladi.

4^0 Funksiyaning nolga aylanishi haqidagi teorema.

Agar $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning oxirlarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda $[a; b]$ kesmada kamida bitta shunday nuqta mavjudki, bu nuqtada funksiya qiymati nolga aylanadi.

Teorema 1. Agar $f(x)\ va\ g(x)$ funksiyalar D to'plamda aniqlangan bo'lib, ularning har biri x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, $f(x) \pm g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0, \forall x \in D)$ funksiyalar ham shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Xossa. Asosiy elementar funksiyalar o`zlari aniqlangan barcha nuqtalarda uzluksizdir.

6-ta'rif. Agar $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud, chekli bo'lib, $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$; $(2^0 - hol)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$; $(3^0 - hol)\ yoki$ funksiyaning limiti mavjud bo'lmasa (4^0-hol), unda $f(x)$ funksiya x_0 ***nuqtada uzilishga ega*** deyiladi.

Misol. $z = \dfrac{1}{3x - y + 1}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping.

Y e c h i s h. Funksiya $3x - y + 1 = 0$ tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalardan tashqari barcha nuqtalarda aniqlangan va uzluksiz. Bu tenglama funksiya aniqlanish sohasining chegarasidan iborat bo'lgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Bu to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi funksiyaning uzilish nuqtasi bo'ladi. Shunday qilib, berilgan funksiya uzilish nuqtalari butun bir to'g'ri chiziqni tashkil qiladi.

2^0-hol. Bartaraf qilish (yo'qotish) mumkin bo'lgan uzilish deyiladi.

4^0-hol. Bunda funksiyaning x_0 nuqtadagi bir tomonli limitlariga nisbatan uchta hol bo'ladi:

a) $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng va chap limitlari mavjud va chekli bo'lib, ular bir-biriga teng emas:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

Funksiyaning x_0 nuqtadagi bunday uzilishi ***birinchi tur uzilish*** deyiladi.

b) $x \to x_0\ da\ f(x)$ funksiyaning o'ng va chap limilaridan hech bo'lmaganda biri mavjud emas.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi bunday uzilishi ***ikkinchi tur uzilish*** deyiladi.

c) $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng va chap limitlaridan biri cheksiz yoki o'ng va chap limitlar turli ishorali cheksiz.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi bunday uzilishi ham ***ikkinchi tur uzilish*** deyiladi.

3^0-hol. $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti cheksiz bo'lsin. Bu holda funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap limitlari ham cheksiz bo'ladi.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi bunday uzilishi ham ***ikkinchi tur uzilish*** deyiladi.

Teorema 2. Agar $f(x)$ funksiya D oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, u faqat birinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

Quyidagi funksiyalarning uzluksizligini ko'rsating:

1. $y = f(x) = sinx.$
2. $y = f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$
3. $y = f(x) = x^2 + 1.$
4. $y = f(x) = |x|.$
5. $y = f(x) = \sqrt[3]{x}.$

Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini aniqlang va grafiklarini chizing:

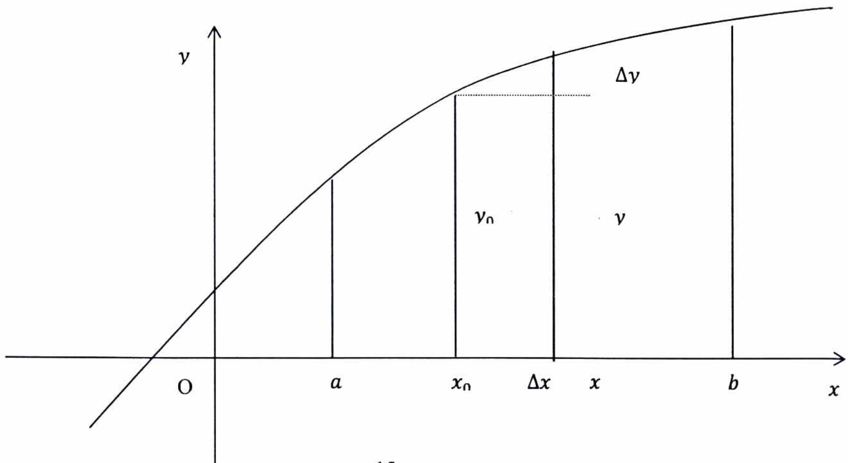
6. $y = f(x) = \frac{1}{sinx}.$
7. $y = f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}.$
8. $y = f(x) = x - [x]. ([x] - x \text{ ning butun qismi}).$
9. $y = f(x) = \frac{x}{cosx}.$
10. $y = f(x) = \frac{5}{x^3 - x^2}.$

5-§. Funksiya hosilasi

$y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. $(a; b)$ intervalga tegishli ixtiyoriy x_0 nuqtani olamiz. Bu nuqtaga funksiyaning $y_0 = f(x_0)$ qiymati mos keladi. Boshqa x nuqtani olamiz, $x \in (a; b)$. Unga funksiyaning $y = f(x)$ qiymati mos keladi. $x - x_0$ ayirma x argumentning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi va Δx bilan belgilanadi. $f(x) - f(x_0)$ ayirma funksiya orttirmasi deyiladi va Δy bilan belgilanadi, ya'ni $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Bundan, $x = x_0 + \Delta x$; $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (1)

Δx va Δy orttirmalarni egri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan nuqta koordinatalarining o'zgarishi deb ataladi.



15-rasm

$y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. $(a; b)$ intervalga tegishli ixtiyoriy x_0 nuqtani olamiz. Bu nuqtaga funksiyaning $y_0 = f(x_0)$ qiymati mos keladi. Boshqa x nuqtani olamiz, $x \epsilon (a; b)$. Unga funksiyaning $y = f(x)$ qiymati mos keladi. $x - x_0$ ayirma x argumentning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi va Δx bilan belgilanadi. $f(x) - f(x_0)$ ayirma funksiya orttirmasi deyiladi va Δy bilan belgilanadi, ya'ni $\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Bundan,

$$x = x_0 + \Delta x \,; \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad (1)$$

Δx va Δy orttirmalarni egri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan nuqta koordinatalarining o'zgarishi deb ataladi.

$y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ ochiq intervalda berilgan bo'lsin. Bu intervalda x_0 nuqta olib, unga shunday Δx $(\Delta x > 0,$ $\Delta x < 0)$ ortirma beraylikki,

$x_0 + \Delta x \in (a; b)$ bo'lsin. Natijada $f(x)$ funksiya ham x_0 nuqtada

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ortirmaga ega bo'ladi.

1-ta'rif. Agar funksiya ortirmasi Δy ning argument ortirmasi Δx ga nisbatining argument ortirmasi nolga intilgandagi limiti

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning $\boldsymbol{x_0}$ ***nuqtadagi hosilasi*** deyiladi va

$f'(x_0)$ $yoki$ $y'_{/x=x_0}$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

$\forall\, x \in (a; b)$ uchun

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2)$$

Misol sifatida $f(x)=x^2$ funksiya hosilasini uning ta'rifiga asosan topamiz: $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ =>

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Demak, $(x^2)'=2x$. Shunday tarzda $x'=1$ va $(x^3)'=3x^2$ ekanligini ko'rsatish mumkin.

5.1. Hosilaning geometrik ma'nosi

$y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi uning grafigiga $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng. U holda $y = f(x)$ funksiyaning grafigiga $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (3)$$

bo'ladi.

Misol sifatida $f(x)=x^2$ parabolaning $x_0=3$ abssissali nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini topamiz. Bunda $f(x_0)=f(3)=3^2=9$, $f'(x_0)=2x_0=2\cdot3=6$ va shu sababli, (5) formulaga asosan, izlangan urinma tenglamasi

$$y=6(x-3)+9 \Rightarrow y=6x-9$$

ko'rinishda bo'ladi.

5.2. Hosilaning mexanik ma'nosi

To'g'ri chiziqli notekis harakatda nuqtaning t vaqt ichida bosib o'tgan yo'li $S=S(t)$ ga teng bo'lsin. U holda t_0 vaqt oralig'ida bosib o'tilgan yo'l $S=S(t_0)$ bo'lib, $t=t_0+\Delta t$ vaqt ichida bosib o'tilgan yo'l esa, $S(t_0+\Delta t)$ bo'ladi. Δt vaqt ichida bosib o'tilgan yo'l esa

$$\Delta S=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$$

ga teng.

$\frac{\Delta S}{\Delta t}$ nisbat Δt vaqt oralig'idagi ***o'rtacha tezlik*** deyiladi. Bu nisbatning $\Delta t\to 0$ dagi limiti nuqtaning t_0 vaqtdagi tezligini aniqlaydi, bu ***oniy tezlik*** deyiladi. Demak, bosib o'tilgan yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosila tezlikni ifodalar ekan, ya'ni

$$S'_t=v \qquad (4)$$

Huddi shunday mulohaza yuritib, v tezlikdan vaqt bo'yicha olingan hosila a –tezlanish ekanligini bildiradi,ya'ni

$$v'_t=a \qquad (5)$$

5.3. Hosila hisoblashning soda qoidalari

$f(x)\ va\ g(x)$ funksiyalar $x\in(a;b)$ nuqtada $f'(x)\ va\ g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. C –o'zgarmas son.($C=const$).

1. $\left(C\,f(x)\right)'=C\,f'(x);$
2. $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x);$
3. $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x);$
4. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)};\qquad (g(x)\neq 0)$

bo'ladi.

Misol sifatida asosiy elementar funksiyalardan biri bo'lgan $f(x)$=sin$x$ hosilasini yuqorida keltirilgan algoritm bo'yicha topamiz:

✓ x va $x+\Delta x$ nuqtalarda funksiyaning $f(x)$=sin$x$ va $f(x+\Delta x)$=sin($x+\Delta x$) qiymatlarini hisoblaymiz;

✓ trigonometrik ayirmani ko'paytmaga keltirish formulasidan foydalanib, Δf funksiya orttirmasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin(\Delta x/2)\cdot\cos(x+\Delta x/2);$$

✓ $\Delta f/\Delta x$ orttirmalar nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x} = \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cdot\cos(x+\Delta x/2);$$

✓ Ko'paytmaning limiti, I ajoyib limit hamda y=cos$x$ funksiya uzluksizligidan foydalanib, $\Delta f/\Delta x$ nisbatning $\Delta x\to 0$ bo'lgandagi limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cdot\cos(x+\Delta x/2)\right] = \left(\frac{\Delta x}{2}=\alpha\right)$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\cos(x+\alpha) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

Demak,

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (1)$$

formula o'rinli ekan. Xuddi shunday tarzda

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (2)$$

ekanligini aniqlaymiz.

5.4. Murakkab funksiyaning hosilasi

$u = f(x)$ funksiya $(a; b)$ oraliqda, $y = F(u)$ funksiya esa $(c; d)$ oraliqda berilgan bo'lsa, $y = F(f(x))$ funksiya ***x* o'zgaruvchining murakkab funksiyasi** deyiladi.

Teorama. Agar $u = f(x)$ funksiya $x_0 \in (a; b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lib, $y = F(u)$ funksiya esa x_0 nuqtaga mos $u_0(u_0 = f(x_0))$ nuqtada $F'(u_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda murakkab funksiya $y = F(f(x))$ ham x_0 nuqtada hosilaga ega va

$$y'(x_0) = F'(u_0)\cdot f'(x_0)$$

formula o'rinli.

$\forall x \in (a;b)$ uchun $y = F(f(x))$ murakkab funksiyaning hosilasi

$$y' = F'(f(x)) \cdot f'(x) \qquad (6)$$

ga teng bo'ladi.

Hosila jadvali

1. $(C)' = 0, \quad (C = const);$
2. $(x)' = 1;$
3. $(x^n)' = nx^{n-1};$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$
5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$
6. $(e^x)' = e^x;$
7. $(a^x)' = a^x \cdot lna, \quad (a > 0, a \neq 1);$
8. $(lnx)' = \left(\frac{1}{x}\right);$
9. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna};$
10. $(\sin x)' = \cos x;$
11. $(\cos x)' = -\sin x;$
12. $(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}, \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right);$
13. $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}, \quad (x \neq \pi k, k \in Z);$
14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (-1 < x < 1);$
15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (-1 < x < 1);$
16. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2};$
17. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2};$

18. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = chx;$

19. $(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = shx;$

20. $(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right) = \frac{1}{ch^2x};$

21. $(ctx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right) = -\frac{1}{sh^2x};$

22. $(secx)' = \left(\frac{1}{cosx}\right)' = \frac{sinx}{cos^2x};$

23. $(cosex) = \left(\frac{1}{sinx}\right)' = -\frac{cosx}{sin^2x};$

Murakkab funksiyalarning hosilasi jadvallari:

Funksiyalar	**Hosilalar**
$y=C$ (bunda C-const)	$y'=0$
$y=x$	$y`=1$
$y=Cu$ (bunda C-const)	$y'=Cu'$
$y=u\pm v$	$y`=u`\pm v`$
$y=u\cdot v$	$y`=u`v+uv`$
$y=\frac{u}{v}$	$y`=\frac{u`v-uv`}{v^2}$
$y=\frac{C}{u}$, (bunda C-const)	$y`=-\frac{C}{u^2}u`$
$y=u^n$	$y`=nu^{n-1}u`$
$y=\sqrt{u}$	$y`=\frac{1}{2\sqrt{u}}u`$
$y=a^u$	$y`=a^u\ln a\cdot u`\quad a>1,\ a\neq 1$
$y=\log_a u$	$y`=\frac{1}{u}u`\log_a e=\frac{u`}{u\ln a}$
$y=\ln u$	$y`=\frac{1}{u}u`$

y=Sin u	$y` = Cosu \cdot u`$
$y = Cosu$	$y` = -Sinu \cdot u`$
$y = tgu$	$y` = \frac{1}{Cos^2 u} u`$
$y = ctgu$	$y` = -\frac{1}{Sin^2 u} u`$
$y = Sec\,u$	$y` = Sec\,u \cdot tg\,u \cdot u`$
$y = Cosec\,u$	$y` = -Cosec\,u \cdot ctg\,u \cdot u`$
$y = \arcsin u$	$y` = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u`$
$y = \arccos u$	$y` = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u`$
$y = arctg\,u$	$y` = \frac{1}{1+u^2} \cdot u`$
$y = arcctgu$	$y` = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u`$
$y = u \cdot v$	$y^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)} v` + C_n^2 u^{(n-2)} v`` + ... + uv^{(n)}$
$y = [f(x)]^{\varphi(x)}$	$y` = [f(x)]^{\varphi(x)} \left\{ \varphi`(x) \ln f(x) + \varphi(x) \frac{f`(x)}{f(x)} \right\}$
$y = shu$	$y` = chu \cdot u`$
$y = chu$	$y` = shu \cdot u`$
$y = thu$	$y` = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u`$
$y = cthu$	$y` = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u`$

Masalan,

1. $(x^2+\sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$, $(5-\cos x)' = (5)' - (\cos x)' = 0-(-\sin x) = \sin x$
2. $(e^x \cdot \sin x)' = (e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)' = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)e^x$.
3. $(5x^2)' = 5 \cdot (x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$.

Masalan, murakkab funksiyaning hosilasi

$(\sin x^2)' = (u=x^2) = (\sin u)'_x = (\sin u)'_u \cdot u' = \cos u \cdot (x^2)' = 2x\cos x^2$,

$(\sin^2 x)' = (u=\sin x) = (u^2)'_x = (u^2)'_u \cdot u' = 2u\cdot(\sin x)' = 2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarni hosilasini toping;

1. $y = x^2 + 3x - 1;$
2. $y = \sqrt[3]{x} + 5;$
3. $y = x \cdot \sqrt[3]{x};$
4. $y = \log_3 x + x^3\,;$
5. $y = 7^x + e^x;$
6. $y = sinx - 2^{x+1};$
7. $y = tgx + \sqrt{x};$
8. $y = x\ sinx;$
9. $y = x^2\ cosx;$
10. $y = \dfrac{x}{sinx};$
11. $y = \dfrac{5^x}{x};$
12. $y = e^x\ arcsinx;$
13. $y = \dfrac{x^2 + \sqrt{x}}{cosx};$
14. $y = \sin 2x + 3;$
15. $y = cos^2x + sin3x;$
16. $y = ln3x - \sqrt[4]{x};$
17. $y = tg2x\ ctg2x;$
18. $y = sin^2 3x + e^{sinx};$
19. $y = \sqrt{x^2 + 1};$
20. $y = (x + 1)^{100};$
21. $y = x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$
22. $y = x^3 Sinx$
23. $y = 3x^2 + 5\sqrt[3]{x^5} - \dfrac{4}{x^3}$
24.6. $y = Sinx \cdot \ln x$

24. $y=\frac{x^4+1}{x^4-1}$

25. $y=x^2ctgx$

26. $y=x\ arccos\ x$

27. $y=e^x arctgx$

28. $y=\frac{Cosx}{x^2}$

29. $y=\frac{x^2}{x^2+1}$

30. $y=3x^3\ln x-x^3$

31. $y=\frac{Cosx}{1-Sinx}$

32. $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

33. $y=x^2\log_3 x$

34. $y=\frac{\ln x}{Sinx}+x\,ctgx$

35. $y=\frac{x\,tgx}{1+x^2}$

36. $y=arctgx-arcctgx$

6-§. Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda, tegishli funksiyalarning hosilalari mavjud bo'lganda, berilgan aniqmasliklarni ochish masalasi yengillashadi. Odatda hosilalardan foydalanib aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari deyiladi.

1^0. $\frac{0}{0}$ ko'rinishidagi aniqmaslik.

Teorema 1. $(a;b)$ intervalda aniqlangan, uzluksiz $f(x)\ va\ g(x)$ funksiyalar uchun quyidagi shartlar:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0;$

2. $(a;b)$ intervalda chekli $f'(x),\ g'(x)$ hosilalar mavjud va $g'(x)\neq 0;$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k;$

(chekli yoki cheksiz) bajarilsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu teorema $(c;+\infty)$ intervalda aniqlangan, uzluksiz $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun ham o'rinli, ya'ni

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2^0. $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslik.

Teorema 2. $(a;b)$ intervalda aniqlangan, uzluksiz $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun quyidagi shartlar:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty;$

2. $(a;b)$ intervalda chekli $f'(x)$, $g'(x)$ hosilalar mavjud va $g'(x)\neq 0$;

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k;$

(chekli yoki cheksiz) bajarilsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu teorema $(c;+\infty)$ intervalda aniqlangan, uzluksiz $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun ham o'rinli, ya'ni

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3^0. Boshqa ko'rinishdagi aniqmasliklar.

$a)$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$

bo'lganda $f(x)\cdot g(x)$ ifoda $0\cdot\infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik bo'lib, uni quyidagicha

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

yozish orqali $\frac{0}{0}$ $yoki$ $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirish mumkin.

$b)$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$

bo'lganda $f(x)-g(x)$ ifoda $\infty-\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib, uni ham quyidagicha

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

yozish orqali $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirish mumkin.

c) $\lim_{x\to x_0} f(x)=1;\ (0);\ (\infty);\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=\infty;\ (0);\ (0)$

ga intilganda $y=[f(x)]^{g(x)}$ darajali-ko'rsatkichli ifoda 1^{∞}, 0^0, ∞^0 ko'rinishdagi aniqmasliklar hosil bo'ladi. Bu ko'rinishdagi aniqmasliklar-ni ochish uchun avvalo $y=[f(x)]^{g(x)}$ ifoda logarifmlanadi.

$$ln\,y=g(x)\cdot l\,nf(x).$$

$x\to x_0$ da $g(x)\cdot l\,nf(x)$ ifoda $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Lopitalning II qoidasi yordamida ushbu limitlarni hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x^2)}{\ln(1-x)}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to 1}\frac{[\ln(1-x^2)]'}{[\ln(1-x)]'}=\lim_{x\to 1}\frac{-2x/(1-x^2)}{-1/(1-x)}=$$

$$=2\lim_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{(1-x^2)}=2\lim_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{(1-x)(1+x)}=2\lim_{x\to 1}\frac{x}{1+x}=2\cdot\frac{1}{2}=1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{\ln x}=(\alpha>0,\ \frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^{\alpha})'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x}=\alpha\lim_{x\to\infty}x^{\alpha}=\infty.$$

Masalan,

$$\lim_{x\to 0}x\ln|x|=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln|x|)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/|x|}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0}|x|=0.$$

Eslatma: *Lopital qoidasini misollarda ketma-ket bir necha marta ham qo'llash mumkin.*

Masalan, ushbu limitni qaraymiz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x+1})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=(\frac{\infty}{\infty})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x-1})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\cdots$$

Bu yerdan ko'rinadiki berilgan limit, Lopital qoidasi ikki marta qo'llanilgach, yana o'ziga qaytib kelmoqda. Demak, bu aniqmaslikni Lopital qoidasi orqali ochib bo'lmaydi. Holbuki bu limit surat va maxrajni x o'zgaruvchiga bo'lish usulida oson hisoblanadi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-1/x}}{\sqrt{1+1/x}}=\frac{\sqrt{1-0}}{\sqrt{1+0}}=1.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Lopital qoidasidan foydalanib funksiya limitini hisoblang.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sinx}{4x};$
2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a};$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-sinx}{x^3};$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{sin2x};$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x};$
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{lnx}{x};$
7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^2};$
8. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot lnx;$
9. $\lim\limits_{x\to 0} x^x;$
10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+3x-1}{3x^2-7x+9};$
11. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1});$
12. $\lim\limits_{x\to \infty}(x+1)^{\frac{1}{x}};$
13. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{lnx}, \qquad (x>0);$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{x}$;

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{lnx}{x}$;

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$;

17. $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot lnx$;

18. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$;

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{3x^2 - 7x + 9}$;

20. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$;

7-§. Funksiyaning differensiali

$y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin

1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x_0 \in (a; b)$ nuqtadagi ortirmasi Δy ni

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \qquad (1)$$

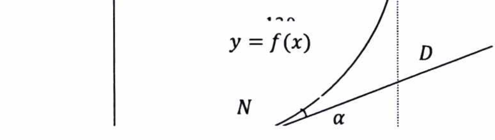
ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differentsiallanuvchi deb ataladi, bunda $A - \Delta x$ ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas, $\alpha -$ esa Δx ga bog'liq, yaьni $\Delta x \to 0$ da $\alpha = \alpha(\Delta x) \to 0$.

(1)-tenglamani har ikki tomonini Δx ga bo'lamiz va $\Delta x \to 0$ da limitga o'tamiz.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (A + \alpha) = A$$

Ikkinchi tomondan $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Bundan $f'(x) = A$ ekanligi kelib chikadi. Demak $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ ekanini topamiz.

Teorema $f(x)$ funksiya $x \in (a; b)$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi uchun, uning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi zarur va yetarli.



2-ta'rif $f(x)$ funksiya ortirmasi Δy ning Δx ga nisbatan chiziqli bosh qismi $A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$ berilgan $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differentsiali deyiladi va dy yoki $df(x)$ kabi belgilanadi:

$$dy = df(x) = A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Bu yerda $NE = \Delta x$, $ME = \Delta y$. ΔNED dan $tg\alpha = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{NE}}$ va undan

$\mathrm{DE} = tg\alpha \cdot NE = f'(x) \cdot \Delta x$ ekani kelib chikadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differentsiali $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ funksiya grafigiga $N\left(x\,;\,f(x)\right)$ nuqtada o'tkazilgan urinma ortirmasi DE ni $(\mathrm{DE} = dy)$ ifodalaydi. Xususan $f(x) = x$ bo'lganda

$dy = f'(x) \cdot \Delta x = \Delta x$ bo'lib, $dy = \Delta x = dx$ bo'ladi. Bu hol erkli o'zgaruvchi x ning erkli ortirmasi Δx ni uning differentsiali dx bilan almashtirilishi mumkiligini ko'rsatadi. Natijada $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differentsialini $dy = f'(x) \cdot dx = y'\,dx$ ko'rinishda ifodalash mumkin ekanligini anglatadi.

7.1. Elementar funksiyalarning differentsiallari jadvali

1. $d(C) = 0,\quad (C = const);$
2. $d(x) = dx;$
3. $d(x^n) = nx^{n-1}dx; \qquad (x > 0).$
4. $d(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx;$
5. $d\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}dx;$
6. $d(e^x) = e^x dx;$

7. $d(a^x) = a^x \cdot lnadx\,, \quad (a > 0, a \neq 1);$

8. $d(lnx) = \frac{1}{x}dx\,;$

9. $d(log_a x) = \dfrac{1}{x \cdot lna}dx, \quad (a > 0, \qquad a \neq 1, \qquad x > 0);$

10. $d\,(\sin x) = \cos x\, dx\,;$

11. $d(\cos x) = -\sin x dx\,;$

12. $d(tgx) = \dfrac{1}{cos^2x}dx\,, \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right);$

13. $d(ctgx) = -\dfrac{1}{sin^2x}dx\,, \quad (x \neq \pi k, k \in Z);$

14. $d(arcsinx) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\,, \qquad (-1 < x < 1);$

15. $d(arccosx) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\,, \qquad (-1 < x < 1);$

16. $d(arctgx) = \dfrac{1}{1+x^2}dx\,;$

17. $d(arcctgx) = -\dfrac{1}{1+x^2}dx\,;$

18. $d(\mathrm{sh}\, x) = d\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = chxdx;$

19. $d(\mathrm{ch}\, x) = d\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = shxdx;$

20. $d(thx) = d\left(\dfrac{shx}{chx}\right) = \dfrac{1}{ch^2x}dx;$

7.2. Differentsiallashning sodda qoidalari

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a;b)$ intrvalda aniqlangan bo'lib, $\forall x \in (a;b)$ nuqtada ularning differentsiallari $df(x)$ va $dg(x)$ mavjud bo'lsin. U holda $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ va $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ funksiyalarning ham shu $x \in (a;b)$ nuqtada diffentsiallari mavjud va ular uchun quyidagi

1. $d[C \cdot f(x)] = C \cdot df(x).$
2. $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x).$

3. $d[f(x)\cdot g(x) = df(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot dg(x).$

4. $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{df(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot dg(x)}{g^2(x)}$

formulalar o'rinli buladi .

7.3. Murakkab funksiyaning differentsiali

Murakkab funksiya hosilasi formulasidan foydalanib, murakkab funksiyaning differentsialini topamiz:

$$d[\mathrm{F}(f(x))] = [F(f(x)]'dx = F'(u)\cdot f'(x)dx.$$

Nazariy va amaliy masalalarni yechishda tegishli funksiyalarning qiymatlarini hisoblash zaruriyati tug'iladi. Bunday funksiyalar murakkab bo'lib, ularning nuqtadagi qiymatlarini topish ancha qiyin bo'ladi. Bu hol funksiyaning nuqtadagi qiymatini tarqibiy hisoblash masalasini yuzaga keltiradi.

Funksiya ortirmasi $\Delta y = f'(x_0)\cdot \Delta x + \alpha\cdot\Delta x$ va differentsiali $dy = f'(x_0)\cdot \Delta x$ formulalaridan foydalanib,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x}{f'(x_0)\cdot\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[1 + \frac{1}{f'(x_0)}\cdot\alpha\right] = 1$$

SHunday qilib $dy \approx \Delta y$, yaьni

$$f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x_o)\cdot\Delta x \qquad (2)$$

$x_0 + \Delta x = x$ ekanligini e'tiborga olsak, (2) formula

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \qquad (3)$$

ko'rinishga keladi.

Bunda $x_0 \in (a;b)$ nuqta $x \in (a;b)$ nuqtadan katta farq qilmaydigan ammo, $f(x_0)$ $q$ulayroq hisoblanadigan nuqtadir.

7.4. Differentsial hisobning asosiy teoremalari

Teorema :(Ferma teoremasi).

$f(x)$ funksiya $(a\,;\,b)$ oraliqda aniqlangan va bu oraliqning ichki c nuqtasida o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishsin. Agar bu nuqtada funksiya chekli $f'(c)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$f'(c) = 0$$

bo'ladi.

Teorema (Roll teoremasi).

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar bu funksiya $[a;b]$ segmentning barcha ichki nuqtalarida (yaъni $(a;\ b)$ intervalda) chekli $f'(x)$ hosilasiga ega bo'lib, $f(a) = f(b)$ bo'lsa, u holda shunday $c\ (a < c < b)$ nuqta topiladiki, $f'(s) = 0$ bo'ladi.

Teorema (Lagranj teoremasi).

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar bu funksiya $(a;b)$ intervalda chekli $f'(x)$ $h$osilasiga ega bo'lsa, u holda shunday $s\ (a < c < b)$ nuqta topiladiki,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

bo'ladi.

Teorema (Koshi teoremasi).

$f(x)$ va $g(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar bu funksiya $(a;b)$ intervalda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, $\forall x \in (a;b)$ uchun $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda shunday $s\ (a < c < b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

1-misol. $y = \cos\sqrt{x}$ murakkab funksiya differentsiali

$$dy = d\cos\sqrt{x} = (\cos\sqrt{x})'dx = -\sin\sqrt{x}\,(\sqrt{x})'dx = -\sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}).$$

2-misol. Masalan, $f(x)=(x-1)\cdot(x-3)= x^2-4x+3$ funksiya [1,3] kesmada Roll teoremasini barcha shartlarini qanoatlantiradi. Bu funksiya hosilasi $f'(x)=2x-4$ bo'lib, haqiqatan ham u [1,3] kesmaning ichki $c=2$ nuqtasida nolga aylanadi.

3-misol sifatida $f(x)=\alpha x^3-2\alpha x^2+\beta x+\gamma$ funksiyani $[0,1]$ kesmada qaraymiz. Bunda α, β va γ–ixtiyoriy haqiqiy sonlar. Bu holda Lagranj teoremasini barcha shartlari bajariladi va

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{(\alpha-2\alpha+\beta+\gamma)-\gamma}{1}=\beta-\alpha .$$

Endi (1) tenglik bajariladigan c nuqtani topib, $0<c<1$ ekanligini tekshiramiz:

$$f'(c)=3\alpha c^2-4\alpha c+\beta=\beta-\alpha\Rightarrow 3c^2-4c+1=0\Rightarrow c_1=1\,,c_2=\frac{1}{3}\Rightarrow c=\frac{1}{3}\in(0,1).$$

7.5. Yuqori tartibli hosila

3-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalning har bir $x\in(a;b)$ nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, bu $f'(x)$ funksiya $x_0\in(a;b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, uni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va $f''(x)$ yoki $y''/_{x=x_0}$ kabi belgilanadi. Funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va hokazo, tartibli hosilalari ham xuddi shunday ta'riflanadi. Odatda $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi, uchinchi, va h.k. hosilalari uning yuqori tartibli hosilalari deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya uchun $df=3x^2dx$, $d^2f=6xdx^2$, $d^3f=6dx^3$ va $n\geq 4$ holda $d^nf=0$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarni berilgan nuqtalarda differentsiallanuvchanlikka tekshiring.

1. $f(x)=x^2+3x-7,\qquad \forall x_o\in R.$
2. $f(x)=e^{3x},\qquad \forall x_o\in R.$
3. $f(x)=3^{tg\frac{1}{x}},\qquad x_o=\frac{1}{\pi}.$
4. $f(x)=ln\,(1+sin^2x),\qquad x_o=\frac{\pi}{2}.$

Quyidagi funksiyalarning differentsialini toping.

5. $f(x)=x^4-3x^2+2.$
6. $f(x)=sin\sqrt{x}$
7. $f(x)=12\sqrt[4]{x}+5\sqrt[5]{x}\,.$

8. $f(x) = x \cdot cosx$.

9. $f(x) = x \cdot lnx$.

10. $f(x) = \frac{sinx}{x}$

11. $f(x) = \frac{cosx}{sinx + 1}$

12. $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 4$, $df(1) - ?$

13. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $df(-8) - ?$

14. $f(x) = (5x + 2)^{10}$.

15. $f(x) = \sqrt[3]{1 + sin^3x}$.

16. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{x}}$.

17. $f(x) = log_5 10x$.

18. $f(x) = \ln(1 + sin^2x)$.

19. $f(x) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}$.

20. $f(x) = x^2 + arcsinx$.

8-§. Hosilaning tadbiqlari

$y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin.

Teorema 1. $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiya $(a; b)$ intervalda o'zgarmas bo'lishi uchun shu intervalda

$$f'(x) = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Teorema 2. $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiya shu intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun $(a; b)$ intervalda

$$f'(x) \geq 0 \qquad (f'(x) \leq 0)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

Masalan, $y=2^x$ [$y=(0{,}2)^x$] funksiya barcha nuqtalarda, ya'ni $(-\infty\ ,\ \infty)$ oraliqda o'suvchi [kamayuvchi], $y=1+x^2$ funksiya $(-\infty\ ,0)$ oraliqda kamayuvchi, $(0,\infty)$ oraliqda esa o'suvchi bo'ladi.

1-ta'rif. Agar $x_0 \in (a;b)$ nuqtaning shunday atrofi

$$U_\delta(x_0) = \{x: x \in R, \qquad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta;\ \delta > 0\} \subset (a;b)$$

mavjud bo'lsaki $\forall x \in U_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x) \le f(x_0) \qquad\qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***maksimumga (minimumga)*** ega deyiladi, $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi ***maksimum (minimum) qiymati yoki maksimumi (minimumi)*** deyiladi.

Funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi maksimumi (minimumi) qiymatlari

$$f(x_0) = \max_{x\in U_\delta(x_0)} \{f(x)\} \quad \left(f(x_0) = \min_{x\in U_\delta(x_0)} \{f(x)\} \right)$$

kabi belgilanadi.

Funksiyaning maksimum va minimumi umumiy nom bilan uning ***ekstremumi*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$ funksiya $x=\pi/2$ nuqtada $\sin(\pi/2)=1$ maksimumga, $x=3\pi/2$ nuqtada esa $\sin(3\pi/2)=-1$ minimumga ega bo'ladi.

Teorema 3. (Ekstremumning zaruriy sharti).

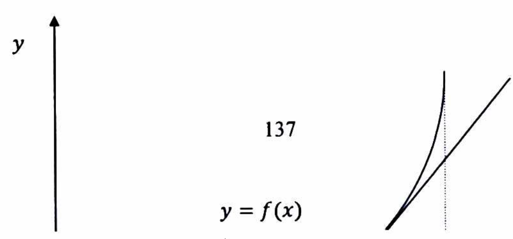
Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a;b)$ nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, bu nuqtada ekstremumga erishsa, u holda

$$f'(x_0) = 0$$

bo'ladi.

Teskarisi o'rinli emas, ya'ni funksiyaning biror nuqtada hosilasi nolga teng bo'lishidan, uning shu nuqtada ekstremumga erishishi kelib chiqavermaydi.

2-ta'rif. Funksiya hosilasining nolga aylantiradigan nuqtalar funksiyaning ***kritik (statsionar)*** nuqtalari deyiladi.

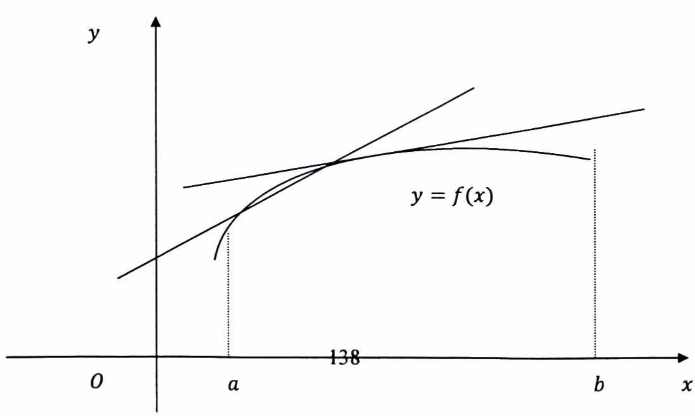


Masalan, $y=x^3$ funksiyaning $f'(x)=3x^2$ hosilasi $x=0$ nuqtada nolga teng va shu sababli bi funksiya uchun $x=0$ kritik nuqta bo‘ladi. Ammo bu nuqtada funksiya ekstremumga ega emas, chunki $x<0$ bo‘lganda $f(x)<0=f(0)$ va $x>0$ bo‘lganda $f(x)>0=f(0)$.

Teorema 4. Agar x_0 kritik nuqtadan o’tishda $f'(x)$ hosila o’z ishorasini “–” dan “+” ga o’zgartirsa, bu nuqtada funksiya minimumga, agar “+” dan “–” ga o’zgartirsa maksimumga erishadi.

3-ta’rif. Agar $y = f(x)$ differentsiallanuvchi funksiyaning grafigi o’zining $(a; b)$ intervaldagi har qanday urinmasidan yuqorida yotsa, u holda bu funksiyaning grafigi shu oraliqda botiq deyiladi. (17-rasm).

4-ta’rif. Agar $y = f(x)$ differentsiallanuvchi funksiyaning grafigi o’zining $(a; b)$ intervaldagi har qanday urinmasidan pastda yotsa, u holda bu funksiyaning grafigi shu oraliqda qavariq deyiladi. (18-rasm).



18-rasm

5-ta'rif. $y = f(x)$ uzluksiz funksiya grafigining botiq qismini qavariq qismidan ajratuvchi nuqtasi grafikning almashinuvchi nuqtasi deyiladi. Almashinuvchi nuqtada urinma, agar u mavjud bo'lsa, egri chiziqni kesib o'tadi.

Teorema 4. $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda botiq (qavariq) bo'lishi uchun shu intervalda

$$f''(x) \geq 0 \qquad (f''(x) \leq 0)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

Masalan, $y=e^x$ grafigi $(-\infty, \infty)$ oraliqda botiq; $y=\ln x$ grafigi $(0, \infty)$ oraliqda, ya'ni aniqlanish sohasidagi barcha nuqtalarda qavariq; $y=\sin x$ funksiyaning grafigi $(0,\pi)$ oraliqda qavariq, $(\pi,2\pi)$ oraliqda esa botiq bo'ladi.

Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya uchun $f''(x)=6x>0$ tengsizlik yechimi $(0,\infty)$ oraliqdan iborat bo'ladi va unda bu funksiya grafigi botiq bo'ladi.Xuddi shunday $f''(x)=6x<0$ tengsizlik yechimi bo'lgan $(-\infty, 0)$ oraliqda funksiya grafigi qavariq bo'ladi.

8.1. Funksiya grafigining asimptotalari

6-ta'rif. Agar

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

limitlardan biri yoki ikkalasi cheksiz bo'lsa, u holda $x = x_0$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi deyiladi.

Odatda vertikal asimptotalar funksiyaning aniqlanish sohasi bo'yicha uning uzilish nuqtalari orqali topiladi. Masalan, $f(x)=1/(x^3-1)$ funksiya grafigi uchun $x=1$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

7-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas k *va* b sonlar mavjud bo'lsaki, $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ da $f(x)$ funksiya ushbu

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

ko'rinishida ifodalansa (bu yerda $\lim_{x\to\pm\infty} \alpha(x) = 0$) , u holda $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi deyiladi.

Masalan, $f(x)=x+1/x$ funksiya grafigi uchun $y=x$ to'g'ri chiziq og'ma asimptota bo'ladi, chunki

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to\infty}[x+\frac{1}{x}-x] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Teorema 5. $f(x)$ funksiya grafigi $y = kx + b$ og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = b$$

limitlarning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

8.2. Funksiyalarni tekshirish

Funksiyalarni tekshirish va ularning grafiklarini yasash quyidagi xema bo'yicha olib boriladi.

1.Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini topiladi;

2.Funksiyani uzluksizlikka tekshiriladi va uzilish nuqtalari topiladi;

3.Funksiyaning juft, toqligi hamda davriyligi aniqlanadi;

4.Funksiya monotonlikka tekshiriladi;

5.Funksiya ekstremumga tekshiriladi;

6.Funksiya grafigining botiq va qavariqligi tekshiriladi;

7.Funksiya grafigining assimptotalari topiladi;

8.Funksiyaning OX va OY o'qlari bilan kesishish nuqtalari (agar mavjud bo'lsa) hamda argument x ning bir nechta qiymatlarida funksiya qiymatlari topiladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarni tekshiring va grafiklarini yasang.

1. $y = x^2$;
2. $y = x^2 + 5x + 6$;
3. $y = -x^2 + 9x$;
4. $y = x^3$;

5. $y = x + \frac{x^3}{3}$;

6. $y = \sqrt{x} + 4$;

7. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$;

8. $y = x + lnx$;

9. $y = 3^x - 4$;

10. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$;

11. $y = \frac{lnx}{x}$;

12. $y = e^x - x$;

13. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$;

14. $y = sinx + sin^2x$;

15. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$;

16. $y = sin2x - x$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda.

17. $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}$;

18. $y = e^{sinx}$;

19. $y = x^2 lnx$;

20. $y = \frac{1}{cosx}$;

VIII BOB. INTEGRAL HISOB

1-§. Aniqmas integrallar

$y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi $F(x)$ funksiyaning hosilasi berilgan $f(x)$ ga teng bo'lsa, ya'ni

$$F'(x) = f(x)$$

bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda $f(x)$ funksiyaning **boshlang'ich funksiyasi** deyiladi.

Berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topish masalasi bir qiymatli hal qilinmaydi. Haqiqatdan ham agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $F(x)+C$ $(C=const)$ funksiya ham $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

Lemma. Agar $F(x)$ va $G(x)$ funksiyalar $(a;b)$ intervalda $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, u holda $G(x)=F(x)+C$ bo'ladi, ya'ni $F(x)$ va $G(x)$ funksiyalar $(a;b)$ intervalda bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi.

2-ta'rif. Agar $F(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funnktsiyasi bo'lsa, u holda $F(x)+C$ funksiyalar to'plami shu intervalda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad C=const.$$

kabi belgilanadi.

Bunda $\int$ –integral ***belgisi,*** $f(x)$ – integral ostidagi ***funksiya***, $f(x)dx$ – **integral ostidagi ifoda** deyiladi.

Aniqmas integralni yoki berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topish jarayoni ***integrallash*** deyiladi.

Segmentda (kesmada) uzluksiz bo'lgan istalgan funksiya shu oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega. Demak, aniqmas integralga ham ega.

Aniqmas integralning asosiy xossalari quyidagilardan iborat.

1^0. Aniqmas integralning hosilasi, integral ostidagi funksiyaga teng, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2^0. Aniqmas integralning differentsiali, integral belgisi ostidagi ifoda $f(x)\,dx$ ga teng, ya'ni

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3^0. Funksiya hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

4^0. Funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o'zgarmas son yig'indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

5^0. O'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisi ostidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

6^0. CHekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig'indisiga teng:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

7^0. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, ya'ni

$$f(x)dx = F(x) + C$$

bo'lsa, u holda

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu yerda $u = u(x) - x$ ning differentsiallanuvchi funksiyasi.

Bu xossa integrallash formulalarining invariantligi deyiladi.

Masalan,

1. $\int 10xdx = \int 5\cdot 2xdx = 5\int 2xdx = 5(x^2 + C) = 5x^2 + 5C = 5x^2 + C$.

2. $\int (5^x + 2x)dx = \int 5^x dx + \int 2xdx = \dfrac{5^x}{\ln 5} + x^2 + C$.

3. $\int x^4 dx = \dfrac{x^5}{5} + C \Rightarrow \int (2x-3)^4 dx = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x-3)^5}{5} + C = \dfrac{(2x-3)^5}{10} + C$.

«Asosiy integrallar jadvali»

1. $\int 0 \cdot du = C.$

2. $\int du = u + C.$

3. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$

4. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C.$

5. $\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{lna} + C.$

6. $\int e^{u} du = e^{u} + C.$

7. $\int sinudu = -\, cosu + C.$

8. $\int cosudu = sinu + C.$

9. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgx + C.$

10. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgx + C.$

11. $\int \frac{du}{\sin u} = ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C.$

12. $\int \frac{du}{\cos u} = ln\left|tg(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + C.$

13. $\int tg\, udu = -ln|cosu| + C.$

14. $\int ctg\, udu = ln|sinu| + C.$

15. $\int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + C = -arcctu + C.$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = arcsinu + C = -arccosu + C.$

17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C \quad (a > 0).$

18. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0).$

19. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C \quad (a \neq 0).$

20. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + k}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 + k}\right| + C.$

21. $\int \frac{udu}{a^2 \pm u^2} = \pm\frac{1}{2}ln|a^2 \pm u^2| + C \quad (a \neq 0).$

22. $\int \frac{udu}{\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm u^2} + C \quad (a \neq 0).$

23. $\int \sqrt{a^2 - u^2} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}arcsin\frac{u}{a} + C \quad (a > 0).$

24. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

25. $\int shudu = chu + C.$

26. $\int chudu = shu + C.$

27. $\int \frac{du}{sh^2u} = -cthu + C.$

28. $\int \frac{du}{ch^2u} = thu + C.$

2-§. Integrallash usullari

2.1. Bevosita integrallash usuli

Bevosita integrallash usuli $5^0, 6^0$ –xossalar va asosiy integrallar jadvalidan foydalanishdan iborat.

Misol sifatida bu usulda quyidagi integrallarni hisoblaymiz:

❖ $$\int\frac{7x-5x^2+1}{x^2}dx = \int(\frac{7}{x} - 5 + \frac{1}{x^2})dx = 7\int\frac{dx}{x} - 5\int dx + \int\frac{dx}{x^2} =$$

$$=7\ln|x|-5x-\frac{1}{x}+C;$$

❖ $$\int \mathrm{tg}^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-1)dx=$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=\mathrm{tg}x-x+C\ ;$$

❖ $$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{1}{2a}[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}]dx=\frac{1}{2a}[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}]=$$

$$=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $\int (x^3+2x-1)dx;$

2. $\int 4x^3-3x^2+\frac{1}{2})dx;$

3. $\int (x^2+3x-4)\ dx;$

4. $\int \frac{x^3-1}{x}\ dx;$

5. $\int \frac{3x+10}{x^2}\ dx;$

6. $\int \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\ dx;$

7. $\int (x-2)^2\ dx;$

8. $\int \frac{25x^4-7}{x^3}\ dx;$

9. $\int \left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}\right)dx;$

10. $\int (3^x+sinx)dx;$

11. $\int \left(\sqrt{x}-1\right)dx;$

12. $\int \frac{cos2x}{sin^2xcos^2x}dx;$

13. $\int \frac{5x^4+7}{x^2}dx;$

14. $\int \frac{dx}{sin^2xcos^2x};$

15. $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx;$

16. $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)dx;$

17. $\int 5^x\left(1+\frac{5^{-x}}{x}\right)dx;$

18. $\int e^x(5+\frac{e^{-x}}{x})\ dx;$

19. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{5}{\sqrt[5]{x}}\ dx;$

20. $\int \frac{1+cos^3x}{cos^2x}dx;$

2.2. Differensial belgisi ostiga kiritish usuli

Differensial belgisi ostiga kiritish usuli, integral ostidagi ifodani almashtirish-dan iboratdir. Bunda

$$dx = d(x+a); \quad dx = \frac{1}{k}d(kx); \quad dx = \frac{1}{k}d(kx+a); \quad xdx = \frac{1}{2}d(x^2);$$

$$cosxdx = d(sinx); \quad sinxdx = -d(cosx); \quad \frac{dx}{x} = d(lnx);$$

va hakazo, almashtirishlarni bajarish mumkin.

Misol sifatida quyidagi integrallarni hisoblaymiz.

➢ $$\int \ln x d\ln x = (u=\ln x) = \int udu = \frac{u^2}{2}+C = \frac{\ln^2 x}{2}+C\ .$$

➢ $$\int (x+4)^{99}dx = \int (x+4)^{99}d(x+4) = (u=x+4) =$$

$$=\int u^{99}du = \frac{u^{100}}{100}+C = \frac{(x+4)^{100}}{100}+C.$$

Bu yerda $dx=d(x+4)$ ekanligidan foydalandik.

➢ $$\int \text{tg}x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{-d\cos x}{\cos x} = (u = \cos x) =$$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C .$$

2.3. O'rniga qo'yish usuli

Jadvalga kirmagan $\int f(x)dx$ integralni hisoblash kerak bo'lsin. x ni t erkli o'zgaruvchining biror differensiallanuvchi $x = \varphi(t)$ funksiyasi orqali ifodalab, integrallashning yangi t o'zgaruvchisini kiritamiz. Bu funksiyaga teskari $t = \psi(x)$ funksiya mavjud bo'lsin. U holda $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt$ bo'lib,

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

formula hosil bo'ladi.

Bu o'rniga qo'yish usuli deyiladi.

O'zgaruvchilarni almashtirish usuliga misol sifatida ushbu integrallarni hisoblaymiz.

- $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+4} = t, \ x+4 = t^2 \\ x = t^2 - 4, \ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{(t^2-4)\cdot t} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2 - 2^2} = 2 \cdot \frac{1}{2\cdot 2} \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

- $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = (a \neq 0) = \begin{bmatrix} x = at\,, \quad t = x/a, \\ dx = d(at) = adt \end{bmatrix} = \int \frac{adt}{a^2t^2 + a^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\text{arctg}t + C = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C .$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $\int sin5xdx;$

2. $\int \cos 2xdx;$

3. $\int cos\frac{x}{3}dx;$

4. $\int \sqrt{x-3}dx;$

5. $\int e^{-12x}dx;$

6. $\int 17^{sinx}cosxdx;$

7. $\int \frac{dx}{sin^2 2x};$

8. $\int tg3xdx;$

9. $\int ctg(-4x)dx;$

10. $\int (2x-1)^{50}dx;$

11. $\int (x+2)^{10}dx;$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}};$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+10}};$

14. $\int \sqrt[5]{2-3x}\,dx;$

15. $\int sinx \cdot cos^2 xdx;$

16. $\int tgxdx;$

17. $\int ctgxdx;$

18. $\int \frac{sinx}{cos^5 x}dx;$

19. $\int x \cdot e^{x^2}dx;$

20. $\int sinx \cdot e^{cosx}dx;$

2.4. Bo'laklab integrallash

Bo'laklab integrallash formulasi ikki funksiya ko'paytmasini differensiallash formulasidan kelib chiqadi. $u(x)$ va $v(x)$ differentsiallanuvchi funksiyalar.Ikki funksiya ko'paytmasining differentsiali:

$$d(uv) = vdu + udv$$

ga teng.

Bundan

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (1)$$

ni hisil qilamiz.

(1) formula ***bo'laklab intgrallash formulasi*** deyiladi.

Bu formula odatda integral ostidagi funksiya turli sinfdagi darajali va ko'rsatkichli, darajali va trigonometrik, trigonometrik va ko'rsatkichli va hokazo., funksiyalarning ko'paytmasi shaklida ifodalangandagina qo'llaniladi. Bunda integrallashning ikki turini ajratib, ular uchun qaysi funksiyani u deb va qaysi ifodani dv deb qabul qilish kerakligini ko'rsatish mumkin.

Birinchi turga $P_n(x)$ ko'phadning ko'rsatkichli yoki trigonometrik funksiyaga ko'paytmasini o'z ichiga olgan integrallar kiradi. Bu yerda u orqali $P_n(x)$ ko'phad belgilanadi, qolgan hamma ifoda esa dv orqali belgilanadi.

Ikkinchi turga $P_n(x)$ ko'phadning logarifmik yoki teskari trigonometrik funksiyaga ko'paytmasi qatnashgan integrallar kiradi. Bu holda dv bilan $P_n(x)dx$ ifoda belgilanadi, qolgan hamma funksiya esa u bilan belgilanadi.

Bu formula takroran bir necha marta qo'llanishi mumkin.

Bo'laklab integrallash usulida

$$\int x^n \cos axdx, \quad \int x^n \sin axdx, \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad \int x^n a^x dx, \quad \int x^n \ln xdx,$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx, \quad \int e^{ax}\sin bxdx, \quad \int x^n \arccos xdx, \quad \int x^n \mathrm{arctg} xdx, \quad \int \sin\ln xdx$$

va shularga o‘xshash integrallarni hisoblash mumkin.

Bo‘laklab integrallash usuliga misol sifatida $\int xe^x dx$ integralni hisoblaymiz. Bunda ikki holni qaraymiz.

1-hol. Integral ostidagi $xe^x dx$ ifodani $u=e^x$, $dv=xdx$ ko‘rinishda bo‘laklaymiz. Bu holda

$$du = de^x = (e^x)'dx = e^x dx, \quad v = \int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

bo‘lgani uchun, $C=0$ deb, (4) formuladan

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx$$

tenglikka kelamiz. Ammo bunda hosil bo‘lgan o‘ng tomondagi integral berilgan integralga nisbatan murakkabroq ko‘rinishga ega. Demak, bunday bo‘laklash maqsadga muvofiq emas.

2-hol. Bu holda $u=x$, $dv=e^x dx$ deb olamiz. Bunda

$$du = dx, \quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x + C$$

bo‘ladi. Bu yerda $C=0$ deb va (4) formuladan foydalanib, berilgan integralni quyidagicha oson hisoblaymiz:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Ayrim integrallarni hisoblash uchun bo‘laklab integrallash formulasini bir necha marta qo‘llashga to‘g‘ri keladi. Bunga misol sifatida ushbu integralni qaraymiz:

$$\int x^2 \sin xdx = \begin{bmatrix} u = x^2, & dv = \sin xdx, \\ du = 2xdx, & v = \int \sin xdx = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2\cos x + 2\int x\cos xdx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, & dv = \cos xdx, \\ du = dx, & v = \int \cos xdx = \sin x \end{bmatrix} = -x^2\cos x + 2(x\sin x - \int \sin xdx) =$$

$$= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C.$$

Shunday qilib, bu yerda (1) bo‘laklab integrallash formulasidan ikki marta foydalandik.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $\int (x+1)e^x dx$; 2. $\int e^{2x}\cos x\, dx$;

3. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$; 4. $\int x^2 e^{3x} dx$;

5. $\int x\, cosxdx$; 6. $\int ln^2 xdx$;

7. $\int \frac{x\cos x\, dx}{sin^3 x}$; 8. $\int \frac{arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2^2-x^2}} dx$;

3-§. Aniq integral

Aniq integral–matematik analizning eng muhim tushunchalaridan biri bo'lib, u orqali turli ko'rinishdagi figura yuzlarini, yoylarning uzunliklarini, turli shakldagi jismning hajmini va hokazolarni hisoblash mumkin.

$[a;b]$ segmentda $y=f(x)$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin.

1. $[a;b]$ segmentni $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ nuqtalar bilan n ta bo'lakka bo'lamiz:

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b.$$

Ular qismiy intervallar deyiladi.

2.Qismiy intervallar uzunliklarini

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \qquad \Delta x_2 = x_2 - x_1, \qquad \Delta x_1 = x_1 - x_0, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

bilan belgilaymiz.

3.Har bir qismiy intervaldan bittadan ixtiyoriy nuqta tanlab olamiz:

$$\xi_1,\ \xi_2, \dots, \xi_n.$$

4.Tanlangan nuqtalarda berilgan funksiyaning qiymatini hisoblaymiz:

$$f(\xi_1), \qquad f(\xi_2), \dots, f(\xi_n).$$

5.Funksiyaning hisoblangan qiymatlarini mos qismiy intervallar uzunliklariga ko'paytmasini tuzamiz:

$$f(\xi_1)\cdot\Delta x_1,\ f(\xi_2)\cdot\Delta x_2, \dots,\ f(\xi_n)\cdot\Delta x_n.$$

6.Hosil bo'lgan ko'paytmalarini qo'shamiz va θ bilan belgilaymiz:

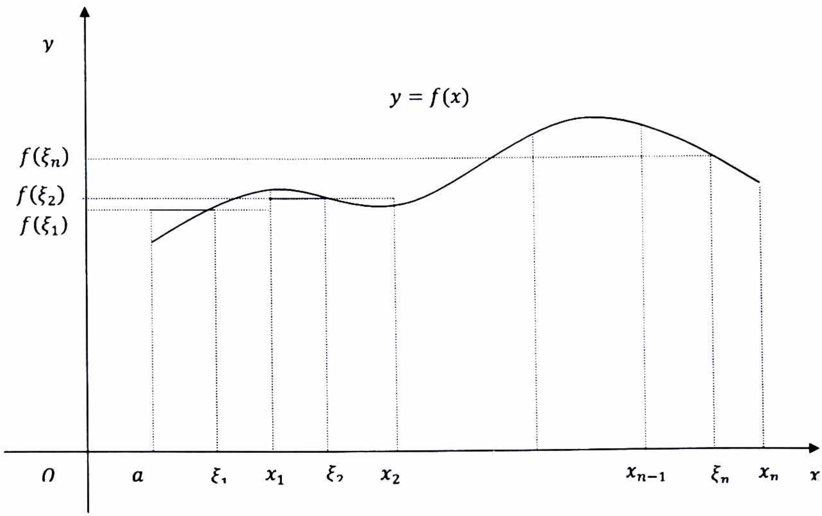
$$\theta = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n \qquad (1)$$

θ yig'indi $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ segmentdagi integral yig'indisi yoki Riman yig'indisi deyiladi va qisqacha bunday yoziladi:

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Integral yig'indi bo'linishlar usuli n ga va tanlab olinadigan nuqtalar $\xi_i (i = 1, n)$ ga bog'liq $\theta = \theta(n; \xi_i)$

Bo'linishlar soni n ni ortira borish hisobiga $(n \to \infty)$ eng katta qismiy intervalning uzunligi nolga intiladi, ya'ni $max \Delta x_i \to 0$.



20-rasm

1-ta'rif. Agar θ integral y $b]$ segmentni qismiy intervallarga ajratish usuliga va ularning har biridan ξ_i $(i = 1, n)$ nuqtalarni tanlash usuliga bog'liq bo'lmay hamma vaqt yagona I songa intilsa, u holda shu son $[a; b]$ segmentda $f(x)$ funksiyadan olingan aniq integral deyiladi va

$$\int_a^b f(x)\, d(x)$$

kabi belgilanadi.

Aniq integral ta'rifi va belgilashga asosan:

$$I = \int_a^b f(x)\, d(x) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Teorema 1. Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u integrallanuvchidir, ya'ni bunday funksiyaning aniq integrali mavjuddir.

Aniq integralning xossalari.

1^o CHekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali shu funksiyalar aniq integralining algebraik yig'indisiga teng:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)d(x) \pm \int_a^b g(x)dx.$$

2^o O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$$

3^o Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda bu funksiya aniq integralining ishorasi funksiya ishorasi bilan bir xil bo'ladi, ya'ni:

$a)$ agar $[a;b]$ segmentda $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

$b)$ agar $[a;b]$ segmentda $f(x) \leq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ bo'ladi.

4^o Agar $\forall x \in [a;b]$ uchun $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

5^o Agar $[a;b]$ segment bir necha qismga bo'linsa, u holda $[a;b]$ segment bo'yicha aniq integral shu qismlar bo'yicha olingan aniq integrallar yig'indisiga teng: Agar $a < c < b$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

6^o Agar m va M sonlar $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ segmentdagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa, u holda

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Izohlar.

1. Aniq integralning qiymati integral ostidagi ifoda harfiga bog'liq emas.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

2. Aniq integral chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o'zgaradi:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. Aniq integralning chegaralari teng bo'lsa, har qanday funksiya uchun

$$\int_a^a f(x) = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Misollar:

1. $\int_0^1 \sqrt{1+t}dt = \int_0^1 (1+t)^{\frac{1}{2}}d(t+1) = \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$

2. $\int_0^{\pi/2}(1-cos^2x)\sin x\,dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t\\ \sin x\,dx = -dt\\ x_1 = 0, t_1 = 1; x_2 = \frac{\pi}{2}, t_2 = 0\end{matrix}\right| =$

$$= -\int_1^0 (1-t^2)dt = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

3. $\int_0^1 xe^{-x}dx = \left|\begin{matrix}u = x, \; du = dx\\ dv = e^{-x}dx, \; v = -e^{-x}\end{matrix}\right| = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx =$

$(-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$

4. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \left|\begin{matrix}x = \sin t\\ dx = \cos t\,dt\\ t = \arcsin x\\ x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, t_1 = \frac{\pi}{4};\\ x_2 = 1, t_2 = \frac{\pi}{2}\end{matrix}\right| = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-sin^2t}}{sin^2t}\cos t\,dt =$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2 t}{sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-sin^2 t}{sin^2 t} dt = (-ctgt - t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

4-§. Aniq integralni hisoblash va hisoblash usullari

Ko'p hollarda aniq integralni ta'rifga ko'ra hisoblash qiyin va uzoq hisoblashlarni talab qiladi. SHuning uchun amalda juda kam qo'llaniladi. Integrallarni hisoblashning amaliy jihatdan qulay bo'lgan yo'llarini topish zarurati tug'iladi.

Teorema 1. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning $[a; b]$ segmentda boshlan-g'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral boshlang'ich funksiyaning integrallash oralig'idagi orttirmasiga teng, ya'ni.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

(1) formula aniq integralni hisoblashning Nyuton–Leybnits formulasi deyiladi.

Agar $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$ deb olinsa, u holda

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

bo'ladi.

Shunday qilib, Nyuton – Leybnits formulasi orqali aniq integralni hisoblash masalasi bizga tanish bo'lgan aniqmas integralni hisoblash masalasiga keltiriladi. Bunga yana bir nechta misol keltiramiz:

- $\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$; $\int_a^b e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_a^b = \frac{e^{4b} - e^{4a}}{4}$;
- $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \ln x d\ln x = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e = \frac{\ln^2 e - \ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 e = \frac{1}{2}$;
- $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2 - 1 = 1$.

4.1. Aniq integralni hisoblash usullari

1). O'zgaruvchini almashtirish usuli.

$y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. $x = \varphi(t)$ deb, o'zgaruvchini almashtiramiz,bunda $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha; \beta]$ segmentda uzluksiz, $\varphi'(t)$ hosila ham bu segmentda uzluksiz bo'lsin.

$x = \varphi(t)$ funksiya α va β ni mos ravishda a va b ga akslantirsin, ya'ni $\varphi(\alpha) = a, \ \varphi(\beta) = b$.

U holda

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

(2) formula o'zgaruvchini almashtirib integrallash formulasi deyiladi.

Ushbu aniq integrallarni o'zgaruvchilarni almashtirish formulasi yordamida hisoblaymiz.

$$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+1} = t, & x = t^2 - 1, dx = 2tdt \\ \alpha = \sqrt{0+1} = 1, & \beta = \sqrt{3+1} = 2 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} =$$

$$= 2\int_1^2 (t^2 - 1)dt = 2(\frac{t^3}{3} - t)\Big|_1^2 = 2(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \ ;$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x = \sin t, \ dx = \cos t dt, \ 1 - x^2 = \cos^2 t \\ \alpha = \arcsin 0 = 0, \quad \beta = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \quad .$$

2). Bo'laklab integrallash usuli.

$u(x)$ va $v(x)$funksiyalar $[a; b]$ segmentda differentsiallanuvchi bo'lsin.

Aniqmas integralni bo'laklab integrallash formulasiga asosan:

$$\int_a^b u\,dv = uv\,|_a^b - \int_a^b v\,du \qquad (3)$$

(3) formula aniq integralni bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

Bu yerdan ko'rinadiki, aniq integralni bo'laklab integrallash xuddi aniqmas integralga o'xshash usulda amalga oshiriladi. Buni quyidagi misollarda ko'ramiz:

- $$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = \begin{bmatrix} u = x, & dv = \cos x dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{bmatrix} = x \cdot \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2};$$

- $$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \begin{bmatrix} u = \ln x, & dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = 2\sqrt{x} \end{bmatrix} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} \sqrt{x}\frac{dx}{x} =$$

$$= 4e - 4\sqrt{x}\Big|_1^{e^2} = 4e - 4e + 4 = 4;$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int_1^5 \sqrt{x-1}dx$
2. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$
3. $\int_{-1}^4 \frac{x}{\sqrt{x+5}}dx$
4. $\int_1^e \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$
5. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
7. $\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx$
8. $\int_1^e x^2 \ln x dx$
9. $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$
10. $\int_0^1 \arcsin x dx$
11. $\int_0^1 \ln(x+1)dx$
12. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$
13. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$
14. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$
15. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$
16. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$
17. $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$
18. $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$

19. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ 20. $\int_1^e x\arcsin x dx$

5-§. Aniq integralni taqribiy hisoblash

Integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ma'lum bo'lsa, aniq integralni Nьyuton–Leybnits formulasi yordamida hisoblash mumkin. Ammo boshlang'ich funksiyani topish masalasi har doim ham oson topilavermaydi. Bunday hollarda taqribiy hisoblash usullaridan foydalaniladi.

5.1. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi

$y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin.

$[a; b]$ segmentni $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ nuqtalar bilan n ta teng bo'lakka bo'lamiz.Har bir bo'lakning uzunligi

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

ga teng bo'ladi.

$y = f(x)$ funksiyaning $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$y_0 = f(x),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), \dots,\ y_n = f(x_n).$$

Quyidagi yig'indini tuzamiz:

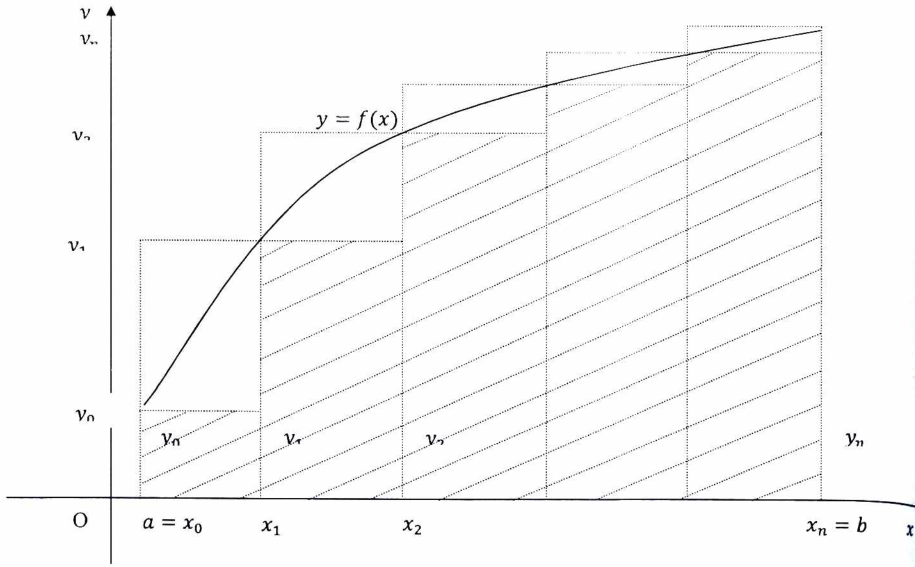
$$y_0 \cdot \Delta x + y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + \dots + y_{n-1} \cdot \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \Delta x,$$

$$y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + \dots + y_{n-1} \cdot \Delta x + y_n \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta x.$$

Bu yig'indilar $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi integral yig'indisini ifodalaydi. SHuning uchun taqriban integralni ifodalaydi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \qquad (4)$$

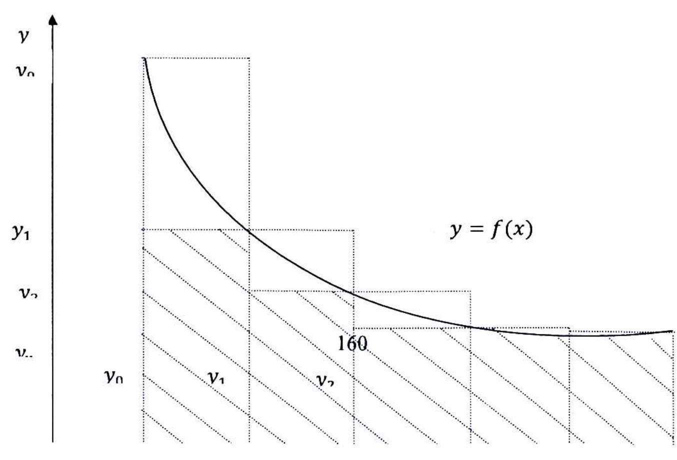
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (5)$$



1-rasm.

(4) va (5) formulalar aniq integralni taqribiy hisoblashning to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deyiladi.

Agar $f(x) \geq 0$ va $f(x)$ o'suvchi (1-rasm)(kamayuvchi, 2-rasm) bo'lsa, u holda (4) formula "ichki" ("tashqi") to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onasimon figuraning yuzini, (5) formula esa "tashqi" ("ichki") to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onasimon figuraning yuzini ifodalaydi.



To'g'ri turtburchaklar formulasining absolyut xatosi

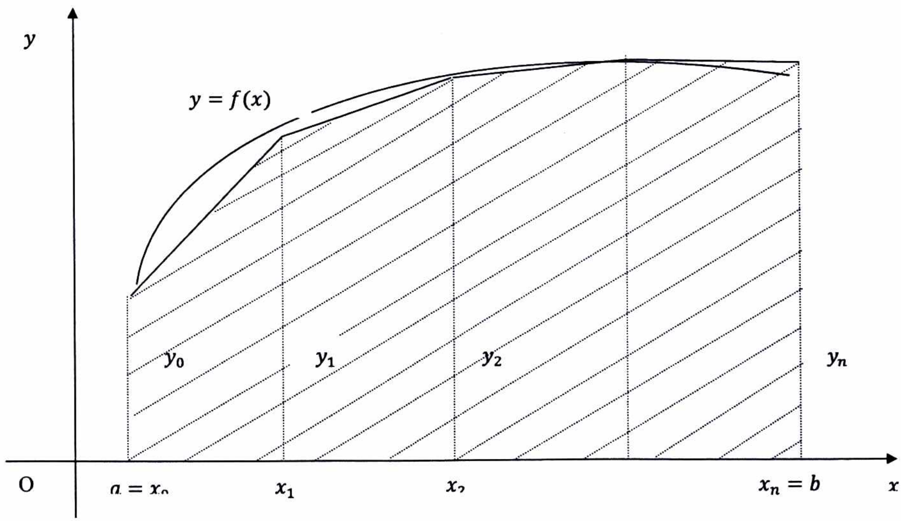
$$M_1 \cdot \frac{(b-a)^2}{4n} \tag{6}$$

dan katta emas, bu yerda $M_1 - |f'(x)|$ ning $[a;b]$ segmentdagi eng katta qiymati.

5.2. Trapetsiyalar formulasi

$[a;b]$ segmentni bo'linishi to'g'ri to'rtburchaklardagidek qoladi.

Δx qismiy intervalga mos keluvchi $y = f(x)$ chiziqning har bir yoyini bu yoyning chetki nuqtalarini tutashtiruvchi vatar bilan almashtiramiz.



3-rasm

Bu berilgan egri chiziqli trapetsiyaning n ta to'g'ri chiziqli trapetsiyalar yuzlarining yig'indisi bilan almashtirilganini bildiradi (3-rasm).

Trapetsiya yuzini topish formulasiga asosan:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)=$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) \qquad (7)$$

Bu aniq integralni taqribiy hisoblashning trapetsiyalar formulasi deyiladi.

CHizmadan ham ko'rinib turibdiki, xatolik to'g'ri to'rtburchaklar formulasidan kam.

Trapetsiyalar formulasining absolyut xatosi

$$M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2} \qquad (8).$$

dan katta emas. Bu yerda $M_2 - |f''(x)|$ ning $[a; b]$ segmentdagi eng katta qiymati.

6-§. Aniq integralning tadbiqlari

6.1. Yassi figuralar yuzlarini hisoblash

$a)$ OX o'qqa yopishgan, $y = f(x)$ egri chiziq, OX o'qi, $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi (4-rasm).

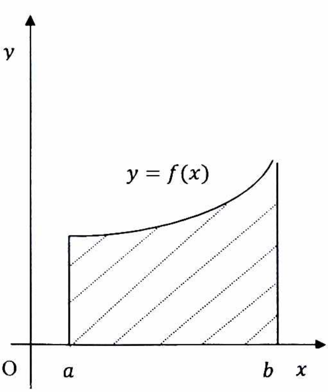
$$S = \left|\int_a^b y\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (1).$$

ga teng.

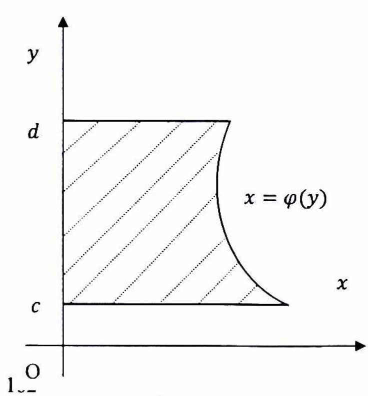
b) OY o'qqa yopishgan, $x = \varphi(y)$ egri chiziq, OY o'qi, $y = c$ va $y = d$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi (5-rasm).

$$S = \left|\int_c^d x\,dy\right| = \left|\int_c^d \varphi(y)dy\right| \qquad (2).$$

ga teng.

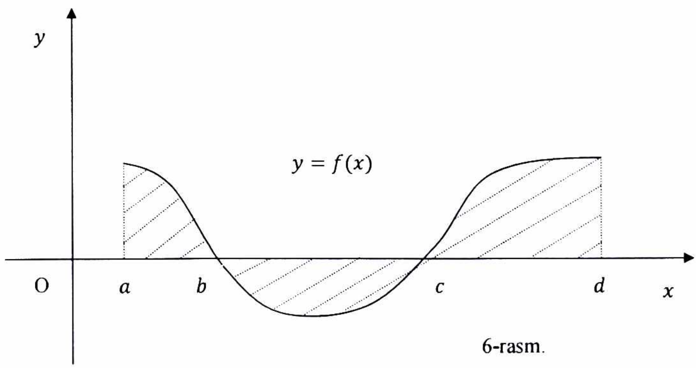


4-rasm.



5-rasm.

c) Agar $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ segmentda o'z ishorasini chekli marta almashtirsa, u holda butun kesma bo'yicha olingan integralni qismiy kesmalar bo'yicha olingan integrallar yig`indisiga bo'lamiz. $f(x) > 0$ bo'lgan kesmalarda integral musbat, $f(x) < 0$ bo`lgan kesmalarda integral manfiy bo'ladi. (26-rasm). SHuning uchun

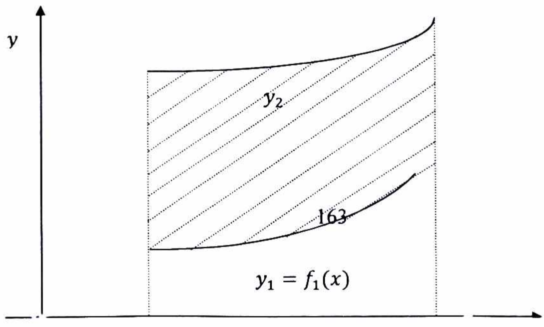


6-rasm.

$$S = \left|\int_a^d f(x)dx\right| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| + \left|\int_b^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^d f(x)dx\right| =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx. \qquad (3)$$

d) $y_1 = f_1(x)$ *va* $y_2 = f_2(x)$ egri chiziqlar hamda $x = a,\ x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzi (7-rasm).



$$S = \left| \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx \right| \qquad (4).$$

* Bu yerda yuqoridagi chiziqdan, pastdagi chiziq ayriladi.

Masalan, $x\in[\pi/2,\pi]$ holda $y=\cos x\leq 0$ va bunda hosil bo'ladigan egri chiziqli trapetsiya yuzasi

$$S = \left| \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx \right| = \left| \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right| = |0-1| = 1 \ .$$

Masalan, $y=x^2$ va $y=x$, $x=2$ va $x=4$ chiziqlar bilan chegaralangan yassi geometrik shakl yuzasini hisoblaymiz:

$$S = \int_2^4 (x^2 - x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^4 = \left(\frac{64}{3} - 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{56}{3} - 6 = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3} \ .$$

6.2. Jismlar hajmini hisoblash

a) Jismning hajmini ko'ndalang kesimning yuzi bo'yicha hisoblash. Berilgan jismning OX o'qiga perpendikulyar tekislik bilan kesimining yuzi S ma'lum bo'lsin. Bu yuz kesuvchi tekislikning vaziyatiga bog'liq, ya'ni x ning funksiyasi bo'ladi. $S = S(x)$. Bu kesim ko'ndalang kesim deyiladi. $S(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsin. Berilgan jismning hajmini hisoblash uchun $[a; b]$ kesmani $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n = b$ nuqtalar bilan ixtiyoriy n ta bo'lakka bo'lamiz. Bu nuqtalar orqali OX o'qiga perpendikulyar tekisliklar o'tkazamiz. Bu tekisliklar jismni n ta qatlamga ajratadi, ularning hajmlarini $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_i, \dots, \Delta V_n$ bilan belgilaymiz. U holda $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$ bo'ladi. ΔV_i balandligi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, asosi $S\,(\xi_i)$ ga teng bo'lgan to'g'ri tsilindrning hajmiga taqriban teng.

$$\Delta V_i \approx S\,(\xi_i) \cdot \Delta\, x_i$$

Bu yerda $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.

U holda butun jismning xajmi:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Bu yig'indi $[a;b]$ kesmada $S(x)$ funksiya uchun integral yig'indi, shuning uchun $\max \Delta x_i \to 0$ da uning limiti

$$V = \int_a^b S(x)dx \tag{5}$$

ga teng bo'ladi.

b) Aylanish jismning hajmi.

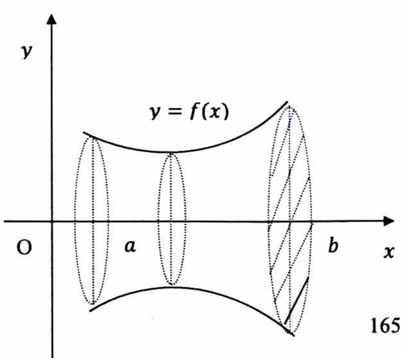
Qaralayotgan jism $y = f(x)$ chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning OX o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lsin OX o'qiga perpendikulyar x abstsissali kesim doiradan iborat bo'lib, uning radiusi $y = f(x)$ ordinataga teng bo'ladi. U holda $S(x) = \pi \cdot y^2 = \pi \cdot (f(x))^2$ ga teng. Bundan OX o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jismning hajmi. (8-rasm).

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx. \tag{6}$$

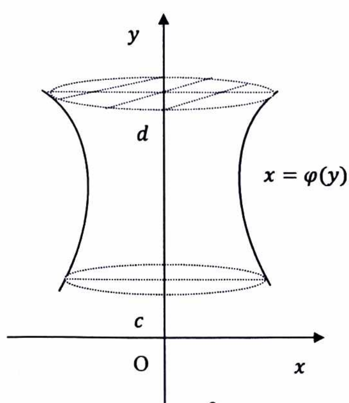
OY o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jismning hajmi (9-rasm).

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy \tag{7}$$

bu yerda $x = \varphi(y)$ aylanish jismini hosil qiluvchi chiziqning tenglamasi, $c \le y \le d$.



8-rasm.



9-rasm.

Misol sifatida yarim o‘qlari a va b bo‘lgan ellipsni OX o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘ladigan ellipsoidning hajmini topamiz. Ellipsning kanonik tenglamasidan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2(1-\frac{x^2}{a^2}),\ x\in[-a,a]$$

ekanligini topamiz. Bu natijani (7) formulaga qo‘yib, ellipsoidning V hajmini hisoblaymiz:

$$V=\pi\int_{-a}^{a} f^2(x)dx=\pi\int_{-a}^{a} y^2dx=\pi b^2\int_{-a}^{a}(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\pi b^2(x-\frac{x^3}{3a^2})\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Agar bunda $a=b=R$ deb olsak, unda ellipsoid radiusi R bo‘lgan sharga aylanadi va bu holda sharning halmi uchun yuqoridagi natijadan bizga maktabdan tanish bo‘lgan $V=4\pi R^3/3$ formula kelib chiqadi.

6.3. Egri chiziq uzunligi

AB egri chiziqni

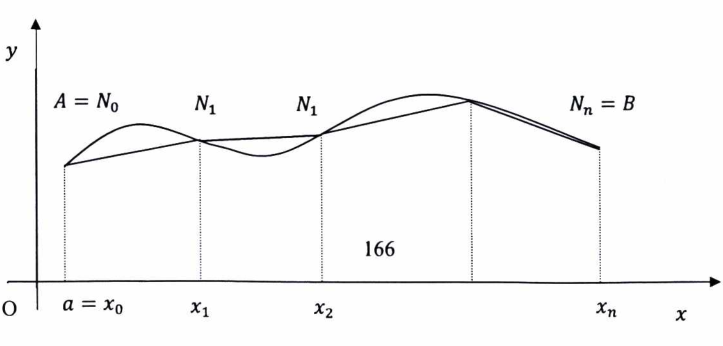
$$A=N_0(x_0;y_0), N_1(x_1,y_1),\dots,N_{i-1}(x_{i-1},y_{i-1}),\dots,N_n(x_n,y_n)=B.$$

nuqtalar bilan ixtiyoriy n ta bo’lakka bo’lamiz.

Qo’shni bo’linish nuqtalarini kesmalar bilan tutashtirib, AB yoyga ichki chizilgan siniq chiziqni hosil qilamiz. Bu siniq chiziqlarni uzunligini mos ravishda $\Delta l_1 = AN_1 = N_0N_1$, $\Delta l_2 = N_1N_2, \dots, \Delta l_n = N_{n-1}N_n = N_{n-1}B$. bilan belgilaymiz.

U holda siniq chiziqning uzunligi

$$l_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i.$$



1-ta'rif. AB egri chiziqning l uzunligi deb AB egri chiziqqa ichki chizilgan siniq chiziq perimetrining siniq chiziq bo'g'inlari soni cheksiz ortganda va eng katta bo'g'inning uzunligi nolga intilgandagi limiti

$$l = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \qquad (1)$$

ga aytiladi.

Tekislikdagi ikki nuqta $N_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ *va* $N_i(x_i, y_i)$ lar orasidagi masofa formulasiga ko'ra

$$\Delta l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

ga teng.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$

ga ko'ra

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i.$$

$\max \Delta x_i \to 0$ da limitga o'tsak, siniq chiziq uzunligi, egri chiziq uzunligiga teng bo'ladi.

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} l_n = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i =$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = l$$

Demak, egri chiziq uzunligi:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \qquad (2).$$

ga teng.

Misol sifatida $y=\ln\sin x$ egri chiziqning $x=\pi/3$ va $x=\pi/2$ abssissali nuqtalari orasidagi yoyining uzunligini topamiz. Bunda $y'=\mathrm{ctg}x$ ekanligidan va universal almashtirmadan foydalanib, (6) formulaga asosan, ushbu natijani olamiz:

$$l=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2x}dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2x}dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=$$

$$=\begin{bmatrix} t=tg\frac{x}{2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \alpha=tg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \beta=tg\frac{\pi}{4}=1 \end{bmatrix}=\int_{1/\sqrt{3}}^{1}\frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2}=\ln t\Big|_{1/\sqrt{3}}^{1}=\ln\sqrt{3}\ .$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi aniq integrallarni hisoblang.

1. $\int_0^5 x^4\,dx;$
2. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx;$
3. $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx;$
4. $\int_0^2 (x^2-3x+1)\,dx;$
5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}};$
6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$
7. $\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}\,dx;$
8. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{cos^2x};$
9. $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{sin^2x};$
10. $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}\,dx;$
11. $\int_2^3 \frac{dx}{x^3};$
12. $\int_0^1 3^x\,dx;$
13. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx;$
14. $\int_a^{\sqrt{3a}} \frac{dx}{x^2+a^2};$
15. $\int_1^e \frac{x^2+lnx}{x}dx;$
16. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(arctgx)^2}{1+x^2}dx;$
17. $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1-\ln(x-1)}{x-1}dx;$
18. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{sinx}\,cosx\,dx;$

19. $\int_0^{\pi/3} \frac{sinx}{\sqrt{cos^2x+1}}dx;$ 20. $\int_0^1 x^2 \cdot e^{x^3}\,dx;$

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

1. $y = 16 - x^2, \quad y = 0.$
2. $y = x^2, \quad y = 4.$
3. $y = x^2 - 5x + 6, \quad y = 0.$
4. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2.$
5. $y = sinx, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}.$
6. $y = \frac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = e, \quad y = 0.$
7. $y = x^2, \quad y = 4 - x^2.$
8. $y = -x^2 - 4x + 5, \quad y = 0.$
9. $y = x^2 + 4, \quad y = x + 6.$
10. $y = lnx, \quad y = 0, \quad x = e.$
11. $y^2 = 2x + 6, \quad x = 0.$
12. $y = tgx, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad y = 0.$

Qo'yidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning aylanishidan hosil bo'lgan jismlarni hajmini toping.

1. $y = x^2 \quad y = 4, \quad OY$ o'qi atrofida.
2. $y = \frac{1}{x} \quad x = 1, \quad x = e, \quad OX$ o'qi atrofida.
3. $y = sinx, \quad x = 0, \quad x = \pi, \quad y = 0, \quad OX$ o'qi atrofida.
4. $y = lnx, \quad x = e, \quad y = 0, \quad OX$ o'qi atrofida.
5. $y = 2^x, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad OY$ o'qi atrofida.
6. $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad OY$ o'qi atrofida.
7. $y = -x^2 + 4, \quad y = 0, \quad OX$ o'qi atrofida.
8. $y = \sqrt{x}, \quad x = 16, \quad y = 0, \quad OY$ o'qi atrofida.
9. $y = cosx \; va \; y = -1, \quad -\pi \le x \le \pi$ bo'lganda $y = -1$ to'g'ri chiziq atrofida.

IX BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI

1-§. Hodisalar algebrasi

Matematikaning hozirgacha o'rganilgan bo'limlarida biz jarayonlarni formulalar yordamida ifodalay oldik. Masalan, moddiy nuqta harakat tezligini $v = \frac{ds}{dt}$ formula bilan, vektor maydon oqimini $\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{a}\vec{n}^0 d\sigma$ integral bilan hokazo.

Ammo atrof muhitda shunday jarayon, vaziyat va hodisalar mavjudki, ularni matematik ifodalashning imkoniyati bo'lmaydi. Masalan, tanga tashlanganda uning tayin tomoni tushishi, lotoreyada avtomobil yutug'i chiqishi hodisalari. Bunday hodisalarga tasodifiy hodisalar deyiladi.

Har qanday tasodifiy hodisa juda ko'p tasodifiy sabablar natijasidir. Masalan,

"Tanganing gerbli tomoni tushishi" hodisasi tangani otishga sarflangan kuch, tanganing shakli, shamol yo'nalishi va boshqa sabablarga bog'liq ravishda ro'y beradi. Ammo, yetarlicha ko'p sondagi bir jinsli tasodifiy hodisalar o'zlarining muayyan tabiatidan qat'iy nazar tayin qonuniyatlarga, jumladan ehtimoliy qonuniyatlarga bo'ysunadi. Ehtimollar nazariyasi ana shu qonuniyatlarni o'rganadi.

Shunday qilib, ***ehtimollar nazariyasi*** – ommaviy, bir jinsli tasodifiy hodisalarning ehtimoliy qonuniyatlarini o'rganuvchi matematik fan.

Ehtimollar nazariyasi hodisa tushunchsiga asoslanadi.

Hodisa deb sinashlar natijasida, ya'ni tayin shartlar majmuasi bajarilganda ro'y berishi mumkin bo'lgan har qanday faktga aytiladi. Masalan, tangani tashlash – sinash, uning gerbli tomoni tushishi – hodisa.

Hodisalar lotin alfavitining bosh harflari bilan belgilanadi.

Sinash natijasida albatta ro'y beradigan hodisaga ***muqarrar hodisa*** deyiladi va U bilan belgilanadi.

Sinash natijasida mutlaqo ro'y bermaydigan hodisaga ***mumkin bo'lmagan hodisa*** deyiladi va V bilan belgilanadi.

Masalan, o'yin kubigi (shoshqol toshi) tashlanganda 6 dan katta bo'lmagan ochko tushishi hodisasi muqarrar hodisa bo'lsa, 7 dan kichik bo'lmagan ochko tushishi hodisasi mumkin bo'lmagan hodisa bo'ladi.

Sinash natijasida ro'y berishi ham ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisa ***tasodifiy hodisa*** deb ataladi. Masalan o'yin kubigi tashlanganda 3 ochko tushishi hodisasi tasodifiy hodisa.

Agar sinash natijasida bir nechta hodisalardan hech birini boshqalarga nisbatan ro'y berishi mumkinroq deyishga asos bo'lmasa, bunday hodisalarda ***teng imkoniyatli hodisalar*** deyiladi. Masalan, o'yin kubigi tashlanganda 1 dan 6 gacha ochko tushishi hodisalari teng imkoniyatli hodisalar bo'ladi. Chunki o'yin kubigi bir jinsli materialdan o'lchamlari bir xil bo'lgan kub shaklida yasalgan.

Agar sinash natijasida bir nechta hodisalardan bittasi va faqat bittasining ro'y berishi muqarrar hodisa bo'lsa, u holda bunday hodisalar ***yagona mumkin bo'lgan hodisalar*** deb ataladi. Masalan, tanga tashlanganda A – raqamli tomon tushishi, B – gerbil tomon tushishi hodisalari yagona mumkin bo'lgan hodisalar.

Sinash natijasida ro'y berisi mumkin bo'lgan har bir hodisaga ***elementar hodisa*** deyiladi. Masalan, tanga tashlash sinashi ikkita A – raqamli tomon tushishi va B – gerbil tomon tushishi elementar hodisalaridan tashkil topadi.

Barcha elementar hodisalar to'plami ***hodisalar maydoni*** deyiladi va Ω orqali belgilanadi. Ω sinashning barcha mumkin bo'lgan natijalarini o'z ichiga oladi.

Ω ning ixtiyoriy A qism to'plami hodisa bo'ladi. Sinash natijasi A ga kirgan biror

hodisadan iborat bolsa, u holda A hodisa ro'y beradi.

1-ta'rif. A va B ***hodisalarning birikmasi*** (yoki ***yig'indisi***) deb ulardan hech bo'lmaganda bittasi ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi va $A \cup B$ (yoki $A + B$) bilan belgilanadi.

2-ta'rif. A va B ***hodisalarning kesishmasi*** (yoki ***ko'paytmasi***) deb ularning birgalikda ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi va $A \cap B$ (yoki $A \cdot B$) bilan belgilanadi.

3-ta'rif. A va B ***hodisalarning ayirmasi*** deb A hodisa ro'y berganda B hodisaning ro'y bermasligidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi va $A \setminus B$ bilan belgilanadi.

4-ta'rif. Bir vaqtda ro'y bermaydigan A va B hodisalarga ***birgalikda bo'magan hodisalar*** deyiladi. Birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun $A \cdot B = V$ bo'ladi.

5-ta'rif. A hodisaga ***qarama – qarshi hodisa*** deb A hodisaning ro'y bermasligidan iborat bo'lgan $\overline{A}$ hodisaga aytiladi. Masalan, bitta o'q uzishda

A– o'qning nishonga tegishi va $\overline{A}$–o'qning nishonga tegmasligi hodisalari qarama – qarshi hodisalardir. Qarama – qarshi hodisalar uchun $A \cdot \overline{A} = V$ va $A + \overline{A} = \Omega$ bo'ladi.

Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar birgalikda bo'lmagan va yagona mumkin bo'lgan hodisalar bo'lsa, u holda bu ***hodisalar to'la guruh tashkil etadi*** deb yuritiladi. To'la guruh tashkil etuvchi hodisalar uchun $A_i \cdot A_j = V \ (i \neq j)$ va $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$ bo'ladi.

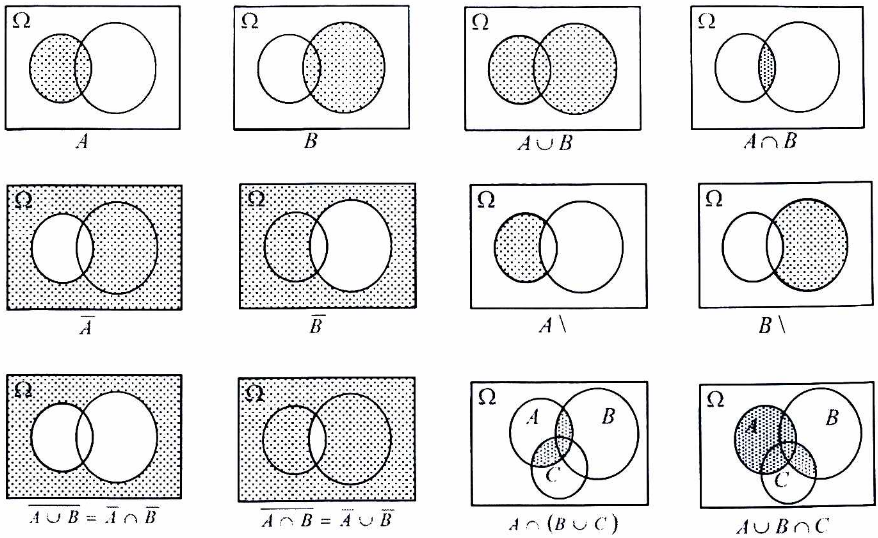
$\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$ hodisalar quyidagi xossalarga bo'ysunadi:

1^o. $A \cup B = B \cup A$;	2^o. $A \cap B = B \cap A$;
3^o. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;	4^o. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
5^o. $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$;	6^o. $A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
7^o. $A \cup \overline{A} = U$;	8^o. $A \cap \overline{A} = V$;
9^o. $A \cap U = A$;	10^o. $A \cup V = A$;
11^o. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;	12^o. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Hodisalar ustida asosiy amallar geometrik nuqtai-nazardan Eyler-Venn diagrammalari orqali 1-shakldagi kabi tasvirlanadi.

2-§. Ehtimolning ta'riflari

1. Ehtimolning klassik ta'rifi. Amaliyotda hodisaning ro'y berishi imkoniyatini



1-shakl.

taqqoslay bilish ahamiyatga ega. Pul-buyum lotopeyasida A – bitta biletga yutuq chiqishi va B – barcha biletlarga yutuq chiqishi hodisalari turli darajadagi ro'y berish imkoniyatiga ega ekani ravshan. Shu sababli hodisalarni taqqoslash uchun qandaydir ko'rsatgichga asoslanish lozim bo'ladi.

Hodisa ob'ektiv ro'y berish imkoniyati darajasining sonli ko'rsatgichiga ***hodisaning ehtimoli*** deyiladi.

Bu ta'rif hodisa ehtimoli tushunchasining sifatiy ifodasi bo'lib, matematik hisoblanmaydi. U matematik bo'lishi uchun bu tushunchaning miqdoriy ko'rsatgichini aniglashi lozim.

Agar sinashning natijalari hodisalarning to'la guruhini tashkil etsa va teng imkoniyatli bo'lsa, ya'ni ular yagona mumkin bo'lgan, birgalikda bo'lmagan va teng imkoniyatli hodisalar bo'lsa, u holda bu natijalarga *elementar natijalar* deyiladi.

Bunda sinash "klassik" deb yuritiladi. Shu sababli quyidagi ta'rif ehtimolning klassik ta'rifi deb ataladi.

Sinashning o'rganilayotgan hodisaning ro'y berishiga olib keladigan elementar natijalariga sinashning hodisa ro'y berishiga *qulaylik tug'diruvchi natijalari* deyiladi.

Ehtimolning klassik ta'rifi ga binoan A ***hodisaning ehtimoli*** deb sinashning A hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi natijalari soni m ning sinashning barcha elementar natijalari soni n ga nisbatiga aytiladi va $P(A)$ bilan belgilanadi.

Demak ,

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Bunda A hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi natijalar "moyil hodisalar" deb yuritiladi.

1-misol. Oyin kubigi bir marta tashlanganda toq ochko tushishi ehtimolini toping.

Yechish. Oyin kubigi tashlanganda oltita elementar natija – 1, 2, 3, 4, 5, 6 ochko tushishi hodisalari mavjud. Barcha $n=6$ ta elementar natijalar teng imkoniyatli va to'la guruh tashkil etadi. $A-$toq ochko tushishi hodisasi bo'lsin. A hodisa ro'y berishiga $m=3$ ta natija – 1, 3 va 5 ochkolar tushishi hodisalari moyil bo'ladi.

U holda (1) formulaga ko'ra

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Ehtimolning klassik ta'rifidan uning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi:

1°. Har qanday A hodisa uchun $0\le P(A)\le 1$;

2°. $P(U)=1$; 3°. $P(V)=0$;

4°. Tasodifiy A hodisa uchun $0<P(A)<1$.

Ehtimolning (1) klassik ta'rifi uzoq vaqt davomida ($XYII$ asrdan XIX asrgacha) ehtimolning ta'rifi sifatida qabul qilindi. Hozirgi vaqtda ehtimolga rasman ta'rif berilmaydi. Bu tushuncha birlamchi hisoblanadi va ta'riflanmaydi. Uni tushuntirish uchun hodisaning nisbiy chastotasidan foydalaniladi.

Shu sababli ehtimolning (1) klassik ta'rifiga ta'rif deb emas, balki klassik sinashlarda ehtimollarni topish formulasi sifatida qarash lozim.

2. Ehtimolning statistik ta'rifi. Yuqorida ta'kidlanganidek ehtimolning klassik ta'rifi faqat klassik shartlarda qo'llaniladi. Hodisalarning sunday sinflari (masalan, sinashning teng imkoniyatli bo'lmagan hodisalari sinfi) mavjudki, ularning ehtimollarini klassik ta'rif orqali huisoblab bo'lmaydi. Misol uchun puchaygan tanga tashlanganda $A-$raqamli tomon tushishi va $B-$gerbil tomon tushishi hodisalari teng imkoniyatli bo'lmaydi. Bunda ulardan har birining ehtimollini topishda (1) formulani qo'llab bo'lmaydi.

Bunday hollarda hodisaning aslida o'tkazilgan sinashlarda ro'y berishi soniga, ya'ni statistikaga asoslangan ehtimolning statistik ta'rifidan foydalaniladi. Bu ta'rif nisbiy chastota tushunchasi orqali kiritiladi.

6-ta'rif. *A hodisaning nisbiy chastotasi* deb hodisa ro'y bergan sinashlar soni m^* ning aslida o'tkazilgan jami sinashlar soni n^* ga nisbatiga aytiladi va $P^*(A)$ bilan belgilanadi.

Demak,

$$P^*(A)=\frac{m^*}{n^*}. \qquad (2)$$

Nisbiy chastota klassik ta'rifdagi ehtimolning xossalariga monand xossalarga ega bo'ladi.

Kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, sinashlar soni ortib borgan sayin nisbiy chastota bitta son atrofida tebrana boradi va bu tebranishning o'zgarishi nolga yaqinlashib boradi, ya'ni nisbiy chastota go'yo tasodifiy bo'lmay qoladi. Masalan, tanga tashlash hodisasi kuzatilganda quyidagi natijalar olingan:

tajriba o'tkazuvchi	**sinashlar soni**	**gerbli tomon tushishi soni**	**nisbiy chastota**
Byuffon	4040	2048	0,5069
Pirson	12000	6019	0,5016

Pirson	24000	12012	0,5005

Jadvaldan ko'rinadiki, tanga tashlanganda "gerbil" tomon tushishi" hodisasining nisbiy chastotasi 0,5 soni atrofida tebranadi. Demak, $P^{*}(A)=0,5$ deb olish mumkin. Bu qiymat $P(A)$ ga teng.

Shunday qilib, *ehtimolning statistik ta'rif*ga binoan sinash shartlari o'zgarmaganda A hodisaning nisbiy chastotasi tebranadigan songa

A ***hodisaning ehtimoli*** deyiladi.

3. Ehtimolning geometrik ta'rifi. Ehtimolning klassik ta'rifida sinashning elementar natijalari soni chekli deb faraz qilinadi. Amalda elementar natijalar soni cheksiz bo'lgan sinashlar uchraydi. Masalan, mergan tomoni a ga teng kvadratga o'q uzganda o'qning radiusi $r<a$ bo'lgan doiraga tegishi hodisasini qaraylik. Bunda, kvadratning ichki nuqtalari sonini n va doiraning ichki nuqtalari sonini m deyish mumkin, chunki o'q kvadratning istalgan nuqtasiga tegishi mumkin. Ammo, m va n sonlarini hisoblashning imkoni bo'lmaydi. Ko'rinib turibdiki, doira yuzasi oshgan sayin o'qning nishonga tegishi ehtimoli oshib boradi va aksincha. Shu sababli n ni kvadrat yuzasi bilan va m ni doira yuzasi bilan almashtirish mumkin. U holda $A-$ o'qning nishonga tegishi hodisasining ehtimoli $P=\frac{S_{d}}{S_{kv}}=\frac{\pi r^{2}}{a^{2}}$ ga teng bo'ladi. Bunda doira

A hodisaning ro'y brishiga moyil soha deb yuritiladi.

Bu kabi masalalar geometrik ehtimol tushunchasiga asoslanib echiladi. Geometrik ehtimolda qaralayotgan soha bir o'lchamli (to'g'ri chiziq, kesma), ikki o'lchamli (tekis shakl) va uch o'lchamli (fazoviy jism) bo'lishi mumkin. Bunda sohaning o'lchami

(uzunligi, yuzasi, hajmi) ni mes bilan belgilab, quyidagi ta'rif kiritiladi.

*Ehtimolning geometrik ta'rif*ga binoan *A* ***hodisaning ehtimoli*** deb A hodisaga moyil soha o'lchamining butun soha o'lchamiga nisbatiga

aytiladi, ya'ni

$$P(A)=\frac{mesg}{mesG}. \qquad (3)$$

2-misol. Radiusi R ga teng doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Unuig nu doiraga ichki chizilgan muntazam uchburchak ichiga tushishi ehtimolini toping.

Y e c h i s h. s uchburchakning yuzasi, S doiraning yuzasi, A – nuqtaning uchburchakka tushishi hodisasi bo'lsin. Radiusi R ga teng doiraning yuzasi $S=\pi R^2$ ga teng, unga uchki chizilgan uchburchakning yuzasi $s=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ ga teng bo'ladi.

U holda

$$P=(A)=\frac{s}{S}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

3-§. Kombinatorika elementlari

Masalalarni ehtimolning klassik ta'rifi bilan echishda kombinatorika elementlaridan o'rinlashtirish, o'rin almashtirish va guruhlash keng qo'llaniladi.

7-ta'rif. ***n ta elementdan k tadan o'rinlashtirish*** deb yoki elementlarining tartibi yoki ularning tarkibi bilan farq qiluvchi k ta elementdan tashkil topgan birikmaga aytiladi va A_n^k bilan belgilanadi.

n ta elementdan k tadan o'rinlashtirishlar soni

$$A_n^k=n(n-1)\dots(n-(k-1))=\frac{n!}{(n-k)!} \qquad (4)$$

ga teng bo'ladi. Masalan, to'rtta raqamlardan har bir raqam faqat bir marta qatnashuvchi ikki xonali sonlarni tuzishlar soni $A_4^2=\frac{4!}{2!}=3\cdot 4=12$. Haqiqatan ham 1,2,3,4 raqamlardan har bir raqam faqat bir marta qatnashuvchi quyidagicha 12 ta ikki xonali sonlarni tuzish mumkin: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

8-ta'rif. ***n ta elementli o'rin almashtirish*** deb faqat tartibi bilan farq qiluvchi n ta elementdan tashkil topgan birikmaga aytiladi va P_n bilan belgilanadi.

Ta'rifga ko'ra o'rin almashtirish bu n ta elementdan n tadan o'rinlashtirishdir.

Shu sababli n ta elementli o'rin almashtirishlar soni

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Masalan, kassaga pul olish uchun kelgan uch kishi $P_3 = 3! = 6$ usul bilan quyidagi tartibda navbatda turishlari mumkin: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

9-ta'rif. ***n ta elementdan k tadan guruhlash*** deb hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiluvchi k ta elementdan tashkil topgan birikmaga aytiladi va C_n^k bilan belgilanadi.

Ta'rifga binoan guruhlash o'rinlashtirishdan elementlarining tarkibi bilan farq qiladi. Shu sababli C_n^k soni A_n^k sonidan P_k marta kam, ya'ni

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Masalan: a, b, c, d harflaridan uchtadan qilib, $C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$ ta

(abc), (abd), (acd), (bcd) guruhlashlar tuzish mumkin.

Ehtimollar bevosita ehtimolning (1) klassik ta'rifi orqali hisoblanadi. Misollar ko'ramiz.

3-misol. Qutida 3 ta oq, 2 ta qizil va 5 ta ko'k shar bor. Qutidan tavakkaliga olingan sharning rangli bo'lishi ehtimolini toping.

Y e c h i s h. A – olingan shar rangli bo'lishi hodisasi bo'lsin. Sinash 10 ta teng imkoniyatli elementar hatijalardan iborat bo'lib, ulardan 7 tasi olingan shar rangli (qizil, ko'k) bo'lishiga, ya'ni A hodisaga moyil.

Demak,

$$P(A) = \frac{7}{10} = 0{,}7.$$

4-misol. Qirqma alfavitning 10 ta harfidan "*MATEMATIKA*" so'zi tuzilgan. Bu harflar sochilib ketgan va qaytadan ixtiyoriy tartibda yig'ilgan. Quyidagi so'zlar hosil bo'lishi ehtimollarini toping: a) "*MATEMATIKA*", b) "*KATET*".

Yechish. a) A – "*MATEMATIKA*" so'zi hosil bo'lishi hodisasi bo'lsin. Sinashning mumkin bo'lgan teng imkoniyatli elementar hatijalari 10 ta elementli o'rin almashtirishdan iborat, ya'ni $P_{10}=10!$. A hodisaga moyil hodisalar soni $m=2!\cdot 3!\cdot 2!$, chunki matematika so'zida "*M*" 2 marta, "*A*" 3 marta, "*T*" 2 marta takrorlanadi.

Demak,

$$P(A)=\frac{2!\cdot 3!\cdot 2!}{10!}=\frac{1}{151200}.$$

b) B – "*KATET*" so'zi hosil bo'lishi hodisasi bo'lsin. Sinashning mumkin bo'lgan teng imkoniyatli elementar hatijalari 10 ta elementdan 5 tadan o'rinlashtirishdan iborat, ya'ni $A_{10}^{5}=\frac{10!}{5!}$. B hodisaga moyil hodisalar soni $m=2!$, chunki katet so'zida "*T*" 2 marta takrorlanadi.

Shunday qilib,

$$P(B)=\frac{2!\cdot 5!}{10!}=\frac{1}{15120}.$$

5-misol. Yashikda 10 ta detal bo'lib, ulardan 7 tasi standart. Tavakkaliga a) 4 ta detal olinganda, ularning hammasi standart bo'lishi ehtimolini toping;
b) 5 ta detal olinganda, ularning 3 tasi standart bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. a) sinashning mumkin bo'lgan elementar natijalari soni 10 detaldan 4 ta detalni olish usullari soniga, ya'ni C_{10}^{4} ga teng. Qaralayotgan hodisa A ga moyil natijalar soni 7 detaldan 4 ta detalni olish usullari soni C_7^4 ga teng.

Demak,

$$P(A)=\frac{C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}}{\dfrac{10!}{4!\cdot 6!}}=\frac{7!\cdot 6!}{10!\cdot 3!}=\frac{4\cdot 5\cdot 6}{8\cdot 9\cdot 10}=\frac{1}{6}.$$

b) sinashning mumkin bo'lgan elementar natijalari C_{10}^{5} ga teng. Ulardan $C_7^3 \cdot C_3^2$ tasi tanlangan detallar ichida 3 tasi standart bo'lishi hodisasi B ga moyil.

Shu sababli

$$P(B)=\frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5}=\frac{\frac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}}{\frac{10!}{5!\cdot 5!}}=\frac{7!\cdot 3!\cdot 5!\cdot 5!}{10!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 2!}=\frac{5}{12}.$$

6-misol. Yetti qavatli uyning liftiga birinchi qavatda 3 kishi kirdi. Ularnin har biri ikkidan ettigacha bo'lgan istalgan qavatda liftdan chiqishi mumkin. Quyidagi hodisalarning ro'y berishi ehtimollarini toping:

A – ularning barchasi 5-qavatda liftdan chiqisi;

B – ularning barchasi bitta qavatda liftdan chiqisi;

C – ulardan har biri turli qavatda liftdan chiqisi.

Yechish. Yo'lovchilarning har biri ikkidan ettinchi qavatgacha 6 usul bilan lifdan chiqishi mumkin. Bunda har bir yo'lovchining natijalari boshqa yo'lovchilarning natijalari bilan birgalikda bo'ladi. Shu sababli a sinashning mumkin bo'lgan elementar natijalari soni $n=6^3=216$ ga teng. Ulardan A hodisaga $m_1=1$ ta natija moyil, B hodisaga $m_2=6$ ta natija (barcha yo'lovchi yoki 2-qavatda, yoki 3-qavatda,..., yoki 6-qavatda liftdan chiqadi) moyil, C hodisaga $m_3 = C_6^3=20$ ta natija (yo'lovchilar 6 ta qavatdan 3ta qavatda liftdan chiqadi) moyil.

Bundan

$$P(A)=\frac{1}{216}; \quad P(B)=\frac{6}{216}=\frac{1}{36}; \quad P(C)=\frac{20}{216}=\frac{5}{54}.$$

7-misol. Ikkita o'yin kubigi baravar tashlanganda quyidagi hodisalarning ro'y berishi ehtimollarini toping:

A – tushgan ochkolar yig'indisi 6 ga teng;

B – tushgan ochkolar ko'paytmasi 6 ga teng;

C – tushgan ochkolar yig'indisi ularning ko'paytmasidan katta.

Yechish. Har bir o'yin kubigi tashlanganda oltita elementar natija – 1, 2, 3, 4, 5, 6 ochko tushishi hodisalari mavjud. Birinchi kubik elementar natijalarininhg har biri ikkinchi kubikdagi natijalar bilan birgalikda bo'ladi. Shu sababli sinashning mumkin bo'lgan elementar natijalari soni $n=6^2=36$ ga teng. Ulardan A hodisaga kubiklarda (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) ochkolar tushishi, ya'ni $m_1=5$ tasi moyil, B hodisaga kubiklarda (1,6), (2,3), (3,2), (6,1) ochkolar tushishi, ya'ni $m_2=4$ tasi moyil, C hodisaga kubiklarda (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1) ochkolar tushish, ya'ni $m_3=11$ tasi moyil.

Demak,

$$P(A)=\frac{5}{36};\qquad P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9};\qquad P(C)=\frac{11}{36}.$$

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Ertalabki pochta bilan axborot agentligiga seriallar ssenariysi yozilgan 6 ta convert kelib tushgan. Konvertlarni ochish tartibining nechta usuli mavjud?

Javob: 720.

2. 25 ta ishchisi bor kompaniya ikki anjumanga 2 ta vakil jo'natmoqda. Buni nechta usul bilan amalga oshirish mumkin ?

Javob: 600.

3. Konkursga 4 ta nominatsiya bo'yicha 10 ta fil'm qo'yilgan. Bunda sovrinlar nechta usul bilan taqsimlnishi mumkin: 1) ular har xil bo'lsa; 2) ular bir xil bo'lsa.

Javob: 1) 10000; 2) 1001.

4. Uchta tanga tashlangnda ikkita tangada raqam tomon tushishi ehtimolini toping.

Javob: $\frac{3}{8}$.

5. Ikkita o'yin kubigi tashlanganda: 1) tushgan raqamlar ko'paytmasi 12 ga teng bo'lishi ehtimolini toping; 2) tushgan raqamlar yig'indisi 10 ga teng bo'lishi ehtimolini toping; 3) ikki raqam tushsishi ehtimolini toping.

Javob: 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{11}{36}$.

6. Birinchi qutida 1 dan 5 gcha raqamlangan sharlar, ikkinchi qutida 6 dan 10 gacha raqamlangan sharlar bor. Har bir qutidan tavakkaliga bittadan shar olingan. Olingan

sharlar yig'indisi: 1) 7 dan kichik bo'lmagan; 2) 11 ga teng bo'lgan; 3) 11 dan kichik bo'lmagan hodisalar ehtimolini toping.

Javob: 1) 1; 2) $\frac{1}{5}$; 3) $\frac{3}{5}$.

7. Qirqma alfavitning 10 ta harfidan "STATISTIKA" so'zi yozilgan. Bu harflar sochilib ketgan va qaytadan ixtiyoriy tartibda yig'ilgan. Quyidagi so'zlar hosil bo'lishi ehtimollarini toping. 1) "ISTA"; 2) "KATTA"; 3)"STATISTIKA"

Javob: 1) $\frac{1}{24}$; 2) $\frac{1}{30}$; 3) $\frac{1}{75600}$.

8. Javonda 10 juft turli poyafzallar bor. Tavakkaliga ulardan 4 donasi tanlangan. Tanlangan poyafzallar ichida o'z jufti bilan poyafzal bo'lmasligi ehtimolini toping.

Javob: 1) $\frac{2^4 C_{10}^4}{C_{20}^4}$.

9. Qutida 6ta oq va 4 ta qora shar bor. Tavakkaliga: 1) 3 ta shar olinganda ularning hammasi oq bo'lishi ehtimolini toping; 2) 5 ta shar olinganda ulardan 2 tasi qora bo'lishi ehtimolini toping; 3) 2 ta shar olinganda ularning turli rangda bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{10}{21}$; 3) $\frac{8}{15}$.

10. Talaba 25 ta savoldan 20 tasini biladi. Talaba biletdagi 4 ta savoldan kamida 3 tasiga javob bersa sinovdan o'tgan hisoblanadi. Birinchi savolga nazar tashlagan talaba uni bilishini aniqladi. Talaba: 1) sinovdan o'tishi; 2) sinovdan o'tmasligi ehtimollarini toping.

Javob: 1) 0,06; 2) 0,396.

11. Do'konda 30 ta televizor bo'lib, ulardan 20 tasi import. Barcha televizorlarning sotilishi ehtimoli bir xil bo'lsa, 5 ta sotilgan televizordan 3 tasi import bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: 0,809.

12. Do'konda 5, 7 va 13 donadan uch markali kompyuterlar bor. Ulardan 21 tasi sotildi. Barcha kompyuterlarning sotilishi ehtimoli bir xil bo'lsa, sotilmay qolgan

kompyuterlarning ehtimollarini toping, agar ular 1) bir xil markali; 2) turli markali bo'lsa.

Javob: 1) 0,06; 2) 0,396.

13. Firmada 8 ta auditor bo'lib, ulardan 3 tasi oliy toifali va 5 ta programmist bo'lib, ulardan 2 tasi oliy toifali. Xizmat safariga 3 ta auditor va 2 ta programmistdan iborat guruh yuborilgan. Har bir mutaxassisning xizmat safariga borishi ehtimoli bir xil bo'lsa, guruhda hech bo'lmaganda 1 ta oily toifali auditor va kamida bitta oily toifali programmist bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: $\left(1-\frac{C_5^3}{C_8^3}\right)\cdot\left(1-\frac{C_3^2}{C_5^2}\right)=0{,}329.$

14. Radiusi R ga teng doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Uning shu doiraga ichki chizilgan muntazam ko'pburchakka tushishi ehtimolini toping: 1) uchburchakka; 2) to'rtburchakka; 3) oltiburchakka.

Javob: 1) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; 2) $\frac{2}{\pi}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

15. Ikki talaba tayin joyda soat 18 bilan 19 oralig'ida uchrashishga, oldin kelgan talaba ikkinchisini 20 minut o'tgunicha kutishga va u kelmasa keyin ketishga kelishishdi. Agar har bir talaba o'zining kelish paytini tavakkaliga (18 bilan 19 oralig'ida) tanlasa , ularning uchrashishi ehtimolini topign.

Javob: $\frac{5}{9}$.

4-§. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremalari

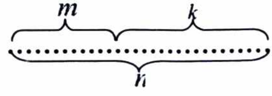
1. Ehtimollarni qo'shish teoremalari

Ehtimollarni qo'shish teoremalari (qoidalari) bilan tanishamiz.

1-teorema. Birgalikda bo'lmagan A va B hodisalar yig'indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng , ya'ni

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Isboti. A yoki B hodisaning ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar



1-shakl.

natijalari soni n bo'lsin. Ulardan m tasi A hodisaga, k tasi B hodisaga moyil bo'lsin. Yaqqol tasavvur etish uchun ularni nuqta ko'rinishda tasvirlaymiz (1-shakl).

Klassik ta'tifga ko'ra $P(A)=\frac{m}{n}$, $P(B)=\frac{k}{n}$.

A va B hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lgani sababli bir vaqitda ham A hodisaga ham B hodisaga moyil elementar natijalar mavjud bo'lmaydi. Shu sababli $A+B$ hodisaga $m+k$ elementar natija moyil bo'ladi.

Bundan

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B).$$

Bir necha juft-lufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun qo'shish teoremasi

shu kabi ifodalanadi va isbotlanadi.

Shunday qilib

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n). \qquad (1)$$

1-misol. O'yin kubigi tashlanganda 2 ochko yoki 5 ochko tushishi hodisalarining ehtimolini toping.

Y e c h i s h. $A-2$ ochko tushishi, $B-5$ ochko tushishi hodisalari bo'lsin. A va B hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar, bunda $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{6}$.

U holda

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

2- teorema. Juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan to'la guruh tashkil etuvshi $A_1, A_2,...,A_n$ hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng, ya'ni

$$P(A_1)+P(A_2)+...+A(A_n)=1. \qquad (2)$$

Isboti. To'la guruh tashkil etuvchi $A_1, A_2,...,A_n$ hodisalar uchun $P(A_1+A_2+...+A_n)=P(U)=1$. Bundan tashqari juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar uchun $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Tengliklarni solishtirib, topamiz:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

1-natija. Qarama – qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng, ya'ni

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (3)$$

Bundan $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ yoki $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = q$ belgilashlar kiritsak, $p = 1 - q$ kelib chiqadi.

2-misol. 6 ta oq va 2 ta rangli shar solingan qutidan tavakkaliga 4 ta shar olinadi. Olingan sharlar ichida hech bo'lmaganda bitta rangli shar bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. A – olingan sharlar ichida hech bo'lmaganda bitta rangli shar bo'lishi hodisasi bo'lsin.

U holda $\overline{A}$ – olingan sharlar ichida rangli shar bo'lmasligi hodisasi bo'ladi.

$P(\overline{A})$ni topamiz. 8 ta sharlar ichidan 4 ta sharni $n = C_8^4$ ta usul bilan olish mumkin. 6 ta oq shardan 4 ta sharni $n = C_6^4$ ta usul bilan olish mumkin.

U holda

$$P(\overline{A}) = \frac{C_6^4}{C_8^4} = \frac{\dfrac{6!}{4! \cdot 2!}}{\dfrac{8!}{4! \cdot 4!}} = \frac{6! \cdot 4!}{8! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 8} = \frac{3}{14}.$$

Bundan

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{14} = \frac{11}{14}.$$

1-ta'rif. Agar A hodisaning ro'y berishi B hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lmasa, u holda A va B hodisalarga ***bog'liqmas hodisalar***deyiladi.

Masalan, tanga ikki marta tashlanganda tangani ikkinchi tashlashda gerbli tomoni tushishi hodisasi tangani birinchi tashlashda gerbli tomoni tushishi hodisasiga bog'liq emas.

2-ta'rif. Agar A hodisaning ro'y berishi B hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lsa, u holda A va B hodisalarga ***bog'liq hodisalar*** deyiladi.

Masalan, oq va qora sharlar solingan idishdan tavakkaliga ketma-ket ikkita shar olinsin va birinchi shar idishga qaytarilmasin. Bunda idishdan olingan ikkinchi sharning oq bo'lishi hodisasi idishdan olingan birinchi sharning oq bo'lishi hodisasiga bog'liq bo'ladi.

3-ta'rif. A hodisaning B hodisa ro'y berdi degan shartda hisoblangan ehtimoliga A hodisaning B hodisa ro'y berishi shartidagi ***shartli ehtimoli*** deyiladi va $P(A/B)$ yoki $P_B(A)$ bilan belgilanadi.

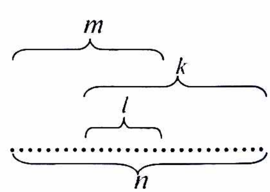
Agar $P_B(A) \neq P(A)$ yoki $P_A(B) \neq P(B)$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar bog'liq hodisalar bo'ladi.

Agar $P_B(A) = P(A)$ va $P_A(B) = P(B)$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar bog'liqmas hodisalar bo'ladi.

3-teorema. A va B hodisalar ko'paytmasining ehtimoli hodisalardan birining ehtimoli bilan ikkinchisining birinchi hodisa ro'y berishi shartidagi shartli ehtimoli ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (4)$$

Isboti. n ta elementar natijalardan m tasi A hodisaga, k tasi B hodisaga moyil bo'lsin. Bunda A va B hodisalar birgalikda bo'lgan hodisalar, ya'ni n ta elementar natijalardan ham A hodisaga ham B hodisaga moyillari mavjud (2-shakl).



2-shakl.

U holda

$$P(A \cdot B) = \frac{l}{n}, \quad P(A) = \frac{m}{n}, \quad P_A(B) = \frac{l}{m}.$$

Bundan

$$P(A\cdot B)=\frac{l}{n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{l}{m}=P(A)\cdot P_A(B).$$

3-misol. 2 ta oq va 5 ta qora shar solingan qutidan tavakkaligiga ketma-ket ikkita shar olinadi va olingan birinchi shar qutiga qaytarilmaydi. Qutidan olingan ikkala sharning oq bo'lishi ehtimolini toping.

Y e c h i s h. Quyidagi hodisalarni qaraymiz: A – olingan birinchi shar oq, B – olingan ikkinchi shar oq, C – olingan har ikkala shar oq.

U holda $P(A)=\frac{2}{7}$, $P_A(B)=\frac{1}{6}$.

Bundan

$$P(C)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{21}.$$

(4) ehtimollarni ko'paytirish qoidasi istalgan sondagi hodisalar uchun quyidagicha umumlashtiriladi:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n), \tag{5}$$

ya'ni bir necha hodisalar ko'paytmasining ehtimoli ulardan birining ehtimoli bilan qolganlarining shartli ehtimollari ko'paytmasiga teng bo'ladi, bunda har bir shartli ehtimol o'zidan oldingi barcha hodisalar ro'y berishi shartida hisoblanadi.

(5) formula matematik induksiya metodi bilan isbotlanadi.

4-misol. Oldingi mashg'ulotdagi 4-misolni (5) formula bilan eching.

Yechish. A – "*MATEMATIKA*" so'zi hosil bo'lishi hodisasi bo'lsin. Bu hodisa birinchi harf M (10 dan 2 imkoniyat), ikkinchi harf A (9 dan 3 imkoniyat), oxirgi harf A (1 dan 1 imkoniyat) bo'lganida ro'y beradi.

Demak,

$$P(A)=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{151200}.$$

Shu kabi B – "*KATET*" so'zi hosil bo'lishi hodisasining ehtimolini topamiz:

$$P(B)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{15120}.$$

4-ta'rif. $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalardan istalgan bittasining ro'y berishi qolganlarining har qanday ko'paytmasi ro'y bergan yoki ro'y bermaganligiga bog'liq bo'lmasa, bu hodisalarga ***birgalikda bog'liqmas hodisalar*** deyiladi.

3- va 4- teoremalardan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

2-natija. Bog'liqmas A va B hodisalar ko'paytmasining ehtimoli ularning ehtimollari ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

3-natija. Birgalikda bog'liqmas $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar ko'paytmasining ehtimoli ularning ehtimollari ko'paytmasiga teng, y'ani

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Xususan bir xil p ehtimolga ega $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar uchun

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = p^n$$

bo'ladi.

4-teorema. Birgalikda bog'liqmas $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalardan hech bo'lmaganda bittasining ro'y berishdan iborat bo'lgan A hodisaning ehtimoli

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 .. q_n \tag{6}$$

ga teng.

Isboti. $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$ bo'lganligi uchun $\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n$.

Bundan

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n) =$$
$$= 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot ... \cdot P(\overline{A}_n) = 1 - q_1 q_2 .. q_n$$

Xususan bir xil p ehtimolga ega $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar uchun

$$P(A) = 1 - q^n \tag{7}$$

bo'ladi.

5-misol. 3 ta merganning nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda $P_1 = 0{,}4$, $P_2 = 0{,}6$, $P_3 = 0{,}8$ ga teng. Uchchala mergan baravariga o'q uzganda nishonning yakson bo'lishi ehtimolini toping. Bunda nishon yakson bo'lish uchun unga bitta o'q tegishi kifoya.

Yechish. Merganlarning nishonga tekkazishi hodisalari mos ravishda A_1, A_2, A_3 bo'lsin. Bu hodisalar bog'liqmas, chunki har bir mergan nishonga mustaqil o'q uzadi. U holda $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,4 = 0,6$, $q_2 = 0,4$ va $q_3 = 0,2$.

Izlanayotgan A ehtimol

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,952.$$

6-misol. Pul-buyum lotoreyasida biletlarning yarmi yutuqli. Hech bo'lmaganda bitta biletga yutyq chiqishiga $\varepsilon = 0,999$ dan kam bo'lmagan ehtimol bilan ishonch hosil qilish uchun nechta billet sotib olinishi kerak?

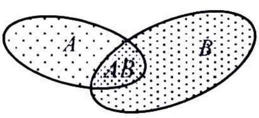
Yechish. i – biletga yutuq chiqishi hodisasi A_i ning ehtimoli p bol'sin, ya'ni $P(A_i) = p$. U holda n ta olingan biletdan hech bo'lmaganda bitta biletga yutyq chiqishi ehtimoli (7) formulaga binoan $P(A) = 1 - q^n$ ga teng. Misolning shartiga ko'ra $p = 0,5$ yoki $q = 1 - 0,5 = 0,5$ hamda $1 - q^n \geq \varepsilon$ yoki $0,5^n \leq 0,001$.

Bundan $n \geq \dfrac{\lg 0,001}{\lg 0,5} = 9,96$, ya'ni $n \geq 10$. Demak, 10 ta billet sotib olinishi kerak.

5-teorema. Birgalikda bo'lgan A va B hodisalar yig'indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berishi ehtimolini ayrilganiga teng, ya'ni

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (8)$$

Isboti. A, B, $A + B$ hodisalarni quyidagicha birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indisi ko'rinishida ifodalaymiz: $A = A \cdot B + A \cdot \overline{B}$, $B = A \cdot B + \overline{A} \cdot B$, $A + B = A \cdot B + \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$ (3-shakl).



3-shakl.

Birgalikda bo'lmagan hodisalarni qo'yish teoremasiga ko'ra $P(A) = P(A \cdot B) + P(A \cdot \overline{B})$,

$P(B) = P(A \cdot B) + P(\overline{A} \cdot B)$, $P(A + B) = P(A \cdot B) + P(\overline{A} \cdot B) + P(A \cdot \overline{B})$.

Bundan

$$P(A+B)=P(A\cdot B)+P(\overline{A}\cdot B)+P(A\cdot\overline{B})=P(A\cdot B)+P(\overline{A}\cdot B)+P(A\cdot\overline{B})+$$
$$+P(A\cdot B)-P(A\cdot B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

7-misol. Ikkita mergan bir biriga bog'liq bo'lmagan holda nishonga o'q uzmoqda. Merganlarning hech bo'lmaganda bittasi o'qni tekkazsa, nishon yakson bo'ladi. Birinchi merganning nishonga tekkazish ehtimoli 0,8 ga, ikkinchi merganniki 0,6ga teng bo'lsa, nishonning yakson bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. $A-$birinchi merganning nishonga tekkazishi hodisasi, $B-$ikkinchi merganning nishonga tekkazishi hodisasi bo'lsin. A va B bog'liqmas hodisalar bo'lgani sababli hech bo'lmaganda bitta merganning nishonga tekkaizishi hodisasining ehtimoli

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=0{,}8+0{,}6-0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}92$$

bo'ladi.

5-§. To'la ehtimollik va Bayes formulasi

Birgalikda bo'lmagan $B_1,B_2,...,B_n$ hodisalar to'la guruh tashkil etsin. A hodisa bu hodisalardan biri ro'y berganda ro'y bersin. Bunda $B_1,B_2,...,B_n$ larga *gipotezalar* deyiladi. Gipotezalarning ehtimollari $P(B_1),P(B_2),...,P(B_n)$ berilgan bo'lsin. Bundan tashqari gipotezalarning har biri ro'y berganda A hodisaning ro'y berishi shartli ehtimollari $P_{B_1}(A),P_{B_2}(A),...,P_{B_N}(A)$ ma'lum bo'lsin.

$B_1,B_2,...,B_n$ to'la guruh tashkil etgani sababli $A=AU=AB_1+AB_2+...+AB_n$. bo'ladi. Bundan tashqari $B_1,B_2,...,B_n$ birgalikda bo'lmagan hodisalar.

U holda hodisalarni qo'shish va ko'paytirish teoremalariga binoan

$$P(A)=P(A\cdot B_1)+P(A\cdot B_2)+...+P(A\cdot B_n)=$$
$$=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A)$$

bo'ladi.

Demak,

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A) \quad (9)$$

yoki

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P_{B_i}(A). \quad (10)$$

Bu formulaga *to'la ehtimol formulasi* deyiladi.

8-misol. Birinchi qutida 2 ta oq va 6 ta qora, ikkinchi qutida 4 ta oq va 2 ta qora shar bor. Birinchi qutidan tavakkaliga ikkita shar olinadi va ikkinchi qutiga solinadi. Shundan keyin ikkinchi qutidan olingan sharning oq bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. A – ikkinchi qutidan olingan shar oq bo'lishi, B_1, B_2, B_3 – birinchi qutidan ikkinchi qutiga solingan sharlar mos ravishda 2 ta oq, 2 ta turli rangda, 2 taqora bilishi hodisalari bo'lsin. U holda

$$P(B_1)=\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28}, \qquad P(B_2)=\frac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}=\frac{12}{28}, \qquad P(B_3)=\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28};$$

$$P_{B_1}(A)=\frac{6}{8}, \quad P_{B_2}(A)=\frac{5}{8}, \quad P_{B_3}(A)=\frac{4}{8}.$$

B_1, B_2, B_3 – to'la guruh tashkil etadi. Demak, to'la ehtimol formulasiga ko'ra

$$P(A)=\frac{1}{28}\cdot\frac{6}{8}+\frac{12}{28}\cdot\frac{5}{8}+\frac{15}{28}\cdot\frac{4}{8}=\frac{9}{16}.$$

$B_1, B_2, ..., B_n$ gipotezalar bo'lib, ularning $P(B_1), P(B_2), ..., P(B_n)$ ehtimollari berilgan bo'lsin. Tajriba o'tkazilib, uning natijasida A hodisa ro'y bersin va $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), ..., P_{B_n}(A)$ shartli ehtimollar ma'lum bo'lsin. A hodisa ro'y berganida gipotezalarni qayta baholash masalasini qo'yamiz, ya'ni $P_A(B_1), P_A(B_2), ..., P_A(B_n)$ shartli ehtimollarni topamiz.

Ko'paytirish teoremasiga binoan

$$P(A\cdot B_i)=P(A)\cdot P_A(B_i)=P(B_i)P_{B_i}(A).$$

Bundan

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}$$

yoki (10) formulasiga binoan

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P_{b_i}(A)}. \qquad (11)$$

Bu formulaga ***Bayes formulasi*** **(yoki** ***gipotezalarini baholash formulasi*)** deyiladi.

9-misol. Savdo firmasiga ikkita korxonadan lampalar keltirilgan bo'lib, ulardan 40% i birinchi korxonada ishlab chiqarilgan. Lampaning yaroqli bo'lishi ehtimollari korxonalar uchun mos ravishda 0,9 va 0,7 ga teng. Tanlangan lampa tekshirilganda yaroqli chiqdi. Uning birinchi korxonada ishlab chiqarilganligi ehtimolini toping.

Yechish. Ikkita gipotezani qaraymiz: B_1 – lampa birinchi korxonada ishlab chiqarilgan, B_2 – lampa ikkinchi korxonada ishlab chiqarilgan.

Misolning shartiga ko'ra $P(B_1)=0{,}4$, $P(B_2)=0{,}6$, $P_{B_1}(A)=0{,}9$, $P_{B_2}(A)=0{,}7$. Tajriba natijasida tekshirilgan lampa yaroqli chiqqan, yani A hodisa ro'y bergan. U holda Bayes formulasiga binoan lampaning birinchi korxonada ishlab chiqarilganlipi ehtimoli

$$P_A(B_1)=\frac{0{,}4\cdot 0{,}9}{0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}7}=0{,}462.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. O'yin kubigi tashlanganda 3 ochko va juft ochko tushishi hodisalarining ehtimolini toping.

Javob: $\frac{2}{3}$.

2. Qutida 5 ta standart va 2 ta nostandart detallar bor. Qutidan navbat bilan tavakkaliga bittadan detal olinadi. Ikkinchi olingan detalning standart bolishi ehtimolini toping, agar 1) detal qutiga qaytarilsa; 2) detal qutiga qaytarilmasa.

Javob: 1) $\frac{5}{7}$; 2) $\frac{5}{6}$ yoki $\frac{2}{3}$.

3. Elektron qurilma 5 ta bir xil bloklardan biri buzilsa ishdan to'xtaydi. Har bir blok qurilma ishlab ketgunicha ketma-ket almashtiriladi. i – blokning almashtirilishi ehtimolini toping, agar 1) $i=2$ bo'lsa; 2) $i=4$ bo'lsa.

Javob: 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{5}$.

4. 3 ta oq va 4 ta qora shar solingan qutidan tavakkaliga ketma-ket ikkita shar olinadi va olingan birinchi shar qutiga qytarilmaydi. Qutidan olingan sharlarning turli rangda bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: $\frac{4}{7}$.

5. Agar firma mahsulotlarining 4%i sifatsiz, sifatli mahsulotlarning 75%i 1-nav talabiga javob bersa tavakkaliga tanlangan mahsulotning 1-navli bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: 0,72.

6. Qutida 10 ta qizil, 3 ta yashil va 7 ta sariq shar bor. Tavakkaliga uchta shar tanlandi. Olingan sharlar: 1) turli rangda bo'lishi; 2) bir xil rangda bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: 1) 0,184; 2) 0,137.

7. 100 ta lotoreya biletidan 5 tasi yutuqli. Hech bo'lmaganda bitta biletda yutuq bo'lish ehtimolini toping, agar 1) 2 ta bilet olingan bo'lsa; 2) 4 ta bilet olingan bo'lsa.

Javob: 1) 0,098; 2) 0,188.

8. Talabaning uchta test sinovidan o'tishi ehtimollari mos ravishda 0,9, 0,8 va 0,9 ga teng. Talabaning: 1) faqat 3 – sinovdan o'tishi; 2) faqat bitta sinovdan o'tishi; 3) har uchala sinovdan o'tishi; 4) hech bo'lmaganda 2 ta sinovdan o'tishi; 5) hech bo'lmaganda bitta sinovdan o'tishi ehtimolini toping.

Javob: 1) 0,036; 2) 0,068; 3) 0,576; 4) 0,896; 5) 0,996.

9. Dastada 5 ta kalit bor. Qulfga bitta kalit mos keladi. Agar sinalgan kalit keyingi sinashda qatnashmasa, 2 tadan ko'p bo'lmagan sinash kerak bo'lishining ehtimolini toping.

Javob: 0,4.

10. Do'konda 10 ta sovutgich bo'lib, ulardan uchtasi nuqsonli. Nuqsonsiz sovutgichni sotib olish uchun uchtadan ko'p bo'lmagan sinash kerak bo'lsa, xaridor sovutgichni sotib olish ehtimolini toping.

Javob: 0,992.

11. Basketbolchining bir tashlashda koptokni savatga tushirish ehtimoli 0,4 ga teng. 0,9 dan kam bo'lmagan ehtimol bilan hech bo'lmaganda bir marta savatga tushirish uchun basketbolchi koptokni savatga kamida necha marta tashlashi kerak?

Javob: 5.

12. Qimmatli qog'ozlar bozorida har bir aksiya paketi aksiyadorga 0,5 ehtimol bilan foyda keltiradi. Hech bo'lmaganda bitta aksiya paketida 0,96875 ehtimol bilan foyda ko'rilishi uchun kamida nechta har xil firmalarning aksiyasini sotib olish kerak?

Javob: 5.

13. To'rt marta o'q uzishda merganning hech bo'lmaganda bir marta nishonga tekkazish ehtimoli 0,9984 ga teng. Bir marta o'q uzishda merganning nishonga tekkazish ehtimolini toping.

Javob: 0,8.

14. Tovarning va unga raqobatbardosh tovarning xaridorgir bo'lishi ehtimoli mos ravishda 0,64 va 0,48 ga teng. Agar raqobatbardosh firmaning tovar ishlab chiqarish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lsa, tovarning xaridorgir bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: 0,6.

15. Savdo firmasiga uchta ta'minotchi tomonidan 1:4:5 nisbatda televizorlar keltirildi. Birinchi, ikkinchi va uchinchi ta'minotchilardan keltirilgan televizorlarning mos ravishda 98%, 88% va 92%iga kafolat muddatida tuzatish talab qilinmaydi. Savdo firmasiga keltirilgan televizorlarga kafolat muddatida: 1) tuzatish talab qilinmasligi; 2) tuzatish talab qilinishi ehtimolini toping. 3) Keltirilgan televizor kafolat muddatida tuzatildi. Uning qaysi ta'minotchidan keltirilganligi ehtimolliroq?

Javob: 1) 0,91; 2) 0,09; 3) 2– ta'minotchi.

16. Do'konga uchta korxonadan 5:8:7 nisbatda buyum keltirildi. Korxonalar buyumlarining yaroqli bo'lish ehtimolligi mos ravishda 0,9 , 0,85 va 0,75 ga teng.

Quyidagi ehtimollarni toping: 1) sotilgan buyumning yaroqsiz bo'lishi; 2) sotilgan buyumning yaroqli bo'lishi; 3) sotilgan buyum yaroqli chiqdi, uning 3-korxonada ishlab chiqarilganligi.

Javob: 1) 0,1725; 2) 0,8275; 3) 0,3172.

17. Ikkita mergan bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda nishonga bittadan o'q uzmoqda. Birinchi merganning nishonga tekkizishi ehtimoli 0,8 ga, ikkinchisiniki 0,4 ga teng. O'qlar otilgach bitta teshik aniqlandi. Uning: 1) 1-merganga; 2) 2-merganga tegishli bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: 1) $\frac{6}{7}$; 2) $\frac{1}{7}$.

X BOB. MATEMATIK STATISTIK ELEMENTLARI

1-§. Matematik statistikaning asosiy masalalari. Tanlanma

Statistika – qonuniyatlar aniqlash maqsadida ommaviy tasodifiy hodisalarni kuzatish natigalarini tasvirlash, to'plash, sistemalashtirish, tahlil etish va izohlash usullarini o'rganuvchi fandir.

Matematik statistika–ommaviy iqtisodiy va ijtimoiy hodisalarni tahlil etish uchun matematik apparat quruvchi fandir.

Matematik statistika masalalari qo'yilgan maqsadiga qarab turlicha ifodalanishi mumkin. Bu masalalardan asosiylari sifatida quyidagi masalalarni qayd qilish mumkin:

– kuzatish natijasida olingan tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini taqriban aniqlash, ya'ni taqsimotni baholash;

– olingan taqsimot qonunining noma'lum parametrlarini taqriban aniqlash, ya'ni parametrlarni baholash;

– olingan taqsimot gipotezasining to'g'riligini baholash, ya'ni statistik gipotezani tekshirish;

– olingan tasodifiy miqdorlar orasidgi bog'lanishni aniqlash, ya'ni korrelyatsion tahlil.

Tekshirilayotgan (biror sifatiy yoki miqdoriy) alomat boýicha kuzatilayotgan barcha obyektlar to'plami ***bosh to'plam*** deyiladi. Bosh to'plamdan tasodifiy ravishda tanlab olingan obyektlar to'plamiga ***tanlanma*** yoki ***tanlanma to'plam*** deyiladi. *Bosh to'plamning hajmi (tanlanmaning hajmi)* deb shu to'plamdagi obyektlar soniga aytiladi.

Masalan, 500 ta detaldan ularning sifatini tekshirish uchun 50 ta detal tanlab olingan bo'lsa, bosh to'plam hajmi $N=500$va tanlanmaning hajmi $n=50$ bo'ladi.

Tanlanmani tekshirish asosida bosh to'plam haqida hulosa chiqarish usuliga *tanlanma usul* deyiladi. Bunda, tanlanma bosh to'plamning deyarli barcha xususiyatlarni o'zida saqlasa, bu usulga *vakolatli tanlanma* usuli deyiladi.

Tanlanma quyidagi usullarda hosil qilinishi mumkin:

a) tuzilishiga ko'ra: *takroriyiy* va *notakroriyiy.* Masalan, detal sifatini tekshirishda tekshirilgan detal bosh to'plamga qaytarilsa takroriy tanlanma, qaytarilmasa notakroriy tanlanma hosil bo'ladi.

b) tanlash usuliga ko'ra: *tasodifiy, mexanik, namunaviy* va *seriyali.* Masalan:

– tuhum sifatini aniqlash uchun tavakkaliga bittalab tuhum ajratilsa tasodifiy tanlanma hosil bo'ladi;

–agar bunda konveyerdan tushayotgan har 25- tuhum ajratilsa, u holda mehanik tanlanma hosil bo'ladi;

– zavodga 100 ta brigadadan keltirilgan pahta sifatini tekshirish uchun har bir brigada pahtasining tavakkalligi 5% ajratilsa na'munaviy tanlanma hosil boladi;

– agar bunda 100 ta brigadadan 5% agratilib, ularning yalpi mahsuloti tekshirilsa u holda seriyali tanlanma hosil boladi.

2-§. Emperik taqsimot qonuni

Tanlanmaning har bir elementi *varianta* deb ataladi. Tartiblangan tanlanmaga *variasion qator* deyiladi.

Tanlanmada x_1 varianta n_1 marta, $x_2 - n_2$ marta, ..., $x_k - n_k$ marta kuzatilgan bo'lsin. U holda tanlanmaning hajmi $n=\sum_{i-1}^{k} n_i$ ga teng bo'ladi. Bunda n_i kattalikka

x_i variantaning *chastotasi*, $w_i = \frac{n_i}{n}$ kattalikka uning *nisbiy chastotasi* deyiladi.

Nisbiy

chastotalar uchun $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ tenglik o'rinli.

Variantalar va ularga mos chastotalar (nisbiy chastotalar) dan tashkil topgant ushbu

$$\begin{array}{ccccc} x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ n_i & n_1 & n_2 & \cdots & n_k \end{array} \qquad \text{yoki} \qquad \begin{array}{ccccc} x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ w_i' & w_1' & w_2' & \cdots & w_k' \end{array}$$

jadvalga tanlanmaning ***statistik taqsimoti*** (***emperik taqsimoti***) deyiladi.

Variantalarning x sondan kichik bo'lgan qiymatlari nisbiy chastotasi

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

tanlanmaning ***emperik taqsimot funksiyasi*** deb ataladi, bu yerda $n_x - x$ qiymatdan kichik bo'lgan variantlari soni, $n-$tanlanmaning hajmi.

Tanlanmaning emperik taqsimot funksiyasini bosh to'plamning nazariy taqsimot funksiyani $F(x)$ sifatida olish mumkin, chunki Bernulli teoremasiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_i}{n} - P\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|F^*(x) - F(x)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Shunday qilib, nazariy taqsimot funksiyasi emperik taqsimot funksiyasi bilan baholanadi.

Emperik taqsimot funksiyasi taqsimotning integral funksiyasi kabi hossalarga ega:

1°. $0 \le F^*(x) \le 1$;

2°. $F^*(x) -$kamaymaydigan funksiya;

3°. agar $x_i -$eng kichik varianta bo'lsa, u holda $x \le x_i$ lar uchun $F^*(x) = 0$, agar

x_l – eng katta varianta bo'lsa, u holda $x > x_l$ lar uchun $F^*(x_l) = 1$.

1-misol. Do'konda sovutgichlarni 10 kunlik sotishdan quyidagi natijalar olingan: 5,2,4,0,2,5,0,4,1,2. Tanlnmning statistik va emperik taqsimotlarini toping, emperik taqsimot funksiyasini tuzing va grafigini chizing.

Y e c h i s h. Tanlanmaning 0,0,1,2,2,2,4,4,5,5 varitsion qatori bo'yicha variantalar, chastotalar va nisbiy chastotalarni topamiz:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5;$$

$$n_1 = 2,\ n_2 = 1,\ n_3 = 3,\ n_4 = 2,\ n_5 = 2;$$

$$w_1 = 0{,}2,\ w_2 = 0{,}1,\ w_3 = 0{,}3,\ w_4 = 0{,}2,\ w_5 = 0{,}2,$$

bu yerda $\sum_{i=1}^{5} n_i = 2+1+3+2+2 = 10,\ \sum_{i=1}^{5} w_i = 0{,}2+0{,}1+0{,}3+0{,}2+0{,}2 = 1.$

Statistik va emperik taqsimotlarni tuzamiz:

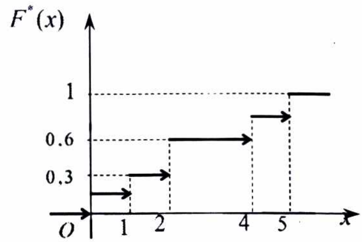
x_i	0	1	2	4	5
n_i	2	1	3	2	2

x_i	0	1	2	4	5
w_i	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

Emperik taqsimot qonuni asosida emperik taqsimot funksiyasini tuzamiz. $x_1 = 0$ eng kichik varianta. Demak, $x \le 0$ lar uchun $F^*(x) = 0$. $x < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi variantalar uchun $x_1 = 0$ nisbiy chastota $w_1 = 0{,}2$ varianta bilan kuzatilgan. Demak, $0 < x \le 1$ lar uchun $F^*(x) = 0{,}2$. Shu kabi $1 < x \le 2$ lar uchun $F^*(x) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$, $2 < x \le 4$ lar uchun $F^*(x) = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$ va $4 < x \le 5$ lar uchun $F^*(x) = 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8$. $x = 5$ eng katta varianta bo'lgani uchun $x > 5$ lar uchun $F^*(x) = 1$.

Demak, izlanayotgan emperik taqsimot funksiyasi va uning grafigi(1-shakl) qo'yidagi ko'rinishlarga ega:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 0,2, & 0<x\le 1, \\ 0,3, & 1<x\le 2, \\ 0,6, & 2<x\le 4, \\ 0,8 & 4<x\le 5, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$



1-sakl.

3-§. Poligon va gistogramma

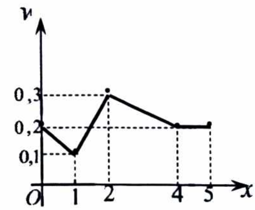
Tanlanmani grafik usulda tasvirlash uchun poligon va gistogrammalardan foydalaniladi.

Chastotalar poligoni deb $(x_1;n_1)$, $(x_2;n_2)$,...,$(x_k;n_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb $(x_1;w_1)$, $(x_2;w_2)$,...,$(x_k;w_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi.

2-misol. 1-misolda berilgan tanlanma uchun nisbiy chastotalar poligonini chizing.

Y e c h i s h. Koordinatalar tekisligida koordinatalari $(x_i;w_i)$ bo'lgan nuqtalarni belgilaymiz va ularni kesmalar bilan tutashtiramiz va ushbu nisbiychastotalar poligonini hosil qilamiz (2-shakl).



2-shakl.

Agar kuzatishlar soni katta bo'lsa yoki X uzluksiz belgi bo'lsa, u holda X belgining kuzatilayotgan qiymatlari tushadigan oraliq h uzunlikdagi intervallarga bo'linadi va har bir interval uchun shu intervallarga tushgan variantalar soni n_i aniqlanadi va gistogrammalar quriladi.

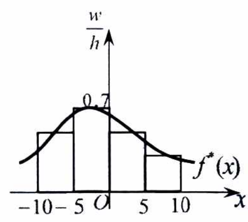
Chastotalar gistogrammasi (*nisbiy chastotalar gistogrammasi*) deb asoslari h uzunlikdagi intervallardan va balandliklari $\frac{n_i}{n}$ $\left(\frac{w_i}{n}\right)$ sonlardan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'anasimon figuraga aytiladi.

3-misol. Quyidagi emperik taqsimot uchun nisbiy chastotalar poligonini tuzing:

x_i	[−10;−5)	[−5;0)	[0;5)	[5,10)
w_i	0,25	0,35	0,25	0,15

Yechish. $h=5$. $\frac{w_i}{h}$ mos ravishda 0,05; 0,07; 0,05 va 0,03 ga teng.

U holda ushbu gistogrammani hosil bo'ladi (3-shakl):



3-shakl.

Shakilga ko'ra nisbiy chastotalar gistogrammasini shunday silliq chiziq $f^*(x)$ bilan tutashtirish mumkinki, $f^*(x)$ chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiya yuzasi gistogramma yuzasiga teng bo'ladi. $f^*(x)$ chiziqqa *nisbiy chastotalar taqsimotining emperik funksiyasi* deyiladi.

Katta sonlar qonuniga ko'ra tanlanma hajmi orttirilsa, $f^*(x)$ funksiya taqsimotning differensiyal funksiyasiga yaqinlashadi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

1.Quyidagi tanlanma berilgan: 2,10,5,5,4,8,5,4,2,8,4,10,8,8,2.

Tanlanmani 1) variatsion qator; 2) chastotalar statistik taqsimoti; 3) nisbiy chastotalar statistik taqsimoti ko'rinishida tasvirlang.

2)

x_i	2	3	5	8	10
n_i	3	3	3	4	2

;

3)

x_i	2	3	5	8	10
n_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

.

Javob: 1) 2,2,2,4,4,4,5,5,5,8,8,8,8,10,10;

2. Quyidagi statistik taqsimot bilan berilgan tanlanmalar uchun emperik taqsimot funksiyalarini toping:

Javob:

x_i	0	2	4	8
n_i	10	30	40	20

3)

x_i	3	5	7	9
n_i	3	2	4	1

;

2

x_i	1	4	6	7
n_i	10	15	15	10

;

1) $\begin{cases} 0, \ x \le 3, \\ 0{,}3, \ 3 < x \le 5, \\ 0{,}5, \ 5 < x \le 7,; \\ 0{,}9, \ 7 < x \le 9, \\ 1, \ x > 9. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0, \ x \le 1, \\ 0{,}2, \ 1 < x \le 4, \\ 0{,}5, \ 4 < x \le 6,. \\ 0{,}8, \ 6 < x \le 7, \\ 1, \ x > 7. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ 0{,}1, \ 0 < x \le 2, \\ 0{,}4, \ 2 < x \le 6,. \\ 0{,}8, \ 6 < x \le 8, \\ 1, \ x > 8. \end{cases}$

3. Quyidagi emperik taqsimot bilan berilgan tanlanmalar uchun nisbiy chastotalar poligonini yasang:

1)

x_i	2	4	6	8	10
w_i	0,2	0,15	0,15	0,4	0,1

;

2)

x_i	10	30	50	60	80
w_i	0,2	0,1	0,35	0,25	0,1

.

4. Tavakkaliga tanlangan 100 ta talaba bo'yini ($sm.$da) o'lchash bo'yicha taqsimoti berilgan:

Talaba bo' yi	154 – 158	158 – 162	162 – 166	166 – 170	170 – 174	174 – 178	178 – 182
Talaba soni	12	16	20	26	14	10	2

Chastotalar gistogrammasini quring.

4-§. Taqsimot noma'lum parametrlarining statistik baholari

Bosh to'plamning biror miqdoriy ko'rsatkichini baholash talab qilingan bo'lib, bu ko'rsatkichning qanday taqsimotga ega ekanligi nazariy jihatdan ma'lum bo'lsin. Tabiiy ravishda bu taqsimotni aniqlaydigan parametrlarni baholash masalasi kelib chiqadi. Odatda kuzatish natijalari, ya'ni tanlanma qiymatlaridan boshqa ma'lumot bo'lmaydi.

X belgili quyidagi emperik taqsimot berilgan bo'lsin:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Bu yerda $n_i - x_i$ $\left(i=\overline{1,k}\right)$ variantaning chastotasi, $n=\sum_{l=1}^{k} n_i$ – tanlanma hajmi.

Nazariy taqsimot noma'lum parametrining ***statistik***(yoki ***emperik***) ***bahosi*** deb tanlanma qiymatlari $x_1, x_2, \ldots, x_k, n_1, n_2, \ldots, n_x$ larning funksiyasiga aytiladi.

Statistik baho tasodifiy miqdor hisoblanadi. θ – no'malum parametr, θ^* uning statistik bahosi bo'lsin. $|\theta-\theta^*|$ kattalikka *bahoning aniqligi* deyiladi. $|\theta-\theta^*|$ qanchayin kichik bo'lsa θ^* statistik baho θ parametrni shunchlik aniq ifodalaydi. Shunday qilib, $|\theta-\theta^*|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi $\delta>0$ son bahoning aniqlik ko'rsatkichi bo'ladi.

$|\theta-\theta^*|<\delta$ tengsizlikning bajarilishi ehtimoli γ, ya'ni

$$P\left(|\theta^*-\theta|<\delta\right)=P\left(\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta\right)=\gamma$$

θ^* *bahoning ishonchliligi* deb ataladi.

Odatda bahoning ishonchliligi oldindan beriladi va γ sifatida birga yaqin bo'lgan qiymatlar, masalan, 0,95, 0,99, 0,999 olinadi.

No'malum parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplaydigan $\left(\theta^*-\delta;\theta^*+\delta\right)$ interval γ *darajali ishonchli oraliq* deyiladi.

Agar $M(\theta^*)=\theta$ bo'lsa, u holda θ^* baho θ parametr uchun *siljimagan baho* deyiladi.

$M(\theta^*)=\theta$ shart statistik baho sistematik xatolikka ega bo'lmasdan, faqat tasodifiy xatoliklarga ega bo'lishini bildiradi.

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} M(\theta_n^*)=\theta$ bo'lsa, u holda θ^* baho θ parametr uchun *assimptotik siljimagan baho* deyiladi.

Agar $M(\theta^*)\neq\theta$ bo'lsa, u holda θ^* baho θ parametr uchun *siljigan baho* deyiladi.

Masalan, biror kattalik santimetrli chizg'ichda o'lchanayotgan bo'lsa, bunda albatta sistematik ε ($|\varepsilon|<1$ *sm.*) xatolikka yo'l qo'yiladi. Shu sababli qaralayotgan baholar siljigan bo'ladi.

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta^* - \theta| < \delta)=1$ bo'lsa, u holda θ^* baho θ parametr uchun *asosli baho* deyiladi.

Shunday qilib, asosli baho uchun $n\to\infty$ da ehtimollik jihatdan $\theta_n^*\to\theta$ munosabat o'rinli bo'ladi va ma'lum ma'noda θ_n^* ning qiymatlari noma'lum θ soniga yaqin bo'ladi deyish mumkin.

1-teorema. θ^* siljimagan baho bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} D(\theta_n^*)=0$ bo'lsa, u holda θ^* asosli baho bo'ladi.

Isboti. θ^* siljimagan baho bo'lgani uchun $M(\theta^*)=\theta$. Chebeshev tengsizligidan $M(\theta^*)=\theta$ va $\lim\limits_{n\to\infty} D(\theta_n^*)=0$ larni inobatga olib, topamiz:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon) \geq \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{D(\theta_n^*)}{\varepsilon^2}\right)=1-\frac{1}{\varepsilon^2}\lim_{n\to\infty} D(\theta_n^*)=1.$$

Bunda $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon) > 1$ bo'lmaydi. Shu sababli yuqoridagi tengsizlikdan $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta^* - \theta| < \delta)=1$ kelib chigadi. Demak, θ^* baho asosli.

Berilgan hajmdagi tanlanmada eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan baho *samarali baho* deyiladi.

Samarali θ^* bahoning qiymatlari θ parametrga boshqa baholarga nisbatan yaqinroq joylashgan deb tushunish mumkin.

Bitta miqdoriy kattalik bilan aniqlanadigan statistik baho ***nuqtaviy baho*** deyiladi. Quyidagi kattaliklar X belgili emperik taqsimotning nuqtaviy baholari bo'ladi:

Tanlanmaning o'rta qiymati: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i;$

Tanlanmaning dispersiyasi: $\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 n_i;$

Tuzatilgan dispersiya: $S^2 = \frac{n}{n-1}\overline{D} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 n_i;$

Tanlanmaning o'rtacha kvadratik chetlashishi: $\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}};$

Tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlashishi: $S = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\overline{\sigma}.$

Tanlanmaning o'rta qiymati $\overline{X}$ matematik kutilish uchun siljimagan va asosli baho bo'ladi. Haqiqatan ham, $M(X_i) = a$ bo'lsa,

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{na}{n} = a = M(X).$$

Demak, $\overline{X} - M(X)$ uchun siljimagan baho.

Bundan tashqari

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < \delta\right) = 1.$$

Bundan

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - M(X)\right| < \delta\right) = 1.$$

Shunday qilib, $\overline{X} - M(X)$ uchun asosli baho.

Tuzatilgan dispersiya S^2 dispersiya uchun siljimagan va asosli baho bo'ladi.

Bu tasdiq yuqoridagi tasdiq singari asoslanadi.

1-misol. Tanlanma 2,1,3,3,4,4,3,3,3,2,3,1,1,2,3,3,2,2,3,3 elementlardan tashkil topgan. Tanlanmaning emperik taqsimoti, o'rta qiymati, dispersiyasi va tuzatilgan dispersiyasi, o'rtacha kvadratik chetlashishi va tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlashishini toping.

Y e c h i s h . Tanlanmaning emperik taqsimotini topamiz:

x_i	1	2	3	4
n_i	3	5	10	2

Bundan

$$n=\sum_{i=1}^{4} n_i = 3+5+10+2=20$$

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_i n_i = \frac{1}{20}(1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 10+4\cdot 2)=2{,}55;$$

$$\overline{D}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\overline{X}\right)^2 n_i=\frac{1}{20}\left[(1-2{,}55)^2\cdot 3+(2-2{,}55)^2\cdot 5+(3-2{,}55)^2\cdot 10+(4-2{,}55)^2\cdot 2\right]=$$

$$=\frac{1}{20}(7{,}2075+1{,}5125+2{,}025+4{,}205)=0.7475;$$

$$S^2=\frac{20}{19}\cdot 0{,}7475\approx 0{,}7868; \quad \overline{\sigma}=\sqrt{0.7475}=0{,}86; \quad S=\sqrt{0{,}7868}=0.89.$$

Katta sonlar qonuniga muvofiq bosh to'plam normal taqsimot qonuniga ega bo'lsa tanlanmaning o'rta qiymati $\overline{X}$ ham normal taqsimot qonuniga bo'ysinadi. Bunda agar tanlanmaning hajmi etarlicha katta bo'lsa, u holda bosh to'plam qanday taqsimot qonuniga ega bo'lishidan qat'iy nazar tanlanmaning o'rta qiymati $\overline{X}$ normal taqsimot qonuniga bo'ysinadi. Shunday qilib, agar bosh to'plam a matematik kutilishga va σ^2 dispersiyaga ega bo'lsa, u holda tanlanmaning o'rta qiymati $\overline{X}$ parametrlari a va $\frac{\sigma^2}{n}$ bo'lgan nopmal taqsimotga ega bo'ladi. Bunda

$$P\left(\alpha<\overline{X}<\beta\right)=\Phi\left(\sqrt{n}\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\sqrt{n}\frac{\alpha-a}{\sigma}\right); \quad P\left(\left|\overline{X}-a\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

2-misol. O'rik sharbati 200 *ml.* hajmli idishlarga quyiladi. Quyuvchi avtomat shunday sozlanganki, uning to'ldirish xatoligi $\sigma \pm 10\,ml.$ ga teng. Iqishlar karton qutilarga 25 donadan qadoqlanadi. Xaridor qadoqlangan qutining o'rtacha og'irligi ko'rsatilgandan kam bo'lmasligini talab qiladi. Xaridor ishlab chiqarilgan mahsulotni qabul qilishi uchun ishlab chiqaruvchi avtomatni 205 *ml.* quyadigan qilib sozlab qo'ydi. Tasodifan tanlangan qadoqlangan qutining og'irlik tekshiruvidan o'tmasligi ehtimolini toping.

Yechish. Idishning o'rtacha to'ldirilishi 205 *ml.*, o'rtacha kvadratik og'ishi 10 *ml.* Tasodifiy tanlanma sharbat bilan to'ldirilgan 25 ta idishlardan iborat. $p = 25$ hajmli mumkin bo'lgan barcha tanlanmalar uchun o'rtacha og'irlikning taqsimoti normal taqsimotga bo'ysinadi. Bunda o'rtacha to'ldirilishi 205 *ml.*ga, o'rtacha kvadratik og'ishi $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$ *ml.*ga teng.

Agar qadoqlangan qutidagi idishlarning o'rtacha to'ldirilganligi 200 *ml.* dan kam bo'lsa, quti sifat nazoratidan o'tmaydi. Demak, izlanayotgan ehtimol

$$P(\overline{X} < 200) = P(0 < \overline{X} < 200) = \Phi\left(\frac{200-205}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-205}{2}\right) =$$

$$= \Phi(-2{,}5) - \Phi(-102{,}5) = -0{,}4938 - (-0{,}5) = 0{,}0062.$$

Taqsimot no'malum parametrlarining yuqorida keltirilgan nuqtaviy baholari tegishli parametrning tanlanma ma'lumotlariga asoslangan sonli qiymatlarini beradi, ammo ular bahoning aniqligi va ishonchliligi to'g'risida fikr yuritish imkonini bermaydi. Shu sababli bahoning aniqligi va ishonchliligini yaxshiroq ta'minlaydigan interval baholar bilan tanishamiz.

Intervalning chegaralarini bildiruvchi ikkita miqdor bilan aniqlanadigan baho ***interval baho*** deyiladi.

Matematik kutilish uchun interval baholar

1. ***σ parametr ma'lum bo'lgan hol.*** X belgili a va σ^2 parametrli normal taqsimlangan tanlanma berilgan bo'lsin.

$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ tanlanmaning o'rta qiymati uchun

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{na}{n} = a;$$

$$\sigma(\overline{X})=\sqrt{D(\overline{X})}=\sqrt{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}=\sqrt{\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}=\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)}=\sqrt{\frac{1}{n^2}n\sigma^2}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$P(|\overline{X}-a|<\delta)=\gamma$ bo'lsin deylik. U holda

$$P(|\overline{X}-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

yoki

$$P(|\overline{X}-a|<\delta)=2\Phi(t),\ \text{bu yerda } t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Bundan $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Demak,

$$P\left(|\overline{X}-a|<\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)$$

yoki

$$P\left(\overline{X}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)=\gamma.$$

Shunday qilib, $\left(\overline{X}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\overline{X}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ oraliq a no'malum parametr uchun γ darajali ishonchli oraliq bo'ladi. Bu ifodada t kattalik $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$ tenglikdan Laplas funksiyasi qiymatlari keltirilgan jadval asosida topiladi. Bunda $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ kattalik bahoning aniqligini belgilaydi.

3-misol . X belgili tanlanma $\sigma=5$ parametr bilan normal taqsimlangan. Agar $n=25$, $\overline{X}=14$ bo'lsa, tanlanma ma'lumotlari bo'yicha $\gamma=0{,}95$ ishonchlilik bilan a parametr uchun ishonchli oraliqni toping.

Y e c h i s h. $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}=\frac{0{,}95}{2}=0{,}475$ ifoda uchun jadvaldan $t=1{,}96$ ni topamiz.

$\left(\overline{X}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\overline{X}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ishonchli oraliqning chegaralarini aniqlaymiz:

$$14-1{,}96=12{,}04 \text{ va } 14+1{,}96=15{,}96.$$

Shunday qilib, $(12{,}04;15{,}96)$ ishonchli oraliq a parametrni 0,95 ishonchlilik bilan qoplaydi. Bunda bahoning aniqligi $\delta = 1{,}96$ ga teng.

2. ***σ parametr noma'lum bo'lgan hol.*** X belgili a va σ^2 parametrli normal taqsimlangan tanlanma berilgan bo'lsin. a no'malum parametr uchun γ darajali ishonchli oraliqni topamiz. Tanlanmaning qiymatlari bo'yicha erkinlik darajasi $n-1$ bo'lgan Styudent taqsimotli T tasodifiy miqdorni aniqlaymiz:

$T = \dfrac{\bar{x} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$, bu yerda S – tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlashish. U holda

$$P(|T| < t_\gamma) = P\left(\left|\sqrt{n}\frac{\overline{X} - a}{S}\right| < t_\gamma\right) = \gamma$$

yoki

$$P\left(\overline{X} - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Shundy qilib, $\left(\overline{X} - \dfrac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}; X + \dfrac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right)$ oraliq a no'malum parametr uchun γ darajali ishonchli oraliq bo'ladi. Bu munosabatda t_γ kattalik Styudent kreteriyasi qiymatlari jadvali asosida topiladi. Bunda $\delta = \dfrac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}$ kattalik bahoning aniqligini belgilaydi.

4-misol. Jamg'arma bozori ayrim aksiyalarining daromadliligi o'rganilmoqda. 15 kunda tasodifiy tanlanma o'rtacha kvadratik og'ishi $S = 3{,}5\%$, o'rtacha (yillik) daromadlilik $\overline{X} = 10{,}37\%$ ga teng ekanini kuzatildi. Aksiyalarning daromadliligi normal taqsimot qonuniga bo'ysinadi deb, o'rganilayotgan aksiyalar uchun 95% li ishonchli oraliqni toping.

Y e c h i s h. Bosh to'plm o'rtacha kvadratik chetlashishi σ noma'lum. Shu sababli $n = 15$, $\gamma = 0{,}95$ uchun jadvaldan topamiz: $t_\gamma = t(n;\gamma) = t(15;0{,}95) = 2{,}15$. U holda

$$\overline{X} \pm \frac{t_\gamma S}{\sqrt{N}} = 10{,}37 \pm \frac{2{,}15 \cdot 3{,}5}{\sqrt{15}} = 10{,}37 \pm 1{,}94.$$

Bundan $(8{,}43;12{,}31)$. Demak, o'rganilayotgan aksiyalarning haqiqiy daromadliligi $0{,}95$ ishonchlilik bilan $(8{,}43;12{,}31)$ oraliqda yotadi va bahoning aniqligi $\delta = 1{,}94$ ga teng bo'ladi.

O'rtacha kvadratik chetlashish uchun interval baholar

X belgili a va σ^2 parametrli normal taqsimlangan bosh to'plam berilgan bo'lib, a va σ parametrlar no'malum bo'lsin.

σ no'malum parametrning γ darajali ishonchli oralig'ini topamiz. Tanlanmaning qiymatlari bo'yicha erkinlik darajasi $n-1$ bo'lgan χ^2 taqsimotli χ^2 tasodifiy miqdorini

aniqlaymiz:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.$$

U holda χ^2 tasodifiy miqdorning $(X_1;X_2)$ oraliqqa tushishi ehtimoli

$$P\left(X_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < X_2\right) = P\left(\sqrt{X_1} < \frac{S\sqrt{n-1}}{\sigma} < \sqrt{x_2}\right) = P\left(S\sqrt{\frac{n-1}{X_1}} < \sigma < S\sqrt{\frac{n-1}{X_2}}\right) = \gamma,$$

bu yerda $\sqrt{\frac{n-1}{X_1}}$, $\sqrt{\frac{n-1}{X_2}}$ qiymatlar jadvallashtirilgan. Bu jadvallar asosida $q = q(\gamma, n)$ topiladi.

Shunday qilib, σ no'malum parametr uchun γ darajali ishonchli oraliq quyidagi tengsizliklardan topiladi:

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q), \text{ agar } q < 1 \text{ bo'lsa,}$$

$$0 < \sigma < S(1+q), \text{ agar } q \geq 1 \text{ bo'lsa}.$$

4-misol. Biror kattalik bitta asbob yordamida sistematik xatolarsiz 10 marta o'lchangan bo'lib, bunda o'lchashlardagi tasodifiy xatolarning o'rta kvadratik chetlashishi $0{,}8$ ga teng chiqqan. Asbob aniqligini $0{,}95$ ishonchlilik bilan toping.

Y e c h i s h. Jadvaldan $n = 10$ va $\gamma = 0{,}95$ ga mos q ning qiymatini topamiz: $q = q(10;0{,}95) = 0{,}65$. U holda

$$0{,}8(1-0{,}65)<\sigma<0{,}8(1+0{,}65)$$

yoki

$$0{,}28<\sigma<1{,}32.$$

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Bosh to'plamdan $n=50$ hajmli tanlanma olingan:

x_i	2	3	5	7
n_i	12	8	16	14

Tanlanmaning o'rta qiymatini, dispersiyasini, tuzatilgan dispersiyasini, o'rtacha kvadratik chetlashishini va tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlashishini toping.

Javob: $\overline{X}=4{,}52;\ \overline{D}=4{,}3552;\ S^2=4{,}444;\ \overline{\sigma}=2{,}087;\ S=2{,}108.$

2. Bosh to'plamdan $n=60$ hajmli tanlanma olingan:

x_i	1	10	15	20
n_i	30	8	12	10

Tanlanmaning o'rta qiymatini, dispersiyasini, tuzatilgan dispersiyasini, o'rtacha kvadratik chetlashishini va tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlashishini toping.

Javob: $\overline{X}=9{,}8;\ \overline{D}=61{,}47;\ S^2=62{,}52;\ \overline{\sigma}=7{,}84;\ S=7{,}91.$

3. Bosh to'plamdan $n=10$ hajmli tanlanma olingan:

x_i	1250	1260	1270	1280
n_i	4	2	3	1

Tanlanmaning o'rta qiymatini, dispersiyasini, tuzatilgan dispersiyasini, o'rtacha kvadratik chetlashishini va tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlashishini toping.

Javob: $\overline{X}=1261;\ \overline{D}=109;\ S^2=121{,}11;\ \overline{\sigma}=10{,}44;\ S=11.$

4. Bosh to'plamning o'rtachasi $X = 1{,}03$ ga va o'rtacha kvadratik chetlashishi $\sigma = 400$ ga teng. Bosh to'plamdan hajmi 100 ga teng bo'lgan tanlanma olingan. Tanlanmaning o'rtachasi $\overline{X}$ uchun kutilayotgan qiymatni va o'rtacha kvadratik chetlashishni toping.

Javob: 1,03; 1600.

5. Do'konga kirgan xaridorning do'konda bo'lishi vaqti o'rta hisobda 14 daqiqaga, uning o'rtacha kvadratik chetlashishi 4 daqiqaga teng. Tavakkaliga tanlangan 6 ta xaridorning kamida 12 daqiqa do'konda bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: 0,8888.

6. Do'konda bir kunda o'rtacha 1000 ta kitob sotiladi. Bir kunlik o'rtacha savdo hajmining o'rtacha kvadratik chetlashishi 100 ga teng bo'lsa, to'rt kunlik savdoning o'rtacha 900 va 1100 dona kitob orasida bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: 0,9544.

7. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X belgisining no'malum matematik kutilishi a ni 0,99 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchli oraliqni toping. Bosh o'rtacha kvadratik chetlashish σ, tanlanmaning o'rta qiymati $\overline{X}$ va tanlanmaning hajmi

n berilgan: 1) $\sigma = 5$, $\overline{X} = 16{,}3$, $n = 25$; 2) $\sigma = 4$, $\overline{X} = 12{,}4$, $n = 16$;

3) $\sigma = 3$, $\overline{X} = 10{,}1$, $n = 9$; 4) $\sigma = 6$, $\overline{X} = 14{,}5$, $n = 36$.

Javob: 1) $(13{,}73;18{,}87)$; 2) $(9{,}83;14{,}97)$; 3) $(7{,}53;12{,}67)$; 4) $(11{,}93;17{,}07)$.

8. Audit tekshiruvchi tavakkaliga 50 ta to'lov hisoblarini tahlil qilib, ularning o'rtacha miqdori 1100 so'mga va o'rtacha kvadratik chetlashishi 287 so'mga tengligini aniqladi. O'rtacha to'lov hisoblari uchun 90% li ishonchli oraliqni toping.

Javob: $(1033{,}4;1166{,}6)$.

9. Bosh to'plamdan $n = 16$ hajmli tanlanma olingan:

1)

x_i	-2	2	4	6
n_i	5	4	4	3

2)

x_i	-1	1	3	5
n_i	6	2	2	6

Bosh to'plamning normal taqsimlangan X belgisining no'malum matematik akutilishini o'rtacha qiymati 0,95 ishonchlilik bilan ishonchli oraliq yordamida baholang.

Javob: 1) $(0,22;4,78)$; 2) $(0,54;4,46)$.

10. Tavakkaliga tanlangan 300 talabadan 75%i dekanat faoliyatidan mamnun ekanini bildirgan bo'lsa, talabalar orasida dekanatga hayrihohlar uchun 95% li ishonchli oraliqni toping.

Javob: $(0,701;0,799)$.

12. Bir xil aniqlikdagi 15 ta o'lchash bo'yicha o'rtacha kvadratik chetlashish aniqlangan: 1) $S=0,12$; 2) $S=0,16$; 3) $S=0,24$. O'lchash aniqligini 0,99 ishonchlilik bilan toping.

Javob: 1) $(0,03;0,21)$; 2) $(0,04;0,28)$; 3) $(0,06;0,42)$.

5-§. Statistik gipoteza va uni tekshirish sxemasi

Matematik statistika masallarida o'rganilayotgan X tasodifiy miqdorning taqsimoti yoki uni aniqlovchi parametrlar noma'lum bo'ladi. Ayrim hollarda masalaning mohiyati yoki tajribaga asoslanib, noma'lum taqsimot $F(x)$ funksiya ko'rinishida bo'ladi yoki taqsimot parametri θ ga teng bo'ladi degan taxmin, ya'ni gipoteza qabul qilinadi. Qabul qilingan gipotezaning to'g'ri yoki noto'g'riligi statistik kuzatish natijalariga asoslanib tekshiriladi. Shu sabali bu gipotezalarga statistik deyiladi.

1-ta'rif. No'malum taqsimot qonunining ko'rinishi yoki parametri haqidagi har qanday taxminga ***statistik gipoteza*** deyiladi.

Gipotezalar oddiy va murakkab gipotezalarga bo'linadi. Agar gipotezada taqsimot qonuni to'liq aniqlangan bo'lsa, u holda gipoteza oddiy bo'ladi. Agar bunda taqsimot parametrlari noma'lum bo'lsa , u holda gipoteza murakkab bo'ladi. Masalan, "Bernulli sxemasida hodisaning ro'y berishi ehtimoli 0,5 ga teng", "Tasodifiy miqdor $a=0$, $\sigma^2=1$parametrli normal taqsimotga ega" gipotezalar oddiy va "Bernulli sxemasida hodisaning ro'y berishi ehtimoli $(0,3;0,6)$oraliqda yotadi", "Tasodifiy miqdor normal taqsimotga ega emas " gipotezalar murakkab hisoblanadi.

Tekshirilayotgan (to'g'ri deb qaralayotgan) gipoteza *nolinchi (asosiy) gipoteza* deb ataladi va H_0 bilan belgilanadi. H_0ga mantiqan zid bo'lgan gipotezaga *raqobatli* (*konkurent*) yoki *muqobil* (*alternativ*) gipoteza deyiladi va H_1 bilan belgilanadi.

H_0va H_1 gipotezalar statistik gipotezalarni tekshirish masalalarida ikkita mumkin

bo'lgan tahlashlarni hosil qiladi.

H_0 gipotezaning to'g'ri yoki noto'g'riligi tekshirish tasodifiy xarakterga ega bo'lgani uchun bunda ikki xil xatolikka yol qolyilashi mumkin:

– 1-tur xatolik. Bunda to'g'ri bo'lgan H_0 gipoteza noto'g'ri deb rad etiladi;

– 2-tur xatolik. Bunda noto'g'ri bo'lgan H_0 gipoteza to'g'ri deb qabul qilinadi.

Masalan, H_0 gipoteza "Ishlab chiqarilgan maxsulotlar partiyasi sifatli" ma'noda bo'lsa, u holda 1-tur xatolikda sifatli maxsulotlar partiyasi sifatsiz deb hisoblanadi. Shu sababli 1-tur xatolikni ishlab chiqaruvchining tavakkali deyish mumkin. 2-tur xatolikda esa sifatsiz maxsulotlar partiyasi sifatli deb hisoblanadi. Shu sababli 2-tur xatolikni iste'molchining tavakkali deb qarash mumkin.

H_0 gipoteza qabul qilinishi yoki rad etilishi mumkin bo'lgan K tasodifiy miqdorga (qoidaga) *statistik mezon* deyiladi. Bunda K shunday tanlanishi kerakki, uning o'rinli ekanini tekshirishda ma'lum taqsimot qonunidan foydalanish mumkin bo'lsin.

Tegishli Kstatistik mezon tanlangach, uning mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami S ikkita kesishmaydigan S_1 va S_2 $(S_1 \cup S_2 = S,\ S_1 \cap S_2 = \varnothing)$ qism to'plamlarga ajratiladi.

Agar $K \in S_1$ bo'lsa, u holda H_0 gipoteza qabul qilinadi. Bunda S_1 ga *gipotezani qabul qilish sohasi* deyiladi.

Agar $K \in S_2$ bo'lsa, u holda H_0 gipoteza rad etiladi. Bunda S_2 ga *kritik soha* deyiladi.

S_1 va S_2 to'plamlarni ajratuvchi nuqtalarga *kritik nuqtalar* deyiladi va K_{kr} bilan belgilanadi. Bunda $K > K_{kr} > 0$ tengsizlik bilan aniqlanuvchi $(K_{kr};+\infty)$ oraliqqa o'ng tomonlama kritik soha, $K < K_{kr} < 0$ tengsizlik bilan aniqlanuvchi $(-\infty;K_{kr})$ oraliqqa chap tomonlama kritik soha, $K < K_{1kr}$ va $K > K_{2kr}$ ($K_{2kr} > K_{1kr}$) tengsizliklar bilan aniqlanuvchi $(-\infty;K_{1kr}) \cup (K_{2kr};+\infty)$ oraliqqa ikki tomonlama kritik sohalar deyiladi.

H_0 gipotezani tekshirishda to'rt holat bo'lishi mumkin:

H_0 gipoteza	**qabul qilinadi**	**rad etiladi**
to'g'ri	to'g'ri echim	1-tur xatolik
noto'g'ri	2-tur xatolik	to'g'ri echim

2-ta'rif. 1-tur xatolikka yo'l qo'yish, ya'ni H_0 gipoteza to'g'ri bo'lganda uni rad etish ehtimoli α ga *statistik mezonning qiymatlilik darajasi* deyiladi.

2-tur xatolikka yo'l qo'yish, ya'ni H_0 gipoteza noto'g'ri bo'lganda uni qabul qilish ehtimoli β bilan belgilanafdi.

3-ta'rif. 2-tur xatolikka yo'l qo'ymaslik, ya'ni H_0 gipoteza noto'g'ri bo'lganda uni rad etish ehtimoli $1-\beta$ ga *statistik mezonning quvvati* deyiladi.

Kritik nuqtalar K mezon uchun berilgan α qiymatlilik darajasiga qarab $P_{H_0}(K > K_{kr}) = \alpha$, $P_{H_0}(K < K_{kr}) = \alpha$, $P_{H_0}(K < K_{1kr}, K > K_{2kr}) = \alpha$ tenglamalarning biridan topiladi. Bu tenglamalarning ildizlari ko'p ishlatiladigan mezonlar uchun odatda maxsus jadvallardan topiladi.

1- tur va 2- tur xatoliklar ehtimollari α va β qancha kichik bo'lsa, statistik gipotezani tekshirish natijasi shuncha yaxshi bo'ladi. Ammo α va β ehtimollarni bir vaqtda kichraytirib bo'lmaydi., chunki α qanchalik kichik bolsa, β shunchalik katta bo'ladi. Shu sababli α qaralayotgan masalaning mohiyatiga kelib chiqqan holda tadqiqotchi tomonidan belgilanadi. Berilgan α uchun β eng kichik bo'lgan S_2 soha $P_{H_0}(K \in S_2) = \alpha$ tenglama yordamida topiladi.

Shunday qilib, statistik gipoteza quyidagi sxema asosida tekshiriladi:

1^o. X tasodifiy miqdor ustida n ta bog'liqmas kuzatishlar o'tkaziladi va $x_1, x_2, \ldots, x_n$

tanlanma hosil qilinadi;

2^o. Nolinchi H_0 va muqobil H_1 statistik gipotezalar kiritiladi;

3^o. $K = K(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ statistik mezon tanlanadi va uning H_0 gipotezadagi $P_{H_0}(K)$ taqsimoti topiladi;

4^o. Masalaning mohiyatidan kelib chiqqan holda α iymatlilik darajasi belgilanadi;

5^o. $P_{H_0}(K \in S_2) = \alpha$ tenglama yordamida S_2 kritik soh topiladi;

6^o. $K = K(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ statistik mezonda $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar o'rniga tanlanmaning $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qiymatlarini qo'yib, statistik mezonning $K_t = K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tuzatilgan qiymati hisoblanadi. Bunda agar $K_t \in S_2$ bolsa, u holda H_0 gipoteza rad etiladi, agar $K_t \in S_1$ bolsa, u holda H_0 gipoteza qabul qilinadi.

TESTLARDAN NA'MUNALAR

1. Matritsa mazmuni qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) sonlar yig'indisi; B) sonlar ko'paytmasi;

C) sonlar to'plami; D) sonlar jadvali;

E) sonlar birlashmasi.

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning tartibini aniqlang.

A) 2×2; B) 2×3; C) 3×2; D) 3×3; E) 2×3=6.

3. Quyidagi matritsalarning qaysi biri nol matritsa bo'lmaydi?

$A)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $D)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

E) Keltirilgan barcha matritsalar nol matritsa bo'ladi.

4. Birlik matritsani ko'rsating.

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Qaysi shartda A_{mn} va B_{pq} matritsalarni ko'paytirish mumkin?

A) m=p; B) m=q; C) n=p; D) n=q; E) mq=np.

6. Quyidagi A va B matritsalar ustida qanday amallar bajarish mumkin?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

A) $A-B$; B) $A \cdot B$; C) $B \cdot A$; D) $B-A$; E) $A+B$.

7. Quyidagi |A| determinantning a_{12} va a_{32} elementlari yig'indisini toping:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

A) 5; B) 2; C) 7; D) – 6; E) 6.

8. Quyidagi |A| determinantning diagonal elementlari yig'indisini toping:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 9 & 5 \\ -2 & 6 & -10 \end{vmatrix}.$$

A) 14; B) 0; C) 20; D) –6; E) 4.

9. Quyidagi determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

A) 14; B) –26; C) 26; D) –14; E) 0.

10. Quyidagi tenglamani yeching:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A) x=7; B) x= –1; C) x=2; D) x=4; E) x=8 .

11. Ushbu determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

A) 1; B) 0; C) –2; D) 4; E) 12.

12. Ushbu determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A) 0; B) 12; C) 10; D) –10; E) –12.

13. A va unga teskari A^{-1} matritsalar ko‘paytmasi uchun qaysi tasdiq o‘rinli?

A) AA^{-1} faqat nollardan iborat matritsa bo‘ladi;

B) AA^{-1} faqat birlardan iborat matritsa bo‘ladi;

C) AA^{-1} diagonal elementlari 0, qolgan barcha elementlari 1 bo‘lgan matritsa bo‘ladi.

D) AA^{-1} diagonal elementlari 1, qolgan barcha elementlari 0 bo‘lgan matritsa bo‘ladi.

E) AA^{-1} ixtiyoriy kvadrat matritsa bo‘ladi.

14.Quyidagi matritsalardan qaysi biri maxsusmas?

A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

15. A va unga teskari A^{-1} matritsalar uchun quyidagi tengliklardan qaysi biri o‘rinli emas (E– birlik matritsa, O– nol matritsa)?

A) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$; B) $A \cdot A^{-1} = E$; C) $A^{-1} \cdot A = E$;

D) $A A^{-1} - A^{-1} A = \mathrm{O}$; E) $A - A^{-1} = \mathrm{O}$.

16. $A_{m\times n}$ matritsaning rangi nimaga teng?

A) satrlar soni m ga; B) ustunlar soni n ga;

C) noldan farqli minorlar soniga; D) barcha elementlar soni mn ga.

E) noldan farqli minorlarning eng katta tartibiga;

17. Vektor kattalik deb nimaga aytiladi?

A) Faqat yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.

B) Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.

C) Ham son qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.

D) Har qanday kesmaga vektor deb aytiladi.

E) Har qanday kattalik vektor deyiladi.

18. Quyidagi kattaliiklardan qaysi biri vektor bo‘ladi ?

A) sirt yuzasi; B) jism hajmi; C) kesma uzunligi;

D) kuch; E) Birorta ham kattalik vektor bo‘lmaydi.

19. Qachon vektorlar kollinear deb aytiladi ?

A) Bir xil yo‘nalgan vektorlar kollinear deb aytiladi.

B) Har qanday $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar kollinear vektorlar deb aytiladi.

C) Bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng bo‘lgan vektorlar kollinear deb aytiladi.

D) Bitta to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.

E) Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.

20. Ta’rifni to‘ldiring: Uchta vektor komplanar deyiladi, agar ular ··· joylashgan bo‘lsa.

A) bitta to‘g‘ri chiziqda ; B) bitta tekislik yoki parallel tekisliklarda ;

C) parallel to‘g‘ri chiziqlarda ; D) o‘zaro perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarda ;

E) o‘zaro perpendikulyar tekisliklarda.

21. $\boldsymbol{a}=(2, -5)$ vektorning $\bar{i}$ va $\bar{j}$ ortlar bo‘yicha yoyilmasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan ?

A) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$; B) $\boldsymbol{a}=-5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$; C) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$; D) $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$; E) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$.

22. $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi qayerda to'g'ri ifodalangan ?

A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$; B) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$; C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\varphi$;

D) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{tg}\varphi$; E) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{ctg}\varphi$.

23. Qaysi holda $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ sartni qanoatlantiradi ?

A) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ bir xil uzunlikka ega bo'lsa; B) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ ort vektorlar bo'lsa;

C) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ orthogonal bo'lsa; D) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ kollinear bo'lsa;

E) hech qaysi $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar uchun bu shart bajarilmaydi.

24. $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasining xossasi qayerda noto'g'ri ifodalangan ?

A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$; B) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$; C) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;

D) $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$; E) Barcha xossalar to'g'ri.

25. Qaysi shartda $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar uchun $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ tenglik o'rinli ?

A) Bu vektorlar teng bo'lsa; B) Bu vektorlar kollinear bo'lsa;

C) Bu vektorlar ortogonal bo'lsa; D) Bu vektorlar qarama-qarshi bo'lsa;

E) Bunday vektorlar mavjud emas.

26. Agar $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=5$ va $\varphi=30^0$ bo'lsa, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=?$

A) 20 ; B) 10 ; C) $10\sqrt{3}$; D) 41 ; E) 0.

27. Qachon chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda deb ataladi?

A) yechimga ega bo'lmasa; B) kamida bitta yechimga ega bo'lsa;

C) yagona yechimga ega bo'lsa; D) cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa;

E) keltirilgan barcha hollarda.

28. Tenglamalar sistemasini yeching va $x_1^2+x_2^2$ ifodaning qiymatini aniqlang:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$$

A) 5; B) 1; C) 4; D) 2; E) 3.

29. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va $a=(m,n,p)$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini ko‘rsating.

A) $\frac{x-m}{x_0} = \frac{y-n}{y_0} = \frac{z-p}{z_0}$; B) $m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0$;

C) $m(x-x_0)=n(y-y_0)=p(z-z_0)$; D) $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$;

E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

30. Kanonik tenglamasi $\frac{x}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ ko‘rinishda bo‘lgan L to‘g‘ri chiziq qanday xususiyatga ega ?

A) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligiga parallel joylashgan;

B) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligiga perpendikular joylashgan;

C) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligini kesib o‘tadi;

D) L to‘g‘ri chiziq YOZ koordinata tekisligini kesib o‘tmaydi;

E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

31. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalarini toping.

A) $(-3, 1, 0)$; B) $(3, -1, 0)$; C) $(2,5,-3)$; D) $(-2, -5, 3)$;

E) to‘g‘ri javob keltirilmagan .

32. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori modulini toping.

A) $\sqrt{10}$; B) $2\sqrt{5}$; C) 4; D) 2; E) $\sqrt{38}$.

33. Kanonik tenglamasi $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-3}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasining koordinatalarini toping.

A) (–3, 1, 0); B) (3, –1, 0); C) (2,5, –3); D) (–2, –5, 3); E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

34. Markazi M(a,b) nuqtada va radiusi R bo‘lgan aylana tenglamasini ko‘rsating.

A) $(x+a)^2+(y+b)^2=R^2$; B) $(x+b)^2+(y+a)^2=R^2$; C) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$;

D) $(x-b)^2+(y-a)^2=R^2$; E) $(x-a)^3+(y-b)^3=R^3$.

35. Umumiy ko‘rinishdagi II tartibli

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

tenglama aylanani ifodalashi uchun B koeffitsient qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?

A) $B>0$; B) $B<0$; C) $B\neq 0$; D) $B=0$; E) $B\geq 0$.

36. Yarim o‘qlari a=5 va b=4 bo‘lgan ellipsning fokuslari F(±C, 0) nuqtalarda joylashgan bo‘lsa, C qiymatini toping.

A) 5; B) 4; C) 3; D) 2; E) 1.

37. Ellipsning ekssentrisiteti ε qanday shartni qanoatlantiradi ?

A) $\varepsilon>0$; B) $\varepsilon<0$; C) $\varepsilon\neq 0$; D) $\varepsilon=0$; E) $0<\varepsilon<1$.

38. Ekssentrisitetning qanday qiymatida ellips aylanaga o‘tadi ?

A) $\varepsilon>0$; B) $\varepsilon<0$; C) $\varepsilon\neq 0$; D) $\varepsilon=0$; E) $\varepsilon=1$.

39. Quyidagi II tartibli tenglama qanday chiziqni ifodalaydi ?

$$16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$$

A) aylana; B) ellips; C) giperbola; D) parabola; E) to‘g‘ri chiziq.

40. Quyidagi II tartibli tenglama qanday chiziqni ifodalaydi ?

$$16x^2-9y^2-64x-18y-89=0$$

A) aylana; B) ellips; C) giperbola; D) parabola; E) to‘g‘ri chiziq.

41. Parabolaning ekssentrisiteti ε qanday shartni qanoatlantiradi ?

A) $\varepsilon>1$; B) $\varepsilon<1$; C) $\varepsilon\neq1$; D) $\varepsilon=1$; E) $0<\varepsilon<1$.

42. Agar parabola $y^2=8x$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, uning direktrisasi tenglamasini toping.

A) $x=-8$; B) $x=8$; C) $x=4$; D) $x=2$; E) $x=-2$.

43.A = [–3; 0] va B = (–1; 5] to‘plamlar birlashmasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) [–3; 5]; B) [–3; –1]; C) (–1; 0); D) (0; 5]; E) [–1; 5].

44. A va B to‘plamlar kesishmasi amali qayerda ifodalangan?

A) $A \cup B$; B) $A \cap B$; C) $A \subset B$; D) $A \supset B$; E) $A \setminus B$.

45. Agar $x \in A \cap B$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli bo‘ladi ?

A) $x\in A$, $x\notin B$; B) $x\notin A$, $x\in B$; C) $x\notin A$, $x\notin B$;

D) $x\in A$, $x\in B$; E) barcha tasdiqlar o‘rinli emas .

46. Agar universal to‘plam $\Omega=(-\infty, \infty)$ va $A=(2,5]$ bo‘lsa, C(A) to‘plam qayerda to‘g‘ri ifodalangan ?

A) $C(A)=[-\infty,2]$; B) $C(A)=(5, \infty]$; C) $C(A)=[0,2] \cup (5, \infty)$;

D) $C(A)= (-\infty, 2] \cup (5, \infty)$; E) to‘g‘ri javob keltirilmagan .

47. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri cheksiz to'plam bo'ladi?

A) $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglama ildizlari to'plami ;

B) $ax+b=c$ ($a \neq 0$) chiziqli tenglama ildizlari to'plami ;

C) $\sin x=a$ ($|a| \leq 1$) trigonometrik tenglama ildizlari to'plami ;

D) $\log_a x=b$ ($a>0$, $a \neq 1$) logarifmik tenglama ildizlari to'plami ;

E) $a^x = b$ ($a>0$, $a \neq 1$) ko'rsatkichli tenglama ildizlari to'plami .

48. Quyidagi to'plamlaridan qaysi biri sanoqli emas?

A) butun sonlar; B) ratsional sonlar; C) juft sonlar ;

D) toq sonlar; E) irratsional sonlar.

49. Quyidagi to'plamlaridan qaysi biri sanoqsiz?

A) butun sonlar; B) ratsional sonlar ; C) irratsional sonlar ;

D) toq sonlar ; E) juft sonlar.

50. Quyidagi to'plamlaridan qaysi biri sanoqli?

A) (a,b) oraliqdagi haqiqiy sonlar to'plami; B) ratsional sonlar to'plami ;

C) irratsional sonlar to'plami ; D) haqiqiy sonlar to'plami ;

E) musbat sonlar to'plami.

51. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ sonli ketma-ketlikning quyi va yuqori chegaralarini ko'rsating.

A) $\frac{1}{2}, 10$; B) $\frac{1}{2}, 1$; C) $\frac{1}{2}, 3$; D) 0, 1; E) 1, 2.

52. Qaysi sonli ketma-ketlik chegaralangan ?

A) $\{n^2+3\}$; B) $\{(-1)^n \cdot n\}$; C) $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$; D) $\left\{\dfrac{n^2-1}{n}\right\}$; E) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{3}\right\}$.

53. Quyidagilarning qaysi biri yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo‘ladi ?

$$x_n = \frac{1}{n^2+1}, \quad y_n = \frac{1}{2n^2-1}, \quad z_n = (-1)^n$$

A) x_n; B) x_n, y_n; C) z_n; D) y_n, z_n; E) x_n, z_n.

54. Ta’rifni to‘ldiring: $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi deb x argumentning $y=f(x)$ funksiya .... bo‘ladigan qiymatlar to‘plamiga aytiladi.

A) musbat; B) manfiy; C) nol; D) ma’noga ega ; E) cheksiz.

55. $f(x) = \sqrt{2x+1} - \lg x$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

A) $(-1,+\infty)$; B) $(0,+\infty)$; C) $(2,11)$; D) $(-\infty,+\infty)$; E) $(1,+\infty)$.

56. $f(x) = \ln\sqrt{x-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

A) $[1,+\infty)$; B) $[0,+\infty)$; C) $(-\infty,+\infty)$; D) $(-\infty,1)$; E) $(1,+\infty)$.

57. $f(x) = \arcsin\frac{x-1}{2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

A) $[0,1]$; B) $[1,2]$; C) $(-\infty,+\infty)$; D) $[-1,3]$; E) $[-1,1]$.

58. $y=2x^2+5x-1$ funksiyaning $x\to 2$ bo‘lgandagi limiti topilsin.

A) 10; B) 12; C) 17; D) 21; E) –1.

59. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ limitni hisoblang:

A) 0; B) ∞; C) $-\infty$; D) 3; E) –1.

60. Agarda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, shu nuqtada quyidagi funksiyalardan qaysi biri uzluksiz bo‘lishi shart emas ?

A) $f(x)+g(x)$; B) $f(x)-g(x)$; C) $f(x)\cdot g(x)$; D) $f(x)/g(x)$;

E) Barcha funksiyalar uzluksiz bo'ladi.

61. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz va $g(x_0)\neq 0$ bo'lsa, shu nuqtada quyidagi funksiyalarning qaysi biri uzluksiz bo'lmaydi ?

A) $f(x)+g(x)$; B) $f(x)-g(x)$; C) $f(x)\cdot g(x)$; D) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

E) Ko'rsatilgan barcha funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

62. $y=f(x)$ funksiyaning Δx argument orttirmasiga mos keladigan Δf orttirmasi qayerda to'g'ri ifodalangan?

A) $\Delta f=f(x)-f(\Delta x)$; B) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(\Delta x)$; C) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$;

D) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f((x-\Delta x)$; E) $\Delta f=f(x)\Delta x$.

63. $y=x^3$ funksiyaning Δy orttirmasi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $3x^2\Delta x+(\Delta x)^3$; B) $3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; C) $3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2$;

D) $3x(\Delta x)^2(x+3\Delta x)$; E) $3x\Delta x(x+\Delta x)+(\Delta x)^3$.

64. $y=x^3$ funksiya uchun $\Delta y/\Delta x$ orttirmalar nisbatini toping.

A) $3x^2+(\Delta x)^2$; B) $3x(x+3\Delta x)$; C) $3x^2+3x\Delta x$;

D) $3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$; E) $3x\Delta x(x+\Delta x)+(\Delta x)^3$.

65. Differensiallash qoidasi qayerda xato ko'rsatilgan?

A) $(Cu)'=Cu'$ (C-const.); B) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; C) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$;

D) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v+uv'}{v^2}$; E) $(f(u))'=f'(u)u'$.

66. Ikkita u va v diffrentsiallanuvchi funksiyalar u/v nisbatining hosilasini hisoblash formulasi to'g'ri yozilgan javobni ko'rsating.

A) $\frac{u'v+uv'}{v}$; B) $\frac{u'v+uv'}{v^2}$; C) $\frac{u'v-uv'}{v^2}$;

D) $\frac{u'v-uv'}{v}$; E) $\frac{u'v'-uv}{v^2}$.

67. $y=x^2/\sin x$ funksiyaning y' hosilasini hisoblang.

A) $y'=x^2/\cos x$; B) $y'=2x/\sin x$; C) $y'=2x/\cos x$;

D) $y'=x(2\sin x+x\cos x)/\sin^2 x$; E) $y'=x(2\sin x-x\cos x)/\sin^2 x$.

68. Ikkita u va v diffrentsiallanuvchi funksiyalar $u\cdot v$ ko'paytmasining hosilasini hisoblash formulasi qayerda to'g'ri yozilgan?

A) $u'v'$; B) $u'v'+uv$; C) $u'v+uv'$; D) $u'v-uv'$; E) $u'v'-uv$.

69. $y=x^2\sin x$ funksiyaning y' hosilasini hisoblang.

A) $y'=x^2\cos x$; B) $y'=x(x\sin x-2\cos x)$; C) $y'=2x\sin x$;

D) $y'=x(x\cos x+2\sin x)$; E) $y'=x(x\cos x-2\sin x)$.

70. Roll teoremasining tasdig'ini ko'rsating: Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi hamda chegaraviy nuqtalarda $f(a)=f(b)$ bo'lsa, u holda bu kesma ichida kamida bitta shunday $x=c$ nuqta topiladiki, unda ..... bo'ladi.

A) $f'(c)>0$; B) $f'(c)<0$; C) $f'(c)=0$; D) $f'(c)\neq 0$; E) $f'(c)=f(c)$.

71. $f(x)=x\sin x$ funksiya uchun Roll teoremasi qaysi kesmada o'rinli?

A) $[0, 1]$; B) $[0, \pi/2]$; C) $[0, \pi]$; D) $[2, \pi]$; E) $[\pi/2, \pi]$.

72. $f(x)=x^2-6x+9$, $x\in[1,5]$, funksiya uchun Roll teoremasining tasdig'i o'rinli bo'ladigan c nuqtani toping.

A) $c=1{,}5$; B) $c=2$; C) $c=2{,}5$; D) $c=3$; A) $c=4{,}5$.

73. $f(x)=x^2-2x+9$, $x\in[0,4]$, funksiya uchun Lagranj teoremasining tasdig'i o'rinli bo'ladigan c nuqtani toping.

A) $c=1$; B) $c=1,5$; C) $c=2$; D) $c=2,5$; E) $c=3$.

74. Agar $f(x)=x^3+8$, $g(x)=x^3+x+1$ va $x\in[-1,2]$ bo'lsa, Koshi teoremasining tasdig'i o'rinli bo'ladigan c nuqtani toping.

A) $c=-0,5$; B) $c=0$; C) $c=0,5$; D) $c=1$; E) $c=1,5$.

75. Agar $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi $f\,'(x)$ mavjud va chekli bo'lsa, uning df differensiali qanday topiladi?

A) $df=f'(x)+dx$; B) $df=f'(x)-dx$; C) $df=f'(x)/dx$;

D) $df=f'(x)dx$; E) $df=f'(x)$.

76. Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya argumentining orttirmasi Δx kichik bo'lganda uning differensiali df va orttirmasi Δf orasidagi munosabat qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $\Delta f=df$; B) $\Delta f>df$; C) $\Delta f<df$; D) $\Delta f\cdot df>0$; E) $\Delta f\approx df$.

77. Differensiallanuvchi funksiyaning differensialini topish qoidasi qayerda noto'g'ri ko'rsatilgan?

A) $dCf=Cdf$; B) $d(u+v)=du+dv$; C) $d(u-v)=du-dv$;

D) $d(uv)=udv-vdu$; E) $df(u)=f'(u)du$.

78. $y=\cos(3x+4)$ funksiya differensiali dy qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $dy=\sin(3x+4)dx$; B) $dy=4\sin(3x+4)dx$; C) $dy=-3\sin(3x+4)dx$;

D) $dy=-4\sin(3x+4)dx$; E) $dy=3\sin(3x+4)dx$.

79. $y=x\ln x$ funksiyaning dy differensialini toping.

A) $dy=xdx$; B) $dy=\ln xdx$; C) $dy=(1/x)dx$;

D) $dy=(1+\ln x)dx$;   E) $dy=(1-\ln x)dx$.

80. Ushbu $f(x)=x^3-3x$ funksiyaning kamayish oralig‘ini toping.

A) $(-1;1)$; B) $(0,1)$; C) $(-1,0)$; D) $(-\infty,-1)$; E) $(-2, 2)$.

81. $y=x\ln x$ funksiya o‘sish sohasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $(0, e)$; B) $(-\infty, 1/e)$; C) $(0, \infty)$; D) $(0; 1/e)$; E) $(1/e; \infty)$.

82. $f(x)=x^3-3x$ funksiyaning kritik nuqtalarini toping.

A) $\{-1;1\}$; B) $\{0;1\}$; C) $\{-1;0\}$; D) $\{2;3)$; E) $\{-2;2\}$.

83. $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi x_0 kritik nuqtadan chap va o‘ng tomonda qanday ishoraga ega bo‘lganda $f(x_0)$ lokal maksimum bo‘ladi?

A) musbat, musbat; B) musbat, manfiy; C) manfiy, manfiy;

D) manfiy, musbat; E) qarama-qarshi ishorali.

84. $y=f(x)$ funksiya x_0 kritik nuqtada ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsa, qaysi shartda $f(x_0)$ lokal maksimum bo‘ladi?

A) $f''(x_0)>0$; B) $f''(x_0)<0$; C) $f''(x_0)=0$; D) $f''(x_0)\neq 0$; E) $|f'(x_0)|\geq 1$.

85. $y=(x^4+2x^3-4)/(x^3+1)$ funksiya grafigining og‘ma asimptotasi tenglamasini yozing.

A) $y=x$; B) $y=x+1$; C) $y=x-1$; D) $y=x+2$; E) $y=x-1$.

86. Qaysi holda $f(x)/g(x)$ nisbat $x\to a$ bo‘lganda 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslik deyiladi?

A) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$; B) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$; C) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$;

D) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$; E) $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq 0,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=0$.

87. Quyidagilardan qaysi biri $x \to 1$ bo'lganda 0/0 ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lmaydi?

A) $\dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$, $n, m \in N, n \neq m$; B) $\dfrac{a^x - a}{x - 1}$; C) $\dfrac{\ln x}{\arccos x}$;

D) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$; E) $\dfrac{\sin 3(x-1)}{\cos(x-1)}$.

88. Agarda $f(x)/g(x)$ nisbat $x \to a$ bo'lganda 0/0 ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lsa, qaysi tenglik Lopitalning I qoidasini ifodalaydi?

A) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$; B) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g(x)}$;

C) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g'(x)}$; D) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;

E) to'g'ri javob keltirilmagan.

89. $f(x)/g(x)$ nisbat limitini ($x \to a$) hisoblash uchun Lopitalning I qoidasida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarga quyidagi shartlardan qaysi talab etilmaydi?

A) $f(x)$ va $g(x)$ a nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi;

B) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$; C) $g'(x) \neq 0$;

D) $f(a)=0$, $g(a)=0$; E) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud.

90. Lopitalning I qoidasini isbotlash uchun kimning teoremasidan foydalaniladi?

A) Veyershtrass; B) Roll; C) Lagranj; D) Koshi; E) Ferma.

91. Lopital qoidasidan foydalanib $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$ limitni hisoblang.

A) $\dfrac{5}{4}$; B) $\dfrac{4}{5}$; C) 0; D) $-\dfrac{5}{4}$; E) ∞.

92. Quyidagilardan qaysi biri $f(x)=\ln x$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi?

A) $\frac{1}{x}$;   B) $x\ln x$;   C) $x\ln x+x$;   D) $x\ln x-x$;   E) $\frac{1}{x}\ln x-x$.

93. Teoremani to‘ldiring: Agar $F(x)$ biror $f(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa, unda ixtiyoriy C o‘zgarmas soni uchun .... funksiya ham $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi.

A) $C{\cdot}F(x)$;   B) $C-F(x)$;   C) $C+F(x)$;   D) $C/F(x)$;   E) $F(x+C)$.

94. Agar $F(x)$ biror $f(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa, unda $\int f(x)dx$ aniqmas integral ta’rif bo‘yicha qanday aniqlanadi?

A) $C{\cdot}F(x)$;   B) $C-F(x)$;   C) $C+F(x)$;   D) $C/F(x)$;   E) $F(x+C)$.

95. Qaysi darajali funksiyaning aniqmas integrali noto‘g‘ri yozilgan?

A) $\int\sqrt{x}dx=\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$;   B) $\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$;   C) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$;

D) $\int\sqrt[3]{x}dx=\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}+C$;   E) $\int\frac{1}{x}dx=-\frac{1}{x^2}+C$.

96. Aniqmas integralni hisoblashning qaysi usuli mavjud emas?

A) ko‘paytirish usuli; B) o‘zgaruvchini almashtirish usuli;

C) differensial ostiga kiritish usuli; D) yoyish usuli;

E) bo‘laklab integrallash usuli.

97. $\int\frac{2x^2-3x+5}{x^2}dx$ integralni yoyish usulida hisoblang.

A) $2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+C$;   B) $2x-3\ln|x|+\frac{5}{x^2}+C$;   C) $2x-\frac{3}{x}-\frac{5}{3x^3}+C$;

D) $2x-3\ln|x|-\frac{5}{x}+C$;   E) $2x+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x}+C$.

98. $\int f(x)dx$ aniqmas integralda $x=\varphi(t)$ almashtirma bajarilganda u qanday ko'rinishga keladi?

A) $\int f(\varphi(t))\varphi(t)dt$; B) $\int f(t)\varphi'(t)dt$; C) $\int f(\varphi(t))dt$;

D) $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$; E) to'g'ri javob keltirilmagan.

99. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-1}}$ integral qaysi almashtirma orqali jadval integraliga keltiriladi?

A) $t=x^2$; B) $t=x^3$; C) $t=x^4$; D) $t=x^5$; E) $t=x^6$.

100. Qaysi tenglik bo'laklab integrallash usulini ifodalaydi?

A) $\int f(x)dx = \int udv = uv - \int vdu$; B) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$;

C) $\int f(x)dx = \int \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \int f_k(x)dx$; D) $\int f(x)dx = F(x) + C$;

E) to'g'ri javob keltirilmagan.

101. $\int x^2 \ln x dx$ integralni hisoblash uchun integral ostidagi ifodani qanday bo'laklash kerak?

A) $u=x$, $dv=x\ln x dx$; B) $u=x^2$, $dv=\ln x dx$; C) $u=\ln x$, $dv=x^2dx$;

D) $u=x\ln x$, $dv=xdx$; E) $u=x^2\ln x$, $dv=dx$.

102. Aniq integralning geometrik ma'nosini ko'rsating.

A) egri chiziqli trapetsiyaning og'ma tomoning burchak koeffitsiyenti;

B) egri chiziqli trapetsiyaning perimetri ;

C) egri chiziqli trapetsiyaning o'rta chizig'i uzunligi ;

D) egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi ;

E) to'g'ri javob keltirilmagan.

103. Aniq integralning mexanik ma'nosini ko'rsating.

A) o'zgaruvchi kuchning eng katta qiymati;

B)o'zgaruvchi kuchning eng kichik qiymati;

C) o'zgaruvchi kuchning momenti;

D) o'zgaruvchi kuchning bajargan ish;

E) o'zgaruvchi kuchning o'rta qiymati.

104. Aniq integralning iqtisodiy ma'nosini ko'rsating.

A) mahsulot ishlab chiqarishda mehnat unumdorligi;

B) ishlab chiqarilgan mahsulot tannarxi;

C) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi;

D) ishlab chiqarilgan mahsulot chakana narxi;

E) mahsulot ishlab chiqarishda sarflangan xomashyo.

105. $[a, b]$ kesma bo'yicha $y=f(x)$ funksiya uchun $S_n(f)$ integral yig'indi tuzishda quyidagi amallardan qaysi biri bajarilmaydi?

A) $[a, b]$ kesma x_i $(i=1, 2, \cdots, n-1)$ va $x_0=a$, $x_n=b$ nuqtalar bilan n bo'lakka ajratiladi;

B) $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ kesmalardan ξ_i nuqtalar olinadi;

C) tanlangan ξ_i nuqtalarda $f(x)$ funksiya qiymatlari hisoblanadi;

D) $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ kesmalarning uzunliklari $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ topiladi;

E) ko'rsatilgan barcha amallar bajariladi .

106. $[a, b]$ kesmada aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun tuzilgan

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

integral yig'indi orqali uning aniq integral qanday aniqlanadi?

A) $\int_a^b f(x)dx = S_n(f)$; B) $\int_a^b f(x)dx = \max S_n(f)$; C) $\int_a^b f(x)dx = \min S_n(f)$;

D) $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty, \\ \max \Delta x \to 0}} S_n(f)$; E) to'g'ri javob keltirilmagan.

107. $[a, b]$ kesmada aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral qanday shartda doimo mavjud bo'ladi?

A) yuqoridan chegaralangan; B) quyidan chegaralangan;

C) o'suvchi; D) kamayuvchi; E) uzluksiz.

108. Aniq integralning xossasi qayerda xato ko'rsatilgan?

A) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

B) $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$;

C) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$;

D) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \; (k - const.)$;

E) barcha qoidalar to'g'ri ko'rsatilgan.

109. Aniq integral xossasini ifodalovchi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik bajarilishi uchun c nuqta qanday shartni qanoatlantirishi kerak?

A) $c< a$; B) $c> b$; C) $c=a$ yoki $c=b$; D) $a< c<b$;

E) ko'rsatilgan barcha shartlarda tenglik bajariladi .

110. Aniq integral uchun quyidagi tengliklardan qaysi biri o'rinli emas?

A) $\int_a^a f(x)dx = 0$; B) $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$; C) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$;

D) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$; E) keltirilgan barcha tengliklar o'rinli.

111. Agar $y=F(x)$ berilgan $[a,b]$ kesmada $y=f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, unda aniq integral uchun Nyuton–Leybnits formulasi qayerda to‘g‘ri ifodalangan?

A) $\int_a^b f(x)dx = F(x)$; B) $\int_a^b f(x)dx = F(a)\cdot F(b)$; C) $\int_a^b f(x)dx = F(b)/F(a)$;

D) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$; E) $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$.

112. $\int_0^\pi \sin^2 xdx$ aniq integral qiymatini Nyuton–Leybnits formulasi yordamida toping.

A) π; B) π/2; C) π/3; D) π/4; E) π/6.

113. $\int_0^\pi \cos^2 xdx$ aniq integral qiymatini Nyuton–Leybnits formulasi yordamida toping.

A) π; B) π/2; C) π/3; D) π/4; E) π/6.

114. Aniq integralni bo‘laklab integrallash formulasini ko‘rsating.

A) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$; B) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b + \int_a^b vdu$; C) $\int_a^b udv = \int_a^b vdu$;

D) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b$; E) To‘g‘ri javob ko‘rsatilmagan.

115. $y=x^3$, $x=0$, $x=2$ va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini toping.

A) $S=1$; B) $S=2$; C) $S=3$; D) $S=4$; E) $S=5$.

116. $y=f(x)$ va $y=g(x)$, $f(x)\geq g(x)$, funksiyalarning grafiklari, $x=a$ va $x=b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan geometrik shaklning S yuzasini hisoblash formulasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $S=\int_a^b[f(x)+g(x)]dx$; B) $S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$; C) $S=\int_a^b f(x)g(x)dx$;

D) $S=\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx$; E) $S=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx$.

117. $y=x^2$ va $y=x^4$ egri chiziqlar bilan chegaralangan shaklning S yuzasini toping.

A) $S=4$; B) $S=2$; C) $S=3/10$; D) $S=2/15$; E) $S=3/8$.

118. $y=f(x)$, $x\in[a,\ b]$, funksiya grafigidan iborat yoyining l uzunligini hisoblash formulasini ko'rsating.

A) $l=\int_a^b f(x)dx$; B) $l=\int_a^b\sqrt{1+f^2(x)}dx$; B) $l=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)}dx$;

C) $l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$; D) $l=\int_a^b\sqrt{1-[f'(x)]^2}dx$; E) $l=\int_a^b f^2(x)dx$.

119. Ko'ndalang kesimining yuzasi $S=3x^2$, $x\in[1,2]$, bo'lgan jismning V hajmini toping.

A) $V=3$; B) $V=1$; C) $V=2$; D) $V=5/3$; E) $V=7$.

GLOSSARY

Atamaning o'zbek tilida nomlanishi	Atamaning ingliz tilida nomlanishi	Atamaning rus tilida nomlanishi
Aksioma-Isbotsiz qabul qilinadigan jumla	Axiom-Acceptable sentence	Аксиома-фраза которое принимается без доказательства
Teorema- Isbot talab qiladigan jumla	Theorem- Required sentence	Теорема-фраза которое требует доказательство
Aniqmas integral- Differensiallashga teskari matematik amal	Indefinite integral	неопределенный интеграл
Garmonik qator- Natural songa teskari son ko'rinishidagi barcha sonlar yig'indisi	Harmonic series- The total number of integers in the numeric integer of the integer	Гармонический ряд-совокупность чисел противоположных натуральному числу
Differensial- Funksiya orttirmasining bosh chiziqli qismi	Differential- The main line of the functional growth	Дифференциал – превосходная главная линейняя часть функции
Differensial tenglama-Erkli o'zgaruvchi,no'malum funksiya va uning hosilalarini bog'lovchi munosabat	Differential equation-Flexible variable, non-functional function and its relationships.	Дифференциальная уравнения – отношения связывающее свободных переменных, неизвестной функции и их производных
Differensial hisob-Funksiyani hosila ba differensiall tushunchalari yordamida tekshiruvchi matematika bo'limi	Differential calculation-The mathematical section that examines the function through differential concepts	Дифференциальная вычисления - глава математики проверяющая функцию в производной при помощи дифференциальных понятий
Integral hisob- Matematik analizning integrallar, ularning xossalari, hisoblash usullari va tadbiqlarini	Integral calculation-Department of mathematical analysis, integral part of them,	Интегральная вычисления - глава изучающая интегралы математического

o'rganadigan bo'limi	studying methods and their applications	анализа, их производных, методов вычислений и применений
Isbot-Tasdiqning to'g'riligi aniqlanadigan mushohadalar zanjiri	Proof- A chain of excerpts from which the accuracy of the verification is determined	Доказательство – цепь наблюдений оправдывающее подтверждение
Limit-Agar o'zgaruvchi miqdor o'zining o'zgarish jarayonida biror soniga cheksiz yaqinlashsa, u holda shu soni o'zgaruvchining limitidir	Limit- If the variable is approaching an infinite number of variables in the process of change, then that number is the variable's limit	Предел - если переменная при его изменений стремится к какому либо числу то это чисто предел переменной
Xosmas integral- Chegarasi zeksiz yoki integral ostidagi funksiya ikkinchi tuzilishga ega bo'lgan integral	Improper integral- The integral with the boundless or integral function has a second break	Несобственный интеграл – интеграл безграничный или в интегральной функции имеющий второе строение
Chiziqli algebra-Chekli chiziqli fazolarda chiziqli akslanishlarni o'rganuvchi algebra bo'limi	Linear algebra- Algebra section of linear algebra in the linear linear spaces	Линейная алгебра – глава алгебры изучающая линейные проекции в граничных линейных пространствах
Zaruriy va yetarli shartlar-Teoremalarni yozish va talqin qilish shakli	Necessary and sufficient conditions- Form of writing and interpretation of the theorems	Необходимые и достаточные условия – вид записывания и истолкования теоремы
Zaruriy shart-Xulosadan shart kelib chiqadi	Necessary condition-the conclusion becomes clear	Необходимое условие – из ответа выводится условие
Yetarli shart-Shartdan xulosa kelib chiqad	Sufficient condition- It comes from the point of view	Достаточное условие – из условия выводится ответ
Funksiya-Bir to'plamdagi har bir songa biror qoida	Function- One rule per item is one rule of the	Функция – соотношение одного из

yoki qonunga ko'ra boshqa to'plamning bitta elementining mosligi	other set or other rule	элементов первого кучи с элементом другой кучи при помощи какой то правилы или закона
Grafiklar-Funksiyani tasvirlash usullaridan biri	Graphic arts-One way to describe the function	Графика – метод описывающее функцию
Teskari funksiya-Berilgan funksiyani erkli o'garuvchisini erksiz o'zgaruvchi orqali bog'lanishi	Inverse function-It is possible to associate a given function with a variable variable, which can be read individually	Обратная функция – связывание свободной переменной с зависимой переменной данной функции
Funksiyaning aniqlanish sohasi-Erkli o'zgaruvchining qabul qilishi mumkin bo'lganbarcha qiymatlari to'plami	Domain of the function-Collect all values that are acceptable to the constant variable	Область определения функции – сборник всех допустимых значений свободной переменной
Chiziqli bo'lmagan funksiya-Erkli o'zgaruvchining darajasi birdan farqli funksiya	Non-linear -The level of the constant variable is a very different function	Нелинейная функция – функция степень свободной переменной отлична от единицы
Ikki o'zgaruvchili funksiya-Ikki erkli argumentli funksiya	A function of two variables-Function with two arguments	Функция двух переменных – функция с двумя свободными аргументами
Algebraning asosiy teoremasi-Kompleks sonlar maydonida ko'phadning ildizi haqidagi teorema	Fundamental theorem of algebra- The theorem about the root root in the complex number field	Основная теорема алгебры – теорема о корне многочлена в области комплексных чисел
Sonli ketma-ketlik- Natural argumentli funksiya	Sequence-Function with natural argument	Последовательность – функция с натуральным аргументом
Ketma-ketlik limiti-Yetarli katta hadlarda ketma-ketlik yetarlicha yaqinlashuvchi son	Limit of a sequence-Sufficient close enough sequence is enough	Предел последовательность – число к которым приблежаются члены последовательности

		аппри достаточной больших n
Aniqmaslik-Natijasini oldindan aytish mumkin bo'lmagan ifoda	Uncertainty- An expression that can not be predicted	Неопределенность – выражение ответ которого невозможно сказать в начале
Funksiya uzuksizligi-Erkli o'zgaruvchining yetarli kichik o'zgarishiga funksiyaning ham kichik o'zgarishi	Continuous function- A slight change in the function of the small variation of the variable variable	Непрерывность функции – малое изменение функции при достаточной малом изменении свободного члена
Argument orttirmasi-Argument o'zgarishi	The increment of the argument-Argument change	Приращение аргумента–изменение аргумента
Funksiya orttirmasi-Funksiya o'zgarishi	Function change	Прирощение функции – изменение функции
Funksiyaning nuqtadagi hosilasi-Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limiti	Function increment-The argument gain of the function's argument increases to zero	Приращение функции – отношение прирощения функции на прирощение аргумента при пределе прирощения аргумента стремящимся к нулю
Funksiyadifferensiali-Funksiyaorttirmasiningbosh qismi	Differential function- The main part of the functional growth	Дифференциал функции – главная часть прирощения функции
Ekstremumlar-Funksiyaningmaksimumva minimumnuqtalari	Extremum- The optimum and maximum range of the function	Экстремумы–максимальные и минимальные полюсы функции
Statsionar nuqtalar-Funksiya hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtalar	Stationary point-The point where the function is zero	Стационарная точка – точки при котором производная функции равна нулю
Funksiyaning kritik nuqtalari-Funksiya hosilasi	Critical point-The points where the function is zero	Критическая точка – точки при котором

nolga teng bo'lgan va hosila mavjud bo'lmagan nuqtalar	and does not contain the integer	производная функции равна нулю или не имеет производных
Funksiyaning monotonlik oraliqlari-Funksiyaning o'sish(kamayish) oraliqlari	Intervals of monotony-Increase (decrease) intervals of the function	Интервалы монотонности – промежуток в котором функции убывает или возрастает
Funksiya botiqlik (qavariqlik) oraliqlari-Funksiya grafigining urinmaga nisbatan yuqorira(quyida) joylashgan oraliqlari	Intervals of concave and convex- The function graph is relatively high (lower) than the run	Интервалы вогнутые и выпуклые –промежуток в котором график функции лежит выше или ниже касательной
Egilish nuqtasi-Funksiya grafigining botiqlikdan qavariqlikka yoki aksincha o'tish nuqtasi	Inflection point-The intersection of the graph of the function graphic or vice versa	Точка перегиба -точки в которых график функции переходит из вогнутой в выпуклую часть или наоборот
Xususiy orttirma-Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning berilgan argument bo'yicha orttirmasi	Partial increment-Multivariable functionality is based on the given argument	частное приращение
To'la orttirma-Ko'p o'zgaruvchilifunksiyaning barcha argumentlari bo'yicha orttirmasi	Full increment-Multivariable functionality is based on all arguments	Полное приращение – прирощение всех аргументов часто изменяемых функции
Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differentsiali-Ko'p o'zgaruvchili funksiya to'la orttirmasining bosh qismi	Differential of functions of several variables-The main part of a full-fledged function of multivariable function	Дифференциал функции нескольких переменных – главная часть полного приращения часто изменяемой функции
Shartli ekstremumlar-Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlarini, uning argumentlari ma'lum	Conditional extremum-The problem of extracting the extremes of many variable functions with its	Условной экстремум– задача удовлетворяющая известные условия и

shartlarni qanoatlantirishi asosida topish masalasi	arguments satisfying certain conditions	данные условия с экстремумами часто изменяемых функции
Noma'lum koeffitsientlar usuli-Kasr ratsional funksiyani sodda kasrlarga yoyish usuli	Method of undetermined coefficients-Swapping the trigonometric function to a decimal-rational function	Метод неопределенных коэффициентов – метод преобразования в простые дроби из дробно рациональных функции
Nyuton-Leybnits formulasi-Aniq integralni hisoblash formulasi	The Newton LeibnizCountless numbers of series sequences were collected	Формула ньютона лейбница – формула решения определенного интеграла
Ikki karrali integral-Ikki o'zgaruvchili funksiyaning tekislikdagi soha bo'yicha integrali	Double integral-Drawn from the first row of rows	Двойные интегралы – интеграл в плоскости двух переменных функции
Sonli qator-Sonli ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan cheksiz yig'indi	Numerical series-Frontier limit for private collective farming	Числовой ряд – бесконечный сборник состоящий из числовых последовательных членов
Koshining integral alomati-Qator yaqinlashishining yetarli sharti	Cauchy integrals ratio test-Satisfactory condition of linear approximation	Интегральный признак Коши - достаточное условие приближенности ряда
Differensial tenglama-Erkli o'zgaruvchi(lar), noma'lum funksiya va bu funksiya hosilalari yoki differenstiallarini bog'lovchi tenglama	Differential equation -The constant variable (s), the unknown function and the equation that binds the function or differentiation of this function	Дифференциальное уравнение–уравнение связывающее дифференциалы, производные функции, неизвестные функции и свободные переменные
Oddiy differensial tenglama-Izlanayotgan funksiya bir o'zgaruvchiliIi bo'lgan differensial tenglama	Ordinary Differential Equations-The searching function is a variable differential equation	Обыкновенные дифференциальные уравнения– дифференциальное уравнение исследуемой

		функции с одним переменным
Xususiy hosilali differensial tenglama-Izlanayotgan funksiya ko'p o'zgaruvchiliIi bo'lgan differensial tenglama	The partial derivative of the differential equation-Differential equation, which is very variable in the search function	Частная производная от дифференциального уравнения - дифференциальное уравнение исследуемой функции с множеством переменных
Differensial tenglamaning tartibi-Differensial tenglamada qatnashayotgan hosilalarning eng yuqori tartibi	Order differential equation-The highest order of joints in the differential equation	Порядок дифференциальное уравнение –самая высокий ряд производных участвующих в дифференциальном уравнении
Differensialtenglamaningyechimi-Tenglamani ayniyatga aylantiruvchifunksiya	Solutions of differential equations-The equation of the equation	Решения дифференциальное уравнение – функция преобразующая уравнение в тождество
Umumiy yechimi-Differensial tenglama yechimlarining oilasi	General solution-Family of equations of differential equations	Общее решение – семейка решений дифференциального уравнения
Xususiy yechim-Differensial tenglama umumiy yechimlar oilasidan ajratilgan yechim	Particular solution-Solution that can be distinguished from the family of common solutions condition satisfying function	Частное решение – отделенное решение из семейки общих решений дифференциального уравнения
Maxsus yechim-Umumiy yechimlar oilasidan ajratib bo'lmaydigan yechim	Accepting a variable as an unknown function	Специальное решение – решение которое невозможно отделить из семейки решений дифференциального уравнения

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Ш.М.Мирзиёев. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш – юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. Тошкент: "Ўзбекистон" НМИУ, 2017. -48 б.

2. David Surovski. Advanced High-Shool Mathematics. Shanghai Amerikan School, 2011 y.

3. Abdullayeva B.S., Sadiqova A.V., Muxiddinova M.N., Toshpo'latova M.I., Matematika. TDPU. (Boshlang'ich ta'lim va sport-tarbiyaviy ish bakalavriant ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik) Toshkent 2014 yil.

4. В.П. Минорский "Олий математикадан масалалар тўплами",Тошкент 1963 йил.

5. "Oliy matematika" (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun). Rasulov , I.I. Safarov I.I., R.T. Muxitdinov . TOSHKENT, 2012. - 554 bet

6. Писменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

7. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Й. Кожевникова, « Олий математикадан мисол ва масалалар»1-2 қисмлар, Тошкент. 2007 йил.

8. Н.Ш.Кремер, "Высшая математика для экономических специальностей", Москва – 2005 йил.

9. В.П. Минорский "Олий математикадан масалалар тўплами",Тошкент 1988 йил.

10.Ш.Мақсудов, М. Салохиддинов, С. Сирожиддинов. Комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси. Тошкент 1976-йил.

11. .Д. Письменный, "Конспект лекции по высшей математике" Москва, 2009 г.

12. Ё.У.Соатов, «Олий математика» 1,2,3-кисм, Тошкент, "Ўзбекистон", 1999 й.

13. Тожиев Ш. И. "Олий математикадан масалалар ечиш" Тошкент, "Ўзбекистон", 2002 й.

1. Под редакции С.В. Кремер «Высшая математика для экономистов», М. «Высшая школа», 1998.

2. Данко П.Е. и др. «Высшая математика в упрожнениях и задачах» I, II.,М. «Высшая школа», 1998.

3. Jo'rayev T. va boshqalar. Oliy matemarika asodlari. Toshkent, «O'zbekiston», 1995.

4. Latipov X. va boshqalar. Analik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent, «O'zbekiston», 1995.

5. Minorskiy V.P. Oliy matematikadan masalalar to'plami. Toshkent, «O'qituvchi» 1988 va keyingi nashrlar.

6. Замков О. О. и др. «Математические методы для экономистов» М. 1994.

7. Rajabov F., Nurmetov A. Analik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent, «O'qituvchi»», 1990.

8. Sa'dullaev A. va boshqalar. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami. I. Toshkent, «O'zbekiston», 1993.

9. Soatov U. Oliy matematika kursi. III tom. Toshkent, «O'qituvchi», 1999.

10. Karimov M., Abdukarimov R. Oliy matematika fanidan ma'ruza matnlari to'plami. I, II qism. Toshkent, ТМИ, 2002.

11. Adigamova E.V., Isaeva G., Mo'minova R. Oliy matematikadan masala-lar to'plami. I, II. Toshkent, ТМИ, 2002, 2004.

12. Karimov M. Oliy matematika fanidan darslik. Toshkent, «IQTISOD-MOLIYA», 2006.

13. Karimov M., Abdukarimov R. Oliy matematika fanidan o'quv qo'llanma. Toshkent, ТМИ, 2004.

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Бугров А.С.б Никольский С.М. «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» М. «Наука» 1989.

2. Ващенько Т.В. «Математика финансового менежмента» М. «Проспектива», 1996.

3. Кочович Е. «Финансовая математика» М. «Статистика», 1994.

4. Магасутова Р.В. «Математика для экономистов» Ташкент, «Укитувчи», 1996.

5. Зайцев И.А. «Высшая математика», М, «Высшая школа», 1991.

6. «Справочник по математике для экономистов» В.И.Ермаков тахрири остида, М. «Высшая школа», 1987.

7. Щипачов В.С. «Высшая математика» М. «Высшая школа», 1999.

8. Shodiyev T. Analik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent, «O‘qituvchi», 1988.

9. Tojiev Sh. Oliy matematikadan masalalar echish. Toshkent, «O‘zbekiston», 2002.

MUNDARIJA

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS