Қ. С. ФАЯЗОВ

ҲИСОБЛАШ МАТЕМАТИКАСИ, МАТЕМАТИК ФИЗИКА ВА АНАЛИЗНИНГ НОКОРРЕКТ МАСАЛАЛАРИНИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

(Ўқув қўлланма)

еч...
ган. ... параграфларда о...
кинчи т.р оператор тенгламалар б...

Ф а я з о в Қ. С. Ҳисоблаш математикаси, математик физика ва анализнинг нокоррект масалаларини ечиш усуллари. (Ўқув қўлланма) Тошкент. "Университет". 2001 йил. 125 бет.

Ушбу қўлланма математик физика, ҳисоблаш математикаси ва математик анализнинг нокоррект қўйилган масалаларини ечишга бағишланган. Коррект ва шартли коррект қўйилган масалалар орасидаги боғланиш (мисоллар билан), регуляризация тушунчаси келтирилган. Бундан ташқари квазиалмаштириш, квазиечим усуллари ёритилган. Бу усуллар дифференциал тенгламаларга қўйилган кўпгина масалаларни, аналитик давом эттириш масаласини, ёмон шартлашган алгебраик тенгламалар системаси ва бошқа масалаларни ечишга қўлланган.

Мазкур қўлланма университетларнинг математика, механика, амалий математика ва информатика, компьютер технологиялари мутахассисликлари талабалари ҳамда аспирантлар ва тадқиқотчилар учун мўлжалланган.

Ўқув–услубий қўлланма Мирзо Улугбек номидаги
Ўзбекистон Миллий университети Илмий–Методик
Кенгаши томонидан нашрга тавсия қилинган.
(2001 йил 29 январь, 3 - сонли баённома)

М а с ъ у л   м у ҳ а р р и р:
физика-математика фанлари номзоди **Зикиров О.С.**

Т а қ р и з ч и л а р:
физика-математика фанлари доктори **Бердышев А.С.**
физика-математика фанлари номзоди **Пўлатов С.И.**

Сўз боши

Мазкур қўлланма математика фанининг муҳим йўналишларидан бири нокоррект масалалар назариясига бағишланган. Бу назариянинг яратилиши ва ривожи замонавий ҳисоблаш техникаси ва ҳисоблаш жараёнларининг ҳамда информацион технологияларнинг ривожланиши билан узвий боғлиқдир.

Нокоррект масала деб одатда берилганлар чексиз кичик ўзгариши натижанинг катта ўзгаришини келтириб чиқарадиган масалалар тушунилади. Кўп йиллар давомида бу масалалар назарияси мазмунли математик натижа бермайди деб ҳисобланарди, ҳол буки бу масалалар кўп амалий аҳамиятга эга бўлган муаммолар билан боғлик. Буларга мисол сифатида, кўпгина физик асбоблар кўрсатмаларининг, геофизик, геологик, астрономик кўзатмаларни талқин этиш, бошқарув ва дастурларни оптималлаштириш, автоматик системаларни синтези каби муаммоларни келтириш мумкин.

Нокоррект масалалар назариясига ўтган асрнинг 50-60 йилларда машҳур математиклар А.Н.Тихонов, М.М.Лаврентьев ва В.К.Ивановлар томонидан асос солинди. Кейинги йилларда математика фанининг бу йўналиши тез ривожланиб бормоқда. Олинган натижалар асосида бу йуналишнинг назарий ва амалий асосларини ёритишга бағишлаб ёзилган ушбу [9],[15-18],[24] адабиётларни кўрсатишимиз мумкин.

Ушбу қўлланма уч бобдан иборат бўлиб, унда Адамар маъносида нокоррект масалалар назариясини баён этилган.

Биринчи бобда коррект ва шартли коррект масала тушунчалари берилади. Бу тушунчалар орасидаги фарқ мисолларда тушунтирилади. А.Н.Тихонов теоремаси, l- корректлик таърифи келтрилади. Бир неча масалалар шартли корректликка текширилиб турғунлик баҳолари олинади.

Биринчи тур оператор тенгламалар учун регулярлаштирувчи операторлар оиласи иккинчи бобнинг 1-§да таърифланади.Бир неча дифференциал тенгламалаларга қуйилган нокоррект чегаравий масалаларнинг аниқ ечимига интилувчи тақрибий ечимлари қурилган, аниқ ечим билан тақрибий ечим орасидаги фарқ мос нормаларда баҳоланган. Кейинги парагафларда биринчи тур оператор тенгламаларни иккинчи тур оператор тенгламалар билан алмаштириш, кетма-кет яқинлашиш, квазиечим, фарқ, умумлашган фарқ усуллари билан тақрибий ечимлари қурилган ва шу усулларнинг эффективлик баҳолари топилган. Шу бобда регуляризация усули билан ёмон шартлашган ва бузиладиган чизиқли алгебраик тенгламалар системаси, ҳамда биринчи тур интеграл тенгламалар ечилган ва тақрибий ечиш усуллари асосланган.

Учинчи боб Гильберт фазоларидаги дифференциал тенгламаларга бағишланган. Биринчи параграфда шу бобни баён этишда фойдаланилган керакли баъзи тушунчалар келтирилган. Кейинги параграфларда биринчи тартибли оператор тип коэффициентли дифференциал тенгламаларга қуйилган Коши масаласи шартли корректликка текширилиб, бошланғич баҳолар ёрдамида ягоналик ва шартли турғунлик теоремалари исботланган. Бундай муаммолар ўзгарувчи коэффициентли ва бузиладиган дифференциал тенгламалар учун ҳам ўрганилган.Коши масаласи ўзгармас, ўзгарувчи оператор тип коэффициентли ва бузиладиган иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларга ҳам шартли корректликка текширилди. Бу масалаларнинг тақрибий ечимларини қуришга мисоллар келтирилган. Охирги параграфда оператор тип коэффициентли хусисий ҳосилали дифференциал тенглама учун Коши масаласи шартли корректликка текширилаган.

Қулланмада шартли коррект масалалар назариясининг асосларини баён этиш билан бирга уларни ечиш усулларига ҳам катта эътибор берилган. Бу соҳада рус тилида чоп этилган [4], [9], [18], [24] адабиётлардан ва муаллифнинг Ўзбекистон Миллий Университети механика-математика ва компютер технологиялари факультетларида кўп йиллар давомида махсус курс сифатида "Нокоррект масалаларни тақрибий ечиш усуллари" мавзусида ўқиётган маъруза материалларидан фойдаланилди.

Қўланма университетларнинг математика, механика, тадбиқий математика ва информатика, компьютер технологиялари ихтисосликларининг юқори курс талабалари ҳамда магистрантлари учун мўлжалланган.

Қўланмадаги камчиликларни бартараф этишга ва уни яхшилашга қаратилган фикр-мулоҳазаларини билдирган ҳамкасбларга муаллиф олдиндан миннатдорчилик изҳор этади.

I боб. Шартли коррект масалалар

§ 1. Корректлик тушунчаси

Дифференциал тенгламалар учун коррект қўйилган масала тушунчасини 20 аср бошида машҳур француз математики Адамар томонидан киритилди.

Таъриф 1.1 *[16]. Масала коррект қўйилган дейилади, агар қуйидаги шартлар бажарилса:*

1) масаланинг ечими мавжуд;

2) масаланинг ечими ягона;

3) масаланинг ечими берилганларга узлуксиз боғлиқ.

Биринчи шарт берилганларнинг чексиз кўп бўлмаслигини талаб қилади.

Иккинчи шарт эса берилганлар масала аниқланиши учун етарли бўлишини талаб қилади.

Учинчи шарт эса қуйидаги ҳолат билан боғланган:

Агар масала физик (моделни) аниқлаш билан боғлиқ бўлса, у ҳолда берилганларни абсолют аниқ деб ҳисоблай олмаймиз. Уларга қандайдир маънода тақрибий қийматлар маълум деб оламиз.

Шундай қилиб, агар ечим бошланғич берилганларга узлуксиз боғлиқ бўлмаса, у ҳолда масала ечими физик маънода аниқланмаган бўлади.

Юқорида келтирилган корректлик шартлари тушунтириш киритишни талаб қилади.

Чегаравий масалалар назариясида ечим ва берилганлар баъзи бир функционал фазолар элементлари сифатида қаралади.

Шунинг учун корректлик шартлари қуйидаги кўринишда келтирилади:

1) $C^{(k)}$, L_p, W_p^l,... чизиқли нормалаштирилган фазолардаги бирор ёпиқ қисм фазога тегишли ихтиёрий берилганлар учун масала ечими мавжуд ва бу фазоларнинг бирига тегишли;

2) Кўрсатилган фазоларнинг бирортасида масала ечими ягона;

3) Берилганларнинг чексиз кичик ўзгаришига (берилганлар қаралаётган фазода) ечимнинг чексиз кичик ўзгариши мос келса (ечим қаралаётган фазода).

Мавжудлик, ягоналик ва ечимларнинг берилганларга узлукси боғлиқлиги ҳақидаги теоремалар масала корректлигини исботидир.

Умуман айтганда эллиптик тенгламалар учун чегаравий шартлар ечим аниқланадиган соҳанинг бутун чегарасида берилса, бундай ма салалар корректдир.

Гиперболик ва параболик типдаги тенгламалар учун эса, умуман айтганда, Коши масаласи ва аралаш масалалар корректдир.

Коррект масала тушунчасини киритиш билан биргаликда Адамар коррект бўлмаган масалаларга ҳам мисол келтирган. Бу Лаплас тенгламаси учун Коши масаласидир.

Бу масала ва бошқа нокоррект масалаларни кейинроқ ўрганамиз.

Изоҳ. Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи ва бошқа бир талай нокоррект масалалар Коши-Ковалевская теоремаси шартларини қаноатлантиради. Бу теоремага мувофиқ Лаплас тенгламаси учун Коши масаласининг ечими аналитик функциялар тўпламида мавжуд ва ягонадир.

§ 2. Корректмас масалалар.

Коррект қўйилган масала шартларидан бирортасини қаноатлантирмайдиган масалага нокоррект қўйилган масала дейилади.

Одатда нокоррект масалалар назариясида учинчи шартга асосий эътибор қаратилади.

Нокоррект масалаларга мисол келтирамиз.

1. Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи.

$$u_k(x,t) = sh(kt)\sin(kx)/(k^2)$$

функция Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

учун Коши масаласининг

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (1/k) * \sin(kx)$$

ечимидир.

Агар $k \to +\infty$ бўлса, у ҳолда $(1/k)\sin(kx) \to 0$, аммо барча $x \neq j\pi, \quad j = 0, 1, ...,$ учун $k \to \infty$ да

$$u_k(t,x) = \frac{sh(kt)}{k^2}\sin(kx) \to \infty,$$

бўлади.

Шундай қилиб, Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи корректмас масаладир.

2.Чизиқли алгебраик тенгламалар системаси.

Фараз қилайлик

$$Ax = f \tag{2.1}$$

тенгламада A $m \times n$ - матрица, x ва f – m ва n ўлчовли векторлар бўлсин.

$m > n$ бўлса, системанинг ечими мавжуд, аммо умуман айтганда, ягона эмас.

$m < n$ бўлганда ечим мавжуд бўлмаслиги мумкин.

Агар $m = n$ ва $detA \neq 0$ бўлса, система ихтиёрий f учун ечимга эга, яъни тескари A^{-1} матрица мавжуд ва чекли ўлчовли фазодаги чизиқли оператор сифатида чегараланган. Шундай қилиб, Адамарнинг учта корректлик шартлари бажарилади.

Амалиётда чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечими доимо тақрибий аниқланади, чунки ҳисоблашлар яхлитлашлар билан олиб борилади. Ҳисоб- лаш хатолигини ўнг томон хатолиги сифатида қабул қилиш мумкин.

(2.1) система билан биргаликда қуйидаги системани қараймиз

$$A(x + r) = f + \eta, \tag{2.2}$$

бу ерда $\eta \neq 0$ -ўнг томон хатолиги (ўзгариши), r -ечим хатолиги. $Ar = \eta, \quad r = A^{-1}\eta.$

$$\frac{||r||/||x||}{||\eta||/||f||} = \frac{||f||}{||x||} \times \frac{||r||}{||\eta||} = \frac{||Ax||}{||x||} \times \frac{||A^{-1}\eta||}{||\eta||} \leq ||A||||A^{-1}|| = \gamma(A).$$

$\gamma(A) = ||A||||A^{-1}||$ катталик А матрицанинг шартлашганлик ўлчови дейилади.

Агар $\gamma(A)$ ўлчов етарлича катта бўлса, А матрица ((2.1)система) ёмон шартлашган, аксинча $\gamma(A)$ ўлчов кичик бўлса, яхши шартлашган дейилади.

Ёмон шартлашган системага мисол [6]. (2.1) системани

$$f = (-1, -1, \ldots, -1, 1)^t,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & -1 & -1 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\,det\mathbf{A} = 1 \neq 0)$$

бўлганда қараймиз. Кенгроқ кўринишда ёзсак, бу система қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & -x_2 & -x_3 & - \ldots & -x_n & = & -1 \\ & x_2 & -x_3 & - \ldots & -x_n & = & -1 \\ & & \ldots & & & & \\ & & & x_{n-1} & -x_n & = & -1 \\ & & & & x_n & = & 1 \end{array} \qquad (2.3)$$

(2.3) система $x = (0, \ldots, 0, 1)^t$ ягона ечимга эга.

Фараз қилайлик, $x_n = 1$ ўрнига ҳисоблаш натижасида

$$\hat{x}_n = x_n + r_n = 1 + \varepsilon$$

хатоликга йўл қўйилди (бу ерда $\varepsilon \neq 0$, 1 га нисбатан етарлича кичик сон). У ҳолда (2.1) система ечимининг ўрнига (2.2) системанинг ечими $\hat{x} = x + r$ топилади, бу ерда $\mathbf{A}$ матрица ва f вектор юқорида кўрсатилган кўринишга эга ва $\eta = (0, 0, \ldots, 0, \varepsilon)^t$.

Хатолик $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)^t$ қуйидаги системани қаноатлантиради

$$r_1 - r_2 - r_3 - \ldots - r_n = 0,$$
$$r_2 - r_3 - \ldots - r_n = 0,$$
$$r_{n-1} - r_n = 0,$$

$$r_n = \varepsilon.$$

Бу ердан

$$r = (2^{n-2}\varepsilon, \ldots, 2\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon),$$

ёки $||r|| = 2^{n-2}|\varepsilon|$, $||k|| = 1$, $||\eta|| = |\varepsilon|$, $||f|| = 1$ ва

$$\gamma(A) = ||A||||A^{-1}|| \geq \frac{||r||/||x||}{||\eta||/||f||} = 2^{n-2}$$

ҳосил қиламиз.

3. Аналитик давом эттириш масаласи .

Фараз қилайлик, $f(z)$ аналитик функциянинг қиймати D соҳанинг M қисм тўпламда маълум бўлсин. $f(z)$ функциянинг M тўпламдаги қисмини $f_0(z)$ билан белгилаймиз. Агар M тўплам камида битта лимит нуқтага эга бўлса, функция бирдан бир тикланади, аммо бу масалада $f(z)$ функциянинг $f_0(z)$ функцияга узлуксиз боғлиқлиги йўқ. Ҳақиқатан, фараз қилайлик, $M = \{z : |z| = b,\ 0 < b < 1\}$, $D = \{z : |z| < 1\}$ бўлсин. Барча $1 > |z| > c$ учун $f_n(z) = (z/c)^n$ кетма-кетлик $b < c < 1$ бўлганда M тўпламнинг барча нуқтасида нолга интилади. Бундай функциялар $f_0(z)$ га хатолик функцияси сифатида қўшилса, бошланғич берилганларнинг кичик хатоликлари D соҳанинг ичидаги баъзи нуқталарда ечимнинг катта хатоликларига олиб келишини кўрамиз.

Машқлар.

I. Қуйидаги масалаларнинг коррект эмаслигини исботланг:

1) $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad x, t \in R^1, \quad x \geq 0,$
$u(0,t) = f(t), \quad u_x(0,t) = 0.$

2) $u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), \quad x, y, t \in R^1, \quad x \geq 0,$
$u(0,y,t) = f(y,t), \quad u_x(0,y,t) = 0.$

3) $u_t(x,t) = -u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega = (0,\pi) * (0,T),$
$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,\pi],$
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T].$

4) [1] $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad (x,t) \in \Omega = (o,\pi) \times (0,\alpha\pi),$
α – мусбат катталик,

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in [0, \alpha\pi],$$
$$u(x,0) = \phi(x), \quad u(x,\alpha\pi) = \psi(x), \quad x \in [0,\pi].$$

5) $sign(x)u_t(x,t) = -u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega = (-1,1) \times (0,T), x \neq 0,$
$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad u(-0,t) = u(+0,t),$
$u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \quad t \in [0,T], \quad u(x,0) = f(x), \quad x \in [-1,\ 1].$

6) $sign(x)u_{tt}(x,t) = -u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega = (-1,\ 1) \times (0,T), x \neq 0,$
$u(-1,t) = u(1,\ t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad u(-0,t) = u(+0,t),$
$u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \quad t \in [0,T],$
$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad x \in [-1,\ 1].$

7) Қуйидаги Фредгольм 1-чи тур интеграл тенгламасини қараймиз

$$\int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x) \quad (c \leq x \leq d),$$

бу ерда $K(x,t)$ - жамланувчи, ёпиқ ҳамда қуйидаги Гильберт-Шмидт шартини қаноатлантиради

$$\int_a^b\int_c^d K^2(x,t)\,dx\,dt < \infty,$$

ўнг томон $f(x) \in L_2[c,d]$ берилган функция, $u(t) \in L_2[a,b]$ номаълум функция. Ушбу масаланинг коррект эмаслигини исботланг.

§ 3. Тихонов бўйича корректлик.

Қуйидаги 1-чи тур оператор тенгламани қараймиз

$$Ax = f, \quad x \in X, \quad f \in F, \tag{3.1}$$

бу ерда X, F - Банах фазолари A -компакт оператор.

Фараз қилайлик, X фазосида M тўплам ажратилган бўлсин, $M \subset X$.

Таъриф 3.1 *[16] (3.1) масала Тихонов бўйича коррект қўйилган дейилади, агар қуйидаги шартлар бажарилса:*

1) бошлангичдан маълумки масаланинг ечими мавжуд ва M тўпламга тегишли;

2) масаланинг ечими M тўпламда ягона;

3) f нинг ечимни M тўпламдан ташқарига чиқармайдиган чексиз кичик ўзгаришига x ечимнинг чексиз кичик ўзгариши мос келади.

M_A билан M тўпламнинг A оператор орқали F га аксини белгилаймиз: $M_A = AM$.

У ҳолда 3) шарт қуйидаги кўринишни олади:

3) M_A тўпламда A_1 оператор узлуксиз.

M тўплам корректлик тўплами дейилади. Умуман айтганда, M чизиқли фазо бўлмаганлиги учун, (3.1) масала бундай кўринишда чизиқсиз масала бўлиб қолади.

Классик корректлик билан Тихонов бўйича корректлик тушунчалари орасидаги боғланиш ва фарқни кўриб чиқамиз. Тихонов бўйича корректликни назарий текширишда мавжудлик теоремаси исботланмайди. Ечимнинг мавжудлиги ва корректлик тўпламига тегишлилиги масаланинг қўйилишидан фараз қилинади. Агар қаралаётган масала физик масаланинг математик ифодаланиши билан боғлик бўлса, у ҳолда қўшимча физик маънодан келиб чиқади.

Тихонов маъносидаги коррект масалаларда ягоналикни исботлаш коррект масалаларда ягоналикни исботлашдан деярли фарқ қилмайди.

M корректлик тўплами сифатида одатда компакт тўплам қаралади. Бу ҳолда тескари операторнинг узлуксизлиги 2) шартдан келиб чиқади.

Теорема 3.1 (А.Н.Тихонов) *Фараз қилайлик, (3.1) тенгламанинг ечими ягона ва M компакт тўплам бўлсин. У ҳолда M тўпламда A^{-1} оператор узлуксиз бўлади.*

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни теореманинг тасдиқи ўринли бўлмасин. У ҳолда шундай $u_0 \in M$ ва $\varepsilon_0 > 0$ мавжудки, барча $\delta > 0$ учун шундай $u_1 \in M$ элементи топиладики,

$$||Au_0 - Au_1|| < \delta, \quad ||u_0 - u_1|| > \varepsilon_0$$

бўлади.

Фараз қилайлик, $\{\delta_k\}$ кетма-кетлик $k \to \infty$ да нолга интилувчи ва $\{u_k\}$ элементлар кетма-кетлиги шундайки, улар учун

$$||u_0 - u_k|| > \varepsilon_0, \quad ||Au_0 - Au_k|| < \delta_k, \quad u_k \in M$$

ўринли бўлсин.

M тўплам компакт эканлигидан $\{u_k\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи қисм кетма-кетлиги мавжуд. Бу қисм кетма-кетлик бошланғич кетма-кетлик билан устма-уст тушади деб фараз қилсак бўлади.

Ушбу

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u^0$$

ўринли бўлсин.

У ҳолда A операторнинг узлуксиз эканлигидан

$$||Au^0 - Au_0|| = 0, \quad Au^0 = Au_0, \quad ||u^0 - u_0|| \geq \varepsilon_0,$$

бўлади, бу эса (3.1) тенглама ечими ягоналигига зиддир. 3.1 теорема исботланди.

Теорема 3.2 *Фараз қилайлик, (3.1) тенгламанинг ечими ягона ва M корректлик тўплами алгебраик йиғиндидан иборат бўлсин:*

$$M = M_1 + V_1,$$

бу ерда M_1 - компакт тўплам, V_1 X фазонинг чекли ўлчовли қисм фазоси. У ҳолда M_A тўпламида A_1 оператор текис узлуксиздир.

3.2 - теорема исботини [9]- дан топишингиз мумкин. 3.1 - теорема ушбу шаклини ҳам келтирамиз.

Теорема 3.3 *Шундай ноль нуқтада $\omega(\varepsilon)$ $(\omega(0) = 0)$ узлуксиз функция мавжудки, барча $x_1, x_2 \in M$ учун қуйидаги баҳо ўринли*

$$||x_1 - x_2|| \leq \omega(||Ax_1 - Ax_2||),$$

бу ерда $||.||$ норма мос равишда X ва F фазоларида.

Таъриф 3.2 *[15] Агар нолда узлуксиз шундай $\omega(\varepsilon)$, $\varepsilon \geq 0$, $\omega(0) = 0$ функция мавжуд ва*

$$\forall x_1, x_2 \in M - да \quad ||x_1 - x_2|| \leq \omega(||Ax_1 - Ax_2||)$$

бўлса, у ҳолда $Ax = f$, $A : D(A) \to F$, $D(A) \subseteq X$ масала Тихонов маъносида $M \subseteq D(A)$ тўпламда коррект дейилади.

Қуйидаги кўринишдаги баъзи нокоррект масалалар учун

$$Ax = f, \quad x \in D(A) \subset X, \quad A : D(A) \to F$$

x ечим ҳақида қўшимча шарт берилади. Бу эса қуйидагидан иборат: $x \in D(l)$, l чизиқли $D(l)$ фазода берилган функционал бўлиб, ярим норма хоссасига эга, яъни

$$l(x) \geq 0, \ l(\lambda x) = |\lambda| l(x), \ l(x+y) = l(x) + l(y).$$

Бу ерда $x, y \in D(l)$. Агар фазо $D(l)$ ҳақиқий бўлса, $\lambda \in R$; Агар $D(l)$ комплекс фазо бўлса, $\lambda \in C$; ундан ташқари $D(l) \cap X \neq \emptyset$.

Таъриф 3.3 *[4] Агар ҳар бир $\delta > 0$ учун $c(\delta)$ мусбат ўзгармас мавжуд бўлиб, барча $x \in D(A) \cap D(l)$ ларда қуйидаги баҳо*

$$||x|| \leq \delta l(x) + c(\delta)||Ax||, \tag{3.2}$$

ўринли бўлса, у ҳолда $Ax = f$ масала l -коррект масала дейилади.

Агар масала l - коррект бўлса, у холда l - функционал $Ax = f$ масалани турғунлаштирувчи функционал деб аталади.

Бу таърифга мувофиқ коррект масалалар 0 - коррект масалалар бўлиб, $c(\delta)$, δ га боғлиқ эмас. Агар l - коррект масала $D(A) \cap D(l)$ да коррект бўлмаса, у ҳолда

$$\lim_{\delta \to 0} c(\delta) = \infty,$$

акс ҳолда (3.2) тенгсизликда δ ни нолга интилтириб, қуйидаги баҳога келамиз:

$$||x|| \leq c(0)||Ax||.$$

l - корректлик хоссаси (3.1) масала ечимининг $D(A) \cap D(l)$ да ягоналигини ва ихтиёрий $M = \{x \in D(A) \cap D(l)|, l(x) \leq m\}$ кўринишдаги тўпламларда турғунлигини таъминлайди.

3.1 ва 3.3 - таърифлар орасидаги боғланишни қуйидаги теорема орқали келтирамиз.

Теорема 3.4 *$Ax = f$ масала фақат ва фақат шу вақтда l - коррект бўлади, агар у ихтиёрий $M_s = \{x \in D(l)|l(x) \leq s\}$, $s > 0$ тўпламида Тихонов бўйича коррект бўлса.*

3.4-теорема исботи [3]- дан қаранг.

Изоҳ. Шартли коррект масалалар назарияси А.Н.Тихонов, М.М. Лаврентьев ва В.К.Ивановлар томонидан яратилди ва уларнинг ўқувчилари томонидан ривожлантирилди.Биз бу назариянинг асосларини бу ерда келтиришда уларнинг қуйидаги [9], [17], [24] китобларидга асосландик.

§ 4. Турғунлик баҳолари

1. Иссиқлик тарқалиш тенгламасига қўйилган нокоррект масала.

Иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун қуйидаги масалани қараймиз:

$$v_t(x,t) = -v_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega = (0,\pi) \times (0,T), \tag{4.1}$$

$$v(x,0) = f(x), \quad x \in [0,\pi],$$
$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{4.2}$$

Берилган $f(x)$ функция бўйича $u(x) = v(x,T)$ ни топиш масаласини қараймиз ва унинг учун $l-$ турғунлик баҳосини топамиз [4].

Шу мақсадда қуйидаги интегрални баҳолаймиз

$$I = \int_0^T \int_0^\pi \exp(-2st) \, |v_t(x,t) + v_{xx}(x,t)|^2 \, dxdt, \quad s > 0,$$

(4.1) тенгламага мувофиқ интеграл нолга тенг.

Интегрални $v(x,t) = e^{st} w(x,t)$ алмаштириш ёрдамида қуйидагича кўринишда ёзамиз

$$0 = I = \int_0^T \int_0^\pi |w_t + sw + w_{xx}|^2 \, dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_0^\pi |w_t|^2 dxdt + \int_0^T \int_0^\pi |sw + w_{xx}|^2 \, dxdt +$$

$$+ 2\int_0^T \int_0^\pi (sw_t w + w_t w_{xx}) \, dxdt \geq$$

$$\geq \int_0^T \int_0^\pi s(w^2(x,t))_t dxdt - \int_0^T \int_0^\pi 2w_{tx}w_x dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_0^\pi \left(sw^2 - w_x^2\right)_t dxdt = \int_0^\pi \left(sw^2(x,t) - w_x^2(x,t)\right) dx\Big|_0^T. \qquad (4.3)$$

Бу тенгсизликни ҳосил қилишда I интегралда иккита манфиймас қўшулувчиларни ташлаб юборамиз, қолган ҳадларни t бўйича бўлаклаб интеграллаймиз. (4.2) бир жинсли шартлардан ва $w_t(0,t) = w_t(\pi,t) = 0$ эканлигидан фойдалансак, интегралдан ташқари ифодалар нолга айланади. Натижада (4.3)-дан ушбу тенгсизликни

$$s\int_0^\pi w^2(x,T)dx - \int_0^\pi w_x^2(x,T)dx \leq$$

$$\leq s\int_0^\pi w^2(x,0)dx - \int_0^\pi w_x^2(x,0)dx \leq$$

$$\leq s\int_0^\pi w^2(x,0)dx$$

ҳосил қиламиз. Қуйдагиларни эслаб,

$$w(x,T) = \exp(-sT)v(x,T) = \exp(-sT)u(x),$$

$$w(x,0) = v(x,0) = f(x),$$

топамиз

$$\exp(-2sT)\int_0^\pi |u(x)|^2 dx \leq$$

$$\leq \exp(-2sT)\int_0^\pi |u_x'(x)|^2 dx + s\int_0^\pi |f(x)|^2 dx.$$

Тенгсизлик иккала томонини $s\exp(-2sT)$ га бўлиб ва $\varepsilon^2 = s^{-1}$ деб ҳисоблаб, квадрат илдиз олгандан кейин

$$\|u\|_{L_2(0,\pi)} \leq \varepsilon \|u_x\|_{L_2(0,\pi)} + \exp(T\varepsilon^{-2}) \|f\|_{L_2(0,\pi)}$$

ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, юқоридаги масала $l-$ коррект масала экан, бу ерда

$$l(u) = \|u_x\|_{L_2(0,\pi)}.$$

2. Вақт бўйича йўналишини ўзгартирадиган параболик типдаги тенгламага қуйилган нокоррект масала.

$Q = (-1 < x < 1) \times (0, T)$ соҳада қуйидаги тенгламани қараймиз

$$signx u_t(x,t) = -u_{xx}(x,t). \tag{4.4}$$

Бу вақт бўйича йўналишини ўзгартирадиган параболик тип тенгламадир.

(4.4) тенгламани $Q \cap \{x \neq 0\}$ соҳада қуйидаги

а) бошланғич

$$u(x, o) = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1;$$

б) чегаравий

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T;$$

в) тикиш

$$u(-0,t) = u(+0,t), \quad u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \quad 0 \leq t \leq T$$

шартларини қаноатлантурувчи ечимни топиш масаласини қараймиз. Бу масала ҳам корректмас масаладир. Унинг шартли турғун эканлигини исботлаймиз.

Қуйдаги белгилашни киритамиз

$$\varphi(t) = -\int_{-1}^{1} u_{xx} u dx = \int_{-1}^{1} u_x^2 dx.$$

$\varphi(t)$ функцияни дифференциаллаб топамиз

$$\varphi'(t) = -2\int_{-1}^{1} u_{xx} u_t dx = 2\int_{-1}^{1} u_{xt} u_x dx,$$

$$\varphi"(t) = -2\int_{-1}^{1} u_{xx} u_{tt} dx + 2\int_{-1}^{1} u_{xt}^2(x,t) dx. \tag{4.5}$$

Изоҳ. Бу ерда $u(x,t)$ функциянинг ҳисоблашларда қатнашаётган барча мос тартибли ҳосилаларни мавжуд деб фараз қилинади.

$\varphi"(t)$ ифодани 1-чи интегралининг кўринишини (4.4) тенгламадан фойдаланиб ўзгартирамиз

$$-2\int_{-1}^{1} u_{xx} u_{tt} dx =$$

$$= -2\int_{1}^{1} sign(x)u_t(x,t)sign(x)u_{xxt}(x,t)dx = 2\int_{-1}^{1} u_{xt}^2(x,t)dx. \tag{4.6}$$

(4.5) ва (4.6) дан топамиз

$$\varphi"(t) = 4\int_{1}^{1} u_{xt}^2(x,t)dx.$$

$\psi(t) = \ln(\varphi(t))$ функциясини киритиб,

$$\psi"(t) = \frac{\varphi(t)\varphi"(t) - (\varphi'(t))^2}{\varphi^2(t)} =$$

$$= 4\frac{\int_{-1}^{1} u_{xt}^2(x,t)dx \int_{-1}^{1} u^2(x,t)dx - (\int_{-1}^{1} u_{xt}(x,t)u(x,t)dx)^2}{\int_{-1}^{1} u^2(x,t)dx} \geq 0,$$

ёки

$$\psi"(t) \geq 0 \tag{4.7}$$

ҳосил қиламиз.

Бу ерда биз Коши-Буняковский тенгсизлигидан фойдаландик. (4.7) келиб чиқадики

$$\psi(t) \leq \frac{T-t}{T}\psi(0) + t/T\psi(T). \tag{4.8}$$

(4.8) потенцирлаб, топамиз

$$\int_{-1}^{1} u_x^2(x,t)dx \leq \left\{\int_{-1}^{1} u_x^2(x,0)dx\right\}^{(T-t)/T} \left\{\int_{-1}^{1} u_x^2(x,T)dx\right\}^{t/T},$$

ёки

$$\|u_x(x,t\|_{L_2(-1,1)} \leq \|u_x(x,0)\|_{L_2(-1,1)}^{(T-t)/T} \|u_x(x,T)\|_{L_2(-1,1)}^{t/T}.$$

Шундай қилиб, юқоридаги масала шартли коррект масала бўлиб, корректлик тўплами қуйидагича

$$M = \{u : \|u_x(x,T)\|_{L_2(-1,1)} \leq m\}.$$

бўлади.

Машқлар. Қуйида келтирилган масалаларнинг шартли турғун эканлигини кўрсатинг ва мос ечимлари учун шартли турғунлик баҳоларини топинг.

1. Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи (икки ўлчовли ҳолда)

2. Математик анализнинг классик масаласи-диффренциаллаш масаласи.

Бу масалани ечиш қуйидаги интеграл тенгламани ечишга эквивалентдир

$$\int_a^x \varphi(\alpha)d\alpha = f(x).$$

Бу ердан кўриниб турибдики, юқоридаги тенглама C, C^1, L_2, W_2^1 ва ҳоказо жуфт фазоларга нисбатан қарасак коррект, C, C, L_2, L_2 жуфт фазоларда эса нокорректдир. Бу ердан хулоса шуки, сонли дифференциаллаш масаласи типик нокоррект масаладир. Шу масала учун турғунлик баҳосини топинг.

3.2-§машқ ларида келтирилган масалаларга турғунлик баҳоларини топинг.

§ 5. Регулярлаштирувчи оила тушунчаси ва регулярлаштириш параметри

Таъриф 5.1 *[А.Н.Тихонов]. Фараз қилайлик, классик маънода корректмас масала берилган бўлсин. Бу масалага нисбатан α параметрга боғлиқ масалалар оиласи регулярлаштирувчи оила деб аталади, агар қуйидаги икки шарт бажарилса:*

1. Ҳар қандай $\alpha > 0$ учун масалалар оиласи коррект;

2. Бошланғич ечими мавжуд бўлган берилганларда масалалар оиласининг ечимининг кетма-кетлиги $\alpha \to 0$ да бошланғич (нокоррект) масаланинг ечимига интилади.

α параметр регулярлаштирувчи параметр деб аталади. Баъзи ҳолларда регуляризация параметри бутун сон ҳам бўлиши мумкин, у ҳолда иккинчи шарт $n \to \infty$ бажарилиши талаб қилинади.

Энди биринчи тур оператор тенгламага нисбатан регулярлаштирувчи оила тушунчасини аниқлаймиз. Шундай қилиб, биринчи тур оператор тенглама берилган бўлсин

$$Ax = f, \quad x \in X, \quad f \in F. \tag{5.1}$$

Фараз қилайлик, (5.1) масаланинг ечими ягона ва M X фазосининг қисм тўплами бўлсин.

$\{B_\alpha\}$ чизиқли операторлар оиласини қараймиз

$$B_\alpha : F \to X.$$

Таъриф 5.2 . *F дан X га акслантирувчи $\{B_\alpha\}$ $(0 < \alpha < \alpha_0)$ операторлар оиласи (5.1) тенглама учун M тўпламда регулярлаштирувчи оила деб аталади, агар*

1) ҳар бир α , $0 < \alpha < \alpha_0$, да B_α оператор F да аниқланган ва чегараланган;

2) барча $x \in X$ учун $\lim\limits_{\alpha \to 0} B_\alpha A x = x$ (лимит норма маъносида) бўлса.

Энди тақрибий берилганлар бўйича регулярлаштирувчи оила ёрдамида (5.1)тенгламанинг тақрибий ечимини қандай қуриш мумкинлигини кўрсатамиз.

(5.1) тенглама учун B_α регулярлаштирувчи оила қурилган деб фараз қилайлик.

(5.1) тенгламанинг ўнг томони ε аниқлигида маълум, яъни f_ε элемент маълум бўлиб,

$$\|f - f_\varepsilon\| \le \varepsilon$$

бўлсин.

$x_{\alpha\varepsilon} = B_\alpha f_\varepsilon$ тақрибий ечим сифатида оламиз, бу ерда α регулярлаштирувчи параметрнинг бирор қиймати.

$x_{\alpha\varepsilon}$ ва (5.1) тенгламанинг x аниқ ечими орасидаги фарқни баҳолаймиз:

$$\begin{aligned} \|x - x_{\alpha\varepsilon}\| &= \|B_\alpha f_\varepsilon - x\| \le \\ &\le \|B_\alpha(f_\varepsilon - f)\| + \|B_\alpha A x - x\| \le \\ &\le \|B_\alpha\|\varepsilon + \gamma(x,\alpha), \end{aligned} \tag{5.2}$$

бу ерда $\lim\limits_{\alpha\to 0}\gamma(x,\alpha) = 0$. (5.1) тенгламанинг ечиш масаласи нокоррект эканлигидан қўйидаги шартни бажарилиши зарурлиги келиб чиқади:

$$\sup\|B_\alpha\| = \infty.$$

(Акс ҳолда (5.1) тенгламани ечиш масаласи коррект бўлиб, $\lim\limits_{\alpha\to 0} B_\alpha = A^{-1}$ бўлади).

$\varepsilon \to 0$ да α нинг шундай ўзгариш қонунияти борки, унда қўйидаги йиғинди

$$\|B_\alpha\|\varepsilon + \gamma(x,\alpha)$$

нолга интилади.

Ҳақиқатан,

$$\omega(x,\varepsilon) = \inf_{\alpha>0}\{\|B_\alpha\|\varepsilon + \gamma(x,\alpha)\}$$

деб белгилаб кўрсатамизки

$$\lim_{\alpha\to 0}\omega(x,\alpha) = 0. \tag{5.3}$$

Фараз қилайлик, $\delta > 0$ ихтиёрий етарлича кичик сон бўлсин.

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\gamma(x,\alpha)=0$ эканлигидан шундай $\alpha(\delta)$ мавжудки, барча $\alpha\leq\alpha(\delta)$ ларда уцбу $\gamma(\alpha,x)\leq\frac{\delta}{2}$ тенгсизлик бажарилади.

$$\mu(\delta)=\inf_{\alpha\leq\alpha(\delta)}||B_\alpha||$$

белгилаймиз. $\varepsilon\leq 0.5\frac{\delta}{\mu(\delta)}$ бўлганда $\omega(x,\varepsilon)$ функция $\omega(x,\varepsilon)\leq\delta$ тенгсизликни қаноатлантиради, бу эса (5.3)- ни исбот қилади.

Шундай қилиб, агарда (5.1) тенгламага регулярлаштирувчи оила қурилган бўлса, у ҳолда тақрибий қийматлар бўйича берилган аниқликда тақрибий ечим қўриш мумкунлиги келиб чиқади. Берилганлар аниқлиги $\varepsilon>0$ фиксирланганда $\inf\limits_{\alpha}\{||B_\alpha||\varepsilon+\gamma(\alpha,x)\}$ эришадиган α параметрнинг қиймати (5.2) баҳо маъносида оптимал бўлади.

Регулярлаштириш эффективлиги кўп маънода регуляризация параметрини танлашга боғлиқ. Регулярлаштириш параметрини танлаш учун $||B_\alpha||$, $\gamma(\alpha,x)$ функцияларнинг аниқ кўринишини билиш ниҳоятда муҳимдир. $||B_\alpha||$ катталигини аниқлаш ва баҳолаш қийин эмас. $\gamma(x,\alpha)$ катталикни баҳолашда эса қаралаётган масаладан Тихонов бўйича корректлик талаб қилинади.

§ 6. Вақт бўйича йўналишини ўзгартирадиган параболик типдаги тенгламалар учун нокоррект чегаравий масаланинг регуляризацияси

$Q=(-1<x<1)\times(0,T)$ соҳада қуйидаги тенгламани қараймиз

$$sign(x)u_t(x,t)=u_{xx}(x,t). \tag{6.1}$$

(6.1) - чи тенгламани $Q(x\neq 0)$ да ва қуйидаги

а) бошланғич

$$u(x,0)=f(x),\quad -1\leq x\leq 1;$$

б) чегаравий

$$u(-1,t)=u(1,t)=0,\quad 0\leq t\leq T;$$

в) тикиш

$$u(-0,t)=u(+0,t),\quad u_x(-0,t)=u_x(+0,t),\quad 0\leq t\leq T$$

шартларини қаноатлантирувчи ечимини топинг.

4-§дан келиб чиқадики, бу масаланинг ечими мос фазода ягона ва шартли турғундир.

Фараз қилайлик, бошланғич берилганлар шундайки бу масаланинг ечими мавжуд, уни қўйидаги кўринишда ифодалаш мумкин

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^+(t)\varphi_k^+(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^-(t)\varphi_k^-(x) \qquad (6.2)$$

бу ерда

$$u_k^+ = \exp(\lambda_k^+ t) f_k^+, \qquad u_k^- = \exp(\lambda_k^- t) f_k^-,$$

$$f_k^\pm = -\int_{-1}^{1} sign(x) f(x)\varphi_k^\pm(x)dx, \quad k = 1, 2, ...,$$

$$\varphi_k^\pm = \begin{cases} sh\sqrt{\lambda_i^\pm}\sin\sqrt{\lambda_i^\pm}(1-x), & \text{агарда } 0 \le x \le 1 \text{ бўлса;} \\ \sin\sqrt{\lambda_i^\pm}\, sh\sqrt{\lambda_i^\pm}(1+x), & \text{агарда } -1 \le x \le 0 \text{ бўлса;} \end{cases} \qquad (6.3)$$

$$\pm\lambda_i^\pm = \mu_i^2, \quad i = 1, 2, ...,$$

μ лар эса

$$tg\mu + \text{th}\mu = 0$$

тенгламанинг мусбат илдизлари.

$(u,v) = \int_{-1}^{1} uvdx$ билан $L_2(-1,1)$ даги скаляр кўпайтмани белгиласак, у ҳолда $||u||^2 = (u,u)$. (6.3) келиб чиқадики хос функциялар учун қуйидаги ўринли

$$(sign(x)\varphi_i^+, \varphi_j^-) = 0, \quad \forall i, j;$$

$$(sign(x)\varphi_i^\pm, \varphi_j^\pm) = \pm\delta_{ij},$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{агар } i = j \text{ бўлса;} \\ 0, & \text{агар } i \ne j \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$P^\pm$ билан қуйдагича аниқланган спектрал проекторларни белгилаймиз

$$P^\pm\varphi = \sum_{i=1}^{\infty}(sign(x)\varphi, \varphi_i^\pm)\varphi_i^\pm$$

У ҳолда

$$(P^+ - P^-)\varphi = \varphi, \quad (sign(x)(P^+ - P^-)\varphi, \varphi) = ||\varphi||_0^2,$$

$$(sign(x)P^{\pm}\varphi, \psi) = (sign(x)\varphi, P^{\pm}\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in H_0 = L_2(-1,1),$$

$$||\varphi||_0^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\{|(sign(x)\varphi, \varphi_i^+)|^2 + |(sign(x)\varphi, \varphi_i^-)|^2\}.$$

Қуйидагича аниқланган

$$B_n f(x) = \sum_{k=1}^{n}(u_k^+\varphi_k^+ + u_k^-\varphi_k^-). \tag{6.4}$$

бутун сонли параметрга боғлиқ бўлган B_n операторлар оиласини қараймиз.

Агар $u(x,t)$ ва $f(x)$ функцияларни $L_2(-1,1)$ Гильберт фазосининг элементлари сифатида қарасак, B_n операторлар оиласи бизнинг бошланғич масаламизга нисбатан регулярлаштирувчи оила бўлади.

Ҳақиқатан бу $f_k^{\pm}$ коэффициентларнинг ва чекли йиғинди узлуксизлигидан B_n нинг узлуксиз эканлиги келиб чиқади. $B_n f(x)$ кетма-кетликнинг $u(x,t)$ функцияга яқинлашиши ечимнинг (6.2) кўринишидан ва берилган қаторнинг $H_0 = L_2(-1,1)$ фазода яқинлашишидан келиб чиқади.

Энди тақрибий берилганлар бўйича тақрибий ечимнинг эффективлик баҳосини топамиз. Бунда қаралаётган бошланғич масала Тихонов бўйича коррект бўлсин ва корректлик тўпламини қуйидагича аниқлаймиз

$$M = \{u : ||u(x,T)||_0 \leq M\}. \tag{6.5}$$

Фараз қилайлик,

$$||f - f_\varepsilon||_0 \leq \varepsilon \tag{6.6}$$

бўлсин.

У ҳолда $||B_n|| = \exp(\lambda_n^+ t)$. Энди бизга фақат (5.2) тенгсизлик ўнг томонидаги иккинчи ҳадини баҳолаш қолади. (6.2), (6.4) ва (6.5)

$$||B_n f(x) - u(x,t)||_0^2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty}(\exp(2\lambda_k^+ t) f_k^{+^2} + \exp(2\lambda_k^- t) f_k^{-^2}) =$$

$$= \phi_{1n}(t) + \phi_{2n}(t),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\exp(2\lambda_k^+ T) f_k^{+^2} + \exp(2\lambda_k^- T) f_k^{-^2} \leq M^2$$

келиб чиқади. $\phi_{1n}(t)$ функцияни $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\exp(2\lambda_k^+T)f_k^{+^2} \le M^2$ ш

баҳолаймиз. Агар f_k^+ коэффициентлар қуйидагича бўлса,

$$f_k^+ = 0, \quad k \ne n+1,$$
$$f_{n+1}^+ = \exp(-\lambda_{n+1}^+ T)M,$$

у ҳолда $\phi_{1n}(t)$ охирги шарт остида ўзининг максимал

эришади. Шундай қилиб,

$$\phi_{1n}(t) \le \exp(-2(T-t)\lambda_{n+1}^+)M^2.$$

$\phi_{2n}(t)$ учун эса

$$\phi_{2n}(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(\exp(2\lambda_k^- t)f_k^{-^2} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k^{-^2} = \nu^2(N).$$

баҳо ўринли бўлади, бу ерда f учун мос қаторнинг яқин

$N \to 0$ да $\nu \to 0$ келиб чиқади. $\phi_{1n}(t)$ ва $\phi_{2n}(t)$ учун

жамлаб ва (6.6)-ни эътиборга олиб топамиз

$$||u(x,t) - B_n f_\varepsilon(x)||_0 \le$$

$$\le ||u(x,t) - B_n f(x)||_0 + ||B_n f(x) - B_n f_\varepsilon(x)||_0 \le$$

$$\le e^{\lambda_n^+ t}\varepsilon + M\exp(-\lambda_{n+1}^+(T-t)) + \nu(n).$$

§ 7. Квазитескари усул билан иссиқлик тарқ тенгламасига қўйилган тескари Коши масал регуляризацияси

Масала:

$$u_t(x,t) = -u_{xx}(x,t), (x,t) \in \Omega = (0,\pi) \times (0,T),$$
$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,\pi],$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, t \in [0,T].$$

Бирор фиксирланган $t \in (0,T)$ да $u(x,t)$ функцияни топиш талаб қилинади.

f_k билан $f(x)$ функцияни Фурье коэффициентини белгилаймиз

$$f_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(kx) f(x)dx, \quad k = 1, 2, ...$$

Агар $f(x)$ функцияни бошланғич масаланинг ечими мавжуд бўладиган қилиб танласак, у ҳолда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{k^2 t}\sin(kx)$$

кўринишни олади.

Ёрдамчи масала. Қуйидаги шартларни

$$\frac{\partial v_\alpha(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^4 v_\alpha}{\partial x^4}, \quad (x,t) \in \Omega,$$

$$\alpha > 0,$$

$$v_\alpha(x,0) = f(x), \quad x \in [0,\pi],$$

$$v_\alpha(0,t) = v_\alpha(\pi,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 v_\alpha(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_\alpha(\pi,t)}{\partial x^2} = 0,$$

$$t \in [0,T]$$

қаноатлантирувчи етарлича силлиқ $v_\alpha(x,t)$ функцияни топинг.

Бу масала коррект масала бўлиб, унинг ечими

$$v_\alpha(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \exp(k^2(1-\alpha k^2)t)\sin(kx).$$

кўринишда ифодаланади. Бу ердан кўринадики $v_\alpha(x,t) = B_\alpha f(x)$ формула билан аниқланган B_α операторлар оиласи Коши масаласига нисбатан регулярлаштирувчи оила ташкил этади.

Регулярлаштирувчи оиланинг эффективлик баҳосини топишга киришамиз. $k^2(1-\alpha k^2) \le \frac{1}{4\alpha}$ эканлигидан

$$||B_\alpha|| = \max_k \exp(k^2(1-\alpha k^2)t) \le \exp(\frac{t}{4\alpha})$$

келиб чиқади. Энди қуйидаги шарт остида

$$||u(x,T)||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \exp(2k^2 T) \le c^2.$$

ушбу катталикни баҳолаймиз:

$$||v_\alpha(x,t) - u(x,t)||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2[\exp(k^2 t) - \exp(k^2(1-\alpha k^2)t)]^2.$$

Шартли экстремумни топиш учун Лагранж усулини қўллаймиз. Баҳоланаётган ифоданинг қиймати

$$f_k \exp(k^2 T) \le c$$

шарт остида қуйидаги ифоданинг

$$f_k[\exp(k^2 t) - \exp(k^2(1-\alpha k^2)t)]$$

максимумидан ошмайди, яъни

$$\gamma(k) = c\exp(-k^2(T-t))[1-\exp(-\alpha k^4 t)]$$

функциянинг максимумидан ошмайди.

$\gamma(k)$ функциянинг экстремуми $\gamma'(k) = 0$ транцендент тенгламанинг ечимига боғлиқдир (k фақат бутун эмас барча ҳақиқий қийматларни қабул қилади деб, фараз қилинади). Бу экстремумнинг α бўйича тартиби устма-уст тушадиган баҳосини топайлик. Қуйидагини аниқлаш қийин эмас, яъни

$$\gamma(k) \le ck^4 t\alpha \exp(-k^2(T-t)) = \beta(k).$$

$\beta(k)-$ нинг ҳосиласини нолга тенглаб

$$\beta'(k) = ct\alpha k^3[4 - 2k^2(T-t)]\exp(-k^2(T-t)) = 0,$$

ёки

$$k^2 = \frac{2}{T-t}$$

эканлигини топамиз.

У ҳолда

$$\max_k \gamma(k) \le \max_k \beta(k) = \frac{4ct}{(T-t)^2}\alpha e^{-2}$$

бўлади.

§ 8. Ҳосила олиш масаласининг регуляризацияси

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз ҳосилага эга бўлсин. $\{B_h\}$ орқали [16] қуйидагича ифодаланган

$$B_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$h > 0$ параметрга боғлиқ чизиқли операторлар оиласини белгилаймиз. B_h регулярлаштирувчи оператор эканлиги ҳосила таърифидан келиб чиқади. Ундан ташқари

$$||B_h||_C = \frac{2}{h}.$$

Энди $B_h f(x) - f'(x)$ ифодани $f(x)$ қуйидаги M тўпламга тегишли деб, баҳолаймиз.

$$M = \{f : |f"(x)| \le \mu\}.$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан

$$B_h f(x) - f'(x) = f'(x + \theta_1 h) - f'(x) = f"(x + \theta_2 h)\theta_1 h,$$

бўлади, бу ердан

$$||B_h f(x) - f'(x)|| \le \mu h \quad (0 \le \theta_2 \le \theta_1 \le 1).$$

Агар $||f - f_\varepsilon|| \le \varepsilon$ бўлса, у ҳолда

$$||B_h f_\varepsilon(x) - f'(x)|| \le ||B_h f_\varepsilon(x) - B_h f|| + ||B_h f_\varepsilon(x) - f'(x)|| \le$$
$$\le (2h^{-1}\varepsilon + \mu h)$$

бўлади. h ни $h = (\frac{2\varepsilon}{\mu})^{1/2}$ кўринишда танласак, ушбу

$$||B_h f_\varepsilon(x) - f'(x)|| \le 2(2\mu\varepsilon)^{1/2}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

§ 9. Биринчи тур оператор тенгламаларнинг регуляризацияси

а) Иккинчи тур оператор тенгламалар оиласи.

Қуйидаги

$$Ax = f, \tag{9.1}$$

тенгламани қараймиз, бу ерда x ва f мос равишда X ва F Гильберт фазоларининг элементлари, A тўла узлуксиз оператор.

1^0. Фараз қилайлик, A ўз-ўзига қўшма ва мусбат оператор бўлсин (бу ҳолда $F = X$). B_α орқали қуйидаги операторлар оиласини белгилаймиз.

$$B_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}, \quad \alpha > 0.$$

B_α операторлар оиласи $Ax = f$ тенгламага нисбатан регулярлаштирувчи оила бўлишини кўрсатамиз. A операторнинг тўла ортогонал функциялар системасини $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, уларга мос A операторнинг хос сонлари системасини эса $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ белгилаймиз. У ҳолда ихтиёрий $x \in X$ ни қуйидаги кўринишда ёза оламиз

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k, \quad x_k = (x, \varphi_k).$$

Бундан

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda x_k \varphi_k$$

ва

$$B_\alpha A x = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha + \lambda_k)^{-1} \lambda_k x_k \varphi_k$$

бўлади. A оператор тўла узлуксиз, ўз-ўзига қўшма , мусбат деб фараз қилинияпти. Шунинг учун $\{\lambda_k\}$ кетма-кетликни камайиш тартибида жойлаштириш мумкин $\lambda_k \geq \lambda_{k+1} > 0$. A нинг барча хос сонлари мусбат эканлигидан ихтиёрий $\alpha > 0$ учун B_α оператор узлуксиз ва

$$||B_\alpha|| = \frac{1}{\alpha}$$

бўлади. Қуйидаги айирмани қараймиз

$$x - B_\alpha Ax = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - \lambda_k(\alpha + \lambda_k)^{-1}] x_k \varphi_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha + \lambda_k)^{-1} x_k \varphi_k.$$

У ҳолда

$$\|x - B_\alpha Ax\|^2 = \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha + \lambda_k)^{-2} x_k^2 =$$

$$= \alpha^2 \sum_{k=1}^{N} (\alpha + \lambda_k)^{-2} x_k^2 + \alpha^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (\alpha + \lambda_k)^{-2} x_k^2 \leq$$

$$\leq \frac{\alpha^2}{\lambda_N^2} \|x\|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} x_k^2. \tag{9.2}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ қаторнинг яқинлашишидан N нинг етарлича катта қийматларида (9.2) ифоданинг ўнг томондаги охирги ҳади етарлича кичик бўлади. Ҳар бир фиксирланган N да ва етарлича кичик α да биринчи ҳад етарлича кичик бўлади. Бу ердан келиб чиқадики

$$\lim_{\alpha \to 0} \|x - B_\alpha Ax\| = 0.$$

Шундай қилиб, B_α оператор $Ax = f$ тенгламага регулярлаштирувчи оператор экан.

2^0. Энди бошланғич тенгламада A операторнинг мусбат ва ўз-ўзига қўшма бўлмаган ҳолда қараймиз. Лекин бошланғич тенглама ечими ягона бўлсин, яъни бошқача қилиб айтганда ноль A операторнинг спектрал тўпламига тегишли эмас. A операторга қўшма операторни A^* билан белгилаймиз. Энди бошланғич тенгламанинг чап ва ўнг томонига A^* операторни қўллаб топамиз

$$A^* Ax = f_1, \tag{9.3}$$

бу ерда $f_1 = A^* f$.

Агар (9.1) тенгламанинг ечими ягона бўлса, (9.3) тенгламанинг ечими ҳам ягона бўлишини исботлаймиз. (9.1) тенглама ечими ягона бўлса, у ҳолда қуйидаги муносабат

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$$

ўринли. Энди $A^* Ax = 0$ бўлсин.

Қуйидаги скаляр кўпайтмани қарайлик

$$(Ax, Ax) = ||Ax||^2 = (A^*Ax, x).$$

Бу ердан $0 = (A^*Ax, x) = ||Ax||^2$ ёки $x = 0$ келиб чиқади. Демак $AA^*x = 0$ ва $x = 0$, яъни (9.3) тенгламанинг ечими ягона.

Тескариси, яъни (9.3) тенгламанинг ечими ягона эканлигидан (9.1) тенгламанинг ечими ягона эканлигини кўриш қийин эмас.

Шундай қилиб, 1^0 чи ҳолга келтирилади.

Қуйидагича белгилаш киритамиз

$$\tilde{B}_\alpha = (\alpha E + A^*A)^{-1}, \quad \alpha > 0.$$

Бу операторлар оиласи эса юқорида кўрсатилганидек (9.3) тенгламага нисбатан регулярлаштирувчи операторлар оиласини ташкил этади

$$B_\alpha = (\alpha E + A^*A)^{-1}A^*$$

операторлар оиласи эса (9.1) тенгламага нисбатан регулярлаштирувчи операторлар оиласини ташкил этади.

Юқорида келтирилган регуляризация усулида биринчи тур оператор тенгламага иккинчи тур оператор тенглама мос қўйилади, яъни

$$(\alpha E + A)x = f$$

ёки

$$(\alpha E + A^*A)x = f_1.$$

Бу усул ҳақида тўла маълумотни [15] олишингиз мумкин.

Машқ. Шу усул ёрдамида Фредгольм биринчи тур интеграл тенгламасига регулярлаштирувчи операторлар оиласини қуринг.

b). Кетма - кет яқинлашиш усули

Ушбу

$$Ax = f, \qquad (9.4$$

тенгламани қараймиз, бу ерда x ва f мос равишда X ва F Гильбер фазоларининг элементлари, A эса ўз-ўзига қўшма мусбат оператор. оператор яна қўшимча

$$||A|| < 1$$

шартни қаноатлантирсин.

(9.4) тенгламани қуйидаги эквивалент кўринишда ёзиб оламиз:

$$x - (E - A)x = f,$$

бу ерда E юқоридагидек айний оператор. Қуйидаги кетма - кетлик орқали тақрибий ечимлар кетма - кетлигини ифодалаймиз:

$$x_{k+1} = (E - A)x_k + f, \quad x_0 = f,$$

ёки

$$x_n = \sum_{k=0}^{n}(E - A)^k f.$$

Юқорида қурилган тақрибий ечимлар ёрдамида қуйида аниқланган регулярлаштирувчи операторлар оиласини қараймиз:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}(E - A)^k.$$

$\{B_n\}$ операторлар оиласи кетма-кетлиги регулярлаштирувчи оила эканлигини кўрсатамиз. Ҳакикатан A оператор хоссаларидан фойдаланиб қуйидаги тенгликларни

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k,$$

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \varphi_k,$$

$$x_k = (x, \varphi_k), \quad k = 1, 2, ...,$$

ёзамиз, бу ерда φ_k ва λ_k A операторнинг мос равишда хос элементлари ва хос сонларидир. У ҳолда

$$B_n Ax = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}(1 - \lambda_k)^j \lambda_k x_k \varphi_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(1 - \lambda_k)^j \lambda_k x_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty}[1 - (1 - \lambda_k)^{n+1}]x_k \varphi_k$$

ёки

$$x - B_n Ax = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - \lambda_k)^{(n+1)} x_k \varphi_k,$$

$$||x - B_nAx||^2 = \sum_{k=1}^{m}(1-\lambda_k)^{2(n+1)}x_k^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty}(1-\lambda_k)^{2(n+1)}x_k^2 \le$$

$$\le (1-\lambda_m)^{2(n+1)}||x||^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k^2. \qquad (9.5)$$

(9.5) тенгсизликни ўнг томонидаги иккинчи ҳад m нинг етарлича катта қийматларида етарлича кичик қиймат қабул қилади, чунки $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ яқинлашувчи, биринчи ҳад эса фиксирланган m ва етарлича катта n да етарлича кичик миқдор бўлади. У ҳолда $n \to \infty$ да $\gamma(n, M) = \inf_{m>0}\{(1+\lambda_m)^{2(n+1)}M^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k^2\}$, нолга интилади.

Бу ердан

$$\lim_{n\to\infty} B_nAx = x$$

эканлиги келиб чиқади.

Ундан ташқари A операторга нисбатан қўйилган шартларга мувофиқ $||E - A|| = 1$ бўлади ва ундан $||B_n|| = n + 1$ эканлиги келиб чиқади.

Энди фараз қилайлик, қаралётган масаланинг ечими мавжуд ва $||f - f_\varepsilon|| \le \varepsilon$ бўлсин. У ҳолда $x_{n\varepsilon} = B_nf_\varepsilon$ бўлади.

Қуйидаги айрмани баҳолаймиз

$$||B_nf_\varepsilon - x|| = ||B_nf_\varepsilon - B_nf + B_nf - x|| \le$$

$$\le ||B_n(f_\varepsilon - f)|| + ||B_nf - x|| \le$$

$$\le ||B_n|| ||f - f_\varepsilon|| + ||B_nf - x|| \le (n+1)\varepsilon + \gamma(M, n).$$

Шундай қилиб,

$$||B_nf_\varepsilon - x|| \le (n+1)\varepsilon + \gamma(n, M).$$

Умумий ҳол, яъни A оператор ўз-ўзига қўшма ва мусбат аниқланмаган бўлсин. Юқорида ёритилган мисолдаги каби бу ҳолда B_n операторни қуйидагича олиш мумкин

$$B_n = \mu\sum_{k=0}^{n}(E - \mu A^*A)^kA^*,$$

бу ерда μ $\mu||A^*A|| < 1$ шартни қаноатлантирувчи параметр.

§ 10. Квазиечим усули

Фараз қилайлик (5.1) масала шартли коррект қўйилган бўлсин, яъни (5.1) масала ечими ягона ва мавжуд бўлиб, берилган M тўпламга тегишли ҳамда M_A (M_A A оператор билан акслантирилгандаги M тўпламнинг образи) тўпламда берилган f функцияга текис узлуксиз боғланган. Бу ерда X ва F Банах фазолари.

Таъриф 10.1 *[9]. (5.1) масаланинг M тўпламдаги квазиечими деб, қуйидаги шартни қаноатлантирувчи $\overline{x}$ га айтилади:*

$$||A\overline{x} - f|| = \inf_{x \in M} ||Ax - f||.$$

(Квазиечим тушунчаси В.К.Иванов томонидан киритилган) (5.1) масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлган (5.1) тенгламанинг ўнг томони учун (масалан (5.1) ўнг томони абсолют аниқ берилган ҳол) квазиечим ечим билан устма-уст тушади. Квазиечим тушунчаси (5.1) масаланинг ўнг томони тақрибий берилганда, яъни ўнг тамонининг хатолиги ечимни корректлик тўпламидан чиқарадиган ҳолларда маънога эга. Агар корректлик тўплами компакт бўлса, у ҳолда доимо квазиечим мавжуд, чунки компактда узлуксиз функция ўзининг энг кичик қийматига эришади.

Тақрибий берилганлар бўйича тақрибий ечим қўриш масаласини кўриб чиқамиз. Фараз қилайлик, бизга $\{f_\varepsilon; A_h\}$ маълум бўлсин:

$$||f - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon, \quad ||A - A_h|| \leq h \quad ((D(A) = D(A_h) = D)$$

$\{f_\varepsilon; A_h\}$ берилганлар учун M компактда (5.1) тенгламанинг тақрибий ечими сифатида квазиечимни оламиз, яъни $x_{h\varepsilon}$ қуйидаги экстремал масаланинг ечими

$$\inf\{||A_h x - f_\varepsilon|| : x \in M\} \tag{10.1}$$

бўлсин. S орқали $\{A_h : ||A - A_h|| \leq h, \quad 0 \leq h \leq h_0\}$ тўпламни белгилаймиз.

Теорема 10.1 *[9]. Агар A, A_h операторлар узлуксиз, M компакт бўлса, барча $A_h \in S$ ва $f_\varepsilon \in F$ учун (10.1) экстремал масала $x_{h\varepsilon}$ ечимлари кетма-кетлиги x аниқ ечимга интилади.*

Исбот. Юқорида айтганларимиздан $||Ax - f||$ функционалнинг узлуксизлигидан унинг M компактда энг кичик қийматини берадиган $x_{h\varepsilon}$ элемент мавжудлиги келиб чиқади. Энди яқинлашишини исботлаймиз

$$||Ax_{h\varepsilon} - Ax|| \le$$
$$\le ||Ax_{h\varepsilon} - A_h x_{h\varepsilon}|| + ||A_h x_{h\varepsilon} - f_\varepsilon|| + ||f - f_\varepsilon|| \le$$
$$\le h||x_{h\varepsilon}|| + ||A_h x_{h\varepsilon} - f_\varepsilon|| + \varepsilon$$

Ундан ташқари

$$||A_h x_{h\varepsilon} - f_\varepsilon|| = \inf\{||A_h x - f_\varepsilon|| : x \in M\} \le$$
$$\le ||A_h x - Ax|| + ||f - f_\varepsilon|| \le h||x|| + \varepsilon.$$

M компакт бўлгани учун $x_{h\varepsilon}$ чегараланган, у ҳолда юқоридагилардан $(h, \varepsilon) \to 0$ бўлганда $||Ax_{h\varepsilon} - Ax|| \to 0$ келиб чиқади. Тихонов теоремасига мувофиқ эса, $\lim\limits_{(h,\varepsilon)\to 0} ||x_{h\varepsilon} - x|| = 0$ лиги келиб чиқади.

Бу эса теоремани исботлайди.

Фараз қилайлик y элемент ва Q тўплам U фазога тегишли бўлсин.

Таъриф 10.2 . *Агар қуйидаги тенглик ўринли бўлса,*

$$||y - q||_U = ||y - Q||_U = \inf_{h \in Q} ||y - h||,$$

$q \in Q$ элемент y элементининг проекцияси деб аталади, ва $q = Py$ каби ёзилади.

Теорема 10.2 . *Агар $Ax = f$ тенглама M компактда ягона ечимга эга бўлиб ва ҳар бир $f \in F$ элементнинг проекцияси N $(N = AM)$ да ягона бўлса, у ҳолда (5.1) тенгламанинг квазиечими ягона ва f га узлуксиз боғлиқ бўлади.*

Исбот. Фараз қилайлик $\overline{x}$ квазиечим ва $\tilde{f} = A\overline{x}$ бўлсин. Квазиечим таърифидан $\overline{x}$ x нинг N тўпламга проекцияси эканлиги келиб чиқади. Теорема шартига кўра у бирдан бир аниқланади. Бу ердан эса M тўпламнинг N тўпламга ўзаро бир қийматли аксланишидан $\tilde{x}$ квазиечимнинг ягоналиги келиб чиқади.

$\tilde{x} = A^{-1}\tilde{f} = A^{-1}Pf$ эканлигидан А.Н.Тихонов теоремасига мувофиқ A^{-1} нинг N да узлуксизлиги келиб чиқади. X тўпламда эса проекциялаш оператори узлуксиз. Шундай қилиб, $A^{-1}P$ узлуксиз оператор ва $\tilde{x}$ квазиечим ўнг томонга узлуксиз боғлиқ бўлади.

Квазиечим қуриш масаласини кўриб чиқамиз. Бу масалани биз махсус танлаб олинган корректлик тўплами учун бажарамиз.

Фараз қилайлик M корректлик тўплами қуйидагича аниқлансин:

$$x \in M = \{x = By, \quad ||y|| \leq c\},$$

бу ерда $y \in Y$, Y эса Гильберт фазоси, B – чизиқли тўла узлуксиз оператор (бу ерда X ва F Гильберт фазолари). Шундай қилиб, M тўплам B оператор орқали акслантирилган шар образи, ундан ташқари $||f - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon$.

Бу ҳолда квазиечимни аниқлаш масаласи қуйидаги:
$(Ax - f_\varepsilon, Ax - f_\varepsilon)$ функционалга минимум берувчи ва $(B^{-1}x, B^{-1}x) \leq C^2$ тўпламга тегишли элементни топиш масаласига келади.

$G = AB$ алмаштириш бажариб $(Gy - f_\varepsilon, Gy - f_\varepsilon)$ функционалга минимум берувчи ва $(y, y) \leq C^2$ тўпламга тегишли элементни топиш керак. Бу минимум эришиладиган элементни $\overline{y}_\varepsilon$ билан белгилаймиз. $\overline{y}_\varepsilon$ элементни топиш учун эса Лагранж усулини қўллаймиз.

Қуйидаги функционални киритамиз

$$F(\lambda, y) = (Gy - f_\varepsilon, Gy - f_\varepsilon) + \lambda(y, y),$$

бу ерда λ – қандайдир параметр. $F(\lambda, y + h) - F(\lambda, y)$ айирмани ҳисоблаймиз, бу ерда h – элемент.

$$F(\lambda, y + h) - F(\lambda, y) = (G(y + h) - f_\varepsilon, G(y + h) - f_\varepsilon) +$$
$$\lambda(y + h, y + h) - (Gy - f_\varepsilon, Gy - f_\varepsilon) - \lambda(y, y) =$$
$$= (2h, G^*(Gy - f_\varepsilon)) + 2\lambda(h, y) + (Gh, Gh) + \lambda(h, h).$$

h га нисбатан чизиқли қисмини нолга тенглаб

$$(G^*Gy - G^*f_\varepsilon + \lambda y, h) = 0$$

топамиз . Бундан $\overline{y}_\varepsilon$ элемент қуйидаги тенгламанинг

$$(G^*Gy + \lambda E)y = G^*f_\varepsilon$$

ечими бўлиши керак экан.

$\tilde{f}_\varepsilon = G^* f_\varepsilon$ белгилаш киритиб топамиз

$$(G^*Gy + \lambda E)y = \tilde{f}_\varepsilon.$$

G^*G – оператор мусбат, ўз-ўзига қўшма оператор бўлганидан унинг хос элементлар ва хос қийматлар системасини мос равишда $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ва $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ деб белгилаймиз. Олдинги мавзуларда таъкидлаганимиздек $\tilde{f}_\varepsilon$ ва $\overline{y}_\varepsilon$ элементларни ушбу

$$\tilde{f}_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_{k\varepsilon}\varphi_k,$$

$$\overline{y}_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{y}_{k\varepsilon}\varphi_k,$$

кўринишда ёзамиз, бу ерда $\tilde{f}_{k\varepsilon} = (\tilde{f}_\varepsilon, \varphi_k)$, $\quad \overline{y}_{k\varepsilon} = (\overline{y}_\varepsilon, \varphi_k)$, $k = 1, 2, ...$

Ҳосил бўлган тенгликларни тенгламага олиб бориб қўйиб топамиз

$$\overline{y}_{k\varepsilon} = \frac{\tilde{f}_{k\varepsilon}}{\lambda_k + \lambda}, k = 1, 2, ...$$

Кўрсатамизки, манфий λ да $\overline{y}_\varepsilon$ элемент бошланғич функционалга минимум бермайди, аниқроқ қилиб айтганда, функционал λ манфий бўлганда минимумга эришмайди.

$$(G\overline{y}_\varepsilon - f_\varepsilon, G\overline{y}_\varepsilon - f_\varepsilon) =$$

$$= (G\overline{y}_\varepsilon, G\overline{y}_\varepsilon) - (2G\overline{y}_\varepsilon, f_\varepsilon) + (f_\varepsilon, f_\varepsilon) =$$

$$= (f_\varepsilon, f_\varepsilon) + ((G^*G + \lambda E)^{-1}G^*Gf_\varepsilon, (G^*G + \lambda E)^{-1}G^*Gf_\varepsilon) -$$

$$-2((G^*G + \lambda E)^{-1}G^*Gf_\varepsilon, f_\varepsilon) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_{k\varepsilon}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2}{(\lambda_k + \lambda)^2} f_{k\varepsilon}^2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{(\lambda_k + \lambda)} f_{k\varepsilon}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{\lambda}{\lambda_k + \lambda})^2 f_{k\varepsilon}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{\lambda}{\lambda_k + \lambda})^2 f_{k\varepsilon}^2.$$

ёки

$$||G\overline{y}_\varepsilon - f_\varepsilon||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{\lambda}{(\lambda_k + \lambda)})^2 f_{k\varepsilon}^2.$$

Охирги тенгликдан λ манфий бўлмаслиги кўринади.

Шундай қилиб, $\lambda > 0$ эканлигидан

$$(G^*G + \lambda E)$$

операторининг тескариси мавжудлиги келиб чиқади ва

$\overline{y}_\varepsilon = (G^*G + \lambda E)^{-1}G^* f_\varepsilon$ га эга бўламиз.

Қидирилаётган квазиечим эса $B(G^*G + \lambda E)^{-1}G^* f_\varepsilon$ га тенг.

Агар $f_\varepsilon \in N$ бўлса, у ҳолда $\overline{x}_\varepsilon = A^{-1} f_\varepsilon$ ва $\lambda = 0$ бўлади. Энди $f_\varepsilon \notin M_A$ бўлсин, бу ҳолда λ ни аниқлаймиз. Кўриш қийин эмаски, бу ҳолда квазиечим M тўпламнинг чегарасида ётади, яъни

$$(\overline{y}_\varepsilon, \overline{y}_\varepsilon) = c^2.$$

$\mu(\lambda)$ орқали қуйидаги функцияни белгилаймиз

$$\mu(\lambda) = ((G^*G + \lambda E)^{-1}G^* f_\varepsilon, (G^*G + \lambda E)^{-1}G^* f_\varepsilon).$$

$\mu(\lambda)$ функцияни дифференциаллаб, ушбу

$$\mu'(\lambda) = -2((G^*G + \lambda E)^{-2}G^* f_\varepsilon, (G^*G + \lambda E)^{-1}G^* f_\varepsilon) < 0$$

тенгсизликни топамиз. Ундан ташқари $\mu(0) > c^2$ (акс ҳолда f_ε элементи M_A тўпламга тегишли бўлган бўлар эди) ва $\lambda \to \infty$ да $\mu(\lambda) \to 0$ бўлади. Бундан $\mu(\lambda)$ монотон камаювчи функция бўлиб,

$$\mu(\lambda) = c^2$$

тенглама $0 < \lambda < \infty$ ярим ўқда биз излаётган ягона ечимга эга эканлиги келиб чиқади. λ ни топиш учун қуйидаги кетма-кет яқинлашиш усулини қўллаймиз.

Ихтиёрий λ_0 ни танлаб, $\mu(\lambda_0)$ ни ҳисоблаймиз. Агар $\mu(\lambda_0) < c^2$ бўлса, $\lambda_1 = \lambda_0/2$ - ни оламиз. Акс ҳолда яъни $\mu(\lambda_0) > c^2$ бўлса, $\lambda_1 = 2\lambda_0$ бўлади ва ҳакозо. Шу процессни давом эттириб, λ ни тақрибий топамиз.

Изоҳ. Биринчи тур оператор тенгламаларни иккинчи тур оператор тенглама билан алмаштириш, кетма-кет яқинлашиш усуллари билан тақрибий ечимларини қуриш ва асослаш М.М.Лаврентьевга тегишли [15].

Квазиечим усули В.К.Иванов тамонидан киритилган ва биринчи тур оператор тенгламалар учун асосланган. Биз бу мавзуни ёритишда [9], [16], [24],[25]-лардан фойдаландик.

§ 11. Фарқ усули

Юқорида келтирилган биринчи тур оператор тенглама (5.1) учун фарқ (рус тилида невязка) усулини келтирамиз.

Фараз қилайлик $\triangle \to 0$ да нолга интилувчи бирор мусбат функция $\sigma(\triangle)$ учун қуйидаги тўплам

$$\Omega_\triangle = \{x : x \in D(A) = D(A_h), \quad ||A_h x - f_\varepsilon||^p \le \sigma^p(\triangle)\}$$

ихтиёрий $\triangle \ge 0$ (яъни ихтиерий $h \ge 0, \varepsilon \ge 0$) учун бўш тўплам бўлмасин. Бошлангич берилганлардан қуйидаги шартлар бажарилишини талаб қиламиз

$$||A - A_h|| \le h, \quad (D(A) = D(A_h)), \quad ||f - f_\varepsilon|| \le \varepsilon. \tag{11.1}$$

Фараз қилайлик A, A_h операторлар билан биргаликда $D(L) \subseteq X$ дан B – фазо V га акслантириш бажарувчи L оператор берилган бўлиб, баъзи бир $K > 0$ ва барча $x \in D(A) \cap D(L)$ лар учун қуйидаги тенгсизлик

$$K||x|| \le ||Lx|| \tag{11.2}$$

ўринли бўлсин. Фарқ усулида тақрибий ечим қуйидаги экстремал масаланинг ечими сифатида аниқланади:

$$\inf\{||Lx||^q : x \in \Omega_\triangle \cap D(L)\} = d. \tag{11.3}$$

Теорема 11.1. *Фараз қилайлик A, A_h, L чизиқли ёпиқ операторлар бўлиб, X, F рефлексив фазолар, V эса E – фазо бўлиб, (11.1),(11.2) шартлар бажарилсин. Ундан ташқари барча $\triangle \ge 0$ да $x_0 \in \Omega_\triangle \cap D(L)$ масаланинг аниқ ечими бўлсин. У ҳолда (11.3) масала ягона ечимга эга ва экстремал элементлар кетма-кетлиги $x_\triangle$ $||x||_1 = ||x|| + ||Lx|| + ||Ax||$ норма бўйича $x_0 = A^{-1}f_0$ га интилади.*

Исбот. Шартга муфофиқ Ω_Δ тўплами бўш эмас, чунки $x \in \Omega_\Delta$. Ундан ташқари Ω_Δ қабариқ ва ёпиқдир. Ҳақиқтан, $\varphi(x) = ||A_h x - f_\varepsilon||$ функционал A чизиқли оператор учун қабариқдир, у ҳолда бутун $p > 1$ учун $\psi(x) = \varphi^p(x)$ функционал ҳам қабариқ бўлади. Энди Ω_Δ ёпиқлигини текширамиз.

Агар $x_n \to \overline{x}$, $\quad x_n \in \Omega_\Delta$ бўлса, у ҳолда F –фазонинг рефлексивлигидан суст яқинлашувчи x_{n_k} қисм кетма-кетликнинг мавжудлиги келиб чиқади, яъни $k \to \infty$ да $A_h x_{n_k} - f_\varepsilon \rightharpoonup \overline{f} - f_\varepsilon$ бўлади.

Ёпиқ операторнинг секвенциал суст ёпиқ эканлигидан $\overline{x} \in D(A_h)$, $A_h \overline{x} = \overline{f}$ ва

$$||A_h \overline{x} - f_\varepsilon||^p \leq \underline{\lim_{k\to\infty}} ||A_h \overline{x}_{n_k} - f_\varepsilon||^p \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} ||A_h \overline{x}_{n_k} - f_\varepsilon||^p \leq \sigma^p$$

бўлади, яъни $\overline{x} \in \Omega_\Delta$ келиб чиқади.

Фараз қилайлик $\{x_n^*\}$ кетма-кетлик (11.3) масалага минимум берувчи кетма-кетлик бўлсин, у ҳолда $d_n = ||Lx_n^*|| \to d$

Фазоларнинг рефлексивлигидан ва мос тўпламларнинг чегараланган эканлигидан $\{x_{n_k}^*\}$ кетма-кетлик учун топамиз

$$x_{\Delta_k}^* \to x^*, \quad A_h x_{n_k}^* \rightharpoonup f^*, \quad Lx_{n_k}^* \rightharpoonup v^*,$$

бундан эса

$$x^* \in \Omega_\Delta \cap D(L), \quad d \leq ||Lx^*||^q \leq \lim_{k\to\infty} ||Lx_{n_k}^*||^q = d,$$

яъни x^* (11.3) масала ечими экан. Уни x_Δ билан белгилаймиз.

Фараз қилайлик $||x_\Delta - x_0|| \not\to 0$ бўлсин, яъни ҳар бир $\delta > 0$ ва x_{Δ_k} кетма-кетлик учун қуйидаги тенгсизлик

$$||x_{\Delta_k} - x_0|| > \varepsilon \quad (k = 1, 2, ...) \tag{11.4}$$

бажарилсин. $x_0 \in \Omega_\Delta \cap D(L)$ дан $||Lx_{\Delta_k}||^q \leq ||Lx_0||^q$ келиб чиқади. Бу ва (11.2) тенгсизликдан экстремал элементларнинг чегараланганлиги келиб чиқади: $||x_{\Delta_k}|| \leq ||Lx_0||/K$. У ҳолда индексларнинг бирор кетма-кетлиги учун $\{\Delta_m\} \subset \{\Delta_k\}$

$$Lx_{\Delta_m} \rightharpoonup \overline{v}, \quad x_{\Delta_m} \rightharpoonup \overline{x} \tag{11.5}$$

бўлади. Қуйидаги тенгсизликлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз:

$$||Ax_{\Delta_m} - Ax_0|| \leq$$

$$\leq ||Ax_{\Delta_m} - A_{h_m}x_{\Delta_m}|| + ||A_{h_m}x_{\Delta_m} - f_{\varepsilon m}|| + ||f_{\varepsilon m} - f_0|| \leq$$
$$\leq h_m||x_{\Delta_m}|| + \sigma(\Delta_m) + \varepsilon_m \leq$$
$$\leq h_m||Lx_0||/K + \sigma(\Delta_m) + \varepsilon_m \to 0, \quad m \to 0. \qquad (11.6)$$

Охирги тенгсизликни олдинги муносабатлар билан бирлаштириб топамиз $\overline{x} \in D(A) \cap D(L)$, $\quad A\overline{x} = Ax_0$, яъни $\overline{x} = x_0$, $\quad \overline{v} = Lx_0$.

Ҳосил қилинган тенгсизликлардан қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз

$$||Lx_0|| \leq \varliminf_{m\to\infty} ||Lx_{\Delta_m}|| \leq \varlimsup_{m\to\infty} ||Lx_{\Delta_m}|| \leq ||Lx_0||. \qquad (11.7)$$

E – фазо V –фазода суст яқинлашишдан ((11.5) формулалар) ва нормаларнинг яқинлашишидан ((11.7) формулалар) кучли яқинлашиш келиб чиқади

$$\lim_{m\to\infty} ||Lx_{\Delta_m} - Lx_0|| = 0.$$

Бундан, (11.6) ва (11.2) муносабатлардан $||x_{\Delta_m} - x_0||_1 \to 0$ топамиз, бу ерда $\{\Delta_m\} \subseteq \{\Delta_k\}$. Бу эса (11.4) тенгсизликга қарама-қаршидир.

$||Lu||^q$ функционалнинг қатъий қабариқлиги экстремал элементнинг ягоналигини таъминлайди.

§ 12. Умумлашган фарқ усули

Қуйидаги

$$Ax = f, \qquad (12.1)$$

биринчи тур оператор тенгламани қараймиз, бу ерда $x \in X, f \in F$; X E – фазо, F - Банах фазоси, A X фазони F фазогага ўзаро бир қийматли акслантирувчи оператор. x_o билан f_o ўнг томонга мос келувчи аниқ ечимини белгилаймиз.

Фараз қилайлик, x_o аниқ ечим мавжуд бўлиб, ўнг томон f ва A оператор ўрнига уларнинг тақрибий қийматлари f_ε, A_h маълум бўлсин:

$$||f - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon, \quad ||A - A_h|| \leq h, \quad \varepsilon > 0, h > 0,$$

ундан ташқари $||f_\varepsilon|| > \varepsilon + ||x_0||h$, $\quad h < ||A_h||$ бўлсин.

Масала: Берилган A_h ва f_ε бўйича (12.1) масалани регулярлаштирувчи тақрибий ечимлар $\{x_\Delta\}$ оиласини қуринг.

Тақрибий ечим умумлашган фарқ усулида қуйидаги

$$\inf\{||x||^q : ||A_h x - f_\varepsilon|| \le \varepsilon + ||x||h\} \qquad (12.2)$$

вариацион масаланинг ечими сифатида олинади.

Теорема 12.1 . *Фараз қилайлик, шу мавзуга тегишли талаблар бажарилган бўлиб. ундан ташқари A_h операторнинг қийматлар соҳаси F фазода зич бўлсин, у ҳолда (12.2) вариацион масала қуйидаги масалага эквивалент*

$$\inf\{||x||^q : ||A_h x - f_\varepsilon|| \le \varepsilon + \tau h\}, \qquad (12.3)$$

бу ердаги τ ушбу тенгламадан аниқланади:

$$||x^\tau_\Delta|| = \tau, \qquad (12.4)$$

x^τ_Δ эса (12.3) масаланинг $\Delta = (h, \varepsilon)$ ва τ параметрлар билан ечими.

Исбот. Фараз қилайлик, $0 \le \tau \le (||f_\varepsilon|| - \varepsilon)/h$ бўлсин. $\varphi(\tau) = \tau - ||x^\tau_\Delta||$ функцияни қараймиз, бу ерда x^τ_Δ (12.3) масаланинг фиксирланган Δ , τ ва $\varphi(\tau)$ – параметрли ечими. Кўриниб турибдики $\varphi(\tau)$ функцияси монотон ўсувчи бўлиб қуйидаги $\varphi(0) < 0$ ва $\varphi((||f_\varepsilon|| - \varepsilon)/h) > 0$ чегаравий шартларни қаноатлантиради.

$\varphi(\tau)$ функциясини узлуксизлигини текширамиз. Биринчи навбатда ўнгдан узлуксизлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, ўнг томонидан узлуксизлик йўқ бўлсин. У ҳолда $\tau_n \to \tau$ ва $\tau_n \ge \tau$ шартларни қаноатлантирувчи $\{\tau_n\}$ кетма-кетлиги топиладики, унинг учун

$$||x^{\tau_n}_\Delta - x^\tau_\Delta|| \ge d > 0$$

тенгсизлик бажарилади. $x^{\tau_n}_\Delta$ (12.3) вариацион масаланинг ечими ва $\tau_n \ge \tau$ эканлигидан ихтиёрий n учун $||A_h x_{\Delta_\tau} - f_\varepsilon|| \le \varepsilon + \tau_n h$ ўринли. Шундай қилиб,

$$||x^{\tau_n}_\Delta|| \le ||x^\tau_\Delta|| \qquad (12.5)$$

бўлади, (12.5) тенгсизликдан $\{x^{\tau_n}_\Delta\}$ кетма-кетликни норма бўйича чегараланганлиги келиб чиқади. Умумийлигига зарар етказмасдан

$$x^{\tau_n}_\Delta \rightharpoonup \hat{x} \qquad (12.6)$$

деб ҳисоблашимиз мумкин.

Ихтиёрий n учун $||A_h x\Delta^{\tau_n} - f_\varepsilon|| \le \varepsilon + \tau h$ ва $\tau_n \to \tau$ эканлигини кўрамиз. У ҳолда A_h операторнинг суст узлуксизлигидан, (12.5) тенгсизликдан ва суст лимит норма хоссасига мувофиқ

$$||A_h \hat{x} - f_\varepsilon|| \le \varepsilon + \tau h \tag{12.7}$$

эга бўламиз. Шундай қилиб ,

$$||\hat{x}|| \ge ||x_\triangle^\tau||. \tag{12.8}$$

Иккинчи томондан, суст лимитнинг норма хоссасига мувофиқ ва (12.5),(12.6) - ларга асосан топамиз

$$||\hat{x}|| \le ||x_\triangle^\tau||. \tag{12.9}$$

(12.8) ва (12.9) дан ушбу

$$||\hat{x}|| = ||x_\triangle^\tau|| \tag{12.10}$$

тенгликни оламиз. X фазо қатъий қабариқ эканлигидан (12.7) ва (12.10) ифодалардан $\hat{x} = x_\triangle^\tau$ келиб чиқади . Бу хулосани , (12.5) тенгсизлик ва (12.6) ифодани эътиборига олиб ҳосил қиламиз

$$||x_\triangle^{\tau_n}|| \to ||x_\triangle^\tau||. \tag{12.11}$$

(12.6) ва (12.11) ифодалардан E фазода кучли яқинлашиш келиб чиқади

$$x_\triangle^{\tau_n} \to x_\triangle^\tau,$$

бу эса $||x_\triangle^{\tau_n} - x_\triangle^\tau|| \ge d > 0$ шартга қаршидир.

Энди чап томондан узлуксизликни исботлаймиз. Чап томондан узлуксизлик йўқ деб, фараз қилайлик. У ҳолда шундай кетма-кетлик топиладики, унинг учун $\tau_n \to \tau$ ва $\tau \le \tau$, ундан ташқари

$$||x_\triangle^{\tau_n} - x_\triangle^\tau|| \ge d > 0$$

ўринли. У ҳолда ихтиёрий n учун

$$||x_\triangle^{\tau_n}|| \le ||x_\triangle^\tau|| \tag{12.12}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. (12.12) тенгсизликдан $\{x_\triangle^{\tau_n}\}$ кетма-кетлик норма бўйича чегараланганлиги келиб чиқади. Умумийликни чегараламасдан

$$x_\triangle^\tau \to \hat{x} \tag{12.13}$$

деб ёза оламиз. (12.13) дан суст лимитнинг норма хоссасига мувофиқ қуйидаги тенгсизликларга эга бўламиз

$$||\hat{x}|| \leq \varliminf_{n\to\infty} ||x^{\tau}_{\Delta_n}||, \tag{12.14}$$

$$||A_h\hat{x} - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon + \tau h. \tag{12.15}$$

(12.15) тенгсизликни эътиборга олсак

$$||\hat{x}|| \geq ||x^{\tau}_{\Delta}|| \tag{12.16}$$

келиб чиқади.

A_n оператор қийматлар соҳаси F фазода тўла зич эканлигидан шундай $\overline{x} \in X$ элемент топиладики, унинг учун $||A_h\overline{x} - f_\varepsilon|| < \varepsilon + \overline{\tau}h$ бўлади. $\{\overline{x}_n\}$ кетма-кетликни қараймиз, $\overline{x}_n = \alpha_n\overline{x} + (1-\alpha_n)x^{\tau}_{\Delta}$, бу ерда α_n қуйидаги шартни қаноатлантиради

$$||A_h\overline{x}_n - f_\varepsilon|| = \varepsilon + \tau_n h. \tag{12.17}$$

(12.17) тенгликдан ушбу тенгсизликни

$$||\overline{x}_n|| \geq ||x^{\tau_n}_{\Delta}|| \tag{12.18}$$

ёза оламиз. $\tau_n \to \tau$ дан $\alpha_n \to 0$ келиб чиқади ва шундай қилиб

$$\overline{x}_\Delta \to x^{\tau}_{\Delta} \tag{12.19}$$

бўлади. (12.18) ва (12.19) эса қуйидаги натижага келамиз

$$\varliminf_{n\to\infty} ||x^{\tau_n}_{\Delta}|| \leq ||x^{\tau}_{\Delta}||.$$

У ҳолда (12.14) ва (12.16) тенгсизликлардан ушбу

$$||\hat{x}|| = ||x^{\tau}_{\Delta}|| \tag{12.20}$$

тенглик келиб чиқади. X фазосининг қатъий қабариқлигидан (12.15), (12.20) ларни эътиборга олиб

$$\overline{x}_\Delta = x^{\tau}_{\Delta} \tag{12.21}$$

топамиз. Аммо $||x^{\tau_n}_{\Delta}|| \to ||x^{\tau}_{\Delta}||$, шунинг учун (12.13) ва (12.21) ҳосил қиламиз.

$$x^{\tau_n}_{\Delta} \to x^{\tau}_{\Delta},$$

Бу эса $||x_\triangle^{\tau_n} - x_\triangle^n|| \geq d > 0$ га қаршидир.

Энди $\varphi(\tau)$ функция монотон ўсувчи, узлуксиз ва чекли чегараларда ҳар хил қиймат қабул қилгани учун шундай ягона τ_0 топиладики, унинг учун $\varphi(\tau_0) = 0$ бўлади.

Шундай қилиб, (12.3), (12.4) масала бирдан бир ечимга эга. Масала ечимини $x_\triangle^{\tau_0}$ билан белгилаймиз ва $x_\triangle^{\tau_0}$ (12.2) масаланинг ягона ечими эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $x_\triangle^{\tau_0}$ (12.2) масала шартларини қаноатлантиришни кўрсатамиз, яъни

$$||A_h x_\triangle^{\tau_0} - f_\varepsilon|| = \varepsilon + ||x_\triangle^{\tau_0}||h.$$

Фараз қилайлик $x_\triangle^{\tau_0}$ (12.2) масаланинг ечими бўлмасин. У ҳолда шундай $\tilde{x} \in X$ элемент топиладики, унинг учун ушбу

$$||A_h\tilde{x} - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon + ||\tilde{x}||h.$$

ва

$$||\tilde{x}|| \leq ||x_\triangle^{\tau_0}|| - d$$

тенгсизликлар ўринли бўлади, бу ерда $d > 0$

$$||A_h\tilde{x} - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon + ||x_\triangle^{\tau_0}||h.$$

У ҳолда $\tilde{x}$ элемент

$$||A_h\tilde{x} - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon + ||x_\triangle^{\tau_0}||h.$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

Энди $||x_\triangle^{\tau_0}||^q = \inf\{||x||^q : ||A_h\tilde{x} - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon + ||x_\triangle^{\tau_0}||h\}$ ни эътиборга олиб $||\tilde{x}|| \geq ||x_\triangle^{\tau_0}||$ ни топамиз. Бу эса $||\tilde{x}|| \leq ||x_\triangle^{\tau_0}|| - d$ тенгсизликга қаршидир.

Ягоналикни текшириш учун яна битта (12.2) масаланинг $\overline{x}_\triangle^{\tau_0}$ ечимини қараймиз. $\overline{x}_\triangle^{\tau}$ элементи қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$||\overline{x}_\triangle^{\tau}|| = ||x_\triangle^{\tau}||,$$
$$||A_h\overline{x}_\triangle^{\tau} - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon + ||x_\triangle^{\tau}||h,$$
$$||A_h\overline{x}_\triangle^{\tau} - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon + ||\overline{x}_\triangle^{\tau}||h. \tag{12.22}$$

Аммо X қатъий қабариқ бўлгани учун $\overline{x}_\triangle^{\tau} = x_\triangle^{\tau}$ тенглик келиб чиқади.

Шундай қилиб, теорема тўла исботланади.

(12.1)-масала тақрибий ечимини ((12.2) масала ечимини) оддийлик учун $x_\triangle$ билан белгилаймиз.

Теорема 12.2 . *$\Delta \to 0$ бўлганда x_Δ кетма-кетлик x_0 га интилади, яъни $\{x_\Delta\}$ – регулярлаштирувчи тақрибий ечимлар кетма-кетлигидир.*

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни шундай x_{Δ_k} кетма-кетлик топиладики, $k \to \infty$ да $\Delta_k \to 0$ бўлса ҳам $||x_{\Delta_k} - x_0|| \geq d > 0$ бўлади. Ихтиёрий k учун $||x_{\Delta_k}|| \leq ||x_0||$ эканлигидан ва X фазо рефлексивлигидан $\{x_{\Delta_k}\}$ кетма-кетликни суст компакт эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, умумийликка зиён етказмасдан $k \to \infty$ да $x_{\Delta_k} \rightharpoonup \tilde{x}$ деб ҳисоблашимиз мумкин.

Иккинчи томондан эса

$$||Ax_{\Delta_k} - f_0|| \leq 2(\varepsilon_k + ||x_0||h_k).$$

Шунинг учун $k \to \infty$ да $Ax_{\Delta_k} \to f_0$ бўлади. A операторнинг чизиқли ва узлуксиз эканлигидан $\tilde{x} = x_0$ ни ҳосил қиламиз. Ихтиёрий k да $||x_{\Delta_k}|| \leq ||x_0||$ ва X E фазо эканлигидан $x_{\Delta_k} \to x_0$ келиб чиқади, бу эса $||x_{\Delta_k} - x_0|| \geq d > 0$ га зиддир. Шу билан теорема исботланди.

Изоҳ. Фарқ усули (рус тилида невязка) бизнингча биринчи бор Филиппс томонидан [35] айтилган эди. Умумлашган фарқ усули эса [8] ишида келтирилган ва асосланган.

§ 13. Ёмон шартлашган ва бузиладиган чизиқли алгебраик тенгламалар системаси

Қуйидаги

$$Ax = f, \tag{13.1}$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасини қараймиз, бу ерда $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t \in R^n$, $f = (f_1, f_2, ..., f_m)^t \in R^m$ веторлар, $A = [a_{ij}]_{1,1}^{m,n}$ матрица бўлиб, n ва m сонлар ўзаро тенг бўлиши шарт эмас.

Табийки бу система ихтиёрий бўлиб, у ягона ечимга эга бўлиши, ёки бузиладиган (ва чексиз кўп ечимга эга), ёки ечилмайдиган ҳам бўлиши мумкин.

Таъриф 13.1 *(13.1) системанинг псевдо ечими деб $||Ax - f||$ фарқ(невязка)га бутун R^n фазода минимум берувчи $\tilde{x}$ векторга айтилади.*

Псевдоечимлар тўпламини F_A билан белгилаб қуйидаги янги таърифни киритамиз.

Таъриф 13.2 . *Минимум нормага эга бўлган псевдоечимни нормал x^o ечим деб атаймиз, яъни*

$$||x^0|| = \inf_{x \inf_A} ||x||,$$

бу ерда

$$||x|| = \{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\}^{1/2}.$$

Умуман айтганда нормал ечимни топиш масаласи нокоррект масала эканлигини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, A симметрик матрица бўлсин, уни ортогонал алмаштириш

$$x = Vx^*, \quad f = Vf^*$$

орқали диагонал кўринишга келтириш мумкин. Бу алмаштиришни бажаргандан кейин система ушбу

$$\lambda_i x_i^* = f_i^*, \quad i = 1, 2, ..., n$$

кўринишни олади. Бу ерда λ_i A матрицанинг хос сонларидир.

Ундан ташқари, агар A матрица махсус матрица бўлмаса (бузилмайдиган) ва ранги r га тенг бўлса, у ҳолда унинг $(n - r)$ та хос сонлари нолга тенг бўлади.

Фараз қилайлик, $i = 1, 2, ..., r$ лар учун $\lambda_i \neq 0$ бўлиб, барча $i = r+1, r+2, ..., n$ лар учун $\lambda_i = 0$ бўлсин .

Агар система ечимга эга деб фараз қилсак табийки барча $i = r+1, ..., n$ лар учун $f^* = 0$ бўлиши керак.

Энди фараз қилайлик, A матрица ва f ўнг томон тақрибий берилган бўлсин, яъни

$$||A_h - A|| \leq h, \quad ||f - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon,$$

бу ерда

$$||A||^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2, \quad ||f||^2 = \sum_{i} f_i^2. \tag{13.2}$$

Фараз қилайлик $\tilde{\lambda}_i$ лар A_h матрицанинг хос сонлари бўлсин. Маълумки, улар A матрицага (13.2) норма бўйича узлуксиз боғлиқ. Бундан

$$\tilde{\lambda}_{r+1}, \tilde{\lambda}_{r+2}, ..., \tilde{\lambda}_n,$$

хос сонларнинг етарлиги кичик миқдор бўлиш мумкинлиги келиб чиқадики. Агар улар нолдан фарқли бўлса, у ҳолда

$$\tilde{x}_i^* = \{1/\tilde{\lambda}_i\} f_{i\varepsilon}^*, \quad i = 1, 2, ..., n$$

бўлади.

Бундан кўринадики, A матрица ва f ўнг томоннинг тақрибий қийматлари ичида шундай қийматни топиш мумкинки, улар учун баъзи $\overline{x}_i^*$ лар ихтиёрий берилган қийматни, қабул қилади. Бу эса системанинг нормал ечимини топиш масаласи нокоррект эканлигини кўрсатади.

Энди шу нормал ечимини тақрибий топишнинг регуляризация усулини кўриб чиқамиз. Буни икки холга бўлиб ўрганамиз:

1) A матрица аниқ берилган бўлиб, ўнг томон ушбу $||f - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon$ хатолик билан берилган;

2) A матрица ва ўнг томон ушбу

$$||A - A_h|| \leq h, \quad ||f - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon$$

хатоликлар билан берилган.

1. Фараз қилайлик, (13.1) системада A матрица аниқ берилган бўлиб, f ўнг томон ўрнига f_ε берилган бўлсин. (13.1) системанинг x^0 нормал ечимини тақрибий топиш талаб қилинади.

Юқорида такидлаб ўтганимиздек, умуман айтганда, (13.1) система ечимга эга бўлмаслиги ҳам мумкин, у ҳолда табийки

$$\inf_{x \in R^n} ||Ax - f|| = \mu \geq 0$$

бўлади.

Ушбу оддий тенгсизликларидан

$$||Ax - f_\varepsilon|| \leq ||Ax - f|| + ||f - f_\varepsilon||,$$

$$||Ax - f|| \leq ||Ax - f_\varepsilon|| + ||f - f_\varepsilon||$$

қуйидаги тенгсизликларни $\tilde{\mu} \leq \mu + \varepsilon$, $\mu \leq \tilde{\mu} + \varepsilon$ ёки $|\tilde{\mu} - \mu| \leq \varepsilon$ топамиз, бу ерда $\tilde{\mu} = \inf ||Ax - f_\varepsilon||$.

Шундай қилиб, бошланғич масала $Q_\tau = \{x : ||Ax - f_\varepsilon|| \leq \tilde{\mu} + 2\varepsilon\}$ тўпламда $\Omega[x] = ||x||^2$ функционалнинг минимумини топиш масаласига келади.

Фараз қилайлик, x_ε $(x_\varepsilon \in Q_\varepsilon)$ векторда $||x||^2$ функционал ўзининг минимумига эришсин. $x_\varepsilon = R_1(f_\varepsilon, \varepsilon)$ деб белгилаймиз.

Теорема 13.1 . *$R_1(f_\varepsilon, \varepsilon)$ қуйидаги хоссаларга эга:*

1) $R_1(f_\varepsilon, \varepsilon)$ ҳар бир $f_\varepsilon \in R^m$ ва $\forall$ $\varepsilon > 0$ учун аниқланган;

2)$\varepsilon \to 0$ да $x_\varepsilon = R_1(f_\varepsilon, \varepsilon) \to x^0$, яъни $Ax = f$тенглама учун регулярлаштирувчи ечим бўлади.

Исбот. $\Omega[x] = ||x||^2$ манфиймас функционал бўлганлиги учун унинг қуйи чегараси $\Omega_0 = \inf\limits_{x \in Q_\varepsilon} \Omega[x]$ ва шундай $\{\tilde{x}^n\}$ $(\tilde{x}^n \in Q_\varepsilon)$ векторлар кетма-кетлиги мавжудки, $n \to \infty$ бўлганда $\Omega[\tilde{x}^n] = ||\tilde{x}_n||^2 \to \Omega^0$ бўлади. Умумийликга зиён етказмасдан, ҳар қандай $n > 1$ учун

$$||\tilde{x}_n||^2 \leq ||\tilde{x}_{n-1}||^2 \leq ... \leq ||\tilde{x}_1||^2, \quad \tilde{x}_1 \neq 0$$

ҳисоблашимиз мумкин.

Шундай қилиб, $\{\tilde{x}_n\}$ кетма-кетлик Q_ε тўпламга ва радиуси $r = ||\tilde{x}_1||$ га тенг D_r шарга тегишли. У ҳолда Больцано-Вейрштрасс теоремасига мувофиқ ундан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик $\{\tilde{x}_{n_k}\}$ ажратиш мумкин.

Фараз қилайлик, $\lim\limits_{n_k \to \infty} \tilde{x}_{n_k} = x_\varepsilon$ бўлсин.

$$F_{r,\varepsilon} = \{x : ||x||^2 \leq r^2 = ||x_1||^2, \quad x \in Q_\varepsilon\}$$

тўпламнинг ёпиқ эканлигидан ($\{\tilde{x}_n\}$ кетма-кетлик бу тўпламга тегишли) x_ε вектор ҳам бу тўпламга тегишли ва шундай қилиб, $x_\varepsilon \in Q_\varepsilon$. $\Omega_0 = \lim\limits_{n_k \to \infty} ||\tilde{x}_{n_k}||^2 = ||x_\varepsilon||^2$ бўлганлигидан 1) хоссанинг исботи келиб чиқади.

Энди 2) хоссани исботлаймиз. x_ε вектор $||x||^2$ функционалнинг Q_ε тўпламда минимуми бўлганлиги учун $||x_\varepsilon|| \leq ||x^0||$. Бу эса x_ε векторни чегараланмаган ёпиқ тўплам $F_\varepsilon^0 = \{x' : ||x|| \leq ||x_0||, \quad x \in Q_\varepsilon\}$ га тегишли эканлигини кўрсатади. Бу эса барча $\varepsilon > 0$ учун ўринли.

$f_{\varepsilon k}$ векторлар берилган бўлиб, булар учун $||f_{\varepsilon k} - f|| = \varepsilon_k$ бажарилсин, бу ерда $k \to \infty$ да $\varepsilon_k \to 0$ ди. Ҳар бир ε_k учун Q_{ε_k} аниқланган. Исботланган 1) хоссага мувофиқ ҳар бир $\dot{Q}_{\varepsilon_k}$ тўпламда $\Omega[x] = ||x||^2$ функционалга минимум берувчи $x_{\varepsilon_k} \in F^0 \equiv \{x : ||x|| \le ||x^0||\}$ мавжуд. Шундай қилиб, $\{f_{\varepsilon_k}\}$ векторлар кетма-кетлигига F_0 тўпламга тегишли $\{x_{\varepsilon_k}\}$ векторлар кетма-кетлиги мос келади. Больцано-Вейрштрасс теоремасига мувофиқ $\{x_{\varepsilon_k}\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик $\{x_{\varepsilon_{k_s}}\}$ ажратиш мумкин.

Фараз қилайлик,

$$\lim_{k_s \to \infty} x_{\varepsilon_{k_s}} = \tilde{x}$$

бўлсин. $x_{\varepsilon_k} \in Q_{\varepsilon_k}$ эканлигидан $||Ax_{\varepsilon_{k_s}} - f_{\varepsilon_{k_s}}|| \le \tilde{\mu}_{k_s} + 2\varepsilon_{k_s}$ барча $x_{\varepsilon_{k_s}}$ учун бажарилиши келиб чиқади. Охирги тенгсизликдан $k_s \to \infty$ да лимитга ўтиб ушбу

$$||A\tilde{x} - f|| \le \mu$$

тенгсизликни топамиз. Ҳар бир x учун $||Ax - f|| \le \mu$ бўлганлиги учун $||A\tilde{x} - f|| = \mu$ бўлиши келиб чиқади. Бу хулосалардан ва нормал ечим ягона эканлигидан $\tilde{x} = x^0$ бўлишини кўрамиз. Бундан эса $\{x_{\varepsilon_k}\}$ кетма-кетликнинг x^o нормал ечимга интилиши келиб чиқади.

Шу билан 13.1-теорема исботланди.

$\Omega[x] = ||x||^2$ функционал стабиллаштирувчи ва квазимонотонлигидан нормал ечимга яқинлашувчи тақрибий ечимни топиш масаласи қуйидаги масалага келади:

$$||Ax - f_\varepsilon|| = \mu + 2\varepsilon$$

шартни қаноатлантирувчи x лар орасида минимал нормага эга бўлганини топинг.

Охирги масалани Лагранж усулини қўллаб ечамиз, яъни x_ε сифатида

$$M^\alpha[x, f_\varepsilon] = ||Ax - f_\varepsilon||^2 + \alpha||x||^2, \quad \alpha > 0,$$

функционалга минимум берувчи x^α векторни оламиз. α параметр эса $||Ax^\alpha - f_\varepsilon|| = \tilde{\mu} + 2\varepsilon$ шартдан бир қийматли аниқланади.

$M^\alpha[x, f_\varepsilon]$ –функционалнинг минимумини топиш шартидан

$$\frac{\partial M^\alpha[x, f_\varepsilon]}{\partial x_j^\alpha} = 0, \quad j = 1, 2, ..., m$$

келиб чиқади

$$\alpha x_k^\alpha + \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} x_j^\alpha = b_k, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

бу x_j^α лар векторнинг компонентлари, $\overline{a}_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} a_{ij}$, $b_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_{\varepsilon i}$.

Бу масаланинг x^α ечими регулярлаштирувчи ечим сифатида қабул қилишимиз мумкин, яъни

$$x^\alpha = R(f_\varepsilon, \alpha).$$

Юқоридаги хулосалардан $R(f_\varepsilon, \alpha)$ барча $\alpha > 0$ учун аниқланганлиги келиб чиқади .

Регулярлаштирувчи операторлар оиласининг иккинчи хоссасини исботлаймиз.

Теорема 13.2 . *Фараз қилайлик x^o $Ax = f$ системанинг нормал ечими бўлиб, $||f - f_\varepsilon|| \leq \varepsilon$ бўлсин. Ундан ташқари $\beta_1(\varepsilon)$ ва $\beta_2(\varepsilon)$ функциялар $[0, \varepsilon_2]$ да узлуксиз, мусбат ва $\varepsilon \to 0$ да монотон нолга интилувчи функциялар бўлиб,*

$$\frac{\varepsilon}{\beta_1(\varepsilon)} \leq \beta_2(\varepsilon), \quad \beta_2(0) = 0$$

бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $[0, \varepsilon_2]$ мусбат ва $\frac{\varepsilon}{\beta_1(\varepsilon)} \leq \alpha(\varepsilon) \leq \beta_2(\varepsilon)$ шартни қаноатлантирувчи барча $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ учун $x^{\alpha(\varepsilon)} = R(f_\varepsilon, \alpha(\varepsilon))$ векторлар $\varepsilon \to 0$ да x^0 га интилади, яъни

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||x^{\alpha(\varepsilon)} - x^0|| = 0.$$

Исбот. $Ax = f$ ва $Ax = f_\varepsilon$ системалар классик ечимга эга бўлмаслиги мумкин, шунинг учун

$$\mu = \inf_{x \in R^n} ||Ax - f|| \geq 0, \quad \overline{\mu} = \inf_{x \in R^n} ||Ax - f_\varepsilon|| \geq 0.$$

$x^{\alpha(\varepsilon)}$ $M^\alpha[x, f_\varepsilon]$ функционалга минимум берувчи вектор бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} \overline{\mu}^2 + \alpha||x^\alpha||^2 &\leq M^\alpha[x^\alpha, f_\varepsilon] \leq M^\alpha[x^0, f_\varepsilon] = \\ &= ||Ax^0 - f_\varepsilon||^2 + \alpha||x^0||^2 \leq \\ &\leq (||Ax^0 - f|| + ||f_\varepsilon - f||)^2 + \alpha||x^0||^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq (||Ax^0 - f|| + \varepsilon)^2 + \alpha||x^0||^2 = (\mu + \varepsilon)^2 + \alpha||x^0||^2$$

бўлади.

Шундай қилиб, $\forall \alpha > 0$

$$\overline{\mu}^2 + \alpha||x^\alpha||^2 \leq (\mu + \varepsilon)^2 + \alpha||x^0||^2$$

ёки

$$||x^\alpha||^2 \leq 4(\overline{\mu} + \varepsilon)\varepsilon/\alpha + ||x^0||^2.$$

$\varepsilon/\alpha \leq \beta_1(\varepsilon)$ шартидан фойдаланиб, ушбу

$$||x^\alpha||^2 \leq 4\beta_1(\varepsilon)(\overline{\mu} + \varepsilon) + ||x^0||^2 \leq$$

$$\leq \beta_1(\varepsilon)4(\mu + 2\varepsilon) + ||x^0||^2$$

тенгсизликни оламиз. Бу ердан эса

$$||x^\alpha||^2 \leq \varphi(\varepsilon) + ||x^0||^2 \leq \varphi(\varepsilon_2) + ||x^0||^2,$$

бўлади. Бунда $\varepsilon \to 0$ да $\varphi(\varepsilon) = 4(\mu + 2\varepsilon)\beta_1(\varepsilon) \to 0$ ди. $k \to \infty$ да нолга интилувчи $\delta_k = ||f_{k\varepsilon} - f_k||$ кетма-кетликни оламиз. $f_{k\varepsilon}$ га мос келадиган ва $D \equiv \{x : ||x||^2 \leq \varphi(\varepsilon_2) + ||x^0||^2\}$ ёпиқ соҳага тегишли x^{α_k} $(\alpha_k = \alpha_k(\varepsilon))$ кетма-кетликни қараймиз. Бу кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий $\{x^{\alpha_{k_s}}\}$ кетма-кетлик ажратиш мумкин.

Фараз қилайлик, $\lim\limits_{k_s \to \infty} x^{\alpha_{k_s}} = \tilde{x}$ бўлсин. У ҳолда

$$0 \leq ||Ax^{\alpha_{k_s}} - f|| - \mu \leq ||Ax^{\alpha_{k_s}} - f_{k_\varepsilon}|| + \varepsilon_{k_s} - \mu \leq$$

$$\leq \sqrt{M^{\alpha_{k_s}}[x^{\alpha_{k_s}}, f_{k_\varepsilon}]} - \mu + \varepsilon_{k_s} \leq$$

$$\leq \sqrt{M^{\alpha_{k_s}}[x^0, f_{k_\varepsilon}]} - \mu + \varepsilon_{k_s} =$$

$$= \sqrt{||Ax^0 - f_{k_\varepsilon}||^2 + \alpha_{k_s}||x^0||^2} - \mu + \varepsilon_{k_s} \leq$$

$$\leq \sqrt{(||Ax^0 - f_\varepsilon|| + \varepsilon_{k_s})^2 + \alpha_{k_s}||x^0||^2} - \mu + \varepsilon_{k_s} =$$

$$= \sqrt{(\mu + \varepsilon_{k_s})^2 + \alpha_{k_s}||x^0||^2} - \mu + \varepsilon_{k_s}$$

ўринли бўлади. $\alpha_{k_s} = \alpha(\varepsilon_{k_s}) \leq \beta(\varepsilon_{k_s})$ шартни эътиборга олиб

$$0 \leq ||Ax^{\alpha_{k_s}} - f|| - \mu \leq$$

$$\leq \sqrt{(\mu + \varepsilon_{k_s})^2 + \beta(\varepsilon_{k_s})||x^0||^2} - \mu + \varepsilon_{k_s} = \gamma(\varepsilon_{k_s}),$$

топамиз, бу ерда $\varepsilon \to 0$ да $\gamma(\varepsilon) \to 0$ ди. Демак, $\forall k_s$ учун

$$0 \leq ||Ax^{\alpha_{k_s}} - f|| - \mu \leq \gamma(\varepsilon_{k_s})$$

экан. Охирги тенгсизликда $\kappa_s \to \infty$ лимитга ўтиб,топамиз

$$||A\tilde{x} - f|| = \mu.$$

Бундан эса $\tilde{x}$ нинг псевдо-ечим эканлиги келиб чиқади. Унинг нормаси минимал эканлигидан ва нормал ечимнинг ягоналигидан $\tilde{x} = x^0$ ўринли бўлади. Бу ҳолат эса барча ихтиёрий яқинлашувчи қисмий кетма-кетликлар учун бажарилишидан $\{x^{\alpha_k}\}$ нинг нормал ечимга яқинлашиши келиб чиқади. Бундан эса $\varepsilon \to 0$ да $x^{\alpha(\varepsilon)}$ кетма-кетликнинг x^0 $Ax = f$ масаланинг нормал ечимига интилиши келиб чиқади. Теорема исботланди.

2. Энди қараётган тенгламамизнинг ўнг томони ва матрицаси тақрибий берилган ҳолни қараб чиқамиз, яъни $Ax = f$ тенглама ўрнига

$$A_h x = f_\varepsilon, \quad x \in R^n, \quad f_\varepsilon \in R^m,$$

тенгламани қарайлик, бу ерда $||f - f_\varepsilon|| \le \varepsilon$, ,

$$||A_h - A|| = \sup_{||x||=1} ||A_h x - Ax|| \le h.$$

$$\lim_{\gamma \to 0} ||x_\gamma - x^0|| = 0$$

шартни қаноатлантирувчи x_γ $(\gamma = (\varepsilon, h))$ векторнинг топиш талаб қилинади. Бундай векторлар $Ax - f$ тенгламанинг x^0 нормал ечимига яқинлашувчи тақрибий нормал ечим деб аталади. Буни

$$M^\alpha[x, f_\varepsilon, A_h] = ||A_h x - f_\varepsilon||^2 + \alpha||x||^2$$

функционални минимумлаштириш йўли билан топамиз.

Теорема 13.3 . *Ҳар қандай $f_\varepsilon \in R^m$, A_h ва $\alpha > 0$ лар учун $M^\alpha[x, f_\varepsilon, A_h]$ функционалга минимум берувчи x^α вектор мавжуд.*

13.3-теорема шу параграфдаги $M^\alpha[x, f_\varepsilon]$ учун қилинган мулоҳазалар каби исботланади.

Теорема 13.4 . *Фараз қилайлик, $||f - f_\varepsilon|| \le \varepsilon, ||A - A_h|| \le h$ бўлиб, x^o $Ax = f$ тенгламанинг нормал ечими бўлсин. Ундан ташқари фараз қилайлик берилган $\sigma_1 > 0$ сони учун $\beta_1(\sigma)$, $\beta_2(\sigma)$ функциялар $[0, \sigma_1]$*

кесмада узлуксиз ва мусбат бўлиб, $\sigma \to 0$ да нолга монотон интилиди ва $\sigma/\beta_1(0) \le \beta_2(0)$, $\quad \beta(0) = 0$. У ҳолда ихтиёрий $(0, \sigma_1]$

$$\sigma/\beta_1(0) \le \alpha(0)\beta_2(0), \quad \sigma \in [0, \sigma_1]$$

шартни қаноатлантирувчи $\alpha = \alpha(\delta)$ мусбат функция учун $x^{\alpha(\Delta)} = \tilde{R}(f_2, A_h, \alpha(\Delta))$ (бу ерда $\Delta = hq + \varepsilon \le \sigma_1$) векторлар $\gamma = (\delta, h) \to 0$ да x^o – нормал ечимга интилиди, яъни

$$\lim_{\gamma \to 0} ||x^{\alpha(\Delta)} - x^0|| = 0.$$

Бу ерда q ихтиёрий фиксирланган сон бўлиб, $q > ||x^0||$.

Исбот. Фараз қилайлик, x^α вектор $M^\alpha[x, f_\varepsilon, A_h]$ функционалга R^n да минимум берсин ва $\tilde{\mu} = \inf\limits_{x \in R^n} ||A_h x - f_\varepsilon||$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\alpha > 0$ учун

$$M^\alpha[z^\alpha, f_\varepsilon, A_h] \le M^\alpha[z^0, f_\varepsilon, A_h].$$

Шунинг учун

$$\tilde{\mu}^2 + \alpha||x^\alpha||^2 \le M^\alpha[x^\alpha, f_\varepsilon, A_h] \le M^\alpha[x^0, f_\varepsilon, A_h] =$$
$$= ||A_h x^0 - f_\varepsilon||^2 + \alpha||x^0||^2 \le (||A_h x^0 - Ax^0|| + ||Ax^0 - f_\varepsilon||)^2 + \alpha||x^0||^2 \le$$
$$\le (||A_h - A||||x^0|| + ||Ax^0 - f|| + ||f - f_\varepsilon||)^2 + \alpha||x^0||^2$$

бўлади. Теорема шартини эътиборга олиб, ҳамда $||Ax^0 - f|| = \mu$ эканлигидан ушбу

$$\tilde{\mu}^2 + \alpha||x^\alpha||^2 \le (h||x^0|| + \varepsilon + \mu)^2 + \alpha||x^0||^2$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Қуйидаги тенгсизликлардан эса барча $x \in R^n$ лар учун

$$||Ax - f|| \le ||Ax - A_h x|| + ||A_h x - f_\varepsilon|| + ||f - f_\varepsilon|| \le$$
$$\le h||x|| + ||A_h x - f_\varepsilon|| + \varepsilon,$$
$$||A_h x - f_\varepsilon|| \le ||A_h x - Ax|| + ||Ax - f|| + ||f_\varepsilon - f|| \le$$
$$\le h||x|| + ||Ax - f|| + \varepsilon$$

ва

$$\mu \le \tilde{\mu} + h||x^0|| + \varepsilon,$$
$$\tilde{\mu} \le \mu + h||x^0|| + \varepsilon,$$

келиб чиқади. Бу иккала охирги тенгсизликлардан эса

$$\tilde{\mu}^2 + \alpha||x^\alpha||^2 \leq \{2(h||x^0|| + \varepsilon) + \tilde{\mu}\}^2 + \alpha||x^0||^2$$

ва

$$||x^\alpha||^2 \leq 4\frac{h||x^0|| + \varepsilon}{\alpha}(h||x^0|| + \varepsilon + \tilde{\mu}) + ||x^0||^2 \leq$$

$$\leq 4\frac{h||x^0|| + \varepsilon}{\alpha}(h||x^0|| + \varepsilon + \mu) + ||x^0||^2.$$

$\frac{\Delta}{\alpha} \leq \beta(\Delta)$ шартини қаноатлантирувчи $\alpha = \alpha(\Delta)$ $\quad (\Delta = hq + \varepsilon)$ лар учун

$$||x^\alpha||^2 \leq 4\beta_1(\Delta)(2\Delta + \mu) + ||x^0||^2$$

ёки

$$||x^\alpha||^2 \leq \varphi(\Delta) + ||x^0||^2 \leq \varphi(\sigma_1) + ||x||^2$$

ҳосил қиламиз, бу ерда $\varphi(\Delta) = 4\beta_1(\Delta)(2\Delta + \mu)$. Теорема шартига мувофиқ $\gamma = (\delta, h) \to 0$ да $\varphi(\Delta) \to 0$ ди. Охирги тенгсизлик ихтиёрий $(0, \sigma_1]$ учун $\alpha(\Delta) \geq \frac{\Delta}{\beta_1(\Delta)}$ шартни қаноатлантирувчи мусбат $\alpha(\Delta)$ функциялар учун ўринли. Бундан буён $\alpha = \alpha(\Delta)$ сифатида шундай функцияни тушунамиз. $\{f_k\}$ векторлар кетма-кетлиги ва $\{A_s\}$ матрицалар кетма-кетлигини қуйидагича танлаб оламиз:

$$||f_{\varepsilon_k} - f|| = \varepsilon_k, \quad ||A_h - A|| = h_s,$$

бу ерда $k \to \infty$ да $\varepsilon_k \to 0$, $s \to \infty$ эса $h_s \to 0$ ди . Бу кетма-кетликка $D = \{x; ||x||^2 \leq \varphi(\sigma_1) + ||x^0||^2\}$ ёпик соҳага тегишли $x^{\alpha_{k,s}}$ $(\alpha_{ks} = \alpha(\Delta_{k,s}) = \alpha(h||x^0|| + \varepsilon_k))$ векторлар кетма-кетлиги мос келади. Бу $\{x^{\alpha_{k,s}}\}$ кетма-кетликдан эса яқинлашувчи қисмий $\{x^{\alpha_{k_r,s_t}}\}$ кетма-кетлик ажратиш мумкин. Фараз қилайлик,

$$\lim_{k_r, s_t \to 0} x^{\alpha_{k_r,s_t}} = \tilde{x}$$

бўлсин. Қулайлик учун $x^{\alpha_{k_r,s_t}} = x_{r,t}$, $\alpha_{k_r,s_t} = \alpha^{r,t}$ деб белгилаймиз. Ихтиёрий k_r, s_t учун ушбу тенгсизликлар

$$0 \leq ||Ax_{r,t} - f|| - \mu \leq$$

$$\leq ||(A_h)_{s_t}x_{r,t} - f_{\varepsilon_{k_r}}|| + ||(A_h)_{s_t}x_{r,t} - Ax_{r,t}|| + ||f_{\varepsilon_{k_r}} - f|| - \mu \leq$$

$$\leq ||(A_h)_{s_t}x_{r,t} - f_{\varepsilon_{k_r}}|| + h_{s_t}||x_{r,t}|| + \varepsilon_{k,r} - \mu \leq$$

$$\le \sqrt{M^{\alpha^{r,t}}[x_{r,t}, f_{\varepsilon_{k_r}}, (A_h)_{s_t}]} + h_{s_t}||x_{r,t}|| + \varepsilon_{k,r} - \mu \le$$

$$\le \sqrt{M^{\alpha^{r,t}}[x^0, f_{\varepsilon_{k_r}}, (A_h)_{s_t}]} + h_{s_t}||x_{r,t}|| + \varepsilon_{k,r} - \mu \le$$

$$\le \sqrt{||(A_h)_{s_t}x^0 - f_{\varepsilon_{k_r}}||^2 + \alpha^{r,t}||x^0||^2} + h_{s_t}||x_{r,t}|| + \varepsilon_{k,r} - \mu \le$$

$$\le \sqrt{||(A_h)_{s_t}x_0 - Ax^0|| + ||Ax^0 - f|| + ||f_{\varepsilon_{k_r}} - f||)^2 + \alpha^{r,t}||x^0||^2} +$$

$$+ h_{s_t}||x_{r,t}|| + \varepsilon_{k,r} - \mu \le$$

$$\le \sqrt{(h_{s_t}||x_0|| + \varepsilon_{k,r} + \mu)^2 + \alpha^{r,t}||x^0||^2} + + h_{s_t}||x_{r,t}|| + \varepsilon_{k,r} - \mu$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Қуйидаги

$$\alpha_{r,t} = \alpha_{k_r,s_t} = \alpha(\Delta_{k_r,s_t}) \le \beta_2(\Delta_{k_r,s_t}$$

шартдан фойдаланиб топамиз

$$0 \le ||Ax_{r,t} - f|| - \mu \le$$

$$\le \sqrt{(\Delta_{k_r,s_t} + \mu)^2 + \beta_2(\Delta_{k_r,s_t})||x^0||^2} + h_{s_t}||x_{r,t}|| + \varepsilon_{k,r} - \mu,$$

бу ерда $\Delta_{k_r,s_t} = h_{s_t}||x^0|| + \varepsilon_{k_r}$.

Шундай қилиб, ихтиерий k_r, s_t сонлар жуфтлиги учун қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$||x_{r,t}|| \le [\varphi(\Delta_{k_r,s_t}) + ||x^0||^2]^{1/2}.$$

Бу ерда k_r ва $s_t \to \infty$ да лимитга ўтиб топамиз

$$||A\tilde{x} - f|| = \mu.$$

Бу эса $\tilde{x}$ ни $Ax = f$ тенглама учун псевдоечим эканлигини билдиради. Бу ечим эса минимал нормага эга. $Ax = f$ тенгламанинг нормал ечими ягона эканлигидан $\tilde{x} = x^0$ тенглик келиб чиқади. Бу фикрни ҳар қандай $\{x^{\alpha_{k,s}}\}$ кетма-кетлик учун такрорлашимиз мумкин. Теорема исботланди.

Энди x^0 нормал ечимга яқинлашувчи тақрибий ечимни қуриш масаласига қараймиз.

Ушбу

$$Q_\gamma = \{x : ||Ax - f_\varepsilon|| \le 2(h||x|| + \varepsilon) + \tilde{\mu}\}$$

тўпламга тегишли ва $\Omega[x] = ||x||^2$ функционалга минимум берувчи векторни топинг.

Лемма 13.1 . *Q_r тўпламда $\Omega[x] = ||x||^2$ функционалга минимум берувчи x_γ вектор*

$$||(A_h)x_\gamma - f_\varepsilon|| = 2(h||x_\gamma|| + \varepsilon) + \tilde{\mu}$$

шартни қаноатлантради.

Шундай қилиб, юқоридаги масала минимал нормага эга бўлган ва $||(A_h)x - f_\varepsilon|| = 2(h||x|| + \varepsilon) + \tilde{\mu}$ шартни қаноатлантирувчи x_γ векторини топишга келади.

Агар ε ва h маълум бўлса, бу масалани Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилар усули билан ечамиз, яъни (бутун R^n фазосида)

$$M^\alpha[x, f_\varepsilon, A_h] = ||(A_h)x - f_\varepsilon||^2 + \alpha||x||^2$$

функционалга минимум қиймат берувчи x^α –векторини топамиз, бу ерда α параметр

$$||(A_h)x - f_\varepsilon|| = 2(h||x^\alpha|| + \varepsilon) + \tilde{\mu}$$

шартдан топилади.

Изоҳ.Ёмон шартлашган ва бузиладиган (вырождающиеся -рус тилида) чизиқли алгебраик тенгламалар системаси А.Н.Тихонов томонидан киритилган регуляризация усули билан нормал ечимини топишни [24]-га мувофиқ ёздик.

§ 14. Чизиқли биринчи тур интеграл тенгламаларни Тихонов усули бўйича регуляризациялаш

Қуйидаги

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [c,d], \tag{14.1}$$

$$\int_a^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [c,d], \tag{14.2}$$

интеграл тенгламаларни қарайлик. Бу ерда $K(t,s)$ ва $f(t)$ -берилган узлуксиз функциялар, $x(t)$ эса номаълум функция. (14.1) ва (14.2) тенгламада қатнашаётган $K(t,s)$ функция интеграл тенгламанинг ядроси дейилади. (14.1) тенглама Фредгольм I тур интеграл тенгламаси, (14.2) эса Вольтерра I тур интеграл тенгламаси деб юритилади.

Энди (14.1) тенгламани $f(t)$ функцияга нисбатан турғун эмаслигини кўрсатамиз. Бунинг учун юқори частотали чекли амплитудали $\delta x(s) = \exp(i\omega s)$ ечим ўзгаришини оламиз. Унга $f(t)$ функциянинг ўнг томонининг қуйидаги

$$\delta f(t) = \int_a^b K(t,s)\delta x(s)ds = \int_a^b K(t,s)\exp(i\omega s)ds$$

ўзгариши мос келади. Охирги тенгликни бўлаклаб интеграллаймиз ва

$$\delta f(t) = \frac{1}{i\omega}\exp(i\omega s)K(t,s)|_a^b - \frac{1}{i\omega}\int_a^b \frac{\partial K(t,s)}{\partial s} exp(i\omega s)\,ds = O(\frac{1}{\omega})$$

ифодани топамиз.

Бундан етарлича катта ω частоталар учун $||\delta f||_C = 0(1/\omega)$ катталикнинг етарлича кичик ўзгариши мос келиши кўринади, яъни, (14.1) тенгламада $f(t)$ ўнг томоннинг етарлича кичик ўзгаришига $x(s)$ ечимнинг етарлича катта ўзгаришига мос келади.

Демак, (14.1) Фредгольм I тур интеграл тенгламаси $f(t)$ функцияга нисбатан нокоррект масала экан. Худди шундай мулоҳазалар (14.2) Вольтерра типидаги I тур интеграл тенглама учун ҳам ўринли.

Сонли дифференциаллаш масаласи қуйидаги

$$\int_a^t x(s)\,ds = f(t)$$

Вольтерра типидаги I тур интеграл тенгламага эквивалент эканлигини кўрсатиш қийин эмас.

1. Регуляризациялаштирувчи тақрибий ечим қуришнинг вариацион усули.

(14.1) Фредгольм биринчи тур интеграл тенгламасини қараймиз. Бу тенглама ядроси $K(t,s)$ узлуксиз ва ўнг томон $f(t) = 0$ бўлганда унинг ечими $x(t) \equiv 0$ бўлсин. Бундан агар (14.1) тенгламанинг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир, деган хулосага келиш мумкин, яъни интеграл оператор

$$A[t,x(s)] = \int_a^t K(t,s)x(s)ds \tag{14.3}$$

X фазони F фазога ўзаро бир қийматли акслантиради.

Бошланғич масалани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин

$$\int_c^d \{A[t, x(s)] - f(t)\}^2 dt = min, \qquad (14.4)$$

бу ерда A оператор (14.3) формула билан аниқланган. Энди бу масаланинг А.Н. Тихонов кўрсатгандек ўзгартирилган шаклини келтирамиз:

$$M[\alpha, f(t), x(s)] \equiv \int_c^d \{A[t, x(s)] - f(t)\}^2 dt + \alpha\Omega[x(t)] = min, \qquad (14.5)$$

бу ерда Ω биринчи тартибли Тихонов стабилизатори бўлиб,

$$\Omega[x(t)] = \int_a^b \{q(s)x^2(s) + p(s)(x'(s))^2\} ds, \qquad (14.6)$$

$q(s), p(s)$ берилган $[a, b]$ да узлуксиз функциялар ушбу тенгсизликларни $q(s) \geq 0,\ p(s) > p_0 > 0$ қаноатлантиради. X фазосида $||x||_X^2 = \Omega[x]$ кўринишдаги норма киритамиз; ҳосил бўлган X фазони одатда Соболев фазоси W_2^1 деб, F – фазони эса Гильберт фазоси деб оламиз. Функционал анализ усуллар ёрдамида (14.5) масала ечими (14.4) масала учун регулярлаштирувчи оила ҳосил қилишни кўрсатамиз.

Теорема 14.1 . *Ҳар қандай $f(x) \in F$ ва $\alpha > 0$ учун (14.5) масала $x_\alpha(s)$ ечимга эга.*

Исбот. $\alpha > 0$ бўлганда $M[\alpha, f, x]$ функционалнинг қуйидан чегараланган эканлигини исботлаш қийин эмас. Шундай қилиб, берилган α ва $f(t)$ учун у қуйи аниқ чегарага эга.

Шу функционални минимумлаштирувчи $x_k(s), k = 0, 1, 2, ...$, кетма-кетлик тузамиз. У қуйидаги

$$\lim_{k\to\infty} M_k = \overline{M},\ M_k = M[\alpha, f, x_k],\ \overline{M} = \inf_{x\in X} M[\alpha, f, x].$$

$\{M_k\}$ ни ушбу $M_0 \geq M_1 \geq M_2 \geq ... \geq M_k \geq ...$ кўринишда тартибга соламиз У ҳолда

$$\Omega[x_k] \leq (1/\alpha)M_k \leq (1/\alpha)M_0 = const.$$

Бу ердан $\{x_k(s)\}$ кетма-кетлик шундай $x(s)$ функциялар тўпламига тегишлики, улар учун $\Omega[x] \leq const$ бўлиши келиб чиқади. Табиийки бу тўплам X фазода компакт бўлади. Шунинг учун $x_k(s)$ кетма-кетликдан норма бўйича бирор $x_\alpha(s)$ функцияга яқинлашадиган $x_{k_i}(s)$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин. $M[\alpha, f, x]$ функционал узлуксиз эканлигидан шу x_α элементда ўзининг қуйи қийматига эришади. Бундан эса $x_\alpha(s)$ функция (14.5) масаланинг ечими эканлиги келиб чиқади.

Шу билан теорема исботланди.

Теорема 14.2 . *(14.5) масала ечими (14.4) масала учун регуляр-лаштирувчи ечим бўлади.*

Исбот. $\overline{x}$ билан (14.4) масаланинг берилган $\overline{f}(x)$ даги ечими бўлсин; $\tilde{x}_\alpha(s)$ эса (14.5) масаланинг тақрибий берилган $\tilde{f}(x)$ ўнг томонга мос келадиган ечими, ундан ташқари $f_\alpha = A[t, x_\alpha(s)]$ бўлсин.

$M[\alpha, \tilde{f}, x]$ функционал ўзининг минимумини $\tilde{x}_\alpha$ да эришишидан $M[\alpha, \tilde{f}, \tilde{x}_\alpha] \leq M[\alpha, \tilde{f}, \overline{x}]$ ни ҳосил қиламиз. Бу ердан ва $M[\alpha, f, x]$ функционалнинг аниқланишидан ушбу

$$\alpha\Omega[\tilde{x}_\alpha] \leq M[\alpha, \tilde{f}, \tilde{x}_\alpha] \leq M[\alpha, f, \overline{x}] =$$

$$= \int\limits_c^d \{A[t, \overline{x}] - \tilde{f}(t)\}^2 dt + \alpha\Omega[\overline{x}] = \int\limits_c^d \{\overline{f}(t) - \tilde{f}(t)\}^2 dt + \alpha\Omega[\overline{x}] =$$

$$= ||\overline{f}(t) - \tilde{f}(t)||^2_{L_2} + \alpha\Omega[\overline{x}]. \qquad (14.7)$$

ифодани топамиз. Фараз қилайлик, ўнг томоннинг тақрибий қиймати қуйидаги баҳони қаноатлантирсин

$$||\overline{f}(t) - \tilde{f}(t)||_{L_2} \leq C\sqrt{\alpha}, \quad C = const. \qquad (14.8)$$

У ҳолда (14.7) ифодадан

$$\Omega[\tilde{x}_\alpha] \leq C^2 + \overline{\Omega} = const, \quad \overline{\Omega} = \Omega[\overline{x}] \qquad (14.9)$$

келиб чиқади.

Бундан эса x_α ечимларнинг X_0 – компакт тўпламга тегишли бўлиши келиб чиқади. Аниқлик киритамизки $\overline{x}$ ҳам $X_0 \subset X$ га тегишли.

$f_\alpha(x)$ функциялар тўплами F_0 A оператор орқали аксланган X_0 тўпламнинг образидир. A интеграл оператор узлуксиз ва шартга мувофиқ тескари акслантириш ягонадир. Шунинг учун A^{-1} регуляризация қилинмаган оператор билан F_0 ни X_0 компакт тўпламга тескари акслантириш $|| \cdot ||_X$ нормада узлуксиздир. Шундай қилиб берилган $\varepsilon > 0$ бўйича шундай $\beta(\varepsilon)$ топиладики, агар $||f - f_\alpha|| \leq \beta(\varepsilon)$ бўлса $||\tilde{x}_\alpha - x|| \leq \varepsilon$ бўлади.

Такидлаймизки

$$||\tilde{f} - f_\alpha||^2 = \int_c^d (\tilde{f} - f_\alpha)^2 dt = \int_c^d (A[t, \tilde{x}_\alpha] - \tilde{f})^2 dt \leq$$

$$\leq M[\alpha, \tilde{f}, \tilde{x}_\alpha] \leq \alpha(C^2 + \overline{\Omega}).$$

Бу ердан (14.8) - ни эътиборга олиб

$$||f_\alpha - \overline{f}|| \leq ||f_\alpha - \tilde{f}|| + ||\overline{f} - \tilde{f}|| \leq \sqrt{\alpha}(C + \sqrt{(C^2 + \overline{\Omega})}). \quad (14.10)$$

топамиз. α ни қуйидаги шартни қаноаилантирадиган қилиб танлаймиз

$$\alpha \leq \alpha_0(\varepsilon), \ \alpha_0(\varepsilon) = [\frac{\beta(\varepsilon)}{C + \sqrt{C^2 + \overline{\Omega}}}]^2.$$

У ҳолда (14.10) - нинг ўнг томони $\beta(\varepsilon)$ дан кичик бўлади, бундан эса

$$||\tilde{x}_\alpha - \overline{x}|| \leq \varepsilon$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган ε бўйича шундай $\alpha_0(\varepsilon)$ ва $\delta(\alpha) = C\sqrt{\alpha}$ топиладики, агар $\alpha \leq \alpha_0(\varepsilon)$ ва $||\tilde{f} - \overline{f}|| \leq \delta(\alpha)$ бўлса, у ҳолда $||\tilde{x}_\alpha - \overline{x}|| \leq \varepsilon$ бўлади. Теорема исботланди.

Натижа 14.1 *(14.5) масала ҳар бир $\alpha > 0$ учун коррект қўйилган масаладир.*

Ҳақиқатан, (14.2) теоремада барча жойда A ўрнига (14.5) регулярлаштирувчи алгоритмни қўйиб чиқамиз. Натижада $||\tilde{x}_\alpha - \overline{x}||$ ни кичиклиги $\tilde{x}_\alpha$ нинг $\tilde{f}$ га узлуксиз боғлиқ эканлигини билдиради.

Эйлер тенгламаси. A операторнинг (14.3) кўринишидан фойдаланиб, (14.5) масалани қуйидагича ифодалаймиз

$$\int\limits_c^d dt \left\{ \int\limits_a^b K(t,s)u(s)ds - f(t) \right\}^2 +$$

$$+\alpha \int\limits_a^b \left\{ q(s)x^2(s) + p(s)(x'(s)) \right\}^2 ds = min$$

Энди бу вариацион масала учун Эйлер тенгламасини ёзамиз. Бунинг учун чап томоннинг $x(s)$ бўйича биринчи вариациясини нолга тенглаштирамиз:

$$\int\limits_c^d dt \left\{ \int\limits_a^b K(t,\eta)x(\eta)d\eta - f(t) \right\} \int\limits_a^b K(t,s)\delta x(s)ds +$$

$$+\alpha \int\limits_a^b \left(q(s)x(s)\delta x(s) + p(s)x'(s)\delta x'(s) \right) ds = 0 \qquad (14.11)$$

Охирги ҳадларга бўлаклаб интеграллаш усулини қўллаб, ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_a^b p(s)x'(s)\delta x'(s)ds =$$

$$= \delta x(s)p(s)x'(s)|_a^b - \int\limits_a^b \delta x(s)(p(s)x'(s))'_s ds$$

Ҳосил бўлган ифодани (14.11) га қўйиб, қилинган баъзи ўзгартиришлардан кейин топамиз

$$\int\limits_a^d dt \int\limits_a^b K(t,\eta)x(\eta)d\eta - \int\limits_a^b K(t,s)\delta x(s)ds +$$

$$+\alpha \int\limits_a^b q(s)x(s)\delta x(s)ds -$$

$$-\alpha \int\limits_a^b \frac{d}{ds}[p(s)\frac{dx}{ds}]\delta x(s)ds + p(s)\frac{dx(s)}{ds}\delta x(s)|_a^b$$

Бу тенгламада δ функцияни $\delta x(s)$ вариацияси деб фараз қилсак, у ҳолда Эйлер тенгламасини

$$\alpha \left\{ q(s)x(s) - \frac{d}{ds}[p(s)\frac{dx}{ds}] \right\} +$$

$$+ \int\limits_a^b \overline{K}(s,\eta)x(\eta)d\eta = g(s), a \le s \le b, \qquad (14.12)$$

ҳосил қиламиз, бу ерда

$$\overline{K}(s,\eta)=\int_a^d K(t,s)K(t,\eta)ds,$$

$$g(s)=\int_c^d K(t,s)f(t)dt,$$

Ундан ташқари чегарвий шартлар

$$p(a)x'(a)=p(b)x'(b)=0$$

ёки

$$x(a)=x(b)=0. \tag{14.13}$$

$\overline{K}(s,\eta)$ ядро $a\le s,\ \eta\le b$ квадратда аниқланган, симметрик ва узлуксиз бўлиб, ўнг томон $g(s)$ эса узлуксиз функциядир.

Теорема 14.3 . *Ҳар қандай $\alpha>0$ учун (14.12)-(14.13) масала коррекtдир.*

Исбот. $p(s)=0, q(s)=1$ бўлган ҳолни қараймиз. Унда (14.13) тенглама Фредгольм иккинчи тур интеграл тенгламаси

$$\alpha x(s)+\int_a^b \overline{K}(s,\eta)x(\eta)d\eta=g(s) \tag{14.14}$$

кўринишини олади.

Қуйидаги белгилашни киритамиз $Lx\equiv\int_a^b \overline{K}(s,\eta)x(\eta)d\eta$, бу операторнинг хос сонлари λ_i, хос функциялари эса x_i бўлсин. У ҳолда

$$x_i(s)=\lambda_i\int_a^b x_i(\eta)d\eta\int_c^d K(t,s)K(t,\eta)dt$$

тенгламанинг иккала томонини $x_i(s)$ га кўпайтириб интеграллашдан кейин топамиз

$$0<\int_a^b (x_i(s))^2ds=\lambda_i\int_c^d d\eta\{\int_a^b K(\eta,s)x_i(s)ds\}^2.$$

Бу ердан кўринадики λ_i ларнинг барчаси мусбатдир.

У ҳолда Фредгольм интеграл тенгламасининг назариясига мувофиқ ҳар қандай $\alpha>0$ учун (14.13) тенглама ягона ечимга эга ва ўнг

томон
$g(s)$ га узлуксиз боғлиқ.

Шундай қилиб, $p(s) = 0$, $q(s) = 1$ бўлганда (14.12) масала ва унга эквивалент (14.5) масала корректдир.

$q(s) \geq 0$, $p(s) > p_0 > 0$ бўлган ҳолда (14.12) масалани интеграл тенгламага келтирамиз. (14.12) масаланинг ўнг томонидаги дифференциал операторнинг чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $G(s,\tau)$ Грин функциясини қўрамиз. Интегралли ҳадларни дифференциал тенглама ўнг томони деб ҳисоблаб, унинг ечимини Грин функцияси ёрдамида ёзамиз:

$$\alpha x(s) + \int_a^b x(\eta)d\eta \int_a^b G(s,\tau)\overline{K}(\tau,\eta)d\tau = \int_a^b G(s,\tau)g(\tau)d\tau.$$

Шундай қилиб, $x(s)$ Фредгольм иккинчи тур интеграл тенгламасини қаноатлантиради. Бу тенгламанинг ядроси эса фақат мусбат хос қийматларга эга. (14.12) масала бу ҳолда ҳам корректдир.

Теорема 14.4. *Фараз қилайлик $A[s,x] = f$ бўлсин. У ҳолда мусбат нолга интилувчи α лар учун (14.12)-(14.13) масала $x_\alpha(s)$ ечими бошланғич масала ечими $x(s)$ га текис интилади.*

Исбот. (14.12)-(14.13) масаланинг $x_\alpha(s)$ ечими ихтиёрий ўнг томон учун икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функциядир. Коши - Буняковский тенгсизлигидан фойдаланиб, топамиз

$$\left(\int_s^{s+\delta} |x'_\alpha(\tau)|\,d\tau\right)^2 \leq \int_s^{s+\delta} d\tau \int_s^{s+\delta} |x'_\alpha(\tau)|^2\,d\tau) \leq$$

$$\leq \delta \int_a^b |x'_\alpha(\tau)|^2\,d\tau \leq \frac{\delta}{p_0}\Omega[x_\alpha]. \qquad (14.15)$$

$\alpha > 0$ параметрнинг ҳар хил қийматларига ва битта $\overline{f}$ га мос келадиган $\bar{x}_\alpha$ ларнинг тўпламини қараймиз. (14.7) тенгсизликда f ни $\overline{f}$ билан алмаштириб

$$\Omega[\bar{x}_\alpha] \leq \overline{\Omega}, \quad \overline{\Omega} = \Omega[\overline{x}] \qquad (14.16)$$

топамиз. (14.15) ва (14.16) тенгсизликлардан

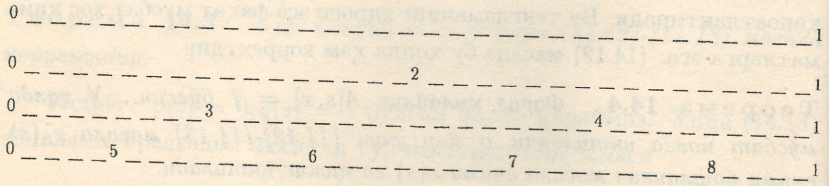
$$|\overline{x}_\alpha(s+\delta) - \overline{x}_\alpha(s)| \leq \int_s^{s+\delta} |\overline{x}'_\alpha(\tau)|d\tau \leq \sqrt{\frac{\delta}{p_0}\overline{\Omega}}. \qquad (14.17)$$

келиб чиқади. Охирги тенгсизлик эса $\overline{x}_\alpha(s)$ функциялар тўпламининг текис даражали узлуксиз эканлигини билдиради. Ундан ташқари Ω функционалнинг таърифига мувофиқ

$$|x_\alpha(s)| \leq \int\limits_a^s |x'_\alpha(s)|ds \leq \sqrt{\frac{(b-a)}{p_0}\Omega}.$$

Бу эса x_α функцияларнинг текис чегараланганлигини билдиради.

Фараз қилайлик, $\alpha \to 0$ да $x_\alpha(s)$ функциялари $x(s)$ текис яқинлашмасин, яъни ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай $\alpha \to 0$ кетма-кетлик топиладики, улар учун $||\overline{x}_\alpha(s) - \overline{x}(s)|| \geq \varepsilon$ бўлади. $a \leq s \leq b$ оралиқда икки марта қуюқлашувчи нуқталар кетма-кетлигини кўрамиз. Бу турнинг нуқталар сони саноқлидир. Уларни 1 - расмдагидек номерлаймиз.



1 - расм.

У ҳолда N та тугун нуқтали ҳол учун қўшни тугун нуқталар учун улар орасидаги масофа $\delta = 2(b-a)/N$ дан ошмайди. x_{α_k} чегараланган функциялар тўпламидан s_1 тугун нуқтада яқинлашувчи функциялар кетма-кетлигини ажратамиз. Бу кетма- кетликдан эса s_2 да яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратамиз ва ҳоказо. Натижада ҳар бир s_i тугун нуқтада $\hat{x}(s_i)$ га яқинлашувчи қисмий кетма-кетликларга эга бўламиз.

Фараз қилайлик, $N = 18(b-a) \times \overline{\Omega}_1 \varepsilon^{-2}$ бўлсин, бу ерда $\varepsilon > 0$ етарлича кичик миқдор. $\alpha_0(\varepsilon)$ ни шундай кичик қилиб танлаймизки, $\alpha < \alpha_0(s)$ бўлганда барча $i \leq N$ номердаги s_i тугун нуқталарда $|\hat{x}_{\alpha_k}(s_i) - \hat{x}(s_i)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ тенгсизлик бажарилсин. Қўшни тугун нуқталар орасидаги масофа шунчалик кичикки (14.17) га мувофиқ $\hat{x}_{\alpha_k}(s_i)$ нинг қўшни тугун нуқталардаги фарқи $\varepsilon/3$ дан кичик бўлади. У ҳолда

$\hat{x}(s_i)$ нинг кўшни тугун нуқталардаги қиймати ҳам $i \leq N$ номерлар учун ε дан кичикка фарқ қилади.

Бу ердан биринчидан, $\hat{x}(s)$ функцияни $a \leq s \leq b$ барча нуқталарига шундай кўшимча аниқлашимиз мумкинки, натижада бу функция барча ерда узлуксиз бўлиши келиб чиқади.

$\hat{x}_{\alpha_k}(s)$ масаланинг ечимидир. Бу функцияни (14.5) га қуйиб $\alpha \to 0$ да кўрамизки $\hat{x}(s)$ бу масаланинг $\alpha = 0$ даги ечими, яъни (14.5) масаланинг ечимидир. Бошланғич масала ечими ягона эканлигидан $\hat{x}(s) = x(s)$ ни ҳосил қиламиз.Бу эса исбот даврида қилинган фаразга қаршидир. Бу қарама-қаршилик теоремани исботлайди.

Теорема 14.5 . *(14.5) алгоритм кучли регуляризацияни таъминлайди.*

Исбот. Ихтиерий етарлича кичик $\varepsilon > 0$ танлаймиз.14.4 теорема - дан келиб чиқадики, шундай $\alpha_0(\varepsilon)$ мавжудки $\alpha \leq \alpha_0(\varepsilon)$ бўлганда $||\hat{x} - \overline{x}_\alpha|| \leq \varepsilon/2$ бўлади. 14.1 теоремага мувофиқ (14.5) масала коррект, шунинг учун ихтиёрий берилган $\alpha > 0$ учун шундай $\delta(\alpha)$ мавжудки, $||\overline{f} - \hat{f}|| \leq \delta(\alpha)$ бўлганда $||\overline{x}_\alpha - \hat{x}_\alpha|| \leq \varepsilon/2$ бўлади.

Шундай қилиб , агар $\alpha \leq \alpha_0(\varepsilon)$ ва $||\overline{f} - \hat{f}|| \leq \delta(\alpha)$ бўлса,

$$||\hat{x}_\alpha - \overline{x}||_C \leq ||\hat{x}_\alpha - \overline{x}_\alpha||_C + ||\hat{x}_\alpha - \overline{x}||_C \leq \varepsilon$$

бўлади. Теорема исботланди.

Айирмали схемалар.

(14.5) масалага мос келувчи дискрет масалани ёзишга уринамиз. Бунинг учун оддий айирмали схема тузиш усулини қўллаймиз. $[c \leq t \leq d, a \leq s \leq b]$ тўғри тўртбурчакни тўр соҳа $\{(t_n, s_m) : t_0 = c,\ t_N = d,\ s_0 = a,\ s_M = b, t_n = c + nh_t,\ s_m = a + mh_s,\ n = 0, 1, 2, ..., M\}$ билан алмаштирамиз. Оддийлик учун $p(t) = q(t) = 1,$ ундан ташқари бўлинишлар бир хил. Бу чегараланишлар остида (14.5) масала ушбу кўринишда ёзилади:

$$\int\limits_c^d \left\{ \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds - f(t) \right\}^2 dt + \alpha \int\limits_a^b \left[x^2(s) + (x'(s))^2\right] ds = \min .$$

Бу масалани айирмали схемасини ёзиш учун квадратур формулалардан фойдаланамиз ва функциянинг тугун нуқталарини қийматини ёзамиз. $\int_a^b (x'(s))^2 ds$ интегрални ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, ушбу

$$\int_a^b (x'(s))^2 ds = \sum_{m=0}^{M-1} \int_{s_m}^{s_{m+1}} (x'(s))^2 ds \approx \sum_{m=0}^{M-1} (x'(s))^2|_{s_{m+1/2}} (s_{m+1} - s_m) \approx$$

$$\approx \sum_{m=0}^{M-1} h_s \left[\frac{[x(s_{m+1}) - x(s_m)]}{h_s} \right]^2 = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{[x(s_{m+1}) - x(s_m)]^2}{h_s}.$$

кўринишда ёзамиз. Қолган интегралларни трапеция формуласидан фойдаланиб, ёзамиз

$$\int_a^b x^2(s) ds \approx h_s \sum_{m=0}^{M} c_m x_m^2, \quad x_m = x(s_m),$$

$$\int_a^b K(t,s) x(s) ds \approx h_s \sum_{m=0}^{M} c_m K_{nm} x_m, \quad K_{nm} = K(t_n, s_m),$$

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b K(t,s) x(s) ds - f(t) \right\}^2 dt \approx h_t \sum_{n=0}^{N} b_n \left[h_s \sum_{m=0}^{M} c_m K_{nm} x_m - f_n \right]^2,$$

бу ерда $c_m = 1$, барча $1 \leq m \leq M-1$ лар учун, $c_0 = c_M = 1/2$, $b_n = 1$ барча $1 \leq n \leq N-1$ лар учун, $b_0 = b_N = 1/2$.

Айирмали масала ечимини y_m (тақрибий ечим) билан белгилаб, бошланғич интегро-дифференциал вариацион масала ўрнига қуйидаги алгебраик масалани ҳосил қиламиз

$$h_t \sum_{n=0}^{N} b_n [h_s \sum_{m=0}^{M} c_m K_{nm} y_m - f_n]^2 +$$

$$+ \alpha h_s \sum_{m=0}^{M} c_m y_m^2 + \frac{\alpha}{h_s} \sum_{m=0}^{M-1} (y_{m+1} - y_m)^2 = \min. \qquad (14.18)$$

Масала шу охирги кваратик формани минимумини топишдан иборат. Бу масалани ечиш учун охирги тенгликни чап томонидан y_m бўйича ҳосиласини нолга тенглаштирамиз:

$$\alpha y_m - \frac{\alpha L(y_m)}{c_m} + h_s \sum_{l=0}^{M} c_l Q_{ml} y_l = \Phi_m, \quad 0 \leq m \leq M; \qquad (14.19)$$

бу ерда

$$L(y_m) = \frac{y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}}{h_s^2} \text{ барча} 1 \leq m \leq M-1 \text{лар учун,}$$

$$L(y_0) = \frac{y_1 - y_0}{h_s^2}, \quad L(y_M) = \frac{y_{M-1} - y_M}{h_s^2};$$

$$Q_{ml} = h_t \sum_{n=0}^{N} b_n K_{nm} K_{nl}, \quad \Phi_m = h_s \sum_{n=0}^{N} b_n K_{nm} f_n.$$

Охирги ҳосил бўлган система матрицасининг элементлари нолдан фарқли бўлгани учун Гаусс усулини қўллаб ечишимиз мумкин.

Машқлар.

1. (14.19) айирмали схема (14.5) масалани иккинчи тартиб билан аппроксимация қилишини исботланг.

2.(14.12) масалани айирмали схемаси ҳам (14.19) кўринишда бўлишини кўрсатинг ва уни (14.19) билан таққосланг.

3.p каррали дифференциаллаш масаласини қараймиз:

$$u(x) = f^{(p)}(x)$$

ва уни ушбу интеграл кўринишда ёзамиз

$$\frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-s)^{p-1} u(s) ds = f(x).$$

Шу охирги масаланинг регулярлашган тақрибий ечимини топинг.

Изоҳ. Нокоррект масалаларни регуляризациялаш А.Н.Тихонов томонидан киритилган бўлиб , бу усулнинг биринчи тур интеграл тенгламаларга ва бошқа нокоррект масалаларга қўлланиши [24] -да келтирилган. Биз бу усулни [10] бўйича ёритишни маъқул топдик.

III боб. Оператор тип коэффициентли дифференциал тенгламалар

Биз бу бобда дифференциал-оператор тенгламаларга қўйилган масалаларни шартли корректликга текширамиз ва уларни тақрибий ечимларини қурамиз. Шунинг учун бу бобни баён этишда фойдаланадиган баъзи бир тушунча ва теоремаларни имкони борича исботсиз С.Г.Крейн [12] ва М.М.Лаврентьев, Л.Я.Савельев [18] асарларига асосланиб келтрамиз.

§ 15. Чегараланмаган операторлар

Гильберт фазолари. H Гильберт фазоси деб, норма $||x||^2 = (x,x)$ скаляр кўпайтма билан аниқланган Банах фазосига айтилади.

Скаляр кўпайтма деганда қуйидаги хоссаларга эга (x,y) $(x,y \in H)$ функционал тушунилади:

1) $(x,y) > 0,$ агарда $x \neq 0$; $\quad (x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$;
3) $(x_1 + x_2,\ y) = (x_1,y) + (x_2,y)$;
4) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$.

Ушбу Коши-Буняковский тенгсизлиги ўринли

$$|(x,y)| \leq ||x|| ||y||.$$

Агар $(x,z) = 0$ бўлса, x ва z элементлар $(x,z \in H)$ ортогонал дейилади. z элемент H_1 қисм фазога ортогонал дейилади, агар у H_1 қисм фазонинг ҳар бир элементига ортогонал бўлса.

Фараз қилайлик, H_1 H нинг қисм фазоси бўлсин, у ҳолда H нинг ҳар бир x элементини бирдан-бир имконият билан $x = y + z$ кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда $y \in H_1$. y эса x элементининг H_1 даги проекцияси деб аталади: $y = P_{H_1}x$.

Бутун фазо иккита ўзаро ортогонал қисм фазолар йиғиндисига (ортогонал йиғиндига) ёйилади: $H = H_1 \oplus M$, бу ерда M H_1 қисм фазога ортогонал элементлар тўплами.

Риссниг Гильберт фазосида чизиқли функционалнинг умумий кўриниши ҳақидаги теоремаси ўринли:

H Гильберт фазосидаги $f(x)$ ихтиёрий чизиқли функционал бирдан-бир ушбу кўринишда ифодаланади:

$$f(x) = (x, u), \quad \text{бу ерда } u \in H. \tag{15.1}$$

Ва тескариси, (15.1) кўринишга эга бўлган ҳар қандай функционал H фазодаги чизиқли функционал бўлади ва $||f|| = ||u||$.

Бу билан қўшма H^* фазо ва берилган H фазо орасида боғлиқлик ўрнатилади. Бу боғлиқлик $f \longleftrightarrow u$ эса изоморфизм бўлмайди, чунки

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda(x, u) = (x, \overline{\lambda} u),$$

яъни $\lambda f \longleftrightarrow \overline{\lambda} u$.

Шунинг учун бу камчиликни йўқотиш максадида, қўшма H^* фазода скалярга кўпайтириш қуйидаги кўринишда аниқланади:

$$(\lambda f)(x) = \overline{\lambda} f(x).$$

У ҳолда H^* қўшма фазо H га изометрик бўлади.

Эрмит ва нормал операторлар. Фараз қилайлик, A чизиқли оператор H фазони ўзини-ўзига акслантирлсин. У ҳолда унга қўшма бўлган A^* оператор ҳам H ни H га акслантиради ва қуйидагича аниқланади

$$(Ax,\, y) = (x,\, A^* y).$$

Юқоридаги скалярни функционалга кўпайтириш қоидасидан келиб чиққан ҳолда таъкидлаймизки, қўшма операторнинг спектри бошланғич операторнинг спектрига қараб ҳақиқий ўқга нисбатан симметрик жойлашади.

Агар $A = A^*$ бўлса, A ўз-ўзига қўшма оператор дейилади. Ўз-ўзига қўшма операторнинг спектри ҳақиқий сонлар ўқида жойлашган ёпиқ соҳадир. Ўз-ўзига қўшма операторга мос келувчи (Ax, x) квадратик форма фақат ҳақиқий қиймат қабул қилади.

A операторнинг нормаси ушбу

$$||A|| = \sup_{x \in H\,, ||x|| \neq 0} \frac{|(Ax, x)|}{(x, x)}$$

формула билан аниқланади.

$\frac{(Ax,x)}{(x,x)}$ ифода қийматининг аниқ қуйи ва юқори чегараси A оператор спектрининг аниқ қуйи ва юқори чегараси билан устма-уст тушади. Ҳар қандай $A : H \to H$ операторга $\varphi(x) = (Ax, x)$ функционални мос қўйиш мумкин.

Агар $\varphi(x) = (Ax, x) > 0$ барча $x \neq 0$ бўлса, ўз-ўзига қўшма A оператор мусбат дейилади, агар $\varphi(x) = (Ax, x) \geq k(x, x) \quad (k > 0)$ бўлса, мусбат аниқланган дейилади.

P_{H_1} билан юқоридагидек ҳар бир элементга унинг берилган қисм фазо H_1 даги проекциясини мос қўювчи ортогонал проекциялаш операторини белгилаймиз. P_{H_1} ўз-ўзига қўшма операторга мисол бўла олади. Ортогонал проекциялаш операторлари ушбу хусусиятларга эга: $P^2 = P$ ва $P^* = P$.

Агарда $H_1 \subset H_2$ бўлса, у ҳолда $P_{H_2}P_{H_1} = P_{H_1}P_{H_2} = P_{H_2}$.

Чегараланган чизиқли оператор $A : H \to H$ изометрик дейилади, агар у скаляр кўпайтмани сақласа, яъни

$$(Ax,\, Ay) = (x,\, y) \quad (x,\, y \in H).$$

Скаляр кўпайтмани сақлаш ўрнига $||Ax|| = ||x|| \, (x \in H)$ нормани сақлашни талаб қилиш мумкин.

Ҳақиқатан, бу талабларни эквивалентлиги қуйидаги тенгликлардан

$$Re(Ax,\, Ay) = 4^{-1}(||A(x+y)||^2 - ||A(x-y)||^2) =$$
$$= 4^{-1}(||(x+y)||^2 - ||(x-y)||^2)$$

ва худди шундай тенгликлар мавҳум қисм учун ўринли эканлигидан (y ни iy билан алмаштирсак) келиб чиқади.

Агар изометрик операторнинг тескариси A^{-1} мавжуд бўлса, A унитар оператор дейилади. Унитар оператор учун $A^* = A^{-1}$ ўринли.

Унитар операторнинг спектри бирлик айланада ётади. Унитар операторлар кўпайтмага нисбатан группа ташкил этади.

Энди A чизиқли (биржинсли ва аддитив, лекин чегараланмаган бўлиши мумкин) оператор бўлиб унинг аниқланиш соҳаси $D(A)$ H да зич жойлашган, яъни $\overline{D(A)} = H$ (бу ерда устидаги чизиқ H метрикаси бўйича ёпиқликни билдиради).

A операторга қўшма операторни ушбу формуладан аниқлаймиз

$$(Ax,\, y) = (x,\, A^*y),$$

бу ерда y элемент шундайки, унинг учун

$$|(Ax,\,y)| \leq c||x||^2 \quad \text{барча } x \in D(A) \text{ўринли.}$$

Бундай формада аниқланган қўшма оператор ягонадир.

Агар A оператор ёпиқ бўлса, у ҳолда A^* операторнинг аниқланиш соҳаси $D(A^*)$ H фазода зич жойлашган бўлади. Бу билан A^{**} оператор бирдан бир аниқланади ва у A операторнинг ёпиғи билан устма-уст тушади:

$$A^{**} = \overline{A}.$$

λ комплекс текислиги нуқтаси A операторнинг регуляр тур нуқтаси дейилади, агар

$$||(A - \lambda I)x|| \geq a||x|| \quad (x \in D(A),\, a > 0)$$

бўлса.

λ регуляр тур нуқта бўлиб ва A оператор ёпиқ бўлса, у ҳолда $A - \lambda I$ операторнинг қийматлар соҳаси қисм фазо ташкил этади. Унга ортогонал тўлдирувчи дефект қисмфазо деб аталади, унинг ўлчови эса λ нуқтага мос келувчи A операторнинг дефектлик индекси деб аталади.

Агар дефектлик индекси нолга тенг бўлса, у ҳолда λ регуляр нуқта бўлади.

H да зич жойлашган аниқланиш соҳасига эга бўлган A чизиқли оператор симметрик дейилади, агар барча $x, y \in D(A)$ учун ушбу тенглик ўринли бўлса:

$$(Ax,\, y) = (x,\, Ay).$$

Мисол 1. $H = L_2(\Omega)$ да ушбу интеграл операторни қараймиз

$$Ku = \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y)dy. \tag{15.2}$$

Қуйидаги $2m$ ўлчовли интеграл

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K^2(x,y)u(y)dxdy$$

чекли деб фараз қиламиз. Бундай оператор бутун фазода аниқланган. Агар

$$K(x,y) = K(y,x)$$

бўлса, (15.2) оператор симметрик эканлигини исботлаймиз. Скаляр кўпайтмани тузамиз

$$(Ku, v) = \int_\Omega v(x) \left\{ \int_\Omega K(x,y)u(y)dy \right\} dx.$$

Фубини теоремасига асосан интеграллар ўрнини алмаштирамиз

$$(Ku, v) = \int_\Omega u(y) \left\{ \int_\Omega K(x,y)v(x)dx \right\} dy.$$

Мос равишда x ни y га, y ни x га белгилашларни алмаштириб топамиз

$$(Ku, v) = \int_\Omega u(x) \left\{ \int_\Omega K(y,x)v(y)dy \right\} dx =$$

$$= \int_\Omega u(x) \left\{ \int_\Omega K(x,y)v(y)dy \right\} dx = (Kv, u) = (u, Kv),$$

чунки фазода скаляр кўпайтма кўпайтирувчилари тартибини ҳақиқий фазода ўзгартириш мумкин.

Мисол 2. $H = L_2(0,1)$ фазосида ушбу операторни қараймиз

$$Au = \frac{d^2u}{dx^2}.$$

A операторнинг $D(A)$ аниқланиш соҳасини қуйидагича аниқлаймиз: $u \in C^2[0,1]$, $u(0) = u(1) = 0$.

Бундай аниқланган оператор чизиқли бўлиб, унинг симметрик эканлигини исботлаймиз.

Юқорида аниқланган $C^2[0,1]$ дан олинган $D(A)$ тўплам $L_2(0,1)$ фазода зич жойлашган финит функциялар тўпламини ўз ичига олади. Ундан ташқари $D(A)$ ўзи $L_2(0,1)$ да зич жойлашгандир.

Энди A операторни симметрик эканлигини исботлаш қолади. Бунинг учун ушбу (Au, v) скаляр кўпайтмани қараймиз, бу ерда $u, v \in D(A)$, яъни $u, v \in C^2[0,1]$, $\quad u(0) = u(1) = 0$, $v(0) = v(1) = 0$. Бўлаклаб интеграллаймиз ва чегаравий шартларни эътиборга олиб, ушбу тенгликни

$$(Au, v) = -\int_0^1 v(x)u''(x)dx = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx =$$

$$= -\int_0^1 u(x)v''(x)dx = (u, Av)$$

топамиз. Симметрик оператордан доимо ёпиқ оператор ҳосил қилиш мумкин. Симметрик операторга қўшма оператор унинг ўзининг кенгайтирилганидир. Текисликнинг ҳақиқий бўлмаган нукталари симметрик оператор учун регуляр тур нуқталардир. Текисликнинг юқори ва қуйи қисмларига алоҳида -алоҳида дефектлик индекслари мос келади. Бу иккала сон симметрик операторнинг дефектлик индекслари деб аталади. Агар бу индекслардан бири нолга тенг бўлса, симметрик оператор максимал деб аталади. Максимал симметрик оператор тривиал бўлмаган кенгайишга эга эмас. Агарда симметрик операторнинг индекси нолга тенг бўлса, у ҳолда у ўз- ўзига қўшма оператордир: $A = A^*$. Тўлароқ равишда бу қуйидагини билдиради:

$$D(A) = D(A^*) \text{ ва } \quad (Ax, y) = (x, Ay) \quad x, y \in D(A).$$

Симметрик оператор ўз- ўзига қўшма оператор бўлиши учун ҳеч бўлмаганда битта ҳақиқий регуляр нуқтага эга бўлиши етарлидир.

Симметрик операторнинг H фазосида ўз- ўзига қўшма операторгача кенгайиши учун унинг тенг дефектлик сонларга эга бўлиши зарур ва етарлидир.

Агар $D(A) = H$ бўлса , ўз- ўзига қўшма оператор $A : D(A) \to H$ Эрмит оператори деб аталади. Шундай қилиб, таърифга мувофиқ Эрмит оператори шундай симметрик операторки, унинг учун $A : H \to H$ бўлиб, қуйидаги

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (x, y \in H).$$

тенглик ўринли.

Мисол учун ҳақиқий хос сонларга эга диагонални матрица- оператор Эрмит операторидир.

Агар A оператор ёпик ва ушбу $AA^* = A^*A$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда A оператор нормал оператор дейилади .Бу таърифдан

$$\|Ax\| = \|A^*x\| \quad (x \in D(AA^*) = D(AA^*))$$

тенглик келиб чиқади. $R : H \to H$, $S : H \to H$ Эрмит операторларини ва $A = R + iS$, $A^* = R - iS$ ни қарайлик.

Агар $RS = SR$ бўлса, $AA^* = A^*A$ тенгликни кўрсатиш қийин эмас.

Шундай қилиб, операторнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини ўрин алмаштирувчан эканлиги оператор нормал бўлишининг критерийсидир.

Агар

1) E_λ λ бўйича чапдан кучли узлуксиз;

2) $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$ $\lambda < \mu$ бўлганда;

3) $E_{-\infty} = \lim\limits_{\lambda\to-\infty} E_\lambda = 0$ ва $E_{+\infty} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} E_\lambda = I$,

бу ерда лимит кучли маънода тушунилади, ўринли бўлса, E_λ $(-\infty < \lambda < +\infty)$ ортогонал проекциялаш операторлар оиаласи бирнинг спектрал ёйилмаси дейилади.

Ҳар бир $(-\infty, +\infty)$ ўқда берилган чегараланган узлуксиз $F(\lambda)$ функция учун Стилтьес операторли интегралини аниқлаш мумкин

$$\int_a^b F(\lambda)dE_\lambda. \tag{15.3}$$

Агар $[a, b]$ чекли бўлса, бу интеграл $\sum\limits_{k=1}^{N} F(\lambda_k)(E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k})$ интеграл йиғиндилар лимити сифатида аниқланади ва агар $a = -\infty$ ёки $b = +\infty$ бўлса, хосмас интеграл сифатида таърифланади. (15.3) формула билан аниқланган оператор чегараланган оператордир, чунки

$$\|\int_a^b F(\lambda)dE_\lambda\| \le \sup_{a\le\lambda\le b} |F(\lambda)|$$

бўлади.

Агар $F(\lambda)$ фақат ҳақиқий қиймат қабул қилса, (15.3) ўз- ўзига қўшма операторни аниқлайди.

Агар $F(\lambda)$ ҳақиқий ва чегараланмаган бўлса, маълум керакли маъно берилгандан кейин (15.3) интеграл ўз-ўзига қўшма, умуман айтганда, чегараланмаган операторни беради. Унинг аниқланиш соҳаси фақат ва фақат шундай x лардан иборатки, улар учун ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x) < \infty$$

тенглик ўринли.

Ҳар қандай A ўз-ўзига қўшма операторга E_λ қандайдир 1-нинг спектрал ёйилмаси мос келади ва $X \in D(A)$ да

$$Ax = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda x.$$

E_λ операторлар A оператор билан коммутация қиладиган (жойалмашадиган) операторлар билан коммутация қилади.

Агар A оператор чегараланган бўлиб, m ва M унинг спектрининг қуйи ва юқори чегаралари бўлса, у ҳолда $E_\lambda = 0$, агар $\lambda \leq m$ бўлса, ва $E_\lambda = I$, агар $\lambda > M$ бўлса.

Шундай қилиб,

$$Ax = \int\limits_{m}^{M+0} \lambda dE_\lambda x.$$

Агар A оператор мусбат аниқланган ва $(Ax, x) \geq a(x, x)$ бўлса, у ҳолда

$$Ax = \int\limits_{a}^{\infty} \lambda dE_\lambda x$$

бўлади.

§ 16. Биринчи тартибли оператор тип коэффициентли дифференциал тенгламалар

Фараз қилайлик, $u(t)$ функция t скаляр аргументининг функцияси бўлиб, қийматларини U Гильберт фазодан қабул қилсин, $f(t)$ ҳам t скаляр аргументининг функцияси бўлиб, қийматларини F Гильберт фазосидан қабул қилсин, A U дан F га акслантирувчи чизиқли оператор. Ушбу

$$\frac{du}{dt} = Au + f \tag{16.1}$$

кўринишдаги тенгламаларга оператор тип коэффициентли дифференциал тенгламалар деб атаймиз.

Таъриф 16.1 . *[10,16] (16.1) тенгламанинг ечими деб икки марта кучли дифференциалланувчи , ҳар бир $t \geq 0$ учун A операторнинг* *аниқланиш соҳасига тегишли ва (16.1) тенгламани қаноатлантирувчи функцияга этилади.*

Таъриф 16.2 *(16.1) тенгламага қўйилган Коши масаласи деб, (16.1) тенгламани ва $u(0) = u_0$, $u_0 \in D$ шартни қаноатлантирувчи функцияни топиш масаласига айтилади.*

Олдинги берган таъриф (корректлик ҳақида) энди қуйидаги кўринишда ифодалади [18]: (16.1) тенглама учун Коши масаласи коррект дейилади, агар қуйидаги шартлар бажарилса:

1) ихтиёрий $u_0 \in D(A)$ учун масала ечими мавжуд;

2) масала ечими ягона;

3) масала ечими бошланғич берилганларга узлуксиз боғлиқ, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(0) = 0, u_n(0) \in D(A)$ дан $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = 0$ келиб чиқади.

Изоҳ . [18] A операторнинг t га боғлиқ эмаслигидан Коши масаласи бирор $[O, T]$ кесмада коррект бўлса, унинг иҳтиёрий $[0, T_1]$ $(T_1 > 0)$ кесмада коррект бўлиши келиб чиқади, яъни бутун $(0, \infty)$ ярим ўқда корректлиги.

Бунга ишонч ҳосил қилиш учун $[0, 2T]$ кесмани қараш етарли. Фараз қилайлик, $u(t)$ функция $[0, T]$ кесмада Коши масаласини ечими бўлсин. Ечимнинг $u(T)$ қийматидан фойдаланиб, $w(t)$ иккинчи ечимни аниқлаймиз

$$w(t) = u(t), \quad t \in [0, T]$$

$$w(t) = v(t - T), \quad t \in [T, 2T],$$

бу ерда $v(t)$ функция (16.1) тенгламанинг $v(0) = u(T)$ шартни қаноатлантирувчи ечими. Энди оддийгина кўриш мумкинки $w(t)$ функция (16.1) тенгламанинг $[0, 2T]$ кесмада $w(0) = u_0$ шартни қаноатлантирувчи ечими бўлади.

Энди ушбу бир жинсли тенгламани қараймиз.

$$\frac{du}{dt} = Au. \tag{16.2}$$

Бу тенгламага, умуман айтганда, Коши масаласи коррект ёки нокоррект ҳам бўлиши мумкин. Коши масаласининг (16.2) тенгламага шартли корректликга текшириш биринчи марта [12] ишда ўтказилган эди.

Фараз қилайлик (16.2) тенгламадаги A оператор ўз-ўзига қўшма ва нуқтали спектрга эга бўлсин. Бошқача қилиб айтганда, A оператор ортонормаллаштирган хос элементлар $\{\varphi_k\}_{-\infty}^{\infty}$ системаси ва унга мос хос қийматлар $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}$ системасига эга (бу ерда λ ўсиш тартибида жойлаштирилган деб фараз қилинади).

У ҳолда ушбу кўриниш ўринли

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t)\varphi_k, \quad u_k = (u(t), \varphi_k), k = -\infty, ..., 0, ..., \infty.$$

Бу кўриниш ёрдамида (16.2) тенглама оддий дифференциал тенгламалар системасига ажралади

$$\frac{du_k}{dt} = \lambda_k u_k(t), \quad k = -\infty, ..., 0, ..., \infty. \tag{16.3}$$

Бошланғич шартдан эса $u(0) = \sum\limits_{k=\infty}^{\infty} u_k(0)\varphi_k, \quad u_k(0) = (u(0), \varphi_k)$, бўлади. Натижада булардан $u_k(t)$ ни $u_k(t) = u_k(0)\exp\lambda_k t$, кўринишда топамиз. Бу ердан кўринадики $\lambda_k \leq c$ (λ_k юқоридан чегараланган) бўлса, Коши масаласи коррект бўлади.

Ҳақиқатан бу ҳолда

$$||u(t)|| \leq e^{ct}||u(0)||$$

бўлади.

Агар $\{\lambda_k\}$ кетма-кетлиги юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда қаралаётган Коши масаласи нокоррект бўлади.

Ҳақиқатан бу ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$, $t > 0$, $\mu > 0$ учун шундай $u(0)$ мавжудки $||u(0)|| \leq \varepsilon$ бўлса, $||u(t)|| \geq \mu$ бўлади.

Теорема 16.1 *(16.2) тенгламада U ва F ҳақиқий Гильберт фазолари бўлиб, A ўз-ўзига қўшма оператор бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$||u(t)|| \leq ||u(T)||^{t/T}||u(0)||^{(T-t)/T}. \tag{16.4}$$

Исбот [18]. Фараз қилайлик, барча $t \in [0, T]$ лар учун $u(t) \neq 0$ бўлиб, $u(t)$ функция икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин.

Ушбу
$$\varphi(t) = ||u(t)||^2 = (u, u), \quad \psi(t) = \ln \varphi(t)$$
функцияларни қараймиз. $\varphi(t)$ функцияни дифференциаллаб, (16.2) тенгламани эътиборга олиб, бўлаклаб интеграллашлардан кейин топамиз
$$\varphi'(t) = 2(u, u_t) = 2(u, Au),$$
$$\varphi''(t) = 2(u_t, u_t) + 2(u, A^2u) = 4(Au, Au).$$
Энди $\psi(t)$ функцияни икки марта дифференциаллаймиз ва Коши-Буняковский тенгсизлигини эътиборга олиб, ҳосил қиламиз
$$\psi''(t) = \frac{\varphi(t)\varphi''(t) - (\varphi'(t))^2}{\varphi^2(t)} \geq 0.$$
Охирги тенгсизлик $\psi(t)$ функциясининг ботиқлигини кўрсатади, шунинг учун
$$\psi(t) \leq \frac{t}{T}\psi(0) + \frac{T-t}{T}\psi(T)$$
ўринли бўлади. Бундан эса (16.4) тенгсизлик келиб чиқади.

Энди $u(t)$ функция иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлмаган ҳолни қараб чиқамиз. h параметрга боғлиқ ушбу функцияни
$$g_h(t) = \frac{1 + \cos\frac{\pi t}{h}}{2h}$$
қараймиз. Бу функция етарли силлиқ бўлиб,
$$g_h(-h) = g_h(h), \quad \int\limits_{-h}^{h} g_h(t)dt = 1$$
шартларни қаноатлантиради. Бу функциядан фойдаланиб, қуйидаги
$$u_h(t) = \int\limits_{t-h}^{t+h} g_h(\tau)d\tau$$
функцияни тузамиз. Биз бу ерда конкрет $g_h(t)$ функцияни олдик, умуман олганда эса $g_h(t)$ функция етарлича силлиқ юқоридаги шартларни қаноатлантирувчи функция бўлиши мумкин. $u_h(t)$ функция икки марта узлуксиз дифференцалланувчи бўлиб, (16.2) тенгламанинг $[h, T-h]$ кесмадаги ечими бўлади.

Юқоридаги мулоҳазалардан ихтиёрий t_1, t_2, t $(h \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq T - h, \quad t_1 < t_2)$ лар $\psi_h(t) = \ln ||u_h(t)||$ функция учун $\psi"_h(t) \geq 0$ ёки қуйидаги тенгсизликнинг ўринли

$$||u_h(t)|| \leq ||u_h(t_2)||^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}} ||u_h(t_1)||^{\frac{t_2-t}{t_2-t_1}} \tag{16.5}$$

бўлиши келиб чиқади. Охирги тенгсизликда $h \to 0$ лимитга ўтиб (16.2) тенгсизликни бу ҳолда ҳам $u(t)$ функцияга ўринли эканлигини исботлаган бўламиз.

Агар $u(t)$ функция бирор $t_0 \in [0, T]$ учун нолга тенг бўлса, у ҳолда ихтиёрий $t_0 \in [0, T]$ учун $u(t) = 0$ бўлиши (16.4) тенгсизликдан келиб чиқади. Теорема исботланди.

Натижа 16.1 *(16.2) тенглама учун Коши масаласининг ечими ягонадир.*

Теорема 16.2 *[18]. (16.2) тенглама учун Коши масаласи коррект бўлиши учун A операторнинг юқоридан ярим чегараланган бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. Фараз қилайлик A операторга мос келадиган проекцион операторлар оиласи $\{E_\lambda\}$ бўлсин:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda.$$

Агар A оператор юқоридан ярим чегараланган бўлса, у ҳолда

$$A = \int_{-\infty}^{a} \lambda dE_\lambda.$$

(16.2) тенгламага қўйилган Коши масаласи ечими ушбу кўринишни олади

$$u(t) = (\int_{-\infty}^{a} \exp(\lambda t) dE_\lambda) u_0, \quad u(0) = u_0.$$

Бу ҳақиқатдан ҳам шундай, чунки юқорида бу масала ечими ягоналиги исботланди ва бу функция тенгламани ва бошланғич шартни қаноатлантиради. Ечимнинг берилганларга узлуксиз боғлик эканлигини кўриш қийин эмас.

Энди A оператор юқоридан ярим чегараланган бўлмасин. У ҳолда ихтиёрий $a > 0$ учун шундай $b > a$ топиладики $U_{ab} = (E_a - E_b)U$ қисм фазо бўш эмас.

Фараз қилайлик, $u_0 \in U_{ab}$ бўлсин. У ҳолда Коши масаласи ечимининг нормаси (u_0 мос келувчи) ушбу тенгсизликни қаноатлантиради

$$||u(t)|| = ||\int_a^b e^{\lambda t} dE u_0|| \geq e^{at}||u_0||. \tag{16.6}$$

(16.6)-дан кўриняптики норма бўйича етарлича кичик Коши берилганларига норма бўйича етарли катта ечим мос келиши мумкин, яъни ечимнинг берилганларга узлуксиз боғлиқлиги йўқ.

Теорема исботланди.

Мисол 3. $Q = (0,1) * (0,T)$ соҳада ушбу тенгламанинг

$$u_t(x,t) = -u_{xx}(x,t)$$

чегаравий

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0\ (0 \leq t \leq T);$$

ва бошланғич

$$u(x,0) = f(x),\ (0 \leq x \leq 1)$$

шартларни қаноатлантирувчи ва $C(\overline{Q}) \cap C^{1,2}(Q)$ синфга тегишли $u(x,t)$ функцияни топинг.

A оператор сифатида $L_2(-1,1)$ фазода аниқланган ушбу дифференциал ифода

$$Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ва $u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0$ чегаравий шартлар билан ифодаланувчи операторни қараймиз. У ҳолда юқорида келтрилган С.Г.Крейн теоремасига мувофиқ бу масаланинг шартли коррект эканлиги келиб чиқади.

II. Комплекс сонлар майдони устида аниқланган Гильберт фазоларида (16.2) тенгламани опертор-коэффициенти нормал оператор бўлган ҳолни қараймиз. Шундай қилиб, (16.2) тенгламада U комплекс сонлар майдони устидаги Гильберт фазоси, A нормал оператор бўлсин.

Теорема 16.3 . *[18]. Фараз қилайлик $u(t)$ (16.2) тенгламанинг $(0,T)$ даги ечими бўлсин. У ҳолда (16.4) тенгсизлик ўринли.*

Исбот. 16.1-теоремадаги каби $u(t) \neq 0$ $t \in [0,T]$ ва $u(t)$ икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин. φ ва ψ функцияларини ҳам юқоридагидек аниқлаймиз.

Бу функцияларни дифференциаллаб, топамиз

$$\varphi'(t) = (u, (A + A^*)u),$$

$$\varphi''(t) = (Au, (A + A^*)u) + (u, (A + A^*)Au) =$$
$$= ((A + A^*)u, (A + A^*)u),$$

$$\psi''(t) = \frac{\varphi(t)\varphi''(t) - (\varphi'(t))^2}{\varphi^2(t)} \geq 0.$$

Булардан эса теорема тасдиқи келиб чиқади. Нормал операторни ушбу кўринишда ёзиш мумкин

$$A = X + iY,$$

бу ерда X, ва Y ўз- ўзига қўшма ва ўрин алмашувчи операторлар.

Теорема 16.4 . *[18]. (16.2) тенгламага қўйилган Коши масаласи бу ҳолда (А нормал оператор) коррект қўйилган бўлиши учун X операторнинг юқоридан ярим чегараланган бўлиши зарур ва етарли.*

Бу теорема исботи 16.2 теореманинг исботига тўла ўхшаш бўлгани учун уни ўқувчига ҳавола қиламиз.

III. Ушбу дифференциал тенгламани қараймиз

$$Bu_t(t) = Au(t), \tag{16.7}$$

бу ерда яна $u(t)$ функция $t \in [0,T]$ скаляр t аргументининг функцияси бўлиб, қийматларини H (ҳақиқий) Гильберт фазодан қабул қилади, A ўз-ўзига қўшма мусбат аниқланган оператор бўлиб, аниқланиш соҳаси $D(A)$ H да зич жойлашган, B оператор ҳам ўз-ўзига қўшма оператор бўлиб, B^{-1} мавжуд.

Теорема 16.5 . *(16.7) тенглама ечими учун ушбу баҳо ўринли*

$$(Au(t), u(t)) \leq (Au(0), u(0))^{(1-t/T)}(Au(T), u(T))^{t/T}. \tag{16.8}$$

Исбот. Ушбу функцияни қараймиз

$$\varphi(t) = (Au(t), u(t))$$

ва унинг мос ҳосилаларини ҳисоблаймиз

$$\varphi'(t) = 2(Au_t(t), u(t)),$$

$$\varphi''(t) = 2(Au_t(t), u_t(t)) + 2(Au_{tt}(t), u(t)) =$$
$$= 4(Au_t(t), u_t).$$

Бу ердан эса (16.8) тенгсизлик келиб чиқади.

Натижа 16.2 *(16.7) тенгламага қўйилган Коши масаласининг ечими ягона ва $u \in M = \{u : (Au(T), u(T)) \leq m\}$ тўпламда тургундир.*

Мисол 2. $Q = (-1 < x < 1) \times (0, T)$ $(x \neq 0)$ соҳада ушбу тенгламани

$$\operatorname{sign}(x) u_t(x, t) = -u_{xx}(x, t),$$

ва бу тенгламага қўйилган 4- параграфдаги нокоррект масалани қараймиз.

A оператор сифатида $L_2(-1, 1)$ да аниқланган ушбу дифференциал ифода

$$Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ва $u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0$ чегаравий шартлар билан ифодаланувчи операторни қараймиз.

B оператор сифатида эса $\operatorname{sign}(x)$ функцияга кўпайтирувчи операторни оламиз.16.5 -теоремага мувофиқ бу масала ҳам шартли корректдир.

§ 17. Ўзгарувчи оператор тип коэффициентли , биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

Ушбу оператор коэффициентли тенгламани қараймиз

$$B(t)\frac{du}{dt} = A(t)u(t) + f(t, u), \qquad (17.1)$$

бу ерда $f:[0,T)*D\to H$ бўлиб, иккала аргумент бўйича узлуксиз ва $u(t),v(t)\in C^1([0,T);D)$ лар учун

$$||f(t,u)-f(t,v)||\le\alpha(t,w)=k_1|(w,Bw)|+k_2\int\limits_0^t|(w,Bw)|ds \qquad (17.2)$$

шартни қаноатлантиради, k_1,k_2 мусбат катталиклар, $w=u-v$. $(\cdot,\cdot)$ эса юқоридагидек Гильберт фазоси H (ҳақиқий ёки комплекс)-даги скаляр кўпайтма, $||\cdot||$ унга мос норма. $B(t)$, $A(t)$ чизиқли операторлар барча $t\in[0,T]$ ларда H да зич жойлашган $D\,(D\subseteq H)$ да аниқланган деб фараз қилинади. $u(t),u_t(t)$ функциялар D-дан қиймат қабул қилиб $[0,T]$ да аниқланган. $u(0)$ Коши берилганини билдиради.

Эслатамизки, агар L (D-да аниқланган, $D\subseteq H$) симметрик чизиқли оператор ҳамда барча $x\in D$ учун $(x,Lx)\ge0$ бўлса, у ҳолда барча $x,y\in D$-да

$$|Re(x,Ly)|^2\le(x,Lx)(y,Ly)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Агар $L'(t)x\equiv\lim\limits_{h\to0}\frac{L(t+h)x-L(t)x}{h}$ ҳар бир $t\in[T,0)$ва $x\in D_L$ учун кучли маънода мавжуд бўлса, у ҳолда биз бу билан $L'(.)$ чизиқли операторлар оиласини $[0,T)$ да аниқлаймиз. Ундан ташқари, агар $L(.)u(.)$ ва $L(.)v(.)$ лар u ва $v\in C^1([0,T];D_L)$ функциялар учун кучли маънода узлуксиз бўлса, у ҳолда биз қуйидагига эга бўламиз.

$$\frac{d(u(t),B(t)v(t))}{dt}=(u_t,B(t)v(t))+(u,B(t)v_t(t))+(u,B'(t)v(t)).$$

Агар t ўзгарганда $D_L(t)$ ва $L(t)$ ҳам ўзгарса, у ҳолда биз

$$L'(t)x=\lim_{h\to0}\frac{L(t+h)x-L(t)x}{h}$$

ифодани аниқлай олмаймиз, чунки x етарлича кичик h учун ҳам $D_L(t+h)\cap D_L(t)$ га тегишли бўлмаслиги мумкин.

Бу қийинчиликни четлаб ўтиш учун қуйидагича иш олиб борамиз. u,v,v_t ва u_t (булар қийматларини D_L қабул қилади деб фараз қилинади) лар учун ушбуни аниқлаймиз

$$Q_L(u,v)\equiv\frac{d(u,B(t)v)}{dt}-(u_t,B(t)v)-(u,B(t)v_t).$$

(Агар $D_L(t)$ t га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $Q_L(u,v) = (u, B'(t)v)$).

Теорема 17.1 . *[31]. Фараз қилайлик, барча $t \in [0,T)$ учун $B(t)$*

$A(t)$ симметрик чизиқли операторлар ($A(t)$ силлиқ оператор) бўлиб, мос $\lambda > 0$, $k \geq 0$ ва $k' \geq 0$ катталиклари билан ушбу тенгсизликларни

$$(x, B(t)x) \geq \lambda(x,x) \text{ ва } |(x, B'(t)x)| \leq k(x, B(t)x),$$
$$(x, A'(t)x) \geq -k'[|(x, A(t)x| + (x, B(t)x)], \tag{17.3}$$

$f(t,u)$ (17.2) шартни қаноатлантирсин. Ундан ташқари $u(t)$ (17.1)-ни қаноатлантиради, $v \in C^1([0,T); D)$ эса шундайки унинг учун

$$Lv \equiv Bv_t - Av - f(t,v) \tag{17.4}$$

аниқланган. Фараз қилайлик $w = u - v$ ва $T < \infty$ бўлсин. У ҳолда шундай $\alpha_i \geq 0 (i = 1,2,3,4)$ катталиклар топиладики

$$\varphi(t) = \int_0^t (w, Bw)d\tau + (T-t)(w,Bw)_0 + \alpha_1(w,Bw)_0 +$$
$$+\alpha_2|(w,Aw)|_0 + \alpha_3 \sup_{[0,T)} ||Lv||^2 + \alpha_4 \int_0^T ||Lv||^2 d\tau, \quad t \in [0,T) \tag{17.5}$$

функция орқали ифодаланган

$$\psi(t) = \ln \varphi(t)$$

функция k_1 ва k_2 манфий бўлмаган катталик билан ушбу тенгсизликни қаноатлантиради

$$\psi''(t) + k_1\psi'(t) + k_2 \geq 0. \tag{17.6}$$

Исбот. Оддийлик учун $\varphi(t)$ функцияни ушбу шаклда ёзамиз

$$\varphi(t) = \int_0^t (w, Bw)d\tau + (T-t)(w,Bw)_0 + P^2 =$$
$$= \int_0^t (w, Bw)d\tau + Q^2,$$

бу ерда P^2 ва Q^2 бошланғич берилганлар орқали ифодаланувчи катталиклар. $\varphi(t)$ ни дифференциаллаб, топамиз

$$\varphi'(t) = (w, Bw) - (w, Bw)_0 = \int_0^t \frac{d(w, Bw)}{d\tau} =$$

$$= 2\int_0^t Re(w, Bw_\tau)d\tau + \int_0^t (w, B'w)d\tau. \qquad (17.7)$$

(17.1) ва (17.4)-ни эътиборга олиб, $f^* = f(t,u) - f(t,v)$ билан белгилаб топамиз

$$Bw_t = Aw + f^* - Lv.$$

Шундай қилиб,

$$\varphi'(t) = 2\int_0^t (w, Aw)d\tau + \int_0^t (w, B'w)d\tau + 2\int_0^t Re[(w, f^*) - (w, Lv)]d\tau.$$

$\varphi"(t)$ мавжуд эканлигидан

$$\varphi"(t) = 2\int_0^t Re(w_\tau, Aw)d\tau + 2\{\int_0^t (w, A'w)d\tau + (w, Aw)_0\} +$$

$$+(w, B'w) + 2Re[(w, f^*) - (w, Lv)], \qquad (17.8)$$

чунки

$$(w, Aw) = (w, Aw)_0 + \int_0^t \frac{d(w, Aw)}{d\tau}d\tau.$$

(17.1) дан Aw ни топиб (17.8)га қўйиб топамиз

$$\varphi"(t) = 4\int_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau + Q^*(t),$$

бу ерда

$$Q^*(t) \equiv 2\int_0^t (w, A'w)d\tau + (w, B'w) + 2[Re(w, f^*) - Re(w, Lv)] +$$

$$+4\int_0^t Re[(w_\tau, Lv) - (w_\tau, f^*)]d\tau + 2(w, Aw)_0.$$

Юқоридагиларни эътиборга олиб ушбу

$$\varphi(t)\varphi''(t) - (\varphi'(t))^2 =$$

$$= 4s^2 + 4Q^2\int_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau + Q^*\varphi(t) -$$

$$-\{4\int_0^t Re(w, Bw_\tau)d\tau \int_0^t (w, B'w)d\tau + (\int_0^t (w, B'w)d\tau)^2\} =$$

$$= 4s^2 + 4Q^2\int_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau + Q^*\varphi(t) - R^*, \qquad (17.9)$$

тенгликни топамиз, бу ерда

$$s^2 = \int_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau \int_0^t (w, Bw)d\tau - (\int_0^t Re(w, Bw_\tau)d\tau)^2 \geq 0.$$

Кейинги баҳолашларимизда қуйидаги элементар тенгсизликлардан фойдаланамиз, уларни исботлаш қийин эмас:

$$\varphi(t) \geq \int_0^t (w, Bw)d\tau;$$

$$|\varphi'(t)| \leq (w, Bw) + (w, Bw)_0 \leq \varphi'(t) + 2(w, Bw)_0;$$

$$\{\int_0^t (w, Bw)d\tau \int_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau\}^{(1/2)} \leq$$

$$\leq k_1 s + k_2\varphi(t) + k_3\varphi'(t) + k_4(w, Aw)_0 - k_5 Q^2.$$

Бу ерда k_i манфиймас катталиклар. Бу тенгсизликларни эътиборга олиб, ушбу

$$|R^*| \leq k_1\varphi(t)s + k_2\varphi^2(t) + k_3\varphi'(t)\varphi(t) + k_4(w, Aw)_0\varphi(t) - k_5 Q^2\varphi(t)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Энди Q^* ни баҳолаймиз, бунинг учун табиий теорема шартларидан фойдаланамиз. Шундай $k_i \geq 0$ катталиклари мавжудки, қуйидаги ўринли

$$-\int_0^t (w, A'w)d\tau \leq k_1(\int_0^t (w, Bw)d\tau \int_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau)^{1/2} +$$

$$+k_2\int\limits_0^t|(w,Lv)|d\tau+k_3\int\limits_0^t(w,Bw)d\tau+k_4\cdot\int\limits_0^t|(w,f^*)|d\tau.$$

$||f^*|| \leq \alpha(t,w)$ ва $|ab| \leq a^2+b^2$ тенгсизликларни эътиборга олиб шундай $k_i \geq 0$ катталикларни топиш мумкинки, уларда ушбу тенгсизликлар ўринли:

$$|(w,B'w)| \leq k_1(w,Bw)+k_2((w,Bw)\int\limits_0^t(w,Bw)d\tau)^{1/2} \leq$$

$$\leq k_1'(w,Bw)+k_2'\int\limits_0^t(w,Bw)d\tau;$$

$$|Re(w,f^*)| \leq k_5(w,Bw)+k_6\int\limits_0^t(w,Bw)d\tau+$$

$$+k_7(\int\limits_0^t(w,Bw)d\tau\int\limits_0^t(w_\tau,Bw_\tau)d\tau)^{1/2}.$$

Худди шунингдек

$$|\int\limits_0^t(w_\tau,f^*)d\tau| \text{ва} \int\limits_0^t|(w,f^*)|d\tau$$

лар ҳам баҳоланади. Манфиймас k_i лар билан ушбу тенгсизлик ўринли

$$\max\{|2Re(w,Lv)|,\int\limits_0^t|(w,Lv)|d\tau\} \leq$$

$$\leq k_1(w,Bw)+k_2\int\limits_0^t(w,Bw)d\tau+k_3\sup_{[0,T)}||Lv||^2+k_4\int\limits_0^T||Lv||^2d\tau.$$

Бу ҳосил қилинган барча тенгсизликлардан фойдаланиб, Q^* учун манфиймас k_i ларда ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз

$$-Q^* \leq k_1s+k_2\varphi(t)+k_3\varphi'(t)+k_4(w,Bw)_0+k_5|(w,Aw)_0|+$$

$$+k_6\sup_{[0,T)}||Lv||^2+k_7\int\limits_0^T||Lv||^2d\tau-k_8Q^2+4\int\limits_0^t Re(w_\tau,Lv)d\tau.$$

Ҳосил бўлган тенгсиздиклар барчасини (17.9) қўйиб (17.9)-дан топамиз (бу ерда $k_i \geq 0$ катталиклар)

$$\varphi(t)\varphi"(t)-(\varphi'(t))^2 \geq$$

$$\geq 4s^2 + 4Q^2 \int\limits_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau - 4\varphi(t) \int\limits_0^t Re(w_\tau, Lv)d\tau +$$

$$+k_1[Q^2 - k_2(w, Bw)_0 - k_3|(w, Aw)_0| -$$

$$-k_4 \sup_{[0,T)} ||Lv||^2 - k_5 \int\limits_0^T ||Lv||^2 d\tau]\varphi(t) -$$

$$-k_6\varphi(t)s - k_7\varphi(t)\varphi'(t) - k_8\varphi^2(t). \qquad (17.10)$$

P^2 катталигини шундай танлаймизки, $Q^2 = P^2 + (T-t)(w, Bw)_0$ ифода

$$k_2(w, Bw)_0 + k_3|(w, Aw)_0| + k_4 \sup_{[0,T)} ||Lv||^2 + k_5 \int\limits_0^T ||Lv||^2 d\tau$$

-дан катта бўлсин. Бунинг учун (17.5)-да α_i ларни $\alpha_i > k_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ қилиб танлаймиз. Осонгина кўриш мумкинки, шундай k, k' лар мавжудки

$$\int\limits_0^T ||Lv||^2 d\tau \leq k\varphi(t), \ (w, Bw)_0 \leq k'\varphi(t).$$

Булардан фойдаланиб қуйидаги тенгсизликларни исботлашимиз мумкин (k_i мусбат ўзгармаслар)

$$(\int\limits_0^t (w, Bw)d\tau \int\limits_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau)^{1/2} \leq k_1\varphi(t) + k_2 s + k_3\varphi'(t). \qquad (17.11)$$

Худди шунингдек шундай k_1 ўзгармас мавжудки,

$$\varphi(t) \int\limits_0^t Re(w_\tau, Lv)d\tau - Q^2 \int\limits_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau \leq$$

$$\leq k_1(\varphi(t) - Q^2)(\int\limits_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau \int\limits_0^T ||Lv||^2 d\tau)^{1/2} +$$

$$+Q^2[k_1(\int\limits_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau \int\limits_0^T ||Lv||^2 d\tau)^{1/2} - \int\limits_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau].$$

$|ab| \leq \alpha a^2/2 + b^2/(2\alpha)(\alpha > 0)$ тенгсизликни қўллаб топамиз

$$\varphi(t) \int\limits_0^t Re(w_\tau, Lv)d\tau - Q^2 \int\limits_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau \leq$$

$$\le k_1[(\int_0^t (w,Bw)d\tau \int_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau)^{1/2}(\int_0^t (w,Bw)d\tau \int_0^T ||Lv||^2 d\tau)^{1/2}]+$$

$$+k_2Q^2\int_0^T ||Lv||^2 d\tau.$$

(17.11), $\int_0^T ||Lv||^2 d\tau \le k\varphi(t)$ ва $Q^2 \le \varphi(t)$ тенгсизликлардан

$$\varphi(t)\int_0^t Re(w_\tau, Lv)d\tau - Q^2\int_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau \le$$

$$\le k_1\varphi(t)s + k_2\varphi^2(t) + k_3\varphi(t)\varphi'(t) \qquad (17.12)$$

ўзгармас $k_i \le 0$ лари билан ҳосил қиламиз. (17.12) эътиборга олиб.

$$P^2 \equiv \alpha_1(w,Bw)_0 + \alpha_2|(w,Bw)_0| + \alpha_3 \sup_{[0,T)} ||Lv||^2 + \alpha_4\int_0^T ||Lv||^2 d\tau$$

ифодада α_i ларни танлаш ҳисобига

$$\varphi(t)\varphi"(t) - (\varphi'(t))^2 \ge 4s^2 - k_1\varphi(t)s + k_2\varphi(t)\varphi'(t) - k_3\varphi^2(t) \ge$$

$$\ge -k_1\varphi(t)\varphi'(t) - \varphi^2(t)$$

тенгсизликга эга бўламиз. Охирги тенгсизликнинг иккала томонини $\varphi^2(t)$ - га бўлиб

$$\psi"(t) + k_1\psi'(t) + k_2 \ge 0$$

тенгсизликга эга бўламиз. 17.1-теорема исботланди.

Натижа 17.1 . *(17.1) тенгламага қўйилган бошлангич масаланинг (Коши масаласи) ечими ягонадир.*

Исбот. Фараз қилайлик u ва v (17.1) тенгламани қаноатлантиради. $u(0) = v(0)$, $w = u - v$ бўлсин, $Lv = 0$ ва $w(0) = 0$ бўлсин. У ҳолда $\varphi(t)$ (17.5) дан қуйидагигача $\varphi(t) = \int_0^t (w,Bw)d\tau$ қисқаради ва унинг учун

$$\varphi(t)\varphi"(t) - (\varphi'(t))^2 \ge -k_1\varphi(t)\varphi'(t) - k_2\varphi^2(t).$$

У ҳолда $\varphi(0) = 0$ лигидан $\varphi(t) \equiv 0$ келиб чиқади.

Натижа 17.2. *Фараз қилайлик v_1 ва $v_2 \in C^1([0,T);D)$ бўлсин. У ҳолда 17.1-теорема шартида шундай α_1, α_2, α_3, α_4, k_1 ва k_2' ўзгармаслар мавжудки, улар учун*

$$\int_0^t (w, Bw)d\tau \leq k_2' Q^{(1-\omega(t))}\Big(\int_0^T (w, Bw)d\tau + Q^2\Big)^{\omega(t)}, \tag{17.13}$$

бу ерда $w = v_1 - v_2$, $\quad \omega(t) = [1 - \exp(-k_1 t)]/[1 - \exp(-k_1 T)]$,

$$Q^2 = \alpha_1 (w, Bw)_0 + \alpha_2 |(w, Aw)_0| + \alpha_3 \sup_{[0,T)} ||Lv_1 - Lv_2||^2 +$$

$$+\alpha_4 \int_0^T ||Lv_1 - Lv_2||^2 d\tau.$$

Шунга ўхшаш натижаларни бошқа характердаги операторлар оиласи учун [31] -дан топишингиз мумкин. Бу типдаги масалаларни тақрибий ечиш усулларини эса [2], [4], [11], [7], [33] да учратамиз.

Машқлар.

1. Фараз қилайлик (17.1) тенгламада $f(t, u, u_t) \equiv 0, B(t) = I$, $A(t) = A_0 + A_1(t)$, бу ерда A_0 ўз- ўзига қўшма ўзгармас оператор бўлиб, $A_1(t)$ узлуксиз $A_1'(t)$ ҳосилага эга бўлиб, ҳамда шундай $a, b \geq 0$ ўзгармаслар мавжудки, ихтиёрий u учун қуйидаги тенгсизлик ўринлидир

$$(A_0 u, A_1' u) - (A_0 u, A_1 u) \geq -a(u, Au) - b_0(u, u).$$

У ҳолда (17.1) тенгламанинг ихтиёрий ечими учун ушбу тенгсизлик бажарилишини исботланг:

$$||u(t)|| \leq ||u(T)||^{\omega(t)} ||u(0)||^{1-\omega(t)} c(t),$$

бу ерда $\omega = (1 - \exp(-at))/(1 - \exp(-aT))$,

$$c(t) = \exp \frac{b(1 - \exp(-at))T + (1 - \exp(-aT))t}{a(1 - \exp(-aT)},$$

$b = 2b_0 + 4a_1^2 + 2a_2$, $a_1 = \max ||A_1(t)||$, $a_2 = \max ||A_2'(t)||$. [18]-га қаранг.

2. (17.1) тенгламада $f(t, u, u_t) \equiv 0$, $A(t)$, $B(t)$ симметрик чизиқли операторлар бўлиб, $k \geq 0$, $k' \geq 0$ катталиклари билан ушбу тенгсизликлар

$$(x, B'(t)x) \leq k(x, B(t)x)|,$$

$$\forall x, y \in D, \ |(x, A'(t)y)|^2 \leq k'(x, A(t)x)(y, A(t)y)$$

бажарилсин.

Шу шартлар остида (17.1) тенгламага қўйилган Коши масаласи ечими ягона ва шартли турғун эканлигини исботланг [31].

3. (17.1) тенгламада $f(t, u, u_t) \equiv 0, A(t)$, $B(t)$ симметрик чизиқли операторлар бўлиб, барча $x \neq 0$ учун

$$(x, B(t)x) > 0 \exists k \geq 0 \in |(x, B'(t)x)| \leq k(x, B(t)x),$$

$$\exists k' \geq 0 \in (x, A'(t)x) \geq -k'[|(x, A'(t)x)| + (x, B'(t)x)]$$

. У ҳолда (17.1) тенгламага қўйилган бошланғич масала (Коши масаласи) ечими ягона ва шартли турғун эканлигини исботланг.

4. (17.1) тенгламада $B(t) \equiv I$, $A(t)$ чизиқли оператор бўлиб, t га боғлиқ бўлмаган H да зич жойлашган D аниқланиш соҳасига эга. Ундан ташқари фараз қилайлик A^*, $[A^*, A]$, $ReA = (A + A^*)/2$ операторларнинг аниқланиш соҳалари D ни ўз ичига олсин. ReA D да $[A^*, A]$ билан A^* ва A операторлар коммутаторини белгилаймиз. Ундан ташқари ReA D да суст узлуксиз дифференциалланувчи оператор бўлсин.

L $D_0 \subset D$ да асосан гипонормал деб аталади, агар шундай φ, $\alpha, \in C[0, T]$, $\alpha'(t) > 0$ функциялар барча $t \in [0, T]$ учун мавжуд бўлиб, барча $\lambda \in R$, $t \in [0, T]$, $v \in D_0$ -лар учун $< Lv, v > \geq 0$ бўлса, бу ерда

$$L = [A^*, A], +(2ReA - \lambda)^2 + 2\alpha'\{(ReA)1 - \alpha''(\alpha')^2(ReA + \varphi_t) + \varphi_{tt}\}.$$

Агар А оператор t га боғлиқ бўлмаса, ва $\alpha_{tt} = \varphi_{tt} = 0$ бўлса, у ҳолда $L = [A^*, A], +(2ReA - \lambda)^2$, ва бундан L операторнинг ($[A^*, A] \geq 0$) ReA операторнинг D_0 га тегишли хос векторларида гипонормал эканлиги келиб чиқади.

Фараз қилайлик $u(t), u \in C'([t_0, T];, H)$ (17.1) тенгламага қўйилган $u(0) = u_0$, $u_0 \in D$, $t_0 \in [0, T)$ Коши масаласининг ечими бўлсин.

Теорема 17.2 . *[5] Ихтиерий $t_0, t, t_1 \in [O, T], 0 \leq t_0 < t < t_1 \leq T$, $u_0 \in D_0$ ва барча $\varepsilon > 0$ $\|u(t)\| \leq \varepsilon\|u(t_1)\| + c * \varepsilon^{-\gamma}\|u(0)\|$ баҳо ўринли бўлиши учун, бу ерда $\gamma = ((\alpha(t) - \alpha(t_0)) * (\alpha(t_1) - \alpha(t_0))^{(-1)}$, $c = \beta(\gamma) \exp \gamma\varphi(t_1) + \varphi(t_0) - \gamma\beta^{(-1)}\varphi(t)$, $\beta = \gamma(1 + \gamma)^{(-1)}$, D_0 да A операторни асосан гипонормал бўлиши зарур ва етарли.*

Шу теоремани исботланг.

§ 18. Ўзгарувчи оператор тип коэффициентли бузиладиган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

Оддийлик учун бу параграфда H ҳақиқий Гильберт фазоси, ундаги скаляр кўпайтма ва нормани мос равишда $(\cdot, \cdot)$ ва $|| \cdot ||$ кўринишда белгилаймиз. H фазода зич жойлашган чизиқли тўплам ажратилган деб фараз қиламиз ва D соҳадаги скаляр кўпайтмани $[\cdot, \cdot]$ киритамиз. Умуман айтганда D соха бу скаляр кўпайтмага нисбатан ёпиқ бўлиши шарт эмас. $A(t) : D \to H$, D соҳада аниқланган ва симметрик.

Умумийликка зарар етказмасдан бу ерда дифференциал тенглама ўрнига унга мос келувчи ушбу дифференциал тенгсизликнинг

$$||t^{\rho}u_t + A(t)u||^2 \leq b_1 t^{\rho-1}[u, u] + b_2 t^{2\rho-2}||u||^2 + f(t) \tag{18.1}$$

$(0 < \rho < 1,\ 0 \leq t \leq T)$ ва $t = 0$ да Коши берилганлари бўйича ечимини топиш масаласини қараймиз.

A оператордан қўшимча ушбу Гординг турдаги тенгсизликни қаноатлантиришини талаб қиламиз:

$$(-A(t)u, u) \geq a_1[u, u] - a_2||u||^2 \quad (u \in D,\ a_1 > 0,\ a_2 \geq 0),$$

бу ерда a_1, a_2 - ўзгармас катталиклар. Ундан ташқари $A(t)$ оператор ҳар бир $t \in (0, T]$ да D соҳада кучли дифференциалланувчи, яъни $(0, T]$ да шундай $A_t(t)$ оператор мавжудки, у D соҳада аниқланган ва барча $u \in D$ лар учун

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} - A_t(t)u \right\| = 0.$$

$A_t(t)$ операторидан қўшимча қуйидаги шарт бажарилишини талаб қиламиз

$$|(A_t(t)u, u)| \leq a_3 t^{-1}[u, u] \quad (u \in D,\ a_3 \geq 0,\ a_3 - \text{ўзгармас}).$$

Юқоридаги параграфларда ҳам таъкидлаганимиздек, дифференциал тенгламаларда қатнашган ҳосилалар H фазонинг нормасидаги лимитда деб тушунилади. Энди тенгсизликнинг ечими тушунчасини киритамиз.

Таъриф 18.1 $u(t) : [0,T] \to H$ *функция* (18.1) *тенгсизликнинг ечими деб аталади, агар:*

1) $u(t)$ $t \in [0,T]$ *да узлуксиз ва* $u(t) \in D$;

2) $u(t)$ $t \in [0,T]$ *да* H *нормаси маъносида дифференциалланувчи;*

3) $u(t)$ $t \in [0,T]$ *да* (18.1) *тенгсизликни қаноатлантиради.*

Лемма 18.1 . *Фараз қилайлик,* $\psi(t)$ *узлуксиз бўлиб,* $\gamma(t) > 0$ *бир марта,* $\kappa(t)$ *икки марта дифференциалланувчи скаляр функциялар бўлсин.* $u(t)$ *функция таърифнинг биринчи иккита шартини қаноатлантиради,* ρ *эса ихтиёрий. У ҳолда*

$$\gamma e^{2\kappa}||t^\rho u_t + A(t)u||^2 \geq$$
$$\geq \Big[(\gamma t^\rho)_t + 2\gamma\psi\Big]e^{2\kappa}(-Au,u) - \gamma t^\rho e^{2\kappa}(A_t u,u) +$$
$$+\Big[\Big(\gamma t^{2\rho}\kappa_t\Big)_t + 2\gamma\psi t^\rho\kappa_t - \gamma\psi^2\Big]e^{2\kappa}||u||^2 +$$
$$+\Big\{\gamma t^\rho e^{2\kappa}\Big[(Au,u) - t^\rho\kappa_t||u||^2\Big]\Big\}_t \tag{18.2}$$

тенгсизлик ўринли.

Исбот. $v = e^{\kappa_t}u$ деб, қуйидагига эга бўламиз

$$\gamma e^{2\kappa}||t^\rho u_t + A(t)u||^2 = \gamma||t^\rho(v_t - \kappa_t v) + A(t)v||^2 =$$
$$= \gamma\Big[||Av - t^\rho\kappa_t v + \psi v - \psi v||^2 + t^{2\rho}||v_t||^2 + 2t^\rho(Av - t^\rho\kappa_t v, v_t)\Big] =$$
$$= \gamma\Big[||Av - t^\rho\kappa_t v + \psi v||^2 + ||\psi v||^2 - 2(Av - t^\rho\kappa_t v + \psi v, \psi v) +$$
$$+t^{2\rho}||v_t||^2 + 2t^\rho(Av,v_t) - 2t^{2\rho}(v_t,v)\Big] \geq \gamma\Big[-2\psi(Av,v) +$$
$$+2t^\rho(Av,v_t) - 2t^{2\rho}\kappa_t(v,v_t) - \psi^2||v||^2 + 2\psi t^\rho\kappa_t||\psi||^2\Big] \tag{18.3}$$

(18.2) тенгсизликнинг ўнг томонидаги иккинчи ва учинчи ифодаларни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned}
2\gamma t^\rho(\dot{Av}, v_t) &= \gamma t^\rho\frac{d}{dt}(Av,v) - \gamma t^\rho(A_t v,v) = \\
&= -(\gamma t^\rho)_t(Av,v) - \gamma t^\rho(A_t v,v) + \Big[\gamma t^\rho(Av,v)\Big]_t; \\
-2\gamma t^{2\rho}\kappa_t(v,v_t) &= -\gamma t^{2\rho}\kappa_t\frac{d}{dt}(v,v) = (\gamma t^{2\rho}\kappa_t)_t||v||^2 - \Big(\gamma t^{2\rho}\kappa_t)||v||^2\Big)_t
\end{aligned}$$

Ҳосил қилинган ифодаларни (18.3) тенгсизликни ўнг томонига қўйиб топамиз

$$\gamma e^{2\kappa}||t^{\rho}u_t + A(t)u||^2 \geq -[(\gamma t^{\rho})_t + 2\gamma\psi](Av,v) - \gamma t^{\rho}(A_t v,v) +$$
$$+\Big[\left(\gamma t^{2\rho}\kappa_t\right)_t + 2\gamma\psi t^{\rho}\kappa_t - \gamma\psi^2\Big]||v||^2 + \Big\{\gamma t^{\rho}\left[(Av,v) - t^{\rho}\kappa_t\right]||v||^2\Big\}_t$$

Охирги тенгсизликнинг ўнг томонида v функциядан u функцияга қайтсак леммадаги тенгсизлик келиб чиқади. Лемма исботланди.

Теорема 18.1 . *Агар $f(t)$ функция ва ечим $u(t)$*

$$[u(t),u(t)] \leq 1, \quad ||u(t)||^2, \quad \frac{1}{\varepsilon}t^{2(1-\rho)}|f(t)| \leq t^{2\omega+\delta} \quad (\delta > 0)$$

шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $\zeta > 0$, $T' < T < 1$ лар учун қуйидаги баҳо ўринли:

$$(1-\rho)\zeta\int\limits_0^{T'} t^{-2\omega-p}\Big\{\xi a_1[u,u] + \frac{1}{2}(1-\xi)\left[\omega - \frac{1}{4}(1-\rho)(1-\xi)\right]\times$$
$$\times t^{\rho-1}||u||^2\Big\}\,dt \leq c\cdot\exp\left(-\frac{1}{4}\ln\frac{\ln T'}{\ln T}\cdot\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}\right). \quad (18.4)$$

Бу ерда $0 \leq \rho < 1$, $0 \leq \xi < 1$, $\omega - \frac{1}{4}(1-\rho)(1-\xi) > 0$ бўлиб, a_3, b_1, b_2 лар ((18.1) - нинг ўнг томонидаги ўзгармаслар) шундай танланганки

$$(1-\rho)\xi a_1 - a_3 - b_1 > 0,$$
$$(1-\rho)(1-\xi)\left[\omega - \frac{1}{4}(1-\rho)(1-\xi)\right] - b_2 > 0$$

тенгсизликлар ўринли.

Исбот. (18.2) - тенгсизликка

$$\kappa = -\omega\ln t + \lambda\ln\ln\frac{1}{t} \quad (\lambda > 0),$$

$$\gamma = t^{1-2\rho}, \quad \psi = -\frac{1}{2}(1-\rho)(1-\xi)t^{\rho-1}$$

ифодаларни қўямиз.

У ҳолда

$$\kappa_t = -t^{-1}z, \quad \kappa_{tt} = t^{-2}z(1+O_{-1}),$$

бу ерда

$$z = \omega + \lambda \ln^{-1} \frac{1}{t}, \quad O_{-1} = O\left(\ln^{-1} \frac{1}{t}\right).$$

Эътибор берамизки

$$(\gamma t^{\rho})_t + 2\gamma\psi = (1-\rho)\xi t^{-\rho} > 0.$$

Буларни, $A(t)$ ва $A^1(t)$ операторларга қўйилган шартларни эътиборга олган ҳолда (18.2) тенгсизликдан

$$t^{-2\omega-2p+1} \ln^{2\lambda} \tfrac{1}{t} ||t^p u_t + A(t)u||^2 \geq$$
$$\geq t^{-2\omega-p} \ln^{2\lambda} \tfrac{1}{t} \Big\{ [(1-p)\xi a_1 - a_3][u,u] +$$
$$+ t^{p-1}[(1-\rho)(1-\xi)\left(z - \tfrac{1}{4}(1-\rho)(1-\xi)\right) + zO_{-1} -$$
$$-(1-\rho)(1-\xi)a_2 t^{-p+1}]||u||^2 \Big\} + + \Big\{ t^{-2\omega} \ln^{2\lambda} \tfrac{1}{t} \left[t^{1-\rho}(Au,u) + 2||u||^2\right] \Big\}_t$$

ҳосил қиламиз.

Бу тенгсизликнинг чап томонига нисбатан (18.1) тенгсизликни қўллаб,

$$(1-\rho)(1-\xi)a_2 t^{1-\rho} = zO_{-1}$$

эканлигини эътиборга олинса, қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$t^{-2\omega-p} \ln^{2\lambda} \frac{1}{t} \Big\{ [(1-\rho)\xi a_1 - a_3 - b_1][u,u] +$$
$$+ t^{p-1}\Big[(1-p)(1-\xi)\left(z - \tfrac{1}{4}(1-p)(1-\xi)\right) + zO_z{-1} - b_2\Big]||u||^2 \Big\} \leq$$
$$\leq \Big\{ t^{-2\omega} \ln^{2\lambda} \frac{1}{t} \left[-t^{1-\rho}(Au,u) - z||u||^2\right] \Big\}_t + t^{-2\omega-2p+1} \ln^{2\lambda} \frac{1}{t} f(t).$$

a_3, b_1, b_2 параметрларга қўйган шартларимиздан фойдаланиб шундай $0 < \zeta \leq 1$ танлаймизки

$$(1-\rho)\xi a_1 - a_3 - b_1 = \xi(1-\rho)a_1\zeta;$$
$$(1-\rho)(1-\xi)[\omega - \tfrac{1}{4}(1-\rho)(1-\xi)] - b_2 =$$
$$= (1-\rho)(1-\xi)[\omega - \tfrac{1}{4}(1-\rho)(1-\xi)]\zeta$$

бажарилсин.

Бундай ζ ва етарлича кичик T ларда топамиз:

$$(1-\rho)\zeta \int_0^T t^{-2\omega-\rho} \ln^{2\lambda} \frac{1}{t} \Big\{ a_1\xi[u,u] + \frac{1}{2}(1-\xi) \times$$

$$\times[\omega - \tfrac{1}{4}(1-\rho)(1-\xi)]t^{\rho-1}||u||^2\Big\}\, dt \leq$$

$$\leq \left\{t^{-2\omega}\ln^{2\lambda}\frac{1}{t}\left[-t^{1-\rho}(Au,u) - 2||u||^2\right]\right\}_t + t^{-2\omega-2p+1}\ln^{2\lambda}\frac{1}{t}f(t).$$

Теоремада u ва f функцияларга қўйилган шартлардан фойдаланиб ва юқоридаги тенгсизликни интеграллаб, ушбу тенгсизликларга эга бўламиз:

$$(1-\rho)\zeta\int\limits_0^T t^{-2\omega-p}\ln 2\lambda\frac{1}{t}\Big\{a_1\xi[u,u] +$$

$$+\tfrac{1}{2}(1-\xi)\Big[\omega - \tfrac{1}{4}(1-\rho)(1-\xi)\Big]t^{\rho-1}||u||^2\Big\}dt \leq$$

$$\leq \lim_{t\to 0}\Big\{t^{-2\omega}\ln^{2\lambda}\frac{1}{t}[t^{1-\rho}(Au,\, u) + z||u||^2]\Big\} +$$

$$+\Big\{t^{-2\omega}\ln^{2\lambda}\frac{1}{t}[-t^{1-\rho}(Au,\, u) - z||u||^2]\Big\}_{t=T} +$$

$$+\int\limits_0^T t^{-2\omega-2\rho+1}\ln^{2\lambda}\frac{1}{t}f(t)dt \leq$$

$$\leq \lim_{t\to 0}\Big\{t^{-2\omega}\ln^{2\lambda}\frac{1}{t}[t^{1-\rho}(-a_1[u,u] + a_2||u||^2) + z||u||^2]\Big\} +$$

$$+\Big\{t^{-2\omega}\ln^{2\lambda}\frac{1}{t}(t^{1-\rho}a_3[u,u] - z||u||^2)\Big\}_{t=T} + \varepsilon\int\limits_0^T t^{-1+\delta}\ln^{2\lambda}\frac{1}{t} \leq$$

$$\leq a_3T^{-2\omega-\rho+1}\ln^{2\lambda}\frac{1}{T}[u,\, u] + \varepsilon\delta^{-2\lambda-1}\Gamma(2\lambda+1) \leq$$

$$\leq a_3T^{-2\omega-\rho+1}\ln^{2\lambda}\frac{1}{T} + \varepsilon\delta^{-2\lambda-1}\Gamma(2\lambda+1).$$

Ҳосил қилинган тенгсизликнинг чап томонидаги интегралнинг чегарасини $[0,T']\,(T' < T)$ гача қисқартириб, чап ва ўнг томонини $(\ln' T)^2$ га бўлсак ва $\lambda = \dfrac{1}{4}\dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln\ln(1/\varepsilon)}$ деб олсак, теоремадаги тенгсизликга келамиз.

Бу теоремадан $\varepsilon \to 0$ да мос равишда ягоналик теоремаси ҳосил қилинади.

Мисол 1. (18.1) - тенгсизликка мос келадиган ушбу тенгликни киритамиз

$$t^\rho u_t + u_{xx} = 0,$$

бу ерда $H = L_2[c,d]$, $D = C^2[c,d] \cap C_0[c,d]$, $[u,u] = (u_x, u_x)$.
Юқоридаги натижалардан бу тенгламага қўйилган мос Коши масаласининг шартли коррект эканлиги келиб чиқади.

Мисол 2. Симметрик кучли эллиптик операторга эга бўлган бузиладиган параболик система учун қўйилган аралаш масала.

Фараз қилайлик Ω - R^N фазодаги чегараланган соҳа бўлиб, чегараси C^1 синфга тегишли бўлсин, $H = L_N^2(\Omega)$ - ўлчовли N га тенг бўлган вектор - функциялар фазоси бўлиб, унда скаляр кўпайтма қуйидагича аниқланган

$$(u, u) = \int_\Omega < u, u > dx$$

бўлсин (бу ерда $< \cdot, \cdot >$ R^N фазодаги скаляр кўпайтма, $|||\cdot|||$ унга мос норма). $A(t)$ иккинчи тартибли кучли эллиптик симметрик оператор:

$$A(t)u = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (-1)^{m-1} D^\alpha A^{\alpha,\beta}(t,x) D^\beta u,$$

бу ерда
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n}$, $D^\beta = D_1^{\beta_1} D_2^{\beta_2} ... D_n^{\beta_n}$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $A^{\alpha,\beta}(t,x) = \left\{ a_{ij}^{\alpha,\beta}(t,x) \right\}_{i,j=1}^N$ - $N \times N$ ўлчовли симметрик матрица, ундан ташқари

$$A^{\alpha,\beta}(t,x) = A^{\alpha,\beta}(t,x)$$

Бу матрицалар элементи $0 < t \leq T$ ларда $C^m(\overline{\Omega})$ синфга тегишли.

$A(t)$ операторнинг кучли эллиптик эканлиги ушбу квадратик форманинг

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} < A^{\alpha,\beta}(t,x) \xi^\alpha \xi^\beta \overline{\zeta}, \overline{\zeta} >$$

мусбат аниқланганини билдиради. $A(t)$ операторни ушбу $D = C^{2m}(\Omega) \cap C_0^{m-1}(\overline{\Omega})$ да қараймиз ва D да қуйидаги скаляр кўпайтмани

$$[u, v] = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u_i D^\alpha v_i dx$$

киритамиз. $A(t)$ оператори D да симметрик.

Қўйган шартларимизда бу оператор теорема шартларини қаноатлантиради. $A_t(t)$ операторни аниқлаш учун $A^{\alpha,\beta}$ матрица элементларига қўшимча шартлар қўямиз, яъни

$$\frac{\partial a_{ij}^{\alpha,\beta}(t,x)}{\partial t} \in C^m(\overline{\Omega}) \quad (0 < t \le T), \qquad \left|\frac{\partial a_{ij}^{\alpha,\beta}(t,x)}{\partial t}\right| \le ct^{-1}.$$

У ҳолда $A_t(t)u = \sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} (-1)^m D^\alpha A_t^{\alpha,\beta}(t,x) D^\beta u$ бўлиб, унга қўйилган шарт ҳам бажарилади. (18.1) тенгсизлигимиз ушбу кўринишда бўлади

$$\int\limits_\Omega \left|\left|t^\rho u_t + \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (-1)^{m-1} D^\alpha A^{\alpha,\beta}(t,x) D^\beta u\right|\right|^2 dx \le$$

$$\le b_1 t^{\rho-1} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{|\alpha|\le m} (D^\alpha u_i)^2 dx + b_2 t^{2\rho-2} \int\limits_\Omega || \, |u| \, ||^2 dx + f(t). \quad (18.5)$$

u – масаланинг классик ечими бўлиб чегаравий шартлар $\partial\Omega$ да нолга тенг, яъни $0 \le t \le T$ ларда $u \in D$ ва $x \in \overline{\Omega}$ да $u \in C([0,T])$. Бундан ечим, табиийки, юқоридаги таърифдаги ечим ҳам бўлади.

$f(t) \equiv 0$ бўлганда 18.1 - теоремадан масала ечимининг тривиал эканлиги келиб чиқади.

Ўзгармас катталиклар c, b_1, b_2 ларни етарлича кичик олиш ҳисобига 18.1 - теорема шартларини бажаришга эришамиз.

Теорема 18.2 . *Фараз қилайлик, барча $0 \le t \le T$ ларда $u \in D$, $x \in \overline{\Omega}$ да $u(t) \in C^1[0,T]$, $u(0) = 0$ бўлсин ва $u(t)$ (18.5)-ни етарлича кичик c, b_1, b_2 ўзгармаслар билан қаноатлантиради. У ҳолда*

$$u(t) \equiv 0.$$

Ҳақиқатан барча $x \in \overline{\Omega}$ ларда $u(0) = 0$ ва $u(t) \in C^1[0,T]$ бўлганидан, етарлича кичик t ларда

$$||u(t)||^2 \le ct^2.$$

У ҳолда (18.5) нинг ечими учун (бу ерда $f(t) \equiv 0$) мос k билан

$$v(t) = ku(t)$$

ва 18.1 - теоремага қўйилган шартлар $\varepsilon = 0$ ва $\omega = 1 - \delta/2$ (δ мусбат кичик миқдор) параметрлар билан бажарилади. 18.1 -теорема шартларига асосан ξ ни шундай танлаймизки,

$$\omega - (1/4)(1-\beta)(1-\xi) = 1 - \delta/2 - (1/4)(1-\rho)(1-\xi) > 0$$

бўлсин. У ҳолда a_3 (c га пропорционал), b_1, b_2 ларнинг етарлича кичиклик шартлари ушбу тенгсизликлар билан берилади:

$$a_3 + b_1 < a_1(1-\rho)\xi,$$

$$b_2 < (1-\rho)(1-\xi)[1 - \delta/2 - (1/4)(1-\rho)(1-\xi)],$$

бу ерда a_1 $A(t)$ операторнинг Гординг тенгсизлигидаги асосий ўзгармас катталикдир.

§ 19. Оператор тип коэффициентли иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар

Бу параграфдаги изланишларни ҳам энг оддий кўринишдаги тенгламадан бошлаймиз. Бу ерда H (ҳақиқий ёки комплекс) Гильберт фазоси, $u(t)$ шу фазодан қиймат қабул қилувчи t скаляр параметрнинг функцияси, A чизиқли оператор бўлиб, унинг аниқланиш соҳаси D шу Гильберт фазосида зич жойлашган.

I.Ҳақиқий сонлар майдони устида H Гильберт фазосини оламиз, A оператор ўз-ўзига қўшма оператор бўлсин. Ушбу тенгламани қараймиз

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au. \tag{19.1}$$

Бу тенгламанинг ечими ва бу тенгламага мос Коши масаласи ечими юқоридаги биринчи тартибли тенгламадагидек таърифланади.

Теорема 19.1. *(19.1) тенгламанинг ихтиёрий ечими учун ушбу тенгсизлик ўринли*

$$||u(t)||^2 \leq c(t)\left(||u(T)||^2 + |a|\right)^{\frac{t}{T}}\left(||u(0)||^2 + |a|\right)^{1-\frac{t}{T}} - |a|,$$

бу ерда

$$c(t) = e^{2t(T-t)},$$

$$a = \frac{1}{2}[(Au(0), u(0)) - (u'(0), u'(0))].$$

Исбот. Ушбу функцияни киритамиз

$$\varphi(t) = (u, u).$$

Уни дифференциаллаб топамиз

$$\varphi'(t) = 2(u', u), \quad \varphi''(t) = 2(u', u') + 2(u, Au).$$

$\varphi''(t)$ функциянинг иккинчи ҳадини дифференциаллаб топамиз:

$$\frac{d}{dt}(Au, u) = 2(Au, u') = 2(u'', u') = \frac{d}{dt}(u', u').$$

Шундай қилиб

$$\varphi''(t) = 4(u', u') + 4a.$$

Энди ушбу функцияни киритамиз:

$$\psi(t) = \ln(\varphi(t) + |a|).$$

Уни дифференциаллаб топамиз:

$$\begin{aligned} \psi''(t) &= \frac{\varphi''(t)(\varphi(t) + |a|) - (\varphi'(t))^2}{(\varphi(t) + |a|)} = \\ &= 4\frac{[(u', u') + a][(u, u) + |a|] - (u, u')^2}{(u, u) + |a|)^2} \geq -4 \end{aligned}$$

ёки $\psi''(t) + 4 \geq 0$. Бу тенгсизликдан эса

$$\psi(t) \leq \frac{t}{T}\psi(T) + \frac{T-t}{T}\psi(0) + 2t(T-t)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бундан эса теорема исботи келиб чиқади.

Теорема 19.2. *(19.1)-тенглама учун қўйилган Коши масаласи коррект бўлиши учун A операторнинг юқоридан ярим чегараланган бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. $\{E_\lambda\}$ оператор A га мос келувчи проекцион операторлар оиласи бўлсин:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda.$$

Агар A оператор ярим чегараланган бўлса, у ҳолда

$$A = \int_{-\infty}^{a} \lambda dE_\lambda.$$

Фараз қилайлик, аниқлик учун $a > 0$ бўлсин. Унда Коши масаласининг ечими ушбу кўринишга эга бўлади:

$$u(t) = \left(\int_{-\infty}^{0} \cos(\sqrt{-\lambda}t)dE_\lambda\right) u_0 + \left(\int_{0}^{a} ch(\sqrt{\lambda}t)dE_\lambda\right) u_0 + \\ + \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin(\sqrt{-\lambda}t)}{\sqrt{-\lambda}} dE_\lambda\right) u_1 + \left(\int_0^a \frac{sh(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} dE_\lambda\right) u_1,$$

$$u_0 = u(0), \qquad u_1 = u'(0).$$

Бу ердан теорема исботи оддийгина келиб чиқади.

Агар A юқоридан ярим чегараланган бўлмаса, у ҳолда етарлича катта $a > 0$ ва $b > a$ ларда $u_0 \in E_b - E_a$, $u_1 = 0$ билан Коши берилганлари етарлича кичик бўлса ҳам Коши масаласи ечими норма бўйича етарлича катта бўлиши мумкин.

A оператор нормал оператор бўлган ҳолда ҳам (19.1) тенглама учун Коши масаласининг ечими ягона ва шартли турғун бўлади ([10] - га қаранг).

Мисол 1. D соҳа R^n да чегараланган бўлиб, унинг чегараси - S силлиқ бўлсин. D соҳада ўз - ўзига қўшма эллиптик дифференциал операторни Дирихле чегаравий шарти билан қараймиз:

$$Au = -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{kj} \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu,$$

$$u_{|S} = 0,$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{kj}\xi_j\xi_k \geq \delta|\xi|^2, \quad \delta > 0, \quad a_{kj} = a_{jk}, \quad \forall j, k,$$

a_{kj} – узлуксиз дифференциалланувчи, с – узлуксиз функция.

Ушбу аралаш масалани қараймиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1.$$

Юқоридаги натижаларимиздан бу масала нокоррект бўлиб, 19.1 - теоремадан унинг ечими ягона ва шартли турғун эканлиги келиб чиқади.

II. A ва B операторлари H – ҳақиқий Гильберт фазосида зич жойлашган D соҳада аниқланган чизиқли ўз - ўзига қўшма операторлар бўлсин. Ушбу иккинчи тартибли дифференциал тенгламани қараймиз

$$B\frac{d^2u}{dt^2} = Au. \tag{19.2}$$

Теорема 19.3 . *Агар барча $u \in D(A)$ лар учун $(Au, u) \geq \lambda(u, u)$ $(\lambda > 0)$ бўлса ва B^{-1} мавжуд бўлса, у ҳолда (19.2) тенгламанинг ечими учун қуйидаги тенгсизлик ўринли:*

$$(Au, u) \leq C(t)((Au(T), u(T)) + |\alpha|)^{t/T}((Au(0), u(0)) + |\alpha|)^{T-t/T} - |\alpha|,$$

бу ерда

$$C(t) = e^{2t(T-t)},$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[(Au(0), B^{-1}Au(0)) - (Au'(0), u'(0))\right].$$

Исбот. $\varphi(t) = (Au, u)$ функцияни қараймиз ва ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\varphi'(t) = 2(Au', u),$$

$$\varphi''(t) = 2(Au', u') + 2(Au'', u) = 2(Au', u') + 2(Au, B^{-1}Au)$$

(Au', u') ифоданинг ҳосиласи ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Au', u') &= (Au'', u') + 2(Au', u'') = \\ &= (B^{-1}Au, Au') + (Au', B^{-1}Au) = \frac{d}{dt}(Au, B^{-1}Au).\end{aligned}$$

Шундай қилиб

$$(Au', u') = (Au, B^{-1}Au) - 4\alpha.$$

ёки

$$\varphi''(t) = 4(Au', u') + 4\alpha.$$

Бу ердан 19.3 - теореманинг исботи келиб чиқади.

Мисол. Иккинчи тартибли аралаш тур тенгламага қўйилган чегаравий масала. $Q = (-1 < x < 1) \times (0, T)$ $(x \neq 0)$ соҳада ушбу тенгламани қараймиз.

$$sgnx\ u_{tt}(t, x) + u_{xx}(t, x) = 0. \tag{19.3}$$

Масала. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи (19.3) тенгламанинг ечимини топинг:

$$\begin{aligned} u(0,x) &= f(x), u_t(0,x) = g(x), \quad -1 \le x \le 1; \\ u(t,-1) &= u(t,1) = 0, \qquad 0 \le t \le T; \\ u(t,-0) &= u(t,+0), \quad u_x(t,-0) = u_x(t,+0). \end{aligned}$$

A - оператор $L_2(-1,1)$ фазода мусбат аниқланган $Au = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ дифференциал ифода ва $u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0$ чегаравий шартлар билан аниқланади. B оператор сифатида $sgnx$ га кўпайтиришни қараймиз. У ҳолда 19.3 - теорема натижасига мувофиқ унинг ечими ягона ва шартли турғундир.

§ 20. Иккинчи тартибли ўзгарувчи коэффициентли дифференциал тенгламалар

Фараз қилайлик, $u(t)$ функция [0,T) - да аниқланган, $u_t(t)$, $u_{tt}(t)$ ва чизиқли $A(t)$, $B(t)$ операторларнинг аниқланиш соҳаси D ($D \subseteq H$) бўлсин (H - ҳақиқий ёки комплекс Гильберт фазоси). $u(t)$ функция ушбу дифференциал оператор тенгламанинг ечими

$$B(t)\frac{d^2u}{dt^2} = A(t)u(t) + f(t,u,u_t) \tag{20.1}$$

бўлсин.
Ушбу параграфда асосан (20.1) тенгламага қўйилган Коши масаласини ўрганамиз.

Теорема 20.4 *[32]. Фараз қилайлик $u(t)$ функция (20.1) тенгламанинг ечими, $v(t)$ эса ушбу ифода билан аниқланган бўлсин:*

$$Lv \equiv Bv_{tt} - Av - f(t,v,v_t).$$

$B(t)$ симметрик чизиқли, мусбат аниқланган оператор бўлиб, унинг ҳосиласи $B'(t) \equiv \lim\limits_{h\to 0} h^{-1}[B(t+h)x - B(t)x]$ кучли маънода мавжуд бўлсин. Ундан ташқари шундай $\lambda' \ge 0$ ўзгармас мавжудки, барча $x, y \in D$ учун

$$|(y, B'(t)x)| \le \lambda' \sqrt{(x, B(t)x)}\,\sqrt{(y, B(t)y)}$$

ўринли бўлсин.

$A(t)$ - симметрик чизиқли оператор бўлиб, унинг ҳосиласи $A'(t)$ мавжуд, ундан ташқари шундай $\delta, \gamma \quad (\gamma \geq 0)$ ўзгармаслар топиладики, барча $x \in D$ учун

$$(x, A'(t)x) \geq \delta(x, A(t)x) - \gamma(x, B(t)x)$$

ўринли бўлсин.

У ҳолда шундай $\alpha_i, \ (i = 1, 4)$ ўзгармаслар мавжудки, ушбу функция

$$\varphi(t) = \int_0^t (w, B(t)w)d\tau + (T-t)(w, Bw)_0 + \alpha_1(w, Bw)_0 +$$

$$+ \alpha_2(w_t, Bw_t)_0 + \alpha_3||Aw||_0^2 + \alpha_4 \int_0^T ||Lv||^2 d\tau \qquad (20.2)$$

қуйидаги тенгсизликни қаноатлантиради:

$$\varphi\varphi''(t) - (\varphi'(t))^2 \geq -a_1\varphi\varphi' - a_2\varphi^2, \qquad (20.3)$$

бу ерда a_1, a_2 T га боғлиқ манфиймас ўзгармаслар, $w = u - v$.

Исбот. $\varphi(t)$ функциясини қисқа кўринишда ёзиб оламиз:

$$\varphi(t) = \int_0^t (w, Bw)d\tau + (T-t)(w, Bw)_0 + P^2 =$$

$$= \int_0^t (w, Bw)d\tau + Q^2. \qquad (20.4)$$

Бу функциянинг ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\varphi'(t) = (w, Bw) - (w, Bw)_0 = \int_0^t \frac{d}{d\tau}(w, Bw)d\tau =$$

$$= 2\int_0^t Re(w_\tau, Bw)d\tau + \int_0^t (w, B'(t)w)d\tau;$$

$$\varphi''(t) = 2\int_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau + 2\int_0^t Re(w, Bw_{\tau\tau})d\tau +$$

$$+ 2\int_0^t Re(w, B'w_\tau)d\tau + (w, B'w).$$

$\varphi\varphi'' - (\varphi')^2$ ифодани ўзгартириб ёзамиз

$$\varphi\varphi'' - (\varphi')^2 = 4s^2 + 4Q^2 \int_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau +$$
$$+ \; 2\varphi(t) \int_0^t [Re(w, Bw_{\tau\tau}) - (w_\tau, Bw_\tau)]d\tau +$$
$$+ \; \left[\varphi(t)\left\{2\int_0^t Re(w, B'w_\tau)d\tau + (w, B'w)\right\} - \right.$$
$$\left. - \; \left\{4\int_0^t Re(w_\tau, Bw)d\tau \int_0^t (w, B'w)d\tau + \left(\int_0^t (w, B'w)ds\right)^2\right\}\right],$$

бу ерда

$$s^2 \equiv \int_0^t (w\, Bw)d\tau \int_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau - \left(\int_0^t Re(w, Bw)d\tau\right)^2 \geq 0.$$

Элементар тенгсизликлар, Коши-Буняковский тенгсизлиги ва $B(t)$ операторнинг хоссаларидан фойдаланилиб, қуйидаги тенгсизликларни келтириб чиқариш мумкин:

$$\left[\int_0^t (w, Bw)d\tau \cdot \int_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau\right]^{1/2} \leq s + \varphi' + (w, Bw)_0 - kQ^2 + k\varphi;$$

$$\left|2\int_0^t Re(w, B'w)d\tau + (w, B'w)\right| \leq k_1 s + k_2\varphi + k_3\varphi' + k_4(w, Bw)_0 - k_0 Q^2;$$

$$\left|4\int_0^t Re(w_\tau, Bw)d\tau \cdot \int_0^t (w, B'w)d\tau + \left(\int_0^t (w, B'w)d\tau\right)^2\right| \leq$$
$$\leq k_1\varphi s + k_2\varphi^2 + k_3\varphi\varphi' + k_4(w, Bw)_0\varphi - k_5 Q^2.$$

Буларни эътиборга олиб топамиз:

$$\varphi\varphi'' - (\varphi')^2 \geq 4s^2 + 4Q^2 \int_0^t (w_\tau, Bw_\tau)d\tau +$$
$$+ \; 2\varphi(t) \int_0^t \Big[Re(w, Bw_{\tau\tau}) - (w_\tau, Bw_\tau)\Big] d\tau -$$
$$- \; k_1\varphi s - k_2\varphi^2 - k_3\varphi\varphi' + k_5(Q^2 - k_6(w, Mw)_0)\varphi. \quad (20.5)$$

$H(t)$ билан ушбу ифодани белгилаймиз

$$H(t) = \int_0^t [(w, Aw) - (w_\tau, Bw_\tau)]d\tau + \int_0^t Re[(w, f^*) - (w, Lv)]d\tau =$$

$$= g(t) + \int_0^t Re[(w, f^*) - (w, Lv)]d\tau, \qquad (20.6)$$

бу ерда $\quad f^* = f(t, u, u_t) - f(t, v, v_t)$.

Энди ушбу ифодани

$$g(t) \equiv \int_0^t [(w, Aw) - (w_\tau, Bw_\tau)]d\tau$$

қуйидан баҳолаймиз.

Тенгламадан қуйидагини кўриш қийин эмас:

$$0 = 2\int_0^t (t - T)Re(w_\tau, Bw_{\tau\tau} - Aw - f^* + Lv)d\tau.$$

Бу ифодани бўлаклаб интеграллаб, A, B, f, Lv ларга қўйилган шартлардан, ҳамда элементар тенгсизликлардан фойдаланиб, ушбу баҳога эга бўламиз:

$$g(t) \geq -k_1 s - k_2\varphi' - k_3\varphi + k_4 Q^2 -$$

$$- \left[k_5(w, Bw)_0 + k_6(w_t, Bw_t)_0 + k_7||Aw||_0^2 + k_8\int_0^T ||Lv||^2 d\tau\right]. \qquad (20.7)$$

Юқоридаги баҳоларни эътиборга олиб, $\varphi(t)$ функцияси учун мос a_1, a_2 манфиймас ўзгармаслар билан (20.3) тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Теорема исботланди.

Натижа 20.1 : *20.4-теорема шартлари бажарилса, у ҳолда (20.1) тенглама учун мос Коши масаласи ечими ягонадир.*

20.1-натижанинг исботи олдинги 17.1-натижанинг исботига ўхшашдир.

Натижа 20.2 . *20.4-теорема шартлари бажарилиб, агар v_1 ва v_2 лар шундай бўлинса мос равишда Lv_1 ва Lv_2 лар аниқланган. У ҳолда* *шундай* $k_i(i=1,2)$ *ва* $\alpha_i(i=1,2,3,4)$ *ўзгармаслари мавжудки, барча* $t\in[0,T)$ *учун ушбу тенгсизлик ўринли:*

$$\int_0^t (w,Bw)d\tau \le k_1 Q^{2(1-\gamma(t))}\left(\int_0^t (w,Bw)d\tau + Q^2\right)^{\gamma(t)},$$

бу ерда $w=v_1-v_2,\qquad \gamma(t)=\dfrac{1-e^{-k_2t}}{1-e^{-k_2T}},$

$$Q^2=\alpha_1(w,Bw)_0+\alpha_2(w_\tau,Bw_\tau)_0+\alpha_3||Aw||_0+\alpha_4\int_0^t ||Lv_1-Lv_2||^2ds.$$

Бу натижанинг исботи 17.2-натижанинг исботи каби келтирилади.

§ 21. Ўзгарувчи оператор тип коэффициентли бузиладиган иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар

Бу параграфда ҳам оддийлик учун H ҳақиқий Гильберт фазосида операторнинг асосий қисми ушбу ифодадан

$$t^p u_{tt}+A(t)u$$

иборат дифференциал тенгсизликни қараймиз.

Бузилиш тартиби $p<2$ бўлганда мос масала изланиши биринчи тартибли тенгламанинг усулига ўхшаш бўлгани учун $p\ge 2$ ҳолни қараймиз. Ушбу иккинчи тартибли дифференциал тенгсизликни қараймиз:

$$||t^2u_{tt}+A(t)u||^2\le ln^{-2}\frac{1}{t}\left(b_2t^2||u_t||^2+b_2[u,u]+b_3||u||^2\right). \tag{21.1}$$

Таъриф 21.1 . *$u(t):[0,T]\to H$ функцияси (21.1) тенгсизликнинг ечими бўлади, агар:*

1) $u(t),u_t(t)$ $0\le t\le T$ да узлуксиз ва $u,u_t\in D$
(D – A операторнинг аниқланиш соҳаси);
2) $0\le t\le T$ да u_{tt} мавжуд;
3) $0\le t\le T$ да $u(t)$ (21.1) тенгсизликни қаноатлантиради.

Лемма 21.1 . *Фараз қилайлик $u(t)$ таърифнинг 1), 2) шартларини қаноатлантирсин, $\gamma(t), \psi(t)$ ва $k(t)$ функциялар мос равишда C^1, C^2 ва C^3 ларга тегишли бўлиб, $\gamma(t) > 0$ бўлсин. У ҳолда ушбу тенгсизлик ўринли:*

$$\gamma e^{2k}||t^p u_{tt} + A(t)u||^2 \geq 2e^{2k}\Big\{\Big[\left(\gamma t^{2p}\right)_t k_t + \gamma t^p\left(t^p k_{tt} + \psi\right)\Big]||u_t||^2 +$$

$$+\Big[-\left(\gamma t^p\right)_t k_t + \gamma\left(-t^p k_{tt} + \psi\right)\Big](-Au, u) + \gamma t^p k_t (A_t u, u) +$$

$$+\Big[2\gamma t^p k_t^2 (t^p k_{tt} - \psi) - t^{-1}[t(\gamma t^{2p} k_t^2)_t]_t + \tfrac{1}{2}\gamma t^{2p-2} k_t^2 -$$

$$-\left(\gamma t^p \psi\right)_t k_t - \tfrac{1}{2}\gamma\psi^2 - \tfrac{1}{2}\left(\gamma t^p \psi\right)_{tt}\Big]||u||^2\Big\} +$$

$$+2\Big\{e^{2\kappa}[-\gamma t^{2\rho}\kappa_t ||u_t||^2 + \gamma t^\rho \kappa_t (Au, u) - \gamma t^\rho (2t^\rho \kappa_t^2 + \psi)(u_t, u) +$$

$$+\left(-\gamma t^{2\rho}\kappa_t\left(2\kappa_t^2 - \frac{\kappa_t}{t} - 2\kappa_{tt}\right) + (\gamma t^{2\rho})_t \kappa_t^2 + \frac{(\gamma t^\rho \psi)_t}{2}\right)||u||^2]\Big\}_t. \quad (21.2)$$

Исбот. $v = e^\kappa u$ бўлсин. У ҳолда

$$u_{tt} = e^{-\kappa}\left[v_{tt} - 2\kappa_t v_t + (\kappa_t^2 - \kappa_{tt})v\right]$$

ва

$$\gamma e^{2\kappa}||t^\rho u_{tt} + A(t)u||^2 =$$
$$= \gamma||t^\rho v_{tt} + A(t)v + t^\rho(\kappa_t^2 - \kappa_{tt})v - 2t^\rho \kappa_t v_t||^2 =$$
$$= \gamma||t^\rho v_{tt} + A(t)v + t^\rho(\kappa_t^2 - \kappa_{tt})v + \psi v - \psi v||^2 +$$
$$+4t^{2\rho}\kappa_t^2||v_t||^2 - 4\gamma t^\rho \kappa_t\Big(t^\rho v_{tt} + Av + t^\rho(\kappa_t^2 - \kappa_{tt})v, v_t\Big).$$

Бу ердан

$$\gamma e^{2\kappa}||t^\rho u_{tt} + A(t)u||^2 \geq$$
$$\geq -2\gamma\psi\Big(t^\rho v_{tt} + A(t)v + t^\rho(\kappa_t^2 - \kappa_{tt})v, v\Big) -$$
$$-4\gamma t^\rho \kappa_t\Big(t^\rho v_{tt} + Av + t^\rho(\kappa_t^2 - \kappa_{tt})v, v_t\Big) +$$
$$+4\gamma t^{2\rho}\kappa_t^2||v_t||^2 - \gamma\psi^2||v||^2 = s_1 + s_2 + s_3 - \gamma\psi^2||v||^2.$$

Бу ерда

$$\begin{aligned}
s_1 \;&=\; 2\gamma t_\rho \psi ||v_t||^2 + 2\gamma\psi(-Av, v) + \Big[-2\gamma t^\rho \psi(\kappa_t^2 - \kappa_{tt}) + (\gamma t^\rho \psi)_{tt}\Big] ||v||^2 + \\
&\quad + \Big[-2\gamma t^\rho \psi(v_t, v) + (\gamma t^\rho \psi)_t ||v||^2\Big]_t ; \\
s_2 \;&=\; 2(\gamma t^{2\rho}\kappa_t)_t ||v_t||^2 - 2(\gamma t^\rho \kappa_t)_t(-Av, v) + \\
&\quad + \kappa_t 2\gamma t^\rho (A_t v, v) + 2[\gamma t^{2\rho}\kappa_t(\kappa_t^2 - \kappa_{tt})]_t ||v||^2 + \\
&\quad + \Big[-2\gamma t^{2\rho}\kappa_t ||v_t||^2 + 2\gamma t^\rho \kappa_t(-Av, v) - 2\gamma t^{2\rho}\kappa_t(\kappa_t^2 - \kappa_{tt})||v||^2\Big]_t . \\
s_3 \;&\geq\; \Big[-(2\gamma t^{2\rho}\kappa_t^2)_t + \gamma t^{2\rho-1}\kappa_t^2\Big]\frac{||v||^2}{t} + \Big(2\gamma t^{2\rho-1}\kappa_t^2 ||v||^2\Big)_t .
\end{aligned}$$

Юқоридаги натижаларни бирлаштириб топамиз:

$$\begin{aligned}
\gamma e^{2\kappa}||t^\rho u_{tt} \;&+\; A(t)u||^2 \geq 2\Big\{\big[\gamma t^\rho \psi + (\gamma t^{2\rho}\kappa_t)_t\big]\,||v_t||^2 + \\
&+\; [-(\gamma t^\rho \kappa_t)_t + \gamma\psi](-Av, v) + \gamma t^\rho \kappa_t (A_t v, v) + \\
&+\; \Big[\gamma t^{2\rho}\kappa_t(\kappa_t^2 - \kappa_{tt})_t - \frac{\left(\gamma t^{2\rho}\kappa_t^2\right)_t}{t} + \frac{\gamma t^{2\rho-2}\kappa_t^2}{2} - \\
&-\; \gamma t^\rho \psi(\kappa_t^2 - \kappa_{tt}) - \frac{\gamma\psi^2}{2} - \frac{(\gamma t^\rho \psi)_{tt}}{2}\Big] ||v||^2\Big\} + \\
&+\; 2\Big\{-\gamma t^{2\rho}\kappa_t ||v_t||^2 + \gamma t^\rho \kappa_t(-Av, v) - \gamma t^\rho \psi(v_t, v) + \\
&+\; \Big[-\gamma t^{2\rho}\kappa_t(\kappa_t^2 - \frac{1}{t}\kappa_t - \kappa_{tt}) + \frac{1}{2}(\gamma t^\rho \psi)_t\Big]\,||v||^2\Big\}_t .
\end{aligned}$$

Энди $u(t)$ функцияга қайтамиз. $||v_t||^2$ ни ўз ичига олган ифодалар қуйидагича ўзгаради:

$$\begin{aligned}
\psi ||v_t||^2 \;&=\; \varphi\, ||e^\kappa u_t + \kappa_t e^\kappa u||^2 = \\
&=\; e^{2\kappa}\varphi ||u_t||^2 + e^{2\kappa}\varphi\kappa_t^2 ||u||^2 - (\exp 2\kappa\varphi\kappa_t)_t ||u||^2 + \\
&\quad + \left(e^{2\kappa}\varphi\kappa_t ||u||^2\right)_t = \\
&=\; e^{2\kappa}\varphi ||u_t||^2 - e^{2\kappa}\Big[(\kappa_t^2 + \kappa_{tt})I + \kappa\frac{\partial}{\partial t}\Big]\varphi ||u||^2 +
\end{aligned}$$

$$+\left(\exp 2\kappa\varphi\kappa_t||u||^2\right)_t,$$

(I бирлик оператор). Шунинг учун $u(t)$ функциясига қайтганимизда $||v_t||^2$(худди шунингдек $(-Av,v)$ ва (A_tv,v)) олдидаги коэффициент фақат $e^{2\kappa}$ га кўпайтирилади. Унда $||u||^2$ олдидаги коэффициент қуйидагига тенг бўлади:

$$e^{2\kappa}\Big\{\left[\gamma t^{2\rho}\kappa_t(\kappa_t^2)-\kappa_{tt})\right]_t - t^{-1}\left(\gamma t^{2\rho}\kappa_t^2\right)_t + 0.5\gamma t^{2\rho-2}\kappa_t^2 -$$

$$-\gamma t^\rho\psi(\kappa_t^2-\kappa_{tt}) - 0.5\gamma\psi^2 - (\gamma t^\rho\psi)_{tt} -$$

$$-\left[(\kappa_t^2+\kappa_{tt})I + \kappa_t\frac{\partial}{\partial t}\right]\left[\left(\gamma t^{2\rho}\kappa_t^2\right)_t + \gamma t^\rho\psi\right]\Big\};$$

Дивергент ҳад олдидаги коэффициент эса $2e^{2\kappa}$ кўпайтма аниқлигида ушбу кўринишга эга бўлади:

$$-\gamma t^{2\rho}\kappa_t||u_t||^2 + \gamma t^\rho\kappa_t(-Au,u) - \gamma t^\rho(2t^\rho\kappa_t^2+\psi)(u_t,u) +$$

$$+\left[-\gamma t^{2\rho}\kappa_t\left(2\kappa_t^2 - t^{-1}\kappa_t - 2\kappa_{tt}\right) + (\gamma t^{2\rho})_t\kappa_t^2 + 0.5(\gamma t^\rho\psi)_t\right]||u||^2.$$

Булардан эса лемма исботи келиб чиқади.

Энди $\rho=2$ бўлганда $\gamma(t),\psi)(t),\kappa(t)$ ларни қандай танлаш кераклигини аниқлаймиз.

Лемма 21.2 *Фараз қилайлик $u(t)$ функция 21.1-таърифининг биринчи иккита шартини қаноатлантирсин , $\lambda\geq 1$, $m>0$ бўлиб, $c_1,\ c_2$ ўзгармаслар билан ушбу*

$$t<\min\left(e^{-c_1},\ e^{-c_2m}\right)$$

шарт бажарилсин. У ҳолда ушбу

$$\theta t^{-2(\lambda+1)}\ln^{-2m\lambda}t^{-1}||t^2u_{tt}+A(t)u||^2\geq$$

$$\geq\lambda\theta t^{-2(\lambda+1)}\ln^{-2(m+1)\lambda}t^{-1}[mt^2||u_t||^2+0.5m(-Au,u)-$$

$$-(1-2m\ln^{-1}(1/t))t\ln^2(1/t)(A_tu,u)+0.5m\lambda^2||u||^2]+$$

$$+\Big\{\theta t^{-2(\lambda+1)}\ln^{-2(m)\lambda}t^{-1}[\lambda t^3O(1)||u_t||^2+$$

$$+\lambda t\left(-1+2m\ln^{-1}t^{-1}\right)(-Au,u)+\lambda t^3O(1)||u||^2\Big\}_t,$$

тенгсизлик ўринли, бу ерда $\theta = \exp(2m\ln^{-1} t^{-1})$.

Исбот. (21.2) тенгсизликдаги параметрларни қуйидагича танлаймиз:

$$\begin{aligned}
\rho &= 2, \\
\kappa &= -\lambda(\ln t - 2m\ln\ln t^{-1}), \\
\gamma &= t^{-2}\theta, \\
\psi &= \lambda(1 - 2m\ln^{-1} t^{-1} + m\ln^{-2} t^{-1}).
\end{aligned}$$

У ҳолда

$$\begin{aligned}
\kappa_t &= -\lambda t^{-1}(-1 + 2m\ln^{-1} t^{-1}), \\
\kappa_{tt} &= \lambda t^{-2}(1 - 2m\ln^{-1} t^{-1} + 2m\ln^{-2} t^{-1}), \\
(\gamma t^\rho)_t(\gamma t^\rho)^{-1} &= 2mt^{-1}\ln^{-2} t^{-1}
\end{aligned}$$

ва (21.2) тенгсизликнинг коэффициентлари учун топамиз:

$$(\gamma t^\rho)_t\,\kappa_t + (\gamma t^\rho)\,(t^\rho\kappa_{tt} + \psi) =$$

$$= \gamma t^\rho\Big\{\big[\rho t^{\rho-1} + t^\rho(\gamma t^\rho)_t(\gamma t^\rho)^{-1}\big]\,\kappa_t + t^\rho\kappa_{tt} + \psi\Big\} =$$

$$= \lambda\theta\left(m\ln^{-2}\frac{1}{t} + 4m^2\ln^{-3}\frac{1}{t}\right) > \lambda\theta m\ln^{-2}\frac{1}{t};$$

$$-(\gamma t^\rho)_t\kappa_t + \gamma(-t^\rho\kappa_{tt} + \psi) =$$

$$= \lambda t^{-2}\theta\left(m\ln^{-2}\frac{1}{t} - 4m^2\ln^{-3}\frac{1}{t}\right) \le \frac{1}{2}m\lambda\theta^{-2}\ln^{-2}\frac{1}{t}.$$

$||u||^2$ олдидаги коэффициентларни баҳолаймиз:

$$\begin{aligned}
2\gamma t^\rho\kappa_t^2(t^\rho\kappa_{tt} - \psi) &= 2m\lambda^3\theta t^{-2}\ln^{-2} t^{-1}\left(-1 + 2m\ln^{-1} t^{-1}\right)^2 \ge \\
&\ge \frac{5}{3}m\lambda^3\theta t^{-2}\ln^{-2} t^{-1}.
\end{aligned}$$

Ундан ташқари

$$-\frac{1}{t}\Big[t\left(\gamma t^{2\rho}\kappa_t^2\right)_t\Big]_t - (\gamma t^\rho\psi)_t\,\kappa_t - \frac{1}{2}\,(\gamma t^\rho\psi)_{tt} =$$

$$= 4m^2\lambda^2\theta\left(1 + m\ln^{-1}\frac{1}{t} - 8m^2\ln^{-2}\frac{1}{t} - 4m^3\ln^{-3}\frac{1}{t}\right)t^{-2}\ln^{-3}\frac{1}{t} -$$

$$-2m\lambda^2\theta\left(2m-1-m\ln^{-1}\frac{1}{t}\right)\left(1-2m\ln^{-1}\frac{1}{t}\right)t^{-2}\ln^{-3}\frac{1}{t}+$$

$$+m\lambda\theta\Big[-2m+1+(7m-3)\ln^{-1}\frac{1}{t}+2m(2m-1)\ln^{-2}\frac{1}{t}-$$

$$-2m^2\ln^{-3}\frac{1}{t}\Big]t^{-2}\ln^{-3}\frac{1}{t}\ge-\frac{1}{3}m\lambda^3\theta t^{-2}\ln^{-2}\frac{1}{t},$$

ва охирида

$$\frac{1}{2}\gamma t^{2\rho-2}\kappa_t^2-\frac{1}{2}\gamma\psi^2 = \frac{1}{2}\gamma(t^{2\rho-2}\kappa_t^2-\psi^2)\ge$$

$$\ge-\frac{1}{3}m\lambda^3\theta t^{-2}\ln^{-2}\frac{1}{t}.$$

Шундай қилиб, $\gamma,\ \psi,\ \kappa$ функциялар бундай танланса, $||u||^2$ олдидаги коэффициент қуйидан ушбу катталик билан баҳоланади:

$$\frac{1}{2}m\lambda^3\theta\frac{1}{t^2}\ln^{-2}\frac{1}{t}.$$

Лемма исботланди.

Теорема 21.1 . *Ихтиёрий $b_1,\ b_2,\ b_3$ билан берилган (21.1) тенгсизликнинг ечими $u(t)$ учун ихтиёрий $\lambda>0$ ларда*

$$t^{-\lambda}||u(t)||,\qquad t^{-\lambda}||u_t(t)||\to 0\quad(t\to 0)$$

ўринли бўлсин. У ҳолда $u(t)\equiv 0$.

Исбот. Юқорида ҳосил қилинган тенгсизликларни эътиборга олиб топамиз:

$$\theta t^{-2(\lambda+1)}\ln^{-2(m+1)\lambda}t^{-1}\Big[(m\lambda-b_1)t^2||u_t||^2+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\lambda ma_1-b_2-a_3\lambda\right)[u,u]+\left(\frac{1}{2}m\lambda^3-b_3-a_2m\lambda\right)||u||^2\Big]\le$$

$$\le\Big\{\theta t^{-2(\lambda+1)}\ln^{-2(m)\lambda}\frac{1}{t}\Big[\lambda t^3O(1)||u_t||^2+$$

$$+\lambda t\left(1-2m\ln^{-1}\frac{1}{t}\right)(-Au,\,u)+\lambda^3tO(1)||u||^2\Big]\Big\}_t.$$

Бундаги m ва λ параметрларни шундай танлаймизки, қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлсин:

$$m\lambda-b_1\ge 0,\quad \frac{1}{2}ma_1\lambda-b_2-a_3'\lambda\ge 0,\quad \frac{1}{2}m\lambda^3-b_3-a_2\lambda\ge\frac{1}{4}m\lambda^3\quad(\lambda\ge 1).$$

У ҳолда 21.2-леммадаги шартни қаноатлантирувчи t лар учун ушбу тенгсизлик ўринли эканлигини кўриш қийин эмас:

$$\frac{1}{4}m\theta\lambda^2 t^{-2(\lambda+1)}\ln^{-2(m+1)\lambda}\frac{1}{t}||u||^2 \leq$$

$$\leq \left\{\theta t^{-2(\lambda+1)}\ln^{-2(m)\lambda}\frac{1}{t}\Big[t^3 O(1)||u_t||^2 +\right.$$

$$\left. +t\left(1-2m\ln^{-1}\frac{1}{t}\right)(-Au,u)+\lambda^2 tO(1)||u||^2\Big]\right\}_t.$$

Бу ердан эса теоремани исботи осонгина келиб чиқади.

Изоҳ. Биринчи тартибли оператор тур коэффициентли тенгламалар учун қўйилган Коши масаласининг шартли корректлиги (оператор ўз-ўзига қўшма ва нормал бўлган холлар) С.Г.Крейн томонидан текширилган. Бу бобнинг бошида келтирилган шу ҳолларни баён этувчи теоремалар С.Г.Крейнга [11], [12] тегишли бўлиб, биз уларни М.М.Лаврентьевнинг китоби [16] буйича ёритдик. Тенгламаларда қатнашган функциянинг ҳосиласи олдидаги коэффициент оператор бўлган ҳолни эса асосан H.A.Levine ишлари бўйича келтирдик [31], бу соҳага тегишли бошқа натижаларни адабиётлардан [2], [3], [21], [22], [26], [27], [29], [30], [34] топишингиз мумкин.

Иккинчи тартибли тенгламалар учун асосий натижалар С. Г. Крейн, Н. А. Levine ва бошқаларга тегишли. Биз бу ерда шу соҳага тегишли энг оддий натижаларни [12], [18], [32] лар бўйича ёритдик ([34] га ҳам қаранг).

Биринчи ва иккинчи тартибли, бузиладиган коэффициентлари оператор турда бўлган тенгламаларга қўйилган Коши масаласи ечимининг ягоналиги ва турғунлиги ҳақидаги теоремалар С.П.Шишатский-га [28] тегишли.

§ 22. Оператор тип коэффициентли дифференциал тенгламалар учун регуляризация усули

I. Фараз қилайлик (16.7)-да B ўз-ўзига қўшма оператор бўлиб, H фазони *H га изоморф асклантирсин, ундан ташқари,*

$$E^{+}+E^{-}=I$$

бўлсин, бу ерда E^{+}, E^{-} лар B оператор спектрининг мусбат ва манфий қисмларига мос келувчи спектрал проекторлар.

A – эса ўз-ўзига қўшма мусбат аниқланган оператор бўлиб, аниқланиш соҳаси $D(A)$ H да зич жойлашган. юқоридаги каби $(\cdot,\cdot)$ Hфазодаги скаляр кўпайтмадир.

Фараз қилайлик, $0\in\rho_A$, , $\rho_A - A$ операторнинг резольвент тўплами ва $A^{-1}B$ оператор H дан H га тўла узлуксиз. H^2 (H^2 ушбу $||u||^2_{H^2}=(Au,Au)$ нормали Гильберт фазоси) H да компакт жойлашган бўлсин.

Ҳақиқий интерполяция усули билан $H^s=(H^2,H)_{1-s/2,2}$ фазони кўрамиз. Маълумки, H^s A^s операторнинг аниқланиш соҳаси билан устма-уст тушади.

$L(N,M)$ (N, M -Гильберт фазолари) N дан M га асклантирувчи чизиқли узлуксиз операторлар фазоси бўлсин. $U=E^{+}-E^{-}$ деб белгилаймиз. $\varphi_i^{+}, \varphi_i^{-}$ лар эса қуйидаги

$$Av=\lambda Bv \tag{22.1}$$

спектрал масаланинг λ_i^{+}, λ_i^{-} мусбат ва манфий хос сонларига мос келувчи хос функцияларидир. Хос функцияларни нормалаштирамиз:

$$(U\varphi_i^{\pm},\varphi_i^{\pm})=\pm\delta_{ij}$$

($\delta_{i,j}$ – Кронекер белгиси).

Энди $s_0>0$ шундай бўлсинки, $U\in L(H^{s_0},\ H^{s_0})$. У ҳолда [23] кўрса- тилганки, (22.1) масаланинг хос функциялари H фазода Рисс базисини ташкил этади. Бундан

$$v=\sum_{k=1}^{\infty}v_k^{-}\varphi_k^{-}+\sum_{k=1}^{\infty}v_k^{+}\varphi_k^{-},$$

бўлади, бу ерда $v_k^{\pm} = \pm(Uv, \varphi_k^{\pm})$, $k = 1, 2, ...,$

$$||v||_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (|(Uv, \varphi_k^{+})|^2 + |(Uv, \varphi_k^{-})|^2).$$

Охирги киритилган норма олдинги нормага эквивалентдир.

Таъриф 22.1 *Агар* $v(t) \in L_2([0,T]; H^2)$, $v_t \in L_2([0,T]; H)$, $v(T) = 0$ *учун*

$$\int_0^T (u,\, Bv_t + Av)dt = -(f,\, Bv(0))$$

бўлса, у холда $u(t) \in C([0,T]; H)$ *(16.7) тенгламага қўйилган Коши масаласининг умумлашган ечими дейилади.*

Фараз қилайлик, қаралаётган масала ечими мавжуд ва

$$u \in \{u : ||P^{+}u(T)||_0 \le M\},\ ||f - f_\varepsilon|| \le \varepsilon$$

бўлсин, бу ерда $P^{\pm}u = \pm \sum\limits_{i=1}^{\infty} (Uu, \varphi_k^{\pm})\varphi_k^{\pm},\ N > 1.$

Қаралаётган масала ечими мавжуд бўлса, у қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^{+}(t)\varphi_k^{+} + u_k^{-}(t)\varphi_k^{-}),$$

$$u_k^{\pm} = e^{\lambda_k^{\pm} t} f_k^{\pm}\ ,\ k = 1, 2, ...$$

Масаланинг тақрибий (регулярлаштирувчи) ечими сифатида ушбу

$$u_N(t) = \sum_{k=1}^{N} (u_k^{+}(t)\varphi_k^{+} + u_k^{-}(t)\varphi_k^{-})$$

функцияни қараймиз.

Аниқ ечим ва тақрибий берилганлар бўйича тузилган тақрибий ечим орасидаги фарқни ушбу кўринишда баҳолаймиз

$$||u(t) - u_{N\varepsilon}(t)||_0 \le ||u(t) - u_N(t)||_0 + ||u_N(t) - u_{N\varepsilon}(t)||_0,$$

бу ерда

$$u_{k\varepsilon}^{\pm}(t) = \exp(\lambda_k^{\pm} t) f_{k\varepsilon}^{\pm},\ f_{k\varepsilon}^{\pm} = \pm(Uf_\varepsilon, \varphi_k^{\pm}),\ k = 1, 2, ...$$

Ушбу ифодани юқоридан баҳолаймиз

$$||u_N(t) - u_{N\varepsilon}(t)||_0 \le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N}(e^{2\lambda_k^+ t}|f_k^+ - f_{k\varepsilon}^+|^2 + e^{2\lambda_k^- t}|f_k^- - f_{k\varepsilon}^-|^2) \leq$$

$$\leq e^{2\lambda_N^+ t}\sum_{k=1}^{N}\{|f_k^+ - f_{k\varepsilon}^+|^2 + |f_k^- - f_{k\varepsilon}^-|^2\} \leq \varepsilon^2 \exp(2\lambda_N^+ t).$$

Энди $||u(t) - u_N(t)||_0$ ифодани баҳолаймиз

$$||u(t) - u_N(t)||_0^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty}(e^{2\lambda_k^+}|f_k^+|^2 + e^{2\lambda_k^-}|f_k^-|^2)$$

$$= \Phi_{1N}(t) + \Phi_{2N}(t),$$

бу ерда

$$\Phi_{1N}(t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{2\lambda_k^+ t}|f_k^+|^2,$$

$$\Phi_{2N}(t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{2\lambda_k^- t}|f_k^-|^2 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty}|f_k^-|^2 = \gamma(N),$$

$N \to \infty$ да $\gamma(N) \to 0$, чунки f га мос келувчи қатор яқинлашувчи. $\Phi_{1N}(t)$ ни $u \in \{u : ||P^+ u(t)||_0 \leq M\}$ бўлганда, яъни

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{2\lambda_k^+ T}|f_k^+|^2 \leq M^2$$

шарт остида баҳолаймиз.

Агар $f_k^+ = 0,\ k \neq N+1; |f_{N+1}^+| = M\exp(-2(T-t)\lambda_{N+1}^+)$ бўлса, у ҳолда $\Phi_{1N}(t)$ максимал қийматга эришади.

Шундай қилиб,

$$\Phi_{1N}(t) \leq M^2 \exp(-2(T-t)\lambda_{N+1}^+).$$

Юқоридаги баҳоларни бирлаштириб,

$$||u(t) - u_{N\varepsilon}||_0 \leq e^{t\lambda_N^+} + Me^{(t-T)\lambda_{N+1}^+} + \gamma(N)$$

топамиз. Охирги баҳонинг ўнг томонининг $N > 1$ бўйича энг кичик қийматини аниқлаш ёрдамида регуляризация парметри N нинг қиймати топилади.

II. Шу параграфнинг I пунктда A ва B операторларига қўйилган шартлар бажарилсин.

(19.2) тенгламага қўйилган Коши масаласини тақрибий (регулярлаштирувчи) ечимини кўрамиз.

Таъриф 22.2 *Агар*

$$v(t) \in L_2([0,T],H),\ v_t,\ v_{tt} \in L_2([0,T],H),\ v(T) = v_t(T) = 0$$

учун

$$\int_0^T (u, Bv_{tt} - Av)dt = (f,\ Bv_t(0)) - (g,\ Bv(0)),$$

бўлса, $u(t) \in C([0,T],H)$ функция (19.2) тенгламага қўйилган Коши масаласининг умумлашган ечими дейилади, бу ерда f, g берилган функциялар.

Фараз қилайлик Коши масаласининг ечими мавжуд ва

$$u \in \{u : ||P^+u||_0 \leq M\},\ ||f - f\varepsilon|| \leq \varepsilon,\ ||g - g_\varepsilon|| \leq \varepsilon$$

бўлсин.

У ҳолда кўрсатиш мумкинки, ушбу тақрибий ечим

$$u_N(t) = \sum_{k=1}^{N} (u_k^+ \varphi_k^+ + u_k^- \varphi_k^-)$$

бошланғич масаланинг аниқ ечимига интилади.

Буни исботи юқоридаги пунктдагига ўхшаш бўлгани учун бунга тўхталиб ўтирмаймиз.

Изоҳ Оператор тип коэффициентли дифференциал тенгламаларга қўйилган нокоррект масалаларни тақрибий ечишга кўпгина ишлар бағишланган, уларга мисол сифатида [2], [3], [11], [21], [26], [30], [33] ларни кўрсатишимиз мумкин.

Биз бу ерда қисқа шаклда [26] - нинг натижасини келтирдик.

§ 23. Оператор тип коэффицентли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар

Фараз қилайлик, G бўлакли узлуксиз чегарага эга бўлган R^2 текисликдаги чегараланган соҳа бўлсин. $u(x,y)$ эса (x,y) $((x,y) \in G)$ нинг функцияси бўлиб қийматларини H Гильберт фазосидан қабул қилсин. B чизиқли оператор бўлиб, унинг аниқланиш соҳаси $D(B)$ H да зич жойлашган бўлсин.

Ушбу

$$\Delta u(x,y) = Bu(x,y), \quad (x,y) \in G \qquad (23.1)$$

тенгламани қараймиз, бу ерда $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ *-Лаплас оператори.*

Ундан ташқари $\partial G = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ бўлиб,

$$u|_{\Gamma_1} = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = q, \quad (n - \text{нормал}) \qquad (23.2)$$

берилганлар, бу ерда $f \in C^1(\Gamma_1; H), g \in C(\Gamma_1; H)$.

(23.1) тенглама ечими деб, икки марта узлуксиз дифференциалланувчи (иккала аргумент бўйича ҳам) ва ҳар бир $(x,y) \in G$ учун B операторнинг аниқланиш соҳасига тегишли ва (23.1) тенгламани қаноат-
лантирувчи функция тушунилади.

(23.1) тенгламага қўйилган Коши масаласи деб, (23.2) шартларни қаноатлантирувчи (23.1) тенглама ечимига айтилади, бу ерда $f, g \in D(B)$.

Умуман айтганда, бу масала нокоррект дир. Ушбу параграфда логарифмик қабариқлик усулидан фойдаланиб, бу масала ечимининг ягоналигини ва шартли турғун эканлигини исботлаймиз.

1. Ёрдамчи масала. Фараз қилайлик, $\Omega_T \subset R^2$ чегараланган бир боғламли соҳа бўлиб, қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$\Omega_T = \{(s,t) : 0 \le t_0 < t < T, \varphi_1(t) < s < \varphi_2(t), \varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)\},$$

бу ерда $\varphi_i(t) \in C^1(t \neq t_0)(i = 1,2)$, ундан ташқари
$|\varphi_i(t)|(t - t_0)^{\frac{1}{2}} < \mu$ (i=1,2), μ - ўзгармас,

$$\partial\Omega_T = \overline{\Gamma}'_1 \cup \overline{\Gamma}'_2, \quad \Gamma'_1 \cap \Gamma'_2 = \emptyset,$$

$$\Gamma'_2 = \{(s,t) : t = T, \varphi_1(t) < s < \varphi_2(t)\},$$

$$\Gamma'_1 = \{(s,t) : s = \varphi_i(t)(i = 1,2), t_0 \le t < T\}.$$

Фараз қилайлик, $U(s,t)$ функция Ω_T соҳада ушбу дифференциал тенгламани

$$\Delta U(s,t) - \tilde{a}(s,t)U(s,t) = 0, \quad \tilde{a} = a + ib \qquad (23.3)$$

қаноатлантирсин, (a, b ; жамланувчи чегараланган функциялар) Γ'_1 да эса Коши берилганлари маълум

$$U(s,t)|_{\Gamma'_1} = F, \quad \frac{\partial U(s,t)}{\partial n}|_{\Gamma'_1} = Q. \qquad (23.4)$$

Теорема 23.1 . *Фараз қилайлик, $U(s,t)$ (23.3) тенгламанинг ечими бўлиб, $U|_{\Gamma_1'} = 0$ бўлсин. У ҳолда шундай $\Theta \geq 0$ ўзгармас мавжудки,*

$$\psi(t) = \ln(\int\int\limits_{\Omega_T} |U|^2 ds d\tau + \gamma) \ ,$$

$$(\gamma = \Theta \max(|U_t|^2 + |U_s|^2)_{\Gamma_1'})$$

функция p, q мусбат ўзгармас коэффициентлар билан ушбу тенгсизликни қаноатлантиради

$$\psi"(t) + p\psi'(t) + q \geq 0.$$

Исбот. Баҳоланадиган функцияни $\varphi(t)$ билан белгилаймиз:

$$\varphi(t) = \int\int\limits_{\Omega_t} |U|^2 ds d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\varphi_1(\tau)}^{\varphi_2(\tau)} |U|^2 ds d\tau.$$

$\varphi(t)$ функцияни икки марта дифференциаллаб ва $U(s,t)|_{\Gamma_1'} = 0$ шартни эътиборга олиб, топамиз

$$\varphi'(t) = \int\int\limits_{\Omega_t} \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau} ds d\tau,$$

$$\varphi"(t) = \int\int\limits_{\Omega_t} \frac{\partial^2 |U|^2}{\partial \tau^2} ds d\tau = 2\int\int\limits_{\Omega_t} \{|U_\tau|^2 + VV_{\tau\tau} + WW_{\tau\tau}\} ds d\tau =$$

$$= 2\int\int\limits_{\Omega_t} \{|U_\tau|^2 + a|U|^2\} ds d\tau - 2\int\int\limits_{\Omega_t} \{VV_{ss} + WW_{ss}\} ds d\tau =$$

$$= 2\int\int\limits_{\Omega_t} \{|U_\tau|^2 + a|U|^2\} ds d\tau + 2\int\int\limits_{\Omega_t} |U_s|^2 ds d\tau, \quad (23.5)$$

бу ерда $V = ReU$, $W = ImU$. Шундай қилиб, ушбу айниятни ҳосил қиламиз

$$2\int\int\limits_{\Omega_t} \{|U_s|^2 + |U_\tau|^2\} ds d\tau = \varphi"(t) - 2\int\int\limits_{\Omega_t} a|U|^2 ds d\tau$$

ва бу ердан оддий шакл алмаштиришлардан кейин қуйидаги тенгсизликни топамиз

$$2\int\int\limits_{\Omega_t} (t-\tau)(|U_\tau|^2 + |U_s|^2) ds d\tau \leq$$

$$\leq \varphi'(t) + 2\int\int_{\Omega_t} (t-\tau)|a||U|^2 ds d\tau \leq$$

$$\leq \varphi'(t) + k\varphi(t). \tag{23.6}$$

Энди ушбу функцияни киритамиз

$$p(t) = \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} |U_s|^2 ds$$

ва уни дифференциаллаймиз

$$p'(t) = \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \frac{\partial |U_s|^2}{\partial t} ds + \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \varphi_i'(t) |U_s(\varphi_i'(t), t)|^2.$$

$p'(t)$ ифодани тенгламадан фойдаланиб, ўзгартирамиз

$$p'(t) = -2 \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} [V_s V_{st} + W_s W_{st}]\, ds + \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \varphi_i'(t) |U_s(\varphi_i'(t), t)|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \{\varphi_i'(t)[|U_s(s,t)|^2 + |U_t(s,t)|^2] +$$

$$+ 2((V_s, V_t) + (W_s, W_t))\}_{s=\varphi_i(t)} -$$

$$-\frac{d}{dt} \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} |U_t|^2 ds + +2 \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \left[b(V_t W - V W_t) - \frac{a}{2} \frac{\partial |U|^2}{\partial t} \right] ds.$$

Охирги ифодани t бўйича t_0 дан t гача интеграллаб, топамиз

$$p(t) = \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} |U_t|^2 ds + \int\int_{\Omega_t} \left[b(V_\tau W - V W_\tau) - \frac{a}{2} \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau} ds \right] d\tau + b(t),$$

бу ерда

$$b(t) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \int_{t_0}^{t} \left\{ \varphi_i'(t) \left[|V_s|^2 - |V_t|^2 \right] + 2\left(V_s V_t + W_s W_t \right) \right\}_{s=\varphi_i(t)} d\tau.$$

$p(t)$ учун ҳосил қилинган ифодани олиб бориб $\varphi"_i(t)$ функцияни мос ўрнига қўйиб ҳосил қиламиз

$$\varphi"_i(t) = 4\int\int_{\Omega_t} |U_\tau|^2 ds d\tau +$$

$$+4\int\int_{\Omega_t}(t-\tau)\left[b(V_\tau W - VW_\tau) - \frac{a}{2}\frac{\partial |U|^2}{\partial\tau}\right]dsd\tau +$$

$$+2\int\int_{\Omega_t} a|U|^2 dsd\tau + 2\int_{t_0}^{t} b(\tau)d\tau. \qquad (23.7)$$

Охирги интегрални соҳа чегарасининг хоссасини эътиборга олиб, юқоридан баҳолаймиз

$$2|\int_{t_0}^{t} b(\tau)d\tau| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2}\int_{t_0}^{t}(2|\varphi_i'(\tau)|+1)(|U_s(s,\tau)|^2 + |U_\tau(s,\tau)|^2)(t-\tau)_{s=\varphi_i(\tau)}d\tau \leq$$

$$\leq \Theta_1 \max_{\Gamma_1^t}(|U_t|^2 + |U_s|^2) = \gamma. \quad (23.8)$$

$\varphi"_i(t)$ ни (23.6),(23.8) баҳолар ва қуйидаги

$$|ab| \leq \frac{a^2\beta}{2} + \frac{b^2}{2\beta} \quad (\beta > 0)$$

тенгсизликдан фойдаланиб қуйидан баҳолаймиз

$$\varphi"_i(t) \geq 4\int\int_{\Omega_t}|U_\tau|^2 dsd\tau - \alpha_1\varphi'(t) - \alpha_2\varphi(t) - \gamma, \qquad (23.9)$$

бу ерда α_1, α_2 T ва (23.3) тенгламани коэффициентларига боғлиқ ҳисоб-

ланадиган ўзгармаслар .

$\psi(t) = \ln(\varphi(t)+\gamma)$ функцияни иккинчи тартибли ҳосиласини қуйидан баҳолаб, ушбу

$$\psi"(t) = \frac{(\varphi(t)+\gamma)\varphi"(t) - (\varphi'(t))^2}{(\varphi(t)+\gamma)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{(\varphi(t)+\gamma)^2}\{4\int\int_{\Omega_t}|U|^2 dsd\tau \int\int_{\Omega_t}|U_\tau|^2 dsd\tau - 4(\int\int_{\Omega_t}\frac{\partial |U_\tau|^2}{\partial\tau}dsd\tau)^2 -$$

$$\frac{\alpha_1\varphi'(t)\varphi(t)}{(\varphi(t)+\gamma)} - \frac{\alpha_2(\varphi(t))^2}{(\varphi(t)+\gamma)} - \frac{\gamma\varphi(t))}{\varphi(t)+\gamma}\} \geq$$

$$\geq -p\psi'(t) - q,$$

тенгсизликка эга бўламиз, бу ерда p, qT ва (23.3) тенгламанинг коэффициентларига боғлиқ коэффициентлар. Теорема исботланди.

Натижа 23.1 *(23.3) тенглама учун қўйилган Коши масаласининг $u \in C^1(\overline{\Omega}_T) \cap C^2(\Omega_T)$ ечими ягонадир.*

Исбот. Одатдагидек, фараз қилайлик V_1 ва V_2 (23.3) тенгламага қўйилган Коши масаласи ечими бўлсин. У ҳолда $V = V_1 - V_2$ функция бир жинсли Коши берилганлари билан (23.3) масала ечими бўлади. Юқоридаги теорема исботидан $U \equiv 0$ эканлиги келиб чиқади. Бу эса натижанинг исботидир.

Натижа 23.2 . *Фараз қилайлик U_1 ва U_2 (23.3) тенгламани қаноатлантирсин ва 23.1-теореманинг шартлари бажарилсин. У ҳолда шундай $\Theta \geq 0$ ўзгармас мавжудки, ушбу тенгсизлик ўринли бўлади:*

$$\int\int_{\Omega_t} |U(s,\tau)|^2 ds d\tau \leq c(t)\gamma^{1-\omega(t)}\left(\int\int_{\Omega_T} |U(s,\tau)|^2 ds d\tau + \gamma\right)^{\omega(t)} - \gamma,$$

бу ерда

$$U = U_1 - U_2, \gamma = \Theta \max_{\Gamma_1^t}\{|U_s|^2 + |U_t|^2\},$$

$$c(t) = \exp\{(p/q)[\omega(t)(T - t_0) + (t_0 - t)]\},$$

$$\omega(t) = \frac{\exp(-pt_0) - \exp(-pt)}{\exp(-pt_0) - \exp(-pT)}.$$

23.2-натижанинг исботи олдинги параграфлардаги мос натижанинг исботига ўхшашдир. Бу натижадан (23.3), (23.4) масаланинг ечими шартли турғун эканлиги келиб чиқади.

II. Асосий масала. Энди (23.1), (23.2) масалага қайтамиз. B ва G соҳага қўйиладиган шартларни келтирайлик.

1) Фараз қилайлик B оператор нормал оператор бўлсин, яъни $BB^* = B^*B$, B^* B га қўшма оператор. Юқорида таъкидлаганимиздек $B = B_1 + iB_2$, $B_1B_2 = B_2B_1$, $B_1 = B_1^*$, $B_2 = B_2^*$. Фараз қилайлик B_1 операторнинг тўла ортогонал нормалаштирилган хос элементлар системаси $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, ...$ ва унга мос хос сонлар системаси $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, ...$ мавжуд бўлсин. Бунга мос келувчи B_2 операторнинг хос сонлари системасини $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, ...$ билан белгилаймиз. Қуйидаги тенгсизликлар

$$0 < |\gamma_1| \leq |\gamma_2| \leq |\gamma_3| \leq ... \leq |\gamma_k| \leq ...$$

ўринли бўлсин, бу ерда

$$\gamma_k = \lambda_k + i\mu_k,\ k = 1, 2, ...,$$

У ҳолда

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)\varphi_k,$$

$$Bu(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + i\mu_k) u_k(x, y)\varphi_k,$$

бу ерда $u_k(x, y) = (u, \varphi_k)$, $k = 1, 2, ...$ Бу кўринишлардан фойдаланиб (23.1), (23.2) масаладан топамиз

$$\triangle u_k(x, y) - \gamma_k u_k(x, y) = 0, \quad (x, y) \in G, \tag{23.10}$$

$$u_k(x, y)|_{\Gamma_1} = f_k, \quad \frac{\partial u_k}{\partial n}|_{\Gamma_1} = q_k, \tag{23.11}$$

$$, k = 1, 2, ..., \tag{23.12}$$

бу ерда $u_k(x, y) = (u, \varphi_k)$, $f_k = (f, \varphi_k)$, $q_k = (q, \varphi_k)$, $k = 1, 2, ...,$

$$||u(x, y)||^2_{L_2(G;H)} = \sum_{k=1}^{\infty} ||u_n(x, y)||_{L^2_{2(G)}}.$$

2) Фараз қилайлик, $\Phi(z) = s(x, y) + it(x, y) \quad (0 < c_1 < \Phi'(z)| < c_2)$ функция G соҳани Ω_T соҳага конформ акслантирсин ва бунда Γ_2 G соҳа чегарасининг бир қисми Ω_T соҳа чегарасининг мос қисми Γ_2' га, Γ_1 га эса Γ_1' га ўтсин. Ундан ташқари бу акслантиришда $(x_0, y_0) \in \Gamma_1$ га $(\varphi_i(t_0,)\, t_0)$ мос тушсин.

Бу акслантириш натижасида (23.10), (23.11) масала ушбу

$$\triangle U_k(s, t) - \gamma_k U_k(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \Omega_T, \tag{23.13}$$

$$U_k|_{\Gamma_1'} = F_k, \quad \frac{\partial U_k}{\partial n}|_{\Gamma_1'} = Q_k,\ k = 1, 2, ..., \tag{23.14}$$

кўринишни олади, бу ерда

$$U_k(s, t) = u_k(x(s, t), y(s, t)), a_k(s, t) = \gamma_k |\Phi'(z)|^{-2}.$$

$l(U) = ||U(s, t)||_{L_2(\Omega_T; D(B))}$ деб белгилаш киритамиз.

Теорема 23.2. *Фараз қилайлик 1), 2) шартлар бажарилиб, $u|_{\Gamma_1'} = 0$ бўлсин. У ҳолда $C^1(\overline{G}; H) \cap C^2(G; H) \cap L_2(G; D(B))$ синфга тегишли (23.1) тенгламанинг ечими учун ушбу тенгсизлик ўринли:*

$$||u(x, y)||^2_{L_2(G_{xy};H)} \leq c_1 l(U) |\gamma_N|^{-1} + \delta c_N(t), \tag{23.15}$$

бу ерда $\quad \delta = \gamma^{1-\omega(t)} \left\{ ||U(s,t)||^2_{L_2(\Omega_T;H)} + \gamma \right\}^{\omega(t)}$, c_1 – *ўзгармас*,

$\gamma = \Theta \left\{ ||U_t||^2 + ||U_s||^2 \right\}_{\Gamma_1'}$, $\Theta \geq 0$ – *ўзгармас*,

$$c_N(t) = \exp\{k_N(\omega(t)(T - t_0) + (t_0 - t))/k_1\},$$

$k_N \geq 0$ *бўлиб* N *га боғлиқ ўзгармас,* k_1 *эса* T *га боғлиқ мусбат катталик.*

Исбот. (23.1) тенглама ечимини баҳолаймиз

$$||u(x,y)||^2_{L_2(G_{xy};H)} = \sum_{n=1}^{\infty} \iint\limits_{G_{xy}} |u_n(x,y)|^2 dxdy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \iint\limits_{\Omega_t} |U_n(s,\tau)|^2 |\Phi'(z)|^{-2} dsd\tau \leq$$

$$\leq c_1^{-2} \sum_{n=1}^{N} \iint\limits_{\Omega_t} |U_n(s,\tau)|^2 dsd\tau +$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \iint\limits_{\Omega_t} |U_n(s,\tau)|^2 |\Phi'(z)|^{-2} dsd\tau \tag{23.16}$$

(23.16) тенгсизликни ўнг томонидаги 1-чи ҳадни баҳолаймиз, бунда биз 23.1-теорема натижасидан ва Гёльдер тенгсизликдан фойдаланамиз

$$\sum_{n=1}^{N} \iint\limits_{\Omega_t} |U_n(s,\tau)|^2 dsd\tau \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \iint\limits_{\Omega_t} \gamma_n^{(1-\omega(t))} \times \left\{ \iint\limits_{\Omega_t} |U_n(s,\tau)|^2 dsd\tau + \gamma_n \right\}^{\omega(t)} c_n(t) \leq$$

$$c_N(t)\gamma^{(1-\omega(t))} \{||U(s,t)||^2_{L_{(\Omega_T;H)}} + \gamma\}^{\omega(t)} = \delta c_{N(t)}.$$

(23.16) тенгсизликни ўнг томонидаги 2-чи ҳадни баҳолаймиз, бунда биз $u \in D(B)$ тегишли эканлигидан фойдаланамиз

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} ||U_n||^2_{L_2(\Omega_T)} \leq |\gamma_N|^{-1} ||U||^2_{L_2(\Omega_T;D(B))}.$$

Бу тенгсизликлардан 23.2 теореманинг исботи келиб чиқади.

(23.15) баҳодан (23.1), (23.2) масаланинг l - корректлиги келиб чиқади. (l - коррект масала таърифини 3-§- га қаранг)

Теорема 23.3 . *(23.1), (23.2) масаланинг ечими*

$$u(x,y) \in C^1(\overline{G}; H) \cap C^2(G; H) \cap L_2(G; D(B))$$

ягонадир ва агар $u|_{\Gamma_1} = 0,\ l(u) \leq m$ *бўлса, у ҳолда унинг учун ушбу баҳо ўринли*

$$||u(x,y)||^2_{L_2(G_{xy};H)} \leq \omega_m(\delta),$$

бу ерда $\delta \to 0$ *да* $\omega_m(\delta) \sim c_1^{-1} m\{c_2/\ln(1/\delta)\}^{1/2}$.

Исбот. (23.15) - дан топамиз.

$$||u(x,y)||^2_{L_2(G_{xy};H)} \leq c_1^{-1}|\gamma_n|^{-1} + \alpha_1\delta\exp[\alpha_2|\gamma_N|^2],$$

α_1, α_2 манфиймас ўзгармаслар бўлиб, Ω_T га боғлиқлар. $\varepsilon = |\gamma_N|^{-1}$ деб белгилаб, охирги тенгсизликни ўнг томонидан $\varepsilon > 0$ да inf ни топамиз. У ҳолда

$$\omega_m(\delta) = \inf_{\varepsilon>0}(\varepsilon m c_1^{-1} + \alpha_1\delta\exp[\alpha_2\varepsilon^{-2}]) \sim m c_1^{-1}\{\alpha_2/\ln(1/\delta)\}^{1/2}.$$

Теорема исботланди.

Изоҳ. Нохарактеристик чизиқда берилганлар билан аниқланадиган Коши масаласининг ечими ягоналигини оғирлик функцияга эга бошланғич баҳо билан исботлаш ғояси Карлеманга [31] тегишли. Бу соҳага тегишли умумий характерга эга бўлган натижалар А. Кальдерон, Л. Хермандер, Л. Ниренберг ва бошқаларга тегишли, керакли адабиётларни эса [31, 32] лардан топиш мумкин.

Ушбу параграфда асосан М.М. Лаврентьев, К.С. Фаязовларнинг шу мавзуга тегишли бир [25,28] натижаларини келтирдик.

Натижалар ёритишда асосан логарифмик қабариқлик усулидан фойдаландик. Бу усулни ушбу [13], [14], [31], [34] ишлардан ва уларда кўрсатилган адабиётлардан тўла топишингиз мумкин.

Адабиётлар

1. Алимов Ш.А.О разрешимости одной некорректной задачи. // Узбекский математический журнал.1999, N 3,стр.19 -28.

2. Бакущинский А.Б.О решении разностными методами некорректной задачи Коши для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка.// Дифф. уравнения.1972, т.8, стр.881-890.

3. Бухгейм А.Л.Уравнения Вольтерра и обратные задачи// Новосибирск: Наука, 1983,205 с.

4. Бухгейм А.Л.Введение в теорию обратных задач// Новосибирск: Наука, 1988,184 с.

5. Бухгейм А.Л.Некоректные задачи, теория чисел и томография.// Сиб.мат.журнал.1992, т.33, N 3, стр.26-41.

6. Волков Е.А.Численные методы.М.:Наука.1987.248с.

7. Вабищевич П.Н. Численное решение краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени.//ЖВМ и МФ, 1992,т.32, стр.434-442.

8. Гончарский А.В.,Черепащук А.М.,Ягола А.Г. Некорректные задачи астрофизики. М.: Наука, 1985.

9. Иванов В.К.,Васин В.В.,Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и её приложения.М.: Наука, 1985.

10. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

11. Крейн С.Г.,Прозоровская О.И. О приближенных методах решения некорректных задач // ЖВМ и МФ.1963, т.1, N 1,стр. 120-130.

12. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

13. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изvестия АН СССР, серия мат., 1956, т.20, с.819-842.

14. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл.АН СССР. 1957, т.112, N 2, с.195-197.

15. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1962. 96 с.

16. Лаврентьев М.М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1973,72с.

17. Лаврентьев М.М.,Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука.1980.

18. Лаврентьев М.М.,Савельев Л.Я. Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1991. 331 с.

19. Латтес Р.,Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения.М.: Мир,1970.

20. Лисковец О.А.Вариационные методы решения неустойчивых задач.Минск: Наука и техника, 1981, 343 с.

21. Мельникова И.В., Бочкарева С.В. С- полугруппы и регуляризация некорректной задачи Коши// ДАН РАН, 1993, т.329, N 3, стр. 270-273.

22. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.Киев: Наукова думка, 1984, 264 с.

23. Пятков С.Г. Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения// Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1986. с.65-84.

24. Тихонов А.Н.,Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979,285 с.

25. Тихонов А.Н.,Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной технологии. М.: Наука, 1987, 160 с.

26. Фаязов К.С. Некоректная задача Коши для дифференциального уравнения первого и второго порядков с операторными коэффициентами // Сиб. мат.журнал, 1994, т.35, N 3, стр.702-706.

27. Фаязов К.С. Задача Коши для эллиптического уравнения с операторными коэффициентами // Сиб.мат.журнал. 1995, т.36, N 2, стр. 459-465.

28. Шищатский С.П. Проблема единственности решений задач Коши для вырождающихся уравнений. Новосибирск, ВЦ, 1982, 126 стр.

29. Calton D.,Engle H.W., Louis A.K.,McLaughlin, Rundell W.(eds) Surveys on Solution Methods for Inverse Problems. Springer - Wien- NewYork.2000.

30. Lavrent'ev M.M.,Fayazov K.S. Cauchy problems for partial differential equations with operator coefficients in space.//J.Inverse and Ill -posed Problems.1994, v.2, N 4, pp.283-296.

31. Levine H.A. Logarithmic Convexity and the Cauchy Problem for some Abstract Second order Differential Inequalities.// J. of Dif.Equations 1970, v.8, pp.34-55.

32. Levine H.A. Logarithmic Convexity , First order Differential Inequalities and Some Applications./Tranc.of AMS, v.152, November 1970.

33. Louis A.K.,Maaβ P.,Rieder A. Wavelets.Theory and Applications. John Willy and Sons.1997.

34. Payne L.E.,Sather D.On some improperly posed problems for the Chaplygin equation.//J.Math.Anal.Appl.1967,v.19,pp.67-77.

35. Phillips D.L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind // J. Assoc. Comput. Mach., 1962, v.9, N 1, pp.84-97.

МУНДАРИЖА