

||||| М. САХАЕВ |||||



**ЭЛЕМЕНТАР
МАТЕМАТИКА
МАСАЛАЛАРИ
ТҶҲҲМИ**

I ҚИСМ

М. САХАЕВ

ЭЛЕМЕНТАР МАТЕМАТИКА МАСАЛАЛАРИ ТЎПЛАМИ

(Ечимлари ва кўрсатмалари билан)

І ҚИСМ

«УЎҚИТУВЧИ» НАШРИЁТИ

Тошкент—1970

СЎЗ БОШИ

Қудратли атом сирларини очиш ва фазони забт этиш асрида ҳозирги замоннинг мураккаб техникасини ривожлантиришда математика фанининг роли ниҳоятда каттадир. Фан ва техниканинг бундан кейинги ривожланиши жуда кўп сондаги чуқур билимли мутахассисларни талаб этади. Олий ўқув юртларининг бу масалани ижобий ҳал қилишида студентларнинг ўрта мактабда математикадан олган билимларининг тўла ва пишиқлиги катта роль ўйнайди, албатта. Афсуски, ўрта мактабларни битириб чиқувчи ёшларнинг элементар математикадан билими ҳамон талабга тўла жавоб бера олмай келмоқда.

Ўқувчилар учун элементар математикадан бир қанча масалалар тўпламлари чиқарилган. Уларнинг деярли ҳаммасига мансуб бўлган камчилик шундан иборатки, аввало улар ўрта мактаб программасига мослаб ёзилмаган. Иккинчидан, бу китобларнинг кўпчилиги математикадан яхши баҳо олувчи ўқувчилар учун мўлжалланган бўлиб, ўртача ўқийдиган ўқувчиларга қийинлик қилади. Юқоридаги камчиликларни ҳисобга олган ҳолда икки қисмдан иборат масалалар тўплами тайёрланди. Бу тўпламлар ёш математика ўқитувчиларига синфдан ташқари иш олиб боришда қўлланма бўлиб хизмат қилиши мумкин.

Бу тўпламларнинг юқорида айтиб ўтилган масалалар тўпламларидан фарқи шундаки, бу китобларда материаллар мактабларнинг математика программасига мослаб, темалар бўйича жойлаштирилган.

Ушбу масалалар тўплами (1-қисми) асосан VI — VIII синф ўқувчисининг математик савиясини олимпиада масалаларини еча олиш даражасига кўтаришни назарда тутди. Қўлланмада ҳар бир темага тегишли мисол ва масалалардан намуналар ишлаб кўрсатилган. Ишланган мисол ва масалаларнинг кетидан уларга ўхшашлари берилган. Ўхшашларининг қийинроқларини ечиш ҳақида китоб охирида тегишли кўрсатмалар берилган. Ҳар бир тема охирида анчагина оғирроқ мисол ва масалалар (олимпиада масалалари ҳам) берилган.

Мазкур қўлланма, асосан, синфдан ташқари ишлар учун мўлжаллангани туфайли, баъзи темаларга доир мисол ва масалалар программа материалларидан олдинроқ берилган (масалан, тенгсизликни ечиш, иррационал тенгламаларни ечиш ва ҳоказоларга доир материаллар). Баъзи темалар қўшимча маълумотлар билан бойитил-

ган (масалан, кўпҳаднинг квадрати, учҳад йиғиндисининг кубиникинчи даражали тенгсизликлар системаси ва ҳ. к.).

Қўлланмада кўпгина мисол ва масалалар бир неча хил усул билан ечиб кўрсатилган ёки бу ҳақда кўрсатма берилган.

Қўлланмада элементар математикадан рус тилида нашр қилинган қўлланмалардан олинган мисол ва масалалар билан бир қаторда, автор томонидан бевосита тузилган жуда кўп мисол ва масалалар ҳам берилган. Қийинроқ мисол ва масалаларнинг номерлари устига юлдузча қўйилган.

Китоб охиридаги кўрсатмаларда баъзи мисолларни ечишда ораликдаги бир неча босқичлар ташлаб кетилиб, ўрнига нуқталар қўйилган. Нуқталар ўрнида қолдириб кетилган босқичларни ўқувчиларнинг ўзлари мустақил бажаришлари назарда тутилади.

Ушбу масалалар тўпламидан математикадан қониқарли баҳо олган ва математикадан билимни чуқурлаштиришни истаган ўқувчилар ҳамда техникумлар ва педагогика институтларининг студентлари, олий ўқув юртлари қошидаги тайёрлов бўлимларининг тингловчилари ҳам фойдаланиши мумкин.

Автор қўлланмани синчиклаб кўриб чиқиб, қимматли маслаҳатлар берган В. И. Ленин номидаги ТошДУ механика-математика факультети эҳтимоллар назарияси ва математик статистика кафедрасининг доценти М. Мирзааҳмедовга, умумий математика кафедрасининг ассистенти А. Толиповга, Тошкент шаҳар 59- ўрта мактаб математика ўқитувчиси И. Сахаевга, шунингдек китобни узил-кесил босмага тайёрлаган, «Ўқитувчи» нашриётининг бўлим mudiri И. Аҳмаджоновга чин кўнгилдан миннатдорчилик билдиради.

Ҳурматли китобхонларнинг ушбу китоб ҳақидаги танқидий фикр-мулоҳазаларини чуқур мамнуният билан қабул қиламиз.

Автор.

РАЦИОНАЛ АЛГЕБРАИК ИФОДАЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

А. КЎПҲАДЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

1- §. Бирҳад ва кўпҳадлар устида амаллар

Ихтиёрий жуфт сон умумий ҳолда $2n$, $2m$ ёки $2k$, ... кўринишида, ихтиёрий тоқ сон эса умумий ҳолда $2n + 1$, $2m + 1$ ёки $2k + 1$, ... кўринишлардан бири орқали ифодаланади. Бунда n , m , k , ... лар бутун сонлардир.

1- масала. *Ихтиёрий иккита тоқ соннинг айирмаси жуфт сон бўлиши исбот қилинсин.*

Ечиш. Тоқ сонларнинг бири (каттаси) $2n + 1$, иккинчиси (кичиги) $2k + 1$ (n ва k бутун сонлар) бўлсин. Буларнинг айирмаси:

$$(2n + 1) - (2k + 1) = 2n + 1 - 2k - 1 = 2n - 2k = 2(n - k),$$

$(n - k)$ бутун сон бўлгани учун $2(n - k)$ жуфт сон ҳосил бўлди.

1. Икки сон a ва b берилган. Агар шу сонларнинг йиғиндисига уларнинг айирмаси қўшилса, биринчи соннинг икки баробари ҳосил бўлиши исбот қилинсин.

2. Иккита тоқ соннинг йиғиндисини жуфт сон экани исбот қилинсин.

3. Жуфт ва тоқ сонлар йиғиндисини тоқ сон экани исбот қилинсин.

4. Учта тоқ соннинг йиғиндисини яна тоқ сон бўлиши исбот қилинсин.

5. Учта жуфт соннинг йиғиндисини жуфт сон экани исбот қилинсин.

6. Иккита жуфт ва битта тоқ соннинг йиғиндисини тоқ сон бўлиши исбот қилинсин.

7. Иккита тоқ ва битта жуфт соннинг йиғиндисини жуфт сон экани исбот қилинсин.

2- масала. *Учта бутун соннинг йиғиндисини жуфт сон бўлса, у сонларнинг ё биттаси, ёки учтаси жуфт сон бўлади. Шунини исбот қилинг.*

Ечиш. Уччала соннинг тоқ бўлиши мумкин эмас (чунки у ҳолда уларнинг йиғиндисини 4- масалага кўра тоқ сон бўлар эди). Уч

сондан иккитасининг жуфт, биттасининг тоқ бўлиши ҳам мумкин эмас (6- масалага кўра). Шунинг учун ё қўшилувчилардан биттаси жуфт, иккитаси эса тоқ бўлади, ёки учаласи ҳам жуфт сон бўлади.

8. Иккита тоқ соннинг кўпайтмаси яна тоқ сон бўлиши исбот қилинсин.

9. Тоқ соннинг квадрати тоқ сон экани исбот қилинсин.

10. Учта сон йиғиндиси жуфт сон бўлса, уларнинг кўпайтмаси ҳам жуфт сон экани исбот қилинсин.

11. Учта тоқ сон кўпайтмаси ҳам тоқ сон экани исбот қилинсин.

12. Иккита кетма-кет келган бутун соннинг кўпайтмаси 2 га бўлиниши исбот қилинсин.

13. Учта кетма-кет келган бутун соннинг йиғиндиси 3 га бўлиниши исбот қилинсин.

14. Иккита кетма-кет келган тоқ сонлар йиғиндиси 4 га бўлиниши исбот қилинсин.

15. Натурал сон билан шу натурал сон квадратининг йиғиндиси 2 га бўлиниши исбот қилинсин.

16. Иккита кетма-кет келган жуфт соннинг кўпайтмаси 8 га бўлиниши исбот қилинсин.

17. Ҳар қандай натурал сонни $3n$, $3n + 1$, $3n + 2$ (бунда n натурал сон ёки ноль) кўринишидаги сонлардан бири шаклида тасвирлаш мумкинлиги исбот қилинсин.

3- масала. $n(n + 3)$ кўпайтма n нинг ҳар қандай натурал қийматида 2 га бўлинади. Шунини исбот қилинг.

Ечиш. 1- усул. а) n жуфт сон, яъни $n = 2k$ бўлсин. n нинг ўрнига $2k$ ни қўйсак, $2k(2k + 3)$ — жуфт сонни ҳосил қиламиз, у эса 2 га бўлинади.

б) n тоқ сон, $n = 2k + 1$ бўлсин. n нинг ўрнига $(2k + 1)$ ни қўйсак, $(2k + 1)(2k + 1 + 3) = 2(2k + 1)(k + 2)$ жуфт сон бўлиб, у 2 га бўлинади. Демак, n нинг ҳар қандай натурал қийматида берилган кўпайтма 2 га бўлинади.

2- усул. $n(n + 3) = n(n + 1 + 2) = n(n + 1) + 2n$.

Биринчи қўшилувчи 2 га бўлинади (12- масалага асосан), иккинчи қўшилувчи эса жуфт бўлгани учун 2 га бўлинади. Қўшилувчиларнинг ҳар бири 2 га бўлингани учун, йиғинди ҳам 2 га бўлинади.

18. Учта кетма-кет келган натурал сонлар кўпайтмасининг 3 га бўлиниши исбот қилинсин.

19. Учта кетма-кет келган натурал сонлар кўпайтмасининг 6 га бўлиниши исбот қилинсин.

20. Кетма-кет келган учта натурал сонлар кўпайтмасида биринчи кўпайтирилувчи жуфт сон бўлса, кўпайтма 24 га бўлиниши исбот қилинсин.

21. Кетма-кет келган учта жуфт сон кўпайтмасининг 48 га бўлиниши исбот қилинсин.

22. Ҳар қандай тўртта кетма-кет келган жуфт сон кўпайтмасининг 384 га бўлиниши исбот қилинсин.

23. Сони тоқ бўлган тоқ сонлар йиғиндиси тоқ сон бўлиши исбот қилинсин.

24. Сони жуфт бўлган тоқ сонлар йиғиндиси жуфт сон бўлиши исботлансин.

25. Ихтиёрий сондаги* жуфт сонлар йиғиндиси жуфт сон экани исботлансин.

26. Сони тоқ бўлган тоқ сонлар билан ихтиёрий сондаги жуфт сонлар йиғиндиси тоқ сон бўлиши исботлансин.

27. Сони жуфт бўлган тоқ сонлар йиғиндиси билан ихтиёрий сондаги жуфт сонлар йиғиндиси жуфт сон бўлиши исботлансин.

28. Сони ихтиёрий бўлган тоқ сонлар кўпайтмаси тоқ сон бўлиши исботлансин.

29. Ихтиёрий сондаги жуфт сонлар кўпайтмаси жуфт сон бўлиши исботлансин.

30. $n | n + (2k + 1)$ кўпайтма n нинг ҳар қандай натурал қийматида ҳам 2 га бўлиниши исбот қилинсин.

4- масала. *Уч хонали соннинг бирлар хонасидаги рақами юзлар хонасидаги рақамидан 7 та ортиқ. Шу сон рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган сон олдингисидан нечта ортиқ бўлади?*

Ечиш. 1- усул. Изланаётган соннинг юзлар хонасидаги рақамини a билан, ўнлар хонасидаги рақамини b билан белгиласак, бирлар хонасидаги рақами $(a + 7)$ бўлади. У ҳолда изланаётган сон $100a + 10b + (a + 7) = 101a + 10b + 7$. Рақамлари тескари тартибда ёзилган сон:

$$100(a + 7) + 10b + a = 101a + 10b + 700;$$

кейинги сондан олдингисини айирсак,

$$(101a + 10b + 700) - (101a + 10b + 7) = 693.$$

Демак, кейинги сон олдингисидан 693 та ортиқ.

2- усул (арифметик усул)**. Рақамларни тескари тартибда ёзганда 100 лар хонасидаги рақам 7 та ортгани учун янги сон олдингисидан 700 та ортган, бирлар хонасидаги сон 7 та камайгани учун, янги сон олдингисидан $700 - 7 = 693$ та ортиқ.

31. Икки хонали соннинг бирлар хонасидаги рақами ўнлар хонасидаги рақамидан 5 та ортиқ. Шу сон рақамларини тескари тартибда ёзиб, ундан берилган сонни айирилса, айирма 5 га ва 9 га бўлинади. Шуни исбот қилинг.

32. Уч хонали соннинг рақамлари биттадан камайиб боради. Шу сондан рақамлари унга тескари тартибда ёзилган сонни айириши

* Қўшилувчилар сони исталган чекли сон бўлиши керак.

** Бундан кейинги масалаларнинг арифметик усулда ечилишини келтирмаймиз.

натижасида ҳосил бўлган сон 2 га, 9 га, 11 га бўлинади. Шунини исбот қилинг.

33. Тўрт хонали сон рақамлари 2 тадан камайиб боради. Бу сон рақамларининг тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган 4 хонали сон олдингисидан нечта кичик?

5- масала. *Беш хонали соннинг биринчи билан охириги рақами, иккинчи билан тўртинчи рақами ўзаро тенг. Шу соннинг биринчи рақамидан иккинчиси 1 бирлик ортиқ. Агар шу соннинг биринчи рақами иккинчиси билан, тўртинчиси эса бешинчиси билан алмаштирилиб ёзилса, у сон неча бирликка ортади?*

Е ч и ш. 1- рақам a , иккинчи рақам $(a + 1)$, учинчиси b , тўртинчиси $(a + 1)$, бешинчиси эса a . Изланаётган беш хонали сон $10\,000a + 1000(a + 1) + 100b + 10(a + 1) + a = 11011a + 100b + 1010$. Биринчи билан иккинчи рақами, тўртинчи рақами билан бешинчи рақами алмаштириб ёзилган сон:

$$10000(a + 1) + 1000a + 100b + 10a + (a + 1) = \\ = 11011a + 100b + 10001.$$

Кейинги сондан олдингиси айирилса:

$$(11011a + 100b + 10001) - (11011a + 100b + 1010) = 8991.$$

Демак, ҳосил бўлган сон берилганидан 8991 та бирлик ортиқ бўлади.

34. Беш хонали соннинг биринчи рақами ўртасидаги (учинчи) рақамидан 3 та кам. Агар шу рақамлар ўрни алмаштириб ёзилса, сон нечта ортади?

35. Беш хонали соннинг биринчи билан иккинчи, тўртинчи билан бешинчи рақамлари ўзаро тенг бўлиб, охириги икки рақамининг ҳар бири олдинги икки рақамининг ҳар биридан 1 бирлик қадар катта. Агар шу сон рақамлари тескари тартибда ёзилса, ҳосил бўлган сон аввалгисидан нечта ортиқ бўлади?

6- масала. *Икки хонали соннинг кетига яна ўша сонни ёзиш билан 4 хонали сон ҳосил қилинса, ҳосил бўлган соннинг 101 га бўлиниши исбот қилинсин.*

Е ч и ш. Изланувчи икки хонали сон A бўлсин. Унинг кетига яна 2 хонали сон ёзсак, олдинги сон 100 га кўпайиб, A га ортади, яъни

$$100A + A = 101A$$

сон ҳосил бўлади. Бу сон эса 101 га бўлинади.

36. Ҳар қандай уч хонали соннинг кетига яна ўша сонни ёзиш билан 6 хонали сон ҳосил қилинса, ҳосил бўлган сон 7 га, 11 га, 13 га бўлинади. Шунини исбот қилинг.

37. Икки хонали соннинг кетига шу икки хонали сонни кетма-кет икки марта ёзиш натижасида ҳосил бўлган 6 хонали сон берилган 2 хонали сондан неча марта катта бўлади?

2- §. Қисқа кўпайтириш ва бўлиш формуллари

Қисқа кўпайтириш ва қисқа бўлиш формуллари (асосийлари) қуйидагилардан иборат:

1. $(a \pm b)(a \mp b) = a^2 - b^2$;
2. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
3. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;
4. $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$.

1- мисол. Амалларни бажаринг ва соддалаштиринг: $(a + b - c - d)(a + b + c + d) + (a - b + c + d)(b - a + c + d)$.

Ечиш. 1- усул. $[(a + b) - (c + d)][(a + b) + (c + d)] + [(c + d) + (a - b)][(c + d) - (a - b)] = (a + b)^2 - (c + d)^2 + (c + d)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$.

2- усул. Кўпҳадларни кўпайтириб, ўхшаш ҳадлар ихчамланади. Амалларни бажаринг ва соддалаштиринг:

38. 1) $(x + y)^2 - 2(x^2 + y^2) + (x - y)^2$; 2) $(a + 2)^2 - (a - 2)^2 - 4a$;
3) $(2m + 3n)^2 - (3m + 2n)^2 - 5(n^2 - m^2)$.

39. 1) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9) - (a - 3)(a^2 + 3a + 9)$;

2) $(n + 8)^2 - (n^2 - 4n + 16) \cdot (n + 4)$;

3) $(a^{2n} + 1)^2 - (a^n - 1)^2 - a^n(a^{3n} + a^n - 4)$.

40. 1) $(x + y)^3 - (x - y)^3 - 2y(3x^2 + y^2)$;

2) $(a^2c + ac^2)^2 + (a^2c - ac^2)^2 - 2(a^2c - ac^2)(a^2c + ac^2)$;

3) $(a^2 + b^2)^3 - (a^3 + b^3)^2 - (a^2b - ab^2)^2$.

41. 1) $(a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a^2 - 2ab + b^2)$;

2) $[a^3 + b^3 + 3ab(a + b)] \cdot (a^2 + b^2 + 2ab)$.

42. Номаълум бўлинувчини топинг:

1) $x : (m^4 + 1 + 2m^2) = 1 + m^2$; 2) $x : (c^{2n} - 3c^n + 9) = c^n + 3$.

43. Қуйидаги мисолларда кўрсатилган амалларни бажаринг:

1) $[x^3 - y^3 - 3xy(x - y)][x^3 + y^3 + 3xy(x + y)]$;

2) $(m^2 + n^2)(p^2 + q^2) - (mp - nq)^2 - (np + mq)^2$;

44. 1) $(b + c)^2 - 2(b^2 - c^2) + (b - c)^2$; 2) $[(a + b)^2 - 4ab] \cdot [(a - b)^2 + 4ab]$.

45. 1) $(x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2)$; 2) $(2y + y^2 + 2)(2y - y^2 - 2)$.

46. 1) $(2x - y - x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2 - y)$;

2) $(m^2 + 2n^2 - 2mn + 2)(m^2 + 2n^2 + 2mn - 2)$.

47. 1) $(x^2 + 4y^2 - 4xy)(x^2 + 4y^2 + 4xy) \cdot (x^2 + 4y^2)^2$;

2) $(a^2 + 1 - 2a)(a^2 + 1 + 2a) \cdot (a^2 + 1)^2 \cdot (a^4 + 1)^2$.

48. 1) $(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 - 1)$;
 2) $(c - 1)(c^2 + c + 1)(c^3 + 1)(c^6 + 1)$.

2- мисол. Амалларни бажаринг: $[x^3 + y^3 - 8z^3 + 3xy(x + y)] : (x - 2z + y)$.

Ечиш. $[(x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2) - 8z^3] : [(x + y) - 2z] =$
 $= [(x + y)^3 - 8z^3] : [(x + y) - 2z] = (x + y)^2 + 2z(x + y) + 4z^2$.

3- мисол. Амални бажаринг: $(x^4 + x^2y^2 + y^4) : (x^2 + y^2 - xy)$.

Ечиш. $[(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2] : (x^2 + y^2 - xy) =$
 $= [(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2] : [(x^2 + y^2) - xy] = x^2 + y^2 + xy$.

49. Амалларни бажаринг:

1) $[4a(a + b) + b^2] : (b + 2a)$;
 2) $[m^3 + n^3 + 3mn(m + n)] : (m^2 + n^2 + 2mn)$.

50. 1) Номаълум бўлувчи (x) ни топинг: $[(a^2 + b^2)^2 - c^2d^2] : x =$
 $= a^2 + b^2 + cd$.

2) Амалларни бажаринг: $(a + b)^5(a - b)^3 : [(a + b)^3 \cdot (a - b)]$.

51. Кўрсатилган амалларни бажаринг:

1) $(a^2 - b^2 + 2bc - c^2) : (a + b - c)$;
 2) $(x^2 + y^2 - z^4 - 2xy) : (x + z^2 - y)$.

52. 1) $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 2ab - 2cd) : (a - b - c - d)$;
 2) $(a^{2n} + b^{2n} - c^{2n} + 2a^n b^n) : (a^n + b^n - c^n)$.

53. 1) $(x^3 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3) : (x + y + z)$;
 2) $[a^3 + b^3 + 3ab(a + b) - 8] : (a + b - 2)$.

54. 1) $[m^3 + n^3 + m^3n^3 + 3mn(m + n)] : (m + n + mn)$;
 2) $(x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 7y^3) : (x - y)$.

55*. 1) $(a^6 + 6a^4b^2 + 12a^2b^4 + 7b^6) : (a^2 + b^2)$;
 2) $(x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - 2y^3) : (x^2 - 2y)$.

4- мисол. Қуйидаги айният исбот қилинсин: $(a + b)^3 + (a + c)^3 + (b + c)^3 - 3(a + b)(a + c)(b + c) = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$.

Исбот. Тенгликнинг чап қисмидаги амалларни бажариб, ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз: $(a + b)^3 + (a + c)^3 + (b + c)^3 - 3(a + b) \cdot (ab + ac + bc + c^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3 + c^3 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 - 3a^2b - 3a^2c - 6abc - 3ac^2 - 3ab^2 - 3b^2c - 3bc^2 = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$, тенгликнинг ўнг қисмидаги ифода келиб чиқди.

Қуйидаги айниятлар исбот қилинсин:

56. $(a + b)^2 + (a - b)^2 + (c + d)^2 + (c - d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$;

57. $[(a + b)^2 + (a - b)^2]^2 - [(a - b)^2 - (a + b)^2]^2 = 4(a^2 - b^2)^2$.

58. $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 - 3(b - c)(c - a)(a - b) = 0$.

5- мисол. $x + y + z = 0$ бўлса, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ бўлиши исбот қилинсин.

Исбот. 1- усул. $x + y = -z$ дан $(x + y)^3 = -z^3$ ёки $x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -z^3$. Бундан:

$$x^3 + y^3 + z^3 = -3xy \underbrace{(x + y)}_{-z} = 3xyz.$$

2- усул. $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y) + 3xz(x + z) + 3yz(y + z) + 6xyz = 0$. $x + y = -z$, $x + z = -y$; $y + z = -x$ экани ҳисобга олинса $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 3xyz - 3xyz + 6xyz = 0$ ёки $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

3- усул. $x + y + z = 0$ бўлгани учун: $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.
 $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = x^3 + x^2y + x^2z + xy^2 + y^3 + y^2z + xz^2 + yz^2 + z^3 = x^3 + y^3 + z^3 + xy(x + y) + xz(x + z) + yz(y + z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz - xyz - xyz = 0$; $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$; $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

59. $a + b = x$ ва $a^2 + b^2 = y^2$ бўлса, $a^3 + b^3$ топилсин.

60. $a^2 = b^2 + c^2$ бўлса, $(5a - 3c + 4b)(5a - 3c - 4b)$ тўла квадрат экани исбот қилинсин.

61*. Агар 1331 сонининг рақамлари орасига тенг сонда ноллар ёзилса, тўла куб ҳосил бўлиши исбот қилинсин.

62*. Бешта кетма-кет бутун сонлар квадратларининг йиғиндиси бутун соннинг квадрати бўла олмаслиги исбот қилинсин.

1- масала. *Иккита кетма-кет келган тоқ сонлар квадратларининг айирмаси 8 га бўлиниши исботлансин.*

Исбот. Изланувчи тоқ сонлардан бири $2n + 1$, иккинчиси эса $2n - 1$ бўлсин. У ҳолда: $(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = (4n^2 + 4n + 1) - (4n^2 - 4n + 1) = 8n$. Бу эса 8 га бўлинади. Кетма-кет тоқ сонлар $(2n + 1)$ ва $(2n + 3)$ деб олинса ҳам $(2n + 3)^2 - (2n + 1)^2 = (4n^2 + 12n + 9) - (4n^2 + 4n + 1) = 8(n + 1)$ саккизга бўлинади.

63. Иккита кетма-кет жуфт сонлар квадратларининг айирмаси 4 га бўлиниши исбот қилинсин.

64. Ихтиёрий иккита тоқ сонлар квадратларининг йиғиндиси жуфт сон экани исбот қилинсин.

65. Натурал сон билан шу сон кубининг йиғиндиси 2 га бўлиниши исбот қилинсин.

66. Агар a сони 3 га бўлинмайдиган бутун сон бўлса, $a^2 - 1$ нинг 3 га бўлиниши исбот қилинсин.

2- масала. *n сони 2 ва 3 дан фарқли туб сон бўлса, $n^2 - 1$ нинг 24 га бўлиниши исботлансин.*

Исбот. $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. $(n - 1)n(n + 1)$ учта кетма-кет келган натурал сонлар кўпайтмасидан биттаси 3 га бўлинар эди. $n \neq 3$ бўлгани учун $(n - 1)(n + 1)$ кўпайтмада ё $(n - 1)$, ёки $(n + 1)$ лардан биттаси 3 га бўлинади. Демак, $(n - 1)(n + 1) =$

$= n^2 - 1$ учга бўлинади. n туб сон бўлгани учун тоқ сон бўлади. У ҳолда $(n - 1)$ ва $(n + 1)$ кетма-кет келувчи жуфт сонлар бўлади. Шу сабабли 8 га бўлинади (16- масалага қаранг). Демак, $n^2 - 1$ ифода $3 \cdot 8 = 24$ га бўлинади.

67. k тоқ сон бўлганда $k^2 - 1$ нинг 8 га бўлиниши исбот қилинсин.

68. Иккита ихтиёрый тоқ сонлар квадратларининг айирмаси 8 га бўлиниши исбот қилинсин.

3- масала. *Шундай икки хонали туб сон топингки, у сон рақамларини тескари тартибда ёзилганда ҳам туб сон ҳосил бўлсин ҳамда берилган сон билан рақамлари тескари тартибда ёзилган соннинг айирмаси бутун соннинг квадратида иборат бўлсин.*

Ечиш. Изланаётган икки хонали сон $10a + b$ кўринишда бўлсин. У ҳолда бунинг рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган сон $10b + a$ кўринишда бўлади.

$$(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) = k^2$$

$9(a - b) = k^2$ тенгликнинг бажарилиши учун $a - b = n^2$ бўлиши керак. $n^2 = 1$, $n^2 = 4$, $n^2 = 9$ бўлиши мумкин, холос ($a \leq 9$, $b \leq 9$) бўлгани учун $a - b = n^2$ (9).

I. $n^2 = 1$, яъни $a - b = 1$ бўлсин:

a	9	8	7	6	5	4	3	2
b	8	7	6	5	4		2	1
$10a + b$	98	87	76	65	54	43	32	21
$10b + a$	89	78	67	56	45	34	23	12

Ҳосил бўлган сонлардан фақат 43 туб сон, аммо бу сон рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган с н 34 эса мураккаб сон бўлади. Демак, бу ҳолда масаланинг шартини қаноатлантирувчи сон йўқ.

II. $n^2 = 4$, яъни $a - b = 4$ бўлсин.

a	9	8	7	6	5
b	5	4	3	2	1
$10a + b$	95	84	73	62	51
$10b + a$	59	48	37	26	15

Ҳосил бўлган сонлар ичида 73 туб с н, бу сон рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган сон 37 ҳам туб с н бўлади ва $73 - 37 = 36 = 6^2$. Демак, 73 ва 37 сонлари масала шартларини қаноатлантиради.

III. $n^2 = 9$, яъни $a - b = 9$, $a \leq 9$, $b \leq 9$ бўлгани учун $a = 9$, $b = 0$ бўлиши мумкин. Аммо 90 икки хонали мураккаб сон, бу сон рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган, сон 09 ҳам мураккаб сон бўлиб қолгани сабабли масала шартини қаноатлантирмайди.

69. Икки хонали сон билан шу сон рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган соннинг йиғиндисидан тула квадрат ҳосил бўлади. Шундай шартни қаноатлантирувчи барча икки хонали сонлар топилсин.

70*. Шундай икки хонали сон топингки, агар у сондан, шу сон рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган сон айрилса, тулиқ квадрат ҳосил бўлсин.

3- §. Кўпхаднинг квадрати, учхад йиғиндисининг кубини

1-теорема. *Кўпхад йиғиндисининг квадрати ҳар бир ҳад квадратларининг йиғиндисига қўшилувчилардан ҳар бирининг узидан кейинги ҳадлар билан иккиланган кўпайтмаларининг қўшилганига тенг.*

Масалан, учхад йиғиндисининг квадрати: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Тўртхад йиғиндисининг квадрати: $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ad + 2ab + 2ac + 2bc + 2bd + 2cd$.

71. Юқоридаги теоремани учхад йиғиндисининг квадрати учун исбот қилинг.

72. Амалларни бажаринг. 1) $(a - b - c)^2$; 2) $(2x^2 + x + 3)^2$; 3) $(a^2 + b^2 - ab - 1)^2$; 4) $(0,5x - 4y - 1)^2$.

2-теорема. *Учхад йиғиндисининг кубини ҳар бир ҳад кубларининг йиғиндисига ҳар бир ҳад квадратини бошқа ҳадларга учланган кўпайтмаларини қўшиш ва ҳосил бўлган йиғиндига учала ҳаднинг олтиланган кўпайтмасини қўшиш натижасига тенг.* Масалан: $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc$.

73. Юқоридаги теорема, яъни $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc$ тенгликнинг ўринли экани исбот қилинсин.

74. Амалларни бажаринг: 1) $(n + c - 1)^3$; 2) $(2x + x^2 - 1)^3$; 3) $(y^2 - y - 2)^3$; 4) $(a^2 - b + \frac{1}{3})^3$.

Кўрсатилган амаллар бажарилсин:

75. 1) $(a + b + c)^2 + (a - b - c)^2 + 2[a^2 - (b + c)^2]$;

2) $(m + n - p)^2 + (n - p)^2 - (m + n - p)(2n - 2p)$.

76. 1) $(a - b + c + d)^2 - (a + b - c + d)^2$;

2) $(2x + y + 2z + t)^2 - (x + 2y + z + 2t)^2$.

77. 1) $(x + y - z)(x + y + z) - (x + y - z)^2$;

2) $[a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc)] : (a + b - c)$.

78. 1) $[m^4 + n^4 + 3m^2n^2 + 1 + 2(m^3n - m^2 + mn^3 - n^2 - mn)] : (m^2 + n^2 + mn - 1)$;

2) $[(a^2 + b^2 + c^2)^3 - b^3c^3] : (a^2 + b^2 + c^2 - bc)$.

1- мисол. Ушбу $(x^3 + 2x - 4)^{18} \cdot (x^2 - 3x + 1)^6$. Кўпайтма коэффициентларининг йиғиндиси топилсин.

Ечиш. $x = 1$ бўлса, $(1 + 2 - 4)^{18} \cdot (1 - 3 + 1)^6 = 1 \cdot 1 = 1$.

Жавоб. Кўпайтма коэффициентларининг йиғиндиси 1 га тенг.

79. Даражага кўтарилгач ўхшаш ҳадлари ихчамлангандан сўнг ҳосил бўлган кўпҳад коэффициентларининг йиғиндиси топилсин:

$$(x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 2)^{1970}$$

80. Даражага кўтарилгач ҳосил бўладиган кўпҳад коэффициентларининг йиғиндиси топилсин:

$$(a^3 + 2a^2 + 3a - 4)^{11} - (a^3 + a^2 + a + 1)^5$$

2- мисол. $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 4d^2(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2$ айният исбот қилинсин.

Исбот. Тенгликнинг чап қисми мураккаброқ бўлгани учун уни соддалаштириб, тенгликнинг ўнг қисмидаги ифодага тенглигини исбот қиламиз: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 4d^2(a^2 + b^2 + c^2) = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 - 4a^2d^2 - 4b^2d^2 - 4c^2d^2 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2a^2d^2 + 2b^2c^2 - 2b^2d^2 - 2c^2d^2 = (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2$.

81. Айният исботлансин: $(x + y + z)^2 + (x + y - z)^2 + (z + x - y)^2 - 2(xy + xz - yz) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$.

82. Айният исботлансин: $(x + y + z + t)^2 + (x + y - z - t)^2 + (x - y + z - t)^2 + (x - y - z + t)^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$.

Куйидаги айниятлар исбот қилинсин:

$$83. (ab + ac + bc)^2 + (a^2 - bc)^2 + (b^2 - ac)^2 + (c^2 - ab)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

$$84. a(-a + b + c)^2 + b(a - b + c)^2 + c(a + b - c)^2 + (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) = 4abc.$$

$$85. (a + b + c)^3 - (-a + b + c)^3 - (a - b + c)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc.$$

3- мисол. $a + b + c = 0$ ва $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ экани берилган бўлса, $a^4 + b^4 + c^4$ топилсин.

$$\text{Ечиш. } (a + b + c)^2 = 0; \quad a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 0.$$

$$2(ab + ac + bc) = -1 \text{ ёки } ab + ac + bc = -\frac{1}{2}, \text{ квадратга кў-}$$

$$\text{тарсак: } (ab + ac + bc)^2 = \frac{1}{4}, \quad a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2(a^2bc + ab^2c +$$

$$+ abc^2) = \frac{1}{4}. \quad a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c) = \frac{1}{4}. \quad a + b + c =$$

$$= 0 \text{ экани эътиборга олинса: } a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = \frac{1}{4}. \quad (a^2 + b^2 + c^2)^2 =$$

$$= 1; \quad a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 1. \text{ Бунда, } a^2b^2 + a^2c^2 +$$

$+ b^2c^2 = \frac{1}{4}$ эканини ҳисобга олинса, $a^4 + b^4 + c^4 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$ ёки

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}.$$

86. $a + b + c = 0$ бўлса, $a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(a + c) = 0$ экани исбот қилинсин.

87. $m + n + p = 0$ бўлса, $(m^2 + n^2 + p^2)^2 = 4(m^2n^2 + n^2p^2 + p^2m^2)$ экани исбот қилинсин.

88. $a + b + c = 0$ бўлса, $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$ экани исбот қилинсин.

4-§. Кўпхадни кўпхадга кўпайтириш ва бўлиш

1-мисол. *Кўпхадларни кўпайтиринг:* $(n^2 + n - 1)(n^2 - 2n + 2)$.

Ечиш. $(n^2 + n - 1)(n^2 - 2n + 2) = n^4 - 2n^3 + 2n^2 + n^3 - 2n^2 + 2n - n^2 + 2n - 2 = n^4 - n^3 - n^2 + 4n - 2$.

Кўпхадда бирор ҳарфнинг кўрсаткичи биринчи ҳаддан сўнгги ҳадга қараб ортиб ёки камайиб борадиган тартибда ёзилган бўлса, бу кўпхад ўша ҳарфнинг даражасига нисбатан тизилган дейилади.

Масалан: $2x^3y + 5x^2y^5 + 4xy^3 + 3$, x нинг даражасига нисбатан тизилган, y нинг даражасига нисбатан тизилган эмас. $1 + ab + a^3$ кўпхад эса a нинг даражасига нисбатан тизилган.

1-мисолни қуйидагича ишласак ҳам булар эди:

$$\begin{array}{r} \times \frac{n^2 + n - 1}{n^2 - 2n + 2} \\ \hline n^4 + n^3 - n^2 \\ + \quad -2n^3 - 2n^2 + 2n \\ \hline 2n^2 + 2n - 2 \\ \hline n^4 - n^3 - n^2 + 4n - 2 \end{array}$$

Бу усулда кўпайтирганда остма-ост ёзилган ўхшаш ҳадларни ихчамлаш қулай бўлади.

2-мисол. *Кўпхадларни кўпайтиринг:* $(x^4 + a^2x^2 + a^4 - ax^3 - a^3x)(x - a)$. Кўпхадларни x нинг даражасига нисбатан тизиб, сўнгра кўпайтирамиз:

$$\begin{array}{r} x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4 \\ \hline \quad \quad \quad x - a \\ \hline x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x \\ - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5 \\ \hline x^5 \qquad \qquad \qquad + a^5 = x^5 + a^5 \end{array}$$

Кўпхадларни кўпайтиринг:

89. $(a^5 - a^3 + a - 1)(a^4 + a^2 - 1)$.

90. $(c^4 + c^2 + 1 + c^3 + c)(c - 2 + c^2)$.

91. $(24n + 6n^2 + n^3 + 60)(12n + 12 - 6n^2 + n^3)$

3- мисол. *Амалларни бажаринг:*

$$(6a^4 - 19a^3 + 5a^2 + 17a - 4) : (1 - 5a + 3a^2).$$

Ичиш. Булинувчи a нинг даражасига нисбатан тизилган. Булинувчини ҳам a нинг даражасига нисбатан тизсак, $3a^2 - 5a + 1$ кўринишга келади. Энди бундай бўламиз:

$$\begin{array}{r|l} 6a^4 - 19a^3 + 5a^2 + 17a - 4 & 3a^2 - 5a + 1 \\ 6a^4 - 10a^3 + 2a^2 & \hline - 9a^3 + 3a^2 + 17a - 4 & \\ - 9a^3 + 15a^2 - 3a & \hline - 12a^2 + 20a - 4 & \\ - 12a^2 + 20a - 4 & \hline 0 & \end{array}$$

Жавоб. $2a^2 - 3a - 4$.

Кўпхадни кўпхадга бўлинг:

92. $(28x^4 - 13ax^3 - 26a^2x^2 + 15a^3x) : (4x^2 - 3ax)$.

93. $(3ab^5 + 15a^2b^4 + 6a^3b^3) : (b^2 + 5ab + 2a^2)$.

94. $(3 + 8c + c^2 - 2c^3) : (1 - c^2 + 2c)$.

95. $(-6 + 13y - 2y^3 - 3y^2) : (2 - y^2 - 3y)$.

4- мисол. $(a^6 - b^6) : (a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$.

Ечиш.

$$\begin{array}{r|l} a^6 & - b^6 \\ a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 & \hline - a^5b - a^4b^2 - a^3b^3 - a^2b^4 - ab^5 - b^6 & \\ - a^5b - a^4b^2 - a^3b^3 - a^2b^4 - ab^5 - b^6 & \hline 0 & \end{array} \left| \begin{array}{l} a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 \\ \hline a - b \end{array} \right.$$

Жавоб. $a - b$.

96. Кўпхадни кўпхадга бўлинг: $(8p^3 - 27q^3) : (4p^2 + 6pq + 9q^2)$.

97. Кўпхадни кўпхадга бўлиш ёрдами билан қуйидаги қисқа бўлиш формулаларининг тўғрилигини текширинг:

1) $(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$.

2) $(a^3 - b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2$.

3) $(a^5 - b^5) : (a - b) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$.

4) $(a^5 + b^5) : (a + b) = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$.

5- мисол. $(6a^{2n-2} + a^{2n+4} - a^{2n}) : (a^4 + 2a^2)$.

Ечиш. Бўлинувчини a нинг даражасига нисбатан тизиб, сўнг-
ра бўламиз:

$$\begin{array}{r} a^{2n+4} - a^{2n} + 6a^{2n-2} \\ - a^{2n+4} + 2a^{2n+2} \\ \hline - 2a^{2n+2} - a^{2n} + 6a^{2n-2} \\ - 2a^{2n+2} - 4a^{2n} \\ \hline - 3a^{2n} + 6a^{2n-2} \\ - 3a^{2n} + 6a^{2n-2} \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} a^4 + 2a^2 \\ \hline a^{2n} - 2a^{2n-2} + 3a^{2n-4} \end{array} \right.$$

Жавоб. $a^{2n} - 2a^{2n-2} + 3a^{2n-4}$.

Кўпхадни кўпхадга бўлинг:

98. $(x^{m+n} + x^{m+n-3}) : (x^{n-1} + x^n)$.

99. $(x^{4m} - y^{4n}) : (y^n + x^m)$.

Б. КўПХАДЛАРНИ КўПАЙТУВЧИЛАРГА АЖРАТИШ

Таъриф. *Кўпхадни кўпайтувчиларга ажратиш деб, берилган кўпхадни икки ёки бир неча бирхад ва кўпхадларнинг кўпайтмасига айнан алмаштиришга айтилади.*

Кўпхадларни кўпайтувчиларга ажратишнинг бир неча усуллари бор.

5-§. Умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқариш усули

а) Умумий кўпайтувчи бир ҳаддан иборат бўлган ҳол.

1- мисол. *Кўпхадни кўпайтувчиларга ажратинг:*

$$45a^3b^2c + 36a^2bc^3 - 18a^4b^3c^2 = 9a^2bc(5ab + 4c^2 - 2a^2b^2c).$$

б) Умумий кўпайтувчи кўп ҳаддан иборат бўлган ҳол.

2- мисол. *Кўпхадни кўпайтувчиларга ажратинг:*

$$a^2(2p - 3q) - 2b(2p - 3q) = (2p - 3q)(a^2 - 2b).$$

Изоҳ. Умумий кўпайтувчига эга бўлмаган кўпхадларни бирор ҳадини ёки бирор ҳадининг бўлувчисини қавс олдига чиқариш билан айнан алмаштиришнинг бажарилиш натижасига ҳам кўпайтувчиларга ажратиш деб қараш мумкин:

3- мисол. *Кўпхадни кўпайтувчиларга ажратинг:*

$$a^2 + 2bc - a^3 = a^2 \left(1 + \frac{2bc}{a^2} - a \right) \text{ ёки } a^2 + 2bc - a^3 = 2b \left(\frac{a^2}{2b} + c - \frac{a^3}{2b} \right).$$

100. Кўпайтувчиларга ажратинг: 1) $x^3 \cdot (x + y) + x^2(x + y)$; 2) $6a^2b^3(c^3 - 3) + 8a^3b^2(c^3 - 3)$; 3) $(4a + 3b)(6c - 5d) - (5a - 4b) \cdot (6c - 5d)$; 4) $p(m^2 + m - 1) - mn - nm^2 + n$.

6-§. Группалаш усули билан кўпайтувчиларга ажратиш

Мисол. *Кўпхадни кўпайтувчиларга ажратинг:*

$$am + bm + ct + an + bn + cn.$$

Кўпхаднинг барча ҳадлари умумий кўпайтувчига эга эмас. Аммо ҳадларнинг бир группаси (биринчи учтаси) умумий кўпайтувчи m га эга, ҳадларнинг яна бир группаси (4 — 5 — 6- ҳадлар) эса умумий кўпайтувчи n га эга. Биринчи учта ҳад (группа) дан m ни, қолган ҳадлардан эса n ни қавс олдига чиқарамиз. У ҳолда берилган кўпхад икки ҳад йиғиндисига айланади: $m(a + b + c) + n(a + b + c)$.

Бу ҳадлар $(a + b + c)$ дан иборат умумий кўпайтувчига эга бўлиб, уни яна қавс олдига чиқариш мумкин:

$$(a + b + c)(m + n),$$

яъни берилган кўпхад кўпайтувчиларга ажратилди. Бу усулни группалаш усули билан кўпайтувчиларга ажратиш дейилади.

Изоҳ. Берилган кўпхадни учта группага ажратиш, чунончи, биринчи группа (1- ва 4- ҳадлар) дан a , иккинчи группа (2- ва 5- ҳадлар) дан b ни, учинчи группа (3- ва 6- ҳадлар) дан c қавс олдига чиқарилса, $a(m + n) + b(m + n) + c(m + n)$ учхад ҳосил қилинади. Булардан умумий кўпайтувчи $m + n$ ни қавс олдига чиқариб, $(m + n)(a + b + c)$ кўпайтувчиларга ажратиш ҳам мумкин.

Кўпхадни группаларга ажратишда шуни эътиборга олиш керакки, ҳар қайси группадан умумий кўпайтувчи қавс олдига чиқарилгандан кейин қавс ичида бир хил ифодалар (йиғинди) қолиши керак.

101. Кўпайтувчиларга ажратинг: 1) $7n^2 - 5mn - 20mk + 28nk$.
2) $4a^2c - 8abc - 12a^2d + 24abd$; 3) $ad - ac + a^2d - ab - a^2c - a^2b$;
4) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz$.

7-§. Формулаларни қўллаш билан кўпайтувчиларга ажратини

Агар кўпхадлар: 1) $a^2 \pm 2ab + b^2$; 2) $a^2 - b^2$; 3) $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; 4) $(a^2 \pm b^3)$; 5) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ кўринишида берилса, уларни кўпайтма шаклида қуйидагича ёзиш мумкин:

- 1) $(a \pm b)^2$; 2) $(a + b)(a - b)$; 3) $(a \pm b)^3$; 4) $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$; 5) $(a + b + c)^2$.

Мисол. *Қуйидаги кўпхадларни кўпайтувчиларга ажратинг:*

а) $64m^2 - 48mn^k + 9n^{2k} = (8m - 3n^k)^2$;

б) $(2a - 3b)^2 - (3a - 2b)^2 = (2a - 3b + 3a - 2b)(2a - 3b - 3a + 2b) = 5(a - b)(-a - b) = -5(a - b)(a + b)$;

в) $(x + y)^3 + 3(x + y)^2(a - b) + 3(x + y)(a - b)^2 + (a - b)^3 = (x + y + a - b)^3$.

$$r) (x^2 + y^2)^3 + 8x^2y^3 = (x^2 + y^2)^3 + (2xy)^3 = (x + y)^2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2xy(x^2 + y^2) + 4x^2y^2) = (x + y)^2(x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 2x^3y - 2xy^3).$$

102. Кўпайтувчиларга ажратинг: 1) $a^4 + 4a^2n^2 + 4a^3n + 6a^2bn^2 + 12abn^3 + 9b^2n^4$; 2) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$; 3) $(x + y)^3 + 6z(x + y)^2 + 12z^2(x + y) + 8z^3$; 4) $(0,064a^{3m} - \frac{1}{27}b^{6n})$.

8- §. „Сунъий“ усуллар билан кўпайтувчиларга ажратиш

1- мисол. *Кўпайтувчиларга ажратинг:* $x^4 + x^2 + 1$. Бу кўпхадни юқорида баён қилинган усуллардан биронтасидан фойдаланиб кўпайтувчиларга ажратишни пайқаш қийин.

Бу кўпхадга $x^2 - x^2$ ни қўшиб, уни $(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$ кўринишида ёзгандан кейин $(x^2 + 1)^2 - x^2$ кўринишида ёзиш ва ниҳоят $(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$ кўринишида кўпайтувчиларга ажратиш мумкин.

2- мисол. *Кўпайтувчиларга ажратинг:* $m^2 - 3m + 2$.

1- усул. Кўпхадни $m^2 - 2m - m + 2$ кўринишида ёзиб группаласак:

$$m(m - 2) - (m - 2) = (m - 2)(m - 1).$$

2- усул. $m^2 - 3m + 2 = (m - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} = (m - \frac{3}{2} + \frac{1}{2})(m - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}) = (m - 1)(m - 2)$.

3- мисол. *Кўпхадни кўпайтувчиларга ажратинг:* $a^4 - 2a^2 - 3a - 2$

Ечиш. Кўпхадга $a^3 - a^3 + a^2 - a^2$ йиғиндини қўшиб $-3a$ ни $-2a - a$ каби ёзамиз: $a^4 + a^3 + a^2 - a^3 - a^2 - a - 2a^2 - 2a - 2 = a^2(a^2 + a + 1) - a(a^2 + a + 1) - 2(a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^2 - a - 2)$.

103. Кўпхадларни кўпайтувчиларга ажратинг: 1) $x^2 + x - 2$; 2) $m^3 + 5m^2 + 6$; 3) $n^3 + 2n^2 - 3$; 4) $c^3 + c^2 + 4$.

4- мисол. *Кўпхадни кўпайтувчиларга ажратинг:* $x^5 + x + 1$

Ечиш. $x^5 + x + 1 = (x^5 + x^4 + x^3) + (-x^4 - x^3 - x^2) + (x^2 + x + 1) = x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$.

104*. Кўпхадни кўпайтувчиларга ажратинг:

$$a^5 + a^4 + 1.$$

Базан кўпхадда мураккаброқ бир хил ифода бир неча марта учраса, кўпайтувчиларга ажратишда у ифодани ёрдамчи ҳарф билан белгилаб олиш фикрлашни бинобарин ишни осонлаштиради.

5- мисол. *Кўпхадни кўпайтувчиларга ажратинг:* $((x^2 + y)^4 + 1)^2 - 4(x^2 + y)^4$.

Ечиш. $x^2 + y = z$ деб белгиласак, $(z^4 + 1)^2 - 4z^4 = (z^4 + 1 - 2z^2) \times$

$\times (z^4 + 1 + 2z^2) = (z^2 - 1)^2 (z^2 + 1)^2 = (z + 1)^2 (z - 1)^2 (z^2 + 1)^2$. z нинг қиймати ўрнига қўйилса: $[(x^2 + y)^4 + 1]^2 - 4(x^2 + y)^4 = (x^2 + y + 1)^2 \cdot (x^2 + y - 1)^2 (x^4 + y^2 + 2x^2y + 1)^2$.

105. Кўпайтувчиларга ажратинг: $[1 + 9(m^3 + n^2)^2]^2 - 36(m^3 + n^2)^2$.

9-§. Кўпайтувчиларга ажратишнинг барча усуллари ни қўллаш билан мисоллар ишлаш

Мисол. *Кўпхадни кўпайтувчиларга ажратинг:*

$$a^2m + 2abm + b^2m + 2a^2n + 4abn + 2b^2n.$$

Буни группалаймиз:

$$m(a^2 + 2ab + b^2) + 2n(a^2 + 2ab + b^2).$$

Умумий кўпайтувчи (қавс ичидаги ифода) ни қавсдан ташқарига чиқарсак:

$$(a^2 + 2ab + b^2)(m + 2n).$$

Биринчи қавсни қисқа кўпайтириш формуласидан фойдаланиб кўпайтувчиларга ажратсак:

$$(a + b)^2(m + 2n).$$

106. Кўпхадларни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $a^{12} - b^{12}$; 2) $18m^4(a^3 - 8b^6) - 8m^6(a^3 - 8b^6)$.

3) $(m^2 - 6mn + 6n^2)^2 - 2mn(m^2 - 6mn + 6n^2) + m^2n^2$;

Қуйидаги кўпхадларни кўпайтувчиларга ажратинг:

107. 1) $a^{2m+5} - 2a^{m+5}b^{2n} + a^{11}b^{4n}$; 2) $a^{n+4} + a^n b^{2m} - 2a^{n+2}b^m$;

3) $16m^2 - 4n^2 + 12np - 9p^2$; 4) $a^3 + a^2 - 2ab + b^2 - b^3$.

108. 1) $a^4 + a^2b^2 + b^4$; 2) $a^3 + 2a^4 - 4a^2 + 2 - a$; 3) $5x - 2x^2 + 63$; 4) $4(x^2 + 6x + 1)^2 + 4(x^2 + 6x + 1)(x^2 + 7) + (x^2 + 7)^2$.

109. 1) $x^4 - y^4$ ни $x - y$ га бўлганда.

2) $x^8 - y^8$ ни $x^2 + y^2$ га бўлганда,

3) $a^6 - b^6$ ни $a^2 + ab + b^2$ га бўлганда,

4) $a^{12} - b^{12}$ ни $(a^2 - b^2) \cdot (a^4 - a^2b^2 + b^4)$ га бўлганда ҳосил

бўладиган бўлинма топилсин.

Қуйидаги кўпхадларни кўпайтувчиларга ажратинг.

110. 1) $(c^2 + c)^2 + 4(c^2 + c) - 12$; 2) $y^4 + 15y^2 + 64$.

111. 1) $z^3 + 9z^2 + 26z + 24$; 2) $y^3 + 8y^2 + 17y + 10$.

112. 1) $(m - n^2)^2 + 2mc^3 - 2n^2c^3 + c^6$;

2) $C = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$.

113*. 1) $2c^4 + 7c^3 - 2c^2 - 13c + 6$; 2) $a^6 - 21a^2 + 20$.

114*. 1) $m^2 - 6mn + 8n^2 - 4p^2 + 4np$;

2) $x^3 - 8x^2 + 19x + 12$.

$$115. \quad 1) x^{5n} + 2x^{4n} + 2x^{3n} + 2x^{2n} + x^n; \quad 2) n^3 - 3n + 2.$$

$$116*. \quad 1) a^4 + 3a^2b^2 + 4a^3b - 4ab^3 - 4b^4; \quad 2) x^3 - 7x - 6.$$

$$117*. \quad 1) 3x(y+z) + y(2x+3z) + z^2 + 2(x^2+y^2);$$

$$2) c^2(a+b) + b^2(c+d) + bc(a+d) + ad(b+c).$$

$$118*. \quad n^{10} + n^5 + 1.$$

$$119*. \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

$$120. \quad (x+y+z)(xy+xz+yz) - xyz.$$

$$121. \quad (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3.$$

$$122. \quad (ac+bd)^3 + (bc+ad)^3 - (a^3+b^3)(c^3+d^3).$$

$$123. \quad a^3b^2 + b^3c^2 + a^2c^3 - a^2b^3 - b^2c^3 - a^3c^2.$$

$$124. \quad a^5b^3c^2 + a^2b^5c^3 + a^3b^2c^5 - a^2b^3c^5 - a^5b^2c^3 - a^3b^5c^2.$$

$$125*. \quad x^{5n+2} + x^{5n+1} - x^{4n+1} + x^{3n+1} - x^{2n+1} - x^{n+2}.$$

$$126. \quad y^6 - y^6z^4 + 3y^4z^2 - y^4z^6 + 3y^2z^4 + z^6.$$

127*. $(x-2)^4 + (x-1)^2 - 1$ кўпхаднинг $(x-1)(x-2)$ кўпхад-
га бўлиниши исбот қилинсин ва бўлилма топилсин.

128. $a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ кўпхаднинг $3(a+b)(a+c)$ га
бўлиниши исбот қилинсин ва бўлилма топилсин.

129. Айният исботлансин:

$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc = (b+c)(c+a)(a+b).$$

Қуйидаги кўпхадларни кўпайтувчиларга ажратинг:

$$130. \quad (x^2+x+4)^2 + 8x(x^2+x+4) + 15x^2.$$

$$131. \quad (z^2+4z+8)^2 + 3z(z^2+4z+8) + 2z^2.$$

$$132. \quad (n^2+n+1)(n^2+n+2) - 12.$$

$$133. \quad (m^2+m)^2 - 14(m^2+m) + 24.$$

$$134*. \quad ab(a-b) - ac(a+c) + bc(2a+c-b).$$

$$135*. \quad bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)(a-c) + ab(c+d)(a-b).$$

$$136*. \quad (a-x)y^3 - (a-y)x^3 + (x-y)a^3.$$

$$137*. \quad (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - 24.$$

$$138*. \quad 4(a+5)(a+6)(a+10)(a+12) - 3a^2.$$

$$139*. \quad (z+1)(z+3)(z+5)(z+7) + 15.$$

$$140*. \quad 2(y^2+1)^2 + 5(y^2+1)(y^2+6y+1) + 2(y^2+6y+1)^2.$$

$$141*. \quad 8a^3 - 14a^2 - 7a + 6.$$

$$142*. \quad 24c^4 + 22c^3 - 11c^2 - 7c + 2.$$

$$143*. \quad C = 6n^6 - n^5 - 23n^4 - n^3 - 2n^2 + 20n - 8.$$

144*. x ва y мусбат бўлганда $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 \geq 0$ экани ис-
бот қилинсин.

145*. a нинг ҳар қандай қийматида

$$(a-1)(a-3)(a-4)(a-6) + 9$$

манфий эмаслиги исбот қилинсин.

146*. $(m^2 - 1)(m - 6)(m - 8) + 53$ ифода m нинг ҳар қандай қийматида мусбат экани исбот қилинсин.

147*. $a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 + 1$ ифода a ва b нинг ҳар қандай қийматида мусбат экани исбот қилинсин.

148*. $4(12x^2 + 43) + 12x(x - 2)^2 - (x^2 + 14)^2 - 96x$ ифода x нинг ҳар қандай қийматида ҳам манфий экани исбот қилинсин.

149*. 4 та кетма-кет натурал сонлар кўпайтмаси билан бирнинг йиғиндиси бутун соннинг квадрати экани исбот қилинсин.

150*. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$ ифода учҳад йиғиндиси-нинг квадрати экани исбот қилинсин.

151. Учта кетма-кет бутун соннинг кўпайтмасига шу сонлардан ўртадагиси қўшилса, шу қўшилган (ўртасидаги) соннинг кубини ҳосил бўлиши исбот қилинсин.

152*. Учта a , b , c сон ўзаро $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ муносабат билан боғланган бўлса, албатта улардан иккитасининг абсолют қиймати тенг бўлиб, ишораси қарама-қарши бўлади. Шунини исбот қилинг.

153*. $a + b + c = 0$ бўлса, $a^2(b + c)^2 + b^2(c + a)^2 + c^2(a + b)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)(ab + ac + bc) = 0$ экани исбот қилинсин.

154*. $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ ифода кўпайтувчиларга ажратилсин.

155*. Кўпҳадни кўпайтувчига ажратинг:

$$a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b).$$

10- §. Кўпайтувчиларга ажратиш ёрдами билан исботлашга доир масалалар ечиш

156. Натурал соннинг кубидан шу сон айрилса, айирма 6 га бўлинади. Шунини исбот қилинг.

157. $4n^2 + 12n + 8$ йиғинди n нинг ҳар қандай натурал қийматида 8 га бўлиниши исбот қилинсин.

1- масала. n жуфт сон бўлганда $n^3 + 3n^2 + 2n$ ифодани 24 га бўлиниши исбот қилинсин.

Ечиш. $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n^2 + 2n + n + 2) = n[n(n + 2) + (n + 2)] = n(n + 2)(n + 1)$. n жуфт, яъни $n = 2k$ бўлса, охириги кўпайтмани $2k(2k + 2)(2k + 1)$ кўринишда ёзиш мумкин.

Бу кўпайтма учта кетма-кет бутун сонлар кўпайтмасидан иборат бўлгани учун 3 га бўлинади; кўпайтмада иккита кетма-кет жуфт сон бўлгани учун 8 га ҳам бўлинади.

Демак, кўпайтма $3 \cdot 8 = 24$ га бўлинади.

158. a бутун сон бўлса, $a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a$ ифоданинг 24 га бўлиниши исбот қилинсин.

159. n бутун сон бўлса, $n^5 - 5n^3 + 4n$ ифоданинг 120 га бўлиниши исбот қилинсин.

2- масала. n нинг ҳар қандай бутун қийматида $n^6 - 2n^4 + n^2$ ифоданинг сон қиймати 36 га бўлиниши исбот қилинсин.

Ечиш. $n^6 - 2n^4 + n^2 = n^2(n^4 - 2n^2 + 1) = n^2(n^2 - 1)^2 = [(n-1) \times n(n+1)]^2$. Учта кетма-кет бутун сонлар $(n-1)$, n ва $(n+1)$ кўпайтмаси 6 га бўлингани учун унинг квадрати $6^2 = 36$ га бўлинади.

160. n ҳар қандай бутун сон бўлганда ҳам $(n^6 - 2n^4 + n^2)(n + 2)^2$ ифоданинг қиймати 576 га бўлиниши исбот қилинсин.

3- масала. n нинг ҳар қандай бутун қийматида $(n + 1)^4 - n^4 - 2n - 1$ ифоданинг 12 га қолдиқсиз бўлиниши исбот қилинсин.

Ечиш. $(n + 1)^4 - n^4 - 2n - 1 = (n + 1)^4 - (n^2 - 1)^2 - 2n^2 - 2n = (n + 1)^4 - (n^2 - 1)^2 - 2n(n + 1) = (n + 1)[(n + 1)^3 - (n^2 - 1) \times (n - 1) - 2n] = (n + 1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 + n^2 + n - 1 - 2n) = (n + 1)(4n^2 + 2n) = 2n(n + 1)(2n + 1)$.

1) $n(n + 1)$ кўпайтма 2 га бўлинади (биттаси жуфт). Демак, кўпайтма 4 га бўлинади.

2) $n(n + 1)(2n + 1)$ кўпайтманинг 3 га ҳам бўлинишини исбот қиламиз.

Ихтиёрий бутун n сонни $3m$, $3m + 1$, $3m + 2$ кўринишидаги сонлардан бири орқали ифодалаш мумкин.

а) $n = 3m$ бўлса, $n(n + 1)(2n + 1) = 3m(3m + 1)(6m + 1)$, 3 га бўлинади.

б) $n = 3m + 1$ бўлса, $n(n + 1)(2n + 1) = (3m + 1)(3m + 2) \times (6m + 3) = 3(3m + 1)(3m + 2)(2m + 1)$ учга бўлинади.

в) $n = 3m + 2$ бўлса, $n(n + 1)(2n + 1) = (3m + 2)(3m + 3) \times (6m + 5) = 3(3m + 2)(m + 1)(6m + 5)$ ҳам 3 га бўлинади.

Демак, берилган ифода $3 \cdot 4 = 12$ га бўлинади.

161. Учта кетма-кет бутун сонлар кубларининг йиғиндиси 9 га бўлиниши исбот қилинсин.

4- масала. n нинг ҳар қандай бутун қийматида $A = n^3 + 3n^2 + 2n + 3$ ифода 3 га бўлиниши исбот қилинсин.

Исбот. 1- усул. $A = n^3 + 3n^2 + 2n + 3 = n(n^2 + 3n + 2) + 3 = n(n^2 + 2n + n + 2) + 3 = n[(n + 2) + (n + 2)] + 3 = n(n + 1)(n + 2) + 3$ даги қўшилувчиларнинг ҳар бири 3 га бўлингани учун йиғинди ҳам 3 га бўлинади.

2- усул. $n^3 + 3n^2 + 2n + 3 = 3(n^2 + 1) + n(n^2 + 2)$. $n(n^2 + 2) = n(n^2 - 1 + 3) = n(n^2 - 1) + 3n = (n - 1)n(n + 1) + 3n$ бўлгани учун: $n^3 + 3n^2 + 2n + 3 = 3(n^2 + 1) + (n - 1)n(n + 1) + 3n$. Қўшилувчиларнинг ҳар бири 3 га бўлингани учун йиғинди 3 га бўлинади.

3- усул. а) $n = 3m$ бўлса: $A = 27m^3 + 27m^2 + 6m + 3 = 3(9m^3 + 9m^2 + 2m + 1) - 3$ га бўлинади.

б) $n = 3m + 1$ бўлса: $A = (3m + 1)^3 + 3(3m + 1)^2 + 2(3m + 1) + 3 = 3(3m + 1)^2 + 3 + 27m^2 + 27m^2 + 9m + 1 + 6m + 2 = 3(3m + 1)^2 + 3 + 3(9m^2 + 9m^2 + 5m + 1)$ йиғинди 3 га бўлинади.

в) $n = 3m + 2$ бўлса: $A = \dots = 3(9m^2 + 18m + 14m + 4) + 3(3m + 2)^2 + 3$ йигинди ҳам 3 га бўлинади.

162*. n ихтиёрий бутун сон бўлса, $n(n^2 + 5)$ ифоданинг 6 га бўлиниши исбот қилинсин.

163*. n тоқ сон бўлганда $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ ифоданинг 512 га бўлиниши исботлансин.

В. АЛГЕБРАИК КАСРЛАР

11-§. Касрларни қисқартириш

Касрни қисқартириш деган сўз, касрнинг сурат ва махражини уларнинг умумий бўлувчисига бўлиш билан зодда ҳолга келтиришдан иборат.

1-мисол. **Касрни қисқартиринг:**

$$\frac{96a^2b^{3n}c^{5m}}{16a^2b^{4n}c^m}$$

Ечиш. Касрнинг сурат ва махражи $16a^2b^{3n}c^n$ умумий бўлувчига эга. Шу умумий бўлувчига касрни бўламиз:

$$\frac{96a^2b^{3n}c^{5m}}{16a^2b^{4n}c^m} = \frac{6c^{4m}}{b^n}$$

2-мисол. **Касрни қисқартиринг:**

$$\frac{ax - bx + ay - by}{ax + bx + ay + by}$$

Ечиш. Аввал касрнинг сурат ва махражидаги кўпхадлар кўпайтувчиларга ажратилади, сўнгра уларнинг умумий бўлувчисига бўлинади.

$$\begin{aligned} \frac{ax - bx + ay - by}{ax + bx + ay + by} &= \frac{(ax - bx) + (ay - by)}{(ax + bx) + (ay + by)} = \frac{x(a - b) + y(a - b)}{x(a + b) + y(a + b)} = \\ &= \frac{(a - b)(x + y)}{(a + b)(x + y)} = \frac{a - b}{a + b}. \end{aligned}$$

3-мисол. **Касрни қисқартиринг:**

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x + 3}$$

$$\begin{aligned} \text{Ечиш. } \frac{(x^2 - 2x) + (3x - 6)}{(x^2 + x) + (3x + 3)} &= \frac{x(x - 2) + 3(x - 2)}{x(x + 1) + 3(x + 1)} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x + 1)(x + 3)} = \\ &= \frac{x - 2}{x + 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Жавоб. } \frac{x - 2}{x + 1}.$$

4-мисол. **Касрни қисқартиринг:**

$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3}$$

Ечиш. 1-усул.

$$\frac{(a^2 + b^2)^2 - a^2 b^2}{(a^2 + b^2) + (2a^2 b + 2ab^2)} = \frac{(a^2 + b^2)^2 - a^2 b^2}{(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a + b)} =$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)}{(a + b)(a^2 - ab + b^2 + 2ab)} = \frac{a^2 + b^2 - ab}{a + b}$$

2-усул. Касрнинг сурат а махражини кўпайтувчиларга ажратиш мураккаб (қийин) бўлган ҳолларда касрнинг сурати $a^4 + a^2 b^2 + b^4$ билан махражи $a^3 + 2a^2 b + 2ab^2 + b^3$ инг умумий бўлувчисини бирини иккинчисига бўлиш усули билан топилади.

$$\text{a) } \frac{a^4 + a^2 b^2 + b^4}{a^4 + 2a^2 b + 2a^2 b^2 + ab^3} \Bigg| \frac{a^3 + 2a^2 b + 2ab^2 + b^3}{a - 2b}$$

$$\frac{-2a^3 b - a^2 b^2 - ab^3 + b^4}{-2a^3 b - 4a^2 b^2 - 4ab^3 - 2b^4}{3a^2 b^2 + 3ab^3 + 3b^4 = 3b^2(a^2 + ab + b^2)}$$

б) Бўлувчи $a^3 + 2a^2 b + 2ab^2 + b^3$ ни қолдиқнинг кўпайтувчиларидан бири $a^2 + ab + b^2$ га бўламиз:

$$\frac{a^3 + 2a^2 b + 2ab^2 + b^3}{a^3 + a^2 b + ab^2} \Bigg| \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

$$\frac{-a^2 b + ab^2 + b^3}{-a^2 b + ab^2 + b^3}$$

$$0$$

Энди каср суратидаги кўпқадни умумий бўлувчига бўламиз.

$$\text{в) } \frac{a^4 + a^2 b^2 + b^4}{a^4 + a^3 b + a^2 b^2} \Bigg| \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$$

$$\frac{-a^3 b + b^4}{-a^3 b - a^2 b^2 - ab^3}$$

$$\frac{-a^2 b^2 + ab^3 + b^4}{-a^2 b^2 + ab^3 + b^4}$$

$$0$$

Умумий бўлувчи $a^2 + ab + b^2$ дан иборат экан.

Демак:

$$a^3 + 2a^2 b + 2ab^2 + b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2); \quad a^4 + a^2 b^2 + b^4 = (a^2 + b^2 - ab) \cdot (a^2 + b^2 + ab).$$

$$\text{Шундай қилиб, } \frac{a^4 + a^2 b^2 + b^4}{a^3 + 2a^2 b + 2ab^2 + b^3} = \frac{(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)}{(a + b)(a^2 + ab + b^2)} =$$

$$= \frac{a^2 - ab + b^2}{a + b}.$$

Қуйидаги касрларни қисқартиринг.

$$164. \quad 1) \frac{48a^7 b^3 c}{64a^8 b c^4}; \quad 2) \frac{a^{n+1} b^{m+2}}{a^n b^m}; \quad 3) \frac{x^{m-1} y^{n-3}}{x^m y^n};$$

$$165. \quad 1) \frac{12a^m b^{m-n}}{27a^{n+n} b^m}; \quad 2) \frac{7x^m y^{m+n}}{21x^{m-2} y^m}; \quad 3) \frac{6a^m b^{n+3}}{9a^{m-2} b^{n+1}}.$$

166. 1) $\frac{25a^{2n+1}b^{2n-2}}{20a^{2n}b^{2n+2}}$; 2) $\frac{14x^{2n-3}y^{2n-4}}{49x^n+1y^{3n-1}}$; 3) $\frac{a^{2m+7n-7}b^{4m+n+1}}{a^{m+6n-8}b^{5m+n-1}}$.
167. 1) $\frac{x^n(x^2-y^2)^m}{y^{2n}(x-y)^m}$; 2) $\frac{a^n(a^2+b^2)^n}{b^n(a^4-b^4)^n}$; 3) $\frac{a(x^4-y^4)^n}{a^{2m}(x+y)^n}$.
168. 1) $\frac{c^2-(a-b)c-ab}{c^2+bc^2+ac+ab}$; 169. $\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$.
170. $\frac{(x+y)^2-(a+b)^2}{(x+a)^2-(y+b)^2}$; 171. $\frac{(x+y)^2-(a-b-c)^2}{(x-b)^2-(a+y-c)^2}$.
172. $\frac{a^2+3a+2}{a^2-4}$; 173. $\frac{b^2+5b+6}{b^2+2b-3}$.
174. $\frac{c^2+7c+12}{c^2+6c+8}$; 175. $\frac{n^2-n-12}{n^2+n-6}$.
176. $\frac{x^4+7x^2+10}{x^4+6x^2+5}$; 177. $\frac{a^2+5ab+6b^2}{a^2+7ab+12b^2}$.
178. $\frac{a^2+ac-6c^2}{a^2-ac-9c^2}$.
179. $\frac{a^3c-2a^2c^2+ac^3-ab^2c}{(a^2+c^2-b^2)^2-4a^2c^2}$; 180. $\frac{c^4+c^2n^2+n^4}{c^3+n^4}$.
181. $\frac{(2b^2+2b-2)^2}{b^4-3b^2+1}$; 182. $\frac{x^6-2x^3+x}{x^5-x^4-x^3+x^2} = \frac{x+1}{x}$.
($x \neq 0$; $x \neq \pm 1$)

айният исбот қилинсин.

183. $\frac{(n+1)^4-16n^2}{n^3+5n^2-5n-1} = n-1$ айният исбот қилинсин.

184. $\frac{3x^3+xy^2-6x^2y-2y^3}{9x^5-xy^4-18x^4y+2y^5} = \frac{1}{3x^2-y^2}$ айният исбот қилинсин.

Қуйидаги касрлар қисқартирилсин:

185. $\frac{x^3-x^2-x-2}{x^2+x-6}$.

186. $\frac{x^3-x^2-7x+3}{x^3+4x^2+3x-2}$.

188*. $\frac{a^4+a^3-a^2+5a-2}{a^4-a^3-5a^2+7a-2}$.

189. $\frac{a(b+2)^2-4(b-a)-b^2-8}{b^4+64}$.

192. $\frac{c^7-128c^6+4096}{(c^3-4c^2+8c-8)^2}$.

187. $\frac{a^3-a^2-3a+2}{2a^2+4a-3-a^3}$.

189*. $\frac{n^4+3n-2}{n^4-2n^2+5n-6}$.

191. $\frac{y^4+4}{x(y^2+2)-2xy-(y-1)^2-1}$.

12-§. Касрлар устида тўрт амалга доир мисоллар

Алгебраик касрлар билан амаллар бажаришда ҳар бир алгебраик каср учун у касрни ташкил этувчи ҳарфларнинг мумкин бўлган қийматларигина назарда тутилган.

1-мисол. *Амалларни бажаринг.*

$$\frac{b(a+b)^2}{a^4-b^4} + \frac{a^3}{a^4+a^2b^2}$$

Бу мисолда $a \neq b$ ҳамда бир вақтда $a \neq 0$ ва $b \neq 0$ бўлгандагина айирма мавжуд. Бундай мисоллар берилганда $a \neq b$ ҳа да $a \neq 0$ ва $b \neq 0$ шартлар алоҳида ёзилмаган бўлиб, шундай шартлар мавжуд деб назарда тутилади.

Уқоридаги мисолни қуйидагича ечиш мақсадга мувофиқдир:

$$\frac{b(a+b)^2}{a^2-b^2} + \frac{a^3}{a^4+a^2b^2} = \frac{b(a+b)^2}{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)} + \frac{a^3}{a^2(a^2+b^2)} = \\ = \frac{b(a+b) + a(a-b)}{(a-b)(a^2+b^2)} = \frac{ab+b^2+a^2-ab}{(a-b)(a^2+b^2)} = \frac{1}{a-b}$$

Амалларни бажаринг.

$$193. \frac{m^3+mn^3}{m^2+mn} + \frac{3m^3n-3mn^3}{n^2-n^2} - \frac{m^3n-n^4}{mn-n^2}$$

$$194. \frac{m^3-n^3}{m^2-n^2} - \frac{m^2+n^2}{m+n} - \frac{m^2n+mn^2}{m^2+n^2+2mn}$$

2-мисол. *Кўрсатилган амалларни бажаринг:*

$$\frac{4+2x}{9-x^2} + \frac{2x+a}{2x^2+2ax+6x+6a} \cdot \left(4 - \frac{4x}{2x+a}\right).$$

Ечиш. Бундай мисолларни бир неча ишга бўлиб ечиш қулайдир. Масалан, аввал қавс ичидаги амал, сўнгра кўпайтириш амали ва ниҳоят қўшиш амали бажарилади.

$$1) 4 - \frac{4x}{2x+a} = \frac{8x+4a-4x}{2x+a} = \frac{4(x+a)}{2x+a}$$

$$2) \frac{2x+a}{2x^2+2ax+6x+6a} \cdot \frac{4(x+a)}{2x+a} = \frac{(2x+a)4(x+a)}{2(x+a)(x+3)(2x+a)} = \frac{2}{x+3}$$

$$3) \frac{4+2x}{9-x^2} + \frac{2}{x+3} = \frac{4+2x+2(3-x)}{9-x^2} = \frac{10}{9-x^2}$$

$$\text{Жавоб: } \frac{10}{9-x^2}$$

195. Амалларни бажаринг.

$$\left[\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz} + 1 \right] \cdot \left[\frac{x+z-y}{(x+y+z)} \frac{(x+y-z)}{(y+z-x)} + 1 \right].$$

3-мисол. $\left(\frac{2+2n^2-4n}{4n^2-4} - \frac{3}{n^2+n} \right) : \frac{n-3}{1+n^2+2n}$ бўлинма ҳамда $n = \frac{1}{3}$ бўлган ҳолда унинг сон қиймати топилсин.

Ечиш. а) Аввал бўлинмани топамиз:

$$1) \frac{2+2n^2-4n}{4n^2-4} - \frac{3}{n^2+n} = \frac{2(n-1)^2}{4(n-1)(n+1)} - \frac{3}{n(n+1)} = \frac{n^2-n-6}{2n(n+1)}$$

$$2) \frac{n^2-n-6}{2n(n+1)} \cdot \frac{1+n^2+2n}{n-3} = \frac{(n-3)(n+2)(n+1)^2}{2n(n+1)(n-3)} = \frac{(n+2)(n+1)}{2n}$$

б) Топилган бўлинманинг ($n = \frac{1}{3}$ бўлган ҳолда) қийматини топамиз.

$$\frac{\left(\frac{1}{3} + 2\right)\left(\frac{1}{3} + 1\right)}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

Жавоб: бўлинма $\frac{(n+2)(n+1)}{2n}$ га тенг; $n = \frac{1}{3}$ бўлган ҳолдаги ифоданинг сон қиймати $4\frac{2}{3}$ га тенг.

196. $\frac{x+y-z}{x+y+z} : (x^2 - y^2 - z^2 + 2yz)$ бўлинмани топинг ва натижани $x = 0,2$; $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{4}{5}$ бўлганда ҳисобланг.

197. Кўрсатилган амаллар бажарилсин ва натижа $a = 0,2$; $b = 0,6$ бўлганда ҳисоблансин:

$$\left(\frac{a^2 - ab}{a^2b + b^3} - \frac{2a^2}{b^3 - ab^2 + a^2b - a^3}\right) \left(1 - \frac{b-1}{a} - \frac{b}{a^2}\right).$$

МАШҚЛАР

Қуйидаги мисолларда кўрсатилган амаллар бажарилсин:

198. $\frac{x^8 + x^4 + 1}{x^6 - 1} - \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2 - 1}.$

199. $\frac{x^3}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^3}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^3}{(z-x)(z-y)}.$

200. $\frac{\left(m + \frac{1}{n}\right)^m \left(m - \frac{1}{n}\right)^n}{\left(n + \frac{1}{m}\right)^m \cdot \left(n - \frac{1}{m}\right)^n}.$

201. $\frac{21^9 \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}.$

202. $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}.$

Қуйидаги мисолларда кўрсатилган амаллар бажарилсин:

203. $\left(\frac{4a^2 + b^2}{4a^2 - b^2} + 1\right) : \left(\frac{6b}{b^2 - 4a^2} - \frac{4}{2a + b} + \frac{2}{2a - b}\right),$

204. $\frac{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)}.$

205. $\left[\frac{m+1}{(m+1)^2 - 3m} - \frac{1+3m-m^2}{m^3+1} - \frac{1}{m+1}\right] \cdot \left[\frac{m+1}{m^2-m+1} - \frac{m}{m^2+m} - \frac{1}{m(m^3+1)}\right].$

206. $\frac{a^2-1}{1+\frac{a}{n}} \left(1 + \frac{n^2-n+1}{n-n^3}\right) : \frac{1-a^2}{a-an^3-n^4+n}.$

$$207. \left[\left(\frac{a+2b}{a^3-b^3} - \frac{b}{a^3+a^2b+ab^2} \right) \cdot \frac{a^4-a^2b^2}{a^2+b^2} - \frac{(a^3-ab^2)(1+b)}{(a^3-a^2b+ab^2-b^3)} \right] : \frac{ab^3-a^2b}{a^2+b^2}$$

$$208. \left\{ \left[\left(\frac{x+y}{x-y} \right)^2 - 1 \right] : \left[\left(\frac{x-y}{x+y} \right)^2 - 1 \right] + 1 - \frac{x^2+4y^2}{2xy-x^2-y^2} \right\} : \left(\frac{x-2y}{2x-2y} \right)^2$$

$$209. \left(\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} + \frac{b}{a^2+b^2} \right) : \left(\frac{1}{a-b} - \frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3} \right)$$

$$210. \left[\frac{2+3a}{4a^2(a+1)+4a+4} - \frac{a-1}{2a^2(a-1)+2a-2} \right] : \left[\frac{1}{a^4+a^3+a^2+a} + \frac{2(a^2-1)}{2a^4-2} \right] - \frac{1-a^2}{4(a^3-1)}$$

13-§. Иботлашга доир мисоллар

1-мисол. Қуйидаги айният ибот қилинсин:

$$\frac{(y+z)^2+2(y^2-z^2)+(y-z)^2}{(y^4-2y^2z^2+z^4)} \left[\frac{1}{(y-z)^2} + \frac{2}{y^2-z^2} + \frac{1}{(y+z)^2} \right] = 1.$$

Ибот.

$$1) \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{2}{y^2-z^2} + \frac{1}{(y-z)^2} = \frac{(y+z)^2+2(y^2-z^2)+(y-z)^2}{(y^2-z^2)^2}$$

$$2) \frac{(y+z)^2+2(y^2-z^2)+(y-z)^2}{(y^4-2y^2z^2+z^4)} \cdot \frac{(y^2-z^2)^2}{[(y+z)^2+2(y^2-z^2)+(y-z)^2]} = \frac{(y^2-z^2)^2}{(y^2-z^2)^2} = 1.$$

Қуйидаги айниятларни ибот қилинг:

$$211. \frac{3abc}{bc+ac-ab} = \frac{\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}} = \frac{ab+ac+bc}{bc+ac-ab}$$

$$212. \frac{\left[\frac{(m+n)^2}{4mn} - 1 \right] \left[\frac{(m-n)^2}{4mn} + 1 \right]}{(m+n)^3 - 3m^2n - 3mn^2} \cdot \frac{[(m+n)^2 - mn] \cdot [(m-n)^2 + mn]}{(m-n)^3 + 3m(m-n)} = \frac{m^2-n^2}{16m^2n^2}$$

2-мисол. Агар $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ бўлса, $\frac{a-b+c-d}{a+b+c+d}$ ифода $\frac{a-b}{a+b}$

ёки $\frac{c-d}{c+d}$ га тенг экани ибот қилинсин.

Ибот. 1) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = n$ бўлса: $a = nc$; $b = nd$. Шуларни эътиборга олсак:

$$\frac{a-b+c-d}{a+b+c+d} = \frac{nc-nd+c-d}{nc+nd+c+d} = \frac{(n+1)(c-d)}{(n+1)(c+d)} = \frac{c-d}{c+d}$$

2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{1}{k}$ бўлса, $c = ak$, $d = bk$. Буларни эътиб рага олсак:

$$\frac{a - b + ak - bk}{a + b + ak + bk} = \frac{(a - b)(1 + k)}{(a + b)(1 + k)} = \frac{a - b}{a + b}.$$

213. $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ бўлса, $\frac{a - b - c + x - y - z}{a + b + c + x + y + z}$ ифода $\frac{a - b - c}{a + b + c}$

ёки $\frac{x - y - z}{x + y + z}$ га тенглиги исбот қилинсин.

3- мисол. $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ қисқармайдиган каср экани исбот қилинсин.

$$\text{Исбот. } \frac{21n + 4}{14n + 3} = \frac{(14n + 3) + (7n + 1)}{14n + 3} = 1 + \frac{7n + 1}{14n + 3}.$$

Берилган касрнинг қисқармайдиган каср эканини исбот қилиш ўрнига бутун қисми ажратилгандан сўнг ҳосил бўлган $\frac{7n + 1}{14n + 3}$ нинг

ёки унга тескари каср $\frac{14n + 3}{7n + 1}$ нинг қисқармаслигини исбот қилиш

кифоя. У ҳолда $\frac{14n + 3}{7n + 1} = 2 + \frac{1}{7n + 1}$ бўлиб, бунда $\frac{1}{7n + 1}$ қисқар-

майди. Демак, $\frac{14n + 3}{7n + 1}$ ҳам, $\frac{7n + 1}{14n + 3}$ ҳам, у ҳолда берилган каср ҳам қисқармайди.

214. $\frac{21n + 2}{12n + 1}$ қисқармайдиган каср экани исбот қилинсин.

МАШҚЛАР.

215. n нинг қийматлари қандай натурал сонлар бўлганда $\frac{3n^2 - 3n + 20}{n - 1}$ бутун сонларга тенг бўлади?

216. Шундай қисқармайдиган каср топингки, унинг суратига 14, махражига эса 35 қўшиш натижасида қиймати ўзгармасин.

217. n ҳар қандай натурал сон бўлганда ҳам $\frac{10^n + 8}{9}$ бутун сон эканини исбот қилинг.

218. n ҳар қандай натурал сон бўлганда ҳам $\frac{10^n + 5}{15}$ бутун сон эканини исбот қилинг.

219. n ҳар қандай натурал сон бўлганда ҳам $\frac{10^{n+1} + 44}{36}$ бутун сон эканини исбот қилинг.

220*. n ҳар қандай натурал сон бўлганда ҳам $\frac{10^{n+2} + 125}{1125}$ бутун сон экани исбот қилинсин.

221. $\frac{x-y}{1+xy} \cdot \frac{y-z}{1+yz}$ ва $\frac{z-x}{1+xz}$ касрларнинг йиғиндиси уларнинг кўпайтмасига тенг экани исбот қилинсин.

222. $\frac{(n-1)(n+1)}{n(n-1)+1}$ ва $\frac{2(0,5-n)}{n(1-n)-1}$ касрларнинг йиғиндиси кубларнинг йиғиндисига тенг экани исбот қилинсин.

223. Агар $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$ ва $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ бўлса, $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 1$ экани исбот қилинсин.

224*. $\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0$. $x \neq y$, $x \neq z$ ва $y \neq z$ бўлса, $\frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0$ экани исбот қилинсин.

225*. Агарда $ab + bc + ac = 1$ бўлса, $\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$ экани исбот қилинсин. Бунда: $a \neq \pm 1$, $b \neq \pm 1$, $c \neq \pm 1$.

226*. $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 1$ тенгликнинг чап қисмидаги касрлардан иккитасининг ҳар бири $+1$ га учинчиси эса -1 га тенг экани исбот қилинсин.

227*. $a + b + c = 0$ бўлса,

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-a}{c} + \frac{c-a}{b}\right) \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9$$

эқани исбот қилинсин. Бунда $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$.

II боб

БИР НОМАЪЛУМЛИ БИРИНЧИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

14-§. Бир номаълумли биринчи даражали тенгламалар

Биринчи даражали бир номаълумли тенгламани ечиш учун одатда: 1) тенглама каср кўринишида бўлса касрдан қўтқарилади; 2) қавслар очилади; 3) номаълум ҳадлар тенгламанинг бир қисмига, маълум ҳадлар эса тенгламанинг иккинчи қисмига ўтказилади; 4) ўхшаш ҳадлар ихчамланади; 5) тенгламанинг иккала қисми номаълум олдидаги коэффициентга (агар у нолга тенг бўлмаса) бўлинади.

1-мисол. *Тенгламани ечинг:*

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{8}{x^2-2x+1} = \frac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}$$

Ечиш. $x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2-1)$ эканини эъгиборга олсак, берилган тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин: $\frac{7}{x^2-1} + \frac{8}{(x-1)^2} = \frac{37-9x}{(x-1)(x^2-1)}$. Тенгликнинг ҳар икки

қисми и $(x - 1)(x^2 - 1)$ га кўпайтирамиз* (яъни касрдан қутқарамиз).

У ҳолда: $7(x - 1) + 8(x + 1) = 37 - 9x$.

Қавсларни очамиз: $7x - 7 + 8x + 8 = 37 - 9x$.

Номаълумларни тенгламанинг бир (чап) қисмига, маълумларни эса иккинчи (ўнг) қисмига ўтказамиз:

$$7x + 8x + 9x = 37 + 7 - 8.$$

Ўхшаш ҳаллари ихчамланса: $24x = 36$.

Тенгламанинг ҳар икки қисми номаълум олдидаги коэффициент (24) га бўлинса: $x = 1,5$.

Текшириш $\frac{7}{(1,5)^2 - 1} + \frac{8}{(1,5)^2 - 3 + 1} = \frac{7}{1,25} + \frac{8}{0,25} = 5,6 + 32 = 37,6$. $\frac{37 - 9(1,5)}{(1,5)^3 - 2,25 - 1,5 + 1} = \frac{23,5}{0,625} = 37,6$. Демак, $x = 1,5$ бўлганда тенгламанинг чап ва ўнг қисми бир-бирига айнан тенг бўлар экан. $x = 1,5$ берилган тенгламанинг илдизи бўлади.

2-мисол. **Тенгламани ечинг:** $3 - \frac{x-2}{3-x} = \frac{1}{x-3}$. (1)

Ечиш. Тенгламанинг ҳар икки қисмини $3 - x \neq 0$ га кўпайтирамиз:

$$\begin{aligned} 3(x-3) + (x-2) &= 1 \\ 3x - 9 + x - 2 &= +1; 4x = 12; x = 3. \end{aligned} \quad (2)$$

$x = 3(2)$ тенгламанинг илдизи, ammo (1) тенгламанинг илдизи эмас (чунки 3, $x \neq 3$ шартни қаноатлантирмайди).

$x = 3$ бўлганда берилган тенглама мавжуд бўлмайди.

(1) тенглама билан (2) тенглама тенг кучли эмас экан. (1) тенгламани $(x - 3)$ га кўпайтириш натижасида чет илдиз ($x = 3$) ҳосил бўлган.

Шундай қилиб, каср махражида номаълум қатнашадиган тенгламаларни ечганда, топилган x нинг қиймати каср махражини нолга айлантирмаслиги текшириб кўрилиши керак. Агар нолга айлантирса, x нинг бу қиймати берилган тенгламанинг илдизи бўлмай, чет илдиз бўлади.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

$$228. 1) x - \frac{2}{3} - \frac{9-2x}{8} = 1 + \frac{x}{2} \quad 2) \frac{9x-1}{4} - \left(1 - \frac{2-x}{9}\right) = 7x-2.$$

$$229. 1) \frac{26x-51}{52} - \frac{\left(3 - \frac{x}{12}\right) - (1 + 5,5x)}{13} = x - \frac{20x - (10 - 3x)}{156}$$

$$2) 35 \left\{ \frac{6}{7} \left[x - 0,4 \left(\frac{2}{3}(x+2) - 1 \right) \right] - 3 \right\} + 1 = 0$$

3-мисл. **Тенгламани ечинг:** $13 + 7(x-2) - 5x = 5(x-1) + 3(1-x) + 1$

* $(x - 1)(x^2 - 1)^2 \neq 0$, яъни $x \neq \pm 1$ деб фараз қиламиз.

Ечиш. $13 + 7x - 14 - 5x = 5x - 5 + 3 - 3x + 1$, $2x - 1 = 2x - 1$; $2x - 2x = 1 - 1$. Охириги тенглама айният бўлиб, x нинг ҳар қандай қийматида ҳам ўринлидир. Демак, ихтиёрый сон берилган тенглама учун илдиз бўла олади.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

230. 1) $(x - 1)^2 + (3 - 2x)^2 - 1 = (3x - 1)^2 + 2(3 + x) - (1 - 2x)^2 + 6$; 2) $4(3 - x)^2 - (x - 4)^2 = 3(2 + x)^2 - 11x + 25$.

231. 1) $(x - 1)^2 - 4x + 3 = x^2 - 6(x - 1)$; 2) $(x - 1)^2 + 2x^2 + 3 = 3(4 - x)^2 + 22(x - 2)$.

232. 1) $\frac{2y - 5}{y - 2} - \frac{4y - 13}{y^2 - 4y + 4} = 2$; 2) $\frac{5x - 8}{6x - 15} - \frac{2x - 5}{10x - 4} =$
 $= \frac{19x^2 - 29}{(2x - 5)(15x - 6)}$.

233. 1) $3 \left\{ x - \frac{3x - 1}{4} - \left[1 - 2 \left(x - \frac{3 + x}{5} \right) \right] \right\} = 5x - 2$;

2) $\frac{3x - 3}{2x^2 - 2} - \frac{2x + 2}{3x^2 + 6x + 3} = \frac{5(x - 1)}{12x^2 - 24x + 12}$.

4- мисол. $\left(\frac{b+1}{bx+1} + \frac{x+1}{x+\frac{1}{b}} - 1 \right) : \left[\frac{b+1}{\left(x+\frac{1}{b}\right)b} - \frac{b(x+1)}{bx+1} + 1 \right] = \frac{x}{2}$.

Ечиш. 1) $\frac{b+1}{bx+1} + \frac{x+1}{x+\frac{1}{b}} - 1 = \frac{b+1}{bx+1} + \frac{b(x+1)}{bx+1} - 1 =$

$= \frac{b+1+bx+b-bx-1}{bx+1} = \frac{2b}{bx+1}$. 2) $\frac{b+1}{\left(x+\frac{1}{b}\right)b} - \frac{b(x+1)}{bx+1} +$

$+ 1 = \frac{b+1}{bx+1} - \frac{bx+b}{bx+1} + 1 = \frac{b+1-bx-b+bx+1}{bx+1} = \frac{2}{bx+1}$.

Берилган тенглама $\frac{2b}{bx+1} : \frac{2}{bx+1} = \frac{x}{2}$ кўринишга келади. $bx + 1 \neq 0$ га қисқартирсак, $x = 2b$. $x = 2b$ берилган тенгламада касрлар махражи $bx + 1$ ни нолга айлантирмагани учун, берилган тенгламанинг илдизи бўлади.

5- мисол. *Тенгламани ечинг:*

$$\frac{2x - a}{x - a} = 1 + \frac{a}{x - a}$$

Ечиш. Тенгламанинг ҳар икки қисми $x - a \neq 0$ га кўпайтирилади.

$$2x - a = x - a + a,$$

$$x = a.$$

$x = a$ эса берилган тенгламанинг илдизи эмас (чунки $x = a$ бўлса, тенглама маъжуд бўлмайди).

Демак, берилган тенгламани ($x - a$) га кўпайтириш натижасида берилган тенгламага тенг кучли бўлмаган тенглама ҳосил бўлган.

Шундай қилиб, берилган тенглама илдизга эга эмас экан.

Куйидаги тенгламалар ечилсин:

$$234. \frac{a^2 + y}{b^2 - y} - \frac{a^2 - y}{b^2 + y} = \frac{4aby + 2a^2 - 2b^2}{b^4 - y^2}.$$

$$235. \frac{n^2 + nx + x^2}{n^2 + n^2x + nx^2 + x^3} - \frac{n^3 - n^2x + nx^2}{n^4 + 2n^2x^2 + x^4} = \frac{1}{n + x}.$$

$$236. \frac{2(x - a)}{a^2 - c^2 - 2ax + x^2} + \frac{c - x}{a^2 - ac + cx - 2ax + x^2} = \frac{1}{x - a}.$$

$$237. \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{n(x - 1) + n^2 - x}{n(x - 1) - n^2 + x}.$$

$$238. [(a - 1)^2 + a] : \left| \frac{(a + 1)^3}{3a} - a - 1 \right| = x : \left[\frac{(a - 1)^2}{4a} + 1 \right].$$

$$239. x : \frac{(n - c)^2}{n^3 - c^3} = \frac{n^3 + c^3}{(n + c)^3} : \left[1 - \frac{2nc}{(n + c)^2 - nc} \right].$$

$$240. \frac{x}{a} (3ab + 1) = \frac{3ab}{1 + a} + \frac{(2a + 1)x}{a(a + 1)^2} + \frac{a^2}{(a + 1)^2}.$$

$$241. \frac{x - a}{bc} + \frac{x - b}{ac} + \frac{x - c}{ab} = 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

$$242^*. \frac{cm}{c^2 - b^2} - \frac{x - m}{c + b} = \frac{b^2x}{c^3 - cb^2 + c^2b - b^3} - \frac{cx}{c^2 - 2cb + b^2}.$$

$$243. \frac{2}{n^2 - nc - nx + cx} + \frac{1}{x^2 - nx - cx + nc} = \frac{1}{c^2 - cx - nc + nx}.$$

$$244. \frac{bx - cx}{2b + 2c} + \frac{bcx}{b^2 - c^2} - \frac{b - x}{b - c} = \frac{x}{2} + \frac{b + x}{b + c}.$$

$$245. \frac{an}{a - x} + \frac{(a + n)(onx + nx^2 + x^3)}{x^3 + nx^2 - a^2x - a^2n} = \frac{ax}{n + x} + \frac{nx^2}{x^2 - a^2}.$$

$$246. \frac{x + b}{a + b} + \frac{x - b}{a - b} = \frac{b + x}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{x - b}{a^2 - b^2} + \frac{2x}{a}.$$

$$247^*. \frac{x + ab}{c + 1} + \frac{x + ac}{b + 1} + \frac{x + bc}{a + 1} = ab + ac + bc.$$

248. Тенгламани ечинг:

$$\left[\left(6 \frac{3}{7} - \frac{\frac{3}{4}x - 2}{\frac{7}{20}} \right) \cdot 2 \frac{4}{5} - 1 \frac{1}{3} \right] : \frac{1}{20} = 235.$$

$$249. \left| \left(1 \frac{1}{2} + \frac{4x}{3} \right) : 3 \frac{3}{4} - \frac{2}{5} \right| : 8 \frac{8}{9} + \frac{1}{4} = 0,33.$$

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

$$250. 1 - \left[\left(3 \frac{5}{14} - \frac{1 \frac{11}{49}}{x \cdot \frac{25}{38} - 47 \frac{3}{7}} \right) \cdot \frac{12}{55} + 1 \frac{3}{85} \right] : 5 \frac{14}{17} = \frac{5}{7}.$$

$$251. 2 \frac{2}{3} : \{ [(3,72 - 0,02x) \cdot \frac{10}{37}] : \frac{5}{6} + 2,8 \} - \frac{7}{15} = 0,2.$$

$$252. \left| 0,72 - \left(10 - \frac{9,99999}{1,1-x} \right) \cdot 0,625 \right| : 0,225 = 0,7.$$

$$253. (0,66 - 0,012 : 0,2) : \left(1 - 1 \frac{4}{7} \cdot 0,4 \right) = 2 \frac{11}{13} x : 3,125 - 5,6 : 2 \frac{2}{3}.$$

$$254. 12 \frac{3}{5} : \left[5 \frac{2}{15} + \left(5 \frac{5}{9} - \frac{8 \frac{3}{4}}{\frac{8}{21} \cdot x - 1 \frac{2}{5}} \right) \cdot 5 \frac{68}{125} \right] - \frac{2}{11} = \frac{4}{5}.$$

$$255. \left[3,25 - \frac{\left(6 \frac{9}{16} - 2 \frac{1}{2} \cdot x \right) \cdot 0,53}{0,75} \right] : 6 \frac{2}{3} = \frac{4}{15}.$$

$$256. 2 \cdot [0,2 - 0,02 : (0,002 + 0,0002 \cdot x)] = 0,3.$$

$$257. [(2 - x) : 1,5 + 17,4 : 29] : (25 \cdot 0,16) - 0,005 = 0,4.$$

$$258. 50,32 - 21,32 : [(20 + 9,744 : x) \cdot 0,5 - 1,63] = 48,27.$$

15-§. Тенглама тузиш билан масалалар ечиш

1-масала. *Экскурсияга борки учун пул йиғиш керак. Агар ҳар бир киши 75 тийиндан берса, харажатлар учун 4,4 сўм етмайди, агар ҳар бир киши 80 тийиндан берса, 4,4 сўм ортиб қолади. Экскурсияга неча киши бормоқчи?*

Ечиш. Экскурсантлар сони x бўлсин. Агар ҳар бир киши 75 тийиндан тўласа, $75x$ тийин йиғилади, харажатлар учун эса $75x + 440$ тийин пул керак. Агар ҳар бир кишидан 80 тийиндан олинса, $80x$ тийин йиғилади, харажат учун $80x - 440$ тийин пул керак бўлади. Масала шартига асосан:

$$75x + 440 = 80x - 440.$$

Бу тенглама ечилса, $x = 176$ эканлигини топамиз. Демак, экскурсияга 176 киши бормоқчи.

Жавобни текшириш. 176 киши 75 тийиндан тўласа, $176 \cdot 0,75 = 132$ сўм тўланади; 80 тийиндан тўласа, $176 \cdot 0,8 = 140,8$ сўм тўланади. 132 сўмга 4,4 сўмни қўшсак, 140,8 сўмдан 4,4 сўмни айирсак, ҳар икки ҳолда ҳам харажатлар учун керак бўлган 136,4 сўм чиқади*.

* Бундан кейинги ечиб кўрсатилган масалаларнинг жавобини текширишни ўқувчиларга қолдирамиз.

259. Томошабинлар залдаги ҳар бир қаторга 27 тадан ўтирса, 30 та жой етмай қолади; 30 тадан ўтирса, 60 жой ортиб қолади. Залда неча қатор ва неча томошабин бор?

260. А шаҳардан В шаҳаргача бўлган денгиз йўли тош йўлидан 10 км қисқа. Кема А дан В гача бўлган йўлни 3 соат-у 20 минутда, автомобиль эса 2 соатда босади. Кеманинг бир соатлик тезлиги автомобилнинг тезлигидан 17 км кам бўлса, кема соатига неча километр йўл босади?

2-масала. *Бир ишни бир ишчининг ёлғиз ўзи а кунда бажаради, иккинчи ишчи шу ишни бажариш учун n кун ортақ вақт сарф қилса, учинчи ишчининг ёлғиз ўзи n кун тезроқ бажара олади. Шу ишни учала ишчи бирга ишласа, неча кунда бажаради?*

Ечиш. Учала ишчи биргаликда ишни x кунда бажарсин, дейлик. 1 кунда биринчи ишчининг бир ўзи ишнинг $\frac{1}{a}$ қисмини, иккинчиси $\frac{1}{a+n}$ қисмини, учинчиси $\frac{1}{a-n}$ қисмини, учаласи биргаликда $\frac{1}{x}$ қисмини бажаради.

$$\text{У ҳолда: } \frac{1}{a} + \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Тенгламани ечсак: } x = \frac{a(a^2 - n^2)}{3a^2 - n^2}.$$

Демак, учала ишчи биргаликда шу ишни $\frac{a(a^2 - n^2)}{3a^2 - n^2}$ кунда бажара олади (бунда $a \neq n$ ва $3a^2 \neq n^2$ бўлиши керак).

261. Ҳовузга 3 та труба ўтказилган бўлиб, уларнинг биринчи ва иккинчисидан сув оқиб киради, учинчисидан сув оқиб чиқади. Бўш ҳовузни биринчи трубанинг ёлғиз ўзи 5 соатда тўлдира олади, иккинчи трубанинг ёлғиз ўзи эса 3 соатда тўлдира олади. Учинчи трубанинг ёлғиз ўзи тўла ҳовузни 2 соатда бўшатади. Учала труба бирга ишласа, бўш ҳовуз неча соатда тўллади?

262. А ва В қишлоқлари орасидаги масофани соатига 15 км тезликда юрувчи велосипедчи соатига 12 км юрувчи велосипедчидан 2 минут тез босиб ўтади. Қишлоқлар орасидаги масофа неча километр?

3-масала. *Бир ишни биринчи машинистканинг ёлғиз ўзи 18 соатда, иккинчисининг ёлғиз ўзи эса 24 соатда тямомлайди. Шу ишни ҳар икки машинистка биргаликда бажаришга киришди. Бир қанча вақтдан кейин иккинчи машинисткага бошқа иш берилди. Шундан сўнг қолган ишни биринчи машинистка 4 соатда тямомлади. Биринчи машинистка ҳаммаси бўлиб неча соат ишлаган?*

1-чиш. 1-усул. Иккала машинистка биргаликда x соат ишлаган бўлсин. Биринчи машинистка 1 соатда ишнинг $\frac{1}{18}$ қисмини, иккинчи машинистка $\frac{1}{24}$ қисмини, Иккаласи эса $(\frac{1}{18} + \frac{1}{24})$ қисмини, x соатда эса $(\frac{1}{18} + \frac{1}{24})x$ қисмини бажаради. Биринчи машинистка 4 соатда ишнинг $\frac{1}{18} \cdot 4 = \frac{2}{9}$ қисмини бажаради. Бутун иш шартли birlikни ифода қилгани учун:

$$(\frac{1}{18} + \frac{1}{24})x + \frac{2}{9} = 1.$$

Бу тенгламани ечсак: $x = 8$ соат, у ҳолда биринчи машинистка $8 + 4 = 12$ соат ишлаган.

2-усул. а) Иккинчи машинистка x соат, биринчиси эса $x + 4$ соат ишлаган бўлсин. У ҳолда биринчиси $x + 4$ соатда ишнинг $\frac{x+4}{18}$ қисмини, иккинчиси x соатда $\frac{x}{24}$ қисмини бажаради. Масала шартига кўра:

$$\frac{x+4}{18} + \frac{x}{24} = 1.$$

Бу тенглама ечилса: $x = 8$; $8 + 4 = 12$.

б) Биринчи машинистка x соат, иккинчиси $x - 4$ соат ишлаган бўлсин. У ҳолда биринчиси x соатда ишнинг $\frac{x}{18}$ қисмини, иккинчиси эса $x - 4$ соатда $\frac{x-4}{24}$ қисмини бажаради. Шунинг учун:

$$\frac{x}{18} + \frac{x-4}{24} = 1.$$

Бу тенглама ечилса: $x - 4 = 8$, $x = 12$.

Жавоб. Биринчи машинистка 12 с ат ишлаган.

263. Қолхоз электр станцияси учун котлован қазили керак эди. Эскекатор шу котлованнинг $\frac{1}{4}$ қисмини 10 кунда қазиди. Котлованнинг қолган қисмини 1,5 барабар оз ишлайдиган иккинчи экскаватор билан бирга қазиди. Котлован неча кунда қазиб бўлинган?

4-масала. *Бир грунна пионерлар моторли қайиқда пристандан оқимга қарши кетишди. Пионерлар 4 соат-у 40 минутдан сунг қайтиб келишлари керак. Қайиқнинг турғун сувдаги тезлиги соатига 12 км, оқим тезлиги эса соатига 3 км булса, пионерлар пристандан неча километр масофага бориб, 2 соат дам олиб, уз вақтида қайтиб келишлари мумкин?*

1-чиш. x км га бориб қайтишлари мумкин бўлсин. Моторли қайиқ оқимга қарши x км ни $\frac{x}{12+3} = \frac{x}{15}$ соатда, оқим бўйича эса

$\frac{x}{12-3} = \frac{x}{9}$ соатда юради. Бориб қайтишга $4\frac{2}{3} - 2 = 2\frac{2}{3}$ соат сарф қилгани учун:

$$\frac{x}{15} + \frac{x}{9} = 2\frac{2}{3}.$$

Бу тенгламани ечсак: $x = 15$ км.

Жавоб. Пионерлар 15 км ли масофага бориб қайтишлари мумкин.

264. Масквада баланд бинолардаги лифтларнинг кўтарилиш тезлиги одатдаги биноларда бўлган лифтларнинг тезлигидан икки марта ортиқ. Шу сабабли баландлиги 81 м бўлган бинонинг 20-қаватига кўтарилиш учун одатдаги бинонинг баландлиги 33 м бўлган 8-қаватида кўтарилишга қараганда фақат 5 секунд ортиқ вақт керак бўлади. Ҳар қайси лифтнинг тезлигини топинг.

5-масала. Ораларидаги масофа 600 км булган А ва В станцияларидан икки поезд бир-бирига қараб, бир зақтда йўлга чиқди. Иккинчи поезд А га келишидан 3 соат олдин биринчи поезд В га етиб келади. Биринчи поезд 250 км юрганда иккинчи поезд 200 км юради. Ҳар қайси поезднинг тезлиги топилсин.

Е чиш. Биринчи поезднинг тезлиги соатига x км, иккинчи поезднинг тезлиги $\frac{200}{250}x = \frac{4}{5}x$ (км/соат).

600 км ни биринчи поезд $\frac{600}{x}$ соатда, иккинчи поезд эса $\frac{600}{\frac{4}{5}x} = \frac{750}{x}$ соатда босиб ўтади. Масаланинг шартига кўра:

$$\frac{600}{x} + 3 = \frac{750}{x}.$$

Бу тенгламани ечсак; $x = 50$; $\frac{4}{5}x = 40$.

Жавоб. Биринчи поезднинг тезлиги соатига 50 км, иккинчисининг тезлиги эса соатига 40 км.

265. Орасидаги масофа 150 км бўлган А ва В шаҳарларининг бири (А) дан иккинчисига автобус жўнаб кетди. 1,5 соат ўтгач тезлиги автобус тезлигидан 2,5 марта ортиқ бўлган енгил машина йўлга чиқиб, В шаҳрига автобусдан 18 минут олдин келди. Автобус ва енгил машинанинг тезлиги топилсин.

6-масала. Автомобиль шаҳардан қишлоққача бўлган масофани соатига 60 км тезлик билан босиб ўтди. Қайтишда бу масофанинг 75% ини олдинги тезлиги билан, қолган масофани соатига 40 км тезлик билан ўтди. Шунинг учун қайтишда боришдагига қараганда 10 минут ортиқ вақт сарф қилди. Шаҳардан қишлоққача бўлган масофани топинг.

Ечиш. Шаҳардан қишлоққача бўлган масофа x км бўлсин.

Шаҳардан қишлоққа бориш учун $\frac{x}{60}$ соат вақт сарф бўлган. Йўлнинг (x км нинг) 75% и бўлган $0,75x$ км ни $\frac{0,75x}{60}$ соатда, қолгани $0,25x$ км ни эса $\frac{0,25x}{40}$ соатда ўтган: $(\frac{0,75}{60}x + \frac{0,25x}{40} - \frac{x}{60}) = \frac{1}{6}$ (10 минут = $\frac{1}{6}$ соат).

$$15x + 0,75x - 2x = 20; 0,25x = 20; x = 80.$$

Жавоб: шаҳардан қишлоққача бўлган масофа 80 км.

266. А шаҳардан В шаҳаргача бўлган масофани автобус, графикка мувофиқ, соатига ўртача 40 км тезлик билан б.сади. Бир сафар пўл ремонт қилинаётгани сабабли автобус йўлнинг биринчи ярмини 20 минут кечикиб босди. Автобус В га ўз вақтида етиб келиш учун йўлнинг қолган қисмини соатига 45 км тезлик билан босди. А дан В гача бўлган масофани топинг.

7- масала. *Икки завод планга мувофиқ бир ойда 360 та станок ишлаб чиқариши керак эди. Биринчи завод планни 112%, иккинчи завод 110% бажариб, иккала завод бир ойда 400 та станок ишлаб чиқарди. Ҳар қайси завод пландан ташқари неча станок ишлаб чиқарган?*

Ечиш. План бўйича биринчи завод x та станок, иккинчиси $(360 - x)$ та станок ишлаб чиқариши керак эди. x нинг 112% и: $\frac{x}{100} \cdot 112$ ва $(360 - x)$ нинг 110% и: $\frac{360 - x}{100} \cdot 110$, биргаликда 400 га тенг:

$$\frac{x}{100} \cdot 112 + \frac{360 - x}{100} \cdot 110 = 400.$$

Бу тенгламани ечсак: $x = 200$.

200 нинг 12% и: $\frac{200}{100} \cdot 12 = 24$, $360 - 200 = 160$ нинг 10% и: 16.

Жавоб. Биринчи завод пландан ташқари 24 та, иккинчиси 16 та стан к ишлаб чиқарган.

267. Автомобиль биринчи қатнашда бакдаги бензиннинг 25% ини, иккинчи қатнашда қолган бензиннинг 20% ини сарф қилди. Шундан кейин бакда иккала қатнашда сарф қилинганга қараганда 12 л ортинқ бензин қолди. Дастлаб бакда неча литр бензин бўлган?

268. Уч яшиқда 64,2 кг олма бор. Иккинчи яшиқда биринчи яшиқдагининг $\frac{4}{5}$ қисми қадар, учинчи яшиқда эса иккинчи яшиқдагининг 42,5% и қадар олма бор. Ҳар бир яшиқда қанчадан олма бор?

8- масала. *Соатига 40 км тезлик билан поездда кетаятган киши қарши томондан келаятган поезд унинг гнидан 3 секундада ўтиб кетганини аниқлади. Қарши*

томондан келаётган поезднинг узунлиги 75 м, унинг тезлигини топинг.

Ечиш. 1-у сул. Қарши томондан келаётган поезд тезлиги соатига x км/соат $= \frac{x \cdot 1000}{3600}$ м/сек $= \frac{5x}{18}$ м/сек; 40 км/соат $= \frac{40000}{3600}$ м/сек $= \frac{100}{9}$ м/сек. Ҳар икки поезд тезликлари йигиндиси: $(\frac{5x}{18} + \frac{100}{9})$ м/сек. Ҳар икки поезд 3 секунд ичида 75 м юргани учун

$$(\frac{5x}{18} + \frac{100}{9}) \cdot 3 = 75.$$

Бу тенгламани ечсак, $x = 50$ км/соат.

2-у сул. Тезликлар йигиндиси $(x + 40)$ км/соат;

3 сек $= \frac{3 \text{ соат}}{3600} = \frac{1}{1200}$ соат, 75 м $= \frac{75 \text{ км}}{1000} = \frac{3}{40}$ км бўлгани

учун:

$$(x + 40) \cdot \frac{1}{1200} = \frac{3}{40}.$$

Бу тенглама ечилса $x = 50$ км/соат.

Жавоб. Қарши томондан келаётган поезднинг тезлиги соатига 50 км.

269. Намойишчилар колоннаси кучада соатига 3 км тезлик билан бормоқда. Велосипедчи колоннага қарши соатига 15 км тезлик билан юриб колоннанинг бошидан охирига 2 минутда борди. Номойишчилар колоннасининг узунлигини топинг.

9-масала. Бирида 8%, иккинчисида 32% никель бўлган икки хил қотишма бор. Таркибида 24% никель бўлган 75 т қотишма ҳосил қилиш учун ҳар қайси хил қотишмадан қанча олиш керак?

Ечиш. Биринчи хил қотишмадан x т, иккинчи хилидан $(75 - x)$ т олиш керак. Биринчи хилида 0,08 x т никель, иккинчисида 0,32 · $(75 - x)$ т никель бор. Масала шартига кўра, қотишмада 0,24 · 75 тонна никель бўлиши керак:

$$0,08x + 0,32(75 - x) = 0,24 \cdot 75.$$

Бу тенгламани ечсак: $x = 25$, $75 - x = 50$. Демак, I хил қотишмадан 25 т, II хилидан 50 т олиш керак.

270. 40 т ва 10 т лик икки хил пулатдан таркибида 30% никель бўлган пулат ҳосил қилинган. Биринчи хил пулат таркибида 5% никель бўлса, иккинчи хил пулат таркибида неча процент никель бўлган?

10-масала. 1,06 кг оғирликдаги олтин билан кумуш қотишмаси сузга ботирилганда 70 г оғирлигини „йўқотди“. Агар олтин сувда ўз оғирлигининг $\frac{1}{19}$ қисмини, кумуш эса ўз оғирлигининг 0,1 қисмини „йўқотса“, бу қотишмада қанча олтин ва қанча кумуш бор?

Ечиш. Қотишмада x г олтин, $(1060 - x)$ г кумуш бор олтин $\frac{x}{19}$ г оғирлигини, кумуш эса

$$\frac{1060 - x}{10} \text{ г}$$

оғирлигини йўқотадн.

$$\frac{x}{19} + \frac{1060 - x}{10} = 70.$$

Бу тенгламани ечсак: $x = 760$; $1060 - x = 300$.

Қотишмада 760 г олтин, 300 г кумуш бор.

271. Оғирлиги 24 кг бўлган мис ва рух қотишмасини сувга ботирганда қотишма ўз оғирлигидан $2\frac{8}{9}$ кг йўқотди. Сувга ботирганда мис ўз оғирлигининг $11\frac{1}{9}\%$ ини, рух эса ўз оғирлигининг $14\frac{2}{7}\%$ ини йўқотди маълум. Шу қотишмадаги миснинг ва рухнинг миқдори топилсин.

11-масала. *Икки хил металлдан 199 граммлик қотишма ҳосил қилинган. Биринчисидан 20 куб см, иккинчисидан 2 куб см олинган бўлиб, иккинчи металлнинг солиштирма оғирлиги биринчисиникидан 1,6 қадар ортиқ. Қотишма қандай металлдан ҳосил қилинган?*

Ечиш. Биринчи металлнинг солиштирма оғирлиги x , иккинчисиники $x + 1,6$; қотишмадаги биринчи металлнинг оғирлиги $20x$ грамм, иккинчи металл оғирлиги эса $2(x + 1,6)$ грамм. Масала шартига асосан:

$$20x + 2(x + 1,6) = 199.$$

Тенгламани ечсак: $x = 8,9$.

$$x + 1,6 = 10,5.$$

Биринчи металлнинг солиштирма оғирлиги 8,9 бўлиб иккинчисиники 10,5. Биринчиси мис, иккинчиси кумуш экан.

272. 185,5 грамм қуймадаги олтиннинг ҳажми миснинг ҳажмидан 2 марта кам. Олтиннинг солиштирма оғирлиги $19,3 \text{ Г/см}^3$, мисники $8,9 \text{ Г/см}^3$, қуймадаги олтиннинг ҳажми ва миснинг ҳажми топилсин.

12-масала. *Биринчи хил рычаг елкаларининг узунлиги 30 см ва 50 см бўлиб, таянч нуқтасига 4 кг куч билан босади. Рычаг учларига неча килограммлик юклар осилган?*

Ечиш. Рычаг учларига x кг ва $(4 - x)$ кг лик юклар осилган бўлсин. У ҳолда:

$$x \cdot 30 = (4 - x) \cdot 50$$

Бу тенглама ечилса, $x = 2,5$; $4 - x = 1,5$.

Демак, ричаг учларига 2,5 кг ва 1,5 кг лик юклар осилган экан.

273. Ричагнинг таянч нуқтасидан бир томонга 70 г ва 40 г лик юклар осилган. Биринчи юкнинг осилиш нуқтаси иккинчисининг силиш нуқтасига қараганда таянч нуқтасидан 3 см нарида туради. Агар шу икки юк таянч нуқтасининг иккинчи томонига таянч нуқтасидан 10 см масофада осилган 120 г юк билан мувозанатлашса, юкларнинг осилиш нуқталари таянч нуқтасидан қандай масофада туради?

МАШҚЛАР

274. Резервуарга биринчи жўмрак оркали сув оқиб киради, иккинчи ва учинчи жўмрак орқали эса оқиб чиқади. Резервуарни биринчи жўмракнинг ёлғиз ўзи 5 соатда тўлдирди. Сув билан тўла резервуарни иккинчи жўмрак 1 соатда бўшатади. Учала жўмрак очиб қўйилса, буш резервуар 15 соатда тўлади. Ёлғиз учинчи жўмрак сув билан тўла резервуарни неча соатда бўшатади?

275. Номаяълум сонга 119 ни қўшиб йиғинди 5 га қўшайтирилгач, ҳосил бўлган соннинг охиридаги 2 та вольт ўчирилса, 123 сони ҳосил бўлади. Номаяълум сонни топиш.

276. Пиёда юривчи киши борадиган жойига табиинланган вақтдан кеч қолмай етиб бориши керак. У 1 соатда 3 км йўл юриб, сўнгра ҳисоблаб кўрса, шу тезлик билан юришда давом қилганида, 20 минут кечикар экан. Кечикмаслик учун у ҳар

соатда $\frac{1}{2}$ км тезроқ юриб, белгиланган ерга 40 минут илгари етиб борди. Йўловчи неча километр йўл юриши керак бўлган?

277. Канопнинг ярми ва $\frac{1}{2}$ см, сўнгра қолдиқнинг ярми ва $\frac{1}{2}$ см, ниҳоят, иккинчи қолдиқнинг ярми ва $\frac{1}{2}$ см кесиб олинди. Шундан сўнг 12 см каноп қолди. Канопнинг дастлабки узунлиги қанча бўлган?

278. Солиштирма оғирлиги $3\text{г}/\text{см}^3$ бўлган тош, солиштирма оғирлиги $0,24\text{г}/\text{см}^3$ бўлган бир бўлак пўкак билан бирга боғланган. Ҳаммаси биргалликда 115г бўлган, шу ҳажмдаги сувнинг оғирлигига барабар бўлсин учун, яъни сувга ҳам чўкмасин, қалқиб ҳам чиқмасин учун пўкак қандай оғирликда ва шу тош қандай оғирликда бўлиши керак?

279. Бир шаҳарнинг аҳолиси йилига 3% дан ортади. Бу шаҳарда ҳозир 1273080 киши яшаса, 2 йил бурун шу шаҳарда қанча киши яшаган?

280. 10, 30, 70 сонлари берилган, бу сонларнинг ҳар бирига қандай сонни қўшсак, ҳосил бўлган сонларнинг иккинчиси, биринчиси билан учинчиси орасида ўрта пропорционал бўлади?

281. Араванинг олдинги гилдираги бирмунча масофада кейинги гилдирагидан 15 та ортик айланади. Олдинги гилдирагининг айланаси 2,5 м, кейинги гилдирагининг айланаси 4 м. Ҳар қайси гилдирак неча марта айланган ва арава қанча йўл босган?

282. Электр мотори шкивнинг диаметри 150 мм бўлиб, у минутига 960 марта айланади. Электр моторининг айланиш сонини минутига 1200 мартагача оширганда ҳаракатлантурувчи тасма тезлиги илгаригича қолиши учун шкивнинг диаметрини қанча камайтириш керак?

283. Икки хоналик соннинг ўнлар хонасидаги рақами бирлар хонасидаги рақамидан 1 бирлик ортиқ. Шу соннинг квадратидан унинг рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган соннинг квадрати айрилса, 1287 ҳосил бўлади. Шу икки хонали сонни топиш.

284. Уч хонали соннинг рақамлари 2 тадан ортиб боради. У соннинг квадратдан берилган сон рақамларини тескари тартибда ёзиш натижасида ҳосил бўлган соннинг квадрати айрилса, 351648 сони ҳосил бўлади. Шу уч хонали сонни топиш.

285. 58° температурали 100 л сув ҳосил қилиш учун қанча қайноқ (100°) сув ва қанча уй температурасидаги (16°) сув олиш керак?

286. Иккита қуйма оғирлиги биргаликда m грамм. Биринчи қуймада $p\%$, иккинчисида $q\%$ олтин бор. Биринчи қуймада иккинчисидан n грамм ортиқ олтин борлиги маълум бўлса, ҳар қайси қуйманинг оғирлиги топилисин.

287. Олдинги учта совет космик ракетасидаги илмий асбобларнинг умумий оғирлиги 1186,3 кг бўлиб, биринчи ракетанинг асбоблари иккинчи ракетанинг асбобларидан 28,7 кг енгил, иккинчи ракета асбоблари оғирлигининг учинчи ракета асбоблари оғирлигига нисбати 26:29 каби. Иккинчи космик ракета илмий асбобларининг оғирлигини топинг.

288. Энциклопедия бетларини номерлаш учун 3625 та рақам керак бўлди. Энциклопедия неча бетли экан?

289. 1 дан бошлаб натурал сонлар тартиб билан ёзила берган. Бу ёзув барча рақамлари сони 61539 га бўлган сон ҳосил бўлгач, тўхтатилган. Ҳосил булган соннинг охирида қандай рақам ёзилган?

290.* Икки нуқта радиуслари 1:6 нисбатда бўлган айланалар бўйича ҳаракат қилади. 10 секунд ичида катта айлана бўйича ҳаракатланувчи нуқта кичик айлана бўйича ҳаракатланувчи нуқтадан 2 м ортиқ масофани ўтади ва 5 марта кам айланади. Ҳар қайси нуқтанинг тезлиги топилисин.

291. Пароход икки пристань орасидаги масофани оқим бўйича 4 соатда, оқимга қарши эса 5 соатда ўтади. Оқим тезлиги соатига 2 км бўлса, пристаньлар орасидаги масофа қанча?

292.* Пиеда киши 1 км узунликдаги трамвай йўли участкасидан ҳар куни 12 минутда юриб ўтади. У 1 ой давомида орқасидан қувиб келувчи ҳамда рўпарасидан келувчи трамвайлар сони мос равишда 45 та ва 120 та бўлганини ҳисоблади. Трамвайларнинг тезлиги топилисин.

293. Биринчи рақами 2 бўлган тўрт хонали соннинг биринчи рақамини охириги ўринга кўчириб, қолган рақамлар тартибини ўзгартирилмасдан қолдиришдан ҳосил бўлган янги тўрт хонали сон олдингисидан 2781 қадар ортиқ бўлади. Дастлабки сонни топинг.

294.* Болалар бир қанча ёнғоқни бўлиб олишди. Биринчи бола a та ва қолганининг n дан бир бўлаги қадар ёнғоқ олди, иккинчи бола $2a$ та ва янги қолдиқнинг n дан бир бўлаги қадар ёнғоқ олди; учинчи бола $3a$ та ва янги қолдиқнинг n дан бири қадар ёнғоқ олди ва ҳ. к. Шу усулда бўлингандан сўнг болалар баравардан ёнғоқ олганликлари маълум бўлди. Болалар қанча бўлган?

295. Олтин билан кумушнинг иккита қуймаси бор. Биринчисида олтин билан кумуш 2:3 нисбатда, иккинчисида эса 3:7 нисбатда қатнашади. Бу қуймаларнинг ҳар бирдан неча килограмдан олганда олтин билан кумуш 5:11 нисбатда бўлган 24 килограммли қуйма ҳосил қилиш мумкин?

296. Пароход Киев билан Днепропетровскка икки суткада боради ва 3 суткада қайтиб келади. Сол Киевдан Днепропетровскка қанча вақтда оқиб боради?

297.* Куб формасидаги учта идиш A , B ва C нинг сифими 1:8:27 нисбатда, уларга қуйилган сув ҳажмлари 1:2:3 нисбатда. A дан B га, B дан C га сув қуйгач учала идишда сувнинг чуқурлиги бир хил бўлди. Сўнгга C дан B га

$128\frac{1}{7}$ л сув қуйилди. Шундан сўнг, яна B дан A га, A даги сувнинг қалинлиги B даги сувнинг қалинлигидан 2 марта ортиқ бўлгунча сув қуйилди. Охирида A да дастлабкисидан 100 литр кам сув ҳосил бўлди.

Дастлаб ҳар қайси идишда қанчадан сув бўлган?

16-§. $|ax + b| = c$ кўринишдаги тенгламалар

$|ax + b|$ ифода манфий бўла олмагани сабабли

$$|ax + b| = c$$

тенглама $c \geq 0$ бўлгандагина илдизга эга бўлади; $c < 0$ бўлса, бу тенглама илдизга эга бўлмайди.

1-мисол. Тенгламани ечинг. $|2x - 1| = 5$.

Ечиш. Абсолют қиймат белгиси ичидаги ифода $(2x - 1)$ бешга тенг бўлса ҳам, -5 га тенг бўлса ҳам тенглама ўринли бўлади, шунинг учун $2x - 1$ ни 5 га ва -5 га тенглаш билан иккита тенглама тузилади ва ечилади, яъни:

а) $2x - 1 = 5$, тенгламани ечсак: $2x = 5 + 1$; $2x = 6$, $x = 3$;

б) $2x - 1 = -5$, тенгламани ечсак: $2x - 1 = -5$; $2x = -4$,
 $x = -2$.

Тенглама икки илдизга эга бўлиб, биринчиси $x_1 = 3$, иккинчиси $x_2 = -2$.

2-мисол. Тенгламани ечинг: $2 \cdot |0,5x + 5| = 1$.

Ечиш. Тенгламанинг ҳар икки қисмини 2 га бўлсак:

$$|0,5x + 5| = 0,5$$

а) $0,5x + 5 = 0,5$; $0,5x = -4,5$; $x = -\frac{4,5}{0,5} = -9$;

б) $0,5x + 5 = -0,5$; $0,5x = -5,5$; $x = -\frac{5,5}{0,5} = -11$.

Жавоб: $x_1 = -9$, $x_2 = -11$.

Куйидаги тенгламаларни ечинг:

298. 1) $|2x| = 3$; 2) $4|x| = 5$.

299. 1) $\frac{|10x - 1|}{7} = 5$; 2) $|2 - 4x| = 11$.

300. 1) $|3x + 2| = 5$; 2) $|7 - 0,1x| = 14$.

301. 1) $|2x - 0,5| = -1$; 2) $|9x - 0,81| = 0$.

302. 1) $\frac{3}{|x - 2|} = 1$; 2) $\frac{0,04}{|x + 0,01|} = 4$.

303. $|2x - 4| = a$. 304. $0,5|x + 3| = -b$.

17-§. Тенгсизликлар. Тенгсизликларнинг асосий хоссалари

ТЕНГ КУЧЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАР. БИРИНЧИ ДАРАЖАЛИ
ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ЕЧИШ

1. *1-таъриф*. Иккита сонли ифода ёки иккита ҳарфли ифода $>$ ёки $<$ (\geq ёки \leq) ишораси билан бирлаштирилган бўлса, улар тенгсизлик ҳосил қилади дейилади.

Масалан: 1) $8(4 : 0,2 + 1) > 7 \cdot 0,3$; 2) $\frac{a+1}{2} > \frac{a}{4}$.

Биринчи мисол сонли тенгсизлик, иккинчиси эса ҳарфли тенгсизликдир.

Тенгсизликларнинг асосий хоссалари:

1. $a > b$ бўлса, $b < a$ бўлади.

2. $a > b$ бўлса, $a - b > 0$ бўлади, аксинча $a - b > 0$ бўлса, $a > b$ бўлади.

3. Агар $a < b$ ва $b < c$ бўлса, $a < c$ бўлади (транзитивлик хоссаси).

4. Агар $a > b$ бўлса, $a + c > b + c$ бўлади (монотонлик хоссаи), яъни тенгсизликнинг ҳар икки қисмига бир хил сонни қўшиш мумкин.

5. Агар $a > b$ ва $c > d$ бўлса, $a + c > b + d$ бўлади, яъни бир хил маъноли тенгсизликларни ҳадлаб қўшиш мумкин (иккита тенгсизликнинг иккаласида ҳам бир хил $>$ ёки $<$ ишора турган бўлса, улар бир хил маъноли, агар тенгсизликлардан бирида $>$ ишора, иккинчисида $<$ ишора турса, улар тескари маъноли деб аталади).

6. Агар $a > b$ ва $c < d$ бўлса, $a - c > b - d$ бўлади, яъни тескари маъноли икки тенгсизликни ҳадлаб айириш мумкин, бунда бир тенгсизликдан иккинчиси олинган бўлса, натижага биринчисининг ишораси қўйилади.

7. Агар $a > b$ бўлиб, n мусбат сон бўлса, у ҳолда $an > bn$ ва $a : n > b : n$, яъни тенгсизликнинг иккала қисмини бир хил мусбат сонга кўпайтирсак ёки бўлсак, тенгсизликнинг ишораси ўзгармайди.

8. Агар $a > b$ бўлиб, n манфий сон бўлса, у ҳолда $an < bn$ ва $a : n < b : n$, яъни тенгсизликнинг иккала қисмини бир хил манфий сонга кўпайтирсак ёки бўлсак, тенгсизликнинг ишораси тескарига алмашади.

Хусусан, $n = -1$ бўлса, $-a < -b$ бўлади.

9. $a > 0$, $b > 0$ бўлиб, n натурал сон ва $a > b$ бўлса, $a^n > b^n$ бўлади.

10. Агар $a > b > 0$ ва $c > d > 0$ бўлса, $ac > bd$ бўлади.

11. a ва b бир хил ишорали бўлиб, $a > b$ бўлса, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ бўлади.

1-мисол. **Ушбу амалларни бажаринг:**

$$\begin{array}{l}
 1) \quad \frac{4}{5} > 0,7 \\
 + \frac{0,4}{1,2} > \frac{-0,3}{0,4} \\
 2) \quad \frac{-1,1}{0,07} < \frac{2,4}{0,06} \\
 \frac{1,03}{1,03} < \frac{2,34}{2,34} \\
 3) \quad \begin{array}{l} \times \frac{0,5}{3} > \frac{0,3}{1,2} \\ \frac{1,5}{1,5} > \frac{0,36}{0,36} \end{array} \\
 4) \quad \begin{array}{l} \times \frac{-0,9}{-1,3} > \frac{-1}{-2,4} \\ \frac{1,17}{1,17} > \frac{2,4}{2,4} \end{array}
 \end{array}$$

305. **Ушбу амалларни бажаринг:**

$$\begin{array}{l}
 1) \quad \begin{array}{l} + \frac{14,8}{-3,7} > \frac{-2,9}{10,8} \\ 2) \quad \frac{-10,1}{2,45} > \frac{7,94}{-4,45} \end{array} \\
 3) \quad \begin{array}{l} \times \frac{5,9}{10} > \frac{2,8}{-1,5} \end{array}
 \end{array}$$

II. 2-таъриф. Агар бир хил номаълумни ўз ичига олган икки тенгсизлик, шу номаълумнинг бир хил қийматлари билангина қаноатланса, ундай тенгсизликлар тенг кучли тенгсизликлар дейилади. Масалан, $2x - 4 < x + 1$ ва $2x < x + 5$ тенг кучли тенгсизликлардир, чунки бу тенгсизликларнинг биринчисини ҳам, иккинчисини ҳам, номаълумнинг 5 дан кичик барча қийматлари қаноатлантиради.

1- теорема. Агар (номаълумли) тенгсизликнинг иккала қисмига бир хил сон қўшилса (ёки айрилса) биринчи тенгсизликка тенг кучли бўлган янги тенгсизлик ҳосил бўлади.

Натижа. Тенгсизликнинг исталган ҳадини унинг бир қисмидан иккинчи қисмига тескари ишора билан ўтказиш мумкин.

2- теорема. Агар (номаълумли) тенгсизликнинг иккала қисмини бир хил мусбат сонга кўпайтирсак (ёки бўлсак), у ҳолда биринчи тенгсизликка тенг кучли янги тенгсизлик ҳосил бўлади.

Натижа. Тенгсизликнинг ҳар икки қисмини номаълумни ўз ичига олган мусбат ифодага кўпайтирсак (ёки бўлсак) тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.

Масалан: $x > 1$ тенгсизликни x^2 га кўпайтирсак, $x^3 > x^2$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу тенгсизлик олдингисига тенг кучли (чунки ҳар икки тенгсизликни ҳам x нинг 1 дан катта барча қийматлари қаноатлантиради).

3- теорема. Агар (номаълумли) тенгсизликнинг иккала қисмини бирор манфий сонга кўпайтирилса (ёки бўлинса) ҳамда тенгсизлик ишораси тескарисига алмаштирилса, ҳосил бўлган тенгсизлик олдингисига тенг кучли бўлади.

Натижа. 1) Тенгсизликдаги барча ҳадларнинг ишоралари алмаштирилса, тенгсизлик ишорасини тескарисига алмаштирилади.

2) Тенгсизликнинг иккала қисмини, ишораси номаълум бўлган ҳарфий ифодага кўпайтириш ёки бўлиш мумкин эмас.

Масалан, $\frac{1}{x} < 1$ тенгсизликни x га кўпайтирсак, ҳосил бўлган $1 < x$ тенгсизлик олдингисига тенг кучли бўлмайди (чунки кейинги тенгсизликни 1 дан катта сонлар қаноатлантирса олдинги тенгсизликни 1 дан катта ҳамда нолдан кичик сонлар қан атлантиради).

3- таъриф. Тенгсизликни ечиш, номаълумнинг берилган тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлар (туپлам)ини топишдан, ёки номаълумнинг бундай қийматлари йўқ эканини аниқлашдан иборатдир. Масалан, 1) $2x - 1 > 5$ — x тенгсизликнинг ечими $x > 2$, яъни 2 дан катта барча сонлардан иборат; 2) $x^2 + 1 < 0$ тенгсизлик эса ечимга эга эмас (чунки $x^2 \geq 0$ бўлгани учун $x^2 < -1$ бўлиши мумкин эмас).

Тенгсизликларни ечишда тенг кучли тенгсизликлар ҳақидаги теоремалар ва уларнинг натижаларидан фойдаланилади.

III. Бир номаълумли биринчи даражали тенгсизлик деб

$$ax + b > cx + d$$

кўринишидаги ёки шу кўринишга келтириш мумкин бўлган тенг-

сизликка айтади. Бунда a, b, c, d — берилган сонлар. Бу тенгсизликни ечиш учун унинг ҳар икки қисмига $-cx - b$ иф. дақи қўшсак, берилганига тенг кучли бўлган

$$ax - cx > d - b \text{ ёки } (a - c)x > d - b$$

тенгсизлик ҳосил бўлади: $a - c = A, d - b = B$ деб белгиласак, $Ax > B$ курунишига келади.

Тенгсизликнинг ҳар икки қисмини $A (A \neq 0)$ га бўливса, берилган тенгсизликнинг ечими: $A > 0$ бўлганда $x > \frac{B}{A}$, $A < 0$ бўлганда эса $x < \frac{B}{A}$ бўлади.

2-мисол. $5x - 7 < x + 5$.

Тенгсизликнинг ҳар икки қисмига $-x + 7$ ни қўшсак; $5x - 7 - x + 7 < x + 5 - x + 7$ ёки $5x - x < 5 + 7$; $4x < 12$; бу тенгсизликнинг ҳар икки қисмини $4 > 0$ га бўламиз. $x < 3$ берилган тенгсизликнинг ечими бўлади.

3-мисол. $7x - 0,3 > 2x - 13,8$.

Ечиш. $7x - 2x > -13,8 + 0,3$; $5x > -13,5$; $x > -2,7$.

4-мисол. $3(x - 2) > x + 2(x - 8)$.

Ечиш. $3x - 6 > x + 2x - 16$.

$$3x - 3x > -16 + 6; \quad 3x - 3x > -10. *$$

Тенгсизликнинг чап қисми, x нинг ҳар қандай қийматида нолга тенг бўлади ва ўнг қисмидаги -10 дан катта бўлади. Демак, x — ихтиёрий сон.**)

5-мисол. *Тенгсизликни ечинг:*

$$2(x + 4) < 6x - 4(x - 1)$$

$$2x + 8 < 6x - 4x + 4$$

$$2x + 8 < 2x + 4$$

$$2x - 2x < 4 - 8; \quad 2x - 2x < -4.$$

x нинг ҳар қандай қийматида ҳам тенгсизликнинг чап қисми нолга тенг бўлгани учун, манфий сон -4 дан кичик бўла олмайди, яъни тенгсизлик ечимга эга эмас.

6-мисол. $\frac{9}{4x-3} > 0$ *тенгсизликни ечинг.*

Ечиш. Қасрнинг сурат ва махражи бир хил ишорали миқдорлар бўлгандагина тенгсизлик ўринли бўлади. $8 > 0$ бўлгани учун $4x - 3 > 0$ ёки $x > \frac{3}{4}$ бўлиши керак. *Жавоб.* $x > \frac{3}{4}$.

*) Бу тенгсизлик айний тенгсизлик деб аталади (таркибига кирган ҳарфларнинг тенг бўлиши мумкин бўлган барча қийматлари қапоатлантирадиган тенгсизлик айний тенгсизлик дейилади. Масалан: $2x > 2x - 2, \frac{4}{x^2 + 3} > 0$ ва х. к.).

**) Бу ерда ва бундан кейин: «ихтиёрий сон», «барча сонлар тўплами» деганда фақат ҳақиқий сонлар (тўплами)гина назарда тутилади.

306. *Тенгсизликларни ечинг.* 1. $\frac{2x-5}{3} - \frac{3x-1}{4} < 0$; 2) $x - 1 > \frac{2x+1}{2}$; 3) $0,5x+1 > \frac{0,3+x}{2}$.

307. 1) $\frac{3}{1+2x} < 0$; 2) $\frac{3x-1}{2} - \frac{4-5x}{3} > 0$.

308. $(2x-1)^2 - x^2 < 3x \cdot (x-1) + 3$ тенгсизликнинг барча бутун сонлардан иборат ечимлари топилсин.

18-§. Тенгсизликларни исботлашга доир мисоллар

4- таъриф. *Таркибида ҳарфлар бўлган тенгсизликни исбот қилиш бу ҳарфларнинг тенге бўлиши мумкин бўлган барча қийматлари ёки уларни махсус қўйилган шартлар билан чекланган қийматлари берилган тенгсизликни қаноатлантиришини кўрсатиши (тасдиқлаш)дан иборатдир.*

1- мисол. $(a+1)^2 > 2a - 3$ *тенгсизликни исботланг.*

Исбот. 1- усул. $a^2 + 2a + 1 > 2a - 3$.

Тенгсизликнинг ҳар икки қисмига $-2a - 1$ ни қўшамиз:

$$a^2 + 2a + 1 - 2a - 1 > 2a - 3 - 2a - 1.$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамласак:

$$a^2 > -4.$$

a нинг ҳар қандай қийматида a^2 ноль ёки мусбат сон бўлгани учун ҳамма вақт -4 дан катта бўлади. Охиргги тенгсизлик a нинг ҳар қандай қийматида ҳам ўринли бўлгани учун унга тенг кучли бўлган берилган тенгсизлик ҳам a нинг ҳар қандай қийматида ўринлидир.

2- усул. a нинг ҳар қандай қийматида ҳам $a^2 > -4$. Тенгсизликнинг ҳар икки қисмига $2a + 1$ ни қўшсак, $a^2 > -4$ га тенг кучли бўлган

$$a^2 + 2a + 1 > -4 + 2a + 1 \text{ ёки } (a+1)^2 > 2a - 3$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Демак, у ҳам a нинг ҳар қандай қийматида бажарилади.

Қуйидаги тенгсизликлар исбот қилинсин:

309. $a^4 + 5 > 2a$. 310. $a^4 + b^2 + 2 > 2(a^2 - a^2b + b)$.

2- мисол. $a^4 + b^4 + 6a^2b^2 \geq 4ab(a^2 + a^2)$ *тенгсизлик исбот қилинсин.*

Исбот. Берилган тенгсизликни исбот қилиш ўрнига $b^4 + a^4 + 6a^2b^2 - 4ab(a^2 + b^2) \geq 0$ тенгсизликни исбот қиламиз.

$a^4 + b^4 + 6a^2b^2 - 4a^3b - 4ab^3 = (a^2 - 2ab + b^2)^2 = (a-b)^4 \geq 0$ тенглик $a = b$ бўлганда бажарилади.

Тенгсизликларни исбот қилинг:

311. $x^2 + y^2 + 1 \geq 2(xy + x - y)$.

312. $(a^2 - b^2)^2 \geq 4ab(a^2 - b^2 - ab)$.

3- мисол. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 > 2(a + b + c)$ *тенгсизлик исбот қилинсин.*

Исбот. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2(a + b + c) = (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0$ (чунки қўшилувчиларнинг ҳар бири нолдан кичик эмас). $a = b = c = 1$ бўлганда тенглик бажарилади.

Тенгсизликларни исбот қилинг:

313. $x^2 + y^2 + 2 \geq 2(x + y)$.

314. $x^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4 \geq 2(a + b + c + d)$.

315. $a^2(1 + b^2) - b(2a - b) \geq 0$.

4-мисол. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ тенгсизлик исбот қилинсин.

Исбот. 1-усул. $a^2 + b^2 - 2ab \geq 2ab - 2ab; (a - b)^2 \geq 0$.

Охириги тенгсизлик a ва b нинг ҳар қандай қийматида ҳам ўринли бўлгани учун унга тенг кучли бўлган берилган тенгсизлик ҳам a ва b нинг ҳар қандай қийматида ҳам ўринли бўлади.

2-усул. a ва b нинг ҳар қандай қийматида ҳам $(a - b)^2 \geq 0$ тенгсизлик ўринлидир. Бунда: $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ ёки $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Тенгсизликларни исбот қилинг:

316. $(a^2 + b^2 - ab)^2 \geq a^2 b^2 (ab > 0)$.

317. $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 < 4abcd$ (a, b, c, d — ихтиёрний сон).

5-мисол. Агар $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ бўлса, $\frac{a+b}{b} \leq \frac{c+d}{d}$ экани исбот

қилинсин.

Исбот. $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ тенгсизликнинг ҳар икки қисмига 1 қўшамиз.

У ҳолда: $\frac{a}{b} + 1 \leq \frac{c}{d} + 1$ ёки $\frac{a+b}{b} \leq \frac{c+d}{d}$.

318. Агар $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ бўлса, $\frac{a+bk}{b} \leq \frac{c+dk}{d}$ экани исбот қилинсин.

319. $a < b$ бўлса, $a < \frac{a+b}{2} < b$ экани исбот қилинсин.

320. b ва d мусбат ва $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ бўлса, $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$ бўлиши исбот қилинсин.

6-мисол. Агар $a \geq b > 0$ бўлса, $\frac{a^3 - b^3}{2} \geq \left(\frac{a-b}{2}\right)^3$ бўлиши исбот қилинсин.

Исбот. Берилган тенгсизликни исбот қилиш ўрнига унга тенг кучли бўлган $\frac{a^3 - b^3}{2} - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \geq 0$ тенгсизликни исбот қиламиз.

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - b^3}{2} - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 &= \frac{4a^3 - 4b^3 - a^3 + 3a^2b + b^3}{8} = \frac{3(a^3 - b^3 + a^2b - ab^2)}{8} = \\ &= \frac{3}{8} [(a^3 - b^3) + ab(a-b)] = \frac{3}{8} (a-b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= \frac{3}{8} (a-b)(a+b)^2. \end{aligned}$$

Ҳосил бўлган ифода a ва b нинг ҳар қандай қийматида ҳам манфий бўлмагани учун $\frac{3}{8} (a-b)(a+b)^2 \geq 0$ тенгсизлиги ўринли

бўлади. Унга тенг кучли бўлган берилган тенгсизлик ҳам бажарилади.

Тенглик $a = b$ бўлганда ўринли бўлади.

321. Ҳазор тенг бўлмаган икки мусбат сонлар йиғиндиси кубининг ярми шу сонлар йиғиндиси ярмининг кубидан катта экани исбот қилинсин.

7- мисол. $(x + 3) \cdot (x + 4) \cdot (x + 5) \cdot (x + 6) + 2 > 0$.

Ечиш. $(x + 3)(x + 6) = x^2 + 9x + 18$; $(x + 4)(x + 5) = x^2 + 9x + 20$.
 $(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 6) + 2 = [(x^2 + 9x) + 18] \cdot [(x^2 + 9x) + 20] + 2 = (x^2 + 9x)^2 + 38(x^2 + 9x) + 360 + 2 = [(x^2 + 9x + 19)^2 + 1] = (x^2 + 9x + 19)^2 + 1 > 0$.

x нинг ҳар қандай қийматида ҳам $(x^2 + 9x + 19)^2 > 0$ бўлгани учун $(x^2 + 9x + 19)^2 + 1 > 0$ бўлади. У ҳолда охириги тенгсизликка тенг кучли бўлган берилган тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

Қуйидаги тенгсизликлар исботлансин.

322. $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 1 > 0$.

323. $x^4 + y^4 + z^4 > x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$ (x, y, z — ҳақиқий сонлар).

8- мисол. Агар $a > 0, b > 0, a < b$ ва $k > 0$ бўлса,

$$\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$$

эқани исбот қилинсин.

Ечиш. 1- усул. $a < b$ ва $k > 0$ бўлгани учун $ak < bk$.

$ak + ab < bk + ab$; $a(k + b) < b(k + a)$; ҳосил бўлган тенгсизликни $b(k + b)$ га бўлсак:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$$

2- усул. $\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$ тенгсизликни исбот қилиш ўрнига $\frac{a+k}{b+k} - \frac{a}{b} > 0$ тенгсизликни исбот қилиш kifоя.

$$\frac{a+k}{b+k} - \frac{a}{b} = \frac{ab + bk - ab - ak}{b(b+k)} = \frac{k(b-a)}{b(b+k)}$$

берилган шартга кўра $b > 0, b - a > 0, b > 0, b + k > 0$

бўлгани учун $\frac{k(b-a)}{b(b+k)} > 0$ бўлади. У ҳолда $\frac{a+k}{b+k} - \frac{a}{b} > 0$.

Демак, мусбат тўғри қасрни сурат ва махражга бир хил мусбат сон қўшилса унинг қиймати ортади.

324. Агар $0 < k < a < b$ бўлса, $\frac{a}{b} > \frac{a-k}{b-k}$ тенгсизлик ўринли экани исбот қилинсин.

325. $a > b$ бўлса, $(\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2}) \geq (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$ тенгсизлик ўринли экани исбот қилинсин.

9- мисол. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq 4$ (a, b, c, d — натурал сонлар) тенгсизлик исбот қилинсин.

Исбот. $abc \leq abcd$; $abd \leq abcd$; $acd \leq abcd$; $bcd \leq abcd$ тенгсизликларни қўшсак:

$$abc + abd + acd + bcd \leq 4abcd$$

тенгсизликнинг ҳар икки қисмини $abcd > 0$ га бўламиз:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \leq 4.$$

Тенгсизликлар исбот қилинсин.

326*. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq 3$. 327*. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \leq n$ (x_1, x_2, \dots, x_n — натурал сонлар).

10- мисол. $x > 0$ бўлса, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ тенгсизлик ўринли экани (яъни ўзаро тескари мусбат сонлар йиғиндиси 2 дан кичик эмаслиги) исбот қилинсин.

Ечиш. 1- у сул. $x > 0$ бўлса берилган тенгсизликни x га кўпайтирсак: $x^2 + 1 \geq 2x$; $x^2 - 2x + 1 \geq 0$; $(x - 1)^2 \geq 0$ тенгсизлик эса барча $x > 0$ учун ўринлидир.

2- у сул. Ҳар қандай $x > 0$ учун $(x - 1)^2 \geq 0$ ўринли; у ҳолда $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ёки $x^2 + 1 \geq 2x$; $x > 0$ га бўлсак, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Тенгсизликлар исбот қилинсин.

328. $\frac{n^2}{1+n^4} \leq \frac{1}{2}$. 329. $(a^2 + b^2)(a^2b^2 + 1) \geq 4a^2b^2$.

330. $ab > 0$ бўлса, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ экани исбот қилинсин.

331. Агар $ab < 0$ бўлса, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$ тенгсизликнинг ўринли экани исбот қилинсин.

МАШҚЛАР

Қуйдаги тенгсизликлар исбот қилинсин:

332. $a^4 + 3 \geq (a + 1)^2$.

333. $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc$ ($a > 0, b > 0, c > 0$).

334. $4a^2 + 4b^2 \geq 6ab$.

335. $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ac + bc + ab)$.

336. $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2a + 2b$.

337. $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) \geq 8x^2y^2z^2$.

338*. Агар a, b, c бирор учбурчакнинг томонлари бўлса,

$$abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(a + c - b)$$

тенгсизликнинг ўринли экани исбот қилинсин.

339. $x \geq y \geq z$ бўлса, $x^2y + y^2z + z^2x \geq xy^2 + yz^2 + zx^2$ тенгсизлик ўринли экани исбот қилинсин.

340. $\frac{(a + c)(b + d)(ac + bd)}{abcd} \geq 8$.

341. $a > 0, b > 0, c > 0$ бўлса,

$$ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ac(a + c - 2b) \geq 0$$

екани исбот қилинсин.

342*. x, y ва z мусбат бўлганда $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$ тенгсизлигининг ўринли экани исбот қилинсин.

343. Қуйидаги тенгсизликлар исбот қилинсин: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ (n — натурал сон).

344. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$ (n — натурал сон).

345*. $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n$ (n — натурал сон).

III боб

БИРИНЧИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР (ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР) СИСТЕМАСИ

19- §. Биринчи даражали тенгламалар системасини алгебраик қўшиш ва ўрнига қўйиш усуллари билан ечиш

Ушбу

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

биринчи даражали икки номаълумли икки тенглама системаси берилган бўлса, уни алгебраик қўшиш усули*) билан ечиш учун биринчи тенгламани b_2 га, иккинчисини — b_1 га кўпайтириб қўшсак,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

тенглама ҳосил бўлиб, бундан x аниқланади.

Биринчи тенгламани — a_2 га, иккинчисини a_1 га кўпайтириб қўшсак, $(a_1b_2 - a_2b_1)y = c_2a_1 - c_1a_2$ тенглик ҳосил бўлади ва бундан y аниқланади.

(1) системани ўрнига қўйиш усули билан ечиш учун тенгламаларнинг биридан номаълумлардан бири (қулайлик учун, коэффициентлари кичик мусбат сон бўлгани) иккинчи номаълум орқали ифодаланиб, бу қиймат бошқа (иккинчи) тенгламага қўйилади.

Масалан, биринчи тенгламадан x топилса; $x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$ бўлади ва буни иккинчи тенгламага қўйилса,

$$a_2 \frac{c_1 - b_1y}{a_1} + b_2y = c_2$$

*) Алгебраик қўшиш усулини, баъзан, коэффициентларни тенглаш усули деб ҳам юритилади.

бир номаълумли тенглама ҳосил бўлади*) ва ундан y аниқланади. y нинг қиймати $x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$ ифодага қўйилса, x топилади. Демак, биринчи даражали икки номаълумли тенгламалар системасини ечиш бир номаълумли биринчи даражали тенгламани ечишга келтирилар экан.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases} \quad (2)$$

Биринчи даражали уч номаълумли учта тенглама системаси берилса, уни, алгебраик қўшиш ва ўрнига қўйиш усуллари билан ечиш мумкин.

1- мисол. *Тенгламалар системасини ечинг:*

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 7, \\ x - 2y + z = 1, \\ 3x + 4y - z = 19 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

системани алгебраик қўшиш усули билан ечиш мақсадида иккинчи ва учинчи тенгламаларни қўшсак,

$$4x + 2y = 20 \text{ ёки } 2x + y = 10.$$

Иккинчи тенгламани 3 га кўпайтириб биринчисига қўшсак,

$$5x - 5y = 10 \text{ ёки } x - y = 2.$$

Натижада биринчи даражали икки номаълумли

$$\begin{cases} 2x + y = 10, \\ x - y = 2 \end{cases}$$

система ҳосил бўлди. Уч номаълумли учта тенглама системасини ечишни икки номаълумли иккита тенглама системасини ечишга келтирдик. Ҳосил бўлган системадаги тенгламаларни қўшсак (яъни алгебраик қўшиш усули билан ечсак)

$$3x = 12; \quad x = 4$$

x нинг қийматини 2 номаълумли тенгламалардан бирига қўйиб, $y = 2$ эканини, x ва y нинг қийматини берилган тенгламалардан бирига қўйиб $z = 1$ экани топилади. Жавоб. $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$ ёки (4, 2, 1) кўринишда ёзилади.

*) Ҳар икки тенгламада, x ни аниқлаб, $x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$ ва $x = \frac{c_2 - b_2 y}{a_2}$ тенгликларнинг ўнг қисмлари тенгланса, $\frac{c_1 - b_1 y}{a_1} = \frac{c_2 - b_2 y}{a_2}$ бир номаълумли тенглама ҳосил бўлади.

Берилган системани ўрнига қўйиш усули билан ечиш учун иккинчи тенгламадан номаълумлардан бири, масалан, z ни қолган номаълумлар орқали ифодаланади:

$$z = 1 - x + 2y$$

z нинг қийматини биринчи ва учинчи тенгламага қўйсак:

$$\begin{cases} 2x + y - 3(1 - x + 2y) = 7 \\ 3x + 4y - (1 - x + 2y) = 19 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} 5x - 5y = 10, \\ 4x + 2y + 20 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 10. \end{cases}$$

Бу системани ҳам ўрнига қўйиш усули билан ечиш учун биринчисидан x ни y орқали ифодалаб ($x = 2 + y$), x нинг бу қийматини иккинчисига қўйсак: $2(2 + y) + y = 10$; $3y = 6$; $y = 2$. У ҳолда:

$$x = 2 + y = 2 + 2 = 4.$$

$$z = 1 - 4 + 2 \cdot 2 = 1.$$

Топилган ечим ($x = 4$, $y = 2$, $z = 1$) тўғри эканини билиш учун x , y ва z нинг қийматлари берилган тенгламаларнинг ҳар бирига қўйиб текшириб кўрилади, яъни: $2 \cdot 4 + 2 - 3 \cdot 1 = 8 + 2 - 3 = 7$; $4 - 2 \cdot 2 + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$; $3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 1 = 12 + 8 - 1 = 19$. Демак, система тўғри ечилган.

2- мисол. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z - u = 4, \\ x - 2y - 3z + 4u = 13, \\ 2x + 3y - 4z + 2u = 3, \\ 4x - y + 5z - 3u = 5 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 & 2 & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & 3 \end{vmatrix}$$

Биринчи ва охири тенгламаларни қўшамиз, сўнгра биринчи тенгламани 2 га кўпайтириб, иккинчиси билан қўшамиз ва ниҳоят охири тенгламани 3 га кўпайтириб, учинчисига қўшсак:

$$\begin{cases} 7x + 7z - 4u = 9, \\ 7x + z + 2u = 21, \\ 14x + 11z - 7u = 18. \end{cases}$$

Тўрт номаълумли тўртта тенглама системаси ўрнига уч номаълумли учта тенглама системаси ҳосил бўлди. 1- мисолда бундай системани ечишни кўрсатган эдик. Бу системани ечсак: $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$, $u = 3$ дан иборат ечимга эга бўламиз. Бу ечимни қисқача (2, -1, 1, 3) каби*) ёзиш мумкин.

Тенгламалар системасини ечинг:

346.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 10, \\ x + 3y - 2z = 9, \\ 4x + y - 3z = 8. \end{cases}$$

347.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

*) Қавс ичида аввал x нинг қиймати, сўнгра y нинг қиймати, сўнгра z , u , ... ларнинг қиймати ёзилади.

348.

$$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$$

349.

$$\begin{cases} 0,1x + 0,2y + 0,3z = 14, \\ 0,4x + 0,5y + 0,6z = 32, \\ 0,7x + 0,8y + 0,9z = 50. \end{cases}$$

350.

$$\begin{cases} x + y + z + u = 6, \\ x + y + z - u = 2, \\ x + y - z + u = 2, \\ x - y + z + u = 4. \end{cases}$$

351.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - u = 5, \\ y - 2z + 3u - x = 0, \\ z - 2u + 3x - y = 0, \\ u - 2x + 3y - z = 5. \end{cases}$$

352.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + t = 2, \\ x + 4y + z - 3t = 5, \\ 3x - 5y + 2z - 2t = 9, \\ 4x - 3y - z - 4t = 2. \end{cases}$$

353.

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2u = 9, \\ 2x + 3z = 16, \\ 4u - 2y = 14, \\ 3x + 4u = 26. \end{cases}$$

354.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5, \\ 2u - 3x + y = 5, \\ 5y - 2z + 3t = 6, \\ 4z - 5t + u = 6, \\ 2t - 3u - 4x = -17. \end{cases}$$

12-15

16-20

20- §. „Сунъий“ усуллар билан ечиладиган тенгламалар системаси

Системани ташкил этган биринчи даражали тенгламалар сонини системадаги номаълумлар сонига тенг бўлса, бундай системани (агар у ечимга эга бўлса) алгебраик қўшиш ёки ўрнига қўйиш усули билан ечиш мумкин. Аммо баъзи бир тенгламалар системасини ечишда «махсус мухокама» юритиш, яъни ўша системани ечишга хос «сунъий» усул қўллаш, системани осонгина ечишга ёрдам беради.

1- мисол. *Тенгламалар системасини ечинг:*

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ y + z + u = 6, \\ z + u + x = 8, \\ u + x + y = 9. \end{cases}$$

Барча тенгламаларни қўшсак: $3(x + y + z + u) = 33$ ёки $x + y + z + u = 11$. Бу тенгламадан юқоридаги тенгламаларни галмага айирсак $u = 1$, $x = 5$, $y = 3$, $z = 2$ экани аниқланади. Жа-воб: (5, 3, 2, 1).

2- мисол. *Тенгламалар системасини ечинг:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -6 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -9 \\ x_3 + x_4 + x_5 = -6 \\ x_4 + x_5 + x_6 = -1 \\ x_5 + x_6 + x_7 = 6 \\ x_6 + x_7 + x_8 = 9 \\ x_7 + x_8 + x_1 = 6 \\ x_8 + x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Барча тенгламаларни қўшиб, 3 га бўлсак: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 0$ аниқланади. Бу тенгламада $x_1 + x_2 + x_3$ ўрнига -6 ни, $x_4 + x_5 + x_6$ ўрнига -1 ни, $x_7 + x_8$ ўрнига $6 - x_1$ ни (7-тенгламадан) қўйсак: $-6 - 1 + 6 - x_1 = 0$; $x_1 = -1$. Охириги тенгламада $x_2 + x_3 + x_4$ ўрнига -9 ни, $x_5 + x_6 + x_7$ ўрнига 6 ни, $x_8 + x_1$ ўрнига $1 - x_2$ ни қўйсак: $-9 + 6 + 1 - x_2 = 0$; $x_2 = -2$ аниқланади. $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ қийматларни биринчи тенгламага қўйиб $x_3 = -3$ ни, сўнгра 2-тенгламадан $x_4 = -4$ ни, 3-тенгламадан $x_5 = 1$ ни, 4-тенгламадан $x_6 = 2$ ни, 5-тенгламадан $x_7 = 3$ ни, 6-тенгламадан эса $x_8 = 4$ ни топамиз. Ҷавоб: $(-1, -2, -3, -4, 1, 2, 3, 4)$.

3- мисол. *Тенгламалар системасини ечинг:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_k = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 + \dots + x_k = 3, \\ \dots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{k-1} = k. \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи тенгламадан навбати билан аввал иккинчи тенгламани, сўнгра учинчи тенгламани ..., k — тенгламани айирсак, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$, $x_4 = -3$; ... $x_k = -(k-1)$ топилади. Топилган қийматларни биринчи тенгламага қўямиз.

$$x_1 - 1 - 2 - 3 - 4 - \dots - (k-1) = 1$$

$$x_1 = 1 + [1 + 2 + 3 + \dots + (k-1)] = 1 + \frac{k(k-1)}{2}^*$$

Ҷавоб: $x_1 = 1 + \frac{k(k-1)}{2}$; $x_2 = -1$; $x_3 = -2$, ..., $x_k = -(k-1)$

* $1 + 2 + 3 + \dots + (k-3) + (k-2) + (k-1)$ йиғиндини топиш учун биринчи қўшилувчи билан охиригиса, иккинчиси билан охиридан иккинчисини, учинчиси билан охиридан учинчисини ва х. к. қўшамиз. У ҳолда: $k + k + k + \dots + k = k \frac{k-1}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ ҳосил бўлади.

$a^2 + ab - bc - c^2 = (a - c)(a + b + c)$ экани эътиборга олинса:
 $(a - c)z = (a - c)(a + b + c),$

тенгликнинг ҳар икки қисмини $a - c \neq 0$ га бўлсак:

$$z = a + b + c,$$

z нинг қиймати (3'') системадаги биринчи тенгламага қўйилса:

$$y = -(ab + ac + bc),$$

z ва y нинг қиймати (3) системадаги тенгламалардан бирига қўйилса:

$$x = abc.$$

Демак, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ бўлса, (3) системанинг ягона ечими $x = a + b + c$, $y = -(ab + ac + bc)$, $x = abc$ мавжуд бўлади.

2-ҳ л. Агар $a = b \neq c$ бўлса, (3) система

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3, \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$

кўринишида бўлиб, система чексиз кўп ечимга эга бўлар ва улар $x = acz - ac(a + c)$; $y = -(a + c)z + a^2 + ac + c^2$; (z — ихтиёрӣ сон), тенгликларидан z га турли қийматлар бериш билан топилаверар эди.

3-ҳ о л. Агарда $a = b = c$ бўлса, (3) система битта

$$x + ay + a^2z = a^3$$

аниқмас тенгламага тенг кучли бўлиб, чексиз кўп ечимларга эга бўлар ва бу ечимларни топиш учун y ва z га ихтиёрӣ қийматлар бериб, $x = a^3 - ay - a^2z$ формуладан топилади.

359. Тенгламалар системасини ечинг ва текширинг:

$$\begin{cases} ax + y + z + t = 1, \\ x + ay + z + t = a, \\ x + y + az + t = a^2, \\ x + y + z + at = a^3. \end{cases}$$

22-§. Ёрдамчи номаълум киритиш билан ечиладиган тенгламалар системаси

Баъзан, тенгламалар системаси соддалаштирилгандан кейин (бош-қача айтганда махраждан қутқарилиб, қавслар очилса ва ухшаш ҳадлар ихчамлангандан кейин) тенгламада номаълумларга нисбатан иккинчи, учинчи даражали ҳадлар ҳосил бўлса, яъни иккинчи, учинчи даражали система ҳосил булиши мумкин бўлган ҳолларда ҳам, берилган тенгламани, ёрдамчи номаълумлар киритиш билан биринчи даражали тенгламалар системасига келтириб осонгина ечиш мумкин.

1-мисол. *Тенгламалар системасини ечинг:*

$$\begin{cases} 2y = 9 - \frac{2y}{x} \\ 3y = 6 - \frac{2y}{x} \end{cases}$$

Ечиш. Тенгламалар умумий махражга келтирилса,

$$\begin{cases} 2xy = 9x - 2y \\ 3xy = 6x - 2y \end{cases}$$

иккинчи даражали система ҳосил бўлади. Аммо берилган система-ни ташкил этувчи ҳар қайси тенглама ҳадларини $y \neq 0$ га бўлсак:

$$\begin{cases} \frac{9}{y} - \frac{2}{x} = 2, \\ \frac{6}{y} - \frac{2}{x} = 3 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системада $\frac{1}{y} = u; \frac{1}{x} = v$ деб белгиласак,

$$\begin{cases} 9u - 2v = 2, \\ 6u - 2v = 3 \end{cases}$$

ёрдамчи тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бу системани ечсак:

$u = -\frac{1}{3}; v = -\frac{5}{2}$. u ва v нинг қийматини ўрнига қўйсак:

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{3}; y = -3; \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}; x = -\frac{2}{5}.$$

Жавоб: $(-\frac{2}{5}; -3)$.

2-мисол. *Тенгламалар системасини ечинг:*

$$\begin{cases} \frac{3}{x+y+z} + \frac{6}{2x-y} + \frac{1}{y-3z} = 1, \\ \frac{6}{x+y+z} + \frac{4}{2x-y} - \frac{1}{y-3z} = 3, \\ \frac{15}{x+y+z} - \frac{2}{2x-y} - \frac{3}{y-3z} = 5. \end{cases}$$

Ечиш. $\frac{1}{x+y+z} = u; \frac{1}{2x-y} = v; \frac{1}{y-3z} = t$ деб белгиласак:

$$\begin{cases} 3u + 6v + t = 1, \\ 6u + 4v - t = 3, \\ 15u - 2v - 3t = 5 \end{cases}$$

ёрдамчи система ҳосил бўлади. Бу системани ечсак: $u = \frac{1}{6}; v = -\frac{1}{4}; t = -1$. Бу қийматлар ўрнига қўйилса,

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{2x-y} = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{y-3z} = -1 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x-y=4, \\ y-3z=-1 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системани ечиб $x=3$, $y=2$, $z=1$ экани аниқланади. *Жавоб:* (3, 2, 1).

Тенгламалар системаси ечилсин:

$$360. \begin{cases} \frac{2a}{x+ay} - \frac{1}{x-ay} = 1, \\ \frac{10a}{x+ay} + \frac{3}{x-ay} = 1. \end{cases} \quad 361. \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7, \\ \frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 11, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = -3. \end{cases}$$

$$362. \begin{cases} 3xy = 4(x+y), \\ 2xz = 3(x+z), \\ 5yz = 12(y+z). \end{cases}$$

23-§. Биринчи даражали тенгламалар системасига доир мисоллар
Тенгламалар системаси ечилсин:

$$363. \begin{cases} \frac{8}{x} + 3y = 8, \\ \frac{12}{x} - 2y = -1. \end{cases} \quad 364. \begin{cases} \frac{8}{x+y-1} - \frac{2}{1+x-y} = 1, \\ \frac{4}{x+y-1} + \frac{8}{1+x-y} = 5. \end{cases}$$

$$365. \begin{cases} 8(x+2y) + 12(x-2y) = 3(x^2 - 4y^2), \\ 28(x+2y) - 24(x-2y) = 5(x^2 - 4y^2). \end{cases}$$

366. $\frac{8x}{4x^2-1}$ касрни $\frac{A}{2x+1}$ ва $\frac{B}{2x-1}$ кўринишидаги иккита каср йиғиндисига ажратинг.

367. A ва B нинг қандай қийматида қуйидаги муносабат аниқ бўлади?

$$\frac{5x}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

Тенгламалар системаси ечилсин:

$$368. \begin{cases} 0,1x + 0,3y - 0,5z = -8, \\ 0,2x - 0,4y + 0,6z = 12, \\ 0,7x - 0,8y + 0,9z = 18. \end{cases} \quad 369. \begin{cases} m^3 + m^2x + my + z = 0, \\ n^3 + n^2x + ny + z = 0, \\ k^3 + k^2x + ky + z = 0. \end{cases}$$

($m > 0$, $n > 0$, $k > 0$ ва $m \neq n \neq k \neq m$).

$$370. \begin{cases} 20(3x + 4z) - 7,5(2x + 3y) = 2(2x + 3y)(3x + 4z), \\ 15(5y + 9z) + 37(3x + 4z) = 2(3x + 4z)(5y + 9z), \\ 111(2x + 3y) - 8(5y + 9z) = 2(5y + 9z)(2x + 3y). \end{cases}$$

$$371. \begin{cases} \frac{2}{x_1 + x_2 - x_3} + \frac{1}{x_2 + x_3 - x_1} + \frac{1}{x_3 + x_1 - x_2} = \frac{52}{21}, \\ \frac{1}{x_2 + x_3 - x_1} + \frac{1}{x_1 + x_2 - x_3} + \frac{1}{x_3 + x_1 - x_2} = \frac{34}{21}, \\ \frac{1}{x_1 + x_2 - x_3} + \frac{1}{x_2 + x_3 - x_1} + \frac{1}{x_3 + x_1 - x_2} = \frac{31}{21}. \end{cases}$$

$$372. \begin{cases} (c + a)y + (a + b)z - (b + c)x = 2a^3, \\ (a + b)z + (b + c)x - (c + a)y = 2b^3, \\ (b + c)x + (c + a)y - (a + b)z = 2c^3, \end{cases} \quad (a \neq -b \neq c \neq -a)$$

$$373. \begin{cases} 20xz + 5xz + 8yz = 5xyz, \\ 15xy + 15xz + 2yz - 5xyz, \\ xy + 2xz + 2yz = xyz. \end{cases}$$

374. A, B va C ning qanday qiymatida

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x^2 - 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

munosabat ayniyat buladi?

375. A, B va C ning qanday qiymatida

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \frac{C}{x + 1}$$

munosabat ayniyat buladi?

Тенгламалар системаси ечилсин:

$$376^*. \begin{cases} x + 2y + z = a(x + y)(y + z), \\ y + 2x + z = b(x + y)(x + z), \\ x + y + 2z = c(x + z)(y + z), \end{cases} \quad (a + b \neq c, a + c \neq b, b + c \neq a).$$

$$377^*. \begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = n, \\ a^2x + b^2y + c^2z = n^2. \end{cases} \quad 378^*. \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m, \\ x + y + mz = m^2. \end{cases}$$

$$379. \begin{cases} \frac{xy}{x + y} = m, \\ \frac{xz}{x + z} = n, \\ \frac{yz}{y + z} = p. \quad (m \cdot n \cdot p \neq 0). \end{cases} \quad 380^*. \begin{cases} kx + y + z = p, \\ x + ky + z = q, \\ x + y + kz = s \end{cases}$$

системасини ечинг ҳамда:

1) $k = -2$ ва $p + q + s = 0$, 2) $k = 1$, $p = q = s$ ҳолларда текширинг.

Тенгламалар системасини ечинг:

$$381^* \begin{cases} \frac{x}{a+m} + \frac{y}{b+m} + \frac{z}{c+m} = 1, \\ \frac{x}{a+n} + \frac{y}{b+n} + \frac{z}{c+n} = 1, \\ \frac{x}{a+k} + \frac{y}{b+k} + \frac{z}{c+k} = 1. \end{cases}$$

($a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$, $m \neq n$, $n \neq k$, $m \neq k$).

$$382. \begin{cases} x + y + z - u = 8, \\ y + z + u - x = 2, \\ z + u + x - y = 4, \\ u + x + y - z = 6. \end{cases}$$

$$383. \begin{cases} x + y + z + u = 8, \\ x + y + z - u = 2, \\ x + y - z + u = 10, \\ x - y + z + u = 0. \end{cases}$$

$$384. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

$$385. \begin{cases} x + y + z - u = k, \\ 3x - ky - z + ku = k^2, \\ 6x + 3k^2y - 2z - k^2u = k^3, \\ 12x - 3k^3y - 4z + 2k^3u = k^4 \\ (k \neq 0) \end{cases}$$

$$386. \begin{cases} x + y + z + u = 2, \\ y + z + u + t = 8, \\ z + u + t + x = 5, \\ u + t + x + y = 10, \\ t + x + y + z = 3. \end{cases}$$

$$387. \begin{cases} ax + by + cz + dt = p, \\ -bx + ay + dz - ct = q, \\ -cx - dy + az + bt = m, \\ -dx + cy - bz + at = n. \end{cases}$$

$$388. \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d}, \\ mx + ny + pz + qu = s, \\ (am + bn + cp + dq \neq 0) \end{cases}$$

$$389. \begin{cases} x : y : z : u : t = 1 : 1,5 : 2 : 2,5 : 3, \\ x - y - z + t + u = 12. \end{cases}$$

$$390. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 = -4, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = -5. \end{cases}$$

$$391. \begin{cases} x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 = 11, \\ x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 + x_6 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + 3x_6 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 13, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$$

$$392. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 1, \\ x_5 + x_6 + x_7 = -6, \\ x_6 + x_7 + x_1 = -2, \\ x_7 + x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

$$393. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \dots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0, \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

$$394. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{98} + x_{99} = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{98} + x_{100} = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{99} + x_{100} = 1, \\ \dots \\ x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_{99} + x_{100} = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{98} + x_{100} = 1. \end{cases}$$

$$395^*. \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{50} = 0, \\ x_1 + 2x_2 + \dots + 50x_{50} = 0, \\ x_1 + 2^2x_2 + \dots + 50^2x_{50} = 0, \\ \dots \\ x_1 + 2^{50}x_2 + \dots + 50^{50}x_{50} = 0. \end{cases}$$

$$396. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 2x_n = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \dots + 2x_n = 4, \\ \dots \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \dots + nx_n = n. \end{cases}$$

$$397. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \dots + x_k = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + \dots + x_k = 3, \\ \dots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + 2x_k = k. \end{cases}$$

$$398. \begin{cases} x_2 + x_3 + \dots + x_n = b_1, \\ x_3 + x_4 + \dots + x_1 = b_2, \\ x_4 + x_5 + \dots + x_2 = b_3, \\ \dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = b_n. \end{cases}$$

$$399. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = a_1, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \dots + nx_1 = a_2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 + \dots + nx_2 = a_3, \\ \dots \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \dots + nx_{n-1} = a_n. \end{cases}$$

400*. n номаълумли n та тенгламалар системаси ечилсин:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2}, \\ \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3}, \\ \dots \\ \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{x_n}{a_n}, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = A. \end{cases}$$

24-§. Биринчи даражали тенгламалар системаси тузиш билан масалалар ечиш

1-масала. 6 та ёзув дафтари билан 3 та умумий дафтар 99 тийин туради. 12 та ёзув дафтарининг баҳоси 2 донга умумий дафтарнинг баҳосидан 2 тийин арзон турса, 1 та ёзув дафтари неча тийин ва 1 та умумий дафтар неча тийин туради?

Ечиш. Ёзув дафтари x тийин, умумий дафтар y тийин турсин. 6 та ёзув дафтари $6x$ тийин, 3 та умумий дафтар $3y$ тийин бўлиб, биргаликда

$$6x + 3y = 99$$

тийин туради.

12 та ёзув дафтари $12x$ тийин, 2 та умумий дафтар $2y$ тийин бўлиб. $12x$ тийин $2y$ тийиндан 2 тийин кам бўлгани учун: $12x + 2 = 2y$.

Шундай қилиб,

$$\begin{cases} 6x + 3y = 99, \\ 12x + 2 = 2y \end{cases}$$

система ҳосил бўлади, бу системани ечиш учун унинг биринчи тенгламасини — 2 га кўпайтириб, иккинчисига қўшсак:

$$-6y + 2 = -198 + 2y \text{ ёки } 8y = 200. y = 25 \text{ (тийин),}$$

y нинг қийматини тенгламалардан бирига (масалан. 2-сига) қўйсак:

$$12x + 2 = 2.25; 12x = 48, x = 4 \text{ (тийин).}$$

Жавоб. 1 та ёзув дафтари 4 тийин, битта умумий дафтар эса 25 тийин туради.

Ечимни текшириш: 6 та ёзув дафтари $6 \cdot 4 = 24$ тийин, 3 та умумий дафтар $3 \cdot 25 = 75$ тийин туради: бу дафтарлар биргаликда $24 + 75 = 99$ тийин туради. 12 та ёзув дафтарининг баҳоси $12 \cdot 4 = 48$ тийин. 2 та умумий дафтар қиймати $2 \cdot 25 = 50$ тийиндан $2 = (50 - 48)$ тийин арзон туради. Демак, масала тўғри ечилган.

401. 6 та от билан 11 та сигирни боқиш учун кунига 120 кг пичан берилади. Агар 7 та отга, 5 та сигирга қараганда 33 кг ортиқ пичан берилса, кунига ҳар бир отга қанча пичан ва ҳар бир сигирга қанча пичан берилади?

2-масала. Агар икки хонали сонни шу рақамлар билан тескари тартибда ёзилган сонга бўлсак, бўлинмада 2, қолдиқда 18 чиқади. Агар рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган сонни рақамлари йиғиндисига бўлсак, бўлинма 3 га тенг бўлиб, қолдиқ қолмайди. Шу икки хонали сон топилсин.

Ечиш. Икки хонали соннинг бирлар хонасидаги рақами y , ўнлар хонасидаги рақами x бўлсин. У ҳолда изланувчи сон $10x + y$, рақамларни тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган сон $10y + x$ бўлади. Масала шартига кўра:

$$\begin{cases} \frac{10x + y}{10y + x} = 2 + \frac{18}{10y + x}, & \text{ёки соддалаштирилса} \\ \frac{10y + x}{x + y} = 3, \end{cases} \begin{cases} 8x - 19y = 18, \\ 7y - 2x = 0. \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бу система ечилса: $x = 7$, $y = 2$.

Жавоб. Изланувчи икки хонали сон: 72.

402. 126 сонини шундай уч бўлакка ажратингки, биринчи бўлакни иккинчисига ёки иккинчисини учинчисига бўлганда бўлинмада 1, қолдиқда 18 қолсин.

3-масала. Бир қанча ишчи бир ишни бир неча кунда тугатди. Улар 3 киши кам бўлишса, 2 кун ортиқ ишлар, 4 киши ортиқ бўлганда эса ишни 2 кун эртароқ тугатар эдилар. Қанча ишчи бўлган ва улар неча кун ишлаган?

Ечиш. x ишчи y кун ишлаган. Бутун иш xy ишчи кунда тугатилган.

Ишчилар $x - 3$ киши бўлса, ишни $(y + 2)$ кунда тугатар ва иш $(x - 3)(y + 2)$ ишчи кунда битар эди, яъни: $(x - 3)(y + 2) = xy$.

Агар ишчилар $x+4$ киши бўлса, ишни $y-2$ кунда тугатар ва иш $(x+4) \cdot (y-2)$ иш кунида битар эди, яъни:

$$(x+4)(y-2) = xy,$$

$$\begin{cases} (x-3)(y+2) = xy, \\ (x+4)(y-2) = xy, \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 4y - 2x = 8. \end{cases}$$

системани ечсак, $x = 24$, $y = 14$.

Жавоб. 24 ишчи 14 кун ишлаган.

403. Бир ишни бажариш учун бир қанча ишчи ёлланди. Агар уларнинг сони 5 та ортиқ бўлса, шу ишни тўрт кун илгари тугатар эдилар. Агар уларнинг сони 10 та кам бўлса, иш 20 кун кейинга сурилар эди. Қанча ишчи ёлланган ва улар неча кун ишлаган?

4-масала. *Йиғиндиси 570 бўлган уч соннинг иккинчиси, биринчиси билан учинчиси орасида ўрта арифметик миқдор. Агар бу сонларнинг каттасини кичигига бўлсак, бўлинмада 11 ҳосил булади, қолдиқда эса иккинчи соннинг ўндан бирига қараганда 1 та ортиқ сон қолади. Шу сонларни топинг.*

Ечиш. Изланувчи сонлар (каттаси) x , $\frac{x+y}{2}$, y (кичиги) бу уч соннинг йиғиндиси:

$$x + \frac{x+y}{2} + y = 570.$$

Масала шартига кўра: $\frac{x}{y} = 11 + \frac{1}{10} \cdot \frac{x+y}{2} + 1$.

Демак,

$$\begin{cases} x + \frac{x+y}{2} + y = 570, \\ \frac{x}{y} = 11 + \frac{1}{10} \cdot \frac{x+y}{2} + 1 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системани соддалаштириб ечамиз.

$$+ \left\{ \begin{array}{l|l} x + y = 380 & 19 \\ 19x - 221y = 20 & -1 \end{array} \right\}$$

$$240y = 7200, y = 30; x = 350; \frac{x+y}{2} = 190.$$

Жавоб. Изланаётган сонлар 30, 190 ва 350.

404. Уч хонали соннинг ўнликлар хонасидаги рақами юзлик ва бирликлар хонасидаги рақами орасида ўрта арифметик сондир. Изланаётган сонни ўзининг рақамлари йиғиндисига бўлиш натижасида чиққан бўлинма 48. Агар шу сондан 198 ни айирсак, шу рақамлар билан, аммо тескари тартибда ёзилган сон чиқади. Шу сонни топинг.

5-масала. 3 м трико ва 5 м швиёт учун 215 сўм тўлаш керак эди. Трико 12%, швиёт эса 8% арзонлаштирилган, 3 м трико билан 4 м швиётга 171 сўм 20 тийин тўланадиган бўлди. Дастлаб 1 м трико неча сўм ва 1 м швиёт неча сўм турган?

Ечиш. Дастлаб 1 м трико x сўм, 1 м швиёт y сўм турган бўлсин. 3 м трико $3x$ сўм. 5 м швиёт $5y$ сўм, биргаликда $3x + 5y = 215$ сўм турар эди.

x сўмнинг 12% и $0,12x$, 1 м триконинг янги нархи $x - 0,12x = 0,88x$ сўм.

y сўмнинг 8% и $0,08y$; 1 м швиётнинг янги нархи $y - 0,08y = 0,92y$ сўм.

Янги нархда 3 м трико $3 \cdot 0,88x$ сўм, 4 м швиёт эса $4 \cdot 0,92y$ сўм, биргаликда

$$3 \cdot 0,88x + 4 \cdot 0,92y = 171,2$$

сўм туради. Натижада

$$\begin{cases} 3x + 5y = 215, \\ 3 \cdot 0,88x + 4 \cdot 0,92y = 171,2 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади, бунда агар иккинчи тенгламани, аввал 100 га кўпайтириб, сўнгра 8 га бўлсак:

$$33x + 46y = 2140$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 215 \\ 33x + 46y = 2140 \end{cases}$$

системани ечиш керак бўлади. Биринчи тенгламадан x нинг қийматини аниқлаб иккинчи тенгламага қўйяйлик, яъни:

$$x = \frac{215 - 5y}{3}; \quad 33 \cdot \frac{215 - 5y}{3} + 46y = 2140;$$

$$11(215 - 5y) + 46y = 2140$$

$$2365 - 55y + 46y = 2140; \quad 9y = 225; \quad y = 25;$$

$$y \text{ ҳолда } x = \frac{215 - 5 \cdot 25}{3} = 30.$$

Жавоб. 1 м триконинг дастлабки баҳоси 30 сўм, 1 м швиётнинг дастлабки баҳоси 25 сўм экан.

405. 20 км узунликдаги бир изли темир йўл участкасига рельс ётқизиш керак. Бу йўлга ётқизиш учун 25 метрли ва 12,5 метрли рельслар бор. Агар 25 метрли рельсларнинг ҳаммаси ётқизилса, яна 12,5 метрли рельсларнинг 50% ини ҳам ётқизиш керак бўлади. Агар 12,5 метрли рельсларнинг ҳаммаси ётқизилса, 25 метрли рельсларнинг $66\frac{2}{3}\%$ ини ҳам ётқизиш керак бўлади. Ҳар қайси хил рельсдан қанчадан борлиги топилсин.

6- масала. Икки идишда суюқлик бор. Биринчи идишдан иккинчисига, иккинчи идишдаги суюқликдан 1,5 баравар ортиқроқ суюқлик қуйилди. Сўнгра биринчи идишга, унда қолган суюқликнинг ярми қадар суюқлик иккинчи идишдан қуйилди ва ниҳоят биринчи идишдан иккинчисига дастлаб унда қанча суюқлик бўлган бўлса, ўшанча суюқлик қуйилди. Натижада ҳар қайси идишдаги суюқлик 76 литрдан бўлди. Дастлаб ҳар қайси идишда қанчадан суюқлик бўлган?

Ечиш. Идишдаги суюқликлар

	1- идишда	2- идишда
Дастлаб	x л	y л
1- марта қуйилгач	$x - 1,5y$	$y + 1,5y = 2,5y$
2- марта қуйилгач	$(x - 1,5y) + 0,5(x - 1,5y) = 1,5(x - 1,5y)$	$2,5y - 0,5(x - 1,5y)$
3- марта қуйилгач	$1,5(x - 1,5y) - y = 1,5x - 3,25y$	$2,5y - 0,5(x - 1,5y) + y = 3,5y - 0,5x + 0,75y = 4,25y - 0,5x$

$$\begin{cases} 1,5x - 3,25y = 76, \\ 4,25y - 0,5x = 76 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 6x - 13y = 304, \\ 17y - 2x = 304 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{38y = 1216; y = 32; x = 120.}$$

Жавоб: биринчи идишда 120 л, иккинчисидан 32 л суюқлик бўлган.

406. Икки идишга сув солинган. Ҳар иккала идишдаги сув баравар бўлсин учун биринчисидан иккинчисига, унинг ўзида қанча сув бўлса, шунча сув солиш, сўнгра иккинчисидан биринчисига унда қанча қолган бўлса, ўшанча солиш ва ниҳоят биринчисидан иккинчисига унда қанча қолган бўлса, ўшанча солиш керак. Шундан сўнг ҳар қайси идишда 64 л сув бўлади. Дастлаб ҳар қайси идишда қанчадан сув бўлган?

7- масала. Уч идишда 18 литр сув бор. Биринчи идишдаги сувнинг ярмини иккинчисига қуйилса, иккинчисидан ҳосил бўлган сувнинг $\frac{1}{3}$ қисмини учинчи идишга қуйилса, учинчида ҳосил бўлган сувнинг $\frac{1}{4}$ қисмини биринчисига қуйилса, учала идишдаги сувлар узаро тенг бўлади. Дастлаб ҳар қайси идишда қанчадан сув бўлган?

Ечиш. Идишлардаги сувлар x л, y л. $(18 - x - y)$ л бўлсин

I идишдагининг ярми II идишга қуйилса, унда $\frac{x}{2}$ л сув қола-

ди, иккинчисида $(y + \frac{x}{2})$ л бўлади. Иккинчисидаги сувнинг $\frac{1}{3}$ қисми III га қуйилса, унда $\frac{2}{3}(y + \frac{x}{2})$ л қолади, III идишда эса $[18 - x - y + \frac{1}{3} \cdot (y + \frac{x}{2})]$ л бўлади. III даги сувнинг $\frac{1}{4}$ қисми I га қуйилса, унда $\frac{3}{4}[18 - x - y + \frac{1}{3}(y + \frac{x}{2})]$ л сув қолади, I идишда эса $\{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}[18 - x - y + \frac{1}{3} \cdot (y + \frac{x}{2})]\}$ л бўлади. Масала шартига кўра:

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{4} [18 - x - y + \frac{1}{3}(y + \frac{x}{2})] = \frac{2}{3}(y + \frac{x}{2}) = \frac{3}{4} [18 - x - y + \frac{1}{3}(y + \frac{x}{2})].$$

Бундан қуйидаги системани тузиш мумкин.

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} [18 - x - y + \frac{1}{3}(y + \frac{x}{2})] = \frac{2}{3}(y + \frac{x}{2}), \\ \frac{3}{4} [18 - x - y + \frac{1}{3}(y + \frac{x}{2})] = \frac{2}{3}(y + \frac{x}{2}). \end{cases}$$

Соддалаштирилса:

$$\begin{cases} 20y + x = 108, \\ 28y + 23x = 324. \end{cases}$$

Бу система ечилса: $x = 8$, $y = 5$; $18 - (8 + 5) = 5$.

Жавоб. I идишда 8 л, II ва III идишда 5 л дан сув бўлган.

407. 49 с нини шундай уч бўлакка бўлингки, агар биринчисига қолган иккала бўлак йиғиндисининг учдан бирини, иккинчисига қолган икки бўлак йиғиндисининг тўртдан бирини, учинчисига қолган икки бўлак йиғиндисининг бешдан бирини қўшсак, ўзаро тенг сонлар ҳосил бўлсин.

8-масала. 950 ва 800 пробали олтин ва миснинг иккита қуймасини 2 кг лик олтин билан бирга эритиб, 906 пробали 25 кг қуйма ҳосил қилинди. Дастлабки икки қуйманинг оғирликлари неча кг дан?

Ечиш. P қуйма оғирлиги, p эса шу қуймадаги олтиннинг оғирлиги бўлса, қуйма пр-таси $t = \frac{p}{P}$ экани маълум.

Биринчи қуймадан x кг, иккинчисидан y кг олинган бўлсин.

Эритилгандан сўнг $x + y + 2 = 25$ кг ли қуйма ҳосил бўлади. x кг ли 1-қуймада $x \cdot 0,950$ кг, y кг ли 2-қуймада $y \cdot 0,800$ кг, 25 кг ли эритмада эса $25 \cdot 0,906$ кг олтин бор, 1, 2-қуймалардаги олтин билан 2 кг ли олтин қўшилган эритмада $25 \cdot 0,906$ кг олтин ҳосил бўлади, яъни:

$$x \cdot 0,950 + y \cdot 0,800 + 2 = 25 \cdot 0,906.$$

$$\begin{cases} x + y + 2 = 25 \\ x \cdot 0,950 + y \cdot 0,800 + 2 = 25 \cdot 0,906 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системани ечиб $x = 15$ кг, $y = 8$ кг эканини топамиз.

Жавоб. Дастлабки икки қўйманинг оғирликлари 15 кг ва 8 кг.

408*. Бир бўлак кумуш билан мис қўймасини 3 кг теза кумуш билан эритилса, 900 пробали қўйма, 900 пробали 2 кг қўйма билан эритилса; 840 пробали қўйма ҳосил бўлиши маълум бўлса, шу қўйманинг оғирлигини ва пробасини аниқланг.

9-масала. *Олтин билан кумуш қотишмасининг иккита қўймаси бор. Улардан бирида олтин билан кумуш 2:3 нисбатда, иккинчисида эса 3:7 нисбатда. Олтин билан кумуш 5:11 нисбатда булган 8 кг ли қўйма ҳосил қилиш учун бу икки қўйманинг ҳар биридан неча кг дан олиш керак?*

Ечиш. Биринчи қўймадан x кг, иккинчисидан y кг олиш керак бўлсин. У ҳолда: $x + y = 8$.

Биринчи қўйма— x кг нинг $\frac{2}{5}x$ кг ми олтин, $\frac{3}{5}x$ кг ми кумуш, иккинчи қўйма— y кг нинг $\frac{3}{10}y$ кг ми олтин, $\frac{7}{10}y$ кг ми кумуш бўлиб, ҳосил қилинадиган $(x + y)$ кг ли қўймада $(\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y)$ кг олтин, $(\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y)$ кг кумуш бўлади.

Масала шартига кўра қўйидаги тенгламани ёза оламиз:

$$\frac{\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y}{\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y} = \frac{5}{11}.$$

Тенгламанинг чап қисмидаги касрнинг сурат ва махражини 10 га кўпайтирсак: $\frac{4x + 3y}{6x + 7y} = \frac{5}{11}$. Бундан: $44x + 33y = 30x + 35y$; ёки $7x - y = 0$. У ҳолда

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ 7x - y = 0 \end{cases}$$

* Бу масалани қўйидаги усул (II усул) билан ҳам ечиш мумкин. Янги қўймада x кг олтин, $(8 - x)$ кг кумуш бор. У ҳолда $\frac{x}{8 - x} = \frac{5}{11}$; $x = 2,5$; янги қўймада 2,5 кг олтин ва $8 - x = 5,5$ кг кумуш бор. Янги қўймада, I қўймадан y кг, II дан $(8 - y)$ кг олинган бўлсин. I қўймадаги олтин миқдори $\frac{2}{5}y$ кг, кумуш миқдори $\frac{3}{5}y$ кг, II қўймадаги олтин миқдори $\frac{3}{10} \cdot (8 - y)$ кг, кумуш миқдори $\frac{7}{10} \cdot (8 - y)$ кг. У ҳолда $2/5y + \frac{3}{10} \cdot (8 - y) = 2,5$ тенгламани ечсак, $y = 1$ кг, $8 - y = 7$ кг. $\{ \frac{2}{5}y + \frac{3}{10} \cdot (8 - y) = 2,5$ тенглама ўрнига $3/5y + \frac{7}{10}(8 - y) = 5,5$ тенгламани ечсак ҳам, $y = 1$; $8 - y = 7$ кг экани аниқланар эди.

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бу системани ечилса: $x = 1$, $y = 7$.

Жавоб. Биринчи қуймадан 1 кг, иккинчисидан 7 кг олиш керак.*

409. Икки хил металл бир қуймада 1:2 нисбатда, иккинчисида эса 2:3 нисбатда қатнашади; янги қуймада бу металллар 17:27 нисбатда бўлсин учун ҳар қайси қуймадан қанчадан бўлак олиниши керак?

10-масала. *Икки жисм айлана бўйлаб бир томонга ҳаракат қилиб, ҳар 56 минутда бири иккинчиси билан учрашиб ўтади. Агар улар шу тезликлари билан қарама-қарши томонга ҳаракат қилса, ҳар 8 минутда учрашар эди. Ундан ташқари қарама-қарши томонга ҳаракат қилганда яқинлашайтган жисмлар орасидаги масофа (айлана бўйлаб) 24 секундда 40 м дан 26 м гача камайиши маълум.*

Ҳар қайси жисм минутига неча метр йўл босади ва айлананинг узунлиги қанча?

Ечиш. Биринчи жисм тезлиги минутига x м, иккинчисининг тезлиги минутига y м. $x > y$ бўлсин.

Жисмлар бир томонга ҳаракат қилса, учрашгунча $56x$ м ва $56y$ м йўл юради. $56x - 56y$ — айлана узунлиги бўлади (тез юрадиган жисм орқадагисини қувиб етиши учун 1 айлана ортиқ айланиши керак) жисмлар қарама-қарши ҳаракат қилса, $8x$ м ва $8y$ м йўл юриб иккаласи биргаликда $8x + 8y$ — айлана узунлиги қадар йўл юради, яъни:

$$56x - 56y = 8x + 8y.$$

24 секундда жисмлар орасидаги масофа 40 м — 26 м = 14 м қисқарди. Бу 24 секундда жисмлар учрашмайди; шунинг учун масофанинг камайиши жисмларнинг 24 секундда ($\frac{2}{5}$ минутда) ўтган йўллари ($\frac{2}{5}x$ ва $\frac{2}{5}y$) йиғиндисига тенг, яъни: $\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y = 14$.

$$\text{Қуйидаги } \begin{cases} 56x - 56y = 8x + 8y \\ \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y = 14 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ x + y = 35 \end{cases}$$

тенгламалар системасини тузамиз ва уни ечсак:

$$x = 20 \text{ м/мин}; y = 15 \text{ м/мин}.$$

$$8 \cdot 20 + 8 \cdot 15 = 160 + 120 = 280 \text{ (м)}.$$

Жавоб. 20 м/мин, 15 м/мин, 280 м.

410. Узунлиги 100 м бўлган айланада икки жисм бир томонга қараб ҳаракат қилади ва ҳар 25 секундда учрашади. Қарама-қарши томонга ҳаракат қилса, ҳар 5 секундда учрашади. Ҳар қайси жисмнинг тезлигини топинг.

11-масала. *Моторли қайиқ биринчи марта оқим бўйича 60 км, оқимга қарши 30 км юриш учун 7 соат сарф қилди. Иккинчи марта оқим бўйича 30 км ва оқимга қарши 20 км юриш учун 4 соат сарф қилди. Моторли қайиқнинг турғун сувдаги ўртача тезлиги ва оқимнинг тезлиги топилсин.*

Ечиш. Қайиқнинг турғун сувдаги ўртача тезлиги соатига x км, оқим тезлиги y км/соат. Қайиқнинг қим бўйича тезлиги $(x + y)$ км/соат, оқимга қарши тезлиги $(x - y)$ км/соат. Қайиқ оқим бўйича 60 км ни $\frac{60}{x+y}$ соатда, оқимга қарши 30 км ни $\frac{30}{x-y}$ соатда юради. Қайиқ оқим бўйича 60 км, оқимга қарши 30 км юриш учун

$$\frac{60}{x+y} + \frac{30}{x-y} = 7$$

соат сарф қилган. Қайиқ оқим бўйича 30 км ни $\frac{30}{x+y}$ соатда, оқимга қарши 20 км ни $\frac{20}{x-y}$ соатда юради. Қайиқ оқим бўйича 30 км, оқимга қарши 20 км юриш учун

$$\frac{30}{x+y} + \frac{20}{x-y} = 4$$

соат сарф қилган. Бу икки тенгламадан қуйидаги система ҳосил бўлади.

$$\begin{cases} \frac{60}{x+y} + \frac{30}{x-y} = 7, \\ \frac{30}{x+y} + \frac{20}{x-y} = 4. \end{cases}$$

Бунда $\frac{1}{x+y} = u$; $\frac{1}{x-y} = v$ деб белгиласак:

$$\begin{cases} 60u + 30v = 7, & -1 & 2 \\ 30u + 20v = 4 & 2 & -3 \end{cases}$$

$$10v = 1, \quad v = \frac{1}{10}; \quad 30u = 2; \quad u = \frac{1}{15}.$$

u билан v нинг қийматларини ўрнига қўйсак:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз ва уни ечсак: $x = 12,5$; $y = 2,5$.

Жавоб. Қайиқнинг турғун сувдаги тезлиги соатига 12,5 км, оқим тезлиги соатига 2,5 км.

411. Бир киши моторли қайиқда A шаҳардан B шаҳарга 8 соатда бориб келди. Бу шаҳарлар орасидаги масофа 45 км. Бу киши оқимга қарши 3 км масофани қанча вақтда ўтган бўлса, оқим томонга 5 км масофани шунча вақтда ўтиши мумкин. Қайиқнинг турғун сувдаги тезлиги ҳамда дарё оқимининг тезлиги топилсин.

12-масала. Резервуарга икки жўмрак орқали сув оқиб киради. Агар ҳар икки жўмрак орқали 10 минут сув оқиб киргач, иккинчи жўмрак ёпиб қўйилса, резервуар яна 3 минутдан сўнг тўлади. Агар ҳар икки жўмрак орқали 8 минут сув оқиб киргач, бирикчи жўмрак ёпиб қўйилса, резервуар яна 12 минутдан кейин тўлади.

Ҳар қайси жўмрак алоҳида-алоҳида резервуарни неча минутда тўлдиради?

Ечиш. Биринчи жўмракнинг ёлғиз ўзи резервуарни x минутда, иккинчи жўмракнинг ёлғиз ўзи y минутда тўлдирсин. Биринчи жўмрак 1 минутда резервуарнинг $\frac{1}{x}$ қисмини, иккинчиси $\frac{1}{y}$ қисмини тўлдиради: Иккала жўмрак биргаликда очиб қўйилса, бир минутда резервуарнинг $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ қисмини, 10 минутда эса $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \cdot 10$ қисмини тўлдиради. Иккала жўмракдан 10 минутда идишга қўйилган сув билан биринчи жўмракдан 3 минутда қўйилган сув бўш идишни тўлдиргани учун

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 10 + \frac{3}{x} = 1$$

тенгламани ёза оламиз.

Иккала жўмрак биргаликда, 8 минутда идишнинг $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \cdot 8$ қисмини, иккинчи жўмракнинг ёлғиз ўзи эса 12 минутда идишнинг $\frac{12}{y}$ қисмини тўлдиради. Иккала жўмракдан 8 минут давомида идишга қўйилган сув билан иккинчи жўмракдан 12 минут давомида қўйилган сув идишни тўлдиргани учун $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \cdot 8 + \frac{12}{y} = 1$ тенгламани ёза оламиз. Натижада қуйидаги тенгламалар системаси ҳосил бўлади.

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 10 + \frac{3}{x} = 1, \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 8 + \frac{12}{y} = 1. \end{cases}$$

Буни соддалаштирсак:

$$\begin{cases} \frac{13}{x} + \frac{10}{y} = 1, \\ \frac{20}{y} + \frac{8}{x} = 1. \end{cases}$$

$\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$ деб белгилаб ечамиз:

$$\begin{cases} 13u + 10v = 1 & | \quad 2 \\ 20v + 8u = 1 & | \quad -1 \end{cases}$$

$$18u = 1; \quad u = \frac{1}{18}, \quad v = \frac{1}{36}$$

у ҳолда $x = 18$, $y = 36$.

Жавоб. Резервуарни I жўмракнинг ёлғиз ўзи 18 соатда, II жўмракнинг ёлғиз ўзи 36 соатда тўлдиради.

412. Пароходга кўтарма кран билан юк ортिलाди. Олдин бир хил қувватли 4 та кран ишлади. 2 соат ўтгандан сўнг, уларга яна кучи камроқ иккита кўтарма кран қўшилди ва шундан кейин юк ортиш 3 соатда тамом бўлди. Агар ҳамма кран бир вақтда ишга туширилса, юк ортиш 4,5 соатда тугар эди. Шу ишни битта кучли кран неча соатда ва кучи камроқ битта кран неча соатда тамомлайди?

413. Қурилиш учун 8 соат давомида станциядан қурилиш материаллари ташиш керак эди. Бу материалларни ташиш учун олдин 30 та уч тоннали машина юборилди. Бу машиналар 2 соат ишлагандан кейин яна 9 та 5 тоннали машина юборилди, машиналар бирга ишлаб, ишни ўз вақтида тамомлашди. Агар олдин 5 тоннали машиналар юборилиб, 2 соатдан кейин уч тоннали машиналар юборилганда, кўрсатилган муддатда материалнинг фақат $\frac{13}{14}$ қисми ташилар эди. Бу материални битта уч тоннали машина неча соатда ва битта 5 тоннали машина неча соатда ташиб бўлади?

МАШҚЛАР

414. 6 кг қуруқ ўтин билан 8 кг кокс ёқилса, 74800 килокалория иссиқлик беради; агар 20 кг қуруқ ўтин билан 7 кг кокс ёқилса, 109700 килокалория иссиқлик беради. 1 кг қуруқ ўтин ва 1 кг кокс алоҳида-алоҳида ёқилганда неча килокалория иссиқлик беради?

415. 15 кг торф билан 7 кг антрацит* ёнганда 131000 килокалория иссиқлик беради; 25 кг торф билан 5 кг антрацит ёнганда эса 165000 килокалория иссиқлик беради. 1 кг торф қанча ва 1 кг антрацит қанча килокалория иссиқлик беради?

416. Икки идишда ҳар хил температурали сув бор. Агар биринчи идишдан 12 л ва иккинчисидан 8 л сув олиб аралаштирилса, аралашманинг температураси 71°C бўлади. Агар биринчи идишдан 10 л, иккинчисидан 5 л олиб аралаштирилса, ҳосил бўлган аралашманинг температураси 70°C бўлади. Ҳар қайси идишдаги сувнинг температурасини аниқланг. (Бунда иссиқлик исрофи ҳисобга олинмайди.)

417. Завод 64 сўмлик ва 55 сўмлик икки хил радиоприёмниклардан I марта 4770 сўмлик, II марта 4145 сўмлик икки партиясини жўнатди. II партиядо арзон приёмниклар 2 марта кам бўлиб, приёмникларнинг ҳаммаси олдинги партиядадан 13 та кам эди. Завод ҳар икки партиядо нечта приёмник жўнатган?

418. Икки бригада 40 иш кунида 22400 м³ ёғоч тайёрламоқчи эди. 10 кун бирга ишлагандан кейин биринчи бригаданинг иш унуми 30% ортди, иккинчи бригаданинг иш унуми 16% ошди. Шу сабабдан ишнинг қолганини 24 иш кунида бажаришди. Ҳар бир бригада бир иш кунида неча куб метр ёғоч тайёрламоқчи эди?

419. А ва В қишлоқлари орасидаги масофа тош йўл бўйича 19 км. А қишлоқидан В қишлоғига велосипедчи жўнади. 15 минут ўтгач, унинг кетидан автомобиллист жўнади ва 10 минутдан сўнг велосипедчини қувиб ўтиб кетди; В га бориб тўхтамасдан орқасига қайтди ва А дан чиққанидан 50 минут ўтгач яна велосипедчини учратди. Автомобилистнинг ва велосипедчининг тезлиги топилсин.

* Антрацит—тошқўмирнинг энг яхши нави.

420. А қишлоғидан В қишлоғигача бўлган 11,5 км масофанинг бир қисми Баландлик, иккинчи қисми текис, учинчи қисми пастиликка тушади. Пиёда киши А дан В га 2 соат-у 54 минутда келади. Қайтишда эса 3 соат-у 6 минут сарф қилади. Пиёданнинг тезлиги: баландликка қараб соатига 3 км, текис йўлда соатига 4 км, пастиликка қараб соатига 5 км. А дан В гача баландлик, текис ва пастилик йўл неча километрдан?

421. Бир ишчи белгиланган муддатда бир қанча бир хил деталлар тайёрлади. Агар у ҳар кун 8 та ортиқ деталь тайёрласа, бу ишни муддатидан 5 кун олдин تامомлар эди, агар ҳар кун 4 та кам деталь тайёрласа, ишни муддатидан $3\frac{1}{3}$ кун кейин битирар эди. Ишчи қанча деталь тайёрлаган ва бунга қанча вақт кетган?

422. Велосипедчи А дан В га маълум тезлик билан мўлжалланган вақтда етиб келди. Агар у тезлигини соатига 3 км оширса, мўлжалдан 1 соат олдин етиб келар эди. Агар соатига 2 км дан кам юрса, у 1 соат кечикар эди. А ва В орасидаги масофа, велосипедчининг тезлиги, юрган вақти топилсин.

423. Ораларидаги масофа 850 км бўлган икки шаҳардан кетган поезд бир-бирига қараб йўлга чиқди. Агар поездлар бир вақтда жўнаб кетган бўлса, 10 соатдан кейин учрашади. Агар иккинчи поезд биринчидан 4 соат 15 минут олдин йўлга чиқса, биринчи поезд йўлга чиққандан 8 соат кейин учрашади. Ҳар қайси поезднинг тезлиги топилсин.

424. M_1 ва M_2 жисм $AB = 60$ м масофада бир-бирига қараб текис ҳаракат қилмоқда. M_1 жисм А дан, M_2 жисм В дан чиққанига қараганда 15 секунд илгари чиқди. Ҳар қайси жисм йўлнинг қарама-қарши охириларига бориб, тўхтамай олдинги тезлиги билан орқага қайтади. Биринчи учрашув M_1 жисм йўлга чиққандан 21 секунд ўтгач, иккинчи учрашув эса 45 секунд ўтгач юз берди. Ҳар қайси жисмнинг тезлиги топилсин.

425. Қўйидаги хоссага эга бўлган иккита икки хонали сон топилсин: агар изланаётган сонлардан каттасининг ўнг томонига 0 қўйиб, ундан кейин кичик сонни ёзсак, кичигининг ўнг томонига катта сонни ёзиб, сўнгра 0 ёзсак, шу йўл билан ҳосил бўлган иккита беш хонали соннинг биринчисини иккинчисига бўлсак, бўлилмада 2, қолдиқда 590 чиқади. Ундан ташқари изланаётган сонлардан каттасининг икки баравари билан кичигининг уч бараваридан тузилган сонларнинг йиғиндис 72 га тенг эканлиги маълум.

426. Тўртта соннинг йиғиндис 160. Агар биринчи сонни иккинчисига бўлсак, бўлилмада 2 ва қолдиқда 18 чиқади. Иккинчи сонни учинчи сонга бўлсак, бўлилмада 3 ва қолдиқда 5 чиқади. Учинчи сонни тўртинчисига бўлганда эса бўлилмада 1, қолдиқда 5 чиқади. Шу тўрт сон топилсин.

427*. Уч идишга сув қўйилган. Агар биринчи идишдаги сувнинг $\frac{1}{3}$ қисмини иккинчи идишга қўйиб, сўнгра иккинчи идишдаги сувнинг $\frac{1}{4}$ қисмини учинчи идишга қўйиб, ниҳоят, учинчи идишдан $\frac{1}{10}$ қисмини биринчи идишга қўйилса, ҳар бир идишда 9 литрдан сув бўлади. Ҳар қайси идишда қанча сув бор?

428. Уч хил вино бор. Агар винолар 3 : 2 : 3 нисбатда аралаштирилса, аралашманинг гектолитри 50 сўмдан туради; агар 2 : 3 : 5 ёки 5 : 4 : 11 нисбатда аралаштирилса, аралашманинг ҳар гектолитри 47 сўмдан туради. Ҳар қайси хил винонинг 1 гектолитри қанчадан туради?

429. А шаҳардан В шаҳарга борадиган йўл олдин 3 километргача баландлашиб боради, сўнгра 5 км текис йўл келади, ундан кейин 6 километр қияланиб боради. Чопар А дан В га қараб йўлга чиқиб, ярим йўлга боргандан кейин бир пакетни унутганини пайқаб қолди. У орқасига қайтди ва А дан чиққанидан 3 соат-у 36 минут кейин А га қайтиб келди. Чопар А дан иккинчи марта чиқиб, В гача бўлган бутун йўлни 3-соат-у 27 минутда ўтди. Қайтишда эса А гача бўлган масофани 3 соат-у 51 минутда ўтди. Агар чопар баландликка бир хил тезликда кўтарилган, текис йўлда бир хил тезлик билан юрган ва қия йўлда

ҳам бир хил тезлик билан ҳаракат қилган бўлса, у баландликка кўтарилишда қандай тезлик билан, текис йўлда қандай тезлик билан ва қия йўлда қандай тезлик билан юрган?

25-§. Биринчи даражали бир номаълумли тенгсизликлар системаси

$$\begin{cases} Ax + B > 0, \\ Cx + D > 0 \end{cases}$$

системанинг ечими деб, x нинг ҳар иккала тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматларига (агар бундай қийматлар мавжуд бўлса) айтилади.

1-мисол.
$$\begin{cases} 3x + 23 > 3 - x \\ x - 4 > 3x - 12. \end{cases}$$

Системанинг биринчи тенгсизлигини ечамиз:

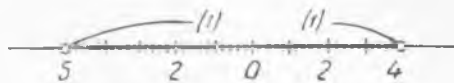
$$3x + x > 3 - 23; 4x > -20; x > -5.$$

Энди иккинчи тенгсизликни ечамиз: $-4 + 12 > 3x - x; 8 > 2x, x < 4.$

Ҳар икки тенгсизликни—5 дан катта, 4 дан кичик барча сонлар қаноатлантиради.

Жавоб: $-5 < x < 4.$

Ечимнинг сонлар ўқидаги тасвири 1-чизмада кўрсатилган.



1-чизма.

2-мисол.
$$\begin{cases} 5x - 1 > 3x + 7 \\ 3 - x > 5 - 2x \end{cases}$$

Ечиш.
$$\begin{cases} 1) 5x - 3x > 7 + 1; 2x > 8, x > 4, \\ 2) -x + 2x > 5 - 3; x > 2. \end{cases}$$

Жавоб: $x > 4.$



2-чизма.

Ечимнинг сонлар ўқидаги тасвири 2-чизмада кўрсатилган.

3-мисол.
$$\begin{cases} 7x - 4 < 6x - 1 \\ 3 - 4x < -5x + 2. \end{cases}$$

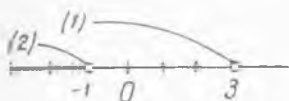
Ечиш.
$$\begin{cases} 1) 7x - 6x < -1 + 4, x < 3 \\ 2) -4x + 5x < 2 - 3, x < -1 \end{cases}$$

Жавоб: $x < -1.$

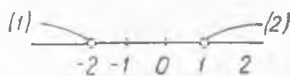
Ечимнинг сон ўқидаги тасвири 3-чизмада кўрсатилган.

$$4\text{-мисол. } \begin{cases} 7x - 9 < 6x - 11 \\ 1 - 4x > 2 - 5x. \end{cases}$$

$$\text{Ечиш. } \begin{cases} 1) 7x - 6x < -11 + 9; x < -2 \\ 2) -4x + 5x > 2 - 1; x > 1 \end{cases}$$



3-чизма.



4-чизма.

Жавоб. Тенгсизликлар системаси ечимга эга эмас.

Ҳақиқатан ҳам биринчи тенгсизликни -2 дан кичик сонлар, иккинчисини эса 1 дан катта сонлар қаноатлантиради. Ҳар икки тенгсизликни ҳам қаноатлантирадиган сонлар йўқ* (4-чизмага қаранг). Тенгсизликларни ечинг:

$$430. \begin{cases} 1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} - 3x + 1 < 0,5; \\ 7 - 2x < 2x + 1; \end{array} \right. & 2) \left\{ \begin{array}{l} 2,4 - x < 3x + \frac{2}{5}, \\ 3,1x < 3x + 0,8. \end{array} \right. \end{cases}$$

$$431. \begin{cases} 1) \left\{ \begin{array}{l} 0,3 - 3x > 0,1x - 1; \\ 2x - 1 < 0,3 - x, \end{array} \right. & 2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x}{2} - 1 > x + \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} - 2x > \frac{1}{3} + x. \end{array} \right. \end{cases}$$

$$5\text{-мисол. } \frac{2x-1}{5x+1} > 0.$$

Ечиш. Каср мусбат бўлиши учун унинг сурат ва махражи бир хил ишорали бўлиши керак.

$$\text{Бундан: а) } \begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ 5x + 1 > 0 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 1 < 0, \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси ҳосил бўлади. Бу системаларни ечамиз.

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - 1 > 0, \text{ бундан } x > 0,5 \\ 5x + 1 > 0, \text{ бундан } x > -0,2 \end{cases} \text{ системанинг ечими } x > 0,5.$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - 1 < 0, \text{ бундан } x < 0,5 \\ 5x + 1 < 0, \text{ бундан } x < -0,2 \end{cases} \text{ системанинг ечими } x < -0,2.$$

Жавоб: $x < -0,2$ ва $x > 0,5$.

$$6\text{-мисол. } \frac{2-7x}{3x+1} < 1.$$

* Бундай ҳолда берилган тенгсизликлар системасини биргаликда бўлмаган система деб аталади.

Ечиш. Тенгсизликнинг ҳар икки қисмини ишораси (мусбат ёки манфийлиги) маълум бўлмаган ифода $3x + 1$ га кўпайтириш мумкин эмас, шунинг учун қуйидагича ечамиз.

$$\frac{2-7x}{3x+1} - 1 < 0, \quad \frac{2-7x-3x-1}{3x+1} < 0, \quad \frac{1-10x}{3x+1} < 0.$$

Демак, касрнинг сурат ва махражидаги ифодалар ҳар хил ишорали бўлиши керак, яъни:

$$\text{а) } \begin{cases} 1-10x > 0; & \text{ва б) } 1-10x < 0 \\ 3x+1 < 0 & 3x+1 > 0 \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси ҳосил бўлади. Бу тенгсизликлар системаларини ечамиз:

$$\text{а) } \begin{cases} 1-10x > 0; & x < 0,1 \\ 3x+1 < 0; & x < -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{бундан: } x < -\frac{1}{3}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} 1-10x < 0; & x > 0,1 \\ 3x+1 > 0; & x > -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{бундан: } x > 0,1$$

Жавоб: $x < -\frac{1}{3}$ ва $x > 0,1$.

$$432. 1) \left(\frac{x-1}{2} + \frac{4-3x}{3} \right) : \left(\frac{5x-2}{4} + 1 \right) > -2;$$

$$2) \frac{\frac{2x-1}{5} - \frac{5-x}{4}}{x:3} < \frac{1}{2}$$

$$433. 1) \frac{3x-5}{2x+4} < 0 \quad 2) \frac{2x+4}{3-5x} < 1$$

$$434. 1) (2x-3)(4-x) > 0; \quad 2) (x+0,1)(1-2x) < 0;$$

$$3) x(x-4) < (x-4).$$

$$435. \frac{5x-1}{2x-3} > 3 \quad \text{тенгсизликнинг бутун сонлардаги ечимлари топилсин.}$$

436. Қуйидаги тенгсизликларнинг бутун сонлардаги ечимлари топилсин:

$$1) \frac{5x-4}{7-5x} > 0; \quad 2) \frac{3x-1}{7-2x} > 0; \quad 3) \frac{3}{x-1} > 1.$$

Биринчи даражали бир номаълумли тенгсизликлар системаси иккитадан ортиқ (биринчи даражали) тенгсизликдан тузилган бўлиши мумкин. Бундай система масалан,

$$\begin{cases} Ax + B > 0, \\ Cx + D > 0, \\ Ex + F > 0 \end{cases}$$

кўринишда бўлади.

Бу системанинг ечими деб, x нинг системада қатнашувчи барча тенгсизликларни қаноатлантирадиган қийматлари тупламига айтилади.

$$7\text{-мисол. } \begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 9 - 3x < 0, \\ 3x - 18 < 0. \end{cases}$$

Ечиш. 1-тенгсизликнинг ечими 2 дан катта барча сонлардан, 2-тенгсизликнинг ечими 3 дан катта сонлардан, 3-нинг ечими 6 дан кичик сонлардан иборат бўлгани учун берилган системанинг ечими $3 < x < 6$ бўлади.

$$8\text{-мисол. } \begin{cases} 3(x - 1) < 2(2 - x), \\ 4 - 3x > 3(x + 1), \\ 7x < 6(x - 1), \\ 0,1x < 9 + 1,1x. \end{cases}$$

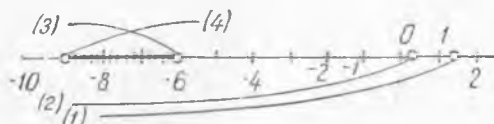
Ечиш: 1) $3(x - 1) < 2(2 - x)$; $3x - 3 < 4 - 2x$; $3x + 2x < 4 + 3$;
 $5x < 7$, $x < 1,4$;

2) $4 - 3x > 3(x + 1)$; $6x < 1$; $x < \frac{1}{6}$;

3) $7x < 6(x - 1)$; $7x < 6x - 6$; $x < -6$;

4) $0,1x < 9 + 1,1x$; $x > -9$.

Тенгсизликлар системасининг ечими: $-9 < x < -6$ (5-чизмага қаранг).



5-чизма.

$$9\text{-мисол. } \begin{cases} 7x - 1 > 20(3 - x), \\ 4 - x < 3(x + 2), \\ 2x + 3 < 7 - x. \end{cases}$$

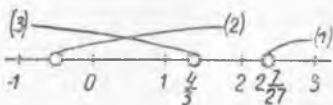
Ечиш. 1) $7x - 1 > 20(3 - x)$; $7x - 1 > 60 - 20x$; $27x > 61$;

$$x > \frac{61}{27} = 2\frac{7}{27}$$

2) $4 - x < 3(x + 2)$; $4 - x < 3x + 6$;
 $4x > -2$,

$$x > -\frac{1}{2}$$

3) $2x + 3 < 7 - x$; $3x < 4$, $x < \frac{4}{3}$.



6-чизма.

$2\frac{7}{27}$ дан катта бўлган сонларнинг $\frac{4}{3}$ дан кичик бўлиши мумкин эмас (6-чизма). Демак, берилган система ечимга эга эмас.

Тенгсизликлар системаларини ечинг:

$$437. \quad 1) \begin{cases} 2x - 1 > 0,8 + 1,1x, \\ 2 - x < 2x - 1, \\ 7x - 1 < 34; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0,2x - 3 < 0,2 - 1,4x, \\ 4 - 5x > 0,6x + 1,2, \\ 3x + 4 < 4(x + 2). \end{cases}$$

$$438. \quad 1) \begin{cases} 5x - 4 > 5 - 4x, \\ 7 - 3x > 7x - 3, \\ 4x + 7 < 1 - 4x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2(x - 1) < 7; \\ 4x > 3(1 - x); \\ 1 - x > 2x - 11, \\ 3 < 2(x - 1). \end{cases}$$

IV боб

ИРРАЦИОНАЛ АЛГЕБРАИК ИФОДАЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

26-§. Соннинг квадрат илдизи, куб илдиз. Арифметик илдиз.

1-таъриф. *Мусбат a сонининг квадрат илдизи деб, квадрати a га тенг бўлган сонга айтилади ва \sqrt{a} каби белгиланади. Мусбат соннинг квадрат илдизи икки хил ишорали (мусбат ва манфий) сон бўлади.*

Масалан: $\sqrt{9} = \pm 3$, чунки $(\pm 3)^2 = 9$; $\sqrt{0,04} = \pm 0,2$, чунки $(\pm 0,2)^2 = 0,04$. Манфий соннинг квадрат илдизи мавжуд эмас.

2-таъриф. *Манфиймас $a(a \geq 0)$ сонининг манфий бўлмаган квадрат илдизи шу соннинг арифметик илдизи дейилади.*

Масалан: $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{0,36} = 0,6$.

Биз куйида сонларнинг квадрат (арифметик) илдизлари жадвалдан бир бўлагини келтирамиз.

1-жадвал

Сонлар (x)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
Квадрат илдизлари	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

3-таъриф. *a* сонинг куб илдизи деб, кубга кўтарганда *a* га тенг бўладиган сонга айтилади ва $\sqrt[3]{a}$ каби белгиланади. Масалан: $\sqrt[3]{27} = 3$, чунки $3^3 = 27$; $\sqrt[3]{-0,008} = -0,2$; чунки $(-0,2)^3 = -0,008$.

Мусбат соннинг куб илдизи мусбат, манфий соннинг куб илдизи эса манфий сон бўлади. Биз қуйида сонларнинг куб илдилари жадвалидан бир бўлагини келтирамиз. Бу жадвални истаганча давом эттириш мумкин.

2-жадвал.

Сонлар (<i>x</i>)	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
Куб илдилари ($\sqrt[3]{x}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1- ва 2-жадваллардан фойдаланиб қуйидаги ифодаларни ҳисобланг.

439. 1) $\sqrt{936 + \sqrt{601 + \sqrt{576}}}$;
 2) $\sqrt{619 + \sqrt{841} + \sqrt{784}}$;
 3) $\sqrt{\sqrt{961} - \sqrt{36} - \sqrt{\sqrt{841} - \sqrt{169}}}$;
 4) $(\sqrt{\sqrt{961} - \sqrt{36} + \sqrt{\sqrt{841} - \sqrt{169}} - 2})^3$.
 440. 1) $\sqrt[3]{505 + \sqrt{335 + \sqrt{512}}}$;
 2) $\sqrt[3]{724 + 5\sqrt[3]{64} - 3\sqrt[3]{125}}$;
 3) $\sqrt[3]{\sqrt{739 + 2\sqrt[3]{729}} - \sqrt{784}}$;
 4) $(\sqrt[3]{10\sqrt[3]{-729} + 5\sqrt[3]{-343} - 5})^3$;
 5) $(\sqrt{4\sqrt[3]{729} - 5\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{3\sqrt[3]{729} - 10\sqrt[3]{64}}})^4$.

Квадрат илдиздан чиқаришда қуйидаги формулага амал қилиш лозим:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} \text{агар } a \geq 0 \text{ бўлса, } a \\ \text{агар } a < 0 \text{ бўлса, } -a. \end{cases}$$

1-мисол. $\sqrt{(\sqrt{10} - 4)^2} = \sqrt{(4 - \sqrt{10})^2} = 4 - \sqrt{10}$.

961	31
900	30
841	29
784	28
729	27
676	26
625	25
576	24
529	23
484	22
441	21
400	20
361	19
324	18
289	17
256	16
225	15
Сонлар (<i>x</i>)	Квадрат илдилари

441. $6 = \sqrt{36} = \sqrt{(-6)^2} = -6$ мисолни ишлашда қандай хатоликка йўл қўйилган?

2-мисол. $\sqrt{a^2 - 6a + 9}$ ни ҳисобланг.

Ечиш:

$$\sqrt{a^2 - 6a + 9} = \sqrt{(a - 3)^2} = |a - 3| = \begin{cases} \text{агар } a \geq 3 \text{ бўлса, } a - 3 \\ \text{агар } a < 3 \text{ бўлса, } -(a - 3) = \\ = 3 - a. \end{cases}$$

Қуйидаги мисолларда илдиэлларнинг қиймати ҳисоблансин:

442. 1) $\sqrt{x^2 + 4xy^2 + 4y^4}$; 2) $\sqrt{9a^2 - 12a + 4}$ ($a \leq \frac{2}{3}$);

3) $\sqrt[3]{1 + n^3 + 3n(1 + n)}$; 4) $\sqrt[3]{27 - 54b - 8b^3 + 36b^2}$.

443. 1) $\sqrt{x + y - 2\sqrt{xy}}$ ($x > y > 0$);

2) $\sqrt{a^2 + b - 2a\sqrt{b}}$ ($a > b > 0$);

3) $\sqrt{4a^2 + 4ab + 12a + b^2 + 6b + 9}$ ($a \geq 0, b \geq 0$);

4) $\sqrt{x + y + 1 + 2(\sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y})}$.

444. 1) $\sqrt{2 + 2\sqrt{6} + 3}$; 2) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$; 3) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$;

4) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

445. 1) $\sqrt[3]{29 + 27\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{4}}$; 2) $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2\sqrt{a} + 3a^2 + a\sqrt{a}}$;

3) $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}}$; 4) $\sqrt[3]{2(10 - 7\sqrt{2})}$.

446. Ҳисобланг:

1) $\sqrt{(-2,5)^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$; 3) $\sqrt{(a - 1)^2}$;

4) $\sqrt{4 - 4x + x^2}$ ($x \geq 2$).

447. Ифодаларни соддалаштиринг:

1) $a + \sqrt{a^2}$; 2) $\sqrt{(b - 1)^2} + \sqrt{(1 - b)^2}$; 3) $\sqrt{4x^2 + 2x + 5}$;

4) $\sqrt{n^2 - 4n + 4} + n - 2$.

3-мисол. Ифодани соддалаштиринг:

$$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} + \sqrt{x^2 + 2xy + y^2}$$

Ечиш:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} + \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} &= \sqrt{(x - y)^2} + \sqrt{(x + y)^2} = |x - y| + \\ &+ (x + y) = \begin{cases} \text{агар } x \geq y \text{ бўлса, } (x - y) + (x + y) = 2x, \\ \text{агар } x < y \text{ бўлса, } -(x - y) + (x + y) = 2y. \end{cases} \end{aligned}$$

Қуйида берилган ифодалар соддалаштирилсин:

448. 1) $b + 2 + \sqrt{4 - 4b + b^2}$; 2) $\sqrt{c^2 - 2c + 3}$;

3) $\sqrt{(y-3)^2 + y}$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt{(1-c)^3 - c + c^2}}$.

449. 1) $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} + \sqrt[3]{a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2}$;

2) $\sqrt{(x-y-1)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy}$;

3) $\sqrt{n + 78 - 18\sqrt{n-3}} + 10$ ($n \geq 3$).

450. 1) $\frac{\sqrt{a^2}}{a}$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{2}{a}}\right)^2}$; 3) $\frac{2n}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right)^2}}$.

451. $\sqrt{2x^2 - y^2 + 2x\sqrt{x^2 - y^2}}$.

27-§. Иллизлар устида амаллар

Квадрат иллизнинг баъзи хоссалари:

1. Агар \sqrt{a} , \sqrt{b} ва \sqrt{c} мавжуд яъни $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$) бўлса; $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{abc}$.

2. Агар \sqrt{a} ва \sqrt{b} мавжуд (яъни $a \geq 0$, $b \geq 0$) бўлса: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3. Агар n -жуфт ва $a > 0$ бўлса: $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$.

4. $(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$ ($a \geq 0$).

452. Қуйидаги мисолларни ишлашда қандай хатоликка йўл қўйилган?

1) $4 = \sqrt{16} = \sqrt{(-4)^2} = -4$; 2) $(\sqrt{-2})^2 = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$;

3) $2 = \sqrt{4} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{(-6)^2}}{\sqrt{3^2}} = \frac{-6}{3} = -2$.

Куб иллизнинг баъзи хоссалари:

1. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{abc}$.

2. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ ($b \neq 0$).

3. $\sqrt[3]{a^n} = a^{\frac{n}{3}}$. n — учга бўлинадиган бутун сон (яъни: $n = 3k$, k — бутун сон).

4. $(\sqrt[3]{a})^n = \sqrt[3]{a^n}$.

Кўрсатилган амалларни бажаринг:

453. 1. $(4 - \sqrt{y})(y - 2\sqrt{y} - 2)$; 2) $(1 - \sqrt{n + n})(n - \sqrt{n} - 1)$;

3) $(1 + \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^2})$; 4) $(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})(1 + \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2})$.

454. 1) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$; 2) $(3\sqrt{3}-4)(4-3\sqrt{3})$;
 3) $(3\sqrt{n}-4)(3\sqrt{n}+4)$; 4) $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})$.

455. 1) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$; 2) $(\sqrt{3}-\sqrt{12})^2$; 3) $(1+\sqrt{2})^2$;
 4) $(\sqrt{3}-2)^2$.

456. 1) $(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$;
 2) $(\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}})^2$.

457. 1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2$; 2) $(3\sqrt{2}+\sqrt{8}-1)^2$; 3) $(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10})^2$; 4) $(5\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$.

458. 1) $(a\sqrt{a}+a\sqrt{3a})^2$; 2) $(n\sqrt{m}+m\sqrt{n})^2$.

459. 1) $(1+\sqrt[3]{3})^3$; 2) $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})^3$; 3) $(1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})^3$.

1-мисол. *Кўпайтувчиларга ажратинг*: $x-y$ ($x > 0$, $y > 0$).

Ечиш: 1-ҳол. $x-y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

2-ҳол. $x-y = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3 = (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$.

Кўпайтувчиларга ажратинг:

460. 1) $x-\sqrt{x}$; 2) $ax^3+ax^2\sqrt{x}$; 3) $a^2-\sqrt{a^3}$; 4) $x\sqrt{y}-y\sqrt{x}$.

461. 1) $a+1$; 2) $x-3$; 3) x^2-2 ; 4) $x-9$.

462. 1) $x+\sqrt{x}$; 2) $x\sqrt[3]{y}-y\sqrt[3]{x}$; 3) $\sqrt[3]{4}-n\sqrt[3]{n}$; 4) $a-\sqrt[3]{a}$.

2-мисол. n^4+n^2+1 *ифода кўпайтувчиларга ажратилсин*.

Ечиш: $n^4+n^2+1 = (n^4+2n^2+1) - n^2 = (n^2+1)^2 - n^2 = (n^2+1-n)(n^2+1+n) = (n^2-n+1)(n^2+2n+1) - n = (n^2-n+1)((n+1)^2 - (\sqrt{n})^2) = (n^2-n+1)(n+1-\sqrt{n})(n+1+\sqrt{n})$.

Куйидаги ифодаларни кўпайтувчиларга ажратинг:

463. 1) x^2+x+1 ; 2) a^2+b^2 ; 3) y^4+1 ; 4) x^3+x^4+1 .

464. 1) $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$; 2) $1+n^2$; 3) $4-\sqrt[3]{4a^2}$; 4) x^3-3 .

465. 1) $x+y$; 2) x^2-8 ; 3) a^2-1 ; 4) x^4-16 .

3-мисол. *Ушбу*

$$\frac{x^4-5x^2+6}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})} *$$

ифодани соддалаштиринг.

* Бундай мисолларда параметрларнинг тенг бўлиши мумкин бўлган қийматларигина назарда тутилади. Чунончи, шу мисолда $x \neq \sqrt{2}$ ва $x \neq -\sqrt{3}$ шарти баъжарилди деб фараз қилинган ҳолда, ифода соддалаштирилади.

Ечиш. Касринг суратидаги ифодани кўпайтувчиларга ажра-
тамыз:

$$\begin{aligned}x^4 - 5x^2 + 6 &= x^4 - 3x^2 - 2x^2 + 6 = (x^4 - 3x^2) - (2x^2 - 6) = \\&= x^2(x^2 - 3) - 2(x^2 - 3) = (x^2 - 3)(x^2 - 2) = \\&= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2});\end{aligned}$$

у ҳолда:

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 6}{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})} = \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})} = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{2}).$$

Куйидаги ифодаларни соддалаштиринг:

466. 1) $\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$; 2) $\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$; 3) $\frac{n+1}{\sqrt[3]{n+1}}$; 4) $\frac{n+1}{\sqrt[3]{n+1}}$.

467. 1) $\frac{a+b^3}{\sqrt[3]{a+b}}$; 2) $\frac{a^2-1}{a\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a^2+1}}}$; 3) $\frac{x+y^2}{\sqrt[3]{x^2+y}\sqrt[3]{y-\sqrt[3]{xy^2}}}$.

468. 1) $\frac{x-\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt[3]{x^2-\sqrt[3]{xy}}}$; 2) $\frac{y\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt[3]{x^2-\sqrt[3]{xy}}}$;

3) $\frac{3}{\sqrt[3]{4-\sqrt[3]{2+1}}}$; 4) $\frac{x^3+x^2-2x-2}{(x-\sqrt{2})(\sqrt[3]{x^2-\sqrt{x+1}})}$.

4-мисол. Ҳисобланг:

$$\begin{aligned}&\sqrt{3-\sqrt{2-\sqrt{24}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{2+\sqrt{24}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{2-\sqrt{24}}}\times \\&\times\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{24}}}.\end{aligned}$$

Ҳисоблаш:

$$\begin{aligned}&(\sqrt{3-\sqrt{2-\sqrt{24}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{2-\sqrt{24}}})\cdot(\sqrt{3-\sqrt{2+\sqrt{24}}}\times \\&\times\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{24}}}) = \sqrt{9-(2-\sqrt{24})}\cdot\sqrt{9-(2+\sqrt{24})} = \\&= \sqrt{7+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{24}} = \sqrt{49-24} = 5.\end{aligned}$$

Куйидаги ифодалар ҳисоблансин:

469. $\sqrt{33}\cdot\sqrt{6+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3}}}$.

470. $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

471. $[\sqrt{36+18\sqrt{3}}-(3+3\sqrt{3})]\cdot\sqrt{36-18\sqrt{3}}$.

472. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25})$

тенгликнинг ўринли эканлиги исбот қилинсин.

473. $\sqrt{\sqrt[3]{28} - 3} = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{98} - \sqrt[3]{28} - 1)$ тенгликнинг тўғрилиги исбот қилинсин.

474. Айният исбот қилинсин:

$$\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2y}} + \sqrt{y + \sqrt[3]{xy^2}} = \sqrt{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3}.$$

28-§. Қаср махражидаги иррационалликни йўқотиш

Қуйидаги қасрларнинг махражидаги иррационалликни йўқотинг:

1) а) $\frac{a}{\sqrt{n}}$; қасрнинг сурат ва махражини \sqrt{n} га кўпайтирилади,

яъни:

$$\frac{a}{\sqrt{n}} = \frac{a \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \frac{a \cdot \sqrt{n}}{n}.$$

б) $\frac{b}{\sqrt[3]{c^2}}$; сурат ва махражини $\sqrt[3]{c}$ га кўпайтирилади: $\frac{b\sqrt[3]{c}}{c}$.

2) $\frac{n}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$; қасрнинг сурат ва махражи $(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})$ га кўпайтирилади:

$$\frac{n(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{n(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

3) $\frac{k}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$; қасрнинг сурат ва махражини $\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ га кўпайтирилади:

$$\frac{k(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})} = \frac{k(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a \pm b}.$$

4) $\frac{n}{\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$; қасрнинг сурат ва махражи $\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b}$ га кўпайтирилади.

Мисол. $x = \frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$ қасрнинг махражидаги иррационаллик йўқотилсин.

Қаср махражини $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{c}$ кўринишда ёзиб, унинг сурат ва махражини $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{c}$ га кўпайтирамиз:

$$x = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{a + b - c + 2\sqrt{ab}}.$$

Бу қасрнинг сурат ва махражини $(a + b - c) - 2\sqrt{ab}$ га кўпайтирамиз. У ҳолда:

$$x = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})}{(a + b - c)^2 - 4ab}.$$

Куйидаги касрлар махражидаги иррационалликни йўқотинг ва мумкин бўлса, қисқартиринг:

475. 1) $\frac{a^2-4}{\sqrt{a}-2}$; 2) $\frac{25-a^2}{\sqrt{5}+a}$; 3) $\frac{a^2-4b^2}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}$; 4) $\frac{x^2}{x-\sqrt{x}}$.

476. 1) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^4}}$; 2) $\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}}$; 3) $\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x+1}}$.

477. 1) $\frac{m+1}{\sqrt[3]{m+1}}$; 2) $\frac{b^2-4b+4}{\sqrt{b+2+2\sqrt{2b}}}$; 3) $\frac{4-4x^2+x^4}{\sqrt[3]{4-4x^2+x^4}}$.

478. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; 2) $\frac{6}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$; 3) $\frac{4}{2-\sqrt[3]{2}}$.

479. 1) $\frac{a^2-1}{(\sqrt[3]{a}-1)\sqrt{a+1}}$; 2) $\frac{14}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{54}}$.

480. 1) $\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{2}+1}$; 2) $\frac{1-x^2}{\sqrt{(1+x)^3}}$. 481. $\frac{4}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{9}}$.

482. $\frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}$.

483. $\frac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}-\sqrt{80}+\sqrt{40}}$.

484. $\frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}$. 485. $\frac{x-y}{x+y} \sqrt{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 + \frac{x+y}{x-y}} \sqrt{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}$.

29- §. $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$ айниятдан
 фойдаланиб иррационал ифодаларни соддалаштириш

486. Айният исбот қилинсин: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$.

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

формулалар ёрдамида баъзан илдишларни ўз ичига олган мураккаб ифодаларни соддалаштириш қулай бўлади.

Эслатма: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$ формула $A \geq \sqrt{B}$ бўлгандагина ишлатилади.

Мисол. $\sqrt{9 + \sqrt{80}}$ ифода соддалаштирилсин.

Ечиш. $\sqrt{9 + \sqrt{80}} = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{81 - 80}}{2}} + \sqrt{\frac{9 - \sqrt{81 - 80}}{2}} = \sqrt{5} + 2$.

Қуйидаги ифодаларни соддалаштиринг:

$$487. 1) \sqrt{7 + \sqrt{48}}; 2) \sqrt{31 + 8\sqrt{15}}.$$

$$488. \sqrt{1 + 2n\sqrt{1-n^2}}.$$

$$489.* \sqrt{10y^2 + 1 - 6y\sqrt{y^2 + 1}}.$$

$$490. \sqrt{10 - 2\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}.$$

$$491. \sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}.$$

$$492. 2\sqrt{\sqrt{\sqrt{97 - 56\sqrt{3}}}}.$$

30-§. Илдизлар устида барча амалларга доир мисоллар

Амалларни бажаринг:

$$493. \frac{\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} \quad (a > b > 0).$$

$$494. \left(\frac{1}{\sqrt{1+n}} + \sqrt{1-n} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{1-n}} + \sqrt{1+n} \right).$$

$$495. \frac{1 + \sqrt{1-c^2}}{1 - \sqrt{1-c^2}} - \frac{1 - \sqrt{1-c^2}}{1 + \sqrt{1-c^2}}.$$

$$496. \frac{a+4 + \sqrt{a^2-16}}{a+4 - \sqrt{a^2-16}} + \frac{a+4 - \sqrt{a^2-16}}{a+4 + \sqrt{a^2-16}}.$$

$$497. \left[\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x-y} + 1 \right] \cdot \left[\frac{y-x}{(\sqrt{y} + \sqrt{x})^2} + 1 \right].$$

$$498. x = \sqrt{\frac{n - \sqrt{n^2-4}}{2n}} \text{ бўлса, } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

ифода ҳисоблансин.

$$499. x = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ бўлса, } \frac{1+3x}{1+\sqrt{1+3x}} + \frac{1-3x}{1-\sqrt{1-3x}} \text{ ифода ҳисоблансин.}$$

500. $\sqrt{9 + \sqrt{8 - \sqrt{32 + \sqrt{128}}} = \sqrt{3} (\sqrt{2} + 1)$ тенгликнинг тўғрилиги исбот қилинсин.

501. Агар $a \geq 1$, $2b > 0$ бўлса,

$$\sqrt{2a^2 - b^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a^2 - 2b\sqrt{a^2 - b^2}} = a + b$$

эканлиги исбот қилинсин.

502. Соддалаштиринг:

$$\sqrt{a + 4\sqrt{a-4}} + \sqrt{a - 4\sqrt{a-4}}.$$

503. Соддалаштиринг:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}. \quad (x \geq 1).$$

504.* Соддалаштиринг:

$$k = \sqrt{a^2 + 4ab - b^2 + 2\sqrt{3a^2b + 2a^2b^2 - ab^3}}$$

$$505. \frac{2x\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2}}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right) + \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2}}$$

$$506. \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}} : \frac{\sqrt{1-x}}{x-2} + \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{1+x}} : \frac{\sqrt{1+x}}{x+2}$$

$$507. \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-ab^2} + \frac{2b}{a^2-b^2}\right)(a^2+ab)} - \\ - \sqrt{\left(1 - \frac{2a}{a-b} + \frac{a^2+2ab-3b^2}{(a-b)^2}\right)^2} 2b - \sqrt{\left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} - \frac{2ab}{a^2-b^2}\right)(a+b)}$$

$(a > b)$.

$$508*. A = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2$$

$$509. \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ тенгликнинг тўғри эканлиги исбот қилинсин.}$$

ни исбот қилинсин.

$$510. \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{3}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{3}}} = \\ = \sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}} \text{ тенгликнинг тўғрилиги исбот қилинсин.}$$

$$511. \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1 \text{ тенгликнинг тўғрилиги исбот қилинсин.}$$

$$512. \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4 \text{ тенгликнинг тўғрилиги исбот қилинсин.}$$

Соддалаштиринг:

$$513.* \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

$$514.* \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}, \quad 515.* \frac{9}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}}, \quad 516. x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \text{ ва } a \geq b > 0 \text{ бўлса, } A = \frac{2b\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x} \text{ ифоданинг } a+b$$

га тенг экани исбот қилинсин.

$$517. x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a}{b}} - 1 \text{ бўлса, } c = \frac{1-ax}{1+ax} \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} \text{ ифода } (a > b > 0) \text{ ҳисоблансин.}$$

518. $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$ ва $a > 0, b > 0$ бўлса, $B = \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ ифода ҳисоблансин.

519. $x = \sqrt{ab}$ ва $a > b > 0$ бўлса, қуйидаги ифода ҳисоблансин.

$$B = \frac{\sqrt{(a+x)(x+b)} + \sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}}$$

520. $x = \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{ab+1}}; y = \frac{\sqrt{ab+1}}{\sqrt{ab-1}}$ ($ab \neq 1$) бўлса, $\frac{x+y-1}{x-y+1}$

қасрнинг қиймати топилинсин.

521. Агар $y = \frac{2nx}{a^2+1}$ бўлса, $A = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$ ифода ҳисоблансин.

522. Агар $x = \frac{2ac}{b(1+c^2)}$ бўлса, $B = \frac{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}$ ифода ҳисоблансин.

523.* Агар $ax^3 = by^3 = cz^3$ ва $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ бўлса, $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ экани исбот қилинсин.

524. Соддалаштиринг.

525. Соддалаштиринг:

$$\frac{c^3 - 3c + (c^2 - 1)\sqrt{c^2 - 4} - 2}{c^3 - 3c + (c^2 - 1)\sqrt{c^2 - 4} + 2}$$

$$\frac{x^2 - x - 2 + (x-1)\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 + x - 2 + (x+1)\sqrt{x^2 - 4}} \quad (x \geq 2).$$

31-§. Тенгсизликни исботлашга доир машқлар

1-мисол. $a \geq 0$ ва $b \geq 0$ бўлса, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ тенгсизликнинг ўринли бўлиши, яъни икки манфий бўлмаган сонларнинг ўрта арифметик қиймати уларнинг ўрта геометрик қийматидан кичикмаслиги исбот қилинсин.

Исбот. 1-усул. $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ айирмани текширайлик. $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$, чунки $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$, Демак, $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$ ёки $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

2-усул. Берилган тенгсизликни 2 га кўпайтирилса, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$; $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$. Охириги тенгсизлик ўринли бўлгани учун унга тенг кучли бўлган берилган тенгсизлик ҳам тўғридир.

3-усул. a ва b нинг манфий бўлмаган ҳар қандай қийматида $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ тенгсизлик бажарилади. Бундан: $a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$; $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ёки $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

4-усул. $a \geq 0$ ва $b \geq 0$ нинг ҳар қандай қийматида $(a-b)^2 \geq 0$.

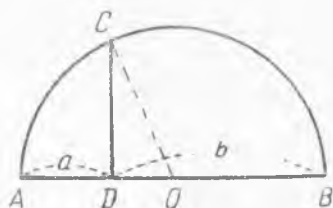
Бундан: $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$; $a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$; $(a + b)^2 \geq 4ab$.
 $a \geq 0$. $b \geq 0$ бўлгани учун $\sqrt{(a + b)^2} \geq \sqrt{4ab}$ ёки $a + b \geq 2\sqrt{ab}$,
 у ҳолда: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

5-усул. Диаметрининг узунлиги a ва b сонлари билан аниқланувчи кесмалар йиғиндисига тенг бўлган ярим айлана чизамиз (7-чизма). $DC \perp AB$. $CD^2 = AD \cdot BD = ab$ (ўрта пропорционал кесма ҳақидаги теореманинг натижасига кўра) ёки $CD^2 = ab$. Бундан:

$$CD = \sqrt{ab}.$$

Иккинчи томондан $OC = \frac{a+b}{2} \geq CD$ бўлгани учун

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$



7-чизма.

6-усул. Томонларининг узунлиги \sqrt{a} ва \sqrt{b} га тенг бўлган $ABCD$ тўғри тўртбурчак чизиб, A бурчагининг биссектрисасини DC билан (E да) кесишгунча давом эттирайлик. $ABCD_{ю} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ (8-чизма). $DE = \sqrt{b}$ ($= AD$); $\triangle ABF$ да $\angle B = 90^\circ$, $\angle BAF = \angle AFB = 45^\circ$ бўлгани учун бу учбурчак тенг ёнли, яъни: $BF = AB = \sqrt{a}$, у ҳолда:

$$\triangle ADE_{ю} = \frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}}{2} = \frac{b}{2}; \quad \triangle ABF_{ю} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{2} = \frac{a}{2}.$$

$\triangle ABF_{ю} + \triangle AED_{ю} \geq ABCD_{ю}$ ($ABCD$ — квадрат бўлгандагина тенглик бажарилади). У ҳолда $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ёки $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Қуйидаги тенгсизликлар исбот қилинсин:

526. $a^2 + b^2 + 2c^2 \geq 2c(a + b)$.

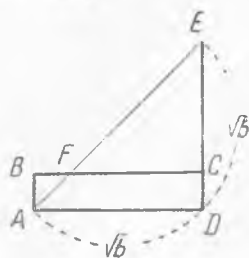
527. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt{abcd}$.

528. $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$.

529. $(a + 1)(b + 1)(a + b) \geq 8ab$.

530. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ бўлса,

$$\frac{(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)}{abcd} \geq 16.$$



8-чизма.

531. $a, b, c > 0$ ва $a + b + c = n$ бўлса, $(n - a)(n - b)(n - c) \geq 8abc$.

532. $\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_1 x_3} + \dots + \sqrt{x_{n-1} x_n} \leq \frac{n-1}{2} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

533. Юзи бир хил бўлган барча тўғри бурчакли тўртбурчаклар ичида периметри энг кичиги квадрат экани исбот қилинсин.

2-мисол. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ бўлса, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ экани исбот қилинсин.

Исбот. $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ деб фараз қилсак, у ҳолда берилган тенгсизликни исбот қилиш ўрнига $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3}$ ёки $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$, ёки $x^3+y^3+z^3-3xyz \geq 0$ бўлишини исбот қиламиз. $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) = \frac{1}{2}(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz) = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2] \geq 0$ (чунки $x+y+z > 0, (x-y)^2 \geq 0, (x-z)^2 \geq 0, (y-z)^2 \geq 0$).

534. $a > 0, b > 0, c > 0$ бўлса, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ экани исбот қилинсин.

535. $a > 0, b > 0, c > 0$ бўлса, $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ бўлиши исбот қилинсин.

536. $a > 0, b > 0, c > 0$ бўлса, $(a+b+c)(ab+bc+ac) \geq 9abc$ бўлиши исбот қилинсин.

V боб

КВАДРАТ ТЕНГЛАМА. КВАДРАТ ТЕНГЛАМАГА КЕЛТИРИЛАДИГАН БАЪЗИ ТЕНГЛАМАЛАР. КВАДРАТ ТЕНГСИЗЛИК

32-§. Чала (тўламас) квадрат тенгламалар

Тўла квадрат тенглама деб (ёки қисқача, квадрат тенглама деб)

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

кўринишидаги тенгламага айтилади** (бунда $a \neq 0, b, c$ — ҳақиқий сонлар).

(1) тенгламада:

1) $b = 0, c \neq 0$ бўлса, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$ax^2 + c = 0 \quad (2)$$

Бу тенгламанинг илдизлари $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ формуладан топилади.

2) $b \neq 0, c = 0$ бўлса, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

* 119 - мисолнинг кўрсатмасига қаранг.

** (1) тенгламани квадрат тенгламанинг нормал кўриниши дейилади.

$$ax^2 + bx = 0 \quad (3)$$

тенглама $x(ax + b) = 0$ кўринишда кўпайтувчиларга ажратиб ечилади. Унинг илдиэлари:

$$x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}.$$

3) $b = c = 0$ бўлса,

$$ax^2 = 0. \quad (4)$$

Бу тенглама илдиэлари: $x_1 = x_2 = 0$ бўлади. (2), (3) ва (4) тенгламаларни, одатда, чала (тўламас) квадрат тенгламалар деб аталади.

1-мисол. Тенгламани ечинг:

$$\frac{x+3}{x+2} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{2x-3}{x-1}.$$

Ечиш. Тенгламанинг ҳар бир ҳадини $(x+2)(x-2)(x-1) \neq 0$ га кўпайтирамиз: $(x+3) \cdot (x-2) \cdot (x-1) + (x-3) \cdot (x+2) \cdot (x-1) = (2x-3) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$.

Ҳосил бўлган тенгламани соддалаштириб ечамиз: $x^2 - 4x = 0$, $x_1 = 0^*$, $x_2 = 4$.

2-мисол. $1 + 2x + x^2 = a^2 \left(1 + \frac{2x}{a^2} + \frac{x^2}{a^4}\right)$.

Ечиш. Тенгламанинг ҳар икки қисмини a^2 га кўпайтирамиз. $a^3 + 2a^2x + a^2x^2 = a^4 + 2a^2x + x^2$, соддалаштирсак: $x^2(a^2 - 1) = a^2(a^2 - 1)$; $a^2 - 1 \neq 0$ ёки $a \neq \pm 1$ бўлса: $x^2 = a^2$, $x_{1,2} = \pm a$. $a^2 - 1 = 0$ ёки $a = \pm 1$ бўлса, берилган тенглама $1 + 2x + x^2 = 1 + 2x + x^2$ айниятга айланиб қолар ва шу сабабдан, x ихтиёрий сон бўлар эди.

Жавоб: $a \neq \pm 1$ бўлса, $x_{1,2} = \pm a$; $a = \pm 1$ бўлса, x — ихтиёрий сон.

Тенгламаларни ечинг:

537. $(3x + 4)^2 + (x - 1)^2 = 17$.

538. $\frac{x^2 + 2ax}{x^3 - a^3} + \frac{x}{(x+a)^2 - ax} = \frac{1}{x-a}$.

539. $\frac{2a+b+x}{x+2a-b} - \frac{x-2a+b}{2a+b-x}$.

33-§. Квадрат тенгламаларни ечиш

(1) тўла квадрат тенгламани $a \neq 0$ га бўлсак,

$$x^2 + px + q = 0 \quad (5)$$

* Топилган илдиэларни берилган тенгламага қўйиш билан текшириб кўрилади.

кўринишга келади (бунда: $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$). (5) тенгламага келтирилган квадрат тенглама дейилади ва унинг илдизлари

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad (5')$$

формулалардан, (1) тўла квадрат тенгламанинг илдизлари эса

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1')$$

формулалардан топилади.

Агар (1) тўла квадрат тенглама

$$ax^2 + 2kx + c = 0 \quad (6')$$

кўринишида бўлса, унинг илдизлари қуйидаги формулалардан топилади:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \quad (6'')$$

1-мисол. $\frac{2x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{x+3}{3-x} - \frac{4+x}{3+x}$

Ечиш. Тенгликни $x^2 - 9 \neq 0$ га кўпайтирамиз:

$$(x-3) \cdot (2x+1) - (x-1) = -(x+3)^2 - (x-3) \cdot (4+x).$$

Буни нормал ҳолга келтирсак:

$$4x^2 + x - 5 = 0.$$

Бундан: $x_1 = 1$; $x_2 = -1\frac{1}{4}$.

2-мисол: $ax(a-bx) = b(bx-a)$.

Ечиш. 1-усул. Тенгламани нормал ҳолга келтирамиз:

$$abx^2 - (a^2 - b^2) \cdot x - ab = 0, \quad x_{1,2} = \frac{a^2 - b^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}}{2ab} =$$

$$\frac{a^2 - b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2}}{2ab} = \frac{a^2 - b^2 \pm (a^2 + b^2)}{2ab}; \quad x_1 = \frac{2a^2}{2ab} = \frac{a}{b}; \quad x_2 = \frac{-2b^2}{2ab} =$$

$$= -\frac{b}{a}.$$

2-усул. Берилган тенгламани $ax(a-bx) + b(a-bx) = 0$ кўринишида ёзиб кўпайтувчиларга ажратсак: $(a-bx) \cdot (ax+b) = 0$.

Кўпайтирилувчиларнинг ҳар бирини нолга тенгласак:

а) $a - bx = 0$; $x_1 = \frac{a}{b}$; б) $ax + b = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Тенгламаларни ечинг:

$$540. \quad 1) \frac{2x+1}{2-x} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{5x-2}{4-x^2} + 1; \quad 2) \frac{4x-5}{2x-1} - 2 =$$

$$= \frac{(x-2)(1-3x)}{4x^2-1} + \frac{7x+1}{1-4x^2}.$$

541. 1) $a^2b^2x^2 - a^2c^2 = x(a^4 - b^2c^2)$; 2) $mn(x^2 + 1) = (m^2 + n^2)x$. Бунда $m > n > 0$.

3-мисол. $(a^2 - b^2)x^2 - ab = (a^2 + b^2)x$.

Ечиш. Тенгламани нормал ҳолга келтирамиз: $(a^2 - b^2)x^2 - (a^2 + b^2)x - ab = 0$.

1-ҳол. $|a| \neq |b|$ бўлса:

$$x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 4ab(a^2 - b^2)}}{2(a^2 - b^2)} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 4a^3b - 4ab^3}}{2(a^2 - b^2)} = \frac{a^2 + b^2 \pm (a^2 - b^2 + 2ab)}{2(a^2 - b^2)},$$

$$x_1 = \frac{a}{a - b}, x_2 = -\frac{b}{a + b}.$$

2-ҳол. а) Агар $a = b$ бўлса, берилган тенглама $-2a^2x - a^2 = 0$ кўринишида бўлиб, $x = -\frac{1}{2}$ бўлади.

б) Агар $a = -b$ бўлса, берилган тенглама $-2a^2x + a^2 = 0$ кўринишида бўлиб, $x = \frac{1}{2}$ бўлади.

Тенгламани ечинг:

542. $x(m + n - x) = m + n - 1$.

34-§. Квадрат тенгламага келтириладиган юқори даражали тенгламаларни (ёрдამчи номаълум киритиш билан) ечиш

1-мисол. $(x^2 + 6x)^2 + 8(x^2 + 6x) - 9 = 0$ **тенгламани ечинг.**

Ечиш. Тенгламани ечиш учун қавсларни очилса (x^2 ҳам иштирок этадиган) 4-даражали тенглама келиб чиқади. Бундай тенгламаларни ечиш кўпинча мураккаб бўлади. Аммо $x^2 + 6x = z$ белгилаш киритиш билан тенгламани осонгина ечиш мумкин. Бу ҳолда $(x^2 + 6x)^2 = z^2$ бўлиб, берилган тенглама: $z^2 + 8z - 9 = 0$ кўринишни олади; $z_1 = 1, z_2 = -9$. z нинг қийматларини ўрнига қўямиз. У ҳолда:

а) $x^2 + 6x = 1$ тенгламани ечсак, $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{10}$.

б) $x^2 + 6x = -9$ тенгламани ечсак, $x_{3,4} = -3$. Жавоб. $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{10}$; $x_{3,4} = -3$.

543. $(x^2 - 16x)^2 - 2(x^2 - 16x) - 63 = 0$ тенгламани ечинг.

2-мисол. $(x + a)(x + 2a)(x - 3a)(x - 4a) = b^4$ **тенгламани ечинг.**

Ечиш. Биринчи билан учинчи, иккинчи билан тўртинчи қавс ичидаги ифодалар ўзаро кўпайтирилса,

$(x^2 - 2ax - 3a^2) \cdot (x^2 - 2ax - 8a^2) - b^4 = 0^* \cdot [(x^2 - 2ax) - 3a^2] \times [(x^2 - 2ax) - 8a^2] - b^4 = (x^2 - 2ax)^2 - 11a^2(x^2 - 2ax) + 24a^4 - b^4$ бўлгани учун тенглама ушбу кўринишни олади:

* $x^2 - 2ax - 3a^2 = z$ деб олсак, $x^2 - 2ax - 8a^2 = z - 5a^2$ бўлади, у ҳолда $z(z - 5a^2) - b^4 = 0$ ёрдამчи тенгламани ҳосил қилиб ечиш ҳам мумкин.

$$(x^2 - 2ax)^2 - 11a^2(x^2 - 2ax) + 24a^4 - b^4 = 0.$$

$x^2 - 2ax = y$ деб белгиласак: $y^2 - 11a^2y + 24a^4 - b^4 = 0$.

$$y_1 = \frac{11a^2 + \sqrt{25a^4 + 4b^4}}{2}; \quad y_2 = \frac{11a^2 - \sqrt{25a^4 + 4b^4}}{2}$$

y нинг қийматини ўрнига қўйсақ:

а) $x^2 - 2ax = \frac{11a^2 + \sqrt{25a^4 + 4b^4}}{2}$; б) $x^2 - 2ax = \frac{11a^2 - \sqrt{25a^4 + 4b^4}}{2}$.

Бу тенгламаларни ечсак:

$$x_{1,2,3,4} = a \pm \sqrt{\frac{13a^2 \pm \sqrt{25a^4 + 4b^4}}{2}}$$

Изоҳ: $13a^2 - \sqrt{25a^4 + 4b^4} > 0$ бўлгандагина тенгламанинг барча илдизлари ҳақиқий сонлар бўлади. Бунинг учун $13a^2 > \sqrt{25a^4 + 4b^4}$ бўлиши керак. Бу тенгсизликнинг ҳар икки қисмини (мусбат миқдорлар бўлгани учун) квадратга кўтарсак: $169a^4 > 25a^4 + 4b^4$ ёки $144a^4 > 4b^4$. Бундан $36a^4 > b^4$ тенгсизлиги бажарилиши керак.

544. $x(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) = 0,5625$ тенгламани ечинг.

3-мисол. $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = 3 \frac{1}{3}$ *тенгламани ечинг.*

Ечиш. $\frac{x+4}{x-4} = y$ деб белгиласак, $\frac{x-4}{x+4} = \frac{1}{y}$ бўлади. У ҳолда берилган тенгламани $y + \frac{1}{y} = 3 \frac{1}{3}$ кўринишда ($3 \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$ бўлгани учун) ёки $y + \frac{1}{y} = 3 + \frac{1}{3}$ кўринишида ёзиш мумкин.

1-усул. y билан $\frac{1}{y}$, 3 билан $\frac{1}{3}$ ўзаро тескари миқдорлар бўлганлиги сабабли: а) $y = 3$ бўлиши мумкин. У ҳолда $\frac{x+4}{x-4} = 3$ тенгламадан $x = 8$ бўлади, б) $y = \frac{1}{3}$ бўлиши мумкин, у ҳолда $\frac{x+4}{x-4} = \frac{1}{3}$ тенгламадан $x = -8$ бўлади*.

2-усул. $y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3}$; $3y^2 - 10y + 3 = 0$ тенглама ечилади. y нинг топилган қийматларини ўрнига қўйиб, ҳосил бўлган тенгламалардан x топилади.

Тенгламаларни ечинг:

545. $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$

546. $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

* Қўпайтмаси 1 га тенг бўлган иккита сон (миқдор) ўзаро тескари сон (миқдор)лар дейилади.

4-мисол. Ушбу тенгламани ечинг:

$$x^4 - k(2x^2 + 1) - x + k^2 = 0.$$

Ечиш. 1-усул. Берилган тенглама k га нисбатан квадрат тенглама бўлгани учун, яъни: $k^2 - k(2x^2 + 1) + x^4 - x = 0$ ни k га нисбатан

ечилса, $k_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2 + 4x}}{2} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x + 1)}{2}$. Бундан:

$$k_1 = x^2 + x + 1, \quad k_2 = x^2 - x.$$

Охирги тенгламанинг чап қисми $k^2 - k(2x^2 + 1) + 4x^4 - x$ ифода k га нисбатан квадрат учҳад бўлиб, уни $(k - k_1) \cdot (k - k_2)$ кўринишда ёзиш мумкин, (бунда k_1 ва k_2 , k га нисбатан квадрат тенгламанинг илдизлари), яъни:

$$k^2 - k(2x^2 + 1) + x^4 - x = (k - k_1)(k - k_2).$$

k_1 билан k_2 нинг қийматлари ўрнига қўйилса

$$k^2 - k(2x^2 + 1) + x^4 - x = [k - (x^2 + x + 1)][k - (x^2 - x)] = (x^2 + x + 1 - k) \cdot (x^2 - x - k)$$

ёки

$$x^4 - k(2x^2 + 1) - x + k^2 = (x^2 + x + 1 - k)(x^2 - x - k).$$

Тенгламанинг чап қисми nolга тенг бўлгани учун $(x^2 + x + 1 - k) \times (x^2 - x - k) = 0$. Бундан:

а) $x^2 - x - k = 0$ тенгламани ечсак: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4k}}{2}$,

б) $x^2 + x - k + 1 = 0$ тенгламани ечсак: $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4k - 3}}{2}$.

2-усул. Берилган тенгламанинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратамиз: $x^4 - k(2x^2 + 1) - x + k^2 = [(x^2 - k)^2 - x^2] + (x^2 - k) - x = (x^2 - k - x) \cdot (x^2 + x - k) + (x^2 - x - k) = (x^2 - x - k) \cdot (x^2 + x - k + 1) = 0$. $x^2 - x - k = 0$ ва $x^2 + x - k + 1 = 0$ тенгламалар ечилади.

Изоҳ: Берилган тенгламанинг илдизлари ҳақиқий сонлар бўлсин учун

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 4k \geq 0, \quad k \geq -\frac{1}{4} \\ 4k - 3 \geq 0, \quad k \geq \frac{3}{4} \end{array} \right\} \quad k \geq \frac{3}{4} \text{ бўлиши керак.}$$

547. $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$ тенгламани ечинг.

35-§. Биквадрат тенгламаларни ечиш

Биквадрат тенглама деб

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (7)$$

кўринишидаги тенгламага айтилади (бунда $a \neq 0$, b , c — ҳақиқий сонлар) (7) тенглама x^2 га нисбатан квадрат тенглама бўлгани учун

$$(x)_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ дан: } x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}} \text{ берилган}$$

биквадрат тенгламанинг илдизлари бўлади (бунда: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a} \geq 0$ бўлсагина илдизлар ҳақиқий сонлар бўлади).

Мисол. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

$$\text{Ечиш. } (x^2)_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8}; \quad x^2 = 1 \text{ ва } x^2 = \frac{1}{4}.$$

$$x_{1,2} = \pm 1; \quad x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}.$$

Эслатма. $x^2 = y$ деб белгиласак: $4y^2 - 5y + 1 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{4}$; y нинг қиймати ўрнига қўйилса, $x^2 = 1$ дан: $x_{1,2} = \pm 1$, $x^2 = \frac{1}{4}$ дан $x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}$.

Тенгламаларни ечинг:

$$548. \quad 1) \quad 4x^4 - 17x^2 + 4 = 0; \quad 2) \quad 4x^4 - 9x^2 + 2 = 0.$$

$$549. \quad 1) \quad a^2x^4 - (a^2b^2 + 1)x^2 + b^2 = 0; \quad 2) \quad a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4) \cdot x^2 + a^2b^2 = 0.$$

36-§. Квадрат тенгламаларни ечишга доир мисоллар

Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

$$550. \quad 1) \quad ax(a-x) - 4a = 2(4-x^2); \quad 2) \quad ax(a-x) - ab^2 = b \cdot (b^2 - x^2).$$

$$551. \quad 1) \quad \frac{x^2}{ab - 2b^2} = \frac{a-b}{a^2 - 2bc} + \frac{x}{bc}; \quad 2) \quad \frac{2a}{x^2 - 1} = \frac{b}{a - bx} \left(\frac{a}{x-1} - b \right).$$

$$552. \quad x^2 - a^{4n} + a^n x = a^{3n} x; \quad 2) \quad \frac{x^2 + 1}{a^n} = x(1 + a^{-2n}).$$

$$553. \quad 1) \quad \frac{a+6b}{x+3b} + \frac{a-6b}{3b-x} = \frac{6b}{a}; \quad 2) \quad \frac{m+4n}{x+2n} - \frac{m-4n}{x-2n} = \frac{4n}{m}.$$

$$554. \quad 1) \quad \frac{m+n(m+x)}{m+n(m-x)} + \frac{m+x}{x} = \frac{m}{m-2nx}; \quad 2) \quad x^2 \sqrt{c-x} - c \sqrt{2c} = (c - c\sqrt{2})x.$$

$$555. \quad 1 + \frac{3a}{x-3b} = \frac{18a^2}{(x-3b)^2}.$$

$$556. \quad (x^2 - 8)^2 + 4(x^2 - 8) = 5.$$

$$557. \quad \frac{x+1}{x} + \frac{x}{x+1} = \frac{13}{6}.$$

$$558. \quad \frac{\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{a+1}\right)^2}{x^2 + a^2 - 2ax} = \frac{5}{9x^2}.$$

$$559. \quad \frac{m}{nx-x} - \frac{m-1}{x^2 - 2nx^2 + n^2x^2} = 1.$$

$$560. \frac{(x-b)^2 - (x-a)^2}{(x-a)(x-b)} = \frac{4ab}{a^2 - b^2}.$$

$$561. \frac{x^2}{a-x} + 1 = \frac{a^2}{a-x} - bx.$$

$$562. (m^2 - n^2)x^2 + mn = (m^2 + n^2)x.$$

$$563. \frac{1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{18}{x^2 + 2x + 2} = \frac{18}{x^2 + 2x + 1}.$$

$$564. x^4 - 2x^3 + x^2 - 14x^2 + 14x + 24 = 0.$$

$$565.* x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8.$$

$$566.* (x+5)^4 - 13(x+5)^2x^2 + 36x^4 = 0.$$

$$567. 5x^4 + 20x^3 - 40x + 17 = 0.$$

$$568.* \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2} = 0.$$

37-§. Квадрат тенглама илдизларининг хоссасини қўллашга доир машқлар

Теорема (Виет теоремаси). *Келтирилган квадрат*

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

тенглама илдизларининг йиғиндиси x нинг қарама-қарши ишора билан олинган коэффициенти $(-p)$ га тенг, кўпайтмаси эса озод ҳад (q) га тенг, яъни x_1 ва x_2 (1) тенгламанинг илдизлари бўлса, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$ бўлади.

Тескари теорема. Ихтиёрий иккита ҳақиқий соннинг йиғиндиси $-p$ га, кўпайтмаси эса q га тенг бўлса, бу икки сон (1) келтирилган квадрат тенгламанинг илдизлари бўлади.

Исбот. $x_1 = -p - x_2$ қийматни $x_1 x_2 = q$ га қўйсақ, $(-p - x_2) \times x_2 = q$ ёки $x_2^2 + px_2 + q = 0$, яъни x_2 (1) тенгламанинг илдизи экан. Шунга ўхшаш $x_2 = -p - x_1$ ни $x_1 \cdot x_2 = q$ га қўйсақ: $x_1^2 + px_1 + q = 0$, яъни x_1 ҳам (1) тенгламанинг илдизи бўлади.

Натижа. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ва $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ бўлса, x_1 ва x_2 , $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг илдизлари бўлади.

Тескари теоремадан фойдаланиб, илдизлари берилган тенгламани тузиш мумкин.

1-мисол. *Илдизлари -3 ва 5 бўлган квадрат тенглама тузилсин.*

Ечнш. $x_1 + x_2 = (-3) + 5 = 2$; $x_1 \cdot x_2 = (-3) \cdot 5 = -15$. Демак, (1) тенгламада $p = 2$, $q = -15$ экани аниқланди.

Жавоб. $x^2 - 2x - 15 = 0$.

2-мисол. Илдизлари $\frac{1}{m}$ ва $\frac{1}{n}$ бўлган тенглама тузилсин.

Ечиш. $-p = x_1 + x_2 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn}$, $q = x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{mn}$. У ҳолда изланувчи квадрат тенглама: $x^2 - \frac{m+n}{mn}x + \frac{1}{mn} = 0$ ёки $mnx^2 - (m+n)x + 1 = 0$.

569. Илдизлари: 1) a ва $\frac{1}{a}$, 2) $\frac{m}{n}$ ва $\frac{n}{m}$ бўлган квадрат тенглама тузилсин.

570. k нинг қандай қийматида:

1) $x^2 - kx + 8 = 0$ тенглама илдизларидан бири 4 га тенг бўлади?

2) $x^2 + 4x + k = 0$ тенглама илдизларидан бири 1 га тенг бўлади?

3) $kx^2 - 10x + 3 = 0$ тенглама илдизларидан бири $\frac{1}{3}$ га тенг бўлади?

571. Шундай квадрат тенглама тузилсинки, унинг илдизлари $x^2 + px + q = 0$ тенглама илдизларидан фақат ишоралари билангина фарқ қилсин.

572. Илдизларидан бири $3 - \sqrt{2}$ бўлган (рационал коэффициентли) квадрат тенглама тузилсин.

3-мисол. Илдизлари $ax^2 + bx + c = 0$ тенглама илдизларидан d бирлик ортиқ бўлган квадрат тенглама тузилсин.

Ечиш: Берилган тенглама илдизлари x_1 ва x_2 бўлса, изланувчи тенглама илдизлари: $x_1 + d$ ва $x_2 + d$ бўлади. У ҳолда: $-p = (x_1 + d) + (x_2 + d) = x_1 + x_2 + 2d = -\frac{b}{a} + 2d = \frac{2ad - b}{a}$, яъни $-p = \frac{2ad - b}{a}$ ёки $p = -\frac{2ad - b}{a}$. $q = (x_1 + d) \cdot (x_2 + d) = x_1x_2 + d(x_1 + x_2) + d^2 = \frac{c}{a} - \frac{bd}{a} + d^2 = \frac{ad^2 - bd + c}{a}$, яъни $q = \frac{ad^2 - bd + c}{a}$. У ҳолда изланувчи квадрат тенглама қуйидагича бўлади:

$x^2 - \frac{2ab - b}{a}x + \frac{ad^2 - bd + c}{a} = 0$. Бундан: $ax^2 + (b - 2ad)x + ad^2 - bd + c = 0$ изланаётган тенглама бўлади.

573. Илдизлари $x^2 + px + q = 0$ тенглама илдизларидан:

1) n марта катта, 2) m марта кичик бўлган квадрат тенглама мос ҳолда: 1) $x^2 + npx + n^2q = 0$; 2) $m^2x^2 + mpx + q = 0$ кўринишда эканини исбот қилинг.

574. $ax^2 + bx + c = 0$ тенглама илдизлари x_1 ва x_2 бўлса. илдизлари: 1) $\frac{x_1}{m^k}$ ва $\frac{x_2}{m^k}$; 2) $m^k x_1$ ва $m^k x_2$ бўлган квадрат тенгламалар тузилсин.

4- мисол. $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тенглама илдиэлари x_1 ва x_2 булса, бу тенгламаларни ечмасдан, илдиэлари: 1) квадратларининг йиғиндисини $\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$ га, 2) квадратларининг айирмасини $\pm \frac{b\sqrt{b^2 - 4ac}}{a^2}$ га, 3) кубларининг йиғиндисини $\frac{b(3ac - b^2)}{a^3}$ га, 4) кубларининг айирмасини эса $\pm \frac{1}{a^3}(b^2 - ac)\sqrt{b^2 - 4ac}$ га тенг экани исбот қилинсин.

Исбот. Берилган тенгламада $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

$$1) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

2) $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$ ёки $(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$. Бундан: $|x_1 - x_2| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}$, ёки $x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$. Бу тенглик билан $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ тенгликнинг чап қисмини чап қисмига, ўнг қисмини ўнг қисмига кўпайтирсак:

$$x_1^2 - x_2^2 = \pm \frac{b}{a^2} \sqrt{b^2 - 4ac} *.$$

$$3) x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = -\frac{b}{a} \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2} - \frac{c}{a} \right) = \frac{b(3ac - b^2)}{a^3};$$

$$4) x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \cdot \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2} + \frac{c}{a} \right) = \pm \frac{1}{a^3}(b^2 - ac)\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

575. $x^2 + px + q = 0$ квадрат тенгламанинги илдиэлари x_1 ва x_2 булса, бу тенгламани ечмасдан илдиэларининг: 1) квадратлари йиғиндисини, 2) квадратлари айирмасини, 3) кублари йиғиндисини ва 4) кублари айирмасини топилинсин.

576. $4x^2 - 4x - 3 = 0$ тенгламани ечмасдан: 1) $x_1^2 + x_2^2$, 2) $x_1^3x_2 + x_1x_2^3$, 3) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ лар ҳисоблансин (x_1 ва x_2 берилган тенгламанинги илдиэлари).

* $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a^2} > 0$ булгани сабабли $|x_1| > |x_2|$ булса, \pm ишоралардан b нинг ишорасини билан бир хили олинади, $|x_1| < |x_2|$ булса, b нинг ишорасига қарама-қарши ишора олинади.

$$577. 2x^2 + 5x - 3 = 0 \text{ тенгламани ечмасдан, } \frac{2x_1^2 + 3x_1 \cdot x_2 + 2x_2^2}{8x_1 \cdot x_2^3 + 8x_1^3 x_2}$$

ифода ҳисоблансин. Бунда x_1, x_2 берилган тенглама илдизлари.

578. $(c - 2)x^2 + (c + 2)x - 2 = 0$ тенглама илдизлари x_1 ва x_2
 1) $x_1 = 2$, 2) $x_1 + x_2 = 1$, 3) $x_1 = x_2$. 4) $x_1 x_2 = -2$ бўлса, c топилин.

5- мисол. $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламани ечмасдан, шундай тенглама тузилсинки, унинг илдизлари: 1) берилган тенглама илдизларининг квадратларига, 2) берилган тенглама илдизларининг кубларига тенг бўлсин.

Ечиш. Берилган тенгламанинг илдизлари x_1 ва x_2 бўлса, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ бўлади. У ҳолда:

$$1) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}; \quad x_1^3 \cdot x_2^3 = \frac{c^3}{a^3}.$$

Илдизларининг йиғиндиси $\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$ га, кўпайтмаси эса $\frac{c^3}{a^3}$ га тенг бўлган квадрат тенглама тузамиз.

$x^2 - \frac{b^2 - 2ac}{a^2}x + \frac{c^3}{a^3} = 0$ ёки $a^2x^2 + (2ac - b^2)x + c^3 = 0$ изланаётган тенглама бўлади.

$$2) x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2) = -\frac{b}{a} [(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2] = -\frac{b}{a} \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{3c}{a} \right) = -\frac{b}{a^3} (b^2 - 3ac); \quad x_1^3 x_2^3 = \frac{c^3}{a^3}.$$

Илдизларининг йиғиндиси $-\frac{b}{a^3} (b^2 - 3ac)$ га, кўпайтмаси эса $\frac{c^3}{a^3}$ га тенг бўлган квадрат тенглама тузамиз:

$x^2 + \frac{b(b^2 - 3ac)}{a^3}x + \frac{c^3}{a^3} = 0$ ёки $a^3x^2 + b(b^2 - 3ac)x + c^3 = 0$, бу изланаётган тенглама бўлади.

579. $x^2 + px + q = 0$ тенглама илдизлари x_1 ва x_2 . Илдизлари $x_1^2 + x_2^2$ ва $2x_1 \cdot x_2$ бўлган квадрат тенглама тузилсин.

580. $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг илдизлари x_1 ва x_2 . Бу тенгламани ечмасдан илдизлари $(x_1 + 3x_2)$ ва $(x_2 + 3x_1)$ бўлган квадрат тенглама тузилсин.

581. $x^2 + px + q = 0$ тенгламанинг илдизлари x_1 ва x_2 . Бу тенгламани ечмасдан, илдизлари $(x_1 - 2x_2)$ ва $(x_2 - 2x_1)$ бўлган квадрат тенгламанинг $x^2 - px + (9q - 2p^2) = 0$ экани исбот қилинсин.

582. $ax^2 + bx + c = 0$ тенглама илдизлари x_1 ва x_2 . Илдизлари $\frac{1}{x_1}$ ва $\frac{1}{x_2}$ бўлган квадрат тенглама $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$ кўринишида бўлиши исбот қилинсин.

583. Илдизлари $ax^2 + bx + c = 0$ тенглама илдизларига тескари сонлардан иборат бўлган квадрат тенглама тузилсин.

584. Илдиэлари $x^2 + px + q = 0$ тенглама илдиэларига тескарн сонлардан иборат бўлган ҳам ишораси билан фарқ қилган квадрат тенглама $qx^2 - px + 1 = 0$ кўринишида бўлиши исбот қилинсин.

585. $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг илдиэлари x_1 ва x_2 . Шундай квадрат тенглама тузингки, 1) $-\frac{x_1}{x_2}$ ва $-\frac{x_2}{x_1}$; 2) $x_1 + \frac{1}{x_2}$ ва $x_2 + \frac{1}{x_1}$; 3) $\frac{1}{x_1^3}$ ва $\frac{1}{x_2^3}$ унинг илдиэлари бўлсин.

586. $x^2 + px + q = 0$ квадрат тенгламанинг илдиэлари x_1 ва x_2 :

1) илдиэлари $-\frac{x_1}{x_2}$ ва $-\frac{x_2}{x_1}$ дан иборат квадрат тенглама

$$qx^2 + (p^2 - 2q)x + q = 0$$

кўринишида экани,

2) илдиэлари $x_1 + \frac{1}{x_2}$ ва $x_2 + \frac{1}{x_1}$ дан иборат квадрат тенглама $qx^2 + p(q+1)x + (q+1)^2 = 0$ кўринишида экани,

3) илдиэлари $\frac{1}{x_1^3}$ ва $\frac{1}{x_2^3}$ дан иборат квадрат тенглама $q^3x^2 + p(p^2 - 3q)x + 1 = 0$ кўринишида бўлиши исбот қилинсин.

6- мисол. **Қандай шарт бажарилганда $x^2 + px + q = 0$ тенглама илдиэларининг айирмаси n ($n > 0$) га тенг бўлади?**

Ечиш. Виет теоремасига кўра: $x_1 + x_2 = -p$, масала шартига кўра: $x_1 - x_2 = n$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 - x_2 = n \end{cases}$$

системани ечсак: $x_1 = \frac{n-p}{2}$; $x_2 = \frac{-(n+p)}{2}$. Виет теоремасига кўра: $x_1 \cdot x_2 = q$ бўлиб, x_1 ва x_2 ўрнига қийматларини қўйилса.

$\frac{n-p}{2} \left(-\frac{n+p}{2} \right) = q$; $\frac{p^2 - n^2}{4} = q$; $p^2 - n^2 = 4q$; $n^2 = p^2 - 4q$. Демак, $p^2 - 4q = n^2$ шарт бажарилса, берилган тенглама илдиэларининг айирмаси n га тенг бўлади.

Те кшириш: $p^2 - 4q = n^2$ бўлса, берилган квадрат тенглама илдиэлари $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{n^2}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{n}{2}$;

$$x_1 - x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \frac{n}{2} \right) - \left(-\frac{p}{2} - \frac{n}{2} \right) = n.$$

587. $ax^2 + bx + c = 0$ тенглама илдиэларининг нисбати n га тенг. Бу тенглама коэффициентлари орасидаги боғланиш топилсин.

588. $ax^2 + bx + c = 0$ тенглама илдиэларининг нисбати n^k га тенг. Бу тенглама коэффициентлари орасидаги боғланиш топилсин.

589. p билан q орасида қандай муносабат бўлганда $x^2 + px + q = 0$ тенглама илдизларининг нисбати 3 га тенг бўлади?

590. c билан b орасида қандай муносабат бўлганда $cx^2 + bx + c = 0$ тенглама илдизлари ўзаро тескари сонлар бўлади?

591. Биквадрат тенглама ($ax^4 + bx^2 + c = 0$) нинг барча илдизларининг йиғиндиси ва кўпайтмаси топилсин.

7- мисол. **Биквадрат тенгламанинг илдизларидан бири 3 га, иккинчиси — 5 га тенг. Шу биквадрат тенгламани аниқланг.**

Ечиш. Биквадрат тенгламада $x_1 = -x_2$ ва $x_3 = -x_4$ бўлгани учун изланаётган биквадрат тенгламанинг қолган икки илдизи — 3 ва 5 бўлади. У ҳолда изланаётган тенглама $(x-3) \cdot (x+3) \cdot (x-5) \cdot (x+5) = 0$ кўринишда бўлади; қавслар ичидаги ифодалар ўзаро кўпайтирилса: $(x^2-9) \cdot (x^2-25) = 0$ ёки $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$.

592. Илдизларидан: 1) бири m га, иккинчиси n га; 2) бири a га, иккинчиси $-\frac{1}{a}$ га; 3) бири $\frac{a}{b}$ га, иккинчиси $\frac{b}{a}$ га тенг бўлган биквадрат тенглама тузилсин.

593. Илдизларининг бири c га, иккинчиси $\frac{1}{c}$ га тенг бўлган биквадрат тенглама илдизлари квадратларининг йиғиндиси, илдизлари квадратларининг кўпайтмаси топилсин.

594. Шундай биквадрат тенглама тузингки, унинг илдизларидан икkitаси: 1) $4x^2 - 4x - 3 = 0$, 2) $cx^2 - (bc + 1)x + b = 0$ тенглама илдизларидан иборат бўлсин.

595. Шундай биквадрат тенглама тузингки, унинг илдизларидан бири $\frac{x-3}{2} - 5 = \frac{4(x-2)}{3} + 4(3-x)$ тенгламанинг илдизидан, иккинчиси эса $\frac{2lx-1}{1,5lx-1} = 2$ тенгламанинг илдизидан иборат бўлсин.

596. $x^4 + bx^2 + 36 = 0$ тенгламанинг илдизларидан бири 2 га тенг. b ни аниқланг.

38-§. Квадрат тенглама тузиш билан масалалар ечиш

1- масала. **Пионерлар саёҳатга бориш учун баб-баравардан пул йиғиб, 80 сўм тўплашди. Агар улардан 8 таси саёҳатга бормай қолса, борганларнинг ҳар бири 50 тийиндан ортиқ тўлаши керак бўлади. Қанча пионер саёҳатга бормоқчи?**

Ечиш. Саёҳатга бормоқчи бўлган пионерлар сони x . Ҳар қайси пионер $\frac{80}{x}$ сўмдан пул тўлаган. Саёҳатга $x - 8$ пионер борса, уларнинг ҳар бири $\frac{80}{x-8}$ сўмдан тўлаши керак бўлади. 50 тийин—

0,5 сўм бўлгани учун масала шартига кўра

$$\frac{80}{x-8} - \frac{80}{x} = \frac{1}{2} \text{ *)}$$

тенглама ҳосил бўлади.**)

Масала шартига кўра $x > 8$ бўлиши керак. Ҳосил бўлган тенгламани нормал ҳолга келтирамиз:

$$x^2 - 8x - 1280 = 0.$$

У ҳолда: $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 + 1280} = 4 \pm \sqrt{1296} = 4 \pm 36.$

$$x_1 = 40, x_2 = -32.$$

Масала мазмунига кўра, x нинг 8 ва ундан кичик сон бўлиши мумкин эмас. Шунинг учун x_2 масалага жавоб бўлмайди.

Жавоб: 40 пионер саёҳатга бормоқчи.

Жавобни текшириш. Ҳар бир пионер $\frac{80 \text{ сўм}}{40} = 2$ сўмдан пул тўлаган. Агар пионерларнинг 8 таси саёҳатга бормаё қолса, $40 - 8 = 32$ пионернинг ҳар бири $\frac{80 \text{ сўм}}{32} = 2,5$ сўмдан пул тўлаши керак бўлади. Бунда ҳар бир пионерга $2,5 \text{ сўм} - 2 \text{ сўм} = 0,5 \text{ сўм}$ (ёки 50 тийин) дан ортиқ тўлашга тўғри келади.

597. Колхознинг пахтачилик бригадаси 200 га ерга маълум муддатда чигит экиб бўлиши керак эди, ammo ҳар куни пландагидан 5 га ортиқ ерга чигит экиб, ишни муддатидан 2 кун олдин тугатди. Чигит экиш неча кунда тамомланган?

598. Ўқувчи 360 бет китоб ўқиди. Унинг ҳар куни ўқиган бетларининг сони тенг. Агар у ҳар куни 4 бетдан кўп ўқиганда китобни 1 кун олдин тамомлар эди. Ўқувчи китобни неча кунда ўқиган?

2-масала. *Ўнликлар рақами бирликлардан 4 та кам бўлган икки хонали сон билан, шу соннинг рақамларининг ўринларини алмаштириш натижасида ҳосил бўлган сондан 2 бирлик кичик бўлган соннинг кунайтмаси 2627 га тенг. Шу икки хонали сон топилсин.*

Ечиш. Изланаётган соннинг ўнликлар рақами x , бирликлар рақами $x + 4$. Изланаётган сон $10x + (x + 4) = 11x + 4$. Рақам-

*) Бу тенглама ўрнига $\frac{80}{x-8} = \frac{80}{x} + \frac{1}{2}$ ёки $\frac{80}{x-8} - \frac{1}{2} = \frac{80}{x}$ тенгламалардан бирини ёзиш ҳам мумкин.

**) 2-усул. x та пионернинг ҳар бири $\frac{80}{x}$ сўмдан пул тўлаган. $(x-8)$ киши бўлса, уларнинг ҳар бири $\left(\frac{80}{x} + \frac{1}{2}\right)$ сўмдан, ҳаммаси бўлиб $\left(\frac{80}{x} + \frac{1}{2}\right) \cdot (x-8) = 80$ сўм тўлайди. Ҳосил бўлган тенглама ечилади.

ларни алмаштириш натижасида ҳосил бўлган икки ҳонали сон:
 $10(x + 4) + x = 11x + 40$. Масала шартига кўра:

$$(11x + 4) \cdot (11x + 40 - 2) = 2627.$$

Бу тенгламани соддалаштирсак: $121x^2 + 462x - 2475 = 0$. $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{825}{121}$. Икки ҳонали соннинг рақамлари манфий каср сон бўлиши мумкин эмас. Шунинг учун x_2 масалага жавоб бўла олмайди. У ҳолда изланаётган соннинг бирликлар рақами $x + 4 = 7$ га тенг бўлади.

Жавоб. Икки ҳонали сон: 37.

Жавобни текшириш: $7(73 - 2) = 37 \cdot 71 = 2627$.

599. Икки ҳонали соннинг ўнликлар рақами бирликларидан 4 марта ортиқ. Шу сондан 2 ни айриб, рақамлари изланаётган сон рақамларининг тескари тартибда ёзилишидан ҳосил бўлган сонга 2 ни қўшсак ва натижаларни кўпайтирсак, 2400 чиқади. Шу икки ҳонали сон топилсин.

3- масала. *1967 йилги футбол чемпионатида олий лигадаги биринчи группа командаларининг ҳар бири қолган командалар билан бир мартадан ўйнаганда, ҳаммаси бўлиб 171 та ўйин ўйналгани маълум бўлса, олий лигада нечта команда мамлакат чемпиони номини олиш учун курашган?*

Ечиш. Ол й лигада x та команда қатнашган. Ҳар бир команда ўзидан бошқа $(x - 1)$ та команда билан $(x - 1)$ марта учрашган. Ҳар бир ўйинда 2 команда ўйнайди. Барча ўйинлар сони:
 $\frac{x \cdot (x - 1)}{2} = 171$.

Бу тенгламани соддалаштирсак: $x^2 - x - 342 = 0$. Бу тенгламани ечсак: $x_1 = 19$, $x_2 = -18$.

Командалар сони x мусбат сон бўлиши керак. Шу сабабли x_2 масалага жавоб бўла олмайди.

Жавоб. Олий лигада 19 команда қатнашган.

Жавобни текшириш. 19 команданинг ҳар бири ўзидан бошқа 18 команда билан ўйнаган. Ҳар бир ўйинда 2 команда қатнашгани учун мамлакат чемпиони номини олиш учун командалар бир мартадан учрашгандан кейин командалар ўртасида ҳаммаси бўлиб $(19 \cdot 18) : 2 = 171$ ўйин ўйналган.

600. Шахмат турнирида қатнашувчиларнинг ҳар бири қолганлари билан бир мартадан ўйнади. Ҳаммаси бўлиб 66 та ўйин ўйналган бўлса, турнирга неча киши қатнашган?

601. X синфни битирувчи ўқувчилар бир-бирлари билан расмларини алмаштирдилар. Агар 992 та расм алмаштирилган бўлса, шу синфда нечта ўқувчи бўлган?

4- масала. *Колхоз ерининг $\frac{2}{3}$ қисмини икки хил қувватли иккита трактор биргаликда 4 кунда ҳайдай-*

ди. Агар колхоз ерини биринчи тракторнинг ёлғиз ўзи, иккинчи тракторнинг ёлғиз ўзидан 5 кун тез ҳайдаб бўлиши маълум бўлса, шу ерни ҳар бир тракторнинг ёлғиз ўзи неча кунда ҳайдаб бўлади?

Ечиш. 1-усул. Ишни бир бирлик деб қабул қиламиз. Бутун ерни иккинчи трактор x кунда ҳайдасин, дейлик. У ҳолда биринчиси $x - 5$ кунда ҳайдаб тамомлайди. Биринчи трактор бир кунда бутун ернинг $\frac{1}{x-5}$ қисмини, иккинчиси эса $\frac{1}{x}$ қисмини, иккала трактор биргаликда $\frac{2}{3} : 4 = \frac{1}{6}$ қисмини ҳайдайди.

Иккала трактор бир кунда бутун ернинг $\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x}$ ёки $\frac{1}{6}$ қисмини ҳайдайди. Демак:

$$\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6}$$

Бу тенгламани соддалаштирсак: $x^2 - 17x + 30 = 0$. Илдизлари $x_1 = 15$, $x_2 = 2$. Масала шартига кўра $x > 5$ бўлиши керак. Шунинг учун $x_2 = 2$ масалага жавоб бўла олмайди.

II усул. Иккала трактор биргаликда колхознинг бутун ерини $4 : \frac{2}{3} = 6$ кунда ҳайдайди.

Иккинчи тракторнинг ёлғиз ўзи бутун колхоз ерини x кунда ҳайдаса, 1 кунда $\frac{1}{x}$ қисмини, 6 кунда $\frac{6}{x}$ қисмини ҳайдайди. Биринчи тракторнинг ёлғиз ўзи бутун колхоз ерини $(x - 5)$ кунда ҳайдаса, 1 кунда $\frac{1}{x-5}$ қисмини, 6 кунда эса $\frac{6}{x-5}$ қисмини ҳайдайди. Ҳар икки трактор 6 кунда бутун колхоз ерини ҳайдайди, яъни:

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x-5} = 1.$$

Бу тенгламани ечиб ҳам юқоридаги жавобни оламиз.

Жавоб. Биринчи тракторнинг ёлғиз ўзи билан 10 кунда, иккинчисининг ёлғиз ўзи билан 15 кунда ҳайдаб бўлади.

Жавобни текшириш. 1) Колхоз ерини биринчи тракторнинг ёлғиз ўзи, иккинчи тракторнинг ёлғиз ўзидан 15 кун — 10 кун = 5 кун тез ҳайдаб бўлади. 2) Биринчи трактор 1 кунда колхоз ерининг $\frac{1}{10}$ қисмини, 4 кунда $\frac{4}{10}$ қисмини, иккинчиси 1 кунда $\frac{1}{15}$ қисмини, 4 кунда $\frac{4}{15}$ қисмини ҳайдайди. Иккала трактор биргаликда 4 кунда колхоз ерининг $\frac{4}{10} + \frac{4}{15} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ қисмини ҳайдайди.

602. Кино залидаги барча томошабинлар икки эшикдан $3\frac{3}{4}$ минутда чиқиб кетадилар. Агар томошабинларни фақат катта эшикдан чиқарилса, фақат кичик эшикдан чиқарилганига қараганда 4 минут

кам вақт сарф бўлади. Томошабинлар фақат катта эшикнинг ўзидан неча минутда ва фақат кичик эшикнинг ўзидан неча минутда чиқиб кетишлари мумкин?

603. Икки машинистка биргаликда қўлёзмини 6 соату 40 минутда босади. Биринчи машинистканинг ёлғиз ўзи бутун ишни иккинчисига нисбатан 3 соат олдин босиб бўлиши маълум булса, шу ишни ҳар қайси машинистканинг ёлғиз ўзи неча соатда босади?

604. Колхоз еридаги зовурни чуқурлаштиришда учта лой оладиган машина биргаликда ишлади. Шу ишни фақат биринчи машина бажарса, 10 кун ортиқ вақт керак бўлади; фақат иккинчи машина бажарса, 20 кун ортиқ вақт керак бўлади; фақат учинчи машина бажарса, 6 марта кўпроқ вақт керак бўлади. Бу ишни ҳар қайси машина неча кунда бажаради?

605. Ҳовузга учта труба ўтказилган. Бўш ҳовузни иккинчи трубанинг ёлғиз ўзи, биринчи трубанинг ёлғиз ўзига қараганда 3 соат кечроқ тўлдиради. Учинчи трубанинг ёлғиз ўзи эса тўла ҳовузни бўшатиш учун, биринчи труба ҳовузни тўлатишга сарф қилган вақтдан 3 соат кам вақт сарф қилади. Агар трубаларнинг иккитасидан сув кириб, учинчисидан чиқиб турса, бўш ҳовуз 36 соатда тўлади. Биринчи трубанинг ёлғиз ўзи ва иккинчи трубанинг ёлғиз ўзи бўш ҳовузни неча соатда тўлдиради? Учинчи трубанинг ёлғиз ўзи тўла ҳовузни неча соатда бўшатади?

606. Икки тракторчи бир звено ерига 4 кунда чигит экиб бўлади. Агар ернинг ярмига биринчи тракторчи чигит экиб бўлгач, қолганига иккинчи тракторчи чигит экса, 9 кун керак бўлади. Ҳар бир тракторчининг ёлғиз ўзи шу ерга неча кунда чигит экиб бўлади?

607. Икки ишчи бир ишни биргалашиб ишласа, 12 кунда тамомлайди. Агар ишнинг ярмини биринчи ишчи бажариб бўлгач, қолганини иккинчиси бажарса, иш 25 кунда тамом бўлади. Шу ишни ҳар бир ишчининг ёлғиз ўзи неча кунда тамомлайди?

608. Бир ишни бир бригада 3,5 кун ишлагандан кейин, қолган ишни бошқа бригада 6 кунда тамомлади. Ҳамма ишни иккинчи бригаданинг ёлғиз ўзи, биринчи бригаданинг ёлғиз ўзига қараганда 5 кун кейин тамомлайди. Ҳар қайси бригаданинг ёлғиз ўзи шу ишни неча кунда тамомлайди?

609. Икки ишчининг иккинчиси биринчисидан $1\frac{1}{2}$ кун кейин ишга тушди ва ишни 7 кунда тамомлади. Агар бу ишни ҳар қайси ишчи ёлғиз ўзи ишласа, биринчи ишчининг иккинчисига қараганда 3 кун ортиқ ишлашига тўғри келади. Ҳар қайси ишчи ёлғиз ўзи бу ишни неча кунда тамомлайди?

5-масала. *Пароход оқим бўйича 60 км масофага бориб, 32 км орқасига қайтиш учун 4,5 соат кетди. Оқим тезлиги соатига 4 км булса, пароходнинг турғун сувдаги тезлиги топилсин.*

Ечиш. Пароходнинг турғун сувдаги тезлиги соатига x км, оқим бўйича тезлиги соатига $(x + 4)$ км, оқимга қарши тезлиги соатига $(x - 4)$ км. Пароход оқим бўйича 60 км ни $\frac{60}{x+4}$ соатда, оқимга қарши 32 км ни $\frac{32}{x-4}$ соатда ўтган. Бориб қайтиш учун ҳаммаси бўлиб $4,5 = \frac{9}{2}$ соат кетган, яъни: $\frac{60}{x+4} + \frac{32}{x-4} = \frac{9}{2}$.

Масала шартига кўра $x > 4$. Тенгламани нормал ҳолга келтирсак:

$$9x^2 - 184x + 80 = 0.$$

Бундан:

$$x_{1,2} = \frac{92 \pm \sqrt{8464 - 720}}{9} = \frac{92 \pm \sqrt{7744}}{9} = \frac{92 \pm 88}{9},$$

$x_1 = 20$; $x_2 = -\frac{4}{9}$; x_2 — масалага жавоб бўла олмайди (чунки $x > 4$ шартини қай оатлантирмайди).

Жавоб. Пароходнинг турғун сувдаги тезлиги соатига 20 км.

Жавобни текшириш. Пароходнинг оқим бўйича тезлиги соатига $(20 + 4) = 24$ км. Оқимга қарши тезлиги соатига $20 - 4 = 16$ км. Пароход оқим бўйича 60 км ни $\frac{60}{24} = 2,5$ соатда, оқимга қарши 32 км ни эса $\frac{32}{16} = 2$ соатда ўтади. У ҳолда бориб қайтишга $2,5$ соат + 2 соат = $4,5$ соат кетади.

610. Аҳмаднинг укаси коптогини оқаётган сувга тушириб юборди. Аҳмад уйдан чиққунча 3 минут вақт ўтди. Аҳмад коптокни 250 м масофада қувиб етди. Агар Аҳмад коптоқдан соатига 4,5 км тезроқ ҳаракат қилган бўлса, коптокнинг (.қимнинг) тезлиги топилсин.

611. А қишлоқдан дарё оқими бўйича сол оқизилди. Сол оқизилгандан 4 соат ўтгач, шу қишлоқдан моторли қайиқ йўлга чиқиб, 15 км юргач солнга етиб олди. Моторли қайиқ солдан соатига 12 км ортиқ юрса, солнинг тезлиги топилсин.

6- масала. *Аравани кейинги ғилдирагининг айланаси олдинги ғилдирагининг айланасига қараганда 2 марта узун. Агар кейинги ғилдиракнинг айланасини 2 дм камайтириб, олдинги ғилдиракнинг айланасини 4 дм орттирилса, 120 м масофада кейинги ғилдирак олдингисига қараганда 20 та кам айланади. Ҳар бир ғилдиракнинг айланасини топинг.*

Ечиш. Ғилдирак айланаларининг узунлиги x дм ва $2x$ дм. Агар ғилдирак айланаларининг узунлиги $(x + 4)$ дм ва $(2x - 2)$ дм бўлса, 120 метрда олдинги ғилдирак $\frac{1200}{x+4}$ марта, кейинги ғилдирак эса $\frac{1200}{2x-2}$ марта айланади. У ҳолда масала шартига кўра

$$\frac{1200}{x+4} - \frac{1200}{2x-2} = 20$$

тенгламани тузамиз. Бу тенгламанинг ҳадларини 20 га бўлсак:

$$\frac{60}{x+4} - \frac{30}{x-1} = 1.$$

Буни соддалаштирсак:

$$60x - 60 - 30x - 120 = x^2 + 3x - 4$$

ёки

$$x^2 - 27x + 176 = 0.$$

Бу тенгламани ечсак:

$$x_1 = 16, x_2 = 11. \text{ У ҳолда } 2x_1 = 32; 2x_2 = 22.$$

Жавоб. Гилдираклар айланасининг узунлиги 16 дм ва 32 дм ёки 11 дм ва 22 дм.

Жавобни текшириш. 1) $\frac{1200}{16+4} = 60$ (марта), $\frac{1200}{32-2} = \frac{1200}{30} = 40$ (марта); $60 - 40 = 20$ (марта).

2) $\frac{1200}{11+4} = \frac{1200}{15} = 80$ (марта), $\frac{1200}{22-2} = \frac{1200}{20} = 60$ (марта) $80 - 60 = 20$ (марта).

612. Арава олдинги гилдирагининг узунлиги кейингисиникидан 5 дм қисқа. Агар олдинги гилдирак айланасининг узунлигини 2 марта камайтириб, кейингисини 2 марта орттирилса, 500 м масофада олдинги гилдирак кейингисидан 40 та ортиқ айланар эди. Ҳар қайси гилдирак айланасининг узунлиги топилсин.

7- масала. *А ва В шаҳарлар ораси темир йўл билан 66 км, сув йўли билан 80,5 км. Поезд пароходга қараганда 4 соат кейин йўлга чикиб, В га пароходдан 15 минут олдин етиб келади. Агар поезднинг тезлиги пароходнинг тезлигидан соатига 30 км ортиқ бўлса, уларнинг тезликлари аниқлансин.*

Ечиш. Поезднинг тезлиги соатига x км, пароходнинг тезлиги соатига $(x - 30)$ км. Поезд $\frac{66}{x}$ соат, пароход эса $\frac{80,5}{x-30}$ соат йўл юрган. 4 соат + 15 минут = $4\frac{1}{4}$ соат = $\frac{17}{4}$ соат. Масала шартига кўра тенглама тузамиз:

$$\frac{80,5}{x-30} - \frac{66}{x} = \frac{17}{4}$$

Бу тенгламани ечсак, ушбу жавоб чиқади: поезднинг тезлиги соатига 44 км, пароходники соатига 14 км.

Жавобни текшириш. Пароход 80,5 км ни $\frac{80,5}{14} = 5\frac{3}{4}$ соатда, поезд эса 66 км ни $\frac{66}{44} = 1\frac{1}{2}$ соатда ўтади, $5\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$ соатга тенг.

613. Ораларидаги масофа 900 км бўлган икки шаҳардан бир-бирига қарши икки поезд йўлга чиқиб; йўлнинг ўртасида учрашишди. Агар биринчи поезд иккинчисидан 1,5 соат кеч йўлга чиққан бўлса ва унга қараганда тезлиги соатига 10 км ортиқ бўлса, ҳар қайси поезднинг тезлиги аниқлансин.

614. Поезд 220 км йўлни маълум вақтда босиб ўтиши керак эди. У 2 соат юрганидан кейин 10 минут тўхтаб қолди; кейин бу вақтни етказиб олиш учун тезлигини соатига 5 км оширди ва мўлжалланган вақтда етиб борди. Поезднинг бошланғич тезлиги топилсин.

615. Йўловчи 26 км йўлни маълум вақтда босиб ўтиши керак эди. Лекин у маълум тезлик билан 1 км йўл юргач, тезлигини соатига 1 км камайтирди; натижада $1\frac{1}{2}$ соат кечикди. Йўловчининг бошланғич тезлиги топилсин.

8- масала. *48 сўмлик фотоаппаратнинг нархи кетма-кет икки марта бир хил процентга арзонлаштирилгандан кейин 30 сўм 72 тийин бўлди. Ҳар гал фотоаппаратнинг нархи неча % дан арзонлаштирилган?*

Ечиш. Ҳар сафар фотоаппаратнинг нархи $x\%$ дан арзонлаштирилган.

Фотоаппаратнинг нархи биринчи марта $\frac{48}{100}x = \frac{12x}{25}$ сўмга арзонлашиб, $(48 - \frac{12x}{25})$ сўм бўлган. Иккинчи марта $(48 - \frac{12x}{25}) \cdot \frac{x}{100}$ сўмга арзонлаштирилгач, $48 - \frac{12x}{25} - (48 - \frac{12x}{25}) \cdot \frac{x}{100} = 30\frac{18}{25}$ сўм бўлган. Бу тенгламани соддалаштирсак: $x^2 - 200x + 3600 = 0$. Буни ечсак:

$x_1 = 180$, $x_2 = 20$. $x_1 = 180 > 100$ бўлгани учун масалага жавоб бўла олмайди.

Жавоб. Ҳар гал фотоаппаратнинг нархи 20% дан арзонлаштирилган.

Жавобни текшириш. Фотоаппарат биринчи марта $\frac{48}{100} \cdot 20 = 9,6$ сўм арзонлашиб, $48 - 9,6 = 38,4$ сўмга тушган. Иккинчи марта $\frac{38,4}{100} \cdot 20 = 7,68$ сўмга арзонлашиб, $38,4 - 7,68 = 30,72$ сўмга тушган.

616. Икки йил ичида шаҳарнинг аҳолиси 40000 кишидан 44100 кишига етди. Бу шаҳар аҳолисининг йиллик ўртача кўпайиш процентини топинг.

617. Якка тартибда имо ат қураётган хизматчи давлат банкидан 700 сўм қарз олди ва иморатини битказгач биринчи йилнинг охирида 371 сўм, иккинчи йил охирида 360,5 сўм тўлаб қарздан қутилди. Банкдан қарзни неча % дан тўлаш шарти билан олинган?

9- масала. *Орасидаги масофа 24 км бўлган А ва В қишлоқлардан бир вақтда икки автомобиль бир-бирига*

қараб жўнади. Улар учрашгандан кейин A дан чиққан автомобиль B қишлоғига 16 минутда, B дан чиққан автомобиль эса A га 4 минутда етиб келди. Ҳар бир автомобилнинг тезлиги топилсин.

Ечиш. A дан B гача бўлган масофани AB билан белгилаймиз. Автомобиллар C пунктда учрашган бўлсин. $AC = x$ деб белгиласак, $CB = 24 - x$ (км) бўлади. 4 минут = $\frac{1}{15}$ соат, 16 минут = $\frac{4}{15}$ соат, бўлгани учун, A қишлоқдан чиққан автомобилнинг тезлиги соатига $\frac{24-x}{\frac{4}{15}} = \frac{15(24-x)}{4}$ (км), B қишлоқдан чиққан автомобилнинг тезли-

ги эса соатига $x : \frac{1}{15} = 15x$ (км) га тенг.

Учрашгунча биринчи автомобиль $x : \frac{15(24-x)}{4} = \frac{4x}{15(24-x)}$ соат, иккинчиси эса $(24-x) : 15x = \frac{24-x}{15x}$ соат юрган. Учрашгунча уларнинг юрган вақти тенг бўлгани учун:

$$\frac{4x}{15(24-x)} = \frac{24-x}{15x} \quad *)$$

буни содалаштирсак; $x^2 + 16x - 192 = 0$.

Тенглама илдизлари: $x_1 = 8$, $x_2 = -24$.

Масофа (x) манфий сон билан ифодаланмагани учун $x_2 = -24$ масалага жавоб бўлмайди.

У ҳолда $AC = 8$ км бўлиб, автомобиллардан биринчисининг тезлиги соатига $\frac{15(24-8)}{4} = 60$ км, иккинчисининг тезлиги соатига $15 \cdot 8 = 120$ км.

Жавоб. Биринчи автомобилнинг тезлиги соатига 60 км, иккинчисининг тезлиги эса соатига 120 км.

Жавобни текшириш. Автомобиллар A дан 8 км масофада учрашган бўлиб, биринчиси қолган 16 км ни $\frac{16}{60} = \frac{4}{15}$ соатда ёки $\frac{4}{15} \times 60 = 16$ минутда, иккинчиси қолган 8 км ни эса $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$ соатда ёки 4 минутда ўтган.

618. Икки йўловчи A ва B қишлоқлардан бир-бирига қараб келмоқда. Улар учрашганда бири иккинчисидан 2 км ортиқ югани маълум бўлди. Учрашгандан кейин юришни давом эттириб, 40 минутдан кейин биринчиси B га келди; $1\frac{1}{2}$ соатдан кейин иккинчиси A га келди. AB масофа топилсин.

*) Бу тенгламани қуйидагича ечиш ҳам мумкин: $4x^2 = (24-x)^2$ ёки $|2x| = \sqrt{24-x}$. Бундан:

а) $2x = 24-x$, $x_1 = 8$,

б) $-2x = 24-x$, $x_2 = -24$.

619. Ораси 180 км булган A ва B шаҳарлардан икки автомобиль бир вақтда бир-бирига қараб йўлга чиқиб, 2 соатдан кейин учрашиб, тўхтамасдан юришни давом эттирдилар. Биринчи автомобиль B га келгандан 54 минут кейин иккинчиси A га келди. Автомобилларнинг тезлиги аниқлансин.

10- масала. *Икки хил эритманинг бирида 800 г туз, иккинчисида 600 г туз бор. Иккала эритмани қуйиб 10 кг ли янги эритма ҳосил қилинди. Биринчи эритмадаги тузнинг процент миқдори иккинчи эритмадаги тузнинг процент миқдоридан 10 та ортиқ бўлса, аралашмадаги ҳар қайси эритманинг оғирлиги топилсин.*

Ечиш. Биринчи эритма x кг булса, иккинчиси $(10 - x)$ кг бўлади. Биринчи эритмада туз $\frac{0,8 \cdot 100}{x} = \frac{80}{x}$ процент, иккинчи эритмада эса $\frac{0,6 \cdot 100}{10 - x} = \frac{60}{10 - x}$ процент бўлади. Масаланинг шартига биноан:

$$\frac{80}{x} - \frac{60}{10 - x} = 10.$$

Буни ечамиз: $x_1 = 20$, $x_2 = 4$. Масала шартига кўра $x < 10$ бўлгани учун биринчи илдиз ярамайди. $10 - x = 10 - 4 = 6$.

Жавоб. Биринчи эритманинг оғирлиги 4 кг, иккинчи эритманинг оғирлиги эса 6 кг экан.

Жавобни текшириш. 800 г туз 4 кг ли эритманинг $\frac{0,8 \cdot 100}{4} = 20\%$ ини, 60 г туз 6 кг ли эритманинг $\frac{0,6 \cdot 100}{6} = 10\%$ ини ташкил этади: $20\% - 10\% = 10\%$.

620. Икки булак қотишманинг оғирлиги 65 кг бўлиб, биринчи булақда 5 кг соф мис, иккинчи булақда эса 10 кг соф мис бор. Иккинчи булақдаги мис, биринчи булақдагисидан 5% қадар ортиқ. Ҳар қайси булакнинг оғирлиги топилсин.

621. Миснинг икки хил қотишмаси бор. Биринчи қотишмадаги миснинг проценти иккинчи қотишмадаги мис процентидан 40 та кам. Иккала қотишмани қўшиб эритиб, 36% мис бўлган қотишма ҳосил қилинди. Биринчи қотишмада 6 кг иккинчи қотишмада 12 кг мис борлиги маълум бўлса, биринчи қотишмада неча процент ва иккинчи қотишмада неча процент мис бўлгани аниқлансин.

11- масала. *Иккита металл парчасидан бирининг оғирлиги 880 Г, иккинчисининг оғирлиги 858 Г. Биринчи парчанинг ҳажми иккинчисининг ҳажмидан 10 см³ кам. Биринчи металл парчасининг солиштира оғирлиги иккинчисиникидан 1 Г/см³ ортиқ бўлса, ҳар қайси металл парчасининг солиштира оғирлиги топилсин.*

Ечиш. Иккинчи металл парчасининг солиштира оғирлиги d Г/см³, биринчи металл парчасининг солиштира оғирлиги $(d + 1)$

$\Gamma/\text{см}^3$ Биринчи металл парчасининг ҳажми $\frac{880}{d+1} \text{ см}^3$, иккинчи металл парчасининг ҳажми $\frac{858}{d} \text{ см}^3$. Масала шартига кўра:

$$\frac{880}{d+1} + 10 = \frac{858}{d} \text{ ёки } 5d^2 + 16d - 429 = 0,$$

$d_1 = 7,8$; $d_2 = -11$. ($d_2 = -11 < 0$ бўлгани учун масалага жавоб бўла олмайди).

Жавоб. Иккинчи парчанинг солиштирма оғирлиги $7,8 \Gamma/\text{см}^3$, биринчисиники эса $7,8 + 1 = 8,8 (\Gamma/\text{см}^3)$.

Жавобни текшириш. Биринчи металл ҳажми $\frac{880}{8,8} = 100 (\text{см}^3)$, иккинчисиники $\frac{858}{7,8} = 110 (\text{см}^3)$. $110 \text{ см}^3 - 100 \text{ см}^3 = 10 \text{ см}^3$.

622. 8 г суюқликни зичлиги камроқ бўлган 6 г суюқлик билан аралаштириб, солиштирма оғирлиги $0,7 \Gamma/\text{см}^3$ бўлган аралашма ҳосил қилинди. Суюқликлардан бирининг солиштирма оғирлиги иккинчисиникидан $0,2 \Gamma/\text{см}^3$ ортиқ бўлса, ҳар қайси суюқликнинг солиштирма оғирлигини топинг.

12- масала. *Бир-биридан 1 кг фарқ қилувчи икки сув массасининг ҳар бирига 88 калория иссиқлик берилди. Массаси кўп булган сувнинг массаси кам булган сувга қараганда $\frac{4}{5}$ градус камроқ исигани маълум бўлди. Ҳар қайси сув массаси аниқлансин.*

Ечиш Сув массаси x кг ва $(x+1)$ кг. Массаси кам бўлган сув $\frac{88}{x}$ градусга, массаси кўп бўлган сув $\frac{88}{x+1}$ градусга исиган. Масалари ҳар хил бўлган икки идишдаги сув иссиқликлари орасидаги айирма $\frac{4}{5}$ градусга тенг бўлгани учун қуйидаги тенгламани тузамиз:

$$\frac{88}{x} - \frac{88}{x+1} = \frac{4}{5} \text{ ёки } x^2 + x - 110 = 0.$$

Ҳосил бўлган тенгламани ечсак: $x_1 = 10$; $x_2 = -11$. $x_2 = -11 < 0$ масалага жавоб бўла олмайди.

Жавоб. 10 кг ва 11 кг.

Жавобни текшириш. 10 кг сув 88 калория иссиқликдан $\frac{88}{10} = 8,8$ градусга исиган. 11 кг сув эса 88 калория иссиқликдан $\frac{88}{11} = 8$ градусга исиган. $8,8 - 8 = 0,8 = \frac{4}{5}$ (градус).

623. Бир-биридан 2 кг га фарқ қилувчи икки сув массасидан озига 96 калория, кўпига 64 калория иссиқлик берилган. Массаси кам бўлган суюқликнинг массаси кўп бўлган суюқликка қараганда 8° га ортиқ исигани маълум бўлди. Ҳар қайси суюқликнинг массаси топилинсин.

13- масала. Соф спирт тулдирилган бакдан ундаги спиртнинг бир қисми қуйиб олиниб, ўрнига сув қуйиб қўйилди; сўнгра бакдан яна ўшанча литр аралашма қуйиб олинди, шундан кейин бакда 49 л соф спирт қолди. Бакнинг сиғими 64 л. Бакдан биринчи сафар қанча литр спирт ва иккинчи сафар қанча литр спирт қуйиб олинган*.

Ечиш Биринчи сафар x л спирт қуйиб олиниб, $(64 - x)$ л спирт қолган. Сув қуйилгач, ҳар бир литр суяқликнинг $\frac{64 - x}{64}$ қисми соф спирт бўлган, яна x л қуйиб олингач. бу x л аралашмада $\frac{64 - x}{64} \cdot x$ литр спирт бўлган ва бакда

$$64 - x - \frac{64 - x}{64} \cdot x = \frac{1}{64} (64 - x)^2 \text{ л}$$

соф спирт қолган. Масала шартига кўра:

$\frac{1}{64} (64 - x)^2 = 49$ ёки $(64 - x)^2 = 49 \cdot 64$. $|64 - x| = 56$. бундан $x_1 = 8$, $x_2 = 120$. $x_2 = 120 > 64$ бўлгани учун масалага жавоб бўла олмайди Иккинчи сафар $\frac{64 - x}{64} x = \frac{64 - 8}{64} \cdot 8 = 7$ литр спирт қуйиб олинган.

Жавоб. Биринчи сафар 8 л иккинчи сафа 7 л спирт қуйиб олинган.

624. Идишда 20 л спирт бор эли. Спиртнинг бир қисмини қуйиб олиб, ўрнига сув қуйиб қўйилди, сўнгра идишдан яна ўшанча литр аралашма қуйиб олиниб ўрнига сув қуйиб қўйилди Шундан кейин идишда сувдан уч марта кам спирт қолди. Биринчи марта неча литр спирт қуйиб олинган?

625. Икки хил спиртдан 72° ли аралашма ҳосил қилинган.

Биринчи хил спирт 96° ли бўлиб, иккинчи хилидан биринчи хилига нисбатан 10 л ортиқ олинган. Иккинчи хил спиртнинг градуслар сони литрлар сонидан 26 та ортиқ. Ҳар қайси хил спиртдан неча литрдан олинган?

626. Идишдаги 92° ли спиртдан 1 л қуйиб олинди ва ўрнига сув қуйиб қўйилди, кейин аралашмадан яна 1 литри қуйиб олиниб ўрнига сув қуйиб қўйилди. Агар кейин спиртнинг қуввати 69° бўлиб қолган бўлса, идишнинг ҳажми топилсин. (Бу масала спирт билан сувнинг солиштирма оғирлиги бир хил деб, фараз қилиб ечилсин.)

627. Соатни 31 сўм 25 тийинга сотганда, соатнинг таннархи неча сўм турса, шунча процент фойда қилинади. Соатнинг таннархи қанча туради?

* Бу масала ва бунга ўхшаш кейинги масалаларда аралашманинг ҳажми спирт билан сув ҳажмларининг йиғиндисига тенг деб фараз қилинган. Аслида эса аралашманинг ҳажми бир оз кичикроқ бўлади.

628. Икки пароход учрашгандан кейин бири жанубга, иккинчиси шарққа қараб кетди. Учрашгандан 2 соат кейин пароходлар орасидаги масофа 60 км бўлди. Пароходлардан бирининг тезлиги иккинчисининг тезлигидан соатига 6 км ортиқ бўлса, ҳар қайси пароходнинг тезлиги топилсин.

629. 15 т сабзавотни ташиш учун маълум миқдорда юк кўтарадиган бир неча юк машинаси сўралган эди. Аммо бундай машиналар базада йўқлиги учун сўралганидан битта ортиқ ва ярим тонна юк кам кўтарадиган машиналар юборилди. Ҳар бир машинага қанчадан сабзавот ортилган?

630. Бир сон учта кетма-кет бутун сонлар кўпайтмасидан иборат. Шу сонни кетма-кет учала соннинг ҳар бирига бўлишдан ҳосил бўлган бўлинмалар йиғиндиси 74 га тенг. Шу сон топилсин.

631. 100, 50, 40 сонлари берилган. Биринчи сондан қандай сонни олиб иккинчи сонга қўшилса, янги ҳосил бўлган сонларнинг иккинчиси биринчиси билан учинчиси орасида ўрта пропорционал бўлади?

632. Бир шаҳардан бир томонга тезликлари соатига 50 км ва 40 км бўлган икки автомобиль йўлга чиқди. Ярим соатдан кейин шу шаҳардан учинчи автомобиль йўлга чиқиб, иккинчи автомобилни қувиб етди; яна 1,5 соатдан кейин биринчи автомобилни қувиб ўтди. Учинчи автомобилнинг тезлиги топилсин.

633. Қабариқ кўпбурчакнинг томонлари сони билан диагоналар сонининг йиғиндиси 15 га тенг. Кўпбурчак томонларининг сони топилсин.

634. Икки пиёда киши икки қишлоқдан бир-бирига қараб йўлга чиқди; улар 2 соат-у 24 минутдан сўнг учрашиб, яна йўлни давом эттиришди. Қишлоқлар орасини биринчи киши иккинчисидан 2 соат ортиқ вақтда ўтган бўлса, ҳар қайси пиёда бутун масофани неча соатда юрган?

635. 36 м масофада араванинг олдинги гилдираги кейингисига қараганда 6 та ортиқ айланади. Агар ҳар қайси гилдиракнинг айланаси 1 м орттирилса, ўша масофада олдинги гилдирак кейингисига қараганда фақат 3 та ортиқ айланар эди. Ҳар қайси гилдиракнинг айланасини топинг.

636. Мотоциклчи маълум тезлик билан 8 км юрди; сўнгра тезлигини соатига 8 км ошириб, яна 8 км юрди. Агар у ҳамма йўлни кейинги тезлик билан юрса мўлжалдан 5 минут олдин етиб келар эди. Мотоциклчи олдин қандай тезлик билан юрган?

637. Тўғри тўртбурчак шаклидаги тунукадан ҳажми 1 дм³ бўлган қопқоқсиз қути ясалган. Бунинг учун тунуканинг бурчакларидан 5 см лик квадратлар кесилган ва ҳосил бўлган четлар букилган. Агар тунуканинг бир томони иккинчисидан 1 дм узун бўлса, шу тунуканинг ўлчовлари топилсин.

638. Поезд 840 км йўл босиши керак эди. Йўлнинг ярмида 30 минут тўхтаб қолди. Кечикмаслик учун тезлигини соатига 2 км оширди. Поезд бугун йўлга қанча вақт сарф қилган?

639. Турри бурчакли учбурчак томонларининг узунликлари: а) кетма-кет бутун сонлар билан, б) кетма-кет жуфт сонлар билан, в) кетма-кет тоқ сонлар билан ифода қилиниши мумкинми?

640. Автомобиль A шаҳардан 276 км узоқликдаги B шаҳарга қараб йўлга чиқди. Икки соатдан кейин, B дан A га қараб иккинчи автомобиль йўлга чиқди. Иккинчи автомобилнинг тезлиги биринчисиникидан соатига 12 км ортиқ. Автомобиллар B дан 108 км масофада учрашган бўлса, ҳар қайси автомобилнинг тезлигини топинг.

641. Шахта тагига тош ташланди. Тош урилгандан кейин чиққан товуш кузатувчига тош ташлангандан 4 сек кейин эшитилди. Товушнинг тезлигини секундига 330 м, эркин тушаётган жисмнинг йўлини $s = \frac{gt^2}{2}$ ($g \approx 10$ м/сек²) деб олиб, шахтанинг чуқурлигини топинг.

642. Секундига 300 м тезлик билан отилган ўқ неча секунддан кейин ердан 2500 м Саландликда бўлади? (Ҳавонинг қаршилиги ҳисобга олинимасин.)

643. Колхознинг бир участкасида машиналарда пахта терувчилар бригадаси бир неча кунда 216 т пахта териши керак эди. Биринчи уч кун ичида бригада кунлик нормани бажарди. Ундан кейин эса ҳар кунни пландан ташқари 8 т дан пахта терди. Шу сабабли план мўлжалланганидан 1 кун олдин орттириб бажарилди ва 232 т пахта терилди. Бригада план бўйича кунига қанча пахта териши керак эди?

644. 543 ва 431 сонлари қандай sanoқ системасида ёзилган бўлса, уларнинг айирмаси ўнли sanoқ системасида 44 га тенг бўлади?

645. Қандай sanoқ системасида $741 - 243 = 476$ тенглик ўринали бўлади?

646*. Ҳар бирининг сифими 30 л дан бўлган икки идишда биргаликда 30 л спирт бор эди. Биринчи идишга тўлгунича сув қўйилиб, бу аралашмадан иккинчи идишга тўлгунича қўйилди. Кейин иккинчи идишдан биринчи идишга 12 л аралашма олиб қўйилди. Шундан сўнг иккинчи идишдаги спирт биринчи идишдагига қараганда 2 л кам бўлди. Дастлаб ҳар қайси идишда қанчадан спирт бўлган?

647. Узунлиги d км бўлган армия колоннаси тош йўлда соатига v км тезлик билан бормоқда. Мотоциклдаги хабарчи колонна орақасидан олдинга қараб йўлга чиқди. У буйруқни олиб бориб бердию, орақасига қайтди. Бориб келишга t минут кетган бўлса, хабарчининг тезлиги аниқлансин.

648*. Шундай турт хонали сон топингки, унинг минглаб хонасидаги ва унлар хонасидаги рақамларни узаро тенг бўлсин, юзлар хонасидаги рақам бирлар хонасидаги рақамидан битта ортиқ бўлсин ва изланаётган сон бутун соннинг квадрати бўлсин.

39- §. Иккинчи даражали (квадрат) тенгсизликлар

Таъриф. $ax^2 + bx + c > 0$ (1) ёки $ax^2 + bx + c < 0$ (2) кўринишдаги тенгсизликка иккинчи даражали (ёки квадрат) тенгсизлик деб аталади. Биз $a > 0$ ҳолни текшириш билан чекланамиз ($a < 0$ ўлган ҳолда берилган тенгсизлик ҳадларини -1 га кўпайтирилади). $ax^2 + bx + c$ — квадрат учҳадни куйидагича айнан ўзгартирамиз:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

у ҳолда берилган (1) ва (2) тенгсизликларни мос ҳолда куйидагича ёзиш мумкин:

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0,$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0,$$

$a > 0$ деб олингани учун, тенгсизлик ҳадларини a га бўлсак:

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0; \quad \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$$

ёки

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 > \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \quad (3)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 < \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (4)$$

(1) ва (2) тенгсизликларни ечиш ўрнига уларга тенг кучли бўлган (3) ва (4) тенгсизликларни ечиш мумкин.

1- ҳол $b^2 - 4ac = 0$ бўлса, (3) тенгсизликнинг ўнг қисми манфий сон бўлгани учун (чунки $4a^2 > 0$) бу тенгсизлик x нинг ихтиёрий қийматида ўринли бўлади; (4) тенгсизлик эса ечимга эга бўлмайди.

2- ҳол. $b^2 - 4ac = 0$ бўлса, (3) тенгсизликни $-\frac{b}{2a}$ дан бошқа ҳар қандай сон қаноатлантиради; (4) тенгсизлик эса ечимга эга бўлмайди.

3- ҳол. $b^2 - 4ac > 0$ бўлса, $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳадни чиқиқли кўпайтувчиларга ажратамиз: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Бунда x_1 ва x_2 , $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг (ҳақиқий) илдизлари.

У ҳолда берилган тенгсизликла ни

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0,$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) < 0$$

кўринишда ёзиш мумкин.

$a > 0$ бўлгани учун, бу тенгсизликларни a га бўлсак:

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0, \quad (5)$$

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0. \quad (6)$$

(5) тенгсизлик кўпайтувчиларнинг ишораси бир хил бўлгандагина ўринли бўлади, яъни:

$$1) \begin{cases} x - x_1 > 0, \\ x - x_2 > 0 \end{cases} \text{ ва } 2) \begin{cases} x - x_1 < 0, \\ x - x_2 < 0. \end{cases}$$

Бу ҳосил бўлган чизиқли тенгсизликлар системаси ечилса, $x_1 < x_2$ бўлганда $x < x_1$ ва $x > x_2$ ечимлар топилади. Шунга ўхшаш (6) тенгсизликни ечиш ўрнига

$$1) \begin{cases} x - x_1 > 0, \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \text{ ва } 2) \begin{cases} x - x_1 < 0, \\ x - x_2 > 0. \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси ечилади ва $x_1 < x < x_2$ жавоб келиб чиқади.

1- мисол. $3x^2 - 6x + 11 > 0$ **тенгсизлик ечилсин.**

Ечиш. $D = 36 - 132 < 0$. $3x^2 - 6x + 11 = 3(x - 1)^2 + 8$ бўлгани учун берилган тенгсизликни $3(x - 1)^2 + 8 > 0$ кўринишда ёзиш мумкин. x нинг ҳар қандай қийматида $(x - 1)^2 \geq 0$ бўлгани учун берилган тенгсизликнинг ечими барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат.

2- мисол. $-0,2x^2 + 0,4x - 5 > 0$ **тенгсизлик ечилсин.**

Ечиш. $D = 0,16 - 4 < 0$, берилган тенгсизликни $-0,2$ га бўлсак: $x^2 - 2x + 25 > 0$. Бунда $x^2 - 2x + 25 = (x - 1)^2 + 24$ бўлгани учун берилган тенгсизлик қуйидаги кўринишни олади. $(x - 1)^2 + 24 > 0$.

x нинг ҳар қандай қийматида $(x - 1)^2 \geq 0$ бўлиб $(x - 1)^2 + 24$ миқдор 24 дан кичик бўла олмагани сабабли, унинг нолдан кичик бўлиши мумкин эмас.

Демак, берилган тенгсизлик ечимга эга эмас.

3- мисол. $x^2 + 4x - 1 > 6x - 2$.

Ечиш. Берилган тенгсизликнинг ўнг қисмидаги ҳадларини чап қисмига ўтқазиб, соддалаштирсак: $x^2 - 2x + 1 > 0$, $D = 4 - 4 = 0$. У ҳолда: $(x - 1)^2 > 0$. 1 дан бошқа ҳар қандай сон бу тенгсизликни ва бунга тенг кучли бўлган берилган тенгсизликнинг ечими бўлади.

4- мисол. $0,4x - 1,04 < -1 + x^2$.

Ечиш. $-x^2 + 0,4x - 0,04 < 0$ ёки $x^2 - 0,4x + 0,04 < 0$; $D = 0,16 - 0,16 = 0$. $(x - 0,2)^2 < 0$. x нинг ҳар қандай қийматида $(x - 0,2)^2 \geq 0$ бўлгани учун, $(x - 0,2)^2$ нолдан кичик бўла олмайди, яъни бу ҳолда $(x - 0,2)^2 < 0$ тенгсизлик ва бунга тенг кучли бўлган берилган тенгсизлик ечимга эга бўлмайди.

649. (Оғзаки.) Тенгсизликларни ечинг: 1) $0,5(x - 2)^2 > 0$;
2) $5(4 - x)^2 < 0$;

3) $2(x + 0,1)^2 + 0,4 > 0$; 4) $4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 < 0$.

650. (Оғзаки.) a қандай сон бўлганда: 1) $a(x+7)^2 > 0$ тенгсизлик ечимга эга бўлмайди? 2) $5(x-1)^2 + a > 0$ тенгсизликнинг ечими ихтиёрий сон бўла олади?

651. Тенгсизликларни ечинг: 1) $x^2 - 2x + 4 > 0$; 2) $x^2 + 4x + 5 < 0$; 3) $2x^2 - 8x + 8 < 0$; 4) $0,04x^2 + 0,4x + 1 > 0$.

5- мисол. $6x - 4 < 2x^2$.

Ечиш. $-2x^2 + 6x - 4 < 0$; $x^2 - 3x + 2 > 0$; $D = 9 - 8 = 1 > 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$ тенгламанинг илдизлари: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ бўлгани учун берилган тенгсизликни $(x-1)(x-2) > 0$ кўринишда ёзиш мумкин. Бунда қўпайтувчилар бир хил ишорали бўлиши керак, яъни:

$$1) \begin{cases} x-1 > 0; & x > 1 \\ x-2 > 0; & x > 2 \end{cases} \Big| x > 2.$$

$$2) \begin{cases} x-1 < 0; & x < 1 \\ x-2 < 0; & x < 2 \end{cases} \Big| x < 1.$$

Демак, берилган тенгсизликнинг ечими: $x < 1$ ва $x > 2$.

6- мисол. $4 - x^2 < 6x - 2x^2 - 4$ **тенгсизликни ечинг.**

Ечиш. $x^2 - 6x + 8 < 0$. $D = 36 - 32 = 4 > 0$; $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; берилган тенгсизликни $(x-2) \cdot (x-4) < 0$ кўринишда ёзамиз. Бу тенгсизликдан қуйидаги системалар тузилади ва ечилади.

$$1) \begin{cases} x-2 > 0, & x > 2 \\ x-4 < 0, & x < 4 \end{cases} \Big| 2 < x < 4; \quad 2) \begin{cases} x-2 < 0, & x < 2 \\ x-4 > 0; & x > 4 \end{cases} \Big| \text{система} \\ \text{ечимга эга} \\ \text{эмас.}$$

Демак, тенгсизликнинг ечими: $2 < x < 4$.

652. (Оғзаки.) Тенгсизликларни ечинг: 1) $(x-1)(x-2) > 0$;

2) $(x-1)(x-2) < 0$.

653. (Оғзаки.) 1) $(2x-4) \cdot (x-3) > 0$; 2) $(4-x) \cdot (x+0,5) > 0$.

654. 1) $4x^2 - 4x - 3 < 0$; 2) $4x^2 - 12x + 5 > 0$.

655. 1) $x^2 + a > 0$ ($a > 0$); 2) $9x^2 + b < 0$ ($b < 0$); 3) $4x^2 - a < 0$ ($a < 0$).

656. $3x^2 - 11x + 3 < x^2 - 3(x-1)$ тенгсизликнинг бутун сонларда ечимлари топилсин.

Тенгсизликларни ечинг:

$$657. 1) \frac{3}{x^2 - x - 6} > 0, \quad 2) \frac{7}{x^2 - 6x + 9} < 0.$$

$$658. 1) \frac{16}{x^2 - 10x + 9} < 0, \quad 2) \frac{64}{4x^2 - 4x - 3} < 0 \text{ тенгсизликларнинг бутун сонларда ечимлари топилсин.}$$

$$7\text{- мисол. } \frac{x^2 - 3x + 0,01}{x^2 - 3x - 4} > 1.$$

$$\text{Ечиш. } \frac{x^2 - 3x + 0,01}{x^2 - 3x - 4} - 1 = \frac{x^2 - 3x + 0,01 - x^2 + 3x + 4}{x^2 - 3x - 4} =$$

$$= \frac{4,01}{x^2 - 3x - 4} > 0. \quad 4,01 > 0 \text{ бўлгани учун } x^2 - 3x - 4 > 0$$

Бўлиши керак, бу тенгсизликни ечсак: $x < -1$ ва $x > 4$.

Қуйидаги тенгсизликларни ечинг:

659. 1) $\frac{x}{x^2+1} < 0$; 2) $\frac{5x^2+4}{1+x^2} > -3$; 3) $\frac{x^4+1}{x^2} > 0$.

660. (Оғзаки.) 1) $\frac{1-x}{x^2+4} > 0$; 2) $\frac{16+3x^2}{3-x} < 0$.

661. 1) $\frac{x^2-x+3}{x^2-x-2} < 1$; 2) $\frac{2x^2+8x}{x^2+4x+4} < 2$.

662*. $\frac{x^3+2x^2+x}{x^3+2x^2-3x} < 1$.

8- мисол. **Тенгсизликни ечинг:** $x^2 - 9 < 0$.

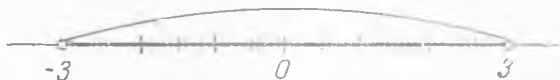
Ечиш. 1-усул. $(x-3) \cdot (x+3) < 0$; бу тенгсизликдан қуйидаги тенгсизликлар системасини тузиб, ҳосил бўлган системани ечамиз

а) $\begin{cases} x-3 > 0, & x > 3, \\ x+3 < 0, & x < -3. \end{cases} \quad | -$

б) $\begin{cases} x-3 < 0, & x < 3 \\ x+3 > 0, & x > -3 \end{cases} \quad | -3 < x < 3^*).$

2-усул. $x^2 < 9$; тенгсизликнинг ҳар икки қисмидаги ифодалар манфий бўлмагани учун: $\sqrt{x^2} < \sqrt{9}$ ёки $|x| < 3$.

Демак, берилган тенгсизликнинг ечимини $|x| < 3$ ёки $-3 < x < 3$ кўринишда ёзиш мумкин. Ечимнинг сон ўқидаги тасвири 9- чизмада кўрсатилган.



9- чизма.

Берилган мисолни иккинчи усулда ечиш қулай экани кўришиб турибди.

9- мисол. $x^2 - 4 > 0$ **тенгсизликни ечинг.**

Ечиш. $x^2 > 4$; $\sqrt{x^2} > \sqrt{4}$ ёки $|x| > 2$.

$|x| > 2$ тенгсизликни $x < -2$ ва $x > 2$ кўрилишида ёзиш мумкин (чунки x нинг ўрнига -2 дан кичик ва 2 дан катта ҳар қан-

*) Кўпайтирилувчиларнинг ишораси ҳар хил бўлиши керак. У ҳолда кўпайтирилувчилардан каттаси $(x+3)$ мусбат, кичиги $(x-3)$ манфий бўлиши керак. Аксинча бўлиши мумкин эмас. Шу сабабдан фақат иккинчи тенгсизликлар системасини ечиш билан чеклансак бўлар эди.

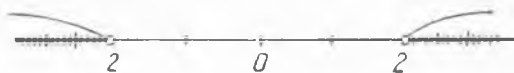
дай сонни қўйсақ, $|x| > 2$ тенгсизлик бажарилаверади). Ечимни сон ўқидаги тасвири 10- чизмада кўрсатилган.

Тенгсизликларни ечинг:

663. 1) $(2x - 3)x < x(x - 3) + 1$; 2) $4(2 - x^2) < -33$.

664. 1) $\frac{4x^2}{x^2 - 16} > 0$; 2) $\frac{x^2 - 1}{3(x + 1)^2} < 0$.

665. 1) $\frac{3(x^2 + 1)}{x^2 - 0,04} < 0$; 2) $\frac{2x - x^2}{9(x - 1)^2} > 0$.



10- чизма.

40- §. Иррационал тенгламаларни ечиш

1-мисол. *Тенгламани ечинг:*

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2x^2 - 3} = -5.$$

Ечиш. $\sqrt{x^2 + 1}$ ва $\sqrt{2x^2 - 3}$ ифодалар x нинг ҳар қандай қийматида ҳам манфий сон бўла олмагани сабабли уларнинг йиғиндиси -5 га тенг бўлиши мумкин эмас. Демак, берилган тенглама x нинг ҳеч қандай қийматида ҳам уринли бўлмайди, яъни тенглама илдизга эга эмас.

2-мисол. *Нима учун $\sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2} = 5$ тенглама илдизга эга бўлмайди?*

Ечиш. $\sqrt{1 - x}$ ифода $1 - x \geq 0$ ёки $x \leq 1$ бўлгандагина маънога эга. $\sqrt{x - 2}$ ифода $x - 2 \geq 0$ ёки $x \geq 2$ бўлганда маънога эга. x нинг 1 дән катта бўлмаган қийматлари бир вақтда 2 ва undan katta бўла олмайди. Шу сабабли берилган тенглама илдизга эга бўлмайди.

666. Нима учун қуйидаги тенгламалар илдизга эга эмас.

1) $\sqrt{2x + 3} + 5 = 0$; 2) $\sqrt{3x - 5} + 7 = 5$; 3) $\sqrt{x - 2} + 1 = -\sqrt{1 - x}$; 4) $\sqrt{-x^2 - 1} - \sqrt{x} = 4$.

3-мисол. *Тенгламани ечинг:* $\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2x - 2}} = 2$.

Ечиш. Тенгламанинг ҳар икки қисмини квадратга кўтарсак:

$2 + \sqrt{2 + \sqrt{2x - 2}} = 2$ ёки $\sqrt{2 + \sqrt{2x - 2}} = 0$. Бу тенгламанинг ҳам ҳар икки қисмини квадратга кўтарсак:

$2 + \sqrt{2x - 2} = 4$ ёки $\sqrt{2x - 2} = 2$. Бу тенгламани чап ва ўнг қисмини квадратга кўтарамиз. У ҳолда $2x - 2 = 4$; $x = 3$.
Жавоб. $x = 3$.

Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

667. 1) $\sqrt{4-x} - \sqrt{5-2x} = 0$; 2) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{8x-4} = 9$;

3) $\sqrt{0,5-x} + 7 = \sqrt{2-4x}$; 4) $\sqrt{0,25+2x} - \sqrt{1+8x} + \sqrt{2,25+18x} = 2$.

668. 1) $\sqrt{5-\sqrt{2x-7}} = 2$; 2) $\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{x+1}}} = 2$;

3) $\sqrt{x^2-2x+1} = 5$; 4) $\sqrt{64-16x^2+x^4} = 1$.

4-мисол. *Тенгламани ечинг:*

$$\sqrt{x-1} = 3x-5.$$

Ечиш. Биринчидан $x-1 \geq 0$ бўлиши (чунки $x-1 < 0$ бўлса, $\sqrt{x-1}$ мавжуд бўлмайди), иккинчидан $3x-5 \geq 0$ бўлиши керак (чунки тенгламанинг чап қисми манфий бўлмайди). Натижада қуйидаги тенгсизликлар системаси тузилади.

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 3x-5 \geq 0. \end{cases}$$

Биринчи тенгсизликдан: $x \geq 1$, иккинчисидан: $x \geq \frac{5}{3}$. Тенгсизликлар системасининг ечими: $x \geq \frac{5}{3}$. Берилган тенгламанинг илдизи охириги тенгсизликни қаноатлантириши керак.

Тенгламанинг ҳар икки қисмини (манфий бўлмагани учун) квадратга кўтарсак:

$x-1 = (3x-5)^2$; бу тенгламани нормал ҳолга келтириб ечамиз, яъни: $9x^2-30x+25 = x-1$; $9x^2-31x+26 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1\frac{1}{9}$.

$x \geq \frac{5}{3}$ шартни $x_1 = 2$ қаноатлантиргани учун берилган тенгламанинг илдизи бўлади, $x_2 = 1\frac{1}{9}$ эса қаноатлантирмагани учун илдиз бўла олмайди*).

Қуйидаги тенгламаларни ечинг.

669. 1) $\sqrt{2x-1} = x-2$; 2) $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{2x+4} = x+2$.

670. 1) $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{2+x}$; 2) $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3(x+1)}$.

5-мисол. *Тенгламани ечинг:*

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{3x-2} - 9 = 0.$$

*) Тенгламанинг илдизи қандай ораликда бўлишини тенгсизликлар системасини ечиш билан аниқлаб олмай, берилган тенгламани ечиб, x нинг топилган қийматларини берилган тенгламага қўйиб текшириб курилса ҳам бўлади.

Ечиш. Биринчидан. $x + 7 \geq 0$, иккинчидан: $3x - 2 \geq 0$, учинчидан: $\sqrt{x + 7} \leq 9$, ёки $x + 7 \leq 81$, тўртинчидан: $\sqrt{3x - 2} \leq 9$ ёки $3x - 2 \leq 81$ бўлиши керак, яъни:

$$\begin{cases} x + 7 \geq 0, \\ 3x - 2 \geq 0. \\ x + 7 \leq 81, \\ 3x - 2 \leq 81 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасини ечсак: $-\frac{2}{3} \leq x \leq 27\frac{2}{3}$. Демак, берилган тенгламанинг илдизи $-\frac{2}{3}$ дан кичик, $27\frac{2}{3}$ дан катта бўла олмайди.

Берилган тенгламани $\sqrt{x + 7} = 9 - \sqrt{3x - 2}$ кўринишда ёзиб, тенгликнинг ҳар икки қисмини квадратга кўтарсак: $x + 7 = 81 - 18\sqrt{3x - 2} + 3x - 2$ ёки $(36 + x) = 9\sqrt{3x - 2}$. Буни квадратга кўтарилса: $1296 + 72x + x^2 = 243x - 162$; $x^2 - 171x + 1458 = 0$. $x_1 = 9$; $x_2 = 162$.

$x = 9$ — берилган тенгламанинг илдизи, 162 эса илдиз бўла олмайди (чунки $-\frac{2}{3} \leq x \leq 27$ шартини қаноатлантирмайди).

Тенгламаларни ечинг:

671. 1) $\sqrt{8 + x} - \sqrt{5x + 20} + 2 = 0$; 2) $\sqrt{5x - 5} - \sqrt{2x - 3} = \sqrt{3x - 2}$.

672. 1) $\sqrt{5x + 4} - \sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x + 1}$; 2) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{4x - 3} = \sqrt{5x - 4}$.

6-мисол. *Тенгламани ечинг:* $4x - 4\sqrt{x} - 3 = 0$.

Ечиш. 1-усул. $\sqrt{x} = y$; $x = y^2$ деб белгиласак: $4y^2 - 4y - 3 = 0$. Бу тенгламани ечсак: $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{2}$.

а) $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ квадратга кўтарилса: $x = \frac{9}{4}$; б) $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$ бу тенглик x нинг ҳеч қандай қийматида мавжуд эмас. Демак, берилган тенгламанинг илдизи $\frac{9}{4}$.

2-усул. $4x - 3 = 4\sqrt{x}$.

Биринчидан $x \geq 0$, иккинчидан $4x - 3 \geq 0$ (чунки, тенгликнинг ўнг қисми манфий эмас); $x \geq \frac{3}{4}$, $(4x - 3)^2 = 4\sqrt{x}$; $16x^2 - 24x + 9 = 16x$; $16x^2 - 40x + 9 = 0$, $x_1 = \frac{9}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$. $x_2 = \frac{1}{4}$ илдиз бўла олмайди (чунки $x \geq \frac{3}{4}$ шартини қаноатлантирмайди).

Тенгламаларни ечинг:

673. 1) $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$; 2) $x^3 - 4x\sqrt{x} - 32 = 0$.

674. 1) $x + \sqrt{x-1} - 7 = 0$; 2) $4x - 5\sqrt{x-1} - 3 = 0$.

675. $\sqrt[3]{4 + \sqrt{10 + 3x}} + \sqrt[3]{\sqrt{x+2} - 10} = 0$.

7-мисол. **Тенгламани ечинг:** $\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt[3]{3x-5} = 1$.

Ечиш. Тенгламани ҳар икки қисмини кубга кўтарамиз. У ҳолда $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$ формулага асосан*: $3x + 2 - (3x - 5) - 3\sqrt{(3x+2)(3x-5)} (\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt[3]{3x-5}) = 1$. Охири қавс ичидаги ифоданинг 1 га тенг эканини эътиборга олиб соддалаштирсак, $-3\sqrt{(3x+2)(3x-5)} = -6$ ёки $\sqrt{(3x+2)(3x-5)} = 2$. Кубга кўтарсак: $9x^2 - 9x - 10 = 8$, ёки $x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Текшириш: 1) $\sqrt[3]{-3+2} - \sqrt[3]{-5-5} = -1 - (-2) = 1$; 2) $\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1} = 2 - 1 = 1$. Демак, берилган тенгламанинг илдизлари: -1 ва 2 .

Тенгламаларни ечинг:

676. $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x+4} = 0$. 677. $\sqrt[3]{5 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{x}} = 3$.

678. $\sqrt[3]{(x+1)^2 + 2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = 3\sqrt[3]{x^2 - 1}$.

8-мисол. **Тенгламани ечинг:** $\sqrt{3x^2 + 7x + 2} - \sqrt{2x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x^2 + 2x}$.

Ечиш. Илдизлар остидаги ифодаларни кўпайтувчиларга ажратсак:

$$\sqrt{(x+2)(3x+1)} - \sqrt{(x+2)(2x-1)} = \sqrt{x(x+2)} \text{ ёки}$$

$$\sqrt{x+2} (\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} - \sqrt{x}) = 0.$$

Кўпайтирилувчиларнинг ҳар бирини нолга тенглаб ҳосил бўлган тенгламаларни ечамиз: а) $x + 2 = 0$; $x = -2$, б) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} - \sqrt{x} = 0$ ёки $\sqrt{3x+1} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{x}$. Берилган тенгламада биринчидан, $3x^2 + 7x + 2 \geq 0$ бўлиши, иккинчидан, $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$ бўлиши, учинчидан, $x^2 + 2x \geq 0$ бўлиши, тўртинчидан, $3x^2 + 7x + 2 \geq 2x^2 + 3x - 2$ бўлиши керак.

$$\begin{cases} 3x^2 + 7x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 + 2x \geq 0 \\ 3x^2 + 7x + 2 \geq 2x^2 + 3x - 2 \end{cases}$$

* $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3a b (a \pm b)$.

тенгсизликлар системасининг ечими $x \leq -2$ ва $x \geq \frac{1}{2}$. Демак, берилган тенгламанинг илдизи $x \leq -2$ ва $x \geq \frac{1}{2}$ шартини қаноатлантириши керак. Охирги тенгламани ечайлик: $(\sqrt{3x+1})^2 = (\sqrt{2x-1} + \sqrt{x})^2$; бундан $3x+1 = 2x-1 + 2\sqrt{x(2x-1)} + x$ ёки $\sqrt{x(2x-1)} = 1$; $2x-x-1 = 0$; тенгламанинг илдизлари: $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$. $x_2 = -\frac{1}{2}$ берилган тенгламанинг илдизи эмас (чунки $x \geq \frac{1}{2}$ шартни қаноатлантирмайди). Берилган тенгламанинг илдизлари: -2 ва 1 .

Тенгламаларни ечинг:

$$679. \sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{2x^2 + x - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$680. \sqrt{2x^2 - 9x + 4} + 3\sqrt{2x - 1} = \sqrt{2x^2 + 21x - 11}.$$

$$681. \sqrt{x(1 + \sqrt{x})} - \sqrt{x(1 + x)} = \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 + \sqrt{x}}.$$

$$682. \sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} - 4 = 0; \quad 2)\sqrt[3]{x} + 6 = \sqrt[3]{x^2}.$$

9-мисол. *Тенгламани ечинг:*

$$x^2 - 5x + 8 = 4\sqrt{x^2 - 5x + 5}.$$

Ечиш. Бу тенгламада $x^2 - 5x + 5 \geq 0$ бўлиши керак. Бу тенгсизликни ечсак: $x \leq \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ ва $x \geq \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$. Шу тенгсизликлардан бирини қаноатлантирган сонгина берилган тенгламанинг илдизи бўла олади. Берилган тенгламани $x^2 - 5x + 5 - 4\sqrt{x^2 - 5x + 5} + 3 = 0$ кўринишида ёзиб, $\sqrt{x^2 - 5x + 5} = y$; $x^2 - 5x + 5 = y^2$ деб белгиласак, $y^2 - 4y + 3 = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламани ечсак: $y_1 = 1$; $y_2 = 3$. y нинг қийматларини ўрнига қўйиб ҳосил бўлган тенгламаларни ечамиз.

а) $\sqrt{x^2 - 5x + 5} = 1$. Квадратга кўтарсак: $x^2 - 5x + 5 = 1$, $x^2 - 5x + 4 = 0$. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

б) $\sqrt{x^2 - 5x + 5} = 3$. Квадратга кўтарсак: $x^2 - 5x + 5 = 9$. $x^2 - 5x - 4 = 0$. $x_3 = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$; $x_4 = \frac{5 - \sqrt{41}}{2}$.

$x \leq \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ ва $x \geq \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ тенгсизликларни $1, 4, \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$ қийматлар қаноатлантиради. Демак, берилган тенгламанинг илдизлари: $1, 4$ ва $\frac{5 + \sqrt{41}}{2}$.

Тенгламаларни ечинг.

$$683. 1) x^2 - 3 + \sqrt{x^2 - 3} = 2; \quad 2) 5 - x^2 + \sqrt{2 - x^2} = 5.$$

$$684. 1) x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 7; 2) x^2 + 3x + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 18.$$

$$685. 1) x^2 + 6x + 5 + 2\sqrt{x^2 + 6x + 13} = 0; 2) x^2 = 3(\sqrt{x^2 + 1} - 1).$$

$$10\text{-мисол. Тенгламани ечинг: } x^2 + 4x - 8\sqrt{8x} + 20 = 0.$$

Ечиш. Берилган тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$x^2 - 4x + 4 + 8x - 8\sqrt{8x} + 16 = 0 \text{ ёки: } (x - 2)^2 + (\sqrt{8x} - 4)^2 = 0.$$

Тенглик қўшилувчиларнинг ҳар бири ноль бўлгандагина ўринли бўлади. Яъни: а) $x - 2 = 0$, $x_1 = 2$. б) $\sqrt{8x} - 4 = 0$; $\sqrt{8x} = 4$; $8x = 16$, $x_2 = 2$. Демак, берилган тенгламанинг илдизи: 2.

Тенгламаларни ечинг:

$$686. x^2 - 3x - 6\sqrt{3x} + 18 = 0.$$

$$687. x^2 - 3x - 2\sqrt{2x} + 6 = 0.$$

$$688. \sqrt{5x-1} + \frac{1}{\sqrt{5x-1}} = \sqrt{5x+15}. 689. \sqrt{2x-1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}}.$$

$$690. 1 + \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x^2}} = 2. 691. \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}.$$

$$692. \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

$$693. \frac{\sqrt{27+x} + \sqrt{27-x}}{\sqrt{27+x} - \sqrt{27-x}} = \frac{27}{x}.$$

$$694. \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 4\sqrt{x^2-1}.$$

$$695. (1+x)\sqrt{1-x} - (1-x)\sqrt{1+x} = 0.$$

$$696. \sqrt{3x-2} + 3x - 2 = 6. 697. 3\sqrt{x-8} - \frac{1}{\sqrt{x-8}} - 2 = 0.$$

$$698. \sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1.$$

$$699. \sqrt{2x^2+3x-4} - \sqrt{2x^2+3x+1} = 7.$$

$$700. (x-3)^2 + 3x - 22 = \sqrt{x^2 - 3x + 7}.$$

$$701*. \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} + 3\sqrt{2x-5} = 7\sqrt{2}.$$

$$702. \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}} + \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} = 34.$$

$$703. \frac{3+x}{3x} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{x^2}}$$

$$704. \sqrt{\frac{3x+2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{3x+2}} = \frac{5}{2}$$

$$705. \sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}} = \frac{13}{6}$$

$$706. \frac{x-9}{\sqrt{x+3}} = x-15$$

$$707. \frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}} = 12. \quad 708. \frac{x^2-4}{x+2} + \frac{x-4}{\sqrt{x-2}} +$$

$$+ \frac{x-9}{\sqrt{x-3}} = 51.$$

$$709*. x + \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+2x} = 3.$$

$$710*. \sqrt{(8-x)^2} + \sqrt[3]{(27+x)^2} = \sqrt{(8-x) \cdot (27+x)} + 7.$$

VI боб

ИККИ НОМАЪЛУМЛИ ЮҚОРИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ, ТЕНГСИЗЛИКЛАР СИСТЕМАСИ

Иккинчи даражали икки номаълумли тенглама (умумий ҳолда)

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

қурилишида бўлади.

(1) тенгламада олдинги учта ҳад — икки ўлчовли, dx ва cy лар бир ўлчовли, (хирги (озод) ҳад эса ноль ўлчовлидир, a, b, c, d, e, f ихтиёрий ҳақиқий сонлар бўлиб, a, b, c лар бир вақтда нолга тенг эмас (ақс ҳолда тенглама 1-даражали бўлар эди), коэффициентлардан бири ёки бир нечтасининг бир вақтда нолга тенг бўлиши мумкин.

Иккинчи даражали икки номаълумли тенгламалар системаси умумий кўринишида қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0. \end{cases} \quad (2)$$

41-§. Иккинчи даражали тенгламалар системасини алгебраик қўшиш ва ўрнига қўйиш усуллари билан ечиш

$$1\text{-мисол. } \begin{cases} xy + x + y = 41 \\ xy - 3x - 3y = -3. \end{cases}$$

$$\text{Ечиш. } \begin{cases} xy + x + y = 41 \\ xy - 3x - 3y = -3 \end{cases} \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right| \end{array} \begin{cases} 3xy + 3x + 3y = 123. \\ xy - 3x - 3y = -3 \\ \hline 4xy = 120; \quad xy = 30. \end{cases}$$

$xy = 30$ қийматни биринчи тенгламага қўйсақ, $x + y = 11$. У ҳолда қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} xy = 30, \\ x + y = 11. \end{cases}$$

Бу система ечилса: $x_1 = 6$, $y_1 = 5$; $x_2 = 5$, $y_2 = 6$.

Берилган мисолни алгебраик қўшиш усули билан едик. Энди бу мисолни ўрнига қўйиш усули билан ечайлик. Биринчи тенгламадан, номаълумларнинг бири (масалан, x) ни иккинчиси (y) орқали ифодалаймиз.

$$x = \frac{41 - y}{y + 1}. \quad (*)$$

x нинг қийматини иккинчи тенгламага қўямиз:

$$\frac{41 - y}{y + 1} \cdot y - \frac{3(41 - y)}{y + 1} - 3y = -3.$$

Бу тенгламани соддалаштирсак, $y^2 - 11y + 30 = 0$; $y_1 = 6$, $y_2 = 5$. y нинг қийматлари (*) тенгламага қўйилса, $x_1 = 5$, $x_2 = 6$.

Ўрнига қўйиш усулидан, сдатда, системани ташкил этувчи тенгламалардан бири биринчи даражали бўлган ҳолда ёки иккинчи даражали бўлса ҳам, юқоридаги мисоллардагидек, номаълумлардан бирини иккинчиси орқали ифодалаш осон бўлган ҳолларда фойдаланилади.

2- мисол.
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 16, \\ x^2 + xy - y^2 = 20. \end{cases}$$

Ечиш.
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 16, \\ x^2 + xy - y^2 = 20 \end{cases} \begin{matrix} | 1 \\ | 2 \end{matrix}, \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 16, \\ 2x^2 + 2xy - 2y^2 = 40, \\ \hline 4x^2 - xy = 56. \end{cases}$$

Бу тенгламадан y ни x орқали ифода қиламиз. У ҳолда $y = \frac{4x^2 - 56}{x}$.

y нинг қийматини иккинчи тенгламага қўйсақ,

$$x^2 + x \cdot \frac{4x^2 - 56}{x} - \left(\frac{4x^2 - 56}{x}\right)^2 = 20,$$

$x^2 + 4x^2 - 56 - \frac{16x^4 - 448x^2 + 56^2}{x^2} = 20$. Соддалаштирсак: $11x^4 -$

$- 372x^2 + 3136 = 0$; $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{14}{11}}$, $x_{3,4} = \pm 4$. У ҳолда

$$y_{1,2} = \frac{4 \cdot \frac{196}{11} - 56}{\pm \sqrt{\frac{14}{11}}} = \frac{784 - 616}{\pm \sqrt{\frac{14}{11}}} = \frac{168}{\pm \sqrt{\frac{14}{11}}} = \pm \frac{12}{\sqrt{11}};$$

$$y_{3,4} = \frac{4 \cdot 16 - 56}{\pm 4} = \frac{+8}{\pm 4} = \pm 2.$$

Жавоб: $\left(\pm \frac{14}{\sqrt{11}}; \pm \frac{12}{\sqrt{11}}\right)$, $(\pm 4, \pm 2)$.

$$3\text{-мис л. } \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0 \\ xy + 2 - 2y - x = 0. \end{cases}$$

Ечиш. Бу мисолни ўрнига қўйиш усули билан ишлаган маъқул. Аммо иккинчи тенгламанинг чап қисмини қўпайтувчиларга ажратсак

$$xy + 2 - 2y - x = (xy - x) + (2 - 2y) = x(y - 1) - 2(y - 1) = (y - 1)(x - 2).$$

$(y - 1)(x - 2) = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Қўпайтирилувчиларнинг ҳар бирини нолга тенглаш билан икки тенглама ҳ сил бўлади. Бу тенгламаларни ҳар бирини берилган системанинг биринчи тенгламаси билан биргаликда қараб, қуйидаги

$$\text{а) } \begin{cases} y - 1 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{ва б) } \begin{cases} x - 2 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0 \end{cases}$$

системаларни ҳосил қилиб, ҳар бирини ўрнига қўйиш усули билан ишлаш ишни енгиллаштиради.

а) системадан $y = 1$ қийматини иккинчисига қўйсак,

$2x^2 - 3x + 5 - 5 = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{3}{2}$. б) системада $x_3 = 2$ қийматини иккинчи тенгламага қўйсак, $8 - 6y + 5y - 5 = 0$; $y_2 = 3$.

Жавоб: $(0; 1)$, $(\frac{3}{2}; 1)$, $(2; 3)$.

Тенгламалар системаларини ечинг:

$$711. \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 68, \\ x^2 - y^2 + x - y = 44. \end{cases} \quad 712. \begin{cases} xy - 3y + 2x - 6 = 0, \\ x^2 + 2y^2 - 2x - y = 13. \end{cases}$$

$$713. \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + 4xy - 2x - 1 = 0, \\ x + y = 5 \end{cases}$$

42-§. „Сунъий“ усулда ечиладиган баъзи иккинчи даражали тенгламалар системаси

$$\text{I. А. Ушбу } \begin{cases} x + y = m, \\ xy = n \end{cases} \quad (3)$$

тенгламалар системасини ечиш лозим бўлсин. Агар (3) система ечимга эга бўлса, бу ечим (Виет теоремасига тескари теоремага биноан) $z^2 - mz + n = 0$ квадрат тенгламанинг илдизлари бўлиши керак.

$$z_{1,2} = + \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}.$$

Изоҳ: (3) система ечимга эга бўлсин* учун $m^2 - 4n > 0$, $m^2 \geq 4n$, $|m| \geq 2\sqrt{n}$ бўлиши керак.

* Ҳақиқий ечимлар назарда тутилади (буидан кейинги мисолларда ҳам фақат ҳақиқий ечимлар назарда тутилади).

Жавоб: $\left(\frac{m}{2} \pm \frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2}; \frac{m}{2} \mp \frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2}\right)$.

Б. Агар ушбу

$$\begin{cases} x - y = p, \\ xy = q \end{cases} \quad (3')$$

тенгламалар системаси ечимга эга бўлса, бу системани

$$\begin{cases} x + (-y) = p, \\ x \cdot (-y) = -q. \end{cases}$$

кўринишда ёзиб, (3) ҳолга келтириб, $z^2 - pz - q = 0$ квадрат тенглама ечилади.

$$z_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{4}},$$

$$z_1 = \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2} = x_1, \text{ ёки } -y_2 = \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2};$$

$$z_2 = \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2} = -y_1, \text{ ёки } x_2 = \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Изох: (3') система ечимга эга бўлсин учун $p^2 + 4q \geq 0$ ёки $p^2 \geq -4q$ бўлиши керак.

Жавоб: $\left(\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}; -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}\right)$

В. $\begin{cases} ax + by = c, \\ xy = d \end{cases} \quad (3'')$

система ҳам (3) системанинг умумий кўринишидан иборат. Ҳақиқатан ҳам, иккинчи тенгламани ab га кўпайтирсак:

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ ax \cdot by = abd \end{cases}$$

хосил бўлади. ax ва by ни $z^2 - cz + abd = 0$ тенглама илдизлари деб қараш мумкин. Бу тенглама илдизлари (z_1 ва z_2) ни топсак:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{z_1}{a}, \\ y_1 = \frac{z_2}{b} \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{z_2}{a}, \\ y_2 = \frac{z_1}{b} \end{cases}$$

экани аниқланади.

1-мисол. *Тенгламалар системасини ечинг.*

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ xy = 2 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 2x + (-3y) = 1, \\ 2x \cdot (-3y) = -12 \end{cases}$$

Илдиэларидан бири $2x$, иккинчиси — $3y$ бұлган кидрат тенглама куйидаги тенглама бұлади:

$$z^2 - z - 12 = 0, \quad z_1 = 4, \quad z_2 = -3.$$

z_1 ва z_2 ўрнига галма-гал $2x$ ва $-3y$ ни қўямиз. У ҳолда:

$$2x = 4, \quad x_1 = 2; \quad -3y = -3; \quad y_1 = 1.$$

$$-3y = 4, \quad y_2 = -\frac{4}{3}; \quad 2x = -3; \quad x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Жавоб: $(2; 1)$ ва $(-\frac{3}{2}; -\frac{4}{3})$.

II. Ушбу

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases} \quad (4)$$

система ечилсин.

Ечиш. 1-усул. Ўрнига қўйиш усули билан ечилади.

2-усул. Биринчи тенгламани квадратга кўтариб, ундан иккинчи тенгламани айирсак:

$$2xy = a^2 - b, \quad \text{бундан: } xy = \frac{a^2 - b}{2}.$$

(4) системани ечиш ўрнига ундан соддароқ

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = \frac{a^2 - b}{2} \end{cases}$$

системани ечиш кифоя.

Изоҳ: (4) система $2b - a^2 > 0$, ёки $a^2 < 2b$, ёки $|a| < \sqrt{2b}$ бўлгандагина ечимга эга бўлади.

$$\text{III. } \begin{cases} x^2 + y^2 = m, \\ xy = n. \end{cases} \quad (5)$$

Ечиш. 1-усул. Ўрнига қўйиш усули билан ечилади.

2-усул. Иккинчи тенгламани 2 га кўпайтириб, биринчи тенгламага қўшсак: $x^2 + 2xy + y^2 = m + 2n$, ёки $x + y = \pm \sqrt{m + 2n}$, энди

$$\text{а) } \begin{cases} xy = n, \\ x + y = +\sqrt{m + 2n}; \end{cases} \quad \text{ва} \quad \text{б) } \begin{cases} xy = n \\ x + y = -\sqrt{m + 2n} \end{cases}$$

системаларни ечиш кифоя.

3-усул. Иккинчи тенгламани 2 га кўпайтириб, биринчи тенгламадан айирсак:

$$x^2 - 2xy + y^2 = m - 2n \quad \text{ёки} \quad x - y = \pm \sqrt{m - 2n},$$

энди

$$\text{а) } \begin{cases} xy = n, \\ x - y = +\sqrt{m - 2n} \end{cases} \quad \text{ва} \quad \text{б) } \begin{cases} xy = n, \\ x - y = -\sqrt{m - 2n} \end{cases}$$

системаларни ечиш кифоя.

4-усул. Иккинчи тенгламани 2 га кўпайтириб, аввал биринчи тенгламага қўшиб, $(x+y)^2 = m+2n$ ёки $x+y = \pm \sqrt{m+2n}$ ни, сўнгра биринчи тенгламадан айтириб, $(x-y)^2 = m-2n$ ёки $x-y = \pm \sqrt{m-2n}$ тенгламани ҳосил қилинади ва қуйидаги тўртта система тузилади ва ечилади:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} x+y = +\sqrt{m+2n}; \\ x-y = +\sqrt{m-2n}; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x+y = +\sqrt{m+2n}; \\ x-y = -\sqrt{m-2n}; \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} x+y = -\sqrt{m+2n}; \\ x-y = +\sqrt{m-2n}; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} x+y = -\sqrt{m+2n}; \\ x-y = -\sqrt{m-2n}. \end{cases} \end{array}$$

5-усул. Иккинчи тенгламани квадратга кўтариб берилган системани қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m, \\ x^2 y^2 = n^2. \end{cases}$$

x^2 ва y^2 ни $z^2 - mz + n^2 = 0$ квадрат тенгламанинг илдизлари деб қабул қила оламиз. Охириги тенгламани ечиб, z_1 ва z_2 лар аниқланади ва $z_1 = x^2$, $z_2 = y^2$ ва $z_1 = y^2$; $z_2 = x^2$ тенгликлардан x ва y лар топилади*.

Изоҳ. (5) система $m \pm 2n \geq 0$ бўлгандагина ечимга эга бўлади.

Қуйидаги тенгламалар системалари сунъий усуллар билан ечилин:

$$\begin{array}{ll} 714. \begin{cases} x+y = m, \\ xy = -2m^2. \end{cases} & 715. \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5a^2}{2}, \\ xy = \frac{3a^2}{4}. \end{cases} \\ 716. \begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{13}{6}, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases} & 717. \begin{cases} x^2 y + xy^2 = 30, \\ xy = 6. \end{cases} \\ 718. \begin{cases} x^2 y - xy^2 = 6, \\ x - y = 2. \end{cases} & \end{array}$$

IV. Қўпинча икки номаълумли тенгламалар системасини ташкил этувчи тенгламанинг ҳар бири иккинчи ёки юқори даражали тенглама бўлади ва бир қарашда сунъий усулда ечиладиган системаларга ўхшамайди ҳамда ўрнига қўйиш усули билан ечиб бўлмайди, ёки ечиш анча қийин бўлади. Бундай ҳолларда берилган тенгламалар устида маълум амалларни бажариш билан берилган система сунъий усуллардан бирига ёки ўрнига қўйиш усули билан ечиладиган системага келтирилади ва ечилади.

2-мисол. *Ушбу*
$$\begin{cases} x^2 y + xy^2 = 48, \\ xy + x + y = 14 \end{cases}$$

системани ечинг.

* 5-усул берилган тенгламада $n > 0$ бўлган ҳолда ишлатилади.

Ечиш: 1-усул. Биринчи тенгламани $xy \cdot (x + y) = 48$ кўринишда ёзиб $x + y = a$, $xy = b$ деб белгиласак:

$$\begin{cases} a \cdot b = 48, \\ a + b = 14, \end{cases}$$

бундан $a_1 = 6$, $b_1 = 8$; $a_2 = 8$, $b_2 = 6$.

Бу қийматлар ўрнига қўйилса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 6 \end{cases}$$

системалар ҳосил бўлади ва ечилади.

2-усул. Биринчи тенгламани $xy(x + y) = 48$ кўринишига келтириб, иккинчи тенгламадан $xy = 14 - (x + y)$ нинг қийматини унга қўйилса, $[14 - (x + y)] \cdot (x + y) = 48$ ёки $(x + y)^2 - 14(x + y) + 48 = 0$.

Бу тенглама $(x + y)$ га нисбатан квадрат тенглама бўлиб, уни ечсак, $x + y = 8$ ва $x + y = 6$ топилади ва

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ xy + x + y = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 6, \\ xy + x + y = 14 \end{cases}$$

системалари ечилади.

3-усул. Биринчи тенгламани $xy(x + y) = 48$ кўринишга келтириб, бу тенгламага иккинчи тенгламадан $(x + y) = 14 - xy$ нинг қиймати ўрнига қўйилади. У ҳолда $xy(14 - xy) = 48$ ёки $(xy)^2 - 14x + 48 = 0$. Бу тенгламани xy га нисбатан ечсак: $xy = 8$ ва $xy = 6$ топилади, ҳамда

$$\begin{cases} xy = 8, \\ xy + x + y = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 6, \\ xy + x + y = 14; \end{cases}$$

системалар ечилади.

Жавоб: (4, 2), (2, 4) ($4 \pm \sqrt{10}$, $4 \mp \sqrt{10}$).

Тенгламалар системаларини ечинг:

$$719. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ xy = 36. \end{cases}$$

$$720. \begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{3}{2} \\ y - x = 12. \end{cases}$$

$$721. \begin{cases} x^2 + y^2 - (x + y) - 12 = 0, \\ xy - 2(x + y) + 8 = 0. \end{cases}$$

43-§. Икки номаълумли юқори даражали тенгламалар системасини ёрдамчи номаълум киритиш билан ечиш

Баъзан иккинчи (юқори) даражали тенгламалар системасини ечишда ёрдамчи номаълум киритиш системани ечишни осонлашти-

ради. Ёрдамчи номаълум шундай киритилиши керакки, натижада берилганига нисбатан соддароқ система ҳосил бўлсин*.

$$1\text{- мисол. } \begin{cases} (x^2 + xy + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} = 185, \\ (x^2 - xy + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} = 65. \end{cases}$$

Ечиш. $x^2 + y^2 = u$, $xy = v$ деб белгиласак:

$$\begin{cases} (u + v) \sqrt{u} = 185, \\ (u - v) \sqrt{u} = 65. \end{cases}$$

Тенгламаларни қўйсак: $2u \sqrt{u} = 250$, $u \sqrt{u} = 125$, $u = 25$.
У ҳолда: $v = 12$. u билан v нинг қиймати ўрнига қўйилса:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12 \end{cases}$$

система ҳосил қилиниб, бу системани ечиш билан $(\pm 4, \pm 3)$, $(\pm 3, \pm 4)$ ечимлар олинади.

Баъзан системани ташкил этувчи тенгламалардан биттаси (мураккаби) да ёрдамчи номаълум киритиб, унга тенг кучли соддароқ тенглама олинади ва уни иккинчи тенглама билан биргалаштириб, берилганидан соддароқ система ҳосил қилинади ва ечилади.

2- мисол. **Тенгламалар системасини ечинг:**

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3y - 2x}{y}} + \sqrt{\frac{4y}{3y - 2x}} = 2\sqrt{2}, \\ 3(x^2 + 1) = (y + 1) \cdot (y - x + 1). \end{cases}$$

Ечиш: $\sqrt{\frac{3y - 2x}{y}} = u$ деб белгиласак, биринчи тенглама $u + \frac{2}{u} = 2\sqrt{2}$ кўринишга келади. Бундан: $u = \sqrt{2}$. u нинг қиймати ўрнига қўйилса, $\frac{3y - 2x}{y} = 2$ ёки $y = 2x$ содда тенглама ҳосил бўлди. У ҳолда берилган системани ечиш ўрнига

$$\begin{cases} y = 2x, \\ 3(x^2 + 1) = (y + 1) \cdot (y - x + 1) \end{cases}$$

система (ўрнига қўйиш усули билан) ечилади. *Жавоб:* (2, 4), (1, 2).
Тенгламалар системасини ечинг:

$$722. \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$$

$$723. \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2} = a, \\ x^4 - y^4 = 400a^4 \quad (a > 0). \end{cases}$$

* Олдинги параграфдаги 2- мисолни ечишда ёрдамчи номаълум киритилди.

44-§. Чап қисми номаълум (x ва y) ларга нисбатан бир жинсли бўлган (ёки бир жинсли системага келтириладиган) тенгламалар системасини ечиш

Чап қисми x ва y га нисбатан бир жинсли бўлган икки номаълумли иккинчи даражали тенгламалар* системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = m, \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = n. \end{cases} \quad (6)$$

Бундай системани ечиш учун ёрдамчи номаълум киритамиз: $\frac{y}{x} = u$ ($x \neq 0$) деб белгилаб, $y = ux$ ни берилган тенгламаларга қўйиб, бирини иккинчисига бўлсак, u га нисбатан квадрат тенглама

$$\frac{a + bu + cu^2}{a' + b'u + c'u^2} = \frac{m}{n} \quad (6')$$

хосил бўлади. Бу ерда $a' + b'u + c'u^2 \neq 0$ бўлиши керак, (6') тенгламани ечсак. $u_1 = A_1$ ва $u_2 = A_2$ бўлади. Бу ерда:

$$A_{1,2} = \frac{(b'm - bn) \pm \sqrt{(b'm - bn)^2 - 4(cn - c'm)(an - a'm)}}{2(cn - c'm)}$$

u нинг қийматлари ўрнига қўйилса, $y = A_1x$ ва $y = A_2x$ ларнинг ҳар бирини берилган тенгламалардан бири (соддароғи) билан (масалан, биринчиси билан) бирга олиб,

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = m, \\ y = A_1x \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = m, \\ y = A_2x \end{cases}$$

системаларни ҳосил қилиб ечсак,

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{m}{a + bA_1 + cA_1^2}}; \quad y_{1,2} = \pm A_1 \cdot \sqrt{\frac{m}{a + bA_1 + cA_1^2}};$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{m}{a + bA_2 + cA_2^2}}; \quad y_{3,4} = \pm A_2 \cdot \sqrt{\frac{m}{a + bA_2 + cA_2^2}}^{**}$$

1-мисол.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 9. \end{cases}$$

Ечиш. 1-усул. $y = ux$ деб белгиласак:

$$\begin{cases} x^2 + ux^2 + u^2x^2 = 19, \\ 3x^2 - 2ux^2 + u^2x^2 = 9 \end{cases}$$

ёки

$$\frac{1 + u + u^2}{3 - 2u + u^2} = \frac{19}{9}.$$

* Чап қисми ax^2 , bxy , cy^2 кўринишдаги ҳадлардангина тузилади.

** (6) система ҳақиқий ечимга эга бўлсин учун илдиз остидаги ифодалар манфий бўлмаслиги керак.

Бу ерда $u^2 - 2u + 3$ ифода u нинг ҳеч қандай (ҳақиқий) қийматида нолга айланмайди. Ҳосил бўлган тенгламани ечсак:

$u_1 = 1,5$ ва $u_2 = 3, 2$. u_1 ва u_2 нинг қиймати ўрнига қўйилса: $y = 1,5x$ ва $y = 3,2x$. Бу тенгламаларнинг ҳар бирини берилган системадаги 1-тенглама билан биргаликда олиб қўйидаги

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, & (*) \\ y = 1,5x \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ y = 3,2x \end{cases} \quad (**)$$

системаларни тузиб, уларни ечсак: $(\pm 2; \pm 3); \left(\pm \frac{5}{19}\sqrt{19}; \pm \frac{16}{19}\sqrt{19}\right)$.

2-у с ул. Биринчи тенгламани 9 га, иккинчисини 19 га кўпайтирсак:

$$\begin{cases} 9x^2 + 9xy + 9y^2 = 171, \\ 57x^2 - 38xy + 19y^2 = 171. \end{cases}$$

Иккинчи тенгламадан биринчисини айирсак:

$$48x^2 - 47xy + 10y^2 = 0.$$

Бу тенглама ҳадларини $x^2 \neq 0$ га бўламиз ($x = 0$ бўлиши мумкин эмас. Чунки $x = 0$ бўлса $y = 0$ бўлади, $x = y = 0$ эса берилган системани қаноатлантирмайди). У ҳолда

$$48 - 47 \cdot \frac{y}{x} + 10 \frac{y^2}{x^2} = 0.$$

Бу $\frac{y}{x}$ га нисбатан квадрат тенгламани ечсак:

$\frac{y}{x} = 3,2$ ва $\frac{y}{x} = 1,5$ ёки $y = 3,2x$ ва $y = 1,5x$. Бу тенгламаларнинг ҳар бирини система ташкил этувчи тенгламалардан бири, масалан, биринчиси билан олиб (*) ва (**) тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва ечамиз.

1-изоҳ. 1) (6) системада $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{m}{n}$ шarti бажарилса, берилган системадаги ҳар икки тенглама битта икки номаълумли иккинчи даражали тенгламани ифода қилади. Шу сабабли берилган система аниқ ечимга эга бўлмайди (чексиз кўп ечимга эга бўлади).

2) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{m}{n}$ шarti бажарилса, берилган система биргаликда ечилмайдиган (ечимга эга бўлмаган) система бўлади.

2-изоҳ. Агарда (6) системада $m = 0$ (ёки $n = 0$) бўлиб қолса, яъни

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = n \end{cases} \quad (6'')$$

* (6) система ҳақиқий ечимга эга бўлсин учун илдиз сстидаги ифодаларнинг манфий бўлмаслиги шart.

системадаги биринчи тенгламани x^2 (ёки y^2) га бўлинади. У ҳолда: $a + b \cdot \frac{y}{x} + c \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$. $\frac{y}{x} = u$ деб белгиласак: $cu^2 + bu + a = 0$.

Бундан:

$$u = \frac{y}{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \quad \text{ёки} \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} x,$$

у ҳолда қуйидаги системалар тузилади ва ечилади:

$$1) \begin{cases} a'x^2 + b'xy + c'y^2 = n, \\ y = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \cdot x \end{cases} \quad \text{ва} \quad 2) \begin{cases} a'x^2 + b'xy + c'y^2 = n, \\ y = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \cdot x. \end{cases}$$

3-и з о ҳ. Системанинг ташкил этувчи тенгламалардан бири

$$p \cdot \frac{x^2}{y^2} \pm q \cdot \frac{y^2}{x^2} = n \quad \text{ёки} \quad p \cdot \frac{x^4}{y^4} \pm q \cdot \frac{y^4}{x^4} = n$$

қўринишдаги бир жинсли тенглама бўлса ёки бир жинсли бўлмаган системани ечишда — бирор амални бажариш натижасида — юқоридаги тенгламалардан бири ҳосил бўлса ҳам, $\frac{y}{x} = u$ ёрдамчи номаълумни киритиш билан берилган системани ечиш мумкин.

2-мисол.
$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи тенгламада $\frac{y}{x} = u$ (ёки $\frac{x}{y} = u$) деб белгиласак, $\frac{1}{u} - u = \frac{5}{6}$, $6u^2 + 5u - 6 = 0$; $u_1 = \frac{2}{3}$, $u_2 = -\frac{3}{2}$, u нинг қиймати урнига қўйилса,

$$a) \frac{y}{x} = \frac{2}{3}; \quad y = \frac{2}{3}x, \quad \text{б) } \frac{y}{x} = -\frac{3}{2}; \quad y = -\frac{3}{2}x,$$

$$a) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ y = \frac{2}{3}x \end{cases} \quad \text{ва} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ y = -\frac{3}{2}x. \end{cases}$$

системалар ҳосил қилинади ва ечилади.

Жавоб: $(\pm 3, \pm 2)$; $(\pm 2\sqrt{\frac{7}{19}}, \mp 3\sqrt{\frac{7}{19}})$.

3-мисол.
$$\begin{cases} \frac{y}{x} + xy = m, \\ \frac{x}{y} + xy = n \end{cases}$$

бир жинсли бўлмаган тенгламалар системаси ечилисин.

Ечиш. Биринчи тенгламадан иккинчисини айирсак,

$$\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = m - n$$

бир жинсли тенглама ҳосил бўлади. $\frac{y}{x} = u$ деб олиб, $u^2 - (m-n)u - 1 = 0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз ва ечамиз;

$$u_{1,2} = \frac{(m-n) \pm \sqrt{(m-n)^2 + 4}}{2}$$

Энди $y = u_1 x$ ва $y = u_2 x$ тенгламаларнинг ҳар бирини берилган тенгламалардан бири билан система қилиб ечилади.

Қуйидаги бир жинсли тенгламалар системаси ечилсин.

$$724. \begin{cases} x^2 + 2xy + 4y^2 = 19, \\ 3x^2 + 5y^2 = 32. \end{cases} \quad 725. \begin{cases} 2x^2 + 3xy = 14, \\ 3x^2 - 4xy + y^2 = 5. \end{cases}$$

$$726. \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases} \quad 727. \begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{4y^2}{x^2} = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 12. \end{cases}$$

45-§. Симметрик тенгламалар системасини ечиш*

1-таъриф. x ни y га, y ни x га алмаштириши натижасида ўзгармайдиган ифодани (бир ҳад ёки кўп ҳадни) x ва y га нисбатан симметрик ифода деб аталади. (Масалан, $3xy$; $x^2 + y^2$; $x^4 + xy + y^2$; $5x + 5y$; $\frac{x^2 + 1}{3y} + \frac{y^2 + 1}{3x}$ ва ҳ.к.)

2-таъриф. Тенгламанинг чап қисми x ва y га нисбатан симметрик ифода бўлиб, ўнг қисми ўзгармас миқдордан иборат бўлса**, бундай тенгламани симметрик тенглама дейилади. (Масалан: $3xy = 7$, $2x + 2y - 3xy = 5$, $x^5 + y^5 = 4$ ва ҳ.к.)

3-таъриф. Тенгламалар системасини таъкил этувчи ҳар икки тенглама симметрик тенглама бўлса, бундай системани икки номаълумли симметрик тенгламалар системаси дейилади.

$$\text{Масалан, } 1) \begin{cases} x + y = a, \\ x^4 + y^4 - 2xy = b; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy = b, \\ x^2 + xy + y^2 = d; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = m, \\ x^5 + y^5 = n \end{cases}$$

симметрик тенгламалар системасидир.

Бундай системаларни, масалан, 3-системани, ўрнига қўйиш усули билан ечадиган бўлсак, бешинчи даражали бир номаълумли тенгламани ечишга тўғри келар эди. Аммо бундай тенгламани баъзан ечиш мураккаб бўлса, баъзан бутунлай ечиш мумкин бўлмай қолади. Шунинг учун, қуйида симметрик тенгламалар системасини осонроқ ечишга ёрдам берадиган симметрик кўпҳадлар билан танишиб, улар орасидаги боғланишларни аниқлаймиз.

* Бу темага доир тула маълумотни В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкинларнинг «Симметрия в алгебре» [Москва, 1967 й.] китобидан ўқиш мумкин

** Аввал номаълумлар тенгламанинг чап қисмига, маълумлар эса тенгламанинг ўнг қисмига ўтказилади.

$x + y = \alpha$, $xy = \beta$ (ёки $x + y = u$, $xy = v$) ва $x + y = s_1$; $x^2 + y^2 = s_2$, ...; $x^n + y^n = s_n$ каби белгиласак, s_1, s_2, \dots, s_n , ... симметрик кўпхадлар бўлади. $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ ларни α ва β лар ёрдамида ифода қилайлик:

$$s_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \alpha^2 - 2\beta; \quad s_2 = \alpha^2 - 2\beta.$$

$$s_3 = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = \alpha(x^2 + y^2 - \beta) = \alpha(\alpha^2 - 2\beta - \beta) = \alpha \cdot (\alpha^2 - 3\beta); \quad s_3 = \alpha \cdot (\alpha^2 - 3\beta).$$

$$\alpha \cdot s_{k-1} = (x + y)(x^{k-1} + y^{k-1}) = x^k + y^k + xyx^{k-1} + yx^{k-1} = s_k + xy(y^{k-2} + x^{k-2}) = s_k + \beta \cdot s_{k-2}.$$

яъни: $\alpha s_{k-1} = s_k + \beta s_{k-2}$.

Бундан

$$s_k = \alpha s_{k-1} - \beta s_{k-2} \quad (7)$$

(7) формуладан фойдаланиб, s_4, s_5, \dots ларни топиш мумкин.

Масалан:

а) $s_4 = \alpha s_3 - \beta s_2 = \alpha \cdot \alpha \cdot (\alpha^2 - 3\beta) - \beta(\alpha^2 - 2\beta) = \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 2\beta^2.$

б) $s_5 = \alpha s_4 - \beta s_3 = \alpha(\alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 2\beta^2) - \beta[\alpha(\alpha^2 - 3\beta)] = \alpha^5 - 5\alpha^3\beta + 5\alpha\beta^2.$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} xy &= \beta, \\ s_1 &= x + y = \alpha, \\ s_2 &= \alpha^2 - 2\beta \\ s_3 &= \alpha(\alpha^2 - 3\beta), \\ s_4 &= \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 2\beta^2, \\ s_5 &= \alpha^5 - \alpha^3\beta + 5\alpha \cdot \beta^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Икки номаълумли симметрик тенгламалар системасини ечишда (8) формулалардан фойдаланилади.

Мисол.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 8, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ечиш. Берилган системани қуйидагича ёзайлик:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8xy \\ x + y = \frac{1}{2}xy \end{cases}$$

1-усул. $x + y = \alpha$, $xy = \beta$ билан белгиласак,

$$\begin{cases} \alpha^3 - 3\alpha\beta = 8\beta \\ \alpha = \frac{1}{2}\beta \end{cases}$$

$\beta = 2\alpha$ ни биринчи тенгламага қўйсак, $\alpha^3 - 6\alpha^2 - 16\alpha = 0$. Бундан $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 8$, $\alpha_3 = -2$; у ҳолда $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 16$, $\beta_3 = -4$; α ва β нинг мос қийматларини ўрнига қўйиш билан

$$1) \begin{cases} x + y = 0, \\ xy = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 16; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + y = -2, \\ xy = -4 \end{cases}$$

системалар ҳосил қилинади ва ечилади. Булардан бир ичи система-нинг ечими $x = y = 0$ берилган системани қаноатлантирмайди.

2-у с ул. $x^3 + y^3 = 8xy$ тенгламани $x + y = \frac{1}{2}xy$ га бўлсак, $x^2 - xy + y^2 = 16$; $(x + y)^2 - 3xy = 16$ тенглама билан $x + y = \frac{1}{2}xy$ тенгламадан

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 3xy = 16 \\ x + y = \frac{1}{2}xy \end{cases} \quad (*)$$

системани тузамиз. Бу системани қуйидагича ечиш мумкин: а) симметрик тенгламалар системаси деб ечилади; б) иккинчи тенгламадан $xy = 2(x + y)$ ни биринчисига қўйиб, $(x + y)^2 - 6(x + y) - 16 = 0$ тенглама ҳосил қилинса ва уни $(x + y)$ га нисбатан квадрат тенглама деб ечилса, $x + y = 8$ ва $x + y = -2$ аниқланади ва бу қийматларни иккинчи тенгламага қўйиш билан, $xy = 16$ ва $xy = -4$ эканлиги топилади. Натижада:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 16 \end{cases} \quad (*) \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -4 \end{cases} \quad (**)$$

системалар ҳосил қилинади ва ечилади.

в) (*) системадаги иккинчи тенгламадан $(x + y) = \frac{1}{2}xy$ ни биринчисига қўйиб, $(xy)^2 - 12xy - 64 = 0$ тенгламага келамиз ва уни ечиб, $xy = 16$ ҳамда $xy = -4$ экани аниқланади. Бу қийматлар иккинчи тенгламага қўйилса, мос равишда, $x + y = 8$ ва $x + y = -2$ топилади ва (*) ҳамда (**) система ҳосил қилинади ва ечилади.

Жавоб: $(4, 4)$, $(-1 \pm \sqrt{5}, -1 \mp \sqrt{5})$.

Тенгламалар системасини ечинг.

$$728. \begin{cases} x^2y + xy^2 = 30, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}. \end{cases} \quad 729. \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3} = 78. \end{cases}$$

46- §. Иккинчи даражали циклик — симметрик тенгламалар системаси

Икки тенгламанинг бирида x ни y га, y ни эса x га алмаштириш натижасида иккинчиси ҳосил бўлса (ва аксинча), бундай системани циклик — симметрик тенгламалар системаси дейилади.

Иккинчи даражали икки номаълумли циклик-симметрик тенгламалар системаси умумий ҳолда куйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = m \\ ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = m \end{cases} \quad (9)$$

(a, b, c, d, e, m — параметрлар). (9) системани ечиш учун тенгламаларни бирдан иккинчиси (масалан, 1-сидан 2-си) айрилади.

$$\begin{aligned} a(x^2 - y^2) - c(x^2 - y^2) + d(x - y) - e(x - y) &= 0, \\ (x - y)[a(x + y) - c(x + y) + d - e] &= 0. \end{aligned}$$

$x - y = 0$ ва $(a - c)(x + y) + d - e = 0$ тенгламалардан ҳар бирини берилган тенгламалардан бири, масалан, биринчиси билан

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = m, \\ (a - c)(x + y) + d - e = 0 \end{cases}$$

ва

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = m, \\ x - y = 0 \end{cases}$$

системалар тузилади ва ечилади.

Тенгламалар системаларини ечинг:

$$730. \begin{cases} y^2 - 2xy + 6x = 9 \\ x^2 - 2xy + 6y = 9 \end{cases} \quad 731. \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 10y = 20 \\ 2y^2 - 3xy + 10x = 20 \end{cases}$$

47-§. Икки номаълумли тенгламалар системасига доир мисоллар

Тенгламалар системаларини ечинг:

$$732. \begin{cases} 9x^2 - 12xy + 4y^2 = 36, \\ 2x^2 - 2xy + y^2 = 17. \end{cases} \quad 733. \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x^3 + y^3 = 28. \end{cases}$$

$$734. \begin{cases} x^2 + 5xy = 24, \\ xy + 9y^2 = 12. \end{cases}$$

735. $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ ифодани шундай икки кўпайтувчига ажратингки, уларнинг йиғиндиси $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ га тенг бўлсин.

$$736. \begin{cases} x + y + \sqrt{x} - \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} = 2; \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \end{cases} \quad 737. \begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 18 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 34 \end{cases}$$

$$738. \begin{cases} 6x^2 - xy - 2y^2 = 0, \\ x^2 + 4y = \frac{33}{16}. \end{cases} \quad 739. \begin{cases} \frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} = \frac{17}{4}, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

$$740. \begin{cases} (x + y + 1)^2 + (x + y)^2 = 61, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases} \quad 741. \begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

742.
$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$
744.
$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 + 3(x-y) = 0. \end{cases}$$
746.
$$\begin{cases} x^2 - (n+x)y - n^2 = 0, \\ x^2 - 2(x-y) + y^2 = n(5n-2); \end{cases}$$
- ($n > 0,5$).
748.
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{5x}} + \sqrt{\frac{5x}{x+y}} = \frac{34}{15}, \\ x + y + xy = 29. \end{cases}$$
749.
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 117, \\ xy^2 - x^2y = -30. \end{cases}$$
- 751.*
$$\begin{cases} \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{17}{4}, \\ x(x+y) + \sqrt{y^2 + xy + 4} = 52. \end{cases}$$
753.
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{5}, \\ x^2 + y^2 = 104. \end{cases}$$
755.
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 5x + 4y = 18, \\ 2y^2 + 3xy - 5y + 4x = 18. \end{cases}$$
757.
$$\begin{cases} 2x + y - \frac{a^3}{x^2} = 0, \\ x + 2y - \frac{a^3}{y^2} = 0, (a > 0, x > 0, \\ y > 0). \end{cases}$$
759.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 + xy, \\ x^3 + y^3 = 6xy + 19. \end{cases}$$
761.
$$\begin{cases} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = m(\sqrt{x} - \\ - \sqrt{y}), \\ x^2 + xy + y^2 = n^2, (m > 0, \\ n > 0). \end{cases}$$
763.
$$\begin{cases} \left(\frac{x}{m}\right)^s \cdot \left(\frac{y}{n}\right)^r = p, \\ \left(\frac{x}{n}\right)^r \cdot \left(\frac{y}{m}\right)^s = q. \end{cases}$$
743.
$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ y^2 + xy + y = 20. \end{cases}$$
745.
$$\begin{cases} 4(x+y) = 5xy, \\ x+y + x^2 + y^2 = 22. \end{cases}$$
747.
$$\begin{cases} \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x} = 2, \\ xy = 27. \end{cases}$$
750.
$$\begin{cases} x^4 - x^2y^2 + y^4 = 73, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$
- 752.*
$$\begin{cases} x^3 + 3xy - 2y^2 - x - \\ - 16 = 0, \\ 2xy - 2y^2 + 2y - 4x + \\ + 4 = 0. \end{cases}$$
754.
$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{x+y} = m + \frac{1}{m}, \\ \frac{x-y}{xy} + \frac{xy}{x-y} = n + \frac{1}{n}. \end{cases}$$
756.
$$\begin{cases} \frac{x}{y} - xy = p, \\ \frac{y}{x} - xy = p, (-1 < p < 1). \end{cases}$$
758.
$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - y = 0, \\ 4y^3 - 2y - x = 0. \end{cases}$$
- 760.*
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 37(x-y), \\ x^3 + y^3 = 13(x+y). \end{cases}$$
- 762.*
$$\begin{cases} (x^2 + y^2) \frac{x}{y} = 6, \\ (x^2 - y^2) \frac{y}{x} = 1. \end{cases}$$

764. a нинг қандай қийматида $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 1 \\ x - y + a = 0 \end{cases}$ система биргина ечимга эга бўлади. Шу ечим топилсин.

48- §. Икки номаълумли юқори даражали тенгламалар системаси тузиш билан масалалар ечиш

765. Икки соннинг айирмаси 2. Улар квадратларининг йиғиндиси эса 34. Шу сонлар топилсин.

766. Икки сон квадратларининг йиғиндиси 170 га тенг. Ҳар бир сон 2 тадан орттирилса, квадратларининг йиғиндиси 250 га тенг бўлади. Шу сонларни топинг.

767. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 16 см, унинг томонларида ясалган квадратлар юзларининг йиғиндиси 88 см^2 . Учбурчакнинг томонлари аниқласин.

1- масала. *Икки соннинг йиғиндиси 20, кубларининг йиғиндиси 2240. Шу сонларни топинг.*

Ечиш. Изланаётган сонларни x ва y деб олсак: бу сонларнинг йиғиндиси $x + y = 20$, кубларининг йиғиндиси эса $x^3 + y^3 = 2240$.
Натижада:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x^3 + y^3 = 2240. \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Агар иккинчи тенгламани биринчисига бўлсак; $x^2 - xy + y^2 = 112$. Бу тенглама билан биринчи тенгламанинг ҳар икки қисмини квадратга кўтариш натижасида ҳосил бўладиган тенгламадан

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 112, \\ x^2 + 2xy + y^2 = 400 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Иккинчи тенгламадан олдингисини айирсак, $3xy = 288$ ёки $xy = 96$. Натижада

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases}$$

система ҳосил қилинади ва ечилади.

Жавоб. Изланаётган сонлар 12 ва 8 (ёки 8 ва 12).

768. Икки соннинг айирмаси 4, кубларининг айирмаси 1468 га тенг. Шу сонларни топинг.

2- масала. *Икки хонали сон рақамлари квадратларининг йиғиндиси 61. У сон билан, шу сон рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган соннинг кўпайтмаси 3640. Икки хонали сон топилсин.*

Ечиш. Униклар рақами x , бирликлар рақами y бўлса, изланаётган икки хонали сон $10x + y$, бунинг рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган сон: $10y + x$ бўлади ва масала мазмунига кўра:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 61, \\ (10x + y)(10y + x) = 3640, \end{cases}$$

иккинчи тенгламадан: $101xy + 10(x^2 + y^2) = 3640$, $101xy + 10 \cdot 61 = 3640$; $101xy = 3030$; $xy = 30$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 61. \\ xy = 30. \end{cases}$$

Бу системани ечамиз. *Жавоб:* 56 ёки 65.

769. Икки хонали сон, рақамлари кўпайтмасидан 3 марта катта; шу сон рақамларини тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган сон эса, рақамлар кўпайтмасининг беш бараваридан 2 та ортиқ. Икки хонали сон топилсин.

3-масала. *Тўғри бурчакли учбурчакнинг периметри 24 см, катетларининг бири иккинчисидан 2 см узун. Учбурчак томонларининг узунлиги аниқлансин.*

Ечиш. Учбурчакнинг катетлари узунлиги x см ва y см, гипотенузасининг узунлиги $\sqrt{x^2 + y^2}$ см; y ҳолда масала шартига кўра:

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 24, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

$y = x - 2$ қиймат биринчи тенгламага қўйилса,

$$x + x - 2 + \sqrt{x^2 + (x - 2)^2} = 24; \sqrt{2x^2 - 4x + 4} = 26 - 2x(*)$$

$2x^2 - 4x + 4 = (26 - 2x)^2$, бу соддалаштирилса: $x^2 - 50x + 336 = 0$.

Бу тенгламани ечсак, $x_1 = 42$; $x_2 = 8$; $x_1 = 42$ масала шартини қаноатлантирмайди (учбурчакнинг катети периметри 24 дан катта бўла олмайди), $y = 6$; $\sqrt{64 + 36} = 10$.

Жавоб: учбурчак томонларининг узунлиги 6 см, 8 см ва 10 см.

770. Тўғри бурчакли учбурчакнинг периметри 30 см. Барча томонларига ясалган квадратлар юзларининг йиғиндиси 338 см². Учбурчак томонларининг узунлиги топилсин.

4-масала. *Квадратларининг йиғиндиси 68 га тенг бўлган икки соннинг ўрта арифметик қиймати ўрта геометрик қийматидан 1,25 марта катта. Шу сонлар топилсин.*

Ечиш. Изланаётган сонлар x ва y ; квадратларининг йиғиндиси

$$x^2 + y^2 = 68.$$

Бу сонларнинг ўрта арифметик қиймати $\frac{x+y}{2}$, ўрта геометрик қиймати эса \sqrt{xy} . y ҳолда: $\frac{x+y}{2} = 1,25 \sqrt{xy}$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 68, \\ x + y = 2,5\sqrt{xy}. \end{cases}$$

Иккинчи тенгламани квадратга кутарсак: $x^2 + 2xy + y^2 = 6,25xy$; $x^2 + y^2$ йнгиндининг ўрнига 68 ни қўйсак:

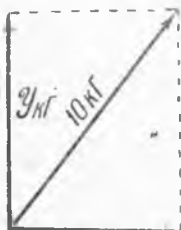
$$2xy + 68 = 6,25 xy; 4,25xy = 68, xy = 16. \quad (1)$$

Бундан: $\sqrt{xy} = \sqrt{16} = 4$. \sqrt{xy} нинг ўрнига 4 ни иккинчи тенгламага қўйсак, $x + y = 10$. Натижада қуйидаги содда тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва ечамиз:

$$\begin{cases} xy = 16, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

Жавоб. 2 ва 8 (ёки 8 ва 2).

771. Трапециянинг баландлиги 18 см. Унинг юзи, трапеция асосларини томонлар сифатида олиб ясалган туғри тўртбурчакнинг юзига тенг; асос узунликлари квадратларининг йнгиндиси эса 1440. Трапециянинг асослари топилсин.



11- чизма.

5- масала. Бир-бири билан кесишиб туғри бурчак ташкил этган икки кучнинг тенг таъсир этувчиси 10 кГ (11- чизма). Агар у кучлардан бири 1 кГ камайтирилса, иккинчиси 4 кГ орттирилса, уларнинг тенг таъсир этувчиси 13 кГ бўлади. Таъсир этувчи кучларни топинг.

Ечиш. Таъсир этувчи кучлар x кГ ва y кГ; y ҳолда 11- чизмадан Пифагор теоремасига кўра: $x^2 + y^2 = 100$. Худди шунингдек: $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 169$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 169. \end{cases}$$

Бу системани ечамиз. Иккинчи тенгламадан:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 = 169 \quad \text{ёки} \quad (x^2 + y^2) - 2x + 8y = 152.$$

Бу тенгламада $x^2 + y^2$ ўрнига 100 қўйиб соддалаштирамиз: $100 - 2x + 8y = 152$; $4y - x = 26$. $x = y - 26$. x нинг қийматини биринчи тенгламага қўйиб, ҳосил бўлган тенгламаларни ечамиз:

$$(4y - 26)^2 + y^2 = 100; 16y^2 - 208y + 676 + y^2 = 100.$$

$$17y^2 - 208y + 576 = 0; y_1 = 8, y_2 = 4 \frac{4}{17}.$$

У ҳолда:

$$x_1 = 4 \cdot 8 - 26 = 6; x_2 = 4 \cdot 4 \frac{4}{17} - 26 = -9 \frac{1}{17}.$$

Жавоб. Таъсир этувчи кучлар 6 кГ ва 8 кГ, ёки $-9 \frac{1}{17}$ кГ ва $4 \frac{4}{17}$ кГ (минус ишора кучнинг қарама-қарши томонга йўналишини кўрсатади).

772. Кесишган А нуқтасида тўғри бурчак ташкил этган икки тўғри чизиқ бўйлаб икки жисм чизиқларнинг кесишув нуқтасига қараб текис ҳаракат қила бошлаган. Ҳаракатнинг бошида, жисмларнинг орасидаги масофа 13 см. Биринчи жисмнинг тезлиги секундига 1 см, иккинчисиники эса секундига 4 см бўлган. Агар жисмлар 2 сек юргандан кейин, улар орасидаги масофа 5 см бўлса, бошда уларнинг ҳар бири А нуқтадан қандай масофада бўлганлар?

6- масала. *Фотография негативларини ювиш учун улчамлари 20 см × 90 см × 25 см бўлган тўғри бурчакли параллелепипед шаклидаги ванна ишлатилади. Ваннадаги сувни доим аралаштириб туриш учун унга бир жўмракдан сув келиб, иккинчи жўмракдан сув чиқиб туради. Иккинчи жўмракни бекитиб қўйганда, биринчи жўмрак ваннани қанча вақтда тўлдирса, иккинчи жўмрак тўла ваннани бўшатиши учун шундан 5 минут кам вақт керак бўлади. Агар иккала жўмрак баравар очиб қўйилса, тўла ванна 1 соатда бўшайди. Ҳар қайси жўмракдан бир минутда қанча сув ўтиши топилсин.*

Ечиш. Бир минутда биринчи жўмракдан x л сув келади, иккинчисидан y л сув оқиб чиқади. Ваннанинг ҳажми $2 \cdot 9 \cdot 2,5 = 45$ (л). 45 л сиғадиган тўла ванна иккала жўмрак очиқ турганда 1 соат = 60 минутда бўшагани учун, 1 минутда сувнинг миқдори $\frac{45}{60}$ л = $\frac{3}{4}$ л камаяди. Демак: $y - x = \frac{3}{4}$. Иккинчи томондан, биринчи жўмракнинг ёлғиз ўзи ваннани $\frac{45}{x}$ минутда тўлдирди, иккинчиси эса $\frac{45}{y}$ минутда бўшатади. Масала шартига кўра: $\frac{45}{x} - \frac{45}{y} = 5$.

$$\begin{cases} y - x = \frac{3}{4}, \\ \frac{45}{x} - \frac{45}{y} = 5 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} y - x = \frac{3}{4}, \\ 45(y - x) = 5xy \end{cases}$$

2-тенгламада $x - y$ ўрнига қийматини қўйсак:

$$\begin{cases} y - x = \frac{3}{4}, \\ 27 = 4xy \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} y - x = \frac{3}{4}, \\ xy = \frac{27}{4} \end{cases}$$

системани ечсак: $x_1 = 2\frac{1}{4}$; $y_1 = 3$; $x_2 = -3$; $y_2 = -2\frac{1}{4}$. x_2 ва y_2

масалага ечим бўлмайди (манфий сонлар бўлгани учун).

Жавоб. Биринчи жўмракдан минутига $2\frac{1}{4}$ л, иккинчи жўмракдан минутига 3 л сув ўтади.

773. Қувватлари турлича бўлган икки трактор бирга ишлаб, далани 4 кунда ҳайдаб тамомлади. Агар олдин битта трактор ўзи ишлаб, даланинг ярмини ҳайдаса, сўнгра иккинчи тракторнинг ўзи

яшни тамомлаганда, дала 9 кунда ҳайдалган булар эди. Ҳар қайси трактёр ёлғиз ўзи бу далани неча кунда ҳайдай олади?

7- масала. Бир-биридан узоқлиги 600 км булган икки шаҳарнинг орасида пассажир поезда ва юк поезда қатнайдн. Пассажир поезда бутун йўлни юк поездига қараганда 8 соат тезроқ ўтади. Иккала поезднинг тезлигини ҳар соатига 10 км дан оширгандан кейин, шу йўлни пассажир поезда юк поездига қараганда 5 соат тезроқ ўтадиган бўлади. Иккала поезднинг тезлигини топинг.

Ечиш. Пассажир поезднинг тезлиги соатига x км, юк поезднинг тезлиги эса соатига y км бўлсин. 600 км ни пассажир поезда $\frac{600}{x}$ соатда, юк поезда эса $\frac{600}{y}$ соатда ўтади. Масала шартига кўра: $\frac{600}{y} - \frac{600}{x} = 8$. Пассажир поезда соатига $(x + 10)$ км тезлик билан юрса, 600 км ни $\frac{600}{x + 10}$ соатда, юк поезда соатига $(y + 10)$ км тезлик билан юрса, 600 км ни $\frac{600}{y + 10}$ соатда юради. Масала шартига кўра: $\frac{600}{y + 10} - \frac{600}{x + 10} = 5$.

$$\begin{cases} \frac{600}{y} - \frac{600}{x} = 8 \\ \frac{600}{y + 10} - \frac{600}{x + 10} = 5 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} \frac{75}{y} - \frac{75}{x} = 1 \\ \frac{120}{y + 10} - \frac{120}{x + 10} = 1. \end{cases}$$

Биринчи тенгламани соддалаштирсак: $75(x - y) = xy$. Иккинчи тенгламани соддалаштирсак ва xy ўрнига $75(x - y)$ ни қўйсак: $7x - 11y = 20$. Бундан: $x = \frac{20 + 11y}{7}$. x нинг қиймати ўрнига қўйилса, $75\left(\frac{20 + 11y}{7} - y\right) = \frac{20 + 11y}{7} \cdot y$; соддалаштирсак, $11y^2 - 280y - 1500 = 0$, $y_1 = 30$, $y_2 = -4\frac{6}{11}$; $x_1 = \frac{20 + 11 \cdot 30}{7} = 50$; $x_2 = -4\frac{2}{7}$, (x_2 ва y_2 — масалага жавоб бўлмайди).

Жавоб. 50 км/соат; 30 км/соат.

774. Икки шаҳар орасидаги масофа 480 км. Бу масофани пассажир поезда юк поезидан 4 соат тезроқ юради. Агар пассажир поезднинг тезлигини соатига 8 км, юк поезднинг тезлигини соатига 2 км орттирилса, бутун масофани пассажир поезда юк поездига қараганда 5 соат тезроқ юради. Ҳар қайси поезднинг тезлигини топинг.

8- масала. Уzunлиги 2 км булган айланма йўлда икки конькичи бир томонга ҳаракат қилади ва ҳар 20 минутда учрашади. Агар биринчи конькичи айланани иккинчисидан 1 мин олдин босиб утиши маълум бўлса, конькичиларнинг тезлиги топилсин.

Ечиш. Биринчи конькичининг тезлиги x (км/мин), иккинчиси y (км/мин) бўлсин. У ҳолда бутун йўлни биринчиси $\frac{2}{x}$ минутда, иккинчиси эса $\frac{2}{y}$ минутда босиб ўтади. Биринчиси йўлни 1 минут тезроқ босиб ўтгани учун:

$$\frac{2}{y} - \frac{2}{x} = 1$$

тенгламани туза оламиз.

Конькичилар о асидаги масофа минутига $x - y$ га ортади. 20 минутда эса $20(x - y) = 2$ километрга ортади.

$$\begin{cases} \frac{2}{y} - \frac{2}{x} = 1 \\ 20(x - y) = 2 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} 2(x - y) = xy, \\ x - y = \frac{1}{10}. \end{cases} \text{ Бундан: } \begin{cases} x - y = \frac{1}{10}, \\ xy = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Бу системани ечсак: $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{2}{5}$; $x_2 = -\frac{2}{5}$, $y_2 = -\frac{1}{2}$ (x_2 ва y_2 масалага жавоб бўла олмайди): $\frac{1}{2}$ км/мин = 30 км/соат, $\frac{2}{5}$ км/мин = 24 км/соат.

Жавоб. 30 км/соат, 24 км/соат.

775. Узунлиги 60 дм бўлган айлана бўйича бир хил йўналишда икки нуқта текис ҳаракат қилади. Улардан бири айланани иккинчисидан 5 секунд олдин тўла айланиб чиқади. Агар нуқталар ҳар бир минутда бир марта устма-уст тушса, уларнинг тезлигини аниқланг.

9-масала. *Мактаб қурилишида ғишт терувчилар бригадаси маълум вақтда 120 минг дона ғишт териши керак. Бригада ишни муддатидан 4 кун илгари тамомлади. Агар бригада норма бўйича 4 кунда қанча ғишт териши керак бўлса, 3 кунда шундан 5000 дона ортиқ ғишт тергани маълум бўлса, бригаданинг ҳар кунги ғишт териш нормаси қанча бўлган ва бригада ҳақиқатда кунига қанчадан ғишт терган?*

Ечиш. Бригадани бир кунлик ғишт териш нормаси x минг дона бўлиб, кунига y минг дона ғишт терилган бўлсин. 120 минг дона ғиштни $\frac{120}{x}$ кунда териши керак эди, аммо $\frac{120}{y}$ кунда терилди. У ҳолда: $\frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 4$, норма бўйича 4 кунда $4x$ мингта ғишт териш керак эди, аммо $3y$ мингтадан терилди. Масала шартига кўра: $3y - 4x = 5$, у ҳолда:

$$\begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 4, \\ 3y - 4x = 5 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} 30y - 30x = xy, \\ 3y - 4x = 5 \end{cases}$$

системани ечиш керак. Иккинчи тенгламадан $y = \frac{5+4x}{3}$ эканини топиб биринчи тенгламага қўйилса, $30 \cdot \frac{5+4x}{3} - 30x = x \cdot \frac{5+4x}{3}$, $150 + 120x - 90x = 5x + 4x^2$; $4x^2 - 25x - 150 = 0$. Тенгламани ечсак,

$x_1 = 10$; $x_2 = -3\frac{3}{4}$. У ҳолда: $y_1 = 15$, $y_2 = -3\frac{1}{3} \cdot x_2 = -3\frac{3}{4}$ ва $y_2 = -3\frac{1}{3}$ масала шартини қаноатлантирмайди.

Жавоб. Кундалик гишт териш нормаси 10 минг дона бўлиб, 1 кунда 15 минг дона гишт терилган.

776. Узунлиги 490 м бўлган юк поезде билан узунлиги 210 м бўлган пассажир поезде икки параллел йўлдан бир-бирига қараб келмоқда. Пассажир поездининг машинисти ўздан 700 м нарида юк поездини кўрди; шундан 28 секунд кейин поездлар учрашди. Агар юк поезде светофор ёнидан пассажир поездига қараганда 35 секунд ортиқ вақтда ўтгани маълум бўлса, ҳар қайси поездининг тезлигини аниқланг.

М А Ш Қ Л А Р

777. Шундан каср топингки, унинг сурат ва махражлари квадратларининг йиғиндиси 85, шу каср билан унга тескари касрнинг йиғиндиси эса $\frac{85}{42}$ бўлсин.

78. Икки бутун мусбат соннинг кўпайтмаси йиғиндисидан 8 марта катта. Улар квадратларининг йиғиндиси эса 720. Шу сонларни топинг.

779. Ромбнинг юзи 96 см^2 , периметри эса 40 см. Ромбнинг диагоналлари топилсин.

780. Параллелограммнинг икки томони узунликлари айирмаси 3 см. Параллелограммнинг кичик диагонали катта диагоналидан 2 см қисқа бўлиб, катта томонига тенг. Параллелограммнинг томонлари ва диагоналлари узунликлари аниқлансин.

781. Ораси 28 км бўлган икки А ва В шаҳарлардан бир вақтда икки велосипедчи йўлга чиқди. Бир соат ўтгандан кейин улар бир-бири билан учрашди ва тўхтамасдан ҳар бири ўз йўлида давом этди. Иккинчи велосипедчи А шаҳарга кириб келганига қараганда биринчиси В шаҳарга 35 минут илгарироқ кириб келди. Ҳар бир велосипедчининг тезлиги ва ҳар бирининг учрашган вақтгача юрган йўли топилсин.

782. Машинистга ҳар куни маълум миқдордаги бегларни босиб, бир ишни белгиланган муддатда тамомлаши керак. Агар ҳар куни белгиланган нормадан 5 бег ортиқ босса, ишни муддатдан икки кун олдин тамомлашини, агар кунига нормадан 40% ортиқ босса, муддатидан 2 кун олдин тамомлаб, унинг устига, яна 50 бег ортиқ босшини ҳисоблаб чиқди. Машинистга кунига неча бег босиши ва ишни неча кунда тамомлаши керак?

783. Тўғри тўртбурчак шаклидаги иккита участкага 288 туп мева кўчатлари қаторлаб экилди. Ҳар қайси участкадаги қаторлар сони қатордаги кўчатлар сонидан 2 та ортиқ. Агар биринчи участкадаги кўчатлар сони, иккинчисидадиган 48 туп ортиқ бўлса, ҳар қайси участкада ҳар бир қаторга неча тупдан кўчат экилган?

784. Қуввати ҳар хил бўлган икки трактор колхознинг экин майдонини биргаликда 4 кунда ҳайдайди. Агар шу майдоннинг ярми биринчи трактор би-

лан ҳайдалса, қолган ярмини ҳар икки трактор биргаликда ҳайдаса, ер ҳайдаш 5 кунда тамомланар эди. Ҳар бир тракторнинг ёлғиз ўзи ишласа, шу майдонни неча кунда ҳайлаб бўлади?

785. Тўғри бурчакнинг икки томони бўйлаб икки жисм унинг учи томон текис ҳаракат қилади. Маълум бир вақтда A жисм бурчак учидан 60 м масофада, B жисм эса 80 м масофада бўлган. 3 секунд ўтгандан кейин A ва B орасидаги масофа 70 м бўлган, яна 2 секунддан кейин эса улар орасидаги масофа 20 метрга камайди. Ҳар қайси жисмнинг тезлиги топилсин.

786. Бир ишчи белгиланган муддатга бир қанча бир хил деталь тайёрлади. Агар у ҳар куни 10 та ортиқ деталь тайёрласа, бу ишни муддатидан $4\frac{1}{2}$ кун олдин тамомлар эди, агар ҳар куни 5 та кам деталь тайёрласа, шу ишни муддатидан 3 кун кейин битирар эди. Ишчи қанча деталь тайёрлаган ва бунга қанча вақт кетган?

787. Икки жисм айлана бўйлаб ҳаракат қилади: айланани биринчи жисм иккинчисидан 5 секунд тез айланиб чиқади. Агар улар бир йўналишда ҳаракат қилса, ҳар 100 секундда бири иккинчисининг ёнидан ўтади, ҳар бир жисм 1 секундда айлананинг қандай қисмини (неча градусини) ўтади?

788. Икки ишчи бир хил ишни бажаради. Биринчи ишчи, бутун ишни бажариш учун иккинчи ишчи сарф қиладиган вақтнинг учдан бир қисми қадар ишлагач, иккинчи ишчи биринчи ишчи бутун ишни неча соатда битирса, шунинг учдан бири қадар ишлади. Шундан сўнг ишнинг $\frac{13}{18}$ қисмини битиришди. Агар

шу ишни иккала ишчи $3\frac{3}{5}$ соатда тамомлаши маълум бўлса, ҳар қайси ишчининг ёлғиз ўзи шу ишни неча соатда тамомлай олади?

789. A қишлоғидан B қишлоғигача бўлган 36 км йўлнинг бир қисми баландликка кўтарила боради, иккинчи қисми эса пастликка туша боради. Велосипед ҳайдовчи юқорига кўтарилишига нисбатан пастликка тушишда соатига 6 км ортиқроқ тезлик билан юради ва A дан B га бориш учун 2 соат-у 40 минут сарф қилади. Қайтиб келишга эса 20 минут камроқ вақт сарфлайди. Велосипедчи юқорига қандай тезлик билан кўтарилган, пастликка қандай тезлик билан тушган ва A дан B га боришда баландликка кўтарилиши қанча масофани ташкил этган?

790. A ва B шаҳарлар орасидаги масофа 195 км. Ҳар икки шаҳардан бирига қараб икки поезд йўлга чиқди ва 3 соатдан кейин учрашди. Учрашгандан сўнг A дан чиққан поезд B га етиб келиши учун, B дан чиққан поезд A га етиб боришига сарф қилган вақтига қараганда $\frac{13}{14}$ соат ортиқ вақт кетган.

Ҳар қайси поезднинг тезлиги топилсин

791. Денгизда икки пароход экспедицияси сузиб борапти. Биринчи пароход иккинчисидан 1 сутка олдин йўлга чиқиб, йўлнинг иккинчи ярмида биринчи пароходга қараганда соатига 10 км секин юргани учун мўлжалга бир кун кейин келди. Иккинчи пароход бутун йўлни биринчи пароход йўлнинг бириччи ярмини қандай тезлик билан сузган бўлса, шундай тезликда сузди. Агар иккинчи пароход тезлигини 10 км/соат оширса, 6 суткада орқага қайтиб келиши мумкин бўлса, иккинчи пароход неча сутка юрган ва суткасига неча километрдан юрган?

49- §. Иккинчи даражали (бир номаълумли) тенгсизликлар системаси

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c \geq 0, \\ a'x^2 + b'x + c' \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax^2 + bx + c \leq 0, \\ a'x^2 + b'x + c' \leq 0, \\ a''x^2 + b''x + c'' \leq 0 \end{cases}$$

каби кўринишдаги (яъни бир нечта квадрат тенгсизликлардан тузилган) ёки шу кўринишга келтириши мумкин бўлган тенгсизликлар системасини иккинчи даражали бир номаълумли тенгсизликлар системаси дейилади*.

Тенгсизликлардан бирининг биринчи даражали бўлиши ($ax+b \geq 0$ кўринишда) ёки биринчи даражали тенгсизликка келтириладиган тенгсизлик бўлиши ҳам мумкин.

1-мисол $\begin{cases} x^2 - 7x - 8 > 0, \\ x - 9 < 0. \end{cases}$

Ечиш. $x^2 - 7x - 8 > 0$ тенгсизликни ечамиз. $x^2 - 7x - 8 = 0$ тенгламани ечсак: $x_1 = 8$, $x_2 = -1$. У ҳолда берилган тенгсизликни қуйидагича ёзиш мумкин.

$$(x + 1) \cdot (x - 8) > 0$$

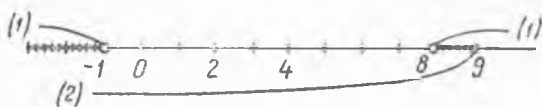
Бу тенгсизликни ечиш учун қуйидаги иккита тенгсизликлар системаси ечилади

а) $\begin{cases} x + 1 > 0, & x > -1 \\ x - 8 < 0, & x < 8 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x > 8; \\ \end{array} \right.$ б) $\begin{cases} x + 1 < 0, & x < -1 \\ x - 8 < 0, & x < 8 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x < -1. \\ \end{array} \right.$

$x^2 - 7x - 8 > 0$ тенгсизликнинг ечими: $x > 8$ ва $x < -1$. $x - 9 < 0$ тенгсизликнинг ечими: $x < 9$.

Ҳар икки тенгсизликни қаноатлантирадиган сонлар, яъни берилган системанинг ечими: $x < -1$ ва $8 < x < 9$ (12-чизмага қаранг).

2-мисол. $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 12} > 0$.



12-чизма.

Ечиш. Касрнинг сурат ва махражидаги ифодалар ҳар хил ишорали бўлиши керак, яъни:

1. $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0, \\ x^2 - x - 12 < 0 \end{cases}$ ёки II. $\begin{cases} x^2 + x - 2 < 0, \\ x^2 - x - 12 > 0. \end{cases}$

1. $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \text{ тенгсизликни ечсак, } x < -2 \text{ ва } x > 1 \\ x^2 - x - 12 < 0 \text{ тенгсизликни ечсак, } -3 < x < 4. \end{cases}$

Ҳар икки тенгсизликни қаноатлантирадиган сонлар $-3 < x < -2$ ва $1 < x < 4$ (13-чизма).

* Иккита квадрат тенгсизликдан тузилган системаларни ечиш билан чекла-
вамиз.

1) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$, 2) $y = \sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$;
 3) $y = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{9-x^2}$; 4) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-2x-x^2}$.
 803. Аниқланиш соҳаси топилсин: 1) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{2x^2-x+10}$; 2) $y = \sqrt{0,5x^2-x+0,5} + \sqrt{4x^2-4x-3}$.

5i-§. Чизиқли функция ва унинг графиги

Таъриф: $y = kx + b$ (1) (бунда k ва b ихтиёрий ҳақиқий сонлар) функцияни чизиқли функция дейилади.

(1) функциянинг графиги тўғри чизиқдир.

1-мисол. 1) $y = 2x - 4$; 2) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ функцияларнинг графиги чизилсин.

Ечиш. 1) $x = 0$; $y = -4$; $A(0, -4)$ — тўғри чизиқнинг y лар ўқидаги нуқтаси $x = 3$ бўлса, $y = 2$, $B(3, 2)$. $A(0, -4)$ ва $B(3, 2)$ нуқталар орқали ўтказилган тўғри чизиқ $y = 2x - 4$ функциянинг графиги бўлади.

2) $x = 0$, $y = 2$, $A(0, 2)$; $x = 3$, $y = 0$, $B(3, 0)$. $A(0, 2)$ ва $B(3, 0)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ чизилади.

804. 1) $y = -0,4x + 1$; 2) $y = 0$; 3) $x = 3$; 3) $y = -0,5x - 2$ функцияларнинг графикларини битта координаталар системасида чизинг.

805. (Оғзаки.) $y = 4x + 3$ ва $y = 4x - 2$ функцияларнинг графиклари (координаталар системасида) ўзаро қандай жойлашган? Ва улар координата ўқларини қандай нуқталарда кесиб ўтади?

806. (Оғзаки.) Тўғри чизиқ I ва III координат бурчакларнинг биссектрисасига параллел бўлиб, Oy ўқни координата бошидан: 1) 3 бирлик юқо ида, 2) 4 бирлик пастда кесиб ўтади. Шу тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

807. (Оғзаки.) Графиги $y = 0,5x - 1$ функция графигига параллел бўлиб, Oy ўқини: 1) $A(0, 7)$ нуқтада, 2) $B(0, -3)$ нуқтада кесиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

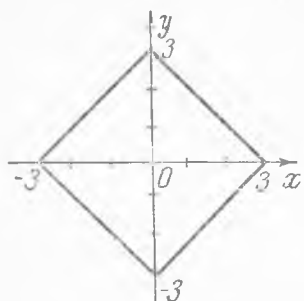
808. (Оғзаки.) Ордината ўқи бўйича: 1) $y = 4x$ функция графигини 3 бирлик юқорига сурилса, 2) $y = -2x + 2$ функция графигини 5 бирлик пастга сурилса, қандай функциянинг графиги ҳосил бўлади?

809. (Оғзаки.) 1) $y = 2x + 0,5$; 2) $y = -2x + 0,5$; 3) $y = 2x + 3$; 4) $y = -2x + 3$ функцияларнинг графиги қандай чизиқдан иборат? Қайси функцияларнинг графиги ўзаро параллел? Графиклар Oy ўқини қайси нуқтада кесиб ўтади? Қайси функцияларнинг графиги Oy ўқини битта нуқтада кесиб ўтади? (Қайси нуқтада кесиб ўтади?)

810. 15-чизмада тасвирланган квадратнинг: 1) юзи, 2) периметри, 3) томонлари ётган тўғри чизиқларнинг тенгламалари топилсин.

2-мисол. Тўғри чизиқ $A(-1, 3)$ ва $B(2, -4)$ нуқталаридан ўтади. Бу тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Тўғри чизиқнинг тенгламаси $y = kx + b$ кўринишида бўлади. Берилган нуқталар бу тўғри чизиқда ётгани учун уларнинг координаталарини $y = kx + b$ га қўйсақ,



15- чизма.

$$\begin{cases} 3 = -k + b \\ -4 = 2k + b \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системани ечсак:

$$k = -7/3, b = \frac{2}{3}.$$

k билан b нинг қийматини ўрнига қўйсақ:

$$y = -\frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$$
 берилган нуқталардан

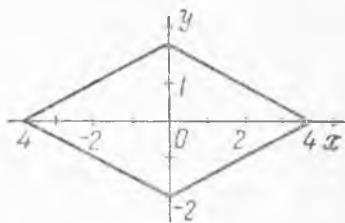
ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси бўлади.

811. а) $y = ax + 3$ функциянинг графиги $M(1, 2)$ нуқтадан ўтади. a коэффициентни топинг. б) $y = 0,5x - b$ функциянинг графиги $N(1, 3)$ нуқтадан ўтади. b коэффициент топилсин.

812. Координаталар бошидан ва 1) $M(4, -6)$; 2) $N(-2, -4)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси ёзилсин.

813. $A(2, -3)$ нуқтадан ўтиб, абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан: 1) 45° ли, 2) 135° ли бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

814. 16- чизмада тасвирланган ромбнинг: 1) юзи, 2) периметри, ҳамда 3) томонлари ётган тўғри чизиқларнинг тенгламасини топинг.



16- чизма.

815. Тўртбурчакнинг учлари $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $C(1, 0)$, $D(0, -1)$ нуқталарда ётади: 1) тўртбурчакнинг юзи, 2) тўртбурчак томонлари орқали ўтувчи тўғри чизиқларнинг тенгламалари топилсин.

816. Тўртбурчакнинг учлари $O(0, 0)$, $M(3, 3)$, $N(6, 0)$, $K(3, -3)$ нуқталарда

1) бу қандай тўрт бурчак? 2) тўртбурчакнинг периметри ва юзи топилсин.

3) тўртбурчак томонлари орқали ўтувчи тўғри чизиқларнинг тенгламаларини топинг.

817. Чизиқли функция қуйидаги жадваллар билан берилган:

1)	x	-10	-7		-2	0	1		3		6		11
	y	-17		-5		3	5	7		13		19	

2)

x	-8	-6		3	1		7	
y	25		-14		-2	-8		-28

а) функция аналитик ифода этилсин; б) жадвалдаги бўш ўринлар тўлдирилсин.

52-§. Чизиқли функциянинг баъзи хоссаларини текшириш

1-таъриф. *Функциянинг илдизи деб, x нинг бу функцияни нолга айлантирадиган қиймати (қийматлари) га айтилади.*

Масалан, $y = kx + b$ нинг илдизи $kx + b = 0$ тенгламанинг илдизи $x = -\frac{b}{k}$ дан, $y = x^2 - 3x + 2$ нинг илдизи эса $x^2 - 3x + 2 = 0$ тенгламанинг илдизлари $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ дан иборат.

818. 1) $y = 3x + 2$, 2) $y = 4x^2 - 4x - 3$ функцияларининг илдизи топилсин.

2-таъриф. *Аргументнинг катта қийматиغا функциянинг катта (кичик) қиймати, аргументнинг кичик қийматиغا функциянинг кичик (катта) қиймати мос келса, функция ўсувчи (камаювчи) дейилади.*

Бошқача айтганда, аргумент қиймати ортиши билан функциянинг қиймати ортса (камайса), аргументнинг қиймати камайиши билан функциянинг қиймати камайса (ортса), функция ўсувчи (камаювчи) деб аталади.

1-мисол. $y = 2x - 3$ функция ўсувчими ёки камаювчими?

Ечиш. x ортса (камайса), $2x$ ортади (камаяди). У ҳолда алгебраик йиғинди $2x - 3$ ҳам ортади (камаяди); яъни берилган функция ўсувчидир.

819. 1) $y = -3x + 1$, 2) $y = \frac{4}{x}$; 3) $y = -\frac{8}{x}$ функция ўсувчими ёки камаювчими?

3-таъриф. *Аргументнинг қандай қийматларида функция плюс ишорали, қандай қийматларида эса минус ишорали бўлишини аниқлашни функциянинг ишорасини текшириш дейилади.*

$y = kx + b$ функциянинг ишорасини текшириш учун, $kx + b > 0$ ва $kx + b < 0$ тенгсизликлар ечилади.

2-мисол. $y = 2x + 5$ функциянинг ишораси текширилсин.

Ечиш. а) $2x + 5 > 0$, $2x > -5$, $x > -2,5$ бўлса, $y > 0$.

б) $2x + 5 < 0$, $2x < -5$, $x < -2,5$ бўлса, $y < 0$.

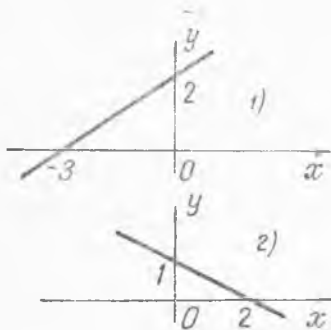
Жавоб: $x < -2,5$ бўлса, функция манфий, $x > -2,5$ бўлса мусбадир.

820. 1) $y = -4x + 1$, 2) $y = \frac{4}{x+3}$ функцияларнинг ишораси текширилсин.

821. $y = -2x + 5$ функциянинг: 1) илдизи топилсин; 2) ўсувчи ёки камаювчи эканлиги аниқлансин; 3) ишораси текширилсин.

822. График равишда ифода қилинган (17- чизма) функцияларнинг:

1) илдизини, 2) ўсувчиси ёки камаювчиси эканлини, 3) ишорасини, 4) аналитик ифодасини аниқланг.



17- чизма.

53-§. Қаср-чизиқли функция ва унинг графиги

Т а ь р и ф.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (2)$$

функцияни қаср-чизиқли функция дейилади (бунда $c \neq 0$ ва $ad - bc \neq 0$).

Қасрнинг суратини махражга бўлсак:

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{x+\frac{d}{c}}; \quad \frac{a}{c} = n; \quad \frac{d}{c} = m; \quad \frac{bc-ad}{c^2} = k$$

орқали белгиласак: (2) тенглик қуйидаги кўринишни олади:

$$y = \frac{k}{x+m} + n \quad (3)$$

(3) функция графиги $y = \frac{k}{x}$ функция графиги — гиперболани m бирлик ўннга ($m < 0$ бўлса), ёки чапга ($m > 0$ бўлса), сўнгра n бирлик юқорига ($n > 0$ бўлса) ёки пастга ($n < 0$) суришдан ҳосил бўлади.

(2) функция графигини чизиш учун, гипербола асимптоталари деб аталган*) $x = -\frac{d}{c}$ ва $y = \frac{a}{c}$ тўғри чизиқларни ўтказиб, уларнинг кесишув нуқтаси O' аниқланади. Сўнгра графикнинг координата ўқлари билан кесишув нуқталари $A(0, \frac{b}{d})$ ва $B(-\frac{b}{a}, 0)$ ҳам-

*) Координата ўқларини (тенгмаси $x = 0$ ва $y = 0$), $y = \frac{k}{x}$ функция графиги гиперболанинг асимптоталари бўлади. (2) функция графиги, $y = \frac{k}{x}$ графигини $-\frac{d}{c}$ бирлик ўннга ёки чапга, сўнгра $\frac{a}{c}$ бирлик юқорига ёки пастга суришдан ҳосил бўлгани учун $x = -\frac{d}{c}$ ва $y = \frac{a}{c}$ тўғри чизиқлар (2) функция графигининг асимптоталари бўлади.

да A ва B га O' га нисбатан симметрик A' ва B' нуқталар топилиб, топилган нуқталарнинг ҳар иккитаси орқали асимптоталарга яқинлаша борувчи гипербола тармоқлари чизилади.

1-мисол. $y = \frac{1+2x}{x-1}$ функциянинг графиги — гипербола асимптоталарининг тенгламаси, координата ўқлари билан кесушув нуқталари аниқлансин.

Ечиш. Тенгликнинг ўнг қисмидаги ифода $x-1=0$, $x=1$ бўлганда маънога эга бўлмайди. Қасрнинг бутун қисмини ажратамиз (суратини махражига бўламиз): $y = 2 + \frac{3}{x-1}$. x нинг бирорта

ҳам қийматида $\frac{3}{x-1}$ қаср нолга айланмайди. У ҳолда y эса 2 га тенг бўлмайди. Демак, $x=1$, $y=2$ асимптоталарнинг тенгламаси бўлади. $x=0$ бўлса, $y=-1$, $(0, -1)$ гиперболанинг Oy ўқи билан кесишув нуқтаси; $y=0$ бўлса, $1+2x=0$, $x=-\frac{1}{2}$: $(-\frac{1}{2}, 0)$ гиперболанинг Ox ўқи билан кесишув нуқтаси.

823. 1) $y = \frac{3-2x}{x-1}$, 2) $y = \frac{2x+3}{3x-3}$ функцияларнинг графиклари — гипербола асимптоталарининг тенгламалари, координата ўқлари билан кесишадиган нуқталари аниқлансин.

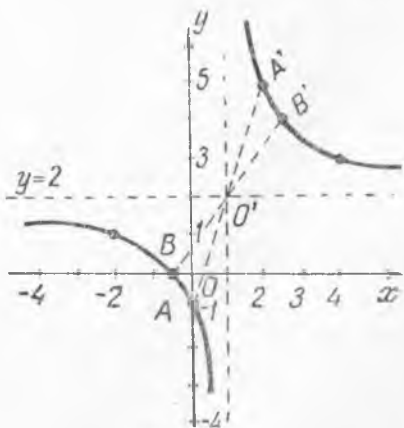
824. 1) $y = \frac{2x+4}{x}$, 2) $y = \frac{2x}{1-x}$ функцияларнинг графиклари — гипербола асимптоталарининг тенгламалари, координата ўқлари билан кесишув нуқталари аниқлансин.

2-мисол. $y = \frac{2x+1}{x-1}$ функциянинг графиги чизилсин. $x=+1$ ва $y=2$ асимптоталар (тўғри чизиқлар) ни чизамиз. A $(0, -1)$, B $(-\frac{1}{2}, 0)$ нуқталарга, O' га нисбатан симметрик бўлган A' ва B' нуқталар топилади. A , B ҳамда A' B' орқали гипербола тармоқлари чизилади (18-чизма).

825. 1) $y = \frac{2x-1}{x-1}$ ва 2) $y = \frac{1-x}{x+1}$ функцияларнинг графиги чизилсин.

826. (Оғзаки.) 1) $y = \frac{2}{x}$ функция графигини аввал 3 бирлик ўнгга сурсак, сўнгга 1 бирлик юқорига сурсак, қандай функциянинг графиги ҳосил бўлади?

2) $y = -\frac{3}{x}$ функция графигини аввал 1 бирлик чапга сур-



18-чизма.

сак, сўнгра 2 бирлик пастга сурсак, қандай функциянинг графиги ҳосил бўлади?

827. 1) $y = \frac{1}{x}$ функция графигининг ординаталарини 3 марта орттириб, 2 бирлик чапга сургач, яна 4 бирлик юқорига сурсак, қандай функциянинг графиги ҳосил бўлади?

2) $y = \frac{12}{x}$ функция графигининг ординаталарини 3 марта қисқартириб, 3 бирлик ўнгга сургач, яна 5 бирлик пастга сурсак, қандай функциянинг графиги ҳосил бўлади?

828. 1) $y = \frac{2x}{x-6}$ функция графигини 3 бирлик чапга сургач, 1 бирлик юқорига сурсак, сўнгра ординаталарини 3 марта қисқартирсак, қандай функциянинг графиги ҳосил бўлади?

2) $y = \frac{x-1}{2x+2}$ функция графигини аввал 3 бирлик ўнгга, сўнгра 2 бирлик пастга сургач, барча нуқталарининг ординаталари 2 марта узайтирилса, қандай функциянинг графиги ҳосил бўлади?

829. Тескари пропорционал боғланишнинг графиги: 1) (1; 11), 2) (-3, 1) нуқтадан ўтиши маълум бўлса, шу боғланишни аниқланг.

830. $y = \frac{a-2x}{x-a}$ функциянинг графиги (1,5; -4) нуқтадан ўтади. a ни топинг.

831. $y = \frac{nx+3}{mx-1}$ функциянинг графиги $M(1, 4)$ ва $N(-1; -\frac{2}{3})$ нуқталаридан ўтади. m ва n топилсин.

832. $y = \frac{ax-b}{x+c}$ функциянинг графиги (2, 1), (-1, -5) ва (1, $\frac{1}{3}$) нуқталардан ўтса, a , b ва c топилсин.

833. Қуйидаги жадваллар билан берилган функцияни аналитик ифодаланг:

1)

x	-8	-4	-1	1	6	12
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-4	4	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

2)

x	-3	-2	-1		10
y	+1	$+\frac{3}{2}$	3	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{10}$

834. Қуйидаги жадвал билан берилган каср-чиқиқли функция аналитик ифода қилинсин ва жадвалдаги бўш катаклар тўлдирилсин.

x	-6	-4	-2	0	1	2	3	4	5
y	3		7	-3				1	

835. 18-чизмада тасвирланган каср-чизиқли функциянинг: 1) аниқланиш соҳасини, 2) илдизини, 3) ўсиш-камайтишини, 4) ишорасини аниқланг.

3-мисол. $y = \frac{2x-1}{x+1}$ функциянинг: 1) аниқланиш соҳасини, 2) илдизини, 3) ўсувчи ёки камаювчи эканини, 4) ишорасини аниқланг.

Ечиш. 1) Берилган функция $x = -1$ бўлганда маънога эга эмас. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси: $x \neq -1$.

2) $\frac{2x-1}{x+1} = 0$; $2x - 1 = 0$; $x = \frac{1}{2}$ функциянинг илдизи.

3) $y = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$; x ортса, $x+1$ ортади, $\frac{3}{x+1}$ каср камаяди, y ҳолда $-\frac{3}{x+1}$ ортади, йиғинди $(2 - \frac{3}{x+1})$, яъни берилган функция $(-\infty, -1)$ ва $(-1, \infty)$ оралиқларда ўсади.

4) $\frac{2x-1}{x+1} > 0$ тенгсизликни ечсак: $x < -1$ ва $x > \frac{1}{2}$. Демак, функция $x < -1$ ва $x > \frac{1}{2}$ бўлса мусбат, $-1 < x < \frac{1}{2}$ бўлса манфий бўлади.

836. 1) $y = \frac{4}{x}$; 2) $y = -\frac{4}{x+2}$; 3) $y = \frac{2x-1}{x-1}$ функцияларнинг: 1) аниқланиш соҳаси; 2) илдизи; 3) ўсиш-камайтиши; 4) ишораси текширилсин.

54-§. Квадрат учҳад ва унинг графиги

1-таъриф. $a \neq 0$, b ва c — ҳақиқий сонлар бўлса,

$$y = ax^2 + bx + c \quad (4)$$

функция квадрат учҳад ёки квадрат функция дейилади.

2-таъриф. Квадрат учҳад (4) ни

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad (5)$$

кўринишга келтиришга, квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратилиши дейилади.

837. 1) $y = x^2 + 4x - 1$; 2) $y = 2x^2 + 3x + 5$;

3) $y = -4x^2 + 4x - 3$; 4) $y = x^2 + px + q$

квадрат учҳадлардан тўла квадратлар ажратилсин.

3-таъриф. Квадрат учҳад (4) ни $y = a(x+n)^2$ кўринишга келтириши мумкин бўлса, y тўла квадратни ифода қилади дейилади. Масалан, $y = 2x^2 + 8x + 8$ квадрат учҳад тўла квадратни ифода қилади, чунки $y = 2x^2 + 8x + 8 = 2(x+2)^2$.

1-мисол. $y = ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад қандай шарт бажарилганда тўла квадратни ифода қилади?

1-у с ул. Квадрат учқаддан тўла квадрат ажратамиз. ((5) га қаранг.) Квадрат учқад тўла квадратни ифода қилиши учун $\frac{4ac - b^2}{4ac} = 0$ бўлиши; бунинг учун эса $4ac - b^2 = 0$ ёки $b^2 = 4ac$, $|b| = 2\sqrt{ac}$ бўлиши керак.

2-у с ул. $y = ax^2 + bx + c = a(x + x_0)^2$,
яъни

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2ax_0x + ax_0^2$$

тенглик ўринли бўлиши учун

$$\begin{cases} b = 2ax_0 \\ c = ax_0^2 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} b^2 = 4a^2x_0^2 \\ c = ax_0^2 \end{cases}$$

тенгликлар бажарилиши керак. Биринчи тенгликни иккинчисига бўлсак:

$$b^2 : c = 4a; \quad b^2 = 4ac; \quad |b| = 2\sqrt{ac}.$$

Жавоб: $b^2 - 4ac = 0$ ёки $|b| = 2\sqrt{ac}$.

2-мисол. *n* нинг қандай қийматида $y = 4x^2 + (n - 1)x + 9$ квадрат учқад тўла квадратга айланади?

Ечиш. Берилган квадрат учқад тўла квадратни ифодалаш учун дискриминанти нолга тенг, яъни $(n - 1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$ бўлиши керак.

$$(n - 1)^2 = 144; \quad (n - 1) = \pm 12; \quad n_1 = 13, \quad n_2 = -11.$$

Жавоб. $n = 13$ ва $n = -11$ бўлганда берилган учқад тўла квадратни ифода қилади.

838. *a* нинг қандай қийматида: 1) $y = 3x^2 + ax + 12$; 2) $y = 3x^2 - 4x + a$; 3) $y = ax^2 - 3x + 1$ квадрат учқадлар тўла квадрат бўлади?

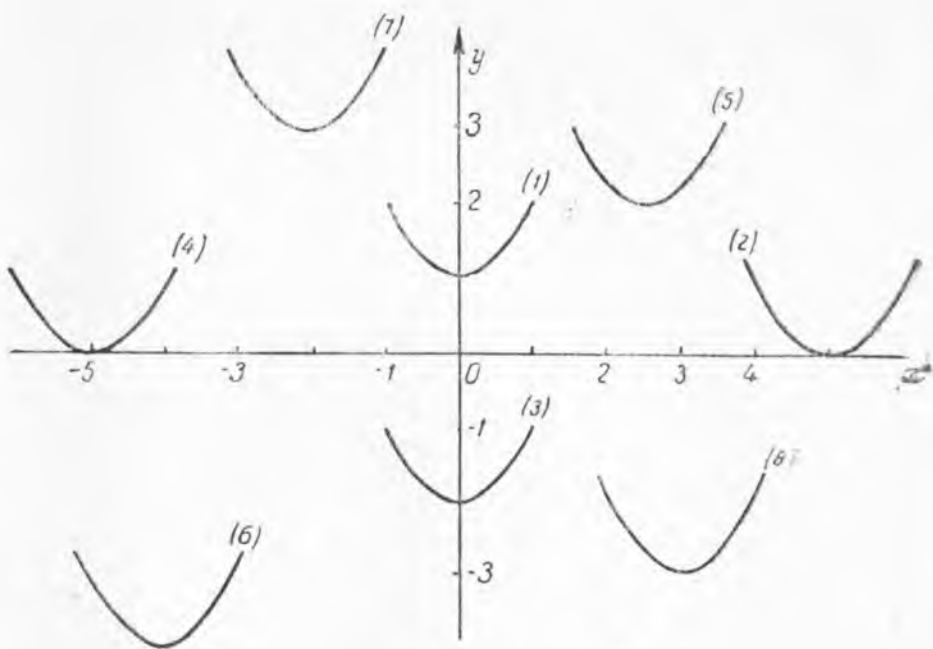
839. *b* нинг қандай қийматида: 1) $y = 9bx^2 + x + b$; 2) $y = 3x^2 + 2bx + 12$ квадрат учқад тўла квадрат бўлади?

840. *p* ва *q* ларнинг орасида қандай муносабат бўлганда $x^2 + px + q$ квадрат учқад тўла квадратга айланади?

841. Қандай шарт бажарилганда $ax^2 + 3bx + 4c$ квадрат учқад тўла квадрат бўлади?

Квадрат учқаднинг графиги парабола бўлади. Параболанинг учи *C*, координата ўқлари билан кесишув нуқталари (*Oy* ўқи билан кесишув нуқтаси *A*, *Ox* ўқи билан кесишув нуқталари *B* ва *B'*) га параболанинг «характерли» нуқталари дейилади (19-чизма). Бундан ташқари, парабола билан *Oy* ўқининг кесишув нуқтаси *A* га парабола ўқига нисбатан симметрик жойлашган нуқта (*A'*) ни ҳам «характерли» нуқталар қаторига қўшиш керак. Параболани унинг «характерли» нуқталарини топиш йўли билан бундай ясаш мумкин:

$$1) (5) \text{ да } x = -\frac{b}{2a} \text{ бўлганда, } y = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ бўлиб, } C\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) -$$

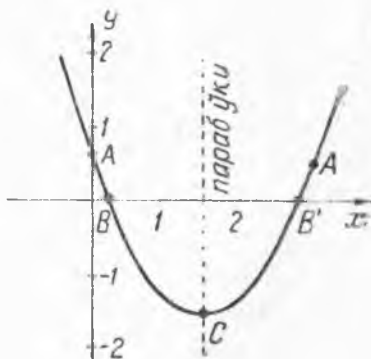


параболанинг учи бўлади. 2) (4) да $x = 0$ бўлса, $y = c$; $A(0, c)$ — параболанинг Oy ўқ билан кесишув нуқтаси бўлади. 3) парабола ўқи — $x = -\frac{b}{2a}$ тўғри чизиққа нисбатан A га симметрик A' нуқтанинг абсциссаси $2(-\frac{b}{2a}) = -\frac{b}{a}$ га, ординатаси эса — c (A нуқтанинг ординатаси) га тенг, яъни: $A'(-\frac{b}{a}, c)$.

4) $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламада $D = b^2 - 4ac > 0$ бўлса, бу тенгламанинг илдизлари x_1 ва x_2 топилади. $B(x_1, 0)$ ва $B'(x_2, 0)$ парабола билан Ox ўқининг кесишув нуқталари бўлади (19-чизма).

3-мисол. $y = x^2 - 6x + 5$ функциянинг графиги чизилсин.

Чизилиш. Квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратамиз. $y = (x - 3)^2 - 4$; $x = 3$ бўлганда $y = -4$ бўлгани учун: $C(3, -4)$; $x = 0$ бўлса, $y = 5$. $A(0, 5)$; A' нуқтанинг абсциссаси $2 \cdot 3 = 6$ га, ординатаси эса 5 (A нуқтанинг ординатаси) га тенг, яъни: $A'(6, 5)$.



19-чизма.

$x^2 - 6x + 5$ дан $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. В (1, 0); В' (5, 0). Қординаталар системасида топилган нуқталарни ўзаро эгри чизиқ билан туташтириб график — парабола ҳосил қилинади.

842. Қуйидаги функцияларнинг графикларини чизинг:

1) $y = x^2 - 3x + 2$; 2) $y = 4x^2 - 4x - 3$; 3) $y = -x^2 + 4x - 4$.

843. (Оғзаки.) а) $y = 2x^2$ функция графиги 3 бирлик ўнгга, сўнгра 2 бирлик юқорига сурилса, қандай функциянинг графиги ҳосил бўлади?

б) $y = -(x + 1)^2 + 3$ функция графиги 2 бирлик ўнгга сурилгач, 4 бирлик пастга сурилса, қандай функциянинг графиги ҳосил бўлади?

844. (Оғзаки.) 1) $y = x^2$ графиги — парабола ординаталарини 2 марта узайтириб, 3 бирлик чапга, сўнгра 4 бирлик пастга сурилса, қандай квадрат учҳаднинг графиги ҳосил бўлади?

2) $y = -4x^2$ графиги — парабола ординаталарини 4 марта қисқартириб, 2 бирлик ўнгга, сўнгра 1 бирлик юқорига сурилса, қандай квадрат учҳаднинг графиги ҳосил бўлади?

845. (Оғзаки.) 1) $y = x^2 - 4x + 3$; 2) $y = 2x^2 - 8x + 6$;

3) $y = 0,5x^2 - 2x + 1,5$

функциялар графикларининг бир-биридан қандай фарқи бор?

846. (Оғзаки.) 1) $y = 2x^2 - 6x$; 2) $y = -4x^2 + 1$; 3) $y = 3x^2 - 6x + 3$; 4) $y = ax^2 + bx + c$ квадрат учҳадларнинг графиклари симметрия ўқининг тенгламалари тузилсин. а) параболалар Ox ўқни, б) Oy ўқни қандай нуқтада кесиб ўтади?

Изоҳ. Парабола учидан Oy ўқига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлгани учун, бу тўғри чизиққа параболанинг симметрия ўқи дейилади ва у тўғри чизиқнинг тенгламаси $x = -\frac{b}{2a}$ бўлади.

847. (Оғзаки.) 19-а чизмада $y = x^2$ функциянинг графиги — парабола координата ўқлари бўйича ўнгга ёки чапга, юқорига ёки пастга сурилган ҳолда чизилган. Шу параболаларнинг тенгламаси тузилсин.

4- мисол. *Парабола координаталар бошидан ҳамда М(3, 6) ва N(-1, 6) нуқталаридан ўтади. Шу парабола қандай квадрат учҳаднинг графигини тасвирлайди?*

Ечиш. Парабола координаталар бошидан, яъни $O(0, 0)$ нуқтадан ўтади. Парабола M , N ва O нуқталардан ўтгани учун M , N ва $O(0, 0)$ нуқталарнинг координаталари $y = ax^2 + bx + c$ тенгламага қўйилса:

$$\begin{cases} 6 = 9a + 3b + c, \\ 6 = a - b + c, \\ 0 = c \end{cases}$$

система ҳосил бўлади, бу система соддалаштирилса:

$$\begin{cases} 3a + b = 2, \\ a - b = 6, \end{cases}$$

ечилса: $a = 2$, $b = -4$.

Жавоб: $y = 2x^2 - 4x$.

848. $y = 3x^2 - bx + c$ функциянинг графиги $(-1, 5)$ ва $(2, 11)$ нуқталардан ўтади, b ва c топилсин.

849. Парабола $(-1, 1)$, $(1, -5)$ ва $(2, -2)$ нуқталар орқали ўтади. Шу параболанинг тенгламаси тузилсин.

850. Парабола O ўққа $(2, 0)$ нуқтада урнади ва Oy ўқни $(0, -2)$ нуқтада кесиб ўтади. Бу парабола қандай квадрат учҳаднинг графиги?

851. Парабола Oy ўқни координаталар бошидан 3 бирлик юқорида, Ox ўқни эса координаталар бошидан $\frac{1}{2}$ бирлик чапда ва $\frac{3}{2}$ бирлик ўнгда кесиб ўтади. Шу парабола қандай квадрат учҳаднинг графигидан иборат.

5-мисол. Қуйидаги жадвал бўйича квадрат учҳадни аналитик ифода қилинг:

x	...	-3	0	1	6	...
y	...	-14	1	2	-23	...

Ечиш: x ва y унинг уч жуфт мос қийматлари: $(-3, -14)$; $(0, 1)$; $(1, 2)$ ни галма-гал $y = ax^2 + bx + c$ га қўйсак:

$$\begin{cases} -14 = 9a - 3b + c, \\ 1 = c, \\ 2 = a + b + c. \end{cases}$$

Бу системани ечамиз:

$$\begin{cases} 9a - 3b = -15; \\ a + b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a - b = -5 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\underline{4a = -4, a = -1; b = 2.}$$

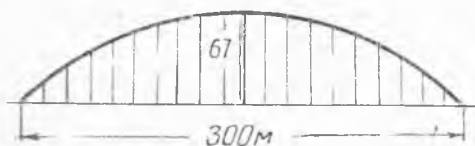
Жавоб: $y = -x^2 + 2x + 1$.

852. Қуйидаги жадвал билан ифода қилинган квадрат учҳадни аналитик ифода қилинг:

853. Қуйидаги жадвал билан ифода қилинган квадрат учҳадни аналитик ифода қилинг ва жадвалдаги бўш каттакларни тўлдиринг:

x	1	2	3	4	...
y	4	9	18	31	...

x	-5	-4	-3		0	1	4	10
y	18		6	2	3	6	18	



20- чизма.

854. Парабола шаклидаги аркали кўприкнинг узунлиги 300 м, баландлиги эса 67 м бўладиган қилиб қуриш керак (20-чизма). Бу кўприкка бир-бирдан бир хил (15 м дан) ма-софада 19 та тик (вертикал) устун ўрнатиш керак.

Шу устунларнинг узунлик-ларини аниқланг.

55-§. Квадрат учҳаднинг энг катта ва энг кичик қиймати

(5) тенгликда $x = -\frac{b}{2a}$ бўлса, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ бўлади. Агар $\frac{1}{a} > 0$ бўлса, x нинг $-\frac{b}{2a}$ дан кичик ҳамда $-\frac{b}{2a}$ дан катта барча қиймат-ларида квадрат учҳад $\frac{4ac - b^2}{4a}$ дан катта бўлгани учун, $\frac{4ac - b^2}{4a}$ квад-рат учҳад (4) нинг энг кичик қиймати бўлади (бу ҳолда квадрат учҳаднинг энг катта қиймати мавжуд бўлмайди).

Худди шунингдек, $a < 0$ бўлса, квадрат учҳад $x = -\frac{b}{2a}$ бўлганда $\frac{4ac - b^2}{4a}$ дан иборат энг катта қийматга эга бўлиб, унинг энг кичик қиймати мавжуд бўлмайди.

$\frac{4ac - b^2}{4a}$ ни, $a > 0$ бўлганда, квадрат учҳаднинг минимуми, $a < 0$ бўлганда эса квадрат учҳаднинг максимуми ҳам дейилади.

1-мисол. $y = -3x^2 + 6x - 10$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари топилсин.

Ечиш. $a = -3 < 0$ бўлгани учун квадрат учҳад энг катта қийматга эга (энг кичик қийматга эса эга эмас).

1-усул. ($x = -\frac{b}{2a}$ ва $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ формулалардан фойдаланиш усули.) $x = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = 1$ бўлганда учҳаднинг энг катта қиймати $\frac{4(-3)(-10) - 36}{4 \cdot (-3)} = \frac{84}{-12} = -7$ га тенг.

2-усул. (Тула квадрат ажратиш усули.) $y = -3x^2 + 6x - 10 = -3(x-1)^2 - 7 \cdot x = 1$ бўлганда, $y = -7$ функциянинг энг катта қиймати бўлади.

855. $y = 5x^2 + 5x - 1$ функциянинг энг катта ва энг кичик қиймати топилсин.

856. 1) $y = x^2 + 4$, 2) $y = -x^2 + 2x - 1$, 3) $y = x^2 - 4x + 3$ функцияларнинг энг катта ёки энг кичик қийматлари топилсин.

857. 1) $y = 2x^2 - 8x + 8$ функция x нинг қандай қийматида энг кичик қийматга эга бўлади? Бу функциянинг энг кичик қиймати нечага тенг?

2) $y = -2x^2 - 4x - 3$ функция x нинг қандай қийматида энг катта қийматга эга бўлади ва бу энг катта қиймат нечага тенг?

2-мисол: $x = 2$ бўлганда квадрат учҳад 1 га тенг бўлади. $x = 1$ бўлганда эса унинг энг кичик қиймати — 3 га тенг. Шу квадрат учҳад аниқлансин.

Ечиш. 1-усул. $x = 1$ бўлганда квадрат учҳаднинг энг кичик қиймати — 3 бўлса, $y = a(x - 1)^2 - 3$ кўринишида ифодаланади. Бу формулада a нинг қийматини топиш учун $x = 2$ бўлганда $y = 1$ бўлишидан фойдаланамиз, яъни охириги тенгликда x ўрнига 2, y ўрнига 1 қўямиз. У ҳолда: $1 = a(2 - 1)^2 - 3$ тенгламани ечиб, $a = 4$ эканлиги аниқланади. a нинг қийматини ўрнига қўямиз: $y = 4(x - 1)^2 - 3 = 4x^2 - 8x + 1$.

2-усул. $y = ax^2 + bx + c$ га $x = 2$, $y = 1$ ни қўйсақ, $1 = 4a +$

$+ 2b + c$. Квадрат учҳад энг кичик қиймати (минимуми) га $x = -\frac{b}{2a}$

бўлганда эришади ва бу энг кичик қиймат $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ бўлгани

учун: $-\frac{b}{2a} = 1$, $\frac{4ac - b^2}{4a} = -3$ тенгламалар олинади. Булардан

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 1 \\ 2a + b = 0 \\ 4ac - b^2 + 12a = 0 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз ва ечамиз. $b = -2a$ ни 1-ва 3-тенгламаларга қўйсақ:

$$\begin{cases} 4a - 4a + c = 1; c = 1. \\ 4ac - 4a^2 + 12a = 0, \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Биринчи тенгламадан $c = 1$ ни иккинчи тенгламага қўйсақ, $4a - 4a^2 + 12a = 0$ ёки $16a - 4a^2 = 0$, $a \neq 0$ бўлса, $16 - 4a = 0$. Бундан

$$a = 4. \text{ У ҳолда: } b = -2 \cdot 4 = -8; b = -8.$$

Жавоб: $y = 4x^2 - 8x + 1$.

858. $x = 1$ бўлганда квадрат учҳад — 1 га тенг бўлади. $x = 2$ бўлганда эса унинг энг катта қиймати 2 га те г. Шу квадрат учҳад топилсин.

859. $x = -\frac{k}{n}$ бўлганда квадрат учҳаднинг энг кичик қиймати $\frac{mn - k^2}{n}$ га тенг. $x = 0$ бўлганда учҳад m га тенг бўлади. Квадрат учҳадни аниқланг.

860. $x = -p$ бўлганда квадрат учҳаднинг энг кичик қиймати $(q - p^2)$ га тенг.

$x = -2p$ бўлганда эса учҳад q га тенг. Квадрат учҳадни аниқланг.

861. $x = \frac{m}{k}$ бўлганда квадрат учҳаднинг энг катта қиймати $y = \frac{nk - 2m^2}{k}$ га тенг. $x = 0$ бўлганда учҳад n га тенг. Квадрат учҳадни аниқланг.

862. Параболанинг учи $(1, -4)$ нуқтада бўлиб, Oy ўқини $(0, -2)$ нуқтада кесиб ўтади. Шу парабола қандай квадрат учҳаднинг графиги?

863. Параболанинг учи $(1, 5)$ нуқтада бўлиб, $(3, -3)$ нуқтадан ўтади. Парабола қандай квадрат учҳаднинг графиги?

864. (Оғзаки.) 1) $y = \frac{8}{x^2 + 2}$, $y = -\frac{2}{x^2 + 1}$ функциянинг энг катта ёки энг кичик қиймати топилсин.

865. 1) $y = \frac{5}{x^2 + 2x + 2}$; 2) $y = \frac{4}{4x - x^2}$ функциянинг энг катта ёки энг кичик қиймати топилсин.

866. a нинг қандай ҳақиқий қийматида $x^2 - (a - 2)x - a - 1 = 0$ тенглама илдизлари квадратларининг йиғиндиси энг кичик бўлади?

867. a нинг қандай ҳақиқий қийматида $x^2 + (2 - a)x - 8a - 4 = 0$ тенглама илдизлари квадратларининг йиғиндиси энг кичик бўлади? Бу энг кичик қиймат нечага тенг?

Масала. Периметри ўзгармас бўлган барча тўғри тўртбурчакларнинг томонлари ўртасида қандай муносабат бўлганда унинг юзи энг катта бўлади?

Ечиш. Ўзгармас периметри p билан, тўғри тўртбурчак томонларидан бирини x билан белгиласак, қўшни томони $\frac{p}{2} - x$, юзи эса

$$s = \left(\frac{p}{2} - x\right)x = -x^2 + \frac{p}{2}x$$

га тенг бўлади. Яъни $s = -x^2 + \frac{p}{2}x$. Квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратсак:

$$s = -\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + \frac{p^2}{16}$$

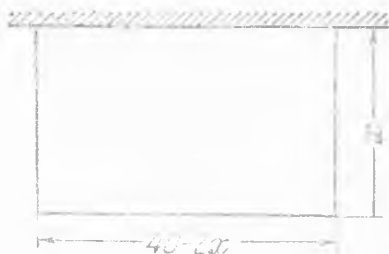
$x = \frac{p}{4}$ бўлса, тўғри тўртбурчак юзи энг катта бўлади. $\frac{p}{2} - x = \frac{p}{4}$. Демак, тўғри тўртбурчак томонлари бир-бирига тенг, яъни квадрат бўлса, унинг юзи энг катта бўлади.

868. Берилган a сонини шундай икки қўшилувчига ажратингки, уларнинг кўпайтмаси энг катта бўлсин.

869. Кателарининг йиғиндиси ўзгармас сонга тенг бўлган барча тўғри бурчакли учбурчаклар ичида катетлари ўзаро тенг бўлган учбурчакнинг юзи энг катта экани исбот қилинсин.

870. 40 метрли панжара тайёрланган. Уйнинг олдига тўғри тўртбурчак шаклида гулзор қилиниб (21-чизма), унинг уч томони панжара билан ўралиши керак. Гулзорнинг бўйи ва эни неча метрдан бўлганда унинг юзи энг катта бўлади?

2-масала. Бир вақтда А ва В нуқталаридан 22-чизмада курсатилган йўналиши бўйича пароход ва моторли қайиқ йўлга тушиди. Уларнинг тезлиги $V_p = 48$ км/соат; $V_k = 16$ км/соат. Агар $AB = 170$ км бўлса, қанча вақтдан кейин улар орасидаги масофа энг кичика бўлади ва бу масофа неча километрга тенг?



21-чизма.

Ечиш. x соат юргандан кейин пароход P нуқтада, қайиқ Q нуқтада бўлсин. У ҳолда: $AP = 48x$ км, $BQ = 16x$ км. Пифагор теоремасига кўра:

$$PQ = \sqrt{BP^2 + BQ^2} = \sqrt{(170 - 48x)^2 + (16x)^2}.$$

бундан:

$$PQ = \sqrt{2560x^2 - 16320x + 28900}$$

$z = 2560x^2 - 16320x + 28900$ квадрат учҳад x нинг қандай қийматида энг кичик қийматга эга бўлса, x нинг ўша қийматида PQ ҳам энг кичик қийматга эга бўлади. Квадрат учҳад

$$x = \frac{16320}{2 \cdot 2560} = \frac{816}{256} = \frac{51}{16} = 3 \frac{3}{16} \text{ (соат) бўлганда.}$$

$$\frac{4 \cdot 28900 \cdot 2560 - (16320)^2}{4 \cdot 2560} = 2890 \text{ (км) дан иборат энг кичик қийматга эга.}$$

Демак, энг кичик масофа $PQ = \sqrt{2890} \approx 53,8$ (км).

Жавоб. Пароход билан моторли қайиқ 3 соат 11 минути 15 секунддан кейин бир-бирига жуда яқин масофа $\sqrt{2890}$ км $\approx 53,8$ км да бўлади.

871. Бир доира ичига чизилган барча тўғри тўртбурчаклар ичида юзи энг каттаси квадрат экани исбот қилинсин.

3-масала. Тенг томонли учбурчак ичига уйлари берилган учбурчакнинг томонларида ётган шундай тенг томонли учбурчак чизилиши керакки, унинг юзи энг кичик бўлсин.

Ечиш. ABC томони a га тенг бўлган тенг томонли учбурчак бўлиб, $\triangle MNK$ унинг ичига чизилган тенг томонли учбурчак бўлсин (23-чизма).



22-чизма.

$$AN = x (= BK = MC); NC = a - x \cdot \triangle ABC_{\text{юзи}} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3};$$

$$\triangle MNC_{\text{юзи}} = \frac{1}{2} NC \cdot MD \quad (*)$$

$$\triangle MCD \text{ да: } \angle CMD = 30^\circ; DC = \frac{MC}{2} = \frac{x}{2}; MD = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2} \sqrt{3} \quad (*1)$$

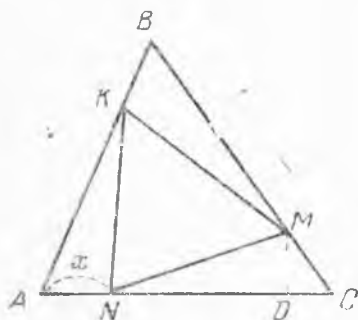
$$NC \text{ ва } MD \text{ ning қиймати } (*) \text{ га қўйилса, } \triangle MNC_{\text{юзи}} = \frac{1}{2} (a - x) \cdot \frac{x}{2} \sqrt{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} x (a - x). \triangle MNK_{\text{юзи}} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} x (a - x) =$$

$$= 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 - 3 \frac{\sqrt{3}}{4} ax + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3 \sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{a^2 \sqrt{3}}{16} \cdot \triangle MNK$$

нинг юзи, $x = \frac{a}{2}$ бўлганда энг кичик бўлади. Демак,

$$x = AN = \frac{a}{2}; NC = a - x = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}; \text{ яъни: } AN = NC = \frac{a}{2}.$$



23- чизма.

Жавоб. Изланаётган учбурчакнинг учлари берилган учбурчак томонларининг ўрталарида ётади.

872. Квадрат ичига янги квадрат чизилган бўлиб, унинг учлари берилган квадрат инг томонларида ётади. Ҳосил бўлган квадрат учлари берилган квадрат томонларининг ўрталарида бўлгандагина унинг юзи энг кичик бўлиши исбот қилинсин.

4-масала. *Периметри 2p (узгармас) бўлган тўғри тўртбурчакнинг томонларига: 1) квадратлар, 2) тенг*

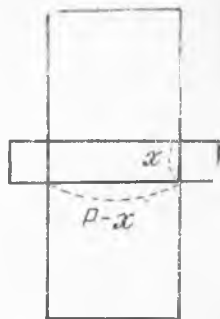
томонли учбурчаклар чизилган. Тўғри тўртбурчак томонлари орасида қандай муносабат бўлганда ясалган фигуралар юзларининг йиғиндиси энг кичик бўлади. Бу йиғиндини топинг.

Ечиш: 1) тўғри тўртбурчакнинг бир томон x бўлса, иккинчи томони $(p - x)$ бўлади (24-чизма). Ясалган квадратлар юзларининг йиғиндиси:

$$1) s = 2x^2 + 2(p - x)^2 = 2x^2 + 2p^2 - 4px + 2x^2 = 4x^2 - 4px + 2p^2. x = -\frac{-4p}{2 \cdot 4} = \frac{p}{2} \text{ формулага асо-}$$

$$\text{сан, } x = -\frac{-4p}{2 \cdot 4} = \frac{p}{2} \text{ бўлса, } p - x = \frac{p}{2} \text{ бў-}$$

$$\text{либ, } s_{\text{min}} = 4 \cdot \frac{p^2}{4} - 4p \cdot \frac{p}{2} + 2p^2 = p^2 \text{ га тенг*};$$



24- чизма.

* $y = ax^2 + bx + c$ квадрат учҳаднинг минимуми y_{min} каби, максимуми эса y_{max} каби ёзиладч.

2) томони x бўлган тенг томонли учбурчакнинг (23- чизма) юзи $\frac{x^2}{4}\sqrt{3}$, томони $\rho - x$ бўлган тенг томонли учбурчакнинг юзи эса $\frac{(\rho - x)^2}{4}\sqrt{3}$. 4 та учбурчак юзларининг йиғиндиси: $s = 2 \cdot \frac{x^2}{4}\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{(\rho - x)^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2} (x^2\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \rho^2 - 2\rho x\sqrt{3} + x^2\sqrt{3})$; $s = \sqrt{3}x^2 - \rho\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2$; $x = -\frac{b}{2a}$ формулага асосан: $x = \frac{\rho\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\rho}{2}$; $\rho - x = \frac{\rho}{2}$. Демак, тўғри тўртбурчак квадрат бўли-

ши керак. У ҳолда $s_{\min} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 - 3\rho^2}{4\sqrt{3}} = \frac{6\rho^2 - 3\rho^2}{4\sqrt{3}} = \frac{\rho^2}{4}\sqrt{3}$

(кв. бирлик).

Жавоб: Тўғри тўртбурчак квадрат бўлганда изланаётган юз: 1) ρ^2 квадрат бирликка. 2) $\frac{\rho^2}{4}\sqrt{3}$ квадрат бирликка тенг.

873. Периметри 2ρ ўзгармас бўлган тўғри тўртбурчакнинг томонларига 1) квадратлар, 2) тенг томонли учбурчаклар чизилсин. Тўғри тўртбурчак томонлари орасида қандай муносабат бўлганда ҳосил бўлган фигуралар юзларининг йиғиндиси (берилган тўғри тўртбурчакнинг юзи билан бирга) энг кичик бўлади? Ана шу йиғинди топилсин.

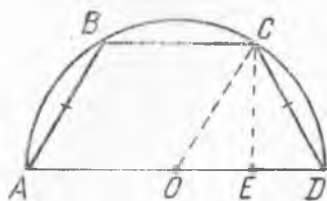
5- масала. *Ярим айлана ичига тенг ёнли трапеция чизилган бўлиб, унинг катта асоси айлананинг диаметрида ётади. Трапеция томонлари орасида қандай муносабат бўлганда, унинг периметри энг катта бўлади?*

Ечиш: Ярим айлана ичига тенг ёнли ($ABCD$) трапеция чизилган (25- чизма) ва $AD = 2R$. $AB = CD = x$ бўлсин. У ҳолда:

$$\rho = 2x + 2R + BC. \quad (1)$$

$$CE \perp AD; OE = \frac{BC}{2}; ED = R - \frac{BC}{2}.$$

Айлананинг C нуқтасидан диаметрга туширилган перпендикулярнинг ҳосса-сига кўра: $CD^2 = AD \cdot DE = 2R \left(R - \frac{BC}{2} \right) \cdot CD = x$ бўлгани учун: $x^2 = 2R \left(R - \frac{BC}{2} \right)$. Бу тенгликдан BC ни аниқлаймиз. $x^2 = 2R^2 - R \cdot BC$ ёки $R \cdot BC = 2R^2 - x^2$. Бундан:



25- чизма.

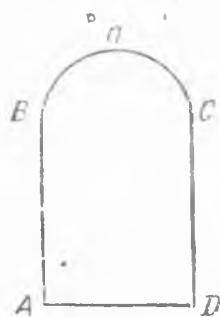
$$BC = 2R - \frac{x^2}{R}. \quad (2)$$

(1) дан:

$$p = 2x + 2R + \left(2R - \frac{x^2}{R}\right) \text{ ёки } p = -\frac{1}{R}x^2 + 2x + 4R = 5R - \frac{1}{R}(x - R)^2.$$

$-\frac{1}{R}x^2 + 2x + 4R$ квадрат учҳад $x = R$ бўлганда энг катта қийматга эга бўлади. У ҳолда: $BC = 2R - \frac{R^2}{R} = R$.

Жавоб: $AB = BC = CD = R$ ва $AD = 2R$ бўлганда тенг ёнли трапециянинг периметри энг катта бўлади.



26- чизма.

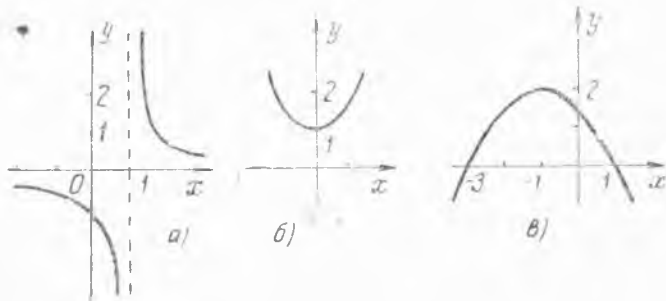
874. Учбурчак шаклидаги картондан томонлари шу учбурчакнинг асосига ҳамда баландлигига параллел бўлган шундай тўғри тўртбурчак қирқиб олиш керакки, бу тўртбурчакнинг юзи энг катта бўлсин.

875. Периметри ўзгармас бўлган доиравий секторнинг радиуси билан ёй узунлиги орасида қандай муносабат бўлганда унинг юзи энг катта бўлади?

876. Метро станцияларининг кўндаланг кесими, юқориси ярим доирадан иборат бўлган тўғри тўртбурчак шаклида бўлади (26- чизма). Кесим периметри (p) ўзгармас бўлганда, кесим юзи энг катта бўлсин учун асосдаги тўртбурчакнинг бўйи билан эни (AD билан AB) орасида қандай муносабат бўлиши керак?

56-§. Квадрат учҳаднинг ўсиши ва камайиши ҳамда ишорасини текшириш

877. 27-чизмада график ифода этилган функцияларнинг: 1) аниқланиш соҳаси; 2) илдизлари; 3) энг катта ёки энг кичик қиймати; 4) ўсиши — камайиши; 5) ишораси; 6) унинг қабул қиладиган қийматлари (функциянинг ўзгариш соҳаси) аниқлансин.



27- чизма.

878. $y = x^2 - 4x + 3$ функция графигини чизиб, 1) илдизларини, 2) энг кичик қийматини, 3) ўсиш ва камайиш оралигини, 4) ишорасини, 5) унинг қабул қиладиган қийматларини аниқланг.

879. 1) $y = x^2 + 4$, 2) $y = -x^2 - 3$ функцияларнинг ишорасини аниқланг.

1-мисол. $y = x^2 + 5x + 6$ функциянинг ишорасини аниқланг.

Ечиш: $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0$, $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ бўлгани учун: 1. $y = x^2 + 5x + 6 > 0$;

1. $(x + 2)(x + 3) > 0$ тенгсизликни ечамиз.

а) $\begin{cases} x + 2 > 0, & x > -2 \\ x + 3 > 0, & x > -3 \end{cases} x > -2$; б) $\begin{cases} x + 2 < 0, & x < -2 \\ x + 3 < 0, & x < -3 \end{cases} x < -3$.

демак, $x < -3$ ва $x > -2$ бўлса, функция мусбат бўлади.

II. $(x + 2)(x + 3) < 0$

а) $\begin{cases} x + 2 > 0, & x > -2 \\ x + 3 < 0, & x < -3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 2 < 0, & x < -2 \\ x + 3 > 0, & x > -3 \end{cases} -3 < x < -2$

бўлса, функция манфий бўлади.

880. 1) $y = 4x^2 - 4x - 3$; 2) $y = -x^2 + 3x - 2$ функция ишорасини текширинг.

881. 1) $y = 2x^2 - 8$; 2) $y = 1 - 4x^2$ функциянинг ишораси аниқлансин.

2-мисол. $y = 2x^2 + 12x + 18$ функциянинг ишораси аниқлансин.

Ечиш. $D = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 0$, $y = 2(x + 3)^2$; $x \neq -3$ бўлса, $(x + 3)^2 > 0$ ёки $y > 0$ бўлади. Демак, $x \neq -3$ бўлса, учҳад мусбат бўлади.

882. 1) $y = -3x^2$; 2) $y = 0,5x^2 - x + 0,5$ функциянинг ишораси текширилсин.

883. 1) $y = 2x^2 + 8x + 9$; 2) $y = 6x - 3x^2 - 4$ функциянинг ишораси текширилсин.

884. 1) $y = \frac{2x - x^2 - 4}{2x^2 + 2x + 1}$; 2) $y = \frac{4x^2 + 0,4}{x^2 - 5x + 6,25}$ функциянинг ишораси текширилсин.

885. 1) $y = 3(x^2 + 1)(x + 1)$; 2) $y = -(x^2 + 2x + 4)(x - 4)$ функциянинг ишораси текширилсин.

886. $y = (x - 3)^2(x + 1)$ функциянинг ишораси текширилсин.

887. 1) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 5}$; 2) $y = \frac{x^2 + 3x + 2,25}{x^2 - x - 2}$ функцияларнинг ишораси текширилсин.

3-мисол $y = 2x^2 - 4x + 3$ функциянинг ўсиши ва камайишини аниқланг.

Ечиш. 1-усул. $y = 2(x - 1)^2 + 1$.

а) $-\infty$ дан 1 гача бўлган ораликда x ортса, манфий миқдор $(x - 1)$ ортади, $(x - 1)^2$ эса камаяди, $2(x - 1)^2$ ҳам камаяди, йигинди $2(x - 1)^2 + 1 = y$ ҳам камаяди.

б) 1 дан ∞ гача сралиқда x ортса, мусбат миқдор $x - 1$ ортади, $(x - 1)^2$ ортади, $2(x - 1)^2$ ҳам ортади, йиғинди $2(x - 1)^2 + 1 = 1 + y$ ҳам ортади. Демак, берилган функция $x < 1$ бўлганда ёки $(-\infty, 1)$ ораллиқда камаяди; $x > 1$ бўлганда ёки $(1, \infty)$ ораллиқда ўсади.

2-усул. x_1 ва x_2 — аргументнинг ихтиёрий икки қиймати бўлиб, $x_1 < x_2$ бўлсин. Функциянинг x_1 даги қиймати $y_1 = 2x_1^2 - 4x_1 + 3$, x_2 даги қиймати эса $y_2 = 2x_2^2 - 4x_2 + 3$. У ҳолда:

$$y_2 - y_1 = 2(x_2^2 - x_1^2) - 4(x_2 - x_1) = 2(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2),$$

$$y_2 - y_1 = 2(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2). \quad (6)$$

Бу ерда $x_2 - x_1 > 0$ (чунки шартга кўра $x_2 > x_1$) бўлиб:

а) $x_1 < x_2 < 1$ бўлса, $x_1 + x_2 < 2$, $x_1 + x_2 - 2 < 0$ бўлиб, (6) да $y_2 - y_1 < 0$ ёки $y_2 < y_1$ бўлади. Демак, $x < 1$ бўлса, аргументнинг катта қийматига функциянинг кичик қиймати мос келади, яъни функция камаяди.

б) $1 < x_1 < x_2$ бўлса, $x_1 + x_2 > 2$; $x_1 + x_2 - 2 > 0$ ва $y_2 - y_1 > 0$ ёки $y_2 > y_1$ бўлади, яъни $x > 1$ бўлганда функция ўсади.

888. 1) $y = -4x^2$; 2) $y = x^2 + 3$; 3) $y = -x^2 + 5$. 4) $y = -x^2 - 4x - 1$ функциянинг ўсиши ва камайиши аниқлансин.

4-мисол. $y = 2x^2 + 4x - 6$ **квадрат учҳадднинг**: 1) энг катта ёки энг кичик қиймати; 2) ўсиши ва камайиши; 3) илдизлари; 4) ишораси текширилсин ва графиги чизилсин.

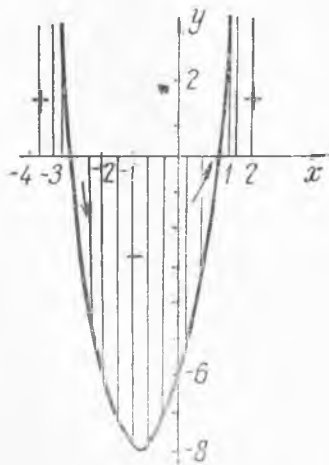
Ечиш. 1) $y = 2x^2 + 4x - 6 = 2(x + 1)^2 - 8$. $x = -1$ бўлганда, $y = -8$; $x \neq -1$ бўлса, $y > -8$, яъни $y > -8$. Демак, $x = -1$ бўлганда функциянинг энг кичик қиймати $y_{\min} = -8$ бўлади.

2) $x < -1$ бўлса, функция камайдн, $x > -1$ бўлса, функция ортади (олдинги мисолга ўхшаш текширилади).

3) $2x^2 + 4x - 6 = 0$ тенгламани ечасак: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ — функциянинг илдизлари.

4) $y = 2x^2 + 4x - 6 = 2(x + 3) \cdot (x - 1)$; а) $2(x + 3)(x - 1) > 0$ тенгсизликни ечасак: $x < -3$ ва $x > 1$. Демак, $x < -3$ ва $x > 1$ бўлганда функция мусбат.

б) $2(x + 3)(x - 1) < 0$ тенгсизликни ечасак: $-3 < x < 1$. Демак, $-3 < x < 1$ бўлганда функция манфий. Бу функциянинг графиги, учи $(-1, -8)$ нуқтада бўлиб, Ох ўқни $(-3, 0)$ ва $(1, 0)$ нуқтада кесиб ўтувчи, тармоқлари юқорига йўналган параболадан иборат (28-чизма).



28-чизма.

889. $y = -x^2 + 6x - 9$ квадрат учқадни: 1) энг катта ёки энг кичик қиймати, 2) ўсиши ва камайиши, 3) илдизлари, 4) ишораси текширилсин.

890. 1) $y = \frac{2}{x+1}$; 2) $y = \frac{8}{x^2-2x+2}$ функцияларнинг: 1) энг катта ёки энг кичик қиймати, 2) ўсиши ва камайиши, 3) илдизлари, 4) ишораси текширилсин.

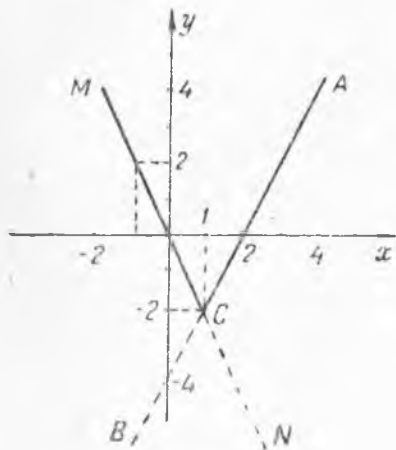
57-§. Бир неча формула билан берилган, ҳамда абсолют қиймат белгиси остидаги функцияларнинг графиги

Функция икки ва ундан ортиқ формула ёрдами билан ҳам берилиши мумкин.

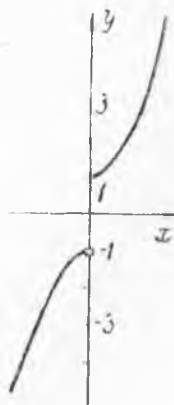
1-мисол. *Ушбу функциянинг графигини чизинг:*

$$y = \begin{cases} \text{агар } x \geq 1 \text{ бўлса, } 2x - 4, \\ \text{агар } x < 1 \text{ бўлса, } -2x. \end{cases}$$

$y = 2x - 4$ функциянинг графиги бўлган тўғри чизиқ (AB) нинг $x > 1$ қийматлар учун (AC қисмини) чизамиз. $y = -2x$ функция графигини $x < 1$ қийматлар учун (MC) чизамиз. ACM синиқ чизиқ берилган функциянинг графиги бўлади (29-чизма).



29-чизма.



30-чизма.

2-мисол.

$$y = \begin{cases} \text{агар } x > 0 \text{ бўлса, } x^2 + 1, \\ \text{агар } x < 0 \text{ бўлса, } -x^2 - 1. \end{cases}$$

Бу функциянинг графиги 30-чизмада тасвирланган.

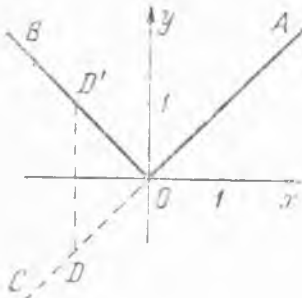
3-мисол. Ушбу функциянинг графигини чизинг: $y = |x|$

Бунда: $|x| = \begin{cases} \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса, } x, \\ \text{агар } x < 0 \text{ бўлса, } -x. \end{cases}$

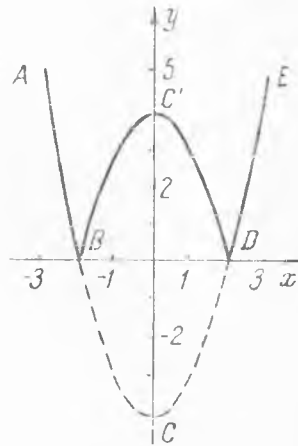
Демак,

$$y = \begin{cases} \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса, } x, \\ \text{агар } x < 0 \text{ бўлса, } -x, \end{cases}$$

икки формула билан берилган функциянинг графигини чизиш керак экан. Берилган функция графигини чизиш учун $y = x$ нинг графиги AC тўғри чизиқни (31-чизма) чизиб, тўғри чизиқнинг Ox ўқи остидаги OC қисмини Ox ўққа нисбатан симметрик кўчириш кифоя эди.



31-чизма.



32-чизма.

Бунинг учун OC устида ихтиёрий D нуқта олиб Ox ўққа нисбатан, D га симметрик бўлган D' нуқта топилади ва OD' ўтказилади. AOB изланаётган график бўлади.

4-мисол. Ушбу функциянинг графигини чизилсин.

$$y = |x^2 - 4|.$$

$y = x^2 - 4$ функциянинг графиги — парабола ($ABCDE$) чизилади (32-чизма). Параболанинг Ox ўқи остидаги қисми (BCD) ни Ox ўққа нисбатан симметрик кўчириш билан $BC'D$ чизилади. $ABC'DE$ — берилган функциянинг графиги бўлади.

Қуйидаги функцияларнинг графикларини чизинг:

891. 1) $y = \begin{cases} \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса, } x^3, \\ \text{агар } x < 0 \text{ бўлса, } -x. \end{cases}$

$$2) y = \begin{cases} \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса, } 2x, \\ \text{агар } x < 0 \text{ бўлса, } \frac{1}{x}. \end{cases}$$

$$892. 1) y = \begin{cases} \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса, } x^2 + 1, \\ \text{агар } x < 0 \text{ бўлса, } -\frac{1}{x}. \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса, } x - 2, \\ \text{агар } x < 0 \text{ бўлса, } -2. \end{cases}$$

$$893. 1) y = \begin{cases} \text{агар } x \geq 1 \text{ бўлса, } x, \\ \text{агар } -1 \leq x < 1 \text{ бўлса, } 1, \\ \text{агар } x < -1 \text{ бўлса, } -x. \end{cases}$$

$$2) y = x|x|.$$

$$894. 1) y = \begin{cases} \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса, } x + 2, \\ \text{агар } x < 0 \text{ бўлса, } -x. \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса, } -x^2 + 2, \\ \text{агар } x < 0 \text{ бўлса, } x^2 - 3. \end{cases}$$

$$895. 1) y = |x - 2|; 2) y = |3 + 2x|.$$

$$896. 1) y = \left| \frac{1}{x} \right|; 2) y = |x^3|.$$

$$897. 1) y = |x^2 - 1|; 2) y = |x^2 - 4x - 5|.$$

$$898. 1) y = \left| \frac{2-x}{x+1} \right|; 2) y = |2x - x^2 - 3|.$$

58-§. Тенгсизликларни оралиқ (интервал)лар усули билан ечиш

$$(a_1x + b_1) \cdot (a_2x + b_2) \dots (a_nx + b_n) \leq 0$$

ёки

$$\frac{(a_1x + b_1) \cdot (a_2x + b_2) \dots (a_mx + b_m)}{(c_1x + d_1) (c_2x + d_2) \dots (c_nx + d_n)} \leq 0$$

кўринишдаги ёки шу кўринишга келтириш мумкин бўлган тенгсизликларни оралиқлар усули билан осонгина ечиш мумкин.

Юқоридагига ўхшаш тенгсизликларнинг чап қисми x нинг функцияси бўлиб, тенгсизликни ечиш шу функциянинг ишорасини аниқлашдан иборат бўлади.

Бу усулнинг моҳиятини мисоллар билан тушунтирайлик.

$$1\text{-мисол. } \frac{2x-3}{7-3x} > 0.$$

Ечиш. x нинг шундай қийматларини топиш керакки, $\frac{2x-3}{7-3x}$ функция мусбат бўлсин.

$x = \frac{3}{2}$ бўлса, каср nolга айланади (тенгсизлик бажарилмайди).

$x = \frac{7}{3}$ бўлса, каср мавжуд бўлмайди, бинобарин, $x = \frac{7}{3}$ ҳам тенгсизликнинг ечими бўла олмайди.

$x = \frac{3}{2}$ ва $x = \frac{7}{3}$ сонлар барча ҳақиқий сонлар тўпламини учта оралиққа ажратади. $x < \frac{3}{2}$; $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3}$ ва $\frac{7}{3} < x$ оралиқлардан қайси бирида каср (тенгсизликнинг чап қисмидаги функция) мусбат бўлса, уша оралиқдаги барча сонлар тенгсизликнинг ечими бўлади.

1) $x < \frac{3}{2}$ (масалан, $x = 1$) бўлса, $2x - 3 < 0$; $7 - 3x > 0$ бўлиб, $\frac{2x-3}{7-3x} < 0$ бўлади, яъни $x < \frac{3}{2}$ сонлар тенгсизликнинг ечими эмас.

2) $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3}$ бўлса (масалан, $x = 2$), $2x - 3 > 0$; $7 - 3x > 0$ бўлиб, $\frac{2x-3}{7-3x} > 0$, яъни $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3}$ оралиқдаги сонлар берилган тенгсизликнинг ечими бўлади.

3) $x > \frac{7}{3}$ (масалан $x = 4$) бўлса, $2x - 3 > 0$, $7 - 3x < 0$ бўлиб, $\frac{2x-3}{7-3x} < 0$, яъни $x > \frac{7}{3}$ сонлар берилган тенгсизликнинг ечими бўла олмайди. Юқоридаги мисолни қуйидаги жадвални тўлдириш билан ҳам ҳал қилса бўлади.

x	$x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3}$	$\frac{7}{3} < x$
$2x - 3$	-	+	+
$7 - 3x$	+	+	-
$\frac{2x-3}{7-3x}$	-	+	-

Демак, $x < -4$ ва $x > 1$ бўлганда, $2(x+4)(x-1) > 0$ бўлади; яъни $x < -4$ ва $x > 1$ берилган тенгсизликнинг ечимидир.

3-мисол. **Тенгсизликни ечинг:** $(x+1)(x-2) \times x(x-4) > 0$. $(x+1)(x-2) \times x(x-4)$ ифода $x_1 = -1$ $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ бўлганда нолга

2-мисол. $2x^2 + 6x - 8 > 0$.

Буни чизикли кўпайтувчиларга ажратсак: $2(x+4)(x-1) > 0$. $x = -4$, $x = 1$ тенгсизликнинг ечими эмас (чунки $x = -4$ ва $x = 1$ бўлганда учхад нолга тенг бўлади). Бу икки сон ҳақиқий сонлар тўпламини учта: $x < -4$; $-4 < x < 1$ ва $x > 1$ оралиқларга ажратади. x нинг, $x < -4$, $-4 < x < 1$ ва $1 < x$ оралиқлардан қайси биридаги қийматлари тенгсизликни қаноатлантиришини аниқлаймиз.

x	$x < -4$	$-4 < x < 1$	$1 < x$
$x + 4$	-	+	+
$x - 1$	-	-	+
$2(x+4)(x-1)$	+	-	+

айланиб x нинг $x < -1$, $-1 < x < 2$; $2 < x < 4$ ва $x > 4$ қийматларда y ё мусбат бўлади (y ҳолда ўша оралиқдаги барча сонлар берилган тенгсизликнинг ечими бўлади), ёки манфий бўлади (y ҳолда ўша оралиқдаги сонлар тенгсизликнинг ечими бўла олмайди).

x	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x < 4$	$4 < x$
$x + 1$	-	+	+	+
$x - 2$	-	-	+	+
$x - 4$	-	-	-	+
$(x + 1)(x - 2) \times$ $\times (x - 4)$	-	+	-	+

x нинг $-1 < x < 2$ ва $4 < x$ қийматларида қўпайтма мусбат (нолдан катта) бўлади. Демак, берилган тенгсизликнинг ечими: $-1 < x < 2$ ва $x > 4$.

4-мисол. **Тенгсизликни ечинг:** $\frac{x(x-1)}{x^2-4} < 0$ ёки $\frac{x(x-1)}{(x-2)(x+2)} < 0$.

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$ бўлганда каср нолга айланиб, $x_{3,4} = \pm 2$ бўлганда маънога эга бўлмайди. Бу касрнинг $x < -2$, $-2 < x < 0$, $0 < x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x$ оралиқлардаги ишорасини текширамыз. Бунинг учун қуйидаги жадвални тузамиз:

x	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x$
x	-	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	+
$x + 2$	-	+	+	+	+
$\frac{x(x-1)}{x^2-4}$	+	-	+	-	+

x нинг $-2 < x < 0$ ва $1 < x < 2$ оралиқлардаги қийматларида каср манфий бўлади, яъни берилган тенгсизлик уринли бўлади.

Жавоб: $-2 < x < 0$ ва $1 < x < 2$.

Қуйидаги тенгсизликларни оралиқлар усули билан ечинг:

899. $\frac{2x+4}{4-x} < 0$. 900. $\frac{x^2}{x^2-4} > 0$.

$$901. \frac{2x+5}{x^2-1} < 0. \quad 902. x^3-9x < 0. \quad 903. \frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+4)} > 0.$$

$$904. x^4-5x^2+4 < 0. \quad 905. 2x^4-34x^2+32 > 0.$$

$$906. \frac{(x^2-1)(x-3)}{x-7} > 0. \quad 907. \frac{x^2-17x+60}{x^2-8x+7} < 0 \text{ тенгсизликни жуфт}$$

сонлардаги ечимлари топилсин.

$$908. \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+2} < 0.$$

$$909. x(x+1) \cdot (x+3) \cdot (x-2) \cdot (x-5,1) < 0.$$

$$910. x^5-10x^3+9x > 0.$$

$$911. \frac{x^2+2x-8}{x^2-10x+9} > 0.$$

ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР

2. $(2n+1) + (2k+1) = 2(n+k+1)$. 4. $(2n+1) + (2m+1) + (2k+1) = 2(m+n+k+1) + 1$. 5. $2m+2n+2k = 2(m+n+k)$ —жуфт сон ҳосил бўлади. 7. $(2n+1) + (2k+1) + 2q = 2(n+k+q+1)$. 8. $(2n+1)(2k+1) = 4nk + 2n + 2k + 1 = 2(2nk + n + k) + 1$. 10. Кўшилувчилардан: а) ё биттаси жуфт иккитаси тоқ, ёки б) учтаси ҳам жуфт (ишлаб кўрсатилган 2-масалага қаранг). 1-ҳолда $2m(2n+1)(2k+1)$ —иккига бўлинади, демак, жуфт сон. 2-ҳолда $2m \cdot 2n \cdot 2k = 8mnk$ —иккига бўлинади, демак, жуфт сон. 12. $n(n+1)$ —кўпайтирилувчилардан биттаси албатта жуфт сон бўлгани учун кўпайтма албатта 2 га бўлинади. 13. $n + (n+1) + (n+2) = 3(n+1)$ ифода учга бўлинади. 14. $(2k+1) + (2k+3) = 4(k+1)$ — тўртга бўлинади. 16. $2n(2n+2) = 4n(n+1)$. $n(n+1)$ кўпайтма 2 га бўлингани учун, $4n(n+1)$ кўпайтма $4 \cdot 2 = 8$ га бўлинади. 17. Ҳар қандай натурал m сонини 3 га бўлганда n тадан тегиб, қоладиган қолдиқ 3 дан кичик сон бўлгани сабабли қолдиқ, 0, 1, 2 сонларидан бири бўлади. У ҳолда, бўлинувчи, бўлувчи, бўлинма ва қолдиқ орасидаги боғланишга асосан: $m = 3n$ ёки $m = 3n + 1$ ёки $m = 3n + 2$. 18. Ҳар қандай натурал n сонини 3к, ёки $3k + 1$, ёки $3k + 2$ кўринишда бўлади. $n(n+1)(n+2)$ кўпайтмада:

а) $n = 3k$ бўлса: $3k(3k+1)(3k+2)$ кўпайтма 3 га бўлинади.

б) $n = 3k + 1$ бўлса: $(3k+1)(3k+2)(3k+3) = 3(3k+1)(3k+2)(k+1)$ ҳам 3 га бўлинади.

в) $n = 3k + 2$ бўлса: $(3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4)$ ҳам 3 га бўлинади. Демак, кўпайтма 3 га бўлинади. 19. $n(n+1)(n+2)$ кўпайтма 3 га бўлинади (18-масала) кўпайтирилувчилардан камид биттаси жуфт бўлгани учун 2 га бўлинади. Демак, кўпайтма $3 \cdot 2 = 6$ га бўлинади. 20. Учта кетма-кет бутун сонлар кўпайтмаси 3 га бўлинади (18-масала). Биринчи ва учинчи кўпайтирилувчилар жуфт бўлганидан, кўпайтма 8 га ҳам бўлинади (16-масала). Демак, кўпайтма $8 \cdot 3 = 24$ га бўлинади. 22. $2n(2n+2)(2n+4)(2n+6) = 16n(n+1)(n+2)(n+3)$; $n(n+1)(n+2)(n+3)$ кўпайтирилувчилардан иккитаси жуфт сон бўлгани учун у 24 га бўлинади (20-масала). Демак, натижа $16 \cdot 24 = 384$ га бўлинади. 23. Берилган тоқ сонлар: $2m+1, 2n+1, \dots, 2k+1$ — буларнинг сони тоқ. $(2m+1) + (2n+1) + \dots + (2k+1) = 2(m+n+\dots+k) + (1+1+1+\dots+1)$ қўшилувчиларнинг биринчиси жуфт, иккинчиси (қўшилувчи бирларнинг сони) тоқ бўлгани учун йиғинди тоқ (3-масалага қаранг). 25. Жуфт сонлар: $2m, 2n, \dots, 2k, 2m+2n+\dots+2k = 2(m+n+\dots+k)$ жуфт сон. 26. Тоқ сонлар: $2m+1, 2n+1, \dots, 2k+1$ — буларнинг сони тоқ. Жуфт сонлар: $2p, 2q, \dots, 2r$ — буларнинг сони ихтиёрий, $[(2m+1) + (2n+1) + \dots + (2k+1)] + (2p+2q+\dots+2r)$ ўрта қавс ичидаги йиғинди тоқ (23-масалага асосан) охириги қавс ичидаги йиғинди жуфт (25-масалага асосан). Тоқ ва жуфт сонлар йиғиндиси тоқ сондир (3-масалага асосан). 28. Берилган тоқ сонлар: $2m+1, 2n+1, \dots, 2k+1$. Ихтиёрий сондаги тоқ

сонлар кўпайтмаси $(2m+1)(2n+1)\dots(2k+1)$. Бу кўпайтмада биринчи иккита тоқ сон кўпайтмаси тоқ сон (8-масалага қаранг) бўлади. Ҳосил бўлган тоқ сонни ундан кейинги тоқ сонга кўпайтсак, яна тоқ сон ҳосил бўлади ва ғ. к. охириги кўпайтма ҳам тоқ бўлади. 30. 1-усул. а) $n = 2m - жуфт$ сон бўлса, $2m[2m + (2k+1)]$ ҳам жуфт сон бўлади ва 2 га бўлинади. б) $n = 2m + 1 -$ тоқ сон бўлса, $(2m+1)[2m+1 + (2n+1)] = 2(2m+1)(m+n+1)$ жуфт сон бўлади ва 2 га бўлинади. 2-усул. $n[n + (2k+1)] = n(n+1) + 2kn$. Кўшилувчиларнинг ҳар бири 2 га бўлигани учун йиғинди ҳам 2 га бўлинади. 32. Изланаётган соннинг юзлар, ўнлар ва бирлар хонасидаги рақамлари $a, (a-1), (a-2)$. Изланаётган сон: $100a + 10(a-1) + (a-2) = 111a - 12$. Бу сон рақамларини тескари тартибда ёзишда ҳосил килинган сон: $100(a-2) + 10(a-1) + a = 111a - 210$. Олдинги сондан кейингисини айирсак: $(111a - 12) - (111a - 210) = 198$. 198 сони 2 га ҳам, 9 га ҳам, 11 га ҳам бўлинади. 33. 6174. 34. 29700. 35. Биринчи ва иккинчи рақамлари a , учинчиси b , тўртинчи ва бешинчиси $(a+b)$ бўлсин. У ҳолда изланаётган сон $10000a + 1000a + 100b + 10(a+1) + (a+1) = 11011a + 100b + 11$, рақамларни тескари тартибда ёзишдан ҳосил килинган сон эса: $10000(a+1) + 1000(a+1) + 100b + 10a + a = 11011a + 11000 + 100b$. Кейингисидан олдингисини айирсак 10989 ҳосил бўлади. Жавоб: 10989. 36. 3 хонали сон A бўлсин. Бу соннинг кетига яна 3 хонали сон ёзиш натижасида, у сон $100C$ арта кўпайиб, A та ортади, яъни: $1000A + A = 1001A$. 1001 7 га, 11 га, 13 га бўлигани учун ҳосил бўлган 6 хонали сон ҳам 7, 11, 13 га бўлинади. 37. 10101 марта. 38. 1) 0; 2) $4a$; 3) 0. 39. 1) 54 ; 2) $n^2 + 16n - n^2$; 3) $6a^2$. 40. 1) 0; 2) $4a^2c^2$; 3) $2a^4b^2 + 2a^2b^4$. 41. 1) $(x-b)^2$; 2) $(a+b)^5$. 42. 1) $x = (m^2+1)^3$; 2) $x = c^{3n} + 2a$. 43. Кўрсатма: 1) $(x-y)^3 + (x+y)^3 = (x^2-y^2)^3$. Жавоб: 1) $(x^2-y^2)^3$; 2) 0. 44. Кўрсатма: 1) $[(b+c) - (b^2-c)]^2 = (b+c-b+c)^2 = 4c^2$. Жавоб: 1) $4c^2$; 2) $(a^2-b^2)^2$. 45. 1) x^4+4 ; 2) $-(y^4+4)$. 46. 1) $[(2x-y) - (x^2+2)][(2x-y) + (x^2+2)] = (2x-y)^2 - (x^2+2)^2 = \dots = y^2 - x^4 - 4xy - 4$; 2) $[(m^2+2n^2) - 2(mn-1)][(m^2+2n^2) + 2(mn-1)] = (m^2+2n^2)^2 - 4(mn-1)^2 = \dots = m^4 + 4n^2 + 8mn - 4$. 47. Кўрсатма: 1) $(x-2y)^2(x+2y)^2 \cdot (x^2+4y^2)^2 = (x^2-4y^2)^2(x^2+4y^2)^2 = (x^4-16y^4)^2$. 48. Кўрсатма: 1) $[(n^2+n+1)(n-1)] \cdot [(n^2-n+1) \cdot (n+1)] = \dots = n^6 - 1$. 50. 1) $a^2 + b^2 - cd$; 2) $(a^2 - b^2)^2$. 51. Кўрсатма: 2) $[(x-y)^2 - z^4] \cdot [(x-y) + z^2] = (x-y-z^2)^2$. 52. 1) $a-b+c+d$; 2) $2(a+b+b^4+c^{3n})$. 53. Кўрсатма: 2) $[(a+b)^3 - 8](a+b-2) = (a+b)^2 \cdot 2(a+b) + 4$. 54. Кўрсатма: 2) $[(x^3 - (x^2y + 12xy^2 - 8y^3) + y^3) : (x-y)] = [(x-2y)^3 + y^3] : [(x-2y) + y] = [(x-2y)^2 - y(x-2y) + y^2] = \dots = x^2 - 5xy + 7y^2$. 55. 1) $[(a^6 + 6a^4b^2 + 12a^2b^4 + 8b^6) - b^6] : (a^2 + b^2) = [(a^2 + 2b^2)^3 - b^6] : [(a^2 + 2b^2) - b^2] = (a^2 + 2b^2)^2 + b^2(a^2 + 2b^2) + b^4 = a^4 + 5a^2b^2 + 7b^4$. 2) $[(x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3) - y^3] : (x^2 - 2y) = \dots = x^4 - x^2y + y^2$. 59. $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ (1); $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (2), тегишли қийматлар қўйилса: $x^2 = y^2 + 2ab$; $ab = \frac{x^2 - y^2}{2}$, $a+b$ билан ab нинг қийматларини (1) тенгликка қўйсак: $a^3 + b^3 = x^3 - 3 \cdot \frac{x^2 - y^2}{2} \cdot x = \frac{x(3y^2 - x^2)}{2}$. 60. $[(5a-3c)+4b] \times [(5a-3c)-4b] = (5a-3c)^2 - 16b^2$; $b^2 = a^2 - c^2$ бўлгани учун: $(5a-3c+4b) \times (5a-3c-4b) = (5a-3c)^2 - 16(a^2 - c^2) = 9a^2 - 30ac + 25c^2 = (3a-5c)^2$. 61. 1331 соннинг рақамлари орасига n талдан ноллар ёзсак, $N = 100 \dots 0300 \dots 0300 \dots 01$ сони ҳосил бўлади. Бу сон $3n+4$ та рақамга эга бўлиб, уни қуйидагича ёза оламиз: $N = 100 \dots 0000 \dots 0000 \dots 00 + 3 \cdot 100 \dots 0000 \dots 0000 \dots 00 + 3 \cdot 100 \dots 00 + 1 = 10^{3n+3} + 3 \cdot 10^{2n+2} + 3 \cdot 10^{n+1} + 1 = (10^{n+1} + 1)^3$. 62. Бешта келма-кет келган сонларни $(n-2), (n-1), n, (n+1), (n+2)$ орқали белгиласак $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$. $5(n^2 + 2)$ бирор бутун соннинг квадрати бўлсин учун $n^2 + 2$ бешга бўлиши керак. Бунинг учун n^2 сони фақатгина 3 ёки 8 рақамларидан бири билан тамомланадиган сон бўлиши керак. Аммо ҳеч қандай бугун соннинг квадрати 3 ёки 8 рақамлари билан тамомланмайди. Демак, $n^2 + 2$ бешга бўлинмас экан. Шунинг учун $5(n^2 + 2)$ бутун соннинг квадрати бўла олмас экан. 65. 1-усул. $a + a^3 = (a+1)^2 - 2a^2$ айир-

мада камаювчи 2 га бўлинади (a ва $(a+1)$ дан биттаси жуфт бўлиши керак). Айрилувчи ҳам 2 га бўлинади; демак, айирма ҳам 2 га бўлинади. 2-усул. $a + a^3 = a(a^2 + 1)$. а) $a = 2m$ жуфт бўлса, $2m(4m^2 + 1) -$ жуфт сон бўлиб, у 2 га бўлинади. б) $a = 2m + 1 -$ тоқ сон бўлса, $(2m + 1)[(2m + 1)^2 + 1] = 2(2m + 1)(2m^2 + 2m + 1) -$ жуфт сон бўлади ва 2 га бўлинади. 67. 1-усул. $k = 2n + 1$ бўлса: $k^2 - 1 = (2n + 1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n(n + 1) - 8$ га бўлинади (12-масалага қаранг). 2-усул. $k -$ тоқ сон бўлса, $k - 1$ ҳам, $k + 1$ ҳам жуфт бўлиб, $(k - 1)(k + 1) = k^2 - 1$ икки кетма-кет жуфт сон кўпайтмаси 8 га бўлинади (16-масала). 68. $(2m + 1)^2 - (2n + 1)^2 = (2m + 1 - 2n - 1)(2m + 1 + 2n + 1) = 4(m - n)(m + n + 1)$. а) m ва $n(m \neq n)$ нинг ҳар иккиси ё жуфт ёки тоқ сонлар бўлса, $m - n$ жуфт сон бўлади. У ҳолда кўпайтма 8 га бўлинади. б) m ва n лардан бири жуфт, иккинчиси тоқ бўлса, $(m + n + 1)$ жуфт сон бўлиб, кўпайтма яна 8 га бўлинади. 69. Изланувчи икки хонали сон $10a + b$, рақамлари тескари тартибда ёзилган икки хонали сон эса $10b + a$. Бунда $a < 9$, $b < 9$. Масаланинг шартига кўра: $(10a + b) + (10b + a) = 11(a + b) = k^2$; бундан эса $a + b = 11n^2$; $a + b < 18$ бўлгани сабабли, $n = 1$, яъни $a + b = 11$ бўлиши зарур.

a	2	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3	2
$10a + b$	29	38	47	56	65	74	83	92

Жавоб: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

70. Изланаётган икки хонали сон: $10a + b$ рақамлари тескари тартибда ёзилган сон. $10b + a$, $(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b)$. Масала шартига кўра: $9(a - b) = k^2$. $0 < b < a < 9$ бўлгани учун $1 < a - b < 9$. Иккинчи томондан: 9 дан катта бўлмаган $a - b$, натурал соннинг квадрати бўлиши керак, яъни: 1) $a - b = 1$; 2) $a - b = 4$; 3) $a - b = 9$ бўлиши мумкин. 1) $a - b = 1$ бўлса: 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98. 2) $a - b = 4$ бўлса: 40, 51, 62, 73, 84, 95. 3) $a - b = 9$ бўлса: 90. Жавоб: 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 40, 51, 62, 73, 84, 95, 90. 75. 1) $4a^2$, 2) m^2 . 76. 1) $4(-ab + ac - bd + cd)$; 2) $3(x^2 - y^2 + z^2 - t^2 + 2xz - 2yt)$. 77. Кўрсатма: 2) $(a + b - c)^2 : (a + b - c) = \dots$. Жавоб: 1) $2z(x + y - z)$, 2) $a + b - c$. 78. Кўрсатма: 1) $(m^2 + n^2 + mn - 1)^2 : (m^2 + n^2 + mn - 1)$. Жавоб: 1) $(m^2 + n^2 + mn - 1)$. 2) $(a^2 + b^2 + c^2)^2 + bc(a^2 + b^2 + c^2) + b^2c^2$. 79. Кўрсатма: $x = 1$ бўлса, $(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 2)^{1970} = 1$. Жавоб: 1. 80. $a = 1$ бўлса, $(1 + 2 + 3 + \dots + 4)^n = 4^n = 2^n - 2^{10} = 2 \cdot 2^{10} - 2^{10} = 2^{10} = 1024$. Жавоб: 1024. 82. Тенгликнинг чап қисмидаги ифода мураккаб бўлгани учун, шу ифодага соддалаштириб тенгликнинг ўнг қисмидаги ифодага тенглигини кўрсатган маъқул: $(x + y + z + t)^2 + (x + y - z - t)^2 + (x + z - y - t)^2 + (x + t - y - z)^2 = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 2zt + 2xy - 2xz - 2yt - 2zt + 2yz = 4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$.

85. 1-усул. $[(a + b + c)^3 - (-a + b + c)^3] - [(a - b + c)^3 + (a + b - c)^3] = [(a + b + c) - (-a + b + c)] [(a + b + c)^2 + (a + b + c)(-a + b + c) + (-a + b + c)^2] - [(a - b + c) + (a + b - c)] [(a - b + c)^2 - (a - b + c)(a + b - c) + (a + b - c)^2] = 2a[(a + b + c)^2 + (b + c)^2 - a^2] + (-a + b + c)^2 - \dots = 24abc$.

2-усул. $a + b - c = x$, $a - b + c = y$, $-a + b + c = z$ деб белгилаб, тенгликларни қўшсак: $a + b + c = x + y + z$. Берилган ифодада қавс ичидаги ифодалар ўрнига тегишли қийматларни қўйсак:

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = [(x + y + z)^3 - x^3] - (y^3 + z^3) = (y + z)[(x + y + z)^2 + x(x + y + z) + x^2] - (y + z)(y^2 - yz + z^2) = (y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz +$$

$$+ x^3 + xy + xz + x^2 - y^2 + yz - z^2) = 3(x + y)|x(x + y) + z(x + y)| = 3(x + y)(y + z)(x + z).$$

x, y, z лар ўрнига қийматлари қўйилса: $3 \cdot 2c \cdot 2a \cdot 2b = 24abc$.

3-у су л. Ҳар қайси кавсни кубга кўтариб соддалаштирилади.

86. 1-у су л. $a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(bc + ab + c^2 + ac) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc + 3a^2b + 3ac^2 + 3a^2c + 3b^2c + 3b^2a + 3ab^2 + 3bc^2 + 3abc = (a + b + c)^3 = 0^3 = 0$.

2-у су л. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ (1); $a + b = -c$ дан: $(a + b)^3 = -c^3$; $b + c = -a$ дан: $b(b + c) = -ab$. Бундан: $ab = -b(b + c) = (a + c) \times (b + c)$, чунки $a + c = -b$ дан: $b = -(a + c)$; $(a + b)^3$ ва ab нинг қийматини (1) тенгликка қўйсақ: $-c^3 = a^3 + b^3 + 3(a + c)(b + c)(a + b)$ ёки $a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + c)(b + c)(a + b) = 0$. (87) Берилган шартдан: $(m + n + p)^2 = 0$ ёки $m^2 + n^2 + p^2 = -2(mn + mp + np)$. Бу тенгликнинг иккала қисмини квадратга кўтарсақ: $(m^2 + n^2 + p^2)^2 = 4(m^2n^2 + m^2p^2 + n^2p^2 + 2m^2np + 2mn^2p + 2mnp^2) = 4[m^2n^2 + m^2p^2 + n^2p^2 + 2mnp(m + n + p)] = 4(m^2n^2 + m^2p^2 + n^2p^2)$. (88) $(a + b + c)^2 = 0$, бундан $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$. Охириги тенгликнинг ҳар икки қисмини квадратга кўтарайлик: $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2) = 4[a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2] = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2)$. (1) ёки $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$, $2(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4) = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$ (2). (1) ва (2) тенгликлардан: $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)$; $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$. (90) c нинг даражасига нисбатан тизиб $(c^4 + c^3 + c^2 + c + 1) \cdot (c^2 + c - 2)$ ҳосил қилинади ва кўпайтирилади. Жавоб: $c^6 + 2c^5 - c - 2$. (91) $n^6 + 1008n + 720$. (92) $7x^2 + 24x - 5a^2$. 93. $3a^3$. (94) Бўлувчи тизилиб олинади. Жавоб: $3 + 2c$. (95) $2y - 3$.

96) $2p - 3q$. (98) 1-у су л. Бўлувчини $x^n + x^{n-1}$ кўринишда ёзиб, сўнгра бўлинад.

2-у су л. Кўпайтувчиларга ажратиб қуйдиғача бўлиш мумкин: $x^{m+n-3}(x^3 + 1) : [x^n - 1(x + 1)] = x^{m-2}(x^2 - x + 1)$. (99) Бўлувчини $x^m + x^{m-1}$ кўринишда ёзиб, сўнгра бўлинад.

Жавоб: $x^{2m} - x^{2m}y^n + x^m y^n - y^{3n}$. (101) K расмта. 4) $3xuz$ ни; $xuz + xuz + xuz$ кўринишда ёзиб, ғруппаланлади. Жавоб: 1) $(n + 4k)(7n - 5m)$; 2) $4a(a - 2b)(c - 3d)$; 3) $a(a + 1)(d - b - c)$; 4) $(x + y + z)(xy + xz + yz)$. (102) Жавоб: 1) $(a^3 + 2an + 3bn^2)^2$. (103) K расмта. 1) x ни $2x - x$ кўринишда ёзиб ғруппаланлади. 3) $2n^2$ ни $-n^2 + 3n^2$ кўринишда ёзиб кўпайтувчиларга ажратилди. 4) $c^3 + c^3 + 4 = (c^3 + 8) + (c^2 - 4) = (c + 2)(c^2 - 2c + 4) + (c - 2)(c + 2) = (c + 2)(c^2 - c + 2)$. (104) 1-у су л. $(a^8 + 2a^4 + 1) - a^4 = (a^4 + 1)^2 - a^4 = (a^4 + 1 - a^2) \cdot (a^4 + 1 + a^2) = (a^4 - a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1)$. (105) $m^3 + n^2 = z$ деб белгиласак: $(1 + 9z^2)^2 - 36z^2 = (1 + 9z^2 - 6z)(1 + 9z^2 + 6z) = (1 - 3z)^2(1 + 3z)^2$, бунда z нинг ўрнига қийматни қўйлади.

Жавоб: $(1 - 3m^3 - 3n^2)^2(1 + 3m^3 + 3n^2)$. (106) K расмта. 3) $[(m^2 - 6mn + 6n^2) - mn]^2 = (m^2 - 7mn + 6n^2)^2 = [(m^2 - mn) - (6mn - 6n^2)]^2 = [m(m - n) - 6n(m - n)]^2 = (m - n)^2(m - 6n)^2$. Жавоб: 1) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) \times (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$; 2) $2m^4(3 - 2m)(3 + 2m)(a - 2b^2) \times (a^2 + 2ab^2 + 4b^4)$. (107) K расмта. 4) $a^3 + a^2 - 2ab + b^2 - b^3 = (a^3 - b^3) + (a^2 - ab) - b^2 = \dots$ (108) K расмта. 2) $(a^3 - a) + 2(a^2 - 2a^2 + 1) = a(a^2 - 1) + 2(a^2 - 1)^2 = \dots$ 3) йиғиндини $14x - 2x^2 - 9x + 63$ кўринишда ёзиб ғруппаланлади.

Жавоб: 1) $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$; 2) $(a - 1)(a + 1)(2a^2 + a - 2)$; 3) $(7 - x) \times (2x + 9)$; 4) $9(x + 1)^2(x + 3)^2$. (110) 1) $(c^2 + c)^2 + 4(c^2 + c) + 1 = (c^2 + c + 1)^2 - 16 = (c^2 + c + 6)(c^2 + c - 2) = (c^2 + c + 6)(c - 1)(c + 2)$; 2) $(y^4 + 16y^2 + 64) - y^4 = (y^2 + 8)^2 - y^4 = \dots$ (111) 1) $(z^3 + 9z^2 + 27z + 27) - z - 3 = \dots = (z + 3)(z + 2)(z + 4)$, 2) $(y^3 + 6y^2 + 12y + 8) + (2y^2 + 5y + 2) = (y + 2)^3 + (y + 2)(y + 1) = \dots = (y + 2)(y + 1)(y + 5)$. (112) K расмта. 2) $C = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = \dots$ Жавоб: 1) $(m - n^2 + c^2)^2$; 2) $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c)$.

115. *Кўрсатма.* 1) $-13c$ ни $-7c - 6c$ кўринишида ёзиб, группаланади. 2) $-21a^2$ ни $-16a^2 - 5a^2$ кўринишида ёзиб, группаланади. *Жавоб:* 1) $(c-1)(c+3) \times (c+2)(2c-1)$; 2) $(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)(a^2+5)$. **114.** *Кўрсатма.* 1) $(m^2 - 6mp + 9n^2) - (4p^2 - 4np + n^2) = (m-3n)^2 - (2p-n)^2 = \dots = (m-4n+2p)(m-2n-2p)$; 2) кўпхадни $x^3 + 4x^2 + 4x^2 + 16x + 3x + 12$ кўринишида ёзиб, группаланади. *Жавоб:* 2) $(x+1)(x+3)(x+4)$. **115.** 1) $2x^{3m}$ ўрнига $x^{3m} + x^{3m}$ йиғиндини ёзиб, группаланади. 2) Кўпхадни $n^3 - n - 2n + 2$ ёки $n^3 - 2n^2 + n + 2n^2 - 4n + 2$ кўринишида ёзиб, группаланади. *Жавоб:* 1) $x^m(x^{m-1}+1)^2(x^{2m}+1)$; 2) $(n-1)^2(n+2)$. **116.** 1) Кўпхадни $(a^4 - a^2b^2) + (4a^3b - 4ab^3) + (4a^2b^2 - 4b^4)$ кўринишида ёзиб, группаланади. 2) Кўпхадни $x^3 - x - 6x - 6$ ёки $(x^3 + x^2) + (-x^2 - x) + (-6x - 6)$ кўринишида ёзиб, группаланади. *Жавоб:* 1) $(a-b)(a+b)(a+2b)^2$; 2) $(x+1)(x+2)(x-3)$. **117.** *Кўрсатма.* 1) Кавсларни очиб қуйидагича группаланади: $(2x^2 + 4xy + 2xz) + (xy + 2y^2 + yz) + (xz + 2yz + z^2) = \dots$ 2) $c^2(a+b) + b^2c + b^2d + abc + bcd + abd + acd = c^2(a+b) + bc(a+b) + bd(a+b) + dc(a+b) = \dots$ *Жавоб:* 1) $(2x+y+z)(x+2y+z)$; 2) $(a+b)(b+c)(c+d)$. **118.** 1-усул. $n^{10} + n^5 + 1 = (n^{10} + n^5 + n^5) - (n^5 + n^5 + n^5) + (n^5 + n^5 + n^5) + (n^5 + n^5 + n^5) - (n^5 + n^5 + n^5) + (n^5 + n^5 + n^5) + (n^5 + n^5 + n^5) - (n^5 + n^5 + n^5) + (n^5 + n^5 + n^5) + (n^5 + n^5 + n^5) - (n^5 + n^5 + n^5) + (n^5 + n^5 + n^5) = \dots$ 2-усул. $(n^{10} + n^5 + n^5) - (n^5 + n^5 + n^5) + (n^5 + n^5 + n^5) + (n^5 + n^5 + n^5) + (n^5 + n^5 + n^5) - (n^5 + n^5 + n^5) + (n^5 + n^5 + n^5) - (n^5 + n^5 + n^5) + (n^5 + n^5 + n^5) - (n^5 + n^5 + n^5) + (n^5 + n^5 + n^5) = \dots$ *Жавоб:* $(n^2 + n + 1)(n^8 - n^7 + n^5 - n^4 + n^3 - n + 1)$. **119.** $(x+y)^3 + z^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3xyz = [(x+y)^3 + z^3] - 3xy(x+y+z) = (x+y+z)[(x+y)^2 - z(x+y) + z^2 - 3xyz] = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$. **120.** $(x+y)(x+z)(y+z)$. **121.** $3(a-b)(b-c)(c-a)$. **122.** $3abcd(a+b)(c+d)$. **123.** $a^2b^2(a-b) + c^2(a^2-b^2) - c^2(c^3-b^3) = (a-b) \times [(a^2b^2+ac^3+bc^3-a^2c^2-abc^2-b^2c^2) - (a-b)(a^2b^2+c^2-bc^2-b^2c^2)] = (a-b)[a^2(b^2-c^2) - bc^2(b-c) - ac^2(b-c) - a^2c - ab^3] = a^2b^2c^2[a^2(b-c) + bc(b^2-c^2) - a(b^3-c^3)] = a^2b^2c^2(b-c)(a^3+bc^2+b^2c-ab^2-abc-ac^2) = a^2b^2c^2(b-c)[a(a^2-b^2)-c^2(a-b)-bc(a-b)] = \dots = a^2b^2c^2(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)$. **125.** $xn+2(xn+1)(xn-1)(xn+xn-1+1)$. **126.** $(y^2+z^2)(y^2+y^2z^2+z^2)(y^2-y^2z^2+z^2)$. **127.** $(x-2)^4 + x^2 - 2x = (x-2)^4 + x(x-2) = (x-2)(x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x) = (x-2)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 3x^2 + 6x - 3 + 4x - 4) = (x-2)[(x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 4(x-1)] = (x-2)(x-1) \times (x^2 - 2x + 1 - 3x + 3 + 4) = (x-2)(x-1)(x^2 - 5x + 8)$. Демак, берилган кўпхад $(x-2)(x-1) \neq 0$ га бўлинадиган, бўлинма $x^2 - 5x + 8$ га тенг. **128.** $(a+b)^3 + 3(a+b)^2 \cdot c + 3(a+b)c^2 + c^3 - a^3 - b^3 - c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3c(a+b)^2 + 3c^2(a+b) - a^3 - b^3 - c^3 = 3ab(a+b) + 3c(a+b)^2 + 3c^2(a+b) = \dots = 3(a+b) \cdot (a+c)(b+c)$. Демак, берилган кўпхад $3(a+b)(a+c)$ га бўлинадиган. Бўлинма $b+c$ га тенг. **129.** $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc = ab^2 + 2abc + ac^2 + bc^2 + 2abc + a^2b + a^2c + 2abc + b^2c - 4abc = (ab^2 + a^2b) + (ac^2 + bc^2 + a^2c + abc) + (b^2c + abc) = ab(a+b) + b^2c + c^2(a+b) + ac(a+b) + bc(b+a) = \dots = (a+b)(a+c)(b+c)$. **130.** $x^2 + x + 4 = z$ деб белгиласак: $z^2 + 8xz + 15x^2 = (z+4x)^2 - x^2 = (z+4x+x)(z+4x-x) = (z+5x)(z+3x)$. z нинг қиймати ўрнига қўйилса, $(x^2 + x + 4 + 5x)(x^2 + x + 4 + 3x) = (x^2 + 6x + 4)(x + 2)^2$. **131.** $z^2 + 4z + 8 = a$ деб белгиласак, $a^2 + 3az + 2z^2 = a^2 + 2az + az + 2z^2 = (a+z)(a+2z)$, a нинг қиймати ўрнига қўйилса, $(z^2 + 4z + 8 + 2z)(z^2 + 4z + 8 + z) = \dots = (z+2)(z+4)(z^2 + 5z + 8)$. **132.** $n^2 + n + 1 = x$ деб белгиласак: $x(x+1) - 12 = x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$. x нинг ўрнига қиймати янги қўйсақ: $(n^2 + n + 5)(n^2 + n - 2) = \dots = (n^3 + n + 5)(n+2)(n-1)$. **133.** $(m-3)(m+2)(m+4)(m-1)$. **134.** $2a+c-b$ нинг ўрнига $(a-b) + (a+c)$ йиғиндини қўямиз. $ab(a-b) - ac(a+c) + bc[(a-b) + (a+c)] = ab(a-b) - ac(a+c) + bc(a-b) + bc(a+c) = (a-b)(ab+bc) + (a+c)(bc-ac) = b(a-b)(a+c) - c(a+c)(a-b) = (a-b)(a+c)(b-c)$. **135.** $a-c$ ни $(b-c) + (a-b)$ га алмаштирамиз. $bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)[(b-c) + (a-b)] + ab(c+d)(a-b) = bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)(b-c) - ac(b+d)(a-b) + ab(c+d)(a-b) = c(b-c)(ab+bd-ab-ad) + a(a-b)(bc+bd-bc-cd) = \dots$ *Жавоб:* $d(a-b)(a-c)(b-c)$. **36.** 1-усул. $a-y$ ни $(a-x) + (x-y)$ га алмаштириладиган. 2-усул. $ay^2 - xy^2 - ax^3 + x^3y + a^3x - a^3y = a(y^2 - x^2) - a^3(y-x) -$

$-xy(y^2 - x^2) = (y-x)[a(y^2 + xy + x^2) - a^3 - xy^2 - x^2y] = (y-x)[a(y^2 - a^2) - xy(y-a) - x^2(y-a)] = (y-x)(y-a)(ay+a^2 - xy - x^2) = \dots$ Жавоб: $(y-x)(y-a)(a-x)(x+y+a)$. (137) $[(n+1)(n-4)][(n+2)(n+3)] - 24 = (n^2 + 5n + 4)(n^2 + 5n + 6) - 24$. $n^2 + 5n + 4 = x$ деб белгиласак, $x(x+2) - 24 = \dots = (x+6)(x-4)$. Энди x нинг қиймати ўрнига қўйилади. Жавоб: $n(n+5)(n^2 + 5n + 10)$; (138) $4[(a+5)(a+12)][(a+10)(a+6)] - 3a^2 = 4(a^2 + 17a + 60)(a^2 + 16a + 60) - 3a^2$. $a^2 + 16a + 60 = y$ деб белгиласак: $4(y+a)y - 3a^2 = \dots = (2y+3a)(2y-a)$. y нинг ўрнига қийматини қўйсак: $(2a^2 + 32a + 120 + 3a)(2a^2 + 32a + 120 - a) = (2a^2 + 35a + 120)(2a^2 + 31a + 120) = (2a^2 + 35a + 120)(a+8)(2a+15)$. (139) $(z+2)(z+6)(z^2 + 8z + 10)$. (140) $y^2 + 1 = z$, $y^2 + 6y + 1 = u$ деб белгиласак: $2z^2 + 5zu + 2u^2 = 2z^2 + 4zu + zu + 2u^2 = 2z(z+2u) + u(z+2u) = (z+2u)(2z+u)$. u ва z ўрнига қийматини қўйсак: $(y^2 + 1 + 2y^2 + 12y + 2)(2y^2 + 2 + y^2 + 6y + 1) = (3y^2 + 12y + 3)(3y^2 + 6y + 3) = 9(y^2 + 4y + 1)(y+1)$. (141) $8a^2 - 16a^2 + 2a^2 - 4a - 3a + 6 = 8a^2(a-2) + 2a(a-2) - 3(a-2) = \dots = (a-2)(8a^2 - 4a + 6a - 3) = \dots = (a-2)(2a-1)(4a+3)$. (142) $24c^3(c+1) - 2c^2(c+1) - 7c(c+1) - 2(c^2-1) = (c+1)(24c^3 - 2c^2 - 9c + 2)$; $24c^3 - 2c^2 - 9c + 2 = (24c^3 - 6c^2) + (4c^2 - c) - (8c - 2) = 6c^2(4c-1) + c(4c-1) - 2(4c-1) = (4c-1)(6c^2 + c - 2)$; $6c^2 + c - 2 = 6c^2 - 3c + 4c - 2 = 3c(2c-1) + 2(2c-1) = (2c-1)(3c+2)$. Тегишли қийматлар ўрнига қўйилди. Жавоб: $(c+1)(4c-1)(2c-1)(3c+2)$. (143) $C = 6n^4(n^2 - 4) - n^3(n^2 - 4) + n^2(n^2 - 4) - 5n(n^2 - 4) + 2(n^2 - 4) = (n^2 - 4)(6n^4 - n^3 + n^2 - 5n + 2)$; $6n^4 - n^3 + n^2 - 5n + 2 = 2n^3(3n-2) + n^3(3n-2) + n(3n-2) - (3n-2) = (3n-2) \times (2n^3 + n^2 + n - 1)$; $C = (n^3 - 4)(3n-2)(2n^3 + n^2 + n - 1)$. $2n^3 + n^2 + n - 1 = n^2(2n-1) + n(2n-1) + (2n-1) = (2n-1)(n^2 + n + 1)$. У ҳолда $C = (n-2)(n+2)(3n-2)(2n-1)(n^2 + n + 1)$. (144) $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 = \dots = (x-y)^2 \times (x+y)(x^2 + y^2)$. $(x-y)^2 \geq 0$; $x+y > 0$ ва $x^2 + y^2 > 0$ бўлгани учун $(x-y)^2(x+y)(x^2 + y^2) \geq 0$. (145) $[(a-1)(a-6)][(a-3)(a-4)] + 9 = [(a^2 - 7a) + 6][(a^2 - 7a) + 12] + 9 = (a^2 - 7a)^2 + 18(a^2 - 7a) + 81 = (a^2 - 7a + 9)^2$. a нинг ҳар қандай қийматида $(a^2 - 7a + 9)^2 \geq 0$ бўлгани учун берилган ифода манфий бўла олмайди. (146) $(m^2 - 1)(m-6)(m-8) + 53 = [(m-1)(m-6)][(m+1)(m-8)] + 53 = [(m^2 - 7m) + 6][(m^2 - 7m) - 8] + 53 = [(m^2 - 7m)^2 - 2(m^2 - 7m) - 48] + 53 = (m^2 - 7m)^2 - 2(m^2 - 7m) + 1 + 4 = (m^2 - 7m + 1)^2 + 4$. $(m^2 - 7m + 1)^2 \geq 0$ бўлгани учун берилган ифода 4 дан кичик бўла олмайди, яъни m нинг ҳар қандай қийматида мусбатдир. (147) $(a^4 - 2a^3b + a^2b^2 + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4) + 1 = \dots = (a-b)^2(a^2 + b^2) + 1$. $(a-b)^2 \geq 0$ ва $a^2 + b^2 > 0$ бўлгани учун охири йиғинди 1 ёки 1 дан катта, яъни мусбат сон бўлади. (148) $48x^2 + 172 + 12x(x^2 - 4x + 4) - (x^4 + 28x^2 + 196) - 96x = 48x^2 + 172 + 12x^3 - 48x^2 + 48x - x^4 - 28x^2 - 196 - 96x = -(x^4 - 12x^3 + 28x^2 + 48x + 16) - 8 = -(x^2 - 6x - 4)^2 + 8$. x нинг ҳар қандай қийматида ҳам ўрта қавс ичидagi ифода мусбат бўлгани сабабли натижа манфий бўлади. (149) $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1 = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1 = (x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$. (151) Изланувчи кетма-кет бутун сонлар $n, n+1, n+2, (n+1)(n+2) + (n+1) = (n+1)[n(n+2) + 1] = (n+1)(n^2 + 2n + 1) = (n+1)^3$. (152) Тенгликнинг икки қисмини $abc(a+b+c) \neq 0$ га кўпайтирсак; $(a+b+c)(bc+ac+ab) = abc$ ёки $(a+b+c)(bc+ac+ab) - abc = 0$ тенгликнинг чап қисмидаги қавсларни кўпайтириб, сўнгра кўпайтувчиларга ажратилса $(a+b)(a+c)(b+c) = 0$ ҳосил бўлади, бундан кўпайтирилувчилардан камда биттаси нолга тенг бўлиши кераклиги кўринади. (Масалан, $a+b=0$ бўлса, $a=-b$ ва $|a|=|b|$ бўлади.) Иккиҳад йиғиндисининг ноль бўлиши эса уларнинг абсолют қиймати тенг, ишораси қарама-қарши эканини билдиради. (153) $a^2(b+c)^2 + b^2(a+c)^2 + c^2(a+b)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)(ab+ac+bc) = \dots = (a^3b + a^2b^2 + a^2bc) + (ab^3 + a^2b^2 + ab^2c) + (a^3c + a^2c^2 + a^2bc) + (ac^3 + a^2c^2 + abc^2) + (b^3c + b^2c^2 + ab^2c) + (bc^3 + b^2c^2 + abc^2) + (a^2bc + ab^2c + abc^2) = a^2b(a+b+c) + ab^2(b+a+c) + a^2c(a+c+b) + ac^2(c+a+b) + b^2c(b+c+a) + bc^2(c+b+a) + abc(a+b+c) = 0$ (чунки берилшига кўра ҳар бир қавс ичидagi ифода нолга тенг). (154) Йиғиндининг бешинчи даражасини ҳисоблаш анчагина оғир бўлгани сабабли, берилган ифодани баён қилинган усуллардан бири билан кўпайтувчиларга ажратиб ҳам қийиндир. Шунинг учун уни «сунъий» усул билан

кўпайтувчиларга ажратамиз. $x = -y$ деб олсак, берилган ифода нолга айлангани учун, бу ифода $(x + y)$ га бўлинади*). Бу ифода $x = -z$ ёки $y = -z$ десак ҳам нолга айлангани сабабли $x + z$, $y + z$ ларга ҳам, яъни $(x + y)(x + z)(y + z)$ кўпайтмага ҳам бўлинади ва бўлилма $M = A(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + xz + yz)$ кўринишида бўлади. Демак: $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 = (x + y)(x + z)(y + z)[A(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + xz + yz)]$ (*). Бу тенгликда $x = y = z = 1$ десак, $240 = 8(3A + 3B)$ ёки $A + B = 10$. $x = y = 1$ ва $z = 0$ десак, $30 = 2(2A + B)$ ёки $2A + B = 15$.

$$\begin{cases} A + B = 10, \\ 2A + B = 15 \end{cases}$$

системани ечсак: $A = 5$, $B = 5$. У ҳолда (*) тенгликни бундай ёза оламиз: $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 = 5(x + y)(x + z)(y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz)$.
 (155) Олдинги (154-) мисолнинг ечилишига қаранг. (56) $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1)$ учта кетма-кет натурал сонлар кўпайтмаси эса 6 га бўлинади (19- масалага қаранг). (57) $4n^2 + 12n + 8 = 4(n^2 + 3n + 2) = 4(n + 1)(n + 2)$; $(n + 1)(n + 2)$ кетма-кет сонларнинг биттаси жуфт бўлгани учун 2 га бўлинади. Демак, берилган ифода 8 га бўлинади. (58) $a^4 + 2a^2 - 2a = \dots = (a - 1)a(a + 1)(a + 2)$. (59) $n^5 - 5n^3 + 4n^4 = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$. Бешта кетма-кет бутун сонлар кўпайтмасидан биттаси албатта 5 га бўлинади. 4 тасининг кўпайтмаси 24 га бўлинади (олдинги масала). Демак, кўпайтма $5 \cdot 24 = 120$ га бўлинади. (60) $(n^5 - 2n^4 + n^3)(n + 2)^2 = n^2(n^2 - 1)^2(n + 2)^2 = [(n - 1)n(n + 1)(n + 2)]^2$. $(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ кўпайтма 24 га бўлингани учун берилган ифода $24^2 = 576$ га бўлинади. (61) 3 га кетма-кет бутун сонлар $(n - 1)$, n , $(n + 1)$ бўлсин. У ҳолда: $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n(n^2 + 2)$. $n(n^2 + 2)$ нинг 3 га бўлиниши исбот қилинади. а) $n = 3m$ бўлса, $n(n^2 + 2) = 3m(9m^2 + 2)$ 3 га бўлинади. б) $n = 3m + 1$ бўлса, $(3m + 1)(9m^2 + 6m + 1 + 2) = 3(3m + 1)(3m^2 + 2m + 1)$ 3 га бўлинади. в) $n = 3m + 2$ бўлса, $n(n^2 + 2) = (3m + 2)(9m^2 + 12m + 4 + 2) = 3(3m + 2)(3m^2 + 4m + 2)$ ҳам 3 га бўлинади. (62) 1- усул. $n(n^2 + 5) = n(n^2 - 1 + 6) = n(n^2 - 1) + 6n = (n - 1)n(n + 1) + 6n$, қўшилувчиларнинг ҳар бири 6 га бўлингани учун йигинди 6 га бўлинади. 2- усул. а) $n = 2k$ жуфт сон бўлса, $2k(4k^2 + 5)$ иккига бўлинади. $n = 2k + 1$ - тоқ сон бўлса, $(2k + 1)[(2k + 1)^2 + 5] = 2(2k + 1)(2k^2 + 2k + 3)$ ҳам иккига бўлинади. Демак, кўпайтма 2 га бўлинадир экан. б) кўпайтманинг 3 га ҳам бўлинишини исбот қиламиз. $n = 3m$ бўлса, кўпайтма 3 га бўлинади. Агар $n = 3$ га бўлинимаса, қолликда 1 ёки 2 қолиши керак, яъни $n = 3m + 1$ ёки $n = 3m + 2$ кўринишидаги сон бўлади. $n = 3m + 1$ бўлса, $(3m + 1)[(3m + 1)^2 + 5] = 3(3m + 1)[3m^2 + 2m + 2]$ ҳам 3 га бўлинади. $n = 3m + 2$ бўлса, $(3m + 2)[(3m + 2)^2 + 5] = 3(3m + 2)(3m^2 + 4m + 3)$ ҳам 3 га бўлинади. Демак, берилган кўпайтма 2 га ҳам, 3 га ҳам бўлингани учун $2 \cdot 3 = 6$ га ҳам бўлинади. (63) $n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = n^8(n^4 - 1) - (n^4 - 1) = (n^8 - 1)(n^4 - 1) = (n^4 - 1)^2(n^4 + 1) = (n^2 + 1)(n^2 + 1)^2(n + 1)^2(n - 1)^2$. n тоқ сон бўлса: а) $n^4 + 1$ ва $n^2 + 1$ жуфт сонлар бўлгани учун $(n^4 + 1)(n^2 + 1)^2$ ифода $2 \cdot 2^2 = 8$ га бўлинади; б) $(n - 1)(n + 1)$ кетма-кет жуфт сонлар кўпайтмаси $2 \cdot 4 = 8$ га $(n - 1)^2(n + 1)^2$ эса $8^2 = 64$ га бўлинади. Демак, берилган кўпайтма

8 · 64 = 512 га бўлинади. (64) 1) $\frac{3b^2}{4a^2}$; 2) ab^2 ; 3) $\frac{1}{xy^2}$. (65) 1) $\frac{4}{9a^2b^2}$; 2) $\frac{x^2y^2}{3}$;
 3) $\frac{2}{3}a^2b^2$. (66) $\frac{5a}{4b^4}$; 2) $\frac{2x^{n-4}}{7y^{n+3}}$; 3) $\frac{a^{m+n+1}}{b^{m-2}}$. (67) 1) $\frac{x^n(x+y)^m}{y^{2n}}$; 2) $\frac{a^n}{b^n(a^2-b^2)^n}$;
 3) $\frac{(x-y)^n(x^2+y^2)^n}{a^{2m-1}}$. (68) $\frac{c-a}{c^2+a}$. (69) $\frac{ax+by}{ax-by}$. (70) $\frac{x+y-a-b}{x-y+a-b}$.
 (71) $\frac{x+y-a+b+c}{x-a-b-y+c}$. (72) $\frac{a+i}{a-2}$. (73) $\frac{b+2}{b-1}$. (74) $\frac{c+3}{c+2}$. 175. $\frac{n-4}{n-2}$.

*) Безу теоремасига асосан. Бу теорема билан юқори синфларда танишилади.

$$\begin{aligned}
 (176) \quad \frac{x^2+2}{x^2+1} & \quad (177) \quad \frac{a^2+2ab+3ab+6b^3}{a^2+3ab+4ab+12b^3} = \frac{a(a+2b)+3b(a+2b)}{a(a+3b)+4b(a+3b)} = \frac{a+2b}{a+4b} \\
 (178) \quad \frac{a+3c}{a+c} & \quad (179) \quad \frac{ac(a^2-2ac+c^2)-ab^2c}{(a^2+c^2-b^2-2ac)(a^2+c^2-b^2+2ac)} = \frac{ac\{(a-c)^2-b^2\}}{(a-c-b)(a-c+b)(a+c-b)(a+c+b)} = \frac{ac\{(a-c)^2-b^2\}}{(a-c-b)(a+c+b)} \\
 & = \frac{ac(c^2+n^2)-c^2n^2}{(c+n)(c^2-cn+n^2)} = \frac{ac}{c+n} \cdot (180) \quad \frac{(c^2+n^2)^2-c^2n^2}{c^3+n^3} = \\
 & = \frac{(c^2+n^2)(c^2+cn+n^2)}{(c+n)(c^2-cn+n^2)} = \frac{c^2+cn+n^2}{c+n} \cdot (181) \quad \frac{4(b^4+b-1)^2}{(b^4-2b^2+1)-b^2} = \frac{4(b^2+b-1)^2}{(b^2-1)^2-b^2} = \\
 & = \frac{4(b^2+b-1)}{b^2-b-1} \cdot (182) \quad \frac{x(x^3-2x^2+1)}{x^2(x^3-x^2-x+1)} = \frac{x(x^2-1)^2}{x^2\{x^2(x-1)-(x-1)\}} = \\
 & = \frac{(x^2-1)(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x^2-1)} = \frac{x+1}{x}
 \end{aligned}$$

(184) Тенгликнинг чап қисмидаги касрнинг махражидаги кўпхадни суратидаги кўпхадга бўламиз. Бўлинмада $3x^2 - y^2$, қолдиқда ноль чиқади. У ҳолда: $9x^5 - xy^4 - 18x^4y + 2y^5 = (3x^3 + xy^2 - 6x^2y - 2y^3)(3x^2 - y^2)$. (185) 1- у с ул. (Кетма-кет бўлиш билан касрнинг сурати ва махражидаги кўпхадларнинг энг катта умумий бўлувчисини топish усули.)

$$\begin{array}{r|l}
 a) \quad \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 - 6x} & \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \\
 \hline
 - 2x^2 + 5x - 2 & \\
 \hline
 - 2x^2 - 2x + 12 & \\
 \hline
 7x - 14 = 7(x - 2) &
 \end{array}$$

б) бўлувчини $x - 2$ га бўламиз:

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x} & \frac{x - 2}{x + 3} \\
 \hline
 - 3x - 6 & \\
 \hline
 - 3x - 6 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

бундан: $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$;

$$\begin{array}{r|l}
 в) \quad \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2} & \frac{x - 2}{x^2 + x + 1} \\
 \hline
 - x^2 - x - 2 & \\
 \hline
 - x^2 - 2x & \\
 \hline
 - x - 2 & \\
 \hline
 - x - 2 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

бундан: $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1)$; $\frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{(x - 2)(x^2 + x + 1)}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 3}$. 2- у с ул. (Касрнинг сурат ва махражини қушайтувчиларга ажратish усули.)

$$\begin{aligned}
 & \frac{(x^3 - 2x^2) + (x^2 - 2x) + (x - 2)}{(x^2 - 2x) + (3x - 6)} = \frac{x^2(x - 2) + x(x - 2) + (x - 2)}{x(x - 2) + 3(x - 2)} = \\
 & = \frac{(x - 2)(x^2 + x + 1)}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 3}. \quad (186) \quad 1\text{- у с ул.} \quad 185\text{- мисолни ечиш-}
 \end{aligned}$$

нинг 1- усулига қаранг. 2- у с ул. $\frac{(x^3 - 3x^2) + (2x^2 - 6x) - (x - 3)}{(x^2 + 2x^2) + (2x^2 + 4x) - (x + 2)} = \frac{x^2(x - 3) + 2x(x - 3) - (x - 3)}{x^2(x + 2) + 2x(x + 2) - (x + 2)} = \frac{(x - 3)(x^2 + 2x - 1)}{(x + 2)(x^2 + 2x - 1)} = \frac{x - 3}{x + 2}$. 187, 186- мисол кўрсатмасига қаранг. Касрнинг махражини $-a^2 + 2a^2 + 4a - 3$ кўринишда

Ёзиб олиш керак. *Жавоб:* $\frac{a-2}{3-a}$. 188. Касрнинг сурат ва махражидagi кўпқад-ларнинг бирини иккинчисига бўлиш усули Филан энг катта умумий бўлувчисини толамиз:

$$a) \frac{a^4 + a^3 - a^2 + 5a - 2}{-a^3 - a^3 - 5a^2 + 7a - 2} \Bigg| \frac{a^4 - a^3 - 5a^2 + 7a - 2}{2a^2 + 4a^2 - 2a} = 2a(a^2 + 2a - 1);$$

б) бўлувчини $a^3 + 2a - 1$ га бўламиз.

$$\frac{a^4 - a^3 - 5a^2 + 7a - 2}{-a^3 + 2a^3 - a^2} \Bigg| \frac{a^2 + 2a - 1}{a^2 - 5a + 2}$$

$$\frac{-3a^3 - 4a^2 + 7a - 2}{-3a^3 - 6a^2 + 3a}$$

$$\frac{-2a^2 + 4a - 2}{-2a^2 + 4a - 2}$$

$$0$$

бундан: $a^4 - a^3 - 5a^2 + 7a - 2 = (a^2 + 2a - 1)(a^2 - 3a + 2)$
в) бўлинувчини $a^2 + 2a - 1$ га бўламиз:

$$\frac{a^4 + a^3 - a^2 + 5a - 2}{a^4 + 2a^3 - a^2} \Bigg| \frac{a^2 + 2a - 1}{a^2 - a + 2}$$

$$\frac{-a^3 + 5a - 2}{-a^3 - 2a^2 + a}$$

$$\frac{-2a^2 + 4a - 2}{-2a^2 + 4a - 2}$$

$$0.$$

Бундан: $a^4 + a^3 - a^2 + 5a - 2 = (a^2 + 2a - 1)(a^2 - a + 2) \cdot \frac{a^4 + a^3 - a^2 + 5a - 2}{a^4 - a^3 - 5a^2 + 7a - 2} =$

$\frac{(a^2 + 2a - 1)(a^2 - a + 2)}{(a^2 + 2a - 1)(a^2 - 3a + 2)} = \frac{a^2 - a + 2}{a^2 - 3a + 2}$. 189. Олдинги мисолнинг кўрсатма-сига қаранг. Кўпқадлар кўбайтувчиларга ажратилса: $n^4 + 3n - 2 = (n^2 + n - 1) \times (n^2 - n + 2)$; $n^4 - 2n^2 + 5n - 6 = (n^2 - n + 2)(n^2 + n - 3)$. *Жавоб:* $\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + n - 3}$.

190. $\frac{ab^2 + 4ab + 4a - 4b + 4a - b^2 - 8}{(b^2 + 8)^2 - 16b^2} = \frac{(ab^2 + 4ab + 8a) + (-4b - b^2 - 8)}{(b^2 + 8)^2 - 16b^2} =$

$= \dots = \frac{a-1}{b^2 - 4b + 8}$. 191. Олдинги мисолнинг кўрсатмасига қаранг. *Жавоб:*

$\frac{y^4 + 2y + 2}{x - 1} \cdot \frac{(c^6 - 64)^3}{[(c^3 - 8) - 4c(c - 2)]^2} = \frac{(c^3 - 8)(c^3 + 8)^2}{(c - 2)^2(c^2 + 2c + 4 - 4c)^2} = \dots = (c^2 +$

$+ 2c + 4)^2(c + 2)^2$. 193. $\frac{m(m^3 + n^3)}{m(m+n)} + \frac{3mn(m^2 - n^2)}{m^2 - n^2} - \frac{n(m^3 - n^3)}{n(m-n)} =$

$= \frac{(m+n)(m^2 - mn + n^2)}{m+n} + 3mn - \frac{(n-n)(m^2 + mn + n^2)}{m-n} = m^2 - mn +$

$+ n^2 + 3mn - m^2 - mn - n^2 = mn$ 194. 0. 195. 1) $\frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + 1 =$

$= \frac{(y+z)^2 - x^2}{2yz}$; 2) $\frac{(x+z-y)(x+y-z)}{(x+y+z)(y+z-x)} + 1 = \frac{|x-(y-z)||x+(y-z)|}{(y+z)^2 - x^2} + 1 =$

$= \frac{x^2 - (y-z)^2 + (y+z)^2 - x^2}{(y+z)^2 - x^2} = \frac{4yz}{(y+z)^2 - x^2}$; 3) $\frac{(y+z)^2 - x^2}{2yz} \cdot \frac{4yz}{(y+z)^2 - x^2} = 2$.

196. $\frac{1}{(x+z)^2 - y^2}$; 1 $\frac{1}{3}$. 197. 1) $\frac{a^2 - ab}{a^2b + b^3} - \frac{2a^2}{b^3 - ab^2 + a^2b - a^3} = \frac{a^2 - ab}{b(a^2 + b^2)} - \frac{2a^2}{(b-a)(b^2 + a^2)} = \dots = \frac{a}{b(a-b)}$; 2) $1 - \frac{b-1}{a} - \frac{b}{a^2} = \frac{a^2 - ab + a - b}{a^2} = \frac{(a+1)(a-b)}{a^2}$; 3) $\frac{a}{b(a-b)} \cdot \frac{(a+1)(a-b)}{a^2} = \frac{a(a+1)(a-b)}{a^2b(a-b)} = \frac{a+1}{ab}$; 4) $a = 0,2$; $b = 0,6$ бўлса, $\frac{0,2+1}{0,2 \cdot 0,6} = \frac{1,2}{0,12} = 10$. Жаъоб: $\frac{a+1}{ab}$; 10. (198) $\frac{(x^4+1)^2 - x^4}{x^4 - 1} = \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2)}{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)} = \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{x^2 - 1}$.

199. $\frac{x^3(y-z) - y^3(x-z) + z^3(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = \frac{x^3y - x^3z - xy^3 + y^3z + xz^3 - yz^3}{(x-y)(x-z)(y-z)} = \frac{xy(x^2 - y^2) - z(x^3 - y^3) + z^3(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = \dots = \frac{x^2(y-z) + xy(y-z) - z(y^2 - z^2)}{(x-z)(y-z)} = \dots = \frac{(x^2 - z^2) + y(x-z)}{x-z} = x + y + z$. (200) $\left(\frac{mn+1}{n}\right)^m \cdot \left(\frac{mn-1}{n}\right)^n = \left(\frac{mn+1}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{mn-1}{m}\right)^n = \dots = \frac{(x^2 - z^2) + y(x-z)}{x-z} = x + y + z$. (201) $\frac{2^{19} \cdot 3^9 + 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 3}{2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^{10} + 2^{20} \cdot 3^{10}} = \frac{2^{18} \cdot 3^8(2+5)}{2^{19} \cdot 3^9(1+2 \cdot 3)} = \frac{7}{2 \cdot 7} = \frac{1}{2}$.

(202) 2. (203) 1) $\frac{4a^2 + b^2}{4a^2 - b^2} + 1 = \dots = \frac{8a^2}{4a^2 - b^2}$; 2) $\frac{b^2 - 4a^2}{b^2 - 4a^2} - \frac{4}{2a+b} + \frac{2}{2a-b} = \dots = -\frac{4a}{4a^2 - b^2}$;

3) $\frac{8a^2}{4a^2 - b^2} : \left(-\frac{4a}{4a^2 - b^2}\right) = -2a$. (204) 1) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 = \dots = \frac{(y^3 - x^3)(y-x)}{x^3y^3}$; 2) $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = \dots = \frac{x^3(x-y) - y^3(x-y)}{x^2y^2} = \frac{(x-y)(x^3 - y^3)}{x^2y^2}$; 3) $\frac{(y^3 - x^3)(y-x)}{x^3y^3} : \frac{(x-y)(x^3 - y^3)}{x^2y^2} = \dots = \frac{1}{xy}$.

(205) 1) $\frac{m+1}{(m+1)^2 - 3m} - \frac{1 + 3m - m^2}{m^3 + 1} - \frac{1}{m+1} = \dots = \frac{m-1}{m^2 - m + 1}$; 2) $\frac{1+m}{m^2 - m + 1} - \frac{m}{m^2 + m} - \frac{2m^2 + 2m - 1}{m(m^3 + 1)} = \dots = \frac{(m-1)^2}{m(m^3 + 1)}$; 3) $\frac{m-1}{m^2 - m + 1} : \frac{(m-1)^2}{m(m^3 + 1)} = \frac{m(m+1)}{(m^2 - m + 1)(m-1)^2} = \frac{m(m+1)}{m-1}$. (206) 1) $\frac{a^2 - 1}{1 + \frac{a}{n}} = \dots = \frac{n(a^2 - 1)}{n + a}$;

2) $1 + \frac{n^4 - n + 1}{n - n^4} = \dots = \frac{1}{n(1 - n^3)}$; 3) $\frac{n(a^2 - 1)}{n + a} : \frac{1}{n(1 - n^3)} = \frac{(a+n)(1 - n^3)}{1 - a^2} = \dots = -1$. (207) 1) $\frac{a+2b}{a^3 - b^3} - \frac{b}{a^3 + a^2b + ab^3} = \dots = \frac{1}{a(a-b)}$; 2) $\frac{1}{a(a-b)} \times \frac{a^4 - a^2b^2}{a^2 + b^2} = \dots = \frac{a(a+b)}{a^2 + b^2}$; 3) $\frac{a(a+b)}{a^2 + b^2} - \frac{(a^3 - ab^2)(1+b)}{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3} = \frac{a(a+b)}{a^2 + b^2} - \dots$

$$-\frac{a(a-b)(a+b)(1+b)}{(a^2+b^2)(a-b)} = \dots = -\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}; 4) -\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2} : \frac{ab^2-a^2b}{a^2+b^2} =$$

$$= \dots = \frac{a+b}{a-b} \cdot (208. 1) \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 - 1 = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)^2} = \frac{4xy}{(x-y)^2}.$$

$$2) \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 - 1 = \dots = -\frac{4xy}{(x+y)^2}; 3) \frac{4xy}{(x-y)^2} : \left[-\frac{4xy}{(x+y)^2}\right] = -\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2;$$

$$4) -\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 + 1 = -\frac{x^2+4y^2}{2xy-x^2-y^2} = \dots = \left(\frac{x-2y}{x-y}\right)^2; 5) \left(\frac{x-2y}{x-y}\right)^2 : \left(\frac{x-2y}{2x-2y}\right)^2 =$$

$$= \frac{(x-2y)^2 \cdot 4(x-y)^2}{(x-y)^2 \cdot (x-2y)^2} = 4. (209. a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 = a^2(a+b) + b^2(a+b) =$$

$$= (a+b)(a^2+b^2); a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 = \dots = (a-b)(a^2+b^2). 1) \frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} +$$

$$+\frac{b}{a^2+b^3} = \dots = \frac{a+b}{a^2+b^2}; 2) \frac{1}{a-b} - \frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3} = \dots = \frac{a-b}{a^2+b^2}; 3) \frac{a+b}{a^2+b^2} :$$

$$\frac{a-b}{a^2+b^2} = \dots = \frac{a+b}{a-b} \cdot (210. 1) \frac{2+3a}{4a^2(a+1)+4a+4} - \frac{a-1}{2a^2(a-1)+2a-2} =$$

$$= \frac{2+3a}{4(a^2+1)(a+1)} - \frac{a-1}{2(a^2+1)(a-1)} = \dots = \frac{a}{4(a^2+1)(a+1)}; 2) \frac{1}{a^3+a^3+a^3+a} +$$

$$+\frac{2(a^2-1)}{2a^4-2} = \frac{1}{a(a^2+1)(a+1)} + \frac{1}{a^2+1} = \dots = \frac{a^2+a+1}{a(a^2+1)(a+1)};$$

$$3) \frac{a}{4(a^2+1)(a+1)} : \frac{a^2+a+1}{a(a^2+1)(a+1)} = \frac{a^2}{4(a^2+a+1)}; 4) \frac{a^2}{4(a^2+a+1)} -$$

$$-\frac{1-a^3}{4(a^3-1)} = \dots = \frac{1}{4} \cdot (211. 1) \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c} =$$

$$= \frac{bc(a-1)+ac(b-1)+ab(c-1)}{abc} = \frac{3abc - (bc+ac+ab)}{abc}; 2) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} =$$

$$= \frac{bc+ac-ab}{abc}; 3) \frac{3abc - bc - ac - ab}{abc} : \frac{bc+ac-ab}{abc} = \frac{3abc - bc - ac - ab}{bc+ac-ab};$$

$$4) \frac{3abc}{bc+ac-ab} - \frac{3abc - bc - ac - ab}{bc+ac-ab} = \dots = \frac{bc+ac+ab}{bc+ac-ab} \cdot (212. 1) \frac{(m+n)^2}{4mn} -$$

$$-1 = \dots = \frac{(m-n)^2}{4mn}; 2) \frac{(m-n)^2}{4mn} + 1 = \dots = \frac{(m+n)^2}{4mn}; 3) \frac{(m-n)^3}{4mn} \cdot \frac{(m+n)^3}{4mn} =$$

$$= \frac{(m^2-n^2)^3}{16m^2n^2}; 4) \frac{(m^2-n^2)^2}{16m^2n^2} : [(m+n)^2 - 3m^2n - 3mn^2] = \frac{(m^2-n^2)^2}{16m^2n^2(m^3+3m^2n+3mn^2+n^3-3m^2n-3mn^2)} = \dots = \frac{(m-n)^2(m+n)}{16m^2n^2(m^2-mn+n^2)}; 5) \frac{(m-n)^2(m+n)}{16m^2n^2(m^2-mn+n^2)} \times$$

$$\times \frac{[(m+n)^2 - mn][(m-n)^2 + mn]}{(m-n)^3 + 3mn(m-n)} = \dots = \frac{m^2-n^2}{16m^2n^2} \cdot (213. 1) \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = n$$

$$\text{булсын, } a = nx, b = ny, c = nz \frac{a-b-c+x-y-z}{a+b+c+x+y+z} = \frac{nx-ny-nz+x-y-z}{nx+ny+nz+x+y+z} =$$

$$= \frac{x(n+1)-y(n+1)-z(n+1)}{n(x+y+z)+x+y+z} = \frac{(n+1)(x-y-z)}{(n+1)(x+y+z)} = \frac{x-y-z}{x+y+z}. \text{ Худди шу}$$

$$\text{усулда, } 2) \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = r \text{ деб белгиласак, берилган ифода } \frac{a-b-c}{a+b+c} \text{ га тең}$$

$$\text{жкани исбот қилинади. (215.) } \frac{3n^2-3n+20}{n-1} = 3n + \frac{20}{n-1}. \text{ Берилган каср бутун}$$

бўлсин учун $\frac{20}{n-1}$ бутун бўлиши керак. Бунинг учун $n-1=1, 2, 4, 5, 10, 20$

бўлиши ёки $n=2, 3, 5, 6, 11, 21$ бўлиши керак. (216) Изланаётган каср $\frac{m}{n}$

бўлсин. Масала шартига кўра: $\frac{m+14}{n+35} = \frac{m}{n}$. $mn+14n=mn+35m$; $14n=35m$

ёки $\frac{m}{n} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$. Жавоб: $\frac{2}{5}$. (217) 10^n — биринчи рақами 1 бўлиб, кейинги

рақамлари ноллардан иборат ($n+1$) хонали сондир. $10^n + 8$ эса ($n+1$) хонали сон бўлиб, биринчи рақами 1, охири рақами эса 8, оралиқдаги рақамлари эса ноль. Шу соннинг рақамлар йиғиндиси 9, демак, у 9 га бўлинади. (218) Олдинги мисолнинг кўрсатмасига қаранг. (220) $10^{n+2} + 125$, охири уч хонаси 125, биринчи хонаси 1 билан 12 орасида ($n-1$) та ноль бўлган ($n+3$) хонали сон бўлиб, 125 га бўлинади. У соннинг рақамлари йиғиндиси $1+1+2+5=9$ бўлгани учун, 9 га ҳам бўлинади. Демак, $125 \cdot 9 = 1125$ га ҳам бўлинади.

$$(221) 1) \frac{x-y}{1+xy} + \frac{y-z}{1+yz} + \frac{z-x}{1+xz} = \frac{(x-y)(1+yz)(1+xz) + (y-z)(1+xy)(1+xz) + (z-x)(1+xy)(1+yz)}{(1+xy)(1+yz)(1+xz)}$$

$$+ \frac{(x-y)(1+yz+xz+xy^2z) + (y-z)(1+xz+xy+x^2yz) + (z-x)(1+xy+yz+xy^2z)}{(1+xy)(1+yz)(1+xz)} = \dots = \frac{x^2z - y^2z + xy^2 - xz^2 + yz^2 - x^2y}{(1+xy)(1+yz)(1+xz)}$$

$$2) \frac{x-y}{1+xy} - \frac{y-z}{1+yz} - \frac{z-x}{1+xz} = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(1+xy)(1+yz)(1+xz)} = \frac{(x-y)(yz-z^2-xy+xz)}{(1+xy)(1+yz)(1+xz)} = \dots = \frac{x^2z - y^2z + xy^2 - xz^2 - x^2y + yz^2}{(1+xy)(1+yz)(1+xz)}$$

Берилган уч касрнинг йиғиндиси ҳам, кўпайтмаси ҳам бир хил ифодага тенг бўлгани учун улар ўзаро тенг бўлади. (222) 1) $\frac{(n-1)(n+1)}{n(n-1)+1} + \frac{2(0,5-n)}{n(1-n)-1} = \frac{n^2-1}{n^2-n+1} + \frac{1-2n}{n-n^2-1} =$

$$= \frac{n^2-1-1+2n}{n^2-n+1} = \frac{n^2+2n-2}{n^2-n+1}$$

$$2) \left[\frac{(n-1)(n+1)}{n(n-1)+1} \right]^3 + \left[\frac{2(0,5-n)}{n(1-n)-1} \right]^3 = \frac{(n^2-1)^3}{(n^2-n+1)^3} + \frac{(1-2n)^3}{(n-n^2-1)^3} = \frac{(n^2-1)^3 - (1-2n)^3}{(n^2-n+1)^3} =$$

$$= \frac{[(n^2-1) - (1-2n)][(n^2-1)^2 + (n^2-1)(1-2n) + (1-2n)^2]}{(n^2-n+1)^3} =$$

$$= \dots = \frac{(n^2+2n-2)(n^2-n+1)^2}{(n^2-n+1)^3} = \frac{n^2+2n-2}{n^2-n+1} \cdot (223) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right)^3 = 1$$

$$\frac{a^3}{x^3} + \frac{b^3}{y^3} + \frac{c^3}{z^3} + 2 \left(\frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz} \right) = 1. \text{ Бундан: } \frac{a^3}{x^3} + \frac{b^3}{y^3} + \frac{c^3}{z^3} = 1 - 2 \cdot \frac{abz+acy+bcx}{xyz} \quad (1).$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \text{ тенгликдан } bcx + acy + abz = 0 \quad (2). \quad (2) \text{ ва } (1) \text{ тенгликлардан:}$$

$$\frac{a^3}{x^3} + \frac{b^3}{y^3} + \frac{c^3}{z^3} = 1. \quad (224) \frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0 \text{ тенгликнинг қар икки го-}$$

$$\text{монини галма-гал } (y-z), (z-x) \text{ ва } (x-y) \text{ га бўлсак, қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:}$$

$$\frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)(y-z)} + \frac{z}{(x-y)(y-z)} = 0. \quad \frac{x}{(y-z)(z-x)} +$$

$$+ \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)(z-x)} = 0. \quad \frac{x}{(y-z)(x-y)} + \frac{y}{(z-x)(x-y)} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0.$$

$$\text{Бу тенгликларни қўшсак: } \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} + \frac{x}{y-z} \cdot \left(\frac{1}{z-x} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{x-y} + \frac{y}{z-x} \left(\frac{1}{y-z} + \frac{1}{x-y} \right) + \frac{z}{x-y} \left(\frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} \right) = 0. \quad \frac{x}{(y-z)^2} + \\
 & + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = \frac{x}{(z-x)(x-y)} + \frac{y}{(y-z)(x-y)} + \frac{z}{(y-z)(z-x)} = \\
 & = \frac{x(y-z) + y(z-x) + z(x-y)}{(z-x)(x-y)(y-z)} = \frac{xy - xz + yz - xy + xz - yz}{(z-x)(x-y)(y-z)} = 0. \quad 225. \text{ Тенг-}
 \end{aligned}$$

ликнинг чап қисмини B билан белгилаб, йиғиндини ҳисоблайлик: $B = \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{a(1-b^2)(1-c^2) + b(1-a^2)(1-c^2) + c(1-a^2)(1-b^2)}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)} =$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{a - ac^2 - ab^2 + ab^2c^2 + b - bc^2 - a^2b + a^2bc^2 + c - b^2c - a^2c + a^2b^2c}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)} = \\
 & = \frac{a(1-ab-ac) + b(1-bc-ab) + c(1-oc-bc) + abc(bc+ac+ab)}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}; \quad (1)
 \end{aligned}$$

$\begin{cases} 1-ab-ac=bc \\ 1-bc-ab=ac \\ 1-ac-bc=ab \end{cases}$ (2). (2) қийматларни (1) тенгликка қўйсак: $B =$

$$\frac{a \cdot bc + b \cdot ac + c \cdot ab + abc \cdot 1}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}. \quad 226. \text{ Тенгликнинг ҳар икки}$$

қисмига $-1-1+1=-1$ ни қўшсак: $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - 1 \right) + \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + 1 \right) +$

$\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - 1 \right) = 0$; тенгликнинг чап қисмини соддалаштирамиз: $\frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{2bc} +$

$$+ \frac{a^2+c^2-b^2+2ac}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2-2ab}{2ab} = \frac{(b-c)^2-a^2}{2bc} + \frac{(a+c)^2-b^2}{2ac} + \frac{(a-b)^2-c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{(b-c+a)(b-c-a)}{2bc} + \frac{(a+c-b)(a+b+c)}{2ac} + \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab} =$$

$$= \frac{a-b+c}{2abc} \left[-a(b-c+a) + b(a+b+c) + c(a-b-c) \right] = \dots = \frac{a-b+c}{2abc} \times$$

$$\times (a+b-c)(b+c-a) = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}{2abc} = 0. \text{ Бунда: } 1) \ b +$$

$+c-a=0$, яъни $b-a=-c$ бўлса, $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(b-a)^2+2ab-c^2}{2ab} = +1$;

2) $a-b+c=0$, яъни $a+c=b$ бўлса, у ҳолда: $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{(a+c)^2-2ac-b^2}{2ac} =$

$$= \frac{b^2-2ac-b^2}{2ac} = -1$$
; 3) $a+b-c=0$; $b-c=-a$ бўлса, $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} =$

$$= \frac{(b-c)^2+2bc-a^2}{2bc} = \frac{a^2+2bc-a^2}{2bc} = +1. \quad 227. \text{ Кўпайтмани } A \text{ билан белги-}$$

лаб, кўпхадларни кўпайтурсак: $A = 1 + \frac{(b-c)c}{a(a-b)} + \frac{(c-a)c}{b(a-b)} + \frac{a(a-b)}{c(b-c)} + 1 +$

$$+ \frac{(c-a)a}{b(b-c)} + \frac{b(a-b)}{c(c-a)} + \frac{(b-c)b}{a(c-a)} + 1 = 3 + \frac{c}{a-b} \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) + \frac{a}{b-c} \times$$

$$\times \left(\frac{a-b}{c} + \frac{c-a}{b} \right) + \frac{b}{c-a} \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} \right) = 3 + \frac{c}{a-b} \cdot \frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab} +$$

$$+ \frac{a}{b-c} \cdot \frac{ab-b^2+c^2-ac}{bc} + \frac{b}{c-a} \cdot \frac{a^2-ab+bc-c^2}{ac} \quad (1), \quad \frac{c}{a-b} \times$$

$$\times \frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab} = \frac{c}{a-b} \cdot \frac{c(a-b)-(a^2-b^2)}{ab} = \frac{c(a-b)(c-a-b)}{(a-b)ab} =$$

$$= \frac{c(c-b-a)}{ab} = \frac{c \cdot 2c}{ab} = \frac{2c^2}{ab} \quad (2), \text{ чунки: } a+b+c=0 \text{ дан: } c-b-a=2c.$$

$$\frac{a}{b-c} \cdot \frac{ab-b^2+c^2-ac}{bc} = \frac{a}{b-c} \cdot \frac{a(b-c)-(b^2-c^2)}{bc} = \frac{a(b-c)(a-b-c)}{(b-c)bc} =$$

$$= \frac{a \cdot 2a}{bc} = \frac{2a^2}{bc} \quad (3), \text{ чунки: } a+b+c=0 \text{ дан: } a-b-c=2a. \quad \frac{b}{c-a} \cdot \frac{a^2-ab+bc-c^2}{ac} =$$

$$= \frac{b}{c-a} \cdot \frac{b(c-a)-(c^2-a^2)}{ac} = \frac{b(c-a)(b-c-a)}{(c-a)ac} = \frac{b \cdot 2b}{ac} = \frac{2b^2}{ac} \quad (4, \text{ чунки: } a+$$

$$+ b + c = 0 \text{ дан: } b-c-a=2b. \quad (2), (3), (4) \text{ тенгликлардан қийматлар (1) га}$$

$$\text{қўйилса: } A = 3 + \frac{2c^2}{ab} + \frac{2a^2}{bc} + \frac{2b^2}{ac} = 3 + \frac{2(c^3+a^3+b^3)}{abc} \quad (5). \quad a^3+b^3+c^3 = (a+$$

$$+ b)^3 + c^3 - 3ab(a+b) = (a+b+c)[(a+b)^2 - c(a+b) + c^2] - 3ab(a+b) =$$

$$= -3ab(a+b) = -3ab(-c) = 3abc \quad (6). \text{ Бу қийматни (5) га қўйсақ: } A = 3 +$$

$$-c$$

$$+ \frac{2 \cdot 3abc}{abc} = 3 + 6 = 9. \quad 228. \quad 1) \quad 3 \frac{13}{18}; \quad 2) \quad \frac{1}{5}. \quad 229. \quad 1) \quad 15 \frac{7}{12}; \quad 2) \quad 4 \frac{10}{11}. \quad 230. \quad 1) \quad \frac{3}{14};$$

$$2) \quad x = -1. \quad 231. \quad 1) \text{ Йлдиэга эга эмас; } 2) \text{ ихтиёрий сон ечим бўлади. } \quad 232. \quad 1) \quad y =$$

$$= 3; \quad 2) \quad x = \frac{3}{8}. \quad 233. \quad 1) \quad x = 7; \quad 2) \quad x = 3. \quad 234. \quad y = \frac{a+b}{a-b}. \quad 235. \quad x = n. \quad 236.$$

$$x = \frac{a(a-c)}{a-2c}. \quad 237. \quad 1) \quad n(x-1) - n^2 + x = nx - n - n^2 + x = x(n+1) -$$

$$-n(n+1) = (n+1)(x-n); \quad 2) \quad n(x-1) + n^2 - x = nx - n + n^2 - x = x(n-1) + n(n-1) =$$

$$= (n-1)(x+n) \text{ бўлгани учун: } \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{(n-1)(x+n)}{(n+1)(x-n)} \text{ ёки } \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} =$$

$$\frac{(n-1)(x+n)}{(n+1)(x-n)} \text{ тенглама } \frac{n+1}{n-1} \neq 0 \text{ га қўнайтирилса: } \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} = \frac{x+n}{x-n}. \text{ Ҳосил}$$

$$\text{бўлган тенгламани содалаштириб ечсак: } x = n^2 + 1. \text{ Из оқ. } n = +1 \text{ ва } n \neq -1$$

$$\text{бўлса, берилган тенглама } \frac{0}{2} = \frac{x-x}{2(x-1)} \text{ кўринишида бўлиб, 1 дан фарқли ҳар қандай}$$

$$\text{сон унинг ечими бўлади. } \quad 238. \quad 1) \quad \frac{(a+1)^3}{3a} - a - 1 = \frac{a^3+3a^2+3a+1-3a^2-3a}{3a} =$$

$$= \frac{a^3+1}{3a}; \quad 2) \quad \frac{(a-1)^2}{4a} + 1 = \frac{a^3-2a+1+4a}{4a} = \frac{(a+1)^2}{4a}. \text{ Бу ҳолда берилган}$$

$$\text{тенгламани } (a^2-a+1) \cdot \frac{a^3+1}{3a} = x \cdot \frac{(a+1)^2}{4a} \text{ кўринишида ёзиш мумкин. Пропор-}$$

$$\text{циянинг номаълум ўрта ҳадини топиш учун, четки ҳадлар кўпайтмасини маълум}$$

$$\text{ўрта ҳадига бўламиз: } x = \frac{(a^2-a+1) \cdot \frac{(a+1)^2}{4a}}{\frac{a^3+1}{3a}} = \frac{(a^2-a+1)(a+1)^2 \cdot 3a}{4a(a+1)(a^2-a+1)} = \frac{3}{4}(a+1).$$

Жавоб: $x = \frac{3}{4}(a+1)$. 239. $x = \frac{n-c}{(n+c)^2}$. 240. $x \cdot \left[\frac{3ab+1}{a} - \frac{(2a+1)}{a(a+1)^2} \right] =$
 $= \frac{3ab}{a+1} + \frac{a^2}{(a+1)^3}$; $x \cdot \frac{(3ab+1)(a+1)^2 - (2a+1)}{a(a+1)^2} = \frac{3ab(a+1)^2 + a^2}{(a+1)^3}$; $x =$
 $= \frac{3ab(a+1)^2 + a^2}{(a+1)^3}$; $\frac{3ab(a+1)^2 + a^2 + 2a + 1 - 2a - 1}{a(a+1)^2} = \frac{3ab(a+1)^2 + a^2}{(a+1)^3} \times$
 $\times \frac{a(a+1)^2}{3ab(a+1)^2 + a^2} = \frac{a}{a+1}$; $x = \frac{a}{a+1}$. 241. Берилван тенгламани соддалантириб
 $(a+b+c)x = (a+b+c)^2$ кўринишга келтирилади. Жавоб: $x = a+b+c$.

242. $\frac{m(b^2-c^2)(2c-b)}{bc(3c+b)}$. 243. $\frac{2n+c}{3}$. 244. $\frac{2b^2}{c(c+2)}$. 245. $\frac{n^2}{a}$. 246. a . 247. abc .

248. 1-усул. 1) $\left(6\frac{3}{7} - \frac{\frac{3}{4}x-2}{\frac{7}{20}} \right) \cdot 2\frac{4}{5} - 1\frac{1}{3} = 235 \cdot \frac{1}{20}$ 2) $\left(6\frac{3}{7} -$
 $-\frac{\frac{3}{4}x-2}{\frac{7}{20}} \right) \cdot 2\frac{4}{5} = 11\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3}$; 3) $6\frac{3}{7} - \frac{\frac{3}{4}x-2}{\frac{7}{20}} = 13\frac{1}{12} \cdot 2\frac{4}{5}$; $13\frac{1}{12} \cdot 2\frac{4}{5} =$

$= 4\frac{113}{168}$; 4) $\frac{\frac{3}{4}x-2}{\frac{7}{20}} = 6\frac{3}{7} - 4\frac{113}{168}$; $6\frac{3}{7} - 4\frac{113}{168} = 1\frac{127}{168}$; 5) $\frac{3}{4}x-2 = 1\frac{127}{168} \times$

$\times \frac{7}{20}$; 1) $\frac{127}{168} \cdot \frac{7}{20} = \dots = \frac{59}{96}$; 6) $\frac{3}{4}x = \frac{59}{96} + 2$; 7) $x = 2\frac{59}{96} : \frac{3}{4} = \frac{251 \cdot 4}{96 \cdot 3} = \frac{251}{72} =$

$= 3\frac{35}{72}$. 2-усул. 1) $6\frac{3}{7} - \frac{\frac{3}{4}x-2}{\frac{7}{20}} = \frac{45}{7} - \frac{(3x-8)5}{7} = \frac{85-15x}{7}$; 2) $\frac{85-15x}{7} \times$

$\times 2\frac{4}{5} = \dots = 2(17-3x)$; 3) $2(17-3x) - 1\frac{1}{3} = \dots = \frac{2(49-9x)}{3}$; 4) $\frac{2(49-9x)}{3} :$

$:\frac{1}{20} = \frac{40(49-9x)}{3}$; 5) $\frac{40(49-9x)}{3} = 235$. $8(49-9x) = 47$; $392 - 72x = 141$;

$72x = 251$; $x = 3\frac{35}{72}$. Жавоб: $x = 3\frac{35}{72}$. 249. $x = 2$. 250. $x = 76$. 251. $x = 1$.

252. $x = 0,0011$. 253. $x = 0,615$. 254. $x = 9\frac{3}{16}$. 255. $x = 1\frac{19}{24}$. 256. $0,2 - 0,02 :$

$(0,002 + 0,0002x) = 0,15$; $0,02 : (0,002 + 0,0002x) = 0,2 - 0,15$, $0,002 + 0,0002x =$
 $= 0,02 : 0,05$; $0,0002x = 0,4 - 0,002$; $x = 0,3980 : 0,0002 = 1990$. Жавоб: $x =$
 $= 1990$. 257. $x = 0,47$. 258. $x = 2,4$. 259. 30 қатор, 840 гомшабин. 260. Паро-

ходнинг тезлиги соатига x км, автомобилники соатига $(x+17)$ км. $3\frac{1}{3}$ соатда

пароход $3\frac{1}{3} \cdot x$ км, автомобиль 2 соатда $2(x+17)$ км йўл юрад. $2(x+17) -$

$-\frac{10}{3} \cdot x = 10$. Тенгламани ечсак: $x = 18$. Жавоб: пароход соатига 18 км йўл

ўтади. 261. Учала труба бирга ишласа, бўш ҳовузни x соатда тўлдирсин. 1 соат-

Жавоб: 25 м ли рельслар 1200 та; 12,5 м ли рельслар 1600 та. 406. Дастлаб биричи идишда x л, иккинчисида y л сув бўлган бўлсин.

	Дастлаб	1- қуйишдан сўнг	2- қуйишдан сўнг	3- қуйишдан сўнг
I идишда	x	$x - y$	$2(x - y)$	$2(x - y) - (3y - x) = 64.$
II идишда	y	$y + y$	$2y - (x - y) = 3y - x$	$2(3y - x) = 64.$

$$\begin{cases} 2(x - y) - (3y - x) = 64, \\ 2(3y - x) = 64 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} 3x - 5y = 64, \\ 3y - x = 32. \end{cases}$$

Жавоб: 88 л ва 40 л. 407. 13, 17, 19. 408. Қуймада x кг қумуш, y кг мис бўлсин; уни 3 кг қумуш билан эритилса, унинг пробаси $\frac{x + 3}{x + y + 3} = 0,900$ бўлади. 2 кг 900- пробали қуймада $2 \cdot 0,900 = 1,8$ кг қумуш бўлади. $(x + y)$ кг ли қуймада x кг қумуш, 900- пробали 2 кг қуймада 1,8 кг қумуш бўлгани учун, бу қуймалар эритилса $(x + y + 2)$ кг ли қуймада $(x + 1,8)$ кг қумуш бўлиб, эритманинг пробаси $\frac{x + 1,8}{x + y + 2} = 0,840$ бўлади.

$$\begin{cases} \frac{x + 3}{x + y + 3} = 0,9 \\ \frac{x + 1,8}{x + y + 2} = 0,84 \end{cases} \text{ системани ечсак, } x = 2,4, y = 0,6. \text{ Қуйма оғирлиги } x +$$

$+ y = 3$ (кг), пробаси $\frac{2,4}{2,4 + 0,6} = 0,800$. Жавоб: 3кг, 800- проба. 409. Бириччисидан x бўлак, иккинчисидан y бўлак олиш керак.

$$\frac{1}{1 + 2}x + \frac{2}{2 + 3}y = \frac{17}{27} \text{ ёки } \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y = \frac{17}{27}$$

содаллаштирилса, $35x = 9y$; бундан; $x : y = 9 : 35$. Жавоб: бириччисидан 9 бўлак, иккинчисидан 35 бўлак олиш керак. 410. 12 м/сек, 8 м/сек. 411. 12 км/соат, 3 км/соат. 412. 24 соат, 36 соат. 413. 300 соат ва 270 соат. 414. 1 кг қуруқ ўтин ёқилганда x килокалория, 1 кг кокс ёқилганда y килокалория иссиқлик беради. Масала шартига кўра: $\begin{cases} 6x + 8y = 74800 \\ 20x + 7y = 109700. \end{cases}$ Жавоб: 1 кг қуруқ ўтин

3000 килокалория; 1 кг кокс 7100 килокалория иссиқлик беради. 415. 1 кг торф 5000 килокалория ва 1 кг антрацит 8000 килокалория иссиқлик беради. 416. Биричи идишдаги сувнинг температураси x° , иккинчисидаги сувнинг температураси y° .

$$\text{Масала шартига кўра: } \begin{cases} \frac{12x + 8y}{12 + 8} = 71, \\ \frac{10x + 5y}{10 + 5} = 70 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} 12x + 8y = 71 \cdot 20, \\ 10x + 5y = 70 \cdot 15. \end{cases} \text{ Жавоб:}$$

65° ва 80° . 417. Биричи партиядя 64 сўмлик приёмиқдан x та, 55 сўмликдан y та жўнатишган бўлсин. 1- партиядя: $64x + 55y = 4770$ сўмлик приёмиқ жўнатишган. Иккинчи партиядя 55 сўмлик приёмиқдан $\frac{y}{2}$ та, 64 сўмлик приёмиқдан эса $(x + y - 13 - \frac{y}{2})$ та; ҳаммаси бўлиб: $55 \cdot \frac{y}{2} + 64(x + y - 13 - \frac{y}{2}) =$

= 4145 сўмлик приёмник жўнатилган.
$$\begin{cases} 64x + 55y = 4770, \\ \frac{55y}{2} + 64(x+y-13-\frac{y}{2}) = 4145 \end{cases} \quad \text{ёки}$$

$$\begin{cases} 64x + 55y = 4770, \\ 119y + 128x = 9954. \end{cases}$$
 Бу системани ечсак: $x = 35$; $y = 46$. Биринчи партияд

$35 + 46 = 81$ та приёмник, иккинчисид

$$\frac{46}{2} + (81 - 13 - 23) = 68$$
 та приёмник жўнатилган. $81 + 68 = 149$. *Жавоб:* 149. 418. Биринчи бригада бир кунда x м³, иккинчиси y м³ ўтин тайёрлаган. Иккаласи биргаликда $(x + y)$ м³ ўтин тайёрламоқчи эди.

$$\begin{cases} 40(x + y) = 22400, \\ 10(x + y) + 24\left(\frac{13}{10}x + \frac{29}{25}y\right) = 22400; \end{cases}$$
 содалаштирсак:
$$\begin{cases} x + y = 560, \\ 41,2x + 37,84y = 22400. \end{cases}$$

Жавоб: 360 м³, 200 м³. 419. Велосипедчининг тезлиги x (км/мин), автомобилчининг тезлиги y (км/мин). 10 минутда автомобилчи $10y$ км юради, велосипедчи эса $15 + 10 = 25$ минутда $25x$ км йўл юради. $10y = 25x$. 50 минутда автомобилчи $50y$ км юради. $15 + 50 = 65$ минутда велосипедчи $65x$ км юради. Бу юрилган йўллар йиғиндиси АВ масофадан 2 марта ортиқ, яъни $50y + 65x = 38$.

$10y = 25x$, $50y + 65x = 38$. *Жавоб:* 0,2 км/мин, 0,5 км/мин. 420. А дан В га боргунча x км юқорига кўтарилиш, y км текис йўлда юриш ва $11,5 - (x + y)$ км пастга тушиш керак:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{11,5 - (x + y)}{5} = 2\frac{9}{10}, \\ \frac{11,5 - (x + y)}{3} + \frac{y}{4} + \frac{x}{5} = 3\frac{1}{10} \end{cases} \quad \text{ёки} \begin{cases} 8x + 3y = 36, \\ 8x + 5y = 44. \end{cases}$$

Жавоб: 3 км; 4 км; 4,5 км. 421. 1-усул. Ишчи кунига x та деталь тайёрлаган, y кун вақт кетган, ҳаммаси бўлиб xy та деталь тайёрлаган; кунига $(x + 8)$ тадан деталь тайёрласа, $(y - 5)$ кун кетар ва $(x + 8)(y - 5) = xy$ та деталь тайёрланар эди. Кунига $(x - 4)$ тадан деталь тайёрланса, $(y + 3\frac{1}{3})$ кун кетар ва $(x - 4)(y + 3\frac{1}{3}) = xy$ та деталь тайёрланар эди.

$$\begin{cases} (x + y)(y - 5) = xy, \\ (x - 4)\left(y + \frac{10}{3}\right) = xy \end{cases}$$

системани ечсак, $x = 40$; $y = 30$. 30 кунда $30 \cdot 40 = 1200$ та деталь тайёрланган. 2-усул. y кунда x та деталь тайёрланган бўлсин. Кунига $\frac{x}{y}$ тадан деталь тайёрланган. Кунига $\left(\frac{x}{y} + 8\right)$ тадан тайёрланса, $(y - 5)$ кунда $\left(\frac{x}{y} + 8\right)(y - 5) = x$ та, кунига $\left(\frac{x}{y} - 4\right)$ тадан тайёрланса, $\left(y + \frac{10}{3}\right)$ кунда $\left(\frac{x}{y} - 4\right)\left(y + \frac{10}{3}\right) = x$ та деталь тайёрланади, яъни:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y} + 8\right)(y - 5) = x, \\ \left(\frac{x}{y} - 4\right)\left(y + \frac{10}{3}\right) = x, \end{cases} \quad \text{ёки} \begin{cases} 8y - 5 \cdot \frac{x}{y} = 40, \\ \frac{10}{3} \cdot \frac{x}{y} - 4y = \frac{40}{3}, \end{cases} \quad \text{ёки} \begin{cases} 8y - 5 \cdot \frac{x}{y} = 40, \\ 5 \cdot \frac{x}{y} - 6y = 20. \end{cases}$$

$\frac{x}{y} = z$ деб белгиласак: $\begin{cases} 8y - 5z = 40, \\ 5z - 6y = 20; \end{cases}$ бу система ечилса: $y = 30, z = 40.$ ∇

ҳолда: $\frac{x}{30} = 40; x = 1200.$ **Жавоб:** 30 кун, 1200 деталь. 422. АВ масофани s (км), велосипедчининг тезлигини v (км/соат), юрган вақтини t (соат) билан белгилайлик. v км/соат тезлик билан s км ни t соатда ўтади. $vt = s; v + 3$ км/соат тезлик билан s км ни $(t - 1)$ соатда ўтади, яъни $(v + 3)(t - 1) = s; (v - 2)$ км/соат тезликда s км ни $(t + 1)$ соатда ўтади, яъни $(v - 2)(t + 1) = s.$ Булардан:

$\begin{cases} vt = s, \\ (v + 3)(t - 1) = s, \\ (v - 2)(t + 1) = s. \end{cases}$ система ҳосил бўлади. Бундан $\begin{cases} vt = (v + 3)(t - 1), \\ vt = (v - 2)(t + 1) \end{cases}$ ёки $\begin{cases} 3t - v = 3, \\ v - 2t = 2. \end{cases}$ **Жавоб:** 60 км, 12 км/соат, 5 соат. 423. Биринчи поезднинг

тезлиги соатига x км, иккинчисининг тезлиги соатига y км. Биринчи ҳолда: 10 соатда биринчи поезд $10 \cdot x$ км, иккинчиси $10y$ км, иккаласи $10x + 10y = 850$ км йўл юради. Иккинчи ҳолда: биринчи поезд 8 соатда $8x$ км, иккинчиси $8 + 4\frac{1}{4} = 12\frac{1}{4}$ соатда $12\frac{1}{4}y$ км, иккаласи $8x + 12\frac{1}{4}y = 850$ км юради.

$$\begin{cases} 10x + 10y = 850, \\ 8x + \frac{49}{4}y = 850 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x + y = 85, \\ 32x + 49y = 3400. \end{cases}$$

Жавоб: 45 км/соат, 40 км/соат. 424. M_1 жисмнинг тезлиги секундга x м, M_2 жисмники эса секундига y м. Биринчи марта учрашгунча биринчи жисм 21 сек, иккинчиси эса 21 сек $- 15$ сек $= 6$ сек юради. Иккаласи $21x + 6y = 60$ метр масофани ўтади. Жисмлар иккинчи марта C нуқтада учрашган бўлса, учрашгунча M_1 жисм $AB + BC$ масофани, M_2 жисм эса $BA + AC$ масофани, иккаласи $3AB = 180$ м ни ўтади. Биринчи жисм 45 секундда $45x$ м, иккинчиси 45 сек $- 15$ сек $= 30$ секундда $30y$ м; иккаласи биргаликда $45x + 30y = 180$ метр юради: $\begin{cases} 21x + 6y = 60, \\ 45x + 30y = 180 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} 7x + 2y = 20, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$ **Жавоб:** M_1 жисм тезлиги 2 м/сек,

M_2 жисмнинг тезлиги 3 м/сек. 425. Катта сон x , кичик сон y бўлсин. Агар катта соннинг ўнг томониغا учта рақам, яъни ноль ва кичик сонни ёзсак, катта сон 1000 марта ва яна y қадар ортади. Натижада $1000x + y$ ни ҳосил қиламиз. Кичик сон кетига каттасини ва нолли ёзсак, $1000y + 10x$ ҳосил бўлади. Масала шартига кўра:

$$\begin{cases} 1000x + y = 2(1000y + 10x) + 590, \\ 2x + 3y = 72. \end{cases}$$

Жавоб: 21 ва 10. 426. Излапайтган сонлар x, y, z ва $160 - (x + y + z)$; масала шартига кўра:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2 + \frac{18}{y}, \\ \frac{y}{z} = 3 + \frac{5}{z}, \\ \frac{z}{160 - (x + y + z)} = 1 + \frac{5}{160 - (x + y + z)} \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x - 2y = 18, \\ y - 3z = 5, \\ 2z + x + y = 165. \end{cases}$$

Жавоб: 100, 41, 12 ва 7. 427. Идишларнинг биринчисида x л, иккинчисида y л, учинчисида z л сув бўлсин. Учала идишдаги сувнинг миқдори (литр билан) ўзгаришини куйидагича ёзиш мумкин:

I	x	$x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}x + \frac{1}{10} \left \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}x + y \right) + z \right $
II	y	$\left(y + \frac{1}{3}x \right) - \frac{1}{4} \left(y + \frac{1}{3}x \right) =$ $= \frac{3}{4} \left(y + \frac{1}{3}x \right)$	$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}x + y \right)$
III	z	$z + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}x + y \right)$	$z + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}x + y \right) - \frac{1}{10} \left \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}x + y \right) + z \right = \frac{9}{10} \left \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}x + y \right) + z \right $

Масала шартига кўра:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{10} \left| \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}x + y \right) + z \right| = 9, \\ \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}x + y \right) = 9, \\ \frac{9}{10} \left| \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}x + y \right) + z \right| = 9. \end{cases}$$

Жавоб: 12 л, 8 л, 7 л. 428. 1 гектолитр 1- хил вино x сўм, 2- хили y сўм, 3- хили z сўм турсин. У ҳолда:

$$\begin{cases} \frac{3x + 2y + 3z}{3 + 2 + 3} = 50, \\ \frac{2x + 3y + 5z}{2 + 3 + 5} = 47, \\ \frac{5x + 4y + 11z}{5 + 4 + 11} = 47. \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 3x + 2y + 3z = 400, \\ 2x + 3y + 5z = 470, \\ 5x + 4y + 11z = 940. \end{cases}$$

Жавоб: 60 сўм, 50 сўм, 40 сўм. 429. Тезлиги: баландликка соатига x км, текис йўлда соатига y км, нишаб (кия) йўлда соатига z км. Чопар ярим йўлдан орқага қайтиб, 14:2 = 7 км йўл юрди; 3 км тепаликка томон борди. 4 км текисликда юрди, сўнгра (қайтишда) яна 4 км текис йўлда ва, ниҳоят, 3 км нишаб йўлда юрди. Масала шартига кўра:

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{y} + \frac{3}{z} = 3\frac{3}{5}, \quad \text{яъни} \quad \frac{3}{x} + \frac{8}{y} + \frac{3}{z} = 3\frac{3}{5}. \quad \text{Бошқа икки шартдан:} \quad \frac{3}{x} + \frac{5}{y} + \frac{6}{z} = 3\frac{9}{20}, \quad \frac{6}{x} + \frac{5}{y} + \frac{3}{z} = 3\frac{17}{20}.$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{8}{y} + \frac{3}{z} = 3\frac{3}{5}, \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} + \frac{6}{z} = 3\frac{9}{20}, \\ \frac{6}{x} + \frac{5}{y} + \frac{3}{z} = 3\frac{17}{20}. \end{cases}$$

Жавоб: тепаликка томон соатига 3 км, текис йўлла соатига 4 км, нишаб йўлда соатига 5 км. 430. 1) $x > 1.5$; 2) $0.5 < x < 8$. 431. 1) $x < \frac{13}{31}$; 2) ечим йўқ.

432. $x < -\frac{11}{2}$ ва $x > -\frac{2}{5}$; 2) $0 < x < 3$. 433. 1) $-2 < x < \frac{5}{3}$; 2) $x < -\frac{1}{7}$ ва $x > \frac{3}{5}$. 434. Курсатма. 3) $x(x-4) - (x-4) < 0$; $(x-4)(x-1) < 0$.

а) $\begin{cases} x-4 < 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$ система ечилса: $1 < x < 4$; б) $\begin{cases} x-4 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ бу система ечимга эга эмас. Жавоб: 1) $1.5 < x < 4$; 2) $x < -0.1$ ва $x > \frac{1}{2}$; 3) $1 < x < 4$.

435. $\frac{5x-1}{2x-3} - 3 > 0$, $\frac{5x-1-6x+9}{2x-3} > 0$; $\frac{8-x}{2x-3} > 0$ тенгсизликни ечсак $1.5 < x < 8$. Жавоб: 2, 3, 4, 5, 6 ва 7. 436. 1) 1; 2) 1, 2 ва 3; 3) 2 ва 3.

437. 1) $2 < x < 5$; 2) $-4 < x < \frac{1}{2}$. 438. 1) Ечимга эга эмас; 2) $2.5 < x < 4$.

439. 1) 31; 2) 26; 3) 1; 4) 1. 440. 1) 8; 2) 9; 3) 3; 4) -1000; 5) 81. 442. 1) $x + 2y^2$; 2) $2 - 3a$; 3) $1 + n$; 4) $3 - 2b$. 443. 1) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$; 2) $a - \sqrt{b}$; 3)

$2a + b + 3$; 4) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + 1$. 444. Курсатма. 2) $\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5-2\sqrt{5 \cdot 3}+3} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$. Жавоб: 1) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3$;

2) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; 3) $1 + \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{2}-1$. 445. Курсатма. 3) $\sqrt{38+17\sqrt{5}} = \sqrt[3]{8+12\sqrt{5}+30+5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^3} = 2 + \sqrt{5}$. Жавоб: 1) $3 + \sqrt{2}$;

2) $a + \sqrt{a}$; 3) $2 + \sqrt{5}$; 4) $2 - \sqrt{2}$. 446. 1) 25; 2) $2 - \sqrt{3}$; 3) агар $a \geq 1$ бўлса, $a-1$; агар $a < 1$ бўлса $1-a$; 4) $x-2$. 447. 1) $a \geq 0$ бўлса, $2a$ ва $a < 0$ бўлса, 0 га тенг. 2) $b \geq 1$ бўлса, $2(b-1)$ га, $b < 1$ бўлса, $2(1-b)$ га тенг, 3) $x \geq 0$ бўлса, $4x+5$ га, $x < 0$ бўлса, 5 га тенг, 4) $n \geq 2$ бўлса, $2(n-2)$ га, $n < 2$ бўлса, 0 га тенг. 448. 1) Агар $b \geq 2$ бўлса, $2b$ га, $b < 2$ бўлса, 4 га тенг. 2) $c \geq 0$ бўлса, $3-c$ га; $c < 0$ бўлса, $3(1-c)$ га тенг; 3) $u \geq 3$ бўлса, $2u-3$ га, $u < 3$ бўлса, 3 га тенг; 4) $c \geq 1$ бўлса, $c-1$ га,

$c < 1$ бўлса, $1-c$ га тенг. 449. Курсатма. 3) $\sqrt{n-18}\sqrt{n-3} + 78 + 10 = \sqrt{(n-3)-18}\sqrt{n-3} + 81 + 10 = \sqrt{(\sqrt{n-3}-9)^2} + 10$; агар $\sqrt{n-3}-9 \geq 0$ ёки $n \geq 84$ бўлса, $(\sqrt{n-3}-9) + 10 = \sqrt{n-3} + 1$, агар $\sqrt{n-3}-9 < 0$ ёки $3 < n < 84$ бўлса; $9 - \sqrt{n-3} + 10 = 19 - \sqrt{n-3}$. Жавоб: 1) $a \geq b$ бўлса, $2(a-b)$ га, $a < b$ бўлса 0 га тенг, 2) Агар $x \geq y+1$ бўлса, $2x-1$ га, $x < y+1$ бўлса, $2y+1$ га тенг, 3) $n \geq 84$ бўлса, $\sqrt{n-3}+1$ га;

$3 < n < 84$ бўлса, $19 - \sqrt{n-3}$ га тенг. 450. Курсатма. 2) $\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{2}{a}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a}{2} - 2 + \frac{2}{a}} = \sqrt{\frac{a^2 - 4a + 4}{2a}} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{2a}} =$

$\begin{cases} \text{агар } a \geq 2 \text{ бўлса,} & \frac{a-2}{\sqrt{2a}} \\ \text{агар } 0 < a < 2 \text{ бўлса,} & \frac{2-a}{\sqrt{2a}} \end{cases}$ Жаво : 1) $a > 0$ бўлса, 1 га, $a < 0$ бўлса, -1

га тенг, $a = 0$ бўлса, маънога эга эмас. 2) $a \geq 2$ бўлса, $\frac{a-2}{\sqrt{2a}}$ га, $0 < a < 2$ бўлса, $\frac{2-a}{\sqrt{2a}}$ га тенг. 3) $n > 0$ бўлса, $1 + n^2$ га, $n < 0$ бўлса, $-(1 + n^2)$ га тенг. 451. $\sqrt{2x^2 - y^2 + 2x\sqrt{x^2 - y^2}} = \sqrt{(x + \sqrt{x^2 - y^2})^2} = x + \sqrt{x^2 - y^2}$.

452. 1) $\sqrt{(-4)^2} = -4$ деб ёзиш мумкин эмас, 2) $\sqrt{-2}$ мавжуд бўлмагани учун $(\sqrt{-2})^2 = \sqrt{(-2)^2}$ тенгликни ёзиш мумкин эмас, 3) $\sqrt{(-6)^2} = -6$ деб ёзиш мумкин эмас. 453. 1) $6y - 6\sqrt{y} - y\sqrt{y} - 8$; 2) $n^2 - \frac{2n}{3}\sqrt{n} - n - 1$; 3) $\sqrt[3]{a} - a$; 4) $1 + 2x - \sqrt[3]{x^2} - x\sqrt[3]{x}$. 454. 4) $a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}$. 456.

1) 10; 2) 4. 457. 2) $51 - 10\sqrt{2}$; 3) $17 + 2\sqrt{10} - 4\sqrt{5} - 10\sqrt{2}$; 4) $180 + 60\sqrt{3} - 60\sqrt{2} - 12\sqrt{6}$. 460. 1) $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$; 2) $ax^2 \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$; 3) $a\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)$; 4) $\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})$. 461. *Кўрсатма.* 2) Икки хил кўринишда кўпайтувчиларга ажратиш мумкин, чунончи: $(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})$ ва

$(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{9})$. *Жавоб:* 1) $(\sqrt[3]{a} + 1)(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1)$; 462. 1) $\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2} + 1)$; 2) $\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})$; 3) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{n^2})(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{n^2})$; 4) $\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a} - 1)(\sqrt[3]{a} + 1)$. 463. 1) $(x - \sqrt{x} + 1)(x + \sqrt{x} + 1)$; 2) $(a + b - \sqrt{2ab})(a + b + \sqrt{2ab})$; 3) $(y^2 - y\sqrt{2} + 1)(y^2 + y\sqrt{2} + 1)$; 4) $(x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x - \sqrt{x} + 1)(x + \sqrt{x} + 1)$. 464. 1) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)$;

2) $(1 + \sqrt[3]{n^2})(1 - \sqrt[3]{n^2} + n\sqrt[3]{n})$; 3) $(2 - \sqrt[3]{2a})(2 + \sqrt[3]{2a})$; 4) $(x - \sqrt[3]{3})(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9})$. 465. 1) $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})$; 2) $(x - 2\sqrt{2}) \cdot (x + 2\sqrt{2})$ ёки $(\sqrt[3]{x^2} - 2)(x\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} + 4)$; 3) $(a + 1)(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)$ ёки $(\sqrt[3]{a} - 1)(\sqrt[3]{a} + 1)(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1)(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1)$; 4) $(x + 2)(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x + 2\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 2)$. 466. *Кўрсатма.*

1) $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$; 2) $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1$. *Жавоб:* 1) $\sqrt{x}+1$; 2) $\sqrt{x}-1$; 3) $\sqrt[3]{(n+1)^3}$;

4) $\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n} + 1$. 467. 1) $\sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a} + b^2$; 2) $\sqrt[3]{a^2} - 1$; 3) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y^2}$.

468. *Кўрсатма.* 3) 1-усул. $\frac{3}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{2+1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1} =$

$= \frac{(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1} = \sqrt[3]{2} + 1$. 2-усул. Касрнинг сурат ва махра-

жини $(\sqrt[3]{2} + 1)$ га кўпайтирилади. *Жавоб:* 1) $\sqrt[3]{x}$; 2) $-\sqrt[3]{y^2}$; 3) $\sqrt[3]{2} + 1$;

4) $(\sqrt{x} + 1)(x + \sqrt{2})$. 469. 1) $\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}}} =$

$= \sqrt{9 - (3 + \sqrt{3})} = \sqrt{6 - \sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{6 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{6 - \sqrt{3}} = \sqrt{36 - 3} =$

$= \sqrt{33}$; 3) $\sqrt{33} \cdot \sqrt{33} = 33$. *Жавоб:* 33. 470. 1. 471. $3 + 3\sqrt[3]{3} =$

$= \sqrt{(3 + 3\sqrt[3]{3})^2} = \sqrt{36 + 18\sqrt[3]{3}}$ бўлгани учун, ўрта қавс ичидаги айирма нолга тенг. N ҳолда кўпайтма нолга тенг бўлади. *Жавоб:* 0. 472.

$\sqrt[3]{9(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4})} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25}$ ёки $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25})^3 = 9(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4})$ тенгликнинг ўринли экани исбот қилиниши керак. $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25})^3 = \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{50} + 5\sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{50} - 10\sqrt[3]{4} = 9(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4})$.

$$474. \sqrt{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3} = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) \sqrt{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} + \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} = \sqrt{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^2y}} + \sqrt{\sqrt[3]{xy^2} + \sqrt[3]{y^3}} = \sqrt{x + \sqrt[3]{x^2y}} + \sqrt{y + \sqrt[3]{xy^2}}.$$

475. 1) $(a+2)\sqrt{a-2}$; 2) $(5+a^2)(\sqrt{5}-a)$; 3) $(a+2b) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{2b})$; 4) $\frac{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x-1}$.

476. 2) $\sqrt[3]{n+1}$; 3) $(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

477. 1) $\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{m}$; 2) $(b-2)(\sqrt{b}-\sqrt{2})$; 3) $(2-x^2)\sqrt[3]{2-x^2}$.

478. 1) $\frac{\sqrt{6}}{12}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$; 2) $6 + 6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$; 3) $\frac{2}{3}(4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$.

479. Курс: 2 ма. 2) $\frac{14}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{54}} = \frac{14}{2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{12} + 3\sqrt[3]{2}} = \frac{14}{5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{12}}$
 $= \dots$ Жавоб: 1) $\sqrt{a+1}(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1)$; 2) $\frac{7}{131}(25\sqrt[3]{4} - 10\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{18})$.

480. 1) $5(\sqrt{2}-1)$; 2) $\frac{(1-x)\sqrt{1+x}}{1+x}$.

481. $\frac{1}{4}(5\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{225})$.

482. $\frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{7}(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{2}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{7})}$ касринг

сурат ва махражини $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{7})$ га кўпайтирамиз:
 $\frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{7})}{(2-3)(5-7)} = \frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{7})}{2} = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{5} -$

$-\sqrt{7})$. 483. $\frac{15}{\sqrt{10} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}} = \frac{15}{3\sqrt{10} - 2\sqrt{5}}$ касринг су-

рат ва махражини $3\sqrt{10} + 2\sqrt{5}$ га кўпайтирилади. Жавоб: $\frac{3}{14}(3\sqrt{10} + 2\sqrt{5})$.

484. Касринг сурат ва махражини $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})^2} - \sqrt[3]{4 - 5} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})^2}$ га кўпайтирамиз. У ҳолда: $\frac{\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})^2} + 1 + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})^2}}{2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5}} = \frac{1}{4}(\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} +$

$+ \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} + 1)$. 485. $x > y$ бўлса, 2 га, $x < y$ бўлса, -2 га тенг.

486. Ибот. 1-усул. $A^2 > B$ фараз қилиб, тенгликнинг ҳар икки томонини квадратга кўтарсак: $A \pm \sqrt{B} \left(\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \right)^2 = \frac{A}{2} +$

$+\frac{\sqrt{A^2 - B}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{A^2 - (A^2 - B)}{4}} + \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2 - B}{2}}$. 2-усул. $\sqrt{A + \sqrt{B}} +$

$+\sqrt{A - \sqrt{B}} = x$ деб белгиласак: $x^2 = 2A + 2\sqrt{A^2 - B}$; $\sqrt{A + \sqrt{B}} -$

$-\sqrt{A - \sqrt{B}} = y$ деб белгиласак: $y^2 = 2A - 2\sqrt{A^2 - B}$. У ҳолда: $x =$

$= \sqrt{2A + 2\sqrt{A^2 - B}}$; $y = \sqrt{2A - 2\sqrt{A^2 - B}}$, x ва y ўрнига қиймати қўйилса:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{2A + 2\sqrt{A^2 - B}};$$

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{2A - 2\sqrt{A^2 - B}};$$

бу тенгликларни қўшиб, 2 га бўлсак: $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} +$
 $+ \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$; айриб 2 га бўлсак: $\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} -$
 $- \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$. Демак: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm$
 $\pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$. 487. *Қурсатма.* 2) $\sqrt{31 + 8\sqrt{15}} = \sqrt{31 + \sqrt{960}} =$

$= \dots = 4 + \sqrt{15}$. Жавоб: 1) $2 + \sqrt{3}$; 2) $4 + \sqrt{15}$. 488. $|n| + \sqrt{1 - n^2}$.

489. $\sqrt{10y^2 + 1 - \sqrt{36y^4 + 36y^2}} = \sqrt{\frac{10y^2 + 1 + \sqrt{(10y^2 + 1)^2 - (36y^4 + 36y^2)}}{2}} -$
 $- \sqrt{\frac{10y^2 + 1 - \sqrt{(10y^2 + 1)^2 - (36y^4 + 36y^2)}}{2}} = \sqrt{\frac{10y^2 + 1 + \sqrt{(8y^2 - 1)^2}}{2}} -$
 $- \sqrt{\frac{10y^2 + 1 - \sqrt{(8y^2 - 1)^2}}{2}} =$

агар $8y^2 - 1 \geq 0$, ёки $y^2 \geq \frac{1}{8}$, ёки $|y| \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ бўлса, $\sqrt{\frac{10y^2 + 1 - 8y^2 + 1}{2}} -$
 $- \sqrt{\frac{10y^2 + 1 - 8y^2 + 1}{2}} = 3|y| - \sqrt{y^2 + 1}$,
 агар $8y^2 - 1 < 0$, ёки $y^2 < \frac{1}{8}$, ёки $|y| < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ бўлса, $\sqrt{\frac{10y^2 + 1 + 1 - 8y^2}{2}} -$
 $- \sqrt{\frac{10y^2 + 1 - 1 + 8y^2}{2}} = \sqrt{y^2 + 1} - 3|y|$.

Жавоб: $|y| \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ бўлса, 3 $|y| - \sqrt{y^2 + 1}$ га, $|y| < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ бўлса,

$\sqrt{y^2 + 1} - 3|y|$ га тенг. 490. Берилган мисолни қуйдагича ишлаймиз:

1) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{9 + \sqrt{80}} = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{81 - 80}}{2}} + \sqrt{\frac{9 - \sqrt{81 - 80}}{2}} =$

$= \sqrt{5} + 2$; 2) $\sqrt{10 - 2(\sqrt{5} + 2)} = \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \dots = \sqrt{5} - 1$. 491. Бе-

рилган мисолни қуйдаги тартибда ишлаймиз: 1) $\sqrt{13 + \sqrt{48}} = \dots = \sqrt{12} + 1$;

2) $\sqrt{5 - (\sqrt{12} + 1)} = \sqrt{4 - \sqrt{12}} = \dots = \sqrt{3} - 1$; 3) $\sqrt{6 + 2(\sqrt{3} - 1)} =$

$= \sqrt{4 + \sqrt{12}} = \dots = \sqrt{3} + 1$. 492. 1) $\sqrt{97 - 56\sqrt{3}} = \dots = 7 - \sqrt{48}$;

2) $\sqrt{7 - \sqrt{48}} = \dots = 2 - \sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \dots = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$;

4) $2\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. 493. 1) Биринчи қасрни унинг махражининг

қўшмасига кўпайтирамиз: $\frac{\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}}{\sqrt{+b} - \sqrt{a-b}} = \frac{(\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b})^2}{(a+b) - (a-b)} =$
 $= \frac{a-b + 2\sqrt{a^2-b^2} + a+b}{2b} = \frac{a + \sqrt{a^2-b^2}}{b}$; 2) $\frac{a + \sqrt{a^2-b^2}}{b} - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} = \frac{a}{b}$.

494. $\frac{\sqrt{1-n^2}}{n+1}$. 495. Умумий махражга келтирсак: $\frac{(1+\sqrt{1-c^2})^2 - (1-\sqrt{1-c^2})^2}{1 - (\sqrt{1-c^2})^2} =$

$= \dots = \frac{4\sqrt{1-c^2}}{c^2}$. 496. Умумий махражга келтирсак:

$\frac{(a+4 + \sqrt{a^2-16})^2 + (a+4 - \sqrt{a^2-16})^2}{(a+4)^2 - (\sqrt{a^2-16})^2} =$
 $= \frac{(a+4)^2 + 2(a+4)\sqrt{a^2-16} + (a^2-16) + (a+4)^2 - 2(a+4)\sqrt{a^2-16} + (a^2-16)}{a^2 + 8a + 16 - a^2 + 16} = \frac{a}{2}$.

497. 1) $\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x-y} + 1 = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + 1 = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} +$
 $+ 1 = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$; 2) $\frac{y-x}{(\sqrt{y} + \sqrt{x})^2} + 1 = \dots =$
 $= \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$; 3) $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 2$.

498. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{x^2 + (1-x^2)}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$. x нинг ўрнига

берилган кийматни қўйсак: $\frac{1}{\sqrt{\frac{n - \sqrt{n^2-n}}{2n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n - \sqrt{n^2-4}}{2n}}} = \dots = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2 - (n^2-4)}{4n^2}}} = |n|$.

499. $\sqrt{1-3x} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$; $\sqrt{A + \sqrt{B}} =$

$= \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2-B}}{2}}$ формулага асосан, $\sqrt{2 + \sqrt{3}} =$

$= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ бўлгани учун $\sqrt{1+3x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right| = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Худди шунга ўхшаш: $\sqrt{1-3x} = \dots = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, у ҳолда: $\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2}} +$

$+ \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \dots = 1$.

500. $\sqrt{9 + \sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{128}} = \sqrt{9 + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2}} =$

$= \sqrt{9+6\sqrt{2}}$. Демак: $\sqrt{9+6\sqrt{2}} = \sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ тенгликнинг тўғрилиги исбот қилиниши керак. 1- усул: $\sqrt{9+6\sqrt{2}} = \sqrt{3(3+2\sqrt{2})} = \sqrt{3}(\sqrt{2}+$

$+1)$. 2- усул: $\sqrt{9+6\sqrt{2}} = \sqrt{9+\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{81-72}}{2} +$

$+ \sqrt{\frac{9-\sqrt{81-72}}{2}} = \dots = \sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$. 501. 1- усул.

1) $\sqrt{2a^2-b^2+2a\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{(a+\sqrt{a^2-b^2})^2} = a+\sqrt{a^2-b^2}$;

2) $\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{(\sqrt{a^2-b^2}-b)^2} = \sqrt{a^2-b^2}-b$ (чунки $a \geq \sqrt{2}b$ дан $a^2 \geq 2b^2$; $a^2-b^2 \geq b^2$; $\sqrt{a^2-b^2} \geq b$; $\sqrt{a^2-b^2}-b \geq 0$); 3) $a+\sqrt{a^2-b^2}-$

$-(\sqrt{a^2-b^2}-b) = a+b$. 2- усул. $\sqrt{A \pm \sqrt{A^2-B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm$

$\pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$ формулалардан фойдаланиш билан ҳам исбот қилиш мум-

кин. 502. 1- усул. $A = \sqrt{a+4\sqrt{a-4}} + \sqrt{a-4\sqrt{a-4}} = \sqrt{(\sqrt{a-4}+2)^2} +$

$+ \sqrt{(\sqrt{a-4}-2)^2} = \begin{cases} \text{агар } \sqrt{a-4}-2 \geq 0, \sqrt{a-4} \geq 2, a-4 \geq 4, a \geq 8 \text{ бўлса,} \\ \quad \sqrt{a-4}+2 + \sqrt{a-4}-2 = 2\sqrt{a-4}, \\ \text{агар } \sqrt{a-4}-2 < 0, \sqrt{a-4} < 2, a-4 < 4, a < 8, \\ \text{аммо } a \geq 4, \text{ яъни } 4 \leq a < 8 \text{ бўлса, } \sqrt{a-4}+2+2- \\ \quad - \sqrt{a-4} = 4. \end{cases}$

2- усул. $\sqrt{A \pm \sqrt{A^2-B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$ формулалари-

дан фойдаланиб ҳисобланади. Жавоб: $a \geq 8$ бўлса, $2\sqrt{a-4}$ га, $4 \leq a < 8$

бўлса, 4 га тенг. 503. Агар $x \geq 2$ бўлса, $2\sqrt{x-1}$, агар $1 < x < 2$ бўлса, 2 га

тенг. 504. $\sqrt{A+\sqrt{A^2-B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$ формуладан

фойдаланилади. Бу мисолда $A^2-B = (a^2+4ab-b^2)^2 - [4(3a^2b+2a^2b^2-ab^3)] =$

$= \dots = (a^2-2ab+b^2)^2 = (a-b)^4$. $k = \sqrt{\frac{(a^2+4ab-b^2) + \sqrt{(a-b)^4}}{2}} +$

$+ \sqrt{\frac{(a^2+4ab-b^2) - \sqrt{(a-b)^4}}{2}} = \dots = \sqrt{\frac{2a^2+2ab}{2}} + \sqrt{\frac{6ab-2b^2}{2}} =$

$= \sqrt{a(a+b)} + \sqrt{b(3a-b)}$. 505. 1) $2x \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^2} =$

$= \dots = \frac{x(x+y)}{\sqrt{xy}}$, 2) $\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right) + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^2} =$

$= \dots = \frac{x-y}{2\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{2\sqrt{xy}} = \frac{2x}{2\sqrt{xy}} = \frac{x}{\sqrt{xy}}$; 3) $\frac{x(x+y)}{\sqrt{xy}} : \frac{x}{\sqrt{xy}} = x+y$.

$$506. 1) \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}}; \frac{\sqrt{1-x}}{x-2} = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x-2}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cdot \frac{x-2}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}(x-2)}{\sqrt{1+x}(1-x)} = \frac{x-2}{1-x} \quad 2) \text{ Худди шунингдек: } \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{1+x}};$$

$$: \frac{\sqrt{1+x}}{x+2} = \dots = \frac{x+2}{1+x} \quad 3) \frac{x-2}{1-x} + \frac{x+2}{1+x} = \dots = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$507. 1) \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a(a^2-b^2)} + \frac{2b}{a^2-b^2}\right) a(a+b)} = \dots = \frac{a+b}{\sqrt{a-b}};$$

$$2) \sqrt{\left(1 - \frac{2a}{a-b} + \frac{a^2+2ab-3b^2}{(a-b)^2}\right) 2b} = \dots = \sqrt{\frac{2b}{a-b} \cdot 2b} = \frac{2b}{\sqrt{a-b}};$$

$$3) \sqrt{\left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} - \frac{2ab}{a^2-b^2}\right) (a+b)} = \sqrt{\frac{a^2+ab}{a-b} - b - \frac{2ab}{a-b}} = \dots =$$

$$= \frac{a-b}{\sqrt{a-b}}; \quad 4) \frac{a+b}{\sqrt{a-b}} - \frac{2b}{\sqrt{a-b}} - \frac{a-b}{\sqrt{a-b}} = \dots = 0. \quad 508. \sqrt{A \pm \sqrt{B}} =$$

$$= \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad \text{формулага асосан: } 1) \sqrt{2 \pm \sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}. \quad \text{У ҳолда, } 2) \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2 + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{\frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)^2}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{6}}, \quad 3) \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{6}}. \quad 4) A = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2 = 2. \quad 509. 1\text{-усул.}$$

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} + 1 +$$

$$+ \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}, \quad 2\text{-усул. } \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad \text{формуларидан фойдаланилади. } 3\text{-усул. Тенгликнинг}$$

ҳар икки қисми мусбат бўлгани учун квадратлари тенг, яъни: $(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^2 = (2\sqrt{2})^2$; $3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{9 - 8} + 3 - 2\sqrt{2} = 8$; $8 = 8$.

510. Тенгликнинг ҳар икки қисми мусбат бўлгани учун квадратга кўтарилади.

511. 1-усул. Тенгликнинг ҳар икки қисмини кубга кўтарамиз, $(a + b)^3 = a^3 +$

$+ 3ab(a + b) + b^3$ бўлгани учун: $2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$

$\cdot (\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}) + 2 - \sqrt{5} = 1; 4 + 3\sqrt[3]{4 - 5} \cdot 1 = 1; 4 + 3(-1) =$
 $= 2. 1 = 1. 2\text{-у с у л. } \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = z \text{ деб белгиласак, } z^3 = 2 +$
 $+ \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} (\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}) + 2 - \sqrt{5}; z^3 =$
 $= 4 + 3\sqrt[3]{4 - 5} z; z^3 + 3z - 4 = 0$ тенгликнинг чап қисмини кўпайтирувчилар-
 га ажратамиз: $z^3 - z + 4z - 4 = z(z^2 - 1) + 4(z - 1) = (z - 1)(z^2 + z + 4);$
 $(z - 1)(z^2 + z + 4) = 0; z - 1 = 0. z_1 = 1.$ Бу ҳолда: $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} =$
 $= 1. z^2 + z + 4 = 0$ тенглама илдизга (ҳақиқий илдизга) эга эмас. **513. Кўр-**
самма. Касрни сурат ва махражини $A = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} -$
 $- \sqrt[3]{bc}$ ифодага кўпайтирамиз: $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = a^3 +$
 $+ b^3 + c^3 - 3abc$ формулага кўра:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}} = \frac{A}{a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}} = \\
 & = \frac{A[(a + b + c)^2 + 3(a + b + c)\sqrt[3]{abc} + 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}]}{[(a + b + c) - 3\sqrt[3]{abc}][(a + b + c)^2 + 3(a + b + c)\sqrt[3]{abc} + 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}]} = \\
 & = \frac{A[(a + b + c)^2 + 3(a + b + c)\sqrt[3]{abc} + 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}]}{(a + b + c)^3 - 27abc}. \text{ Бунда } A = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} +
 \end{aligned}$$

$+ \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc}.$ **514. Кўрсатма.** Касрнинг сурат ва махражини,
 аввал, $(1 + \sqrt[3]{\frac{4}{3}} + \sqrt[3]{\frac{3}{4}} - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{6})$ га, сўнгра $(4 + 2\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{36})$
 га кўпайтирамиз. **Жавоб:** $\frac{1}{3}(2 + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4,5})(1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{2} -$
 $- \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{6}).$ **515.** $\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{6} - 3\sqrt[3]{12} + 2\sqrt[3]{18} -$
 $- 2\sqrt[3]{36}^*.$ **516. Кўрсатма.** $x = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ ни берилган ифодага қўямиз. **Жавоб:**

$$\begin{aligned}
 a + b. \quad \text{517. 1-у с у л. } ax &= \sqrt{\frac{2a-b}{b}}; \quad \frac{1-ax}{1+ax} = \frac{1 - \sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1 + \sqrt{\frac{2a-b}{b}}} = \\
 &= \frac{(1 - \sqrt{\frac{2a-b}{b}})^2}{1 - \frac{2a-b}{b}} = \frac{b}{2(b-a)} \left(1 - 2\sqrt{\frac{2a-b}{b}} + \frac{2a-b}{b} \right) = \frac{a-b}{b-a} \sqrt{\frac{2a-b}{b}}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Худди шунага ўхшаш } \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1 - \frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}} =$$

*) 514 ва 515- мисоллар 513- мисолнинг хусусий ҳолидир.

$$= \frac{1 + \frac{b}{a} \sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \frac{2a-b}{b}}} = \frac{a + b \sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}} = \frac{a + b \sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{a-b} \text{ ҳосил бўлган ифо-}$$

даларни кўпайтирсак: $C = \frac{a-b \sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{b-a} \cdot \frac{a+b \sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{a-b} =$

$$= -\frac{a^2 - b^2 \left(\frac{2a-b}{b}\right)}{(a-b)^2} = -\frac{a^2 - 2ab + b^2}{(a-b)^2} = -1. \text{ 2- у с ул. } x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a}{b} - 1} \text{ шар-}$$

тидан: $x^2 a^2 = \frac{2a}{b} - 1$ ёки $b = \frac{2a}{1 + a^2 x^2}$. Шунинг учун: $\frac{(1-ax) \sqrt{1+bx}}{(1+ax) \sqrt{1-bx}} =$

$$= \frac{(1-ax) \sqrt{1 + \frac{2ax}{1+a^2 x^2}}}{(1+ax) \sqrt{1 - \frac{2ax}{1+a^2 x^2}}} = \frac{(1-ax) \sqrt{(1+ax)^2}}{(1+ax) \sqrt{(1-ax)^2}} = \frac{(1-ax)(1+ax)}{(1+ax)(ax-1)} = -1.$$

(Чунки $ax = \sqrt{\frac{2a}{b} - 1}$ тенгликда $a > b > 0$ бўлгани учун $\sqrt{\frac{2a}{b} - 1} > 1$; $ax > 1$ бўлади. У ҳолда $(ax - 1) > 0$; $\sqrt{(1-ax)^2} = ax - 1$ бўлади.) **Жавоб:**

- 1. 518. $x = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$ ни берилган ифодага қўямиз: $B = \frac{2b \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab} - 1}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} - \sqrt{\frac{(a+b)}{4ab} - 1}} =$

$$= \frac{2b \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{a+b - \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}} = \frac{2b \sqrt{(a-b)^2}}{a+b - \sqrt{(a-b)^2}}. \text{ 1- ҳ ол. Агар } a > b > 0$$

бўлса, $B = \frac{2b(a-b)}{a+b - (a-b)} = \frac{2b(a-b)}{2b} = a - b. \text{ 2- ҳ ол. Агар } b > a > 0$

бўлса, $B = \frac{2b(b-a)}{a+b - (b-a)} = \frac{2b(b-a)}{2a} = \frac{b(b-a)}{a}. \text{ Жавоб: агар } a > b > 0$

бўлса, $a - b$ га, агар $b > a > 0$ бўлса, $\frac{b(b-a)}{a}$ га тенг. **519. 1- у с ул.** Каср-

нинг сурат ва махражини $\sqrt{(a+x)(x+b)} + \sqrt{(a-x)(x-b)}$ ифодага кў-
пайтирилади. $B = \frac{(a+x)(x+b) + 2\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)} + (a-x)(x-b)}{(a+x)(x+b) - (a-x)(x-b)} =$

$$= \dots = \frac{x(a+b) + \sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}{ab+x^2}. \text{ x нинг қийматини ўрнига қўйсақ:}$$

$$B = \frac{\sqrt{ab}(a+b) + \sqrt{(a^2-ab)(ab-b^2)}}{ab+ab} = \frac{\sqrt{ab}(a+b) + \sqrt{ab}\sqrt{(a-b)^2}}{2ab} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}[(a+b) + (a-b)]}{2ab} = \frac{\sqrt{ab}}{b}. \text{ 2- у с ул. x нинг қийматини берилган ифода-}$$

га қўйиб, соддалаштирилади. 3- у с ул. $x = \sqrt{ab}$ дан $x^2 = ab$; $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ ҳосилла

пропорцияга асосан: $\frac{x+a}{x-a} = \frac{b+x}{b-x}$ ёки $\frac{a+x}{a-x} = \frac{x+b}{x-b}$. Берилган касрнинг сурат ва махражини $\sqrt{(a-x)(x-b)}$ га бўлиб, $\frac{x+b}{x-b}$ ўрнига $\frac{a+x}{a-x}$ қўйилади.

Жавоб: $\frac{\sqrt{ab}}{b}$. 520. 1-усул. x ва y нинг қийматлари ўрнига қўйилиб соддалаштирилади. 2-усул. $y-1 = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1 = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}-1}$; $\frac{x}{y-1} = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}-1} \cdot \frac{\sqrt{ab}-1}{\sqrt{ab}-1} = \frac{\sqrt{ab}-1}{\sqrt{ab}+1}$ ҳосила пропорцияга

асосан: $\frac{x+y-1}{x-y+1} = \frac{\sqrt{ab}-1 + (\sqrt{ab}+1)}{\sqrt{ab}-1 - (\sqrt{ab}+1)} = \frac{2\sqrt{ab}}{-2} = -\sqrt{ab}$. 521. Берилган ифодада $x \neq 0$ ва $y \neq 0$ бўлиши керак. 1-усул. Берилган ифодани соддалаштириш учун касрнинг сурат ва махражини,

$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$ га кўпайтирамиз. $A = \frac{(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})^2}{(\sqrt{x+y})^2 - (\sqrt{x-y})^2} = \dots = \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{y}$ касрнинг сурат ва махражини $x \neq 0$ га бўлсак: $A = \frac{1 + \sqrt{1 - (\frac{y}{x})^2}}{\frac{y}{x}}$; бу ифодага $y = \frac{2nx}{n^2+1}$ дан $\frac{y}{x} = \frac{2n}{n^2+1}$ қийматни қўямиз.

$A = \frac{1 + \sqrt{1 - (\frac{2n}{n^2+1})^2}}{\frac{2n}{n^2+1}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{(n^2-1)^2}}{n^2+1}}{\frac{2n}{n^2+1}} = \frac{n^2+1 + \sqrt{(n^2-1)^2}}{2n}$. Бу

ерда: 1) агар $n^2-1 \geq 0$ ёки $|n| \geq 1$ бўлса: $A = \frac{n^2+1 + (n^2-1)}{2n} = \frac{2n^2}{2n} = n$;
2) агар $n^2-1 < 0$ ёки $|n| < 1$ бўлса: $A = \frac{n^2+1 + (1-n^2)}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$. 2-усул.

$y = \frac{2nx}{n^2+1}$ дан: $\frac{x}{y} = \frac{n^2+1}{2n}$. Ҳосила пропорцияга кўра: $\frac{x+y}{x-y} = \frac{n^2+1+2n}{n^2+1-2n} = \frac{(n+1)^2}{(n-1)^2}$ *). Берилган ифоданинг сурат ва махражини $\sqrt{x-y} \neq 0$ га бўламыз

ва унга $\frac{x+y}{x-y}$ нинг қиймати $(\frac{n+1}{n-1})^2$ ни қўямиз. У ҳолда:

$$A = \frac{\sqrt{\frac{x+y}{x-y} + 1}}{\sqrt{\frac{x+y}{x-y} - 1}} = \frac{\sqrt{(\frac{n+1}{n-1})^2 + 1}}{\sqrt{(\frac{n+1}{n-1})^2 - 1}} = \dots = \frac{|n+1| + |n-1|}{|n+1| - |n-1|}; \quad A =$$

*) Бу ифодани $\frac{x+y}{x-y}$ да y ўрнига $\frac{2nx}{n^2+1}$ ни қўйиб ҳисоблаш билан ҳам ҳо сил қилиш мумкин эди.

$$= \frac{|n+1| + |n-1|}{|n+1| - |n-1|}. \text{ Энди } |n| \geq 1 \text{ ва } |n| < 1 \text{ ҳоллар учун } A \text{ нинг қиймати}$$

аниқланади (3- усулга қараганг). 3- усул. y нинг қийматини ифодага қўйсак:

$$A = \frac{\sqrt{x + \frac{2nx}{n^2+1}} + \sqrt{x - \frac{2nx}{n^2+1}}}{\sqrt{x + \frac{2nx}{n^2+1}} - \sqrt{x - \frac{2nx}{n^2+1}}} = \dots = \frac{\sqrt{x} [\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{(n-1)^2}]}{\sqrt{x} [\sqrt{(n+1)^2} - \sqrt{(n-1)^2}]} = \frac{|n+1| + |n-1|}{|n+1| - |n-1|}.$$

а) $n-1 \geq 0$ (у ҳолда $n+1 > 0$ бўлади), $n \geq 1$ бўлса, $A = \frac{n+1 + (n-1)}{n+1 - (n-1)} = n$;

б) $n+1 < 0$ (у ҳолда $n-1 < 0$ бўлади), $n < -1$ бўлса, $A = \frac{-(n+1) - (n-1)}{-(n+1) + (n-1)} = n$. Демак: $n \geq 1$ ва $n < -1$ (ёки $|n| \geq 1$) бўлса,

$A = n$. в) $\left\{ \begin{array}{l} n+1 > 0, n > -1 \\ n-1 < 0, n < 1 \end{array} \right\}$ ёки $-1 < n < 1$ бўлса, $A = \frac{n+1 - (n-1)}{n+1 + (n-1)} =$

$= \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$. Демак, $|n| < 1$ бўлса, $A = \frac{1}{n}$. Жавоб: $|n| \geq 1$ бўлса, $A = n$;

$|n| < 1$ бўлса, $A = \frac{1}{n}$. 522. 1- усул. $B = \frac{(\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx})^2}{(\sqrt{a+bx})^2 - (\sqrt{a-bx})^2} = \dots =$

$= \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2x^2}}{bx}$. x нинг қийматини ўрнига қўйсак:

$$B = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2} \left| \frac{2ac}{b(1+c^2)} \right|}{b \cdot \frac{2ac}{b(1+c^2)}} = \dots = \frac{1 + c^2 + \sqrt{(1-c^2)^2}}{2c}. \text{ 1- ҳол. Агар}$$

$1 - c^2 \geq 0$ ёки $|c| \leq 1$ бўлса, $B = \frac{1 + c^2 + (1 - c^2)}{2c} = \frac{2}{2c} = \frac{1}{c}$. 2- ҳол. Агар

$1 - c^2 < 0$ ёки $|c| > 1$ бўлса, $B = \frac{1 + c^2 + (c^2 - 1)}{2c} = \frac{2c^2}{2c} = c$.

2- усул. $\frac{a}{bx} = \frac{1+c^2}{2c}$ ҳосила пропорциядан $\frac{a+bx}{a-bx} = \left(\frac{1+c}{1-c} \right)^2$,

$$B = \frac{\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} + 1}{\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} - 1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1+c}{1-c} \right)^2} + 1}{\sqrt{\left(\frac{1+c}{1-c} \right)^2} - 1} = \dots. \text{ 3- усул. } x \text{ нинг қиймати берил-}$$

ган ифодага қўйиб соддалаштирилади. Жавоб: берилган ифода: $|c| > 1$ бўл-
са, c га, $|c| < 1$ бўлса, $\frac{1}{c}$ га тенг. 523. $\sqrt[3]{ax^3 + by^3 + cz^3} = A$ деб белгиласак:

$$A = \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z}} = \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{ax^3}{y} + \frac{ax^3}{z}} = \sqrt[3]{ax^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = x \sqrt[3]{a}.$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z}} = \sqrt[3]{\frac{by^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{by^3}{z}} = \sqrt[3]{by^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = y \sqrt[3]{b}.$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z}} = \sqrt[3]{\frac{c^3}{x} + \frac{c^3}{y} + \frac{c^3}{z}} = \sqrt[3]{c^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} = c \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$$

$$\frac{A}{x} = \frac{c}{\sqrt[3]{ax}}; \frac{A}{y} = \frac{c}{\sqrt[3]{by}}; \frac{A}{z} = \frac{c}{\sqrt[3]{cz}}$$

тенгликларни ўзаро қўшсак: $A\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$; $A = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

524. $c^3 - 3c - 2 = c^3 - c - 2c - 2 = c(c^2 - 1) - 2(c + 1) = (c + 1)(c^2 - c - 2) = \dots = (c + 1)^2(c - 2)$. Худди шунга ўхшаш: $c^3 - 3c + 2 = (c - 1)^2(c + 2)$, у ҳолда: $\frac{(c^3 - 3c - 2) + (c^2 - 1)\sqrt{c^2 - 4}}{(c^3 - 3c + 2) + (c^2 - 1)\sqrt{c^2 - 4}} =$

$$= \frac{(c + 1)^2(c - 2) + (c^2 - 1)\sqrt{c^2 - 4}}{(c - 1)^2(c + 2) + (c^2 - 1)\sqrt{c^2 - 4}} = \frac{(c + 1)\sqrt{c - 2}[(c + 1)\sqrt{c - 2} + (c - 1)\sqrt{c + 2}]}{(c - 1)\sqrt{c + 2}[(c - 1)\sqrt{c + 2} + (c + 1)\sqrt{c - 2}]} =$$

$$= \frac{(c + 1)\sqrt{c - 2}}{(c - 1)\sqrt{c + 2}} = \frac{(c + 1)\sqrt{c^2 - 4}}{(c - 1)(c + 2)}$$

525. $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$; $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ эканини ҳисобга олсак:

$$\frac{(x + 1)(x - 2) + (x - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{(x - 1)(x + 2) + (x + 1)\sqrt{x^2 - 4}} = \dots = \sqrt{\frac{x - 2}{x + 2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2}}$$

527. $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} = ab$ бўлгани учун: $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Худди шунингдек: $c^2 + d^2 \geq 2cd$; $a^2 + c^2 \geq 2ac$; $b^2 + d^2 \geq 2bd$, бу тенгсизликларни қўшсак, $2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 2(ab + cd +$

$+ ac + bd) = 2(a + d)(b + c) \geq 2 \cdot 2\sqrt{ad} \cdot 2\sqrt{bc} = 8\sqrt{abcd}$ 528. Қўйсатма. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; $\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac}$; $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$ тенгсизликларни қўшамиз. 529.

$\frac{a+1}{2} \geq \sqrt{a}$; $\frac{b+1}{2} \geq \sqrt{b}$; $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Тенгсизликларни кўпайтирамиз.

531. $a + b = n - c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ бўлса, $a + b > 2\sqrt{ab}$, $a + c = n - b$, $a + c > 2\sqrt{ac}$, $b + c = n - a$, $b + c > 2\sqrt{bc}$. Тенгсизликларни ўзаро кўпайтирсак, $(a + b)(a + c)(b + c) = (n - c)(n - b)(n - a) > 8\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ac} \cdot \sqrt{bc} = 8abc$. 532. $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$; $\sqrt{x_1 x_3} \leq \frac{x_1 + x_3}{2}$, ..., $\sqrt{x_{n-1} x_n} \leq \frac{x_{n-1} + x_n}{2}$.

Тенгсизликларни қўшамиз: $\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_1 x_3} + \dots + \sqrt{x_{n-1} x_n} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 + x_3}{2} + \dots + \frac{x_{n-1} + x_n}{2} = \frac{n-1}{2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$. 533. Квадратнинг томони m , юзи m^2 . Тўғри тўртбурчак томонлари a ва b , юзи эса ab . Масала шартига кўра: $m^2 = ab$; $m = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$; $2m \leq a + b$; $4m \leq 2(a + b)$ ($4m$ — квадратнинг периметри, $2(a + b)$ — тўғри тўртбурчакнинг периметри). 535.

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ дан, $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$. $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{abc} = 9$. 536. 1-усул.

$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, $ab + bc + ac \geq 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}$. $(a + b + c)(ab + bc + ac) \geq 9abc$.

2- усул. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$, бу тенгсизлики $abc > 0$ га кўпай-

тирамиз. 538. Тенгламанинг барча ҳадларини $x^3 - a^3 \neq 0$ га кўпайтирамиз. У ҳолда: $(x^2 + 2ax) + (x - a)x = x^2 + ax + a^2$. Соддалаштирсак, $x^2 - a^2 = 0$, $x_{1,2} = \pm a$; $x_1 = a$ берилган тенгламанинг илдизи бўла олмайди, чунки $x^3 - a^3 \neq 0$

шартни қаноатлантирмайди. *Жавоб:* $-a$. 539. 1- усул. Тенгламанинг ҳар икки қисмини $(x + 2a - b)(2a + b - x)$ га кўпайтирсак: $(2a + b)^2 - x^2 = x^2 - (2a - b)^2$; соддалаштирсак, $x^2 = 4a^2 + b^2$; $x_{1,2} = \pm \sqrt{4a^2 + b^2}$. 2- усул. Ҳосила пропор-

циядан: $\frac{(2a + b + x) + (x + 2a - b)}{(2a + b + x) - (x + 2a - b)} = \frac{(x - 2a + b) + (2a + b - x)}{(x - 2a + b) - (2a + b - x)}$ ёки

$$\frac{4a + 2x}{2b} = \frac{2b}{2x - 4a}, \text{ ёки } \frac{2a + x}{c} = \frac{b}{x - 2a}. \text{ Бундан: } x^2 - (4a^2 + b^2) = 0. \text{ *Жавоб:* } \pm \sqrt{4a^2 + b^2}.$$

540. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 0 ва 2. 541. 1) $\frac{a^2}{b^2}$ ва $-\frac{c}{a^2}$; 2) $\frac{m}{a}$ ва $\frac{n}{m}$.

542. Тенгламани нормал ҳолга келтирилса: $x^2 - (m+n)x + (m+n-1) = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{m+n}{2} \pm \sqrt{\frac{(m+n)^2}{4} - (m+n-1)} = \frac{m+n}{2} \pm \frac{m+n-2}{2}. \text{ *Жавоб:* } m+n-1 \text{ ва } 1.$$

543. $8 \pm \sqrt{73}$; $8 \pm \sqrt{57}$. 544. *Кўрсатма.* x билан учинчи қавсни ҳамда биринчи ва иккинчи қавсларни ўзаро кўпайтирсак: $(x^2 + 3x) \cdot$

$$(x^2 + 3x + 2) = \frac{9}{16}; x^2 + 3x = y \text{ белгиланса, } y(y+2) = \frac{9}{16}. \text{ Бундан } y_1 = \frac{1}{4};$$

$$y_2 = -\frac{9}{4}. \text{ 1) } x^2 + 3x = \frac{1}{4} \text{ ва 2) } x^2 + 3x = -\frac{9}{4} \text{ тенгламаларни ечиш керак.}$$

Жавоб: $-\frac{3}{2}; \frac{1}{2} (-3 \pm \sqrt{10})$. 545. x билан $\frac{1}{x}$ ҳамда $\frac{a-b}{a+b}$ билан $\frac{a+b}{a-b}$ ўза-

ро тескари миқдорлар бўлгани учун $x_1 = \frac{a-b}{a+b}, x_2 = \frac{a+b}{a-b}$. 2- усул. Берилган

тенгламани нормал ҳолга келтирамыз: $(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2) = 0$

тенглама ечилади. *Жавоб:* $\frac{a-b}{a+b}$ ва $\frac{a+b}{a-b}$. 546. $\frac{a}{b}$; $-\frac{b}{a}$. 547. 1- усул. Бе-

рилган тенгламани a га нисбатан квадрат тенглама деб ечсак: $a^2 - 2(x^2 - 1)a -$

$$-6x^2 + 4x + x^4 = 0, a_{1,2} = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 + 6x^2 - 4x - x^4} = x^2 - 1 \pm (2x - 1).$$

Бундан: $a = x^2 + 2x - 2$ ва $a = x^2 - 2x$. У ҳолда $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a =$

$$= (x^2 + 2x - 2 - a)(x^2 - 2x - a) = 0. \text{ а) } x^2 + 2x - 2 - a = 0, \text{ б) } x^2 - 2x - a = 0$$

тенгламалар ечилади. 2- усул. $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = [(x^2 - a)^2 - 4x^2] -$

$$- (2x^2 - 4x - 2a) = \dots = (x^2 - 2x - a)(x^2 - a + 2a - 2) = 0. x^2 - 2x - a = 0$$

ва $x^2 + 2x - a - 2 = 0$ тенгламалар ечилади. Из оҳ. Тенгламанинг илдизлари ҳақиқий сонлар бўлсин учун $a \geq -1$ бўлиши керак. *Жавоб:* $-1 \pm \sqrt{a+2}$;

$$1 \pm \sqrt{1+a}. \text{ 548. 1) } \pm 2, \pm 0,5; \text{ 2) } \pm 0,5; \pm \sqrt{2}. \text{ 549. 1) } \pm \frac{1}{a}, \pm b;$$

$$2) \pm \frac{a}{b}; \pm \frac{b}{a}. \text{ 550. *Кўрсатма.* 1) Тенглама нормал ҳолга келтирилса,}$$

$$(2-x)x^2 + a^2x - 4(a+2) = 0. a \neq 2 \text{ бўлса: } x_1 = \frac{4}{a-2}, x_2 = a+2. a = 2 \text{ бўл-$$

са, берилган тенглама $2x(2-x) - 8 = 2(4-x^2)$ кўрinishга келиб $x = 4$ бўла-

ди. *Жавоб:* 1) $a \neq 2$ бўлса: $\frac{4}{a-2}$; $a+2$ ($a = 2$ бўлса, $x = 4$). 2) $a \neq b$ бўл-

$$\text{са, } \frac{b^2}{a-b}, a+b \text{ (} a = b \text{ бўлса, } x = 2a\text{)}. \text{ 551. *Кўрсатма.* 1) Тенглама нормал}$$

қолга келтирилса: $c^2x^2 - (a - 2b)cx - b(a - b) = 0$. Бу тенглама cx га нисбатан ечилиб, сўнгра x аниқланади. *Жавоб:* 1) $\frac{a-b}{c}$; $-\frac{b}{c}$; 2) $\frac{2a+b}{b}$; $\frac{a-b}{b}$

($b \neq 0$). 552. 1) a^{3n} , $-a^n$; 2) a^n , a^{-n} . 553. 1) Тенглама ҳадларини $a(9b^2 - x^2)$ га ($a \neq 0$ ва $x \neq \pm 3b$) кўпайтириб нормал қолга келтирсак: $bx^2 - 2abx + b(a^2 - 9b^2) = 0$. Бунда: а) $b \neq 0$ бўлса, $x^2 - 2ax + a^2 - 9b^2 = 0$, $x_{1,2} = a \pm$

$\pm 3b$; б) $b = 0$ бўлса берилган тенглама $\frac{a}{x} - \frac{a}{x} = 0$ кўринишда бўлиб, нолдан фарқли ихтиёрий сон берилган тенгламанинг илдизи бўла олади. *Жавоб:* 1) $b \neq 0$ бўлса, $a \pm 3b$ ($b = 0$ бўлса, x - ихтиёрий, нолдан фарқли сон бўлади); 2) $n \neq 0$ бўлса, $m \pm 2n$ ($n = 0$ бўлса, x - нолдан фарқли ихтиёрий сон бўлади).

554. 1) $-m$; $\frac{m(n+1)}{n(2n+3)}$; 2) \sqrt{c} ; $-\sqrt{2c}$ ($c > 0$). 555. $x - 3b \neq 0$

бўлса, $(x - 3b)^2 + 3a(x - 3b) - 18a^2 = 0$. 1- у с у л. Ҳосил бўлган тенгламани нормал қолга келтириб ечилади. 2- у с у л. $x - 3b = a$ деб белгиласак: $u^2 + 3au - 18a^2 = 0$. $u_1 = 3a$; $u_2 = -6a$, ўрнига қўйсак: $x - 3b = 3a$, $x_1 = 3(a + b)$, $x - 3b = -6a$; $x_2 = 3(b - 2a)$. 3- у с у л. $\frac{3a}{x - 3b} = y$ деб белгиласак, $1 + y =$

$= 2y^2$. Тенгламани ечсак: $y_1 = 1$; $y_2 = \frac{1}{2}$; бу қийматларни y нинг ўрнига қўйиб, x нинг қийматлари тоғилади. *Жавоб:* $3(a + b)$; $3(b - 2a)$. 556. ± 3 ; $\pm \sqrt{3}$.

557. 1- у с у л. Нормал қолга келтириб ечилади. 2- у с у л. $\frac{x+1}{x} = y$ деб бел-

гиласак, $y + \frac{1}{y} = \frac{13^*}{6}$ ёки $6y^2 - 13y + 6 = 0$. $y_1 = \frac{3}{2}$; $y_2 = \frac{2}{3}$. У ҳолда:

$\frac{x+1}{x} = \frac{3}{2}$ дан $x_1 = 2$; $\frac{x+1}{x} = \frac{2}{3}$ дан $x_2 = -3$. *Жавоб:* 2; -3. 558. *Курс-*

симма. Берилган тенгламани $\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{a+1}\right)^2 = \frac{5}{9}\left(\frac{x-a}{x}\right)^2$ кўринишда ёза-

миз. У ҳолда $\frac{4}{9}\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 = \left(\frac{a}{a+1}\right)^2$ ёки $\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 = \frac{9}{4}\left(\frac{a}{a+1}\right)^2$, бундан

$\frac{a-x}{x} = \pm \frac{3}{2}\frac{a}{a+1}$; а) $\frac{a-x}{x} = \frac{3a}{2(a+1)}$ ва б) $\frac{a-x}{x} = -\frac{3a}{2(a+1)}$ тенг-

ламалар ечилади. *Жавоб:* $\frac{2a(a+1)}{5a+2}$; $\frac{2a(a+1)}{2-a}$ ($a \neq 2$; $a \neq -\frac{2}{5a}$). 559. 1- у с у л.

$nx - x = z$ деб белгиласак: $\frac{m}{z} - \frac{m-1}{z^2} = 1$ ёки $z^2 - mz + (m-1) = 0$. Бун-

дан: $z_1 = m-1$; $z_2 = 1$. z нинг қиймати ўрнига қўйилади. 2- у с у л. Тенглама-

ни нормал қолга келтирамиз. $m(nx - x) - (m-1) = x^2(1-n)^2$. $(n-1)^2 x^2 -$

$-m(n-1)x + (m-1) = 0$ тенглама ечилади. *Жавоб:* $\frac{m-1}{n-1}$; $\frac{1}{n-1}$ ($n \neq$

$\neq 1$). 560. Берилган тенгламани $\frac{x-b}{x-a} - \frac{x-a}{x-b} = \frac{4ac}{a^2-b^2}$ кўринишда ёзиб,

*) $\frac{13}{6} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3}$ бўлгани учун берилган тенгламани $y + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3}$ кў-

ринишда ёзиш мумкин. У ҳолда $y = \frac{3}{2}$ деб олсак, $\frac{x+1}{x} = \frac{3}{2}$ дан $x_1 = 2$; $y =$

$= \frac{2}{3}$ деб олсак $\frac{x+1}{x} = \frac{2}{3}$ дан $x_2 = -3$.

$$\frac{2x_1^2 + 3x_1 \cdot x_2 + 2x_2^2}{8x_1 \cdot x_2^3 + 8x_1^3 \cdot x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2}{8x_1 x_2 [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]} = \frac{2 \cdot \frac{25}{4} + \frac{3}{2}}{8 \left(-\frac{3}{2} \right) \left(\frac{25}{4} + 2 \cdot \frac{3}{2} \right)} =$$

$$= -\frac{14}{111}. \quad 578. \quad x_1 = 2 \text{ ни берилган тенгламага қўйсак: } 4(c-2) + 2(c+2) - 2 = 0;$$

$$6c - 6 = 0; \quad c = 1; \quad 2) \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ формулада } b \text{ нинг ўрнига } (c+2) \text{ ни, } a$$

$$\text{нинг ўрнига } (c-2) \text{ ни қўямиз: } -\frac{c+2}{c-2} = 1; \quad -c-2 = c-2; \quad c = 0; \quad 3) \quad D =$$

$$= b^2 - 4ac = 0; \quad (c+2)^2 + 8(c-2) = 0; \quad c^2 + 4c + 4 + 8c - 16 = 0; \quad c^2 + 12c - 12 = 0.$$

$$c = -6 \pm 4\sqrt{3}; \quad 4) \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}; \quad -\frac{2}{c-2} = -2; \quad 1 = c-2; \quad c = 3. \quad \text{Жавоб:}$$

$$1) \quad c = 1, \quad 2) \quad c = 0, \quad 3) \quad c = -6 \pm 4\sqrt{3}, \quad 4) \quad c = 3. \quad 579. \quad (x_1^2 + x_2^2) + 2x_1 x_2 =$$

$$= (x_1 + x_2)^2 = p^2 (x_1^2 + x_2^2). \quad 2x_1 x_2 = (p^2 - 2q) \cdot 2q. \quad \text{Жавоб: } x^2 - p^2 x + 2q(p^2 - 2q) = 0.$$

$$580. \quad (x_1 + 3x_2) + (x_2 + 3x_1) = 4(x_1 + x_2) = -\frac{4b}{a}. \quad (x_1 + 3x_2)(x_2 + 3x_1) = 10x_1 x_2 +$$

$$+ 3(x_1^2 + x_2^2) = \frac{10c}{a} + \frac{3(b^2 - 2ac)}{a^2} = \frac{4ac + 3b^2}{a^2}; \quad x^2 + \frac{4b}{a}x + \frac{4ac + 3b^2}{a^2} = 0.$$

$$\text{Жавоб: } a^2 x^2 + 4abx + 4ac + 3b^2 = 0. \quad 582. \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}; \quad \frac{1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2. \quad \text{Изланаётган квадрат тенглама:}$$

$$x^2 - \frac{b^2 - 2ac}{c^2}x + \frac{a^2}{c^2} = 0 \quad \text{ёки } c^2 x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0. \quad 583. \quad \text{Берилган тенглама}$$

$$\text{илдизлари } x_1 \text{ ва } x_2 \text{ бўлса, } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \quad \text{Изланаётган тенглама ил-}$$

$$\text{дизлари } \frac{1}{x_1} \text{ ва } \frac{1}{x_2} \text{ бўлиб, } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} \text{ ва } \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{a}{c}.$$

$$\text{У ҳолда изланган тенглама: } x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0. \quad \text{Жавоб: } cx^2 + bx + a = 0.$$

$$585. \quad 1) \quad \left(-\frac{x_1}{x_2}\right) + \left(-\frac{x_2}{x_1}\right) = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = -\frac{\frac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\frac{c}{a}} = \frac{2ac - b^2}{ac}; \quad \left(-\frac{x_1}{x_2}\right) \cdot$$

$$\left(-\frac{x_2}{x_1}\right) = 1, \quad x^2 - \frac{2ac - b^2}{ac} \cdot x + 1 = 0 \quad \text{ёки } acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0.$$

$$2) \quad \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) = (x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} (x_1 x_2 + 1) =$$

$$= -\frac{b}{\frac{c}{a}} \left(\frac{c}{a} + 1 \right) = -\frac{b(a+c)}{ac} \cdot \left(x_1 + \frac{1}{x_2} \right) \cdot \left(x_2 + \frac{1}{x_1} \right) = x_1 x_2 + 2 + \frac{1}{x_1 x_2} = 2 + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} = \left(2 + \frac{a^2 + c^2}{ac} \right) = \frac{(a+c)^2}{ac}; x^2 + \frac{b(a+c)}{ac} x + \frac{a^2 + c^2 + 2ac}{ac} = 0; acx^2 + b(a+c)x + (a+c)^2 = 0. 3) \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \frac{b(3ac - b^2)}{a^3}; \frac{c^3}{a^3} = \frac{3abc - b^3}{c^3}; \frac{1}{x_1^3} \cdot \frac{1}{x_2^3} = \frac{1}{c^3} = \frac{a^3}{c^3} (*). x^2 + \frac{b^3 - 3abc}{c^3} x + \frac{a^3}{c^3} = 0; c^3 x^2 + b(b^2 - 3ac)x + a^3 = 0. 586. 585-ми-$$

сол ечилишига қаранг. (Бу мисол олдинги мисолнинг хусусий ҳоли бўлиб: $a=1, b=p, c=q$.) 587. $\frac{x_2}{x_1} = n; x_2 = nx_1; x_1 + nx_1 = -\frac{b}{a}$, ёки $x_1 = -\frac{b}{a(n+1)}(x) \cdot x_1 \cdot nx_2 = \frac{c}{a}$, ёки $x_1^2 = \frac{c}{an}$. Бу ерда $\frac{c}{an} > 0$ бўлса, $x = \sqrt{\frac{c}{an}}$ бўлади. У ҳолда (*)

тенгликдан: $\sqrt{\frac{c}{an}} = -\frac{b}{a(n+1)}$ бўлиши керак. Охириги тенглик $-\frac{b}{a(n+1)} \geq 0$ бўлгандагина ўришли. Бундан: $\frac{c}{an} = \frac{b^2}{a^2(n+1)^2}$ ёки $ac(n+1)^2 = nb^2$. Жа-

воб: $\frac{c}{an} \geq 0$ ва $-\frac{b}{a(n+1)} \geq 0$ бўлса, $b^2 n = ac(n+1)^2$. 588. $\frac{c}{an^k} \geq 0$,

$-\frac{b}{a(n^k+1)} \geq 0$ бўлса, $ac(n^k+1)^2 = n^k b^2$. 589. $p = \pm 4 \sqrt{\frac{q}{3}}$. 590. $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$, яъни $x_1 = \frac{1}{x_2}$. $D = b^2 - 4c^2 \geq 0; b^2 \geq 4c^2; |b| \geq 2c$. 591. Қўрсатма.

$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ илдизлар қўшилди ва ўзаро кўпайтирилади. Жавоб: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a}$. 592. 1) $x^4 + (m^2 + n^2)x^2 + m^2 n^2 = 0$; 2) $a^2 x^4 - (a^4 + 1)x^2 + a^2 = 0$; 3) $a^2 b^2 x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2 b^2 = 0$.

593. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{2}{n^2}(c^2 n^2 + 1)$; $x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 \cdot x_4^2 = \frac{c^4}{n^4}$. 594. Қўрсатма.

2) тенглама ечилса, $x_1 = b; x_2 = \frac{1}{c}$ аниқланади. Биквадрат тенгламанинг қолган икки илдизи $-b$ ва $-\frac{1}{c}$ дан иборат бўлади. У ҳолда изланувчи тенглама:

$(x-b)(x+b)\left(x-\frac{1}{c}\right)\left(x+\frac{1}{c}\right) = 0$ ёки $c^2 x^4 - (b^2 c^2 + 1)x^2 + b^2 = 0$. Жавоб:

1) $16x^4 - 40x^2 + 9 = 0$; 2) $c^2 x^4 - (b^2 c^2 + 1)x^2 + b^2 = 0$. 595. $n^2 x^4 - (25n^2 + 1)x^2 + 25 = 0$. 596. 1-усул. $16 + 4b + 36 = 0; b = -13$. 2-усул. Берилган тенгламанинг иккинчи илдизи -2 ; учинчи илдизи x_3 бўлсин, у ҳолда тўртинчи илдизи $-x_3$ бўлади. Илдизлар кўпайтмаси $2 \cdot (-2)x_3(-x_3) = 36$. $4x^2 = 36$

*) $x_1^3 + x_2^3$ йнғинди ўрнига $\frac{b(3ac - b^2)}{a^3}$ нфода қўйилди (ушбу параграфда ишлаб кўрсатилган 5-мисолга қаранг).

$x^2 = 9$; $x_{3,4} = \pm 3$, яъни $x_3 = 3$; $x_4 = -3$. Изланувчи квадрат тенглама: $(x-2) \times (x+1)(x-3)(x+3) = 0$; $(x^2-4)(x^2-9) = 0$; $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; демак:

$b = -13$. 597. Чигит экиш x кунда тамомланган бўлсин. Бир кунда $\frac{200}{x}$ га ерга чигит экилган. Чигитни $x+2$ кунда (план бўйича) экилганда, кунига $\frac{200}{x+2}$ га ерга чигит экилар эди. Масала шартига кўра: $\frac{200}{x} - \frac{200}{x+2} = 5$ ёки

$\frac{40}{x} - \frac{40}{x+2} = 1$. *Жавоб:* чигит экиш 8 кунда тамомланган*). 598. Ўқувчи китобни 10 кунда ўқиган. 599. 82. 600. 12 киши. 601. Синфдаги ўқувчилар сони x . Ҳар бир ўқувчи $(x-1)$ та расмни алмаштиришга берган. Барча расмлар сони: $x(x-1) = 992$. Тенглама ечилади. *Жавоб:* x синфда 32 та ўқувчи бўлган. 602. Томошабинлар катта эшикдан x минутда, кичик эшикдан $x+4$ минутда чиқиб кетади. Бир минутда катта эшикдан томошабинларнинг $\frac{1}{3}$ қисми,

кичигидан $\frac{1}{x+4}$ қисми, иккаласидан эса $1:3 \frac{3}{4} = \frac{4}{15}$ қисми чиқиб кетади. Ик-

кала эшикдан 1 соатда томошабинларнинг $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{4}{15}$ қисми чиқиб кетади.

Ҳосил бўлган тенглама ечилади. *Жавоб:* 6 минутда ва 10 минутда. 603. 12 соатда ва 15 соатда. 604. Учала машина биргаликда ишни x кунда бажарса, ёлғиз биринчиси $x+10$ кунда, ёлғиз иккинчиси $x+20$ кунда, ёлғиз учинчиси $6x$ кунда бажаради. Бир кунда: биринчи машина ишнинг $\frac{1}{x+10}$ қисмини, иккинчи-

си $\frac{1}{x+20}$ қисмини, учинчиси $\frac{1}{6x}$ қисмини, учаласи $\frac{1}{x}$ қисмини бажаради. У

ҳолда: $\frac{1}{10+x} + \frac{1}{x+20} + \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}$. Тенглама ечилади. *Жавоб:* 20 кунда; 30

кунда; 60 кунда. 605. 9 соат, 12 соат, 6 соат. 606. Биринчи тракторчининг ёлғиз ўзи x кунда чигит экиш дейлик, бунда y ернинг ярмига $\frac{x}{2}$ кунда экади.

Иккинчи тракторчи ернинг ярмига $9 - \frac{x}{2} = \frac{18-x}{2}$ кунда, бутун ерга эса $(18-x)$ кунда экади. Биринчи тракторчининг ёлғиз ўзи бир кунда звено ери-

нинг $\frac{1}{x}$ қисмига, иккинчисининг ёлғиз ўзи эса $\frac{1}{18-x}$ қисмига, иккаласи эса

$\frac{1}{1}$ қисмига чигит экади. У ҳолда: $\frac{1}{x} + \frac{1}{18-x} = \frac{1}{1}$. Тенглама ечилади. *Жа-*

воб: 12 кунда ва 6 кунда (6 кунда ва 12 кунда). 607. 20 кунда ва 30 кунда.

608. Биринчи бригаданинг ёлғиз ўзи ишни x кунда, иккинчисининг ёлғиз ўзи

$x+5$ кунда тамомласин. Биринчи бригада бир кунда ишнинг $\frac{1}{x}$ қисмини, 3,5

кунда $\frac{3,5}{x}$ қисмини, иккинчи бригада бир кунда ишнинг $\frac{1}{x+5}$ қисмини, 6 кун-

да эса $\frac{6}{x+5}$ қисмини тамомлайди. Масала шартига кўра: $\frac{3,5}{x} + \frac{6}{x+5} = 1$.

Тенглама ечилади. *Жавоб:* 7 кунда ва 12 кунда. 609. 14 кунда ва 11 кунда.

610. Оқим (копток) нинг тезлиги x км/соат. Аҳмаднинг тезлиги $(x+4,5)$ км/соат. $250 \text{ м} = 0,25 \text{ км}$ ни копток $\frac{0,25}{x}$ соатда, Аҳмад эса $\frac{0,25}{x+4,5}$ соатда ўта-

*) Масалаларнинг курсатмасида тенглама тузиш билангина чекланамиз.

ди. 3 мин. = $\frac{1}{20}$ соат. Тенглама тузамиз: $\frac{0,25}{x} - \frac{0,25}{x+4,5} = \frac{1}{20}$. *Жавоб:* 3 км/соат.

ат. 611. 3 км/соат. 612. Филдирак айланаларининг узунлиги $(x-5)$ дм ва x дм. Агар $\frac{x-5}{2}$ дм ва $2x$ дм бўлса, 500 м да $\frac{500}{x-5}$ ва $\frac{500}{2x}$ марта айлапар эди.

$\frac{500}{x-5} - \frac{500}{2x} = 40$. *Жавоб:* 20 дм ва 25 дм. 613. 60 км/соат ва 50 км/соат.

614. Поездни бошланғич тезлиги соатига x км, кейинги тезлиги соатига $(x+5)$ км Поезд 2 соатда $2x$ км йўл юрган ва йўлнинг қолган $(220-2x)$ км ни $\frac{220-2x}{x+5}$ соатда юрган; дастлабки тезлик билан бутун йўлни $\frac{220}{x}$ соатда юрар эди. 2 соат 10 минут = $2\frac{1}{6}$ соат = $\frac{13}{6}$ соат. $\frac{220}{x} - \frac{13}{6} = \frac{220-2x}{x+5}$. *Жавоб:* 55 км/соат.

615. $4\frac{1}{3}$ км/соат. 616. Аҳоли йилга $x\%$ дан кўпайган.

Аҳоли биринчи йили $\frac{40000}{100}x = 400x$ та кишига ортиб, $(40000 + 400x)$ та бўлган. Иккинчи йили $\frac{40000+400 \cdot x}{100}x = (400 + 4x)x$ та ортиб, йил охирида $40000 + 400x + (400 + 4x)x = 44100$ киши бўлган. Бундан $x^2 + 200x - 1025 = 0$; $x_1 = 5$, $x_2 = -205$. *Жавоб:* 5%. 617. 3%. 618. $AB = x$ (км). Йўловчилар C

нуқтада учрашсин, дейлик. Учрашгунча биринчи йўловчи $\frac{x+2}{3}$ км, иккинчиси $\frac{x-2}{2}$ км юрган. Биринчиси $\frac{x-2}{2}$ км ни 40 минут = $\frac{2}{3}$ соатда юрса, унинг

тезлиги $\frac{x-2}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3(x-2)}{4}$ (км/соат). Иккинчиси $\frac{x+2}{2}$ км ни $1\frac{1}{2}$ соат-

да юрса, унинг тезлиги $\frac{x+2}{2} : 1\frac{1}{2} = \frac{x+2}{3}$ (км/соат). Учрашгунча биринчиси

$\frac{x+2}{2}$ км ни $\frac{x+2}{2} : \frac{3(x-2)}{4} = \frac{2(x+2)}{3(x-2)}$ соатда, иккинчиси эса $\frac{x-2}{2}$ км ни

$\frac{x-2}{2} : \frac{x+2}{2} = \frac{3(x-2)}{2(x+2)}$ соатда ўтади. $\frac{2(x+2)}{3(x-2)} = \frac{3(x-2)}{2(x+2)}$ ёки $4(x+2)^2 =$

$= 9(x-2)^2$. Тенгламани ечсак: $x_1 = 10$; $x_2 = 0,4$. Масала шартига кўра $x > 2$ бўлиши керак. Шунинг учун x_2 масалага жавоб бўла олмайди. *Жавоб:* AB масофа 10 км. 619. 50 км/соат ва 40 км/соат. 620. Би-

ринчи бўлак қотишма x кг, иккинчи бўлак қотишма $(65-x)$ кг. 1 кг мис x кг қотишманин $\frac{5}{x} \cdot 100 = \frac{500}{x}\%$ ини, 10 кг мис $(65-x)$ кг қотишманин $\frac{10}{65-x} \cdot$

$\times 100 = \frac{1000}{65-x}\%$ ини ташкил қилади. Масала шартига кўра тенглама тузамиз:

$\frac{1000}{65-x} - \frac{500}{x} = 5$. Тенглама ечилади. *Жавоб:* 25 (кг) ва 40 (кг). 621. Биринчи қотишмада $x\%$ мис бўлган. Иккинчи қотишмада $(x+40)\%$ мис бўлади. Би-

ринчи қотишманин оғирлиги $\frac{6 \cdot 100}{x}$ кг, иккинчисининг оғирлиги $\frac{12 \cdot 100}{x+40}$ кг. Янги эритмада 6 кг + 12 кг = 18 кг мис бўлиб, қотишманин 36% ини ташкил этса,

уни оғирлиги $\frac{18 \cdot 100}{36} = 50$ кг бўлади. Масала шартига кўра тенглама тузамиз:

$\frac{600}{x} + \frac{1200}{x+40} = 50$ ёки $\frac{12}{x} + \frac{24}{x+40} = 1$. *Жавоб:* 20% ва 60%. 622. 6 Г суюқ-

ликнинг солиштирма оғирлиги $d \text{ Г/см}^3$, ҳажми эса $\frac{6}{d} \text{ см}^3$. 8 Г суюқликнинг со-

лиштирма оғирлиги $(d+0,2) \text{ Г/см}^3$, ҳажми эса $\frac{8}{d+0,2} \text{ см}^3$. Аралашма 6 Г +

+ 8 Г = 14 Г бўлиб, ҳажми $\frac{14}{0,7} = 20 \text{ (см}^3\text{)}$. $\frac{d}{d+0,2} + \frac{6}{8} = 20$ ёки $50d^2 -$

$-25d - 3 = 0$. Илдишлар: $d_1 = 0,6$; $d_2 = -0,1$, $d_2 < 0$ масалага жавоб бўла олмайди. $d + 0,2 = 0,6 + 0,2 = 0,8$. *Жавоб:* 0,8 Г/см³ ва 0,6 Г/см³.

623. Суюқлик массалари $x \text{ кг}$ ва $(x+2) \text{ кг}$. Массаси оз суюқлик $\frac{96}{x}$ градусга,

массаси кўп суюқлик $\frac{64}{x+2}$ градусга исingan. $\frac{96}{x} - \frac{64}{x+2} = 8$. *Жавоб:* 6 кг ва

8 кг. 624. Биринчи марта $x \text{ л}$ спирт қуйиб олинган. Иккинчида $(20-x) \text{ л}$ спирт

қолган. Шундан сўнг иккинчидаги аралашманинг 1 л да $\frac{20-x}{20}$ л спирт бўлган.

Шундан сўнг қуйиб олинган $x \text{ л}$ аралашмада $\frac{20-x}{20} x \text{ л}$ спирт бўлган. Иккинчида

эса $20-x - \frac{20-x}{20} x$ литр спирт қолган ва бу, масала шартига кўра, $\frac{20}{1+3} =$

$= 5 \text{ (л)}$ ни ташкил этади. Масала шартига кўра: $20-x - \frac{20-x}{20} x = 5$ ёки

$x^2 - 40x + 300 = 0$. *Жавоб:* 10 л. 625. 96° ли биринчи хилдан $x \text{ л}$ олинган.

Иккинчи хилдан $(x+10) \text{ л}$ олинган бўлиб, $x+10+26=x+36$ градусли. Аралашма

$x+x+10=2x+10$ литр бўлиб 72° ли. Шартга кўра: $96x + (x+36)(x+10) =$

$= 72(2x+10)$. *Жавоб:* 20 л ва 30 л. 626. Иккинчидан сўнг $x \text{ л}$, 1 л спирт

қуйиб олинган, $x-1 \text{ л}$ спирт қолди. Иккинчи марта қуйиб олинган 1 л суюқ-

ликда $\frac{x-1}{x} \text{ л}$ спирт бор эди. Иккинчида $x-1 - \frac{x-1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \text{ л}$ спирт қол-

ди. Иккинчида қолган $\frac{(x-1)^2}{x} \text{ л}$ спирт 92° ли бўлиб, қуйиб олинган бўлган, ара-

лашмадаги спирт 69° ли бўлиб қолди. $\frac{(x-1)^2}{x} \cdot 92 = 69x$; $23x^2 - 184x + 92 = 0$;

$x_1 = 4 + 2\sqrt{3}$, $x_2 = 4 - 2\sqrt{3}$. *Жавоб:* $(4 + 2\sqrt{3}) \text{ л}$. 627. Соат x сўм тура-

ди. x сўмнинг $x\%$ ни $\frac{x}{100} \cdot x = \frac{x^2}{100}$; $x + \frac{x^2}{100} = 31,25$. *Жавоб:* 25 сўм. 628. 18

км/соат ва 24 км/соат. 629. $x \text{ т}$ дан юк тортувчи $\frac{15}{x}$ та машина юбонилган,

$(x+0,5) \text{ т}$ дан юк тортувчи $\frac{15}{x+0,5}$ та машина сўралган эди. Шартга кўра

$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+0,5} = 1$. *Жавоб:* 2,5 т. 630. Изланувчи сон $n(n+1)(n+2)$. Бу

сонни n га бўлганда бўлишма $(n+1)(n+2)$ га тенг; $n+1$ га бўлганда бўли-

шма $n(n+2)$ га, $n+2$ га бўлганда эса $n(n+1)$ га тенг. $(n+1)(n+2) + (n+2)n + n(n+1) = 74$; $n_1 = 4$; $n_2 = -4$; $n = 4$; $n+1 = 5$; $n+2 = 6$; $n = -6$;

$n+1 = -5$; $n+2 = -4$; $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$. $(-6) \cdot (-5) \cdot (-4) = -120$. *Жавоб:* 120 ёки -120. 631. x ни айирсақ; $100-x$, 50+x, 40. Пропорция тузилса

тезлик билан юради ва биринчисини $\frac{25}{x-50}$ соатда қувиб етади, иккинчисидан соатига $(x-40)$ км ортиқ тезлик билан юради ва иккинчисини $\frac{20}{x-40}$ соатда

қувиб етади. Шартга кўра: $\frac{25}{x-50} - \frac{20}{x-40} = \frac{3}{2}$. *Жавоб:* 60 км/соат. 633.

Қўпбурчакнинг томонлари сони x та, ҳар бир учидан $(x-3)$ та диагонал ўтказиш мумкин. Битта диагонал иккита уч орқали ўтгани учун барча диагоналлари сони $\frac{x(x-3)}{2}$ та бўлади. Шартга кўра: $x + \frac{x(x-3)}{2} = 15$. *Жавоб:* 6 та. 634.

6 соат ва 4 соат. 635. Кейинги ғилдирак 36 метрда x марта, олдингиси $(x+6)$ марта айлансин. Олдинги ғилдирак айланасининг узунлиги $\frac{36}{x+6}$ метр, кейингисиники $\frac{36}{x}$ м. Олдинги ғилдирак айланасининг узунлиги $(\frac{36}{x+6} + 1)$ метр бўлса,

36 м да $\frac{36}{\frac{36}{x+6} + 1}$ марта айланади; кейинги ғилдирак узунлиги $(\frac{36}{x} + 1)$ метр бўлса, 36 м да $\frac{36}{\frac{36}{x} + 1}$ марта айланади. Масала шартига кўра: $\frac{36}{\frac{36}{x+6} + 1} - \frac{36}{\frac{36}{x} + 1} = 3$. *Жавоб:* 2 м ва 3 м. 636. Мотоциклчи олдин соатига v км тезликда, кейин эса соатига $(v+8)$ км тезликда юрган. Олдин 8 км ни $\frac{8}{v}$ соатда, кейин яна 8 км ни $\frac{8}{v+8}$ соатда юрган ва йўлга $\frac{8}{v} + \frac{8}{v+8}$ соат сарф қилган. Ҳамма йўлни соатига $(v+8)$ км тезликда юрса, $\frac{16}{v+8}$ соат сарфлар эди.

Шартга биноан: $\frac{8}{v} + \frac{8}{v+8} - \frac{16}{v+8} = \frac{1}{12}$. *Жавоб:* 24 км/соат. 637. Тунуканинг ўлчамлари x см ва $(x+10)$ см. Қути асосининг томонлари $(x-10)$ см ва $(x+10) - 10 = x$ см, баландлиги 5 см, ҳажми $5(x-10)x = 1000$ см³ (1 дм³ = 1000 см³). *Жавоб:* 2 дм ва 3 дм. 638. 1-усул. Поезд бутун йўлни x соатда босиши керак эди; йўл ярмини соатига $\frac{840}{x}$ км тезликда юрган; кейин соатига $(\frac{840}{x} + 2)$ км тезлик билан йўлнинг ярмини $\frac{420}{\frac{840}{x} + 2} = \frac{210x}{420+x}$ соатда

ўтади. Йўлнинг биринчи ярмини $\frac{x}{2}$ соатда юрган эди. Шунга кўра: $\frac{210x}{420+x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Тенгламани ечсак, $x = 21$ соат эканини топамиз. 2-усул. Поездининг олдинги тезлиги соатига x км, кейинги тезлиги соатига $(x+2)$ км. 420 км ни $\frac{420}{x}$ соатда, қолган 420 км ни $\frac{420}{x+2}$ соатда юради. Шунга кўра: $\frac{420}{x} - \frac{420}{x+2} = \frac{1}{2}$. Тенгламани ечсак, $x = 40$ км/соат; поезд ҳамма йўлни юриш учун $\frac{840}{40} = 21$ соат вақт сарф қилган. 3-усул. Поезд йўлнинг биринчи ярми-

ни соатда, иккинчи ярмини $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ соатда юрган. Поездиниڭ йўلнинг би-
ринчи ярмидаги тезлиги соатига $\frac{420}{x}$ км, иккинчи ярмидаги тезлиги соатига
 $\frac{420}{x - \frac{1}{2}} = \frac{840}{2x - 1}$ км, $\frac{840}{2x - 1} - \frac{420}{x} = 2$. Тенгламани ечиб $x = 10,5$ соат, $2x = 21$

соат экани аниқланади. **Жавоб:** 21 соат. **639.** а) Томонлари кетма-кет бутун
сонлар: $x, x + 1, x + 2$ бўлсин. У ҳолда x ва $(x + 1)$ катетлар, $(x + 2)$ эса ги-
потенуза бўлади. $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$; $x_1 = 3$; $x_2 = -1$ ($x_2 = -1 < 0$ масала-
га жавоб бўла олмайди). $x = 3$; $x + 1 = 4$; $x + 2 = 5$. Томонлари кетма-кет
бутун сонлар 3, 4, 5 билан ифодаланган тўғри бурчакли учбурчак бўлади;
б) томонлари кетма-кет жуфт сонлар: $2x, 2x + 2, 2x + 4$ бўлсин. У ҳолда:
 $(2x)^2 + (2x + 2)^2 = (2x + 4)^2$; $x = 3$; $2x = 6$; $2x + 2 = 8$; $2x + 4 = 10$. Томонлари
кетма-кет жуфт сонлар 6, 8, 10 билан ифодаланган тўғри бурчакли учбурчак
бўлади. в) Томонлари кетма-кет тоқ сонлар: $2x + 1$; $2x + 3$; $2x + 5$ билан ифо-

далансин. $(2x + 1)^2 + (2x + 3)^2 = (2x + 5)^2$; $x_1 = \frac{5}{2}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$. x натурал сон
бўлиб чиқмади. Демак, томонлари кетма-кет тоқ сонлар билан ифодаланган
тўғри бурчакли учбурчак мавжуд эмас. **640.** Биринчи (A дан чиққан) автомо-
билнинг тезлиги соатига x км, иккинчисиники соатига $(x + 12)$ км. Биринчи
автомобиль иккинчиси йўлга чиққунча $2x$ км йўл юрган. Иккинчи автомобиль
йўлга чиққандан кейин учрашгунча 108 км, биринчиси эса $276 - (2x + 108)$
км юрган. Бу йўللارни иккинчиси $\frac{108}{x + 12}$ соатда, биринчиси $\frac{276 - (2x + 108)}{x}$

соатда юрган бўлиб, юрган вақтлари бир-бирига тенг. $\frac{276 - (2x + 108)}{x} = \frac{108}{x + 12}$.

Жавоб: 42 км/соат, 54 км/соат. **641.** Тош t минутда шахта остига тушган ва
 $s = \frac{gt^2}{2}$ м масофани ўтган. Товуш шахта остидан $(4 - t)$ секундда $330(4 - t)$ м

масофани ўтиб чиққан. $\frac{gt^2}{2} = 330(4 - t)$; $t \approx 3,78$ сек; $4 - t \approx 0,22$ сек; $s \approx$

$\approx 330 \cdot 0,22 = 72,6$ (м). **Жавоб:** $\approx 72,6$ м. **642.** t секунддан кейин жисм ердан

300 м баландликда бўлган. $300t - \frac{10t^2}{2} = 2500^*$ ёки $t^2 - 60t + 500 = 0$. $t_1 = 10$,

$t_2 = 50$. **Жавоб:** 10 сек ва 50 сек. **643.** Бригадиниڭ план бўйича 1 кунда тери-
ши лозим бўлган пахтаси x (т), биринчи уч кун ичида терган пахтаси $3x$ (т).

Қолган кунлари терган пахтаси $(x + 8)$ (т) дан. Бригада план бўйича $\frac{216}{x}$ кун

ишларни керак эди. $(x + 8)$ т дан пахта териб, $\frac{232 - 3x}{x + 8}$ кун ишлади. Ма-

сала шартига кўра: $3 + \frac{232 - 3x}{x + 8} + 1 = \frac{216}{x}$ ёки $\frac{232 - 3x}{x + 8} + 4 = \frac{216}{x}$. **Жавоб:**

24 тонна. **644.** Саноқ системасиниڭ асоси x бўлсин. Саноқ системасиниڭ асоси
 x бўлса, 543 ни $5x^2 + 4x + 3$ кўرىنىشىда, 431 ни $4x^2 + 3x + 1$ кўرىنىشىда ёزىش
мумкин. $(5x^2 + 4x + 3) - (4x^2 + 3x + 1) = 44$ ёки $x^2 + x - 42 = 0$. **Жавоб:** 6 лик
системада. **645.** 8 лик системада. **646.** Дастлаб биринчи идишда x л,
иккинчи идишда $(30 - x)$ л спирт бўлган. Биринчи идишга сув қўйилгач, 1 л

аралашмада $\frac{x}{30}$ л спирт бўлади. Бу аралашмадан иккинчи идишга x л қۇшилса

*) Юқорига (осмонга) отилган жисмининڭ юрган йўلى $s = vt - \frac{gt^2}{2}$ формула-
дан аниқланади (v — бошланغич тезлик).

(чунки иккинчи идишда x л ли бўш жой бор эди), бу аралашма таркибида $\frac{x}{30} \cdot x = \frac{x^2}{30}$ л спирт бўлади ва иккинчи идишдаги $(30 - x)$ л спирт билан бирга $(30 - x + \frac{x^2}{30})$ л бўлади. Иккинчи идишдаги аралашманинг 1 л да $(30 - x + \frac{x^2}{30}) : 30 = 1 - \frac{x}{30} + (\frac{x}{30})^2$ литрдан спирт бўлади. Иккинчи идишдан биринчисига 12 л аралашма олиб қуйилса, бу аралашмада $12 \left[1 - \frac{x}{30} + (\frac{x}{30})^2 \right]$ л спирт бўлиб, биринчи идишдаги $(x - \frac{x^2}{30})$ л спирт билан бирга $(x - \frac{x^2}{30} + 12 \left[1 - \frac{x}{30} + (\frac{x}{30})^2 \right])$ л бўлади. Иккинчи идишдан 12 л аралашмани биринчисига қуйилгач, унда 18 л аралашма қолди, бу аралашма таркибида $18 \left[1 - \frac{x}{30} + (\frac{x}{30})^2 \right]$ л спирт бўлади. Масала шартига кўра; у биринчи идишдаги спиридан ? л кам. Демак: $18 \left[1 - \frac{x}{30} + (\frac{x}{30})^2 \right] + 2 = (x - \frac{x^2}{30} + 12 \left[1 - \frac{x}{30} + (\frac{x}{30})^2 \right])$ ёки $6 \left[1 - \frac{x}{30} + (\frac{x}{30})^2 \right] + 2 = (x - \frac{x^2}{30})$; $x^2 - 30x + 200 = 0$. *Жавоб:* 20 л ва 10 л.

647. Хабарчининг тезлиги соатига x км. Хабарчи колона охиридан олдига юргандаги колоннага нисбатан тезлиги соатига $(x - v)$ км, олдидан охирига юргандигиси эса соатига $(x + v)$ км. Хабарчи олдинга боришга $\frac{d}{x - v}$ соат, орқага қайтишга $\frac{d}{x + v}$ соат сарфлайди. t минут $= \frac{t}{60}$ соат. $\frac{d}{x - v} + \frac{d}{x + v} = \frac{t}{60}$ ($x \neq v$).
Жавоб: $\frac{60d + \sqrt{3600d^2 + v^2 t^2}}{t}$ км/соат.

648. Изланувчи сон x^2 , унлар хонасидаги ва минглар хонасидаги рақами a , бирликлари b , юзликлари $(b + 1)$ бўлсин. У ҳолда $x^2 = 1000a + 100(b + 1) + 10a + b$ ёки $x^2 = 1010a + 101b + 100$; $(x - 10)(x + 10) = 101(10a + b)$. Охириги тенгликнинг ўнг қисми 101 га бўлингани учун чап қисми ҳам 101 га бўлинади. 101 туб сон бўлганидан $(x + 10)$ ва $(x - 10)$ лардан бири 101 га бўлиниши керак. x^2 тўрт хонали сон бўлгани учун, x икки хонали сон бўлиб, $x - 10$ ни 101 га бўлиниши мумкин эмас. Демак, $x + 10$ сони 101 га бўлинади, $x + 10 \leq 109$ бўлгани учун: $x + 10 = 101$; $x = 91$. *Жавоб:* 8281 = 91². 649. 1) $x \neq 2$, 2) ва 4) ечимга эга эмас; 3) ҳар қандай сон. 651. 1) Ихтиёрий сон, 2) ечимга эга эмас, 3) ечимга эга эмас, 4) $x \neq -5$. 654. 1) $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$; 2) $x < \frac{1}{2}$ ва $x > \frac{5}{2}$. 655. 1) Ихти-

ёрий сон, 2) $|x| < \frac{\sqrt{b}}{3}$; 3) ечимга эга эмас. 656. $3x^2 - 11x + 3 < x^2 - 3x + 3$ ёки $x^2 - 4x < 0$ тенгсизлиكنи ечсак: $0 < x < 4$. Бу оралиқда 3 та бутун сон (1, 2 ва 3) бор. *Жавоб:* 1, 2 ва 3. 657. 1) $x < -2$ в: $x > 3$; 2) ечимга эга эмас. 658. 1) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 2) Ноль ва 1 дан бошқа барча бутун сонлар. 659. 1) Қасрнинг сурат ва махражидagi ифодаларнинг ишораси ҳар хил бўлганидан тенгсизлик уринли бўлади. Бироқ x нинг ҳар қандай қийматида ҳам $x^2 \geq 0$ ва $x^2 + 1 > 0$ бўлгани учун, x нинг ҳеч қандай қийматида тенгсизлик ўринли бўлмайди. Тенгсизлик ечимга эга эмас. 2) 1-усул. $5x^2 + 4$ ва $1 + x^2$ ифодалар x нинг ҳар қандай қийматида ҳам мусбат бўлганидан $\frac{5x^2 + 4}{1 + x^2}$ ҳам доим мусбат бўлади, шу сабабли -3 дан катта бўлади. 2-усул. $1 + x^2$ ифода

x нинг ҳар қандай қийматида ҳам мусбат бўлгани учун, тенгсизлиқнинг икки томонини шу мусбат ифодага кўпайтирамиз: $5x^2 + 4 > -3 - 3x^2$; $8x^2 + 7 > 0$. Бу тенгсизлик x нинг ҳар қандай қийматида ҳам ўрнқлидир. 3) x нинг ҳар қандай қийматида: $x^2 + 1 > 0$; $x \neq 0$ бўлса, $x^2 > 0$ бўлганидан $x \neq 0$ бўлса, $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} > 0$ бўлади. **Жавоб:** 1) ечимга эга эмас; 2) x — ихтиёрий сон; 3) $x \neq 0$.

561. 1) $-1 < x < 2$; 2) $x \neq 2$. 662. $\frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + 2x^2 - 3x} - 1 = \frac{x^3 + 2x^2 + x - x^3 - 2x^2 + 3x}{x^3 + 2x^2 - 3x} =$

$= \frac{4x}{x^3 + 2x^2 - 3x}$; $\frac{4x}{x(x^2 + 2x - 3)} < 0$; а) $x > 0$ бўлса, $\frac{4}{x^2 + 2x - 3} < 0$ ёки $x^2 + 2x - 3 < 0$; ечими $-3 < x < 1$; $x > 0$ ва $-3 < x < 1$ шартларни қаноатлантирадиган сонлар $0 < x < 1$; б) $x < 0$ бўлса, $\frac{4}{x^2 + 2x - 3} > 0$ ёки $x^2 + 2x - 3 > 0$ ечими $x < -3$ ва $x > 1$; $x < 0$ ҳамда $x < -3$ ва $x > 1$ шартларини қаноатлантирадиган сонлар $x < -3$. **Жавоб:** $x < -3$ ва $0 < x < 1$. 663. 1)

1) $|x| < 1$; 2) $|x| > \sqrt{10,25}$. 664. 1) $|x| > 4$ ёки $x < -4$ ва $x > 4$; 2) $|x| < 1$. 665. **Кўрсатма.** 2) $\frac{x^2 - 2x}{x(x-1)^2} < 0$; $x \neq 1$ бўлса, $9(x-1)^2 > 0$. У ҳолда $x^2 - 2x < 0$; $x(x-2) < 0$ тенгсизлиқни ечсак, $0 < x < 2$. $x \neq 1$ эканини эътиборга олсак, $0 < x < 1$ ва $1 < x < 2$ (33- чизмага қаранг). **Жавоб:** 1) $|x| < 0,2$; 2) $0 < x < 1$ ва $1 < x < 2$. 666. **Кўрсатма.** 2) $\sqrt{3x-5} = 5 - 7 = -2$;

$\sqrt{3x-5} = -2$. x нинг ҳар қандай қийматида $\sqrt{3x-5} \geq 0$ бўлгани учун бу ифоданинг -2 га тенг бўлиши мумкин эмас. Демак, берилган тенглама илдиизга эга эмас. 4) x нинг ҳар қандай қийматида ҳам $\sqrt{-x^2-1}$ мавжуд эмас, яъни тенглама илдиизга эга эмас. 667. **Кўрсатма.** 4) $\sqrt{0,25 + 2x} - \sqrt{4(0,25 + 2x)} + \sqrt{9(0,25 + 2x)} = 2$. $\sqrt{0,25 + 2x} - 2\sqrt{0,25 + 2x} + 3\sqrt{0,25 + 2x} = 2$; $\sqrt{0,25 + 2x} = 1$. Тенглиқнинг ҳар икки қисмини квадратга кўтарсак $0,25 + 2x = 1$; $x = \frac{3}{8}$. **Жавоб:** 1) 1; 2) 5; 3) $-48,5$; 4) $\frac{3}{8}$. 668. **Кўрсатма.** 3) 1- усул. Тенгламанинг ҳар икки қисмини квадратга кўтарамиз: $x^2 - 2x + 1 = 25$; $x^2 - 2x - 24 = 0$; $x_1 = -4$; $x_2 = 6$. 2- усул. $\sqrt{(x-1)^2} = 5$; $|x-1| = 5$; $x-1 = \pm 5$, а) $x-1 = 5$; $x_1 = 6$; б) $x-1 = -5$; $x_2 = -4$. **Жавоб:** 1) 4; 2) 3; 3) -4 ва 6; 4) ± 3 ва $\pm \sqrt{7}$. 669. **Кўрсатма:** 2) 1- дан: $x - 2 \geq 0$ бўлиши, 2- дан: $2x + 4 \geq 0$ бўлиши, 3- дан: $x + 2 \geq 0$ бўлиши керак.



33 чизма.

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ 2x + 4 \geq 0, \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасини ечсак: $x \geq 2$ (олдинги тенгсизликлар системасидаги 2- ва 3- тенгсизликлар тенг кучли бўлгани учун, улардан биттасини ёзиш билан иккинчи система ҳосил қилинди). Энди берилган тенгламани ечамиз 1- усул. Берилган тенгламанинг ҳар икки қисмини квадратга кўтарсак: $(x-2)(2x+4) = (x+2)^2$; $(x+2)[2(x-2) - (x+2)] = 0$; $(x+2)(x-6) = 0$; $x_1 = 6$; $x_2 = -2$. 2- усул. $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{2(x+2)} - \sqrt{(x+2)^2} = 0$; $\sqrt{x+2}(\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+2}) = 0$. а) $\sqrt{x+2} = 0$; $x+2 = 0$; $x_1 = -2$; б) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+2} = 0$; $\sqrt{2x-4} = \sqrt{x+2}$; $2x-4 = x+2$; $x_2 = 6$, $x_2 = 6, x_2 \geq 2$ шартини қаноатлантиргани учун берилган тенгламанинг илдииз бўлади; $x_1 = -2$ эса илдииз бўла олмайди. **Жавоб:** 1) 5; 2) 6. 670. **Кўрсатма.** 2) 1- усул. Тенгламанинг ҳар икки қисмини квадратга кўтарсак: $1 - x^2 = 3x + 3$ ёки $x^2 + 3x + 2 = 0$;

$x_1 = -1$; $x_2 = -2$. 2-усул. $\sqrt{x+1}(\sqrt{1-x}-\sqrt{3})=0$; $\sqrt{x+1}=0$;
 $x_1=-1$; $\sqrt{1-x}-\sqrt{3}=0$; $1-x=3$; $x_2=-2$. Топилган қийматлар тенг-
 ламанинг илдизи бўла оладими, деган сўроққа жавоб бериш учун $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$

системани ечамиз. 1- тенгсизликдан: $|x| < 1$, иккинчисидан $x > -1$. Тенгсизлик-
 лар системасининг ечми $|x| < 1$ ёки $-1 < x < 1$. Бу шартни $x_1 = -1$ қаноатлан-
 тиргани учун берилган тенгламанинг илдизи бўлади. x эса илдиз бўла олмайди.
 Жавоб: 1) -2 ва 3 , 2) -1 . 671. *Кўрсатма.* 1) $\sqrt{5x+20}-\sqrt{x+8}=2$. 1-дан:
 $5x+20 \geq 0$ бўлиши; 2-дан $8+x \geq 0$ бўлиши, 3-дан $\sqrt{5x+20} \geq 2$ ёки $5x+20 \geq 4$
 бўлиши керак. Бу учта тенгсизликлар системасини ечсак, $x \geq -3,2$. Демак,
 тенглама илдизи $x \geq -3,2$ шартини қаноатлантириши керак. Берилган тенгла-
 мани $\sqrt{5x+20}=2+\sqrt{x+8}$ кўринишида ёзиб, ҳар икки қисмини квадратга
 кўтарсак: $5x+20=4+4\sqrt{x+8}+x+8$. Соддалаштирсак $x+2=\sqrt{x+8}$,
 яна тенгликнинг ҳар икки қисмини квадратга кўтарсак: $x^2+4x+4=x+8$.
 Соддалаштирсак: $x^2+3x-4=0$. Бундан $x_1=-4$, $x_2=1$; $x_1=-4$ илдиз
 бўла олмайди (чунки $x \geq -3,2$ шартини қаноатлантирмайди). Жавоб: 1) 1;
 2) 1,5. 672. *Кўрсатма.* 2) 1-дан: $3x+1 \geq 0$ бўлиши, 2-дан $5x-4 \geq 0$ бўлиши,
 3-дан $4x-3 \geq 0$ бўлиши, 4-дан $\sqrt{3x+1} \geq \sqrt{5x-4}$ ёки $3x+1 \geq 5x-4$ бўли-
 ши; 5-дан $\sqrt{3x+1} \geq \sqrt{4x-3}$ ёки $3x+1 \geq 4x-3$ бўлиши керак.

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0, \\ 5x-4 \geq 0, \\ 4x-3 \geq 0, \\ 3x+1 \geq 5x-4, \\ 3x+1 \geq 4x-3. \end{cases}$$

Бу тенгсизликлар системасининг ечми: $\frac{4}{5} < x < 2,5$. Берилган тенгламанинг
 ҳар икки қисмини квадратга кўтарсак:

$$\begin{aligned} 3x+1 &= 5x-4+2\sqrt{(5x-4)(4x-3)}+4x-3; \\ 8-6x &= 2\sqrt{20x^2-31x+12}; 20x^2-31x+12=(4-3x)^2; \\ 20x^2-31x+12 &= 16-24x+9x^2; 11x^2-7x-4=0; x_1=1; \\ x_2 &= -\frac{4}{11}. \end{aligned}$$

$x_2 = -\frac{4}{11}$ илдиз бўла олмайди, чунки $\frac{4}{5} < x < 2,5$ шартини қаноатлантирмайди.

Жавоб: 1) 1; 2) 1. 673. *Кўрсатма.* 2) $x^3-4\sqrt{x^3}-32=0$; $\sqrt{x^3}=y$; $x^3=y^2$
 билан белгиласак: $y^2-4y-32=0$. Жавоб: 1) 1 ва 4; 2) 4. 674. *Кўрсатма.*
 2) 1-усул. Тенгламани $4(x-1)-\sqrt{x-1}+1=0$ кўринишида ёзиб, $\sqrt{x-1}=y$
 $y \geq 0$; $x-1=y^2$ билан белгилаймиз. 2-усул. $(5\sqrt{x-1})^2=(4x-3)^2$ тенг-
 лама ечилади, топилган қийматлар текширилади. Жавоб: 1) 5; 2) 2 ва 1 $\frac{1}{16}$.

675. 2. 676. -3 677. $\sqrt{x} \geq 0$ ёки $x \geq 0$; $5+\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}\sqrt[3]{(5+\sqrt{x})(4-\sqrt{x})} \cdot 3 =$
 $= 27$. Соддалаштирсак: $x+\sqrt{x}-12=0$; $\sqrt{x}=y$; $y^2+y-12=0$; $y_1=3$;
 $y_2=-4$; а) $\sqrt{x}=3$; $x=9$; б) $\sqrt{x}=-4$. Бу тенглама илдизга эга эмас
 (чунки, $\sqrt{x} \geq 0$). Жавоб: 9. 678. 1-усул. $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$
 формулага кўра: $(x+1)^3+8(x-1)^2+6\sqrt[3]{(x^2-1)^2} \cdot 3\sqrt[3]{x^2-1}=27(x^2-1)$;

$(x+1)^2 + 8(x-1)^2 + 18(x^2-1) = 27(x^3-1)$ соддалаштириб ечилади.

2- у с у л. Тенгламанинг барча ҳадларини $\sqrt[3]{x^2-1} \neq 0$ ($x \neq \pm 1$) га бўламиз.

У ҳолда: $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + 2\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} = 3$; $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = y$; $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{y}$ деб бел-

гиласак: $y + \frac{2}{y} = 3 \dots$ *Жавоб:* $\frac{9}{7}$, 679, -1 ва 5, 680, $\frac{1}{2}$ ва 5, 681.

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sqrt{1+x} = \sqrt{1+x} - \sqrt{1+\sqrt{x}}$; $\sqrt{x} (\sqrt{1+\sqrt{x}} - \sqrt{1+x}) + (\sqrt{1+\sqrt{x}} - \sqrt{1+x}) = 0$. $(\sqrt{x+1})(\sqrt{1+\sqrt{x}} - \sqrt{1+x}) = 0$.

а) $\sqrt{x+1} = 0$. Бу тенглама ялғизга эга эмас; б) $\sqrt{1+\sqrt{x}} = \sqrt{1+x}$; $1 + \sqrt{x} = 1 + x$; $x^2 - x = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. *Жавоб:* 0 ва 1, 682. *Қўрсатма.* 1) $\sqrt[3]{x} = y$;

$\sqrt[3]{x^2} = y^2$ белгиласак, $y^2 - 3y - 4 = 0$; $y_1 = -1$; $y_2 = 4$; а) $\sqrt[3]{x} = -1$; $x_1 = -1$; б) $\sqrt[3]{x} = 4$; $x_2 = 64$. *Жавоб:* 1) -1 ва 64; 2) -8 ва 27, 683. 1) ± 2 ;

2) ± 1 , 684. *Қўрсатма.* 1) $x^2 - 3x + 5 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 7 + 5$; $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = y$, $x^2 - 3x + 5 = y^2$ деб белгиласак: $y^2 + y - 12 = 0$. Бундан: $y_1 = 3$, $y_2 = -4$.

Ўрнига қўйсак: а) $\sqrt{x^2 - 3x + 4} = 3$; б) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = -4$. Бу тенгламалардан биринчисини ечсак: $x_1 = 4$; $x_2 = -1$. Иккинчисини ечимга эга эмас. *Жавоб:* 1) -1 ва 4; 2) -5 ва 2, 685. 1) -3; 2) 0 ва $\pm \sqrt{3}$, 686. 3. 687. $(x - 2)^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 = 0$. *Жавоб:* 2, 688. 2. 689. 1- дан: $2x - 1 \geq 0$; $x \geq \frac{1}{2}$;

2- дан: $x > 0$, булардан эса $x \geq \frac{1}{2}$; $(\sqrt{2x-1})^2 = \sqrt{x}$ ни квадратга кўтарсак:

$4x^2 - 4x + 1 = x$ ёки $4x^2 - 5x + 1 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{4}$. *Жавоб:* 1, 690. ± 2 .

691. $\pm \frac{1}{2}$. 692. $\frac{25}{16}$. 693. ± 27 . 694. $(\pm \sqrt{2})$. 695. $\sqrt{(1-x)(1+x)^2} - \sqrt{(1+x)(1-x)^2} = 0$. $\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = 0$. *Жавоб:* 0 ва ± 1 .

696. 2. 697. 9. 698. $3x^2 + 5x + 1 = y$ деб белгиласак: $\sqrt{y+7} - \sqrt{y} = 1$ тенгламани ечсак $y = 9$. y нинг қийматини ўрнига қўйсак: $3x^2 + 5x + 1 = 9$ ёки $3x^2 + 5x - 8 = 0$. Тенглама ечилади. *Жавоб:* 1 ва $-\frac{8}{3}$. 699. x нинг ҳар қандай қийматида $2x^2 + 3x - 4 < 2x^2 + 3x + 1$ бўлгани учун тенгламанинг чап қисми манфий сон бўлади ва унинг 7 га тенг бўлиши мумкин эмас. *Жавоб:* тенглама ялғизга эга эмас. 700. -3 ва 6. 701. $\sqrt{2x-5} = y$ билан белгиласак:

$2x - 5 = y^2$, бундан $x = \frac{y^2 + 5}{2}$. x нинг қийматини ўрнига қўйиб соддалаштирсак: $\sqrt{y^2 + 2y + 1} + \sqrt{y^2 + 6y + 9} = 14$ ёки $(y+1) + (y+3) = 14$. Бундан $y = 5$. y нинг қиймати ўрнига қўйилади. *Жавоб:* 15, 702. ± 3 . 703. $\frac{3}{4}$. 704. 2

ва $-\frac{8}{11}$. 705. $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} = z$; $\sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}} = \frac{1}{z}$ деб белгилаш керак. *Жавоб:* 5 ва $-\frac{30}{127}$. 706. $x = 16$. 707. $\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} - \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x-1}} = 12$; $\frac{(\sqrt[3]{x^2-1})(\sqrt[3]{x^2+1})}{\sqrt[3]{x^2-1}} - \frac{(\sqrt[3]{x-1})(\sqrt[3]{x+1})}{\sqrt[3]{x-1}} = 12$. Агар $\sqrt[3]{x^2-1} \neq 0$; $\sqrt[3]{x^2} \neq 1$; $x^2 \neq 1$; $x \neq \pm 1$ бўлса,

касларни қисқартириш мумкин, яъни: $\sqrt[3]{x^2+1} - (\sqrt[3]{x+1}) = 12$; $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} - 12 = 0$; $\sqrt[3]{x} = y$; $\sqrt[3]{x^2} = y^2$ деб белгиласак, $y^2 - y - 12 = 0$. *Жавоб:* 1) -1 ва 4; 2) -5 ва 2, 685. 1) -3; 2) 0 ва $\pm \sqrt{3}$, 686. 3. 687. $(x - 2)^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 = 0$. *Жавоб:* 2, 688. 2. 689. 1- дан: $2x - 1 \geq 0$; $x \geq \frac{1}{2}$;

2- дан: $x > 0$, булардан эса $x \geq \frac{1}{2}$; $(\sqrt{2x-1})^2 = \sqrt{x}$ ни квадратга кўтарсак:

$4x^2 - 4x + 1 = x$ ёки $4x^2 - 5x + 1 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{4}$. *Жавоб:* 1, 690. ± 2 .

691. $\pm \frac{1}{2}$. 692. $\frac{25}{16}$. 693. ± 27 . 694. $(\pm \sqrt{2})$. 695. $\sqrt{(1-x)(1+x)^2} - \sqrt{(1+x)(1-x)^2} = 0$. $\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = 0$. *Жавоб:* 0 ва ± 1 .

696. 2. 697. 9. 698. $3x^2 + 5x + 1 = y$ деб белгиласак: $\sqrt{y+7} - \sqrt{y} = 1$ тенгламани ечсак $y = 9$. y нинг қийматини ўрнига қўйсак: $3x^2 + 5x + 1 = 9$ ёки $3x^2 + 5x - 8 = 0$. Тенглама ечилади. *Жавоб:* 1 ва $-\frac{8}{3}$. 699. x нинг ҳар қандай қийматида $2x^2 + 3x - 4 < 2x^2 + 3x + 1$ бўлгани учун тенгламанинг чап қисми манфий сон бўлади ва унинг 7 га тенг бўлиши мумкин эмас. *Жавоб:* тенглама ялғизга эга эмас. 700. -3 ва 6. 701. $\sqrt{2x-5} = y$ билан белгиласак:

$2x - 5 = y^2$, бундан $x = \frac{y^2 + 5}{2}$. x нинг қийматини ўрнига қўйиб соддалаштирсак: $\sqrt{y^2 + 2y + 1} + \sqrt{y^2 + 6y + 9} = 14$ ёки $(y+1) + (y+3) = 14$. Бундан $y = 5$. y нинг қиймати ўрнига қўйилади. *Жавоб:* 15, 702. ± 3 . 703. $\frac{3}{4}$. 704. 2

ва $-\frac{8}{11}$. 705. $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} = z$; $\sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}} = \frac{1}{z}$ деб белгилаш керак. *Жавоб:* 5 ва $-\frac{30}{127}$. 706. $x = 16$. 707. $\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} - \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x-1}} = 12$; $\frac{(\sqrt[3]{x^2-1})(\sqrt[3]{x^2+1})}{\sqrt[3]{x^2-1}} - \frac{(\sqrt[3]{x-1})(\sqrt[3]{x+1})}{\sqrt[3]{x-1}} = 12$. Агар $\sqrt[3]{x^2-1} \neq 0$; $\sqrt[3]{x^2} \neq 1$; $x^2 \neq 1$; $x \neq \pm 1$ бўлса,

касларни қисқартириш мумкин, яъни: $\sqrt[3]{x^2+1} - (\sqrt[3]{x+1}) = 12$; $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} - 12 = 0$; $\sqrt[3]{x} = y$; $\sqrt[3]{x^2} = y^2$ деб белгиласак, $y^2 - y - 12 = 0$. *Жавоб:* 1) -1 ва 4; 2) -5 ва 2, 685. 1) -3; 2) 0 ва $\pm \sqrt{3}$, 686. 3. 687. $(x - 2)^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 = 0$. *Жавоб:* 2, 688. 2. 689. 1- дан: $2x - 1 \geq 0$; $x \geq \frac{1}{2}$;

2- дан: $x > 0$, булардан эса $x \geq \frac{1}{2}$; $(\sqrt{2x-1})^2 = \sqrt{x}$ ни квадратга кўтарсак:

$4x^2 - 4x + 1 = x$ ёки $4x^2 - 5x + 1 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{4}$. *Жавоб:* 1, 690. ± 2 .

691. $\pm \frac{1}{2}$. 692. $\frac{25}{16}$. 693. ± 27 . 694. $(\pm \sqrt{2})$. 695. $\sqrt{(1-x)(1+x)^2} - \sqrt{(1+x)(1-x)^2} = 0$. $\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = 0$. *Жавоб:* 0 ва ± 1 .

696. 2. 697. 9. 698. $3x^2 + 5x + 1 = y$ деб белгиласак: $\sqrt{y+7} - \sqrt{y} = 1$ тенгламани ечсак $y = 9$. y нинг қийматини ўрнига қўйсак: $3x^2 + 5x + 1 = 9$ ёки $3x^2 + 5x - 8 = 0$. Тенглама ечилади. *Жавоб:* 1 ва $-\frac{8}{3}$. 699. x нинг ҳар қандай қийматида $2x^2 + 3x - 4 < 2x^2 + 3x + 1$ бўлгани учун тенгламанинг чап қисми манфий сон бўлади ва унинг 7 га тенг бўлиши мумкин эмас. *Жавоб:* тенглама ялғизга эга эмас. 700. -3 ва 6. 701. $\sqrt{2x-5} = y$ билан белгиласак:

$2x - 5 = y^2$, бундан $x = \frac{y^2 + 5}{2}$. x нинг қийматини ўрнига қўйиб соддалаштирсак: $\sqrt{y^2 + 2y + 1} + \sqrt{y^2 + 6y + 9} = 14$ ёки $(y+1) + (y+3) = 14$. Бундан $y = 5$. y нинг қиймати ўрнига қўйилади. *Жавоб:* 15, 702. ± 3 . 703. $\frac{3}{4}$. 704. 2

воб: 64 ва -27 . 708. $(x-2) + (\sqrt{x+2}) + (\sqrt{x+3}) = 51$ ($x \neq -2$; $x \neq 4$ ва $x \neq 9$ бўлса) $2\sqrt{x} = 48 - x$; $48 - x > 0$ ёки $x < 48$ бўлса; $4x = (48 - x)^2$, соддалаштирсак: $x^2 - 100x + 48^2 = 0$. $x = 50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \cdot 48^2} = 50 \pm 14$; $x_1 = 64$; $x_2 = 36$; $x_1 = 64$ — чет илдиэ (чунки $x < 48$ шартини қаноатлантормайди). Жа-
воб: 36. 709. $2x + 2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x^2+2x} = 6$; $(x+2)\sqrt{x^2+2x} +$
 $+x+2) + 2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+3} = 8$. $(\sqrt{x+2})^2 + 2(\sqrt{x+2}) = 8$;
 $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} = y$ деб белгиласак, $y^2 + 2y - 8 = 0$. $y_1 = 2$; $y_2 = -4$;
а) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} = 2$; $\sqrt{x+3} = 2 - \sqrt{x}$; $x+3 = 4 - 4\sqrt{x} + x$; $4\sqrt{x} = 2$;
 $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{4}$; б) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} = -4$ — бу тенглама эса илдиэга эга

эмас. Жа-воб: $\frac{1}{4}$. 710. Тенгламанинг ҳар икки қисмини $\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{27+x}$ га

кўпайтириб соддалаштирсак: $\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{27+x} = 5$. Тенгламани ечсак: $x_1 = 0$;
 $x_2 = -19$ Жа-воб: 0 ва -19 . 711. $(7, 3)$, $(7, -4)$, $(-8, 3)$,
 $(-8, -4)$ 712. $xy - 3y + 2x - 6 = (x-3)(y+2) = 0$ бўлгани учун
 $\begin{cases} x-3=0, \\ x^2+2y^2-2x-y=13 \end{cases}$ ва $\begin{cases} y+2=0, \\ x^2+2y^2-2x-y=13 \end{cases}$ системалар ечилади.
Жа-воб: $(3, -2)$; $(-1, -2)$. $(3, 2, 5)$. 713. $(2, 3)$, $(7, 6; -2, 6)$.

714. $(2m, -m)$; $(-m, 2m)$. 715. $(\pm \frac{3a}{2}; \pm \frac{a}{2})$; $(\pm \frac{a}{2}; \pm \frac{3a}{2})$. 716. Биринчи

тенгламани $y^2 + x^2 = \frac{13}{x}$ ҳа кўринишида ёзиб, иккинчи тенгламадан қиймати қўйил-

са, $13 = \frac{13}{x} xy$ ёки $xy = 6$; $\frac{x^2 + y^2}{xy} = 13$, система ечилади. 717. Биринчи

тенгламани $xy(x+y)$ 30 кўринишига келтириб, иккинчи тенгламадан қиймати

қўйилса, $x+y=5$ Энди $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases}$ система ечилади. 719. Берилган систе-

ма ечимга эга бўлсин учун $\begin{cases} x > 0 \text{ ва } \sqrt{y} > 0 \text{ ёки } x > 0 \text{ ва } y > 0 \text{ бўлиши керак.} \\ \sqrt{xy} > 0. \end{cases}$ 1-усул. Иккинчи тенгламадан $\sqrt{xy} = \pm 6$; $\sqrt{xy} = -6$ бўли-

ши мумкин эмас. Демак, $\sqrt{xy} = 6$ берилган системани ечиш ўрнига $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 6 \end{cases}$

система ечилад. $\sqrt{x} = u$ ва $\sqrt{y} = v$ деб белгиланса, $\begin{cases} u+v=5, \\ uv=6 \end{cases}$ система

ҳосил бўлади, бу система ечилади: $u_1 = 2$; $v_1 = 3$ ёки $u_2 = 3$; $v_2 = 2$, у ҳолда

$x = u^2$, $y = v^2$ бўлиб, система $\begin{cases} u+v=5, \\ u^2v^2=36 \end{cases}$ ($u > 0$, $v > 0$) ёки $\begin{cases} u+v=5, \\ uv=6 \end{cases}$

кўринишига келади, бу система ечилади, u , v ning қийматлари ўрнига қўйилади

ва x , y аниқланади. 3-усул. Биринчи тенгламани квадратга кўтарсак, $x+y +$
 $+ 2\sqrt{xy} = 25$ ва бунга иккинчи тенгламадан $\sqrt{xy} = 6$ ни қўйсак: $x+y = 13$;

$\begin{cases} x+y=13, \\ xy=36. \end{cases}$ Бу система ечилади. Жа-воб: $(4, 9)$, $(9, 4)$. 720. Биринчи тенгла-

мани умумий махражга келтириб, иккинчи тенгламадан қиймати қўйилса, $\frac{12}{\sqrt{xy}}$

$= \frac{3}{2}$ ёки $\sqrt{xy} = 8$; охириги тенгламани квадратга кўтарсак, $xy = 64$. Энди

$\begin{cases} y-x=12, \\ xy=64 \end{cases}$ системани ечиш кифоя Жа-воб: $(4, 16)$. 721. 1-усул. Биринчи

тенгламани $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) - 12 = 0$ кўринишида ёзиб, $x+y = z$;
 $xy = t$ деб белгиласак: $\begin{cases} z^2 - 2t - z - 12 = 0, \\ t - \frac{z^2}{4} + 8 = 0. \end{cases}$ Бу системани ечсак: $z_1 = 4$;

$t_1=0, t_2=1, t_3=-6$, бу қийматлар ўрнига қўйилса: $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-6 \end{cases}$ системалар ҳосил бўлади ва ечилади. 2-усул. Биринчи тенгламани $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) - 12 = 0$ кўринишда ёзиб, унга иккинчи тенгламадан xy нинг қиймати $[2(x+y) - 8]$ қўйилса: $(x+y)^2 - 5(x+y) + 4 = 0$; $x+y = u$ билан белгиласак: $u^2 - 5u + 4 = 0$; $u_1=1, u_2=4$ ёки $u+x=1, x+y=4$. Бу қийматлар иккинчи тенгламага қўйилса, $xy = -6$; $xy = 0$ аниқланади ва $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=0 \end{cases}$ ҳамда $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases}$ системалар тузиб ечилади.

3-усул. Биринчи тенгламани $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) - 12 = 0$ кўринишда ёзиб, унга иккинчи тенгламадан $(x+y)$ нинг қиймати $\frac{xy+8}{2}$ қўйилса, xy га нисбатан ҳосил бўлган квадрат тенглама ечилиб, юқоридаги системалар тузилади.

Жавоб: $(0, 4), (4, 0), (-2, 3), (3, -2)$. 722. $\sqrt{\frac{x}{y}} = t$ деб белгилансин. Жа-

воб: $(4, 1), (-9, -\frac{9}{4})$. 723. $\sqrt{x^2+y^2} = u, \sqrt{x^2-y^2} = v$ деб белгиласак:

$\begin{cases} u-v = a, \\ u^2v^2 = 400a^4 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} u-v = a, \\ uv = 20a^2 \end{cases}$ ($u > 0, v > 0$ бўлгани сабабли,

$uv = -20a^2 < 0$ бўла олмайди.) Жавоб: $(\pm \sqrt{\frac{41}{2}}a; \pm \frac{8a}{\sqrt{2}})$.

724. $(+3, +1); (\pm \frac{11}{\sqrt{109}}; \mp \frac{25}{\sqrt{109}})$. 725. $(\pm 2; \pm 1), (\pm \frac{7}{\sqrt{55}}; \pm \frac{32}{\sqrt{55}})$.

726. $(+4; +2), (-2; +4)$. 727. $(+2, +2), (-2\sqrt{3}, +2\sqrt{3}), (+4, +2),$

$(+4\sqrt{\frac{3}{7}}, +2\sqrt{\frac{3}{7}})$. 728. Жавоб: $(2, 3), (3, 2), (-6, 1), (1, -6)$.

729. $x > 0, y > 0$ бўлса, $\sqrt{x} = u, \sqrt{y} = v$ билан, $x < 0, y < 0$ бўлса, $\sqrt{-x} = u;$

$\sqrt{-y} = v$ билан белгилаймиз. Ҳар икки ҳолда ҳам $\begin{cases} \frac{u}{v} + \frac{v}{u} = \frac{7}{uv} + 1, \\ u^3v + uv^3 = 78 \end{cases}$ ёки

$\begin{cases} u^2 + v^2 = 7 + uv, \\ uv(u^2 + v^2) = 78 \end{cases}$ система ҳосил бўлади. (8) формулалардан фойдаланиб,

қуйидаги ёрдамчи системани тузамиз: $\begin{cases} \alpha^2 - 3\beta = 7 \\ \beta(\alpha^2 - 9\beta) = 78 \end{cases}$

$\alpha^2 = 7 + 3\beta$ ни иккинчи тенгламага қўйсак, $\beta^2 + 7\beta - 78 = 0$; $\beta_1 = 6; \beta_2 = -13$;
 $\alpha_{1,2} = \pm 5; \alpha_{3,4} = \pm 4\sqrt{-2}$; u ҳолда 4 та система оламиз:

1) $\begin{cases} u+v = 5, \\ uv = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u+v = -5, \\ uv = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} u+v = 4\sqrt{-2}, \\ uv = -13; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u+v = -4\sqrt{-2}, \\ uv = -13. \end{cases}$

u ва v мусбат сонлар бўлгани учун, $x+y > 0, xy > 0$ бўлиб, фақат биринчи системанинг ечимларигина яроқли бўлади, яъни $u_1 = 2; v_1 = 3; u_2 = 3; v_2 = 2$.

1) $\sqrt{x} = 2, x_1 = 4$; 2) $\sqrt{x} = 3, x_2 = 9$; 3) $\sqrt{-x} = 2; x_3 = -4$; 4) $\sqrt{-x} = 3;$

$x_4 = -9. \sqrt{y} = 3, y_1 = 9, \sqrt{y} = 2, y_2 = 4. \sqrt{-y} = 3; y_3 = -9. \sqrt{-y} = 2;$

$y_4 = -4.$ Жавоб: $(+4, +9), (+9, +4)$. 730. $(3, 3)$. 731. Тенгламаларнинг биринчисидан иккинчисини айирсак: $2(x^2-y^2) - 10(x-y) = 0$ ёки $(x-y)(x+y-5) = 0$.

Бундан: $x-y = 0; x+y-5 = 0$.

$\begin{cases} x+y-5 = 0, \\ 2x^2-3xy+10y = 20 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x-y = 0, \\ 2x^2-3xy+10y = 20 \end{cases}$

системалар тузилади ва ечилади. Жавоб: $(2, 3), (3, 2), (5 \pm \sqrt{5}, 5 \pm \sqrt{5})$.

732. 1-усул. Биринчи тенгламадан $3x-2y = \pm 6$ эканини аниқлаб, иккинчи тенглама билан биргаликда

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + y^2 = 17, \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 2x^2 - 2xy + y^2 = 17, \\ 3x - 2y = -6 \end{cases}$$

системалар тузилади ва ечилади. 2-у су л. Бир жинсли системалар деб ечилади. *Жавоб:* $(\pm 4, \pm 3)$, $(\pm 1, 6)$; $(\pm 5, 4)$. 733. Иккинчи тенгламани $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 28$ кўринишда ёзиб, иккинчи қавснинг урнига унинг қиймати биринчи тенгламадан қўйилса, $x+y=4$ тенглама ҳосил бўлади ва уни биринчи тенглама билан бирга ечилади*). *Жавоб:* $(1, 3)$; $(3, 1)$. 734. 1-у су л.

Тенгламаларни қўшсак: $x+3y = \pm 6$ $\begin{cases} x^2 + 5xy = 24, \\ x + 3y = 6 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x^2 + 5xy = 24, \\ x + 3y = -6 \end{cases}$

системалар ечилади. 2-у су л. Бир жинсли системани ечиш усули бўйича ечилади.

Жаво : $(\pm 3, \pm 1)$, $(\pm 12, \pm 2)$. 735. $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{a-b}{b}$. $\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b} = \frac{ab + b^2 + a^2 - ab}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$; $\frac{a+b}{a}$ ва $\frac{a-b}{b}$ ма-

саланинг бирдан-бир ечими эканини исбот қиламиз. Фараз қилайлик, изланаётган кўпайтувчиларнинг бири u , иккинчиси v бўлсин. У ҳолда: $uv = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

ва $u+v = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, u билан v , $x^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) = 0$ тенгламанинг илдизлари бўлиши керак. $abx^2 - (a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2) = 0$ тенгламани ечамиз: $x_1 = \frac{a-b}{b}$; $x_2 = \frac{a+b}{a}$. *Жавоб:* $\frac{a+b}{a}$ ва $\frac{a-b}{b}$. 736. 1-тенгламадан:

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) - 2 = 0$. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = t$ деб белгиласак, $t^2 + t - 2 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = -2$

1) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \end{cases}$ ва $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = -2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \end{cases}$

Биринчи системани қўшсак: $2\sqrt{x} = 9$; $\sqrt{x} = \frac{9}{2}$; $x_1 = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$ айирсак:

$2\sqrt{y} = 7$; $\sqrt{y} = \frac{7}{2}$; $y = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$; худди шунга ўхшаш иккинчи системани

ечсак: $x_2 = 9$; $y_2 = 25$. *Жавоб:* $(9, 25)$; $(20\frac{1}{4}, 12\frac{1}{4})$. 737. $(\pm 1, \pm 3)$;

$(\pm \frac{5}{\sqrt{3}}; \mp \frac{7}{\sqrt{3}})$. 738. Биринчи тенгламани $x^2 \neq 0$ га бўлсак, $6 - \frac{y}{x} -$

$-2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$; $\frac{y}{x} = u$ билан белгиласак ва ечсак: $u_1 = \frac{3}{2}$; $u_2 = -2$ ёки $y =$

$= \frac{3}{2}x$ ва $y = -2x$, $\begin{cases} x^2 + 4y = \frac{33}{16} \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases}$ ва $\begin{cases} x^2 + 4y = \frac{33}{16} \\ y = -2x \end{cases}$ системалар ечилади.

Жавоб: $(\frac{33}{4}, -\frac{33}{2})$, $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{-12 \pm \sqrt{177}}{4}, \frac{3(-12 \pm \sqrt{177})}{8})$.

739. 1-у су л. $\frac{y}{x} = u$ деб белгиласак, $u^2 + \frac{1}{u^2} = \frac{17}{4}$ ёки $4u^2 - 17u^2 + 4 = 0$,

$u_{1,2} = \pm 2$; $u_{3,4} = \pm \frac{1}{2}$. У ҳолда, $y = \pm 2x$ ва $y = \pm \frac{1}{2}x$. Тўртта биринчи да-

*) Симметрик система деб ҳам ечиш мумкин.

ражали $\begin{cases} x + y = 6, \\ y = \pm 2x \end{cases}$ ва $\begin{cases} x + y = 6, \\ y = \pm \frac{1}{2}x \end{cases}$ системалар ечилади. 2-усул. Сим-

метрик система деб ечиш мумкин. 3-усул. Иккинчи тенгламани квадратга кўтарамиз: $x^2 + y^2 = 36 - 2xy$ яна квадратга кўтарсак: $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (36 - 2xy)^2$ ёки $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 1296 - 144xy + 4x^2y^2$ ёки $x^4 + y^4 = 1296 - 144xy + 2x^2y^2$.

Биринчи тенгламадан: $x^4 + y^4 = \frac{17}{4}x^2y^2$. Охирги икки тенгламанинг ўнг қис-

лари тенгланса: $1296 - 144xy + 2x^2y^2 = \frac{17}{4}x^2y^2$, соддалаштирсак, $9x^2y^2 + 576xy - 5184 = 0$, $xy = u$ деб белгиласак, $9u^2 + 576u - 5184 = 0$. Бу тенгламани ечиб, u нинг ўрнига қийматини қўйсак, $xy = 8$, $xy = -72$. Бу тенгламаларнинг ҳар бирини иккинчи тенглама билан бирга олиб:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -72 \end{cases}$$

системалар ҳосил қилинади ва ечилади. 4-усул. $y = 6 - x$ ни биринчи тенгламага қўйсак: $\left(\frac{6-x}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{6-x}\right)^2 = \frac{17}{4}$; $\frac{6-x}{x} = z$ билан белгилаб: $z = \pm 2$;

$z = \pm \frac{1}{2}$ ёки $\frac{6-x}{x} = \pm 2$ ва $\frac{6-x}{x} = \pm \frac{1}{2}$ тенгламалардан x лар топилади.

Сунгра $y = 6 - x$ дан y лар топилади. *Жавоб:* (2, 4), (-6, 12), (4, 2), (12, -6). 740. $x + y = z$ белгиласак, биринчи тенглама $(z+1)^2 + z^2 = 61$ ёки $z^2 + z - 30 = 0$; $z_1 = -6$; $z_2 = 5$, яъни: 1) $x + y = 5$. 2) $x + y = -6$. Бу қийматларни иккинчи тенгламага қўйсак: 1) $x - y = 1$; 2) $x -$

$-y = -\frac{5}{6}$, у ҳолда $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x + y = -6, \\ x - y = -\frac{5}{6} \end{cases}$ системалар олинади

ва ечилади. *Жавоб:* (3, 2), $\left(-3\frac{5}{12}, -2\frac{7}{12}\right)$. 741. Иккинчи тенгламани $2(x^2 + y^2) = x^2y^2$ кўринишда ёзиб, 1-тенгламадан қиймати қўйилса: $x^2y^2 = 16$;

$xy = \pm 4$. У ҳолда $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ xy = 4 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ xy = -4 \end{cases}$ системалар олинади

ва ечилади. *Жавоб:* $(\pm 2, \pm 2)$, $(\pm 2, \mp 2)$. 742. $\frac{x+y}{x-y} = a$ деб белгиласак,

биринчи тенгламадан: $a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}$; $a_1 = 2$; $a_2 = \frac{1}{2}$. a нинг қийматини ўрнига қўйиб, иккинчи тенглама билан биргаликда

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

системалар тузилади ва ечилади. *Жавоб:* $(\pm 3\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$; $(\mp 3\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$.

743. $\begin{cases} x(x+y+1) = 10, \\ y(x+y+1) = 20. \end{cases}$ Иккинчи тенгламани биринчисига бўлсак, $\frac{y}{x} = 2$

ёки $y = 2x$ $\begin{cases} x^2 + xy + x = 10 \\ y = 2x \end{cases}$ системалар ечилади. *Жавоб:* $\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$; (-2,

-4). 744. Биринчи тенгламадан: $4(x-y)^2 - x^2 = 0$, $2(x-y) = \pm x$;

а) $\begin{cases} 2(x-y) = x \\ x^2 + y^2 + 3(x-y) = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2(x-y) = -x \\ x^2 + y^2 + 3(x-y) = 0 \end{cases}$ системалар ечилади.

ди. *Жавоб:* $(0, 0)$, $(-\frac{6}{5}; -\frac{3}{5})$, $(\frac{6}{13}; \frac{9}{13})$. 745. 1-усул. Симметрия тенгламалар системасини ечиш усули бўйича ечилади.

2-усул. (Ердамчи номаълум киритиш билан ечилади.) а) Иккинчи тенгламани $(x+y) + (x+y)^2 - 2xy = 22$ кўринишда ёзиб, биринчи тенгламадан $x+y$ нинг қиймати $\frac{5}{4}xy$ қўйилса, $\frac{5}{4}xy + \frac{25}{16}x^2y^2 - 2xy = 22$ ёки $25x^2y^2 - 12xy - 352 = 0$ тенглама ҳосил бўлади. $xy = u$ билан белгиласак, $25u^2 - 12u - 352 = 0$; $u_1 = 4$, $u_2 = -\frac{88}{25}$; $xy = 4$ бўлса, 1-тенгламадан $x+y = \frac{5}{4} \cdot 4 = 5$. $\begin{cases} xy = 4 \\ x+y = 5 \end{cases}$ система тузилади ва ечилади. $xy = -\frac{88}{25}$ бўлса, $x+y = \frac{5}{4} \cdot (-\frac{88}{25}) = -\frac{22}{5}$;

$\begin{cases} xy = -\frac{88}{25} \\ x+y = -\frac{22}{5} \end{cases}$ системани ҳосил қиламиз ва ечамиз. б) $x+y + x+y)^2 -$

$-2xy = 22$ га биринчи тенгламадан xy қиймати $\frac{4}{5}(x+y)$ қўйилса: $x+y + (x+y)^2 - 2 \cdot \frac{4}{5}(x+y) = 22$ ёки $5(x+y)^2 - 3(x+y) - 110 = 0$; $x+y = u$ деб белгиласак, $5u^2 - 3u - 110 = 0$. Бундан: $u_1 = x+y = 5$, $u_2 = x+y = -\frac{22}{5}$;

мос равишда $xy = 4$, $xy = -\frac{88}{25}$ топилди $\begin{cases} xy = 4, \\ x+y = 5 \end{cases}$ ва $\begin{cases} xy = -\frac{88}{25} \\ x+y = -\frac{22}{5} \end{cases}$ систе-

малар ечилади. *Жавоб:* $(1, 4)$; $(4, 1)$; $(\frac{-11 \pm \sqrt{209}}{5}; \frac{-11 \mp \sqrt{209}}{5})$.

746. Биринчи тенгламани $(x+n)(x+y-n) = 0$ кўринишда ёзиб, $x+n = 0$ ва $x-y-n = 0$ ни ҳосил қиламиз. Бу тенгламаларнинг ҳар бирини иккинчи тенглама билан биргаликда система қилиб ечамиз. *Жавоб:* $(2n, n)$, $(-n, -2n)$;

$(-n; 2n-2)$. 747. 1-усул. Иккинчи тенгламани $\sqrt[3]{xy} = 3$ кўринишда ёзиб, $\sqrt[3]{y} = u$; $\sqrt[3]{x} = v$ деб белгиласак: $\begin{cases} u-v = 2 \\ uv = 3 \end{cases}$ система ҳосил бўлади, бу системани ечиб, u ва v ўрнига қийматлари қўйилади. 2-усул. Биринчи тенгламани кубга кўтариб, $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{27} = 3$ ни қўйсақ, $y-x-3\sqrt[3]{xy}$ ($\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x}$) =

$= 8$; $y-x-18 = 8$; $y-x = 26$ $\begin{cases} y-x = 26 \\ xy = 27 \end{cases}$ система ечилади. 3-усул.

Иккинчи тенгламадан $x = \frac{27}{y}$ (ёки $y = \frac{27}{x}$) ни биринчисига қўйсақ: $\sqrt[3]{y} - \frac{3}{\sqrt[3]{y}} = 2$; $\sqrt[3]{y} = u$ деб белгиласак: $u - \frac{3}{u} = 2$, $u^3 - 2u - 3 = 0$; $u_1 = -1$; $u_2 = 3$;

u нинг қиймати ўрнига қўйилади. *Жавоб:* $(1; 27)$; $(-27; -1)$. 748. $\sqrt{\frac{x+y}{5x}} = t$ деб белгиласак, биринчи тенгламадан: $t + \frac{1}{t} = \frac{34}{15}$; $t_1 = \frac{3}{5}$; $t_2 = \frac{5}{3}$ ёки

а) $\sqrt{\frac{x+y}{5x}} = \frac{3}{5}$ ёки $\frac{x+y}{5x} = \frac{9}{25}$; $25x + 25y = 45x$; $y = \frac{4}{5}x$,

б) $\sqrt{\frac{x+y}{5x}} = \frac{5}{3}$ ёки $\frac{x+y}{5x} = \frac{25}{9}$; $9x + 9y = 125x$; $y = \frac{116}{9}x$,

$$1) \begin{cases} x + y + xy = 29, \\ y = \frac{4}{5}x \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x + y + xy = 29, \\ y = \frac{116}{9}x. \end{cases}$$

Биринчи системани ечсак: $(5; 4); \left(-\frac{29}{4}; -\frac{29}{5}\right)$.

Иккинчи системани ечсак: $\left(\frac{-125 \pm \sqrt{136729}}{232}; \frac{-125 \pm \sqrt{136729}}{18}\right)$.

749. Иккинчи тенгламани 3 га кўпайтириб, биринчи тенглама билан қўшсак: $(x - y)^2 = 27$ ёки $x - y = 3$. У ҳолда $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases}$ система ҳосил бўлади.

Иккинчисини $xy(x - y) = 30$ кўринишда ёзиб, $x - y = 3$ нинг қийматини қўйсак, $xy = 10$ аниқланади. У ҳолда яна ҳам соддароқ $\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 10 \end{cases}$ системани

ечиш кифоя. *Жавоб:* $(5, 2), (-2, -5)$. 750. $x + y = \alpha$; $xy = \beta$ деб белгиласак: $\begin{cases} \alpha^2 - 4\alpha^2\beta + \beta^2 = 73 \\ \alpha^2 - \beta^2 = 7 \end{cases}$ α^2 ўрнига $7 + 3\beta$ ни биринчи тенгламага қўйсак: $\beta^2 -$

$-7\beta + 12 = 0$, $\beta_1 = 3$; $\beta_2 = 4$; $\beta_1 = 3$ бўлса, $\alpha = \pm 4$; $\beta_2 = 4$ бўлса, $\alpha = \pm \sqrt{19}$. У ҳолда тўртта

$$\begin{cases} x + y = \pm 4, \\ xy = 3 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x + y = \pm \sqrt{19} \\ xy = 4 \end{cases}$$

системаларни тузамиз ва ечамиз. *Жавоб:* $(\pm 1, \pm 3); (\pm 3, \pm 1)$. $\left(\frac{\sqrt{19} + \sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{19} - \sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{-\sqrt{19} + \sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{19} - \sqrt{3}}{2}\right)$. 751. Биринчи тенгламанинг

чап қисми соддалаштирилса: $\frac{4x^2 - 2y^2}{y^2} = \frac{17}{4}$. бундан $x = \pm \frac{\sqrt{17}}{4}y$. Иккинчи тенгламада $\sqrt{x^2 + xy + 4} = t$ деб белгиласак, $t^2 + t - 16 = 0$; $t_1 = 7$; $t_2 = -8$; $t > 0$ бўлиши керак; шу сабабли t нинг қийматини ўрнига қўйиб, $\sqrt{x^2 + xy + 4} = 7$; $x^2 + xy - 45 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. У ҳолда:

$$a) \begin{cases} x^2 + xy - 45 = 0 \\ x = \frac{\sqrt{45}}{4}y \end{cases} \quad \text{ва} \quad b) \begin{cases} x^2 + xy - 45 = 0 \\ x = -\frac{\sqrt{45}}{4}y \end{cases}$$

системалар тузилади ва ечилади. *Жавоб:* $(\pm 5, \pm 4); (\pm 15, \mp 12)$. 752. Иккинчи тенгламанинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратсак, $2xy - 2y^2 + 2y - 4x + 4 = (2xy - 2y^2 - 2y) + (4y - 4x + 4) = 2y(x - y - 1) - 4(-y + x - 1) = (x - y - 1)(2y - 4)$. Демак, $(x - y - 1)(2y - 4) = 0$. Кўпайтувчиларнинг ҳар бирини нолга тенглаб, берилган системанинг биринчи тенгламаси билан биргаликда қуйидаги системаларни тузамиз ва ечамиз.

* $(x - y)^2 = 27$ тенгламадан $(x - y - 3)|(x - y)^2 + (x - y) + 9| = 0$ бўлиб, $x - y = 3$ ва $(x - y)^2 + 3(x - y) + 9 = 0$ тенгламалар олинади ва берилган системани ечиш ўрнига иккита

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} (x - y)^2 + 3(x - y) + 9 = 0, \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases}$$

системани ечиш мумкин бўлади. Бу системалардан иккинчисини ечиш коэффициентлари комплекс сонлар бўлган юқори даражали тенгламаларни ечишга олиб келади. Шу сабабли улардан биринчисини ечиш билан чекланамиз.

$$а) \begin{cases} x^2 + 3xy - 2y^2 - x - 16 = 0, \\ 2y - 4 = 0 \end{cases} \text{ ва б) } \begin{cases} x^2 + 3xy - 2y^2 - x - 16 = 0, \\ x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Жавоб: $(-8, 2); (3, 2); (-3, -4)$.

$$753. \begin{cases} x + y = \frac{3}{5} xy, \\ x^2 + y^2 = 104. \end{cases} \text{ Биринчи тенгламани квадратга кўтариб, } x^2 + y^2 \text{ шунг}$$

ўрнига қийматини қўйсак: $104 + 2xy = \frac{9}{25} x^2 y^2$ ёки $9x^2 y^2 - 50xy - 2600 = 0$.
 $xy = u$ деб белгиласак: $9u^2 - 50u - 2600 = 0$ бундан: $u_1 = xy = 20$ ва $u_2 = xy =$
 $= -\frac{130}{9}$; xy қийматини 1- тенгламага қўйсак: $x + y = 12$ ва $x + y = -\frac{26}{3}$. Пати-
жада

$$\begin{cases} xy = 20, \\ x + y = 12 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} xy = -\frac{130}{9}, \\ x + y = -\frac{26}{3} \end{cases}$$

системалар ҳосил бўлади. Ҳар икки система ечилиди. Жавоб: $(2, 10), (10, 2),$
 $\left(\frac{39 + 3\sqrt{299}}{130}, \frac{39 - 3\sqrt{299}}{130}\right)$. 754. $\frac{x + y}{xy} = u; \frac{x - y}{xy} = v$ деб белгилаб, би-

ринчи тенгламадан $u_1 = m; u_2 = \frac{1}{m}$, иккинчи тенгламадан эса $v_1 = n; v_2 = \frac{1}{n}$
ёки $\frac{x + y}{xy} = m; \frac{x + y}{xy} = \frac{1}{m}$ ва $\frac{x - y}{xy} = n; \frac{x - y}{xy} = \frac{1}{n}$ эканли аниқланади ва
қуйидаги 4 та система ҳосил қилинади ҳамда ечилади:

$$1) \begin{cases} \frac{x + y}{xy} = m, \\ \frac{x - y}{xy} = n; \end{cases} 2) \begin{cases} \frac{x + y}{xy} = \frac{1}{m}, \\ \frac{x - y}{xy} = n. \end{cases} 3) \begin{cases} \frac{x + y}{xy} = m, \\ \frac{x - y}{xy} = \frac{1}{n}; \end{cases} 4) \begin{cases} \frac{x + y}{xy} = \frac{1}{m}, \\ \frac{x - y}{xy} = \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Жавоб: $\left(\frac{2}{m-n}; \frac{2}{m+n}\right); \left(\frac{2m}{1-mn}; \frac{2m}{1+mn}\right); \left(\frac{2n}{mn-1}; \frac{2n}{mn+1}\right); \left(\frac{2mn}{m-n}; \frac{2mn}{m+n}\right)$. 755. $(2, 2); (-1, 8); (-1, 8), (0; 4, 5); (4, 5; 0)$. 756. $(\pm \sqrt{1-a},$
 $\pm \sqrt{1-p}); (\pm \sqrt{p+1}, \mp \sqrt{p+1})$. 757. $\begin{cases} 2x^3 + x^2 y = a^3 \\ xy^2 + 2y^3 = a^3 \end{cases}$ учинчи даражали

циклик-симметрик тенгламалар системаси ечилади. Биринчи тенгламадан иккин-
чисини айирсак: $(x - y)(2x^2 + 3xy + 2y^2) = 0$, бу ерда $x - y = 0$, $2x^2 + 3xy +$
 $+ 2y^2 = 0$ (охирги тенгламани $x > 0$ ва $y > 0$ каби ечимга эга бўлиши мумкин

$$\text{эмас). } \begin{cases} x - y = 0, \\ xy^2 + 2y^3 = a^3; \end{cases} \begin{cases} x = y, \\ xy^2 + 2y^3 = a^3; \end{cases} \begin{cases} x^3 + 2x^3 = a^3; \\ 3x^3 = a^3; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt[3]{3}} = y. \end{cases}$$

Жавоб: $\left(\frac{a}{\sqrt[3]{3}}, \frac{a}{\sqrt[3]{3}}\right)$. 758. Тенгламаларни биринчи сдан иккинчисини айир-

сак: $4(x^3 - y^3) - (x - y) = 0$ ёки $(x - y)[4(x^2 + xy + y^2) - 1] = 0$. Бундан
 $x - y = 0$ ва $4x^2 + 4y^2 + 4xy = 1$. Энди биринчи тенглама билан системалар
тузамиз:

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - y = 0, \\ x - y = 0; \end{cases} \quad (A) \quad \begin{cases} 4x^3 - 2x - y = 0, \\ 4x^2 + 4y^2 + 4xy = 1. \end{cases} \quad (B)$$

(А) система ечилса, $x_1 = y_1 = 0$; $x_{2,3} = y_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. (Б) системада 1- тенгла-
манни «-1» га, иккинчисини x га кўпайтириб қўшсак: $4xy^2 + 4x^2y + (x + y) = 0$
ёки $(x + y)(4xy + 1) = 0$. Бундан: $x + y = 0$ ва $xy = -\frac{1}{4}$. Бу тенгламалар-
нинг ҳар бирини (Б) системанинг 2- тенгламаси билан бирга олиб,

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 4x^2 + 4y^2 + 4xy = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = -\frac{1}{4}, \\ 4x^2 + 4y^2 + 2xy = 1 \end{cases}$$

системаларини тузсак ва ечсак $(\pm \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2})$ ечимлар олинади. Изоҳ. $x +$
 $y = 0$ ва $xy = -\frac{1}{4}$ тенгламаларнинг ҳар бирини (Б) системанинг 1- тенгла-
маси билан биргаликда олиб,

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 4x^2 - 2x - y = 0 \end{cases} \quad (\text{С}) \quad \begin{cases} xy = -\frac{1}{4}, \\ 4x^2 - 2x - y = 0 \end{cases} \quad (\text{Г})$$

системаларини тузиб ечсак ҳам бўлади. *Жавоб:* $(0, 0)$; $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$;
 $(\pm \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2})$. 759. $xy = \beta$; $x + y = \alpha$ билан белгилаб, симметрик системага

онд формулалардан фойдалансак, $\begin{cases} \alpha^2 - 2\beta = 13 + \beta, \\ \alpha^3 - 3\alpha\beta = 6\beta + 19 \end{cases}$ ёрдамчи система ҳосил
бўлади. Биринчи тенгламадан β нинг қийматини иккинчисига қўйилса, $2\alpha^2 -$
 $-13\alpha - 7 = 0$. Бундан: $\alpha_1 = 7$; $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. У ҳолда $\beta_1 = 12$; $\beta_2 = -\frac{17}{4}$ ва

$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12, \end{cases}$ ва $\begin{cases} x + y = -\frac{1}{2}, \\ xy = -\frac{17}{4} \end{cases}$ системалар ечилади. *Жавоб:* $(3, 4)$; $(4, 3)$;

$(-\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{69}}{4}; -\frac{1}{4} \mp \frac{\sqrt{69}}{4})$. 760. I. Агар $x = y$ бўлса, биринчи тенглама айнан
қаноатлантирилади, иккинчи тенглама эса $2x^3 = 26x$ кўринишга эга бўлади.
Бундан:

$$x_1 = 0 = y_1; \quad x_2 = \sqrt{13} = y_2; \quad x_3 = -\sqrt{13} = y_3.$$

II. Агар $x = -y$ бўлса, иккинчи тенглама айнан қаноатлантирилади. Би-
ринчи тенглама эса $2x^3 = 74x$ кўринишга эга бўлади. Бундан:

$$x_{4,5} = \pm \sqrt{37}; \quad y_{4,5} = \mp \sqrt{37}.$$

III. Агар $x \neq \pm y$ бўлса, биринчи тенгламани $x - y$ га, иккинчисини $x + y$
га бўлсак: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37, \\ x^2 - xy + y^2 = 13, \end{cases}$ охириги система ечилса: $(+3; +4)$ $(+4, +3)$.

Жавоб: $(0, 0)$; $(3, 4)$; $(4, 3)$; $(-3, -4)$; $(-4, -3)$; $(\pm \sqrt{37}; \mp \sqrt{37})$; $(\pm \sqrt{13};$
 $\pm \sqrt{13})$. 761. Биринчи тенгламани $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y + \sqrt{xy} - m) = 0$ кўри-
нишда ёзсак:

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = n^2 \end{cases} \quad (\text{А}) \quad \text{б) } \begin{cases} x + y + \sqrt{xy} - m = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = n^2 \end{cases} \quad (\text{Б})$$

системаларни ҳосил қилиш мумкин.

$$\sqrt{x} \geq 0 \text{ ва } \sqrt{y} \geq 0. \quad (C)$$

(C) шартига асосан, (A) системанинг ечимини $x_1 = y_1 = \frac{n}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{x} = u$; $\sqrt{y} = v$ билан белгиласак, (B) система

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + uv - m = 0, \\ u^3 + u^2v^2 + v^3 = n^2 \end{cases} \quad (B') \text{ ёки } \begin{cases} u^2 + v^2 = m - uv, \\ (u^2 + v^2)^2 = n^2 + u^2v^2 \end{cases}$$

қўринишга келади. Охириги системанинг биринчи тенгламасини квадратга кўтарсак, $(u^2 + v^2)^2 = (m - uv)^2$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг ўнг қисмини иккинчисининг ўнг қисми $n^2 + u^2v^2$ га тенгласак, $(m - uv)^2 = n^2 + u^2v^2$, бундан, $uv = \frac{m^2 - n^2}{2m}$ олинади ва системанинг биринчи тенгламаси билан биргаликда

$$\begin{cases} uv = \frac{m^2 - n^2}{2m}, \\ u^2 + v^2 = \frac{m^2 + n^2}{2m} \end{cases} \quad (B'')$$

система ҳосил қилинади. (B'') системадаги биринчи тенгламани 2 га кўпайтириб, иккинчисига аввал қўшсак, сўнгра айирсак:

$$\begin{cases} (u+v)^2 = \frac{3m^2 - n^2}{2m}, \\ (u-v)^2 = \frac{3n^2 - m^2}{2m}. \end{cases} \quad (B''')$$

(B''') системада $\frac{3m^2 - n^2}{2m} \geq 0$, $\frac{3n^2 - m^2}{2m} \geq 0$ бўлиши, ёки

$$3n^2 \geq m^2 \geq n^2 \quad (D)$$

бўлиши керак. Акс ҳолда (B''') система (у ҳолда (B) система ҳам) ечимга эга бўлмайди. (B''') дан:

$$\begin{cases} u + v = \sqrt{\frac{3m^2 - n^2}{2m}}, \\ u - v = \sqrt{\frac{3n^2 - m^2}{2m}} \end{cases}$$

системани ечиб, ўрнига қўйилса ва ниҳоят тенгликни ҳар икки қисми квадратга кўтарилса

$$x_{2,3} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{3m^2 - n^2}{2m}} \pm \sqrt{\frac{3n^2 - m^2}{2m}} \right)^2; \quad y_{2,3} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{3m^2 - n^2}{2m}} \mp \sqrt{\frac{3n^2 - m^2}{2m}} \right)^2.$$

Жавоб: $\left(\frac{n}{\sqrt{3}}, \frac{n}{\sqrt{3}} \right)$; $\left[\frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{3m^2 - n^2}{2m}} \pm \sqrt{\frac{3n^2 - m^2}{2m}} \right)^2; \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{3m^2 - n^2}{2m}} \mp \sqrt{\frac{3n^2 - m^2}{2m}} \right)^2 \right]$. 762. Биринчи тенгламани $xy \neq 0$ га, иккинчисини $-6xy$ га кўпайтириб қўшсак:

$x^4 - 5x^2y^2 + 6y^4 = 0$, буни $y^4 \neq 0$ га бўлсак: $\left(\frac{x}{y} \right)^4 -$

$$-5\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 6 = 0, \text{ бундан, } \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2, x = \pm\sqrt{2}y \text{ ва } \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 3, x = \pm\sqrt{3}y.$$

Берилган системадаги биринчи тенгламага кўра, x билан y бир хил ишорали сонлар бўлиши керак, яъни: $x = \sqrt{2}y$ ва $x = \sqrt{3}y$. Энди

$$a) \begin{cases} x^2 \cdot (x^2 + y) = 6xy, \\ x = +\sqrt{2}y \end{cases} \quad б) \begin{cases} x^2(x^2 + y^2) = 6xy, \\ x = \sqrt{3}y \end{cases}$$

системалар ечилади. **Жавоб:** $(\pm\sqrt{2}\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$, $(\pm\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}, \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}})$.

763. $\begin{cases} x^s y^r = pm^s n^r \\ x^r y^s = qm^s n^r \end{cases}$ тенгламаларни бир-бирига кўпайтирамиз ва бўламиз:

$$\begin{cases} (xy)^{s+r} = pqm^{2s}n^{2r}, \\ \left(\frac{x}{y}\right)^{s-r} = \frac{p}{q} \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} xy = (pqm^{2s}n^{2r})^{\frac{1}{s+r}}, \\ \frac{x}{y} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{s-r}}. \end{cases}$$

Бу система ечилади. **Жавоб:** $x = (p^{\frac{s}{s-r}} q^{\frac{r}{s-r}} m^{2s} n^{2r})^{\frac{1}{s+r}}$; $y = (p^{\frac{s}{s-r}} q^{\frac{r}{s-r}} m^{2s} n^{2r})^{\frac{1}{s-r}}$

764. Иккинчи тенгламадан $y = x + a$ ни биринчисига қўйсак,

$$x^2 + (x+a)^2 + 2x = 1 \quad \text{ёки} \quad 2x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0.$$

Бу тенгламани қаноатлантирган x нинг ҳар бир қийматига $y = x + a$ тенгламадан y нинг фақат битта қиймати мос келиши кўриниб турибди. Шунинг учун (*) тенглама a нинг қандай қийматида фақат битта ечимга эга эканини айтилаймиз. Бунинг учун (*) квадрат тенгламанинг дискриминантини нолга тенглашамиз, яъни: $(a+1)^2 - 2(a^2-1) = 0$ тенгламани ечсак: $a_1 = 3, a_2 = -1$; a топишган қийматларини тенгламага қўямиз: а) $a = 3$ бўлса, $x^2 + 4x + 4$ бундан: $x = -2$, y ҳолда $y = -2 + 3 = 1$; б) $a = -1$ бўлса: $x^2 = 0$ ёки $x = 0$ ҳолда $y = -1$. **Жавоб:** фақат $a = 3$ ва $a = -1$ бўлгандагина система ечимга эга бўлади. Бу ягона ечим биринчи ҳолда $(-2, 1)$, иккинчи ҳолда $(0, -1)$. 765. 5 ва 3; -3 ва -5 . 766. 11 ва 7 (ёки 7 ва 11). 767. Ён тоғ

6 см, асоси 4 см ёки ён томони $4\frac{2}{3}$ см, асоси $6\frac{2}{3}$ см. 768. 13 ва 9; —13. 769. 24. 770. 5 см, 12 см ва 13 см. 771. Трапециянинг асослари u см:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} \cdot 18 = xy, \\ x^2 + y^2 = 1440 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x+y = \frac{xy}{9} \\ x^2 + y^2 = 1440 \end{cases}$$

система ечилади. **Жавоб:** 36 см ва 12 см. 772. 5 см ва 12 см (ёки

ва $12\frac{16}{17}$ см). 773. 12 кунда ва 6 кунда. 774. 40 км/соат, 30 км/соат. 775. 4 дм/сек, 3 дм/сек. 776. Юк поездининг тезлиги x м/сек; пассажир поездининг тезлиги y м/сек бўлсин. 28 секундда юк поезди 28 x м, пассажир поезди 28 y м йўл юради. $28x + 28y = 700$ ёки $x + y = 25$. Юк поезди $\frac{490}{x}$ секундда, пассажир поезди $\frac{210}{y}$ секундда ўтади. $\frac{490}{x} - \frac{210}{y} = 1$

$14y - 6x = xy$. $\begin{cases} x+y=25 \\ 14y-6x=xy \end{cases}$ **Жавоб:** 10 м/сек (36 км/соат); 4

кўтарилган. $(36 - x)$ км пастликка соатига $(y + 6)$ км тезлик билан $\frac{36 - x}{y + 6}$ соатда тушган. Ҳаммасига 2 соат 40 минут $= 2\frac{2}{3}$ соат вақт кетган, шартга кўра $\frac{x}{y} + \frac{36 - x}{y + 6} = \frac{8}{3}$. В дан чиққан поезднинг $(36 - x)$ км баландликка соатига y км тезлик билан $\frac{36 - x}{y}$ соат юрган, x км пастликка соатига $(y + 6)$ км тезлик билан $\frac{x}{y + 6}$ соатда тушган. Ҳаммасига 2 соат 20 мин. $= 2\frac{1}{3}$ соат вақт кетган, яъни $\frac{36 - x}{y} + \frac{x}{y + 6} = 2\frac{1}{3}$ ҳосил бўлган тенгламаларни система қилиб ечилади. **Жавоб:** 12 км/соат, 18 км/соат ва 24 км. **790.** А дан чиққан поезднинг тезлиги соатига x км, В дан чиққан поезднинг тезлиги соатига y км бўлсин. У ҳолда: $3x + 3y = 195$. Учрашгандан кейин А дан чиққан поезд $3y$ км ни $\frac{3y}{x}$ соатда, В дан чиққан поезд $3x$ км ни $\frac{3x}{y}$ соатда юради. У ҳолда: $\frac{3y}{x} - \frac{3x}{y} = \frac{13}{14}$.

$$\begin{cases} 3x + 3y = 195 \\ \frac{3y}{x} - \frac{3x}{y} = \frac{13}{14} \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x + y = 65, \\ 3 \cdot \frac{y}{x} - 3 \cdot \frac{x}{y} = \frac{13}{14}. \end{cases}$$

Иккинчи тенгламада $\frac{y}{x} = t$; $\frac{x}{y} = \frac{1}{t}$ деб белгиласак: $3t - \frac{3}{t} = \frac{13}{14}$. Соддалаштирилса: $42t^2 - 13t - 42 = 0$, $t_1 = \frac{7}{6}$, $t^2 = -\frac{6}{y}$ ($t = \frac{y}{x}$ масала шартига кўра манфий сон бўлмайди). t нинг қийматини ўрнига қўйсак:

$$\frac{y}{x} = \frac{7}{6}; \quad y = \frac{7}{6}x.$$

Қуйидаги система ечилади.

$$\begin{cases} x + y = 65, \\ y = \frac{7}{6}x. \end{cases}$$

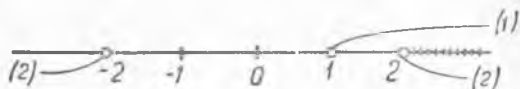
Жавоб: 30 км/соат, 35 км/соат. **791.** Иккинчи пароход суткасига v км дан t сутка юрган. Биринчи пароход йўлнинг биринчи ярмини $\frac{1}{2}$ суткада суткасига v км дан юриб ўтади. Йўлнинг биринчи ярми $\frac{vt}{2}$ км, йўлнинг иккинчи ярмини $\frac{t}{2} + 2 = \frac{t+4}{2}$ суткада $(v - 240)$ км/сутка тезликда*) юрса, $\frac{(t+4)(v-240)}{2}$ км юрган. У ҳолда $\frac{vt}{2} = \frac{(t+4)(v-240)}{2}$. Иккинчи пароход суткасига $v + 240$ км тезликда 6 кунда қайтса, бутун йўл $6(v + 240)$ км экан. Иккинчи томондан t йўл vt км га тенг эди. Яъни $6(v + 240) = vt$, $\begin{cases} (t+4)(v-240) = vt, \\ 6(v+240) = vt. \end{cases}$ $t_1 = 8, t_2 = -6$. ($t > 0$ бўлиши керак). У ҳолда $v = 720$. Иккинчи пароход 720 км/су тезлик билан 8 сутка юрган. **792.** 1) Каср ҳадларининг ишораси бир хил бўли

* Тезлигини соатига 10 км камайтирса, суткасига 240 км кам юради.

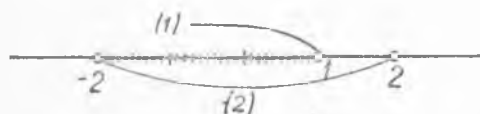
керак, яъни: а) $\begin{cases} x-1 > 0, & x > 1 \\ x^2-4 > 0, & x^2 > 4, & |x| > 2 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x > 1 \\ x < -2 \text{ ва } x > 2 \end{cases}$

бундан: а) системанинг ечими $x > 2$ (34- чизма).

б) $\begin{cases} x-1 < 0, & x < 1 \\ x^2-4 < 0, & x^2 < 4, & |x| < 2 \end{cases}$ ёки $-2 < x < 2$ демак, б) системанинг



34- чизма.



35- чизма.

ечими $-2 < x < 1$ (35- чизма). Жавоб: 1) $x > 2$ ва $-2 < x < 1$; 2) $x < -1,5$ ва $-1 < x < 1$. 793. 1) Қаср ҳадларининг ишораси бир хил бўлиши керак, яъни:

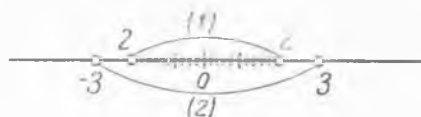
а) $\begin{cases} x^2-4 > 0, & |x| > 2, & \text{ёки } x < -2 \text{ ва } x > 2 \\ x^2-9 > 0, & |x| > 3, & \text{ёки } x < -3 \text{ ва } x > 3 \end{cases}$ бундан: $|x| > 3$ (36-

чизма).



36- чизма.

б) $\begin{cases} x^2-4 < 0, & |x| < 2, & -2 < x < 2 \\ x^2-9 < 0, & |x| < 3, & -3 < x < 3 \end{cases}$ ёки бундан: $|x| < 2$ (37- чизма),

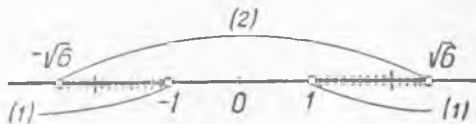


37- чизма.

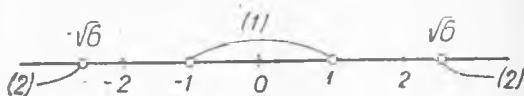
2) Қаср ҳадларининг ишораси ҳар хил бўлиши керак, яъни:

б) $\begin{cases} x^2-1 > 0, & |x| > 1, & \text{ёки } x < -1 \text{ ва } x > 1 \\ x^2-6 < 0, & |x| < \sqrt{6} \approx 2,4 & \text{ёки } -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \end{cases}$ бундан $-\sqrt{6} < x < -1$ ва $1 < x < \sqrt{6}$ (38- чизма).

б) $\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 1 < 0, |x| < 1 \text{ ёки } -1 < x < 1 \\ x^2 - 6 > 0, |x| > \sqrt{6} \text{ ёки } x < -\sqrt{6} \text{ ва } x > \sqrt{6} \end{array} \right\}$ демак, бу ҳолда ечим йўқ (39- чизма). *Жавоб:* 1) $|x| > 3$ ва $|x| < 2$, 2) $-\sqrt{6} < x < -1$ ва $1 < x < \sqrt{6}$.



38- чизма.



39- чизма.

794. 1) $|x| < 3$, 2) $x < -3$, $x > 2$ ва $-2 < x < 0$. 795. *Кўрсатма.*
 2) $\frac{5x+3}{5+4x-x^2} - 1 > 0$, $\frac{5x+3-5-4x+x^2}{5+4x-x^2} > 0$, $\frac{x^2+x-2}{5+4x-x^2} > 0$ ёки $\frac{x^2+x-2}{x^2-4x-5} < 0$. Охириги тенгсизликда каср ҳадларининг ишораси ҳар хил, яъни:

а) $\left\{ \begin{array}{l} x^2+x-2 > 0; D=1+8=9 > 0, x_1=-2, x_2=1; x < -2 \text{ ва } x > 1 \\ x^2-4x-5 < 0; D=16+20 > 0, x_1=-1, x_2=5; -1 < x < 5 \end{array} \right\}$ бундан:
 б) $\left\{ \begin{array}{l} x^2+x-2 < 0 \text{ ни ечсак, } -2 < x < 1 \\ x^2-4x-5 > 0 \text{ ни ечсак, } x < -1 \text{ ва } x > 5 \end{array} \right\}$ бундан: $-2 < x < -1$.

Жавоб: 1) $|x| > 3$ ва $|x| < 2$; 2) $-2 < x < -1$ ва $1 < x < 5$.

796. *Кўрсатма.* Тенгсизликни $x^2 + 2$ мусбат ифодага кўпайтирсак: $2x^2 - 6x + 10 < x^2 + 2$, $x^2 - 6x + 8 < 0$, бундан: $2 < x < 4$, бу оралиқдаги бутун сон $x = 3$. *Жавоб:* 1) 3; 2) $+3, +4$. 797. $x^2 - x + 1$ учқад x нинг ҳар қандай қийматида мусбат (чунки $D = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$ бўлгани учун, тенгсизликини шу ифодага кўпайтириш мумкин).

$$\left\{ \begin{array}{l} -3x^2 + 3x - 3 < x^3 + ax - 2, \\ x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2 \end{array} \right. \text{ ёки } \left\{ \begin{array}{l} 4x^2 + (a-3)x + 1 > 0, \quad (1) \\ x^2 - (a+2)x + 4 > 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

(1) тенгсизлик $(a-3)^2 - 16 < 0$ (3) бўлганда, x нинг ҳар қандай қийматида ҳам ўридли бўлади. (2) тенгсизлик эса $(a+2)^2 - 16 < 0$ (4) бўлганда x нинг ҳар қандай қийматида ҳам ўридли бўлади.

$$\left\{ \begin{array}{l} (a-3)^2 - 16 < 0, |a-3| < 4 \quad \text{ёки } -4 < a-3 < 4 \quad \text{ёки } -1 < a < 7, \\ (a+2)^2 - 16 < 0, |a+2| < 4 \quad \text{ёки } -4 < a+2 < 4 \quad \text{ёки } -6 < a < 2. \end{array} \right.$$

Ҳар икки тенгсизлиكنи қаноатлантирадиган a нинг қийматлари: $-1 < a < 2$. *Жавоб:*

$-1 < a < 2$. 798. $2 - 2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3} - 2$. 799. *Кўрсатма.* 4) $y =$

$$\frac{x^4 - 4x^2}{-4x} = \frac{x^4}{x^3 - 4x}; \quad x \neq 0 \text{ бўлса: } \frac{x^4}{x^3 - 4x} = \frac{x^3}{x^2 - 4}. \quad \text{Бунда } x^2 =$$

$-4 \neq 0$ ёки $x \neq \pm 2$ бўлиши керак. *Жавоб:* 1) $x \neq -0,15$; 2) $x \neq 0$ ва $x \neq \pm 5$; 3) x — ихтиёрый сон; 4) $x \neq 0$, $x \neq \pm 2.800$. *Кўрсатма.* 1) $\frac{2x-1}{2-x} \geq 0$ тенгсизликни ечиш керак. 3) $\frac{4-3x}{x^2+4} \geq 0$, x нинг ҳар қандай қийматида $x^2+4 > 0$ бўлгани учун, $4-3x \geq 0$, $x < 1\frac{1}{3}$. *Жавоб:* 1) $\frac{1}{2} \leq x < 2$; 2) $x < -3$ ва $x > -1\frac{1}{4}$; 3) $x < 1\frac{1}{3}$; 4) Барча ҳақиқий сонлардан иборат. 801. *Кўрсатма.* 4) $2x^2+4x+7 > 0$. $2(x+1)^2+5 > 0$ тенгсизлик x нинг ҳар қандай қийматида ҳам ўринли. *Жавоб:* 1) $|x| < 2$; 2) $x < -\frac{1}{2}$ ва $x \geq \frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{3} < x < 3$; 4) барча ҳақиқий сонлардан иборат. 802. 1) $1 < x < 5$; 2) $0 < x < 3$; 3) $-3 \leq x < -2$ ва $2 < x < 3$; 4) 1. 803. *Кўрсатма.* 2) $\begin{cases} 0,5x^2 - x + 0,5 \geq 0 \\ 4x^2 - 4x - 3 \geq 0 \end{cases}$ тенгсизликлар системасининг ечими берилган функциянинг аниқлаinish соҳасини ташкил этади. *Жавоб:* 1) Барча ҳақиқий сонлар тўплами; 2) $x < -\frac{1}{2}$ ва $x \geq \frac{3}{2}$. 805. Ҳазаро параллел тўғри чизиқлар бўлиб, *Оу* ўқни биринчи тўғри чизиқ (0,3) нуқтада, иккинчиси (0, -2) нуқтада кесиб ўтади. 807. 1) $y = 0,5x + 7$; 2) $y = 0,5x - 3$. 808. 1) $y = 4x + 3$; 2) $y = -2x - 3$. 810. *Жавоб:* 1) 18 кв. бирлик; 2) $12\sqrt{2}$ бирлик; 3) $y = x + 3$; $y = x - 3$; $y = -x + 3$, $y = -x - 3$. 812. 1) $y = -\frac{3}{2}x$; 2) $y = 2x$. 813. *Кўрсатма.* 1) Тўғри чизиқ абсцисса ўқининг мусбат йуналиши билан 45° ли бурчак ташкил этгани учун I ва III координат бурчакнинг биссектрисаси ($y = x$) га параллел бўлиб, тенгламаси $y = x + b$ кўринишда. $A(2, -3)$ нуқтадан ўтгани учун A нуқтанинг координатлари $y = x + b$ тенгламани қаноатлантириши керак. Яъни $-3 = 2 + b, b = -5$. *Жавоб:* 1) $y = x - 5$; 2) $y = -x - 1$. 814. 1) 16 кв. бирлик; 2) $8\sqrt{5}$ бирлик; 3) $y = \frac{1}{2}x \pm 2$, $y = -\frac{1}{2}x \pm 2$. 815. 1) 7,5 кв. бирлик. 2) $(AB)y = 2x + 4$; $(BC)y = -4x + 4$; $(AD)y = -\frac{1}{2}x - 1$; $(CD)y = x - 1$. 816. 1). Квадрат, 2) $12\sqrt{2}$ бир. 18 кв. бирлик, 3) $y = \pm x$, $y = \pm x \mp 6$. 817. 1. Чизиқли функция ($y = kx + b$) да $x = 0$ бўлса, $y = b$ бўлганидан (жадвалдан) $b = 3$ экани аниқланади. $y = kx + 3$ тенгликка x ва y нинг жадвалдаги ихтиёрый бир жуфт қиймати, масалан (1,5) қўйилса, $5 = k + 3$; $k = 2$ функциянинг аналитик ифодаси $y = 2x + 3$. $y = 2x + 3$ тенгламага x нинг жадвалдаги қийматини қўйиб, y нинг мос (номаълум) қийматлари топилади, ҳамда y нинг жадвалдаги қийматларини қўйиб, x нинг мос (номаълум) қийматлари топилади, яъни жадвалдаги бўш катаклар тўлдирилади. 2) $y = kx + b$ тенгламада x ва y ўрнига $(-8, 25)$ ва $(1, -2)$ қўйилса, $\begin{cases} -8k + b = 25 \\ k + b = -2 \end{cases}$ система ҳосил қилинади. Бу система ечилса, $k = -3$, $b = 1$. Функциянинг аналитик ифодаси: $y = -3x + 1$ аниқланади ва жадвалдаги бўш катаклар тўлдирилади. 819. *Кўрсатма.* 2) x ортса, $\frac{4}{x}$ каср камаяди. Демак, функция камаювчи. *Жавоб:* 1) камаювчи; 2) камаювчи; 3) ўсувчи. 820. $x < \frac{1}{4}$ бўлса, $y > 0$; $x > \frac{1}{4}$ бўлса, $y < 0$. 2) $x > -3$ бўлса, $y > 0$; $x < -3$ бўлса, $y < 0$. 821. $x = 2,5$ — илдири; камаювчи; $x < 2,5$ бўлса, мусбат, $x > 2,5$ бўлса манфий. 822. *Кўрсатма.* 2) тўғри чизиқ Ox ўқни $x = 2$ нуқтада кесиб ўтгани учун функциянинг илдизи $x = 2$; тўғри чизиқ чапдан ўнгга томон пастга туша боргани учун функция камаювчи; $x < 2$ оралиқда тўғри чизиқ Ox ўқнинг юқорисига, $x > 2$ оралиқда пастга жойлашгани учун функция

$x < 2$ бўлганда мусбат, $x > 2$ бўлганда манфий. Тўғри чизиқ Oy ўқни $(0, 1)$ нуқтада кесгани учун $b = 1$; $y = kx + 1$ тенгликка $(2, 0)$ нуқта координаталарини қўйсак; $0 = k \cdot 2 + 1$; $k = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}x + 1$. **Жавоб:** 1) Илдизи $x = -3$ ўсув-

чи; $x < -3$ бўлса, $y < 0$, $x > -3$ бўлса, $y > 0$; $y = \frac{2}{3}x + 2$. 823. 1) $x = 1$, $y =$

$= -2$, $(0, -3)$; $(\frac{3}{2}, 0)$, 2) $x = \frac{2}{3}$; $y = \frac{2}{3}$; $(0, -\frac{3}{2})$; $(-\frac{3}{2}, 0)$. 824. 1) $x =$

$= 0$, $y = 2$; $(-2, 0)$, Oy ўқ билан умумий нуқтага эга эмас. 2) $x = 1$; $y = -2$;

$(0, 0)$. 826. 1) $y = \frac{x-1}{x-3}$; 2) $y = -\frac{2x+5}{1+x}$. 827. 1) $y = \frac{4x+11}{x+2}$; 2) $y =$

$\frac{19-5x}{x-3}$. 828. **Қўрсатма.** 1) $y = \frac{2x}{x-3}$ функци графини 3 бирлик чапга

сурсак, $y = \frac{2x}{x-6+3} = \frac{2x}{x-3}$ нинг графиги ҳосил бўлади, сўнгра 1 бирлик

юқорига сурсак, $y = \frac{2x}{x-3} + 1 = \frac{3x-3}{x-3}$ функциянинг графиги ҳосил бўлади. Ор-

динаталарни 3 марта қисқартирсак, $y = \frac{3x-3}{x-3} : 3 = \frac{x-1}{x-3}$ ҳосил бўлади. **Жавоб:**

$y = \frac{x-1}{x-3}$; 2) $y = \frac{2-6x}{2x-1}$. 829. $y = \frac{11}{x}$; 2) $y = -\frac{3}{x}$. 830. $a = 1$. 831. Нуқталарнинг

координаталарини тенгламада x ва y нинг ўрнига қўйсак:

$$\begin{cases} 4 = \frac{n+3}{m-1} \\ -\frac{2}{3} = \frac{-n+3}{-m-1} \end{cases}$$

соддалаштирсак: $\begin{cases} 4m - n = 7, \\ 2m + 3n = 7 \end{cases}$ система ҳосил бўлади. Бу системани ечамиз.

Жавоб: $m = 2$, $n = 1$. 832. Нуқталарнинг координаталарни тенгламага қўйилса,

$$\begin{cases} 1 = \frac{2a-b}{2+c} \\ -5 = \frac{-a-b}{-1+c} \\ 1 = \frac{a-b}{1+c} \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 2a-b-c = 2, \\ 5c-a-b = 5, \\ 3a-3b-c = 1 \end{cases}$$

система ҳосил қилинади ҳамда ечилади, яъни (a, b, c) номаълумлар топилади.

Жавоб: $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$. 833. 1) $y = \frac{4}{x}$; 2) $y = -\frac{3}{x}$. 834. x ва y нинг

қийматларини $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ тенгликда x ва y нинг ўрнига кетма-кет қўйиш билан,

a, b, c, d номаълумларга нисбатан тўртта биринчи даражали тенгламалар систе-

маси ҳосил қилинади ва ечилади. a, b, c, d нинг топилган қийматлари $y =$

$\frac{ax+b}{cx+d}$ ифодадаги ўрнига қўйилади. **Жавоб:** $y = \frac{2x-3}{x+1}$. 838. 1) $a = \pm 12$;

2) $a = \frac{4}{3}$; 3) $a = \frac{9}{4}$. 839. 1) $\pm \frac{1}{6}$; 2) ± 6 . 840. 1-усул. $D = \frac{p^2}{4} - q = 0$

бўлиши керак, яъни: $\frac{p^2}{4} = b$, $p^2 = 4q$ ёки $|p| = 2\sqrt{q}$. 2-усул. $x^2 + px + q =$

$= (x + x_1)^2$, $x^2 + px + q = x^2 + 2x_1x + x_1^2$ (*) агар $\begin{cases} 2x_1 = p \\ x_1^2 = q \end{cases}$ бўлса (*) тенглик ўрни-

ли бўлади. $x_1 = \frac{p}{2}$ қийматни иккинчисига қўйсак: $(\frac{p}{2})^2 = q$, $p^2 = 4q$ ёки $|p| =$

$= 2\sqrt{q}$. Жавоб: $p^2 - 4q = 0$, ёки $|p| = 2\sqrt{q}$ бўлса. 841. $|b| = \frac{4}{3}\sqrt{ac}$. 843.

а) $y = 2(x-3)^2 + 2$; б) $y = -(x-1)^2 - 1$. 844. 1) $y = 2(x+3)^2 - 4$; 2) $y = -(x-2)^2 + 1$. 845. $y = 2x^2 - 8x + 6$ функция графигининг ординаталари, $y = x^2 - 4x + 3$ функция графигининг ординаталаридан 2 марта ортиқ, $y = 0,5x^2 - 2x + 1,5$ функция графигининг ординаталари эса ундан 2 марта кичик. 846.

Кўрсатма. 1) $x = -\frac{-6}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}$; $x = \frac{3}{2}$ парабола ўқининг тенгламаси $y = 0$ бўлса, $0 = 2x^2 - 6x$ тенглама ҳосил бўлади, уни ечсак, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Парабола Ox ўқни $(0,0)$, $(3,0)$ нуқталарида кесади. $x = 0$ бўлса, $y = 0$. Парабола Oy ўқни $O(0,0)$ нуқтада кесади. Жавоб: 1. 1) $x = \frac{3}{2}$, 2) $x = 0$, 3) $x = 1$, 4) $x = -\frac{b}{2a}$.

II. 1) $(0,0)$, $(0,3)$, $(0,0)$; 2) $(\frac{1}{2}, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$; $(0,1)$; 3) $(1,0)$; $(1,0)$; $(0,3)$;

4) $b^2 - 4ac > 0$ бўлса, $(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0)$, $(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0)$; $(0,0)$. 847.

1) $y = x^2 + 1$; 2) $y = (x-5)^2$, 3) $y = x^2 - 2$; 4) $y = (x+5)^2$; 5) $y = (x-2,5)^2 + 2$; 6) $y = (x+4)^2 - 4$; 7) $y = (x+2)^2 + 3$; 8) $y = (x-3)^2 - 3$. 848. $b = 1$, $c = 1$. 849. Берилган нуқталарнинг координаталарини $y = ax^2 + bx + c$ тенгликка

қўйиб, $\begin{cases} a - b + c = 1, \\ a + b + c = -5, \\ 4a + 2b + c = -2. \end{cases}$ система ҳосил қилинади ва уни ечиб, a , b ва c

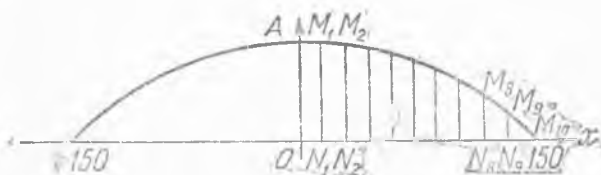
лар аниқланади. Жавоб: $y = 2x^2 - 3x - 4$. 850. Квадрат учҳад $y = a(x+n)^2$ кўринишида бўлиб, Ox ўққа $(2,0)$ нуқтада урингани учун $y = a(x-2)^2$ кўринишида бўлади. Бу тенгликка $(0, -2)$ нуқтанинг координаталари қўйилса, $-2 = a(-2)^2$; $a = -\frac{1}{2}$. У ҳолда $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$. Жавоб:

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$. 851. 1-усул. $(0,3)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{3}{2}, 0)$ нуқталарнинг координаталарини $y = ax^2 + bx + c$ тенгламага қўйиб, ҳосил қилинган система ечи-

лади ва $a = -4$, $b = +4$; $c = 3$ аниқланади. 2-усул. $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1; \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3}{4} \end{cases}$

$\frac{b}{a} = -1$, $\begin{cases} b = -a, \\ c = -\frac{3}{4}a, \\ c = 3. \end{cases}$ система ечилади. Жавоб: $y = -4x^2 + 4x + 3$. 852. $y =$

$= 2x^2 - x + 3$. 853. $y = x^2 + 2x + 3$. 854. Координаталар системасини ўрнатамиз (40-чизма): $OA = h = 67$ м; $ON_1 = N_1N_2 = \dots = N_7N_8 = N_8N_9 = 15$ м; $N_1M_1 = h_1$; $N_2M_2 = h_2$; \dots ; $N_8M_8 = h_8$; $M_3N_9 = h_9$.



40-чизма.

ди, у

Эгри чизиқ $y = ax^2$ параболаи 67 бирлик юқорига суришдан ҳосил бўлгани учун унинг тенгламаси $y = ax^2 + 67$ кўринишида бўлиши керак. $N_{10}(150,0)$ нуқта эгри чизиқда ётгани учун, бу нуқтанинг координаталари $y = ax^2 + 67$ тенгламани қаноатлантиради, яъни $0 = a(150)^2 + 67$; $a = -\frac{67}{(150)^2}$. У ҳолда параболанинг

тенгламаси: $y = -\frac{67}{(150)^2} \cdot x^2 + 67$, $x = ON_1 = 15$ бўлса, $y_1 = h_1 = -\frac{67}{(150)^2} \times 15^2 + 67 = 67(-0,01 + 1) = 67 \cdot 0,99 = 66,33(m)$, $x_2 = 30$ бўлса, $y_2 = h_2 = -\frac{67}{(150)^2} \cdot 30^2 + 67 = 67(-0,04 + 1) = 67 \cdot 0,96 = 64,32(m)$... $x_9 = 135$ бўлса,

$y_9 = h_9 = -\frac{67}{(150)^2} \cdot (135)^2 + 67 = 67(-0,81 + 1) = 67 \cdot 0,19 = 12,73(m)$. *Жавоб:* 66,33м;

64,32м; ..., 12,73 м. 855. $x = -\frac{1}{2}$ бўлганда $y = -\frac{1}{2}$ квадрат учҳаднинг энг кичик қиймати бўлиб, квадрат учҳад энг катта қийматга эга эмас. 856. 1) Энг кичик қиймати 4 ($x = 0$ бўлганда); 2) энг катта қиймати нолга тенг ($x = 1$ бўлганда); 3) энг кичик қиймати -1 га тенг ($x = 2$ бўлганда). 857. *Қўрсатма.* 1) $y = 2(x - 2)^2$. Бунда $x = 2$ бўлса $y = 0$, $x \neq 2$ бўлса, $y > 0$, яъни $y \geq 0$. Демак, $x = 2$ бўлганда, функциянинг энг кичик қиймати нолга тенг. *Жавоб:* 1) $x = 2$ бўлганда функциянинг энг кичик қиймати $y = 0$. 2) $x = -1$ бўлганда функциянинг энг катта қиймати $y = -1$. 858. $y = -3x^2 + 12x - 10$. 859. $y = ax^2 + bx + c$ га

$x = 0$, $y = m$ ни қўйсак, $c = m$ эканлиги аниқланади. Квадрат учҳад $x = -\frac{b}{2a}$ бўлганда энг кичик қиймати $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ га эришгани учун

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{-2a} = \frac{-k}{n}, \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{mn - k^2}{n} \end{array} \right. \text{ ёки } \left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{2a} = \frac{k}{n} \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{mn - k^2}{n} \end{array} \right.$$

системани ечиб, a ва b топилади. Функция энг кичик қийматга эга бўлгани учун, $n > 0$ бўлиши керак. *Жавоб:* $y = nx^2 + 2kx + m$ ($n > 0$). 860. $y = x^2 + 2px + q$. 861. $y = 2kx^2 - 4mx + n$ ($k < 0$). 862. $y = a(x + n)^2 + m$ квадрат учҳадда, $(-n, m)$ парабола учининг координаталари, демак, $m = -4$, $n = -1$, яъни: $y = a(x - 1)^2 - 4$. 863. Парабола $(0, -2)$ нуқтадан ўтгани учун бу нуқтанинг координаталари охириги тенгликни қаноатлантиради, яъни: $-2 = a \cdot (-1)^2 - 4$. Бундан: $a = 2$. Демак: $y = 2(x - 1)^2 - 4$ ёки $y = 2x^2 - 4x - 2$. *Жавоб:* $y = 2x^2 - 4x - 2$.

863. $y = -2x^2 + 4x + 3$. 865. *Қўрсатма.* 2) $y = \frac{4}{4 - (x - 2)^2}$. $x = 2$ бўлса, $4 - (x - 2)^2$

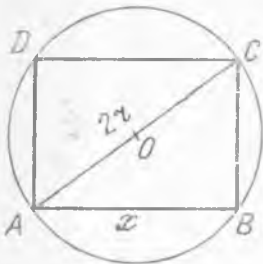
нинг энг катта қиймати 4 га тенг, касрнинг энг кичик қиймати $\frac{4}{4} = 1$ га тенг.

Жаво: 1) $x = \frac{2x}{2}$ бўлса, функциянинг энг катта қиймати 5 га тенг. 2) $x = 2$ бўлганда функциянинг энг кичик қиймати $+1$ га тенг. 866. Берилган тенгламада $x_1 + x_2 = a - 2$. $x_1 \cdot x_2 = -(a + 1)$ бўлгани учун, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a - 2)^2 + 2(a + 1) = a^2 - 2a + 6 = (a - 1)^2 + 5$. Охириги квадрат учҳад $a = 1$ бўлганда энг кичик қиймат минимумга эга бўлади. *Жавоб:* $a = 1$ бўлганда берилган тенглама илдизлари квадратларнинг йиғиндиси энг кичик бўлади. 867. $a = -6$ бўлганда энг кичик қиймат -24 га тенг. 868. Биринчи қўшилувчи x ,

иккинчиси $a - x$, уларнинг кўпайтмаси $y = x(a - x)$ ёки $y = -x^2 + ax$, $x = \frac{a}{2}$ бўлсагина бу квадрат учҳад (қўшилувчилар кўпайтмаси) энг катта қийматга эга

бўлади. У ҳолда: $a - x = \frac{a}{2}$. *Жавоб:* $\frac{a}{2}$ ва $\frac{a}{2}$ (қўшилувчилар ўзаро тенг бўлгандагина кўпайтма энг катта бўлади). 870. Гулзорнинг деворга перпендикуляр томони x м, деворга параллел томони $40 - 2x$, юзи s бўлса $s = x(40 - 2x)$ ёки

$s = -2x^2 + 40x$, $s = -2(x - 10)^2 + 200$, $x = 10$ бўлганда квадрат учҳад (гулзорнинг юзи) энг катта қийматга эга бўлади. У ҳолда $40 - 2x = 20$. **Жавоб:** гулзорнинг деворга тик томонлари 10 метрдан, параллел томони эса 20 метр бўлиши керак. 871. Доиранинг радиуси r . $AB = x$ бўлсин (41-чизма). $\triangle ABC$ да: $\angle ABC = 90^\circ$; $BC = \sqrt{4r^2 - x^2}$; $ABCD$ юзи $= s = x\sqrt{4r^2 - x^2} = \sqrt{-x^4 + 4r^2x^2}$;

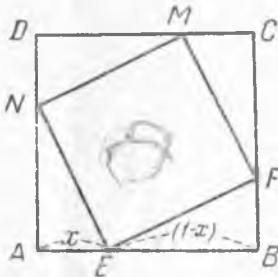


41-чизма.

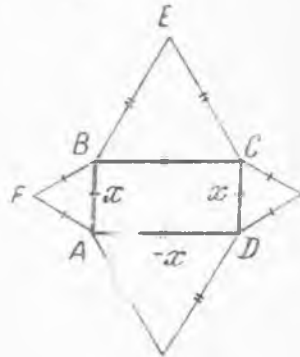
$y = s^2$ энг катта қийматга эга бўлган x нинг қийматида, $s = \sqrt{-x^4 + 4r^2x^2}$ функция ҳам энг катта қийматга эга бўлади: $y = -x^4 + 4r^2x^2$. $x = z$ деб белгиласак, $y = -z^4 + 4r^2z^2$. Бу функция $z = 2r^2$, яъни $x = r\sqrt{2}$ бўлганда энг катта қиймат (максимум) га эга бўлади. $AB = x = r\sqrt{2}$ бўлса, $BC = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = r\sqrt{2}$. Демак, тўғри тўртбурчакнинг томонлари тенг бўлиши, яъни тўғри тўртбурчак квадрат бўлиши керак. 872. Берилган квадратнинг томони 1 бирлик бўлсин. $AE = x$ (42-чизма) деб белгиласак, $EB = 1 - x$. $\triangle BEF$ да: $\angle B = 90^\circ$; $EF^2 = BF^2 + BE^2 = x^2 + (1 - x)^2$. Янги квадратнинг юзи $(EF)^2 = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$. $(EF)^2 = 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$. Охириги ифода ($MNEF$ нинг юзи) $x = \frac{1}{2}$ бўл-

ганда энг кичик қиймат ($\frac{1}{2}$ квадрат бирликка) тенг бўлади. Демак, $AE = \frac{1}{2}$; $EB = 1 - x = \frac{1}{2}$ бўлиши керак, яъни E нуқта AB томоннинг ўртасида бўлиши керак.

873. *Қўрсатма.* 2) $\triangle ABF$ юзи $= \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$ (43-чизма), $\triangle BEC$ юзи $= \frac{(p-x)^2}{4}\sqrt{3}$; $ABCD$ юзи $= x(p-x)$. Ҳосил бўлган фигуранинг юзи $s = 2 \cdot \frac{x^2}{4}\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{(p-x)^2}{4}\sqrt{3} +$



42-чизма.



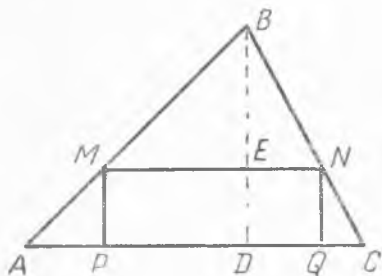
43-чизма.

$$+ x(p-x) = \frac{x^2}{2}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(p^2 - 2px + x^2) + x(p-x) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}p^2 - 2\sqrt{3}px + \sqrt{3}x^2 + 2px - 2x^2);$$

$$s = (\sqrt{3}-1)x^2 + (1-\sqrt{3})px + \frac{\sqrt{3}}{2}p^2. \quad x = -\frac{b}{2a} \text{ формулага асосан } x = -\frac{(1-\sqrt{3})p}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{p}{2} \text{ бўлса, } p-x = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2} \text{ бўлади, у}$$

қолда $S_{\text{тин}} = (\sqrt{3}-1)\frac{p^2}{4} + (1-\sqrt{3})\cdot\frac{p^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}p^2 = \frac{p^2}{4}(\sqrt{3}-1+2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}+1}{4}p^2$. Жавоб: Тўғри тўртбурчак квадрат бўлганда, изланаётган юз:

1) $\frac{5p^2}{4}$ (қв. бирлик) га; 2) $\frac{p^2}{4}(\sqrt{3}+1)$ қв. бирликка тенг. 874. $\triangle ABC$ берилган, $MNQP$



44- чизма.

изланувчи (44- чизма) тўртбурчак, $AC = a$, $BD = h$. ($BD \perp AC$). $BE = x$ бўлсин. $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ ($MN \parallel AC$); $\frac{BD}{BE} = \frac{AC}{MN}$; $MN =$

$= \frac{ax}{h}$; $NMQP$ тўртбурчакнинг юзи: $s = MN \times$

$\times ED = \frac{ax}{h} \cdot (h-x)$.

$s = -\frac{a}{h}x^2 + ax = -\frac{a}{h}(x - \frac{h}{2})^2 + \frac{ah}{4}$;

$x = \frac{h}{2}$ бўлганда, $s = MNQP$ юзи энг катта

бўлади. $MN = \frac{\frac{h}{2} \cdot a}{h} = \frac{a}{2}$. Демак, $MN =$

$= \frac{a}{2}$; $ED = h - \frac{h}{2} = \frac{h}{2}$ бўлиши керак. Жавоб: Тўғри тўртбурчакнинг бир то-

мони берилган учбурчак асоснинг ярмига, иккинчи томони эса баландлигининг

ярмига тенг бўлсин. 875. Доирaviй секторнинг периметри p , радиуси R бўлса,

ёй узунлиги $p - 2R$ бўлади. Секторнинг юзи $s = l \cdot \frac{R}{2} = (p - 2R) \cdot \frac{R}{2} = -R^2 + \frac{p}{2}R$;

$s = -(R - \frac{p}{4})^2 + \frac{p^2}{16}$; $R = \frac{p}{4}$ бўлганда, $l = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$ бўлиб, $l : R = \frac{p}{2} :$

$\frac{p}{4} = 2$. Жавоб: ёй узунлиги радиусидан 2 марта узун бўлганда секторнинг

юзи энг катта бўлади. 876. Қесим периметри p , $AD = x$ бўлсин (26- чизма).

$\cup B_nC = \frac{\pi x}{2}$; $AB = CD = \frac{p - (x + \frac{\pi x}{2})}{2}$. Қесим юзи. $ABCD$ тўғри тўртбурчак би-

лан яримта доира юзи $s = x \cdot \frac{p - (x + \frac{\pi x}{2})}{2} + \frac{\pi x^2}{8} =$

$= -\frac{\pi + 4}{8}x^2 + \frac{p}{2}x$. $x = -\frac{b}{2a}$ формуладан: $x = -\frac{\frac{p}{2}}{2 \cdot (-\frac{\pi + 4}{8})} = \frac{2p}{\pi + 4}$, x нинг

қиймати ўрнига қўйилса, $AB = \dots = \frac{p}{\pi + 4}$; $x : AB = AD : AB = \frac{2p}{\pi + 4} : \frac{p}{\pi + 4} = 2$,

яъни: $AD : AB = 2$. Жавоб: AD , AB дан 2 марта узун бўлганда. 879. 1) x нинг барча

қийматларида $x^2 \geq 0$ бўлгани учун $x^2 + 4 \geq 4$ демак, $y \geq 4 > 0$, $y > 0$, яъни функция

мусбат. Жавоб: x нинг барча қийматларида 1-си мусбат, 2-си эса манфий. 880.

1) $x < -\frac{1}{2}$ ва $x > \frac{3}{2}$ бўлса, $y > 0$; $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ бўлса, $y < 0$; 2) $x < 1$ ва $x > 2$ бўл-

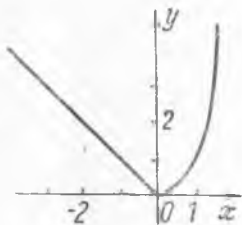
са, $y < 0$; $1 < x < 2$ бўлса, $y > 0$. 881. 1) $|x| > 2$ бўлса, $y > 0$; $|x| < 2$ бўлса, $y < 0$.

2) $|x| < \frac{1}{2}$ бўлса, $y > 0$; $|x| > \frac{1}{2}$ бўлса, $y < 0$ бўлади. 883. Кўрсатма. 2) $D = 36 -$

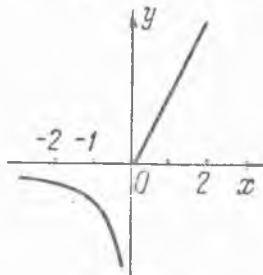
$-48 < 0$, $y = 6x - 3x^2 - 4 = -3(x-1)^2 - 1$. $(x-1)^2 > 0$; $-3(x-1)^2 < 0$. $y < -1 < 0$. Демак, функция x нинг ҳар қандай қийматида манфий. *Жавоб:* 1) x нинг ҳар қандай қийматида ҳам мусбат. 2) x нинг ҳар қандай қийматида ҳам манфий.

884. *Қўрсатма.* 1) Касрнинг сурат ва махражидаги квадрат учҳадлардан тула квадрат ажратсак, $y = \frac{-(x-1)^2 - 3}{2(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}$. x нинг ҳар қандай қийматида ҳам бу

касрнинг суратидаги ифода манфий бўлиб, махражидаги ифода мусбат бўлади. Шунинг учун касрнинг қиймати манфий бўлади. *Жавоб:* 1) x нинг барча қийматларида манфий; 2) $x \neq 2,5$ бўлса мусбат. 885. 1) $x > -1$ бўлса, $y > 0$; $x < -1$ бўлса, $y < 0$; 2) $x < 4$ бўлса, $y > 0$; $x > 4$ бўлса, $y < 0$. 886. $x < -1$ бўлса, $y < 0$; $-1 < x < 3$ ва $x > 3$ бўлса, $y > 0$. 887. $|x| < 2$ бўлса, $y < 0$; $|x| > 2$ бўлса, $y > 0$;

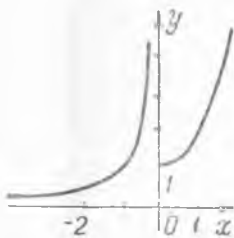


45- чизма.

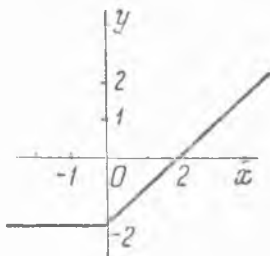


46- чизма.

2) $-1 < x < 2$ бўлса, $y < 0$; $y < -1,5$; $-1,5 < x < -1$, $x > 2$ бўлса, $y > 0$. 890. 1) $x = 0$ бўлса, функциянинг энг катта қиймати 2 га тенг; $x < 0$ бўлса, ўсади, $x > 0$ бўлса, камаяди; илдизга эга эмас; x нинг ҳар қандай қийматида ҳам мусбат. 2) $x = 1$ бўлса, функциянинг энг катта қиймати 8 га тенг, $x < 1$ бўлса, функция ўсади, $x > 1$ бўлса камаяди; илдизга эга эмас. x нинг ҳар қандай қийматида ҳам мусбат. 891. 1) 45- чизма; 2) 46- чизма. 892. 1) 47- чизма, 2) 48- чизма. 893. *Қўрсат-*



47- чизма.

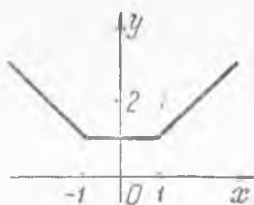


48- чизма.

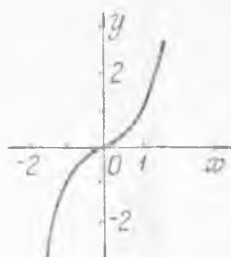
ма. 2) $x|x| = \begin{cases} \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса, } x^2, \\ \text{агар } x < 0 \text{ бўлса, } -x^3 \end{cases}$ функция графиги чизилади. *Жавоб:*

1) 49- чизма, 2) 50- чизма.

894. 1) 51- чизма, 2) 52- чизма. 895. 2) 53- чизма. 897. 2) 54- чизма. 898. *Қўрсат-*
ми. 2) $y = |2x - x^2 - 3| = |-(x^2 - 2x + 3)| = |x^2 - 2x + 3| = |(x-1)^2 + 2| = (x-1)^2 + 2 =$
 $x^2 - 2x + 3$; $y = x^2 - 2x + 3$

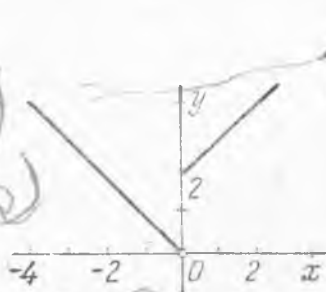


49- чизма.

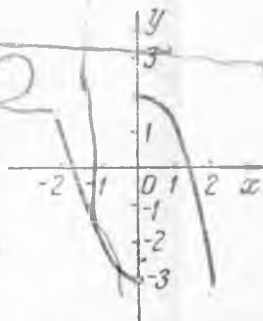


50- чизма.

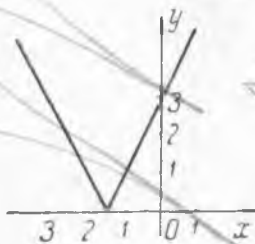
ничи графиғи чизилади. *Жавоб:* 1) 55- чизма. 899. $x < -2$ ва $x > 4$. 900. $-2 < x < 0$ ва $x > 2$. 901. $x < -2,5$; $-1 < x < 1$. 902. $x < -3$ ва $0 < x < 3$. 903. $x < -4$; $-2 < x < 1$; $x > 3$. 904. $-2 < x < -1$ ва $1 < x < 3$. 905. $|x| < 1$ ва $|x| > 4$. 906. $x < -1$; $1 < x < 3$ ва $x > 7$. 907. $x^2 - 17x + 60 = 0$ тенгламанин илдизлари: $x_1 = 5$, $x_2 = 12$, ($x = 5$, $x = 12$ булганда каср полга айланади). $x^2 - 8x + 7 = 0$ тенгламанин илдизлари: $x_1 = 1$, $x_2 = 7$. ($x = 1$ ва $x = 7$ булганда каср мат-лосини йуқот-ч.) Бе-



51- чизма.



52- чизма.



53- чизма.



54- чизма.

ридан тенгсизлиكنи $\frac{(x-5) \cdot (x-12)}{(x-1) \cdot (x-7)}$ ҳолга келтириб, x нинг $x < 1$, $1 < x < 5$; $5 < x < 7$; $7 < x < 12$ ва $x > 12$ оралиқлардаги қийматларида $\frac{(x-5)(x-12)}{(x-1)(x-7)}$ касрнинг ишораси аниқланади:

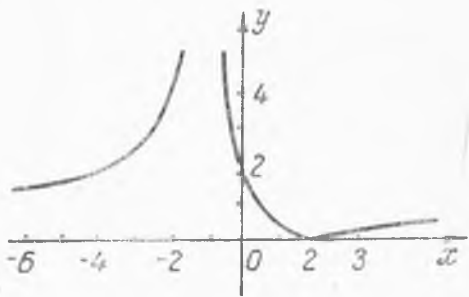
x	$x < 1$	$1 < x < 5$	$5 < x < 7$	$7 < x < 12$	$12 < x$
$x-5$	-	-	+	+	+
$x-12$	-	-	-	-	+
$x-1$	-	+	+	+	+
$x-7$	-	-	-	+	+
$\frac{(x-5)(x-12)}{(x-1)(x-7)} < 0$	+	-	+	-	+

Демак, x нинг $1 < x < 5$ ва $7 < x < 12$ оралиқларидаги барча қийматларида тенгсизлик ўринли бўлади; шу оралиқлардаги жуфт сонлар қўйилган суроққа жавоб бўлади. Жавоб: 2, 4, 8 ва 10. 908.

Тенгсизлиكنи $x + \frac{1}{3}$ кўринишга келтириб олган маъқул.

Жавоб: $-2 < x < -1$ ва $-\frac{1}{3} < x < 1$. 909. $x < -3$, $-1 < x < 0$ ва $2 < x < 5$, 1. 910. $-3 < x < -1$; $0 < x < 1$; $x > 3$. 911. Тенгсизлиكنи

$\frac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} > 0$ кўринишга келтириб, x нинг $x < -4$, $-4 < x < -3$; $-3 < x < -1$; $-1 < x < 1$. $1 < x < 2$, $2 < x < 3$; $2 < x < 3$ ва $x > 3$ оралиқларида $\frac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}$ касрнинг ишораси текширилади. Жавоб: $x < -4$; $-3 < x < -1$; $1 < x < 2$ ва $x > 3$.



55- чизма.

Фойдаланилган адабиёт

1. В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин, Симметрия в алгебре, М., «Наука», 1967.
2. К. С. Барыбин, А. К. Исаков, Сборник задач по математике, М., Учпедгиз, 1955.
3. Н. С. Зологин, Конкурсные задачи по математике, Киев, 1964.
4. Г. И. Зубелевич, Сборник задач московских математических олимпиад, Москва, 1967.
5. А. И. Погорелов, «Сборник задач по алгебре», Москва, 1949 ва бошқалар.

МУНДАРИЖА

Сўз боши	3
I Б О Б. РАЦИОНАЛ АЛГЕБРАИК ИФОДАЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР.	
A. Кўпхаллар устида амаллар	5
1- §. Бирхад ва кўпхаллар устида амаллар	5
2- §. Қисқа кўпайтириш ва бўлиш формуллари	9
3- §. Кўпхалнинг квадрати. Учхад йиғиндисининг кубу	13
4- §. Кўпхадни кўпхадга кўпайтириш ва бўлиш	15
Б. Кўпхалларни кўпайтувчиларга ажратиш	
5- §. Умумий кўпайтувчининг қавсдан ташқарига чиқариш усули	17
6- §. Группалаш усули билан кўпайтувчиларга ажратиш	18
7- §. Формулаларни қўллаш билан кўпайтувчиларга ажратиш	18
8- §. «Сунъий» усуллар билан кўпайтувчиларга ажратиш	19
9- §. Кўпайтувчиларга ажратишнинг барча усулларини қўллаш билан мисоллар ишлаш	20
10- §. Кўпайтувчиларга ажратиш ёрдами билан исботга доир масалалар ечиш	22
В. Алгебраик касрлар	
11- §. Касрларни қисқартириш	24
12- §. Касрлар устида турт амалга доир мисоллар	26
13- §. Исботлашга доир мисоллар	29
II Б О Б. БИР НОМАЪЛУМЛИ БИРИНЧИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР	
14- §. Бир номаълумли биринчи даражали тенгламалар	31
15- §. Тенглама тузиш билан масалалар ечиш	35
16- §. $ ax + b = c$ кўринишдаги тенгламалар	43
17- §. Тенгсизликлар. Тенгсизликларнинг асосий хоссалари	44
Тенг кучли тенгсизликлар. Биринчи даражали тенгсизликларни ечиш	44
18- §. Тенгсизликларни исботлашга доир мисоллар	48
III Б О Б. БИРИНЧИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР (ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР) СИСТЕМАСИ	
19- §. Биринчи даражали тенгламалар системасини алгебраик қўшиш ва ўрнига қўйиш усуллари билан ечиш	52
20- §. «Сунъий» усуллар билан ечиладиган тенгламалар системаси	55
21- §. Ҳарфий тенгламалар системаси	57
22- §. Ёрдамчи номаълум киритиш билан ечиладиган тенгламалар системаси	58
23- §. Биринчи даражали тенгламалар системасига доир мисоллар	60
24- §. Биринчи даражали тенгламалар системаси тузиш билан масалалар ечиш	64
25- §. Биринчи даражали бир номаълумли тенгсизликлар системаси	76
IV Б О Б. ИРРАЦИОНАЛ АЛГЕБРАИК ИФОДАЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР	
26- §. Соннинг квадрат илдизи. Қўб илдиз. Арифметик илдиз	80
27- §. Илдизлар устида амаллар	83
28- §. Каср махражидаги иррационалликни йўқотиш	86

29) §.	$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$ айнитдан	
	фойдаланиб иррационал ифодаларни соддалаштириш	87
30) §.	Илдишлар устида барча амалларга доир мисоллар	88
31) §.	Тенгсизликни исботлашга доир машқлар	90

V Б О Б. КВАДРАТ ТЕНГЛАМА. КВАДРАТ ТЕНГЛАМАГА КЕЛТИРИЛАДИГАН БАЪЗИ ТЕНГЛАМАЛАР. КВАДРАТ ТЕНГСИЗЛИК

32) §.	Чала (тўламас) квадрат тенгламалар	92
33) §.	Квадрат тенгламаларни ечиш	93
34) §.	Квадрат тенгламага келтириладиган юқори даражали тенгламаларни (ёрдмачи номаълум киритиш билан) ечиш	95
35) §.	Иккиквадрат тенгламаларни ечиш	97
36) §.	Квадрат тенгламаларни ечишга доир мисоллар	98
37) §.	Квадрат тенглама илдишларининг хоссасини қўллашга доир машқлар	99
38) §.	Квадрат тенглама тузиш билан масалалар ечиш	104
39) §.	Иккинчи даражали (квадрат) тенгсизликлар	118
40) §.	Иррационал тенгламаларни ечиш	122

VI Б О Б. ИККИ НОМАЪЛУМЛИ ЮҚОРИ ДАРАЖАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ. ТЕНГСИЗЛИКЛАР СИСТЕМАСИ

41) §.	Иккинчи даражали тенгламалар системасини алгебранг қўшиш ва ўрнига қўйиш усули билан ечиш	128
42) §.	«Сунтий усул» да ечиладиган баъзи иккинчи даражали тенгламалар системаси	130
43) §.	Икки номаълумли юқори даражали тенгламалар системасини ёрдмачи номаълум киритиш билан ечиш	134
44) §.	Чан қисми номаълум (x ва y) ларга нисбатан бир жинсли бўлган (ёки бир жинсли системага келтириладиган) тенгламалар системасини ечиш	136
45) §.	Симметрик тенгламалар системасини ечиш	139
46) §.	Иккинчи даражали циклик-симметрик тенгламалар системаси	141
47) §.	Икки номаълумли тенгламалар системасига доир мисоллар	142
48) §.	Икки номаълумли юқори даражали тенгламалар системаси тузиш билан масалалар ечиш	144
49) §.	Иккинчи даражали (бир номаълумли) тенгсизликлар системаси	151

VII Б О Б. ФУНКЦИЯЛАР ВА ГРАФИКЛАР

50) §.	Функция. Функциянинг аниқланиш соҳаси	153
51) §.	Чизиқли функция ва унинг графиги	155
52) §.	Чизиқли функциянинг баъзи хоссаларини текшириш	157
53) §.	Каср чизиқли функция ва унинг графиги	158
54) §.	Квадрат учҳад ва унинг графиги	161
55) §.	Квадрат учҳаднинг энг катта ва энг кичик қиймати	166
56) §.	Квадрат учҳаднинг ўсиши ва камайиши ҳамда ишорасини текшириш	172
57) §.	Бир неча формула билан берилган ҳамда абсолют қиймат белгиси остидаги функцияларнинг графиги	175
58) §.	Тенгсизликларни (оралиқлар) интерваллар усули билан ечиш	177
	Кўрсатмалар ва жавоблар	180
	Фойдаланилган адабиёт	261

На узбекском языке

МУСА САХАЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

(с решениями и указаниями)

Для учащихся VI—VIII классов
и учителей математики средних школ

Часть I

Издательство „Ўқитувчи“
Ташкент — 1970

Махсус редактор *М. Мирзааҳмедов*
Нашриёт редактори *И. Аҳмаджонов*
Муқовани расом *В. Битков* ишлаган
Бадий редактор *П. А. Бродский*
Техре актор *Г. Мақсудова*
Корректор *О. Ҳўжаев*

Теришга берилди 25/V 1970 й. Босишга рухсат этилди 28/VIII-1970 й. Қорози 60×90^{1/16}.
Физик л. 16,5. Нашр л. 15,5. Тиражи 15000. P07800.

„Ўқитувчи“ нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 17-69.
Баҳоси 42 т. Муқоваси 10 т.

ЎзССР Министрлар Совети Матбуот Давлат комитетининг Тошкент полиграфкомбинатидан
теришиб, 1- босмахонасида босилди. Тошкент, Ҳамза кўчаси, 21. 1970. Заказ № 148.

Набрано на Ташкентском полиграфкомбинате Государственного комитета Совета Министров
УзССР по печати, отпечатано в типография № 1. г. Ташкент. ул. Хамзы, № 21.