O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

A.R. XASHIMOV
SH.SH. BABADJANOV
G.S. XUJANIYOZOVA

IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan darslik sifatida tavsiya etilgan

TOSHKENT
“IQTISOD-MOLIYA”
2019

UO‘K: 51:330.4(075.8)
KBK: 22.1ya73

Taqrizchilar: *f.-m.f.n, dots.* **O.Qurbonov**;
f.-m.f.n, dots. **I.Mamurov**

X 33 **Iqtisodchilar uchun matematika:** *Darslik* / A.R.Xashimov, Sh.Sh.Babadjanov, G.S.Xujaniyozova; – T.: "Iqtisod-Moliya", 2019. – 572 b.

Ushbu darslik iqtisodiyot ta'lim yo‘nalishida tahsil olayotgan bakalavrlar uchun mo‘ljallangan bo‘lib, "Iqtisodchilar uchun matematika" fan dasturiga moslashtirib yozilgan. Darslikda chiziqli algebra, analitik geometriya, matematik tahlil, oddiy differensial tenglamalar va qatorlar nazariyasiga doir materiallar keltirilgan. Bu darslikka kirilgan materiallar ma'lum bir doiradagi iqtisodiy muammolarning matematik modellarini tuzish hamda ularning optimal yechimini topishda yordam beradi. Darslik talabalarning fan bo‘yicha nazariy bilimlarini chuqurlashtirishga, ma'ruza darslarida berilgan tushunchalarni kengroq bilib olishiga yordam beradi. Darslikka mavzular bo‘yicha nazorat ish variantlari kiritilgan.

Darslik iqtisod ta`lim yo‘nalishidagi bakalavriat uchun mo‘ljallangan ta'lim standartlari va o‘quv rejasi talablariga javob beradi.

UO‘K: 51:330.4(075.8)
KBK: 22.1ya73

ISBN 978-9943-13-846-9

KIRISH

Matematika – miqdoriy munosabatlar va fazoviy shakllar haqidagi fan. Matematika termini yunoncha "bilim", "fan"ni anglatuvchi "matema" so'zidan olingan.

Matematika qadim zamonlarda insonlarning amaliy zaruratlaridan vujudga keldi. Matematik bilimlar hozirgi kungacha saqlangan olamning yetti mo'jizalaridan biri hisoblangan mashhur Misr ehromlarini yaratishga yordam berdi. Sirakuza qo'rg'oni uzoq vaqt davomida buyuk matematik va mexanik Arximedning kashfiyotlari yordamida himoyalandi. Hozirgi kunda nafaqat kosmik apparatlarni uchirish, eng so'nggi texnikani modellashtirish, balki iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishni ham matematikasiz tasavvur qilib bo'lmaydi. Matematika tushunchalari konkret hodisa va predmetlardan ajratilgan. Bu hol matematika ilovalari uchun juda ham muhim. Masalan, 7 soni biror-bir aniq mazmun bilan uzluksiz bog'liq emas. U yetti sayyoraga ham, 7 so'mga ham, yetti ijtimoiy guruhga ham taalluqli bo'lishi mumkin. Xuddi shu kabi matematik usullar fizikada ham, iqtisodda ham qo'llaniladi. Ular oy va quyosh tutilishlarini ham, inflyatsiyani ham, aholining o'sishini ham oldindan bilishga yordam beradi.

Matematika amaliy masalalarni yechishning asosiy vositasi bo'lib qolmasdan, fanning universal tili, dunyoqarashning ajralmas qismi ham hisoblanadi. Evklidning "Negizlar" kitobi klassik geometriyaga asos solgan va bizning dunyoni tuzilishi haqidagi tasavvurlarimizga kuchli ta'sir etgan. Noevklid geometriyaning va nisbiylik nazariyasining vujudga kelishi esa u haqidagi tasavvurlarni butunlay o'zgartirdi. Eynshteyn ham tabiatni o'rganishda matematikaning muhimligini ta'kidlab o'tgan. U quyidagicha yozgan edi: "Butun orttirilgan tajriba bizni shunga ishontiradiki, tabiat eng sodda matematik fikr yurituvchi elementlarni amalga oshirishni ifodalaydi". Shunday ekan matematika aniq, optimal va samarali amal qilishga undaydigan fikrlash usuli.

Jamiyat va iqtisodiyot qonuniyatlarini matematikasiz o'rganish mumkin emas. Masalan, Nobel mukofoti olgan deyarli barcha iqtisodchilarning (L.Kantorovich, V.Leontov, P.Samuel'son, R.Solou, D.Xiks, D.Nesh, R.Zel'ten) ishlari matematik metodlarni iqtisodiy jarayonlarga to'g'ri tatbiq etish bilan bog'liqdir.

Hozirgi zamon jamiyati ishlab chiqarish unumdorligini oshirishga talabning ortishi, xo'jalik va korxonalarni boshqarishni rejalashtirishga bo'lgan talabning yuqoriligi bilan xarakterlanadi. Bunday sharoitda jamiyat iqtisodiy hayotini ilmiy boshqarishgina ishlab chiqarishdagi yuqori sur'atni saqlab qoladi. Buning uchun iqtisodiy fanlarni, matematika va matematikaning zamonaviy yutuqlarini keng qo'llagan holda o'rganish kerak bo'ladi. Buni amalga oshirish uchun esa matematik programmalashtirish, o'yinlar nazariyasi, korrelyatsion va regression tahlil kabi bo'limlarning rivojlantirish zaruriyatini tug'dirib ekstremal masalalarning optimal yechimini qurishni talab qiladi.

Ekstremal masalalarni yechish uch bosqichdan iborat:

1) iqtisodiy-matematik modelni qurish;

I QISM. CHIZIQLI ALGEBRA ASOSLARI VA UNING ILOVALARI

1-BOB. MATRITSA VA DETERMINANTLAR

1.1. Matritsalar ustida amallar. Texnologik matritsa

Matritsa tushunchasi va unga asoslangan matematikaning matritsalar algebrasi bo'limi amaliyotda, jumladan, iqtisodiyotda katta ahamiyat kasb etadi. Bu shu bilan tushuntiriladiki, aksariyat iqtisodiy obyekt va jarayonlarning matematik modellari matritsalar yordamida sodda va kompakt ko'rinishida tasvirlanadi.

Matritsa tushunchasi birinchi marta ingliz matematiklari U.Gamilton (1805 - 1865-y.y.) va A.Kel (1821-1895 y.y.) ishlarida uchraydi. Hozirgi kunda matritsa tushunchasi tabiiy va amaliy jarayonlarning matematik modellarini tuzishda muhim vosita sifatida qo'llaniladi.

1-ta'rif. Matritsa deb m ta satr va n ta ustunga ega bo'lgan qavslar ichiga olingan to'rtburchakli sonlar jadvaliga aytiladi.

Matritsalar lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matritsani tashkil qilgan sonlar uning elementlari deyiladi. Matritsa o'lchami $m\times n$ kabi yoziladi. Matritsaning $i-$satr, $j-$ustun kesishmasidagi element a_{ij} kabi belgilangan. Demak, $a_{34}-3$ - satr va 4 - ustin kesishmasida joylashgan elementdir.

Ba'zida matritsalarni yozishda (...) qavslar o'rniga [...] qavslar yoki ||...|| kabi belgilardan foydalaniladi.

Aytaylik quyidagi jadvalda iqtisodiyotning tarmoqlari bo'yicha resurslarning taqsimlanishi berilgan bo'lsin:

Resurslar	**Iqtisodiyot tarmoqlari**	
	Sanoat	**Qishloq xo'jaligi**
Elektr energiyasi resurslari	7,3	5,2
Mehnat resurslari	4,6	3,1
Suv resurslari	4,8	6,1

Bu resurslar taqsimotini matritsa ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$A=\begin{pmatrix} 7,3 & 5,2 \\ 4,6 & 3,1 \\ 4,8 & 6,1 \end{pmatrix}$. Bu matritsaning o'lchami 3×2 bo'lib, satrlari resurs turlariga ustunlari esa tarmoqlarga mos keladi.

$(1\times n)$ o'lchamli matritsaga satr matritsa, $(m\times 1)$ o'lchamli matritsaga esa ustun matritsa deyiladi, ya'ni

$$K=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Bundan tashqari ba'zida bu matritsalar mos ravishda satr-vektor va ustun-vektor deb ham ataladi. Matritsaning elementlari esa vektorlarning komponentlari, deyiladi.

Har bir elementi nolga teng bo'lgan, ixtiyoriy o'lchamli matritsaga nol matritsa deb aytiladi va quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\Theta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2-ta'rif. A va B matritsalar bir xil o'lchamga ega bo'lib, ularning barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, bunday matritsalar teng matritsalar deyiladi va $A=B$ ko'rinishda yoziladi.

1-misol. Quyidagi matritsaviy tenglikdan x va y noma'lumlarning qiymatlarini toping:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x+y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Matritsalarning mos elementlarini taqqoslab quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$y=2,\quad x+y=2\Rightarrow x=0.$$

3-ta'rif. A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lsa, A matritsa B matritsa bilan zanjirlangan matritsa deyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\4&5&2\\9&8&2\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}5&8\\1&4\\4&3\end{pmatrix}$ matritsalar zanjirlangan matritsalar bo'ladi. Chunki, A matritsaning o'lchami 3×3 ga, B matritsaning o'lchami 3×2 ga teng.

Shuni ta'kidlash lozimki B va A matritsalar zanjirlangan emas. Chunki, B matritsaning ustunlari soni 2 ga, A matritsaning satrlari soni 3 ga teng bo'lib, o'zaro bir xil emas.

4-ta'rif. Ham satrlar soni, ham ustunlar soni n ga teng bo'lgan, ya'ni $n\times n$ o'lchamli matritsa $n-$tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix}1&8&6&1\\-2&5&7&3\\1&0&11&15\\0&5&3&-9\end{pmatrix}$ matritsa 4-tartibli kvadrat matritsadir.

$a_{11},a_{22},...,a_{nn}$ elementlarning tartiblangan to'plami kvadrat matritsaning asosiy diagonali deyiladi. Agar $A=(a_{ij})$ kvadrat matritsada $i>j$ $(i<j)$ munosabat bajarilganda $a_{ij}=0$ bo'lsa, u holda A matritsa yuqori (quyi) uchburchaksimon matritsa deyiladi.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\a_{21}&a_{22}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

$A=(a_{ij})$ kvadrat matritsada $i\neq j$ bo'lganda, $a_{ij}=0$, $i=j$ bo'lganda, $a_{ij}\neq0$ bo'lsa, u holda A matritsaga diagonal matritsa deyiladi ya'ni

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\0&a_{22}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Agar diagonal matritsaning barcha diagonal elementlari o'zaro teng bo'lsa, u holda bunday matritsaga skalyar matritsa deyiladi ya'ni

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Agar skalyar matritsada $a=1$ bo'lsa, u holda bunday matritsaga birlik matritsa deyiladi va odatda E harfi bilan belgilanadi, ya'ni

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

O'lchamlari aynan teng bo'lgan matritsalar ustidagina algebraik qo'shish amali bajariladi.

O'lchamlari teng bo'lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsalarni qo'shish uchun, ularning mos elementlari qo'shiladi, y'ani

$$A+B=C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mj}+b_{mj} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matritsani biror haqiqiy λ songa ko'paytirish uchun bu son matritsaning har bir elementiga ko'paytiriladi, y'ani

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mj} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ikkita matritsa ayirmasi quyidagicha topiladi:

$$A-B=D=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1j}-b_{1j} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2j}-b_{2j} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}-b_{i1} & a_{i2}-b_{i2} & \dots & a_{ij}-b_{ij} & \dots & a_{in}-b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mj}-b_{mj} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2-misol. Quyidagi matritsalarning yig'indisi va ayirmasini toping:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yechish. A va B matritsalarning o'lchamlari 2×4 ga teng. Shu sababli bu matritsalarni qo'shish va ayirish mumkin. Ta'rifga asosan

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+4 & 1-1 & 0+2 & 2-2 \\ 1-3 & 4+0 & 3+4 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 3-4 & 1+1 & 0-2 & 2+2 \\ 1+3 & 4-0 & 3-4 & 1-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3-misol. Quyidagi A matritsani $\lambda=2$ soniga ko'paytiring:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $\lambda\cdot A=2A=2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 8 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 7 & 2\cdot 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 16 & 4 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}.$

4-misol. Firma 5 turdagi mahsulotni ikkita korxonada ishlab chiqaradi. Firmaning ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimoti quyidagi jadvalda berilgan:

Mahsulot turlari	1	2	3	4	5
1-korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori	139	160	205	340	430
2-korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori	122	130	145	162	152

Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilash natijasida ishlab chiqarishni 17% ga oshirdi. Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilagandan keyin, firmaning bir oyda ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimoti qanday bo'ladi?

Yechish. Firmaning ishlab chiqarish uskunalarini yangilamasdan oldingi ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimotini quyidagi matritsa ko'rinishda yozish mumkin:

$$P=\begin{pmatrix}139 & 160 & 205 & 340 & 430\\ 122 & 130 & 145 & 162 & 152\end{pmatrix}.$$

Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilagandan keyin, firmaning bir oyda ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimotini topish uchun, bu ishlab chiqarish matritsasini 1,17 ga ko'paytirish zarur bo'ladi:

$$1{,}17\cdot P=1{,}17\cdot\begin{pmatrix}139 & 160 & 205 & 340 & 430\\ 122 & 130 & 145 & 162 & 152\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}162{,}63 & 187{,}2 & 239{,}85 & 397{,}8 & 503{,}1\\ 142{,}74 & 152{,}1 & 169{,}65 & 189{,}54 & 177{,}84\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni qo'shish, ayirish, ya'ni algebraik qo'shish va matritsani songa ko'paytirish amallariga matritsalar ustida chiziqli amallar deyiladi.

Matritsalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga bo'ysinadi:

$1)\, A+B=B+A;$

$2)\, A+(B+C)=(A+B)+C;$

$3)\, k(A+B)=kA+kB;$

$4)\, k(nA)=(kn)A;$

$5)\, (k+n)A=kA+nA;$

$6)\, A+\Theta=A;$

$7)\, A+(-A)=\Theta;$

$8)\, 1\cdot A=A.$

Bu yerda $A,B,C-$bir xil o'lchamli matritsalar, Θ matritsa A,B,C matritsalar bilan bir xil o'lchamli nol matritsa, $k,n-$ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Faqat va faqat zanjirlangan matritsalar ustida ko'paytirish amali bajariladi. $m\times p$ o'lchamli $A=(a_{ij})$ matritsaning $p\times n$ o'lchamli $B=(b_{jk})$ matritsaga ko'paytmasi deb elementlari $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+...+a_{ip}b_{pk}$ kabi aniqlanadigan $m\times n$ o'lchamli $C=(c_{ik})$ matritsaga aytiladi. Bu formuladan ko'rish mumkinki, A va B matritsalar ko'paytmasi C matritsadagi c_{ik} element A matritsaning $i-$ satrida joylashgan har bir elementni B matritsaning $k-$ ustunida joylashgan mos o'rindagi elementga ko'paytirish va hosil bo'lgan ko'paytmalarni qo'shish natijasida aniqlanadi.

Masalan, bizga umumiy holda $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ ko'rinishdagi matritsalar berilgan bo'lsin. Bu matritsalarni ko'paytirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Endi buni aniq misollarda ko'rib chiqamiz.

5-misol. Quyidagi A matritsani B matritsaga ko'paytiring:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. 1. Izlanayotgan $C=AB$ matritsaning c_{11} elementi A matritsaning birinchi satr elementlarini B matritsaning birinchi ustun mos elementlari bilan ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$c_{11}=(3\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=3\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 1=6.$$

2. Izlanayotgan $C=AB$ matritsaning birinchi satr va ikkinchi ustunining elementi A matritsaning birinchi satr elementlarini B matritsaning ikkinchi ustun elementlari bilan mos ravishda ko'paytmalarining yig'indisiga teng:

$$c_{12}=(3\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=3\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot 0=2.$$

3. Birinchi satr va uchinchi ustun elementi

$$c_{13}=(3\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=3\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot 1=-1$$

kabi aniqlanadi.

4. Izlanayotgan matritsaning ikkinchi satr elementlari A matritsaning ikkinchi satr elementlarining B matritsaning mos ravishda 1-,2-,3-ustun elementlari bilan ko'paytmalarining yig'indisi sifatida topiladi:

$$c_{21}=\ 2\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 1=6;$$

$$c_{22}=2\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 0=1;$$

$$c_{23}=2\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot 1=1.$$

5. C matritsaning uchinchi satr elementlari ham shunga o'xshash topiladi:

$$c_{31}=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 1=8;$$

$$c_{32}=1\cdot 1+2\cdot(-1)+3\cdot 0=-1;$$

$$c_{33}=1\cdot(-1)+2\cdot 1+3\cdot 1=4.$$

Shunday qilib,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6-misol. Quyidagi A matritsani B matritsaga ko'paytiring:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu matritsalar zanjirlangan bo'lganligi sababli- ular ustida ko'paytirish amali bajariladi.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (1+4+9+16) = (30).$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Keltirilgan misoldan ko'rinib turibdiki, A va B matritsalarning ko'paytmasi kommutativlik (o'rin almashtirish) xossasiga ega emas, ya'ni $AB \neq BA$. Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo'lsa, AB va BA ko'paytmalarini topish mumkin. Agar A va B matritsalar uchun $AB = BA$ $(AB = -BA)$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda A va B matritsalar kommutativ (antikommutativ) matritsalar deyiladi. Masalan, E birlik matritsa ixtiyoriy A kvadrat matritsa bilan kommutativdir. Haqiqatan ham

$$AE = EA = A.$$

Matritsalarni ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1) $(kA)B = k(AB) = A(kB)$;

2) $(A + B)C = AC + BC$;

3) $A(B + C) = AB + AC$;

4) $A(BC) = (AB)C$.

Keltirilgan xossalardan to'rtinchisini quyidagi misol yordamida tekshiramiz.

7-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ va $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo'lsin:

$$1.\ AB=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 6\end{pmatrix},$$

$$(AB)C=\begin{pmatrix}7 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}51 & 6 & 14\end{pmatrix},$$

$$2.\ BC=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & 4 & 6\\ 11 & 1 & 4\end{pmatrix},$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}29 & 4 & 6\\ 11 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}51 & 6 & 14\end{pmatrix}.$$

Ko‘rinib turibdiki, ikki xil hisoblash usulida ham natija bir xil.

A kvadrat matritsani $m\,(m>1)$ butun musbat darajaga ko‘tarish quyidagicha amalga oshiriladi: $A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\ marta}$.

Agar A matritsada barcha satrlari matritsaning mos ustunlari bilan almashtirilsa, u holda hosil bo‘lgan A^T matritsa A matritsaga transponirlangan matritsa deyiladi va ular quyidagi xossalarga ega:

1) $\left(A^T\right)^T=A,$

2) $(kA)^T=kA^T,$

3) $(A+B)^T=A^T+B^T,$

4) $(AB)^T=B^TA^T.$

Masalan, $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\\ 5 & 0\end{pmatrix}$ bo‘lsa, $A^T=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 4 & 0\end{pmatrix}$ bo‘ladi.

Agar A kvadrat matritsa uchun $A=A^T$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda bu matritsaga simmetrik matritsa deyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 2\\ 5 & 8 & 3\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix}$ simmetrik matritsaning elementlari bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan.

$n-$tartibli simmetrik matritsaning turli elementlari soni ko‘pi bilan $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ga teng, bunda $n-$natural son.

Agar A kvadrat matritsada $A=-A^T$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, bunday matritsaga qiya simmetrik matritsa deb ataladi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$n-$tartibli qiya simmetrik matritsaning turli elementlari soni ko'pi bilan n^2-n+1 formula yordamida topiladi, bunda $n-$natural son.

5-ta'rif. Nolmas satrlarga ega A matritsada har qanday $k-$ nolmas satrning birinchi noldan farqli elementi $(k-1)-$ nolmas satrning birinchi noldan farqli elementidan o'ngda tursa, u holda A pog'onasimon matritsa deyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa pog'onasimon matritsadir.

Iqtisodiy masalalarni matematik modellashtirishda, ya'ni, iqtisodiy muammoni matematik ifodalar yordamidagi ifodasida, matritsalardan keng foydalaniladi. Bunda muhim tushunchalardan biri texnologik matritsa tushunchasidir. Bu matritsa, masalan, bir nechta turdagi resurslardan bir nechta mahsulot turlarini ishlab chiqarishni rejalashtirish (programmalashtirish), tarmoqlararo balansni modellashtirish kabi muhim iqtisodiy masalalarda asosiy rolni o'ynaydi.

Faraz qilaylik o'rganilayotgan iqtisodiy jarayonda n xil mahsulot ishlab chiqarish uchun m xil ishlab chiqarish faktorlari (resurslar) zarur bo'lsin. $i-$mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun $j-$turdagi resursdan a_{ij} miqdori sarflansin. a_{ij} elementlardan tuzilgan $m\times n$ o'lchamli A matritsa texnologik matritsa deb ataladi.

1-turdagi mahsulotdan x_1 miqdorda, 2-turdagi mahsulotdan x_2 miqdorda, ..., $n-$turdagi mahsulotdan x_n birlik miqdorda ishlab chiqarilishi talab qilinsin. Bu rejani $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ustun vektor ($n\times 1$ o'lchamli matritsa) shaklida ifodalaymiz. U holda 1-turdagi resurs sarfi $a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n$ ga, ikkinchi turdagi resurs sarfi $a_{21}x_1+\dots+a_{2n}x_n$ ga teng. Umumlashtiradigan bo'lsak, ishlab chiqarish rejasini bajarish uchun zarur bo'lgan $j-$turdagi resurs sarfi $a_{j1}x_1+\dots+a_{jn}x_n$ birlikka teng. Bu miqdorlarni ustun vektor sifatida yozsak aynan AX ko'paytmani hosil qilamiz.

$j-$mahsulotning bir birligining narxi c_j bo'lsin. Narxlar vektorini $C=(c_1,\dots,c_n)$ ko'rinishda ifodalaymiz. U holda CX ko'paytma, matritsalarni ko'paytirish qoidasiga ko'ra, skalyar miqdor, ya'ni sondan iborat. Bu son ishlab chiqarishdan olingan daromadni ifodalaydi.

$i-$ turdagi resurs zaxirasi miqdori b_i birlikka teng bo'lsin. Resurs zaxiralari vektorini ustun vektor shaklida ifodalaymiz: $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$. U holda $AX \le B$ tengsizlik ishlab chiqarishda resurs zaxiralari hisobga olinishi zarurligini bildiradi. Bu vektor tengsizlik AX vektorning har bir elementi B vektorning mos elementidan katta emasligini bildiradi. $AX \le B$ shartni qanoatlantiruvchi X rejani joiz reja, deb ataymiz. Ma'nosidan kelib chiqadigan bo'lsak, har qanday X rejaning elementlari musbat sonlardan iborat bo'lishi zarur.

8-misol. Korxona ikki turdagi transformatorlar ishlab chiqaradi. 1-turdagi transformator ishlab chiqarish uchun 5 kg temir va 3 kg sim, 2-turdagi transformator ishlab chiqarish uchun 3 kg temir va 2 kg sim sarflanadi. Bir birlik transformatorlarni sotishdan mos ravishda 6 va 5 sh.p.b. miqdorida daromad olinadi. Korxonaning omborida 4,5 tonna temir va 3 tonna sim mavjud. Texnologik matritsa, narxlar vektori va resurs zaxirasini ifodalovchi vektorni tuzing. $\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ rejalar joiz reja bo'la oladimi?

Yechish. Korxona ikki turdagi resursdan foydalanib 2 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. $C=(6,5)$ narxlar vektori. $B=\begin{pmatrix} 4500 \\ 3000 \end{pmatrix}$ resurs zaxiralari vektori.

$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ texnologik (resurs sarfi normasi) matritsa.

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. Bu rejani bajarishdagi resurs sarfi

$$AX=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5x_1+3x_2 \\ 3x_1+2x_2 \end{pmatrix}$$

ga teng. Bu sarf zaxiradan oshib ketmasligi kerak, ya'ni $AX \le B$ yoki

$$5x_1+3x_2 \le 4500,$$
$$3x_1+2x_2 \le 3000.$$

Joiz reja yuqoridagi tengsizliklarni qanoatlantirishi zarur.

1) $X=\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. U holda

$$AX=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4300 \\ 2700 \end{pmatrix}<\begin{pmatrix} 4500 \\ 3000 \end{pmatrix},$$

ya'ni bu reja joiz reja. Bu reja asosida olinadigan daromad miqdori $CX = (6 \quad 5)\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix} = (6000)$ sh.p.b. ga teng.

2) $X = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. U holda

$$AX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix}.$$

Bundan ko'rish mimkinki, 1-turdagi resurs sarfi 4800 ga teng bo'lib, resurs zaxirasi 4500 dan katta. Shu sababli, qaralayotgan reja joiz reja emas.

9-misol. Korxona m turdagi resurslarni qŏ'llab, n turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. $j-$turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarishga ketgan $i-$xomashyo resurslari xarajatlarining normalari $A_{m\times n}$ matritsa bilan berilgan. Vaqtning ma'lum oralig'ida korxona har bir turdagi mahsulotdan x_{ij} miqdorini ishlab chiqargan bo'lsin. Uni $X_{n\times 1}$ matritsa bilan ifodalaymiz.

Vaqtning berilgan davrida barcha mahsulotning har bir turini ishlab chiqarishga ketgan resurslarning to'la xarajatlar matritsasi S ni aniqlang. Berilgan

$$A_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Resurslarning to'la xarajatlar matritsasi S A va X matritsalarning ko'paytmasi sifatida aniqlanadi, ya'ni $S = AX$.
Berilgan masalaning sharti bo'yicha

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix}.$$

Berilgan vaqt orlig'ida 930 birlik I turdagi resurs, 960 birlik II turdagi resurs, 450 birlik III turdagi resurs, 690 birlik IV turdagi resurs sarf qilingan.

10-misol. Korxona mahsulotning n turini ishlab chiqaradi, ishlab chiqariladigan mahsulot hajmlari $A_{1\times n}$ matritsa bilan berilgan. $j-$mintaqada mahsulotning $i-$turi birligining sotilish narxi $B_{n\times k}$ matritsa bilan berilgan, bu yerda $k-$mahsulot sotilayotgan mintaqalar soni.

Mintaqalar bo'yicha daromad matritsasi C ni toping.

$$A_{1\times 3} = (100, 200, 100); \quad B_{n\times k} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{bo'lsin.}$$

Yechish. Daromad $C_{1\times k} = A_{1\times n} \cdot B_{n\times k}$ matritsa bilan aniqlanadi, $c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot b_{ij}$ – bu j – mintaqada korxonaning daromadi quyidagicha:

$$C = (100,200,100)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (600,1300,700,1300).$$

MS Excel dasturida matritsalarni qo'shish, songa ko'paytirish va matritsalarni ko'paytirishga misollar keltiramiz.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ matritsalarni qo'shish talab qilinsin.

I) Matritsalarni quyidagi ko'rsatilgan jadvallar shaklida MS Excelga kiritamiz.

	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		0	4	3
6	B=	2	-2	3

II) Biror katakka matritsalarning 1-elementlari yig'indisini topish uchun formula kiritamiz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		1	-3	5					
3	A=	2	3	2			=B2+B5		
4						A+B=			
5		0	4	3					
6	B=	2	-2	3					
7									

III) 2x3 o'lchamli jadvalni bu katakdagi formulani avtomatik ko'chirish usuli bilan to'ldiramiz. Buning uchun sichqonchani bu katakning pastki o'ng burchagiga keltiramiz. Qalin qora kursor (krestik) paydo bo'lganda sichqonchaning chap tugmasini bosamiz va oldin satr bo'yicha uch katakka, keyin ustun bo'yicha ikki kattakka tortamiz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		1	-3	5					
3	A=	2	3	2			1	1	8
4						A+B=	4	1	5
5		0	4	3					
6	B=	2	-2	3					
7									

Natijada matritsalarning yig'indisi hosil bo'ladi.

2) Yuqoridagi A matritsani 2 ga ko'paytiramiz. Buning uchun A matritsani 2 ga ko'paytirish formulasini biror katakka kiritamiz. Bu katakdagi formulani yuqorida tushuntirilgan usulda avtomatik to'ldiramiz.

	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		=B2*2		
6	2A=			
7				

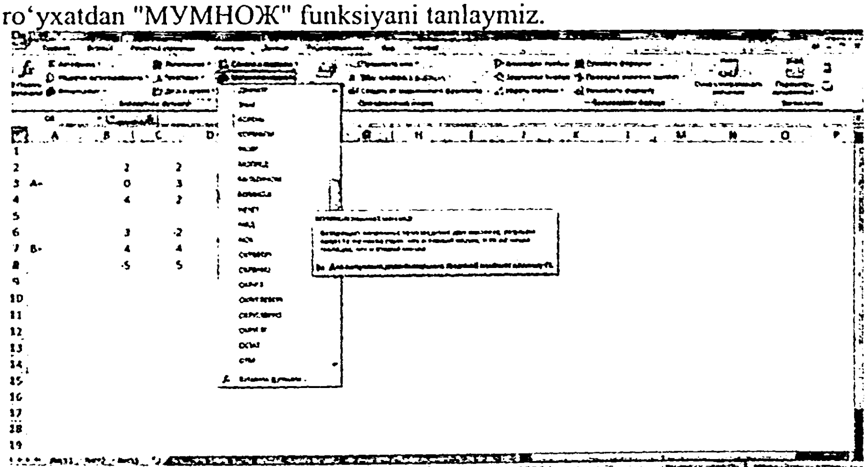
	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		2	-6	10
6	2A=	4	6	4
7				

3) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 4\\ -5 & 5\end{pmatrix}$ bo‘lsin. AB ko‘paytmani topamiz. A matritsa o‘lchamlari 3×3 va B matritsa o‘lchamlari 3×2 bo‘lganligi sababli, ko‘paytmaning o‘lchamlari 3×2 bo‘ladi.

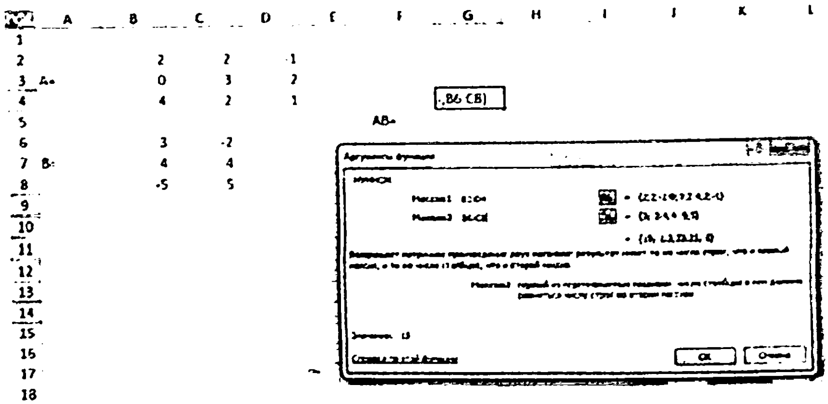
I) A va B matritsalarni Excelda jadval shaklida kiritamiz.

	A	B	C	D	E
1					
2		2	2	-1	
3	A=	0	3	2	
4		4	2	-1	
5					
6		3	-2		
7	B=	4	4		
8		-5	5		
9					

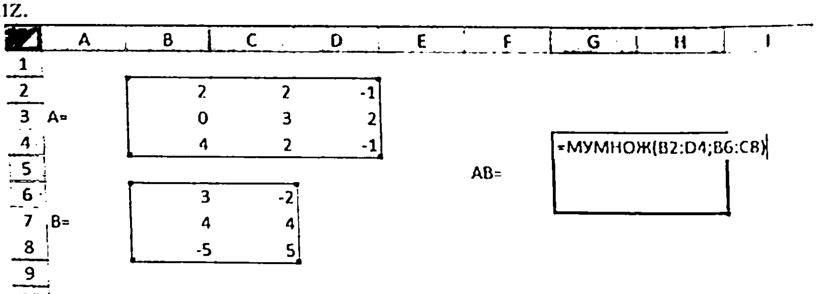
II) Excel funksiyalari ro‘yxatidan matematik funksiyalar ro‘yxatini topamiz. bu ro‘yxatdan "МУМНОЖ" funksiyani tanlaymiz.



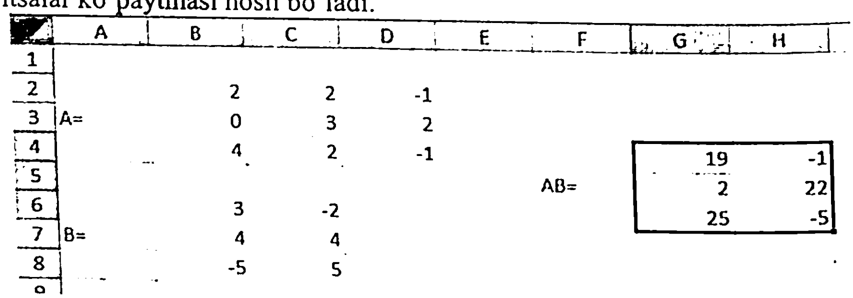
III) Hosil bo‘lgan yangi oynachada “Массив1” qatoriga A matritsa koordinatalarini, “Массив2” qatoriga B matritsa koordinatalarini kiritamiz. Enter tugmasini bosamiz.



IV) Bunda funksiya kiritilgan katakda ko‘paytmaning faqat bitta elementi hosil bo‘ladi. Boshqa elementlarni topish uchun ko‘paytma o‘lchovlariga mos uchta satr va uchta ustunli jadvalni rasmdagiday belgilaymiz va F2 tugmasini bosamiz.



v) Ctrl+Shift+Enter tugmalarni bir paytda bosamiz. Belgilangan kataklarda matritsalar ko‘paytmasi hosil bo‘ladi.



Demak, $AB = \begin{pmatrix} 19 & -1 \\ 2 & 22 \\ 25 & -5 \end{pmatrix}$.

1.2. Determinantlar nazariyasi

A kvadrat matritsaning skalyar (sonli) miqdorni aniqlovchi determinant tushunchasining kiritilishi chiziqli tenglamalar sistemasini yechish bilan chambarchas bog'liq.

$n-$tartibli o'rin almashtirish tushunchasini kiritamiz. $1,2,3,...,n$ sonlarning biror - bir tartibda yozilishi $n-$tartibli o'rin almashtirish deb ataladi.

Masalan $\{1,2,3,4\}$ to'plamni qaraymiz. Bu to'plamdagi o'rin almashtirishlar $P_1=(2,3,1,4)$, $P_2=(3,2,4,1)$, $P_3=(3,1,2,4)$ va hokazo.

Umuman olganda har qanday n ta elementdan tuzilgan to'plamda o'rin almashtirish tushunchasini kiritish mumkin. Bu jarayonni to'plam elementlarini 1 dan boshlab ketma-ket natural sonlar bilan nomerlaymiz va $\{1,2,...,n\}$ sonlar ustida o'rin almashtirishga keltiramiz. Ya'ni, $\{1,2,...,n\}$ sonlar ustida o'rin almashtirish tushunchasini qarash umumiylikni buzmaydi.

6-ta'rif. Agar $m>k$ bo'lib, m soni k dan chaproqda joylashgan bo'lsa, u holda P o'rin almashtirishda m va k sonlar inversiyani tashkil qiladi deyiladi.

7-ta'rif. P o'rin almashtirishdagi barcha elementlar tashkil etgan umumiy inversiyalar soni P o'rin almashtirishning inversiyalar soni, deb ataladi va $inv\,P$ kabi belgilanadi.

$inv\,P$ sonning juft yoki toq bo'lishiga qarab, mos ravishda, P o'rin almashtirish juft yoki toq deb ataladi.

Masalan, $P=(1,4,3,2)$ o'rin almashtirishda 1 va 4 sonlari inversiya tashkil qilmaydi. 3 soniga mos inversiyalar 1 ta, 2 soniga mos inversiyalar 2 ta. Demak, $inv\,P=1+2=3$. P o'rin almashtirish toq.

O'rin almashtirish quyidagi xossalarga ega:

1) $\{1,2,3,...,n\}$ to'plamdagi barcha o'rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng;
2) juft va toq o'rin almashtirishlar soni o'zaro teng, ya'ni har biri $\frac{n!}{2}$ tadan;
3) o'rin almashtirishda ikkita elementning o'rni almashtirilsa uning juft-toqligi o'zgaradi.

8-ta'rif. $\{1,2,3,...,n\}$ sonlar to'plamini o'ziga akslantiruvchi o'zaro bir qiymatli akslantirish o'rinlashtirish deb ataladi.

O'rinlashtirishni ikkita o'rin almashtirish bilan berishimiz mumkin. Ikkita P_1 va P_2 $n-$ tartibli o'rin almashtirishlardan tuzilgan F o'rinlashtirish quyidagicha belgilanadi: $F=\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$.

Masalan, $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $F_1=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ o‘rinlashtirishlar o‘zaro teng. Chunki bu o‘rinlashtirishlarning har biri 1 ga 2 ni, 2 ga 3 ni va 3 ga 1 ni mos qo‘yadi.

O‘rinlashtirishni har doim $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ ko‘rinishga keltirish mumkin. Bunda $P_2=(i_1,i_2,...,i_n)$ biror $n-$ tartibli o‘rin almashtirish. P_2 almashtirish juft bo‘lsa, F o‘rinlashtirish juft, P_2 toq bo‘lsa, F ham toq deyiladi. $h(F)=(-1)^{im\,P_2}$ miqdorga F o‘rinlashtirishning signaturasi deyiladi. $n-$tartibli barcha o‘rinlashtirishlar to‘plamini S_n bilan belgilaymiz.

Endi $n-$ tartibli determinant tushunchasini kiritamiz.

Bizga $n-$tartibli

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matritsa berilgan bo‘lsin.

9-ta’rif. Barcha mumkin bo‘lgan turli $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ o‘rinlashtirishlarga mos $h(F)a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}...a_{ni_n}$ ko‘rinishdagi ko‘paytmalarning yig‘indisidan iborat songa $n-$ tartibli determinant deyiladi.

tartibli determinant $\det(A)$, $|A|$ yoki

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanadi.

O‘rinlashtirish va o‘rin almashtirishlarning xossalariga asosan, bu ta’rifdan

1) $n-$tartibli determinant $n!$ ta hadning yig‘indisidan iborat;

2) bu yig‘indining har bir hadi matritsaning turli satrlari va turli ustunlarida joylashgan n ta elementi ko‘paytmasidan iborat;

3) yuqorida aytilgan ko‘paytmalarning yarmi ($n!/2$ tasi) o‘z ishorasi bilan, qolgan yarmi qarama-qarshi ishora bilan olingan.

Bundan ko‘rinib turibdiki, determinantni ta’rif bo‘yicha hisoblash juda ko‘p amallardan iborat bo‘lib, ma’lum noqulayliklarga ega. Misol uchun 4- tartibli determinant $4!=24$ ta haddan iborat. Har bir hadi matritsaning turli satr va ustunlaridan olingan 4 ta elementi ko‘paytmasidan iborat. Bu hadlarning har birining ishorasini topish uchun 24 ta o'rinlashtirishning juft-toqligi aniqlanishi talab qilinadi.

Shu sababdan determinantni uning ba'zi xossalaridan foydalanib hisoblash qulayroq. Bu xossalarni berishdan oldin ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni alohida qarab o'tamiz.

$2-$tartibli kvadrat matritsaning determinanti quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Haqiqatan, ikkinchi tartibli turli o'rinlashtirishlar soni $2! = 2$ ta. Bular

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ va } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bulardan birinchisi juft, ikkinchisi esa toq. Shu sababli determinant $a_{11}a_{22}$ va $-a_{12}a_{21}$ sonlarning yig'indisidan iborat.

11-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli matritsaning determinantini hisoblang:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 - 10 \cdot 9 = 48 - 90 = -42.$

12-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli determinantni hisoblang: $\begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}.$

Yechish. Yuqoridagi ta'rifga asosan

$$\begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1.$$

Endi uchinchi tartibli determinantni qaraymiz. Uchinchi tartibli turli o'rinlashtirishlar soni $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ta. Bular

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, S_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bu o'rinlashtirishlarning ikkinchi satridagi o'rin almashtirishlarni qaraymiz. S_1 da $P_1 = (1,2,3)$ bo'lib, $inv\,P_1 = 0$, S_2 da $P_2 = (2,3,1)$ bo'lib, $inv\,P_2 = 0 + 0 + 2 = 2$, S_3 da $P_3 = (3,1,2)$ bo'lib, $inv\,P_3 = 0 + 1 + 1 = 2$. Demak, S_1, S_2 va S_3 lar juft bo'lib, ularga mos signaturalar 1 ga teng. Shu sababli determinantni ifodalovchi yig'indida bu uchta o'rinlashtirishga mos $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$ va $a_{13}a_{21}a_{32}$ ko'paytmalar o'z ishorasi bilan olinadi. Juft va toq o'rin almashtirishlar soni teng bo'lganligi sababli, qolgan uchta S_4, S_5 va S_6 lar toq va ularga mos

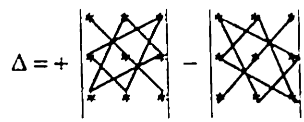
$a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$ va $a_{11}a_{23}a_{32}$ ko'paytmalar qarama-qarshi ishora bilan olinishi kerak.

Yuqoridagilarni umumlashtirsak, uchinchi tartibli determinant uchun quyidagi ifodani olamiz:

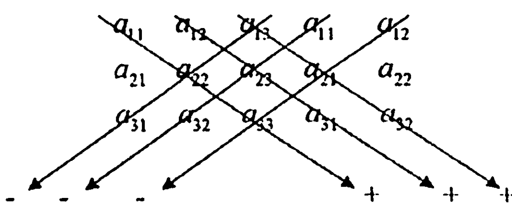
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Uchinchi tartibli determinantda o'z ishorasi va qarama-qarshi ishora bilan olinadigan hadlarni eslab qolish uchun odatda ikki xil usuldan foydalaniladi. Bular uchburchak va Sarrus usullari deb nomlanadi.

Uchburchak usuli. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning uchburchak usuli quyidagicha sxematik ko'rinishda amalga oshiriladi:



Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning Sarrus qoidasi quyidagicha amalga oshiriladi. Determinant ustunlarining o'ng yoniga chapdagi birinchi va ikkinchi ustunlar ko'chirib yoziladi. Hosil bo'lgan kengaytirilgan jadvalda bosh diagonal yo'nalishida joylashgan elementlar ko'paytirilib musbat ishora bilan, ikkilamchi diagonal yo'nalishidagi elementlar ko'paytirilib manfiy ishora bilan olinib yig'indi tuziladi. Bu yig'indi uchinchi tartibli determinantning qiymatidan iborat. Buni sxema ko'rinishida quyidagicha tasvirlash mumkin:



13-misol. Quyidagi uchinchi tartibli determinantni uchburchak usuli bilan hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot2+1\cdot0\cdot5+3\cdot1\cdot(-1)-(-1)\cdot4\cdot5-1\cdot3\cdot2-2\cdot0\cdot1=27.$$

Determinant quyidagi xossalarga ega:

1. Agar determinant biror satri (ustuni) ning barcha elementlari nolga teng bo'lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6\cdot 0\cdot 2 + 0\cdot 4\cdot 3 + 7\cdot 0\cdot 3 - 3\cdot 0\cdot 3 - 6\cdot 4\cdot 0 - 7\cdot 0\cdot 2 = 0.$$

2. Diagonal matritsaning determinanti diagonal elementlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni:

$$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

3. Yuqori (quyi) uchburchakli matritsalarning determinantlari uning bosh diagonal elementlari ko'paytmasiga teng, ya'ni $\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Masalan, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 6 = 60.$

4. Determinantning biror satri (ustuni) elementlarini $k \neq 0$ songa ko'paytirish determinantni shu songa ko'paytirishga teng kuchlidir yoki biror satr (ustun) elementlarining umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni:

$$k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}.$$

Masalan, $3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(24+60+56-18-70-64) = -36.$

$$\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 7 & 3\cdot 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72+180+168-54-192-210 = -36.$$

$$\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 7 & 3 \\ 3\cdot 5 & 6 & 8 \\ 3\cdot 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72+180+168-54-192-210 = -36.$$

5. $n-$tartibli determinant uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$\det(kA) = k^n\cdot\det(A)$$

6. Determinantda ikkita satr (ustun) o'rinlari almashtirilsa, determinantning ishorasi o'zgaradi.

$$\text{Masalan, } \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 39.$$

Endi bu matritsada birinchi va uchinchi ustunlarining o'rinlarini almashtiramiz, u holda

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 12 - 20 - 2 - 20 + 18 = -39.$$

Bundan ko'rinib turibdiki, determinantlar faqat ishorasi bilan farq qiladi.

7. Agar determinant ikkita bir xil satr (ustun)ga ega bo'lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo'ladi.

$$\text{Masalan, } \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 45 + 36 + 150 - 36 - 150 - 45 = 0.$$

8. Agar determinantning biror satri (yoki ustuni) elementlariga boshqa satr (ustun)ning mos elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shilsa, determinantning qiymati o'zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+1\cdot 2 & 4+2\cdot 2 & 5+3\cdot 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Haqiqatan ham, tenglikning chap tarafi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 30 + 30 - 36 - 4 - 25 = -1.$$

tenglikning o'ng tarafi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+1\cdot 2 & 4+2\cdot 2 & 5+3\cdot 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 66 + 60 - 72 - 55 - 8 = -1.$$

Demak tenglik o'rinli.

9. Agar determinant ikki satri (ustuni)ning mos elementlari proporsional bo'lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{31} \end{vmatrix} = 0.$$

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 12 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 2 \\ 12 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72+192+192-72-192-192=0.$$

10. Transponirlash natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 39.$$

11. Agar determinant biror satri (ustuni)ning har bir elementi ikki qo'shiluvchi yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda determinant ikki determinant yig'indisiga teng bo'lib, ulardan birining tegishli satri (ustuni) birinchi qo'shiluvchilaridan, ikkinchisining tegishli satri (ustuni) ikkinchi qo'shiluvchilaridan iborat bo'ladi, ya'ni:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

12. Agar determinant satr (ustun)laridan biri uning qolgan satr (ustun) larining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, determinant nolga teng.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 16 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2\cdot 2+4\cdot 3 \\ -2 & 1 & -2\cdot 2+4\cdot 1 \\ 3 & -2 & 3\cdot 2-4\cdot 2 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Toq tartibli har qanday qiya simmetrik matritsaning determinanti nolga teng.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 60 - 60 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

14. Bir xil tartibli ikkita matritsalar ko'paytmasining determinanti, bu matritsalar determinantlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Bizga $n-$tartibli kvadrat matritsa berilgan bo'lsin.

10-ta'rif. $n-$tartibli A kvadrat matritsaning $1 \le k \le n-1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy k ta satrlari va k ta ustunlari kesishgan joyda turgan elementlardan tashkil topgan $k-$tartibli matritsaning determinanti d determinantning $k-$tartibli minori deb ataladi.

$k-$tartibli minor sifatida A kvadrat matritsaning $n-k$ ta satr va $n-k$ ta ustunini o'chirishdan hosil bo'lgan determinant, deb ham qarash mumkin.

11-ta'rif. Matritsaning diagonal elementlari yordamida hosil bo'lgan minorlar bosh minorlar deb ataladi.

12-ta'rif. $n-$tartibli A kvadrat matritsada $k-$tartibli M minor turgan satrlar va ustunlar o'chirib tashlangandan so'ng qolgan $(n-k)-$tartibli M' minorga M minorning to'ldiruvchisi deyiladi va aksincha.

M minor va uning M' to'ldiruvchi minorini sxematik ravishda quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \boxed{M} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kk+1} & \dots & a_{kn} \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Shunday qilib, determinantning o'zaro to'ldiruvchi minorlar jufti haqida gapirish mumkin. Xususiy holda, a_{ij} element va determinantning $i-$satri va $j-$ustunini o'chirishdan hosil bo'lgan $(n-1)-$tartibli minor o'zaro to'ldiruvchi minorlar juftini hosil qiladi.

13-ta'rif. a_{ij} minorning (elementning) algebraik to'ldiruvchisi deb $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ songa aytiladi.

Laplas teoremasi. Determinantning qiymati uning ixtiyoriy satr (ustun) elementlari bilan, shu elementlarga mos algebraik to'ldiruvchilar ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

Bu formulaga Δ determinantni i satr elementlari bo'yicha yoyish formulasi deyiladi.

Determinantning biror satr (ustun) elementlari bilan uning boshqa satri (ustuni) elementlari algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng.

14-misol. Quyidagi determinantni Laplas formulasi bilan hisoblang:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Yechish. Berilgan determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoysak

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=2A_{11}+A_{12}+3A_{13}=2(-1)^{1+1}\cdot M_{11}+(-1)^{1+2}\cdot M_{12}+3(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=2(9-8)-(15-2)+3(20-3)=2-13+51=40.$$

15-misol. Quyidagi determinantni Laplas formulasi bilan hisoblang:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Yechish. Berilgan determinantni ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib chiqamiz. Bu ustunda 2 ta noldan farqli element bo'lgani uchun natijada 2 ta 3-tartibli determinant hosil bo'ladi.

$$\Delta=-1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Yoki avval $a_{32}=2$ elementni nolga keltirishimiz mumkin. Buning uchun 2-satrni 2 ga ko'paytirib 3-satrga qo'shamiz va hosil bo'lgan determinantni 2-ustun elementlariga nisbatan yoyamiz va hisoblaymiz:

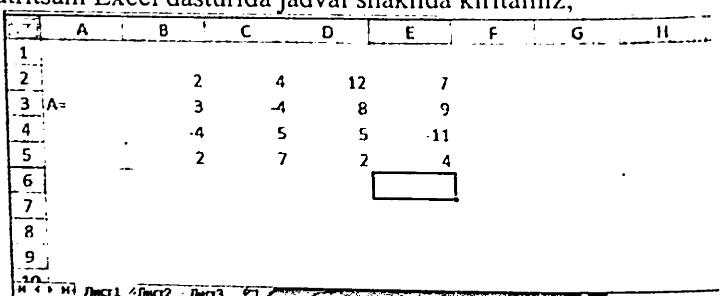
$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&3&2\\2&-1&4&1\\7&0&9&7\\1&0&6&2\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&3&2\\7&9&7\\1&6&2\end{vmatrix}=-21.$$

Ko'rinib turibdiki, Laplas teoremasidan yuqorida keltirilgan xossalar bilan birgalikda foydalanish determinantni hisoblashni ancha osonlashtiradi. Buning uchun biror satr yoki ustunni tanlab olib, shu ustun yoki satrdagi elementlarni determinantning xossalaridan foydalanib iloji boricha nollarga keltirishimiz kerak bo'ladi. So'ngra, Laplas teoremasi yordamida determinantning tartibini bittaga kamaytirishimiz mumkin.

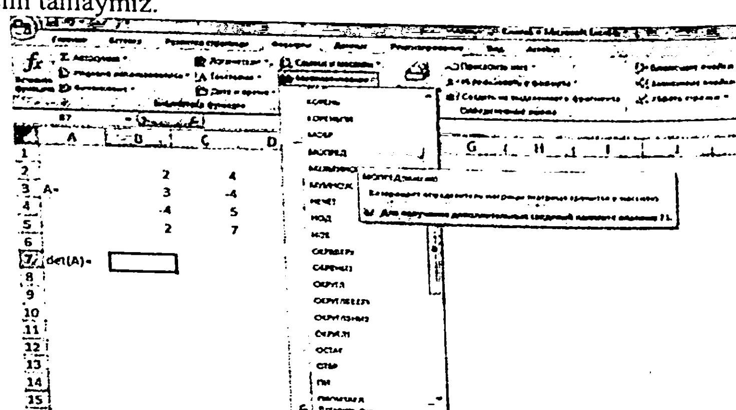
Determinantni Excelda hisoblash usuli bilan tanishib chiqamiz.

16-misol. $A=\begin{pmatrix}2&4&12&7\\3&-4&8&9\\-4&5&-5&-11\\2&7&2&4\end{pmatrix}$ matritsaning determinantini hisoblang.

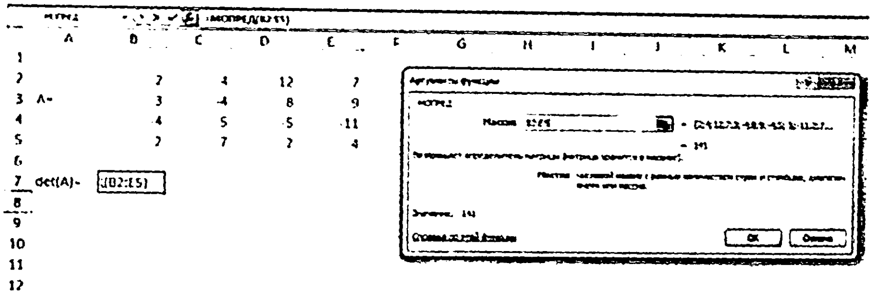
I. Matritsani Excel dasturida jadval shaklida kiritamiz;



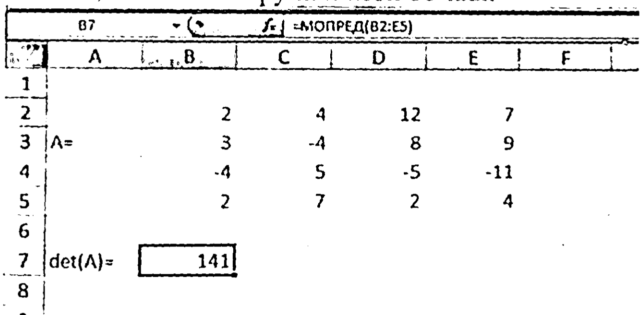
II. Biror katakni tanlaymiz. Matematik funksiyalar ro'yxatidan "МОПРЕД" funksiyasini tanlaymiz.



III. Hosil bo'lgan oynada massiv qatoriga matritsa joylashgan koordinatalarni kiritamiz.



Enter tugmasi bosilsa, determinant qiymati hosil bo‘ladi.



	A	B	C	D	E	F
1						
2		2	4	12	7	
3	A=	3	-4	8	9	
4		-4	5	-5	-11	
5		2	7	2	4	
6						
7	det(A)=	141				
8						

Determinant qiymati 141 ga teng ekan.

1.3. Matritsa rangi. Teskari matritsa

Ixtiyoriy o‘lchamli matritsaning bir necha satr yoki ustunlarini o‘chirishdan hosil bo‘lgan kvadrat matritsa determinantiga matritsa osti minori deyiladi. Bu kvadrat matritsa tartibi matritsa osti minorning tartibi deyiladi. Agar berilgan matritsa kvadrat shaklda bo‘lsa, uning eng katta tartibli minori o‘ziga teng.

Masalan: $A=\begin{pmatrix}4&5&7\\2&1&4\\3&7&0\end{pmatrix}$ matritsaning 1-satr va 1-ustunini o‘chirishdan 2-tartibli minor $M_{11}=\begin{vmatrix}1&4\\7&0\end{vmatrix}$, 2-satr va 3-ustunini o‘chirishdan 2-tartibli minor $M_{23}=\begin{vmatrix}4&5\\3&7\end{vmatrix}$ va hokazo minorlarni hosil qilish mumkin.

14-ta’rif. A matritsaning rangi, deb noldan farqli matritsa osti minorlarining eng katta tartibiga aytiladi va $rang(A)=r(A)$ ko‘rinishida ifodalanadi.

Matritsa rangining xossalari:

1) agar A matritsa $m\times n$ o‘lchovli bo‘lsa, u holda $rangA\le\min(m;n)$;
2) A matritsaning barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, u holda $rangA=0$;

3) agar A matritsa n – tartibli kvadrat matritsa va $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda $rang A = n$.

17-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang.

Yechish. Berilgan matritsa (3×2) o'lchamli bo'lgani uchun satrlar va ustunlar sonini taqqoslaymiz va kichigini, ya'ni 2 ni tanlaymiz. Matritsadan ikkinchi tartibli minorlar ajratamiz va ularning qiymatini hisoblaymiz. Bu jarayonni noldan farqli ikkinchi tartibli minor topilguncha davom ettiramiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Berilgan matritsadan noldan farqli eng yuqori ikkinchi tartibli minor ajraldi. Demak, ta'rifga binoan, A matritsa rangi 2 ga teng, ya'ni $rang(A) = 2$.

Matritsa rangi uning ustida quyidagi almashtirishlar bajarganda o'zgarmaydi:

1) matritsa biror satri (ustuni) har bir elementini biror noldan farqli songa ko'paytirganda;
2) matritsa satrlari (ustunlari) o'rinlari almashtirilganda;
3) matritsa biror satri (ustuni) elementlariga uning boshqa parallel satri (ustuni) mos elementlarini biror noldan farqli songa ko'paytirib, so'ngra qo'shganda;
4) barcha elementlari noldan iborat satrni (ustunni) tashlab yuborganda;
5) matritsa transponirlanganda.

Teorema. Elementar almashtirishlar matritsa rangini o'zgartirmaydi.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

matritsada birinchi satrni 2 ga va ikkinchi satrni –3 ga ko'paytirib, birinchini ikkinchiga qo'shsak, so'ngra yana birinchi satrni 5 ga, uchunchi satrni 3 ga ko'paytirib, natijalarni qo'shsak,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi.

Bu matritsada ikkinchi satrni 1 ga, uchunchi satrni 5 ga ko'paytirib, ikkinchi satrni uchunchi satrga qo'shsak,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi. Yana

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsani olib, yuqoridagi singari almashtirishlarni bajarsak,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hosil bo'ladi.

A va B matritsaga qo'llanilgan almashtirishlarning mohiyati quyidagidan iborat: m satrli matritsa berilgan holda birinchi va ikkinchi satrlarni, undan keyin birinchi va uchinchi satrlarni, ..., nihoyat, birinchi va $m-$ satrlarni shunday sonlarga ko'paytiramizki, tegishli songa ko'paytirilgan birinchi satrni navbat bilan boshqa hamma satrlarga qo'shganimizda ikkinchi satrdan boshlab birinchi ustun elementlari nollarga aylanadi. So'ngra ikkinchi satr yordamida keyingi hamma satrlar bilan yana shunday almashtirishlarni bajaramizki, uchinchi satrdan boshlab, ikkinchi ustun elementlari nollarga aylanadi. Undan keyin to'rtinchi satrdan boshlab uchinchi ustun elementlari nollarga aylanadi va hokazo. Shu tariqa bu jarayon oxirigacha davom ettiriladi.

Agar matritsaning qandaydir satrlari boshqa satrlari orqali chiziqli ifodalangan bo'lsa, u holda shu almashtirishlar natijasida, bunday satrlarning hamma elementlari nollarga (ya'ni bunday satrlar nol satrlarga) aylanadi.

Birorta elementi noldan farqli satrni nolmas satr, deb atasak, yuqoridagi almashtirishlardan keyin hosil bo'lgan matritsaning rangi nolmas satrlar soniga teng bo'ladi, chunki bunday satrlar chiziqli erkli satrlarni bildiradi.

Yuqorida qo'llaniladigan almashtirishlar matritsani elementar almashtirishlardan iborat bo'lgani uchun, ular matritsaning rangini o'zgartirmaydi.

Teorema. Pog'onasimon matritsaning rangi uning nolmas satrlari soniga teng.

Ixtiyoriy matritsaning rangini aniqlash uchun yuqorida ko'rsatilgan qoida bo'yicha elementar almashtirishlar yordamida matritsa pog'onasimon matritsaga keltiriladi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

bu yerda $a_{ii} \neq 0, \; i = 1,\dots,r, \; r \leq k.$

Pog'onasimon matritsaning rangi r ga teng.

Masalan, yuqoridagi misollarda $r(A)=3$, $r(B)=2$ bo'ladi.

18-misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini aniqlang.

Yechish. Berilgan dastlabki matritsa ustida quyidagicha elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matritsa pog'onasimon matritsaga keltirildi. Uchinchi satr barcha elementlari nollardan iborat bo'lganligi sababli, berilgan matritsa rangi ikkiga teng.

Matritsa yordamida vektorlar sistemasining rangi bilan tanishib chiqamiz: o'lchamlari teng bir necha vektorlardan tuzilgan $A_i=(a_{1i}, a_{2i}, \dots a_{mi})^T$, $i=1,2,\dots,n$, ustun vektorlar sistemasini qaraymiz.

15-ta'rif. Vektorlar sistemasining rangi, deb shu vektorlar koordinatalari yordamida tuzilgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa rangiga aytiladi va $r(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ko'rinishida belgilanadi.

Izoh. Xuddi shuningdak, satr vektorlar sistemasi ham qaralishi mumkin.

19-misol. $A_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorlar sistemasining rangini hisoblang.

Yechish. Berilgan vektor koordinatalari yordamida matritsa quramiz va martitsa rangini elementar almashtirish yordamida topamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 14 & 13 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$r(A)=3$ bo'lgani uchun $r(A_1, A_2, A_3, A_4)=3$ bo'ladi.

16-ta'rif. Kvadrat matritsa elementlaridan tuzilgan determinant noldan farqli bo'lsa, u holda bunday matritsa aynimagan yoki maxsusmas matritsa deyiladi. Aks holda, ya'ni agar determinant nolga teng bo'lsa, bu matritsa aynigan yoki maxsus matritsa deyiladi.

20-misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$ va $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

matritsalarning aynigan yoki aynimaganligini aniqlang.

Yechish. Berilgan matritsalarning determinantlarini hisoblaymiz:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}=10-60=-50,$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}=10-10=0,$$

$$|E|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Demak, A va E matritsalar – aynimagan, B matritsa esa aynigan matritsa. $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ ixtiyoriy sonlar va $A_1,A_2,...,A_n$ vektorlar berilgan bo'lsin.

17-ta'rif. $B=\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2+...+\alpha_n A_n$ vektorga $A_1,A_2,...,A_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

18-ta'rif. Agar A matritsaning r tartibli minoridan katta barcha minorlari nolga teng bo'lsa, u holda matritsaning noldan farqli r tartibli minori bazis minor deb ataladi.

Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, bazis minorning tartibi matritsa rangiga teng. Bazis minorlar haqidagi quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. Matritsaning ixtiyoriy ustuni (satri) bazis minor joylashgan ustunlar (satrlar) chiziqli kombinatsiyasidan iborat.

Isbot. Umumiylikni buzmasdan bazis minor birinchi r ta satr va birinchi r ta ustunlar kesishmasida joylashgan, deb olamiz. $r+1$ tartibli quyidagi minorni ko'rib chiqamiz.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} & a_{sk} \end{vmatrix}$$

Bu minor bazis minorga $s-$ satr va $k-$ ustun elementlarini qo'shishdan hosil bo'lgan. Ta'rifga asosan $D=0$. Determinantni Laplas teoremasidan foydalangan holda oxirgi satri bo'yicha yoysak,

$$a_{s1}D_{s1}+\ldots+a_{sr}D_{sr}+a_{sk}D_{sk}=0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bunda D_{sj} son a_{sj} elementning algebraik to'ldiruvchisi. Teorema shartiga ko'ra $D_{sk}\neq 0$. Bundan:

$$a_{sk}=\alpha_1 a_{s1}+\alpha_2 a_{s2}+\ldots+\alpha_r a_{sr},$$

bu yerda $\alpha_j=\dfrac{D_{sj}}{D_{sk}}, j=1,2,\ldots,r$. Bu tenglikda k ni 1 dan m gacha o'zgartirib, ixtiyoriy $k-$ ustun α_j, $j=1,2,\ldots,r$ koeffitsiyentlar bilan bazis minorga mos ustunlar chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodasini olamiz.

19-ta'rif. A kvadrat matritsaning har bir a_{ik} elementini unga mos algebraik to'ldiruvchisi bilan almashtirish natijasida hosil qilingan matritsa ustida transponirlash amalini bajarishdan hosil bo'lgan $\overline{A}$ matritsa berilgan matritsaga biriktirilgan matritsa deyiladi.

Masalan: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matritsaga biriktirilgan matritsa

$\overline{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{i1} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{i2} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1j} & A_{2j} & \ldots & A_{ij} & \ldots & A_{nj} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{in} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.

21-misol. Quyidagi $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa uchun biriktirilgan matritsa topilsin.

Yechish. Matritsaning barcha elementlariga mos algebraik to'ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 4\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-20,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-15,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\end{vmatrix}=4.$$

Shunday qilib, berilgan A kvadrat matritsaga biriktirilgan $\overline{A}$ matritsa

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}0 & -5 & -20\\ 0 & -15 & -10\\ -10 & 1 & 4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0 & 0 & -10\\ -5 & -15 & 1\\ -20 & -10 & 4\end{pmatrix}$$

ko'rinishda aniqlanadi.

20-ta'rif. Agar A kvadrat matritsa uchun $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ tenglik bajarilsa, A^{-1} matritsa A matritsaga teskari matritsa deyiladi.

Ta'rifga asosan, $\det(A)\det(A^{-1})=\det(AA^{-1})=\det(E)=1$ bo'lganligi sababli, agar teskari matritsa mavjud bo'lsa $\det(A)\neq 0$ ekanligini hosil qilamiz. Agar $\det(A)=0$ bo'lsa, teskari matritsa mavjud emas.

Odatda matritsaga teskari matritsa topishning 2 xil usulidan foydalanamiz:

1. Agar A matritsa aynimagan bo'lsa, u holda uning uchun yagona A^{-1} matritsa mavjud bo'ladi va u quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\overline{A},$$

bunda $\overline{A}$ matritsa A ga biriktirilgan matritsa.

22-misol. Berilgan matritsaga teskari matritsani toping: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$.

Yechish. 1) A matritsaning determinantini topamiz:

$$\det A = 1\cdot\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 0\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 0\end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix} =$$

$$= -48 - 2\cdot(-42) + 3\cdot(32-35) = -48 + 84 - 9 = 27 \neq 0.$$

$\det A \neq 0$ demak A^{-1} mavjud.

2) A matritsa barcha elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 0\end{vmatrix} = 5\cdot 0 - 6\cdot 8 = -48;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 0\end{vmatrix} = -(4\cdot 0 - 6\cdot 7) = 42;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix} = 4\cdot 8 - 5\cdot 7 = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 0\end{vmatrix} = 24;\quad A_{22} = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 0\end{vmatrix} = -21;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix} = 6;\quad A_{31} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix} = 6;\quad A_{33} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix} = -3;$$

3) $\overline{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}$ matritsani yozamiz.

4) A^{-1} matritsani topamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\overline{A} = \frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}.$$

Tekshiramiz: $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teskari matritsani topishning Gauss-Jordan usulida maxsusmas matritsani shu tartibdagi birlik matritsa bilan kengaytiriladi, kengaytirilgan matritsa satrlari ustida elementar almashtirish to kengaytirilgan matritsa birinchi qismida birlik matritsa hosil bo'lguncha olib boriladi, natijada kengaytirilgan matritsaning ikkinchi qismida berilgan matritsaga teskari bo'lgan matritsa hosil bo'ladi. Bu jarayonni Gauss-Jordan modifikatsiyasi (yoki formulasi) ko'rinishida yozishimiz mumkin: $(A|E)\sim(E|A^{-1})$

23-misol. Gauss-Jordan usulida berilgan matritsaga teskari matritsani toping.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Yechish. (3×6)o'lchamli $\Gamma=(A/E)$ kengaytirilgan matritsani yozamiz. Avval matritsaning satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarib uni pog'onasimon ko'rinishga keltiramiz $\Gamma_1=(A_1/B)$, keyin $\Gamma_2=(E/A^{-1})$ ko'rinishga keltiramiz.

$$\Gamma=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ II-I \\ III-2\cdot I \end{matrix}\sim$$

$$\sim\Gamma_1=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ II+III \\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ III\div 2 \end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} I-II-III \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) = \Gamma_2$$

Demak, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

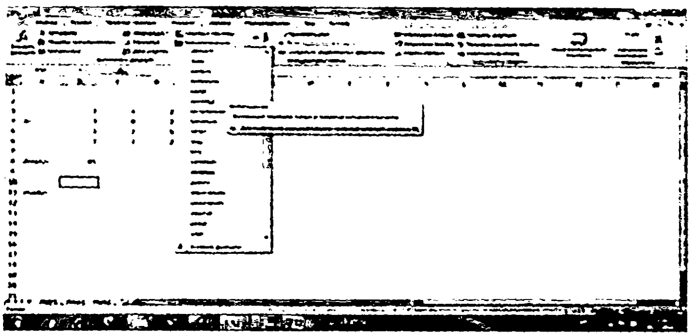
Tekshiramiz: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

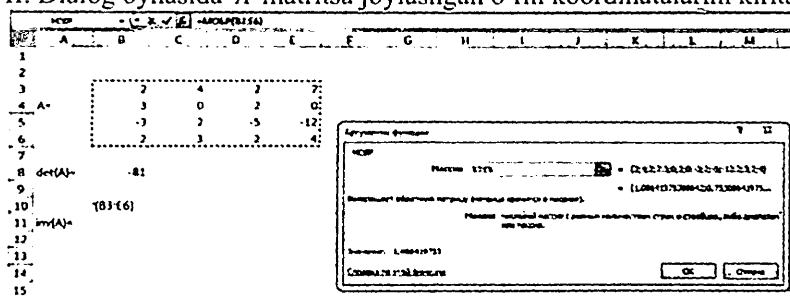
Endi teskari matritsani Excelda qurish bilan tanishib chiqamiz.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & -12 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning teskarisini topamiz. Birinchi navbatda matritsaning determinantini hisoblaymiz. $\det(A) = -81 \neq 0$. Demak, teskari matritsa mavjud.

I. Bo‘sh katakni belgilaymiz. Matematik funksiyalardan “МОБР” funksiyasini tanlaymiz.



II. Dialog oynasida A matritsa joylashgan o'rni koordinatalarini kiritamiz.



III. Enter tugmasini bosamiz. Belgilangan katakda teskari matritsaning birinchi elementi paydo bo'ladi. Boshqa elementlarni hosil qilish uchun shu katakdan boshlab 4 ga 4 jadvalni belgilaymiz va $F2$ tugmasini bosamiz. Keyin Ctrl+Shift+Enter tugmalari birgalikda bosiladi. Shu bilan teskari matritsani hosil qilamiz.

B10 | {=МОБР(B3:E6)}

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		2	4	2	7		
4	A=	3	0	2	0		
5		-3	2	-5	-12		
6		2	3	2	4		
7							
8	det(A)=	-81					
9							
10		1,08642	0,75309	0,12346	-1,53086		
11	inv(A)=	-0,14815	-0,14815	0,07407	0,48148		
12		-1,62963	-0,62963	-0,18519	2,2963		
13		0,38272	0,04938	-0,02469	-0,49383		
14							

Matritsalarni ko'paytirish usuli bilan tekshirib, natija to'g'riligiga ishonch hosil qilishimiz mumkin.

	A	B	C	D	E
1					
2					
3		2	4	2	7
4	A=	3	0	2	0
5		-3	2	5	-12
6		2	3	2	4
7					
8	det(A)=	-81			
9					
10		1,08642	0,75309	0,12346	-1,53086
11	inv(A)=	-0,14815	-0,14815	0,07407	0,48148
12		-1,62963	-0,62963	-0,18519	2,2963
13		0,38272	0,04938	-0,02469	-0,49383
14					

	1	0	0	0
	0	1	0	0
A*inv(A)=	0	0	1	0
	0	0	0	1

1-bobga doir savollar

1. Matritsa, deb nimaga aytiladi?
2. Satr matritsa, ustun matritsa, deb qanday matritsaga aytiladi?
3. Matritsalarni qo‘shish va matritsani songa ko‘paytirish amallari bo‘ysunadigan xossalarni sanab o‘ting.
4. Matritsa satrlarini mos ustunlari bilan almashtirish amali qanday nomlanadi?
5. O‘zaro zanjirlangan matritsalar qanday ko‘paytiriladi?
6. Matritsalarni ko‘paytirish amali qanday xossalarga bo‘ysunadi?
7. $n-$tartibli kvadratik matritsa, deb qanday matritsaga aytiladi?
8. Uchinchi tartibli determinantni hisoblash Sarrus qoidasi nimadan iborat?
9. Juft yoki toq o‘rin almashtirish tizimi, deb qanday o‘rin almashtirishga aytiladi?
10. $n-$tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
11. Algebraik to‘ldiruvchi deb nimaga aytiladi?
12. Determinantni transponirlashdan tashqari uning ustida qanday almashtirishlar bajarganda uning qiymati o‘zgarmaydi?
13. Matritsa rangini hisoblashning qanday usullarini bilasiz?
14. Aynigan matritsa, deb qanday kvadrat matritsaga aytiladi?
15. Nima uchun aynigan matritsaning teskarisi mavjud emas?

1-bobga doir misol va masalalar

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan $C=7A-4B$ matritsani toping.

2. AB va BA matritsalarni toping (agar ular mavjud bo‘lsa):

a) $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 3 & 9\end{pmatrix}$. b) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\5 & 1\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\-1 & 5 & 6\end{pmatrix}$ bo'lsa, AA^T va A^TA ko'paytmani hisoblang.

4. Matritsali ayniyatning to'g'riligini isbotlang.

a) $(\alpha A)^T=\alpha A^T$.

b) $(A+B)^T=A^T+B^T$.

c) $(AB)^T=B^TA^T$.

d) $(ABC)^T=C^TB^TA^T$.

5. Matritsalarni hisoblang.

a) $\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & -4\end{pmatrix}^3$, b) $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}^k$, c) $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{pmatrix}^k$, $k\in N$.

6. Matritsali ayniyatning to'g'riligini tekshiring.

a) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$, b) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

c) $(A-E)^3=A^3-3A^2+3A-E$.

7. $f(x)=2x^2-5x+3E$ ko'phad, $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\1 & 0\end{pmatrix}$ matritsa berilgan. $f(A)$ matritsali ko'phadning qiymatini toping. Bu yerda $E-$ birlik matritsa.

8. $f(x)=x^2-5x+6$ ko'phad, $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\-1 & 2 & 1\\5 & -4 & -1\end{pmatrix}$ matritsa berilgan. $f(A)$ matritsali ko'phadning qiymatini toping.

9. Ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblang.

a) $\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\beta\\\cos\alpha & \sin\beta\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}(a+b)^2 & (a-b)^2\\(a-b) & (a+b)\end{vmatrix}$.

10. Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblang.

a) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\\-1 & -1 & 0\end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 50 & 10 & -10 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix}$.

11. Ayniyatni isbotlang.

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \equiv (b-a)(c-a)(c-b)$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

c) $\begin{vmatrix} a_{11}x^3 & a_{12}x^2 & a_{13}x & a_{14} \\ a_{21}x & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31}x^2 & a_{32}x & a_{33} & 0 \\ a_{41}x^3 & a_{42}x^2 & a_{43}x & a_{44} \end{vmatrix} = x^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

12. Tenglama(tengsizlik)ni yeching.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$, b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$.

13. Determinantlarni hisoblang.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} -n & 1-n & 2-n & \dots & -2 & -1 \\ 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -1 & 0 \\ 2-n & 3-n & 4-n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$.

14. a parametrning qanday qiymatida A matritsaning rangi 3 ga teng bo'ladi.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & a\end{pmatrix}.$$

15. Matritsa rangini toping.

$$\text{a)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 4 & 8 & 11\end{pmatrix},\text{b)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix},\text{c)}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -7 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4\\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5\\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4\end{pmatrix}.$$

16. λ parametrning turli qiymatlarida matritsa rangini toping.

$$\text{a)}\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 0\\ 2 & -3 & -1 & 3\\ 3 & -6 & -1 & \lambda\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \text{b)}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 4\\ \lambda & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}.$$

17. Teskari matritsani toping.

$$\text{a)}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix},\text{b)}\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & -3 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix},\text{c)}\begin{pmatrix}5 & 8 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},$$

$$\text{d)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1\end{pmatrix}\quad (n\times n \text{ o'lchamli}).$$

18. Matritsali tenglamani yeching.

$$\text{a)}\,X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix},\quad \text{b)}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}7\\ 0\\ 7\end{pmatrix}.$$

$$\text{c)}\,X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix},\quad \text{d)}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -3 & 2 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$$

19. Uchta zavod to'rt turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Agar oyma-oy ishlab chiqarilgan

$$A_1=\begin{pmatrix}2&3&1&2\\4&2&2&1\\5&4&4&2\end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix}1&4&2&2\\3&3&3&2\\4&5&4&3\end{pmatrix};\ A_3=\begin{pmatrix}2&5&3&1\\3&4&3&1\\4&4&4&4\end{pmatrix}.$$

mahsulot hajmlari matritsalari berilgan bo'lsa: a) kvartalda ishlab chiqarilgan mahsulot matritsasini toping; b) har bir oyda ishlab chiqarilgan mahsulotlarining B_1 va B_2 orttirma matritsasini toping va natijalarni tahlil qiling.

20. Korxona uch turdagi mebel ishlab chiqarib, uni to'rtta mintaqada sotadi. Mebelning i-turdagi bir birligini j-mintaqada sotilish narxi $B=(b_{ij})=\begin{pmatrix}2&5&1&2\\1&8&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$ matritsa bilan ifodalangan. Agar bir oyda mebel (turlari bo'yicha) sotilishi $A=\begin{pmatrix}200\\80\\100\end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan bo'lsa, korxonaning har bir mintaqadagi daromadini aniqlang.

21. Ikki xil sifatdagi o'simlik yog'lari uchta do'konda sotiladi. Do'konlarda birinchi kvartalda sotilgan mahsulotlar hajmi A matritsa (ming so'm hisobida) va ikkinchi kvartaldagisi B matritsa bo'lsin.

Agar $A=\begin{pmatrix}2&5\\7&3\\2&4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3&4\\6&4\\2&5\end{pmatrix}$. bo'lsa, 1) ikki kvartalda sotilgan mahsulot hajmi;

2) ikkinchi kvartalda birinchisiga nisbatan qancha ko'p sotilganligini aniqlang.

22. Korxona ikki turdagi resurslardan foydalanib, uch turdagi mahsulotni ishlab chiqaradi. A xarajatlar matritsasi j-turdagi bir birlik mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan i-turdagi resurslar normasini, X matritsa kvartal bo'yicha ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini, P matritsa esa har bir turdagi resurs birligining bahosini ifodalasin. Agar $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&3\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}10\\20\\10\end{pmatrix};\ P=(5\quad 2)$ matritsalar berilgan bo'lsa, a) har bir turdagi resurslarning S matritsasi; b) sarf etilgan barcha resurslarning to'la narxini aniqlang.

Tayanch so'z va iboralar: matritsa, satr matritsa, ustun matritsa, satr-vektor, ustun-vektor, nol matritsa, teng matritsa, kvadrat matritsa, zanjirlangan matritsalar, diagonal matritsa, skalyar matritsa, birlik matritsa, transponirlangan matritsa, simmetrik matritsa, qiya simmetrik matritsa, determinant, aniqlovchi, ikkinchi tartibli determinant, uchinchi tartibli determinant, $n-$tartibli determinant, Sarrus qoidasi, matritsa osti minori, matritsa rangi, aynigan matritsa, aynimagan matritsa, biriktirilgan matritsa, teskari matritsa.

2-BOB. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI

2.1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi nazariyasi va asosiy tushunchalar

Ma'lumki, bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, tenglamalar sistemasi deyiladi.

Quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.1)$$

sistemaga n noma'lumli m ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (yoki soddalik uchun chiziqli tenglamalar sistemasi) deyiladi. Bu yerda $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ sonlar (2.1) sistemaning koeffitsiyentlari, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lar noma'lumlar, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sonlar esa ozod hadlar deyiladi.

Tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa tenglamalar sistemasining asosiy matritsasi deyiladi. Noma'lumlar vektorini $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ustun vektor, ozod hadlarni $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ ustun vektor shaklida ifodalaymiz. U holda tenglamalar sistemasi quyidagi matritsa shaklida yozilishi mumkin:

$$AX = B.$$

1-ta'rif. Agar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sonlar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larning o'rniga qo'yilganda (2.1) sistemadagi tenglamalarni to'g'ri tenglikka aylantirsa, bu sonlarga (2.1) sistemaning yechimlari tizimi, deb aytiladi va $X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ kabi belgilanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi kamida bitta yechimga ega bo'lsa, u holda bunday sistema birgalikda deyiladi.

1-misol. $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ sistema birgalikda chunki sistema $x = 3, y = 1$ yechimga ega.

Bitta ham yechimga ega bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

2-misol. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 3x+3y+3z=5 \end{cases}$ sistema yechimga ega bo'lmaganligi sababli birgalikda emas.

Birgalikda bo'lgan sistema yagona yechimga ega bo'lsa, aniq sistema va cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa aniqmas sistema deyiladi.

3-misol. $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x-2y=2, \\ 3x-3y=3 \end{cases}$ sistema birgalikda, ammo aniqmas, chunki bu sistema $x=\alpha$, $y=-1+\alpha$ ko'rinishdagi cheksiz ko'p yechimga ega, bunda α-ixtiyoriy haqiqiy son.

Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi bir xil yechimlar majmuiga ega bo'lsa, bunday sistemalar ekvivalent deyiladi.

4-misol. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$ (a) tenglamalar sistemasining yechimi $(x,y)=(1,1)$.

$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ (b) tenglamalar sistemasining yechimi $(x,y)=(1,1)$.

(a) va (b) tenglamalar sistemasi ekvivalent tenglamalar sistemasi deyiladi.

Berilgan tenglamalar sistemasining birorta tenglamasini noldan farqli songa ko'paytirib, boshqa tenglamasiga hadma-had qo'shish bilan hosil bo'lgan sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo'ladi.

5-misol. $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x-y=5 \end{cases}$ (a) tenglamalar sistemadagi 1-tenglamani (-3) ga ko'paytirib 2-tenglamaga qo'shib quyidagini hosil qilamiz. $\begin{cases} x+3y=5 \\ -10y=-10 \end{cases}$ (b)

natijada (a) va (b) tenglamalar sistemasi ekvivalent.

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimga ega yoki ega emasligini quyidagi teorema yordamida aniqlash mumkin.

Kronecker-Kapelli teoremasi. Chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun uning A asosiy matritsasi va kengaytirilgan $(A|B)$ matritsalarining ranglari teng bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. Faraz qilamiz (2.1) sistema birgalikda bo'lsin. U holda uning biror yechimi mavjud va $x_1=\xi_1, x_2=\xi_2, \ldots, x_n=\xi_n$ dan iborat bo'lsin.

Bu yechimni (2.1) chiziqli tenglamalar sistemasidagi noma'lumlar o'rniga qo'ysak:

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \ldots + a_{in}\xi_n = b_i, \qquad i=1,2,\ldots,m \tag{2.2}$$

ega bo'lamiz.

Bu tengliklar majmuasi quyidagi tenglikka ekvivalent:

$$\xi_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \xi_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \xi_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (2.2')$$

Bundan (2.1) sistemaning kengaytirilgan matritsasi oxirgi ustuni asosiy matritsa ustunlari kombinatsiyasidan iborat ekanligi kelib chiqadi. Ma'lumki matritsaning rangi ustunlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lgan ustunni tashlab yuborilganda o'zgarmaydi. Kengaytirilgan matritsadan ozod hadlar ustunini olib tashlasak sistemaning asosiy matritsasiga ega bo'lamiz. Demak, asosiy va kengaytirilgan matritsalarning ranglari teng. Shuni isbotlash talab etilgan edi.

Yetarliligi. Aytaylik asosiy va kengaytirilgan matritsalarning ranglari teng,

$$r(A) = r(A/B)$$

A (asosiy) matritsaning r ta bazis ustunlarini ajratamiz, bular (A/B) (kengaytirilgan) matritsaning ham bazis ustunlari bo'ladi. Faraz qilamiz birinchi r ta ustun bazis bo'lsin.

Bazis minor haqidagi teoremaga asosan A matritsaning oxirgi ustuni bazis ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida tasvirlanishi mumkin. Bu esa:

$$\xi_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \xi_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \xi_r\begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

munosabatni qanoatlantiruvchi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ lar mavjudligini bildiradi. Oxirgi munosabat quyidagi m ta tenglamalarga ekvivalent:

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \ldots + a_{ir}\xi_r = b_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

Agar (2.1) tenglamalar sistemasiga

$$x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \ldots, x_r = \xi_r, x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0, \qquad (2.3)$$

qo'ysak, u holda tenglamalar sistemasi (2.2) ga aylanadi. Bundan noma'lumlarning (2.3) qiymati (2.1) sistemadagi barcha tenglamalarni qanoatlantiradi, ya'ni sistema yechimga ega bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Kroneker - Kapelli teoremasiga ko'ra birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasining asosiy A matritsasi rangi bilan uning kengaytirilgan (A/B) matritsasining ranglari teng. $r = r(A) = r(A/B)$ qiymatni berilgan sistemaning rangi deb ataymiz. A matritsaning biror bazis minorini belgilab olamiz. Bazis satrlarga mos bo'lgan tenglamalarni berilgan sistemaning bazis tenglamalari deb ataymiz. Bazis tenglamalar bazis sistemani tashkil etadi. Bazis ustunlarda qatnashgan noma'lumlarni bazis o'zgaruvchilar, qolganlarini ozod o'zgaruvchilar, deb ataymiz.

Oldingi mavzularda berilgan bazis minor haqidagi teoremadan quyidagi tasdiq o'rinliligi kelib chiqadi.

Teorema. Chiziqli tenglamalar sistemasi o'zining bazis tenglamalar sistemasiga ekvivalent.

Soddalik uchun (2.1) sistemada birinchi r ta tenglama bazis tenglama bo'lsin. Yuqorida keltirilgan teoremaga asosan:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{2.4}$$

bazis tenglamalar sistemasi berilgan (2.1) sistemaga ekvivalent. Shuning uchun (2.1) tenglamalar sistemasi o'rniga uning rangiga teng bo'lgan (2.4) sistemani tadqiq etish yetarli.

O'z-o'zidan ko'rinadiki matritsaning rangi ustunlar sonidan katta emas, ya'ni $r \le n$. Boshqacha aytganda birgalikdagi sistemaning rangi noma'lumlar sonidan oshmaydi.

Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

1) $r = n$;

$r = n$, ya'ni bazis sistemada tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lsin. Bazis sistemani quyidagicha ifodalaymiz $A_b X = B_b$. Bunda A_b bazis minorga mos matritsa. $\det(A_b) \ne 0$ bo'lganligi sababli, A_b^{-1} mavjud va

$$X = EX = A_b^{-1}A_bX = A_b^{-1}(A_bX) = A_b^{-1}B$$

tenglik yagona yechimni ifodalaydi.

2) $r < n$ bo'lsin. Tenglamalarda $x_1, x_2, \ldots, x_r$ bazis noma'lumlar qatnashmagan barcha hadlarni uning o'ng tomoniga o'tkazamiz. U holda (2.4) sistema:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ir}x_r = b_i - a_{ir+1}x_{r+1} - \ldots - a_{in}x_n. \tag{2.4'}$$

ko'rinishni oladi.

Agar erki $x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ noma'lumlarga biror $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$ sonli qiymatlarni bersak, u holda $x_1, \ldots, x_r$ o'zgaruvchilarga nisbatan tenglamalar sistemasini olamiz va bu sistemada noma'lumlar soni asosiy matritsa rangiga teng bo'lganligi sababli u yagona yechimga ega. Erkli noma'lumlar qiymati ixtiyoriy tanlanganligi sistemaning umumiy yechimlari soni cheksiz ko'p.

Fan va texnikaning ko'p sohalarida bo'lganidek, iqtisodiyotning ham ko'p masalalarining matematik modellari chiziqli tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi.

6-misol. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari quyidagi jadvalda berilgan.

Xomashyo turlari	Mahsulot turlari bo'yicha xomashyo sarflari			Xomashyo zaxirasi
	A	B	C	
1	5	12	7	2000
2	10	6	8	1660
3	9	11	4	2070

Berilgan xomashyo zaxirasi to'la sarflansa, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlashning matematik modelini tuzing.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. Bir birlik A turdagi mahsulotga, 1-xil xomashyo sarfi 5 birlik bo'lganligi uchun $5x_1$ A turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xomashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday B va C turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xomashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $7x_3$ bo'lib, uning uchun quyidagi tenglama o'rinli bo'ladi:

$5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000$. Yuqoridagiga o'xshash 2-, 3-xil xomashyolar uchun

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660,$$
$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070$$

tenglamalar hosil bo'ladi. Demak, masala shartlaridan quyidagi uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu masalaning matematik modeli quyidagi uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000, \\ 10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660, \\ 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070. \end{cases}$$

Ikki bozor muvozanati masalasi. Ko'p bozorli muvozanat modelida tenglamalar sistemasi har bir bozordagi talab, taklifning muvozanatini ifodalaydi. Bunda talab va taklif har bir bozorda, boshqa bozordagi narxlarga bog'liq. Masalan, kofega bo'lgan talab, faqat kofening narxiga bog'liq emas shuningdek o'rin bosuvchi tovar bo'lgan choyning ham narxiga bog'liq. Mashinaga talab uning narxiga bog'liq va shuningdek, to'ldiruvchi tovar bo'lgan uning yoqilg'isiga ham bog'liq. Korxonalarning taklifi turli ko'rinishdagi tovarlar narxiga bog'liq. Masalan, biror firma ishlab chiqargan mahsulot, boshqasi uchun xomashyo material bo'lishi mumkin.

Ikki tovar bog'liqligi modeli masalasi.

$$\left.\begin{array}{l} q_1^s = \alpha_1 + \beta_{11}p_1 + \beta_{12}p_2 \\ q_2^s = \alpha_2 + \beta_{21}p_1 + \beta_{22}p_2 \end{array}\right\} \text{taklif,}$$

$$\left.\begin{array}{l} q_1^d = a_1 + b_{11}p_1 + b_{12}p_2 \\ q_2^d = a_2 + b_{21}p_1 + b_{22}p_2 \end{array}\right\} \text{talab,}$$

natijada masalan, $\beta_{12} < 0$ ikkinchi firmadagi materiallar narxi o'sishi, birinchi firmani material sarfini kamaytiradi, natijada esa birinchi firma ishlab chiqarishni kamaytiradi. Har bir bozordagi talab va taklifning tengligining o'rnatilishi muvozanat narxlar bo'lgan p_1 va p_2 larni aniqlash uchun ikki tenglamalar sistemasini beradi. $b_{ij} \cdot s$ va $\beta_{ij} \cdot s$ lar nolga teng ham bo'lishi mumkin.

Bu tenglamalar modelning asosini tashkil etadi va strukturali tenglik, deb ataladi.

$$(b_{11} - \beta_{11}) \cdot p_1 + (b_{12} - \beta_{12}) \cdot p_2 = \alpha_2 - \alpha_1$$
$$(b_{21} - \beta_{21}) \cdot p_1 + (b_{22} - \beta_{22}) \cdot p_2 = \alpha_2 - \alpha_1$$

Ikkinchi tenglamadan p_1 ni topsak:

$$p_1 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) - (b_{22} - \beta_{22}) \cdot p_2}{(b_{21} - \beta_{21})}$$

Endi buni birinchi tenglikka qo'yamiz

$$p_2 = \frac{(b_{11} - \beta_{11}) \cdot (\alpha_2 - a_2) - (b_{21} - \beta_{21}) \cdot (\alpha_1 - a_1)}{(b_{11} - \beta_{11}) \cdot (b_{22} - \beta_{22}) - (b_{21} - \beta_{21}) \cdot (b_{12} - \beta_{12})}$$

p_1 ni topsak:

$$p_2 = \frac{(b_{22} - \beta_{22}) \cdot (\alpha_1 - a_1) - (b_{12} - \beta_{12}) \cdot (b_{12} - \beta_{12})}{(b_{11} - \beta_{11}) \cdot (b_{22} - \beta_{22}) - (b_{21} - \beta_{21}) \cdot (b_{12} - \beta_{12})}$$

p_1 va p_2 larni bunday ta'riflash kamaytirilgan forma deb ataladi. Chunki ular faqat modelning ko'rsatkichlariga bo'g'liq. $a_i, \alpha_i, b_{ij}, \beta_{ij}$ $i, j = 1,2$ larning alohida parametrlari uchun biz p_i ning qiymatlarini topa olamiz. Keyingi misollarda bu qiymatni qanday topish ko'rsatilgan.

To'ldiruvchi tovarlar uchun ikki bozor muvozanati. Faraz qilaylik iste'molchilar bozorida o'rin bosadigan tovarlarga talab, taklif tengligi quyidagicha:

$$q_1^s = -1 + p_1, \quad q_1^d = 20 - 2p_1 - p_2 \qquad \text{1-tovar,}$$
$$q_2^s = p_2, \quad q_2^d = 40 - 2p_2 - p_1 \qquad \text{2-tovar,}$$

bu yerda q_i^s va q_i^d talab va taklif miqdori. p_i tovar narxlari bu tovarlarning o'rinbosar ekanligidan, agar birinchi tovarga talab kamaysa, ikkinchi tovar narxi ko'tariladi. Muvozanat narxni toping (ikki tovar uchun).

Yechish. $q_i^s = q_i^d$ tengligidan ikkita tenglik kelib chiqadi

$$3p_1 + p_2 = 21$$
$$p_1 + 3p_2 = 40$$

Ikkinchi tenglikdan $p_1 = 40 - 3p_2$ topib, birinchisiga qo'ysak:

$$3 \cdot (40 - 3p_2) + p_2 = 21 \Rightarrow 8p_2 = 99 \Rightarrow p_2 = 12{,}375$$

va $p_1 = 2{,}875$ ekanligi keladi. Natijada bu narx bozordagi muvozanat narxni beradi.

2.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari

n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.5}$$

n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish ikki bosqichda (dastlab chapdan o'ngga, so'ngra o'ngdan chapga qarab) amalga oshiriladi.

1-bosqich. (2.5) sistemani uchburchak ko'rinishga keltirishdan iborat. Buning uchun, $a_{11} \neq 0$, deb (agar $a_{11} = 0$ bo'lsa, 1- tenglamani $a_{i1} \neq 0$ bo'lgan i-tenglama bilan o'rin almashtiriladi) birinchi tenglama $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ ga ko'paytirilib, i-tenglamaga qo'shiladi. Bunda, sistemaning 2-tenglamasidan boshlab x_1 noma'lum yo'qotiladi. Bu jarayonni $n-1$ marotaba takrorlab quyidagi uchburchaksimon sistema hosil qilinadi:

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}' x_2 + a_{13}' x_3 + \ldots + a_{1n}' x_n = b_1', \\ \qquad a_{22}' x_2 + a_{23}' x_3 + \ldots + a_{2n}' x_n = b_2', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}' x_n = b_n'. \end{cases}$$

2-bosqich. Oxirgi sistemani yechishdan iborat. Bunda, dastlab sistemaning oxirgi tenglamasidan x_n topilib, undan oldingi tenglamaga qo'yiladi va undan x_{n-1} topiladi. Shu jarayon davom ettirilib, nihoyat 1-tenglamadan x_1 topiladi.

Sistema Gauss usuli bilan yechilganda uchburchaksimon shaklga kelsa u yagona yechimga ega bo'ladi. Agar sistema pog'onasimon shaklga kelsa u cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi yoki yechimga ega bo'lmaydi.

Tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli, deb ham ataladi. Bu jarayonni kattaroq tenglamalar sistemasiga qo'llash mumkin, chunki bu juda samarali. Quyidagi misolni ko'rib chiqamiz:

7-misol. Tenglamalar sistemasining barcha mumkin bo'lgan yechimlarini toping.

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10. \end{cases}$$

Yechish. Dastlabki 2 ta tenglamaning o'rnini almashtiramiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = -7, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$$

2 -tenglamada x_1 yo'q. Keyingi qadamda 1-tenglamani ishlatib 3-tenglamadagi x_1 noma'lumni yo'qotamiz. Bu jarayon 1-tenglamani 3 ga ko'paytirib 3-tenglamaga qo'shish orqali bajariladi.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = -7, \\ 5x_2 + 11x_3 = -4. \end{cases}$$

Keyingi bosqichda 2-tenglamani $\frac{1}{2}$ ga ko'paytirib, x_2 ning koeffitsiyentini 1 ga aylantiramiz.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{7}{2}, \\ 5x_2 + 11x_3 = -4. \end{cases}$$

Oxirgi tenglamalar sistemasidagi 2-tenglamani -5 ga ko'paytirib 3-tenglamaga qo'shamiz. x_2 ni yo'qotamiz.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{7}{2}, \\ \frac{27}{2}x_3 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

So'ng, oxirgi tenglamani $\frac{2}{27}$ ga ko'paytirib $x_3 = 1$ qiymatni topamiz. Bu qiymatni ikkinchi tenglamaga qo'yib, $x_2 = -3$ qiymatni hosil qilamiz. $x_3 = 1$ va $x_2 = -3$ qiymatlarni birinchi tenglamaga qo'yib $x_1 = 2$ qiymatni olamiz. Shunday qilib, sistema yagona $(2;-3;1)$ yechimga ega.

Mashqni bajaring. Tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

8-misol. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasidagi noma'lumlarni ketma-ket yo'qotib yechimni topamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ 9x_2 = 9, \\ 14x_2 - 7x_3 = 21. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_3 - 2x_2 = -3, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

$x_2=1$ qiymatni ikkinchi tenglamaga qo'yib, $x_3=-1$ qiymatni hosil qilamiz. $x_2=1$ va $x_3=-1$ qiymatlarni birinchi tenglamaga qo'yib $x_1=-2$ qiymatni olamiz. Shunday qilib, sistema yagona $(-2;1;-1)$ yechimga ega.

Mashqni bajaring. Quyidagi tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$1)\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=3,\\ 3x_1-x_2+4x_3=6,\\ 5x_1+5x_2+2x_3=8.\end{cases}\quad 2)\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6,\\ 2x_1+3x_2-4x_3=20,\\ 3x_1-2x_2-5x_3=6.\end{cases}\quad 3)\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=3,\\ 3x_1-x_2+4x_3=6,\\ 5x_1+3x_2+2x_3=12.\end{cases}$$

Tenglamalar sistemasida noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ko'p bo'lsa ham, ya'ni sistema birgalikda bo'lib aniq bo'lmasa ham uning yechimini Gauss usulida topish mumkin. Buni quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

9-misol. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=4,\\ x_1+x_2+x_3+x_4=10,\\ 7x_1+2x_2+8x_3-6x_4=44,\\ 5x_1+2x_2+5x_3-6x_4=30.\end{cases}$$

Yechish. Birinchi qadamda sistemadagi birinchi tenglamani o'zgarishsiz qoldirib, qolganlaridan ketma-ket x_1 noma'lumni yo'qotamiz, ikkinchi qadamda ikkinchi tenglamani qoldirib qolganlaridan x_2 noma'lumni yo'qotamiz, uchinchi qadamda uchinchi tenglamani qoldirib qolganlaridan x_3 noma'lumni yo'qotamiz. Soddalik uchun tenglamalar sistemasi o'rniga kengaytirilgan matritsa ustida ish olib boramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10\\ 7 & 2 & 8 & -6 & 44\\ 5 & 2 & 5 & -6 & 30\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 2 & 6\\ 0 & 9 & -6 & 1 & 16\\ 0 & 7 & -5 & -1 & 10\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3 & 16 & 22\\ 0 & 0 & 3 & 16 & 22\end{array}\right)$$

Hosil bo'lgan sistemada ikkita bir xil tenglamadan bittasini qoldirib, ikkinchisini tashlab yuboramiz. Shu yerda chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning chapdan o'ngga qarab bosqichi tugadi. Tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik. Endi x_4 erkli o'zgaruvchini o'ng tomonga o'tkazamiz. So'ngra o'ngdan chapga qarab harakat yordamida sistemaning barcha yechimlari topiladi.

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=4,\\ \quad 2x_2-x_3+2x_4=6,\\ \quad\quad 3x_3+16x_4=22\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=8x_4-4,\\ x_2=\dfrac{20-11x_4}{3},\\ x_3=\dfrac{22-16x_4}{3}.\end{cases}$$

Javob: $\left(8x_4-4;\frac{20-11x_4}{3};\frac{22-16x_4}{3};x_4\right)$, $x_4\in R$.

Mashqni bajaring. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$1)\begin{cases}2x_1-x_2+x_3-x_4=5,\\ x_1+2x_2-2x_3+3x_4=-6,\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=-1.\end{cases}\quad 2)\begin{cases}x_1-x_2-3x_3=6,\\ -2x_1+2x_2+6x_3=-9.\end{cases}\quad 3)\begin{cases}x_1-3x_2=-5,\\ -x_1+x_2=1,\\ 4x_1-x_2=2.\end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini yechishda Gauss – Jordan usulining (Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi) mazmun-mohiyati quyidagidan iborat: dastlabki normal ko‘rinishda berilgan sistemaning kengaytirilgan $(A|B)$ matritsasi quriladi. Yuqorida keltirilgan sistemaning teng kuchliligini saqlovchi elementar almashtirishlar yordamida, kengaytirilgan matritsaning chap qismida birlik matritsa hosil qilinadi. Bunda birlik matritsadan o‘ngda yechimlar ustuni hosil bo‘ladi. Gauss - Jordan usulini quyidagicha sxematik ifodalash mumkin:

$$(A|B)\sim(E|X^*).$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss-Jordan usuli noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotishning Gauss strategiyasi va teskari matritsa qurishning Jordan taktikasiga asoslanadi. Teskari matritsa oshkor shaklda qurilmaydi, balki o‘ng ustunda bir yo‘la teskari matritsaning ozod hadlar ustuniga ko‘paytmasi–yechimlar ustuni quriladi.

10-misol. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss-Jordan usulida yeching:

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4,\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6,\\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4.\end{cases}$$

Yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlaridan kengaytirilgan matritsa tuzamiz. Tenglamalar ustida bajariladigan almashtirishlar yordamida asosiy matritsani quyidagicha birlik matritsaga keltirib javobni topamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\3&-1&-1&-2&-4\\2&3&-1&-1&-6\\1&2&3&-1&-4\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\0&4&7&11&7\\0&-1&5&7&8\\0&1&1&-4&-5\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&-5\\0&-1&5&7&8\\0&4&7&11&7\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&7&6\\0&1&1&-4&-5\\0&0&6&3&3\\0&0&3&27&27\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&7&6\\0&1&1&-4&-5\\0&0&1&9&9\\0&0&2&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-2&-3\\0&1&0&-13&-14\\0&0&1&9&9\\0&0&0&-17&-17\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-2&-3\\0&1&0&-13&-14\\0&0&1&9&9\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{array}\right).$$

Javob: $(-1;-1;0;1)$.

11-misol. Tenglamalar sistemasini Gauss – Jordan usulida yeching:

$$\begin{cases}5x_1+2x_2+3x_3+3x_4=1,\\2x_1-2x_2+5x_3+2x_4=4,\\3x_1+4x_2+2x_3+2x_4=-2.\end{cases}$$

Yechish. Berilgan sistemada kengaytirilgan matritsani ajratib olamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}5&2&3&3&1\\2&-2&5&2&4\\3&4&2&2&-2\end{array}\right)$$

va unga Gauss – Jordan usulini tatbiq etamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2/5&3/5&3/5&1/5\\0&-14/5&19/5&4/5&18/5\\0&14/5&1/5&1/5&-13/5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&8/7&5/7&5/7\\0&1&-19/14&-2/7&-9/7\\0&0&4&1&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&3/7&3/7\\0&1&0&3/56&-53/56\\0&0&1&1/4&1/4\end{array}\right)$$

Sistema trapetsiyasimon ko'rinishiga keldi:

$$\begin{cases}x_1+\dfrac{3}{7}x_4=\dfrac{3}{7},\\x_2+\dfrac{3}{56}x_4=-\dfrac{53}{56},\\x_3+\dfrac{1}{4}x_4=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Bu yerda x_1,x_2 va x_3 o'zgaruvchilarni bazis sifatida qabul qilamiz, chunki ular oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Bu determinant oxirgi sistemaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan asosiy matritsaning ham bazis minori bo'ladi. Erkli o'zgaruvchi bo'lib x_4 xizmat qiladi. Oxirgi sistemadan quyidagi yechimga

$$x_1 = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4,$$
$$x_2 = -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4,$$
$$x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4.$$

ega bo'lamiz. Shunday qilib, berilgan sistemaning umumiy X yechimini

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4 \\ -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$ ko'rinishda tasvirlash mumkin.

Agar $x_4 = 2$, deb olsak, u holda berilgan sistemaning

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{59}{56} \\ -\frac{1}{4} \\ 2 \end{pmatrix}$$

ko'rinishdagi xususiy yechimini topamiz.

Agar $x_4 = 0$ ni olsak berilgan sistemaning quyidagi bazis yechimiga ega bo'lamiz:

$$X_b = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{53}{56} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iqtisodiy masalalarning chiziqli tenglamalar sistemasi yordamida ifodalanadigan modellarida odatda noma'lumlar soni tenglamalar sonidan katta bo'ladi. Bu holat bir tomondan erkli o'zgaruvchilarni tanlash hisobiga bizga qo'shimcha erkinlik beradi. Biroq sistema yechimlari cheksiz ko'p bo'lgani sabab mumkin bo'lgan barcha holatlarni ko'rish mumkin bo'lmay qoladi va buning oqibatida iqtisodiy jihatdan optimal yechimni topishning imkoniyati bo'lmaydi.

Bunday holatlarda odatda bazis yechim tushunchasidan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

2-ta'rif. Faqat bazis o'zgaruvchilari noldan farqli bo'lishi mumkin bo'lgan yechim tenglamalar sistemasining bazis yechimi deyiladi.

Bazis yechimda erkli o'zgaruvchilarning qiymatlari nolga teng, deb olinadi. Tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p bo'lsada, bazis yechimlar soni chekli bo'ladi. Bazis yechimlar soni bazis minorlar soniga teng bo'ladi.

Faraz qilaylik sistemaning rangi r ga, noma'lumlar soni n ga teng bo'lsin. $n>r$ bo'lganda bazis minorlar soni (bazis yechimlar soni) ko'pi bilan $C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ga teng.

Tasdiq. Agar $X_1, X_2, ..., X_k$ vektorlar $AX=B$ tenglamalar sistemasining bazis yechimlari bo'lsa, $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k=1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sonlar uchun $\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+...+\alpha_kX_k$ chiziqli kombinatsiya ham $AX=B$ tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi.

Haqiqatan ham

$$A(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+...+\alpha_kX_k)=\alpha_1AX_1+\alpha_2AX_2+...+\alpha_kAX_k=$$
$$=\alpha_1B+\alpha_2B+...+\alpha_kB=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)B=B.$$

Umuman olganda, sistemaning ixtiyoriy yechimini bazis yechimlarning koeffitsiyentlari yig'indisi birga teng bo'lgan chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalash mumkin.

12-misol. Ushbu

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+4x_3+6x_4+6x_5=3,\\ 3x_1-4x_2+6x_3+8x_4+9x_5=5.\end{cases}$$

sistemada:

a) noma'lumlarni bazis va erkin o'zgaruvchilarga ajratish usuli sonini aniqlang:

b) bazis yechimlarini toping.

Yechish. a) mazkur sistemada ikkita tenglama va beshta noma'lum qatnashmoqda $(m=2,\ n=5)$. Ko'rinib turibdiki, $r=2$. Demak, noma'lumlarning bazis guruhlari ikkita noma'lumdan iborat. Bunda:

$$C_5^2=\frac{5!}{2!3!}=\frac{3!4\cdot5}{1\cdot2\cdot3!}=10.$$

Bunda guruhlar:

x_1,x_2; x_1,x_3; x_1,x_4; x_1,x_5; x_2,x_3; x_2,x_4; x_2,x_5; x_3,x_4; x_3,x_5; x_4,x_5.

Bu juftliklarning qaysi birida no'malumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli bo'lsa, o'sha juftlik noma'lumlari bazis o'zgaruvchi bo'la oladi. Shuning uchun quyidagi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0;$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Bundan ko‘rinib turibdiki 2-, 4-,6-,9- juftliklar bazis o‘zgaruvchilar bo‘la olmaydi. Chunki bu juftliklarga mos bazis minorlar nolga teng. Demak, sistemani bazis va erkin o‘zgaruvchilarga oltita usul bilan ajratish mumkin:

1) x_1 va x_2 - bazis, x_3, x_4, x_5 - erkli;

2) x_1 va x_4 - bazis, x_2, x_3, x_5 - erkli;

3) x_2 va x_3 - bazis, x_1, x_4, x_5 - erkli;

4) x_2 va x_5 - bazis, x_1, x_3, x_4 - erkli;

5) x_3 va x_4 - bazis, x_1, x_2, x_5 - erkli;

6) x_4 va x_5 - bazis, x_1, x_2, x_3 - erkli.

b) berilgan sistemaning bazis yechimlarini topamiz. Yuqoridagi a) punktda sistema oltita bazis yechimga ega ekanligini ko‘rgan edik. Birinchi bazis yechimni topish uchun x_1 va x_2 bazis o‘zgaruvchilarni o‘zgarishsiz qoldirib, x_3, x_4, x_5 erkli o‘zgaruvchilarni nolga tenglaymiz. Natijada $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 = 5. \end{cases}$ sistemaga ega bo‘lamiz va uning yechimi $x_1 = 3, \quad x_2 = 1.$

Shunday qilib, birinchi bazis yechim $X_{1b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Ikkinchi bazis yechimni topamiz. x_1 va x_4 - bazis, u holda x_2, x_3, x_5 erkli o‘zgaruvchilarni nolga tenglab

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_4 = 3, \\ 3x_1 + 8x_4 = 5 \end{cases}$$

sistemaga ega bo‘lamiz va $x_1 = 3, \quad x_4 = -\frac{1}{2}$ yechimi topamiz.

Shunday qilib, ikkinchi bazis yechim $X_{2b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Xuddi shu usul bilan qolgan bazis yechimlarni ham topamiz:

$$X_{3b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1,5\\0\\0\end{pmatrix};\quad X_{4b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix};\quad X_{5b}=\begin{pmatrix}0\\0\\1,5\\-0,5\\0\end{pmatrix};\quad X_{6b}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-0,5\\1\end{pmatrix}.$$

Aniq r ta noldan farqli noma'lumdan tashkil topgan bazis yechimga xosmas bazis yechim deyiladi, bunda r - sistemaning rangi.

Yuqorida qaralgan misoldagi barcha oltita yechim ham xosmas bazis yechim bo'ladi.

Ta'rifga ko'ra bazis yechimda erkli o'zgaruvchilar nolga teng, bazis yechimlar esa odatda noldan farqli. Lekin, bazis yechimning bazis o'zgaruvchilari ham nolga teng bo'lib qolishi mumkin. Bunday bazis yechimlar xos (maxsus) bazis yechimlar deb ataladi.

13-misol. Ushbu

$$\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3=2,\\3x_1+4x_2-8x_3=3\end{cases}$$

tenglamalar sistemasining bazis yechimlari topilsin.

Yechish. Sistema ikkita tenglama va uchta noma'lumdan iborat $(m=2,\ n=3)$ va $r=2$. Demak, bazis o'zgaruvchilar guruhi ikkita noma'lumdan tashkil topgan. Bazis yechimlar soni $C_3^2=\dfrac{3!}{2!\cdot1!}=3$ dan katta emas.

x_1 va x_2 - bazis o'zgaruvchilar, chunki ular oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli: $\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=5\neq0$. U holda x_3 - erkli o'zgaruvchi. Tenglamalarga $x_3=0$ qiymatni qo'yib,

$$\begin{cases}2x_1+x_2=2,\\3x_1+4x_2=3.\end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz va uning yechimi $x_1=1,\quad x_2=0$. Topilgan birinchi bazis yechim $X_{1b}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, chunki ikkinchi bazis o'zgaruvchi $x_2=0$.

x_1 va x_3 - ham bazis o'zgaruvchilar, chunki ular oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli: $\begin{vmatrix}2&-2\\3&-8\end{vmatrix}=-10\neq0$. U holda x_2 - erkli o'zgaruvchi. Tenglamalarga $x_2=0$ qo'yib,

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 8x_3 = 3 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz, uning yechimi $x_1 = 1$, $x_3 = 0$. Ikkinchi bazis yechim $X_{2b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ chunki ikkinchi bazis o'zgaruvchi $x_3 = 0$.

x_2 va x_3 lar bazis o'zgaruvchilar emas, chunki ular oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant nolga teng: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$. Demak, uchinchi bazis yechim mavjud emas.

14-misol. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari quyidagi jadvalda berilgan.

Xomashyo turlari	Mahsulot turlari bo'yicha xomashyo sarflari			Xomashyo zaxirasi (tonna)
	1	2	3	
1	5	12	3	20
2	2	6	8	16
3	9	7	4	20

Berilgan xomashyo zaxirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. 1-tur mahsulotga, 1-xil xomashyo, bittasi uchun sarfi 5 birlik bo'lganligi uchun $5x_1$ 1-tur mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil-xomashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday 2-,3-tur mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xomashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $3x_3$ bo'lib, uning uchun quyidagi tenglama o'rinli bo'ladi:

$5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20$. Yuqoridagiga o'xshash 2-,3-xil xomashyolar uchun

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16,$$
$$9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20$$

tenglamalar hosil bo'ladi. Demak, masala shartlarida quyidagi uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20. \end{cases}$$

Bu masalaning matematik modeli uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi. Bu masala tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan yechiladi. Bunday tenglamalar sistemasini yechishda Gauss usulidan foydalanamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ \frac{6}{5}x_2 + \frac{34}{5}x_3 = 8, \\ -\frac{73}{5}x_2 - \frac{7}{5}x_3 = -16 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 6x_2 + 34x_3 = 40, \\ \frac{244}{3}x_3 = \frac{244}{3} \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 6x_2 + 34x_3 = 40, \\ x_3 = 1. \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = \frac{20 - 12x_2 - 3x_3}{5}, \\ x_2 = \frac{40 - 34x_3}{6}, \\ x_3 = 1. \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

15-misol. Korxona to‘rt xildagai xomashyo ishlatib to‘rt turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari jadvalda berilgan.

Xomashyo turlari	Mahsulot turlari bo‘yicha xomashyo sarflari				Xomashyo zaxirasi (tonna)
	1	2	3	4	
1	1	2	1	0	8
2	0	1	3	1	15
3	4	0	1	1	11
4	1	1	0	23	23

Matematik modelini tuzamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini Gauss-Jordan usuli bilan yechamiz.

Yechish. 1-tenglamani o‘zgarishsiz qoldirib sistemaning qolgan tenglamalaridan x_1 noma’lumni yo‘qotamiz, buning uchun 1-tenglamani ketma-ket (-4), (-1) ga ko‘paytirib mos ravishda 3, 4-tenglamalarga hadma-had qo‘shish orqali ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = -21, \\ 0 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 15. \end{cases}$$

Endi 2-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib, boshqa tenglamalardan x_2 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 2 tenglamani (-2), (8), (1) larga ketma-ket ko'paytirib, mos ravishda 1, 3, 4 – tenglamalarga hadma-had qo'shamiz va ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 5x_3 - 2x_4 = -22, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 2x_3 + 6x_4 = 30. \end{cases}$$

Endigi qadamda 3-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib boshqa tenglamalardan x_3 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 3-tenglamani ketma-ket $\left(\frac{5}{21}\right)$, $\left(-\frac{3}{21}\right)$, $\left(-\frac{2}{21}\right)$ larga ko'paytirib mos ravishda 1, 2, 4 – tenglamalarga hadma-had qo'shsak, ushbu tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 + \frac{3}{21} x_4 = \frac{33}{21}, \\ 0 + x_2 + 0 - \frac{6}{21} x_4 = \frac{18}{21}, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Oxirgi qadamda 4-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib boshqa tenglamalardan, x_4 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 4 - tenglamani ketma-ket $\left(-\frac{3}{21}\right)$, $\left(\frac{6}{21}\right)$, (-9) larga ko'paytirib, mos ravishda 1, 2, 3 - tenglamalarga hadma-had qo'shamiz natijada, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 0 + 0 = 1, \\ 0 + x_2 + 0 + 0 = 2, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 0 = 63, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Oxirgi sistemadan $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ yechimni olamiz.

2.3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Kramer qoidasi va teskari matritsa usuli

Kramer qoidasi. Agar n ta noma'lumli n ta

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.6}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining Δ determinanti noldan farqli bo'lsa, u holda (2.6) sistema yagona yechimga ega bo'ladi va bu yechim quyidagi formulalar bilan topiladi:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{\Delta x_n}{\Delta} \end{cases} \tag{2.7}$$

bu yerda Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n determinantlar Δ determinantda noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlarni mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirish orqali hosil qilinadi. (2.7) formulalarga Kramer formulalari deyiladi.

16-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida toping.

Yechish. Sistemaning asosiy determinanti Δ ni hisoblaymiz. Bunda

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 27. \ \Delta \neq 0$$

bo'lganligi sababli berilgan sistema aniq sistemani tashkil qiladi va u yagona yechimga ega bo'ladi. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha topiladi:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{27} = -\frac{81}{27} = -3,$$

$$x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 7 & -1\\ 4 & -5 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}}{27}=\frac{54}{27}=2,$$

$$x_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1 & 7\\ 4 & 2 & -5\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}}{27}=\frac{27}{27}=1.$$

Demak, tenglamalar sistemasining yechimi: (-3; 2; 1).

Mashqni bajaring. Chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases}7x_1-5x_2=31,\\ 4x_1+11x_3=-43,\\ 2x_1+3x_2+4x_3=-20.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=31,\\ 5x_1+x_2+2x_3=20,\\ 3x_1-x_2+x_3=9.\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=6,\\ 2x_1+x\ +x_3=3,\\ x_1+x_2+x_3=5.\end{cases}$

4) $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=2,\\ -2x_1+x_2+x_3=0,\\ x\ +x_2+x_3=6.\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=10,\\ 2x_1+x_2+x_3=20,\\ x_1+3x_2+x_3=30.\end{cases}$

Agar $\Delta=0$ bo'lib, Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n lardan birortasi noldan farqli bo'lsa, u holda (2.6) sistema yechimga ega bo'lmaydi.

17-misol. Quyidagi

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=3,\\ 4x_1+2x_2+6x_3=5,\\ 3x_1+2x_2=2\end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida toping.

Yechish. Tenglamalar sistemasining asosiy determinanti Δ ni hisoblaymiz. Bunda:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=0.\ \Delta=0$$

bo'lganligi sababli berilgan sistemadan Δx_1, $\Delta x_2, \Delta x_3$ larni hisoblaymiz. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha topiladi:

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix}3 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}=-6,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 9,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Demak, tenglamalar sistemasi yechimga ega emas, chunki $\Delta = 0$ va $\Delta x_1 \neq 0$, $\Delta x_2 \neq 0$, $\Delta x_3 \neq 0$.

Mashqni bajaring. Chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 8x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

Agar $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = 0$ bo'lsa, u holda (2.6) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

18-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 6, \\ 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 9. \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida toping.

Yechish. Sistemaning asosiy determinanti Δ ni hisoblaymiz. Bunda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0. \ \Delta = 0$$

bo'lganligi sababli berilgan sistemaning $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ determinantlarini hisoblaymiz. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha topiladi:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 6 \\ 9 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega chunki $\Delta=0$ va $\Delta x_1=0$, $\Delta x_2=0$, $\Delta x_3=0$.

Agar sistemaning yechimi cheksiz ko'p bo'lsa, u holda uning umumiy yechimini Kramer qoidasi bilan ham topish mumkin. Buni quyidagi misolda ko'rib chiqamiz:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=3, \\ 4x_1+2x_2+6x_3=6, \\ 6x_1+4x_2+5x_3=9. \end{cases}$$

sistemaning yechimini toping.

Yechish. Sistemaga ekvivalent sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=-3x_3+3, \\ 6x_1+4x_2=-5x_3+9. \end{cases}$$

Sistemaning determinantlarini hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=2,\quad \Delta x_1=\begin{vmatrix} -3x_3+3 & 1 \\ -5x_3+9 & 4 \end{vmatrix}=-7x_3+3,\quad \Delta x_2=\begin{vmatrix} 2 & -3x_3+3 \\ 6 & -5x_3+9 \end{vmatrix}=8x_3.$$

U holda Kramer formulalari yordamida quyidagi yechimni hosil qilamiz va undan sistemaning yechimi cheksiz ko'p ekanligini ko'rishimiz mumkin:

$$x_1=\frac{-7x_3+3}{2}=-\frac{7}{2}x_3+\frac{3}{2},\quad x_2=\frac{8x_3}{2}=4x_3,$$

$$x_3=\alpha \Rightarrow X\left(-\frac{7}{2}\alpha+\frac{3}{2},4\alpha\right).$$

Shuni ta'kidlashimiz kerakki, bu yerda biz asosiy determinant sifatida $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ determinantni oldik. Agar sistemaning yechimini topishda asosiy determinant sifatida $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ yoki $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ determinantlarni olib sistema yechimining boshqa ko'rinishlarini ham hosil qilishimiz mumkin.

Mashqni bajaring. Chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=3, \\ 4x_1+4x_2+12x_3=12, \\ 3x_1+3x_2+9x_3=6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x_1+x_2+3x_3=3, \\ 8x_1+2x_2+6x_3=6, \\ 12x_1+3x_2+9x_3=9. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4, \\ 2x_1+4x_2+6x_3=8, \\ 3x_1+6x_2+9x_3=12. \end{cases}$

Kramer formulalari asosan nazariy jihatdan ahamiyatga ega. Agar sistemada noma'lumlar soni ko'p bo'lsa, bu qoida yordamida yechilganda katta va og'ir hisoblashlarni bajarishga olib keladi. Lekin, bu formulalar muhim afzallikka ega, ular barcha noma'lumlarning qiymatlarini aniq ifodalaydi.

Ushbu n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2.8)$$

(2.8) tenglamalar sistemada quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Bu yerda, A – noma'lumlar oldida turgan koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsa;
X – noma'lumlardan tuzilgan matritsa; B – ozod hadlardan tuzilgan matritsa.

U holda (2.8) tenglamalar sistemasini

$$AX = B$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Faraz qilamiz $\det|A| \neq 0$ bo'lsin. U holda A matritsa uchun A^{-1} teskari matritsa mavjud. $AX = B$ tenglikning har ikkala tomonini A^{-1} ga chapdan ko'paytiramiz:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \qquad EX = A^{-1}B, \qquad X = A^{-1}B.$$

Hosil bo'lgan $X = A^{-1}B$ ifoda chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usuli bilan yechish formulasidan iborat.

19-misol. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Yechish. A, X, B matritsalarni tuzib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bundan, $\det|A| = -12 \neq 0$.

Teskari matritsani topamiz:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \; A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \; A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5, \; A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11, \; A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-5,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & -5 & -1\\ 2 & 11 & -5\\ 4 & 4 & -4\end{pmatrix}.$$

Bundan:

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & -5 & -1\\ 2 & 11 & -5\\ 4 & 4 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 0\\ 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-10+0-2\\ 10+0-10\\ -20+0-8\end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-12\\ 0\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

Demak, $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=-1$ yoki $(1;0;-1)$.

Mashqni bajaring. Chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3=6,\\ 3x_1+2x_3=8,\\ x_1+x_2-x_3=1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x_2+2x_3=5,\\ 2x_1+x_2-x_3=4,\\ -x_2+2x_3=1.\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x_1+2x_3=5,\\ 3x_1-x_2=9,\\ x_1+x_2-2x_3=1.\end{cases}$

4) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=4,\\ 2x_2+x_3=3,\\ x_1-x_2=2.\end{cases}$

Agar sistema matritsasining rangi tenglama noma'lumlari sonidan kichik bo'lsa ham uning yechimini teskari matritsa usulida topish mumkin. Buni quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

20-misol. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yeching:

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-5x_4=2,\\ 2x_1+x_2+4x_3+x_4=-3,\\ 3x_1-3x_2+8x_3-2x_4=-1,\\ 2x_1-2x_2+5x_3-12x_4=4\end{cases}$$

Yechish. Tenglamalar sistemasi matritsasi A va kengaytirilgan matritsasi $(A|B)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -5\\ 2 & 1 & 4 & 1\\ 3 & -3 & 8 & -2\\ 2 & -2 & 5 & -12\end{pmatrix},\ (A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -5 & 2\\ 2 & 1 & 4 & 1 & -3\\ 3 & -3 & 8 & -2 & -1\\ 2 & -2 & 5 & -12 & 4\end{array}\right)$$

larning rangini topib

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 8 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & -12 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & 13 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 32 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & -32 & 14 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 32 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 3$ ekanligini ko'ramiz. Uning minori

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 18 - 24 - 9 + 32 + 12 = 1$$

noldan farqli. Shuning uchun to'rtinchi tenglamani tashlab yuboramiz, qolgan tenglamalarda x_4 qatnashgan hadlarni o'ng tomonga o'tkazamiz.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 + 5x_4, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 - x_4, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1 + 2x_4. \end{cases}$$

Bu sistemani teskari matritsa usuli bilan yechamiz. Avval asosiy matritsa teskarisini Gauss – Jordan usulida topamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 0 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 20 & 7 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -3 & 5 \end{array}\right), \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 7 & -11 \\ -4 & -1 & 2 \\ -9 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tenglamalar sistemasining umumiy yechimini topish uchun $X = A^{-1} \cdot B$ amalni bajaramiz:

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 7 & -11 \\ -4 & -1 & 2 \\ -9 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 + 5x_4 \\ -3 - x_4 \\ -1 + 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 + 71x_4 \\ -7 - 15x_4 \\ -14 - 32x_4 \end{pmatrix}$$

Javob: $(30 + 71x_4; -7 - 15x_4; -14 - 32x_4; x_4)$, $x_4 \in R$.

x_4 ga ixtiyoriy qiymatlar berib x_1, x_2, x_3 noma'lumlarning mos qiymatlarini topamiz. Sistema cheksiz ko'p yechimga ega.

Mashqni bajaring. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yeching:

$$1)\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=3,\\ 4x_1+4x_2+12x_3=12,\\ 2x_1+3x_2+4x_3=5.\end{cases}\quad 2)\begin{cases} 4x_1+x_2+3x_3=3,\\ 8x_1+2x_2+6x_3=6,\\ 2x_1+x_2+5x_3=4.\end{cases}\quad 3)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4,\\ 2x_1+4x_2+6x_3=8,\\ 2x_1+3x_2+5x_3=12.\end{cases}$$

21-misol. Quyidagi tenglamani yeching:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0\\ 5 & 8\end{pmatrix}$$

Yechish. Tenglamaga quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix} 4 & 0\\ 5 & 8\end{pmatrix}.$$

U holda berilgan tenglama

$$A\cdot X\cdot B=C$$

ko'rinishni oladi.

Agar AXB ifodaning chap tomondan A^{-1} va o'ng tomondan B^{-1} ga ko'paytirsak, hamda $A^{-1}A=E$, $EX=X$, $BB^{-1}=E$ va $XE=X$ ekanligini hisobga olsak quyidagi yechimga ega bo'lamiz:

$$X=A^{-1}CB^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0\\ 5 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -8\\ -8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{6}\\ -8 & 4\end{pmatrix}.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi tenglamalarni yeching:

$$1)\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0\\ 2 & 8\end{pmatrix},\ 2)\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix},$$

$$3)\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Agar sistemada $m\neq n$ va $r(A)\neq m$ bo'lib, $r(A)=r(A|B)$ bo'lgan holda ham teskari matritsa usulidan foydalanib uning yechimini topsa bo'ladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiyotda qo'llanilishiga doir misollar keltiramiz.

Masala. A va B mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 2 turdagi xomashyodan foydalaniladi. Bir birlik A mahsulotni ishlab chiqarish uchun 5 birlik 1-tur va 4 birlik 2-tur xomashyo sarflanadi, bitta B mahsulotni ishlab chiqarish uchun esa, 3 birlik 1-tur va 5 birlik 2-tur xomashyo ishlatiladi. 1-tur xomashyo 62 birlik, 2-tur xomashyo 73 birlik berilgan bo'lsa, ishlab chiqarilgan A va B mahsulot miqdorini toping.

Bu masalaning matematik modelini tuzish maqsadida x_1 bilan ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan A mahsulot miqdorini, x_2 bilan esa ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan B mahsulot miqdorini belgilaylik. Bu holda $5x_1$ A mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xomashyo miqdorini, $3x_2$ esa B mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xomashyo miqdorini ifodalaydi. $5x_1+3x_2$ A va B mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan 1-tur xomashyo jami sarfi miqdorinni ifodalaydi, bu xomashyo chegaralangan bo'lib, 62 birlikda mavjud, demak $5x_1+3x_2=62$ tenglama kelib chiqadi. Xuddi shunday qilib, 2-tur xomashyo sarfi uchun $4x_1+5x_2=73$ tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib,

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2=62, \\ 4x_1+5x_2=73. \end{cases}$$

Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu tenglamalar sistemasi berilgan A va B mahsulotlarni ishlab chiqarishda, xomashyo sarfining matematik modelini ifodalaydi.

Yechish. Kramer usulidan foydalanib yechimini topamiz.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \det|A|=25-12=13\neq 0 \text{ . Bunda}$$

$\det|A|\neq 0$ bo'lganligi sababli berilgan sistema aniq sistemani tashkil qiladi va u yagona yechimga ega bo'ladi. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha topiladi:

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\det|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 62 & 3 \\ 73 & 5 \end{vmatrix}}{13}=\frac{91}{13}=7,$$

$$x_2=\frac{\Delta x_2}{\det|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 62 \\ 4 & 73 \end{vmatrix}}{13}=\frac{117}{13}=9.$$

Demak, tenglamalar sistemaning yechimi: $(x_1,x_2)=(7,9)$.

22-misol. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 1-jadvalda berilgan.

1-jadval

Xomashyo turlari	Mahsulot turlari bo'yicha xomashyo sarflari			Xomashyo zaxirasi (tonna)
	1	2	3	
1	5	12	3	20
2	2	6	8	16
3	9	7	4	20

Berilgan xomashyo zaxirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1,x_2,x_3 lar bilan belgilaymiz. 1-tur mahsulotga, 1-xil xomashyo, bittasi uchun sarfi 5 birlik bo'lganligi uchun $5x_1$ 1-tur mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xomashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday 2, 3-tur mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xomashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $3x_3$ bo'lib, uning uchun quyidagi tenglama o'rinli bo'ladi:

$5x_1+12x_2+3x_3=20$. Yuqoridagiga o'xshash 2, 3-xil xomashyolar uchun

$$2x_1+6x_2+8x_3=16,$$
$$9x_1+7x_2+4x_3=20$$

tenglamalar hosil bo'ladi. Demak, masala shartlaridan quyidagi uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 5x_1+12x_2+3x_3=20, \\ 2x_1+6x_2+8x_3=16, \\ 9x_1+7x_2+4x_3=20\ . \end{cases}$$

Bu masalaning matematik modeli uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi. Bu masala tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan yechiladi. Bunday tenglamalar sistemasini yechishda teskari matritsalar usulidan foydalanamiz:

$$\begin{cases} 5x_1+12x_2+3x_3=20, \\ 2x_1+6x_2+8x_3=16, \\ 9x_1+7x_2+4x_3=20 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 12 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Bundan, $\det|A|=488\neq 0$. Teskari matritsani topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=-32,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}=64,\ A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}=-40,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=-27,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}=-7\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}=73,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=78,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=-34,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=6$$

$$A^{-1}=\frac{1}{488}\begin{pmatrix} -32 & -27 & 78 \\ 64 & -7 & -34 \\ -40 & 73 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bundan:

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{488}\begin{pmatrix} -32 & -27 & 78 \\ 64 & -7 & -34 \\ -40 & 73 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}=\frac{1}{488}\begin{pmatrix} 488 \\ 488 \\ 488 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

kerak bo'lgan B mahsulot miqdorini belgilaylik. Bu holda $5x_1$ A mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xomashyo miqdorini, $3x_2$ esa B mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xomashyo miqdorini ifodalaydi. $5x_1+3x_2$ A va B mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan 1-tur xomashyo jami sarfi miqdorinni ifodalaydi, bu xomashyo chegaralangan bo'lib, 62 birlikda mavjud, demak $5x_1+3x_2=62$ tenglama kelib chiqadi. Xuddi shunday qilib, 2-tur xomashyo sarfi uchun $4x_1+5x_2=73$ tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib,

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2=62, \\ 4x_1+5x_2=73. \end{cases}$$

Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu tenglamalar sistemasi berilgan A va B mahsulotlarni ishlab chiqarishda, xomashyo sarfining matematik modelini ifodalaydi.

Yechish. Kramer usulidan foydalanib yechimini topamiz.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \det|A|=25-12=13\neq 0 \text{ . Bunda}$$

$\det|A|\neq 0$ bo'lganligi sababli berilgan sistema aniq sistemani tashkil qiladi va u yagona yechimga ega bo'ladi. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha topiladi:

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\det|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 62 & 3 \\ 73 & 5 \end{vmatrix}}{13}=\frac{91}{13}=7,$$

$$x_2=\frac{\Delta x_2}{\det|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 62 \\ 4 & 73 \end{vmatrix}}{13}=\frac{117}{13}=9.$$

Demak, tenglamalar sistemaning yechimi: $(x_1,x_2)=(7,9)$.

22-misol. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 1-jadvalda berilgan.

1-jadval

Xomashyo turlari	Mahsulot turlari bo'yicha xomashyo sarflari			Xomashyo zaxirasi (tonna)
	1	**2**	**3**	
1	5	12	3	20
2	2	6	8	16
3	9	7	4	20

Berilgan xomashyo zaxirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1,x_2,x_3 lar bilan belgilaymiz. 1-tur mahsulotga, 1-xil xomashyo, bittasi uchun

sarfi 5 birlik bo'lganligi uchun $5x_1$ 1-tur mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xomashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday 2, 3-tur mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xomashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $3x_3$ bo'lib, uning uchun quyidagi tenglama o'rinli bo'ladi:
$5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20$. Yuqoridagiga o'xshash 2, 3-xil xomashyolar uchun

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16,$$
$$9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20$$

tenglamalar hosil bo'ladi. Demak, masala shartlaridan quyidagi uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}.$$

Bu masalaning matematik modeli uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi. Bu masala tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan yechiladi. Bunday tenglamalar sistemasini yechishda teskari matritsalar usulidan foydalanamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Bundan, $\det|A| = 488 \neq 0$. Teskari matritsani topamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -32, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 64, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = -40,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -27, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 73,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 78, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -34, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{488}\begin{pmatrix} -32 & -27 & 78 \\ 64 & -7 & -34 \\ -40 & 73 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bundan:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{488}\begin{pmatrix} -32 & -27 & 78 \\ 64 & -7 & -34 \\ -40 & 73 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{488}\begin{pmatrix} 488 \\ 488 \\ 488 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Demak, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ yoki $(1;1;1)$.

2.4. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi

n ta noma'lumli m ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasini vektor shakldagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$AX = \Theta.$$

Bu yerda $\Theta = (0,0,...,0)^T$-nol vektor, A - $m \times n$ o'lchovli matritsa, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ - noma'lumlar vektori.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda, chunki $X = \Theta$ har doim sistemaning yechimi bo'ladi. Bir jinsli sistema uchun $rang(A) = n$ munosabat o'rinli bo'lsa, sistema aniq bo'lib, yagona nol yechimga ega.

Agarda bir jinsli sistema uchun $rang(A) < n$ munosabat o'rinli bo'lsa, sistema nol yechimdan tashqari nolmas yechimlarga ham ega bo'ladi. Buni quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

23-misol. Quyidagi sistemani yeching:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Yechish. Bu sistemadan

$$\begin{cases} \quad 2x_2 - \qquad 2x_4 = 0, \\ \quad 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Agar ozod had sifatida x_4 noma'lumni olib, $x_4 = \alpha$, deb qarasak. U holda

$$x_1 = \frac{3}{5}\alpha, \ x_2 = \alpha, \ x_3 = \frac{4}{5}\alpha, \ x_4 = \alpha$$

ko'rinishdagi yechimlarni hosil qilamiz.

Ushbu holda har bir nolmas yechim n o'lchovli vektor sifatida qaralishi mumkin.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimlari quyidagi xossalarga ega:

1) Agar $X_0 = (b_1, b_2, ..., b_n)$ vektor $AX = \Theta$ sistemaning yechimi bo'lsa, u holda k ixtiyoriy son bo'lganda ham $kX_0 = (kb_1, kb_2, ..., kb_n)$ vektor ham bu sistemaning yechimi bo'ladi.
2) Agar $X_0 = (b_1, b_2, ..., b_n)$ va $X_1 = (c_1, c_2, ..., c_n)$ vektorlar $AX = \Theta$ sistemaning yechimlari bo'lsa, u holda $X_0 + X_1 = (b_1 + c_1, b_2 + c_2, ..., b_n + c_n)$ vektor ham bu sistemaning yechimi bo'ladi.

Shuning uchun bir jinsli sistema yechimlarining har qanday chiziqli kombinatsiyasi ham uning yechimi bo'la oladi.

Bir jinsli bo'lmagan sistema yechimlari uchun yuqoridagi da'vo o'rinli emas.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix},\ \dots,\ A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$ n o'lchovli vektorlar sistemasini ko'rib chiqamiz.

3-ta'rif. Agar $x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_kA_k = \Theta$ tenglikni qanoatlantiruvchi kamida bittasi noldan farqli $x_1, x_2, \dots, x_k$ sonlar mavjud bo'lsa, u holda $A_1, A_2, \dots, A_k$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi deb ataladi.

Aks holda, yani faqat $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ bo'lgandagina $x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_kA_k = \Theta$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $A_1, A_2, \dots, A_k$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli vektorlar sistemasi deb ataladi.

Izoh. $x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_kA_k = \Theta$ vektor bir jinsli tenglamalar sistemasini ifodalaydi.

Masalan, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorlar sistemasini qaraymiz.

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = \Theta$$

vektordan quyidagi algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimlarini Gauss usulida topamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ \quad -x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -7x_3, \\ x_2 = 4x_3, \\ x_3 \in R. \end{cases}$$

Ko'rinib turibdiki, tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega. $x_3 = 1$, deb olsak, $x_1 = -7$, $x_2 = 4$ qiymatlarni topamiz. Ya'ni,

$$-7A_1 + 4A_2 + A_3 = \Theta.$$

Demak, ta'rifga asosan, qaralayotgan vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq.

Yuqorida aytib o'tilgan bir jinsli tenglamalar sistemasining xossalari va Kroneker-Kapelli teoremasiga asosan quyidagi tasdiqni hosil qilamiz.

Tasdiq. Agar $A_1, A_2, \dots, A_k$ vektorlar sistemasining rangi $r(A_1, \dots, A_k)$ vektorlar soni k dan kichik bo'lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi. Agar $r = k$ bo'lsa, u holda $A_1, A_2, \dots, A_k$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'ladi.

Xususan, bu tasdiqdan, bir xil o'lchovli vektorlar sistemasidagi vektorlar soni bu vektorlarning o'lchovidan, ya'ni rangidan katta bo'lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bo'gliq bo'lishi kelib chiqadi.

Haqiqatan ham $A_1, A_2, ..., A_k$ vektorlar sistemasining rangi, ta'rifga asosan,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

matritsa rangiga teng. Shartga asosan $k > n$, $r(A) \le \min(n,k) = n < k$. U holda $AX = \Theta$ tenglamada noma'lumlar soni tenglamalar sistemasi rangidan katta. Demak, sistema trivial bo'lmagan (noldan farqli) yechimga ega, ya'ni, vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq.

4-ta'rif. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechimlarining har qanday maksimal sondagi chiziqli erkli sistemasi bu tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi deb ataladi.

Teorema. $AX = \Theta$ tenglamalar sistemasining har qanday yechimi fundamental yechimlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasidan iborat.

Isbot. $X_1, X_2, ..., X_k$ vektorlar sistemasi $AX = \Theta$ tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari sistemasi bo'lsin. X_0 vektor esa tenglamalar sistemasining boshqa ixtiyoriy yechimi bo'lsin. U holda, ta'rifga asosan, $X_0, X_1, X_2, ..., X_k$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq. Ya'ni shunday kamida bittasi noldan farqli $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k$ sonlar mavjudki,

$$\alpha_0 X_0 + \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_k X_k = \Theta.$$

Agar bu tenglikda $\alpha_0 = 0$ bo'lsa, $\alpha_1 X_1 + ... + \alpha_k X_k = 0$, ya'ni, $X_1, X_2, ..., X_k$ vektorlar chiziqli bog'liq. Bu esa teorema shartiga zid. Demak, $\alpha_0 \ne 0$. Shu sababli $X_0 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} X_1 - ... - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} X_k$.

Bu teoremadan muhim bo'lgan quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

Tasdiq. Agar $F_1, F_2, ..., F_k$ n o'lchovli vektorlar sistemasi $AX = \Theta$ tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi bo'lsa, bu bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasining umumiy yechimi

$$X = c_1 F_1 + ... + c_k F_k$$

shaklda ifodalanadi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

Teorema. Bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasining rangi r ga teng bo'lib, sistema noma'lumlari soni n dan kichik bo'lsin. U holda tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi $n-r$ ta nolmas vektorlardan iborat bo'ladi.

Teoremadan ko'rinib turibdiki, fundamental yechimlar sistemasidagi vektorlar soni bu sistemaga mos erkli o'zgaruvchilar soniga teng ekan.

Bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari sistemasini quyidagicha qurishimiz mumkin:

1. Bir jinsli sistemaning umumiy yechimi topiladi;
2. $n-r$ ta erkli o'zgaruvchilarga qiymat beramiz. Buning uchun $n-r$ o'lchovli $n-r$ ta vektorlardan iborat chiziqli erkli vektorlar sistemasi tanlanadi. Bunda masalan, har bir vektori $n-r$ o'lchovli $A_1=(1,0,...,0)^T$, $A_2=(0,1,...,0)^T,...,A_{n-r}=(0,0,...,1)^T$ sistemani tanlash mumkin;
3. Erkli noma'lumlar o'rniga yuqorida tanlangan A_1 vektorning mos koordinatalarini qo'yib, bazis noma'lumlar aniqlanadi va F_1 quriladi. Xuddi shunday usulda $A_2,A_3,...,A_{n-r}$ vektorlardan foydalanib, mos ravishda F_2, F_3, ..., F_{n-r} yechimlar quriladi.

$F_1,F_2,...,F_{n-r}$ vektorlar sistemasining rangi ularning qismi bo'lgan $A_1,...,A_{n-r}$ vektorlar rangidan kichik emas. $A_1,...,A_{n-r}$ vektorlar chiziqli erkli bo'lgani sababli bu vektorlar sistemasi rangi maksimal, ya'ni $n-r$ ga teng. Shu sababli, $F_1,F_2,...,F_{n-r}$ vektorlar sistemasi rangi ham maksimal, ya'ni $n-r$ ga teng, ya'ni bu yechimlar sistemasi chiziqli erkli.

24-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini toping.

Yechish. Bu sistemada $r=2$, $n=5$. Demak, sistemaning har qanday fundamental yechimlar sistemasi $n-r=3$ ta yechimdan iborat bo'ladi.

1. Bu yerda x_3,x_4,x_5 noma'lumlarni ozod noma'lumlar, deb hisoblab sistemani yechamiz va quyidagi umumiy yechimni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1=\frac{19}{8}x_3+\frac{3}{8}x_4-\frac{1}{2}x_5, \\ x_2=\frac{7}{8}x_3-\frac{25}{8}x_4+\frac{1}{2}x_5. \end{cases}$$

2. So'ngra uchta chiziqli erkli uch o'lchovli vektor olamiz:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

3. Bu vektorlarning har birining komponentlarini umumiy yechimga ozod noma'lumlarning qiymatlari sifatida keltirib qo'yib, x_1, x_2 larning qiymatlarini hisoblab, berilgan tenglamalar sistemasining quyidagi fundamental yechimlar sistemasini hosil qilamiz:

$$F_1 = \left(\frac{19}{8},\ \frac{7}{8},\ 1,\ 0,\ 0\right)^T,$$

$$F_2 = \left(\frac{3}{8},\ -\frac{25}{8},\ 0,\ 1,\ 0\right)^T,$$

$$F_3 = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 1\right)^T.$$

Sistemaning umumiy yechimi $X = c_1F_1 + c_2F_2 + c_3F_3$, yoki

$$F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 19/8 \\ 7/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/8 \\ -25/8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda c_1, c_2 va c_3 ixtiyoriy sonlar.

n noma'lumli m ta chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi matritsalar yordamida $AX = B$ ko'rinishda ifodalangan bo'lsin. Bunda A - $m \times n$ o'lchovli matritsa, X - n o'lchovli noma'lumlardan iborat ustun vektor, B - m o'lchovli ozod hadlar vektori.

$AX = \Theta$ tenglamalar sistemasi $AX = B$ bir jinsli bo'lmagan sistemaning bir jinsli qismi deyiladi.

Berilgan bir jinsli bo'lmagan sistemaning umumiy yechimini vektor shaklda quyidagicha yozish mumkin:

$$X = F_0 + c_1F_1 + \ldots + c_{n-r}F_{n-r}$$

Bu yerda, F_0 – dastlabki bir jinslimas sistemaning xususiy yechimlaridan biri (F_0 ni aniqlash uchun erkli o'zgaruvchilarning xususiy qiymatlarida bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi yechiladi); F_1, F_2, ..., F_{n-r} – bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari sistemasi; c_1, c_2, ..., c_{n-r} – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

25-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlarini toping.

Yechish. Sistemaning yechimini topishda Gauss-Jordan usulidan foydalanamiz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vert & 1 \\ 2 & 1 & -1 & \vert & 2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & \vert & 3 \\ 2 & 1 & -1 & \vert & 2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & \vert & 3 \\ 5 & 1 & 0 & \vert & 5 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda x_2, x_3 – basis o'zgaruvchilar, x_1 – erkli o'zgaruvchidir. $n=3$, $r=2$, $n-r=1$. Oxirgi sistemada $x_1=0$, deb olsak, $F_0=\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}$ xususiy yechimni olamiz.

Endi bir jinsli bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechib fundamental yechimlar sistemasini topamiz. Bir jinsli sistema quyidagi sistemaga ekvivalent

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemada $x_1=1$, deb olsak, $F_1=\begin{pmatrix}1\\-5\\-3\end{pmatrix}$ bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental yechimni olamiz. Demak, umumiy yechim

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\-5\\-3\end{pmatrix},$$

bu yerda c - ixtiyoriy son.

26-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining umumiy yechimini vektor shaklda yozing.

Yechish. Sistemaning yechimini topishda Gauss-Jordan usulidan foydalanamiz:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 3 & \vert & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & \vert & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & \vert & 2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & -5 & 6 & -5 & \vert & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & \vert & 3 \\ 0 & -5 & 6 & -5 & \vert & -4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1,2 & 1 & \vert & 0,8 \\ 1 & 0 & 2,6 & -1 & \vert & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix}.$$

$F_0=(0,6;0,8;0;0)$ sistemaning xususiy yechimlaridan biri. Bundan foydalanib sistemaning umumiy yechimini vektor shaklida yozamiz:

$$X = F_0 + c_1F_1 + c_2F_2 = \begin{pmatrix}0,6\\0,8\\0\\0\end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix}-2,6\\1,2\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

bu yerda c_1, c_2 lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

2.5. Iqtisodiy masalalarni yechishning ba'zi metodlari. Leontev modeli

Matritsalar algebrasi elementlarining qo'llanilishi ko'plab iqtisodiy masalalarni hal etishning asosiy usullaridan biri hisoblanadi. Matritsalar nazariyasining asoslari nemis olimlari K. Veyershtras va G.Frobeniuslar tomonidan IXX asrning oxiri XX asrning boshlarida yaratilgan. Aksariyat iqtisodiy ob'yekt va jarayonlarning matematik modellari matritsalar yordamida sodda va kompakt ko'rinishda tasvirlanadi. Hozirgi kunda matritsalar tabiiy va amaliy jarayonlarning matematik modellarini tuzishda muhim apparat sifatida qo'llanilmoqda.Ushbu masala ma'lumotlar bazasini ishlab chiqishda va qo'llashda dolzarb masalaga aylangan. Ular bilan ishlashda deyarli barcha ma'lumotlar matritsali shaklda saqlanadi va qayta ishlanadi. Shuning uchun ma'lumotlar bazasi bilan ishlash dolzarb masalalardan hisoblanadi.

Matritsali hisoblar. Quyida korxonalar ish faoliyatini o'rganish va tahlil qilishda matritsaviy hisoblardan foydalanishga misollar ko'rib chiqamiz.

27-misol. Jadvalda 3 xil xom ashyo turidan foydalangan holda 4 xil mahsulotni ishlab chiqaruvchi 5 ta korxonaning kunlik ishlab chiqarishi haqida ma'lumot berilgan, hamda bir yilda har bir korxonaning ish muddati va har bir xomashyoning narxi keltirilgan.

Mahsulot turi	**Korxonalarning mehnat unumdorligi (bir kunda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori)**					**Xomashyo sarfi (bir birlik mahsulot uchun)**		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	4	5	3	6	7	2	3	4
2	0	2	4	3	0	3	5	6
3	8	15	0	4	6	4	4	5
4	3	10	7	5	4	5	8	6
Bir yildagi ish kunlari soni						**Xomashyo bahosi**		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	200	150	170	120	140	40	50	60

Topshiriqlar:

1. Har bir korxonaning har bir turdagi mahsulot bo'yicha yillik ishlab chiqarish unumdorligini toping.
2. Har bir korxonaning xomashyoning har bir turi bo'yicha yillik talabini toping.
3. Jadval asosida ko'rsatilgan turlarda va miqdorda mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan xomashyolarni sotib olish uchun har bir korxonaning yillik kreditini toping.

Yechish. Ushbu misolda bizni qiziqtirayotgan ishlab chiqarishning butun iqtisodiy spektrni xarakterlovchi matritsalarni tuzishimiz kerak, so'ngra esa ular ustida bajariladigan amallar yordamida berilgan masalaning yechimini olishimiz mumkin. Eng avvalo korxonalarning mahsulotning barcha turlari bo'yicha ishlab chiqarish unumdorligi matritsasini keltiramiz.

$$\begin{array}{cc} & \text{Ishlab chiqarish unumdorligi} \\ & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{c} \max \textit{sulot} \\ \textit{turi} \\ \downarrow \end{array}$$

Bu matritsaning har bir ustuni alohida korxonaning mahsulotning har bir turi bo'yicha kunlik ishlab chiqarish unumdorligiga mos keladi. Bundan kelib chiqadiki $j-$ korxonada mahsulotning har bir turi bo'yicha yillik ishlab chiqarish unumdorligi A matritsada $j-$ustunning har bir korxona uchun yildagi ish kunlari soniga$(j=1,2,3,4,5)$ ko'paytirishdan kelib chiqadi. Shunday qilib har bir korxonada mahsulotning har bir turi bo'yicha yillik ishlab chiqarish unumdorligi quyidagi matritsa bilan tavsiflanadi.

$$A_{yil}=\begin{pmatrix} 800 & 750 & 510 & 720 & 980 \\ 0 & 300 & 680 & 360 & 0 \\ 1600 & 2250 & 0 & 480 & 840 \\ 600 & 1500 & 1190 & 600 & 560 \end{pmatrix}$$

Mahsulot birligiga ketadigan xomashyo xarajatlari matritsasi (bu ko'rsatgichlar shartga ko'ra har bir korxona uchun bir xil) quyidagi ko'rinishga ega.

$$\begin{array}{cc} & \text{Mahsulot turi} \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ B= & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \textit{xom ashyo} \\ \textit{turi} \\ \downarrow \end{array}$$

Korxonalardagi xomashyoning har bir turi bo'yicha kunlik xarajat B matritsani A matritsaga ko'paytirish bilan aniqlanadi:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 55 & 126 & 53 & 62 & 58 \\ 68 & 165 & 85 & 89 & 77 \\ 74 & 167 & 78 & 92 & 82 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda $i-$ satr xomashyo turidan nomeriga mos keladigan $j-$ ustun esa korxonaning nomeriga mos keladi $(i=1,2,3\ j=1,2,3,4,5)$. Masalaning 2-savoliga javobni A_{yil} matritsa kabi, ya'ni BA matritsa ustunlarini korxonaning yillik ish kunlari soniga ko'paytirish orqali olamiz bu har bir korxonaning xomashyoning har bir turiga yillik talabini beradi.

$$B\cdot A_{yil}=\begin{pmatrix}11000 & 18900 & 9010 & 7440 & 8120\\ 13600 & 24750 & 14450 & 10680 & 10780\\ 14800 & 25050 & 13260 & 11040 & 11480\end{pmatrix}.$$

Xomashyo narxi matritsasini kiritamiz $Q=(40\quad 50\quad 60)$. U holda har bir korxona uchun xomashyoning umumiy yillik zaxirasi Q narx matritsasini BA matritsaga ko'paytirish orqali hosil qilinadi.

$$P=QBA_{yil}=(2008000\quad 3496500\quad 1878500\quad 1494000\quad 1552600).$$

Demak xomashyoni sotib olish uchun korxonalarning kreditlashtirish summasi P matritsaning elementlari bilan aniqlanadi.

28-misol. Korxona 4 xil xomashyo turini qo'llab 4 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Xomashyo xarajatlarining normalari A matritsaning elementlari sifatida berilgan:

$$\begin{array}{c} \text{Xomashyo turi} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 6\\ 7 & 2 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 6 & 8\end{pmatrix}\begin{array}{l} 1\ \textit{mahsulot} \\ 2\quad \textit{turi} \\ 3\quad \downarrow \\ 4 \end{array}$$

a) mahsulotning har bir turi uchun ketgan xomashyo va uni tashishga ketgan umumiy xarajatlarni toping; b) agar har bir xomashyo turining va uni yetkazishning tannarxlari ma'lum bo'lsa, (mos ravishda 4, 6, 5, 8 va 2, 1, 3, 2 pul birligi) mahsulot chiqarishning berilgan rejasi (mos ravishda 60, 50, 35, 40 birlik.) shartlari bo'yicha xomashyo va uni tashishga ketgan umumiy xarajatlarni toping.

Yechish. Xomashyo va uni yetkazishning tannarxi matritsasini tuzamiz.

$$C=\begin{pmatrix}4 & 6 & 5 & 8\\ 2 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

U holda masalaning birinchi savoliga javob A matritsaning transponirlangan C matritsaga ko'paytmasi sifatida beriladi:

$$A\cdot C^T=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 6\\ 7 & 2 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 6 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & 1\\ 5 & 3\\ 8 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}86 & 29\\ 89 & 31\\ 71 & 29\\ 140 & 47\end{pmatrix}.$$

Xomashyo va uni yetkazishga ketgan umumiy xarajatlar $\vec{q}=(60;50;35;40)$ mahsulot ishlab chiqarishning vektor rejasida $\vec{q}$ vektorning AC^T matritsaga ko'paytmasi bilan aniqlanadi:

$$\bar{q}\cdot A\cdot C^T=(60,\quad 50,\quad 35,\quad 40)\cdot\begin{pmatrix}86 & 29\\ 89 & 31\\ 71 & 29\\ 140 & 47\end{pmatrix}=(17695,\quad 6185).$$

Chiziqli tenglamalar sistemasidan foydalanish. Chiziqli tenglamalar sistemasini tuzishga va yechishga olib keluvchi masalalarni ko'rib chiqamiz.

29-misol. Korxona xomashyoning uch turini qo'llab, mahsulotning uch turini ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarishning zaruriy xarakteristikalari jadvalda ko'rsatilgan. Xomashyoning berilgan zaxiralarida mahsulotning har bir turini ishlab chiqarish hajmini aniqlash talab etiladi.

Xom ashyo turi	**Mahsulot turlari uchun xom ashyo sarfi**			**Xom ashyo hajmi**
	1	**2**	**3**	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Yechish. Mahsulot ishlab chiqarish hajmlarini x_1, x_2, x_3 orqali belgilaymiz. U holda homashyoning har bir turi uchun zaxiralarining to'liq ishlatilishi shartida balans munosabatlarini yozish mumkin. Ular uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasini tashkil qiladi.

$$\begin{cases}6x_1+4x_2+5x_3=2400\\ 4x_1+3x_2+x_3=1450\\ 5x_1+2x_2+3x_3=1550\end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini ixtiyoriy usul bilan yechib, homashyoning berilgan zaxiralarida mahsulot ishlab chiqarish hajmlarini topamiz. Har bir tur bo'yicha mos ravishda $x_1=150,\ x_2=250,\ x_3=100$ ni tashkil qiladi.

Mashqlarni bajaring

1) Tikuv fabrikasi uch kun davomida kastyumlar, plashlar va kurtkalar tikdi. Uch kun ichida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmlari va bu kunlarda ishlab chiqarishga ketgan pul xarajatlari ma'lum.

Kun	**Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmlari (birlik)**			**Xarajatlar (ming.shart bir.)**
	Kostyumlar	**Plashlar**	**Kurtkalar**	
Birinchi	50	10	30	176
Ikkinchi	35	25	20	168
Uchinchi	40	20	30	184

Har bir turdagi mahsulot birligining tannarxini toping.

2) Jadvalda 3 xil xomashyo turidan foydalangan holda 4 xil mahsulotni ishlab chiqaruvchi 5 ta korxonaning kunlik ishlab chiqarishi haqida ma'lumot

berilgan, hamda bir yilda har bir korxonaning ish muddati va har bir xomashyoning narxi keltirilgan.

Mahsulot turi	Korxonalarning mehnat unumdorligi (bir kunda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori)					Xomashyo sarfi (bir birlik mahsulot uchun)		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	5	4	3	3	6	8	3	4
2	1	12	5	3	5	3	5	6
3	7	5	0	4	6	5	4	5
4	3	5	8	5	4	2	3	5
	Bir yildagi ish kunlari soni					Xom-ashyo bahosi		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	250	200	180	190	150	70	80	60

Topshiriqlar:

1. Har bir korxonaning har bir turdagi mahsulot bo'yicha yillik ishlab chiqarish unumdorligini toping.
2. Har bir korxonaning xomashyoning har bir turi bo'yicha yillik talabini toping.
3. Jadval asosida ko'rsatilgan turlarda va miqdorda mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan xomashyolarni sotib olish uchun har bir korxonaning yillik kreditini toping.

Tarmoqlararo balansning matematik modeli. Chiziqli algebra usullari masalan, chiziqli tenglamalar sistemasi nazariyasi keng ko'lamda iqtisodiyotni rejalashtirish va tashkil etish bilan bog'liq masalalarni yechishda qo'llaniladi. Biz quyida asosan tarmoqlararo balansning matematik modeli bilan tanishamiz.

Iqtisodiyotni sonli tahlil qilish xususan, ijtimoiy mahsulot ishlab chiqarish jarayonini tahlil qilish masalasi o'zaro ishlab chiqarish mahsulotlari va xizmatlar oqimlarini o'rganishga keltiriladi.

Shu nuqtai-nazardan iqtisodiy sistema har biri biror-bir turdagi mahsulot ishlab chiqarishga moslashgan tarmoqlardan iborat, deb qaralishi mumkin. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar o'zaro ayirboshlanadi va natijada tarmoqlar orasida mahsulot oqimlari vujudga keladi. O'zaro mahsulot oqimlarining vujudga kelishi muqarrardir, chunki har bir tarmoq o'z mahsulotini ishlab chiqarish jarayonida o'zga tarmoq mahsulotidan foydalanadi yoki uni sarflaydi.

Iqtisodiyotni normal rivojlanishining asosiy shartlaridan biri barcha tarmoqlar bo'yicha ishlab chiqarish sarflari va umumiy yig'indi mahsulot orasida balansning mavjudligidir. Bunda ishlab chiqarilgan mahsulotning bir qismi ishlab chiqarish tarmoqlari sohasiga qaytmasligini va shaxsiy ehtiyojni qondirishga, jamg'arishga sarflanishini yoki eksportga chiqarilishini e'tiborga olish talab etiladi.

Iqtisodiy sistemaning yalpi mahsuloti uning n ta o'zaro bog'liq tarmoqlarida ishlab chiqariladi deylik. Ishlab chiqarish sikli yakunlanadigan vaqtni o'z ichiga olgan davrni qaraymiz.

x_1, x_2, ..., x_n – mos ravishda, birinchi, ikkinchi, ..., n – tarmoqlarning natural birliklarda ishlab chiqaradigan yalpi mahsulot hajmlari bo'lsin. Aytaylik, qaralayotgan davrda x_1 – metallurgiya tarmog'ining tonna hisobida ishlab chiqaradigan metall miqdori, x_2 – kimyo tarmog'ining ishlab chiqaradigan mahsuloti miqdori, x_3 – avtomobilsozlik tarmog'ining ishlab chiqaradigan yengil avtomobillari soni bo'lsin va hokazo.

$x(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ – sistemaning yalpi mahsulot vektori deyiladi.

k – tarmoqning x_k birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun i – tarmoq mahsuloti sarfini x_{ik} orqali belgilaymiz. Masalan, misolimizda x_3 dona avtomobil ishlab chiqarish uchun 1-tarmoq mahsuloti, ya'ni metallning sarfi miqdorini x_{13} bilan belgilaymiz. i-tarmoqning ishlab chiqarish sohasiga qaytmaydigan yakuniy mahsulot miqdori y_i bo'lsin. U holda $y(y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n)$ – sistemaning yakuniy mahsulot vektori deyiladi.

Sistemaning i-tarmog'i mahsuloti x_i uchun moddiy balans sxemasini "mahsulot ishlab chiqarish va uni taqsimlash" prinsipi bo'yicha quyidagicha tasvirlash mumkin.

Ishlab chiqarish iste'moli	Yakuniy mahsulot	Yalpi mahsulot
x_{11} x_{12} L x_{1n}	y_1	x_1
x_{21} x_{22} L x_{2n}	y_2	x_2
L L L L	K	L
x_{n1} x_{n2} L x_{nn}	y_n	x_n

Moddiy balansning oqimlar tenglamalarini

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} + y_i, \quad i = 1,2,...,n$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Yuqoridagilarni quyidagi jadvalda tasvirlash mumkin

$i \backslash k$	1	2	...	n	$\sum x$
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	$\sum_{k=1}^{n} x_{1k}$
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	$\sum_{k=1}^{n} x_{2k}$
...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	$\sum_{k=1}^{n} x_{nk}$
yalpi mahsulot	x_1	x_2	...	x_n	
yakuniy mahsulot	y_1	y_2	...	y_n	

k – mahsulotning bir (shartli) birligini ishlab chiqarish uchun i-mahsulotning bevosita sarfi miqdori a_{ik} bo'lsin. a_{ik} kattaliklarga bevosita xarajat koeffitsiyentlari yoki texnologik koeffitsiyentlar, deyiladi.

Masalan, misolimizga qaytsak, a_{13} – 1 dona avtomobil ishlab chiqarish uchun bevosita sarflanadigan metall miqdoridir.

O'z-o'zidan ko'rinadiki, i – mahsulotning k–tarmoqqa jami sarfi x_{ik} k–tarmoqning bir birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun i–mahsulotning bevosita sarfi a_{ik} ning ushbu tarmoq ishlab chiqaradigan mahsulot miqdori x_k ga ko'paytirilganiga teng.

$x_{ik} = a_{ik}x_k$ ya'ni, ishlab chiqarish sarflarida chiziqlilik prinsipi o'rinli bo'lsin. U holda

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + y_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Oxirgi sistemani, o'z navbatida, vektor-matritsa ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$X - AX = Y \text{ yoki } (E - A)X = Y \qquad \text{(L)}$$

Bu yerda, E – n-tartibli birlik matritsa, $A = (a_{ik})$ – bevosita xarajat koeffitsiyentlari matritsasi yoki texnologik matritsa deb ataladi. a_{ik} kattaliklarni o'zgarmas deb qaraymiz.

(L) tenglamaga Leontevning chiziqli modeli deyiladi. Agar $Y = \theta$ bo'lsa, Leontev modeli yopiq, $Y \neq \theta$ bo'lganda esa model ochiq deyiladi.

Masala quyidagi hollarning biri ko'rinishida qo'yilishi mumkin:

1. Yakuniy mahsulot hajmlari vektori Y ga qarab sistema yalpi mahsulot hajmi vektori X ni hisoblash;
2. X ga qarab Y ni hisoblash.

Rejalashtirishning asosiy masalalaridan biri bu birinchi masaladir, ya'ni Y vektorning berilishiga qarab, X vektorni hisoblashdir. Leontevning ochiq modeliga tegishli asosiy masala – tegishli model ixtiyoriy yakuniy ehtiyoj Y ni qondira oladimi, degan savolga javob berishdan iborat. Ma'nosiga ko'ra X

nomanfiy bo'lgani uchun iqtisodiy sistema A matritsa qanday bo'lganda nomanfiy yechimga ega bo'lishini tekshirishdan iborat.

$X_0 - AX_0$ vektorning nomanfiyligini ta'minlaydigan manfiymas X_0 vektor mavjud bo'lsa, A matritsaga (shu jumladan, modelga) samarali matritsa (model), deyiladi.

Ochiq model uchun A matritsaning samaralilik zaruriy va yetarli shartlari isbotlangan. Ularning biriga ko'ra, ochiq (L) model samarali bo'lishi uchun manfiymas A matritsaning barcha xos qiymatlari moduli bo'yicha 1 dan kichik bo'lishi yetarli.

Agar (2) modelda nomanfiy A matritsa samarali bo'lsa, u holda ixtiyoriy berilgan nomanfiy Y vektor uchun (L) tenglamalar sistemasi yagona manfiymas X yechimga ega bo'ladi. Boshqacha aytganda, har bir yakuniy mahsulot nomanfiy Y vektoriga, yagona manfiymas ishlab chiqarish hajmi X vektori mos keladi.

A matritsa samarali bo'lsa, nomanfiy $(E-A)^{-1}$ matritsa mavjud bo'lib, asosiy masala yechimi

$$X = (E-A)^{-1}Y$$

formula bo'yicha topiladi.

30-misol. Quyidagi

Ishlab chiqarish sohasi	**Iste'mol qilish**		**Yakuniy mahsulot**	**Yalpi ishlab chiqarish**
	energetika	mashinasozlik		
energetika	7	21	72	100
mashinasozlik	12	15	123	150

jadvaldan foydalanib, agar energetika tarmog'ini ikki marta oshirib mashinasozlikni o'zgartirmasak, har bir tarmoqdagi zaruriy yalpi ishlab chiqarish hajmini toping.

Yechish. Bu yerda

$$x_1 = 100,\quad x_2 = 150,\quad x_{11} = 7,\quad x_{12} = 21,\quad x_{21} = 12,\quad x_{22} = 15,\quad y_1 = 72,\quad y_2 = 123.$$

U holda

$$a_{11} = 0{,}07,\quad a_{12} = 0{,}14,\quad a_{21} = 0{,}12,\quad a_{22} = 0{,}1.$$

Yani

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Bundan foydalanib

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{0{,}8202}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}93 \end{pmatrix}$$

matritsani topamiz.

Shart bo'yicha $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}$. $X = (E-A)^{-1}Y$ formuladan foydalansak

$$X=\frac{1}{0,8202}\begin{pmatrix}0,9 & 0,14\\ 0,12 & 0,93\end{pmatrix}\begin{pmatrix}144\\ 123\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}179,0\\ 160,5\end{pmatrix}$$

Demak, energetika tarmog'idagi yalpi ishlab chiqarishni 179,0 sh. b. gacha, mashinasozlikda esa 160,5 sh. b. gacha orttirish kerak.

Mashqlarni bajaring

1) a) agar yakuniy mahsulotni 1-sohada 12%, 2-sohada 10% ko'paytirish kerak bo'lsa, har bir soha bo'yicha yalpi ishlab chiqarish uchun kerakli hajmni hisoblang;

b) agar yalpi ishlab chiqarishni 1-sohada 15%, 2-sohada 20% ko'paytirish kerak bo'lsa, har bir soha bo'yicha yakuniy mahsulot hajmni hisoblang:

Ishlab chiqarish sohasi	**Iste'mol qilish**		**Yakuniy mahsulot**	**Yalpi ishlab chiqarish**
	1	2		
1	120	160	230	500
2	270	50	100	450

2) a) agar yakuniy mahsulotni 1-sohada 10%, 2-sohada 1,5 marta ko'paytirish kerak bo'lsa, har bir soha bo'yicha yalpi ishlab chiqarish uchun kerakli hajmni hisoblang;

b) agar yalpi ishlab chiqarishni 1-sohada 15%, 2-sohada 1,2 marta ko'paytirish kerak bo'lsa, har bir soha bo'yicha yakuniy mahsulot hajmni hisoblang:

Ishlab chiqarish sohasi	**Iste'mol qilish**		**Yakuniy mahsulot**	**Yalpi ishlab chiqarish**
	1	2		
1	25	20	120	180
2	32	15	150	200

2-bobga doir savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi, deb nimaga aytiladi?
2. Qanday sistemalarga birgalikda, aniq, aniqmas va birgalikda bo'lmagan sistemalar deyiladi?
3. Birgalikdagi chiziqli tenglamalar sistemasi nima bilan xarakterlanadi va erkli noma'lumlar deb nimaga aytiladi?
4. Chiziqli tenglamalar sistemasi yechimi mavjudlik va yagonalik yetarli shartlari nimalardan iborat?
5. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss usulining qanday modifikatsiyalarini bilasiz?

6. Chiziqli tenglamalar sistemasi ustida elementar almashtirishlar deganda nimani tushunasiz?
7. Chiziqli tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini topish o'rniga uning umumiy yechimini qurish yetarlimi?
8. Aniqmas chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer formulalaridan foydalanib yechish mumkinmi?
9. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa shaklida yozish mumkinmi va qanday?
10. Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi matritsa ko'rinishida qanday yoziladi?
11. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish yoki teskari matritsa usulining afzallik va noqulaylik jihatlari nimalardan iborat?
12. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi, deb nimaga aytiladi?
13. Agar bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi fundamental yechimlari tizimi qurilgan bo'lsa, uning umumiy yechimini vektor shaklda yozish mumkinmi va qanday?
14. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemaning keltirilgan sistemasi deb nimaga aytiladi?
15. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemaning umumiy yechimi vektor shaklda qanday yoziladi?

2-bobga doir misol va masalalar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda yoki birgalikda emasligini tekshiring, birgalikda bo'lgan sistema uchun umumiy va bitta xususiy yechimini toping.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

b) $\begin{cases} -5x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -5, \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 = -7, \\ -x_1 - 2x_2 = 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 14x_3 - 7x_4 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + 20x_3 - 10x_4 = 4, \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 7. \end{cases}$

2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer va teskari matritsa metodida yeching.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -2, \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ \quad\quad 3x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_1 + \quad\quad x_3 = -2. \end{cases}$

3. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss metodida yeching.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

4. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss - Jordan metodida yeching.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

5. Chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimini toping toping:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

6. Korxona 3 turdagi *A*, *B* va *C* mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 3 turdagi xomashyodan, foydalanadi: I, II, III. Har bir turdagi mahsulotdan 1birlik ishlab chiqarish uchun sarflanadigan turli xomashyolar miqdori (normalari) quyidagi jadvalda keltirilgan. Shuningdek, jadvalda fabrika ishlatishi mumkin bo'lgan har bir turdagi xomashyolarning umumiy miqdori ham keltirilgan.

Xomashyo turi	**1ta mahsulot uchun sarflanadigan xomashyo normasi**			**Xomashyoning umumiy miqdori**
	A	B	C	
I	2	1	1	45
II	1	1	2	40
III	1	0	1	15

Korxona har bir turdagi mahsulotdan qancha birlikdan ishlab chiqarishi mumkin?

7. Uch guruh dalaning uch maydonini tozaladi. Maydonlar yuzi va uni tozalashga ketgan vaqt jadvalda keltirilgan.

Maydon	**Guruhlarning ish vaqti (soat)**			**Maydon yuzasi (ga)**
	I	**II**	**III**	
1	2	3	1	10
2	1	5	4	19
3	4	1	3	18

Har bir brigadaning mehnat unumdorligini toping.

8. Xomashyo zaxiralari bo'yicha mahsulotni ishlab chiqarish prognozi. Korxona xomashyoning 3 turini qo'llab, mahsulotning 3 turini ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarishning zaruriy xarakteristikalari jadvalda ko'rsatilgan. Xom ashyonig berilgan zaxiralarida mahsulotning har bir turini ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Xomashyo turi	**Mahsulot turlarida xomashyo sarfi, og'.bir.mah**			**Xomashyo zaxirasi og'. bir**
	1	**2**	**3**	
1	5	12	7	2350
2	10	6	8	2060
3	9	11	4	2270

Tayanch so'z va iboralar: chiziqli tenglamalar sistemasi (ChTS), tenglamalar sistemasini yechish usullari, yagona yechim, birgalikda bo'lgan sistema, aniqmas sistema, ekvivalent sistema, birgalikda bo'lmagan sistema, tenglamalar sistemasining iqtisodiyotda qo'llanilishi, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss – Jordan modifikatsiyasi, chiziqli tenglamalar sistemasining bazis yechimlari, Kramer teoremasi, Kramer formulalari, teskari matritsa.

3-BOB. ARIFMETIK VEKTOR FAZO

3.1. Arifmetik vektor fazo. Chiziqli fazo

Yuqorida biz vektor tushunchasini kiritib ular ustida quyidagi amallarni aniqlaganmiz.

1-ta'rif. n ta sonning tartiblangan tizimiga n o'lchovli vektor deyiladi.

1) X va Y vektorlarning yig'indisi, deb shunday bir $C = X + Y$ vektorga aytiladiki, bu vektor quyidagicha aniqlanadi:

$$C = X + Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix};$$

2) X vektorning λ songa ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\lambda X = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Vektorlar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga ega:

1) $X + Y = Y + X$;

2) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$;

3) $X + \Theta = X$, bunda $\Theta = (0, 0, \ldots, 0)^T$;

4) $X + (-X) = \Theta$;

5) $1 \cdot X = X$;

6) $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$, bunda α va β sonlar;

7) $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$;

8) $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$

bu yerda, X, Y va Z n o'lchovli vektorlar.

2-ta'rif. Barcha n o'lchovli vektorlar to'plami yuqorida kiritilgan chiziqli amallar bilan birgalikda n o'lchovli arifmetik vektor fazo deyiladi.

Agar vektorlarning komponentlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lsa bu arifmetik vektor fazoga haqiqiy arifmetik vektor fazo deyiladi, agar vektorlarning komponentlari kompleks sonlardan iborat bo'lsa bu arifmetik vektor fazoga kompleks arifmetik vektor fazo deyiladi.

Haqiqiy arifmetik vektor fazo R^n, kompleks arifmetik vektor fazo esa C^n bilan belgilanadi.

Biz faqat haqiqiy arifmetik vektor fazo bilan ish ko'ramiz va uni oddiy qilib arifmetik fazo deb ataymiz hamda R^n kabi belgilaymiz.

Izoh. Vektor tushunchasining umumlashtirilishi vektor komponentlarini turlicha talqin qilishga imkon beradi.

1-misol. Korxona o'zining ishlab chiqarish jarayonida n turdagi xomashyodan foydalanib m xildagi mahsulot ishlab chiqarsin. Korxonaning bir sutkada xomashyoga bo'lgan ehtiyojini va bir sutkada ishlab chiqargan mahsulotlarini ifodalovchi vektorlarni yozing.

Yechish. Agar x_k kattalik k –xomashyoga bo'lgan korxonaning bir sutkalik ehtiyojini, y_i kattalik esa bir sutkada ishlab chiqarilgan i – mahsulot miqdorini bildirsa, u holda quyidagi $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ va $Y=(y_1,y_2,...,y_m)^T$ vektorlar mos ravishda korxonaning barcha xomashyoga bo'lgan bir sutkalik ehtiyojini va bir kunda, ishlab chiqarilgan mahsulotning turlari miqdorini bildiradi.

2-misol. Ikkita korxona bir xil 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Korxonalarning har bir mahsulotdan bir sutkada qanchadan ishlab chiqarishi quyidagi jadvalda berilgan:

Mahsulot turlari	1	2	3	4
1-korxona	24	36	50	80
2-korxona	30	25	20	10

Birinchi korxona bir oyda 22 kun, ikkinchi korxona esa 20 kun ishlaydi. Bir oyda ikkala korxona har bir turdagi mahsulotlardan birgalikda qancha miqdorda ishlab chiqaradi.

Yechish. Korxonalarning bir sutkada ishlab chiqargan mahsulotlari vektorlarini quyidagicha yozamiz:

$$A=\begin{pmatrix}24\\36\\50\\80\end{pmatrix} \quad va \quad B=\begin{pmatrix}30\\25\\20\\10\end{pmatrix}.$$

U holda ikkala korxonaning birgalikdagi bir oyda ishlab chiqarish vektori quyidagicha topiladi:

$$22A+20B=22\begin{pmatrix}24\\36\\50\\80\end{pmatrix}+20\begin{pmatrix}30\\25\\20\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}528\\792\\1100\\1760\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}600\\500\\400\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1128\\1292\\1500\\1960\end{pmatrix}.$$

Bizga ma'lumki ikkita bir xil o'lchovli

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \quad va \quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb shu vektorlar mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng songa aytiladi va

$$(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$$

shaklda yoziladi. Bu yerda skalyar ko'paytmaning ba'zi xossalarini keltirib o'tamiz.

Skalyar ko'paytmani matritsalar ko'paytmasi shaklida quyidagicha ifodalashimiz mumkin:

$$(X,Y)=X^TY=Y^TX.$$

3-misol. Quyidagi vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping:

$$X=\begin{pmatrix}2\\5\\3\\-4\end{pmatrix};\quad Y=\begin{pmatrix}-1\\5\\6\\7\end{pmatrix}.$$

Yechish. $(X,Y)=X^TY=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\6\\7\end{pmatrix}=$

$$=2\cdot(-1)+5\cdot5+3\cdot6+(-4)\cdot7=-2+25+18-28=13.$$

4-misol. Korxona 5 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Korxonaning bir sutkada har bir turdagi mahsulotdan qanchadan ishlab chiqarganligi va har bir mahsulotning bir birligining narxi quyidagi jadvalda berilgan:

Mahsulot turlari	1	2	3	4	5
Korxonaning bir sutkada i/ch.mahsuloti miqdori	23	54	26	46	68
Bir birlik mahsulot narxi(sh.p.b)	32	56	36	65	35

Korxonaning bir sutkalik daromadi qancha bo'ladi?

Yechish. Agar korxonaning ishlab chiqarish vektorini X va narx vektorini P bilan belgilasak, u holda

$$X=\begin{pmatrix}23\\54\\26\\46\\68\end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix}32\\56\\36\\65\\35\end{pmatrix}$$

bo'ladi. Korxonaning bir sutkalik daromadini topish uchun bu vektorlarni skalyar ko'paytiramiz:

$$(X,P)=X^TP=\begin{pmatrix}23 & 54 & 26 & 46 & 68\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32\\56\\36\\65\\35\end{pmatrix}=10066.$$

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

1) $(X,X)\geq 0$;

2) $(X,X)=0 \Leftrightarrow X=\Theta$;

3) $(X,Y)=(Y,X)$;

4) $(X,Y+Z)=(X,Y)+(X,Z)$;

5) $(\lambda X,Y)=\lambda(X,Y)$.

bu yerda X,Y, Z n o'lchovli vektorlar va λ ixtiyoriy son.

3-ta'rif. Vektor komponentlari kvadratlari yig'indisining kvadrat ildiziga teng bo'lgan $|X|=\sqrt{(X,X)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ songa n o'lchovli X vektor uzunligi (moduli, normasi) deyiladi.

Vektor uzunligi quyidagi xossalarga ega:

1) $|X|\geq 0$; $|X|=0$ agar, $X=\Theta$

2) $|\lambda X|=|\lambda|\cdot|X|$;

3) $|X+Y|\leq|X|+|Y|$ (uchburchak tengsizligi)

bu yerda, X,Y, Z n o'lchovli vektorlar va λ ixtiyoriy son.

5-misol. Quyidagi vektorlarning uzunliklarini toping:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix};\quad 2)B=\begin{pmatrix}2\\5\\-2\\3\end{pmatrix};\quad 3)\ C=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-4\\-3\end{pmatrix}.$$

Yechish. 1) $|A|=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

2) $|B|=\sqrt{2^2+5^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+25+4+9}=\sqrt{42}$

3) $|C|=\sqrt{1^2+2^2+3^2+(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9+16+9}=\sqrt{39}.$

4-ta'rif. Agar ikkita noldan farqli vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, u holda bunday vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi.

6-misol. a parametrning qanday qiymatida quyidagi vektorlar ortogonal bo'ladi:

$$X=\begin{pmatrix}3\\0\\a\\-1\end{pmatrix} \quad va \quad Y=\begin{pmatrix}-2\\5\\6\\0\end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasini hisoblaymiz

$$(X,Y)=3\cdot(-2)+0\cdot5+a\cdot6+(-1)\cdot0=6a-6.$$

Masala shartiga ko'ra, $6a-6=0$, $a=1$.

R^n arifmetik fazoda kiritilgan skalyar ko'paytma xossalaridan foydalanib quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema. R^n arifmetik fazodan olingan ixtiyoriy X va Y vektorlar uchun

$$|(X,Y)|\le|X|\cdot|Y| \quad yoki \quad \left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}.$$

Isbot. Ixtiyoriy $\lambda\in R$ uchun

$$0\le(X+\lambda Y,X+\lambda Y)=(X,X)+2\lambda(X,Y)+\lambda^2(Y,Y)$$

Ixtiyoriy $\lambda\in R$ ga nisbatan hosil bo'lgan bu kvadrat uchhad nomanfiyligidan bu kvadrat uchhadning diskriminanti manfiy bo'lmasligini bilamiz. Bundan

$$4(X,Y)^2-4(X,X)(Y,Y)\le0 \text{ yoki } |(X,Y)|\le|X|\cdot|Y|.$$

Bu teorema asosida R^n arifmetik fazo vektorlari orasidagi burchak tushunchasini kiritamiz.

5-ta'rif. Ikkita n o'lchovli noldan farqli X va Y vektorlar orasidagi burchak

$$\cos\varphi=\frac{(X,Y)}{|X|\cdot|Y|}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}},\quad \varphi\in[0;\pi]$$

formula bilan aniqlanadi.

R^n arifmetik fazodagi n o'lchovli vektorlar orasidagi burchak ta'rifining korrektligi yuqorida isbotlangan Koshi – Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi.

7-misol. $X(3;-4;2;5)$ *va* $Y(-1;3;-7;2)$ vektorlar berilgan:

a) $3X+2Y$ vektorni toping;

b) (X,Y) skalyar ko'paytmani toping;

c) X *va* Y vektorlar orasidagi burchakni toping;

d) Koshi – Bunyakovskiy tengsizligini tekshiring.

Yechish. $a)\ 3X+2Y=3\begin{pmatrix}3\\-4\\2\\5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\3\\-7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-6\\-8\\19\end{pmatrix}.$

$b)\ (X,Y)=-3-12-14+10=-19.$

$c)\ |X|=\sqrt{9+16+4+25}=\sqrt{54};\quad |Y|=\sqrt{1+9+49+4}=\sqrt{63}.$

$\cos\varphi=\dfrac{-19}{\sqrt{54}\sqrt{63}};\quad \varphi=\arccos\left(\dfrac{-19}{\sqrt{54}\sqrt{63}}\right)=\pi-\arccos\left(\dfrac{19}{9\sqrt{42}}\right).$

$d)\ |-19|<\sqrt{54}\cdot\sqrt{63}\qquad 19<9\sqrt{42}\qquad 9\sqrt{42}\approx 58{,}33.$

Endi to'plamlar tushunchasidan foydalanib chiziqli fazo tushunchasini kiritamiz. Bular haqiqiy va kompleks sonlar to'plamlari; to'gri chiziqdagi, tekislikdagi va fazodagi vektorlar to'plamlari; oldingi mavzularda biz tanishgan n o'lchovli vektorlar to'plamlari; bizga tanish bo'lgan matritsalar to'plamlari; biror $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz funksiyalar to'plamlari va hokazo. Bu to'plamlar turli tabiatli bo'lsada, bu to'plamlarning har birining elementlari orasida ularni qo'shish va songa ko'paytirish amallarini kiritish mumkin va bu to'plamlar turli tabiatli bo'lishiga qaramasdan ular ustida kiritilgan qo'shish va songa ko'paytirish amallari juda ko'p umumiy xossalarga ega bo'ladi. Biz quyida to'plam elementlarining tabiatini hisobga olmasdan bu to'plamlar uchun umumiy bo'lgan nazariya bilan tanishamiz. Bu ob'ektlardan biri chiziqli fazo bo'lib, amaliy masalalarni yechishda juda muhim ahamiyatga ega.

6-ta'rif. Agar elementlari ixtiyoriy tabiatli bo'lgan L to'plam berilgan va bu to'plam elementlari orasida qo'shish va songa ko'paytirish amallari kiritilgan, ya'ni

1) ixtiyoriy $x\in L$ va $y\in L$ elementlar juftiga x va y elementlarning yig'indisi, deb ataluvchi yagona $z=x+y\in L$ element mos qo'yilgan;

2) $x\in L$ element va $\lambda\in K$ (K-haqiqiy yoki kompleks sonlar to'plami) songa x vektorning λ songa ko'paytmasi deb ataluvchi yagona $z=\lambda x\in L$ element mos qo'yilgan bo'lib, aniqlangan bu qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagi 8 ta aksiomani bajarsa, u holda L to'plam chiziqli (yoki vektor) fazo deyiladi:

1. Qo'shish kommutativ, $x+y=y+x$;
2. Qo'shish assotsiativ, $(x+y)+z=x+(y+x)$;
3. L to'plamda barcha x elementlar uchun $x+\theta=x$ shartni qanoatlantiradigan nol element θ mavjud;
4. L to'plamda har qanday x element uchun $x+(-x)=\theta$ shartni qanoatlantiradigan $-x$ qarama-qarshi element mavjud;
5. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;
6. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

7. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;
8. $1\cdot x=x$.

Bundan keyin biz chiziqli fazo elementlarini vektorlar deb aytamiz. Agar chiziqli fazodagi vektorlar uchun kompleks songa ko'paytirish amali aniqlangan bo'lsa, u holda bunday fazoga kompleks chiziqli fazo deyiladi. Agar chiziqli fazodagi vektorlar uchun faqat haqiqiy songa ko'paytirish amali aniqlangan bo'lsa, u holda bunday fazo haqiqiy chiziqli fazo deyiladi.

Chiziqli fazoni aniqlovchi aksiomalardan, quyidagi xossalarni ajratish mumkin:

1) Har qanday chiziqli fazo uchun yagona θ-nol vektor mavjud.

2) Har qanday chiziqli fazoda har bir x vektor uchun unga qarama-qarshi bo'lgan yagona $(-x)$ vektor mavjud.

3) Har qanday chiziqli fazoda har bir vektor uchun $0\cdot x=0$ tenglik o'rinli.

Izoh. $y-x$ vektorlar ayirmasi deb, y va $-x$ vektorlar yig'indisi tushuniladi.

Yuqoridagi aniqlashimizga ko'ra chiziqli fazo elementlari turli tabiatli bo'lishi mumkin. Quyida biz chiziqli fazolarni aniq misollarda ko'rib chiqamiz.

Misollar. 1. Barcha haqiqiy sonlar to'plami - haqiqiy sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

2. Barcha kompleks sonlar to'plami kompleks sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

3. Oldingi mavzularda ko'rgan $R^n(n=1,2,3,...,k)$ fazolar vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

4. Elementlari $n\times m$-tartibli matritsalardan iborat bo'lgan $M^{n\times m}$ matritsalar to'plami matritsalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

5. $C[a,b]-[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz barcha haqiqiy $f\equiv f(t)$ funksiyalar to'plami funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish $(f+g)t\equiv f(t)+g(t)$, $\lambda f(t)$ amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

6. Darajasi n dan yuqori bo'lmagan barcha ko'phadlar to'plami ko'phadlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

7. Darajasi rosa n ga teng bo'lgan barcha ko'phadlar to'plami ko'phadlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qilmaydi. Haqiqatan ham

$$P\equiv P_n(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\dots+a_1t+a_0$$

va $Q\equiv Q_n(t)=a_nt^n+b_{n-1}t^{n-1}+\dots+b_1t+b_0$ $n-$ darajali ko'phad lekin $P_n(x)-Q_n(x)$ ko'phadning darajasi n dan kichik.

Chiziqli fazoda elementlarning chiziqli kombinatsiyasi, chiziqli bog'liqligi va erkliligi vektorlarga o'xshab kiritiladi.

7-ta'rif. L chiziqli fazodan olingan $x_1, x_2, ..., x_n$ elementlar va $\lambda_i \in R, (i = 1...n)$ sonlar yordamida qurilgan $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + ... + \lambda_n x_n$ ifodaga $x_1, x_2, ..., x_n$ - elementlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

8-ta'rif. Agar $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda y element $x_1, x_2, ..., x_n$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.

9-ta'rif. Agar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ koeffitsiyentlardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lganda

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \theta$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $x_1, x_2, ..., x_n$ elementlar chiziqli bog'liq deyiladi.

Agar

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \theta$$

tenglik $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ koeffitsiyentlardan barchasi nolga teng bo'lgandagina o'rinli bo'lsa, u holda $x_1, x_2, ..., x_n$ - elementlar chiziqli erkli deyiladi. Bu yerda, θ -chiziqli fazoning nol elementi.

10-ta'rif. Agar L chiziqli fazoda n ta chiziqli erkli elementlar mavjud bo'lib, har qanday $n+1$ ta element chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda L chiziqli fazoning o'lchovi n ga teng deyiladi.

11-ta'rif. n o'lchovli L chiziqli fazoda har qanday n ta chiziqli erkli vektorlar sistemasi bu fazoning bazisi deyiladi.

Odatda bazis vektorlar sistemasi $e_1, e_2, ..., e_n$ kabi belgilanadi.

Masalan, darajasi n dan oshmaydigan barcha ko'phadlar to'plami chekli o'lchovli, ya'ni $(n+1)$ o'lchovli chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoning bazisini $\{ 1, t, t^2, ..., t^n \}$ vektorlar sistemasi tashkil qiladi.

8-misol. Barcha ikkinchi tartibli matritsalarning chiziqli fazosini qaraymiz

$$M^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \ a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in R \right\}$$

Bu chiziqli fazoning bazisi va o'lchamini toping.

Yechish. Bu fazoning bazislaridan biri sifatida quyidagi matritsalar sistemasini olish mumkin.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chunki ixtiyoriy 2-tartibli matritsani bu matritsalarning chiziqli kombinatsiyasi orqali quyidagicha yozish mumkin

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + a_{21} e_3 + a_{22} e_4$$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalar sistemasining chiziqli erkliligini ko'rsatamiz. Buning uchun quyidagi tenglikni qaraymiz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu tenglik faqat va faqat $a_{11} = 0,\ a_{12} = 0,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = 0$ bajarilsagina o'rinli bo'lgani uchun $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalar sistemasi M^2 fazoning bazisi hisoblanadi. Bundan M^2 fazoning o'lchovi 4 ga tengligi ham kelib chiqadi.

Teorema. n o'lchovli L chiziqli fazoning har bir elementi bazis vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida bir qiymatli yoziladi.

Isbot. Faraz qilaylik $\{\ e_1, e_2, \dots, e_n\ \}$-elementlar sistemasi L fazoning bazisi va $x \in L$ ixtiyoriy element bo'lsin. U holda $\{\ e_1, e_2, \dots, e_n, x\ \}$ elementlar sistemasi L fazoda chiziqli bog'liq bo'ladi. U holda barchasi bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\{\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda\ \}$ sonlar ketma-ketligi mavjudki,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n + \lambda x = \theta \qquad (3.1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\lambda \neq 0$ bo'ladi, aks holda $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = \theta$ tenglikda $\{\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\ \}$ sonlarning hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lishi kerak, ammo bu $\{\ e_1, e_2, \dots, e_n\ \}$ elementlar sistemasining bazisligiga ziddir. Chunki $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = \theta \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. (3.1) tenglikdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} e_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} e_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} e_n$$

yoki $\mu_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda} (i = 1, 2, \dots, n)$ belgilashdan,

$$x = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n, \qquad (3.2)$$

ya'ni L fazoning ixtiyoriy elementi bazis elementlarining kombinatsiyasi, ko'rinishida ifodalanadi.

Endi (3.2) yoyilma bir qiymatli yo'zilishini isbotlaymiz. Faraz qilaylik bu x elementni boshqa ko'rinishda ham ifodalash mumkin bo'lsin:

$$x = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n \qquad (3.3)$$

(3.2) va (3.3) ifodalarni hadma-had ayirib quyidagini hosil qilamiz

$$(\mu_1 - \gamma_1)e_1 + (\mu_2 - \gamma_2)e_2 + \dots + (\mu_n - \gamma_n)e_n = \theta.$$

Bu tenglikdan va $\{\ e_1, e_2, \dots, e_n\ \}$ elementlar sistemasining bazisligidan $\mu_1 - \gamma_1 = \mu_2 - \gamma_2 = \dots = \mu_n - \gamma_n = 0$ yani $\mu_1 = \gamma_1, \mu_2 = \gamma_2, \dots, \mu_n = \gamma_n$. Demak (3.2) yo'yilma yagona bo'ladi.

12-ta'rif. (3.2) tenglik $x \in L$ elementning $\{\ e_1, e_2, \dots, e_n\ \}$ bazis vektorlari bo'yicha yoyilmasi deyiladi, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlarga esa x elementning bu bazis vektorlar bo'yicha koordinatalari deyiladi.

Chiziqli fazo elementlari uchun chiziqli bog'liqlik va erklilik tushunchalariga misollar ko'ramiz.

9-misol. $C[a,b]$ fazoda $y_1 = sin^2 t$, $y_2 = cos^2 t$, $y_3 = \frac{1}{2}$ funksiyalar chiziqli bog'liq bo'ladimi?

Yechish.

$$y_1 + y_2 - 2y_3 \equiv 0.$$

Demak, bu funksiyalar chiziqli bog'liq.

13-ta'rif. Agar chiziqli fazo cheksiz sondagi chiziqli erkli vektorlar sistemasiga ega bo'lsa, u holda bunday chiziqli fazoga cheksiz o'lchovli chiziqli fazo deyiladi.

Yuqorida ko'rilgan $C[a,b]$ fazo cheksiz o'lchovli chiziqli fazo bo'ladi, chunki $\{\ 1, t, t^2, ..., t^n ...\ \}$ funksiyalar barcha $n \in N$ lar uchun chiziqli erkli bo'ladi.

14-ta'rif. L chiziqli fazoning V qism to'plamining o'zi ham L da aniqlangan elementlarni qo'shish va elementlarni songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo bo'lsa, u holda V fazo L fazoning chiziqli qism fazosi deyiladi.

Teorema. L fazoning bo'sh bo'lmagan V qism to'plami uning chiziqli qism fazosi bo'lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi yetarli:

1. Agar x va y vektorlar V ga tegishli bo'lsa, u holda $x+y$ vektor ham V ga tegishli bo'lishi;
2. Agar x vektor V ga tegishli bo'lsa, u holda αx vektor ham α sonning istalgan qiymatida V ga tegishli bo'lishi.

10-misol. Barcha n-tartibli kvadrat matritsalar chiziqli fazosini qaraymiz. Bu fazo uchun barcha n-tartibli diagonal matritsalar fazosi chiziqli qism fazo bo'ladimi?

Yechish. Ixtiyoriy

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & ,,, & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsalarni qaraymiz. Ma'lumki bunda

$$D_1 + D_2 = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}+b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

ya'ni ikkita diagonal matritsaning yig'indisi yana diagonal matritsa bo'ladi.

Endi diagonal matritsaning λ songa ko'paytmasini tekshiramiz:

$$\lambda D_1 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

ya'ni diagonal matritsani λ songa ko'paytirsak yana diagonal matritsa hosil bo'ladi. Bundan tashqari bizga ma'lumki, $n-$tartibli matritsalar uchun chiziqli fazo uchun o'rinli bo'lgan yuqoridagi 8 ta aksioma bajariladi. Demak, n-tartibli diagonal matritsalar fazosi $n-$tartibli matritsalar fazosining qism fazosi bo'lganligi sababli yuqoridagi teoremaga asosan barcha n-tartibli diagonal matritsalar to'plami chiziqli qism fazo tashkil qiladi.

Mashqlarni bajaring

1) Tekislikda boshi koordinatalar boshida uchi I chorakda bo'lgan vektorlar to'plami vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladimi?

2) Tekislikda birorta vektorga parallel bo'lgan vektorlar to'plami vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladimi?

3) R_+^1 –barcha musbat haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. Bu to'plamda quyidagicha amal kiritamiz: ikki son yig'ndisi sifatida ularning oddiy ko'paytmasini, $r \in R_+^1$ ning λ songa ko'paytmasi sifatida esa r^λ ni tushunamiz. Bu kiritilgan amallarga nisbatan R_+^1 chiziqli fazo tashkil qiladimi?

3.2. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari

Matritsalar algebrasining asosiy tushunchalaridan biri – chiziqli operatorlar tushunchasidir. Faraz qilaylik bizga L, L_1 chiziqli fazolar berilgan bo'lsin.

15-ta'rif. Agar biror $\tilde{A}$ qoida yoki qonun bo'yicha har bir $x \in L$ elementga $y \in L_1$ element mos qo'yilgan bo'lsa, u holda L fazoni L_1 fazoga o'tkazuvchi $\tilde{A}$ operator (almashtirish, akslantirish) aniqlangan deyiladi va $y = \tilde{A}(x)$ ko'rinishda belgilanadi.

16-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in L$, $\lambda \in R$ uchun:

1) $\tilde{A}(x+y) = \tilde{A}(x) + \tilde{A}(y)$ (operatorning additivligi);

2) $\tilde{A}(\lambda x)=\lambda\tilde{A}(x)$ (operatorning bir jinsliligi) munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda bu operator chiziqli operator deyiladi.

11-misol. $\tilde{A}$ operator $\tilde{A}:R^2\to R^3$ almashtirishni amalga oshiradi. Agar bu operator almashtirishni $\tilde{A}(x,y)=(x,y,x+y)$, $(x,y)\in R^2$, $(x,y,x+y)\in R^3$ formula yordamida amalga oshirsa, u holda bu operatorning chiziqli operator ekanligini ko'rsating.

Yechish. Ma'lumki, $a_1=(x_1,y_1)$ va $a_2=(x_2,y_2)$ vektor uchun $a_1+a_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)$. U holda $a_1+a_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ elementga $\tilde{A}$ operatorni ta'sir ettirsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\tilde{A}(a_1+a_2)=\tilde{A}(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,x_1+x_2+y_1+y_2)=$$

$$=(x_1,y_1,x_1+y_1)+(x_2,y_2,x_2+y_2)=\tilde{A}(a_1)+\tilde{A}(a_2).$$

Bu esa $\tilde{A}$ operatorning additivligini ko'rsatadi.

Endi operatorning bir jinsli ekanligini tekshiramiz. Ma'lumki, $ka_1=(kx_1,ky_1)$. U holda

$$\tilde{A}(ka_1)=\tilde{A}(kx_1,ky_1)=(kx_1,ky_1,kx_1+ky_1)=k(x_1,y_1,x_1+y_1)=k\tilde{A}(a_1).$$

Demak, biz o'rganayotgan operator chiziqli operatordir.

Mashqlarni bajaring

1) $T:R^2\to R^2$, $T(x_1,x_2)=(x_1+x_2,-3x_1+2x_2)$ operator berilgan. Bu operatorning chiziqli isbotlang.

2) $\tilde{A}(x_1,x_2,x_3)=(4x_2,\ x_1-2x_2+x_3,\ 5x_1-x_2+4x_3)$ operator berilgan. Bu operatorlarning chiziqli ekanligini isbotlang.

3) $\tilde{A}(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_1-x_2)$, $\tilde{B}(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1+x_2)$ operatorlar berilgan. Bu operatorlarning chiziqli ekanligini isbotlang.

$y=\overset{\circ}{A}(x)\in L_1$ element $x\in L$ elementning aksi, $x\in L$ elementning o'zi esa $y\in L_1$ elementning proobrazi deyiladi. Agar $L=L_1$ bo'lsa, u holda $\tilde{A}$ operator L fazoni o'zini o'ziga akslantiruvchi operator bo'ladi. Biz ko'proq fazoni o'zini o'ziga akslantiruvchi operatorlarni o'rganamiz.

Teorema. Har bir $\tilde{A}:L^n\to L^n$ chiziqli operatorga berilgan bazisda $n-$tartibli matritsa mos keladi va aksincha har bir $n-$tartibli matritsaga n o'lchovli chiziqli fazoni, n o'lchovli chiziqli fazoga akslantiruvchi $\tilde{A}$ chiziqli operator mos keladi.

Isbot. Faraz qilaylik $\tilde{A}:L^n\to L^n$ chiziqli operator bo'lsin. Agar $\{e_1,e_2,...,e_n\}\subseteq L^n$ vektorlar sistemasi L^n fazoning bazisi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x\in L^n$ elementni bu bazis elementlari orqali yozish mumkin:

$$x=x_1e_1+...+x_ne_n. \qquad (3.4)$$

Bu yerda biz $\overset{\circ}{A}$ operatorning chiziqliligidan foydalanib, $\overset{\circ}{A}(x)$ ni quyidagicha yoza olamiz:

$$\overset{\circ}{A}(x)=\overset{\circ}{A}(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)=x_1\overset{\circ}{A}(e_1)+\ldots+x_n\overset{\circ}{A}(e_n). \qquad (3.5)$$

Bu yerda har bir $\overset{\circ}{A}(e_i)$ $(i=\overline{1,n})$ elementlar o'z navbatida L^n fazoning elementlari bo'lganligi sababli, bu elementlarni ham $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ bazis orqali yozish mumkin:

$$\overset{\circ}{A}(e_i)=a_{1i}e_1+\ldots+a_{ni}e_n. \qquad (3.6)$$

U holda (3.6) dan foydalanib (3.5) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{A}(x)&=x_1(a_{11}e_1+a_{21}e_2+\ldots+a_{n1}e_n)+x_2(a_{12}e_1+a_{22}e_2+\ldots+a_{n2}e_n)+\ldots\\&+x_n(a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\ldots+a_{nn}e_n)=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)e_1+\\&+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n)e_2+\ldots+(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n)e_n\end{aligned} \qquad (3.7)$$

Ikkinchi tomondan $y=\overset{\circ}{A}(x)$ element ham $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ bazis elementlari bo'yicha quyidagi yoyilmaga ega:

$$y=\overset{\circ}{A}(x)=y_1e_1+y_2e_2+\ldots+y_ne_n. \qquad (3.8)$$

Vektorning bitta bazis bo'yicha yoyilmasi yagonaligidan (3.7) va (3.8) tengliklarning o'ng tomonlarini tenglashtirib, quyidagini olamiz:

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n\end{cases}$$

yoki matritsa ko'rinishida $Y=AX$, bu yerda

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ldots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}.$$

17-ta'rif. $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$ matritsa $\overset{\circ}{A}$ operatorning $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ bazisdagi matritsasi, $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$ matritsaning rangi esa $\overset{\circ}{A}$ operatorning rangi deyiladi.

L fazoning barcha vektorlarini θ nol vektorga akslantiruvchi $\theta(x)=\theta$ operator nol operator, $\overset{\circ}{E}(x)=x$ tenglikni qanoatlantiruvchi operator birlik operatori deb ataladi.

12-misol. R^3 fazoda $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ bazisda chiziqli operator matritsasi

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 2\end{pmatrix}$$

berilgan bo'lsin. $x=4e_1-3e_2+e_3$ vektorning $y=\mathring{A}(x)$ aksini toping.

Yechish. Yuqorida qayd qilingan formulaga ko'ra

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ -13\\ -18\end{pmatrix}$$

Demak, $y=10e_1-13e_2-18e_3$.

13-misol. $T:R^3\to R^4$; $T\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ x_1-x_2\\ x_3\\ x_1\end{pmatrix}$ operatorning matritsasini toping.

Yechish. $A=[T(e_1)\quad T(e_2)\quad T(e_3)]$ matritsaning har bir elementini topamiz:

$$T(e_1)=T\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0\\ 1-0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

$$T(e_2)=T\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1\\ 0-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$T(e_3)=T\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0\\ 0-0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

U holda

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Mashqlarni bajaring

1) R^4 fazoning $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ bazisida $\mathring{A}$ chiziqli operator matritsasi

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&5&2&5\\3&4&7&0\\6&3&2&1\end{pmatrix}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. $x=3e_1-2e_2+e_3-2e_4$ vektorning aksini toping.

2) R^4 fazoning $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ bazisida $\mathring{A}$ chiziqli operator matritsasi

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3&3\\0&5&2&5\\1&4&7&0\\1&3&2&1\end{pmatrix}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. $x=3e_1+4e_2+3e_3-e_4$ vektorning aksini toping.

Chiziqli operatorlar ustida bajariladigan amallar bilan tanishib chiqamiz. R^n chiziqli fazoda $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ chiziqli operatorlar berilgan bo'lsin.

18-ta'rif. $(\mathring{A}+\mathring{B})(x)=\mathring{A}(x)+\mathring{B}(x)$ tenglik bilan aniqlanadigan operator $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ operatorlarning yig'indisi deb ataladi.

$\mathring{A}+\mathring{B}$ operator chiziqlidir.

Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x,y\in R^n$ vektorlar va $\alpha\in R$ son uchun:

1) $(\tilde{A}+\tilde{B})(x+y)=\tilde{A}(x+y)+\tilde{B}(x+y)=$

$=\tilde{A}(x)+\tilde{A}(y)+\tilde{B}(x)+\tilde{B}(y)=(\tilde{A}+\tilde{B})(x)+(\tilde{A}+\tilde{B})(y);$

2) $(\tilde{A}+\tilde{B})(\alpha x)=\tilde{A}(\alpha x)+\tilde{B}(\alpha x)=\alpha(\tilde{A}(x))+\alpha(\tilde{B}(x))=$

$=\alpha(\tilde{A}(x)+\tilde{B}(x))=\alpha\left[(\tilde{A}+\tilde{B})(x)\right]$

munosabatlar o'rinli. Bu esa $\mathring{A}+\mathring{B}$ operator chiziqli ekanligini ko'rsatadi.

19-ta'rif. $(\tilde{A}\tilde{B})(x)=\tilde{B}(\tilde{A}(x))$ tenglik bilan aniqlanadigan, ya'ni $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ operatorlarni ketma-ket bajarishdan hosil bo'lgan $\mathring{A}\mathring{B}$ operator $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ operatorlarning ko'paytmasi deyiladi.

$\mathring{A}\mathring{B}$ operator chiziqlidir.

Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x,y\in R^n$ vektorlar va $\alpha\in R$ son uchun:

1) $(\tilde{A}\tilde{B})(x+y)=\tilde{B}[\tilde{A}(x+y)]=\tilde{B}(\tilde{A}(x)+\tilde{A}(y))=(\tilde{A}\tilde{B})(x)+(\tilde{A}\tilde{B})(y);$

2) $(\tilde{A}\tilde{B})(\alpha x)=\tilde{B}[\tilde{A}(\alpha x)]=\tilde{B}[\alpha(\tilde{A}(x))]=\alpha[\tilde{B}(\tilde{A}(x))]=\alpha[(\tilde{A}\tilde{B})(x)]$

munosabat o'rinli. Bu esa $\mathring{A}\mathring{B}$ operator chiziqli ekanligini ko'rsatadi.

20-ta'rif. $(\alpha\tilde{A})(x)=\alpha(\tilde{A}(x))$ tenglik bilan aniqlanadigan $\alpha\mathring{A}$ operator $\mathring{A}$ operatorlarning α songa ko'paytmasi deyiladi.

$\alpha\mathring{A}$ operator chiziqlidir.

Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x,y\in R^n$ vektorlar va $\alpha,\beta\in R$ sonlar uchun:

1) $(\alpha\tilde{A})(x+y)=\alpha[\tilde{A}(x+y)]=\alpha(\tilde{A}(x)+\tilde{A}(y))=$

$=\alpha(\tilde{A}(x))+\alpha(\tilde{A}(y))=(\alpha\tilde{A})(x)+(\alpha\tilde{A})(y);$

2) $(\alpha\tilde{A})(\beta x)=\alpha[\tilde{A}(\beta x)]=\alpha[\beta(\tilde{A}(x))]=\beta[\alpha(\tilde{A}(x))]=\beta[(\alpha\tilde{A})(x)]$

munosabat o'rinli. Bu esa $\alpha\mathring{A}$ operator chiziqli ekanligini ko'rsatadi.

Yuqoridagilardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

I. Ixtiyoriy bazisda chiziqli operatorlar yig'indisining matritsasi bu operatorlarning o'sha bazisdagi matritsalari yig'indisiga teng.

II. Ixtiyoriy bazisda chiziqli operatorlar ko'paytmasining matritsasi bu operatorlarning o'sha bazisdagi matritsalari ko'paytmasiga teng.

III. Biror-bir bazisda $\mathring{A}$ chiziqli operatorning α songa ko'paytmasini beruvchi matritsa bu operatorning shu bazisdagi matritsasini α songa ko'paytirilganiga teng.

21-ta'rif. $\tilde{A}(x)$ operator uchun $\tilde{A}\tilde{A}^{-1}=\tilde{A}^{-1}\tilde{A}=\tilde{E}$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $\mathring{A}^{-1}$ operator $\mathring{A}$ operatorga teskari operator deb ataladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, $\tilde{A}(x)$ operatorga teskari operator mavjud bo'lishi uchun (bu holda $\tilde{A}(x)$ operator aynimagan operator, deb ataladi) uning har qanday bazisdagi A matritsasi aynigan bo'lmasligi zarur va yetarlidir.

14-misol. **Berilgan** $\tilde{A}(x_1,x_2,x_3)=(2x_2,-2x_1+3x_2+2x_3,4x_1-x_2+5x_3)$ **va** $\tilde{B}(x_1,x_2,x_3)=(-3x_1+x_2,2x_2+x_3,-x_2+3x_3)$ **operatorlar berilgan.** $\mathring{C}=\mathring{A}\mathring{B}$ **operator va uning matritsasi topilsin.**

Yechish. **Avval** A **va** B **matritsalarni topib olamiz:**

$$\tilde{A}(e_1)=\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix},\ \tilde{A}(e_2)=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\ \tilde{A}(e_3)=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}.$$

$$\tilde{B}(e_1)=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix},\ B(e_2)=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \tilde{B}(e_3)=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}.$$

U holda

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-2&3&2\\4&-1&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3&1&0\\0&2&1\\0&-1&3\end{pmatrix}.$$

$$C=AB=\begin{pmatrix}0&4&2\\6&2&9\\-12&-3&14\end{pmatrix}.$$

Bundan

$$\tilde{C}(e_1)=\begin{pmatrix}0\\6\\-12\end{pmatrix},\ \tilde{C}(e_2)=\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix},\ \tilde{C}(e_3)=\begin{pmatrix}2\\9\\14\end{pmatrix}.$$

$$\tilde{C}(x)=\left(4x_2+2x_3,\ 6x_1+2x_2+9x_3,\ -12x_1-3x_2+14x_3\right).$$

Mashqni bajaring

1. $\tilde{A}(x_1,x_2,x_3)=\left(x_2-x_3,\ 4x_1+3x_2-x_3,\ -3x_1-x_2+6x_3\right)$ va $\tilde{B}(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1-3x_2,\ 4x_2+x_3,\ -5x_2+3x_3\right)$ operatorlar berilgan. $\mathring{C}=\mathring{A}\mathring{B}$ operator va uning matritsasi topilsin.

Bitta chiziqli operatorning turli bazislardagi matritsalari orasidagi bog'lanish haqidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. Agar $\mathring{A}$ chiziqli operatorning $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ va $\{e_1^{*},e_2^{*},\dots,e_n^{*}\}$ bazislardagi matritsalari mos ravishda A va A^{*} matritsalardan iborat bo'lsa, u holda $A^{*}=C^{-1}AC$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu yerda C o'tish matritsasi deb ataladi.

15-misol. $\{e_1,e_2\}$ bazisda chiziqli operator matritsasi $A=\begin{pmatrix}17&6\\6&8\end{pmatrix}$ berilgan bo'lsin. Yangi $\begin{cases}e_1^{*}=e_1-2e_2\\ e_1^{*}=2e_1+e_2\end{cases}$ bazisdagi chiziqli operator matritsasini toping.

Yechish. O'tish matritsasi $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, unga teskari matritsa $C^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Demak, yangi bazisda operatorning matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$A^{*}=C^{-1}AC=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 20\end{pmatrix}.$$

Mashqlarni bajaring.

1) $\{e_1,e_2\}$ bazisda chiziqli operator $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ ko'rinishga ega.

Yangi $\begin{cases}e_1^{*}=e_1-e_2\\ e_2^{*}=e_1+e_2\end{cases}$ bazisda chiziqli operatorning matritsasini toping.

2) $\{e_1,e_2\}$ bazisda chiziqli operatorning matritsasi $A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ ko'rinishga ega. Yangi $\begin{cases}e_1^{*}=2e_1-e_2\\ e_2^{*}=e_1+e_2\end{cases}$ bazisda chiziqli operatorning matritsasini toping.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, $\tilde{A}(x)$ operatorga teskari operator mavjud bo'lishi uchun (bu holda $\tilde{A}(x)$ operator aynimagan operator, deb ataladi) uning har qanday bazisdagi A matritsasi aynigan bo'lmasligi zarur va yetarlidir.

Agar $\overset{o}{A}$ chiziqli operator va λ son uchun

$$\tilde{A}(x)=\lambda x$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda λ son $\tilde{A}(x)$ operatorning xos soni, unga mos x vektorga esa operatorning xos vektori deb ataladi.

Yuqoridagi tenglikni operatorning matritsasidan foydalanib yozsak, u holda quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=\lambda\cdot x_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=\lambda\cdot x_2\\ -----------------\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=\lambda\cdot x_n\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ -----------------\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0\end{array}\right\}$$

Bundan

$$[A-\lambda E]\cdot X=0.$$

Ma'lumki bir jinsli sistema har doim nol yechimga ega. Sistema nolmas yechimga ega bo'lishi uchun esa uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan determinantning qiymati nolga teng bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (3.9)$$

$|A-\lambda E|$ determinant λ ga nisbatan n darajali ko'phaddir. Bu ko'phad $\tilde{A}(x)$ operatorning xarakteristik ko'phadi deb ataladi. (3.9) tenglama $\tilde{A}(x)$ operatorning xarakteristik tenglamasi deyiladi. Chiziqli operatorning xarakteristik ko'phadi bazisni tanlashga bog'liq emas.

16-misol. $\tilde{A}(x)=(2x_1-x_2+2x_3,\ 5x_1-3x_2+3x_3,\ -x_1-2x_3)$ **operatorning xos soni va xos vektorlarini toping.**

Yechish. Avval $\tilde{A}$ **operatorning matritsasini tuzib olamiz:**

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berilgan operatorga mos keluvchi bir jinsli tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1-x_2+2x_3=0, \\ 5x_1-(3+\lambda)x_2+3x_3=0, \\ -x_1-(2+\lambda)x_3=0. \end{cases}$$

Bundan xarakteristik ko'phadni topamiz:

$$p(\lambda)\equiv\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3.$$

Demak, xos son $\lambda=-1$ ekan. Bu sonni sistemaga qo'ysak,

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=0, \\ 5x_1-2x_2+3x_3=0, \\ -x_1-x_3=0. \end{cases}$$

Bundan $x_1=x_2$, $x_1=-x_3$. Demak, $X=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Mashqlarni bajaring.

1) $A=\begin{pmatrix} 6 & 24 \\ 54 & 6 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan chiziqli operatorning xos soni va xos vektorlarini toping.

2) $\tilde{A}(x)=(4x_1-2x_2+4x_3,\ 10x_1-6x_2+6x_3,\ -2x_1-4x_3)$ operatorning xos soni va unga mos keluvchi xos vektorlarini toping.

17-misol. Ushbu

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaning xos soni va xos vektorlarini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamani tuzib yechamiz:

$$\begin{Vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{Vmatrix}=0;$$

$$-\lambda^3+18\lambda^2-99\lambda+162=0,$$

$$\lambda_1=3,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=9.$$

$\lambda_1=3$ xos son uchun xos vektor

$$\left.\begin{aligned} 4x_1-2x_2&=0,\\ -2x_1+3x_2-2x_3&=0,\\ -2x_2+2x_3&=0 \end{aligned}\right\}$$

tenglamalar sistemasidan aniqlanadi. $x_1=m$, deb qabul qilib, $x_2=2m, x_3=2m$ ni hosil qilamiz. Xos vektor:

$$\vec{r}_1=m\vec{i}+2m\vec{j}+2m\vec{k}.$$

Shunga o'xshash

$$\vec{r}_2=m\vec{i}+\frac{1}{2}m\vec{j}-m\vec{k};$$

$$\vec{r}_3=-m\vec{i}+m\vec{j}-\frac{1}{2}m\vec{k}$$

xos vektorlarni topamiz.

Izoh. Yuqorida keltirilgan misollardan ko'rinib turibdiki, chiziqli operatorning xarakteristik tenglamasi ko'p hollarda yuqori darajali tenglamalarga keltiriladi. Shu sababli biz quyida 3 va undan yuqori darajali tenglamalarning ildizlari haqidagi ba'zi tushunchalarni keltiramiz. Ma'lumki, tenglamaning ildizlar soni tenglama darajasi bilan aniqlanadi.

$$y^3+ay^2+by+c=0$$

tenglamaning ildizlarini topish uchun uni $y=x-\frac{a}{3}$ almashtirish yordamida

$$x^3+px+q=0$$

ko'rinishga keltiramiz va uning uchta ildizini Kardano formulasi:

$$x_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

yordamida topamiz.

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$$

tenglamaning ildizini topish uchun uni $y=x-\frac{a}{4}$ almashtirish yordamida

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

ko'rinishga keltiramiz va uning to'rtta ildizini

$$\begin{cases} x^2-\sqrt{2\alpha_0}x+\left(\frac{p}{2}+\alpha_0+\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0, \\ x^2+\sqrt{2\alpha_0}x+\left(\frac{p}{2}+\alpha_0-\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0. \end{cases}$$

sistemaning ildizlari sifatida aniqlaymiz. Bu yerda α_0

$$q^2-4\cdot 2\alpha\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)=0$$

tenglama ildizlaridan biri.

XIX asrning yigirmanchi yillarida Abel $n\geq 5$ bo'lganda $n-$darajali tenglamalarning ildizlari uchun yuqoridagi kabi formulalar topish mumkin emasligini isbotlab uch asr davom etgan befoyda urinishlarga nuqta qo'ydi. XIX asrning 30-yillarida esa Galua qanday shartlar bajarilganda tenglamani yechish mumkinligi haqidagi masalani to'liq tekshirib masalaga nuqta qo'ydi.

Xalqaro savdo modeli. Ko'pgina iqtisodiy masalalarning matematik modeli chiziqli modellarga keltirilishi sababli, chiziqli fazo elementlari iqtisodiyotda o'zining muhim o'rnini egallagan.

Matritsaning xos vektori va xos sonini topishga olib keladigan iqtisodiy jarayonning matematik modeli sifatida xalqaro savdo modelini keltirish mumkin.

$S_1,S_2,\dots,S_n$ n ta mamlakat bo'lib, ularning milliy daromadlari mos ravishda $x_1,x_2,\dots,x_n$ larga teng bo'lsin. a_{ij}-S_j-mamlakatning S_i-mamlakatdan sotib olgan mahsulotlarga sarf qilgan milliy daromadning ulushi bo'lsin. Milliy daromad to'laligicha mamlakat ichida va boshqa mamlakatlardan mahsulot xarid uchun sarf bo'ladi, deb hisoblaymiz, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=1,\quad j=1,2,\dots,n$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Quyidagi matritsani qaraylik

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2n} \\ ------- \\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix},$$

bu matritsa savdo-sotiqning strukturaviy matritsasi, deb nomlanadi. Istalgan $S_i\,(i=\overline{1,n})$ mamlakat uchun ichki va tashqi savdodan hosil bo'lgan tushimi $P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ tenglik orqali aniqlanadi. Mamlakat olib borayotgan savdo-sotiqning muvozanatda bo'lishi uchun, har bir mamlakat savdosi kamomadsiz bo'lishi kerak, ya'ni har bir mamlakat savdosidan hosil bo'lgan tushum uning milliy daromadidan kam bo'lmasligi kerak. Ya'ni

$$P_i \ge x_i,\ \ i=\overline{1,n}$$

Agar $P_i > x_i$, deb faraz qilsak, u holda quyidagini hosil qilamiz,

$$Pi = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k > x_i,\quad i=\overline{1,n}$$

bu yerdan

$$\sum_{i=1}^{n} P_i > \sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

ya'ni,

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\right)x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k > \sum_{k=1}^{n} x_i$$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa qarama-qarshilikdir. Demak $P_i \ge x_i$ tengsizlik o'rniga $P_i = x_i$ tenglik o'rinli bo'lishligi kelib chiqadi. Iqtisodiy nuqtai nazardan bu tushunarli holatdir, chunki mamlakatlarning barchasi bir paytda foyda ko'rolmaydi. Mamlakatlar milliy daromadi uchun $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorni kiritsak u holda $P_i = x_i$, ya'ni $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = x_i,\ \ i=\overline{1,n}$ tengliklardan quyidagi tenglamani hosil qilamiz: $AX = X$, ya'ni, qaralayotgan masala A-matritsaning $\lambda = 1$ xos soniga mos keladigan xos vektorini topish masalasiga kelar ekan.

18-misol. Uch mamlakatdagi savdoning strukturali matritsasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Balanslangan savdo uchun bu mamlakatlarning milliy daromadlari nisbatini aniqlang.

Yechish. $(A-E)x = 0$ tenglamani yechib yoki

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & -0,6 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & -0,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistemani Gauss metodida yechib, $\lambda=1$ xos songa mos x xos vektorni topamiz. Demak $x=(c;\,2c;\,c)$. Olingan natijadan balanslangan savdo uchun bu uch mamlakatlarning milliy daromadlari nisbati $1:2:1$ bo'ladi.

3.3. Kvadratik formalar

Kvadratik formalar nazariyasining manbalari ikkinchi tartibli chiziqlar va sirtlar nazariyasida yotadi. Ma'lumki, markazi koordinata boshida bo'lgan

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=D \tag{3.10}$$

egri chiziqda

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{cases} \tag{3.11}$$

almashtirish bajarib, ya'ni koordinata o'qlarini α burchakka burib, (3.10) egri chiziq tenglamasini quyidagi

$$A'x'^2+C'y'^2=D' \tag{3.12}$$

"kanonik" ko'rinishga keltirish mumkin. (3.11) almashtirish xosmas chiziqli almashtirish, deb ataladi, chunki

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}=1.$$

22-ta'rif. n ta $x_1,x_2,\ldots,x_n$ noma'lumlarning $f(x)$ kvadratik formasi, deb har bir hadi bu no'malumlarning kvadrati yoki ikkita noma'lumning ko'paytmasidan iborat bo'lgan

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \tag{3.13}$$

yig'indiga aytiladi.

Kvadratik formaning a_{ij} koeffitsiyentlaridan foydalanib

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matritsani tuzish mumkin. Bu yerda A matritsaning barcha xarakteristik ildizlari haqiqiy bo'lishi uchun $a_{ij}=a_{ji}$, deb faraz qilinadi. A matritsaning rangi (3.13) kvadratik formaning rangi, deyiladi. A matritsa aynimagan bo'lsa, (3.13) kvadratik forma xosmas deyiladi.

Kvadratik formaning koeffitsiyentlari haqiqiy yoki kompleks sonlar bo'lishiga bo'g'liq holda, kvadratik forma haqiqiy yoki kompleks deyiladi.

(3.13) ni matritsa formada quyidagacha yozish mumkin

$$f=X^TAX \tag{3.14}$$

Bu yerda X va X' o'zaro transponirlangan matritsalar bo'lib,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ikki no'malumli kvadratik forma quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$f = X^T AX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \quad (a_{12} = a_{21})$$

Uchta no'malumning kvadratik formasi esa

$$f = X^T AX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 +$$
$$+a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2, \quad (a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32})$$

ko'rinishda bo'ladi.

Simmetrik matritsalar uchun ba'zi xossalarini keltirib o'tamiz:

1) $(AB)^T = B^T A^T$;

2) $A^T = A$.

Bu xossalardan foydalanib quyidagi teoremani sxematik isbotlaymiz.

Teorema. A matritsali n noma'lumli kvadratik forma ustida Q matritsali chiziqli almashtirish bajarilgandan so'ng u $Q^T AQ$ matritsali yangi n noma'lumli kvadratik formaga aylanadi.

Isbot. (3.13) formaga nisbatan

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k,$$

ya'ni $X = QY$ chiziqli almashtirishni bajaramiz. U holda 1- xossaga ko'ra $X^T = Y^T Q^T$ tenglikni hosil qilamiz. U holda (3.13) quyidagi ko'rinishga keladi:

$$f = Y^T (Q^T AQ)Y \text{ yoki } f = Y^T BY.$$

Bu yerda B matritsa simmetrik bo'ladi.

19-misol. $f = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$ kvadratik forma ustida

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$$

almashtirish bajarilgandan so'ng hosil bo'lgan yangi kvadratik formani toping.

Yechish. Bu yerda kvadratik formaning matritsasi $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, chiziqli almashtirishning matritsasi esa $C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi. U holda teoremaga asosan

$$A^{*}=C^{T}AC=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -17\\ -17 & 3\end{pmatrix}.$$

Bundan quyidagi kvadratik formani hosil qilamiz:

$$L=13y_1^2-34y_1y_2+3y_1^2.$$

Mashqlarni bajaring

1) $f=x_1^2+8x_1x_2-3x_2^2$ kvadratik forma ustida

$$\begin{cases}x_1=2y_1-3y_2,\\ x_2=3y_1+2y_2\end{cases}$$

almashtirish bajarilgandan so'ng hosil bo'lgan yangi kvadratik formani toping.

2) $f=5x_1^2-4x_1x_2-2x_2^2$ kvadratik forma ustida

$$\begin{cases}x_1=2y_1-5y_2,\\ x_2=2y_1+3y_2\end{cases}$$

almashtirish bajarilgandan so'ng hosil bo'lgan yangi kvadratik formani toping.

Yuqoridagilarga asoslanib quyidagi xulosani chiqarish mumkin.

Chiziqli almashtirish bajarilgandan so'ng kvadratik formaning rangi o'zgarmaydi.

23-ta'rif. Agar (3.13) kvadratik formada turli noma'lumlarning ko'paytmalari oldidagi barcha koeffitsiyentlar nolga teng bo'lsa, u holda bu forma kvadratik formaning kanonik ko'rinishi deb ataladi.

Shunday qilib, quyidagi

$$f=b_1y_1^2+b_2y_2^2+....+b_ny_n^2$$

ifoda (3.13) formaning kanonik ko'rinishi deyiladi.

Shuni alohida ta'kidlash kerakki, kanonik ko'rinishda noldan farqli koeffitsiyentlar soni (3.13) kvadratik formaning rangiga teng bo'lishi kerak. Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Har qanday kvadratik forma biror xosmas chiziqli almashtirish orqali kanonik ko'rinishga keltirilishi mumkin.

Bu teoremani matematik induksiya metodi yordamida isbotlash mumkin. Demak, matematik induksiya metodi yordamida kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.

Berilgan kvadratik forma keltiriladigan kanonik ko‘rinish bir qiymatli aniqlangan emas, ya’ni har qanday kvadratik forma turli usullar bilan turli ko‘rinishdagi kanonik ko‘rinishga keltirilishi mumkin.

Masalan, $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1$ kvadratik formani

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + 3t_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_2 - t_3, \\ x_3 = t_3. \end{cases}$$

xosmas chiziqli almashtirish yordamida $f = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 + 6t_3^2$ kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin;

$$\text{b)} \begin{cases} x_1 = t_1 + 3t_2 + 2t_3, \\ x_2 = t_1 - t_2 - 2t_3, \\ x_3 = t_2. \end{cases}$$

xosmas chiziqli almashtirish yordamida $f = 2t_1^2 + 6t_2^2 - 8t_3^2$ kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin.

(3.13) krvadratik formani kanonik ko‘rinishda yozish uchun A matritsaning xarakteristik ildizlarini, ya’ni $|A - \lambda E|$ ko‘phadning ildizlarini topamiz. Bu ildizlar esa kanonik ko‘rinishning koeffitsiyentlari bo‘ladi.

20-misol. Quyidagi

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiring.

Yechish. Bu kvadratik formaning matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishga ega. Uning xarakteristik ko‘phadini topamiz:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3).$$

Shunday qilib, A matritsaning uch karrali xarakteristik ildizi: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ va bitta oddiy xarakteristik ildizi: $\lambda_4 = -3$ mavjud.

Demak, bu kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

Ba'zi hollarda faqat kanonik ko'rinishini emas, balki bu ko'rinishga keltiruvchi almashtirishni bilish kerak bo'lib qoladi.

Buning uchun berilgan A simmetrik matritsani diagonal ko'rinishga keltiruvchi Q ortogonal matritsani yoki uning teskari matritsasi Q^{-1} ni topish va A matritsaning λ_0 xarakteristik ildizlaridan foydalanib tuzilgan

$$(A-\lambda_0 E)X=0$$

sistemaning fundamental yechimlarini ortonormallash kifoya.

Yuqoridagi 20-misolda buning amalga oshirish algoritimini ko'rib chiqamiz.

21-misol. Quyidagi

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4.$$

kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiruvchi xosmas almashtirishni toping.

Yechish. $\lambda_0=1$ bo'lsin. U holda quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3-x_4=0,\\ x_1-x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1-x_2-x_3+x_4=0,\\ -x_1+x_2+x_3-x_4=0.\end{cases}$$

Bu sistemaning rangi 1 ga teng. Demak, uning 3 ta chiziqli erkli yechimini topish mumkin. Masalan:

$$b_1=(1,1,0,0),$$
$$b_2=(1,0,1,0),$$
$$b_3=(-1,0,0,1)$$

vektorlar sistemaning chiziqli erkli yechimlari bo'ladi.

Bu vektorlar sistemasini ortogonallab, quyidagi

$$c_1=b_1=(1,1,0,0),$$
$$c_2=-\frac{1}{2}c_1+b_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right),$$
$$c_3=\frac{1}{3}c_1+\frac{1}{3}c_2+b_3=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)$$

vektorlar sistemasini hosil qilamiz.

$\lambda_0=-3$ bo'lsin. U holda quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases}3x_1+x_2+x_3-x_4=0,\\ x_1+3x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1-x_2+3x_3+x_4=0,\\ -x_1+x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}$$

Bu sistemaning rangi 3 ga teng. Uning noldan farqli yechimi $c_4=(1,-1,-1,1)$ ko'rinishda bo'ladi. c_1, c_2, c_3, c_4 vektorlar ortogonal sistemani tashkil etadi. Uni normalab

$$c_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right),$$

$$c_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right),$$

$$c_3' = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$c_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ortonormalangan vektorlar sistemasini hosil qilamiz. Shunday qilib, f ni kanonik ko'rinishga keltiruvchi almashtirishlardan biri

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}x_3, \\ y_3 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_4, \\ y_4 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Mashqni bajaring. $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4$ kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiruvchi xosmas almashtirishni toping.

Agar kvadratik formaning kanonik ko'rinishida $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$ bo'lsa, u holda bu formani kvadratik formaning normal ko'rinishi deyiladi.

Agar haqiqiy kvadratik forma qaralayotgan bo'lsa, uni normal ko'rinishga keltirish masalasi anchagina murakkab masalalardan biri hisoblanadi. Chunki bunda manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarish talab qilinishi mumkin.

Teorema. Berilgan haqiqiy koeffitsiyentli kvadratik formaning haqiqiy xosmas chiziqli almashtirish yordamida hosil qilingan normal ko'rinishdagi musbat kvadratlar soni va manfiy kvadratlar soni bu almashtirishning tanlab olinishiga bo'g'liq emas.

Berilgan f kvadratik formaning keltirilgan kanonik ko'rinishidagi musbat ishorali kvadratlar soni bu forma inersiyasining musbat indeksi, deb manfiy ishorali kvadratlar soni esa inersiyaning manfiy indeksi, deb musbat va manfiy indekslar ayirmasi esa f kvadratik formaning signaturasi deb ataladi.

Bu tushunchalardan foydalanib quyidagi teoremani keltirish mumkin.

Teorema. n ta noma'lumning haqiqiy koeffitsiyentli ikkita kvadratik formasi bir xil rangga va bir xil signaturaga ega bo'lgandagina va faqat shundagina, ular xosmas chiziqli almashtirish orqali bir-biriga o'tkaziladi.

Teorema. Agarda (3.13) kvadratik formada o'zgaruvchining kvadrati ishtirok etmasa, u holda chiziqli almashtirish yordamida uni hech bo'lmaganda bitta o'zgaruvchining kvadrati qatnashgan kvadratik formaga keltirish mumkin.

Kvadratik formalarni o'rganishda ularning kanonik ko'rinishlarini klassifikatsiyaga ajratib o'rganish kerak bo'ladi.

Biz quyida ularning bir necha turlarini keltirib o'tamiz.

24-ta'rif. Agar n ta noma'lumning haqiqiy koeffitsiyentli f kvadratik formani n ta musbat kvadratdan iborat normal ko'rinishga keltirilsa, u holda bu forma musbat aniqlangan deyiladi.

25-ta'rif. Agar n ta noma'lumning haqiqiy koeffitsiyentli f kvadratik formasi n ta manfiy kvadratdan iborat normal ko'rinishga keltirilsa, u holda bu forma manfiy aniqlangan deyiladi.

26-ta'rif. Agar haqiqiy koeffitsiyentli f kvadratik formaning normal ko'rinishida ham musbat, ham manfiy kvadratlardan iborat bo'lsa, u holda bu forma ishorasi aniqlanmagan forma deyiladi.

27-ta'rif. Agar haqiqiy koeffitsiyentli f xos kvadratik formalarning normal ko'rinishi bir xil ishorali kvadratlardan iborat bo'lsa, u holda bu forma ishorasi yarim aniqlangan formalar deyiladi.

Masalan,

1. $\varphi_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ kvadratik forma musbat aniqlangan;
2. $\varphi_2(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2$ kvadratik forma manfiy aniqlangan;
3. $\varphi_3(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2-x_3^2$ kvadratik formaning ishorasi aniqlanmagan;
4. $\varphi_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ kvadratik formaning ishorasi yarim aniqlangan.

Amaliyotda va iqtisodiyotda eng ko'p uchraydigan kvadratik formalar ishorasi aniqlangan kvadratik formalar bo'lganligi sababli biz asosiy e'tiborni ishorasi aniqlangan kvadratik formalarga beramiz.

Koeffitsiyentlar bo'yicha formaning musbat aniqlangan ekanligini bilish uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

n ta noma'lumning matritsasi $A=(a_{ij})$ bo'lgan f kvadratik forma berilgan bo'lsin. Bu matritsaning yuqori chap burchagiga joylashgan $1,2,\dots,n-$tartibli minorlari, ya'ni

$$a_{11},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \dots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

minorlari f kvadratik formaning ($A=(a_{ij})$ matritsaning) bosh minorlari deyiladi.

Teorema. n ta $x_1,x_2,...,x_n$ noma'lumlarning haqiqiy koeffitsiyentli $f(x)$ kvadratik formasi uning bosh minorlari qat'iy musbat bo'lganda va faqat shundagina, musbat aniqlangan bo'ladi.

Bu teoremani matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlash mumkin.

Isbot. $n=1$ bo'lganda $f=a_{11}x^2$. Bu forma $a_{11}>0$ bo'lgandagina musbat aniqlangan.

Teoremani $n-1$ noma'lum uchun isbotlangan, deb faraz qilamiz va n ta noma'lum uchun isbotlaymiz.

Koeffitsiyentlari haqiqiy $f(x)$ kvadratik forma berilgan bo'lib, uning matritsasi $A=(a_{ij})$ bo'lsin. Ma'lumki, agar $f(x)$ kvadratik forma ustida matritsasi Q bo'lgan xosmas chiziqli almashtirish bajarilsa, u holda forma determinantining ishorasi o'zgarmaydi.

Haqiqatan ham, almashtirishdan so'ng matritsasi Q^TAQ bo'lgan kvadratik forma hosil bo'ladi. Bu yerda

$$|Q^T|=|Q|\Rightarrow|Q^TAQ|=|Q^T||A||Q|=|A||Q|^2.$$

Endi $f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ bo'lsin. Uni quyidagicha yozish mumkin:

$$f=\varphi(x_1,x_2,...,x_{n-1})+2\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}x_ix_n+a_{nn}x_n^2.$$

f forma musbat aniqlangan bo'lsin. U holda induktiv farazga ko'ra φ formaning hamma bosh minorlari qat'iy musbat. f formaning oxirgi bosh minori, ya'ni A matritsa determinantining qat'iy musbatligi quyidagi mulohazadan kelib chiqadi: f forma musbat aniqlanganligi sababli u xosmas chiziqli almashtirish yordamida n ta musbat kvadratlardan tuzilgan normal ko'rinishga keladi. Bu normal ko'rinishning determinanti qat'iy musbat, shu sababli f formaning determinanti ham qat'iy musbat.

Endi f formaning hamma bosh minorlari qat'iy musbat bo'lsin. U holda φ formaning hamma bosh minorlari qat'iy musbat bo'lgani uchun induktiv farazga ko'ra φ forma musbat aniqlanganligi kelib chiqadi, ya'ni $x_1,x_2,...,x_{n-1}$ noma'lumlarning shunday chiziqli almashtirishi mavjudki, u yangi φ formani $y_1,y_2,...,y_{n-1}$ noma'lumlarning $n-1$ kvadratlari yig'indisi formasiga keltiradi. Bu chiziqli almashtirishni, $x_n=y_n$, deb faraz qilib, barcha $x_1,x_2,...,x_n$ noma'lumlarning chiziqli almashtirishigacha to'ldirish mumkin. Bu chiziqli almashtirishdan so'ng quyidagi ko'rinishga keladi:

$$f=\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1}b_{in}y_iy_n+b_{nn}y_n^2.$$

b_{in} ning aniq ko'rinishi biz uchun muhim emas.

$$y_i^2+2b_{in}y_iy_n=(y_i+b_{in}y_n)^2-b_{in}^2y_n^2$$

bo'lgani uchun $z_i = y_i + b_{in}y_n$, $i = 1,2,\dots,n-1$, $z_n = y_n$ chiziqli almashtirish f formani

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + cz_n^2 \qquad (3.15)$$

kanonik ko'rinishga keltiradi.

f formaning musbat aniqlanganligini ko'rsatish uchun c sonning musbatligini ko'rsatish yetarli. Ko'rinib turibdiki, (3.15) formaning determinanti c ga teng. Bu determinant esa musbat. Chunki farazga asosan f formaning bosh determinanti musbat va xosmas chiziqli almashtirishlarda forma determinantining ishorasi o'zgarmaydi.

Masalan, $f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ kvadratik forma musbat aniqlangan, chunki uning bosh minorlari musbat:

$$5, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

$f = 3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ kvadratik forma musbat aniqlangan emas, chunki uning ikkinchi minori manfiy:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Kvadratik formalarning ko'pdan-ko'p tadbiqlari mavjud bo'lib bu tadbiqlaridan biri sifatida ikkinchi tartibli

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (3.16)$$

tenglama bilan aniqlanuvchi nuqtalarning geometrik o'rnini ko'rib chiqamiz. Buning uchun (3.16) tenglamaning koeffitsiyentlaridan quyidagi ikkita:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

determinantni tuzamiz.

Bu yerda $\Delta-$(3.16) tenglamaning diskriminanti, $\delta-$uning yuqori tartibli hadlarining diskriminanti deyiladi. Δ va δ larning qiymatlariga qarab (3.16) tenglama quyidagi geometrik formalarni aniqlaydi:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Ellips (haqiqiy yoki mavhum)	Nuqta
$\delta < 0$	Giperbola	Ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq
$\delta = 0$	Parabola	Ikkita parallel to'g'ri chiziq (haqiqiy yoki mavhum)

22-misol. $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ tenglamada qaysi turdagi egri chiziq berilgan.

Yechish.

$$\delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1, \qquad \Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -3\\ -2 & -3 & 3\end{vmatrix}=-26.$$

Demak, $\delta>0$, $\Delta\neq 0$, u holda bu tenglama ellipsni ifodalaydi.

23-misol. $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+3=0$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning qaysi turdagi egri chiziq ekanligini aniqlang.

Yechish. $A=5, B=4, C=5, D=-9, E=-9, F=3$

$$\delta=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9, \qquad \Delta=\begin{vmatrix}5 & 4 & -9\\ 4 & 5 & -9\\ -9 & -9 & 3\end{vmatrix}\neq 0.$$

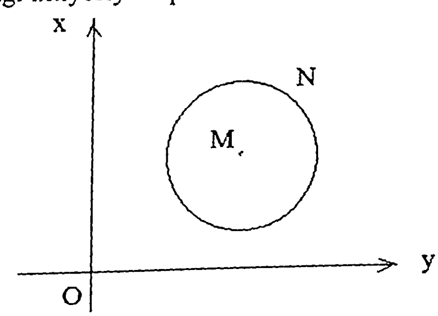
Demak, $\delta>0$, $\Delta\neq 0$, u holda bu tenglama ellipsni ifodalaydi.

Ilova. Endi yuqorida jadvalda keltirilgan ikkinchi tartibli egri chiziqlarning har birini alohida-alohida ko'rib chiqamiz.

28-ta'rif. Tekislikda belgilangan $M(a,b)$ nuqtadan bir xil R masofada yotgan nuqtalarning geometrik o'rni aylana deb ataladi.

Bu yerda $M(a,b)$ nuqta aylana markazi, R masofa esa aylana radiusi deb ataladi.

$N(x,y)$ aylanadagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin.



U holda ta'rifga ko'ra $|MN|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$ tenglikdan aylananing kanonik tenglamasini hosil qilamiz:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \tag{3.16}$$

24-misol. $x^2+y^2-6x-7=0$ tenglama bilan berilgan aylananing markazi koordinatalarini va radiusini toping.

Yechish. Tenglamada x va y ga nisbatan to'la kvadrat ajratamiz: $(x-3)^2+y^2=4^2$. Bundan $R=4$ aylana radiusini va $M_0(3,0)$ aylana markazini topamiz.

25-misol. $M(0,3)$ nuqtadan $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ aylanaga o'tkazilgan urinma tenglamasini toping.

Yechish. Urinma tenglamasini $y=kx+3$ to'g'ri chiziq ko'rinishida izlaymiz. Chunki u $(0,3)$ nuqtadan o'tadi. Aylana tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$(x-3)^2+(y+2)^2-9-4-12=0, \text{ ya'ni } (x-3)^2+(y+2)^2=25.$$

Aylana va to'g'ri chiziqning umumiy nuqtasini topish uchun to'g'ri chiziq va aylana tenglamalarini birgalikda yechib, quyidagi shakl almashtirish bajaramiz:

$$(x-3)^2+(kx+3+2)^2=0 \Rightarrow (k^2+1)x^2+(10k-6)x+9=0.$$

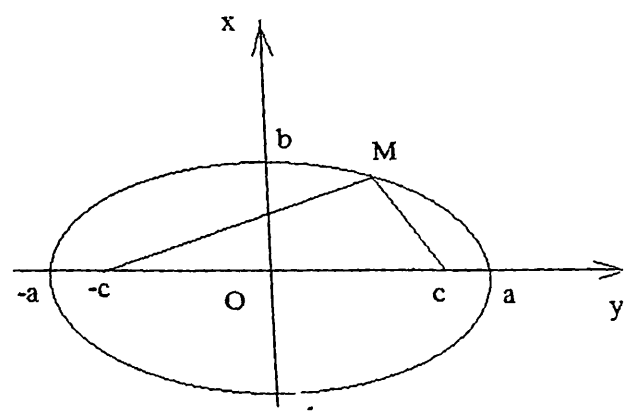
To'g'ri chiziq aylanaga uringani uchun bu tenglama yagona yechimga ega bo'lishi kerak. Tenglama yagona yechimga ega bo'lishi uchun esa uning diskriminanti nolga teng bo'lishi lozim:

$$(5k-3)^2-9(k^2+1)=0 \Rightarrow 16k^2-30k=0$$

U holda $k_1=0,\ k_2=\frac{15}{8}$. Demak, izlangan urinma tenglamalari $y=3$ yoki $y=\frac{15}{8}x+3$ ko'rinishda bo'ladi.

29-ta'rif. Har bir nuqtasidan belgilangan $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas $2a$ songa teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni ellips deb ataladi.

Bu yerda $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ nuqtalar ellipsning fokuslari deb ataladi.



Ta'rifga ko'ra ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidan F_1, F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas: $|F_1M|+|F_2M|=2a$. U holda

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Oxirgi ifodani kvadratga oshirib quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+y^2.$$

Bu ifodani soddalashtirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Bundan

$$|F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - |F_2M| = 2a - a - \frac{c}{a}x = a - \frac{c}{a}x$$

masofalarni topamiz. Bu masofalar fokal masofalar deb ataladi. Bundan

$$c^2x^2 + 2cxa^2 + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

hosil qilamiz. $c < a$ bo'lganligi sababli $a^2 - c^2 = b^2$ belgilash ma'noga ega. U holda

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.17)$$

(3.17) ellipsning kanonik tenglamasi deb ataladi. (3.17) tenglamada noma'lumlarning faqat kvadratlari qatnashgani uchun, uning grafigi Ox va Oy o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan. Koordinatalar boshi uning simmetriya markazi bo'lib, koordinata o'qlari simmetriya o'qlari bo'ladi. Fokuslar joylashgan o'q ellipsning fokus (fokal) o'qi deyiladi.

Ellipsni koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari uning uchlari deyiladi. (3.17) tenglamada $y=0$, deb $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ uchlarni, $x=0$, deb $B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$ uchlarni topamiz, $|A_2A_1| = 2a$, $|B_2B_1| = 2b$ kesmalar ellipsning mos ravishda katta (fokal) o'qi va kichik (fokal) o'qi, deyiladi a, b kesmalar mos ravishda katta yarim o'q va kichik yarim o'q deyiladi. O'qlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan ellipsning tenglamasi

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

ko'rinishda bo'ladi va (x_0, y_0) ellips markazining koordinatasini ifodalaydi.

Ellips fokuslari orasidagi $2c$ masofani katta o'q $2a$ ga nisbati uning ekssentrisiteti deyiladi va ε bilan belgilanadi: $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Har qanday ellips uchun $\varepsilon < 1$ bo'lib, ε ellipsning cho'zinchoqligini yoki siqilganligini bildiradi. Ellipsning fokal radiuslari $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ $(r_1 + r_2 = 2a)$ formula bilan aniqlanadi.

Ellipsning kichik o'qiga parallel va undan $\frac{a}{\varepsilon}$ masofada yotgan to'g'ri chiziqlar ellipsning direktrisasi deb ataladi va $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ tenglama bilan aniqlanadi.

26-misol. $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ tenglama bilan aniqlangan chiziqning shaklini, markazini va ekssentrisitetini toping.

Yechish. Egri chiziq tenglamasida shakl almashtiramiz.

$$4x^2+3y^2-8x+12y-32=4(x^2-2x)+3(y^2+4y)-32=$$

$$4(x^2-2x+1-1)+3(y^2+4y+4-4)-32=4(x-1)^2-4+3(y+2)^2-12-32=0$$

bo'lganligi sababli, bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$4(x-1)^2+3(y+2)^2=48 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2}+\frac{(y+2)^2}{4^2}=1.$$

Demak, tenglama ellipsni ifodalaydi. Bu yerda $a=2\sqrt{3}, b=4, c=2, \ \varepsilon=\frac{2}{4}=0,5, \ (1,-2)$ ellips markazi.

Mashq. Ellips $24x^2+49y^2=117$ tenglama bilan berilgan. Uning

1) yarim o'qlari uzunligini;
2) fokuslarining koordinatalarini;
3) ellips ekssentrisitetini;
4) direktrisalar tenglamalari va ular orsidagi masofani;
5) chap fokusidan 12 birlik masofada joylashgan ellips nuqtasini toping.

30-ta'rif. Har bir nuqtasidan belgilangan $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o'zgarmas $2a$ songa teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni giperbola deb ataladi.

Belgilangan F_1, F_2 nuqtalar giperbolaning fokuslari deb ataladi.

Ta'rifga asosan, giperboladagi ixtiyoriy $M(x,y)$ uchun $\left\|F_1M\right\|-\left\|F_2M\right\|=2a$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu yerda ham yuqoridagi kabi mulohaza yuritib, ma'lum bir shakl almashtirishlardan so'ng

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu yerda $c>a$ bo'lib, $b^2=c^2-a^2$ belgilashlardan so'ng giperbolaning quyidagi kanonik tenglamasini topamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3.18)$$

Tenglamadan ko'rinib turibdiki giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shuningdek, giperbola $O(0,0)$ nuqtaga, ya'ni koordinata boshiga nisbatan ham simmetrik. Fokuslar yotgan o'q giperbolaning fokal o'qi deyiladi.

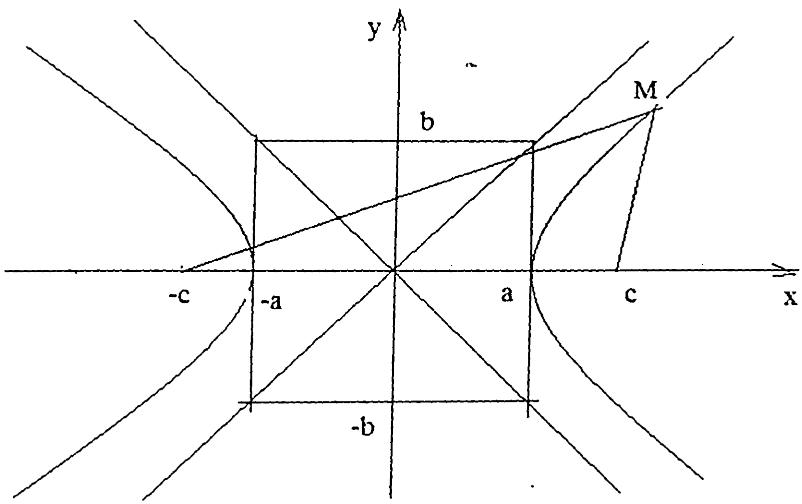
Agar (3.18) tenglamada $y=0$, deb olsak, $x=\pm a$ ni topamiz. $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ nuqtalar giperbolaning uchlari deyiladi. Bu yerda $|A_1A_2|=2a$.

Giperbola Oy o'q bilan kesishmaydi. Haqiqatan ham (3.18) tenglamada $x=0$, deb olsak, $y^2=-b^2$ bo'ladi. Bu tenglikning ma'noga ega emasligi giperbola

Oy o'qi bilan kesishmasligini bildiradi. $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ nuqtalar giperbolaning mavhum uchlari, deb atalib, ular orasidagi masofa $2b$ ga teng bo'ladi.

$y=\pm\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari deyiladi.

Bu to'g'ri chiziqlar markazi koordinatalar boshida bo'lgan, tomonlari $2a$ va $2b$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak (giperbolaning asosiy to'rtburchagi) diagonallarida yotadi. Giperbolani chizishdan oldin asimptotalarini chizish maqsadga muvofiq.



Giperbola uchun ham $\varepsilon=\frac{c}{a}$ ko'rinishdagi tenglik giperbolaning ekssentrisiteti deyiladi, giperbola uchun $\varepsilon>1$.

Ekssentrisitet giperbolaning asosiy to'g'ri to'rtburchagining cho'zinchoqligini ifodalaydi.

Giperbolaning mavhum o'qiga parallel hamda undan $\frac{a}{\varepsilon}$ masofada yotgan l_1, l_2 to'g'ri chiziqlar giperbolaning direktrisasi deb ataladi.

Agar giperbolada $a=b$ bo'lsa, giperbola teng tomonli deyiladi, uning tenglamasi $x^2-y^2=a^2$ ko'rinishda bo'ladi.

Simmetriya markazi $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada va simmetriya o'qlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan giperbolaning tenglamasi

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar giperbolaning haqiqiy o'qi Oy o'qda yotsa, u holda giperbola tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

Bu giperbolaning ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{c}{b}$ ga, asimtotalar $y=\pm\frac{b}{a}x$ ga, teng bo'lib, uning direktrisalari esa $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$ tenglamalar bilan aniqlanadi.

27-misol. $5x^2-4y^2=20$ giperbolada:

1) yarim o'qlar uzunligi;
2) fokuslar koordinatasi;
3) ekssentrisiteti;
4) asimptota va direktrisa tenglamasi;
5) $M(3;2,5)$ nuqtasining fokal radiuslari topilsin.

Yechish. Tenglamaning ikki tarafini 20 ga bo'lib, giperbola tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. Bundan:

1) $a^2=4$, $b^2=5$, ya'ni $a=2, b=\sqrt{5}$;
2) $c^2=a^2+b^2=4+5=9\Rightarrow c=3$. Demak, $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$;
3) $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$;
4) asimptota va direktrisa tenglamalari topamiz: $y=\pm\frac{b}{c}x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$, $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{4}{3}$;
5) M nuqta giperbolaning o'ng qismida $(x=3>0)$ yotganligi sababli uning fokal radiusi $r=\pm a+\varepsilon x$ formuladan foydalanib topiladi: $r_1=2+\frac{3}{2}\cdot 3=6{,}5$, $r_1=-2+\frac{3}{2}\cdot 3=2{,}5$.

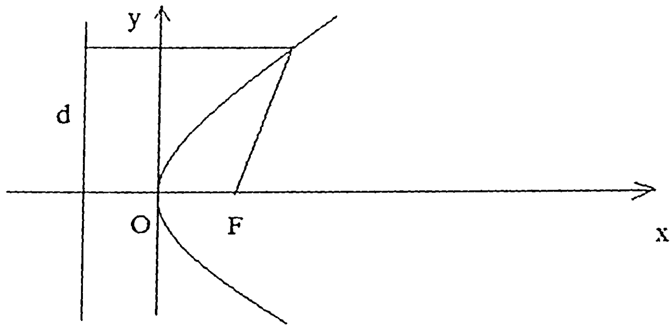
Mashqlar. 1) Fokuslari $F_1(-2;4)$, $F_2(12;4)$ nuqtalarda yotgan va mavhum o'qining uzunligi 6 bo'lgan giperbola tenglamasini toping.

2) Agar giperbola ekssentrisiteti 2 bo'lsa, uning asimtotalari orasidagi burchakni toping.

31-ta'rif. Belgilangan $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ nuqta va belgilangan $d:x=-\frac{p}{2}$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o'rni parabola deb ataladi.

$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ nuqta fokus, $d:x=-\frac{p}{2}$ to'g'ri chiziq esa direktrisa deb ataladi.

Fokus nuqtadan o'tib direktrisaga perpendikular bo'lgan o'qni Ox o'qi, deb qabul qilamiz. U holda parabolaning grafigi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



Paraboladan ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta olamiz. U holda ta'rifga asosan

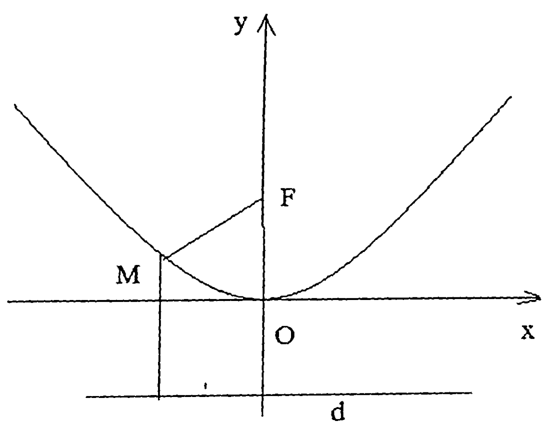
$$|MF| = \rho(M,d) \Rightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Bu tenglamani soddalashtirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y^2 = 2px.$$

Bu tenglama parabolaning kanonik tenglamasi deb ataladi.

Agar parabolaning fokusi $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqtada, direktrisasi $y=-\frac{p}{2}$ to'g'ri chiziqda bo'lsa, u holda uning grafigi



ko'rinishda bo'lib, tenglamasini esa quyidagicha yozamiz:

$$x^2 = 2py$$

Parabolaning uchi $O(0,0)$ nuqtada yotadi, FM kesma uzunligi M nuqtaning fokal radiusi, Ox – o'qi esa uning simmetriya o'qi deyiladi. Parabolaning fokal radiusi $r = x + \frac{p}{2}$ formula bo'yicha topiladi.

28-misol. Parabola $x^2 = 4y$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Fokus nuqta koordinatasi, direktrisa tenglamasi, $M(4;4)$ nuqtaning fokal radiusi topilsin.

Yechish. $x^2 = 2py \Rightarrow p = 2$. Demak, $F(0;1)$, $y = -1$. $M(4;4)$ nuqtaning fokal radiusi $r = 4 + 1 = 5$.

Mashq. $y = -2x^2 + 8x - 5$ parabola uchining koordinatasi, fokusi va direktrisasi topilsin hamda uning grafigining eskizi chizilsin.

29-misol. Agar talab va taklif funksiyalari $P = Q_S^2 + 14Q_S + 22$, $P = -Q_D^2 - 10Q_D + 150$ ko'rinishda bo'lsa, ishlab chiqarilgan mahsulot uchun muvozanat miqdorini va muvozanat narxini aniqlang.

Yechish. Muvozanatda $Q_S = Q_D = Q$ bo'lgani uchun masala shartidagi funksiyalarni $P = Q^2 + 14Q + 22$, $P = -Q^2 - 10Q + 150$ ko'rinishda yozib olamiz. U holda

$$Q^2 + 14Q + 22 = -Q^2 - 10Q + 150 \Rightarrow 2Q^2 + 24Q - 128 = 0.$$

Bu tenglamaning yechimi $Q = -16$, $Q = 4$. Bu yerda $Q > 0$ bo'lgani uchun $Q = 4$ (muvozanat miqdor) qiymatni tenglamaning yechimi sifatida qabul qilamiz. U holda $P = 94$ (muvozanat narx).

Mashqlar. 1) Agar talab va taklif funksiyalari $P = 2Q_S^2 + 10Q_S + 10$, $P = -Q_D^2 - 5Q_D + 52$ bo'lsa, ishlab chiqarilgan mahsulot uchun muvozanat miqdorni va muvozanat narxni aniqlang.

2) Agar talab va taklif funksiyalari $P = Q_S^2 + 2Q_S + 12$, $P = -Q_D^2 - 4Q_D + 68$ mahsulot uchun muvozanat miqdorni va muvozanat narxni aniqlang.

3) Agar talab va taklif funksiyalari $P = Q_S^2 + 2Q_S + 7$, $P = -Q_D + 25$ bo'lsa, ishlab chiqarilgan mahsulot uchun muvozanat miqdorni va muvozanat narxni aniqlang.

3.4. Analitik geometriya elementlari

Tekislikda to'g'ri chiziq. Mikroiqtisodiyot alohida korxonalar va bozorlarning iqtisodiy nazariyasi va ularning siyosatini tahlil qilish bilan shug'ullanadi. Bu esa talab va taklif orasidagi muvozanatni aniqlab beruvchi bozor muvozanatini o'rganishni talab qiladi. Mahsulotni sotish narxi va uni ishlab chiqarish miqdori muvozanatini aniqlash uchun talab va taklif chiziqlarining o'zaro joylashishini aniqlash zaruriyati tug'iladi. Biz bu paragrafda talab va taklif chiziqlarini ifodalash uchun zarur bo'lgan chiziqlarning sodda ko'rinishi bilan, ya'ni tekislikda to'g'ri chiziqlarning joylashishi bilan tanishib chiqamiz. Buning uchun biz to'g'ri chiziqlarni analitik ifodalashni, ya'ni to'g'ri chiziqlarning tenglamasini yozish bilan tanishamiz.

Matematikada chiziqlarning tenglamasi tushunchasi bilan tanishtiradigan bo'lim analitik geometriya deb ataladi.

32-ta'rif. Agar d chiziqdagi har bir (x,y) nuqta $F(x,y)=0$ $(y=f(x))$ tenglamani qanoatlantirsa, u holda $F(x,y)=0$ tenglama d chiziqning tenglamasi deb ataladi.

Agar d chiziqni to'g'ri chiziq, deb qarasak, u holda $F(x,y)=0$ tenglama d to'g'ri chiziqning tenglamasi bo'ladi.

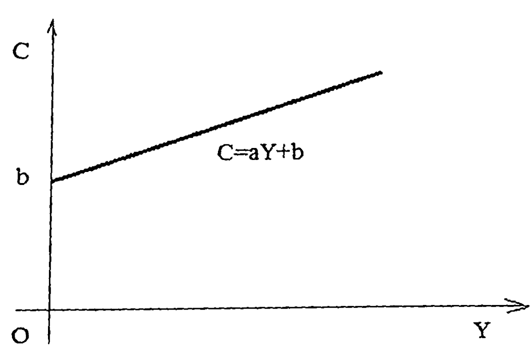
To'g'ri chiziqning

$$y=kx+b \qquad (3.19)$$

ko'rinishdagi tenglamasi bilan biz oldindan tanishmiz. Analitik geometriyada bu tenglama to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi deb ataladi.

Bu kabi tenglamalardan iqtisodiyotda milliy daromadni o'rganishda foydalanish mumkin. Masalan, milliy daromadni hisoblashda iqtisodning eng sodda modelidan foydalanish maqsadida uni ikki sektordan: xo'jaliklar (iste'molchilar) va korxonalardan (ishlab chiqaruvchilar) iborat, deb qaraymiz. Korxonalar quyidagi resurslardan masalan, yer, kapital, mehnat resurslari va xom-ashyolardan mahsulotlarni ishlab chiqarishda va iste'molchilarga xizmat ko'rsatish sohalarida foydalanadi. Bu resurslar ishlab chiqarish ko'rsatkichlari sifatida korxonalarga tegishli bo'lishi kerak. Bu ko'rsatkichlar uchun korxonalardan xo'jaliklarga to'lov sifatida jo'natilayotgan pul oqimini milliy daromad sifatida qarash mumkin. Xo'jaliklar bu pullarni ikki maqsad uchun: pulning ma'lim bir qismini korxonalar tomonidan ishlab chiqarilgan mahsulotlarni C – iste'mol qilishga (xarid qilishga) va pulning qolgan qismini S – iqtisod qilishga (jamg'arma qilishga) sarflaydi, deb qarash mumkin. U holda C va S belgilar Y – daromadning funksiyasi sifatida qaraladi: $C=f(Y)$, $S=f(Y)$.

Agar C va Y orasidagi bog'liqlik chiziqli bo'lsa, u holda $C=aY+b$, $a>0$, $b>0$ bo'ladi. Chunki daromad ortishi bilan iste'mol uchun sarf ham oshadi.



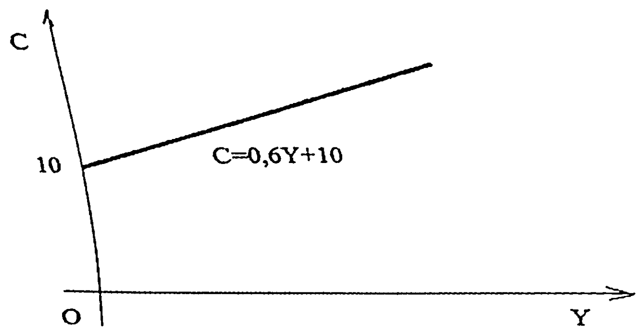
Bu yerda b daromad bo'lmagandagi ($Y = 0$) iste'mol darajasini bildiradi va uni ko'p hollarda avtonom iste'mol, deb ham ataladi. a iste'mol o'zgarishining limit qiymati bo'lib, u Y bir birlikka o'zgarganda C belgining qanchaga o'zgarishini bildiradi. Yuqorida aytilganidek, daromad iste'mol uchun va jamg'arma uchun ishlatiladi. U holda

$$Y = C + S.$$

Demak, bir birlik daromadning ma'lum bir qismigina iste'mol uchun sarflanadi va $0 < a < 1$. $Y = C + S$ munosabat iste'mol funksiyasidan foydalanib jamg'arma funksiyasini aniqlashga yordam beradi.

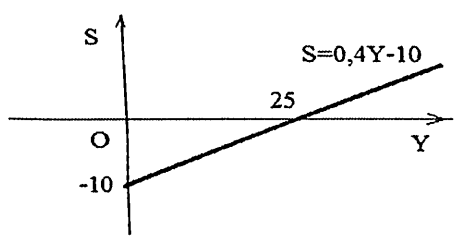
30-misol. Agar iste'mol funksiyasi $C = 0,6Y + 10$ ko'rinishda bo'lsa, u holda unga mos jamg'arma funksiyasini aniqlang va uning grafigini chizing.

Yechish. Iste'mol funksiyasining grafigini chizib olamiz.



Bu chiziqqa tegishli bo'lgan ikkita nuqtani topamiz: $A(0,10)$, $B(10,16)$. Jamg'arma funksiyasini topish uchun $Y = C + S$ munosabatdan foydalanamiz. U holda $S = Y - C$ bo'lgani uchun jamg'arma funksiyasi $D(0,-10)$, $K(10,-6)$ nuqtalardan o'tadi va bu funksiyaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$S = Y - C = Y - (0,6Y + 10) = 0,4Y - 10.$$



Mashq. Agar iste'mol funksiyasi $C = 0,7Y + 15$ ko'rinishda bo'lsa, u holda unga mos jamg'arma funksiyasini aniqlang va uning grafigini chizing.

Endi biz tekislikda to'g'ri chiziq tenglamasining turli ko'rinishlari bilan tanishib chiqamiz.

$$Ax + By + C = 0 \qquad (3.20)$$

ko'rinishdagi tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deb ataladi. Bu tenglamadan foydalanib to'g'ri chiziqning boshqa ko'rinishdagi tenglamalarini hosil qilish mumkin yoki aksincha to'g'ri chiziqning boshqa ko'rinishdagi tenglamalarini (3.20) ko'rininshga keltirish mumkin.

(3.20) tenglamani (3.19) ko'rinishga keltiramiz:

$$Ax + By + C = 0 \overset{(B\neq 0)}{\Rightarrow} By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \overset{\left(k=-\frac{A}{B},\, b=-\frac{C}{b}\right)}{\Rightarrow} y = kx + b.$$

Endi (3.19) tenglamani (3.20) ko'rinishga keltiramiz:

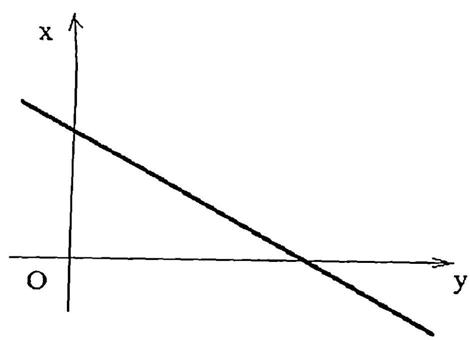
$$y = kx + b \Rightarrow y = \frac{1}{\frac{1}{k}}x + b \Rightarrow \frac{1}{k}y = x + \frac{b}{k} \overset{\left(B=-\frac{1}{k},\, A=1,\, C=\frac{b}{k}\right)}{\Rightarrow} Ax + By + C = 0.$$

31-misol. $3x + 4y - 5 = 0$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqni burchak koeffitsiyentli tenglama orqali yozing va grafigini chizing.

Yechish. Birinchi navbatda $3x + 4y - 5 = 0$ tenglamani (3.19) ko'rinishga keltirib olamiz:

$$3x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow 4y = -3x + 5 \Rightarrow y = -0{,}75x + 1{,}25.$$

Endi to'g'ri chiziqni Dekart koordinatalar sistemasida tasvirlaymiz:



Endi to'g'ri chiziq tenglamasining boshqa ko'rinishlari bilan ham tanishib chiqamiz.

$M(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{l}(m,n)$ vektorga parallel bo'lgan d to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Ixtiyoriy $M_0 \neq M(x,y) \in d$ nuqta olamiz. U holda

$$\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0) P \bar{l} \Rightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \qquad (3.21)$$

(3.21) d to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi, $\vec{l}$ esa uning yo'naltiruvchi vektori, deb ataladi. (3.20) tenglamani (3.21) ko'rinishga keltiramiz: $d: Ax + By + C = 0$ bo'lsin. U holda

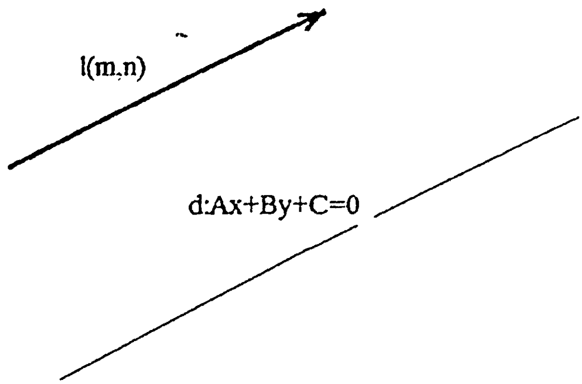
$$\left.\begin{array}{l} M \in d \Rightarrow Ax + By + C = 0, \\ M_0 \in d \Rightarrow Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A} \overset{m=-B,\, n=A}{\Rightarrow} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Demak, $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{l}(-B, A)$.

Endi (3.21) tenglamani (3.20) ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow n(x - x_0) - m(y - y_0) = 0 \overset{(A=n,\, B=-m,\, C=my_0 - nx_0)}{\Rightarrow} Ax + By + C = 0.$$



32-misol. $M(3,4)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{l}(-3,7)$ vektorga parallel bo'lgan d to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Ixtiyoriy $M_0 \neq M(x,y) \in d$ nuqta olamiz. U holda

$$\overline{M_0M}(x-3, y-4) P \vec{l} \Rightarrow \frac{x-3}{-3} = \frac{y-4}{7} \Rightarrow 7x + 3y - 33 = 0.$$

To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasidan uning parametrli tenglamasi, deb ataluvchi tenglamasini keltirib chiqaramiz:

$$\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0) P \vec{l} \Rightarrow \frac{x - x_0}{m} = t = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = tm, \\ y - y_0 = tn. \end{cases}$$

Oxirgi tenglama to'g'ri chiziqning parametrli tenglamasi, t esa parametr, deb ataladi va uning har bir parametriga bitta to'g'ri chiziq mos keladi.

$M(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{n}(a,b)$ vektorga perpendikular bo'lgan d to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Ixtiyoriy $M_0(x_0, y_0) \neq M(x,y) \in d$ nuqta olamiz. U holda

$$\overline{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \left(\overline{M_0M}, \vec{n}\right) = 0 \Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \quad (3.22)$$

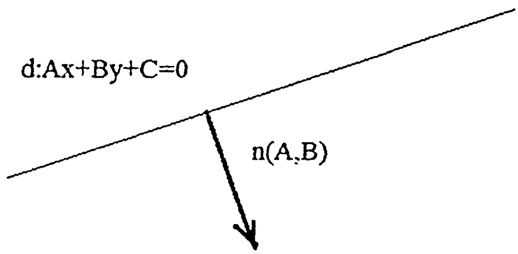
Bu yerda $\vec{n}$ vektor d to'g'ri chiziqning normal vektori, deb ataladi. (3.22) tenglamani (3.21) ko'rinishga keltiramiz: $d: Ax + By + C = 0$ bo'lsin. U holda

$$\left.\begin{array}{l} M \in d \Rightarrow Ax + By + C = 0, \\ M_0 \in d \Rightarrow Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{array}\right\} \overset{A=a,\, B=b}{\Rightarrow} a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Demak, $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziqning normal vektori $\vec{n}(A,B)$.

Endi (3.22) tenglamani (3.20) ko'rinishga keltiramiz:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \xRightarrow{(A=a,\ B=b,\ C=-by_0-ax_0)} Ax+By+C=0.$$



33-misol. $M(-5,4)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{n}(4,3)$ vektorga perpendikular bo'lgan d to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Ixtiyoriy $M_0(x_0,y_0)\neq M(x,y)\in d$ nuqta olamiz. U holda

$$\overline{M_0M}\perp\vec{n}\Rightarrow\left(\overline{M_0M},\vec{n}\right)=0\Rightarrow 4(x+5)+3(y-4)=0\Rightarrow 4x+3y+8=0.$$

To'g'ri chiziqning $Ax+By+C=0$ umumiy tenglamasining shaklini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\frac{Ax+By+C=0}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\Rightarrow\pm\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}}\pm\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}}\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cos\alpha+y\sin\alpha=p.$$

Oxirgi tenglama to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deb ataladi. Bu yerda $\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\alpha=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $p=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Bunda: agar $C<0$ bo'lsa ishora "+" va agar $C>0$ bo'lsa "–" olinadi.

To'g'ri chiziqning $Ax+By+C=0$ umumiy tenglamasida $C\neq 0$ bo'lsin. U holda

$$Ax+By+C=0\Rightarrow\frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}}=1\xRightarrow{a=-\frac{C}{A},\ b=-\frac{C}{B}}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

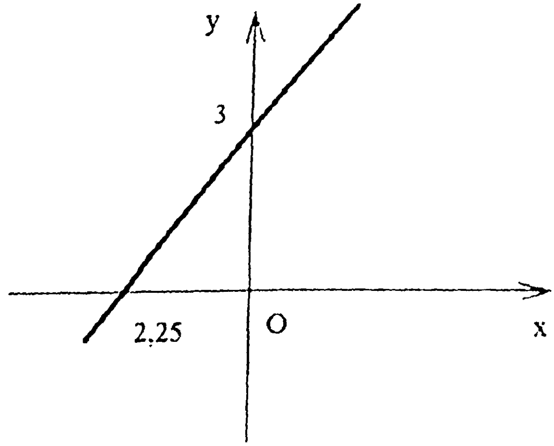
To'g'ri chiziqning a, b kesmalar bo'yicha tenglamasini hosil qilamiz.

34-misol. Ushbu $-4x+3y-9=0$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqni yasang.

Yechish. Berilgan tenglamani

$$-4x+3y-9=0\Rightarrow\frac{x}{-2{,}25}+\frac{y}{3}=1$$

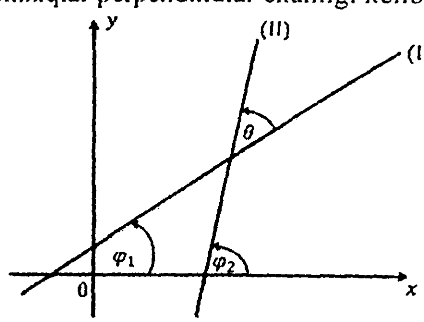
ko'rinishga keltirib olamiz. Demak, to'g'ri chiziq Oy o'qidan 3 birlik, Ox o'qidan esa -2,25 birlik kesma ajratadi va uning grafigi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.



Ma'lumki, $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$ to'g'ri chiziqlar orasidagi θ burchak

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$$

formula yordamida topiladi. Bundan $k_1 = k_2$ bo'lsa to'g'ri chiziqlar parallel; $k_1 k_2 = -1$ bo'lsa to'g'ri chiziqlar perpendikular ekanligi kelib chiqadi.



$I: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $II: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak ularning $\vec{n}_1(A_1, B_1)$, $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ normal vektorlari orasidagi burchakka teng, ya'ni $\theta = (\vec{n}_1, \hat{\vec{n}_2})$. Shuning uchun

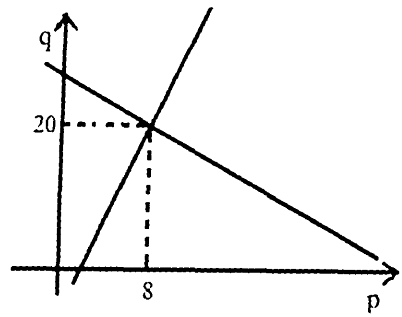
$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

formula o'rinli. Bundan ikkita to'g'ri chiziq uchun parallellik $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = t$ va perpendikularlik $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ shartlari kelib chiqadi.

Faraz qilamiz $M_0(x_0, y_0)$ nuqta va $d: Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. U holda M_0 nuqtadan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

$$\rho(M_0, d) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

formula yordamida topiladi.



Iqtisodiyotdagi muhim tushunchalardan biri bu talab va taklif funksiyalaridir. Odatda bunday funksiyalar mahsulot narxi p va shu narxda sotiladigan mahsulot miqdori q orasidagi munosabatni ifodalaydi. Ba'zi bir cheklovlar ostida bu funksiyalarni chiziqli funksiyalar deb olishimiz mumkin.

Talab va taklif miqdori teng bo'ladigan p narxga muvozanat narxi deyiladi.

Masalan, talab va taklif funksiyalari quyidagi chiziqli funksiyalar bilan ifodalangan bo'lsin $q=-2p+36,\ q=4p-12$. Bu misolda x, y o'zgaruvchilar o'rniga narxni ifodalovchi p o'zgaruvchi va miqdorni ifodalovchi q o'zgaruvchi ishtirok qilmoqda. Talab funksiyasining burchak koeffitsiyenti -2 ga teng bo'lib, narxga nisbatan kamayish tezligini (koeffitsiyentini) ifodalaydi. Taklif funksiyasining burchak koeffitsiyenti 4 ga teng bo'lib, narxga nisbatan taklifning o'sish koeffitsiyentini ifodalaydi. Talab va taklifning muvozanat holatini topish uchun bu ikkita tenglikni birgalikda yechamiz, ya'ni mos to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topamiz.

$$\begin{cases} q=-2p+36, \\ q=4p-12. \end{cases} \Leftrightarrow\ -2p+36=4p-12\ \Leftrightarrow\ p=8,\ q=20.$$

Demak, talab va taklif bir xil bo'ladigan muvozanat narxi $p=8$ ga teng bo'lib, bunda talab va taklif miqdori $q=20$ ga teng.

Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishda imkoniyatlardan kelib chiqadigan chiziqli tengsizlik shaklidagi cheklovlardan foydalaniladi. Bu cheklovlar odatda resurslar zaxirasidan ortiq miqdorda resursdan foydalana olmasligimizni yoki mablag' sarfiga cheklovni ifodalaydi.

Faraz qilaylik, ikki xil turdagi mahsulot sotib olish talab qilinsin. Bu mahsulotlarning bir birliklarining narxlari mos ravishda p_1, p_2 bo'lsin. U holda $P=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ narx vektori deb ataladi. Sotib olingan mahsulotlar miqdori mos ravishda x_1, x_2 bo'lsin. $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vektor mahsulotlar vektori deb ataladi. Bu mahsulotlar vektorining umumiy narxi $(P,X)=P^TX=p_1x_1+p_2x_2$ ga teng.

Bir xil narxli ikkita X va Y mahsulotlar vektorlari ekvivalent deyiladi va $X \sim Y$ kabi belgilanadi.

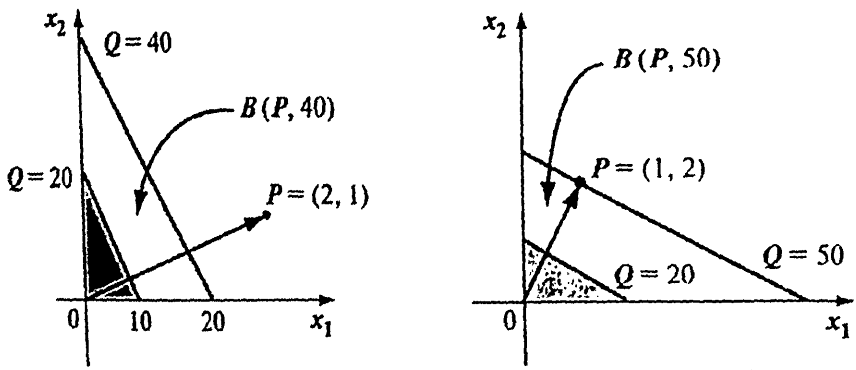
Izoh. Umuman olganda biz bu yerda ixtiyoriy n sondagi mahsulotlarni qarashimiz mumkin. Bunda narx va mahsulotlar vektorlari n o'lchovli arifmetik vektorlardan iborat bo'ladi. Aynan ikki mahsulotning qaralishi ikki o'lchovli arifmetik vektorning tekislikdagi vektor bilan ekvivalentligidir.

Bir xil c narxdagi X mahsulot vektorlari to'plami Ox_1x_2 tekislikda $p_1x_1 + p_2x_2 = c$ to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

Q miqdordagi mablag' berilgan bo'lsin. Narxi Q dan oshmaydigan mahsulot vektorlari to'plami budjet to'plami deyiladi. Budjet to'plami $p_1x_1 + p_2x_2 \leq Q$ tengsizlik bilan ifodalanadi va $B(P,Q) \equiv B(p_1,p_2,Q) = \{(x_1,x_2) | p_1x_1 + p_2x_2 \leq Q\}$ kabi belgilanadi.

Q narxdagi mahsulot vektorlari to'plami $B(p_1,p_2,Q)$ budjet to'plam chegarasi deyiladi va $p_1x_1 + p_2x_2 = Q$ tenglama bilan ifodalanadi.

Quyidagi rasmda budjet to'plamiga misollar keltirilgan. Mahsulotlar vektori komponentalari musbat bo'lganligi sababli, budjet to'plami katetlari koordinata o'qlarida yotgan I chorakda joylashgan to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat.



To'g'ri chiziqning xossalaridan kelib chiqadigan bo'lsak, budjet to'plam chegarasini ifodalovchi to'g'ri chiziqning normali P narx vektoridan iborat. Yuqoridagi rasmdan budjet to'plami chegarasini ifodalovchi to'g'ri chiziq narx vektori (normal vektor) yo'nalishida parallel ko'chirilsa, sarflanadigan Q mablag' miqdori ortadi.

Budjet to'plami tushunchasida narxni bir birlik mahsulot ishlab chiqarishdagi ma'lum bir resurs sarfi, Q ni resurs zaxirasi, deb olishimiz mumkin. Bu holatda budjet to'plami ma'lum resurs sarfi shu resurs zaxirasidan ortmasligi zarurligini bildiradi.

Fazoda tekislik va to'g'ri chiziq tenglamalari. Biz vektorlarning skalyar ko'paytmasi bilan tanishmiz va bu tushunchadan tekislikda to'g'ri chiziq tenglamasining normal shaklini aniqlashda foydalandik. Biz tekislik tushunchasini kiritish R^3 fazoda amalga oshirilganligi sababli bu fazo vektorlariga doir ba'zi tushunchalarni, ya'ni vektorlarning vektor ko'paytmasi, vektorlarning aralash ko'paytmasi va komplanar vektorlar tushunchalarini kiritib olamiz.

33-ta'rif. Agar $\vec{x}$, $\vec{y}$ vektorlar tekisligiga perpendikular $\vec{z}$ vektor quyidagi:

1) $\vec{z}$ vektor ko'paytma uzunligi

$$|\vec{z}|=|\vec{x}||\vec{y}|\sin\alpha$$

tenglik bilan aniqlanadi va son jihatidan $\vec{x}$, $\vec{y}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuziga teng bo'ladi (bu yerda $\alpha-\vec{x}$, $\vec{y}$ vektorlar orasidagi burchak);

2) $\vec{z}$ vektor uchidan qaraganda $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlar orasidagi α burchak soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalishda aniqlanadi;

kabi xossalarga ega bo'lsa, u holda $\vec{z}$ vektorga $\vec{x}$, $\vec{y}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi deyiladi va $\vec{z}=[\vec{x},\vec{y}]$ ko'rinishda belgilanadi.

Vektor ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

1) $[\bar{x},\bar{y}]=-[\bar{y},\bar{x}]$;

2) $\bar{x}\perp\bar{y}\Rightarrow|[\bar{x},\bar{y}]|=|\bar{x}||\bar{y}|$;

3) $\alpha[\bar{x},\bar{y}]=[\alpha\bar{x},\bar{y}]=[\bar{x},\alpha\bar{y}]$;

4) $[\bar{x},(\bar{y}+\bar{z})]=[\bar{x},\bar{y}]+[\bar{x},\bar{z}]$.

$\bar{x}(x_1,x_2,x_3)$ va $\bar{y}(y_1,y_2,y_3)$ vektorlarning vektor ko'paytmasini 3-tartibli determinant yordamida quyidagicha aniqlash mumkin:

$$\bar{z}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}x_1 & x_3\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}.$$

35-misol. $\vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$ vektorlar berilgan. Quyidagilarni aniqlang:

1) vektor ko'paytmasi va uning uzunligini;
2) skalyar ko'paytmasini;
3) ular orasidagi burchakni.

Yechish.

a) $$\vec{z}=[\vec{x},\vec{y}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=-4\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}.$$

Demak $\vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$ vektorlarning vektor ko'paytmasi: $\vec{z}(-4;-2;5)$. Bu vektorning uzunligi: $|\vec{z}|=\sqrt{16+4+25}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

b) $(\vec{x},\vec{y})=-2+2+0=0$.

c) $(\vec{x},\vec{y})=0\Rightarrow\alpha=90^\circ$. Bu yerda $\alpha-\vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$ vektorlar orasidagi burchak. Bu burchakni vektor ko'paytmadan foydalanib ham hisoblab ko'ramiz:

$$\sin\alpha=\frac{\left|[\vec{x},\vec{y}]\right|}{|\vec{x}||\vec{y}|}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{4+1+4\sqrt{1+4+0}}}=1\Rightarrow\alpha=90^{\circ}.$$

Mashq. $\vec{x}(2;4;-2)$, $\vec{y}(4;-2;5)$ vektorlar berilgan. Quyidagilarni aniqlang:

1) vektorlarning vektor ko'paytmasi va uning uzunligini;
2) vektorlarning skalyar ko'paytmasini;
3) vektorlar orasidagi burchakni;
4) vektorlarga qurilgan parallelepiped yuzini.

34-ta'rif. Ikkita $\bar{x}$ va $\bar{y}$ vektorlar $[\bar{x},\bar{y}]$ vektor ko'paytmasining uchinchi $\bar{z}$ vektorga skalyar ko'paytmasi $\left([\bar{x},\bar{y}],\bar{z}\right)$ $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deb ataladi va $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ kabi belgilanadi.

Vektorlarning aralash ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega:

1) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(\bar{y},\bar{z},\bar{x})=(\bar{z},\bar{x},\bar{y})$.

Ya'ni ko'paytiriluvchi vektorlar o'rinlari doiraviy almashtirilganda aralash ko'paytma qiymati o'zgarmaydi.

2) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=-(\bar{y},\bar{x},\bar{z})$, $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=-(\bar{z},\bar{y},\bar{x})$, $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=-(\bar{x},\bar{z},\bar{y})$.,

Ya'ni qo'shni 2 ta vektorlarning o'rinlari almashtirilganda aralash ko'paytma ishorasini o'zgartiradi.

3) R^3 da aralash ko'paytma qiymatini quyidagicha 3-tartibli determinant yordamida aniqlash mumkin: $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$.

36-misol. $\vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$, $\vec{z}(3;2;4)$ vektorlar berilgan. Bu vektorlar uchun $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ aralash ko'patmani hisoblang.

Yechish. $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=(\vec{z},\vec{x},\vec{y})$ bo'lgani uchun biz $(\vec{z},\vec{x},\vec{y})$ ko'paytmaning qiymatini hisoblaymiz:

$$(\vec{z},\vec{x},\vec{y})=\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-12-4+20=4.$$

Demak $\vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$, $\vec{z}(3;2;4)$ vektorlarning aralash ko'paytmasi 4 ga teng.

Mashq. $\vec{x}(5;-7;2)$, $\vec{y}(-11;2;5)$, $\vec{z}(3;6;4)$ vektorlar berilgan. Bu vektorlar uchun $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ aralash ko'paytmani hisoblang.

35-ta'rif. Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar komplanar vektorlar deyiladi.

Teorema. R^3 da 3 ta $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ vektorlar komplanar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

37-misol. $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$; $\vec{c}=7\vec{i}+14\vec{j}-13\vec{k}$ vektorlarni komplanarlikka tekshiring.

Yechish. $[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=3\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$, $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=21+70-91=0$.

Demak, bu vektorlar komplanar.

Mashq. $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$; $\vec{c}=7\vec{i}+4\vec{j}-13\vec{k}$ vektorlarni komplanarlikka tekshiring.

Izoh. Vektorlarning aralash ko'paytmasining absolyut qiymati shu vektorlarga qurilgan parallelepipedning hajmiga teng, ya'ni $V=\left|\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)\right|$, V parallelepipedning hajmi.

Tekislik geometriyaning boshlang'ich tushunchalaridan bo'lib, uni turli usullarda aniqlash mumkin. Biz tekislikni aniqlashning ba'zi usullari bilan tanishib chiqamiz. Shuni alohida ta'kidlashimiz zarurki, bizga ma'lum ma'lumotlar yordamida aniqlangan tekislik yagona bo'lishi kerak.

Belgilangan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}(A,B,C)$ vektorga perpendikular tekislik tenglamasini tuzamiz. Ma'lumki, bunday tekislik yagona.

Tekislikka tegishli ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtani olamiz. U holda tekislikda yotgan $\overline{M_0M}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ vektor $\vec{n}$ ga perpendikular. Bundan $(\overline{M_0M},\vec{n})=0$ yoki

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Bu tenglamani soddalashtirsak, tekislikning umumiy tenglamasi hosil bo'ladi:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \left(D=-Ax_0-By_0-Cz_0\right)$$

Tekislikka perpendikular bo'lgan har qanday $\vec{n}(A,B,C)$ vektor tekislikning normal vektori deyiladi.

38-misol. $3x-4y+7x+6=0$ tekislikning normal vektorini toping.

Yechish. Bu tekislikning normal vektori: $\vec{n}(3;-4;7)$.

Tekislik umumiy tenglamasining xususiy hollarini qaraymiz:

1) Agar $D=0$ bo'lsa, tenglama $Ax+By+Cz=0$ ko'rinishida bo'lib, uni $O(0;0;0)$ nuqta qanoatlantiradi, ya'ni tekislik koordinatalar boshidan o'tadi.

2) $C=0$ bo'lsa, tenglama $Ax+By+D=0$ ko'rinishni oladi. Bu Oxy tekislikdagi proyeksiyasi $Ax+By+D=0$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lgan tekislik tenglamasi. Bu tekislik Oz o'qiga parallel. Shunga o'xshash, $B=0$ va $A=0$ bo'lganda, mos ravishda, Oy va Ox o'qlariga parallel bo'lgan $Ax+Cz+D=0$ va $By+Cz+D=0$ tekisliklarni hosil qilamiz.

3) $B=C=D=0$ bo'lsa, Oyz tekislikning tenglamasi hosil bo'ladi. Shunga o'xshash, Oxz tekislik va Oxy tekislik tenglamalarini hosil qilamiz.

Faraz qilamiz, tekislikning umumiy tenglamasida barcha koeffitsiyentlar noldan farqli bo'lsin. U holda bu tenglamani quyidagicha yozib olishimiz mumkin:

$$Ax+By+Cz=-D \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \left(a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}\right).$$

Bu tekislikning a, b, c kesmalar bo'yicha tenglamasi deb atalib, bunda a, b, c tekislikning koordinata o'qlarida ajratgan kesmalar kattaligi.

Masalan, $2x-3y+z-6=0$ tenglamani kesmalar bo'yicha tenglamaga keltirish talab qilinsin. Buning uchun tenglamaning har bir hadini 6 ga bo'lamiz va izlangan $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=1$ tenglamani topamiz.

Mashq. Ushbu

1) $2y-5=0$;

2) $x+z-1=0$;

3) $3x+4y+6z-12=0$

tenglamalar bilan berilgan tekisliklarni chizing.

Bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzish talab qilinsin.

Bu tekislikda yotgan ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtani qaraymiz va quyidagi vektorlarni hosil qilamiz: $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$. Bu vektorlar bitta tekislikda yotganligi sababli, vektorlar komplanar.

$$\overline{M_1M}=\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\},$$
$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\},$$
$$\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1\}$$

ya'ni

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Bu tenglama belgilangan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi deb ataladi.

39-misol. Bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan $M_1(2;0;1)$, $M_2(1;2;0)$, $M_3(0;3;2)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Bu tekislikda yotgan ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtani qaraymiz va quyidagi vektorlarni hosil qilamiz: $\overline{M_1M}(x-2,y,z-1)$, $\overline{M_1M_2}(1-2,2-0,0-1)$, $\overline{M_1M_3}(0-2,3-0,2-1)$. Bu vektorlar bitta tekislikda yotganligi sababli, bu vektorlar komplanar. Demak, $\left(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right)=0$, ya'ni

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1-2 & 2-0 & 0-1 \\ 0-2 & 3-0 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(z-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5(x-2)+3y+z-1 = 5x+3y+z-11=0.$$

Mashq. Bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan $M_1(2;3;1)$, $M_2(1;2;4)$, $M_3(5;3;2)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Ikki tekislik orasidagi ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi sifatida bu tekisliklarning normal vektorlari orasidagi burchak qabul qilingan. Demak, umumiy tenglamalari $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ ko‘rinishda bo‘lgan tekisliklar orasidagi burchakni φ bilan belgilasak, u holda bu burchakni topish uchun $\vec{n}_1(A_1B_1C_1)$ va $n_2(A_2,B_2,C_2)$ vektorlar orasidagi burchakni topish formulasidan foydalanamiz:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Bu ikki tekislik orasidagi burchakni topish formulasi bo‘lib, u $0\le\varphi\le\pi$ oraliqda topiladi.

Umuman olganda ikki tekislikning normal vektorlari yordamida ularning o‘zaro joylashishi haqida quyidagi mulohazalarni chiqarish mumkin.

Agar tekisliklar parallel bo‘lsa, u holda $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$; agar tekisliklar perpendikular bo‘lsa, u holda $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtadan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikkacha masofa quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{|\vec{n}|}.$$

40-misol. $M_1(-2;1;0)$ nuqtadan $2x-6y+3x-4=0$ tekislikkacha masofa topilsin.

Yechish. $d=\dfrac{|2\cdot(-2)-6\cdot1+3\cdot0-4|}{\sqrt{4+36+9}}=\dfrac{|-4-6-4|}{7}=2.$

41-misol. $M(1;-3;-2)$ nuqtadan o‘tgan va $3x-2y+4z-3=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Ikkita parallel tekislik umumiy normalga ega. Berilgan tekislik normal vektori $\vec{n}=(3;-2;4)$. Bundan izlangan tekislik tenglamasining ko‘rinishini topamiz:

$$3(x-1)-2(y+3)+4(z+2)=0 \Rightarrow 3x-2y+4z-1=0.$$

Fazoda to'g'ri chiziqni ikkita parallel bo'lmagan tekisliklar kesishmasidan iborat nuqtalarning geometrik o'rni sifatida aniqlash mumkin.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

To'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan ixtiyoriy vektor to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb ataladi. Yuqoridagi tenglamalar sistemasi yordamida ifodalangan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchisini $\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ kabi aniqlash mumkin, bunda $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ va $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ tekisliklarning normal vektorlari.

Ma'lumki, fazodagi ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtani $\vec{r} = \overline{OM}$ radius vektor bilan aniqlaymiz.

Fazoda to'g'ri chiziqda yotuvchi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta va noldan farqli $\vec{s}(m,n,p)$ yo'naltiruvchi vektor berilgan bo'lsin. Faraz qilamiz $M(x,y,z)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotgan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. U holda $\overline{M_0M}$ va $\vec{s}$ vektorlar kollinear bo'ladi, ya'ni shunday t son mavjudki, $\overline{M_0M} = t \cdot \vec{s}$.

U holda ta'rifga asosan $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ekanligini hisobga olsak, to'g'ri chiziqning vektor tenglamasini $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}t$ hosil qilamiz. Bu tenglamani koordinatalar ko'rinishida ifodalasak

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + mt \\ y &= y_0 + nt \\ z &= z_0 + pt \end{aligned}\right\}$$

to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasini hosil qilamiz. Bu sistemada t parametrni yo'qotsak

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

ga ega bo'lamiz. Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

42-misol. To'g'ri chiziqning

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0, \\ 3x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

umumiy tenglamasini kanonik shaklga keltiring.

Yechish. Buning uchun berilgan sistemadan x, y noma'lumlarni topamiz:

$$x = -\frac{1}{5}z + \frac{2}{5}, \quad y = \frac{7}{5}z - \frac{9}{5}.$$

Endi esa bu ifodalardan z ni topamiz:

$$z = \frac{x - \frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}, \quad z = \frac{y + \frac{9}{5}}{\frac{7}{5}}.$$

Endi ularni o'zaro tenglashtirib

$$\frac{z}{1}=\frac{x-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}=\frac{y+\frac{9}{5}}{\frac{7}{5}}$$

ko‘rinishdagi kanonik tenglamani topamiz.

Ikkita to‘g‘ri chiziq kanonik tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlarning orasidagi burchakni topish, ularning parallellik va perpendikularlik shartlari yo‘naltiruvchilar orasidagi burchakni topish, yo‘naltiruvchilarning parallellik va perpendikularlik shartlariga ekvivalent.

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ to‘g‘ri chiziq va $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik orasidagi burchak

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

formula yordamida topiladi. Agar $Am+Bn+Cp=0$, ya'ni to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchisi va tekislikning normal vektori perpendikular bo‘lsa, tekislik va to‘g‘ri chiziq parallel bo‘ladi. Agar $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ bo‘lsa, ya'ni to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchisi va tekislikning normal vektori parallel bo‘lsa, tekislik va to‘g‘ri chiziq perpendikular bo‘ladi.

43-misol. Berilgan $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$ to‘g‘ri chiziq va $2x+3y+3z-8=0$ tekislikning kesishish nuqtasi topilsin.

Yechish. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}=t$

Belgilash yordamida

$$x=3t-2, y=-t+2, z=2t-1$$

ifodalarni topamiz. Bu qiymatlarni tekislik tenglamasiga qo‘ysak, $t=1$. Bundan, $x=y=z=1$.

Tekislikning ba'zi tatbiqlarini ko‘rib chiqamiz: bozorga ikki turdagi mahsulot taklif etilayotgan bo‘lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: P_i $(i=1,2)$ – mahsulotlarni sotish narxi, Q_i – mahsulotlarga bo‘lgan talab miqdori bo‘lsin. Agar narx va miqdor orasidagi bog‘lanish chiziqli bo‘lsa, u holda quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$\begin{cases}Q_1=a_1+b_1P_1+c_1P_2,\\ Q_2=a_2+b_2P_1+c_2P_2.\end{cases}$$

Birinchi tenglamada qatnashayotgan o‘zgaruvchilarni va koeffitsiyentlarni tahlil qilib chiqamiz. Mahsulotlar narxi nolga teng bo‘lganda ularga bo‘lgan talab $Q_1>0$ bo‘lgani uchun $a_1>0$. Mahsulot narxi oshganda talab kamayganligi sababli $b_1<0$, c_1 parametrning ishorasi mahsulotlarning xarakteriga bog‘liq. Agar mahsulotlar bir-birining o‘rnini bosadigan bo‘lsa, u holda 2-mahsulot narxining oshishi iste'molchi 1-mahsulotni xarid qilishga undaydi va natijada 1-mahsulotga bo'lgan talab Q_1 ortadi. Bu holat, ya'ni ular bir-birining o'rnini bosuvchi mahsulotlar ekanligi $c_1 > 0$ tengsizlik bajarilishi bilan xarakterlanadi. Agar mahsulotlar bir-birini to'ldiruvchi mahsulotlar bo'lsa, u holda mahsulot narxining oshishi unga bo'lgan talabning kamayishiga olib keladi. Bu holat esa $c_1 < 0$ tengsizlik bajarilishi bilan xarakterlanadi. Xuddi shunday usulda a_2, b_2, c_2 parametrlarning ham ishoralari aniqlanadi.

44-misol. Ikki mahsulot uchun talab va taklif funksiyalari quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$Q_{11} = 10 - 2P_1 + P_2,$$
$$Q_{12} = 5 + 2P_1 - 2P_2,$$
$$Q_{21} = -3 + 2P_1,$$
$$Q_{22} = -2 + 3P_2.$$

Bu ikki mahsulotni ishlab chiqarish miqdori va narxi uchun muvozanat nuqtasini aniqlang. Bu yerda $Q_{11} = Q_{21}, Q_{12} = Q_{22}$.

Yechish. $Q_{11} = Q_{21} = Q_1, Q_{12} = Q_{22} = Q_2$ belgilashlar kiritib tenglamalarni quyidagicha yozib olamiz:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = 10 - 2P_1 + P_2, \\ Q_2 = 5 + 2P_1 - 2P_2, \\ Q_1 = -3 + 2P_1, \\ Q_2 = -2 + 3P_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10 - 2P_1 + P_2 = -3 + 2P_1, \\ 5 + 2P_1 - 2P_2 = -2 + 3P_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4P_1 + P_2 = -13, \\ 2P_1 - 5P_2 = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = 4, \ P_2 = 3, Q_1 = 5, Q_2 = 7.$$

3-bobga doir savollar

1. n o'lchovli chiziqli fazo bazisi deb nimaga aytiladi?
2. Arifmetik vektor uzunligi, deb nimaga aytiladi?
3. Chiziqli fazo deb nimaga aytiladi?
4. Chiziqli fazo o'lchovi deb nimaga aytiladi?
5. Chiziqli fazoning chiziqli almashtirishi yoki operatori deb nimaga aytiladi?
6. Chiziqli fazoning qism osti fazosi deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
7. Chiziqli operator ustida bajariladigan qanday amallarni bilasiz?
8. Chiziqli operatorning xos vektori va xos qiymati deb nimaga aytiladi?
9. Ellipsning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni izohlang.
10. Fazoda bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasining qanday shakllarini bilasiz?
11. Fazoda kiritilgan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan tekislik vaziyati qanday aniqlanadi?
12. Fazoda kiritilgan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan to'g'ri chiziq qanday aniqlanadi?

13.Fazoda to‘g‘ri chiziqning vektor tenglamasini yozing.
14.Giperbolaning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni sharhlang.
15.Har qanday $x \in L^n$ vektorni fazoning bazisi orqali yoyish mumkinmi?
16.Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasini yozing.
17.Koordinatalar fazosida berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha bo‘lgan masofani hisoblash formulasini yozing.
18.Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan o‘tuvchi va burchak koeffitsiyenti ma’lum bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
19.Koordinatalar tekisligida to‘g‘ri chiziqning vektor shakldagi tenglamasini yozing va izohlang.
20.Koshi – Bunyakovskiy tengsizligini yozing.
21.Kvadratik forma matritsasini diagonal ko‘rinishga keltiruvchi ortogonal matritsa mavjudmi va nima uchun?
22.Kvadratik forma matritsasining bosh yoki burchak minorlari, deb nimalarga aytiladi?
23.Kvadratik forma rangi deb nimaga aytiladi?
24.Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirish masalasi qanday yechiladi?
25.Kvadratik formani matritsa ko‘rinishida yozish mumkinmi va qanday?
26.Kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi deb uning qanday shakliga aytiladi?
27.Kvadratik formaning xarakteristik sonlari va bosh yo‘nalishlari deb nimalarga aytiladi?
28.Matritsaning xarakteristik ko‘phadi bazis tanlanishiga bog‘liqmi?
29.Musbat va manfiy aniqlangan kvadratik formalar.
30.Ordinata o‘qi simmetriya o‘qi bo‘lgan parabola, uning direktrisasi tenglamalarini yozing va fokusini aniqlang.
31.Parabola fokusini aniqlang va direktrisasi tenglamasini yozing.
32.Parabolaning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni izohlang.
33.Qanday bazisda matritsa diagonal ko‘rinishga ega bo‘ladi?
34.Qanday chiziqli fazoga Yevklid fazo deyiladi?
35.Tekislik umumiy tenglamasining mumkin bo‘lgan barcha xususiy hollarini sharhlab bering?
36.Tekislikda qanday nuqtalar to‘plamiga ellips deyiladi?
37.Tekislikda qanday nuqtalar to‘plamiga giperbola deyiladi?
38.Tekislikda qanday nuqtalar to‘plamiga parabola, deyiladi?
39.Tekislikda to‘g‘ri chiziqning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
40.Tekisliklarning perpendikularlik va parallellik shartlarini yozing.
41.Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi va nima uchun?
42.Tekislikning normal shakldagi tenglamasini yozing.
43. Tekislikning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi, deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?

44.To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini yozing va koeffitsiyentlarining geometrik ma'nosini izohlang.
45.To'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamasini yozing.
46.To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va geometrik izohlang.
47.To'g'ri chiziqning normal ko'rinishdagi tenglamasi, deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
48. Umumiy tenglama koeffitsiyentlari qanday munosabatlarni qanoatlantirganda, ikkinchi tartibli egri chiziq aynan aylanani aniqlaydi?
49.Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining aniqlik va aniqmaslik yetarli shartlari nimalardan iborat?
50.Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik yetarli sharti nimadan iborat?
51.Vektorlar ustida chiziqli amallar deganda qanday amallar tushuniladi?
52.Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi, deb nimaga aytiladi?
53.Vektorlarning skalyar ko'paytmasi, deb nimaga aytiladi?
54.Vektorning biror-bir bazisdagi koordinatalari deb nimaga aytiladi?
55.Xos vektorlarning qanday xossalarini bilasiz?

3-bobga doir misol va masalalar

1. $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$, va $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, bu yerda $\vec{m}$ va $\vec{n}$- birlik vetorlar ular orasidagi burchak 120^0ga teng. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

2. Tekislikda uch vektor joylashgan $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$. va $|\dot{a}|=2$, $|\dot{b}|=3$, $|\dot{c}|=5$, $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=60^0$, $\left(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}\right)=60^0$. $\vec{d}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ vektorning uzunligini toping.

3. $\vec{a}=-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonallari orasidagi burchakni toping.

4. Vektorlar uzunliklari berilgan $|\vec{a}|=11$; $|\vec{b}|=23$; $|\vec{a}-\vec{b}|=30$. $|\vec{a}+\vec{b}|$ni aniqlang.

5. α va β ning qanday qiymatlarida $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ va $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlar a) kollinear b) ortogonal bo'ladi.

6. Oxy tekisligida $\vec{OA}=\vec{a}=2\vec{i}$, $\vec{OB}=\vec{b}=3\vec{i}+3\vec{j}$ va $\vec{OC}=\vec{c}=2\vec{i}+6\vec{j}$ vektorlarni yasang. $\vec{c}$ ni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali analitik va geometrik ifodalang.

7. $\vec{a}=(2;1;0)$, $\vec{b}=(1;-1;2)$, $\vec{c}=(2;2;-1)$ va $\vec{d}=(3;7;-7)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}$ ni $\vec{b}$ $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektorlar orqali ifodalang.

8. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$ vektor uzunligi va uning yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

9. Vektor Oy va Oz o'qlari bilan mos ravishda 60^0 va 120^0burchak tashkil qiladi. Ox o'qi bilan qanday burchak tashkil qiladi.

10. $\vec{a}=6\vec{i}-8\vec{j}+5\sqrt{2}\vec{k}$ va $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$ vektorlar berilgan. $\vec{a}-\vec{b}$ vektorning Ox o'qi bilan hosil qilgan burchakni toping.

11. m ning qanday qiymatlarida $\vec{a}=m\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ va $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-m\vec{k}$ vektorlar perpendikular.

12. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ vektorning $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ vektordagi proyeksiyasini toping.

13. $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{c}$ vektorning $\vec{b}+\vec{c}$ vektordagi proyeksiyasini toping.

14. $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ vektordagi proyeksiyasi 1 ga teng bo'lgan, $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$, va $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$, vektorlarga perpendikular $\vec{d}$ vektorni toping.

24. e_1, e_2, e_3 vektorlar ortonormallangan bazisni tashkil qiladi. $x=3e_2-e_3$ va $y=4e_1+e_2-2e_3$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

25. $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ bazisda chiziqli $\tilde{A}$ operator $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan $x=-e_1+2e_2+e_3$ bo'lsa, $y=A(x)$ ni toping.

26. (e_1,e_2,e_3) bazisda $\tilde{A}$ operator $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaga ega. $\mathring{a}_1'=2e_1+\mathring{a}_2-\mathring{a}_3$, $\mathring{a}_2'=2\mathring{a}_1-\mathring{a}_2+2e_3$, $\mathring{a}_3'=3e_1+\mathring{a}_3$ bazisda $\tilde{A}$ operatorning matritsasini toping.

27. Chiziqli operatorning xos vektor va xos sonlarini toping

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

28. A matritsani diagonal ko'rinishga keltirish mumkinmi, agar mumkin bo'lsa matritsani diagonal ko'rinishda yozing

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

29. L kvadratik formani matritsali ko'rinishda yozing

a) $L(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2-x_1x_2$.

b) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_3^2-2x_1x_2+5x_1x_3$.

30. L kvadratik formaning rangini toping:

a) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$.

b) $L(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3$.

31. Kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiring.

a) $L(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$.

b) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2x_3$.

c) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_3^2-4x_2x_3$.

32. Kvadratik shakl qanday aniqlanganligini toping.

a) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$.

b) $L(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2-x_1^2-x_1x_3+2x_2x_3-2x_3^2$.

c) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+4x_2x_3$.

33. Korxona jadvalda ko'rsatilgan miqdorda 3 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi.

Mahsulot turlari	B_1	B_2	B_3
Mahsulot miqdori (birlik)	15	25	40
Bir birlik mahsulot narxi	30	40	50
Mahsulot narxining o'zgarishi	+5	-3	+2

Mahsulotni sotishdan olingan daromad va mahsulot narxining o'zgarishidagi daromadning o'zgarishini toping.

34. Korxona jadvalda ko'rsatilgan miqdorda 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi.

Mahsulot turlari	I	II	III	IV
Mahsulot miqdori (birlik)	50	80	20	120
1birlik mahsulot uchun xomashyo sarfi (kg)	7	3,5	10	4
Vaqt normasi (soat)	20	32	40	20
Mahsulot narxi (sh.p.b.)	100	170	160	200

S umumiy xomashyo sarfi, T jami mahsulotni ishlab chiqarishga ketgan vaqt, P mahsulotni sotishdan olingan daromad va mahsulot ishlab chiqarish $+5,-4,-2,+10$ birlikka o'zgarishidagi S,T va Pning o'zgarishini toping.

35. Uch mamlakatdagi savdoning strukturali matritsasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0,25 & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0,5 & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0,25 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Balanslangan savdo uchun bu mamlakatlarning milliy daromadlari nisbatini aniqlang.

36. Uchburchakning $A(7;9)$, $B(2;-3)$ va $C(3;6)$ uchlari berilgan. a) uchburchak medianalari kesishgan M nuqtani; b) BC tomoni AE bissektrisasi kesishgan E nuqtani toping.

37. $A(5;1)$ nuqtadan o'tuvchi, $3x+2y-7=0$ to'g'ri chiziqqa a) parallel, b) perpendikular ikkita to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

38. ABC uchburchakning $A(-7;2)$, $B(5\div)$ va $C(8;1)$ uchlari berilgan. Uchburchakning B uchidan o'tkazilgan medianasi, balandlik va bissektrisasi tenglamasini tuzing.

39. Uchburchakning $A(0;2)$ uchi va $(BM)x+y-4=0$, $(CM)y=2x$ balandliklari (bu yerda M – balandliklar kesishish nuqtasi) tenglamalari berilgan. Uchburchak tomonlari tenglamalarini tuzing.

40. $3x+4y-1=0$ va $4x-3y+5=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak bissektrisasi tenglamasini tuzing.

41. ABC uchburchakda uchburchakning tomoni $(AB)x+7y-6=0$ va bissektrisalari $(AL)x+y-2=0$, $(BM)x-3y-6=0$ tenglamalari berilgan. Uchlarining koordinatalarini toping.

42. Buyumlar partiyasini ishlab chiqarish uchun y (so'mda) xarajatlar $y=ax+b$ formula bo'yicha hisoblanadi, bu yerda x – partiya hajmi. Texnologik jarayonning birinchi varianti uchun $y=1,45x+20$. Ikkinchi varianti uchun $x=100$ (buyum)da $y=157,5$ (so'm) va $x=300$(buyum)da $y=452,5$(so'm) ekanligi ma'lum. Texnologik jarayonning ikkala variantini baholang va $x=200$ (buyum) da ikkala variant uchun mahsulot tannarxini toping.

43. Ikki turdagi transportning y yuk tashish xarajatlari $y=150+50x$ va $y=250+25x$ tenglamalar bilan ifodalanadi, bu yerda x – yuz kilometrlik masofa, y – transport xarajatlari. Qanday masofadan boshlab transportning ikkinchi turi tejamliroq bo'ladi.

44. x mehnat unumdorligi o'zgarishi bilan y ishlab chiqarish hajmi to'g'ri chiziq bo'ylab o'zgarishi ma'lum bo'lsa, uning tenglamasini tuzing. Agar $x=3$ da $y=185$, $x=5$ da $y=305$ ekanligi ma'lum bo'lsa $x=20$ da ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

45. $A(1;5)$, $B(-4;0)$ va $C(4;-4)$ nuqtalar orqali o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

46. Markazi $2x-y-2=0$ to'g'ri chiziqda yotgan $A(7;7)$ va $B(-2;4)$ nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

47. $x^2+y^2=16$ va $(x-5)^2+y^2=9$ aylanalar umumiy vatarining tenglamasini tuzing.

48. $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ aylananing $x-y+2=0$ to'g'ri chiziq bilan kesishgan nuqtalaridan bu aylanaga o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

49. Koordinata o'qlariga joylashtirilgan ellips $M(1;1)$ nuqtadan o'tadi va ekssentrisiteti $e=\frac{3}{5}$ ga teng. Ellips tenglamasini tuzing.

50. Fokus va uchlari tenglamasi $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ bo'lgan ellipsning mos fokus va uchlarida yotgan giperbola tenglamasini tuzing.
51. $x^2-y^2=8$ giperbola berilgan. $M(4;6)$ nuqtadan o'tuvchi va giperbola bilan bir xil fokusga ega bo'lgan ellips tenglamasini yozing.
52. $x^2-y^2=1$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning asimptotalarigacha bo'lgan masofalar ko'paytmasi o'zgarmas songa tengligini isbotlang.
53. Agar simmetriya o'qiga perpendikular, fokus va parabola uchi orasidagi masofani teng o'rtasidan bo'luvchi vatarning uzunligi 1 ga teng bo'lsa, parabola tenglamasini tuzing.
54. $y^2=32x$ parabolada $4x+3y+10=0$ to'g'ri chiziqdan 2 birlik masofada yotgan nuqtani toping.
55. $M(1;-2;3)$ nuqta orqali o'tuvchi a) $\vec{n}=(3;-4;5)$ vektorga perpendikular; b) $3x-4y+5z+6=0$ tekislikka parallel; c) $M_1(0;2;5)$ nuqtadan o'tuvchi va Oy o'qiga parallel; d) Oz o'qi orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Tayanch so'z va iboralar: Dekart koordinatalar sistemasi, nuqta koordinatalari, to'g'ri chiziqning normal vektori, to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti, to'g'ri chiziqning parametrli tenglamasi, to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi, to'g'ri chiziqning normal tenglamasi, to'g'ri chiziqlarning parallelik va perpendikularlik shartlari, aylana, ellips, giperbola, parabola, giperbola va parabola direktrisalari, ellips va giperbola ekssentrisiteti, tekislik, fazoda to'g'ri chiziq, tekislik tenglamasi, arifmetik vektor fazo, arifmetik vektor, nol vektor, vektorlar ustida chiziqli amallar, vektorlarning skalyar ko'paytmasi, arifmetik vektor uzunligi, arifmetik vektorlar orasidagi burchak, uchburchak tengsizligi, Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi, chiziqli fazo, chiziqli bog'liq va chiziqli erkli elementlar, chiziqli fazo bazisi, chiziqli fazo o'lchami, qism fazo, Yevklid fazosi, operator, chiziqli operator, operatorning matritsasi, operatorning rangi, nol operator, birlik operator, matritsaning xos vektori, matritsaning xos soni, xarakteristik tenglama, chiziqli operator matritsasining diagonal shakli, kvadratik formalar, kanonik ko'rinish, inersiya qonuni, ortogonal almashtirish, xos va xosmas kvadratik formalar, xos va xosmas chiziqli almashtirishlar, iqtisodiyotda matritsali hisoblardan foydalanish, ishlab chiqarish unumdorligi, talab, xomashyo xarajatlari matritsasi, xomashyo narxi matritsasi, mahsulot vektori, xarajat vektori, mahsulot hajmi, tarmoqlararo balans, nomanfiy bazis yechimlar.

4-BOB. CHIZIQLI DATURLASH ASOSLARI

4.1. Chiziqli programmalashtirish masalasi, yechimlari va ularning xossalari

Chiziqli programmalashtirish matematik programmalashtirishning bir bo'limi bo'lib, u chegaralangan resurslar (xomashyo, texnika vositalari, kapital qo'yilmalar, yer, suv, mineral o'g'itlar va boshqalar)ni ratsional taqsimlab eng ko'p foyda olish yoki eng kam xarajat qilish yo'llarini o'rgatadi.

Chiziqli programmalashtirishning shakllanishi XX asrning ikkinchi yarmidagi iqtisodiy fikrlarning takomillashishiga katta ta'sir ko'rsatdi. 1975 yilda chiziqli programmalashtirish nazariyasini birinchi bor kashf qilgan rus olimi L.V.Kantorovichga va matematik iqtisodiyot bo'yicha mutaxassis, "Chiziqli programmalashtirish" terminining birinchi muallifi, amerika olimi T.Kupmansga Nobel mukofotining berilishi chiziqli programmalashtirishning iqtisodiy nazariyaga qo'shgan hissasini tan olishdan iborat deb hisoblash mumkin.

Chiziqli programmalashtirish chiziqli funksiyaning, uning tarkibiga kiruvchi noma'lumlarga chegaralovchi shartlar qo'yilganda, eng katta va eng kichik qiymatini izlash va topish uslubini o'rgatuvchi bo'limdir.

Noma'lumlarga chiziqli chegaralashlar qo'yilgan chiziqli funksiyaning ekstremumini topish chiziqli programmalashtirishning predmetini tashkil qiladi. Shunday qilib, chiziqli programmalashtirish chiziqli funksiyaning shartli ekstremumini topish masalalari turkumiga kiradi.

Iqtisodiy jarayonlarning o'ziga xos qonuniyatlarini o'rganish uchun, birinchi navbatda, bu jarayonlarni tavsiflovchi matematik modellarini tuzish kerak. O'rganilayotgan iqtisodiy jarayonning asosiy xossalarini matematik munosabatlar yordamida tavsiflash tegishli iqtisodiy jarayonning matematik modelini tuzish deb ataladi.

Iqtisodiy jarayonlarning (masalalarning) matematik modelini tuzish uchun quyidagi bosqichlardagi ishlarni bajarish kerak:

1) masalaning iqtisodiy ma'nosi bilan tanishib, undagi asosiy shartlar va maqsadni aniqlash;

2) masaladagi ma'lum parametrlarni belgilash;

3) masaladagi noma'lumlarni (boshqaruvchi o'zgaruvchilarni) belgilash;

4) masaladagi cheklamalarni, ya'ni boshqaruvchi o'zgaruvchilarning qanoatlantirishi kerak bo'lgan chegaraviy shartlarni chiziqli tenglamalar yoki tengsizliklar orqali ifodalash;

5) masalaning maqsadini chiziqli funksiya orqali ifodalash.

Boshqaruvchi o'zgaruvchilarning barcha cheklamalarni qanoatlantiruvchi shunday qiymatini topish kerakki, u maqsad funksiyaga eng katta (maksimum) yoki eng kichik (minimum) qiymat bersin. Bundan ko'rinadiki, maqsad funksiya boshqaruvchi noma'lumlarning barcha qiymatlari ichida eng yaxshisini (optimalini) topishga yordam beradi. Shuning uchun ham maqsad funksiyani foydalilik yoki optimallik mezoni deb ham ataladi.

Iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzish jarayonini amaliyotda nisbatan ko'p uchraydigan quyidagi iqtisodiy masalalar misolida o'rganamiz.

Ishlab chiqarishni tashkil qilish va rejalashtirish masalasi. Faraz qilaylik, korxonada m xil mahsulot ishlab chiqarilsin; ulardan ixtiyoriy birini i bilan belgilaymiz. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun n xil ishlab chiqarish faktorlari zarur bo'lsin. Har bir xomashyoning umumiy miqdori va bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan miqdori haqidagi ma'lumotlar jadvalda berilgan bo'lsin.

Xomashyolar / Mahsulot turlari	1	2	3	...	n	Daromad
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	c_2
...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	c_m
Xomashyolar zaxirasi	b_1	b_2	b_3	...	b_n	

Jadvaldagi har bir: $b_j - j$ xomashyoning umumiy miqdori (zaxirasi); $a_{ij} - i$ mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan j xomashyo miqdori; c_j –korxonaning j mahsulotning bir birligini sotishdan oladigan daromadi.

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: korxonaning ishini shunday rejalashtirish kerakki:

a) hamma mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan har bir xomashyoning miqdori ularning umumiy miqdoridan oshmasin;

b) mahsulotlarni sotishdan korxonaning oladigan daromadi maksimal bo'lsin.

Rejalashtirilgan davr ichida ishlab chiqariladigan i mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masaladagi a) shart quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \le b_n \end{cases}$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra noma'lumlar manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni: $x_i \ge 0, (i = \overline{1,m})$.

Masaladagi b) shart uning maqsadini aniqlaydi. Demak, masalaning maqsadi mahsulotlarni sotishdan korxonaning oladigan umumiy daromadini maximallashtirishdan iborat bo'lib, uni $y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ funksiya orqali ifodalash mumkin. Shunday qilib, ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasining matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \leq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \leq b_n \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m},$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \to \max$$

Iste'mol savati masalasi. Faraz qilaylik, kishi organizmi uchun bir sutkada n xil $A_1, A_2, \ldots, A_n$ oziqa moddalari kerak bo'lsin, jumladan bir sutkada A_1 oziqa moddasidan kamida b_1 miqdorda, A_2 oziqa moddasidan b_2 miqdorda, A_3 oziqa moddasidan b_3 miqdorda va hokazo, A_n ozuqadan b_n miqdorda zarur bo'lsin va ularni m ta $B_1, B_2, \ldots, B_m$ mahsulotlar tarkibidan olish mumkin bo'lsin. Har bir B_i mahsulot tarkibidagi A_j oziqa moddasining miqdori a_{ij} birlikni tashkil qilsin.

Ozuqa moddalari / Mahsulot turlari	A_1	A_2	A_3	$\ldots$	A_n	Mahsulot bahosi
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\ldots$	a_{1n}	c_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\ldots$	a_{2n}	c_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
B_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\ldots$	a_{mn}	c_m
Ozuqa moddasining minimal normasi	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_n	

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: iste'mol savatiga qanday mahsulotlardan qancha miqdorda kiritish kerakki, natijada:

a) odam organizmi qabul qiladigan turli oziqa moddasining miqdori belgilangan minimal miqdordan kam bo'lmasin;

b) iste'mol savatining umumiy bahosi minimal bo'lsin.

Iste'mol savatiga kiritiladigan i-mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masalaning a) sharti quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq b_n. \end{cases}$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, undagi noma'lumlar manfiy bo'la olmaydi, ya'ni: $x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,m})$.

Masalaning b) sharti uning maqsadini ifodalaydi. Demak, masalaning maqsadi iste'mol savatiga kiritiladigan mahsulotlarning umumiy bahosini minimallashtirishdan iborat bo'lib, uni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \to \min.$$

Shunday qilib, iste'mol savati masalasining matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq b_n \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, (i = \overline{1,m}),$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \to \min$$

Optimal bichish masalasi. Optimal bichish masalasining eng sodda holi bilan tanishamiz. Faraz qilamiz, uzunligi L bo'lgan xomaki materiallardan uzunliklari Δ_i $(i = \overline{1,m})$ bo'lgan m xil detallarning har biridan c_i miqdorda tayyorlash kerak bo'lsin. Bundan tashqari xomaki materiallarni n usul bilan kesish mumkin, hamda har bir j usul bilan kesilgan xomaki materialdan a_{ij} miqdorda i detal tayyorlash va b_j miqdorda chiqindi hosil qilish mumkin ekanligi aniqlangan bo'lsin. Xomaki materiallardan qanchasini qaysi usul bilan kesganda tayyorlangan detallar miqdori rejadagiga teng bo'ladi va hosil bo'lgan chiqindilarning umumiy miqdori eng kam (minimal) bo'ladi.

Tayyorlanadigan detallarning uzunliklari	Kesish usullari				Detallar ishlab chiqarish rejasi
	1	2	...	n	
Δ_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	c_1
Δ_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{1n}	c_2
...	...	...	...	...	...
Δ_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	c_m
Chiqindilar	b_1	b_2	...	b_n	

j usul bilan kesiladigan xomaki materiallar miqdorini x_j bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq c_n \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, (i = \overline{1,m}),$$

$$Y = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n \to \min$$

1-misol. Uzunligi 110 sm bo'lgan po'lat xipchinlardan uzunliklari 45 sm, 35 sm va 50 sm bo'lgan xomaki mahsulotlar tayyorlash kerak bo'lsin. Talab qilingan xomaki mahsulotlar miqdori mos ravishda 40, 30 va 20 birlikni tashkil qilsin. Po'lat xipchinlarni kesish yo'llari va ularga mos keluvchi xomaki mahsulotlar va chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomaki mahsulotlar uzunligi	Kesish usullari						Xomaki mahsulotlar i/ch. rejasi
	1	2	3	4	5	6	
45 sm	2	1	1	-	-	-	40
35 sm	-	1	-	3	1	-	30
50 sm	-	-	1	-	1	2	20
Chiqindilar	20	30	15	5	25	10	

Har bir kesish usuli bo'yicha qancha po'lat xipchinlar kesilganda tayyorlangan xomaki mahsulotlar miqdori rejadagiga teng bo'ladi va chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo'ladi?

Yechish. j-usul bilan kesiladigan po'lat xipchinlar sonini x_j bilan belgilaymiz. U holda uzunligi 45 sm bo'lgan xomaki mahsulotlardan ja'mi $2x_1 + x_2 + x_3$ miqdorda tayyorlanadi. Rejaga ko'ra bunday mahsulotlar soni 40 taga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 40.$$

Xuddi shuningdek, uzunliklari 35 sm va 50 sm bo'lgan xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarish rejasini to'la bajarilishidan iborat shartlar mos ravishda $x_2 + 3x_4 + x_5 = 30$ va $x_3 + x_5 + 2x_6 = 20$ tenglamalar orqali ifodalanadi.

Iqtisodiy ma'nosiga ko'ra belgilangan noma'lumlar manfiy bo'la olmaydi, demak,

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0.$$

Rejadagi xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarishda hosil bo'lgan chiqindilarning umumiy miqdorini quyidagi chiziqli funksiya ko'rinishida ifodalaymiz:

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6.$$

Masalaning shartiga ko'ra bu funksiya minimum qiymatni qabul qilishi kerak, ya'ni

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \to \min.$$

Shunday qilib, quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ x_2 + 3x_4 + x_5 = 30, \\ x_3 + x_5 + 2x_6 = 20 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0,\ (i = \overline{1,6})$$

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \to \min.$$

2-misol. Konditer fabrikasi uch turdagi A, B, C karamellarni ishlab chiqarish uchun uch xil xomashyo: shakar, qiyom va quruq mevalar ishlatadi. 1 tonna karamel turlarini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan xomashyolar miqdori (me'yori), xom ashyolarning zaxirasi hamda 1 tonna karamelni sotishdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomashyo turlari	**1 tonna mahsulotga xomashyo sarfi (tonna hisobida)**			**Xomashyo zaxirasi (tonna)**
	A	B	C	
Shakar	0,8	0,5	0,6	800
Qiyom	0,4	0,4	0,3	600
quruq mevalar	-	0,1	0,1	120
1 t karamel sotishdan olinadigan daromad (shartli birlik)	108	112	126	

Fabrikaga maksimal foyda keltiruvchi karamel ishlab chiqarish rejasini toping.

Yechish. Konditer fabrikasida A turdagi karameldan x_1 miqdorda, B turdagi karameldan x_2 miqdorda va C turdagi karameldan x_3 miqdorda ishlab chiqarilsin deb belgilaymiz. U holda fabrikada ishlab chiqariladigan barcha karamellar uchun $0{,}8x_1+0{,}5x_2+0{,}6x_3$ miqdorda shakar sarf qilinadi. Bu miqdor shakarning zaxirasidan, ya'ni 800 tonnadan oshmasligi kerak. Demak, $0{,}8x_1+0{,}5x_2+0{,}6x_3\le 800$ tengsizlik o'rinli bo'lishi kerak. Xuddi shunday yo'l bilan mos ravishda qiyom va quruq mevalar sarfini ifodalovchi quyidagi tengsizliklarni hosil qilish mumkin: $0{,}4x_1+0{,}4x_2+0{,}3x_3\le 600$, $0{,}1x_2+0{,}1x_3\le 120$. Fabrika ishlab chiqargan A karameldan $108x_1$, B karameldan $102x_2$, C karameldan $126x_3$ birlik va ja'mi $108x_1+112x_2+126x_3$ birlik daromad oladi. Bu yig'indini Y bilan belgilab uni maksimumga intilishini talab qilamiz. natijada quyidagi funksiyaga ega bo'lamiz: $Y=108x_1+112x_2+126x_3\to\max$. Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modelini quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases}0{,}8x_1+0{,}5x_2+0{,}6x_3\le 800,\\ 0{,}4x_1+0{,}4x_2+0{,}3x_3\le 600,\\ 0{,}1x_2+0{,}1x_3\le 120\end{cases}$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0,$$

$$Y=108x_1+112x_2+126x_3\to\max$$

Chiziqli programmalashtirish masalasining (CHPM) yechimi. Ko'p hollarda CHPMsida qatnashyotgan tengsizliklarning ishoralarini bir xil ko'rinishga keltirib olinadi. Shu sababli CHPMsining quyidagi shaklini

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{1n}x_m \le b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.2}$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \to \max \tag{4.3}$$

uning standart shakli deb qabul qilingan.

CHPMsi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{1n}x_m = b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.4}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.5}$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \to \max \tag{4.6}$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda (4.4)-(4.6) masala kanonik ko'rinishdagi ***chiziqli programmalashtirish masalasi*** deb ataladi.

CHPMsini (4.4)-(4.6) shaklini turli ko'rinishlarda yozish mumkin. Bu ko'rinishlarni keltirib o'tamiz.

1. CHPMning vektor ko'rinishi. (4.4)-(4.6) masalani vektor ko'rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\begin{aligned} &p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = p_0, \\ &x_i \ge 0, \ i = \overline{1,n} \\ &Y = CX \to \min \end{aligned} \tag{4.7}$$

bu yerda

$$p_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ p_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \ p_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ p_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

2. CHPMning matritsa ko'rinishi. (4.4)-(4.6) masalaning matritsa ko'rinishdagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} &AX = P_0, \\ &x_i \ge 0, \ i = 1,2,\ldots,n, \\ &Y = CX \to \min. \end{aligned} \tag{4.8}$$

bu yerda $A = (a_{ij})$.

Ba'zi hollarda (4.4)-(4.6) masala quyidagacha ifodalanadi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=\overline{1,m},$$
$$x_j \geq 0, \tag{4.9}$$
$$Y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min.$$

Har qanday chiziqli programmalashtirish masalasini (4.4)-(4.6) ko'rinishga keltirish mumkin. Buning uchun quyidagilarni amalga oshirish zarur: ChPMda qatnashayotgan tengsizliklarni tenglamaga keltirish kerak. Bu quyidagicha amalga oshiriladi.

Masalan, $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$ ko'rinishdagi tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlikning chap tomoniga qandaydir nomanfiy x_{n+1} o'zgaruchini shunday qiymat bilan qo'shamizki, natijada tengsizlik tenglikka aylansin:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b,$$

bu yerda

$$x_{n+1} = b - a_1x_1 - a_2x_2 - ... - a_nx_n \geq 0$$

o'zgaruchi qo'shimcha o'zgaruchi deb ataladi.

Teorema. Berilgan $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$ tengsizlikning har bir $X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ yechimiga $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b$, tenglamaning bitta va faqat bitta yagona $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ yechimi mos keladi va aksincha.

Isbot. Faraz qilaylik, X_0 tengsizlikning yechimi bo'lsin. U holda

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \leq b,$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Tengsizlikning chap tomonini o'ng tomonga o'tkazib, hosil bo'lgan ifodani α_{n+1} bilan belgilaymiz: $0 \leq b - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n) = \alpha_{n+1}$.

Endi $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ vektor tenglamaning yechimi ekanligini ko'rsatamiz:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} =$$
$$= a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + (b - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 - ... - a_n\alpha_n) = b$$

Endi agar Y_0 tenglamani qanoatlantirsa, u holda u tengsizlikni ham qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

Shartga ko'ra: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = b$, $\alpha_{n+1} \geq 0$. Bu tenglamadan $\alpha_{n+1} \geq 0$ sonni tashlab yuborish natijasida

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \leq b$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bundan ko'rinadiki, $X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tengsizlikning yechimi ekan.

Shunday yo'l bilan chiziqli programmalashtirish masalasining chegaralovchi shartlaridagi tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish mumkin. Bunda shunga e'tibor berish kerakki, sistemadagi turli tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish uchun ularga bir-birlaridan farq qiluvchi nomanfiy o'zgaruvchilarni qo'shish kerak.

Masalan, agar chiziqli programmalashtirish masalasi quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.10}$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min$$

shaklda bo'lsa, bu masaladagi tengsizliklarning kichik tomoniga $x_{n+1} \ge 0,\ x_{n+2} \ge 0, \dots,\ x_{n+m} \ge 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar qo'shish yordamida tenglamalarga aylantirish mumkin. Bu o'zgaruvchilar Y funksiyaga 0 koeffitsiyent bilan kiritiladi. Natijada (4.10) masala quyidagi ko'rinishga keladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, n+m}, \tag{4.11}$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \to \min$$

Xuddi shuningdek,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.12}$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min$$

shaklda berilgan chiziqli programmalashtirish masalasini kanonik shaklga keltirish mumkin. Buning uchun qo'shimcha $x_{n+1} \ge 0,\ x_{n+2} \ge 0, \dots, x_{n+m} \ge 0$ o'zgaruvchilar tengsizliklarning katta tomonidan ayriladi. Natijada quyidagi masala hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n+m}, \tag{4.13}$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to \min$$

Agar CHPMda maqsad funksiyasi

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min$$

ko'rinishda bo'lsa, uni kanonik shaklda yozish uchun c_i $(i = \overline{1,n})$ qarama-qarshi ishora bilan yozib olinib

$$Y = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \to \min$$

ifodani hosil qilamiz.

3-misol. Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini kanonik ko'rinishga keltiring va uni turli ko'rinishlarda ifodalang:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 \leq -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 6 \end{cases} \tag{I}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max.$$

Yechish. Masalaning cheklamalaridagi birinchi va uchinchi tengsizliklarning kichik tomoniga $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, ularni tenglamalarga aylantiramiz, hamda birinchi tenglamaning ikki tomonini -1 ga ko'paytirib, undagi ozod hadni musbat songa aylantiramiz va (I) masalaga teng kuchli bo'lgan quyidagi masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 6 \end{cases} \tag{II}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max.$$

Ushbu masalada $Y \to \max$ ifodani qarama-qarshi ishora bilan olib, uni $Y \to \min$ bilan almashtiramiz. Natijada berilgan masalaning kanonik shakliga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 6 \end{cases} \tag{III}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

$$Y = -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 0(x_4 + x_5) \to \min.$$

(III) masalaning matritsa ko'rinishini yozish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\6\\6\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

U holda **(III)** masalaning matritsa shakli quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\begin{gathered}AX=B,\\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,5},\\ Y=C^TX\to\min\end{gathered}\qquad \text{(IV)}$$

(III) masalani vektor ko'rinishlarda yozish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$p_1=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\ p_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ p_0=\begin{pmatrix}1\\6\\6\end{pmatrix},$$

$$X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5),\qquad C=(-3,2,-1,0,0).$$

U holda (III) masala quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{gathered}p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4+p_5x_5=p_0,\\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,5},\\ Y=CX\to\min.\end{gathered}\qquad \text{(V)}$$

Endi chiziqli programmalashtirish masalasi yechimlari va ularning xossalari bilan tanishamiz.

1-ta'rif. (4.4)-(4.6) masalaning joiz yechimi (joiz rejasi) deb, (4.4), (4.5) shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ vektorga aytiladi.

(4.4)-(4.6) masalaning joiz yechimlar to'plami uning mumkin bo'lgan (joiz) yechimlar to'plamini tashkil etadi: $K_m=\left\{X(x_1,...,x_n):AX^T=p_0,\ x_i\geq 0, i=\overline{1,n}\right\}$. Bu yerda $r(A)=m<n$.

2-ta'rif. Agar biror bir $X^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\in K_m$ joiz rejaning $n-m$ ta koordinatasi $(m<n)$ nolga teng bo'lib, qolgan $x_1,x_2,...,x_m$ koordinatalariga mos $p_1,p_2,...,p_m$ vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda $X^0\in K_m$ joiz reja bazis reja deyiladi.

3-ta'rif. Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ bazis rejadagi musbat koordinatalar soni m ga teng bo'lsa, u holda bu reja aynimagan bazis reja, aks holda esa bu reja aynigan bazis reja deyiladi.

4-ta'rif. (4.4)-(4.6) masalaning (4.6) chiziqli funksiyasiga eng kichik qiymat beruvchi $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ bazis reja masalaning optimal rejasi (optimal yechimi) deyiladi.

(4.4)-(4.6) masalaning joiz yechimlari to'plami xossalarini o'rganish uchun ba'zi tushunchalarni kiritamiz.

$A_1, A_2, ..., A_n$ chiziqli erkli vektorlar sistemasi berilgan bo'lsin. Ma'lumki, R^n fazoda har bir $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ vektorga koordinatalari $(a_1, a_2, ..., a_n)$ bo'lgan nuqta mos keladi. Shuning uchun bundan keyin $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ vektorni R^n fazo nuqtasi deb qaraymiz.

5-ta'rif. $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n$ – nuqtalar to'plami $A_1, A_2, ..., A_n$ nuqtalarning qavariq kombinasiyasi deb ataladi. Bu yerda $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

$C \in R^n$ to'plam berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Agar ixtiyoriy $A_1 \in C$ va $A_2 \in C$ nuqtalar bilan bir qatorda bu nuqtalarning $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ $(0 \leq \alpha_1 \leq 1,\ 0 \leq \alpha_2 \leq 1,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1)$ qavariq kombinatsiyasidan iborat nuqta ham C to'plamga tegishli bo'lsa, ya'ni $A_1 \in C$, $A_2 \in C \Rightarrow A \in C$ bo'lsa, u holda C to'plam qavariq to'plam deb ataladi.

Qavariq to'lamning geometrik ma'nosini tushuntirish uchun A_1 va A_2 nuqtalarni tutashtiruvchi kesma tushunchasini kiritamiz.

Ma'lumki, A_1 va A_2 nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$A(\alpha) = A_2 + (A_1 - A_2)\alpha$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $A_1 - A_2$ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori

Agar $\alpha = 0$ bo'lsa, u holda $A(0) = A_2$;

Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, u holda $A(1) = A_1$.

Agar $0 \leq \alpha \leq 1$ bo'lsa, u holda $A(\alpha)$ A_1 va A_2 nuqtalarni tutashtiruvchi kesmadagi nuqtalarni aks ettiradi.

Teorema. Chiziqli programmalashtirish masalasining joiz yechimlaridan tashkil topgan to'plam qavariq to'plam bo'ladi.

Isbot. Chiziqli programmalashtirish masalasining ixtiyoriy ikkita yechimining qavariq kombinasiyasi ham yechim ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, X_1 va X_2 chiziqli programmalashtirish masalasining yechimlari bo‘lsin. U holda

$$AX_1^T = P_0,\ x_{1j} \ge 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{4.14}$$

$$AX_2^T = P_0,\ x_{2j} \ge 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{4.15}$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. X_1 va X_2 yechimlarning qavariq kombinasiyasini tuzamiz.

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2,\quad 0 \le \alpha \le 1,$$

hamda uni yechim ekanligini ko‘rsatamiz:

$$AX^T = A\left[\alpha X_1^T + (1-\alpha)X_2^T\right] = \alpha AX_1^T + (1-\alpha)AX_2^T,$$

(4.14) va (4.15) tenglamalarni inobatga olsak:

$$AX^T = \alpha P_0 + (1-\alpha)P_0 = P_0.$$

Bu munosabat X vektor ham yechim ekanligini ko‘rsatadi. Demak, chiziqli programmalashtirish masalasining yechimlaridan tashkil topgan to‘plam qavariq to‘plam bo‘ladi.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Agar k ta o‘zaro chiziqli bog‘liq bo‘lmagan $P_1, P_2, ..., P_k$ vektorlar berilgan bo‘lib, ular uchun

$$P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_kx_k = P_0$$

tenglik barcha $x_i > 0$ lar uchun o‘rinli bo‘lsa, u holda $X = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0, ..., 0)$ nuqta K qavariq to‘plamning burchak nuqtasi bo‘ladi.

Teorema. Qavariq to‘plamning ixtiyoriy nuqtasini uning burchak nuqtalarining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

Teorema. Chiziqli programmalashtirish masalasi o‘zining optimal qiymatiga shu masalaning joiz yechimlaridan tashkil topgan qavariq to‘plamning burchak nuqtasida erishadi. Agar masala birdan ortiq burchak nuqtada optimal qiymatga erishsa, u shu nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo‘lgan ixtiyoriy nuqtada ham o‘zining optimal qiymatiga erishadi.

Yuqorida keltirilgan teoremalardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ K to‘plamning burchak nuqtasi bo‘lishi uchun musbat x_i komponentalar $P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n = P_0$ yoyilmada o‘zaro chiziqli bog‘liq bo‘lmagan P_i vektorlarning koeffitsiyentlaridan iborat bo‘lishi zarur va yetarli.

2-xulosa. Chiziqli programmalashtirish masalasining bazis yechimiga K_m qavariq to‘plamning burchak nuqtasi mos keladi va aksincha.

3-xulosa. Chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini K_m to'plamning burchak nuqtalari orasidan qidirish kerak.

4.2. Chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik talqini

Chiziqli programmalashtirish masalasini geometrik nuqtai nazardan tahlil qilish uchun quyidagi standart masalani ko'ramiz:

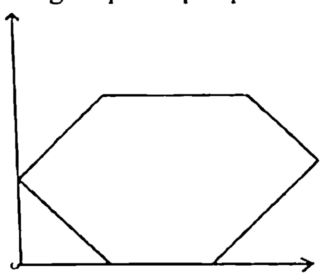
$$Ax \le B$$

$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,n} \tag{4.16}$$

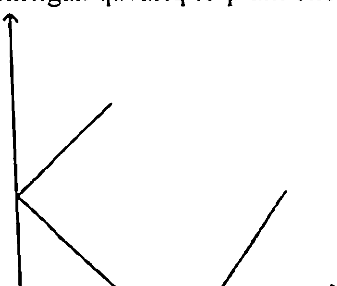
$$Y = CX \to \max$$

Ma'lumki, (4.16) masalaning har qanday rejasini n-o'lchovli fazoning nuqtasi deb qarash mumkin. Bizga yana shu ham ma'lumki, chiziqli tengsizliklar bilan aniqlangan bunday nuqtalar to'plami qavariq to'plamdan iborat bo'ladi. Bu holda qavariq to'plam (qavariq ko'pburchak yoki ko'pyoq) chegaralangan yoki chegaralanmagan bo'lishi, bitta nuqtadan iborat bo'lishi yoki bo'sh to'plam bo'lishi ham mumkin. Masalan,

a) quyidagi rasmda keltirilgan qavariq to'plam chegaralangan:



b) quidagi rasmda keltirilgan qavariq to'plam chegaralanmagan:



(4.16) masalani geometrik nuqtai nazardan tahlil qilamiz. Buning uchun quyidagi

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b, \tag{4.17}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni bilan tanishib chiqamiz.

Ma'lumki, koordinatalari

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{4.18}$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $x_1, x_2, \ldots x_n$ nuqtalar to'plami ***gipertekislik*** deb ataladi. Demak, (4.16) masalada (4.18) kabi tengliklar qatnashsa ular gipertekisliklarni ifodalaydi. Har qanday gipertekislik fazoni ikki yarim fazoga ajratadi. Bu yarim fazolardan faqat bittasigina (4.17) tengsizlikni qanoatlantiradi. (4.17) tengsizlikni qanoatlantiradigan yarim fazoni aniqlash uchun $O(0,0,...,0)$ koordinata boshidan foydalanamiz, ya'ni:

- agar $O(0,0,...,0)$ nuqta (4.17) tengsizlikni to'g'ri tengsizlikka aylantirsa, u holda $O(0,0,...,0)$ nuqtani o'z ichiga oluvchi yarim fazo (4.17) tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni bo'ladi;
- agar $O(0,0,...,0)$ nuqta (4.17) tengsizlikni noto'g'ri tengsizlikka aylantirsa, u holda $O(0,0,...,0)$ nuiqtani o'z ichiga olmaydigan yarim fazo (4.17) tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni bo'ladi.

Bundan ko'rinadiki, (4.16) masalada nechta tengsizlik qatnashsa ular shuncha yarim fazoni ifodalaydi. Bu yarim fazolarning kesishmasi esa (4.16) masalaning barcha joiz yechimlarini o'z ichiga oluvchi qavariq to'plamni tasvirlaydi. Bu qavariq to'plam masalaning joiz yechimlar sohasi deb ataladi.

(4.16) masalaning optimal yechimini topish uchun $Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ maqsad funksiyasidan foydalanamiz. Buning uchun

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = const \tag{4.19}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi gipertekisliklar oilasini qaraymiz.

Ma'lumki, bu yerda *const* ning har bir qiymatiga bitta gipertekislik mos keladi. CHPM ning qavariq to'plami bilan ikkita umumiy nuqtaga ega bo'lgan gipertekisliklar "***sath gipertekisliklar***" deyiladi. CHPM ning qavariq to'plami bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo'lgan gipertekislik, ya'ni urinma gipertekislik ***tayanch gipertekislik*** deyiladi. Tayanch gipertekislikni hosil qilish uchun (4.19) tenglikdagi *const* ga turli qiymatlar berib uni gipertekislikning normal vektori bo'ylab parallel ko'chiramiz va urinma gipertekislikni hosil qilamiz.

Shuni ta'kidlaymizki, Y funksiyaning maksimal qiymatini topish uchun normal vektorning yo'nalishi bo'ylab, Y funksiyaning minimal qiymatini topish uchun normal vektorning yo'nalishiga qarama-qarshi harakatlanish kerak.

$n = 2$ o'lchovli fazoda, ya'ni tekislikda CHPM ni geometrik nuqtai nazardan ko'rib chiqamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \tag{4.20}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{4.21}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \tag{4.22}$$

Faraz qilaylik, (4.20) sistema (4.21) shartni qanoatlantiruvchi yechimlarga ega va ulardan tashkil topgan to'plam chegaralangan bo'lsin. Ma'lumki, (4.20) va (4.21) tengsizliklarning har biri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \ (i = \overline{1,m}),$$

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0$$

to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi. Bu tekisliklarni ko'rib chiqamiz

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (4.23)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini aniqlash uchun $O(0,0)$ nuqtadan foydalanamiz. Agar $O(0,0)$ nuqta (4.23) tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda qidirilayotgan tekislik $O(0,0)$ nuqtani o'z ichiga oladi, aks holda qidirilayotgan tekislik $O(0,0)$ nuqtani o'z ichiga olmaydi. Yuqoridagi mulohazalar asosida (4.20) sistemaning yechimlaridan iborat qavariq ko'pburchakni topib olganimizdan so'ng (4.21) tengsizliklarni e'tiborga olamiz. (4.21) tengsizliklar (4.20) yordamida topilgan qavariq ko'pburchakning I chorakdagi qismini ajratib olishga yordam beradi. (4.20) va (4.21) cheklamalarni qanoatlantiruvchi qavariq ko'pburchakni ***reja ko'pburchagi*** deb ataymiz.

(4.20)-(4.22) masalaning optimal yechimini topish uchun (4.22) ifodada qatnashayotgan chiziqli funksiyadan hosil qilinadigan

$$c_1x_1 + c_2x_2 = const \qquad (4.24)$$

to'g'ri chiziqlar oilasidan foydalanamiz. Ma'lumki, (4.24) ifodadagi har bir ma'lum o'zgarmas $C_0 = const$ qiymatida bitta

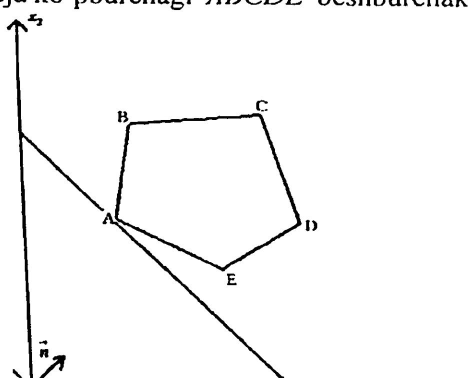
$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$$

sath to'g'ri chizig'i to'g'ri keladi.

So'ngra, bu sath to'g'ri chiziqlardan birini, masalan, $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ to'g'ri chiziqni chizib olamiz. $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ chiziqni $\bar{n}(c_1, c_2)$ normal vektor bo'ylab parallel ko'chirib, reja ko'pburchagiga $c_1x_1 + c_2x_2 = C^0$ tayanch (urinma) to'g'ri chiziqni topib olamiz. Bu yerda C^0 (4.20)-(4.22) masalaning optimal yechimi yoki qiymati; $X^0(x_1^0, x_2^0)$ urinish nuqtasi esa (4.20)-(4.22) masalaning optimal rejasi deb ataladi.

Ba'zi xususiy hollarni ko'rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, reja ko'pburchagi $ABCDE$ beshburchakdan iborat bo'lsin.

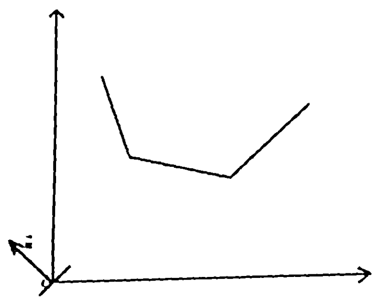


Rasmdan ko'rinib turibdiki, chiziqli funksiya o'zining minimal qiymatiga $ABCDE$ qavariq ko'pburchakning A nuqtasida erishadi. C nuqtada esa, u o'zining maksimal (eng katta) qiymatiga erishadi.

Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak chegaralanmagan bo'lsin. Bunday ko'pburchaklardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

1-hol. Rasmdagi holatda $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ to'g'ri chiziq $\bar{n}$ vektor bo'ylab siljib borib har vaqt qavariq ko'pburchakni kesib o'tadi.

Bu holda $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ funksiya minimal qiymatga ham, maksimal qiymatga ham erishmaydi. Bu holda chiziqli funksiya (4.21) va (4.22) cheklamalar bilan aniqlangan sohada quyidan ham, yuqoridan ham chegaralanmagan bo'ladi.



4-misol. Quyidagi masalani grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$$

$$Z = -x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$$

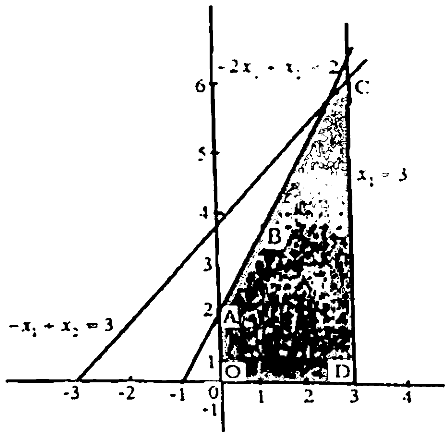
Yechish. Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak yasash uchun koordinatlar sistemasida

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

chiziqlar bilan chegaralangan

$$-2x_1 + x_2 \le 2, -x_1 + x_2 \le 3, x_1 \le 3$$

yarim tekisliklarni koordinatilar sistemasining I choragida yasaymiz, chunki $x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$



Berilgan tengsizliklarni qanoatlantiruvchi yechimlar to'plami bo'yalgan *OABCD* beshburchakni tashkil qiladi. Natijada $Z=-x_1-2x_2$ chiziqli funksiyaga minimal qiymat beruvchi $C(3;6)$ nuqtani topamiz. Bu nuqtaning koordinatalari masalaning optimal rejasi, $Z(C)=-15\rightarrow\min$ esa masalaning optimal yechimi bo'ladi.

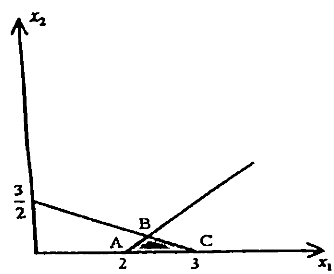
5-misol. Berilgan chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 3 \\ x_1-x_2\le 2 \end{cases}$$

$$Y=2x_1+2x_2\rightarrow\max$$

$$x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0.$$

Yechish. Bu yerda ham yuqoridagidek yechimlar ko'pburchagini hosil qilamiz.

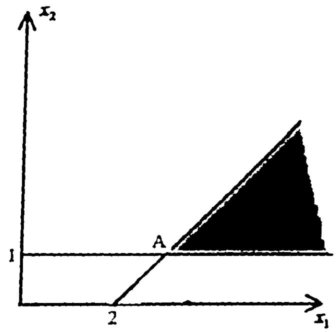


Rasmdan ko'rinadiki, yechimlar ko'pburchagi yuqoridan chegaralanmagan. Koordinata boshidan $\vec{n}(2;2)$ vektorni yasaymiz va unga perpendikulyar bo'lgan $2x_1+2x_2=0$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq $2x_1+2x_2=const$ to'g'ri chiziqlar oilasidan biri bo'ladi. Shakldan ko'rinadiki, masalada maqsad funksiyaning qiymati yuqoridan chegaralanmagan.

6-misol. Masalani grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 1, \end{cases}$$
$$Y = x_1 - 2x_2 \to \max$$

Yechish. Masalani yuqoridagi usul bilan yechib quyidagi shaklga ega bo'lamiz.



Rasmdan ko'rinadiki, yechimlar to'plami chegaralanmagan, lekin optimal yechim mavjud va u $X^0(2,5;1)$ nuqta koordinatalaridan iborat.

Shuni alohida ta'kidlash kerakki, agar CHPMda noma'lumlar soni $n=2$ bo'lganda uning optimal yechimini grafik usulida topish maqsadga muvofiq.

Agar CHPM kanonik ko'rinishda berilgan bo'lib, tenglamalar sistemasida noma'lumlar soni tenglamalar sonidan 2 taga ko'p bolsa, ya'ni $n-m=2$ bo'lsa, bunday CHPMlarining optimal yechimlarini ham gtafik usulida topish maqsadga muvofiq.

Iqtisodiy masalalarning optimal yechimlarining tahlili. Endi CHPMsining optimal yechimini geometrik nuqtai nazardan tahlil qilib chiqamiz. Buning uchun quyidagi iqtisodiy masalaning optimal yechimini quramiz va tahlil qilamiz.

Faraz qilaylik, korxonada ikki xil bo'yoq ishlab chiqarilsin. Bu bo'yoqlarni ishlab chiqarish uchun 2 xil xomashyodan foydalanilsin. Xomashyolarning zaxirasi 6 va 8 birlikni tashkil qilsin. Ikkinchi bo'yoqqa bo'lgan talab 2 birlikdan oshmasin va u birinchi bo'yoqqa bo'lgan talabdan 1 birlikka katta bo'lsin.

Har bir bo'yoqning bir birligini ishlab chiqarish uchun kerak bo'lgan xomashyolar miqdori, hamda korxonaning har bir birlik bo'yoqni sotishdan oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomashyolar / **Bo'yoqlar**	1	2	**Foyda**
I	1	2	3
II	2	1	2
Zaxira	6	8	

Har bir bo'yoqdan qanchadan ishlab chiqarilganda ularga sarf qilingan xomashyolar miqdori ularning zaxiralaridan oshmaydi, daromad eng yuqori bo'ladi, hamda talab bo'yicha shartlar bajariladi? Masalaning optimal rejasini toping.

Masaladagi noma'lumlarni belgilaymiz:

x_1 – ishlab chiqarish rejalashtirilgan I mahsulotning miqdori;

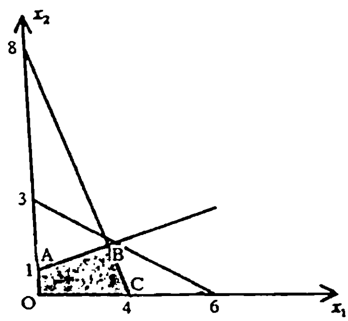
x_2 – ishlab chiqarish rejalashtirilgan II mahsulot miqdori.

U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 - x_1 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \\ 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$Y = 3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

Masalani grafik usulda yechib, $D\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$ optimal nuqta ekanligini aniqlaymiz.



Optimal yechim quyidagicha bo'ladi: $x_1 = 3\frac{1}{3}$; $x_2 = 1\frac{1}{3}$; $Y_{\max} = 12\frac{2}{3}$ Demak, korxona birinchi bo'yoqdan $3\frac{1}{3}$ birlik, ikkinchisidan $1\frac{1}{3}$ birlik ishlab chiqarishi kerak. Bu holda uning oladigan daromadi $12\frac{2}{3}$ birlikka teng bo'ladi: $X^0(3\frac{1}{3},1\frac{1}{3})$, $Y = 12\frac{2}{3}$.

Endi masalaning optimal yechimini tahlil qilamiz. Buning uchun D–optimal nuqtani qaraymiz. Bu nuqta $2x_1 + x_2 = 8$ va $x_1 + 2x_2 = 6$ to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi. Bu esa, bo'yoq ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan ikkala xomashyoning ham kamyob ekanligini ko'rsatadi. Optimal nuqta bilan bog'liq bo'lgan bu shartlar aktiv shartlar, optimal nuqtaga bog'liq bo'lmagan shartlar esa passiv shartlar deb ataladi. Biz ko'rayotgan masalada mahsulotlarga bo'lgan talabga qo'yilgan $-x_1 + x_2 \le 1$ va $x_2 \le 2$ shartlar optimal nuqtaga bog'liq emas va shu sababli bu shartlar passiv shartlar.

Passiv shartlarga mos keluvchi resurslar kamyob bo'lmaydi va ularning ma'lum darajada o'zgarishi optimal yechimga ta'sir qilmaydi.

Aksincha, aktiv shartlarga mos keluvchi resurslarni bir birlikka oshirilishi optimal yechimning o'zgarishiga olib keladi.

Masalan, birinchi xomashyo zaxirasini bir birlikka oshirilishi optimal yechimga qanday ta'sir ko'rsatishini ko'rish uchun uning zaxirasini 7 ga teng deb olamiz. U holda CD to'g'ri chiziq o'ziga parallel ravishda yuqoriga ko'tariladi va DCK uchburchak reja ko'pburchagiga qo'shiladi. Natijada K nuqta optimal nuqtaga aylanadi.

Bu nuqtada $x_1 = 2; x_1 + 2x_2 = 7; 2x_1 + x_2 = 8$ to'g'ri chiziqlar kesishadi. Shuning uchun endi masalaning $0 \leq x_2 \leq 2; x_1 + 2x_2 \leq 7; 2x_1 + x_2 \leq 8$ shartlar aktiv shartlarga aylanadi. Demak, yangi optimal yechim: $X^0(2,3)$, $Y_{max} = 13$.

Xuddi shunday yo'l bilan ikkinchi xomashyoni bir birlikka oshirish optimal yechimni qanday o'zgartirishini ko'rsatish mumkin.

Bundan tashqari kamyob bo'lmagan xomashyolar miqdorini, optimal yechimga ta'sir qilmagan holda, qanchalik kamaytirish mumkinligini ham ko'rsatish mumkin.

Yuqoridagi shaklda BC kesma $x_1 = 2$ chiziqni, ya'ni masalaning 4-shartini ifodalaydi. Ma'lumki, bu – passiv shart. Maqsad funksiya qiymatini o'zgartirmagan holda passiv shartni qanchalik o'zgartirish mumkin ekanligini aniqlash uchun BC kesmani o'ziga parallel ravishda pastga, D nuqta bilan kesishguncha siljitamiz. Bu nuqtada $x_2 = \frac{4}{3}$ bo'ladi.

Demak, ikkinchi bo'yoqqa bo'lgan talabni optimal yechimga ta'sir qilmasdan $\frac{4}{3}$ gacha kamaytirish mumkin ekan.

Shunday yo'l bilan masalaning optimal yechimiga ta'sir etmasdan uning boshqa passiv shartning o'ng tomonini qanchaga kamaytirish mumkin ekanligini ko'rsatish mumkin.

4.3. Chiziqli programmalashtirish masalasini simpleks usuluda yechish

Simpleks usuli eng keng foydalaniladigan barcha raqamli algoritmlardan foydalanadigan keng tarqalgan chiziqli dasturlash usullaridan biri. Bu 1940 yilda ishlab chiqilgan bo'lib, chiziqli dasturlash modeli sifatida iqtisodiy, ham harbiy rejalalarni amalga oshirish uchun ishlatilgan.

Simpleks usuli faqat chiziqli dasturlash muammolarini yechishga qaratilgan bo'lsada, uning yechish texnikalari umumiy qiziqishga sazovordir. Bu texnika chiziqsiz optimallashtirish muammolarini chiziqli cheklovlardan foydalanish va chiziqsiz cheklovlarni umumiylashtirishi mumkin.

Dansig yaratgan simpleks usul bilan chiziqli programmalash masalasi (CHPM)ning optimal yechimini topish uchun CHPM kanonik shaklda va cheklamalar sistemasi keltirilgan tenglamalar sistemasi shaklida bo'lishi kerak.

Simpleks usuli CHPMning optimal yechimini chekli qadamdan so'ng topishga yordam beradi.

Bizga quyidagi CHPM berilgan bo'lsin.

$$Z = C^T x \to \min$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0.$$

Bu yerda x quyidagicha ko'rinishda ifodalanadi

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}.$$

Bu bazis o'zgaruvchilarning vektori esa nolga teng bo'lgan bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarning vektori. Maqsad funksiya quydagicha yoziladi:

$$Z = C_B^T x_B + C_N^T x_N,$$

bu yerda bazis o'zgaruvchilarning koeffitsiyentlari va bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarning koeffitsiyentlari orqali bu tenglikni quydagicha yozishimiz mumkin:

$$Bx_B + Nx_N = b.$$

Qaytadan yozilganda quydagicha bo'ladi:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarni qiymati o'zgartirish orqali $Ax = b$ tenglikka barcha mumkin bo'lishi bo'lgan barcha yechimlarni qo'lga kiritamiz.

Bu formulani Z formulaga almashtirsak, quyidagi formula kelib chiqadi:

$$Z = C_B^T B^{-1} b + (C_N^T - C_B^T B^{-1} N) x_N.$$

Agar biz $y = (C_B^T B^{-1})^T = B^{-T} C_B$ ni aniqlasak, Z ni quydagicha yozishimiz mumkin:

$$Z = y^T b + (C_N^T - y^T N) x_N.$$

Bu formula samaraliroq. Maqsad funksiya va bazis o'zgaruvchilarning qiymati $x_N = 0$ qiymat qo'yish orqali topiladi.

$$x_B = \hat{b} = B^{-1} b \text{ va } \hat{Z} = C_B^T B^{-1} b.$$

Bazis	x_B	x_N	b_0
$-Z$	C_B^T	C_N^T	0
x_B	B	N	b

va bazis asosda jadval quyidagicha bo'ladi:

Bazis	x_B	x_N	b_0
$-Z$	0	$C_N^T - C_B^T B^{-1} N$	0
x_B	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

Bu simpleks jadvalining rasmiy formulalari hisoblanadi. Bizga quyidagi CHPM berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \quad x_2 \quad + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad x_m + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m, \end{cases} \tag{4.25}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}, \tag{4.26}$$

$$Y = c_1x_1 + c_1x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min \tag{4.27}$$

Ko‘rinib turibdiki, bu masalada cheklamalar keltirilgan tenglamalar sistemasi ko‘rinishidadir. Sistemani vektor shaklida yozib olamiz:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_mx_m + P_{m+1}x_{m+1} + \ldots + P_nx_n = P_0,$$

bu yerda P_1, $P_2, \ldots, P_m$ vektorlar sistemasi m-o‘lchovli fazoda chiziqli erkli birlik vektorlar sistemasidan iborat bo‘lib, bazis vektorlar sistemasini tashkil etadi. Ular m-o‘lchovli fazoning bazisini tashkil qiladi. Ushbu vektorlarga mos keluvchi $x_1, x_2, \ldots, x_m$ o‘zgaruvchilar “bazis (erksiz) o‘zgaruvchilar” deb ataladi. $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchilar bazis bo‘lmagan (erkli) o‘zgaruvchilar. Agar erkli o‘zgaruvchilarga 0 qiymat bersak, bazis o‘zgaruvchilar ozod hadlarga teng bo‘ladi. Natijada $X_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ bazis yechim hosil bo‘ladi. Bu yechimni boshlang‘ich bazis yechim deb ataymiz. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz: P_b – bazis vektorlar sistemasi; C_b – maqsad funksiyasida bazis o‘zgaruvchlar oldidagi c_i koeffitsiyentlar.

Yuqoridagilardan foydalanib quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
			P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}		a_{1k}	...	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}		a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...		...	...	...
P_l	c_l	b_l	0	0	...	0	a_{lm+1}		a_{lk}	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...		...	...	...
P_m	c_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}		a_{mk}	...	a_{mn}

Bu jadval ***simpleks jadvali*** deb ataladi. $X_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ boshlangich bazis rejani optimallikka tekshirish uchun bu jadvalga qo‘shimcha $\Delta = \{\Delta_0, \Delta_j\}$, $j = \overline{1,n}$ satr kiritamiz.

Jadvalning P_0 ustiniga mos Δ_0 ni quyidagicha hisoblaymiz:

$$\Delta_0 \equiv Y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_ic_i. \tag{4.28}$$

Jadvalning P_j ustinlariga mos Δ_j larni esa quyidagicha hisoblaymiz:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_i - c_j . \tag{4.29}$$

U holda yuqoridagi jadval quyidagi ko'rinishga keladi.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
			P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_l	c_l	b_l	0	0	...	0	a_{lm+1}	...	a_{lk}	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_m	c_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
Δ_j		Δ_0	Δ_1	Δ_1	...	Δ_m	Δ_{m+1}	...	Δ_k	...	Δ_n

(4.29) formuladan ko'rinib turibdiki, simpleks jadvaldagi bazis vektorlarga mos Δ_j lar har doim 0 ga teng.

Agar c_j ustunlarga mos barcha Δ_j lar uchun $\Delta_j \leq 0$ shart bajarilsa, u holda $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ yechim optimal yechim bo'ladi. Y chiziqli funksiyaning minimal qiymati Y_0 ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, $\Delta_j \leq 0$ shart (4.25)-(4.27) CHPM uchun optimallik sharti deyiladi.

Agar kamida bitta j uchun $\Delta_j > 0$ bo'lsa, u holda $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ masalaning optimal yechimi bo'la olmaydi.

Bunday holatda topilgan $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ bazis rejani optimal rejaga yaqin bo'lgan boshqa bazis rejaga almashtirish kerak.

Yangi bazisga kiritiladigan vektorni

$$\max_{\Delta_j > 0} \Delta_j \tag{4.30}$$

shart asosida aniqlaymiz.

Masalan, $\max\limits_{\Delta_j > 0} \Delta_j = \Delta_k$ bo'lsin. Demak, yangi bazislar sistemasida P_k vektor bazis vektor sifatida qatnashishi kerak. Agar P_k vektor bazis vektorlar sistemasiga kiritilsa, u holda eski P_l – bazis vektorlardan birortasini bazisdan chiqarish kerak, chunki (4.25) sistemaning asosiy matritsasi A matritsaning rangi: $rang(A) = m$. Bazisdan chiqariladigan P_i, $i = \overline{1,m}$ vektorni aniqlash uchun $\frac{b_i}{a_{ik}}$ nisbat orqali aniqlovchi koeffitsiyent tushunchasini kiritamiz. Bazisdan chiqariladigan P_i, $i = \overline{1,m}$ vektorni

$$\min_{a_{ik} > 0} \frac{b_i}{a_{ik}} \tag{4.31}$$

shart asosida aniqlaymiz.

Masalan, $\min\limits_{a_{ik}>0}\frac{b_i}{a_{ik}}=\frac{b_l}{a_{lk}}$ bo'lsin. Demak, P_l vektor bazisdan chiqariladi. Bu holda a_{lk} element hal qiluvchi element sifatida belgilandi. Shu element joylashgan l satrdagi P_l vektor o'rniga u joylashgan k ustundagi P_k vektor bazis vektor sifatida kiritiladi. Buning uchun simpleks jadvalida quyidagi elementar almashtirishlar bajariladi.

1. l satrdagi barcha: b_l, a_{lj} elementlarni a_{lk} hal qiluvchi elementga bo'lib, bu satrda $\frac{b_l}{a_{lk}}, \frac{a_{l1}}{a_{lk}}, ..., \frac{a_{lk-1}}{a_{lk}}$, 1, $\frac{a_{lk+1}}{a_{lk}}$, ..., $\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$ elementlarni hosil qilamiz. U holda jadval quyidagi ko'rinishga keladi:

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n	a.k
			P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n	
P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}	$\frac{b_1}{a_{1k}}$
P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2k}	...	a_{2n}	$\frac{b_2}{a_{2k}}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
P_l	c_l	$\frac{b_l}{a_{lk}}$	0	0	...	0	$\frac{a_{lm+1}}{a_{lk}}$	...	1	...	$\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$	$\boxed{\frac{b_l}{a_{lk}}}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
P_m	c_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}	$\frac{b_m}{a_{mk}}$
Δ_j		Δ_0	Δ_1	Δ_1	...	Δ_m	Δ_{m+1}	...	$\boxed{\Delta_k}$	...	Δ_n	

2. P_k vektorni bazis vektorga aylantirish uchun, ya'ni jadvalni quyidagi

P_b	C_b	P_0	c_1	...	c_l	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
			P_1	...	P_l	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
P_1	c_1	b_1	1	...	$-\frac{a_{1k}}{a_{lk}}$	...	0	$\tilde{a}_{1m+1}$	...	0	...	$\tilde{a}_{1n}$
P_2	c_2	b_2	0	...	$-\frac{a_{2k}}{a_{lk}}$	...	0	$\tilde{a}_{2m+1}$	...	0	...	$\tilde{a}_{2n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_l	c_l	$\frac{b_l}{a_{lk}}$	0	...	$\frac{1}{a_{lk}}$	...	0	$\frac{a_{lm+1}}{a_{lk}}$	...	1	...	$\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_m	c_m	b_m	0	...	$-\frac{a_{mk}}{a_{lk}}$	...	1	$\tilde{a}_{mm+1}$	...	0	...	$\tilde{a}_{mn}$
Δ_j		Δ_0	Δ_1	...	$\tilde{\Delta}_l$	...	Δ_m	$\tilde{\Delta}_{m+1}$	...	$\tilde{\Delta}_k$	...	$\tilde{\Delta}_n$

ko'rinishga keltirish uchun jadvalda quyidagi elementar almashtirishlarni bajaramiz:

$$\tilde{b}_i = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik}; \quad \tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik}; \quad i \neq l. \tag{4.32}$$

Bu jarayonni barcha Δ_j lar uchun $\Delta_j \leq 0$ shart bajarilguncha davom ettiramiz. Har bir qadamda $\Delta_j \leq 0$ optimallik shartini tekshirib boramiz.

Shunday qilib quyidagi teoremalar o'rinli.

Teorema. Agar biror bir $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, 0, ..., 0)$ bazis reja uchun $\Delta_j \leq 0$, $(j = \overline{1,n})$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda bu reja optimal reja bo'ladi.

Teorema. Agar X^0 bazis rejada biror bir j uchun $\Delta_j > 0$ shart o'rinli bo'lib qolsa, u holda X^0 optimal reja bo'lmaydi va u holda shunday X_1 rejani topish mumkin bo'ladiki, uning uchun

$$Y(X_1) < Y(X^0)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Agar biror bir j uchun $\Delta_j > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lib, bu ustundagi barcha elementlar uchun $a_{ij} \leq 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ bo'lsa, u holda masalaning maqsad funksiyasi chekli ekstremumga ega bo'lmaydi.

Shuning uchun quyidagi shartlarga:

1. $\Delta_j > 0$; $\qquad$ 2. $a_{ij} \leq 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$

(4.25)-(4.27) masalaning optimal yechimga ega bo'lmaslik sharti deyiladi.

Agar CHPMda maqsad funksiyasi

$$Y = c_1x_1 + c_1x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda masalaning optimallik sharti sifatida: $\Delta_j \geq 0$, $(j = \overline{1,n})$ tengsizlikni; masalaning optimal yechimga ega bo'lmaslik sharti sifatida esa:

1. $\Delta_j > 0$; $\qquad$ 2. $a_{ij} \leq 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$

tengsizliklarni qabul qilamiz.

7-misol. Quyidagi masalani simpleks usul bilan yeching.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

$$Y = -x_1 - 2x_2 \to \min.$$

Yechish. Bu chiziqli tenglamani standartlashtirish uchun qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritamiz.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,...,5)$$

$$Y = -x_1 - 2x_2 \to \min.$$

P_b	C_b		-1	-2	0	0	0	a.k.
		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	2	-2	1	1	0	0	$\boxed{2}$
P_4	0	7	-1	2	0	1	0	$\frac{7}{2}$
P_5	0	3	1	0	0	0	1	-
Δ_j		0	1	$\boxed{2}$	0	0	0	
P_2	-2	2	-2	1	1	0	0	-
P_4	0	3	3	0	-2	1	0	$\boxed{1}$
P_5	0	3	1	0	0	0	1	3
Δ_j		-4	$\boxed{5}$	0	-2	0	0	
P_2	-2	4	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	-
P_1	-1	1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	-
P_5	0	2	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	3
Δ_j		-9	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	
P_2	-2	5	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
P_1	-1	3	1	0	0	0	1	
P_3	0	3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
Δ_j		-13	0	0	0	-1	-2	

Simpleks usulning I bosqichida bazis vektorlar sistemasiga P_3 vektor kiritilib P_2 vektor bazisdan chiqarildi, II bosqichida P_4 bazisga kiritildi va P_1 bazisdan chiqarildi. Simpleks jadval (4.32) formulalar asosida almashtirilib borildi. III bosqichda optimal yechim topildi: $X_0 = (3, 5, 3, 0, 0,)$, $Y_{\min} = -13$.

8-misol. Quyidagi masalani simpleks usul bilan yeching.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \le 3. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1,2)$$

$$Z = -x_1 \to \min.$$

Yechish. Bu chiziqli tenglamani standartlashtirish uchun qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritamiz.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,...,5)$$

$$Z = -x_1 \to \min.$$

P_b	C_b		-1	0	0	0	0	a.k.
		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	2	-2	1	1	0	0	-
P_4	0	3	-1	1	0	1	0	-
P_5	0	3	1	0	0	0	1	$\boxed{3}$
Δ_j		0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	
P_2	0	8	0	1	1	0	1	-
P_4	0	6	0	1	0	1	1	
P_1	-1	3	1	0	0	0	1	
Δ_j		-3	0	0	0	0	-1	

$$X_0 = (3, 0, 8, 6, 0,), \qquad Y_{\min} = -3.$$

Sun'iy bazis usuli. CHPM masalasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ ..., \ x_n \ge 0, \tag{4.33}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min.$$

Bu masalada tenglamalar sistemasi keltirilmagan. Shu sababli undagi tenglamalarga x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} –sun'iy o'zgaruvchilar kiritib uni kengaytirilgan sistemaga aylantiramiz. U holda quyidagi masala hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ \dots, \ x_n \geq 0, \ x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0, \qquad (4.34)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots + c_nx_n + M(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \to \min.$$

Bu yerda, M – yetarlicha katta musbat son.

Sun'iy bazis o'zgaruvchilariga mos P_{n+1}, P_{n+2}, ..., P_{n+m} vektorlar "sun'iy bazis vektorlar" deb ataladi. Berilgan (4.33) masalaning optimal yechimi quyidagi teoremaga asoslanib topiladi.

Teorema. Agar kengaytirilgan (4.33) masalaning optimal yechimida sun'iy bazis o'zgaruvchilari nolga teng bo'lsa, ya'ni: $x_{n+i} = 0 \ \ (i = \overline{1,m})$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu yechim berilgan (4.34) masalaning ham optimal yechimi bo'ladi.

Agar kengaytirilgan masalaning optimal yechimida kamida bitta sun'iy bazis o'zgaruvchi noldan farqli bo'lsa, u holda boshlang'ich masala yechimga ega bo'lmaydi.

Sun'iy bazis usuli maqsad funksiyaga jarima(penalty) termini kiritiladi qaysiki bazisga sun'iy o'zgaruvchilar kiritishga mo'ljallangan. Biz yana shartni minimallashtirish namunasidan metodni oydinlashtirish uchun foydalanamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 14 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 19 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$

Oldingidek, standart shaklga keltiramiz va sun'iy o'zgaruvchlar kiritiladi. Lekin bu holatda qo'shimcha 1 muammo bosqich tashkil qilish o'rniga, maqsad funksiya qo'yilgan shartni minimumga aylantiriladi.

$$Z' = 2x_1 + 3x_2 + Ma_1 + Ma_2 \to \min$$

Bu yerda M eng katta musbat sonni ifodalaydi. Umuman, har bir sun'iy o'zgaruvchini ifodalovchi bitta penalty termin bor. Kompyuter hisoblari uchun M programma chizig'ining yechimlari orasida vujudaga kelishi mumkin bo'lgan boshqa hamma sonlar uchun dominat yetarli katta son.

Agar M katta bo'lsa, musbat sun'iy o'zgaruvchini o'z ichiga olgan qandaydir bazis maqsad funksiya Z' qiymatini ham katta musbat songa olib boradi. Agar qandaydir bazis dastlabki chiziqli programmalash masalasining mumkin bo'lgan javobi bo'lsa, u holda o'rganilayotgan bazis o'z ichiga hech qanday sun'iy o'zgaruvchilarni olmaydi va uning maqsad qiymati kichikroq bo'ladi. Chunki sun'iy o'zgaruvchilar ular bilan katta qiymatli bog'liqlikka ega, simpleks usul agar bu mavjud bo'lsa, ularni bazisdan oxirida olib tashlaydi. Qandaydir ba'zis jarima muammosi bo'lgan yechim bo'ladi qaysiki bazis emas hamma sun'iy o'zgaruvchilar (va bundan buyog'iga nol) ham orginal muammoga mumkin bo'lgan yechim bo'ladi.

Sun'iy bazis usulida maqsad funksiya 1 muammo bosqichida maqsad funsiyaning chegarasi sifatida olinishi mumkin. Sun'iy bazis usulining maqsad funksiyasi mavjud:

$$Z' = c^T x + M\sum_i a_i$$

Bu maqsaddan foydalanishga teng:

$$\tilde{Z} = M^{-1}c^T x + \sum_i a_i$$

Chegaralarni $M \to \infty$ sifatida olish 1 maqsad bosqichini beradi. Natijada 1 muammo bosqichi ko'rinishi Sun'iy bazis usuli ko'rinishidan faqat tepa qatordan farq qiladi. Shu sababli biz simpleks usulini misollarda tezroq ko'rib chiqamiz ikki bosqich usulini tekshirishni amalga oshirishga nisbatan.

Bizning misolda, jarima (penalized) muammo uchun dastlabki bazis bilan sun'iy o'zgaruvchilar quyidagini beradi.

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	b_0
$-Z'$	2	3	0	0	M	M	0
a_1	3	2	0	0	1	0	14
a_2	2	-4	-1	0	0	1	2
x_4	4	3	0	1	0	0	19

Oldingidek, sun'iy o'zgaruvchilar uchun qisqartirilgan qiymatlar nol bo'lmaydi va muammo doimiy bazis terminida yozilishi mumkin.

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	b_0
$-Z'$	$-5M+2$	$2M+3$	M	0	0	0	$-16M$
a_1	3	2	0	0	1	0	14
a_2	$\boxed{2}$	-4	-1	0	0	1	2
x_4	4	3	0	1	0	0	19

Birinchi takrorlashda, x_1 kirayotgan o'zgaruvchi va a_2 chiqayotgan o'zgaruvchi. Ikki bosqich usulidagidek, sun'iy o'zgaruvchi bazisni tark etsa u ahamiyatsizga aylanadi va muammodan olib tashlanadi. Tayanch nuqta muvozanatlashgandan keyin (va a_2 olib tashlangandan), biz quyidagicha bazis yechim olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	b_0
$-Z'$	0	-8M+7	$-\frac{3}{2}M+1$	0	0	-11M-2
a_1	0	8	$\frac{3}{2}$	0	1	11
x_1	1	-2	$-\frac{1}{2}$	0	0	1
x_4	0	$\boxed{11}$	2	1	0	15

Ikkinchi takrorlashda, x_2 kiritilayotgan o'zgaruvchi, va x_4 chiqib ketayotgan o'zgaruvchi. Tayanch nuqta muvozanatlashgandan keyin (va a_1 ustun olib tashlangandan keyin chunki u ahamiyatsiz), biz quyidagi yangi bazis javobni olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	b_0
$-Z'$	0	0	$-\frac{M+6}{22}$	$\frac{8M-7}{11}$	0	$-\frac{M+127}{11}$
a_1	0	0	$\frac{1}{22}$	$-\frac{8}{11}$	1	$\frac{1}{11}$
x_1	1	0	$-\frac{3}{22}$	$\frac{2}{11}$	0	$\frac{41}{11}$
x_2	0	1	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	0	$\frac{15}{11}$

Uchinchi takrorlashda, x_3 kiritilayotgan o'zgaruvchi va a_1 chiqib ketayotgan o'zgaruvchi. Tayanch nuqta muvozanatlashganda keyin (va a_1 ustun olib tashlangandan keyin chunki u ahamiyatsiz), biz yangi bazis yechimni olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	b_0
$-Z'$	0	0	0	-5	-11
x_3	0	0	1	-16	2
x_1	1	0	0	-2	4
x_2	0	1	0	3	1

Joriy bazis o'z ichiga hech qanday sun'iy o'zgaruvchini olmaydi, shuning uchun bu haqiqiy muammo uchun mumkin bo'lgan maqsad. To'rtinchi takrorlashda, x_4 uchun qisqartirilgan qiymat bo'lishsiz shuning uchun u optimal bazis emas. Muvozanatlashish quyidagini beradi:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	b_0
$-Z'$	0	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{28}{3}$

x_3	0	$\frac{16}{3}$	1	0	$\frac{22}{3}$
x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{14}{3}$
x_4	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$

Bu bazis optimal. Kutilgandek, bu ikki – bosqich usuldan olingan optimal bazis bilan bir xil.

Programmalarda bajarishda penalty uchun mos qiymatni tanlash qiyin bo'lishi mumkin.

M muammoda boshqa qiymatlar uchun dominant bo'lishi uchun yetarlicha katta bo'lishi zarur, lekin u juda katta bo'lsa uni aylana bo'ylab hisoblashda jiddiy muammolar kelib chiqadi.

9-misol. Masalani sun'iy bazis usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$$

$$Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max.$$

Yechish. Masalada maqsad funksiyasiga qo'yilgan shartni minimumga aylantirib, sun'iy $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$ o'zgaruvchilar kiritamiz va uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, \ x_5 \ge 0, \ x_6 \ge 0,$$

$$Z = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + M(x_5 + x_6) \to \min.$$

Hosil bo'lgan masalani simpleks jadvaliga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz.

P_b	C_b	P_0	-5	-3	-4	1	M	M	a.k.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_5	M	3	1	3	2	2	1	0	$\boxed{1}$
P_6	M	3	2	2	1	1	0	1	$\frac{3}{2}$
Δ_j		$6M$	$3M$	$\boxed{5M}$	$3M$	$3M$	0	0	
P_2	-3	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3
P_6	M	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\boxed{\frac{3}{4}}$

Δ_j		M	$\boxed{\frac{4}{3}M}$	0	$-\frac{1}{3}M$	$-\frac{1}{3}M$	$-\frac{5}{3}M$	0	
P_2	-3	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\boxed{1}$
P_1	-5	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-
Δ_j		-6	0	0	$\boxed{3}$	-2	$-M$	$-M$	
P_3	-4	1	0	$\frac{4}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
P_1	-5	1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
Δ_j		-9	0	-4	0	-5	$-M$	$-M$	

Kengaytirilgan masalaning optimal yechimidagi sun'iy o'zgaruvchilar 0 ga teng. Shuning uchun (1-teoremaga asosan) berilgan masalaning optimal yechimi:

$$X_0(1,0,1,0), \qquad Z_{\min}=-9, \; Z_{\max}=9.$$

Aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi. Sikllanish va undan qutilish usuli (ε-usul). Agar CHPM da P_i bazis vektorlarga mos keluvchi birorta $x_i^0=0$ bo'lsa, ya'ni

$$P_0=P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_mx_m \tag{4.35}$$

yoyilmadagi x_i lardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, chiziqli programmalashtirish masalasi ***aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi*** deyiladi va P_i bazis vektorlarga mos keluvchi bazis reja esa aynigan reja bo'ladi.

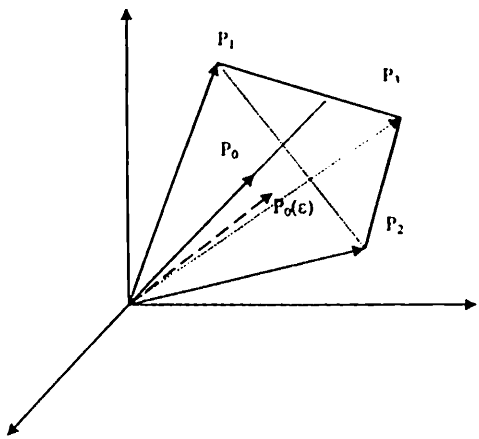
Yuqorida, simpleks usulni asoslash jarayonida chiziqli programmalashtirish masalalarini aynimagan deb faraz qilgan edik. Bu farazga ko'ra simpleks usulning har bir iteratsiyasidan so'ng chiziqli funksiyaning qiymati kamaya borishini va chekli sondagi iteratsiyadan so'ng u o'zining optimal qiymatiga erishishi mumkinligini ko'rsatgan edik.

Agar masalaning bazis rejasi aynigan reja bo'lsa,

$$\theta=\frac{b_k}{a_{lk}}=0 \tag{4.36}$$

bo'lishi mumkin. U holda bir bazis rejadan ikkinchisiga o'tganda, chiziqli funksiyaning qiymati o'zgarmaydi. Ba'zan bunday masalalarni yechish jarayonida sikllanish holati, ya'ni ma'lum sondagi iteratsiyadan so'ng oldingi iteratsiyalardan birortasiga qaytish holati ro'y berishi mumkin. Sikllanish holati ro'y bergan masalalarda optimal reja hech qachon topilmaydi. Sikllanish odatda, bazis rejadagi birdan ortiq $x_i=0$ bo'lgan holatlarda ro'y berishi mumkin. Birdan ortiq vektorlar uchun $\theta=0$ bo'lganda bazisdan chiqariladigan vektorni to'g'ri aniqlash sikllanish holatini oldini olishda katta ahamiyatga egadir. Bundan ko'rinadiki, aynigan masalalarni yechishga moslashtirilgan usullar masalaning optimal yechimini topishga ishonch bildirib bazisdan chiqariladigan vektorni tanlashning yagona yo'lini ko'rsatishi kerak.

Aynigan chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik tasvirini quyidagi rasmdan ko'rish mumkin. Bunda P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tuzilgan qavariq konusning sirtida yotibdi. Shuning uchun P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi sifatida ifodalab bo'lmaydi, lekin uni P_1 va P_2 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin. P_0 ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash uchun $P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3$ yoyilmadagi P_3 vektorning koeffitsiyenti $x_3 = 0$ bo'lishi kerak.



Agar P_3 vektorni $\varepsilon > 0$ ga siljitib P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil topgan qavariq konusning ichiga kiritsak, u holda uni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin bo'ladi. P_3 vektorni qavariq konusning ichiga siljitish uchun ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ son olib, P_1, P_2, P_3 vektorlarning

$$\varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3$$

kombinatsiyasini tuzamiz va uni masalaning

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 = P_0$$

cheklamalarining o'ng tomoniga qo'shib yozamiz:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3 = P_0(\varepsilon). \qquad (4.37)$$

Hosil bo'lgan $P_0(\varepsilon)$ vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil togan qavariq konusning ichida yotadi. Demak, P_0 ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

Xuddi shuningdek, umumiy holda berilgan masalaning

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + x_mP_m + \ldots + P_nx_n = P_0 \qquad (4.38)$$

cheklamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} &P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + x_mP_m + \ldots + P_nx_n = \\ &= P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots + \varepsilon^m P_m + \ldots + \varepsilon^n P_n = P_0(\varepsilon) \end{aligned} \qquad (4.39)$$

Faraz qilaylik, $P_1, P_2, \ldots, P_m$ bazis vektorlar bo'lib, ular B matritsani tashkil qilsin. U holda

$$\overline{X} = B^{-1}P_0 \geq 0 \qquad (4.40)$$

berilgan masalaning yechimi va

$$\overline{X}(\varepsilon) = B^{-1}P_0(\varepsilon) \geq 0 \qquad (4.41)$$

o'zgartirilgan (4.6) chegaralovchi shartli masalaning yechimi bo'ladi.

$$\overline{X}_j = B^{-1}P_j \qquad (4.42)$$

tenglik o'rinli bo'lgani uchun (4.40) ni ushbu ko'rinishda ifodalash mumkin.

$$\overline{X}(\varepsilon) = B^{-1}P_0 + \varepsilon B^{-1}P_1 + \varepsilon^2 B^{-1}P_2 + \ldots + \varepsilon^m B^{-1}P_m + \ldots + \varepsilon^n B^{-1}P_n =$$
$$= \overline{X} + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \ldots + \varepsilon^m X_m + \ldots + \varepsilon^n X_n. \qquad (4.43)$$

Demak, sistemaning o'ng tomoni $\overline{b}_i(\varepsilon)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{b}_i(\varepsilon) = \overline{b}_i + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j a_{ij} \qquad (4.44)$$

$$\overline{b}_i(\varepsilon) = \overline{b}_i + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n} \varepsilon^j a_{ij} \qquad (4.45)$$

ε kichik son bo'lgani uchun $\overline{b}_i(\varepsilon) > 0$.

Simpleks usulini qo'llash jarayonida bazisdan chiqariladigan P_l vektorni aniqlash uchun

$$\theta_0 = \frac{b_l(\varepsilon)}{a_{lk}} = \min_i \frac{\overline{b}_i(\varepsilon)}{a_{ik}} = \frac{b_l + \varepsilon^i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} \varepsilon^j a_{ij}}{a_{lk}} > 0 \qquad (4.46)$$

formuladan foydalanamiz. Farazga asosan $\dfrac{b_i(\varepsilon)}{a_{ik}}$ nisbat $i = l$ da minimumga erishadi.

Agar

$$\theta_0 = \min_i \frac{b_i(\varepsilon)}{a_{ik}}, \qquad (a_{ik} > 0)$$

qiymat, $i = l$ indeks uchun o'rinli bo'lsa, u holda P_l bazisdan chiqariladi.

Bazisga kiritiladigan P_k tanlangandan so'ng, simpleks jadval ma'lum yo'l bilan almashtiriladi. Natijada topilgan yangi $\overline{X}(\varepsilon)$ bazis reja yetarli darajada kichik ε uchun aynimagan reja bo'ladi.

Amalda aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi juda kam uchraydi. Quyida biz keltiradigan masala amerika matematigi Bil tomonidan tuzilgan.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_7 = 1. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7},$$

$$Y = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \to \min.$$

Bu masala aynigan masala bo'lib, uni yuqorida keltirilgan "to'g'rilash" usulini qo'llamasak yechganda sikllanish holati ro'y beradi. Simpleks usulning 7-iteratsiyasidan so'ng 2-iteratsiyaga qaytish holati ro'y beradi. Agar yuqorida ko'rilgan "to'g'rilash" usulini qo'llamasak, bu sikllanish holati cheksiz ravishda takrorlanishi mumkin, demak, masalaning optimal yechimini topish imkoniyati bo'lmaydi. Endi masalani "to'g'rilash" usulini qo'llab yechamiz. Eng avval berilgan masaladagi sistemani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 + \frac{1}{4}\varepsilon - 60\varepsilon^2, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 + \frac{1}{2}\varepsilon - 90\varepsilon^2, \\ x_3 + x_7 = 1. \end{cases}$$

Bu yerda ε kichik musbat son bo'lib, uni shunday tanlash mumkinki, natijada tenglamalarning o'ng tomoniga ε ning faqat birinchi va ikkinchi darajasini qo'shish yetarli bo'lsin. Masalani simpleks jadvalga joylashtirib yechamiz:

I.

P_b	C_b	P_0	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	0	$\frac{\varepsilon}{4} - 60\varepsilon^2$	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0
P_6	0	$\frac{\varepsilon}{2} - 90\varepsilon^2$	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1

II.

P_1	$-\frac{3}{4}$	$\varepsilon-240\varepsilon^2$	1	-240	$-\frac{4}{25}$	36	4	0	0
P_6	0	$30\varepsilon^2$	0	30	$\frac{3}{50}$	-15	-2	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4}+160\varepsilon^2$	0	30	$\frac{7}{50}$	-33	-3	0	0

III.

P_1	$-\frac{3}{4}$	ε	1	40	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0
P_2	150	ε^2	0	1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4}+150\varepsilon^2$	0	0	$\frac{2}{25}$	-18	-1	-1	0

IV.

P_1	$-\frac{3}{4}$	$\varepsilon-160\varepsilon^2$	1	-160	0	-4	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	0
P_3	$-\frac{1}{50}$	$500\varepsilon^2$	0	500	1	-250	$-\frac{100}{3}$	$\frac{50}{3}$	0
P_7	0	$1-500\varepsilon^2$	0	-500	0	250	$\frac{100}{3}$	$-\frac{50}{3}$	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4}+110\varepsilon^2$	0	-40	0	2	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0

V.

P_1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{2}{125}+\varepsilon-168\varepsilon^2$	1	-168	0	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{125}$
P_3	$-\frac{1}{50}$	1	0	0	1	0	0	0	1
P_4	6	$\frac{1}{250}-2\varepsilon^2$	0	-2	0	1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{250}$
		$-\frac{1}{125}-\frac{3\varepsilon}{4}-114\varepsilon^2$	0	-36	0	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{11}{5}$	$\frac{3}{125}$

VI.

P_1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{125}+\varepsilon-180\varepsilon^2$	1	-180	0	6	0	2	$\frac{1}{25}$
P_3	$-\frac{1}{50}$	$500\varepsilon^2+1$	0	0	1	0	0	0	1
P_5	0	$\frac{3}{100}-15\varepsilon^2$	0	-15	0	$\frac{15}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{100}$
		$135\varepsilon^2-\frac{1}{20}-\frac{3\varepsilon}{4}$	0	-15	0	$-\frac{21}{5}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{100}$

Shunday qilib, yuqoridagi "to'g'irlash" usulini qo'llab masalani yechganda 6-bosqichda optimal yechim topiladi.

$$X(\varepsilon)=\left(180\varepsilon^2+\varepsilon+\frac{1}{25};\ 0;\ 500\varepsilon^2+1;\ 0;\ \frac{3}{100}-15\varepsilon^2\right),$$

$$Y_{\min}(\varepsilon)=-135\varepsilon^2-\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{1}{20}.$$

Berilgan masalani yechimini topish uchun $\varepsilon=0$ deb qabul qilamiz. Javob:

$$X_0=\left(\frac{1}{25};\ 0;\ 1;\ 0;\ \frac{3}{100}\right),\qquad Y_{\min}=-\frac{1}{20}.$$

4.4. Chiziqli programmalash masalasida ikkilanish nazariyasi

Quyidagi CHPMni qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n\le b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m. \end{cases} \tag{4.47}$$

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max \tag{4.48}$$

Bu masala matritsa shaklida quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} &AX\le B, \\ &F=CX\to\max. \end{aligned} \tag{4.49}$$

7-tarif.

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m=c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1l}y_1+a_{2l}y_2+\ldots+a_{ml}y_m=c_l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_n=c_n. \end{cases} \tag{4.50}$$

$$y_i\ge 0,\quad i=\overline{1,m} \tag{4.51}$$

$$\tilde{F} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min \quad (4.52)$$

masala (4.47), (4.48) masalaga ikkilangan masala deyiladi.

U holda (4.49) masalaga ikkilangan masala quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} &A^T Y = C^T, \\ &y_i \geq 0, \ i = \overline{1,n}, \\ &\tilde{F} = B^T Y \to \min. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Bu yerda $Y^T = (y_1 \ y_2 \ ... \ y_m)$, $C = (c_1 \ c_2 \ ... c_n)$.

Yuqoridagidan foydalanib ikkilangan masalani qurish qoidasini keltiramiz:

1. Berilgan masala koeffitsiyentlaridan tashkil topgan asosiy matritsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda ikkilangan masalaning asosiy matritsasi

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lib, A matritsaga transponirlangan bo'ladi.

2. Ikkilangan masaladagi noma'lumlar soni berilgan masaladagi cheklamalar soniga teng. Ikkilangan masaladagi cheklamalar soni esa berilgan masaladagi noma'lumlar soniga teng bo'ladi.

3. Ikkilangan masalaning maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari berilgan masalaning ozod hadlardan iborat bo'ladi. Ikkilangan masalaning ozod hadlari esa berilgan masalaning maqsad funksiyasi koeffitsiyentlaridan iborat bo'ladi.

4. Agar berilgan masalada $x_j \geq 0$ bo'lsa, u holda ikkilangan masaladagi unga mos $j-$cheklamaga $\geq$ ko'rinishdagi tengsizlik qo'yiladi. Agarda x_j noma'lumning ishorasi noaniq bo'lsa, u holda ikkilangan masaladagi $j-$cheklamaga tenglik qo'yiladi.

5. Agar berilgan masaladagi $i-$cheklama tengsizlikdan iborat bo'lsa, u holda ikkilangan masaladagi bu cheklamaga mos noma'lumning ishorasi $y_i \geq 0$ bo'ladi. Agarda berilgah masaladagi $i-$cheklama tenglikdan iborat bo'lsa, u holda ikkilangan masaladagi bu cheklamaga mos y_i noma'lumning ishorasi noaniq bo'ladi.

Har qanday chiziqli programmalash masalasi uchun ikkilangan masala mavjud va uni berilgan masaladagi maqsad funksiya va noma'lumlarga qo'yilgan cheklamalar orqali to'la aniqlash mumkin.

Biz quyida CHPMlarining ba'zilariga ikkilangan masalani qurish qoidasi bilan tanishib chiqamiz.

Standart CHPM berilgan bo'lsin:

$$\begin{gathered} AX \le B, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ F = CX \to \max. \end{gathered} \tag{4.54}$$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -E \end{pmatrix}$; $\bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$ belgilashlar kiritamiz, bu yerda $E - n \times n$ o'lchovli birlik matritsa, $0 - n$ o'lchovli nol matritsa. U holda (4.54) masalani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{gathered} \bar{A}X \le \bar{B}, \\ Y = CX \to \max. \end{gathered} \tag{4.55}$$

Bu masalaning ko'rinishi (4.49) masala bilan mos tushadi. Demak, ikkilangan masalani yozoshda ta'rifdan foydalanish mumkin. Shunday qilib, ta'rifga asosan (4.55) masala uchun ikkilangan masala quyidagicha yoziladi:

$$\begin{gathered} \bar{A}^T P = C^T, \\ p_i \ge 0, \; i = \overline{1, n+m}, \\ \tilde{F} = \bar{B}^T P \to \min. \end{gathered} \tag{4.56}$$

Bu yerda, $P^T = (p_1 \; p_2 \; ... \; p_{n+m}) = (Y^T, Z^T) = (y_1 \; y_2 \; ... \; y_m \; z_1 \; z_2 \; ... \; z_n)$, $\bar{A}^T = (A^T, -E)$ ekanligini hisobga olib, oldingi belgilashlarga qaytsak (4.56) quyidagicha yoziladi:

$$\begin{gathered} A^T Y - Z = C^T, \\ y_i \ge 0, \; z_j \ge 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}, \\ \tilde{F} = B^T Y \to \min. \end{gathered} \tag{4.57}$$

$z_j \ge 0$ bo'lgani uchun $A^T Y - Z = C$ tenglik $A^T Y \ge C$ bo'lgandagina o'rinli bo'ladi. Shuning uchun (4.54) masalaga ikkilangan masala

$$\begin{gathered} A^T Y \ge C^T, \\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \\ \tilde{F} = B^T Y \to \min \end{gathered} \tag{4.58}$$

ko'rinishda bo'ladi.

CHPM quyidagi berilgan bo'lsin:

$$\begin{gathered} AX = B, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ F = CX \to \max. \end{gathered} \tag{4.59}$$

Malumki, $q = k \Leftrightarrow \begin{cases} q \le k, \\ q \ge k. \end{cases}$ U holda (4.59) masalani quyidagicha yozish mumkin:

$$AX \le B,\ -AX \le -B,$$
$$x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,n}, \qquad (4.60)$$
$$F = CX \to \max.$$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B \\ -B \end{pmatrix}$ belgilashlar yordamida (4.60) masalani quyidagicha yozib olamiz:

$$\tilde{A}X \le \tilde{B},$$
$$x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,n}, \qquad (4.61)$$
$$F = CX \to \max.$$

(4.61) masalaga ikkilangan masalani, (4.58) ga asosan, yozamiz:

$$\tilde{A}^T S \ge C^T,$$
$$s_i \ge 0,\quad i = \overline{1,m},$$
$$\tilde{F} = \tilde{B}^T S \to \min.$$

Bu yerda, $S^T = (s_1\ s_2\ \dots\ s_{2m}) = (P^T, Q^T) = (p_1\ p_2\ \dots\ p_m\ q_1\ q_2\ \dots\ q_m)$.

Oldingi belgilashlarga qaytamiz, u holda

$$A^T P - A^T Q \ge C^T,$$
$$p_i \ge 0,\ q_i \ge 0,\quad i = \overline{1,m},$$
$$\tilde{F} = B^T P - B^T Q \to \min.$$

$Y = P - Q$ belgilashdan so‘ng

$$A^T Y \ge C^T, \qquad (4.62)$$
$$\tilde{F} = B^T Y \to \min$$

masalani hosil qilamiz. Bu yerda Y ikkita matritsaning ayirmasi bo‘lgani uchun uning ishorasi noaniq bo‘ladi.

Berilgan masala va unga ikkilangan masala birgalikda ***o‘zaro qo‘shma masalalar*** deb ataladi. Agar qo‘shma masalalardan birortasi yechimga ega bo‘lsa, ularning ikkinchisi ham optimal yechimga ega bo‘ladi.

O‘zaro qo‘shma masalalarni ko‘z oldiga keltirish va ularni iqtisodiy ma’nolarini tahlil qilish uchun quyidagi ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasini ko‘ramiz.

$$AX \le B,$$
$$x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,n}, \qquad (4.63)$$
$$F = CX \to \max.$$

Yuqoridagilardan xulosa qilib, o‘zaro qo‘shma masalalarning matematik modellarini quyidagi korinishda ifodalash mumkin:

Simmetrik bo'lmagan qo'shma masalalar		
	Berilgan masala	Ikkilangan masala
I	$AX = B,$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \max.$	$A^T Y \ge C^T,$ $\bar{F} = B^T Y \to \min.$
II	$AX = B,$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \min.$	$A^T Y \le C^T,$ $\bar{F} = B^T Y \to \max.$

	Berilgan masala	Ikkilangan masala
I	$AX \le B,$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \max.$	$A^T Y \ge C^T,$ $y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,m},$ $\bar{F} = B^T Y \to \min.$
II	$AX \ge B,$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \min.$	$A^T Y \le C^T,$ $y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,m},$ $\bar{F} = B^T Y \to \max.$

10-misol. Berilgan masalaga ikkilangan masalani tuzing.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$
$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max.$$

Yechish. Masalada barcha cheklamalar "≤" ko'rinishdagi tengsizliklardan iborat. Demak, berilgan masalaga simmetrik bo'lgan qo'shma masala 4-ko'rinishda tuziladi. Natijada quyidagi simmetrik qo'shma masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \ge 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 3, \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0,$$
$$F = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \to \min.$$

11-misol. Berilgan masalaga ikkilangan masala tuzing.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 13, \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$

$$Z = 4x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max.$$

Yechish. Berilgan masaladagi ikkinchi cheklama tenglamadan iborat, birinchi va uchinchi cheklamalar esa tengsizliklardan iborat. Shuning uchun qo'shma masalani tuzishda yuqorida keltirilgan qoidaga rioya qilamiz va quyidagi masalaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \ge 4, \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 1, \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \ge 4, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0,\ y_3 \ge 0,$$

$$F = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \to \min.$$

Ikkilangan masalalar yechimlari orasida mavjud bo'lgan bog'lanishni ikkilanish nazariyasining asosiy tengsizligi va birinchi teoremasi orqali aniqlash mumkin.

Ikkilanish nazariyasida berilgan masalaning ixtiyoriy X joiz rejasi, hamda ikkilangan masalaning ixtiyoriy Y joiz rejasi uchun

$$F(X) \le \tilde{F}(Y)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bunday tengsizlik ikkilanish nazariyasining asosiy tengsizligi deb ataladi.

Agar X^* va Y^* joiz rejalar uchun

$$F(X^*) = \tilde{F}(Y^*)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu joiz rejalar mos ravishda berilgan va ikkilangan masalaning optimal rejasi bo'ladi.

Bu tengsizlik ixtiyoriy joiz ishlab chiqarish rejasi, hamda xomashyolarning ixtiyoriy joiz baholari uchun ishlab chiqarilgan mahsulot bahosi xomashyolar bahosidan oshmasligini ko'rsatadi.

Ikkilanish nazariyasining asosini ikki teorema tashkil etadi. Ulardan biri ***ikkilanish teoremasi***, ikkinchisi esa ***muvozanatlik teoremasi*** deb ataladi.

Muvozanatlik teoremasidan ikkilangan masalaning iqtisodiy tahlilida foydalanamiz, shu sababli biz bu teoremani keyinchalik keltiramiz.

Ikkilanish teoremasini keltirish uchun berilgan va ikkilangan masalalar orasidagi bazi bog'lanishlarni aniqlab olamiz.

8-tarif. $X = \{x | Ax \le B\}$ to'plam (4.49) masalaning mumkin bo'lgan yechimlar to'plami deyiladi.

9-tarif. Agar (4.49) masalaning mumkin bo'lgan yechimlar to'plami $X=\{x|Ax\le B\}$ bo'sh bo'lmasa, u holda masala birgalikda deyiladi.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz qabul qilamiz:

Teorema (ikkilanish teoremasi). Agar (4.49) va (4.53) o'zaro qo'shma masalalarning har biri birgalikda bo'lsa, u holda ularning ikkalasi ham yechimga ega bo'ladi, hamda bu masalalardagi maqsad funksiyalarning ekstremal qiymatlari o'zaro teng bo'ladi, yani $F_{min}(X^*)=\bar{F}_{max}(Y^*)$.

Bu teoremadan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

Teorema. Agar o'zaro ikkilangan masalalardan biri yechimga ega bo'lsa, u holda ikkinchisi ham yechimga ega bo'ladi.

Teorema. Agar o'zaro ikkilangan masalalardan biri birgalikda bo'lib, ikkinchisi esa birgalikda bo'lmasa, u holda birinchi masala o'zining yechimlar to'plamida chegaralanmagan bo'ladi.

Bu teoremalar ikkilangan masalalarda quyidagi holatlar bo'lishi mumkinligini ko'rsatadi:

1. Quyidagi ikkala masala ham birgalikda (ikkalasi ham yechimga ega).

$\begin{cases}2x_1+x_2\le 4,\\ x_1+2x_2\le 4,\end{cases}$ $F=x_1+x_2\to\max.$ $X^*=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$	$\begin{cases}2y_1+y_2=1,\\ y_1+2y_2=1,\end{cases}$ $\bar{F}=4y_1+4y_2\to\min.$ $Y^*=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

2. Quyidagi ikkala masala ham birgalikda emas.

$\begin{cases}x_1-x_2\le 3,\\ -x_1+x_2\le -4,\end{cases}$ $F=x_1+3x_2\to\max.$ $X=\varnothing$	$\begin{cases}y_1-y_2=1,\\ -y_1+y_2=3,\end{cases}$ $\bar{F}=3y_1-4y_2\to\min.$ $X=\varnothing$

3. Quyidagi masalardan biri birgalikda, ikkinchisi birgalikda emas.

$\{x_1-x_2\le 1,$ $F=x_1\to\max.$ Masala birgalikda	$\begin{cases}y_1=1,\\ -y_1=1,\end{cases}$ $\bar{F}=y_1\to\min.$ $Y=\varnothing$

Agar berilgan masala yechimga ega bo‘lsa, u holda ikkilangan masalaning yechimi

$$Y^0 = C^0 B^{-1}$$

formula orqali topiladi.

Xuddi shuningdek, agar ikkilangan masala optimal yechimga ega bo‘lsa, u holda berilgan masalaning optimal yechimi

$$X^0 = B^{-1} B^0$$

formula orqali topiladi.

Bu formulalarda:

C^0 – simpleks jadvalning oxirgi qadamidagi C_b vektor;

B^0 – ikkilangan masala simpleks jadvalining oxirgi qadamidagi B vektor;

B^{-1} – matritsani aniqlash uchun

$$AX \le B,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$$

$$F = CX \to \max.$$

masala simpleks jadvalining oxirgi qadamini yozamiz:

P_b	C_b	(X^0)	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
		P_0	P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_l	c_l	b_l	0	0	...	0	a_{lm+1}	...	a_{lk}	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_m	c_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}

P_k vektorni $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, 0, ..., 0)$ $(P_0 = (b_1, b_2, ..., b_m)$ optimal yechim bazislari $P_1, P_2, ..., P_m$ bo‘yicha yoyilmasini yozamiz

$$P_k = x_{1k} P_1 + x_{2k} P_2 + ... + x_{mk} P_m, \quad k = \overline{0,n}.$$

Bu yoyilmani quyidagicha yozish mumkin:

$$P_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \dots \\ x_{mk} \end{pmatrix} = DX_k.$$

D matritsaga teskari D^{-1} matritsani B^{-1} bilan belgilaymiz, yani $D^{-1} \equiv B^{-1}$. U holda $B^0 = P_0$; $C^0 = C_b$.

12-misol. Berilgan masala va unga ikkilangan masalaning yechimini toping:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6},$$

$$F = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \rightarrow \min .$$

Yechish. Berilgan masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz:

P_b	C_b	P_0	0	1	-3	0	2	0	a.k.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	0	7	1	3	-1	0	2	0	
P_4	0	12	0	-2	4	1	0	0	
P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1	$\boxed{10/3}$
Δ_j		0	0	-1	$\boxed{3}$	0	-2	0	
P_1	0	10	1	5/2	0	1/4	2	0	$\boxed{4}$
P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0	
P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1	
Δ_j		-9	0	$\boxed{1/2}$	0	-3/4	-2	0	
P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0	
P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0	
P_6	0	11	1	0	0	-1/2	10	1	
Δ_j		-11	-1/5	0	0	-4/5	-7/5	0	

III bosqichda optimal yechimga ega bo'lamiz: $X^0 = (0,\ 4,\ 5,\ 0,\ 0,\ 11)$, $F_{\min} = -11$.

$$C^0 = (1, -3, 0), \quad B^0 = (4, 5, 11), \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix};$$

$$Y^0 = C^0 B^{-1} = (1 \quad -3 \quad 0)\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{5} \quad -\frac{4}{5} \quad 0\right).$$

Keltirilgan ikkilanish nazariyasining 1-teoremasi iqtisodiy nuqtai nazardan shunday talqin qilinadi: agar tashqaridan belgilangan c_j bahoda sotilgan mahsulotning pul miqdori y_i ichki bahoda o'lchangan xarajatlar (xomashyolar) miqdoriga teng bo'lsa, u holda mahsulotning ishlab chiqarish rejasi, hamda xomashyolarning baholari optimal bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, ikkilangan masaladagi noma'lumlar (ularni ikkilangan baholar deb ataymiz) sarf qilingan xarajatlar va ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul miqdorlarini o'zaro teng bo'lishini ta'minlovchi vosita bo'lib xizmat qiladi.

Iqtisodiy masalalarning yechimlarini tahlil qilish. Ma'lumki, chiziqli programmalash usullari jumladan, simpleks usul iqtisodiy masalalarning eng yaxshi (optimal) yechimini topishga yordam beradi.

Lekin biz uchun buning o'zi kifoya emas. Optimal yechim topilgandan so'ng iqtisodiy ob'ektlar (zavod, fabrika, firma) boshqaruvchilari oldida quyidagiga o'xshagan masalalarni yechishga to'g'ri keladi:

1. Xomashyolarning ba'zilarini oshirib, ba'zilarini qisqartirib sarf qilinsa optimal yechim qanday o'zgaradi?

2. Optimal yechimni o'zgartirmasdan xomashyolar sarfini qanday darajaga o'zgartirish (kamaytirish) mumkin?

3. Mahsulotga bo'lgan talab bir birlikka kamayganda (oshganda) optimal yechim qanday o'zgaradi?

Shunga o'xshash boshqa muammolarni hal qilishda ikkilanish nazariyasi teoremalaridan foydalaniladi. Bunda ikkilanish nazariyasining quyidagi teoremalariga asoslaniladi. Quyidagi o'zaro qo'shma masalalarni qaraymiz:

Berilgan masala:

$$\begin{aligned} &AX \le B, \\ &F = CX \to \max. \end{aligned} \qquad (4.64)$$

Ikkilangan masala:

$$\begin{aligned} &A^T Y = C^T, \\ &y_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}, \\ &\tilde{F} = B^T Y \to \min. \end{aligned} \qquad (4.65)$$

Teorema (muvozanatlik teoremasi). $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ berilgan masalaning, $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ ikkilangan masalaning optimal yechimi bo'lsin.

Agar $y_i^* > 0$ bo'lsa, u holda

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* = b_i. \qquad (4.66)$$

Ikkilanish va muvozanatlik teoremalaridan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

Teorema. $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ (4.64) berilgan masalaning, $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ (4.65) ikkilangan masalaning joiz yechimi bo'lsin.

Agar $y_i^* > 0$ tengsizlik bajarilganda

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* = b_i \qquad (4.67)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda X^*, Y^* mos ravishda (4.64) va (4.65) masalalrning optimal yechimlari bo'ladi.

Ikkilanish teoremalari CHPM ning standart, kanonik va boshqa turdagi masalalari uchun ham o'rinli. Masalan, muvozanatlik teoremasini standart CHPM:

Berilgan masala:

$$\begin{aligned} &AX \le B, \\ &x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ &F = CX \to \max. \end{aligned} \qquad (4.68)$$

Ikkilangan masala:

$$\begin{aligned} &A^T Y \ge C^T, \\ &y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \\ &\bar{F} = B^T Y \to \min \end{aligned} \qquad (4.69)$$

uchun keltiramiz.

Teorema. $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ (4.68) berilgan masalaning, $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ (4.69) ikkilangan masalaning optimal yechimi bo'lsin. U holda, agar $y_i^* > 0$ bo'lsa,

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* = b_i. \qquad (4.70)$$

Agar $x_j^* > 0$ bo'lsa,

$$a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \ldots + a_{mj}y_m^* = c_j. \qquad (4.71)$$

Bu shartlarni quyidagicha talqin qilish mumkin: agar birinchi masala yechimidagi noma'lum musbat qiymatga ega bo'lsa, u holda ikkinchi masalada tegishli shartlar optimal rejada tenglikka aylanadi.

Bundan ko'rinadiki: optimal yechimning ikkilangan bahosi – resurslar tanqisligi darajasining o'lchovidir. Mahsulot ishlab chiqarishda to'la ishlatiladigan xomashyo "tanqis (defitsit) xomashyo" deyiladi. Bunday xomashyoni oshirib sarf ish korxonada mahsulot ishlab chiqarish darajasini oshiradi. Mahsulot ishlab chiqarishda to'la ishlatilmaydigan xomashyo "notanqis (kamyob bo'lmagan) xomashyo" hisoblanadi. Bunday xomashyolarni ikkilangan bahosi nolga teng bo'ladi. Ularning miqdorini oshirish ishlab chiqarish rejasini oshirishga ta'sir qilmaydi.

13-misol. Deylik, korxonada bir xil mahsulotni 3 ta texnologiya asosida ishlab chiqarilsin. Har bir texnologiyaga bir birlik vaqt ichida sarf qilinadigan xomashyolar miqdori, ularning zaxirasi, har bir texnologiyaning unumdorligi quyidagi jadvalda keltirilgan. Har bir texnologiya bo'yicha korxonaning ishlash vaqtini shunday topish kerakki, natijada korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlarning miqdori maksimal bo'lsin.

Resurslar	**Texnologiyalar**			**Zaxira**
	T_1	T_2	T_3	
Ish kuchi (ishchi/soat)	15	20	25	1200
Birlamchi xomashyo (t)	2	3	2,5	150
Elektroenergiya (Kvt/ch)	35	60	60	3000
Texnologiyaning unumdorligi	300	250	450	
Texnologiyalarni ishlatish rejalari	x_1	x_2	x_3	Z→max.

Masalaning matematik modeli:

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \le 150, \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 3000. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,3}),$$

$$Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 \to \max.$$

Masalani simpleks usuli bilan yechamiz.

X_b	C_b	B	300	250	450	0	0	0	a.k.
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_4	0	1200	15	20	25	1	0	0	$\boxed{48}$
X_5	0	150	2	3	2,5	0	1	0	60
X_6	0	3000	35	60	60	0	0	1	50
Δ_i		0	-300	-250	$\boxed{-450}$	0	0	0	
X_3	450	48	0,6	0,8	1	0,04	0	0	80
X_5	0	30	0,5	1	0	-0,1	1	0	$\boxed{60}$
X_6	0	120	-1	12	0	-2,4	0	1	-
Δ_j		21600	$\boxed{-30}$	110	0	18	0	0	
X_3	450	12	0	-0,4	1	0,16	-1,2	0	
X_1	300	60	1	2	0	-0,2	2	0	
X_6	0	180	0	14	0	-2,6	2	1	
Δ_i		23400	0	170	0	12	60	0	

Jadvaldan ko'rinadiki, $X^* = (60, 0, 12, 0, 0, 180)$, $Z(X^*) = 23400$.

Jumladan T_1 texnologiyani 60 soat, T_3 texnologiyani 12 soat qo'llash kerak. T_2 texnologiyani esa umuman qo'llamaslik kerak. Ikkilangan masalaning yechimi: $Y^* = (12, 60, 0)$, $\tilde{Z}(Y^*) = 23400$.

Masalaning yechimidan ko'rinadiki, 1-va 2-resurslar (ish kuchi va birlamchi xomashyo) to'la ishlatiladi. Demak, ular kamyob resurslardir. 3-resurs (elektroenergiya) kamyob emas.

Berilgan masala yechimini uning cheklamalariga qo'yganda 1-va 2-shartlar tenglikka aylanadi.

3-shart qat'iy tengsizlikka aylanadi.

(4.68) va (4.69) masala misolida ikkilanish nazariyasining ba'zi tatbiqlarini ko'rib chiqamiz. Buning uchun quyidagicha belgilash kiritamiz: $d = F_{\max} = \tilde{F}_{\min}$. Biz d ning qiymati B^T vektorga bog'liqligini aniqlaymiz. Shu maqsadda $d = \tilde{F}(B^T)$ deb qaraymiz.

$\tilde{F}(B^T)$ funksiysa quyidagi xossalarga ega:

1. $\tilde{F}(B^T)$ –bir jinsli, ya'ni $\tilde{F}(\lambda B^T) = \lambda \tilde{F}(B^T)$, $\lambda \geq 0$;
2. $\tilde{F}(B^T)$ funksiyaning aniqlanish sohasida botiq.

Qavariq funksiyalar nazariyasidan ma'lumki botiq funksiya aniqlanish sohasining ichida uzluksiz. Demak, $\tilde{F}(B^T)$ funksiya ham aniqlanish sohasida uzluksiz.

$\tilde{F}(B^T)$ funksiyaning differensiallanuvchanligi ikkilangan masala yechimlarining strukturasiga bog'liq.

Teorema. Agar ikkilangan masala yagona Y^* yechimga ega bo'lsa, u holda $\tilde{F}(B^T)$ funksiya B^T nuqtada differensialanuvchi bo'lib,

$$\frac{\partial \tilde{F}(B^T)}{\partial b_i} = y_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agarda ikkilangan masala yechimi yagona bo'lmasa, u holda yuqoridagiga o'xshash tasdiqni keltirish qiyinroq. Ammo bu holda ham yechimlar to'plamining ko'pyog'ida chetki nuqtalar yagona $\tilde{F}(B^T)$ funksiyaning differensial xarakteristikalari bo'lib qoladi.

Quyidagi ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi yechimini tahlil qilamiz.

14-misol. 3 ta A, B, C, mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 3 xil xomashyolar (resurslar) ishlatilsin, I tur xomashyoning zaxirasi 180 kg, II tur xomashyoning zaxirasi 210 kg va III tur xomashyoning zaxirasi 244 kg bo'lsin. Har bir mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan turli xomashyoning miqdori (normasi) va mahsulot birligining bahosi (narxi) quyidagi jadvalga joylashtirilgan. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar pul qiymatini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini toping.

Xomashyo / Mahsulot	I	II	III	Mahsulot birligi bahosi (p.b.)
A	4	3	1	10
B	2	1	2	14
C	1	3	5	12
Xomashyo zaxirasi (kg)	180	210	244	

Bu masala bor resurslardan optimal foydalanish masalasi bo'lib, uning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,3}),$$

$$Z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max.$$

Bu masalaga ikkilangan masalani tuzamiz.

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 12. \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \qquad (i = \overline{1,3}),$$

$$F = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to \min.$$

Berilgan masalani kanonik ko'rinishga keltiramiz va simpleks jadvalga joylashtirib uni simpleks usul bilan yechamiz.

X_b	C_b	10	14	12	0	0	0	X_0
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_4	0	4	2	1	1	0	0	$\boxed{180}$
X_5	0	3	1	3	0	1	0	210
X_6	0	1	2	5	0	0	1	244
		-10	$\boxed{-14}$	-12	0	0	0	
X_2	14	2	1	1/2	1/2	0	0	90
X_5	0	1	0	5/2	-1/2	1	0	120
X_6	0	-3	0	4	-1	0	1	$\boxed{64}$
		18	0	$\boxed{-5}$	7	0	0	1260
X_1	14	19/8	1	0	5/8	0	-1/8	82
X_5	0	23/8	0	0	1/8	1	-5/8	80
X_3	12	-3/4	0	1	-1/4	0	1/4	16
		57/4	0	0	23/4	0	5/4	1340

Optimal yechim berilgan masala uchun $X^* = (0,\ 82,\ 16)$, $Z(X^*) = 1340$;
ikkilangan masala uchun $Y^* = \left(\frac{23}{4},\ 0,\ \frac{5}{4}\right)$, $F(Y^*) = 1340$.

Endi berilgan masala yechimini tahlil qilamiz.

Ikkilangan masala yechimida $y_1^* = \frac{23}{4}$, $y_3^* = \frac{5}{4}$. Demak, 3-teoremaga asosan I va III tur xomashyolar to'la ishlatilgan. Chunki, bu yerda

$$4\cdot 0 + 2\cdot 82 + 16 = 180, \qquad 0 + 2\cdot 82 + 5\cdot 16 = 244.$$

Shu sababli bu xomashyolar kamyob hisoblanadi. $y_2^* = 0$. Demak, II tur xomashyo to'la ishlatilmagan. Shu sababli bu xomashyo kamyob emas.

Ikkilangan masalaning yechimi "shartli optimal yechim" deyiladi. Ular yordamida xomashyolar bir birlik ortiqcha sarf qilinganda maqsad funksiyasining qiymati, ya'ni daromad qanchaga o'zgarishi ko'rsatiladi.

Masalan, 1-tur resursni 1 kg ortiqcha sarf qilish natijasida maqsad funksiyaning qiymati 5,75 birlikka oshadi.

Agar 1-tur resursdan ishlab chiqarishda 1 kg ortiqcha sarf qilinsa, uning ishlab chiqarish rejasi o'zgaradi. Bu yangi rejaga muvofiq ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul miqdori 5,75 ko'proq bo'ladi. Jadvaldagi x_4 ustunga qarab quyidagilarni aniqlaymiz. Yangi rejada B mahsulotni ishlab chiqarish $\frac{5}{8}$ birlikka oshadi va C mahsulotni ishlab chiqarish $\frac{1}{4}$ birlikka kamayadi. Buning natijasida 2-tur xomashyoni sarf qilish $\frac{1}{8}$ birlikka kamayadi.

Xuddi shuningdek, x_6 ustunga qaraymiz. 3-tur xomashyo xarajatini 1 birlikka oshirib sarf qilish natijasida yangi reja topiladi va bu rejaga ko'ra ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul qiymati 1,25 birlikka oshadi va daromad 1340+1,25=1341,25 birlikni tashkil qiladi. Bu natija B mahsulot ishlab chiqarishni $\frac{1}{8}$ birlikka kamaytirish, C mahsulot ishlab chiqarishni $\frac{1}{4}$ birlikka oshirish hisobiga bo'ladi. Bu holda 2 tur resurs $\frac{5}{8}$ kg. ko'proq sarf qilinadi.

Ikkilangan simpleks usuli. Shu paytgacha chiziqli programmalashtirish masalalarining optimal yechimini topish uchun foydalangan simpleks usulini biz boshlang'ich simpleks usuli deb ataymiz. Ma'lumki boshlang'ich simpleks usulida kanonik masala uchun optimallik sharti $\Delta_j \geq 0$ ko'rinishda bo'lib, undan ikkilangan masalaninng optimal yechimini aniqlashda ham foydalanish mumkin edi.

Biz chiziqli programmalashtirish masalalarining optimal yechimini aniqlashda yanada umumiy usul ikkilangan simpleks usuli bilan tanishib chiqamiz.

Ikkilangan simpleks usul oddiy simpleks usulga o'xshash bo'lsa ham unga nisbatan ba'zi qulayliklarga ega. Masalan, ikkilangan simpleks usul bo'yicha yechilayotgan masala shartlaridagi ozod hadlar musbat bo'lmasligi ham mumkin.

Oddiy simpleks usul singari ikkilangan simpleks usulining har bir qadamida n-o'lchovli X vektor boshqasiga almashib boradi va chekli qadamlardan so'ng masalaning optimal yechimi topiladi yoki uning yechimi mavjud emasligi aniqlanadi.

Faqat shunga e'tibor berish kerakki, simpleks usuldan farqli ravishda, ikkilangan simpleks usul bilan har qadamda topilgan X reja joiz reja bo'lmasligi ham mumkin. Chunki ikkilangan simpleks usul bilan topilgan bunday reja masalaning hamma shartlarini qanoatlantirgani bilan musbat bo'lishlik shartini qanoatlantirmasligi mumkin. Bunday reja chala joiz reja deb ataladi.

Ikkilangan simpleks usul bo'yicha chala joiz rejalarni almashtirish jarayoni joiz reja topilguncha takrorlanadi. Topilgan joiz reja esa optimal reja, ya'ni masalaning optimal yechimi bo'ladi.

Faraz qilaylik, kanonik formadagi chiziqli programmalashtirish masalasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0, \tag{4.72}$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min.$$

Bu masaladagi b_i ozod hadlarning ba'zilari yoki hammasi manfiy ishorali bo'lsin.

Bunday masalalarni ikkilangan simpleks usul bilan yechish uchun eng avvalo masalaga qo'shma

$$\begin{gathered} A^TY \leq C^T, \\ F = B^TY \to \max. \end{gathered} \tag{4.73}$$

masala tuziladi. So'ngra berilgan (4.72) masalani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad x_2 \qquad + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\qquad x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.74}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0, \tag{4.75}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min. \tag{4.76}$$

(4.74)-(4.76) masalaning koeffitsiyentlari va ozod hadlari simpleks jadvaliga joylashtiriladi.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
			P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\boxed{P_l}$	c_l	b_l	0	0	...	0	a_{lm+1}	...	$\boxed{a_{lk}}$	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_m	c_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
	Δ_j	Δ_0	Δ_1	Δ_2	...	Δ_m	Δ_{m+1}		$\boxed{\Delta_k}$		Δ_n

Agar b_i $(i=\overline{1,m})$ ozod hadlar uchun $b_i \geq 0$ shart bajarilsa masalaning optimal yechimini topishda simpleks usulidan foydalanamiz.

Agar b_i $(i=\overline{1,m})$ ozod hadlarning ba'zilari yoki hammasi uchun $b_i < 0$ shart bajarilsa masalaning optimal yechimini topishda ikkilangan simpleks usulidan foydalanamiz. Bunda quyidagi ishlarni amalga oshiramiz:

1. $\min\limits_{b_i<0} \{b_i\}$ shart asosida $\{P_1, P_2, ..., P_l, ..., P_m\}$ bazis vektorlar sistemasidan chiqarilishi kerak bo'lgan bazis vektorni aniqlaymiz.

Masalan, $\min\limits_{b_i<0} \{b_i\} = b_l$ bo'lsin. Demak, P_l bazis vektorni bazis vektorlar sistemasidan chiqarishimiz kerak.

2. P_l bazis vektor o'rniga yangi bazis vektorlar sistemasiga kiritilishi kerak bo'lgan vektorni $\min\limits_{a_{lj}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{lj}}\right)$ shart asosida aniqlaymiz.

Masalan, $\min\limits_{a_{lj}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{lj}}\right) = \frac{\Delta_k}{a_{lk}}$ bo'lsin. Demak, P_k vektor yangi bazis vektorlar sistemasiga kiritilishi kerak. Ya'ni $\{P_1, P_2, ..., P_k, ..., P_m\}$ bazis vektorlar sistemasini hosil qilamiz.

Bu holda a_{lk} element boshlovchi (hal qiluvchi) element bo'lib, u joylashgan l qatordagi P_l vektor o'rniga k ustundagi P_k vektor kiritiladi. Simpleks jadvalda ham almashtirish oddiy simpleks usuldagidek bajariladi. Bu jarayon masalaning optimal yechimi topilguncha yoki uning mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Ikkilangan simpleks usulda berilgan masalaning optimal yechimini mavjud emaslik va chala yechimning optimal yechim bo'lishlik sharti quyidagi teoremalar orqali aniqlanadi.

Teorema. Agar masalaning chala rejasidagi koordinatalaridan kamida bittasi, masalan, $b_k < 0$ bo'lib a_{ij} koeffitsiyentlardan birortasi ham manfiy bo'lmasa, u holda masala optimal yechimga ega bo'lmaydi.

Shuday qilib ikkilangan simpleks usulida masalaning optimal yechimga ega bo'lmaslik sharti:

$$\begin{cases} b_k < 0, & k = \overline{1,m}, \\ a_{kj} \geq 0, & j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Teorema. Agar masalaning chala rejasi uning joiz rejasidan iborat bo'lsa, u holda bu reja optimal reja bo'ladi.

15-misol. Quydagi berilgan masalani ikkilangan simpleks usul bilan yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 4. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \qquad \text{(I)}$$

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \to \min.$$

Yechish. Berilgan masalaga x_5 va x_6 qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritamiz va ayrim teng kuchli almashtirishlar bajarib, uni quyidagi kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = -5, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + x_6 = -4. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \; x_5 \geq 0, \; x_6 \geq 0, \qquad \text{(II)}$$

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \to \min.$$

Bu masalaga ikkilangan masalani tuzamiz:

$$\begin{cases} -2y_1 - 3y_2 \leq 3, \\ -y_1 + 2y_2 \leq 4, \\ y_1 - y_2 \leq 5, \\ -5y_1 - 4y_2 \leq 6. \end{cases}$$

$$y_1 \leq 0, \; y_2 \leq 0, \qquad \text{(III)}$$

$$F = -5y_1 - 4y_2 \to \max.$$

(II) masalani ikkilangan simpleks usul bilan yechamiz.

P_b	C_b	P_0	3	4	5	6	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_5	0	-5	-2	-1	1	-5	1	0
P_6	0	-4	-3	2	-1	-4	0	1
		$Y_0 = 0$	$\Delta_1 = -3$	$\Delta_2 = -4$	$\Delta_3 = -5$	$\Delta_4 = -6$	$\Delta_5 = 0$	$\Delta_6 = 0$

P_4	6	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0
P_6	0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{14}{5}$	$-\frac{9}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	1
		$Y_1=6$	$\Delta_1=-\frac{3}{5}$	$\Delta_2=-\frac{14}{5}$	$\Delta_3=-\frac{31}{5}$	$\Delta_4=0$	$\Delta_5=\frac{-6}{5}$	$\Delta_6=0$

Simpleks jadvaldan ko'rinadiki, I bosqichda har bir $j=\overline{1,6}$ uchun $\Delta_j \le 0$. Demak, $X^0=(0,0,0,0,-5,-4)$ vektor (II) masalaning chala rejasi bo'ladi.

(III) ikkilangan masalaning yechimi esa $Y^0=(0,0)$ bo'ladi. X^0 – chala rejaning eng kichik manfiy elementiga mos keluvchi P_5 vektorni bazisdan chiqarib $\theta=\min\limits_{a_{ij}<0}\frac{\Delta_4}{a_{14}}=1{,}2$ shart asosida P_4 vektorni bazisga kiritamiz.

Simpleks jadvalni almashtirishlar bajarib yangi simpleks jadvaliga o'tamiz. $X^1=(0;0;\ 0;1;0;8)$ vektor yangi chala joiz reja bo'ladi.

X^1 vektorning barcha koordinatalari nomanfiy bo'lgani uchun u berilgan masalaning joiz rejasi. Demak, masalaning optimal yechimi bo'ladi.

Yangi bazisdagi qo'shma masalaning yechimi

$$Y^1=\left(-\frac{6}{5};0\right)$$

vektordan iborat bo'ladi. O'zaro qo'shma masalalar uchun $F_{max}=Z_{min}=6$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Masaladagi ma'lumotlarning o'zgarishi chiziqli programmalashtirish masalasi yechimiga ta'siri bilan tanishib chiqamiz. Bu kabi tahlil masaladagi ko'rsatkichlarga ma'lum bir vaqtdan keying inflyatsiyaning ta'sirini o'rganishda yoki ma'lumotlar 700000 ± 5000 kabi berilganda kerak bo'ladi.

Yuqoridagi tahlillar yordamida qyidagi savollarga javob berish mumkin.

1. Ma'lumotlarga optimallik shartiga ta'sir etuvchi o'zgartirihs mumkinmi?
2. Optimallik sharti buzilgan bo'lsa uni qanday tiklash mumkin?

Quyidagi misolni ko'ramiz.

16-misol. Quyidagi masalaning optimal yechimini toping va tahlil qiling.

$$\begin{cases} -2x_1+x_2\le 2, \\ -x_1+2x_2\le 7, \\ x_1\le 3. \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2\ge 0,$$

$$F=-x_1-2x_2\to \min$$

Yechish. Bu masalani simpleks usulida yechamiz va oxirgi jadvalni keltiramiz:

P_b	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	a.k.
			-1	-2	0	0	0	
P_2	-2	5	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
P_1	-1	3	1	0	0	0	1	
P_3	0	3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
Δ_j		-13	0	0	0	-1	-2	

Demak, quyidagi $P_b = (P_2, P_1, P_3)^T$ bazis vektorlarga tayanib optimal yechim topiladi. Bu quyidagicha amalga oshirilgan.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$c_b = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^T = c_b^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda y ikkilangan masalaning optimal yechimi.

Biz endi boshlang'ich ma'lumotlardagi o'zgarishlarning yechimga ta'sirini o'rganib chiqamiz.

Birinchi bo'lib, ozod had $P^T = (b_1 \quad b_2 \quad b_3)^T$ o'zgarishining ta'sirini va o'zgarish oralig'ini ko'rib chiqamiz. $\tilde{b}_2 = b_2 + \delta$ bo'lsin. U holda yangi masalaning o'ng tomoni $P = P + \Delta P$. Bu yerda $\Delta P = (0 \quad \delta \quad 0)^T$. Ma'lumki $B^{-1}\tilde{P} \geq 0$. U holda

$$B^{-1}\tilde{P} = B^{-1}(P + \Delta P) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad B^{-1}P \geq -B^{-1}\Delta P \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\delta \\ 0 \\ \frac{1}{2}\delta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$-10 \leq \delta \leq 6 \quad \Rightarrow \quad \tilde{F} = F + \Delta F = F + y^T \delta = F + y_2 \delta = -13 - \delta.$$

Demak, masalaning ikkinchi shartidagi ozod had $-10 \le \delta \le 6$ oraliqda o'zgarsa bazis o'zgarmaydi. Haqiqattan ham agar $\delta = -4$ bo'lsa, u holda

$$\tilde{x}_b = x_b + B^{-1}\Delta P = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \ge 0, \quad \tilde{F} = -13 + 4 = -9.$$

Bu yerda bazis o'zgarmaydi chunki $B^{-1}\tilde{P} \ge 0$ shart bajariladi; agar $\delta = 8$ bo'lsa, u holda

$$\tilde{x}_b = x_b + B^{-1}\Delta P = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F} = -13 - 8 = -21.$$

Bu yerda bazis o'zgaradi chunki $B^{-1}\tilde{P} \ge 0$ shart bajarilmadi.

Endi $c = (c_1 \quad c_2 \quad c_3)$ vektorning o'zgarishini qarab chiqamiz.

$\tilde{c} = c + \Delta c = (c_1 \quad c_2 + \delta \quad c_3)^T$ bo'lsin. U holda

$$c_N^T - (c_b + \Delta c_b)^T B^{-1} N \ge 0 \Rightarrow \hat{c}_N^T = c_N^T - c_b^T B^{-1} N \ge (\Delta c_b)^T B^{-1} N$$

shartdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(1 \quad 2) \ge (\delta \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (1 \quad 2) \ge \left(\frac{1}{2}\delta \quad \frac{1}{2}\delta \right) \Rightarrow \delta \le 2.$$

Demak, $\delta \le 2$ bo'lganda oldingi bazis optimal bazis bo'lb qoladi. Aks holda esa bazis o'zgaradi.

Masalan, $\delta = 1$ da boshlang'ich bazis optimal bazis bo'lib qoladi, $\delta = 4$ da esa boshlang'ich bazis optimal bazis bo'la olmaydi shu sababli masalaning optimal yechimini topish uchun yangi bazisga o'tishimiz kerak.

Transport masalasi. Transport masalasi – chiziqli programmalashtirishning alohida xususiyatli masalasi bo'lib, bir jinsli yuk tashishning eng tejamli rejasini tuzish masalasidir. Bu masalaning qo'llanish sohasi juda kengdir.

Zaxirasida b_i birlik mahsuloti bo'lgan i-ta'minotchidan mavjud bo'lgan istemolchilarga zaxirasidagi mahsulotni to'la realizatsiya qilish shatri

$$\sum_j x_{i,j} = b_i$$

bu yerda $x_{i,j}$ – i-ta'minotchidan j-iste'molchiga tashilgan mahsulot hajmi.

Masalaning qo'yilishi va uning matematik modeli. m ta A_i ta'minotchilarda a_i miqdordagi bir xil mahsulotni n ta B_j iste'molchilarga mos ravishda b_j miqdordan yetkazib berish talab qilinsin. Har bir i ta'minotchidan har bir j iste'molchiga bir birlik mahsulotni tashishga sarf qilinadigan yo'l harajati c_{ij} pul birligini tashkil qilsin.

Mahsulot tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, ta'minotchilardagi barcha mahsulotlar olib chiqib ketilsin, iste'molchilarning barcha talablari qondirilsin va shu bilan birga yo'l harajatlarining umumiy qiymati eng kichik bo'lsin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun i ta'minotchidan j iste'molchiga etkazib berish uchun rejalashtirilgan mahsulot miqdorini x_{ij} orqali belgilaymiz. U holda masalaning shartlarini quyidagi jadval ko'rinishda yozish mumkin:

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zaxiralar miqdori**
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Talablar miqdori	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Bunda harajatlarning umumiy qiymati

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{4.77}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}) \tag{4.78}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi shunday yechimini topish kerakki, bu yechim

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{4.79}$$

chiziqli funksiyaga eng kichik qiymat bersin.

Jadvaldan va masalaning modelidan $0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$ tengsizlikning bajarilishi ko'rinib turibdi.

Transport masalalari ikki turga ajratib o'rganiladi:

agar mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4.80)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bunday masala ***yopiq modelli transport masalasi*** deyiladi.

agar mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng bo'lmasa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4.81)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda bunday masalalar ***ochiq modelli transport masalasi*** deyiladi.

(4.77)-(4.79) masala uchun quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. Talablar hajmi takliflar hajmiga teng bo'lgan istalgan transport masalasining optimal yechimi mavjud bo'ladi.

Transport masalasi matematik modeli tenglamalar sistemasidagi bazis vektorlar sistemasining o'lchovini aniqlaymiz. Buning uchun sistema asosiy matritsasining rangini aniqlash kerak.

Agar x_{ij} o'zgaruvchilarni

$$x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}, ..., x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn}$$

ko'rinishda joylashtirsak, u holda transport masalasining cheklamalar matritsasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} m\left\{\begin{matrix} \overbrace{1\ 1\ ...\ 1}^{n} & \overbrace{0\ 0\ ...\ 0}^{n} & ... & \overbrace{0\ 0\ ...\ 0}^{n} \\ 0\ 0\ ...\ 0 & 1\ 1\ ...\ 1 & ... & 0\ 0\ ...\ 0 \\ .... & & & \\ 0\ 0\ ...\ 0 & 0\ 0\ ...\ 0 & ... & 1\ 1\ ...\ 1 \end{matrix}\right. \\ n\left\{\begin{matrix} 1\ 0\ ...\ 0 & 1\ 0\ ...\ 0 & ... & 1\ 0\ ...\ 0 \\ 0\ 1\ ...\ 0 & 0\ 1\ ...\ 0 & ... & 0\ 1\ ...\ 0 \\ .... & & & \\ 0\ 0\ ...\ 1 & 0\ 0\ ...\ 1 & ... & 0\ 0\ ...\ 1 \end{matrix}\right. \end{pmatrix}$$

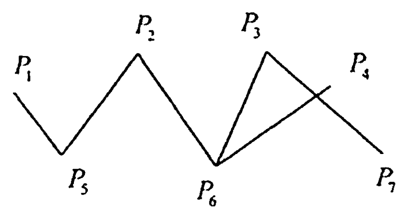
Bu matritsaning rangi: $rang(A) = m+n-1$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Haqiqatdan ham, matritsada $m+n$ ta satr bo'lib ular chiziqli bog'liq. Chunki birinchi m ta satrni qo'shib undan oxirgi n ta satr yig'indisini ayirsak nol vektorni hosil qilamiz. Bu matritsaning ixtiyoriy $m+n-1$ satrini olsak chiziqli erkli vektorlar sistemasi hosil bo'ladi.

Demak, masalaning optimal yechimida musbat x_{ij} lar soni ko'pi bilan $m+n-1$ ta bo'ladi.

Transport masalasi rejalari ko'p takrorlanish xususiyatiga ega.

10-ta'rif. P_i nuqtalarning (punktlarning) chekli $P=\{P_1, P_2, ..., P_l\}$ to'plami va har bir elementi yoy deb ataluvchi tartiblanmagan (P_i, P_j) juftliklarning Ω to'plami berilgan bo'lsin. (P_i, P_j) yoy P_i va P_j nuqtalarni tutashtiradi, bu nuqtalar esa (P_i, P_j) yoyning oxiri deb ataladi. (P, Ω) juftlik esa transport tarmog'i deb ataladi.

Masalan,



rasmda elementlari 7 ta nuqtadan iborat $P=\{P_1, P_2, ..., P_7\}$ to'plam va oltita:

$$(P_1, P_5), (P_2, P_5), (P_2, P_6), (P_3, P_6), (P_3, P_7); (P_4, P_6)$$

yoylarni o'zichiga oluvchi Ω to'plam tasvirlangan.

11-ta'rif. $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ $(P_{i_l} \in P,\ l=0,1,...,k)$ ixtiyoriy chekli ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar har qanday $(P_{i_r}, P_{i_{r+1}})$, $r=0,1,...,k-1$, juftlik yoy bo'lib $((P_{i_r}, P_{i_{r+1}}) \in \Omega)$, bu juftlik $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ ketma-ketlikda ko'pi bilan bir marta uchrasa, u holda $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ ketma-ketlik marshrut (yo'nalish) deb ataladi.

Yuqoridagi rasmda ikkita marshrut bor: $P_1P_5P_2P_6P_4$, $P_1P_5P_2P_6P_3P_7$.

12-ta'rif. $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}P_{i_0}$ ko'rinishdagi marshrut sikl deb ataladi.

Demak, marshrutda boshlang'ich holatga qaytilsa u ***sikl*** deb ataladi.

Rasmdagi marshrutda sikl yo'q, ammo unga (P_4, P_7) yoy qo'shilsa, u holda bu marshrutda $P_3P_7P_4P_6P_3$ ko'rinishdagi sikl hosil bo'ladi.

Ma'lumki, ixtiyoriy chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini topish jarayoni boshlang'ich tayanch rejani topishdan boshlanadi.

Yopiq transport masalasining boshlang'ich tayanch rejasini topishning turli usullari mavjud bo'lib, ulardan ikkitasi bilan tanishib chiqamiz.

Boshlang'ich joiz rejani topish usullari. Masalaning aynimagan joiz rejasi $m+n-1$ ta musbat komponentalarni o'z ichiga oladi.

Shunday qilib, transport masalasining aynimagan joiz rejasi biror usul bilan topilgan bo'lsa, matritsaning $m+n-1$ ta komponentalari musbat bo'lib, qolganlari nolga teng bo'ladi.

Agar transport masalasining shartlari va uning joiz rejasi yuqoridagi jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, noldan farqli x_{ij} lar joylashgan kataklar "***band kataklar***", qolganlari "***bo'sh kataklar***" deyiladi.

Yechim aynimagan bazis yechim bo'lishi uchun band kataklar soni $m+n-1$ ta bo'lib, u yerda sikllanish ro'y bermasligi kerak.

Shimoliy-g'arbiy burchak usuli. Quyidagi transport masalasi berilgan bo'lsin.

a_i \ b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Ma'lumki, har bir bo'sh katakka x_{ij} noma'lumlardan biri to'g'ri keladi. Bu usulda bo'sh kataklmi x_{ij}^0 qiymatlar bilan to'ldiriladi deb faraz qilamiz.

Jadvalning shimoliy-g'arbiy burchagiga x_{11} o'zgaruvchi to'g'ri keladi. $x_{11}^0=\min\{a_1, b_1\}$ bo'lsin. Agar $x_{11}^0=a_1$ $(a_1 \le b_1)$ bo'lsa, u holda birinchi ta'minotchining barcha mahsuloti birinchi iste'molchiga jo'natilgan bo'ladi. Demak, $x_{1j}^0=0,\ j=\overline{1,n}$ bo'ladi.

II qadamda $x_{21}^0=\min\{b_1-a_1, a_2\}$ shart asosida x_{21} ning qiymatini aniqlaymiz. Bunda, agar $x_{21}^0=b_1-a_1$ $(b_1-a_1 \le a_2)$ bo'lsa, u holda $x_{s1}^0=0,\ s=\overline{3,m}$ bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib band kataklardagi x_{ij} larning qiymatlarini aniqlab olamiz.

Agar $x_{11}^0=b_1$ $(b_1 \le a_1)$ bo'lsa, u holda birinchi ta'minotchida a_1-b_1 miqdorda mahsulot qoladi. Demak, $x_{i1}^0=0,\ i=\overline{2,m}$ bo'ladi. II qadamda $x_{12}^0=\min\{a_1-b_1, b_2\}$ shart asosida x_{21} ning qiymatini aniqlaymiz va hokazo.

17-misol. Shimoliy-g'arbiy burchak usulidan foydalanib, transport masalasining boshlang'ich yechimini toping.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar					Zaxira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 100	7 150	10	6	11	250

A_3	8	5 50	3 100	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 250	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

Minimal xarajatlar usuli. Bu usulda boshlang'ich yechim qurish uchun x_{ij}^0 qiymat avvalam bor yo'l harajati eng kichik bo'lgan katakka, ya'ni $\min\limits_{1\le i\le m, 1\le j\le n}\{c_{ij}\}$ shart o'rinli bo'ladigan katakka yoziladi. Masalan, $\min\limits_{1\le i\le m, 1\le j\le n}\{c_{ij}\}=c_{pq}$ bo'lsin. U holda $x_{pq}^0=\min\{a_p, b_q\}$ qiymat aniqlanadi. $x_{pq}^0=\min\{a_p, b_q\}$ $(a_p\le b_q)$ bo'lsin. Demak, $x_{pj}=a_p$, $j=1, 2, ..., q-1, q+1, ..., n$ bo'ladi. Bundan keyingi qadamlarda ham $\min\limits_{1\le i\le m, 1\le j\le n}\{c_{ij}\}=c_{pq}$, $i\ne p$, $j\ne q$ shart asosida x_{ij}^0 qiymatlar aniqlanib boriladi.

Bu usulda tuzilgan boshlang'ich yechimni sikllanishga tekshirish shart.

18-misol. Minimal harajatlar usuli bilan boshlang'ich yechimini toping.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**					**Zaxira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 100	4	100
A_2	2 200	7 50	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

Transport masalasining optimal yechimini topish. Potensiallar usuli – transport masalasini yechish uchun qo'llangan birinchi aniq usul bo'lib, u 1949 yilda rus olimlari *L.V.Kantorovich* va *M.K.Gavurin* tomonidan yaratilgan. Bu usulning asosiy g'oyasi transport masalasiga moslashtirilgan simpleks usuldan iborat bo'lib, birinchi marta chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish usullariga bog'liq bo'lmagan holda tasvirlangan. Keyinroq, xuddi shunga o'xshash usul Amerikalik olim *Dansig* tomonidan yaratildi. Dansig usuli chiziqli programmalashtirishning asosiy g'oyalariga asoslangan bo'lib, Amerika adabiyotida bu usul *modifitsirlangan taqsimot usuli* deb yuritiladi.

Transport masalasining optimal yechimini topishda foydalaniladigan potensiallar usuli simpleks usulining soddalashtirilgan varianti hisoblanadi.

Bu usul bilan tanishishdan oldin ***aynigan*** va ***aynimagan*** transport masalasi tushunchalarini kiritishimiz kerak.

Ma'lumki, agar CHPM hech bo'lmaganda bitta aynigan tayanch yechimga ega bo'lsa, u holda bu masala ***aynigan CHPM*** deb ataladi.

13-ta'rif. Agar $X^0=(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ tayanch rejadagi (yechimdagi) musbat komponentalar soni $rangA=m$ ga teng bo'lsa, u holda bu reja aynimagan tayanch reja, aks holda esa u aynigan tayanch reja deyiladi.

Quyidagi transport masalasi berilgan bo'lsin: b_j – talablar miqdori; a_i – takliflar miqdori.

a_i \ b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Teorema. Agar talablarning qismiy yig'ndisi takliflarning qismiy yig'indisiga teng, ya'ni $\sum_{i\in G} a_i = \sum_{j\in H} b_j$, $G\subset M=\{1, 2, ..., m\}$, $H\subset N=\{1, 2, ..., n\}$ bo'lsa, u holda bu transport masalasi aynigan transport masalasi deyiladi.

Aynimagan transport masalasini qaraymiz. Ma'lumki, bu masalaning matematik modeli kanonik ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i=\overline{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{4.82}$$

$$x_{ij}\geq 0, \tag{4.83}$$

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min. \tag{4.84}$$

Bu masalaga ikkilangan masala tuzamiz.

$$U_i+V_j\leq c_{ij}, \tag{4.85}$$

$$\tilde{Z}=\sum_{i=1}^{m} U_i a_i + \sum_{j=1}^{n} V_j b_j \to \max. \tag{4.86}$$

Ikkilanish nazariyasiga asosan agar (U_i, V_j) ikkilangan baholar mavjud bo'lsa, u holda $\{x_{ij}\}$ tayanch reja optimal bo'ladi. Bu yerda U_i va V_j ikkilangan baholar mos ravishda ***"ta'minotchi va iste'molchilarning potensiallari"*** deyiladi.

Bu nazariyaga asosan transport masalasi uchun quyidagi teoremani keltirish mumkin.

Teorema. Agar transport masalasining $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch yechimi uchun

$$x_{ij}^* > 0 \Rightarrow U_i + V_j = c_{ij}, \tag{4.87}$$

$$x_{ij}^* = 0 \Rightarrow U_i + V_j \le c_{ij} \tag{4.88}$$

shartlar o'rinli bo'lsa, u holda $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch yechim optimal yechim bo'ladi. (4.87) va (4.88) shartlar transport masalasi uchun optimallik shartlari deb ataladi.

Shunday qilib, navbatdagi tayanch yechimni optimallikka tekshirish uchun, avval, (4.87) shart yordamida potensiallar sistemasi quriladi va so'ngra (4.88) shartning bajarilishi tekshiriladi.

Masalaning optimal yechimini topish uchun quyidagi belgilashlar kiritamiz: S_i – ta'minotchilar joylashgan nuqta; Q_j – iste'molchilar joylashgan nuqta. $P = S \cup Q$, $x_{ij} > 0 \Rightarrow (S_i, Q_j) \in \Omega$, (P, Ω) juftlik transport tarmog'i.

Potensiallar usulida optimal yechimni topish algoritmi:

$\{x_{ij}^0\}$ boshlang'ich tayanch yechim topiladi.

Masalan,

$$Q_{j_0} S_{i_1} Q_{j_1} S_{i_2} \ldots Q_{j_{k-1}} S_{i_k} Q_{j_k} S_{i_0} \tag{4.89}$$

marshrut topiladi;

(4.89) shart asosida U_i va V_j potensiallardan

$$V_{j_0} + U_{i_1} = c_{i_1 j_0},\ V_{j_1} + U_{i_1} = c_{i_1 j_1},\ \ldots,\ V_{j_k} + U_{i_k} = c_{i_k j_k},\ V_{j_k} + U_{i_0} = c_{i_0 j_k}, \tag{4.90}$$

tenglamalar sistemasini tuziladi. Bunda $n+m-1$ ta band katak uchun $n+m-1$ ta chziqli tenglama va $n+m$ ta noma'lum hosil bo'ladi. Noma'lumlar soni tenglamalar sonidan bittaga ortiq bo'lgani uchun bitta erkli noma'lumga ixtiyoriy qiymat, masalan nol, qiymat berilib qolganlari mos tenglamalardan topiladi;

Bo'sh kataklar uchun (4.88) shart tekshiriladi:

a) agar barcha bo'sh kataklar uchun (4.88) shart bajarilsa, u holda tayanch yechim optimal bo'ladi va masalani yechish jarayoni tugaydi;

b) agar ba'zi bo'sh kataklar uchun (4.88) shart bajarilmasa, u holda tayanch yechim optimal bo'lmaydi va tayanch yechimni almashtirish jarayoni amalga oshiriladi.

Tayanch yechimni almashtirish jarayonini amalga oshirish uchun $x_{ij}^0 = 0 \Rightarrow U_i + V_j \le c_{ij}$ shart o'rinli bo'lmagan bo'sh kataklardan biri

$$\max_{\Delta_{ij} > 0} (\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}) \tag{4.91}$$

shart asosida tanlanadi va u band katakka aylantiriladi. Masalan,

$$\max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{i_0 j_0}$$

bo'lsin. Demak, (4.89) marshurtga (S_{i_0}, Q_{j_0}) yoyni qo'shish kerak. U holda (S_{i_0}, Q_{j_0}) yoyni o'zida saqlovchi

$$S_{i_0}Q_{j_0}S_{i_1}Q_{j_1}S_{i_2}...Q_{j_{k-1}}S_{i_k}Q_{j_k}S_{i_0}$$

sikl hosil bo'ladi. Bu siklga

$$x_{i_0 j_0},\ x_{i_1 j_0},\ x_{i_1 j_1},\ ...,\ x_{i_k j_k},\ x_{i_0 j_k}.$$

ketma-ketlik mos keladi. Quyidagicha almashtirish bajaramiz:

$$\begin{aligned} x^1_{i_0 j_0} &= x^0_{i_0 j_0} + \theta = \theta, \\ x^1_{i_1 j_0} &= x^0_{i_1 j_0} - \theta, \\ x^1_{i_1 j_1} &= x^0_{i_1 j_1} + \theta, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ x^1_{i_k j_k} &= x^0_{i_k j_k} + \theta, \\ x^1_{i_0 j_k} &= x^0_{i_0 j_k} - \theta. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Boshqa barcha (i, j) juftliklar uchun $x^1_{ij} = x^0_{ij}$. (4.92) formula yordamida topilgan $\{x^1_{ij}\}$ yechim tayanch yechim bo'lishi uchun θ ni

$$\theta = \min_{0\le r\le k} x^0_{i_{r+1} j_r} \tag{4.93}$$

shart asosida tanlash yetarli.

Bu jarayonni tayanch yechim uchun (4.87), (4.88) optimallik sharti bajarilguncha davom ettiramiz.

Bu jarayon chekli son marta qaytarilgandan so'ng optimal yechim hosil bo'ladi. Chunki transport masalasi uchun quyidagi teoremalar o'rinli.

Teorema. Har qanday yopiq modelli transport masalasining optimal yechimi mavjud.

Teorema. Agar barcha a_i, b_j sonlar butun bo'lsa, u holda transport masalasining ixtiyoriy tayanch yechimi butun sonlardan iborat bo'ladi.

19-misol. Quyidagi transport masalasining optimal yechimini toping.

a_i \ b_j	200	200	100	100	250
100	10	7	4	1	4
250	2	7	10	6	11
200	8	5	3	2	2

300	^{11}	^{8}	^{12}	^{16}	^{73}

Yechish. Boshlang'ich tayanch yechimni minimal xarajatlar usuli bilan topamiz.

0-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250
100	^{10}	^{7}	^{4}	^{1} 100	^{4} 0
250	^{2} 200	^{7} 50	^{10}	^{6}	^{11}
200	^{8}	^{5}	^{3}	^{2}	^{2} 200
300	^{11}	^{8} 150	^{12} 100	^{16}	^{73} 50

Bu jadvalda band kataklar soni $n+m-2$ ta. Shuning uchun (a_1, b_5) katakka 0 yozib uni band katakka aylantiramiz. So'ngra band kataklardan foydalanib $U_i+V_j=c_{ij}$ potensial tenglamalar sistemasini tuzib, U_i va V_j qiymatlarini va bu asosida $\Delta_{ij}=U_i+V_j-c_{ij}$ ning qiymatini hisoblaymiz.

1-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	^{10} $_{-16}$	^{7} $_{-8}$	^{4} $_{-1}$	^{1} 100-θ	^{4} 0+θ	0
250	^{2} 200	^{7} 50-θ	^{10} $_{1}$	^{6} θ $_{3}$	^{11} $_{1}$	8
200	^{8} $_{-16}$	^{5} $_{-8}$	^{3} $_{-2}$	^{2} $_{-3}$	^{2} 200	-2
300	^{11} $_{-8}$	^{8} 150+θ	^{12} 100	^{16} $_{-6}$	^{73} 50-θ	9
V_j	-6	-1	3	1	4	$\theta=50$

Bu yerda $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{24} = 3$ bo‘lganligi sababli (a_2, b_4) katakka θ sonni kiritamiz va (4.92) formula asosida almashtirish bajaramiz. Natijada 1-jadvalni hosil qilamiz.

Endi $\theta = \min\,(100, 50, 50) = 50$ asosida yangi bazis rejaga o‘tib, $U_i + V_j = c_{ij}$ potensial tenglamalar sistemasini tuzib U_i va V_j qiymatlarini va bu asosida $\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}$ ning qiymatini hisoblaymiz. U holda quyidagi 2-jadval hosil bo‘ladi.

2-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	^{10} $_{-13}$	^{7} $_{-5}$	^{4} $_{2}$	^{1} 50	^{4} 50	0
250	^{2} 200	^{7} 0	^{10} $_{1}$	^{6} 50	^{11} $_{-2}$	5
200	^{8} $_{-13}$	^{5} $_{-5}$	^{3} $_{1}$	^{2} $_{-3}$	^{2} 200	-2
300	^{11} $_{-14}$	^{8} 200	^{12} 100	^{16} $_{-9}$	^{13} $_{-3}$	6
V_j	-3	2	6	1	4	$\theta = 50$

Bu yerda $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{13} = 2$. Shuning uchun (a_1, b_3) katakka θ parametrni kiritamiz va (4.92) formula asosida almashtirish bajaramiz. Natijada 3a-jadvalni hosil qilamiz. Bu jadvalda

$$\theta = \min\{0, 50, 100\} = 0.$$

Bu asosda yangi bazis yechimni 3-jadvalga joylashtiramiz. 3-jadvalda keltirilgan bazis yechim optimal yechim bo‘ladi, chunki barcha bo‘sh katakchalarda $\Delta_{ij} \le 0$.

3a-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250
100	^{10} $_{-13}$	^{7} $_{-7}$	^{4} θ	^{1} 50-θ	^{4} 50
250	^{2} 200	^{7} 0-θ $_{-2}$	^{10} $_{-1}$	^{6} 50+θ	^{11} $_{-2}$

200	^{8} -13	^{5} -7	^{3} -9	^{2} -3	^{2} 200
300	^{11} -6	^{8} $200+\theta$	^{12} $100-\theta$	^{16} -7	^{73} -1

3-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	^{10} -13	^{7} -7	^{4} 0	^{1} 50	^{4} 50	0
250	^{2} 200	^{7} -2	^{10} -1	^{6} 50	^{11} -2	5
200	^{8} -13	^{5} -7	^{3} -9	^{2} -3	^{2} 200	-2
300	^{11} -6	^{8} 200	^{12} 100	^{16} -7	^{73} -1	8
V_j	-3	0	4	1	4	

Shunday qilib, uchinchi qadamda quyidagi optimal yechimga ega bo'ldik:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 & 50 \\ 200 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 200 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_{\min} = 4150.$$

Ochiq modelli transport masalasi. Agar talab va takliflarning umumiy miqdorlari teng bo'lmasa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

shart bajarilsa, u holda bu masala "*ochiq modelli transport masalasi*" deyiladi. Ochiq modelli masalaning optimal yechimini topish uchun yopiq modelga keltiriladi va potensiallar usuli qo'llaniladi.

Ochiq modelli masalani yopiq modelliga keltirish uchun qo'shimcha "soxta" ta'minotchi yoki "soxta" iste'molchi kiritiladi, ularning zaxirasi yoki talab hajmi

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \ \text{ yoki } \ b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

bo'ladi. Soxta ta'minotchidan real iste'molchilarga yoki real ta'minotchilardan soxta iste'molchilarga amalda mahsulot tashilmagani uchun yo'l harajatlari nolga teng qilib olinadi. Natijada bu yerda yopiq modelli masala hosil bo'ladi.

20-misol. Quyidagi ochiq modelli transport masalasini yeching.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar					Zaxira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Talab hajmi	200	150	100	100	200	

Yechish. $\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j$ bo'lgan hol uchun masalani yopiq modelli masalaga aylantiramiz: $B_6 = 100$. So'ngra potensiallar usulini qo'llaymiz.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar						Zaxira
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	10	7	4	1	4	0	100
A_2	2	7	10	6	11	0	250
A_3	8	5	3	2	2	0	200
A_4	11	8	12	16	13	0	300
Talab hajmi	200	150	100	100	200	100	

Aynigan transport masalasi. ε-potensiallar usuli. Aynigan transprot masalasida tayanch rejasidagi musbat komponentalar soni $k < m + n - 1$ bo'ladi va bu tayanch reja aynigan reja bo'ladi. Bunday rejani aynimagan rejaga aylantirish uchun unga $m + n - 1 - k$ ta nol element kiritish mumkin. Ammo bu nol elementlarga mos x_{ij} noma'lumlar band kataklarga mos x_{ij} noma'lumlar o'zaro chiziqli bog'liq vektorlar esa chiziqli erkli bo'lishi kerak. Bu holatni nazorat qilish qiyin. Shu sababli aynigan transport masalasidagi siklni yo'qotib uni aynimagan transport masalasiga aylantirish kerak. Bunga erishish uchun quyidagi ε-potensiallar usulini qo'llash mumkin.

ε-potensiallar usuli. Ma'lumki, bir nechta a_i larning yig'indisi (hammasi emas) bir nechta b_j larning yig'indisiga teng bo'lsa transport masalasini aynigan transport masalasi deb ataymiz.

Masalada ayniganlikni yo'qotish uchun a_i va b_j lardan tuzilgan xususiy yig'indilarning o'zaro teng bo'lmasligiga erishish kerak. Buning uchun a_i va b_j larning qiymatini biror kichik songa o'zgartirish kerak. Masalan, yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ sonni olib, a_i va b_j larni o'zgartiramiz, ya'ni ε masala tuzamiz:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{a_i} = a_i + \varepsilon, & (i = \overline{1,m}), \\ \overline{b_j} = b_j, & (j = \overline{1,n}), \\ \overline{b_n} = b_n + m\varepsilon, & \end{array}\right\} \quad (4.94)$$

ε yetarlicha kichik son bo'lganligi sababli hosil bo'lgan masalaning $X(\varepsilon)$ optimal rejasi $\varepsilon = 0$ da berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi.

21-misol. Berilgan aynigan transport masalasining optimal yechimini toping.

a_i \ b_j	3	4	5	3
4	4	5	6	3
3	3	2	7	6
8	5	9	1	3

Yechish. (4.94) munosabatlardan foydalanib, quyidagi ε masalani hosil qilamiz:

a_i \ b_j	3	4	5	3+3ε
4+ε	4	5	6	3
3+ε	3	2	7	6
8+ε	5	9	1	3

Ushbu masalani yechib, $X(\varepsilon)$ rejani topamiz. Bundan $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} X(\varepsilon) = X^0$.

4.6. Butun sonli programmalashtirish

O'zgaruvshilariga butun bo'lishlik sharti qo'yilgan chiziqli programmalashtirish masalalari katta amaliy ahamiyatga egadir. Butun sonli programmalashtirish masalalariga sayyoh haqidagi masala, optimal jadval tuzish masalasi, optimal bichish masalasi, transport vositalarini marshrutlarga optimal taqsimlash masalasi, bo'linmaydigan mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonaning ishini optimal rejalashtirish masalasi va boshqa masalalar misol bo'la oladi. Bu masalalarning ayrimlari bilan tanishamiz.

Sayyoh haqida masala. A_0 shaharda yashovchi sayyoh n ta $A_1, A_2, ..., A_n$ shaharlarning har birida faqat bir martadan bo'lib, eng qisqa yo'l bilan A_0 shaharga qaytib kelishi kerak bo'lsin.

Bu masalaning matematik modelini tuzish ushun A_i va A_j shaharlar orasidagi masofani c_{ij} bilan belgilaymiz. Bundan tashqari quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{agar sayyoh } A_i \textit{ dan } A_j \textit{ ga borsa}, \ i \neq j, \\ 0, \textit{agar sayyoh } A_i \textit{ dan } A_j \textit{ ga bormasa}. \end{cases}$$

Bu yerda $i, j = 1, 2, ..., n$.

Bu holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{4.95}$$

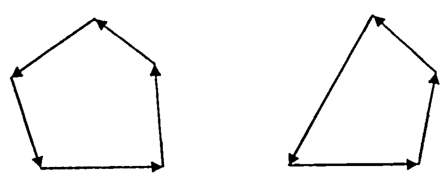
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{4.96}$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, \quad i, j = 1, 2, ..., n, \tag{4.97}$$

$$x_{ij} = 0 \ \textit{yoki} \ x_{ij} = 1, \tag{4.98}$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{4.99}$$

Bu yerda (4.97) shart sayyoh yo'nalishining bog'liqligini ta'minlaydi. Aniqroq aytilsa bu shart A_0 dan o'tmaydigan har qanday t sikllarni yo'qqa chiqaradi. Masalan,



ko'rinishdagi yo'nalishlar bu masada bo'lishi mumkin emasligini (4.97) shart ta'minlaydi.

To'rt rang masalasi. 1976 yilda ajoyib teorema isbotlangan: ko'pi bilan to'rtta turli rangdan foydalanib ixtiyoriy geografik xaritani bo'yash mumkin.

Bu masala quyidagicha qo'yiladi: har birning chegarasi yopiq uzluksiz egri chiziqdan iborat davlatlar tasvirlangan geofrafik xarita berilgan. Agar ikki davlatning umumiy chegarasi uzunligi musbat bo'lgan egri chiziqdan iborat bo'lsa, u holda bu davlatlar qo'shni davlatlar deb ataladi. Bu geofrafik xaritani to'rt rangdan foydalanib shunday bo'yash kerakki qo'shni davlatlar turli xil rangda bo'lsin.

Bu masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} x_i - x_j + 4u_{ij} \geq 1, \\ x_i - x_j - 4u_{ij} \geq -3, \end{cases}$$

$$x_j = 0, 1, 2, 3; \; j = 1, 2, ..., n, \qquad (4.100)$$

$$u_{ij} = 0, 1; \quad (i, j) \in \Gamma.$$

Bu yerda $\Gamma = \{(i,j) | \, i, j - \text{qo'shni davlatlar}; \; i, j = 1, 2, ..., n\}$.

Bo'linmaydigan mahsulotlar ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi. Deylik, korxona n xil bo'linmaydigan mahsulotlar ishlab chiqarsin va buning ushun m xil resurslardan foydalansin. Korxonadagi resurslar zaxirasi chegaralangan va ular $b_1, b_2, ..., b_m$ birliklarni tashkil qilsin. Har bir turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarishga sarflanadigan turli resurslar miqdori, hamda har bir mahsulotdan korxonaning oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

I/ch faktorlari / Mahsulot turlari	1	2	3	...	n	Daromad
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	c_2
...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	c_m
I/ch faktorining zaxirasi	b_1	b_2	b_3	...	b_n	

Korxona daromadini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini aniqlang.

Ushbu masalaning matematik modeliga noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini kiritish kerak:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (4.101)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (4.102)$$

$$x_j \in Z, \qquad (4.103)$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \qquad (4.104)$$

Agar butun sonli programmalashtirish masalalaridagi noma'lumlarning hammasi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilsa, bunday masalalar ***to'la butun sonli programmalashtirish masalalari*** deb ataladi.

Noma'lumlarning ma'lum bir qismi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilgan masalalar ***qisman butun sonli programmalashtirish masalalari*** deb ataladi.

Agar butun sonli programmalashtirish masalasidagi noma'lumlar faqat 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lsa, u holda bu masala ***Bul programmalashtirish masalasi*** deb ataladi.

Butun sonli programmalashtirish masalasining geometirik talqini bilan tanishamiz.

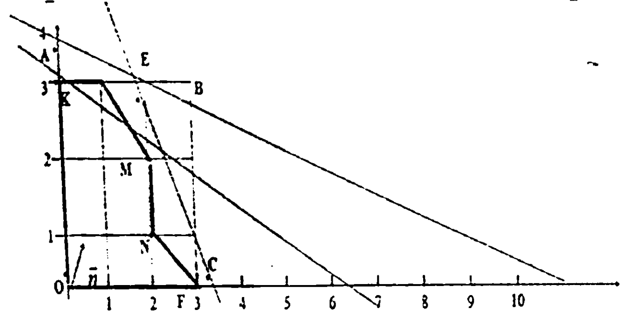
Buning uchun quyidagi ikki o'zgaruvchili butun sonli programmalashtirish masalasiga murojaat qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ x_i \in Z,\ (i = 1,2)$$

$$Y = 2x_1 + 4x_2 \to \max.$$

Ushbu masaladagi noma'lumlarning butun bo'lishlik shartiga e'tibor



bermasdan uni grafik usulda yeshamiz. Natijada $OABC$ qavariq ko'rburchakni, joiz rejalar to'rlamini, hosil qilamiz. Bu ko'pburchakka tegishli bo'lgan nuqtalar ichida berilgan butun sonli programmalashtirish masalasining yechimi bo'la oladigan nuqtani topish uchun bu ko'pburchakni $OKEMNF$ ko'pburchak bilan almashtiramiz. Bu ko'pburchakning burchak nuqtalarining koordinatalari butun sonlardan iborat bo'ladi. Ana shu burchak nuqtalaridan birida maqsad funksiya maksimum qiymatga erishadi. Bunday nuqtani topish uchun $2x_1 + 4x_2 = 0$ to'g'ri chiziqni yasaymiz. Bu chiziqni normal vektor yo'nalishida o'z-o'ziga parallel ko'chirib, shu yo'nalishdagi burchak nuqta $E(1,3)$ ni toramiz. Bu nuqtada maqsad funksiya maksimumga erishadi. Demak, berilgan masalaning yechimi $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $Y_{max} = 14$ bo'ladi.

R.Gomori usuli. Noma'lumlarga butun bo'lishlik sharti qo'yilganligi sababli chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish usullarini butun sonli programmalashtirish masalalarini yechish uchun qo'llab bo'lmaydi.

Butun sonli programmalashtirish masalalarini yechish uchun ularning xususiyatlarini nazarga oluvchi usullar yaratilgan bo'lib, ular orasida amerika olimi R.Gomori yaratgan usul optimal butun sonli yechimni beruvchi eng aniq usullardan biri hisoblanadi. Gomori usuli yordami bilan to'la butun sonli, hamda qisman butun sonli masalalarni yechish mumkin.

Quyida biz Gomori usuli bilan to'la butun sonli programmalashtirish masalasini yechish jarayonda tanishamiz.

Bu usulning g'oyasi quyidagidan iborat:

1. Berilgan (4.101)-(4.104) masalani noma'lumlarning butun bo'lishlik shartiga, $x_j \in Z$, e'tibor bermasdan, simpleks usuldan foydalanib yechamiz va

quyidagi jadvalni hosil qilamiz. Bu jadvalda (4.101)-(4.104) masala uchun optimallik sharti bajarilgan bo'lsin. U holda masalaning optimal yechimi $X^0=(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots, 0)$ bo'ladi.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
			P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_l	c_l	b_l	0	0	...	0	a_{lm+1}	...	a_{lk}	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_m	c_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{nk}	...	a_{nn}
		Δ_0	Δ_1	Δ_2		Δ_m	Δ_{m+1}		Δ_k		Δ_n

Agar topilgan $X^0=(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots, 0)$ yechimda $b_i \in Z$ bo'lsa, u holda bu yechim butun sonli programmalashtirish masalasining ham yechimi bo'ladi.

2. Agar $X^0=(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots, 0)$ yechimda b_i larning ba'zilari yoki hammasi kasr sonlardan iborat bo'lsa, u holda $x_j \in Z$ shartning bajarilishi uchun ***kesuvchi tenglama*** deb ataluvchi qo'shimcha tenglama tuziladi.

Buning uchun quyidagi tushunchalrni kiritamiz:

Ixtiyoriy a ratsional sonni

$$a=[a]+\{a\} \tag{4.105}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $[a]$ – a sonnig butun qismi; $\{a\}$ – a sonning kasr qismi ($0 \le \{a\} < 1$, a – butun bo'lsa, $\{a\}=0$).

Masalan, $\frac{30}{7}=4+\frac{2}{7}$, chunki $\left[\frac{30}{7}\right]=4$, $\left\{\frac{30}{7}\right\}=\frac{2}{7}$;

$-\frac{30}{7}=-5+\frac{5}{7}$, chunki $\left[-\frac{30}{7}\right]=-5$, $\left\{-\frac{30}{7}\right\}=\frac{5}{7}$.

Jadvalning P_0 ustunidagi kasr sonlardan iborat bo'lgan b_i satrlardan $\max_i\{b_i\}$ shart asosida kerakli satrni ajratib olamiz. Masalan, $\max_i\{b_i\}=q_k$ bo'lsin. Demak, k-satr ajratib olindi. Bu satr uchun $\{a_{kj}\}=q_{kj}$ belgilash kiritib quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$q_{k1}x_1+q_{k2}x_2+\ldots+q_{kn}x_n \ge q_k. \tag{4.106}$$

Bu tengsizlikdan

$$-q_{k1}x_1-q_{k2}x_2-\ldots-q_{kn}x_n=-q_k \tag{4.107}$$

kesuvchi tenglamani hosil qilamiz va bu tenglama asosiy tenglamalar sistemasiga kiritib yoziladi. So'ngra bazis yechim almashtiriladi. Bunda ikkilangan simpleks usulidan foydalaniladi. Bu jarayon masalaning yechimda faqat butun sonlar hosil bo'lganicha yoki yechimning mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Har bir bosqichda tuzilgan qo'shimcha tenglama kesuvchi tenglama deb atalishiga sabab, bu tenglama yordamida berilgan butun sonli programmalashtirish masalasi yechimlar to'plamidagi kasr sonli yechimni o'z ichiga oluvchi qismi kesib boriladi.

Agar kasr sonli x_i ga mos keluvchi qatorda barcha x_{ij} lar butun sonli bo'lsa, u holda masala butun sonli yechimga ega bo'lmaydi.

22-misol. Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasining butun sonli yechimini toping:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ x_j \in Z, \ j = \overline{1,4},$$

$$Y = x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \max.$$

Yechish. Masalani oddiy simpleks usul bilan yechamiz.

P_b	C_b	P_0	1	–3	5	2
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	–3	37/3	1/3	1	0	–1/3
P_3	5	8/3	2/3	0	1	1/3
Δ_j		–71/3	4/3	0	0	2/3

Jadvaldan ko'rinadiki, topilgan yechim butun sonli programmalashtirish masalasining yechimi bo'lmaydi. Bu yechimni butun sonli yechimga aylantirish uchun kesuvchi tenglama tuzamiz.

$$\left\{\frac{37}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \ \left\{\frac{8}{3}\right\} = \frac{2}{3}; \ \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}.$$

Demak, 2-satr tanlandi

$$\{1\} = 0, \ \{0\} = 0, \ \left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \ \left\{\frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$

munosabatlardan foydalanib

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \geq \frac{2}{3}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikning ikki tomonini (–1) ga ko'paytiramiz va qo'shimcha noma'lumni kiritib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$-\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 + x_5 = -\frac{2}{3}.$$

Bu tenglamani simpleks jadvaliga joylashtiramiz.

P_b	C_b	P_0	1	–3	5	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	–3	37/3	1/3	1	0	–1/3	0
P_3	5	8/3	2/3	0	1	1/3	0

P_5	0	–2/3	–2/3	0	0	–1/3*	1
Δ_j		–71/3	4/3	0	0	2/3	0

Bazisdan P_5 vektorni chiqarib, o'rniga P_4 vektorni kiritamiz. Natijada simpleks jadval almashadi va quyidagi ko'rinishga keladi.

P_b	C_b	P_0	1	–3	5	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	–3	13	1	1	0	0	–1
P_3	5	2	0	0	1	0	1
P_4	2	2	2	0	0	1	–3
Δ_j		–25	0	0	0	0	2

Demak, $X^0 = (0, 13, 2, 2, 0)$, $Y_{max} = -25$.

4-bobga doir savollar

1. Ayigan transport masalasini tushuntiring va uning optimal yechimini topishni izohlang.
2. Boshlang'ich tayanch rejani izohlang.
3. Ikkilangan masalani ta'riflang.
4. Ikkilangan masalaning optimal yechiminimani aniqlashga yordan beradi.
5. Ikkilanish teoremasini keltiring.
6. Kamyob xomashyoni aniqlash yo'lini tushuntiring.
7. Kesuvchi tenglama qanday hosil qilinadi?
8. Muvozanat teoremasini misollar yordamida tushuntiring.
9. Numa uchun transport masalasining optimal yechimini topishda simpleks usulidan foydalanilmaydi?
10. Ortiqcha xomashyolar qanday aniqlanadi.
11. Potensiallar usulini tushuntiring.
12. Qanday holatlarda ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'ladi?
13. Qanday holatlarda ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'lmaydi?
14. Qanday masala kanonik masala deb ataladi?
15. Qanday masalalar butun sonli programmalashtirish masalalari deb ataladi.
16. Qanday masalani standart masala deb ataymiz?
17. Sayyoh masalasini tushunturing.
18. To'rt rang masalasini tushuntiring.
19. Transport masalasida sikl qachon paydo bo'ladi va u qanday yo'qotiladi?
20. Transport masalasining matematik modelida bazis vektorlar sistemasining rangi qanday aniqlanadi?

4-bobga doir misol va masalalar

1. Fermada qo'ng'ir va sariq quyonlar parvarish qilinadi. Ularning normal parvarishi uchun 3 turdagi oziqa ishlatiladi. Qo'ng'ir va sariq quyonlar uchun har kungi zarur bo'lgan har bir turdagi ozuqalar miqdori jadvalda keltirilgan. Hayvon fermasi ishlatishi mumkin bo'lgan har bir turdagi ozuqaning umumiy miqdori va 1 ta qo'ng'ir va sariq quyon terisini sotishdan keladigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Ozuqa turi	Kunlik zarur bo'lgan ozuqa birligi miqdori		Ozuqaning umumiy miqdori
	qo'ng'ir quyon	sariq quyon	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
1 ta terini sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	16	12	

Ferma eng katta daromad olishi uchun ishni qanday tashkil etishi kerak?

2. Quyidagi misollarni simpleks usulda yeching:

1. $Z=5x_1+3x_2+2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1+5x_2+2x_3+x_4 \le 20 \\ 3x_1+4x_2-x_3+x_4 \le 30 \end{cases}$$

$x_j \ge 0.\ (j=1,2,3,4)$

2. $Z=3x_1-2x_2-4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1+5x_2-2x_3 \le 22 \\ x_1-2x_2+x_3 \le 30 \end{cases}$$

$x_j \ge 0.\ (j=1,2,3)$

3. $Z=7x_1+8x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1+x_2 \le 100 \\ x_1+x_2 \le 80 \\ x_1 \le 40 \end{cases}$$

$x_j \ge 0.\ (j=1,2)$

4. $Z=3x_1+9x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -5x_1+2x_2 \le 30 \\ -3x_1+x_2 \le 12 \end{cases}$$

$x_j \ge 0.\ (j=1,2)$

5. $Z=-6x_1-14x_2-13x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3 \le 48 \\ x_1+2x_2+4x_3 \le 60 \end{cases}$$

$x_j \ge 0.\ (j=1,2,3)$

6. Jadvalda berilgan ma'lumotlarga asoslanib mebel ishlab chiqarish rejasini shunday tuzingki, bunda mehnat rezervlaridan to'liq foydalangan holda ishlab

chiqarilgan jami mahsulotning pul qiymati maksimallashtirilsin. Simpleks usulda optimal yechim topilsin.

Ishlab chiqarish faktorlari	Faner, (m^3)	Taxta, (m^3)	Mehnat, (kishi/smena)	Narxi (ming so'm)
Sarflash normalari:				
1 ta servantga	0,2	0,1	2	150
1 ta shifonerga	0,1	0,2	1	120
Ishlab chiqarish faktorlari zaxirasi	60	40	500	

3. Tikuv fabrikasida 4 turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun 3 artikuldagi gazlamalar ishlatiladi. Turli mahsulotning bittasini tikish uchun sarflanadigan turli artikuldagi gazlamalar normasi jadvalda keltirilgan. Fabrika ixtiyoridagi har bir artikuldagi gazlamalarning umumiy miqdori va mahsulotlar bahosi ham ushbu jadvalda berilgan. Fabrika har bir turdagi mahsulotdan qancha miqdorda ishlab chiqarsa, ishlab chiqarilgan mahsulotlar bahosi maksimal bo'ladi? Masalaning matematik modeli tuzilsin.

Gazlama artikuli	1 ta mahsulotga sarflanadigan gazlama normasi (m)				Gazlamalarning umumiy miqdori (m)
	I	II	III	IV	
1	1	-	2	1	180
2	-	1	3	2	210
3	4	2	-	4	800
Mahsulotlar bahosi (sh.p.b.)	9	6	4	7	

4. Mexanika zavodi 2 turdagi detalni ishlab chiqarish uchun tokarlik, frezerlik va payvandlash jihozlarini ishlatadi. Shu borada har bir detalni 2 xil texnologik usul bilan ishlab chiqarish mumkin. Har bir jihozning samarali vaqt fondi berilgan. Har bir texnologik usul bilan turli moslamada detallar birligini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan vaqt normasi va detallarni sotishdan olinadigan foydalar quyidagi jadvalda keltirilgan. Korxonaga maksimal foydani ta'minlovchi jihozlar yuklanishining optimal rejasini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Jihoz turi	Detallar				Samarali vaqt fondi (stanok-soat)
	1		2		
	Texnologik usullar				
	1	2	1	2	
Tokarlik	3	2	3	0	20
Frezerlik	2	2	1	2	37
Payvandlovchi	0	1	1	4	30
Foyda (sh.p.b.)	11	6	9	6	

5. Quyidagi misollarni sun'iy bazis usuli bilan yeching:

1. $\begin{array}{l} Z=-4x_1-2x_2-8x_3 \to \min \\ \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3\le 30 \\ x_1+2x_2+4x_3=40 \end{cases} \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{array}$

2. $\begin{array}{l} Z=-4x_1-2x_2 \to \min \\ \begin{cases} 2x_1-2x_2\ge 4 \\ -2x_1+x_2=2 \end{cases} \\ x_1,x_2\ge 0 \end{array}$

Tayanch so'z va iboralar

Matematik model, chiziqli va chiziqsiz programmalashtirish, stoxastik programmalashtirish, dinamik programmalashtirish, chiziqli programmalashtirish, chegaralovchi shartlar (cheklamalar), maqsad funksiya, joiz reja (yechim), bazis yechim (reja), xos va xosmas bazis reja, optimal reja, qo'shimcha o'zgaruvchi, qavariq kombinatsiya, qavariq to'plam, qavariq to'plamning burchak nuqtasi, gipertekislik, gipertekisliklar oilasi, yechimlar ko'pburchagi, sath to'g'ri chizig'i, aktiv va passiv shartlar, kamyob xomashyo, kamyob bo'lmagan (ortiqcha) xomashyo, simpleks usul, optimallik bahosi, sun'iy o'zgaruvchilar, sun'iy bazis; sun'iy bazis usuli; kengaytirilgan masala; aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi; aynigan reja (yechim); sikllanish, ε-usul, o'zaro qo'shma masalalar, simmetrik qo'shma masalalar, simmetrik bo'lmagan qo'shma masalalar, ikkilamchi baholar, ikkilangan masala, shartli optimal baho, shartli optimal yechim, muvozanatlik teoremasi, ikkilangan simpleks usul, chala joiz yechim, optimallik mezoni, yopiq modelli transport masalasi, band katakchalar, ochiq modelli transport masalasi, "shimoliy-g'arb burchak" usuli, "minimal harajat" usuli, butun sonli programmalashtirish, to'la butun sonli programmalashtirish, qisman butun sonli programmalashtirish, Bul o'zgaruvchili programmalashtirish, kesuvchi tenglama.

II QISM. MATEMATIK ANALIZ ASOSLARI VA UNING ILOVALARI

5-BOB. MATEMATIK TAHLILGA KIRISH

5.1. R^n fazoda nuqtalarning o'zaro joylashishi. Sonli ketma-ketlik

Ma'lumki, R^n fazoda nuqta $M(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'rinishda belgilanadi. $M(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtaning δ atrofi $U_\delta(M)=\{N|\rho(M,N)<r\}$ ko'rinishda belgilanib, u markazi $M(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtada bo'lgan δ radiusli ochiq sharni anglatadi. Bu yerda $\rho(M,N)-M$ va N nuqtalar orasidagi masofa.

1-ta'rif. Agar R^n fazoda har bir $k\in N$ songa aniq bir $M_k\left(x_1^k,x_2^k,...,x_n^k\right)$ nuqta mos qo'yilgan bo'lsa, u holda R^n fazoda $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi berilgan deyiladi.

Demak, R^n fazoda nuqtalar ketma-ketligi quyidagi ko'rinishda $M_1\left(x_1^1,x_2^1,...,x_n^1\right)$, ..., $M_k\left(x_1^k,x_2^k,...,x_n^k\right)$, ... beriladi.

M_1 – birinchi hadi, M_2 – ikkinchi hadi, M_k – k – hadi deyiladi.

Masalan,

R^2 fazoda $M_k\left(\dfrac{k^2}{4k^2+1};\dfrac{k-1}{3k+2}\right)$: $M_1\left(\dfrac{1}{5};0\right)$, $M_2\left(\dfrac{4}{17};\dfrac{1}{8}\right)$

R^3 fazoda $M_k\left(\dfrac{1}{k};\dfrac{k^2}{3k^2+1};\dfrac{k^3}{(k+1)^3}\right)$: $M_1\left(1;\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{8}\right)$, $M_2\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{13};\dfrac{8}{27}\right)$

R^n fazoda $M_k\left(\dfrac{4}{k};\dfrac{3k}{5k+1};...;\dfrac{4k-1}{5k+10}\right)$: $M_1\left(4;\dfrac{3}{6};...;\dfrac{3}{15}\right)$; $M_2\left(2;\dfrac{6}{11};...;\dfrac{7}{20}\right)$

R^n fazoda qism osti nuqtalar ketma-ketligi berilgan nuqtalar ketma-ketligidan tuziladi va unda hadlarning oldinma-ketin kelish tartibi saqlanadi.

Masalan, $10,20,30,...,10m,...$ sonli ketma-ketlik $5,10,15,...,5k,...$ sonli ketma-ketlikning qism osti ketma-ketligidir.

Ma'lumki, M_k, M_0 nuqtalar orasidagi masofa

$$\rho(M_k;M_0)=\sqrt{\sum_{m=1}^{n}\left(x_m^k-x_m^0\right)^2}$$

formula bilan aniqlanadi.

2-ta'rif. Agar biror bir $C\in R$ son va biror bir $M_0\in R^n$ nuqta topilib, ixtiyoriy $k\in N$ natural son uchun $\rho(M_k;M_0)<C$ tengsizlik bajarilsa, $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi chegaralangan, deyiladi.

Masalan, R^3 fazoda $M_k\left(\dfrac{k}{k+1};\dfrac{4}{k};\dfrac{k^2}{k^2+5}\right)$ ketma-ketlik chegaralangan.

R^n fazoda $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $K(\varepsilon)\in N$ son mavjud bo'lib, biror M_0 nuqta va barcha $m>K(\varepsilon)$ tartib raqamli hadlar uchun $M_k\in U_\varepsilon(M_0)$ bo'lsa, u holda M_0 nuqta $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligining limiti deyiladi va $\lim\limits_{k\to\infty} M_k\left(x_1^k,x_2^k,...,x_n^k\right)=M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$ ko'rinishda yoziladi

Masalan, R^3 fazoda $M_k\left(\frac{4}{k},\frac{3k}{5k+1},\frac{4k-1}{5k+10}\right)$ nuqtalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. U holda $\lim\limits_{k\to\infty} M_k\left(\frac{4}{k},\frac{3k}{5k+1},\frac{4k-1}{5k+10}\right)=M_0\left(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

4-ta'rif. Agar $M\in D$ nuqtaning shunday $U_\delta(M)$ atrofi mavjud bo'lib, $U_\delta(M)\in D$ bo'lsa, u holda M to'plamning ichki nuqtasi deb ataladi.

5-ta'rif. Agar $M\in D$ nuqtaning har qanday $U_\delta(M)$ atrofida D sohaga tegishli bo'lgan va tegishli bo'lmagan nuqtalar ham mavjud bo'lsa, u holda M to'plamning chegara nuqtasi deb ataladi.

6-ta'rif. Agar $M\in D$ nuqtaning har qanday $U_\delta(M)$ atrofida D sohaga tegishli bo'lgan hech bo'lmaganda bitta nuqta mavjud bo'lsa, u holda M to'plamning limit nuqtasi deb ataladi.

7-ta'rif. Agar $M\in D$ nuqtaning shunday $U_\delta(M)$ atrofi mavjud bo'lib, undagi barcha nuqtalar D sohaga tegishli bo'lmasa (M nuqtadan tashqari), u holda M to'plamning ajralgan nuqtasi deb ataladi.

8-ta'rif. Agar to'plamning barcha nuqtalari ichki nuqtalardan iborat bo'lsa, u holda bu to'plam ochiq to'plam deb ataladi.

9-ta'rif. Agar to'plamning barcha urinish nuqtalari to'plamga tegishli bo'lsa, u holda bu to'plam yopiq to'plam deb ataladi.

Teorema. Agar R^n fazoda nuqtalar ketma-ketligi chekli limitga ega bo'lsa u holda bu ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

10-ta'rif. Agar n o'lchovli nuqtalar ketma-ketligi chekli limitga ega bo'lsa, bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik, aks holda uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Qandaydir X to'plam berilgan bo'lsin. N natural sonlar to'plamini X to'plamga har qanday $f:N\to X$ akslantirish X to'plam elementlari ketma-ketligi deb ataladi. $f:N\to X$ ketma-ketlik odatda $\{x_n\}$ yoki x_n, $n\in N$, ko'rinishda yoziladi. Bunda:

x_1 – ketma-ketlikning birinchi hadi,

x_2 – ketma-ketlikning ikkinchi hadi, ...

x_n – ketma-ketlikning n – hadi, deyiladi.

Masalan: $x_n = n^2 + 1$, $y_n = \frac{3n-1}{2n}$, $z_n = \frac{5}{n+3}$, $n \in \mathrm{N}$ sonli ketma-ketliklarni ifodalaydi.

Agar shunday M, (m) soni mavjud bo'lib, ixtiyoriy $n \in N$ uchun $x_n \le M$ $(x_n \ge m)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x_n sonli ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi. Agar $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik yuqoridan ham, quyidan ham chegaralangan bo'lsa, bu ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

Agar ixtiyoriy n uchun $x_n < x_{n+1}$ $(x_n \le x_{n+1})$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi (kamaymaydigan) sonli ketma-ketlik deyiladi. Kamayuvchi (o'smaydigan) ketma-ketliklar ham shunga o'xshash ta'riflanadi. Bunday ketma-ketliklar monoton deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha elementlari faqat va faqat bitta C soniga teng bo'lsa, u holda uni o'zgarmas deb atashadi. Masalan, $x_n = 5$, $\{x_n\} = \{5,5,\ldots,5,\ldots\}$

Sonli ketma-ketliklar rekurrent usulda ham beriladi. Bunda ketma-ketlikning x_1 birinchi hadi va n-hadini o'zidan oldingi hadlar orqali topish qoidasi beriladi:

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

Shunday qilib, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ va hokazo.

Masalan, $x_1 = 2$, $x_n = 3 + x_{n-1}$, $\{x_n\} = \{2,5,8\ldots\}$.

Ko'rish mumkinki, $x_n = \frac{n-1}{n}$ ketma-ketlikning hadlari n kattalashtirilganda 1 soniga yaqinlashadi. Bunday holda $x_n = \frac{n-1}{n}$ ketma-ketlikning limiti 1 soniga intiladi deyiladi.

11-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural son topilib, barcha $n > N$ nomerlarda

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda a soni x_n ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Bu yerda keyinchalik ham $\varepsilon > 0$ cheksiz kichik musbat son sifatida qabul qilingan.

Bu limit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ yoki $n \to \infty$ da $x_n \to a$ ko'rinishda yoziladi. Shuningdek, x_n ketma-ketlik a soniga yaqinlashadi ham deyiladi.

Masalan, $\{x_n\} = \left\{\frac{4n}{n+1}\right\}$ sonli ketma-ketlikda $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{n+1} = 4$ ekanligini ta'rif asosida isbotlaymiz.

Haqiqatan ham,

$$\left|\frac{4n}{n+1} - 4\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{4}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{4}{\varepsilon} < n+1 \Rightarrow n > \frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}$$

ifodani hosil qilamiz. Natijada, N sonining butun son ekanligini e'tiborga olib, $N=\left[\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right]+1$, deb olasak, natijada ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $n>N$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy n uchun $\left|\frac{4n}{n+1}-4\right|<\varepsilon$ bo'ladi. Bu esa, aynan 4 soni x_n ketma-ketlikning limiti ekanligini anglatadi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}=4$.

Agar sonli ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u yaqinlashuvchi ketma-ketlik deb ataladi.

Masalan, $\{x_n\}=\left\{\frac{4n}{n+1}\right\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlikdir.

Teorema. Agar sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning limiti yagonadir.

Teorema. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega:

1) $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'zgarmas, ya'ni $\{x_n\}=c$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}=c$;

2) $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $m-$ o'zgarmas son bo'lsa, u holda: $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, $\{mx_n\}$, $\{x_n{}^m\}$ ketma-ketliklar ham yaqinlashuvchi bo'ladi va quyidagilar o'rinli bo'ladi:

a) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k+y_k\}=\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}+\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}$;

b) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k y_k\}=\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}$;

c) $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\frac{x_k}{y_k}\right\}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}}{\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}\neq 0$;

d) $\lim\limits_{k\to\infty}\{mx_k\}=m\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}$;

e) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k^m\}=\left(\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}\right)^m$;

3) Aga $x_k\le y_k$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{k\to\infty}x_k\le\lim\limits_{k\to\infty}y_k$;

4) Agar $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$, $\lim\limits_{k\to\infty}y_k=a$ va $x_k\le z_k\le y_k$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=a$.

12-ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon>0$ son uchun ε ga bog'liq biror $N(\varepsilon)$ natural son topilib $n>N(\varepsilon)$ bo'ladigan barcha n natural sonlar uchun $|\alpha_n|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{\alpha_n\}$ sonli ketma-ketlik cheksiz kichik sonli ketma-ketlik deyiladi.

Bu limit $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha_n\}=0$ ko'rinishda yoziladi.

Shunday qilib, limiti nolga teng har qanday sonli ketma-ketlik cheksiz kichik sonli ketma-ketlik deyiladi. Masalan, $\left\{\frac{1}{4n}\right\}$, $\left\{\frac{4n}{n^2+1}\right\}$ sonli ketma-ketliklar cheksiz kichik sonli ketma-ketliklardir chunki

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4n}\right\}=0,\ \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4n}{n^2+1}\right\}=0.$$

1-mashq. Cheksiz kichik sonli ketma-ketlik ta'rifidan foydalanib, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ ketma-ketlik cheksiz kichik sonli ketma-ketlik ekanligini isbotlang.

Odatda, ketma-ketlik limitini aniqlashda cheksiz kichik sonli ketma-ketlikdan foydalaniladi. Masalan, $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik limiti a ga teng bo'lishi, uchun shunday cheksiz kichik $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlik mavjud bo'lib, $x_n = a + \alpha_n$ bo'lishi zarur va yetarli.

Cheksiz kichik sonli ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega:

1) Agar $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik sonli ketma-ketliklar bo'lsa, u holda ularning yig'indisi yoki ayirmasidan tuzilgan $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ ketma-ketliklar ham cheksiz kichik sonli ketma-ketliklardir;
2) $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik sonli ketma-ketlik va $\{x_n\}$ chegaralangan sonli ketma-ketlik bo'lsa, ularning mos hadlari ko'paytmasidan tuzilgan $\{\alpha_n x_n\}$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik sonli ketma-ketlikdir;
3) Chekli sondagi cheksiz kichik sonli ketma-ketliklarning ko'paytmalari ham cheksiz kichik sonli ketma-ketlikdir.

13-ta'rif. Agar ixtiyoriy $A>0$ son uchun $\{\gamma_n\}$ sonli ketma-ketlikning shunday bir $N(A)$ (A ga bog'liq) tartib raqamini tanlash mumkin bo'lib barcha $n>N(A)$ tartib raqamli hadlari uchun $|\gamma_n|>A$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\{\gamma_n\}$ sonli ketma-ketlik cheksiz katta sonli ketma-ketlik deyiladi.

Cheksiz katta sonli ketma-ketliklar limiti ∞ ga teng.

Masalan, $\left\{\frac{n^2}{10n+1}\right\}$, $\left\{\frac{2-n^3}{10n^2+10n+1}\right\}$ ketma-ketliklar cheksiz katta sonli ketma-ketliklarga misol bo'la oladi, chunki ularning limiti, mos ravishda, ∞ va $-\infty$ ga teng.

Cheksiz katta sonli ketma-ketliklar uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1) Har qanday cheksiz katta sonli ketma-ketlik chegaralanmagandir;
2) $\left\{\frac{1}{\gamma_k}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik sonli ketma-ketlik bo'lgandagina, $\{\gamma_n\},(\gamma_n \neq 0)$ ketma-ketlik cheksiz katta sonli ketma-ketlik bo'ladi.

14-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday N nomer mavjud bo'lib har qanday $n>N$ va $n+p>N$ $(p\geq 1)$ nomerlar uchun $|x_{n+p}-x_p|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik deyiladi.

Agar sonli ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u holda bu ketma -ketlik fundamental bo'ladi.

Agar sonli ketma-ketlik fundamental bo'lsa, u holda u chegaralangan bo'ladi.

Veyershtrass teoremasi. Agar sonli ketma-ketlik monoton o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib u yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda bu sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi.

Masalan: $\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ sonli ketma-ketlik monoton o'suvchi va chegaralanganligi uchun yaqinlashuvchidir. Ketma-ketlik limiti irratsional e – soniga teng:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}=e \quad (e=2,718\ldots).$$

e soni uzluksiz to'lovli murakkab foiz, kapital qo'yilmalarining samaradorligini baholash va hokazo masalalarida qo'llaniladi.

Faraz qilamiz, omonatchi bankda n yil muddatga S_0 so'm miqdorida jamg'arma omonatini ochdi. Bank foizlarining stavkasi esa bugungi kunda omonat pulining i foizini tashkil qiladi. U holda n yildan so'ng omonatchining hisobidagi pullar miqdori $S_n=S_0\left(1+\frac{i}{100}\right)^n$ (murakkab foizlar formulasi) ni tashkil qiladi.

Bu formuladan ko'rinib turibdiki, omonatning dastlabki pulining murakkab foizlar bo'yicha o'sishi – bu birinchi hadi S_0, maxraji esa $\left(1+\frac{i}{100}\right)$ bo'lgan ***geometrik progressiya*** qonunlari bo'yicha rivojlanuvchi jarayon.

1-misol. S_0 dastlabki depozit bankka $i=100\%$ yillik foiz stavkasi bilan qo'yilgan bo'lsin, bir yildan so'ng depozit miqdori $2S_0$ ni tashkil etadi. Faraz qilamizki yarim yildan so'ng hisob $S_1=S_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}S_0$ natija bilan yopiladi va bu summa yana shu bankka depozit sifatida qo'yiladi. Yil yakunida depozit $S_2=S_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2{,}25S_0$ ni tashkil etadi. Bankka qo'yilgan depozitni uni olgandan so'ng keyin yana qo'yish sharti bilan qo'yish vaqtini kamaytirib boramiz. Bu operatsiyalar har kvartalda takrorlanganda yil so'nggida depozit $S_3=S_0\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\approx 2{,}37S_0$ ni tashkil etadi. Agar olishning qo'yish operatsiyasini yil davomida xohlagancha takrorlasak har oy manipulyatsiyalar bir yilda

$S_{12} = S_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}61S_0$ summani tashkil etadi; har kungi bankka tashriflar $S_{365} = S_0\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2{,}714S_0$; har soatdagida $S_{8720} = S_0\left(1+\frac{1}{8720}\right)^{8720} \approx 2{,}718S_0$ va hokazoni tashkil etadi.

$\{S_n/S_0\}$ dastlabki omonatning o'sish qiymatlarining ketma-ketligi murakkab foizlar formulasiga $S = S_0\left(1+\frac{i}{100}\right)^n$ ga ko'ra $n \to \infty$ da limiti e son bo'lgan ketma-ketlik bilan bir xil ko'rish qiyin emas. Shunday qilib foizlarning uzluksiz hisoblanishidan kelgan daromad bir yilda $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_0)\cdot 100\%/S_0$ $=(e-1)100\% \approx 172\%$ ga teng.

2-misol. Inflyatsiya tempi bir kunda 1% ni tashkil etadi. Yarim yildan so'ng dastlabki summa qanchaga kamayadi.

Yechish. Murakkab foizlar formulasini qo'llasak $S = S_0\left(1-\frac{1}{100}\right)^{182}$ ni hosil qilamiz, bu yerda S_0 – dastlabki summa, 182 – yarim yildagi kunlar soni. Bu ifodaning shaklini almashtirsak $S = S_0\left[\left(1-\frac{1}{100}\right)^{-100}\right]^{-\frac{182}{100}} \approx S_0/e^{1,82}$ ni hosil qilamiz, ya'ni inflyatsiya dastlabki summani taxminan 6 marta kamaytiradi.

Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental ketma-ketlikdir va aksincha.

Yaqinlashuvchi nuqtalar ketma-ketligi uchun quyidagi xossalar o'rinli:
1) Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir.
2) Har bir chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratish mumkin.
3) n o'lchovli nuqtalar ketma-ketligi M_0 nuqtaga yaqinlashsa, u holda uning har bir qism ketma-ketligi ham M_0 nuqtaga yaqinlashadi.
4) M_0 nuqta biror-bir V nuqtalar to'plamining quyuqlanish nuqtasi bo'lsa, V to'plam nuqtalaridan M_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ketma-ketlik ajratib olish mumkin.
5) Yopiq V to'plamga tegishli nuqtalar ketma-ketligi M_0 nuqtaga yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $M_0 \in V$.

Nuqtalar ketma-ketligining limitini aniqlashda sonli ketma-ketlik limiti muhim ahamiyatga ega.

Masalan, nuqtalar ketma-ketligining limiti uchun quyidagi tasdiqlar o'rinli:

1. M_k va M_0 nuqtalar orasidagi $\{\rho(M_k, M_0)\}$ masofalardan tashkil topgan sonli ketma-ketlikning limiti nolga teng bo'lgandagina, M_0 nuqta $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligining limiti bo'ladi.

2. R^n fazoda $\{M_k(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ nuqtalar ketma-ketligi $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqtaga yaqinlashishi uchun $\lim\limits_{k\to\infty} x_m^k = x_m^0$, $m = \overline{1,n}$ tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

Masalan, $M_0(0, 4)$ nuqta $\left\{M_k\left(\frac{1}{k}, \frac{4k}{k+1}\right)\right\}$ nuqtalar ketma-ketligining limitidir, chunki $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{4k}{k+1} = 4$ munosabatlar o'rinli.

3-misol. $M_k\left(\left(1+\frac{3}{2k}\right)^k; \frac{k^2+k}{3k^2-1}\right)$, $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = ?$

Yechish. $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{3}{2k}\right)^k = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{3}{2k}\right)^{\frac{2k}{3}\frac{3}{2}} = \lim\limits_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{2k}\right)^{\frac{2k}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^2+k}{3k^2-1} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k^2+k}{k^2}}{\frac{3k^2-1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{1}{k}}{3-\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{3}$$

Demak, $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2k}\right)^k; \frac{k^2+k}{3k^2-1}\right) = \left(e^{\frac{3}{2}}; \frac{1}{3}\right)$.

5.2. Sonli qatorlar

15-ta'rif. $\{a_n\}$, $a_n \in N$ va $\{S_n\}$, $S_n = a_1 + ... + a_n \in N$, $n \in \mathbb{N}$ ketma-ketliklar juftligi qator, deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (5.1)$$

Bu yerda S_n – xususiy yig'indi, $\{a_n\}$ ketma – ketlik elementlari esa qator hadlari deb ataladi.

Agar

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S_0 < \infty$$

bo'lsa, u holda $\{a_n\}$ qator yaqinlashuvchi, deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_0 .$$

Agar

$$\lim_{n\to\infty} S_n \to \infty$$

bo'lsa, u holda $\{a_n\}$ qator uzoqlashuvchi deyiladi.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ qator uning qoldiq hadi deyiladi.

4-misol. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $|q|<1$ qator yaqinlashuvchi.

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $|q|>1$ qator uzoqlashuvchi.

Yaqinlashuvchi qatorlar quyidagi xossalarga ega:

1) Agar qator yaginlashuvchi bo'lsa, u holda uning elementlaridan iborat ketma – ketlik nolga intiladi.

2) Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda S_{01}, S_{02} ga teng bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n) = \lambda_1 S_{01} + \lambda_2 S_{02}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \to 0, & \alpha < 0, \\ \to \infty, & \alpha \ge 0 \end{cases}$ bo'ladi.

3) Agar qator yaqinlashsa, u holda uning har qanday qoldiq hadi ham yaqinlashadi. Agar qatorning qandaydir qoldiq hadi yaqinlashsa u holda qatorning o'zi ham yaqinlashadi.

Qator yaqinlashishining Koshi kriteriyasi bilan tanishib chiqamiz:

Teorema (Koshi kriteriyasi). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lishi kerakki, barcha $n > n_0$ va $p \ge 0$ lar uchun $|a_n + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

5-misol. $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ garmonik qatorni qaraymiz. Ixtiyoriy $n \in N$ da

$$\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}}_{n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n} = \frac{1}{2}$$

bo'lgani uchun agar $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ bo'lsa n_0 nomerni tanlash mumkin emas. Chunki ixtiyoriy n va $p = n-1$ holatda teoremadagi tengsizlik bajarilmaydi. Shu sababli garmonik qator uzoqlashuvchi.

Hadi nomanfiy bo'lgan qatorlarning yaqinlashish alomatlari bilan tanishamiz.

Teorema. Hadlari nomanfiy bo'lgan qator faqat va faqat bu qatorning xususiy yig'indilari ketma – ketligi yuqoridan chegaralangan bo'lgandagina yaqinlashuvchi bo'ladi.

Teorema. Agar $f(x)\ge 0,\ x\ge 1$ funksiya kamayuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ qator yaqinlashishi uchun $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarli.

6-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ qatorni qaraymiz. Bu yerda $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$. U holda

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\begin{cases}\to 0, & \alpha<1,\\ \to\infty, & \alpha\ge 1\end{cases}$$

bo'lgani uchun $\alpha<1$ bo'lsa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ qator yaqinlashadi, $\alpha\ge 1$ bo'lsa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ qator uzoqlashadi.

Garmonik qatorning uzoqlashishini oxirgi teoremadan foydalanib ham isbotlash mumkin.

Teorema (taqqoslash alomati). $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qatorlar uchun $0\le a_n\le b_n,\ n=1,2,3,...$ munosabat o'rinli bo'lsin.

1. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi;

2. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k=const<\infty$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qatorlar bir paytda yaqinlashadi va bir paytda uzoqlashadi.

7-misol. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ – qator yaqinlashuvchi, chunki $0\le\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$ bo'lib $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – qator yaqinlashuvchidir.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ – qator uzoqlashuvchi, chunki $\frac{1}{1+n}\ge\frac{1}{2\sqrt{n}}\ge 0$ bo'lib $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ – qator uzoqlashuvchidir.

Teorema (Dalamber alomati). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ limit mavjud bo'lsin. U holda,

1. Agar $l<1$ bo'lsa, qator yaqinlashadi;
2. Agar $l>1$ bo'lsa, qator uzoqlashadi.

8-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ – qator yaqinlashuvchi. Chunki $\lim_{n\to\infty}\frac{(n)!}{(n+1)!}=0$.

Teorema (Koshi alomati). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$ limit mavjud bo'lsin. U holda,

1. Agar $l<1$ bo'lsa, qator yaqinlashadi;
2. Agar $l>1$ bo'lsa, qator uzoqlashadi.

9-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ – qator yaqinlashuvchi. Chunki $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=0$.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n\ge 0$ qator ishorasi almashinuvchi qator deb ataladi.

Teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n\ge 0$, $a_n\ge a_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n\ge 0$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ – qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ – qator absolut yaqinlashuvchi qator deb ataladi. Absolut yaqinlashuvchi qator yaqinlashuvchidir.

10-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}$ – absolut yaqinlashuvchi qator. Chunki $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ – yaqinlashuvchidir.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ – qator uzoqlashuvchi va $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ – qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ – qator shartli yaqinlashuvchi qator deb ataladi.

11-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ – shartli yaqinlashuvchi qator. Chunki $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – uzoqlashuvchidir.

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k = b \cdot q^{k-1}$ ko‘rinishdagi qator geometrik qator deyiladi. Yuqorida ko‘rilgan misolda bu qator $|q|<1$ shart bajarilganda yaqinlashadi va uning yig‘indisi $\frac{b}{1-q}$ ga teng.

Geometrik progressiya moliyaviy jarayonlar tahlilida ko‘plab tatbiqlarga ega.

12-misol. To‘lovlar oqimining joriy qiymati. t davrdagi V miqdordagi mablag‘ning joriy bahosi, deb $\frac{V}{(1+i)^t}$ miqdorga aytiladi. Har yilning boshida V miqdorda pul to‘lab boriladigan to‘lovlar oqimini qaraymiz. Bir davrga mos foiz stavkasi P % ga teng bo‘lsin, $i = \frac{P}{100}$. U holda bu to‘lovlar oqimining joriy qiymati

$$PV_T = \sum_{k=0}^{T} \frac{V}{(1+i)^k}$$

ga teng. Agar to‘lovlar oqimi yetarlicha uzoq davrga davom ettirilsa,

$$PV = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=0}^{T} \frac{V}{(1+i)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V}{(1+i)^k}$$

qatorni hosil qilamiz. Bundan, $PV = \frac{V}{i}(1+i)$.

13-misol. Firmaning ma’lum mahsulotni sotish hajmi har yili $(1+g)$ koeffitsiyent bilan ortib boradi. Yillik foiz stavkasi i ga teng bo‘lsin. U holda foydaning umumiy yig‘indisi

$$GB = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=1}^{T} p(1+g)^{k-1}$$

ga teng bo‘lib, uzoqlashuvchi qatordan iborat. Keltirilgan joriy foyda

$$PVB = \lim_{\substack{T\to\infty \\ t\to\infty}} \sum_{k=1}^{T} \frac{p(1+g)^{k-1}}{(1+i)^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(1+g)^{k-1}}{(1+i)^{k-1}}.$$

Agar $g<i$ bo‘lsa, bu qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi

$$PVB = \frac{p}{1-\frac{1+g}{1+i}} = \frac{p(1+i)}{p-g}$$

ga teng.

14-misol. Ma’lum bir korxona ishlab chiqarish quvvatini oshirish maqsadga muvofiqligini tahlil qilmoqchi. Uning xarajat va daromadlari quyidagicha:

Qurilish xarajatlari	200 million 100 million	1- yilning boshida Keyingi har uch yil boshida
Tashkiliy xarajatlar	5 million	4-yilning oxiridan boshlab har yili
Daromad	30 million	4-yilning oxiridan boshlab har yili

Bank foiz stavkasi 6%. Shu holatni tahlil qilamiz. Buning uchun xarajat va daromadlarning joriy bahosini taqqoslash zarur.

$$PV_{qurilish\,xarajatlari} = \left(200 + \frac{100}{1{,}06} + \frac{100}{1{,}06^2} + \frac{100}{1{,}06^3}\right) \cdot 10^6 = 467\,301{,}195.$$

$$PV_{daromad-tashkiliy\,xarajat} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{25000000}{1{,}06^{k+4}} = \frac{25000000}{0{,}06 \cdot 1{,}06^4} = 330\,039{,}026.$$

Bundan ko'rinib turibdiki, qurilish xarajatlari uzoq vaqt davomida olinadigan daromadning umumiy miqdoridan ancha ortiq. Demak, bu loyihaga pul tikish tavsiya qilinmaydi.

15-misol. Keynisian koeffitsiyentlari modeli. Faraz qilaylik davlat iqtisodiyotga ma'lum maqsadga yo'naltirilgan A miqdorda investitsiya kiritgan bo'lsin. Bu mablag' ishchilarga va korxonalarga ajratiladi. Deylik, korxona yoki shaxslar o'z mablag'ining P% miqdorini davlatning ichki mahsulotlarini sotib olishga sarflasin. U holda investitsiya ikkinchi marotaba aylanadi va yana $\frac{AP}{100}$ miqdorda qayta effekt beradi, uchinchi aylanmada $A\left(\frac{P}{100}\right)^2$, to'rtinchisida $A\left(\frac{P}{100}\right)^3$ va hokazo. Kiritilgan A investitsiyaning umumiy effekti

$$\sum_{k=1}^{\infty} A\left(\frac{P}{100}\right)^{k-1} = \frac{P}{1 - \frac{P}{100}}$$ ga teng bo'ladi.

Misol uchun, davlat yo'l ta'mirlashga 100 million so'm sarflasin. Aholi o'z mablag'ining 60% qismini ichki mahsulotlarga sarflasin. U holda bu mablag'ning umumiy effekti

$$\frac{100\,000\,000}{1 - 0{,}6} = 250\,000\,000$$

so'mga teng bo'ladi, ya'ni, sarflanganidan 2,5 marta ortiq.

5.3. Bir va ko'p o'zgaruvchili funksiya

Funksiya tushunchasini kiritishdan oldin o'zgarmas va o'zgaruvchi tushunchalarini kiritib olamiz.

16-ta'rif. Agar biror-bir kattalik doimo faqat bitta son qiymatini saqlab qolsa, u holda bu kattalikka o'zgarmas kattalik deyiladi.

O'zgarmas kattaliklar $C = const$ ko'rinishda yozilib, ko'p hollarda $a, b, c, m, n, \ldots$ harflari bilan belgilanadi.

17-ta'rif. Agar biror-bir kattalik turli sonli qiymatlarni qabul qilsa, u holda bu kattalikka o'zgaruvchi deyiladi.

O'zgaruvchilar $x, y, z, \ldots$ harflari bilan belgilanadi.

18-ta'rif. Agar X to'plamning har bir $x \in X$ elementiga Y to'plamning bitta va faqat bitta $y \in Y$ elementi qandaydir f qonuniyat bilan mos qo'yilgan bo'lsa, u holda bu to'plamlar orasida funksional bog'lanish mavjud deyiladi va $f: X \to Y$ ko'rinishda yoziladi.

Shuningdek, f funksiya X to'plamni Y to'plamda akslantiradi, deb ham ataladi.

Agar $X \subset R^1$, $Y \subset R^1$ bo'lsa, u holda f qonuniyat funksiya deb ataladi. Biz haqiqiy sonlar to'plamida ish ko'rganimiz sababli bundan keyin f qonuniyat o'rniga funksiya atamasini ishlatamiz.

$x \in X$ to'plam f funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(f)$ kabi belgilanadi. $y \in Y$ to'plam f funksiyaning qiymatlar to'plami deyiladi va $E(f)$ kabi belgilanadi.

Shuni ham alohida ta'kidlash kerakki, $y = f(x)$ funksiya:

R^1 fazoda $y = f(x)$ ko'rinishda;

R^2 fazoda $y = f(x_1, x_2)$ yoki $y = f(\bar{x}(x_1, x_2))$ ko'rinishda;

R^3 fazoda $y = f(x_1, x_2, x_3)$ yoki $y = f(\bar{x}(x_1, x_2, x_3))$ va R^n fazoda $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yoki $y = f(M)$ $(M(x_1, x_2, ..., x_n))$ ko'rinishda yoziladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasi uning ma'noga ega bo'lgan nuqtalar (sonlar) to'plamidan iborat bo'ladi.

Masalan:

1) $y = f(x) = \ln x$ funksiya $V = \{x \in R^1 : x > 0\}$ to'plamda berilgan bir o'zgaruvchili funksiya;

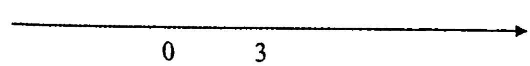
2) $y = f(M) = f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ funksiya $V = \{M(x_1, x_2) \in R^2 \setminus O(0, 0)\}$ to'plamda berilgan ikki o'zgaruvchili funksiya;

3) $y = f(M) = f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ funksiya $V = \{M(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \setminus (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 9)\}$ to'plamda berilgan uch o'zgaruvchili funksiya.

16-misol. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plamini aniqlang:

1) $y = \log_2(3 - x)$; 2) $y = \sqrt{4x_1 - x_2^2}$.

Yechish. 1) Bir o'zgaruvchili $y = \log_2(3 - x)$ funksiya aniqlanish sohasi $D(f)$: $3 - x > 0$ tengsizlik yechimidan iborat. $D(y) = (-\infty : 3) \in R^1$. Son o'qida $(-\infty; 3)$ ochiq nurdan iborat.



Funksiya qiymatlari to'plami esa sonlar o'qidan iborat, ya'ni $E(f) = R^1$.

2) Funksiya ikki o'zgaruvchili bo'lib, $y=\sqrt{4x_1-x_2^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=\left\{M(x_1,x_2)\in R^2;\, x_1\geq\frac{x_2^2}{4}\right\}$. Funksiyaning qiymatlari to'plami $E(f)=[0;\infty)$.

Biz asosan, bir o'zgaruvchili funksiya grafigi va xossalari bilan tanishib chiqamiz. Asosiy tushunchalarni esa ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun beramiz.

$f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi xususiy qiymati $f(a)$ kabi yoziladi. Masalan, $f(x)=3x^2+5x-7$ bo'lsa $f(0)=-7$, $f(1)=1$ bo'ladi.

$f(x)$ funksiyaning grafigi deb, mumkin bo'lgan $(x,f(x)),\, x\in D(f)\subset R^1$ juftliklarning xOy tekislikdagi geometrik o'rniga aytiladi.

Masalan, $y=\sqrt{1-x^2}$ funksiyaning grafigi markazi $O(0,0)$ va radiusi $R=1$ bo'lgan yuqori yarim aylanadan iborat.

$f(x)$ funksiya berilgan, deyiladi, agar ma'lum x uchun y ning qiymatini topish mumkin bo'lgan qoida mavjud bo'lsa. Odatda, funksiya uchta usulda beriladi: analitik (takomillashgan usul, chunki matematik analiz metodlarini qo'llab $y=f(x)$ funksiyani to'la tekshirish mumkin), jadval va grafik.

R^1 fazoda V qism to'plam va unda aniqlangan $y=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

19-ta'rif. Agar har qanday $x\in V$ uchun $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$ tenglik o'rinli bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya V to'plamda juft (toq) funksiya deyiladi.

Juft funksiya grafigi Oy o'qiga nisbatan simmetrik, toq funksiyaning grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Masalan, $y=x^{2n}$, $n\in N$, $y=\sqrt{1+x^2}$, $y=\ln|x|$ - juft funksiyalar; $y=x^{2n-1}$, $n\in N$, $y=\sin x$ - toq funksiyalar; $y=x-2$, $y=\sqrt{x}$ funksiyalar juft ham emas va toq ham emas.

20-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya uchun shunday bir musbat T son mavjud bo'lsaki, funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli har qanday x va $x+T$ nuqtalar uchun $f(x+T)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya davriy funksiya deyiladi.

Bu yerda T soni funksiya davri deyiladi.

Amalda funksiya davrlari ichidan eng kichik davrini topish masalasi qo'yiladi, qolgan barcha davrlar uning butun karralisidan iborat bo'ladi.

Masalan, $y=5\sin(0{,}25\pi x)$ funksiyaning eng kichik musbat davri

$$T=\frac{2\pi}{0{,}25\pi}=8.$$

21-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $V\in R^1$ to'plamda aniqlangan bo'lib, uning biror-bir V_1 qism to'plamidan ixtiyoriy ravishda tanlanadigan x_1 va x_2 nuqtalar uchun $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)\le f(x_2))$ munosabat bajarilsa, u holda $y=f(x)$ funksiya V_1 to'plamda o'suvchi (kamaymaydigan) funksiya deyiladi.

22-ta'rif. Agarda $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli V_1 to'plamdan ixtiyoriy ravishda tanlanadigan ikki x_1 va x_2 nuqtalar uchun $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\,(f_1(x_1)\ge f(x_2))$ tengsizlik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya V_1 to'plamda kamayuvchi (o'smaydigan) funksiya deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar qat'iy monoton funksiyalar deyiladi.

Masalan, $y=3x-2$ funksiya o'zining R^1 aniqlanish sohasida qat'iy monoton o'suvchi funksiyaga misol bo'lsa, $y=-3x-2$ funksiya esa kamayuvchi funksiyaga misol bo'la oladi.

23-ta'rif. $y=f(x)$ funksiya $D(f)\subseteq R^1$ sohada aniqlangan bo'lib, $E(f)$ soha uning qiymatlar to'plami bo'lsin. Agar bu funksiya uchun $\forall\, x_1, x_2 \in D(f),\ x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ munosabat bajarilsa, u holda, har bir $y\in E(f)$ songa $x=g(y)$ tenglikni qanoatlantiruvchi aniq bir $x\in D(f)$ sonni mos qo'yish mumkin, boshqacha aytganda, $E(f)$ to'plamda berilgan $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=g(y)$ funksiyani aniqlash mumkin.

Agar $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=g(y)$ funksiya mavjud bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyaning qiymatlari to'plami $E(f)$ unga teskari $x=g(y)$ funksiya uchun aniqlanish sohasi, $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ esa $x=g(y)$ teskari funksiya uchun qiymatlar to'plami bo'ladi.

24-ta'rif. $[a, b]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton va uzluksiz $y=f(x)$ funksiya, $[f(a), f(b)]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton va uzluksiz $x=g(y)$ teskari funksiyaga ega.

Masalan, $y=\sin x$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton o'suvchi va uzluksiz bo'lganligi sababli, u $[-1, 1]$ kesmada aniqlangan, qat'iy o'suvchi va uzluksiz $x=\arcsin y$ teskari funksiyaga ega.

O'zaro teskari $f(x)$ va $g(x)$ funksiya grafiklari birinchi va uchinchi chorak simmetriya o'qi $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi.

25-ta'rif. Agar $V_1\subset D(f)$ nuqtalar to'plamida berilgan $y=f(x)$ funksiyaning V_1 to'plamda erishadigan qiymatlar to'plami yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya V_1 to‘plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

Demak, $y=f(x)$ funksiya yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lsa, u holda shunday K son mavjud bo‘ladiki, barcha $M\in V_1$ nuqtalar uchun $f(M)\le K$ $(f(M)\ge K)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

26-ta’rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $V_1\in D(f)$ nuqtalar to‘plamida ham quyidan, va ham yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya V_1 to‘plamda chegaralangan funksiya deb ataladi.

Agar $V_1=D(f)$ bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya aniqlanish sohasida chegaralangan deyiladi va uning qiymatlari to‘plami chegaralangan sonlar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

17-misol. 1) Bir o‘zgaruvchili $y=x^2$ funksiya R^1 aniqlanish sohasida quyidan chegaralangan funksiyadir, chunki $E(f)=[0;\infty)$;

2) $y=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ funksiya o‘z aniqlanish sohasi $D(f)=\{M(x_1,x_2)\in R_2\setminus x_1^2+x_2^2\le 1\}$ to‘plamda chegaralangandir, chunki $E(f)=[0;1]$.

27-ta’rif. $y=f(x)$ funksiya $V\subset R^n$ qavariq to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. Agar V qavariq to‘plamga tegishli har qanday $M_1(x_1^1,x_2^1,...,x_n^1)$ va $M_2(x_1^2,x_2^2,...,x_n^2)$ nuqtalar va ixtiyoriy $0\le\alpha\le 1$ son uchun

$$f(\alpha M_1+(1-\alpha)M_2)\le \alpha f(M_1)+(1-\alpha)f(M_2)$$

$$(f(\alpha M_1+(1-\alpha)M_2)\ge \alpha f(M_1)+(1-\alpha)f(M_2))$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda, $y=f(x)$ funksiya V to‘plamda qavariq (botiq) funksiya deyiladi.

Masalan, $y=x^2$ funksiya R^1 fazoda botiq funksiyaga misol bo‘lsa, $y=-x^2$ funksiya esa R^1 fazoda qavariq funksiyaga misol bo‘ladi.

n o‘zgaruvchili chiziqli $y=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$ funksiya R^n fazoda bir vaqtda ham qavariq va ham botiq funksiyadir.

Qavariq funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

1) $f(M)$ funksiya V to‘plamda botiq bo‘lgandagina, $f(M)$ funksiya V to‘plamda qavariq funksiya bo‘ladi.

2) $f_1(M)$ va $f_2(M)$ funksiyalar V to‘plamda qavariq bo‘lsa, ularning ixtiyoriy nomanfiy k_1 va k_2 koeffitsiyentli chiziqli $k_1f_1(M)+k_2f_2(M)$ kombinatsiyalari ham V to‘plamda qavariq bo‘ladi.

3) $f(M)$ funksiya V to'plamda qavariq bo'lib, $P=\{M\in V:\ f(M)\le b\}$ to'plam bo'sh bo'lmasin. U holda P to'plamning o'zi ham qavariq to'plamdir. Bu yerda b ixtiyoriy son.

Botiq funksiyalar ham yuqoridagi xossalarga o'xshash xossalarga ega.

$V\subset R^n$ to'plamda aniqlangan $y=f(u_1, u_2, ..., u_n)$ berilgan bo'lib, har bir $M(x_1\ x_2, ..., x_n)\in D\subset R^n$ nuqtaga $N(u_1\ u_2, ..., u_n)\in D\subset R^n$ nuqtani mos qo'yish mumkin, ya'ni

$$u_1=\varphi_1(x_1\ x_2, ..., x_n),\ u_2=\varphi_2(x_1\ x_2, ..., x_n),\ ..., u_n=\varphi_n(x_1\ x_2, ..., x_n)$$

bo'lsin. U holda $V\subset R^n$ to'plamda

$$y=f(\varphi_1(M), \varphi_2(M), ..., \varphi_n(M))$$

funksiya aniqlangan va $x_1\ x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan esa $D\subset R^n$ to'plamda murakkab funksiya deyiladi.

Masalan, $y=\sqrt{16-u^2}$, $V=\{-4\le u\le 4\}$; $u=2\cos 4x,\ x\in R^1$ bo'lsin. U holda R^1 fazoda $y=\sqrt{16-4\cos^2 4x}$ murakkab funksiyani aniqlash mumkin.

$V\subseteq R^n$ to'plamda aniqlangan $F(u_1, u_2, ..., u_n)=0$ tenglamaga oshkormas funksiya deyiladi. Masalan, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ funksiyalar oshkormas funksiyalardir.

E to'plamda $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ funksiyalar berilgan bo'lib, $x=\varphi(t)$ funksiyaga teskari $t=\varphi^{-1}(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. U holda E to'plamda $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ murakkab funksiya berilgan deyiladi.

E to'plamda berilgan $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ funksiyalar $y=\psi(\varphi^{-1}(x))=f(x)$ funksiyaning parametrik ko'rinishi deyiladi.

18-misol. 1) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t \end{cases}$ $t\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ funksiyalar $y=\sin(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ funksiyaning parametrik ko'rinishi bo'ladi.

2) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t \end{cases}$ $t\in[0, 2\pi]$ funksiyalar $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellips tenglamasining parametrik ko'rinishi bo'ladi.

Iqtisodiy nazariya va amaliyotda funksiya keng qo'llaniladi. Iqtisodda uchraydigan funksiyalar turlari rang barangdir, chiziqli funksiyadan tortib to maxsus funksiya deb nomlanuvchi funksiyalargacha qo'llaniladi.

Yuqorida keltirilgan elementar funksiyalar deb nomlangan funksiyalarning deyarli barchasi iqtisodda qo'llaniladi.

Iqtisodda tez-tez uchraydigan va o'zining iqtisodiy nomiga ega bo'lgan funksiyalar qatoriga quyidagilarni keltirish mumkin:

1. Foydalilik funksiyasi. Bu funksiya foydalilikni ma'lum bir faktorlar ta'siriga, bog'liqligini aniqlaydi.

2. Ishlab chiqarish funksiyasi. Bu funksiya ishlab chiqarish faoliyati natijasini, shu faoliyatni aniqlovchi faktorlarga bog'liqligini aniqlaydi.

3. Mahsulot hajmi funksiyasi. Bu funksiya ishlab chiqarishda mahsulot hajmining xomashyo zaxirasi va iste'molchiga bog'liqligini aniqlaydi.

4. Sarf-xarajat funksiyasi. Bu funksiya ishlab chiqarishda sarf-xarajatlarni mahsulot hajmi bilan bog'liqligini aniqlaydi.

5. Talab, iste'mol va taklif funksiyalari. Bu funksiyalar mahsulotga bo'lgan talab, iste'mol va taklif hajmlarining turli faktorlarga (masalan, narx-navo, daromad va boshqa) bog'liqligini aniqlaydi.

Ma'lum iqtisodiy jarayonlar ko'p faktorlar ta'siri natijasida yuzaga kelgani uchun yuzaga keladigan funksiyalar ko'p o'zgaruvchili funksiyalar bo'ladi.

Iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilishda foydalilik funksiyasi tushunchasidan keng foydalaniladi. Bu funksiya iste'molchining biror bir tovarlar vektorini boshqa tovarlar vektoridan afzal ko'rishini ifodalaydi.

Deylik, iste'molchi n turdagi tovarlardan foydalansin. Bu tovarlar miqdorini bildiruvchi tovarlar vektorini X satr vektor sifatida ifodalaymiz. X va Y tovarlar orasida $X \succ Y$ afzallik munosabatini kiritamiz. Bu munosabat iste'molchining X tovarlar vektorini Y tovarlar vektoridan afzal ko'rishini ifodalaydi. Misol uchun $X > Y$ bo'lsa, u holda $X \succ Y$. Bir xil afzallikka ega bo'lgan X va Y tovarlar vektorlarini farqlanmaydigan tovarlar vektorlari deb ataymiz va $X \sim Y$ kabi belgilaymiz.

Afzallik munosabati odatda foydalilik (utility) funksiyasi deb ataluvchi $U(X)$ funksiya yordamida aniqlanadi.

28-ta'rif. Ixtiyoriy X, Y tovarlar vektorlari uchun $X \succ Y \Leftrightarrow U(X) > U(Y)$ va $X \sim Y \Leftrightarrow U(X) = U(Y)$ shartlarni qanoatlantiruvchi $U(X)$ funksiyani foydalilik funksiyasi deb ataymiz.

Odatda foydalilik funksiyasining qiymati emas, turli tovarlar vektoriga mos qiymatlari orasidagi "katta", "kichik" yoki "teng" kabi munosabatlar muhim hisoblanadi. Foydalilik funksiyasi har bir alohida o'zgaruvchisi bo'yicha (boshqa o'zgaruvchilar o'zgarmas bo'lganda) o'suvchi funksiya bo'ladi.

Muhim bo'lgan foydalilik funksiyalaridan biri CES-funksiya deb ataladi. Bu funksiya nomidagi CES (constant elasticity of substituion) qisqartmasi alternativ (bir-birining o'rnini bosuvchi) tovarlarning o'zgarmas elastiklikka egaligini bildiradi. Ikki o'zgaruvchili holda bu funksiya quyidagicha:

$$U(x_1, x_2) = \left(\alpha x_1^{1/\rho} + \beta x_2^{1/\rho}\right)^{\rho}.$$

Bu funksiyaning xususiy holatlarini qaraymiz.

1) $\rho = 1$ da chiziqli foydalilik funksiyasi hosil bo'ladi

$$u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2.$$

2) $\rho \to -\infty$ da Leontev funksiyasi, deb ataluvchi foydalilik funksiyasi hosil bo'ladi

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}.$$

3) Agar $\alpha+\beta=1$ bo'lsa, $\rho\to 0$ da Kobb-Duglas funksiyasi hosil bo'ladi

$$u(x_1,x_2)=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}.$$

Bu funksiyalarni n ta o'zgaruvchi holatiga ham umumlashtirishimiz mumkin.

19-misol. Foydalilik funksiyasi $U(x_1,x_2,x_3)=0,2\lg x_1+0,3\lg x_2+0,5\lg x_3$ formula bilan aniqlangan bo'lsin. $X_1(10;100;100)$, $X_1(100;10;100)$ tovarlar vektorlarini afzallik munosabati yordamida tekshiring.

Yechish. Foydalilik funksiyasining qiymatlarini topamiz:

$$U(X_1)=U(10,100,100)=1,8;\ U(X_2)=U(100,10,100)=1,7$$

Bundan, $U(X_1)>U(X_2)\Rightarrow X_1\succ X_2$.

Foydalilik funksiyasi umuman olganda yagona aniqlanmaydi.

Yuqoridagi misolda keltirilgan $U(x_1,x_2,x_3)=0,2\lg x_1+0,3\lg x_2+0,5\lg x_3$ foydalilik funksiyasi yordamida $10^{U(x_1,x_2,x_3)}=x_1^{0.2}x_2^{0.3}x_3^{0.5}$ Kobb-Duglas foydalilik funksiyasini hosil qilish mumkin.

Kobb-Duglas funksiyasidan ishlab chiqarish funksiyasi sifatida ham foydalaniladi.

$$Q(L,K)=A\cdot L^{\alpha}K^{\beta}$$

ishlab chiqarish funksiyasida Q–ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori, L - mehnat resurslariga sarf xarajatni, K - ishlab chiqarishga sarflangan kapitalni, A - texnologik koeffitsiyent, α va β elastiklik koeffitsiyenlarini ifodalaydi. Misol uchun, $Q=L^{0,73}K^{0.27}$ ifodada umumiy ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorida mehnat resurslari ulushi 73%, kapital mablag'lar ulushi 27% ni tashkil qilishini bildiradi.

Foydalilik funksiyasi yordamida bitta sodda iqtisodiy modelni qaraymiz. Faraz qilaylik iste'molchining jami mablag'i (budjeti) S ga teng bo'lsin. U bu mablag'ni bir birligi narxi $p_1,p_2,...,p_n$ bo'lgan n xil tovar uchun sarflashi mumkin. Bu jarayondagi $U(x_1,x_2,...,x_n)$ foydalilik funksiyasi berilgan bo'lsin. Eng afzal tovarlar vektorini topish masalasini qaraymiz.

Tovarlar vektori X bo'lsin. Narxlar vektorini P kabi aniqlaymiz. Bu masalada quyidagi cheklovlar mavjud.

1) Har bir turdagi sotib olingan tovarlar miqdori nomanfiy, ya'ni $X\geq 0$.

2) Iste'molchi budjeti cheklangan $(P,X)=p_1x_1+....p_nx_n\leq S$.

Bu cheklovlar budjet to'plami $B(P,S)$ ni aniqlaydi. Demak bizdan $B(P,S)$ budjet to'plamida $U(X)$ foydalilik funksiyasini maksimallashtirish talab qilinadi.

Ma'lumki, ikki tovar qaralgan holatda $B(P,S)$ budjet to'plami 1-chorakda joylashgan katetlari koordinata o'qlarida yotuvchi to'g'ri burchakli uchburchakdan, uch tovar holatida uchburchakli piramidadan iborat bo'ladi.

5.4. Funksiya limiti va uzluksizligi

Amaliyotda funksiya tushunchasi katta ahamiyatga ega bo'lganligi sababli biz funksiyani atroflicha o'rganib chiqamiz. Bizga ma'lumki, R^1 fazoda x_0 nuqtaning δ atrofi quyidagicha aniqlanadi:

$$U_\delta(x_0)=\{x:|x-x_0|<\delta\}.$$

$y=f(x)$ funksiya biror $V\in R^1$ to'plamda aniqlangan bo'lsin.

29-ta'rif (Koshi ta'rifi). Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchu shunday $\delta(\varepsilon)>0$ son mavjud bo'lib, $|x-x_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda A soni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi.

Bu limit quyidagicha yoziladi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

30-ta'rif (Geyne ta'rifi). Agar V to'plamga tegishli ixtiyoriy yaqinlashuvchi, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, $x_1,x_2,\dots,x_n$ ketma-ketlik uchun $y=f(x)$ funksiyaning $f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_n)$ qiymatlaridan tashkil topgan ketma-ketlik ham A soniga yaqinlashsa, intilsa, u holda A soni $f(x)$ funksiyaning $x\to x_0$ dagi limiti deyiladi.

Bu limit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ ko'rinishda yoziladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan birini qo'llab $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{2x-1}=3$ tengliklarni isbotlash mumkin.

V to'plamda aniqlangan limitga ega funksiyalar o'zlarining quyidagi xossalari bilan xarakterlanadi:

1. $y=f(x)$ funksiya $x\to x_0$ da chekli limitga ega bo'lsa, u holda bu limit yagonadir;
2. $y=f(x)$ funksiya $x\to x_0$ da chekli limitga ega bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)$ atrofi mavjudki, $U_\delta(x_0)\cap V$ to'plamda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.
3. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n)=A\neq 0$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrofda funksiyaning ishorasi A sonning ishorasi bilan bir xil bo'ladi.
4. Agar biror $\delta>0$ son va barcha $x_0\in U_\delta(x_0)$ nuqtalar uchun $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x_n)=B$ bo'lib, $f(x)\leq g(x)$ bo'lsa, u holda $A\leq B$ bo'ladi.

$y=f(x)$ funksiya biror-bir $V=(a,\infty)$ nurda aniqlangan bo'lsin.

31-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday bir $K(\varepsilon)>0$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, barcha $|x|>K$ munosabatni qanoatlantiruvchi x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda b soni $f(x)$ funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti deyiladi.

$y=f(x)$ funksiyaning $x\to-\infty$ limiti ham yuqoridagi kabi ta'riflanadi.

32-ta'rif. Agar ixtiyoriy $A>0$ son uchun shunday $\delta(A)>0$ son topilsaki $0<|x-x_0|<\delta$ bo'lganda $|f(x)|>A$ tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada cheksiz limitga ega deyiladi.

Bu limitlar quyidagicha yoziladi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

Masalan, 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^x}=3$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^x}=0$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{x-2}=\infty$.

33-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ sonni topish mumkin bo'lib $x_0-\delta<x<x_0$ $(x_0<x<x_0+\delta)$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $b=f(x_0-0)$, $(b=f(x_0+0))$ son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap (o'ng) limiti deyiladi.

Bu limit quyidagicha yoziladi

$$b=f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)\quad \left(b=f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)\right).$$

Masalan, 1. $\lim\limits_{x\to 2}4^{\frac{2}{x-2}}$ funksiyada $\lim\limits_{x\to 2-0}4^{\frac{2}{x-2}}=0$, $\lim\limits_{x\to 2+0}4^{\frac{2}{x-2}}=\infty$.

2. $y=f(x)=\begin{cases}(x-2)^2+1, & agar\ x\geq 2;\\ (x-2)^2-1, & agar\ x<2\end{cases}$ funksiyada $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=-1$.

$y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada limiti mavjud bo'lishi uchun bu funksiya shu nuqtada chap va o'ng limitlarga ega bo'lib, $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

Quyidagi teoremalar limitlar haqidagi asosiy teoremalar deb atalib, funksiya limitlarining asosiy xossalarini ifodalaydi: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ bo'lsin. U holda

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0).$

Yuqoridagi teoremalar funksiyalarning limitlarini hisoblashda qo'llaniladi. Masalan,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to\pi}\sin x}{\lim\limits_{x\to\pi}\cos x}=0;$$

$$\lim_{x\to\pi}(\sin x\cos x)=\lim_{x\to\pi}\sin x\lim_{x\to\pi}\cos x=0;$$

$$\lim_{x\to\pi}(\sin x+\cos x)=\lim_{x\to\pi}\sin x+\lim_{x\to\pi}\cos x=-1.$$

Amaliyotda ko'p qo'llaniladigan ajoyib limitlar nomini olgan limitlarni keltirib o'tamiz:

1- ajoyib limit: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$;

2- ajoyib limit: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Bu ajoyib limitlarning boshqa shakllari ham mavjud bo'lib ular quyidagilardir:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Uzluksizlik tushunchasi funksiyaning asosiy xarakteristikalaridan biri bo'lib, u amaliyotda muhim ahamiyatga ega.

Faraz qilamiz, $y=f(x)$ funksiya $V\subseteq R^1$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $x_0\in V$ bo'lsin.

34-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun biror $\delta(\varepsilon)>0$ son topilib, $|x-x_0|<\delta$ o'rinli bo'lganda $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiyaning nuqtada uzluksizligi shu nuqta atrofida argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning cheksiz kichik orttirmasi mos kelishidir.

Masalan, $y=\cos x$ funksiya har bir $x_0\in R^1$ nuqtada uzluksiz, haqiqatan ham

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos(x_0+\Delta x)-\cos(x_0)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=0.$$

Nuqtada uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar bajarish mumkin. Nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiya shu nuqtaning kichik δ atrofida chegaralangan bo'lib o'z ishorasini saqlaydi.

Agar funksiya V to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya V to'plamda uzluksiz deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya shu oraliqda chegaralangan bo'ladi va o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi.

Uzluksiz funksiyalar uchun ba'zi teoremalarni ketirib o'tamiz.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalaridagi qiymatlari turli ishorali $\left(f(a)f(b)<0\right)$ bo'lsa, u holda kamida bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki, bunda $f(c)=0$ tenglik bajariladi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va $f(a)\neq f(b)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $f(a)<C<f(b)$ uchun shunday $\xi\in[a,b]$ son topiladiki bunda $f(\xi)=C$ bo'ladi.

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$ tenglik bajarilishi shart.

Masalan, $f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ funksiya 0 nuqtada chapdan uzluksiz, chunki $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}}=0=f(0)$.

35-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya uchun $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$ shartning bittasi bajarilmasa yoki u x_0 nuqtada aniqlanmagan bo'lsa, u holda x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

36-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chapdan va o'ngdan limitlari mavjud bo'lib, ular o'zaro teng bo'lmasa, ya'ni $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ bo'lsa, u holda x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi.

37-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada limiti mavjud, lekin bu limit funksiyaning x_0 nuqtada erishadigan $y_0=f(x_0)$ qiymatidan farq qilsa yoki $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan bo'lsa, u holda x_0 nuqta bartaraf etiladigan uzilish nuqta deb ataladi.

38-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada chap yoki o'ng limitlarining hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa, u holda x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi.

$|f(x_0-0)-f(x_0+0)|$ ayirma $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi.

Masalan, $f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ funksiya $x=0$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=1\neq 0=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$.

Masalan, $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning $x=0$ nuqtada limiti mavjud (1-ajoyib limit). Lekin, bu funksiya $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, birinchi tur uzilish nuqta. Bu uzilishni funksiyaga uning shu nuqtadagi limit qiymatini qo'yish orqali yo'qotish mumkin, ya'ni

$$f_1(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

Bu funksiya barcha son o'qida uzluksizdir.

$y=f(M)$, $M(x_1,...,x_n)\in V\subseteq R^n$ funksiya va M_0 urinish nuqtasi berilgan bo'lsin.

39-ta'rif. Agar A nuqtaning ixtiyoriy $U(A)$ atrofi uchun M_0 nuqtaning $U(M_0)$ atrofi mavjud bo'lib, $f(M\cap U(M_0))\subset U(A)$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda A nuqta $f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi limiti deb ataladi.

40-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta(\varepsilon)>0$ topilib, $\rho(M_0,M)<\delta$ munosabat o'rinli bo'lgan barcha $M\in V$ nuqtalar uchun $|f(M)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda b soni $f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi limiti deyiladi va u quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=b,\quad \lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \cdots\cdots\\ x_n\to x_n^0}} f(x_1,x_2,...,x_n)=b$$

20-misol. 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{3x^2+4y}{x^3+y+7}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ funksiya limiti mavjud emas. Chunki $(x_k,y_k)=\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$ ketma-ketlik $R\to\infty$ da $(0,0)$ nuqtaga intiladi. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ funksiya $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$ ga teng, ya'ni $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\frac{1}{2}$.

$(x_n',y_n')=\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)$ ketma-ketlik ham $R\to\infty$ da $(0,0)$ nuqtaga intiladi.

$f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{2}$ ya'ni $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=-\frac{1}{2}$ bu esa 1-ta'rifga zid.

Ma'limki, $y=f(M)$, $M\in V\subseteq R^n$ funksiyaning M_0 nuqtadagi limitini qarayotganimizda bu nuqta V to'plamga tegishli bo'lishi ham tegishli bo'lmasligi ham mumkin. Agar $M_0\in V$ bo'lib $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=b$ limit mavjud bo'lsa, u holda bu limit qyidagicha yoziladi:

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=b=f(M_0)$$

va $y=f(M)$ funksiya M_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar V to'plam M_0 nuqtaning qandaydir $U(M_0)$ atrofini ham o'z ichiga olsin. U holda $y=f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi barcha $U(M_0)$ atrofi bo'yicha limitiga har tomonlama limit deyiladi.

21-misol. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, $(x,y)\in R^2\setminus O(0;0)$ funksiyaning $O(0;0)$ nuqtadagi limiti mavjudligini turli yo'nalishlar va $y=x^2$ parabola bo'yicha o'rganamiz.

1) $x=at,\ y=bt\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(at,bt)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{a^2bt}{a^4t^2+b^2}\to 0;$

2) $y=x^2\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(x,x^2)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{x^2x^2}{x^4+(x^2)^2}=\dfrac{1}{2}.$

Demak, bu funksiyaning har tomonlama limiti mavjud emas.

V bobga doir savollar

1. R^n fazoda nuqta atrofi deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
2. Yopiq va ochiq nuqtalar to'plamlarini ta'riflang. Ularga misollar keltiring.
3. Nuqtalarning chiziqli qavariq kombinatsiyasi, deb nimaga aytiladi?
4. Qavariq nuqtalar to'plamining chetki nuqtasi, deb, qanday nuqtaga aytiladi?
5. Qator, deb nimaga aytiladi?
6. Geometrik qatorni yozing.
7. Qatorning qoldig'i nima?
8. Garmonik qatorni yozing. U yaqinlashuvchimi?
9. Koshi kriteriyasi yordamida qatorni yaqinlashishga qanday tekshiramiz?
10. Qanday qatorga musbat qator deyiladi?
11. Musbat qatorlarni taqqoslash deganda nimani tushunasiz?
12. Dalamber alomatini ayting.
13. Koshining radikal, integral alomatini ayting.
14. Bir o'zgaruvchili funksiyalarning juft-toqligini aniqlashni misollar yordamida tushuntiring.
15. Bir o'zgaruvchili funksiyalarning chegaralanganligi qanday aniqlanadi?
16. Teskari funksiya tushunchasiga ta'rif bering.

17.Funksiyalarning davriyligi, monotonligini misollar yordamida tushuntiring.
18.To'plamda qavariq (botiq) funksiyalarni tushuntiring.
19.Nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiya xossalarini keltiring.
20.Foydalilik funksiyasi va Kobb – Duglas funksiyasini tushuntiring.
21.Bir o'zgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plamini ta'riflang. Misollar keltiring.
22.Bir o'zgaruvchili funksiyalarning ayrim xossalarini aytib bering.
23.Bir o'zgaruvchili funksiyalarning juft-toqligi qanday aniqlanadi?
24.To'plamda o'suvchi, kamayuvchi funksiyalarga misollar keltiring.
25.Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami qanday aniqlanadi? Misollar keltiring.
26.Funksiya limitini tushuntiring.
27.Ajoyib limitlarni tushuntiring.
28.Bir tomonlama limitlarni tushuntiring.
29.Limitlar haqida asosiy teoremalarni keltiring.
30.Funksiyaning uzluksizligini tushuntiring.

V bobga doir misol va masalalar

1. Limitlarni hisoblang.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n-1}{12n^2-7n-8}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{12}{n+2}-\dfrac{1}{n^2-4}\right)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^3+3n-1}}{\sqrt[3]{8n^3+4n-7}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-3n}}{5}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{n^2+5}\sin n$.

2.Taqqoslash teoremalaridan foydalanib, qatorni yaqinlashishga tekshiring. Berilgan qator bilan taqqoslanadigan qatorning umumiy hadini ko'rsating.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{arctgn+1}{n^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+1}{2^n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n^2+n+1}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\ln\dfrac{n+1}{n}$.

3. Dalamber yoki Koshi alomatlari yordamida qatorlarni yaqinlashishga tekshiring.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!2^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{n!2^n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\dfrac{3n+2}{2n+1}\right)^n$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$.

4. Koshining integral alomatidan foydalanib qatorni yaqinlashishga tekshiring.

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$.

5. Funksiya grafigini yasang.

a) $y=2^x$; b) $y=\sqrt{x^2}$; c) $y=2^{|x|}$; d) $y=2^{-|x|}$; e) $y=\sin x$.

6. Limitlarni hisoblang.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2x}{\cos x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+2}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-3^x}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{3/x^2}$; g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$; h) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

7. Bir tomonlama limitlarni toping.

a) $\lim\limits_{x\to 4\pm 0}\dfrac{|x-4|}{x-4}$; b) $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x+3}{9-x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}\pm 0}\dfrac{|tg(\pi-4x)|}{x-\frac{\pi}{4}}$; d) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

8. Funksiyani uzluksizlikka tekshiring va grafigini yasang.

a) $y=\dfrac{|x|}{x}$. b) $y=\begin{cases}x^2, x\neq 0,\\ 3, x=0.\end{cases}$ c) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<1,\\ 3x, & x\geq 1.\end{cases}$ d) $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$.

e) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$. f) $y=\dfrac{\sin x}{x}$. g) $y=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$. h) $y=\cos\dfrac{1}{x}$. i) $y=\begin{cases}1-x, & x<2,\\ 1+x, & x\geq 2.\end{cases}$

9. F doimiy xarajatlar (ishlab chiqarilgan mahsulotning x birligi soniga bog'liq bo'lmagan) bir oyda 125 ming pul birligini, $V(x)$ o'zgaruvchan xarajatlar (x ga proporsional) mahsulotning bir birligi uchun 700 pul birligini tashkil etadi. Mahsulot birligining narxi 1200 pul birligi. Daromad a) 0 ga, b) bir oyda 105 ming pul birligiga teng bo'lgandagi x mahsulot hajmini toping.

10. Takror operatsiyalarni bajarishda y (min) bajarish davomiyligi bu operatsiyalarning x soni bilan $y=\dfrac{a}{x+c}$ bog'liqlik bilan bog'langan. $x=20$ da $y=12$ va $x=200$ da $y=50$ ekanligi ma'lum bo'lsa, 50 ta operatsiyada ish necha daqiqada bajarilishini aniqlang.

11. Korxona narxi 150 ming pul birligi bo'lgan avtomobillarni sotib oldi. Har yilgi amortizatsiya normasi 9% ni tashkil etadi. Avtomobil narxining vaqtga bog'liqligini chiziqli, deb faraz qilib avtomobilning 4,5 yildan keyingi narxini toping.

12. Biror turdagi tovarning y iste'mol darajasining oila daromadi darajasiga x ga bog'liqligi $y=a-\dfrac{b}{x+c}$ formula bilan ifodalanadi. Oila daromadi darajasi 158 shartli pul birligida iste'mol darajasini toping. Bunda $x=50$ da $y=0$; $x=74$ da

$y=0{,}8$; $x=326$ da $y=2{,}3$ ekanligi ma'lum.

13. y mahsulotni ishlab chiqarishga ketgan xarajatlar $y=100+10x$ tenglama bilan ifodalanadi. Bu yerda x –oylar soni. Mahsulotni sotishdan tushgan daromad $y=50+15x$ tenglama bilan ifodalanadi. Qaysi oydan boshlab ishlab chiqarish rentabelli bo'ladi.

Tayanch so'z va iboralar: Ketma-ketlik, nuqtaning atrofi, yaqinlashuvchi ketma-ketlik, ketma-ketlik limiti, fundamental ketma-ketlik, chegaralangan ketma-ketlik, sonli qatorlar, xususiy yig'indi, qator yig'indisi, qatorning qoldig'i, garmonik qator, yaqinlashish alomatlari, musbat hadli qatorlar, funksiya, funksiyaning aniqlanish sohasi, davriy funksiya, juft funksiya, toq funksiya, bir o'zgaruvchili funksiya limiti, bir tomonlama limitlar, cheksiz kichik miqdor, cheksiz katta miqdor, ko'p o'zgaruvchili funksiya limiti, ko'p o'zgaruvchili funksiya uzluksizligi, Kobb – Duglas funksiyasi.

6 BOB. DIFFERENSIAL HISOB

6.1. Bir o'zgaruvchili funksiya hosilasi va differensiali. Yuqori tartibli hosila va differensiallar

$y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada va uning biror-bir atrofida aniqlangan bo'lsin. x_0 nuqtaga Δx orttirma berib funksiyaning $f(x_0+\Delta x)$ qiymatini topamiz. U holda $\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ifoda funksiya orttirmasi deb ataladi.

1-ta'rif. Agar

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

limit mavjud bo'lsa, u holda bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (6.1)$$

Funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasini $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ko'rinishlarda ham yozish mumkin.

1-misol. $f(x)=x^2$ funksiya barcha $x\in R$ nuqtalarda hosilaga ega. Haqiqatan ham

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

2-misol. $f(x)=x^n$, $n\neq -1$ funksiya barcha $x\in R$ nuqtalarda hosilaga ega. Haqiqatan ham

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}\Delta x+C_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots-x^n}{\Delta x}=nx^{n-1}.$$

3-misol. $f(x)=\sin x$ funksiya barcha $x\in R$ nuqtalarda hosilaga ega. Haqiqatan ham

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi funksiyalarning hosilalarini hosila ta'rifiga asosan toping: 1) $f(x)=5x-2$; 2) $f(x)=\sqrt{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Quyidagi ifodalar

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\quad f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

mos ravishda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o'ng hosilalari deb ataladi.

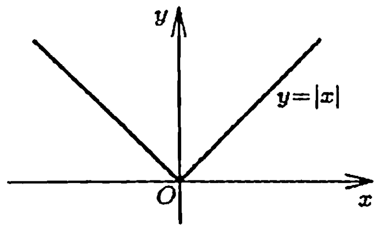
Teorema. $y = f(x)$ funksiya uchun $x = x_0$ nuqtada

$$f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz hosilaga ega deyiladi.

4-misol. $f(x) = |x|$ finksiyaning $x_0 = 0$ nuqtada bir tomonlama chekli hosilalari mavjud bo'lsa ham uning hosilasi mavjud emas. Chunki uning chap va o'ng hosilalari teng emas. Haqiqatan ham

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$



Mashqni bajaring.

1) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi bir tomonlama hosilalari mavjud emasligini isbotlang.

2) $f(x) = |x + 3|$ funksiyaning $x_0 = -3$ nuqtadagi hosilasi mavjud emasligini isbotlang.

3) $y = |\ln x|$ funksiyaning $x_0 = 1$ nuqtadagi hosilasi mavjud emasligini isbotlang.

$y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya shu nuqtada uzluksizdir.

Shuni alohida ta'kidlashimiz kerakki, yuqoridagi teoremaning teskarisi har doim ham o'rinli bo'lmaydi. Demak, uzluksiz funksiyaning hosilasi har doim ham mavjud emas. Bunga misol sifatida 4-misolni ko'rish mumkin. Chunki, $y = |x|$ funksiya barcha $x \in (-\infty, \infty)$ nuqtalarda uzluksiz bo'lsa ham $x = 0$ nuqtada uning hosilasi mavjud emas.

Hosilaning iqtisodiy ma'nosini misollarda ko'rib chiqamiz. $Q(t)$ funksiya t vaqt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini ifodalasin. t_0 momentda mehnat unumdorligi topilsin.

t_0 dan $t_0 + \Delta t$ vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori $Q(t_0)$ qiymatdan $Q(t_0 + \Delta t)$ qiymatgacha o'zgaradi, ya'ni $\Delta Q = Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)$. U holda mehnatning o'rtacha unumdorligi shu vaqt oralig'ida $u_{o'rt}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ bo'ladi. t_0 momentda mehnat unumdorligi deganda, $\Delta t \to 0$ da t_0 dan $t_0+\Delta t$ vaqt oralig'ida o'rtacha mehnat unumdorligining limit qiymati tushuniladi, ya'ni

$$u(t_o)=\lim_{\Delta t\to 0} Q_{o'rt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Shunday qilib mehnat unumdorligi – bu mahsulot hajmining o'sish tezligidir.

Marjinal mahsulot. $Q(C)$ funksiya ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorining C xarajatlar kattaligiga bog'liqligini ifodalasin. $\frac{\Delta Q}{\Delta C}$ nisbat mahsulotning ΔC hajmdagi xarajatlar kattaligiga mos bo'lgan o'rtacha kattaligidir. C_0 xarajatda limit mahsulot yoki marjinal mahsulot deganda iqtisodda quyidagi limit tushuniladi:

$$MQ(C_0)=\lim_{\Delta C\to 0} Q_{o'rt}=\lim_{\Delta C\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta C}$$

5-misol. t vaqtdagi ishlab chiqarish hajmi $Q=100t-\frac{1}{30}t^3$ formula yordamida bog'langan bo'lsin. Mehnat unumdotligini: 1) 5 vaqt birligiga mos; 2) 10 vaqt birligiga mos aniqlang.

Yechish. Bu masalaning yechimini topish uchun quyidagi ishlarni amalga oshiramiz: $u'=100-\frac{1}{10}t^2$, $u'(5)=100-\frac{1}{10}5^2=97{,}5$; $u'(10)=100-\frac{1}{10}10^2=90$.

Mashqni bajaring. 1) t vaqtdagi ishlab chiqarish hajmi $Q=100t^2-12t^3$ formula yordamida bog'langan bo'lsin. $t=10$ vaqtdagi mehnat unumdorligini aniqlang;

2) t vaqtdagi ishlab chiqarish hajmi $y(x)=40x-0{,}03x^3$ formula yordamida bog'langan bo'lsin. $x=15$ birligidagi mehnat unumdorligini aniqlang.

Shunday qilib, mahsulotning limit qiymati, limit foyda, ishlab chiqarish limiti, samaradorlik limiti, talab limiti kabi kattaliklar hosila tushunchasi bilan uzviy bog'liq.

Iqtisodiy nazariyada $y'(x)$ marjinal (limit) kattaliklarni $My(x)$ ko'rinishda belgilash qabul qilingan. Bu yerda M marjinal so'zining birinchi harfini bildiradi va limit ma'nosini beradi. Yuqorida aniqlangan limit kattaliklar iqtisodiy qonuniyatlarni isbotlashda matematik apparatlardan foydalanish imkoniyatini beradi. Buni biz differensial hisobning iqtisodiy nazariyaga ba'zi tatbiqlari sifatida ko'rib chiqamiz.

Agar firma Q miqdorda mahsulot ishlab chiqarib uni P so'mdan sotsa, u

$$R=PQ$$

miqdordagi daromadga ega bo'ladi. Firmadagi ishlab chiqarish hajmi ΔQ miqdorga o'zgarganda uning daromadi

$$MR=\frac{dR(Q)}{dQ} \qquad (6.2)$$

tezlik bilan o'zgaradi. Bu holda MR kattalik marjinal (limit) daromad deb ataladi.

6-misol. Firmaning daromadi

$$R = 100Q - 2Q^2$$

funksiya ko'rinishida ifodalangan. Firmaning marjinal daromadini $Q = 15$ uchun aniqlang.

Yechish. Yuqoridagi birinchi tenglikka asosan topamiz.

$$MR = \frac{dR(Q)}{dQ} = 100 - 4Q \quad MR = 100 - 4 \cdot 15 = 40.$$

Ishlab chiqarish hajmining o'zgarishiga bog'liq ravishda xarajat funksiyasining o'zgarish tezligi marjinal (limit) xarajat deb ataladi va u quyidagi formula yordamida topiladi:

$$MC = \frac{dC(Q)}{dQ}$$

O'rtacha xarajat funksiyasi $AC = \frac{C(Q)}{Q}$.

7-misol. O'rtacha xarajat funksiyasi $AC = \frac{24}{Q} + 15 + 3Q$, ko'rinishda berilgan. Marjinal xarajat funksiyasini toping.

Yechish.

$$C(Q) = AC \cdot Q = \left(\frac{24}{Q} + 15 + 3Q\right)Q = 24 + 15Q + 3Q^2.$$

$$MC = \frac{dC(Q)}{dQ} = 15 + 6Q.$$

Funksiya elastikligi. Talab funksiyasini tahlil qilish jarayonida Al'fred Marshall tomonidan funksiya elastiklikligi tushunchasi kiritilgan. $y = f(x)$ funksiya argumentiga Δx orttirma berilgan bo'lsin. U holda

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right)$$

tenglik bilan aniqlanadigan kattlik $y = f(x)$ funksiyaning elastikligi deb ataladi.

Elastiklik y, x o'zgaruvchilarning nisbiy o'zgarishi orasidagi proporsionallik koeffitsiyentidir. Masalan, x ning qiymati bir foizga o'zgarsa, u holda y ning qiymati taxminan $E_x(y)$ foizga o'zgaradi.

Elastikligi o'zgarmas bo'lgan ishlab chiqarish funksiyalarining nazariy va amaliy ahamiyati alohida o'ringa ega. Bu kabi funksiyalarga **CES (Constant Elasticity Substitution)** funksiyasi misol bo'la oladi:

$$y = C_0\left[CL^{-p} + (1-C)K^{p}\right]^{-1/p}.$$

Bu yerda elastiklik $\frac{1}{1-p} \neq 1$.

Mahsulotlarga talabning elastikligini to'g'ri aniqlash davlatga yangi soliqlar va aksizlarni kiritishda katta yordam beradi. Masalan, x – yuvilir mahsulotlarga qo'yilgan aksiz, y – bu mahsulotlarga bo'lgan talab bo'lsin. Faraz qilamiz davlat bu mahsulotga qo'yilgan aksizni 10% ga oshirishni mo'ljallayotgan bo'lsin. Agar talab elastikligi $E_x(y) = -0,2$ bo'lsa, u holda mahsulotga bo'lgan talab $0,2 \cdot 10\% = 2\%$ kamayishini kutishimiz kerak bo'ladi. Bu mahsulotni sotishdan davlat oladigan daromad 10% ga emas, balki 8% ga ortadi.

Elastiklikni o'rganish natijasida aholi daromadining ortishi bozordagi vaziyatning o'zgarishini baholash mumkin. Masalan, ma'lumki go'sht, yog' va tuxumlar uchun talab elastikligi aholi daromadiga nisbatan musbat, un uchun esa bu elastiklik manfiy. Demak, aholi daromadi o'sishi bilan go'sht, yog' va tuxumlarga bo'lgan talab ortadi, unga bo'lgan talab esa kamayadi. Aholi daromadi kamayishi bilan go'sht, yog' va tuxumlarga bo'lgan talab kamayadi, unga bo'lgan talab esa ortadi.

8-misol. Talab va taklif funksiyalari quyidagicha bo'lsin:

$$y = 10 - x, \quad z = 3x - 6.$$

a) talab va taklif uchun muvozanat bahoni toping;

б) muvozanat baho uchun talab va taklif funksiyalarining elastikligini toping.

Yechish. a) $y(x) = z(x) \Rightarrow 10 - x = 3x - 6 \Rightarrow x = 4$;

б) $E_x(y)$ – talab va $E_x(z)$ – taklif funksiyalarining elastikliklarini quyidagicha topamiz:

$$y = 10 - x;$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 10 - (x + \Delta x) - (10 - x) = -\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{-\Delta x}{10 - x} : \frac{\Delta x}{x} = -\frac{x}{10 - x},$$

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{x}{10 - x}\right) = -\frac{x}{10 - x}.$$

$$z = 3x - 6;$$

$$\Delta z = z(x + \Delta x) - z(x) = 3x + 3\Delta x - 6 - (3x - 6) = 3\Delta x$$

$$\frac{\Delta z}{z} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{3\Delta x}{3x - 6} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{3x}{3x - 6},$$

$$E_x(z) = \frac{x}{x - 2}.$$

$$E_x(y) = -\frac{4}{10 - 4} = -\frac{2}{3}, \quad E_x(z) = \frac{4}{4 - 2} = 2.$$

Demak, muvozanat bahosining 1% ortishi talabning (2/3) % ga kamayishiga taklifning esa 2% ga ortishiga olib keladi.

Mashqni bajaring. Talab funksiyasining elastikligini toping:

1) $p + 5x = 100, \ p = 50$;

2) $3p + 4x = 120, \ p = 2; \ p = 20$;

3) $p^2 + p + 4x = 40$, $p = 2$; $p = 4$.

Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning qandaydir δ atrofida aniqlangan bo'lib, uning Δy orttirmasini

$$\Delta y = A\Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqta differensiallanuvchi, $A\Delta x$ esa uning differensiali, deb ataladi. Bu yerda A Δx ga bog'liq emas, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) \to 0$.

Funksiya differensiali quyidagicha yoziladi: $dy = Adx$, $A = f'(x)$.

9-misol. $y = x^2$ funksiya differensiallanuvchi. Haqiqatan ham

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot (\Delta x) + (\Delta x)^2 = 2x \cdot (\Delta x) + o(\Delta x).$$

Teorema. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun u bu nuqtada hosilaga ega bo'lishi zarur va yetarli.

Agar funksiya (a,b) intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya (a,b) intervalda differensiallanuvchi bo'ladi.

$\Delta y = A\Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x)$ formulada $\Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x)$ qo'shiluvchi cheksiz kichik miqdor bo'lgani uchun bu formulani quyidagicha yozish mumkin:

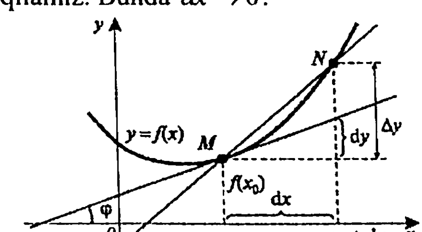
$$\Delta y \approx f'(x_0)A\Delta x \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Bu formuladan taqribiy hisoblarda foydalanish mumkin.

10-misol. $y = \sqrt[4]{x}$ funksiyaning $x = 90$ nuqtadagi qiymatini toping.

Yechish. Bu yerda $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 81$, $\Delta x = 9$, deb faraz qilamiz. U holda $f(x_0) = \sqrt[4]{81} = 3$, $f'(x) = \dfrac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}}$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{4 \cdot 3^3}$, $\sqrt[4]{90} \approx 3 + \dfrac{1}{12}$, $\sqrt[4]{90} \approx 3{,}083$.

$M(x_0, f(x_0))$ nuqtada $y = f(x)$ funksiyaga o'tkazilgan urinma, deb MN kesuvchining N nuqtasi M nuqtaga funksiya grafigi bo'ylab ixtiyoriy ravishda yaqinlashishini qabul qilamiz. Bunda $dx \to 0$.



$f(x_0)$ qiymat $M(x_0, f(x_0))$ nuqtada $y = f(x)$ funksiyaga o'tkazilgan urinmaning $tg\varphi$ burchak koeffitsiyentini bildiradi.

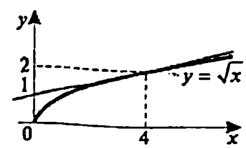
$M(x_0, f(x_0))$ nuqtada $y = f(x)$ funksiyaga o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

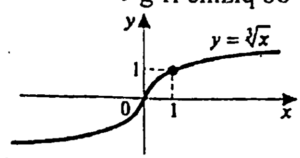
11-misol. $M_0(4;2)$ nuqtada $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyaga o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

Yechish. $f(x_0)=\sqrt{4}=2,\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.$

Demak urinma tenglamasi: $y-2=\frac{1}{4}(x-4)$.



12-misol. $O(0;0)$ nuqtada $y=\sqrt[3]{x}$ funksiyaga o'tkazilgan urinma tenglamasi $f'(0)=+\infty$ bo'lgani uchun u vertikal to'g'ri chiziq bo'ladi.



$f(x)$, $g(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lib, $k=const$ bo'lsin. U holda quyidagi qoidalar o'rinli:

1) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$, $d[f(x)\pm g(x)]=df(x)\pm dg(x)$;

2) $[kf(x)]'=kf'(x)$, $d(kf(x))=kdf(x)$;

3) $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,
$d(f(x)g(x))=d(f(x))g(x)+f(x)d(g(x))$;

4) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,
$d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{d(f(x))g(x)-f(x)d(g(x))}{g^2(x)}$;

Funksiyaning hosilasi va differensialini hisoblashda zarur bo'ladigan elementar funksiyalarning hosilalari jadvalini keltiramiz:

1) $(C)'=0$, $C=const$.

2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha\in R^1$, $x>0$, $(x^n)'=nx^{n-1}$, $n\in N$, $x\in R^1$

3) $(a^x)'=a^x\ln a$, $a>0$, $a\neq 1$, $x\in R^1$, $(e^x)'=e^x$, $x\in R^1$

4) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

5) $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R^1.$

6) $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R^1.$

7) $(tg\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z.$

8) $(ctg\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \ n \in Z.$

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x| < 1.$

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x| < 1.$

11) $(arctg\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R^1.$

12) $(arcctg\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R^1.$

13) $(sh\,x)' = chx, \quad x \in R^1.$

14) $(ch\,x)' = shx, \quad x \in R^1.$

15) $(th\,x)' = \dfrac{1}{ch^2 x}, \quad x \in R^1.$

16) $(cth\,x)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0.$

13-misol. $y = \dfrac{e^x + 4x^3}{\ln x}$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechish. Bu yerda hosilalar jadvali va hosila olish qoidasidan foydalanamiz:

$$y' = \frac{\left(e^x + 4x^3\right)' \ln x - \left(e^x + 4x^3\right)(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\left(e^x + 12x^2\right)\ln x - \dfrac{e^x + 4x^3}{x}}{\ln^2 x}$$

14-misol. $y = a^x arctgx$ funksiya hosilasi quyidagicha hisoblanadi:

$$y' = \left(a^x\right)' arctg\,x + a^x \left(arctg\,x\right)' = a^x \cdot \ln a \cdot arctg\,x + \frac{a^x}{1+x^2}.$$

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasi bilan tanishib chiqamiz. $u = g(x)$, $y = f(u)$ bo'lib, $u = g(x)$ funksiya x_0 nuqtada $y = f(u)$ funksiya esa $u_0 = g(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $y = F(x) = f(g(x))$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},\ \Phi(x_0)=f'(u_0)g'(x_0).$$

U holda $dy=\Phi'(x_0)dx=f'(u_0)du$. Bu yerda $du=g'(x_0)dx$. Bu birinchi differensialning invariantligi deyiladi, ya'ni murakkab funksiyada ham differensial o'z formasini saqlab qoladi.

15-misol. $y=3^{\cos^5 2x}$ funksiyaning hosilasi quyidagicha hisoblanadi:

$$y'=3^{\cos^5 2x}\ln 3\left(\cos^5 2x\right)'=3^{\cos^5 2x}\ln 3\cdot 5\cos^4 2x\left(\cos 2x\right)'=$$

$$=5\ln 3\cdot 3^{\cos^5 2x}\cos^4 2x(-\sin 2x)(2x)'=-10\ln 3\cdot\sin 2x\cos^4 2x\cdot 3^{\cos^5 2x}.$$

16-misol. $y=tg^4 6x$ funksiyaning hosilasi quyidagicha hisoblanadi:

$$y'=4tg^3 6x\frac{6}{\cos^2 6x}=\frac{24\sin^3 6x}{\cos^5 6x}.$$

Agar $y=f(x)$ $(a<x<b)$ funksiyaga teskari funksiya uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lsa, u holda x'_y hosila ham mavjud bo'ladi:

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

Masalan, $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ y>0)$ funksiyaga teskari funksiya $x=\log_a y$. Uning hosilasi:

$$x'_y=\left(\log_a y\right)'=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{\left(a^x\right)'_x}=\frac{1}{a^x\ln a}=\frac{1}{y\ln a}.$$

Faraz qilamiz $y=f(x)$ funksiya parametrik $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ $\alpha\leq t\leq\beta$ ko'rinishda berilgan bo'lsin. Agar $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ funksiyalar differensiallanuvchi va $\varphi'(t)\neq 0$ bo'lsa, u holda y'_x mavjud bo'lib quyidagicha aniqlanadi:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.$$

Masalan, $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t,$ funksiya uchun y'_x hosila quyidagicha hisoblanadi:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t}=-\frac{b}{a}tgt,\ t\neq\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Oshkormas $F(x,y)=0$ funksiyada y'_x hosilani topish uchun $\left(F(x,y)\right)'_x=0\Rightarrow F_x(x,y)+F_y(x,y)y'_x=0$ tenglamadan y'_x hosila topib olinadi.

Masalan, $arctgy-y+x=0$ funksiyadan y'_x hosilani topish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\frac{f'(x)}{1+y^2}-f'(x)+1=0 \Rightarrow y'=f'(x)=1+y^{-2}.$$

$y=f(x)$ funksiyaning yuqori tartibli hosilasi quyidagicha amalga oshiriladi:

$$y''=(y')'=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),\; y'''=(y'')'=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),\;\ldots.$$

Bu yerda ham yuqoridagi qoidalar o'rinli. Yuqori tartibli differensiallar quyidagicha aniqlanadi:

$d^2y=d(dy)$ - ikkinchi tartibli differensial;

$d^3y=d(d^2y)$ - uchinchi tartibli differensial;

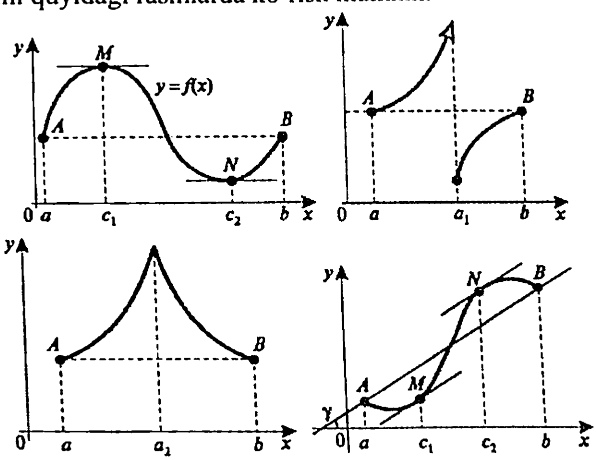
....

$d^ny=d(d^{n-1}y)$ - $n-$tartibli differensial.

Biz quyida amaliy masalalarni yechishda zarur bo'ladigan differensiallanuvchi funksiyalar haqidagi ba'zi teoremalarni keltiramiz.

Teorema (Roll). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) oraliqda esa differensiallanuvchi bo'lib, $f(a)=f(b)$ bo'lsa, u holda hech bo'lmaganda bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki bunda $f'(c)=0$.

Bu teoremaning geometrik ma'nosini va teoremadagi shartlar juda ham muhim ekanligini quyidagi rasmlarda ko'rish mumkin.



Teorema (Lagranj). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) oraliqda esa differensiallanuvchi bo'lsa, u holda hech bo'lmaganda bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki bunda $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Teorema (Koshi). Agar $\varphi(t),\psi(t)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) oraliqda esa differensiallanuvchi bo'lib, $\varphi'(t)\neq 0$ bo'lsa, u holda hech bo'lmaganda bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki, bunda

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}.$$

6.2. Teylor formulasi va qatori. Lopital metodi

Teylor formulasini keltirishdan oldin uni izohlash uchun zarur bo'lgan funksional qator tushunchasini kiritib olamiz Funksional qatorlar taqribiy hisoblashlar, dinamik modellar va optimal boshqaruv nazariyasiga oid masalalarni taqribiy yechishda foydalaniladi. Moliyaviy operatsiyalarga oid to'lovlar oqimida foiz stavkasi o'zgaruvchi, deb qaralsa, bunday to'lovlar oqimini ham funksional qator, deb qaralishi mumkin. Bu mavzuda biz funksional qatorlar va ular bilan bog'liq funksional ketma-ketliklar haqida zarur bo'lgan nazariy bilimlarni beramiz.

X to'plamda

$$f_n,\ n=1,2,3,... \tag{6.3}$$

funksiyalar ketma – ketligi berilgan bo'lsin. Bu yerda X to'plam elementlarini nuqtalar deb ataymiz.

Agar shunday C son topilsaki, barcha $n=1,2,3,...$ nomerlar va $x\in X$ nuqtalar uchun $|f_n(x)|\leq C$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda (6.3) ketma – ketlik X to'plamda chegaralangan deb ataladi.

Agar har qanday belgilangan $x\in X$ nuqtada $\{f_n(x)\}$ sonli ketma – ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (6.3.) ketma – ketlik ham X to'plamda yaqinlashuvchi bo'ladi.

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),\ x\in X$ tenglik esa (6.3) ketma – ketlikning limiti deb ataladi.

X to'plamda $u_n(x),\ n=1,2,3,...$ funksiyalar ketma – ketligi berilgan bo'lsin. Bu ketma – ketlikning har birida $x\in X$ nuqta ixtiyoriy ravishda belgilangan bo'lsin. U holda barcha $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}$ – sonli qatorlar to'plamini X to'plamda

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \tag{6.4}$$

qator, deb ataymiz. $u_n(x)$ funksiyalar esa qatorning hadlari deb ataladi.

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\quad x\in X$$

yig'indi (6.4) qatorning dastlabki n ta hadining yig'indisi, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{n+k}(x)$ qator esa uning qoldiq hadi deb ataladi.

$\{S_n(x)\}$ – xususiy yig'indilar ketma-ketligini qaraymiz.

2-ta'rif. Agar X to'plamda aniqlangan $\{S_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik qandaydir $G\subset X$ to'plamda biror-bir $S(x)$ funksiyaga yaqinlashsa, ya'ni $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x),\ x\in G\subset X$ bo'lsa, u holda (6.4) qator G to'plamning har bir nuqtasida yaqinlashuvchi, $S(x)$ esa uning yig'indisi deyiladi.

Agar (6.4) qator ixtiyoriy belgilangan $x \in X$ nuqtada absolut yaqinlashsa, u holda uni absolut yaqinlashuvchi qator deymiz.

17-misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$ qatorning yaqinlashish sohasi va yig'indisini toping.

Yechish. $u_n(x) = \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$ $(n = 1,2,...)$ funksiyalar $x = -n$, $x = -(n+1)$ nuqtalarda aniqlanmagan. Shu sababli bu qatorni $x \neq -k$, $k \in N$ nuqtalarda tekshiramiz. Qatorning umumiy hadini $u_n(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x}$ ko'rinishda yozib olamiz. U holda

$$S_n(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)} + \frac{1}{(2+x)(3+x)} + ... + \frac{1}{(n+x)(n+1+x)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}\right) + \left(\frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x}\right) + ... + \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+1+x}$$

Bundan

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \frac{1}{1+x}.$$

Demak, berilgan qator $x \neq -k$, $k \in N$ nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi $\frac{1}{1+x}$ ga teng.

Funksional qatorlar uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1) Agar (6.4) qatorning har bir hadini noldan farqli songa yoki (6.4) qatorning yaqinlashish sohasida noldan farqli qiymat qabul qiladigan funksiyaga ko'paytirsak, qatorning yaqinlashish sohasi o'zgarmaydi.

2) (6.4) funksional qatorning chekli sondagi hadlarini olib tashlash yoki (6.4) qatorga chekli sondagi yangi hadlarni qo'shish (6.4) (qator yaqinlashish sohasida aniqlangan) natijasida qatorning yaqinlashish sohasi o'zgarmaydi.

18-misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\cos x$ qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. Argument qiymatini belgilab olamiz va umumiy hadi $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ bo'lgan yordamchi qatorni qaraymiz. Dalamber alomatiga ko'ra x ning har bir qiymatida

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Bundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ qatorning absolut yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

$\left|\frac{x^n}{n!}\cos x\right| \le \left|\frac{x^n}{n!}\right| = |u_n|$ bo'lganligi sababli, qator x ning ixtiyoriy qiymatida yaqinlashuvchi bo'ladi. Shunday qilib, qatorning yaqinlashish sohasi $(-\infty;+\infty)$ oraliqdan iborat.

19-misol. Umumiy hadi $u_n(x)=n^3x^2$ bo'lgan qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. x ni fiksirlab olamiz, natijada umumiy hadi $u_n(x)=n^3x^2$ bo'lgan sonli qatorga ega bo'lamiz. Agar $x\ne 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(n^3x^2) = x\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty$. Demak, qatorning yaqinlashish sohasi faqat bitta, $x=0$ nuqtadan iborat.

20-misol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. x ning $(x\ne -1)$ har bir qiymatida qandaydir sonli qator hosil bo'ladi. Bunga Dalamber alomatini tatbiq qilamiz

$$u_{n+1}(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{3n+2}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}, \quad u_n(x)=\frac{(-1)^n}{3n-1}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

U holda

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{3n+2}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ shartni qanoatlantiruvchi x larda berilgan qator absolut yaqinlashadi. $l(x)>1$ shartni qanoatlantiruvchi x larda qator uzoqlashadi. $l(x)=1$ shartni qanoatlantiradigan va $l(x)$ aniqlanmagan nuqtalarda qatorni qo'shimcha tekshirish lozim. Bu misolda $x=-1$ nuqtada qator aniqlanmagan, $x=1$ nuqtada esa qator faqat 0 dan iborat bo'ladi va absolut yaqinlashadi. $l(x)<1$ tengsizlikning yechimi $(0;\infty)$. Demak, qator $(0,+\infty)$ oraliqda yaqinlashadi. $x=0$ nuqtani alohida tekshirish lozim, bu nuqtada $l(x)=1$. $x=0$ nuqtada qator $-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{(-1)^n}{3n-1}+...$ ko'rinishda bo'ladi. Bu qator esa shartli yaqinlashadi. Shunday qilib qatorning yaqinlashish sohasi $[0;+\infty)$ oraliqdan iborat.

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lsaki, barcha $x\in X$ nuqtalar va $n>n_0$ nomerlar uchun

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, (6.3) ketma – ketlik X to'plamda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

4-ta'rif. Agar $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ qatorning qism yig'indilaridan iborat $S_n(x)$ ketma-ketlik K sohada tekis yaqinlashsa, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ qator K sohada tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

21-misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$ nuqtalarni $x>-1$ oraliqda tekis yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu qator uchun $S(x)=\frac{1}{1+x}$, $S_n(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{n+x+1}$. Demak $R_n(x)=\frac{1}{n+x+1}$ va masala shartiga ko'ra $x+1>0$, shu sababli $|R_n(x)|<\frac{1}{n}$ tengsizlik o'rinli. Endi ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday n_0 nomer mavjudligini va barcha $n>n_0$ nomerlar uchun $\frac{1}{n}<\varepsilon$ tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham $\frac{1}{n_0}=\varepsilon$, deb olsak, barcha $n>n_0$ nomerlar uchun $\frac{1}{n}<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Demak, berilgan qator $x+1>0$ da tekis yaqinlashadi.

Teorema. $\{f_n(x)\}$ – ketma – ketlik $f(x)$ funksiyaga X to'plamda tekis yaqinlashishi uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f(x)-f_n(x)|=0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Teorema (Veyershtrass alomati). Agar $\sum_{i=1}^{\infty} a_n,\ a_n\ge 0$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lib barcha $x\in X$ nuqtalar va $n=1,2,3,...$ lar uchun

$$|u_n(x)|\le a_n$$

bo'lsa, u holda (6.4) qator tekis va absolut yaqinlashadi.

22-misol. $\frac{sin^2 x}{1^3}+\frac{sin^2 2x}{2^3}+...+\frac{sin^2 nx}{n^3}+...$ funksional qatorni tekis yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Argumentning barcha haqiqiy qiymatlarida

$$\left|\frac{sin^2 nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$$

tengsizlik o'rinli. $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{n^3}+...$ qator esa yaqinlashuvchi. Demak, Veyershtrass alomatiga ko'ra berilgan qator (-∞;+∞) oraliqda tekis yaqinlashadi.

Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlar uchun funksional qatorlarning chekli yig'indisi xossalarini tatbiq qilish mumkin.

Teorema. Agar

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

funksional qatorning har bir hadi $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, bu funksional qator $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qatorning yig'indisi $S(x)$ ham shu kesmada uzluksiz bo'ladi.

Teorema. Agar

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

funksional qatorning har bir hadi $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, bu funksional qator $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b u_1(x)dx+\int_a^b u_2(x)dx+...+\int_a^b u_n(x)dx+...$$

bo'ladi.

Teorema. Agar

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

funksional qatorning har bir hadi $[a,b]$ kesmada uzluksiz hosilalarga ega bo'lib, bu hosilalardan tuzilgan

$$u_1'(x)+u_2'(x)+...+u_n'(x)+...$$

qator $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda berilgan funksional qatorning $S(x)$ yig'indisi shu $[a,b]$ kesmada $S'(x)$ hosilaga ega va

$$S'(x)=u_1'(x)+...+u_n'(x)+...$$

bo'ladi.

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+... \qquad (6.5)$$

ko'rinishdagi funksional qatorlar darajali qator, deb ataladi. Bu yerda $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, x_0$ o'zgarmas haqiqiy sonlar bo'lib qatorning koeffitsiyentlaridir. Darajali qatorlar matematikada va uning tatbiqlarida muhim ahamiyatga ega.

(6.5) qatorni $(x-x_0)=z$ almashtirish yordamida

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \qquad (6.6)$$

ko'rinishga keltirish mumkin. Shu sababli biz (6.6) ko'rinishdagi qatorlarni o'rganish bilan chegaralanamiz.

Teorema. Agar (6.6) darajali qator $z=z_0$ nuqtada yaqinlashsa, u holda $|z|<z_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z ning qiymatlarida (6.6) qator absolut yaqinlashadi.

Natija. Agar (6.5) darajali qator $z=z_0$ nuqtada uzoqlashsa, u holda $|z|>z_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z ning qiymatlarida (6.5) qator uzoqlashadi.

(6.5) qator $z=0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsin. (6.5) qator yaqinlashadigan barcha $z=x,\ x\in\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to'plamini X bilan belgilaymiz. $R=\sup X,\ 0\le R\le+\infty$ bo'lsin.

Shunday qilib, agar $|z|<R$ bo'lsa (6.5) qator yaqinlashadi, agar $|z|>R$ bo'lsa, (6.5) qator uzoqlashadi. Ma'lumki, $|z|<R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami R radiusli sohasi bo'ladi. (6.5) qator uchun bu soha $|x-x_0|<R$ ko'rinishda bo'ladi.

5-ta'rif. Agar $|x-x_0|<R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda (6.4) qator yaqinlashib, $|x-x_0|>R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda esa (6.4) qator uzoqlashsa, u holda R (chekli yoki cheksiz) son (6.4) qatorning yaqinlashish radiusi deb ataladi.

$|x-x_0|<R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar to'plami esa yaqinlashish doirasi deb ataladi.

23-misol. $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ qatorni qaraymiz. Dalamber alomati yordamida uni yaqinlashishini tekshiramiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!|z^{n+1}|}{n!|z^n|}=|z|\lim_{n\to\infty}(n+1)=\begin{cases}\infty, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

Demak, yaqinlashish radiusi $R=0$.

24-misol. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ qatorni qaraymiz. Dalamber alomati yordamida uni yaqinlashishini tekshiramiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!|z^{n+1}|}{(n+1)!|z^n|}=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

Demak, yaqinlashish radiusi $R=+\infty$.

25-misol. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ qatorni qaraymiz. Dalamber alomati yordamida uni yaqinlashishini tekshiramiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z^{n+1}|}{|z^n|}=|z|$$

Demak, yaqinlashish radiusi $R=|z|<1$. $|z|\geq 1$ uzoqlashadi.

26-misol. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ qatorni qaraymiz. Bu yerda

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2},\quad |z|<1.$$

Demak, yaqinlashish radiusi $R=|z|\leq 1$. $|z|>1$ da uzoqlashadi.

27-misol. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ qatorni qaraymiz. Bu yerda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nz^{n+1}}{(n+1)z^n}=|z|.$$

Demak, yaqinlashish radiusi $R=|z|<1$. $|z|=1$ bo'lsa bu qator garmonik qatorga aylanib uzoqlashadi.

Yuqoridagi misollardan ko'rinib turibdiki darajali qatorning yaqinlashish radiusi nol, qandaydir chekli son yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Yaqinlashish doirasi chegarasida esa u yaqinlashish, uzoqlashish, qator boshqa qatorga aylanishi mumkin.

Agar x_0 nuqtaning biror-bir atrofida $f(x)$ funksiyani

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{6.7}$$

qatorga yoyish mumkin bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya analitik funksiya deb ataladi.

Quyidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad |z|<R;\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1},\quad |z|<R_1;\quad \sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1},\quad |z|<R_2$$

qatorlarning yaqinlashish radiuslari: $R=R_1=R_2$.

Ko'rinib turibdiki, bu qatorlarda integrallash yoki differensiallash orqali biridan ikkinchisini hosil qilish mumkin. Demak, integrallash yoki differensiallash orqali hosil qilingan qatorlarda yaqinlashish radiusi o'zgarmaydi, ya'ni yaqinlashish radiusi boshlang'ich qator radiusiga teng bo'ladi.

Shunday qilib, agar $f(x)$ funksiya $x_0\in\mathbb{R}$ nuqtada analitik bo'lsa, u holda funksiyani bu nuqtaning qandaydir atrofida quyidagi darajali qatorga yoyish mumkin:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n.$$

Har qanday haqiqiy koeffitsiyenli darajali qator uchun yaqinlashish radiusi mavjud bo'lib bu yaqinlashish radiusi quyidagi xossalarga ega:

1) barcha $x\in(x_0-R;x_0+R)$ nuqtalarda qator yaqinlashadi;

2) barcha $x\notin(x_0-R;x_0+R)$ nuqtalarda qator uzoqlashadi.

$(x_0-R;x_0+R)$ interval darajali qatorning yaqinlashish intervali deb ataladi.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqta qandaydir atrofida (6.7) darajali qatorga $R>0$ yaqinlashish radiusi bilan yoyilsa, u holda:

1) $f(x)$ funksiya $(x_0-R;x_0+R)$ intervalda (6.7) qatordan hadma-had olinishi mumkin bo'lgan barcha hosilalarga ega bo'ladi:

$$f^{(m)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)...(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m} \tag{6.8}$$

2) $f(x)$ funksiyani $(x_0-R;x_0+R)$ interval hadma – had integrallash mumkin:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (x - x_0)^{n+1} \qquad (6.9)$$

3) (6.7), (6.8) va (6.9) qatorlar bir xil yaqinlashish radiusiga ega.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqta qandaydir atrofida (6.7) darajali qatorga yoyilsa, u holda:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0,1,2,3,...$$

bo'lib quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Natija. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning qandaydir atrofida darajali qatorga yoyilsa, u holda bu yoyilma yagonadir.

Teylor formulasi. Agar $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning qandaydir atrofida $(n+1)$ –tartibli hosilagacha bo'lgan barcha hosilalarga ega bo'lsa, u holda shu atrofdagi barcha x nuqtalar uchun quyidagi Teylor formulasi o'rinli bo'ladi:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Bu yerda $R_n(x) = \dfrac{f^{(n-1)}\left(a + \theta(x-a)\right)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $(0 < \theta < 1)$ - Lagranj qoldiq hadi, deb ataladi.

Agar bu formulada $a = 0$, deb olsak, u holda Makleron formulasi hosil bo'ladi:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, (0 < \theta < 1).$$

Teylor formulasi yordamida funksiyalarni ko'phad ko'rinishda yozib olish mumkin. Bunga ba'zi misollarni keltiramiz:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x);$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x).$$

Differensiallanuvchi ratsional kasr ifodalardagi $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi noaniqliklarning aniq qiymatlarini Lopital qoidasidan: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ foydalanib hisoblash mumkin. Bu yerda $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ yoki $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$. Bu qoidani misollarda ko'rib chiqamiz:

28-misol. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+7x-18}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2-3}}{2x+7}=\frac{4}{11}.$

Bu jarayon noaniqlikdan qutimaguncha chekli marta davom ettirilishi mumkin. Agar noaniqlik $0\cdot\infty, 1^{\infty}, \infty^0, 0^0, \infty-\infty$ ko'rinishda bo'lsa, u holda ma'lum bir elementar almashtirishlarni bajarib uni $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi noaniqlikka keltiriladi so'ngra Lopital qoidasi qo'llaniladi.

29-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ ni toping.

Yechish. $\left[\infty^0\right]$ ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz. $y=x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ deb belgilab, tenglikning ikkala qismini logarifmlaymiz $\ln y=\ln x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$. Endi limitga o'tamiz:

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\left(\ln x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

Demak, $\ln y=0,\ y=1$.

30-misol. $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)tg\frac{\pi x}{8}$ ni toping.

Yechish.

$$\lim_{x\to 4}(x-4)tg\frac{\pi x}{8}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{ctg\frac{\pi x}{8}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{1}{-\frac{\pi}{8}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{8}}}=-\frac{8}{\pi}.$$

6.3. Bir o'zgaruvchili funksiya ekstremumlari

Ko'p jarayonlar funksiya yordamida ifodalanishi mumkinligini ko'rdik. Bu jarayonlarning dinamikasini bilish funksiyaning monotonligi bilan bog'liq.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. U holda bizga ma'lumki:

agar $x_1,x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamaymaydigan funksiya;

agar $x_1,x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada o'smaydigan funksiya;

agar $x_1,x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada o'suvchi funksiya;

agar $x_1,x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamayuvchi funksiya deb ataladi.

Funksiyaning bu xossalari hosila yordamida quyidagicha ifodalanadi:

Agar $y = f(x), x \in [a,b]$ funksiya uchun $f'(x) \ge 0$ ($f'(x) \le 0$) munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamaymaydigan (o'smaydigan) funksiya bo'ladi.

Agar $y = f(x), x \in [a,b]$ funksiya uchun $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada o'suvchi (kamayuvchi) funksiya bo'ladi.

31-misol. $y = 2x^2 - \ln x$ funksiyaning o'sish va kamayish intervallarini toping.

Yechish. Berilgan funksiya $x > 0$ da aniqlangan. Uning hosilasini topamiz:

$$y' = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}.$$

$y' = 0, 4x^2 - 1 = 0$, bundan $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

$x_2 = -\frac{1}{2}$ kritik nuqta funksiyaning aniqlanish sohasiga kirmaydi. $x_1 = \frac{1}{2}$ kritik nuqta funksiyaning aniqlanish sohasini $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ va $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ intervallarga bo'ladi. Bu intervallarda y' hosilaning ishorasini aniqlaymiz.

a) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ da $y'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3} < 0$, b) $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ da $y'(1) = 3 > 0$. Bu esa birinchi intervalda funksiya kamayuvchi, ikkinchi intervalda o'suvchi ekanini bildiradi.

Mashqni bajaring. Funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini toping:

1) $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$; 2) $y = \frac{1}{1 + x^2}$

O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar, deb ataladi. O'shish va kamayish oraliqlari esa monotonlik oraliqlari deb ataladi.

Ekstremum tushunchasini kiritishda zarur bo'lgan belgilashlarni kirirtamiz. $|x-x_0|<\delta$ tengsizlik o'rinli bo'lgan barcha x nuqtalar to'plami x_0 nuqtaning δ atrofi deb ataladi.

6-ta'rif. $|x-x_0|<\delta$ tengsizlik o'rinli bo'lgan barcha x nuqtalar uchun $f(x)\geq f(x_0)$ $(f(x)\leq f(x_0))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning minimum (maksimum) nuqtasi, $f(x_0)$ esa bu funksiyaning minimum (maksimumi) qiymati deb ataladi.

Agar yuqoridagi tengsizliklar qat'iy bo'lsa, u holda qat'iy minimum (maksimum) tushunchalarini ishlatamiz.

7-ta'rif. Funksiyaning minimum va maksimum nuqtalari uning ekstremum nuqtalari deb ataladi.

x_0 – ekstremum nuqta bo'lsin. U holda

$$x_0 - \max \Rightarrow \Delta f(x_0)\leq 0, \quad x_0 - \min \Rightarrow \Delta f(x_0)\geq 0.$$

x_0 – ekstremum nuqta bo'lsin. U holda bu nuqtada $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lmaydi yoki $f'(x_0)=0$ bo'ladi. Bu shart x_0 – ekstremum nuqta bo'lishi uchun zaruriy shart, deb ataladi.

Agar x_0 – ekstremum nuqta uchun $f'(x_0)=0$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x_0 – statsionar nuqta deb ataladi. Agar x_0 – ekstremum nuqta uchun $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lmasa, u holda x_0 – kritik nuqta deb ataladi.

32-misol. $x_0=0$ nuqta $y=x^2$ funksiya uchun statsionar, $y=|x|$ funksiya uchun kritik nuqta deb ataladi.

Umuman olganda statsionar nuqtalar ham kritik nuqtalar deb ataladi.

Mashqni bajaring. $f(x)=\sqrt[3]{x}(x-8)$ funksiyaning kritik nuqtalarini toping.

Yuqorida biz x_0 – nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lishi uchun zaruriy shartni ko'rdik. Endi biz x_0 – nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lishi uchun yetarlilik shartini ko'rib chiqamiz.

I. x_0 nuqtaning ixtiyoriy $(x_0-\delta, x_0+\delta)-\delta$ atrofida $f(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud va uzluksiz bo'lsin. U holda:

a) agar $x\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)>0$, $x\in(x_0+\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0$ bo'lsa, u holda x_0 – maksimum nuqta;

b) agar $x\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0$, $x\in(x_0+\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)>0$ bo'lsa, u holda x_0 – minimum nuqta;

c) agar $x\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0$, $x\in(x_0+\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0$ yoki $x\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0$, $x\in(x_0+\delta,x_0)\Rightarrow f'(x)<0$ bo'lsa, u holda x_0 – statsionar nuqta.

II. x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo'lsin. U holda:

a) agar $f''(x_0)<0$ bo'lsa, u holda x_0 – maksimum nuqta;

b) agar $f''(x_0) > 0$ bo'lsa, u holda x_0 – minimum nuqta;

c) agar $f''(x_0) = 0$ bo'lsa, u holda ekstremum masalasi ochiq qoladi.

III. $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ bo'lsin. U holda:

a) n – juft bo'lsin. Agar $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo'lsa, u holda x_0 – maksimum; agar $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo'lsa, u holda x_0 – minimum nuqta bo'ladi;

b) n – toq bo'lsa,u holda x_0 – ekstremum nuqta bo'lmaydi.

33-misol. Funksiyaning ekstremumlari va monotonlik intervallarini toping.

$$y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$$

Yechish. $y' = 2x^2 - 5x + 2$ ko'rinib turibdiki, x ning barcha qiymatlarida hosila mavjud. Hosilani nolga tenglab, $2x^2 - 5x + 2 = 0$ tenglamani olamiz, bu yerdan $x_1 = \frac{1}{2}$ va $x_2 = 2$ kabi kritik nuqtalarni topamiz. Hosila ishoralari quyidagi chizmada ko'rsatilgan:

$\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ va $(2;+\infty)$ orliqlarda hosila $f'(x) > 0$ va funksiya o'suvchi, $\left(\frac{1}{2};2\right)$ oraliqda hosila $f'(x) < 0$ ya'ni funksiya kamayuvchi. $x = \frac{1}{2}$ — maksimum nuqta va $f_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{24}$, $x = 2$ — minimum nuqta va $f_{min}(2) = -\frac{2}{3}$. Chunki hosila bu nuqtalardan o'tishda o'z ishorasini ($x = \frac{1}{2}$ da) «+» dan «-» ga va ($x = 2$ da) «-» dan «+» ga o'zgartiradi.

Izoh: $x = \frac{1}{2}$ va $x = 2$ kritik nuqtalarda ekstremum mavjudligini ikkinchi tartibli hosila yordamida aniqlasa: $f''(x) = 4x - 5$, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = -3 < 0$ va $f''(2) = 3 > 0$ bo'lganligi uchun $x = \frac{1}{2}$ — maksimum nuqta va $x = 2$ — minimum nuqta.

34-misol. Q sotilgan mahsulot miqdoriga bog'liq bo'lgan daromad funksiyasi $R(Q) = \frac{Q^3}{3} + 2000000Q$ formula bilan, mahsulotni ishlab chiqarishga ketgan xarajatlar funksiyasi esa $C(Q) = 1500Q^2$ formula bilan ifodalanadi. Ishlab chiqarishning optimal darajasini va unda erishiladigan foydani aniqlang.

Yechish. Foyda $F(Q)=R(Q)-C(Q)$ formula bilan aniqlanadi. Bu yerdan $F(Q)=\frac{Q^3}{3}-1500Q^2+2000000Q$. Foyda hosilasini $F'(Q)=Q^2-3000Q+2000000$ nolga tenglashtirib, $Q^2-3000Q+2000000=0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning ildizlari $Q_1=1000$ va $Q_2=2000$. Tekshirish shuni ko'rsatadiki $Q=1000$ da maksimal foydaga erishiladi.

$$F_{max}=F(1000)\approx 833333333 \text{ pul birligi.}$$

35-misol. Sotilgan mahsulotdan olingan daromad $R(Q)=16Q-Q^2$ funksiya bilan mahsulotni ishlab chiqarishga ketgan xarajatlar esa $C(Q)=Q^2+1$ funksiya bilan ifodalansin. Ishlab chiqarishning va foydaning optimal miqdorini toping.

Yechish. Foyda funksiyasi: $F(Q)=R(Q)-C(Q)=16Q-2Q^2-1$. Bu funksiyaning ekstremumini topamiz: $F'=16-4Q=0$. Demak, $Q=4$ nuqta kritik nutadir. $Q=4$ maksimal foyda keltiruvchi ishlab chiqarish miqdori, $F_{max}=31$ esa maksimal foyda.

Foyda maksimal bo'lishi uchun, marjinal daromad va marjinal xarajatlarning teng bo'lishi zarur.

36-misol. Sotilgan mahsulotdan olingan daromad $R(Q)=16Q-Q^2$ funksiya bilan ishlab chiqarishga ketgan xarajatlar esa $C(Q)=Q^2+1$ funksiya bilan ifodalansin. Korxona maksimal foyda olishi uchun har mahsulot birligiga qo'yilgan optimal soliq miqdorini toping.

Yechish. t har bir mahsulotga qo'yilgan soliq miqdori bo'lsin. U holda foyda funksiyasi: $F(Q)=R(Q)-C(Q)-tQ=16Q-2Q^2-1-tQ$. Bu funksiyaning ekstremumini topamiz: $F'=16-4Q-t=0 \Rightarrow Q=\frac{16-t}{4}$. Demak, $Q=4-\frac{t}{4}$ nuqta kritik nutadir. U holda:

$$T=tQ=t\left(4-\frac{t}{4}\right)=4t-\frac{t^2}{4}.$$

Bu funksiyaning maksimal qiymatini topamiz:

$$T'=4-\frac{t}{2}=0 \Rightarrow t=8 \Rightarrow Q=2.$$

Demak, har bir mahsulotga qo'yilgan soliq $t=8$ bo'lsa, u holda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorining optimal qiymati $Q=2$ bo'ladi. Korxonaning maksimal foydasi esa $F_{max}=F(2)=7$ bo'ladi.

Shunday qilib, soliq miqdorining kamayishi foydaning ortishiga olib kelar ekan.

Mashqni bajaring. 1) $f(x)=(x-2)^2(x+1)^3$ funksiyaning ekstremumini toping.

2) Sotilgan mahsulotdan olingan foyda $y=\frac{1}{50}x^2+15x+800$ funksiya bilan mahsulotni ishlab chiqarishdagi to'la xarajat esa $p=50-\frac{1}{10}x$ funksiya bilan ifodalansin. Ishlab chiqarishning va foydaning optimal miqdorini toping.

$y=f(x)$ funksiya biror-bir $V \in R^1$ to'plamda aniqlangan va $x_0 \in V$ bo'lsin.

Agar:

• har bir $x_0 \in V$ uchun $f(x) \leq f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $x_0 \in V$ nuqtada $f(x)$ funksiya o'zining eng katta $f_{max}=f(x_0)$ qiymatini qabul qiladi;

• har bir $x_0 \in V$ uchun $f(x) \geq f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $x_0 \in V$ nuqtada $f(x)$ funksiya o'zining eng kichik $f_{max}=f(x_0)$ qiymatini qabul qiladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya $V=[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, kompakt to'plamda uzluksiz funksiya xossalaridan biriga ko'ra u ushbu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini qabul qiladi. Funksiya o'zining ekstremum qiymatlariga nafaqat kesma ichiga tegishli nuqtalarda, shu bilan birga uning chetki nuqtalarida ham erishishi mumkin.

Funksiyaning kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun:

a) funksiyaning kesmaga tegishli kritik nuqtalari aniqlanadi;

b) funksiyaning topilgan kritik nuqtalaridagi va kesmaning chetki nuqtalaridagi qiymatlari hisoblanadi;

c) ushbu qiymatlar o'zaro solishtirilib uning eng katta va eng kichigi tanlanadi.

37-misol. $y=x^3-3x$ funksiyaning $[-1,5;2,5]$kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatini toping.

Yechish. a) funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz. $y'=f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$, bu yerdan $x_1=-1, x_2=1$ nuqtalarda $f'(x)=0$ ekanligi kelib chiqadi va ular berilgan kesmaga tegishlidir.

b) funksiyaning kritik va berilgan kesmaning chetki nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz

$$f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)=2;$$
$$f(1)=(1)^3-3\cdot(1)=-2;$$
$$f(-1,5)=(-1,5)^3-3\cdot(-1,5)=1,125;$$
$$f(2,5)=(2,5)^3-3\cdot(2,5)=8,125.$$

c) demak, funksiyaning berilgan kesmadagi eng katta qiymati $x=2,5$ nuqtada $f(2,5)=8,125$ ga va eng kichik qiymati $x=1$ nuqtada $f(1)=-2$ ga teng.

Agar qaralayotgan kesmada funksiya uzilish nuqtalariga ega bo'lsa, yuqoridagilarga qo'shimcha ravishda funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari funksiyaning uzilish nuqtalarida ham tekshiriladi.

Funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsa, u holda funksiyani a nuqtada o'ngdan, b nuqtada esa chapdan limitlarini tekshirish talab qilinadi.

Mashqni bajaring. Berilgan oraliqda funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini toping: 1) $y=x^4-2x^2+5, \quad x\in[-2;2]$;

2) $y=x^3-3x^2+6x-2, x\in[-1;1]$.

Ma'lumki, biz qavariq to'plamda berilgan qavariq yoki botiq funksiyalar bilan tanishmiz. Ko'p hollarda, qavariq iborasi qavariqligi bilan quyiga, botiq iborasi esa qavariqligi bilan yuqoriga qaragan, deb yuritiladi. Bu tushunchalar quyidagicha aniqlanadi.

Agar $y=f(x)$ funksiya uchun biror (a,b) intervalda

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

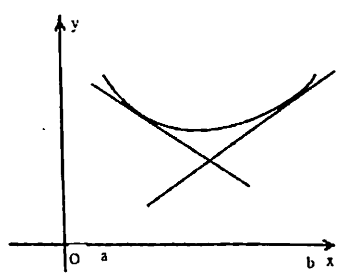
tengsizlik bajarilsa, unda qavariqlik yuqoriga qaragan;

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

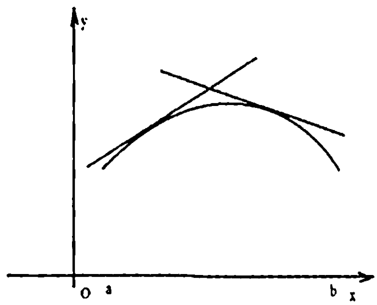
tengsizlik bajarilsa, qavariqlik pastga qaragan bo'ladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) intervalda differensiallanuvchi bo'lsa, kesmada qavariq yoki botiq funksiyani o'zgacha ta'riflash va shu bilan birga, (a,b) intervalda ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, $[a,b]$ kesmada qavariqlik shartini aniqlash imkoni tug'iladi.

8-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya grafigi (a,b) interval chegarasida o'z urinmalaridan yuqorida yotsa, u holda funksiya $[a,b]$ kesmada qavariqligi bilan quyiga yo'nalgan deyiladi.



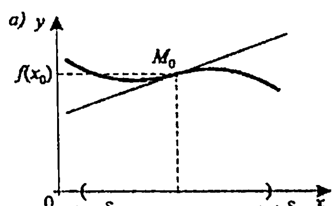
9-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya grafigi (a,b) interval chegarasida o'z urinmalaridan pastda yotsa, u holda funksiya $[a,b]$ kesmada qavariqligi bilan yuqoriga yo'nalgan deyiladi.



Endi biz funksiya qavariqligini tekshirish uchun zarur bo'lgan teorema va qoidalarni keltiramiz.

Teorema. $y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lib, $[a,b]$ kesmaning chetki nuqtalarida uzluksiz bo'lsin. U holda (a,b) intervalda $f''(x)\geq 0$ tengsizlik bajarilsa, u holda funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi qavariqligi quyiga, $f''(x)\leq 0$ bo'lganda esa uning bu kesmadagi qavariqligi yuqoriga yo'nalgan bo'ladi.

10-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya grafigining x_0 absissali nuqtasiga o'tkazilgan urinma mavjud bo'lib, $(x_0-\delta,x_0)$ va $(x_0,x_0+\delta)$ intervallarda funksiya grafigining qavariqligi turli yo'nalishda bo'lsa, u holda $M(x_0,f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining burilish nuqtasi deyiladi.



Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror-bir atrofida aniqlangan bo'lib, $M(x_0,f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining burilish nuqtasi bo'lsa, u holda yoki $f''(x_0)=0$ yoki $f(x_0)$ –mavjud emas.

Teorema. $y=f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0,f(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma, xususan vertikal urinma bo'lib, x_0 nuqtaning biror-bir δ atrofida ikkinchi tartibli hosila mavjud bo'lsin va $f''(x_0)=0$ yoki $f(x_0)$ –mavjud bo'lmasin. Agar $(x_0-\delta,x_0)$ va $(x_0,x_0+\delta)$ intervallarda $f''(x)$ turli ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, $M(x_0,f(x_0))$ nuqta $y=f(x)$ funksiya grafigining burilish nuqtasi bo'ladi.

38-misol. Ushbu $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ funksiya grafigining qavariqlik oraliqlarini va burilish nuqtasini toping.

Yechish. Funksiya haqiqiy sonlar o‘qida aniqlangan va ikki marta differensiallanuvchi. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz

$$f''(x)=\frac{6\left(x^2-\frac{1}{3}\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

$f''(x)<0$ da funksiya yuqoriga qavariq $x^2-\frac{1}{3}<0$ yoki $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$. $f''(x)>0$ da funksiya quyiga qavariq $x^2-\frac{1}{3}>0$, $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Shunday qilib funksiya grafigi $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ da yuqoriga qavariq, $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ va $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ da quyiga qavariq bo‘ladi. Demak $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ va $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ nuqtalar funksiyaning burilish nuqtalari bo‘ladi.

Mashqni bajaring. Quyidagi funksiyalarning qavariqligi va grafigining burilish nuqtalarini aniqlang: 1) $y=\ln(x^2+1)$; 2) $y=xe^{-x}$; 3) $y=\sqrt[3]{x^5}$.

6.4. Bir o‘zgaruvchili funksiyani to‘la tekshirish

Yuqorida o‘rganilgan tushunchalar: ekstremumlar, qavariqlik, funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari, funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlari o‘rganilayotgan funksiyaning sxematik grafigini tasvirlashga yordam beradi. Bu sxematik grafikni yanada aniqlashtirish uchun funksiya asimptotasi tushunchasi bilan tanishib chiqamiz.

Funksiya asimptotasi. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi qandaydir l to‘g‘ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borib $f(x)\cap l=\varnothing$ bo‘lsa, u holda bu l to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiyaning asimptotasi deb ataladi.

Masalan, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ to‘g‘ri chiziqlar $y=tgx$ funksiyaning asimptotalari hisoblanadi. $x=\pi+\pi k,\ k\in Z$ to‘g‘ri chiziqlar esa $y=ctgx$ funksiyaning asimptotalari hisoblanadi.

Asimptotalar 3 tipda bo‘ladi: vertikal, og‘ma va gorizontal asimptotalar.

Agar $y=f(x)$ uchun

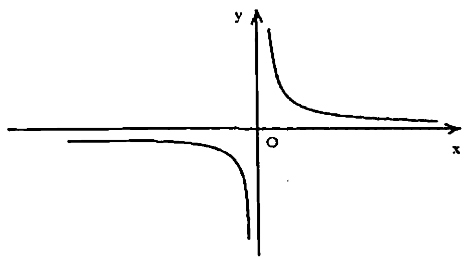
$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to x_0-0}f(x)=\pm\infty$$

munosabatlardan biri o'rinli bo'lsa, u holda $x=x_0$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiyaning vertikal asimptotasi deb ataladi. Yuqorida keltirilgan misollar vertikal asimptotaga misol bo'la oladi.

Biz quyida funksiya va uning asimptotasi koordinatalar sistemasida o'zaro qanday joylashishini ko'rib chiqamiz.

39-misol. $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning vertikal asimptotasi $x=0$ to'g'ri chiziqdir.

Haqiqatan ham, $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty$. Bu misolda asimptota va funksiya grafiklari koordinatalar sistemasida quyidagicha joylashadi.



40-misol. $f(x)=e^{\frac{1}{x^2(1-x)}}$ funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

Yechish. $x=0$ va $x=1$ - uzilish nuqtalari,

$$\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2(1-x)}}=+\infty, \qquad \lim_{x\to 1-0}e^{\frac{1}{x^2(1-x)}}=+\infty, \qquad \lim_{x\to 1+0}e^{\frac{1}{x^2(1-x)}}=0.$$

$x=0$, $x=1$ ikkinchi tur uzilish nuqtalari, $x=0$, $x=1$ to'g'ri chiziqlar vertikal asimptotalar.

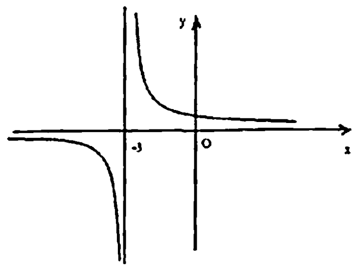
Agar $y=f(x)$ uchun

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-(kx+l))=0$$

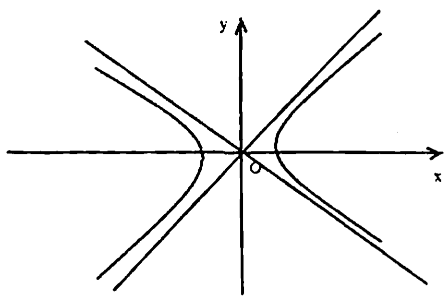
munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $kx+l$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiyaning og'ma asimptotasi deb ataladi. Agar bu yerda $k=0$ bo'lsa, u holda $y=l$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiyaning gorizontal asimptotasi deb ataladi. k va l sonlar quyidagicha topiladi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k_0, \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-(k_0x+l))=0.$$

Yuqoridagi misollarda $y=\frac{1}{x}$ funksiya uchun $x=0$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'lsa, $y=0$ to'g'ri chiziq esa gorizontal asimptota bo'ladi. $y=\frac{1}{x+3}$ funksiya uchun $x=-3$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'lsa, $y=0$ to'g'ri chiziq esa gorizontal asimptota bo'ladi.



41-misol. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbolaning o‘g‘ma asimptotasi mavjud bo‘lib u quyidagi ko‘rinishga ega.



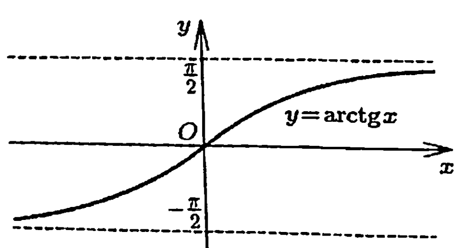
42-misol. $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-1}{x^2-2}$ funksiya grafigining og‘ma asimptotasini toping.

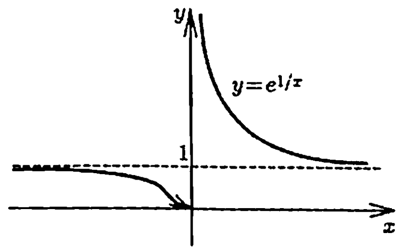
Yechish. $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2-1}{x\left(x^2-2\right)}=1,$

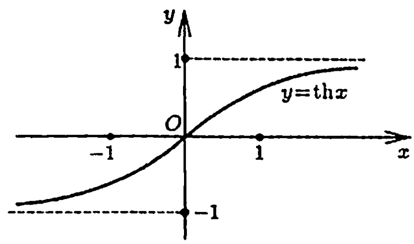
$$l=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2}=3.$$

$y=x+3$ –og‘ma asimptota.

Mashqni bajaring. 1) Quyidagi rasmlarda tasvirlangan funksiyalarning vertikal, gorizontal asimptotalarini ko‘rsating:







2) Quyidagi funksiyalarning asimptotalarini toping va tasvirlang:

a) $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$; b) $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; c) $y=\sqrt[3]{x^3+x^2}$; d) $y=\dfrac{x^2-4}{x}e^{-\frac{5}{3x}}$.

Funksiyani tekshirish. Funksiyaning sxematik grafigini chizishning umumiy sxemasi quyidagidan iborat:

1) funksiyaning aniqlanish sohasi topiladi, so'ngra uning uzilish nuqtalari;

2) funksiyaning juft – toqligi, davriyligi. Funksiyaning asimptotalari topiladi;

3) funksiya nollari topiladi;

4) funksiyaning monotonlik intervallari va ekstremumlari topiladi;

5) funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishlari va burilish nuqtalari aniqlanadi;

6) funksiya grafigining eskizi chiziladi.

43-misol. $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ funksiyaning grafigini yasaymiz.

Yechish. Funksiya $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$ oraliqda aniqlangan. Funksiya $x>0$ oraliqda musbat va $x<0$ oraliqda esa manfiy qiymatlarni qabul qiladi $y(0)=0$, $x=-1$ uzilish nuqtasi.

Funksiyaning uzilish nuqtalardagi va cheksizlikdagi xususiyatlarini aniqlaymiz:

$$\lim_{x\to-1-0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-1+0} f(x)=\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}=-\infty.$$

Funksiya asimptotalarini aniqlaymiz $x=-1$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota ekanligi yuqorida ma'lum bo'ldi. Endi uning og'ma asimptotasini aniqlaymiz:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{(x+1)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2}=1$$

$$l=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{x^2+2x+1}=-2$$

Demak $y=x-2$ to‘g‘ri chiziq funksiyaning og‘ma asimptotasi ekan.

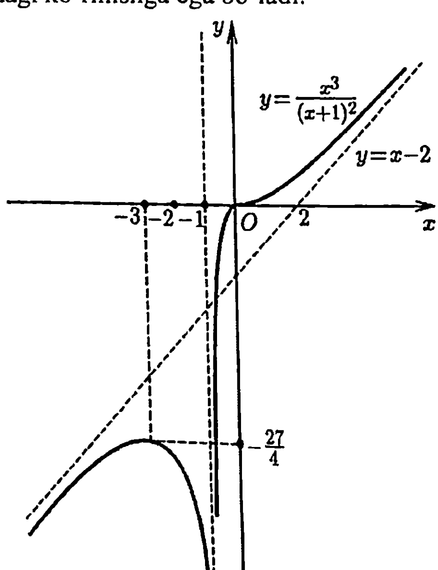
Funksiyaning o‘sish, kamayish, qavariqlik oraliqlarini va burilish nuqtalarini aniqlash uchun uning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblaymiz:

$$y'=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\quad y''=\frac{6x}{(x+1)^4}$$

$y'=0\Rightarrow x=0,\ x=-3$ nuqtalar statsionar nuqtalardir. $x=0$ nuqta ekstremum nuqta emas, chinki, $x\in(-1;0)\Rightarrow f'(x)>0$ $x\in(0;\infty)\Rightarrow f'(x)>0$. $x=-3$ nuqtada funksiya maksimumga erishadi, chunki $y''(-3)<0$, $y(-3)=-\frac{27}{4}$.

Funksiya $(-\infty;-3)\cup(-1;\infty)$ oraliqda o‘suvchi $(-3;-1)$ oraliqda esa kamayuvchi ekanligini aniqladik.

Endi funksiyaning qavariqlik oraliqlarini aniqlaymiz $x<0\ (x\neq-1)\Rightarrow y''<0$, $x>0\Rightarrow y''>0$. Demak, funksiya grafigi $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$ oraliqda qavariqlik yuqoriga qaragan, $(0;\infty)$ oraliqda esa qavariqlik pastga qaragan. $y''=0\Rightarrow x=0$ demak, $x=0$ burilish nuqtasi. U holda funksiya grafigi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.



44-misol. $y=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ funksiya grafigini chizamiz. Funksiya R^1 da aniqlangan. Shu bilan bur qatorda

$$x<-1 \Rightarrow y<0,\ x>-1\ (x\neq 0)\Rightarrow y>0,\ y(-1)=y(0)=0.$$

$y=x+\frac{1}{3}$ to‘g‘ri chiziq uning og‘ma asimptotasidir. Hosilalarini hisoblaymiz:

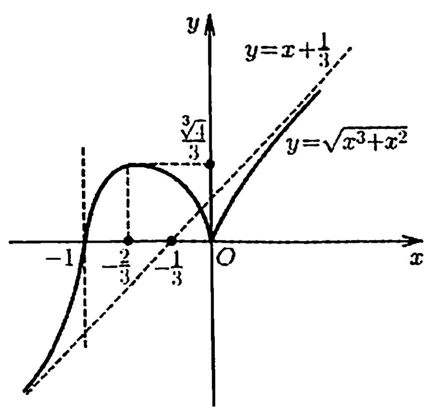
$$y'=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(3x+2),\ y''=-\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}}x^{-\frac{4}{3}}.$$

Bu yerda

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}y'(x)=+\infty,\ f'_{+}(0)=+\infty,\ f'_{-}(0)=-\infty.$$

$x=-\frac{2}{3}$ nuqta funksiyaning maksimumi bo‘lib, $y\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$. $x=0$ funksiyaning minimumi bo‘lib, $y(0)=0$. $x<-1\Rightarrow y''>0$ bo‘lgani uchun uning qavariqligi bu oraliqda pastga qaragan; $x>-1$ $(x\neq 0)\Rightarrow y''<0$ bo‘lgani uchun uning qavariqligi bu oraliqda yuqoriga qaragan.

U holda funksiya grafigi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.



Mashqni bajaring. Quyidagi funksiyalarning grafigini chizing:

1) $f(x)=x^4-6x^2-6x+1$; 2) $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^3}$; 3) $f(x)=\frac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$;

4) $f(x)=\frac{x^3}{2}-tgx+\sin x$; 5) $f(x)=\frac{1}{4}(x^3+3x^2-9x-3)$; 6) $f(x)=\frac{x^2}{4(2-x)^2}$;

7) $f(x)=x\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

6.5. Xususiy hosila. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar

$y=f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqtaning biror-bir $U_\delta(M_0)$ atrofida aniqlangan bo'lsin. $M_{\Delta_i}(x_1^0,..x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0)\in U_\delta(M_0)$ nuqtani qaraymiz.

11-ta'rif. Agar $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{f(M_{\Delta_i})-f(M_0)}{\Delta x_i}$ limit chekli bo'lsa, u holda unga $y=f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi x_i o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi.

Xususiy hosila quyidagicha belgilanadi: $\dfrac{\partial y(M_0)}{\partial x_i}=y_{x_i}'(M_0)$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x_i}=f_{x_i}'(M_0)$. Shunday qilib,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(M_{\Delta_i})-f(M_0)}{\Delta x_i}.$$

Xususiy hosilaning ta'rifidan, $y=f(M)$ funksiyadan x_i bo'yicha xususiy hosilani topishda boshqa o'zgaruvchilarni o'zgarmas, deb qarab, funksiyadan x_i bo'yicha oddiy hosilasini topish yetarli.

Agar funksiya ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ bo'lsa, xususiy hosilalar f_x', f_y' ko'rinishda, agar funksiya uch o'zgaruvchili $u=f(x,y,z)$ bo'lsa, xususiy hosilalar f_x', f_y', f_z' ko'rinishda belgilanadi.

45-misol. $f(x,y,z)=2x^5z^2-3xy^4+7y-9$ funksiyaning barcha o'zgaruvchilari bo'yicha xususiy hosilalarini toping.

Yechish. Ta'rifga binoan:

$$f_x'=10x^4z^2-3y^4,\ f_y'=-12xy^3+7,\ f_z'=4x^5z.$$

46-misol. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiyaning $M(-4;3)$ nuqtadagi xususiy hosilalarini toping.

Yechish.

$$f_x'(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow f_x'(M)=-\frac{4}{5},$$

$$f_y'(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow f_y'(M)=\frac{3}{5}$$

Mashqlarni bajaring. 1) $f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping:

a) $f(x,y)=x+y^2+\ln(x+y^2)$; b) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$; c) $f(x,y)=\dfrac{x(x-y)}{y^2}$;

d) $f(x,y)=\sin x-x^2y$; e) $f(x,y)=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$; k) $f(x,y)=e^x(\cos x+x\sin y)$;

2) Berilgan nuqtada funksiya hosilasini hisoblang:

a) $f(x,y)=\frac{x}{y^2}$, $(1,1)$; b) $f(x,y)=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$, $(1,2)$; c) $f(x,y)=xye^{\sin \pi y}$, $(1,1)$.

3) $f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping:

a) $f(x,y,z)=xy+yz+zx$; b) $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; c) $f(x,y,z)=\frac{z}{x}+\frac{x}{z}$;

d) $f(x,y,z)=\frac{y}{z}+arctg\frac{z}{x}+arctg\frac{x}{z}$; e) $f(x,y,z)=z^{xy}$.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning to'la orttirmasini topishni $y=f(M)$ funksiya misolida ko'rib chiqamiz. $y=f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqtaning biror-bir $U_\delta(M_0)$ atrofida aniqlangan bo'lsin. $M_\Delta(x_1^0+\Delta x_1,..x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0+\Delta x_n)\in U_\delta(M_0)$ nuqtani qaraymiz.

$f(M_\Delta)-f(M_0)$ ayirma $y=f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi to'la orttirmasi deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta f=f(M_\Delta)-f(M_0)$$

47-misol. $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ funksiyaning $M_0(1;-2)$ nuqtadagi to'la orttirmasini toping.

Yechish.

$$\Delta f(M_0)=(1+\Delta x_1)^2+(-2+\Delta x_2)^2-\left[1^2+(-2)^2\right]=$$

$$=1+2\Delta x_1+\Delta x_1^2+4-4\Delta x_2+\Delta x_2^2-1-4=2\Delta x_1+\Delta x_1^2-4\Delta x_2+\Delta x_2^2.$$

Funksiyaning Δf orttirmasidan foydalanib ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun to'la differensial tushunchasini kiritamiz. $y=f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqta atrofida aniqlangan bo'lsin.

12-ta'rif. Agar $y=f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi $\Delta f(M_0)$ to'la orttirmasini

$$\Delta f(M_0)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+...+A_n\Delta x_n+\alpha_1(\Delta x_1)+...+\alpha_n(\Delta x_n) \qquad (6.11)$$

ko'rinishda ifoda etish mumkin bo'lsa, u holda $y=f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Bu yerda, $A_1, A_2,..., A_n$ sonlar $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$ orttirmalarga bog'liq emas va $\Delta x_1\to 0\Rightarrow\alpha_1(\Delta x_1)\to 0, \Delta x_2\to 0\Rightarrow\alpha_2(\Delta x_2)\to 0, ..., \Delta x_n\to 0\Rightarrow\alpha_n(\Delta x_n)\to 0$.

48-misol. $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiya $M_0(-1;2)$ nuqtada differensiallanuvchi ekanligini ko'rsatamiz.

Yechish. Buning uchun uning $M_0(-1;2)$ nuqtadagi to'la orttirmasini hisoblaymiz:

$$\Delta f(M)=-2\Delta x+4\Delta y+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2=A_1\Delta x+A_2\Delta y+\alpha_1(\Delta x)+\alpha_2(\Delta y).$$

6.5. Xususiy hosila. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar

$y=f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqtaning biror-bir $U_\delta(M_0)$ atrofida aniqlangan bo'lsin. $M_{\Delta_i}(x_1^0,..x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0)\in U_\delta(M_0)$ nuqtani qaraymiz.

11-ta'rif. Agar $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{f(M_{\Delta_i})-f(M_0)}{\Delta x_i}$ limit chekli bo'lsa, u holda unga $y=f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi x_i o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi.

Xususiy hosila quyidagicha belgilanadi: $\dfrac{\partial y(M_0)}{\partial x_i}=y_{x_i}'(M_0)$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x_i}=f_{x_i}'(M_0)$. Shunday qilib,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(M_{\Delta_i})-f(M_0)}{\Delta x_i}.$$

Xususiy hosilaning ta'rifidan, $y=f(M)$ funksiyadan x_i bo'yicha xususiy hosilani topishda boshqa o'zgaruvchilarni o'zgarmas, deb qarab, funksiyadan x_i bo'yicha oddiy hosilasini topish yetarli.

Agar funksiya ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ bo'lsa, xususiy hosilalar f_x', f_y' ko'rinishda, agar funksiya uch o'zgaruvchili $u=f(x,y,z)$ bo'lsa, xususiy hosilalar f_x', f_y', f_z' ko'rinishda belgilanadi.

45-misol. $f(x,y,z)=2x^5z^2-3xy^4+7y-9$ funksiyaning barcha o'zgaruvchilari bo'yicha xususiy hosilalarini toping.

Yechish. Ta'rifga binoan:

$$f_x'=10x^4z^2-3y^4,\ f_y'=-12xy^3+7,\ f_z'=4x^5z.$$

46-misol. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiyaning $M(-4;3)$ nuqtadagi xususiy hosilalarini toping.

Yechish.

$$f_x'(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow f_x'(M)=-\frac{4}{5},$$

$$f_y'(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow f_y'(M)=\frac{3}{5}$$

Mashqlarni bajaring. 1) $f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping:

a) $f(x,y)=x+y^2+\ln(x+y^2)$; b) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$; c) $f(x,y)=\dfrac{x(x-y)}{y^2}$;

d) $f(x,y)=\sin x-x^2y$; e) $f(x,y)=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$; k) $f(x,y)=e^x(\cos x+x\sin y)$;

2) Berilgan nuqtada funksiya hosilasini hisoblang:

a) $f(x,y)=\frac{x}{y^2}$, $(1, 1)$; b) $f(x,y)=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$, $(1, 2)$; c) $f(x,y)=xye^{\sin\pi y}$, $(1, 1)$.

3) $f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping:

a) $f(x,y,z)=xy+yz+zx$; b) $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; c) $f(x,y,z)=\frac{z}{x}+\frac{x}{z}$;

d) $f(x,y,z)=\frac{y}{z}+arctg\frac{z}{x}+arctg\frac{x}{z}$; e) $f(x,y,z)=z^{xy}$.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning to'la orttirmasini topishni $y=f(M)$ funksiya misolida ko'rib chiqamiz. $y=f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqtaning biror-bir $U_\delta(M_0)$ atrofida aniqlangan bo'lsin. $M_\Delta(x_1^0+\Delta x_1,...x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0+\Delta x_n)\in U_\delta(M_0)$ nuqtani qaraymiz.

$f(M_\Delta)-f(M_0)$ ayirma $y=f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi to'la orttirmasi deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta f=f(M_\Delta)-f(M_0)$$

47-misol. $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ funksiyaning $M_0(1;-2)$ nuqtadagi to'la orttirmasini toping.

Yechish.

$$\Delta f(M_0)=(1+\Delta x_1)^2+(-2+\Delta x_2)^2-\left[1^2+(-2)^2\right]=$$

$$=1+2\Delta x_1+\Delta x_1^2+4-4\Delta x_2+\Delta x_2^2-1-4=2\Delta x_1+\Delta x_1^2-4\Delta x_2+\Delta x_2^2.$$

Funksiyaning Δf orttirmasidan foydalanib ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun to'la differensial tushunchasini kiritamiz. $y=f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqta atrofida aniqlangan bo'lsin.

12-ta'rif. Agar $y=f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi $\Delta f(M_0)$ to'la orttirmasini

$$\Delta f(M_0)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+...+A_n\Delta x_n+\alpha_1(\Delta x_1)+...+\alpha_n(\Delta x_n) \qquad (6.11)$$

ko'rinishda ifoda etish mumkin bo'lsa, u holda $y=f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Bu yerda, $A_1, A_2,..., A_n$ sonlar $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$ orttirmalarga bog'liq emas va $\Delta x_1\to 0\Rightarrow\alpha_1(\Delta x_1)\to 0, \Delta x_2\to 0\Rightarrow\alpha_2(\Delta x_2)\to 0, ..., \Delta x_n\to 0\Rightarrow\alpha_n(\Delta x_n)\to 0$.

48-misol. $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiya $M_0(-1;2)$ nuqtada differensiallanuvchi ekanligini ko'rsatamiz.

Yechish. Buning uchun uning $M_0(-1;2)$ nuqtadagi to'la orttirmasini hisoblaymiz:

$$\Delta f(M)=-2\Delta x+4\Delta y+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2=A_1\Delta x+A_2\Delta y+\alpha_1(\Delta x)+\alpha_2(\Delta y).$$

Bu yerda $A_1=-2$, $A_2=4$, $\alpha_1(\Delta x)=(\Delta x)^2$, $\alpha_2(\Delta y)=(\Delta y)^2$. Demak funksiya differensiallanuvchi.

49-misol. n o'zgaruvchili chiziqli

$$f(M)=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i+b$$

funksiya R^n fazoning ixtiyoriy nuqtasida differensiallanuvchidir.

Mashqlarni bajaring. 1) $f(x_1,x_2)=\sqrt[3]{x_1^3+x_2^4}$ funksiya $X_0(0;0)$ nuqtada differensiallanuvchi ekanligini isbotlang.

2) $f(x_1,x_2)=\sqrt[3]{x_1^3+x_2^3}$ funksiya $X_0(0;0)$ nuqtada differensiallanuvchi emasligini isbotlang.

Quyidagi mulohazalar o'rinli:

a) Agar funksiya biror-bir M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda funksiya ushbu nuqtada uzluksiz bo'ladi (zaruriy shart);

b) Agar $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda funksiya ushbu nuqtada barcha xususiy hosilalarga ega bo'ladi va shu bilan birgalikda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\Delta f(M_0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\Delta x_n+\alpha_1(\Delta x_1)+\ldots+\alpha_n(\Delta x_n). \qquad (6.12)$$

Bu yerda

$\Delta x_1\to 0\Rightarrow\alpha_1(\Delta x_1)\to 0, \Delta x_2\to 0\Rightarrow\alpha_2(\Delta x_2)\to 0,\ \ldots,\ \Delta x_n\to 0\Rightarrow\alpha_n(\Delta x_n)\to 0$.

c) Agar $f(M)$ funksiya M_0 nuqta atrofida barcha xususiy hosilalarga ega bo'lib, ushbu hosilalar M_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(M)$ funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi (yetarli shart).

13-ta'rif. $y=f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. M_0 nuqtada $f(M)$ funksiya orttirmasining bosh chiziqli qismi uning M_0 nuqtadagi to'la differensiali, deyiladi va $df(M_0)$ kabi belgilanib quyidagicha yoziladi:

$$df(M_0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}dx_n$$

50-misol. $f(x,y,z)=x^3y+y^2z+z$ funksiyaning $M(2;\,1;\,-3)$ nuqtadagi differensialini topamiz. Buning uchun uning xususiy hosilalarini hisoblab olamiz:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x}=3x^2y=12,\quad \frac{\partial f(M)}{\partial y}=x^3+2yz=2,\quad \frac{\partial f(M)}{\partial z}=y^2+1=2$$

$$df(M)=12dx+2dy+2dz.$$

Mashqni bajaring. $f(x,y)$, funksiyaning differensialini toping:

1) $f(x,y)=2x^4-3x^2y^2+x^3y$; 2) $f(x,y)=(y^3+2x^2y+3)^4$;

3) $f(x,y)=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$; 4) $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 5) $f(x,y)=2^{-\frac{y}{x}}$.

Agar $y=f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda cheksiz kichik $\Delta x_1,...,\Delta x_n$ miqdorlar uchun

$$\Delta f(M_0)\approx df(M_0)$$

munosabat bajariladi, ya'ni

$$\Delta f(M_0)\approx\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}\Delta x_1+...+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\Delta x_n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(M_\Delta)\approx f(M_0)+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}\Delta x_1+...+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Bu taqribiy hisoblash formulasi deb ataladi.

51-misol. $1,02^{2,01}$ ni taqribiy hisoblang.

Yechish. Buning uchun $z=x^y$ funksiyani qaraymiz. Uning $M_0(1;\ 2)$ nuqtadagi qiymati $z(M_0)=1^2=1$ ga teng. Taqribiy hisoblash formulasidan foydalanamiz:

$$\Delta z\approx yx^{y-1}\Delta x+x^y(\ln x)\Delta y.$$

Bu yerda

$$\Delta z=z(M_\Delta)-z(M_0)=(1+0,02)^{2+0,01}-1^2,\ x=1,\ y=2,\ \Delta x=0,02,\ \Delta y=0,01.$$

U holda

$$z(M_\Delta)=(1+0,02)^{2+0,01}=1+2\cdot1^{2-1}\cdot0,02+1^2\cdot\ln1\cdot0,01=1,04.$$

Erkli o'zgaruvchilarni har qanday almashtirishda ham to'la differensial formulasining saqlanish qonunini (invariantligi) $z=f(x,y)$ ikki o'zgaruvchili funksiya misolida ko'rsatamiz.

$x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$ bo'lib, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ hosilalar mavjud bo'lsin. Δt orttirma berib,

$$\varphi'(t)=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta x}{\Delta t},\quad \psi'(t)=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

ifodalarni hosil qilamiz. U holda $z=f(x,\ y)$ funksiya:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$$

orttirma oladi. To'la orttirma formulasiga asosan,

$$\Delta z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+\alpha_1(\Delta x)+\alpha_2(\Delta y). \qquad (6.13)$$

α_1, α_2 cheksiz kichik miqdorlar, ya'ni

$$\Delta t\to0\Rightarrow\Delta x\to0\Rightarrow\alpha_1\to0;\ \Delta t\to0\Rightarrow\Delta y\to0\Rightarrow\alpha_2\to0.$$

(6.13) ifodani Δt ga bo'lib

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=f'_x(x,y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+f'_y(x,y)\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta t}\alpha_1(\Delta x)+\frac{1}{\Delta t}\alpha_2(\Delta y)$$

ifodani hosil qilamiz. Bundan $\Delta t\to0$ limitga o'tsak,

$$z'_t=f'_x(x,y)\varphi'(t)+f'_y(x,y)\psi'(t). \qquad (6.14)$$

(6.14) ning ikki tomonini ham dt ko'paytirib, $dz=z'_t dt$, $dx=\varphi'(t)dt$ $dy=\psi'_t dt$ belgilashlardan foydalanib

$$dz = f'_x(x\,,y)dx + f'_y(x\,,y)dy \qquad (6.15)$$

formulani hosil qilamiz. (6.15) to'la differensial formulaning saqlanish qonuni, deyiladi.

Bu qoidadan ko'p o'zgaruvchili funksiyada murakkab funksiyani differensiallash qoidasi kelib chiqadi.

Masalan,

$\Psi = F(u, v, \omega)$: $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$, $\omega = \omega(x, y, z, t)$ funksiyaning to'la differensiali:

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Psi}{\partial z}dz + \frac{\partial\Psi}{\partial t}dt\,. \qquad (6.16)$$

Bu yerda

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x};$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y};$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial z};$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

(6.16) formulaga asosan $F(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ funksiyaning to'la differensialini

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \qquad (6.17)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Agar bu yerda $t \equiv x_1$, deb olsak (6.17) quyidagi ko'rinishga keladi

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + ... + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1}\,. \qquad (6.18)$$

Bu yerdagi $\frac{dF}{dx_1}$ hosila $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ hosiladan farqli ravishda x_1 o'zgaruvchi bo'yicha to'la hosila, deb ataladi.

Ikki o'zgaruvchili $z = F(x, y)$ funksiya misolida $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ xususiy va $\frac{dF}{dx_1}$ to'la hosilalarning turli ma'noga ega ekanligini geometrik nuqtai-nazardan tushuntiramiz.

l yoyning tenglamasi $y = f(x)$ ko'rinishda bo'lsin. U holda l yoy bo'ylab $z = F(x, y)$ funksiyani $z = F(x, f(x))$ ko'rinishda yozish mumkin. (6.18) dan foydalanib $z = F(x, f(x))$ funksiyaning $M(x, y)$ nuqtada to'la $\frac{dF}{dx}$ hosilasini yozamiz:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}f'(x)\,. \qquad (6.19)$$

Bundan ko'rinadiki, $M(x, y)$ nuqtadagi $\frac{dF}{dx}$ to'la hosilala $M(x, y)$ nuqtadan o'tuvchi $y = f(x)$ egri chiziqning yo'nalishiga bo'g'liq. $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ xususiy hosila esa $M(x, y)$ nuqtaning faqat o'ziga bo'g'liq.

Faraz qilaylik, M_0 nuqta va uning $U_\delta(M_0)$ atrofida $f(M)$ funksiya barcha $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i}$ xususiy hosilalarga ega bo'lsin.

14-ta'rif. M_0 nuqtada $f(M)$ funksiyaning birinchi tartibli $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ xususiy hosilasidan x_j o'zgaruvchi bo'yicha olingan xususiy hosilaga $f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi ikkinchi tartibli xususiy hosilasi deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j}. \qquad (6.20)$$

Agar (6.20) da $i = j$ bo'lsa, u holda uni 2-tartibli xususiy hosila $i \neq j$ bo'lsa uni 2-tartibli aralash hosila deb ataladi. Xuddi shunday usulda 3-, 4- va hokazo barcha yuqori tartibli hosilalar aniqlanadi. Shuni alohida ta'kidlash kerakki aralash hosilada natija qaysi o'zgaruvchi bo'yicha hosila olinish tartibiga bog'liq emas alohida har bir o'zgaruvchi bo'yicha hosila tartibi o'zgarmasligi kerak, ya'ni:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j^2 \partial x_i}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_j^2 \partial x_j^2} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_j^2 \partial x_i^2}, \ldots$$

52-misol. $f(M) = 2x_1^5 x_2^2 - 3x_1^6 + 4x_2^3$ funksiyaning barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

Yechish. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 10x_1^4 x_2^2 - 18x_1^5; \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_1^5 x_2 + 12x_2^2.$$

Endi bundan foydalanib ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 40x_1^3 x_2^2 - 90x_1^4;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 20x_1^4 x_2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 4x_1^5 + 24x_2.$$

$y = f(M)$ funksiyaning yuqori tartibli differensiali quyidagicha aniqlanadi:

$$d^2 f = d(df) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \text{ -2 tartibli differensial,}$$

$$d^3 f = d(d^2 f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k \text{ -3 tartibli differensial va hokazo.}$$

$F(x,y)=0$ oshkormas funksiyaning hosilasini hisoblash uchun $F(x,y)$, $F_x(x,y)$, $F_y(x,y)$ funksiyalarning uzluksizligini talab qilamiz. Agar $F_y(x,y) \neq 0$ bo'lsa, u holda:

$$y_x' = -\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$$

Xuddi shunday usulda 3 va undan ko'p o'zgaruvchili oshkormas funksiyalardan hosilalar olish mumkin.

6.6. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumlari

$y = f(M)$ funksiya M_0 nuqtaning $U_r(M_0) \subset D(f)$ – atrofida aniqlangan bo'lsin.

15-ta'rif. Agar M_0 nuqtaning shunday $U_r(M_0)$ atrofi mavjud bo'lsaki, barcha $M \in U_r(M_0)$ nuqtalar uchun $f(M_0) < f(M)$ $\left(f(M_0) > f(M)\right)$ tengsizlik bajarilsa, M_0 nuqta lokal minimum (maksimum) nuqta deyiladi.

16-ta'rif. Funksiyaning lokal maksimum va minimum nuqtalari funksiyaning lokal ekstremum nuqtalari deb ataladi.

Funksiyaning ekstremum nuqtalarini aniqlash uchun yo'nalish bo'yicha hosila va gradiyent tushunchasini kiritamiz.

$u = f(x,y,z)$ funksiya $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta atrofida aniqlangan va $\bar{l} \neq 0$ vektor berilgan bo'lsin. Bu yerda $\bar{l}$ vektor yo'nalishida $\bar{l}_0 = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ birlik vektorni aniqlaymiz.

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan $\bar{l}$ vektor yo'nalishi bo'ylab nur o'tkazamiz va uning tenglamasini parametrik tenglama ko'rinishida yozamiz:

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\ y = y_0 + t\cos\beta,\ z = z_0 + t\cos\gamma,\ t \geq 0. \qquad (6.21)$$

Bu yerda $t = \rho\left(M(x,y,z), M_0(x_0,y_0 z_0)\right)$, chunki

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = t\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = t.$$

(6.13) nurda $f(x,y,z) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$ funksiyani qaraymiz. U holda $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtada $\bar{l}$ yo'nalish bo'yicha hosila $\frac{\partial f}{\partial l}$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\lim_{t\to 0}\frac{f(M)-f(M_0)}{t}=\frac{d}{dt}f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)\Big|_{t=0}.$$

Shunday qilib yo'nalish bo'yicha hosila $\frac{\partial f}{\partial l}$ faqat M_0 nuqta va $\vec{l}$ vektor yo'nalishi bilan aniqlanib u koordinatalar sistemasining tanlanishiga bog'liq emas. $\frac{\partial f}{\partial l}$ hosilani murakkab funksiya hosilasi formulasi yordamida hisoblasak:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Bu yerda $\left\{\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\right\}=\nabla f(M_0)$ f funksiyaning M_0 nuqtadagi gradiyenti, deb ataladi va $gradf(M_0)$ yoki $\nabla f(M_0)$ (∇f –nabla ef) ko'rinishda belgilanadi.

53-misol. $f(x_1,x_2)=3x_1^2x_2-4x_1^3+2x_2^2-5$ funksiyaning $M_0(1;-1)$ nuqtadagi gradiyentini toping.

Yechish.

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_1}=6x_1\cdot x_2-12x_1^2, \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}=-18;$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_2}=3x_1^2+4x_2, \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2}=-1.$$

Demak, $grad\, f(M_0)=(-18,-1)$.

Demak, birlik vektor: $\vec{l}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$; M_0 nuqtada $f(x,y,z)$ funksiyaning gradiyenti esa $\left\{\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\right\}=\nabla f(M_0)$ ko'rinishda aniqlanadi. U holda

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma= \qquad (6.22)$$

$$=|\nabla f||\vec{l}_0|\cos\varphi=|\nabla f|\cos\varphi$$

Bundan ko'rinib turibdiki, agar $\Delta f\neq 0$ bo'lsa, u holda M_0nuqtadagi yo'nalish bo'yicha hosila $\frac{\partial f}{\partial l}$ o'zining eng katta qiymatiga faqat ∇f ning yo'nalishida erishadi, ya'ni $\varphi=0$ bo'lganda. Bu yerda $\varphi-\nabla f$ va $\vec{l}_0$ vektorlar orasidagi burchak.

Gradiyent tushunchasidan foydalanib ekstremumning zaruriy shartini aniqlaymiz.

17-ta'rif. Agar $M_0\in R^n$ nuqtada $f(M)$ funksiyaning gradiyenti nol vektor, ya'ni $grad\, f(M_0)=0$ bo'lsa, u holda $M_0\in R^n$ nuqta $f(M)$ funksiyaning statsionar nuqtasi deyiladi.

54-misol. $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_1x_2+x_2^2+6x_1-9x_2-5$ funksiyaning statsionar nuqtasini toping.

Yechish. Funksiyaning gradiyentini aniqlaymiz:

$$grad\, f(M)=\left(2x_1-x_2+6;\ -x_1+2x_2-9\right).$$

Bundan

$$grad\, f(M)=0\Rightarrow\begin{cases}2x_1-x_2+6=0\\-x_1+2x_2-9=0\end{cases}$$

sistemaning yechimi $M_0(-1;4)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'ladi.

$M(a,b)$ nuqta atrofida uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan $z=f(x,y)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu nuqtada quyidagi orttirmani qaraymiz:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b).$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\varphi(t)=f(a+ht,b+kt).$$

Bu yerda $\varphi(0)=f(a,b)$, $\varphi(1)=f(a+h,b+k)$. $\varphi(t)$ funksiyaga $[0;1]$ Lagranj o'rta qiymat teoremasini: $f(a)-f(b)=(b-a)f'(\xi)$, $\xi\in(a;b)$ qo'llaymiz:

$$\varphi(1)-\varphi(0)=(1-0)\varphi'(\xi),\ \xi\in(0;1). \quad (6.23)$$

Bu yerda:

$$\varphi'(t)=hf'_x(a+ht,b+kt)+kf'_y(a+ht,b+kt). \quad (6.24)$$

(6.23) tenglikni (6.24) dan foydalanib quyidagicha yozib olamiz:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf'_x(a+h\xi,b+k\xi)+kf'_y(a+h\xi,b+k\xi). \quad (6.25)$$

Bu tenglik ikki o'zgaruvchili funksiya uchun Lagranj funksiyasi deb ataladi.

Lagranj o'rta qiymat teoremasining umumlashmasi Teylor o'rta qiymat teoremasi yoki kengaytirilgan o'rta qiymat teoremasi ko'p holarda Teylor formulasi deb atalib quyidagi ko'rinishga ega:

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi),\ \xi\in(a,b). \quad (6.18)$$

(6.25) formulani $f(x,y)$ uchun keltirib chiqaramiz. Buning uchun $\varphi(t)=f(a+ht,b+kt)$ funksiyani $[0;1]$ kesmada Teylor formulasini 2 – tartibli hadi bilan yozib olamiz:

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{1-0}{1!}\varphi'(0)+\frac{(1-0)^2}{2!}\varphi''(\xi),\ \xi\in(a,b). \quad (6.27)$$

(6.24) formulani differensiallab quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\varphi''(t)=h^2f''_{xx}(a+ht,b+kt)+2hkf''_{xy}(a+ht,b+kt)+k^2f''_{yy}(a+ht,b+kt).$$

(6.16) ga asosan $\varphi'(0)=hf'_x(a,b)+kf'_y(a,b)$ bo'lgani uchun (6.27) quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+[hf'_x(a,b)+kf'_y(a,b)]+$$
$$+\frac{1}{2!}[h^2f''_{xx}(a+\xi t,b+\xi t)+2hkf''_{xy}(a+\xi t,b+\xi t)+k^2f''_{yy}(a+\xi t,b+\xi t)],\ \xi\in(0;1)$$

Bu formula ikki o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor o'rta qiymat teoremasi deb ataladi.

Bu ikkita o'rta qiymat teoremasini uch va undan ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham qo'llash mumkin.

55-misol. $M(1;2)$ nuqtada $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiya uchun Lagranj va Teylor o'rta qiymat teoremasini yozing.

Yechish. Bu funksiya uchun Lagranj o'rta qiymat teoremasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$(1+h)^2+(2+k)^2=1^2+2^2+2h(1+\xi h)+2k(2+\xi k)=$$
$$=1^2+2^2+2h+2h^2\xi+4k+2k^2\xi=(1^2+2h+2h^2\xi)+(2^2+4k+2k^2\xi)$$

Bu yerda $\xi=\frac{1}{2}\in(0;1)$ bo'lsa tenglik o'rinli bo'ladi.

U holda bu funksiya uchun Teylor o'rta qiymat teoremasini yozamiz va bu teorema quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$(1+h)^2+(2+k)^2=1^2+2^2+2h\cdot 1+2k\cdot 2+\frac{1}{2}(2h^2+2k^2)=$$
$$=1^2+2^2+2h+h^2+4k+k^2=(1^2+2h+h^2)+(2^2+4k+k^2).$$

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning M_0 ekstremum nuqtasini topishni ikki o'zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiya misolida ko'rib chqamiz. $M_0(a,b)$ nuqta atrofida $f(x,y)$ uchun Teylor formulasini yozamiz:

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+[hf'_x(a,b)+kf'_y(a,b)]+$$
$$+\frac{1}{2!}[h^2f''_{xx}(x,y)+2hkf''_{xy}(x,y)+k^2f''_{yy}(x,y)] \qquad (6.28)$$

Bu yerda $f_x=f_y=0$ bo'lgani uchun (6.28) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2!}[h^2f''_{xx}(x,y)+2hkf''_{xy}(x,y)+k^2f''_{yy}(x,y)].$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2}=A,\quad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1\partial x_2}=B,\quad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2}=C,\ -\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}$$

bo'lsin. U holda:

1) agar $\Delta=B^2-AC<0$ bo'lsa, M_0 statsionar nuqta funksiyaning lokal ekstremum nuqtasi bo'lib: a) $A<0$ bo'lsa, M_0 statsionar nuqta maksimum nuqta; b) $A>0$ bo'lsa, M_0 statsionar nuqta minimum nuqta bo'ladi.

2) agar $B^2-AC>0$ bo'lsa, u holda M_0 statsionar nuqta ekstremum nuqta bo'lmaydi;

3) agar $B^2-AC=0$ bo'lsa, u holda nuqtaning ekstremum nuqtasi bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Bu holda qo'shimcha tekshirish talab etiladi.

56-misol. 54-misolda keltirilgan funksiyaning $M_0(-1;4)$ statsionar nuqtasini ekstremumga tekshiramiz:

$$A=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2}=2; \qquad B=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1\partial x_2}=-1; \quad C=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2}=2.$$

$$B^2-AC=(-1)^2-2\cdot 2=-3<0,$$

bo'lgani uchun $M_0(-1;4)$ statsionar nuqta ekstremum va $A=2>0$ bo'lganidan minimum nuqta bo'ladi.

Endi ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun ekstremumni topish masalasini ko'rib chiqamiz. X^0 nuqta $f(X)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lsin.

X^0 statsionar nuqta lokal ekstremal nuqta bo'lishi uchun shu nuqtada quyidagi

$$H[X^0]=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

matritsaning (Gesse matritsasi) ishorasi aniqlangan bo'lishi yetarli.

Agar $H\left[X^0\right]$ musbat aniqlangan bo'lsa, u holda X^0 nuqta minimum nuqta;

Agar $H\left[X^0\right]$ manfiy aniqlangan bo'lsa, u holda X^0 nuqta maksimum nuqta bo'ladi.

Ishorasi aniqlangan matritsalar haqidagi ba'zi tushunchalarni keltirib o'tamiz. $n\times n$ tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ simmetrik matritsa berilgan bo'lsin.

$A=(a_{ij})$ matritsaning yuqori chap burchagidan boshlab hosil qilingan quyidagi 1, 2, ..., $n-$tartibli minorlar, ya'ni

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

minorlar matritsaning bosh minorlari deyiladi.

$A=(a_{ij})$ matritsaning ketma-ket joylashgan bosh minorlari qat'iy musbat sonlar ketma-ketligini tashkil qilganda va faqat shundagina, bu matritsa musbat aniqlangan bo'ladi.

Agar $A=(a_{ij})$ matritsaning toq nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son manfiy juft nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son musbat bo'lsa, u holda $A=(a_{ij})$ matritsa manfiy aniqlangan bo'ladi.

57-misol. Berilgan funksiyaga ekstremal qiymat beruvchi nuqtalar topilsin:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

Yechish. Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy shartiga asosan:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=1-2x_1=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=x_3-2x_2=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=2+x_2-2x_3=0.$$

Bu tenglamalardan tuzilgan sistemaning yechimi $X^0\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ nuqta bo'ladi.

Demak, $X^0\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ – statsionar nuqta.

Yetarlilik shartining bajarilishini tekshirish uchun X^0 nuqtada Gesse matritsasini tuzamiz:

$$H\left[X^0\right]=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Bu matrisaning bosh minorlari mos ravishda -2, 4, -6. Demak, X^0 nuqtada $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ funksiya maksimumga erishadi.

$y=f(X)$ funksiya chegaralangan, yopiq V to'plamda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Funksiya to'plamining har bir nuqtasida, uning ba'zi nuqtalaridan tashqari, xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Ushbu holda, V to'plamga tegishli shunday X^0 nuqta topiladiki, bu nuqtada $f(X)$ funksiya o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishadi. Funksiya V to'plamda o'zining eng katta (eng kichik) qiymatini nafaqat ichki X^0 statsionar nuqtada balki xususiy hosilalaridan biri mavjud bo'lmagan nuqtada, shu bilan birga V to'plamning chegarasida ham erishishi mumkin.

Yuqoridagilarni e'tiborga olib, $f(X)$ funksiyaning berilgan V to'plamda eng katta va eng kichik qiymatlarini topish jarayonini quyidagi ketma-ketlikda amalga oshiriladi:

a) V to'plamning $f(X)$ funksiya xususiy hosilalari mavjud bo'lmagan nuqtalari aniqlanadi;

b) $f(X)$ funksiyaning V to'plamga tegishli barcha statsionar nuqtalari topiladi;

c) barcha aniqlangan nuqtalarga va V to'plam chegarasida $f(X)$ funksiya qiymatlari hisoblanadi va o'zaro solishtiriladi. Ulardan eng kattasi (eng kichigi) $f(X)$ funksiyaning V to'plamda erishadigan eng katta (eng kichik) qiymati hisoblanadi.

6-bobga doir savollar

1. Funksiya hosilasini ta'riflang.
2. Hosilaning iqtisodiy ma'nosini tushuntiring.
3. Yig'indi va ayirmaning hosilasi qanday topiladi?
4. Ko'paytmaning hosilasi qanday topiladi?
5. Bo'linmaning hosilasi qanday topiladi?
6. Teskari funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
7. Talab egiluvchanligini hisoblash formulasini keltiring.
8. Talabning aholi daromadiga nisbatan egiluvchanligini ta'riflang va topish formulasini yozing.
9. Marjinal daromad qanday ma'noga ega?
10. Marjinal xarajat ishlab chiqarish hajmiga bog'liq ravishda qanday funksiyaning o'zgarish tezligini ifodalaydi?
11. Marjinal foyda qanday ma'noga ega?
12. Funksiya ekstremumlari.
13. Funksiyaning kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.
14. Qanday holda kesmada berilgan funksiyaning minimumi uning shu kesmadagi eng kichik qiymati bo'ladi, deb ta'kidlash mumkin?
15. Qanday holda kesmada berilgan funksiyaning maksimumi uning shu kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi, deb ta'kidlash mumkin?
16. Firmaning daromadini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmi qanday topiladi?
17. Firmaning foydasini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmi qanday topiladi?
18. Firmaning marjinal xarajatlarini minimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmi qanday topiladi?
19. Soliq foydasini maksimallashtiruvchi soliq stavkasi qanday aniqlanadi?
20. Funksiyaning qavariqligi nima?
21. Funksiyaning kesmada botiq bo'lishining yetarli sharti nimadan iborat?
22. Funksiyaning kesmada qavariq bo'lishining yetarli sharti nimadan iborat?
23. Funksiya grafigining burilish nuqtasini tushuntiring.
24. Burilish nuqta uchun zaruriy shartni keltiring.
25. Funksiya grafigining asimptotalarini tushuntiring.
26. Qavariq funksiyaning grafigi uning urinmasiga nisbatan qanday joylashgan?
27. Botiq funksiyaning grafigi uning urinmasiga nisbatan qanday joylashgan?
28. Asimptota qanday aniqlanadi? Uning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
29. Og'ma asimptotani ta'riflang. Gorizontal asimptota nima?
30. Hosila yordamida funksiyani to'la tekshirish qanday amalga oshiriladi?

31. Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensiali qanday hisoblanadi?
32. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilasi qanday hisoblanadi?
33. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi qanday tekshiriladi?
34. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning to'la differensiali qanday hisoblanadi?
35. Funksiyaning lokal ekstremumlarini tushuntiring.
36. Funksiyaning M_0 nuqtadagi gradiyentini tushuntiring.
37. Teylor formulasini keltiring.
38. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumining zaruriy shartini keltiring.
39. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumining yetarli shartini keltiring.
40. Shartli ekstremumni ta'riflab bering.

6-bobga doir misol va masalalar

1. Berilgan egri chiziqqa berilgan nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini tuzing.

a) $y=x^3$, $A(1,1)$. b) $y=x^2+5$, $A(2,9)$. c) $y=\sin x$, $A(\pi,0)$.

2. Funksiya hosilasini toping.

a) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. b) $y=\sqrt{x^2+4x+3}$. c) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\arcsin x$.

d) $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}arctgx$. e) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$. f) $y=\dfrac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-x^2-2x}+2\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$.

g) $y=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$. h) $y=\dfrac{tg\dfrac{x}{2}+ctg\dfrac{x}{2}}{x}$. i) $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+ctgx}+\dfrac{\cos^2 x}{1+tgx}$.

j) $y=10^{x\cdot tgx}$.

3. Funksiya differensialini toping.

a) $y=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}-\dfrac{1}{2}arctgx$. b) $y=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

4. Taqribiy qiymatini hisoblang.

a) $\sin 60^\circ 18'$. b) $\sqrt[3]{735}$. c) $tg46^\circ$. d) $\ln 1{,}07$.

5. Funksiya n – tartibli hosila va differensialini toping ($n\in N$).

a) $\sqrt{x}$. b) x^a. c) $\ln\sqrt[12]{x+1}$. d) $\sin ax$.

6. Oshkormas funksiya hosilasini toping.

a) $x^3y^3+5xy+4=0$; b) $x\sin y+y\sin x=0$; c) $x^y-y^x=0$.

7. Funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlang.

a) $y=x^2(x-3)$; b) $y=e^{x^2-4x}$; c) $y=x\ln x$.

8. Funksiyani ekstremumga tekshiring.

a) $y=x(x-1)^2(x-2)^3$; b) $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$; c) $y=x\ln^2 x$.

9. Lopital qoidasidan foydalanib limitni toping.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}arctgx\right)^x$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 3x}$.

10. Funksiyaning og‘ma asimptotasini toping.

a) $f(x)=\frac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$; b) $f(x)=\frac{x+\sin x}{x}$; c) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$; d) $f(x)=xe^x$.

11. Funksiyaning qavariqligi, botiqligi va burilish nuqtalarini ikkinchi tartibli hosila yordamida toping.

a) $y=x^3-6x^2+12x-7$; b) $y=x^2\ln x$; c) $y=\left(1+x^2\right)\cdot e^x$.

12. Biror firma tomonidan mahsulot ishlab chiqarishga ketgan xarajatlar funksiyasi $y(x)=0{,}1x^3-1{,}2x^2+5x+250$ ko‘rinishga ega (pul bir. hisobida). Ishlab chiqarishning o‘rtacha va chegaraviy xarajatlarini toping va ularning $x=10$ dagi qiymatini hisoblang.

13. Biror firma tomonidan qishki oyoq kiyimlarini ishlab chiqarish hajmi $u=\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+6t+2100$ (birlik) tenglama bilan aniqlangan, bunda t-yilning taqvim oyi. Mehnat unumdorligi hamda uning o‘zgarish tempi va tezligini yil o‘rtasida hisoblang.

14. Agar talab funksiyasi $q=\frac{3p+14}{p+3}$ va taklif funksiyasi $s=p+2$ (bu yerda q va s - mos ravishda biror vaqt birligida sotib olinayotgan va sotishga taklif etilayotgan tovar miqdori, $p-$ bir birlik tovarning bahosi) berilgan bo‘lsa, u holda: a) muvozanat baho, ya’ni talab va taklifni tenglashtiradigan baho; b) talab va taklif elastikligi; v) narx muvozanat bahodan 10% ga oshirilganda daromadning o‘sishini toping.

15. Xarajatlar funksiyasi $C(x)=10+\frac{1}{10}x^2$ ko‘rinishga ega. Boshlang‘ich bosqichda firma ishni $A(x)$ o‘rtacha xarajatlarni minimallashtirish maqsadida tashkil etdi. Keyinchalik tovarning bir birligiga 4 shartli birlikka teng bo‘lgan narx belgilandi. Firma ishlab chiqarishni qancha birlikka orttirishi kerak?

16. Agar tovarning narxi $p=14$ birlik va xarajatlar funksiyasi $C(x)=13+2x+x^3$ ko‘rinishda bo‘lsa, ishlab chiqaruvchi uchun optimal x_0 mahsulot hajmini aniqlang.

17. Firmaning ishlab chiqargan x birlik tovarini narxi $p(x)=8-\sqrt{x}$ funksiya bilan aniqlanadi. Agar xarajatlar funksiyasi $C(x)=10+x+\frac{x^2}{2}$ ko‘rinishda bo‘lsa, firma uchun optimal bo‘lgan x_0 mahsulot hajmini aniqlang.

18. Firma tovarning x birligi uchun fiksirlangan $p=380$ narxni o‘rnatdi. x birlikdagi tovarni ishlab chiqarishdagi xarajatlar $C(x)=292x+x^2$ ga teng. Bunda sotilayotgan $K(x)$ tovarning miqdori x ga quyidagicha bog‘liq: $K(x)=x+\left(\sqrt{x_0}-\sqrt{x}\right)$. Firmaning maksimal foyda oladigan x ning qiymatini aniqlang.

19. Ishlab chiqarilayotgan mahsulotning x hajmi bilan firma daromadi o'rtasidagi munosabat $D(x)=100x-1000\sqrt{x}$ $(400\le x\le 900)$ funksiya kabi aniqlandi. Bu oraliqdagi xarajatlar funksiyasi $C(x)=50x+\frac{4}{5}x\sqrt{x}$ ko'rinishga ega. Ishlab chiqaruvchi uchun optimal bo'lgan mahsulot hajmini aniqlang.

20. Funksiya ekstremumlarini toping.

a) $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$; b) $z=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$.

21. Korxona ikki turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ularning miqdorini x va y bilan belgilaymiz. Ikki turdagi mahsulotlar narxi mos ravishda $P_1=32$ va $P_2=24$pul birligiga teng. Agar xarajat funksiyasi $C=\frac{3}{2}x^2+2xy+y^2$ ko'rinishiga ega bo'lsa, bu mahsulotlardan qancha miqdorda sotilsa foyda maksimal bo'ladi.

Tayanch so'z va iboralar: hosila, differensial, talab egiluvchanligi, marjinal daromad, marjinal xarajat, marjinal foyda, funksiyaning kritik nuqtalari, funksiyaning ekstremum nuqtalari, funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari, statsionar nuqtalar, daromadni va foydani maksimallashtirish, xarajatlarni minimallashtirish, asimptota, burilish nuqtasi, vertikal asimptota, og'ma asimptota, gorizontal asimptota, funksiyani to'la tekshirish, qavariqlik, funksiyaning to'la orttirmasi, funksiyaning to'la differensiali, to'la differensialning invariantligi, yuqori tartibli xususiy hosila, aralash xususiy hosila, oshkormas funksiyaning hosilasi, lokal ekstremum, global ekstremum, Teylor formulasi, gradiyent.

7-BOB. CHIZIQSIZ DASTURLASH ASOSLARI

7.1. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi

Quyidagi

$$q_i(x_1,x_2,...,x_n) \le b_i, \qquad (i=\overline{1,m}) \qquad (7.1)$$

$$Z = f(x_1,x_2,...,x_n) \to \max \qquad (7.2)$$

masala matematik programmalashtirish masalasini tashkil etadi.

Bu yerda, $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ va $f(x_1,x_2,...,x_n)$ berilgan funksiyalar; b_i, $(i=\overline{1,m})$ o'zgarmas sonlardir. (7.1) shartlar masalaning chegaraviy shartlari, $Z = f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya esa "*maqsad funksiyasi*" deb ataladi.

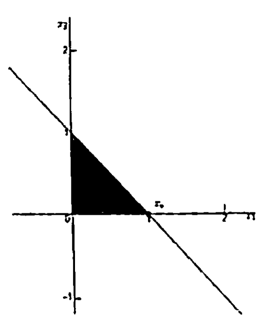
Matematik programmalashtirish masalalarida $x_1,x_2,...,x_n$ o'zgaruvchilarning ba'zilariga yoki hammasiga nomanfiylik sharti qo'yilgan bo'ladi. Ba'zi masalalarda esa noma'lumlarning bir qismi yoki hammasi butun bo'lishligi talab qilinadi.

1-ta'rif. Agar (7.1), (7.2) masaladagi barcha $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ va $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalar chiziqli bo'lsa, bu masala chiziqli programmalashtirish masalasi deyiladi.

1-misol. Chekmalari

$$\begin{cases} f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max(\min) \\ x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

sistemadan iborat masalani qaraymiz. Bu masaladagi chegaraviy shartlari chiziqli tengsizlikdan, maqsad funksiyasi chiziqli funksiyadan iborat va uning grafigi quyidagi quyidagi rasmda tasvirlangan:

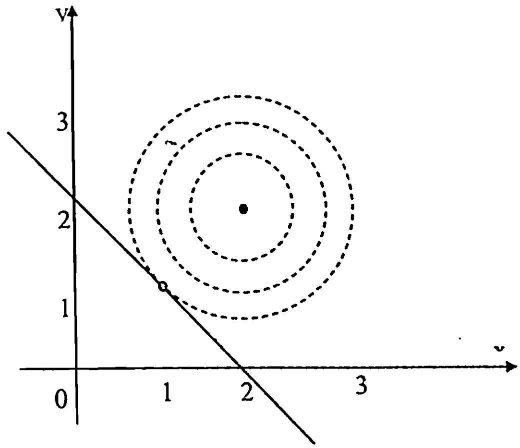


Bu masalaning optimal yechimi $X=(1;0)^T$ dan iborat bo'ladi.

2-ta'rif. Agar (7.1), (7.2) masaladagi $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ va $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalardan kamida bittasi chiziqsiz funksiya bo'lsa, u holda bu masala "chiziqsiz programmalashtirish masalasi" deyiladi.

2-misol. $x_1 + x_2 = 2$ chizig'idagi nuqtalardan $(2;2)^T$ markazga eng yaqin bo'lgan nuqtani topish masalasini ko'ramiz. Bu masalani yechish quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasiga keladi.

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 = 2.$$

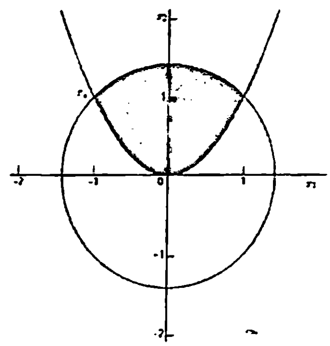


Chizmadan ko'rinib turibdiki bu masala $X = (1,1)^T$ nuqtada optimal yechmga ega. Bu masala chiziqsiz programmalashtirish masalasiga misol bo'la oladi. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi odatda S-joiz nuqtalar to'plamida f maqsad funksiyasini minimallashtiradi yoki maksimallashtiradi. Odatda, joiz nuqtalar to'plami o'zgaruvchilarga qo'yilgan shartlar asosida aniqlanadi. Ushbu masalada bizning maqsad funksiyamiz $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$ – chiziqsiz funksiya va joiz nuqtalar to'plami S bitta $x_1 + x_2 = 2$ chiziqli shart orqali aniqlanadi.

Joiz nuqtalar to'plami bir qancha shartlar orqali ham aniqlanishi mumkin. Masalan:

$$f(x) = x_1 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1^2 \le x_{2.} \\ x_1^2 + x_2^2 \le 2. \end{cases}$$

Bu masala uchun joiz nuqtalar to'plami S quyidagi rasmda ko'rsatilgan.



Bu masala $X=(-1,1)^T$ nuqtada optimal yechimga ega.

Bazida shartlar (cheklovlar) bo'lmagan paytda shartsiz optimallashtirish masalasi ham uchrashi mumkin.

Masalan:

$$f(x)=(e^{x_1}-1)^2+(x_2-1)^2 \to \min$$

Demak, S – joiz niqtalar to'plami bu yerda ikki o'lchamli fazodadir. Minimallashtiruvchi nuqta $X=(0,1)^T$ ga teng va funksiyaning qiymati bu nuqtada nolga teng va boshqa o'rinlarda musbat.

Biz ushbu misollardan shuni ko'rishimiz mumkinki masalaning maqsad funksiyasi hamda shartlari chiziqli yoki chiziqsiz bo'lishi mumkin. Yuqoridagi misollar bazi shartlar chiziqsiz bo'lganligi sababli chiziqsiz optimallashtirish masalalari hisoblanadi.

3-ta'rif. Agar (7.1), (7.2) masalada $m=0$ bo'lsa, ya'ni chegaraviy shartlar qatnashmasa, u holda bu masala "shartsiz optimallashtirish masalasi" deyiladi. Shartsiz optimallashtirish masalasi quyidagicha qo'iladi:

$$\begin{aligned} &f(x_1,x_2,...,x_n)\to \max(\min),\\ &(x_1,x_2,...,x_n)\in E\subset R^n. \end{aligned} \qquad (7.3)$$

Bu yerda $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ n-o'lchovli (vektor) nuqta, R^n n-o'lchovli fazo.

Faraz qilamiz, (7.1) sistema tenglamalar sistemasidan iborat bo'lib, noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilmasin, hamda $m<n$ bo'lib, $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ va $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalar uzluksiz va kamida ikkinchi tartibli xususiy hosilaga ega bo'lsin. U holda programmalashtirish masalasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$q_i(x_1,x_2,...,x_n)=b_i,\quad (i=\overline{1,m}) \qquad (7.4)$$

$$Z=f(x_1,x_2,...,x_n)\to \min \qquad (7.5)$$

Bunday masala "chegaraviy shartlari tenglamalardan iborat bo'lgan shartli minimum masalasi" deyiladi.

Shartsiz optimallashtirish va chegaraviy shartlari tenglamalardan iborat bo'lgan shartli minimum masalalarni differensial hisobga asoslangan klassik usullar bilan yechish mumkin bo'lgani ushun ularni "***optimallashtirishning klassik masalalari***" deyiladi.

Quyidagi masalani ko'ramiz:

$$q_i(x_1,x_2,...,x_n)\le b_i,\quad (i=\overline{1,m}), \tag{7.6}$$

$$X(x_1,x_2,...,x_n)\in G\subset R^n, \tag{7.7}$$

$$Z=f(x_1,x_2,...,x_n)\to \min. \tag{7.8}$$

Bu yerda $f(x_1,x_2,...,x_n)$ – maqsad funksiyasi; $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ – chegaraviy funksiyalar (7.6) shartlarni qanoatlantiruvchi $X\in G$ nuqtalar esa, masalaning joiz rejalari deb ataladi.

Chiziqsiz programmalashtirishda lokal va global optimal reja tushunchalari mavjud bo'lib, ular quyidagicha ta'riflanadi.

Faraz qilamiz, $Z=f(X)$, $X(x_1,x_2,...,x_n)\in G\subset R^n$ bo'lsin.

4-ta'rif. X^* nuqta (7.6)-(7.8) masalaning rejasi bo'lib, uning ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ atrofida nuqtalar to'plami $U_\varepsilon(X^*)\subset G$ mavjud bo'lsin. Agar ixtiyoriy $X\in U_\varepsilon(X^*)$ uchun

$$f(X)\le f(X^*)\quad \left(f(X)\ge f(X^*)\right) \tag{7.9}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, X^* reja $f(X)$ maqsad funksiyaga lokal minimum (maksimum) qiymat beruvchi lokal optimal reja deb ataladi.

5-ta'rif. Agar $f(X)\le f(X^*)$ $\left[f(X)\le f(X^*)\right]$ tengsizlik ixtiyoriy $X\in G$ uchun o'rinli bo'lsa, u holda X^* reja maqsad funksiyaga global minimum (maksimum) qiymat beruvchi global optimal reja yoki global optimal yechim deb ataladi.

Chiziqsiz programmalashtirish masalalarini yechish uchun chiziqli programmalashdagi simpleks usuliga o'xshagan universal usul kashf qilinmagan. Bu masalalar $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ va $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ixtiyoriy chiziqsiz funksiyalar bo'lgan hollarda juda kam o'rganilgan. Ko'proq o'rganilgan chiziqsiz programmalashtirish masalarining ba'zilari bilan tanishib chiqamiz.

Hozirgi davrgacha eng yaxshi o'rganilgan chiziqsiz programmalashtirish masalalari $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ va $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalar qavariq (botiq) bo'lgan holdir. Bunday masalalar "***qavariq programmalashtirish masalalari***" deb ataladi. Qavariq programmalashtirish masalalarining asosiy xususiyatlari shundan iboratki, ularning har qanday lokal optimal yechimi global yechimdan iborat bo'ladi.

Iqtisodiy amaliyotda uchraydigan ko‘p masalalarda $q_i(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalar chiziqli bo‘lib, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ maqsad funksiyasi kvadratik formada, ya’ni

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_ix_j \tag{7.10}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunday masalalar kvadratik programmalashtirish masalalari deb ataladi.

Chegaraviy shartlari yoki maqsad funksiyasi yoki ularning har ikkisi n ta bir o‘zgaruvchili funksiyalarning yig‘indisidan iborat bo‘lgan, ya’ni

$$q_i(x_1,x_2,...,x_n)=q_{i1}(x_1)+q_{i2}(x_2)+...+q_{in}(x_n),$$

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=f_1(x_1)+f_2(x_2)+...+f_n(x_n),$$

ko‘rinishda bo‘lgan masalalar ***“separabel programmalashtirish masalalari”*** deb ataladi.

Kvadratik va separabel programmalashtirish masalalarini yechish uchun simpleks usulga asoslangan taqribiy usullar yaratilgan.

Chiziqsiz programmalashtirishga doir bo‘lgan ishlab chiqarishni rejalashtirish va resurslarni boshqarishda uchraydigan muhim masalalardan biri stoxastik programmalashtirish masalalaridir. Bu masalalarda ayrim parametrlar noaniq yoki tasodifiy miqdorlardan iborat bo‘ladi.

Chegaraviy shartlari haqida to‘liq ma’lumot bo‘lmagan optimallashtirish masalalari ***“stoxastik masalalar”*** deb ataladi.

Parametrlari o‘zgaruvchan miqdor bo‘lib, ular vaqtning funksiyasi deb qaralgan masalalar ***“dinamik programmalashtirish masalasi”*** deyiladi.

O‘zgaruvchilar faqatgina butun qiymatlardan iborat bo‘lgan masalalar diskret programmalashtirish masalalari deb yuritiladi yoki ko‘p hollarda qo‘yilgan masalaning barcha funksiyalari chiziqli bo‘lsa bunday masalalar ***butun sonli programmalashtirish masalasi*** deb yuritiladi. Bazan masalani yechish uchun muhim chegaralarini tashlab ketish va yechimga ega bo‘lgandan keyin, butun songa yaqin bo‘lgan o‘zgaruvchilarni tanlab olishning o‘zi kifoya. Lekin olingan so‘nggi yechimhar doim ham optimal yechim bo‘la olmaydi.

Chiziqli programmalashtirish masalalarining asosiy xusysiyatlarini takrorlab o‘tamiz:

Birinchidan, uning joiz rejalar to‘plami, ya’ni masalaning chegaraviy shartlarini va noma’lumlarning nomanfiylik shartlarini qanoatlantiruvchi $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtalar to‘plami qavariq bo‘ladi;

Ikkinchidan, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ maqsad funksiyasi n-o‘lchovli fazoning gipertekisliklar oilasini tashkil etadi;

Uchinchidan, maqsad funksiyaning joiz rejalar to‘plamidagi har qanday minimumi (maksimumi) global minimumdan (maksimumdan) iborat bo‘ladi;

To‘rtinchidan, agar maqsad funksiya chekli qiymatga ega bo‘lsa, joiz rejalar to‘plamini ifodalovchi ko‘pburchakning kamida bitta uchi optimal yechimni beradi.

Rejalar ko'pburchagining uchlari (burchak nuqtalari) ***bazis yechim*** deb ataladi. Bazis yechimdagi hamma noma'lumlar (bazis o'zgaruvchilar) qat'iy musbat bo'lgan holdagi yechim ***aynimagan bazis yechim*** va agar ulardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, ***aynigan bazis yechim*** deyiladi.

Bazis yechim optimal yechim bo'lishi uchun maqsad funksiyaning bu yechimdagi qiymati boshqa bazis yechimlardagi qiymatlaridan kam (ko'p) bo'lmasligi kerak.

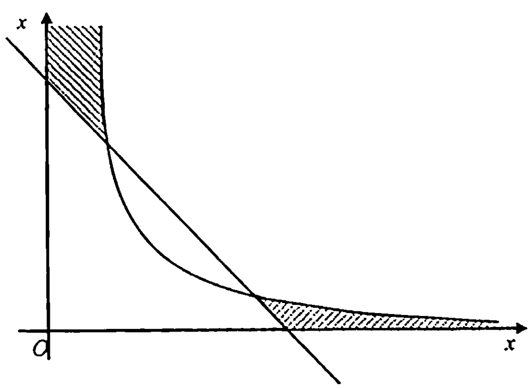
Chiziqsiz programmalashtirish masalalarining geometrik talqini. Chiziqsiz programmalashtirish masalalarida yuqoridagi chiziqli programmalashtirishga doir xususiyatlarning ayrimlari (yoki hammasi) bajarilmaydi:

1) chiziqsiz programmalashtirishda rejalar to'plami qavariq bo'lmasligi ham mumkin.

3-misol. Quyidagi cheklamalari

$$\begin{cases} (x_1 - 1)x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 3{,}5 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

sistemadan iborat masalani ko'ramiz.



Masalaning joiz rejalar to'plami ikkita alohida qismlarga ajralgan bo'lib, u qavariq emas.

Agar joiz rejalar to'plami qavariq bo'lmasa, maqsad funksiya chiziqli bo'lgan holda ham masalaning global optimal yechimidan farq qiluvchi lokal yechimlari mavjud bo'ladi.

Masalan, quyidagi masalani ko'ramiz:

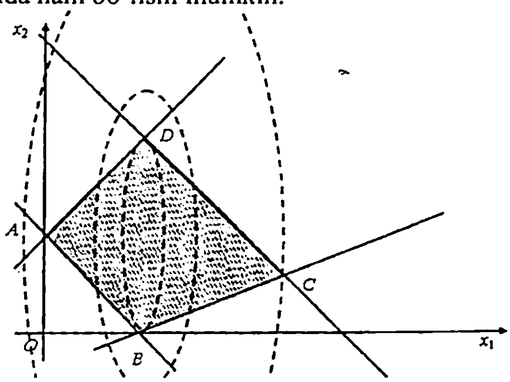
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \le -2 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - 3x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max.$$

Bu masalaning cheklamalarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami qavariq $ABCD$ to‘rtburshakdan iborat bo‘ladi.

Masaladagi maqsad funksiya markazi (2;2) nuqtadan iborat bo‘lgan ellipslar oilasidan tashkil topgan.

Bu masalaning optimal yechimi joiz rejalar to‘plamining C uchidan iborat bo‘ladi. Umumiy holda, chiziqsiz programmalashtirish masalasining maqsad funksiyasiga optimal qiymat beruvchi nuqta (bazis yechim) mumkin bo‘lgan rejalar to‘plamining faqat burchak nuqtasida emas, balki ichki nuqtasida ham, chegaraviy nuqtasida ham bo‘lishi mumkin.



Umumiy holda berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini ko‘ramiz va bu masalaning geometrik talqini bilan tanishamiz. Masaladagi shartlar Yevklid fazosida joiz rejalar to‘plamini beradi. Bu to‘plamning nuqtalari orasidan maqsad funksiyaga minimum qiymat beruvchi nuqtani (optimal nuqtani) topish kerak. Buning uchun joiz rejalar to‘plamining $f(x_1, x_2, ..., x_n) = const$ gipersirtlar oilasi bilan kesishgan nuqtalari ichidan optimal nuqtani, $const$ ga eng kichik qiymat beruvchi nuqtani, topish kerak.

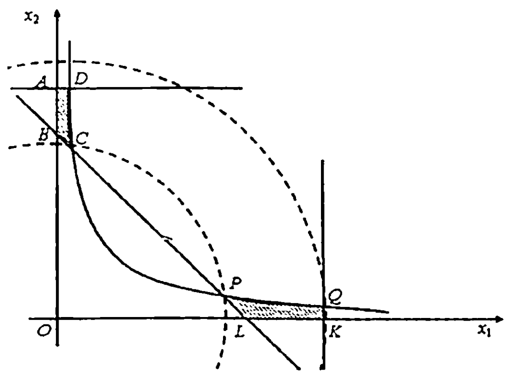
4-misol. Quyidagi masalaning optimal yechimini grafik usulda toping.

$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 \le 7 \\ x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \max(\min).$$

Yechish. Bu masalaning joiz rejalar to‘plami qavariq to‘plam bo‘lmaydi, aksincha, ikkita ayrim $ABCD$ va $PQKL$ qismlardan iborat bo‘ladi. Maqsad funksiya o‘zining minimal qiymatiga $D(1, 4)$ va $P(1, 4)$ nuqtalarda erishadi. Bu nuqtalarda $Z_{\min} = 17$. $C\left(\frac{2}{3}, 6\right)$ va $Q\left(7, \frac{4}{7}\right)$ nuqtalarda Z funksiya lokal maksimum qiymatlarga erishadi.

$$Z(C)=36\frac{4}{9},\ Z(Q)=49\frac{16}{49},\ Z_{\max}=49\frac{16}{49}.$$



Shartsiz optimallashtirish masalasi ekstremumi mavjudligining zaruriy va yetarlilik sharti. Shartsiz minimum masalasida

$$f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)$$

funksiyaning minimumini $X\in E\subset R^n$ nuqtalarda topish talab qilinadi. Ma'lumki, bu holda $f(X)$ funksiyadan birinchi tartibli barcha xususiy hosilalari bilan birgalikda uzluksiz bo'lsin

$$f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)\to\min \tag{7.11}$$

masala o'rganiladi.

Agar X^0 nuqta (7.11) masalaning optimal rejasi (ekstremum nuqtasi) bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j}=0,\qquad j=\overline{1,n} \tag{7.12}$$

Demak, berilgan $f(X)$ funksiya X^0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishi uchun bu nuqta

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_j}=0,\qquad j=\overline{1,n} \tag{7.13}$$

sistemaning yechimi bo'lishi zarur.

(7.13) sistemaning yechimlari statsionar nuqtalar deb ataladi. Berilgan $f(X)$ funksiya ekstremumga erishadigan nuqta statsionar nuqta bo'ladi, lekin har qanday statsionar nuqtada ham funksiya ekstremumga erishavermaydi. Demak, (7.13) shart funksiya ekstremumi bo'lishining zaruriy sharti, lekin u yetarli shart emas.

Quyidagi teorema statsionar nuqta birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalari uzluksiz bo'lgan $f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning ekstremal nuqtasi bo'lishi uchun yetarli shartni ko'rsatadi.

Gesse matrisasi va uning funksiya ekstremumini tekshirishdagi roli.

Teorema. X^0 statsionar nuqta lokal ekstremal nuqta bo'lishi uchun shu nuqtada quyidagi

$$H[X^0]=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

matritsaning (Gesse matrisasi) ishorasi aniqlangan bo'lishi yetarli.

Agar $H[X^0]$ musbat bo'lsa, u holda X^0 nuqta minimum nuqta;

Agar $H[X^0]$ manfiy bo'lsa, u holda X^0 nuqta maksimum bo'ladi.

Ishorasi aniqlangan matrisalar haqidagi ba'zi tushunchalarni keltirib o'tamiz. $n \times n$ tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ simmetrik matrisa berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. $A=(a_{ij})$ matrisaning yuqori chap burchagidan boshlab hosil qilingan quyidagi $1, 2, \dots, n$ – tartibli minorlar, ya'ni

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

minorlar bu matrisaning bosh minorlari deyiladi.

Teorema. $A=(a_{ij})$ matrisaning ketma-ket joylashgan bosh minorlari qat'iy musbat sonlar ketma-ketligini tashkil qilganda va faqat shundagina, bu matrisa musbat bo'ladi.

Agar $A=(a_{ij})$ matrisaning toq nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son manfiy juft nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son musbat bo'lsa, u holda $A=(a_{ij})$ matrisa manfiy bo'ladi.

5-misol. Berilgan funksiyaga ekstremal qiymat beruvchi nuqtalar topilsin.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

Yechish: Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy shartiga asosan:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3 - 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 + x_2 - 2x_3 = 0$$

Bu tenglamalardan tuzilgan sistemaning yechimi $X^0\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ nuqta bo'ladi. Demak, $X^0\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ – statsionar nuqta.

Yetarlilik shartining bajarilishini tekshirish uchun X^0 nuqtada Gesse matrisasini tuzamiz:

$$H[X^0] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisaning bosh minorlari mos ravishda –2, 4, –4. Demak, X^0 nuqtada $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiya maksimumga erishadi.

Yuqorida keltirilgan teoremadagi ekstremum mavjudligining yetarlilik sharti bir argumentli $f(x)$ funksiya uchun quyidagicha bo'ladi.

Faraz qilaylik, x^0 statsionar nuqta bo'lsin.

Agar $f''(x^0) < 0$ bo'lsa, u holda x^0 nuqta funksiyaning ***maksimum nuqtasi***; agar $f''(x^0) > 0$ bo'lsa, uholda x^0 nuqta funktsiyaning ***minimum nuqtasi*** deb ataladi.

Agar $f(x)$ funksiya x^0 statsionar nuqtada $f''(x^0) = 0$ bo'lsa, u holda yuqori tartibli hosilalarning x^0 nuqtadagi qiymatlarini tekshirish kerak. Bu holda quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema. x^0 stasionar nuqtada $f'(x^0) = 0$, $f''(x^0) = 0$, ..., $f^{(n-1)}(x^0) = 0$ va $f^{(n)}(x^0) \neq 0$ bo'lsa, u holda bu nuqta

a) n toq son bo'lganda burulish nuqta;

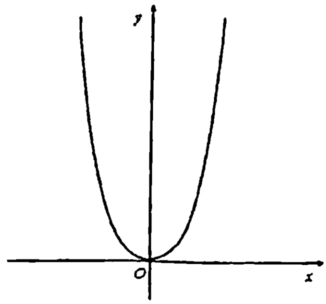
b) n juft son bo'lganda ekstremal nuqta bo'ladi.

6-misol. $f(x) = x^4$ funksiyaning ekstremumi topilsin.

Yechish: $f'(x) = 4x^3 = 0$. Demak, $x^0 = 0$ stasionar nuqta bo'ladi.

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 24 \neq 0.$$

$n=4$ juft son. Demak, $x^0=0$ nuqta $f(x)=x^4$ funksiya uchun ekstremal nuqta bo'ladi. $f^{(4)}(0)=24>0$ bo'lgani uchun $x^0=0$ nuqtada berilgan funksiya minimumga erishadi.



$f(x)=x^4$

Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilar usuli. Faraz qilaylik,

$$\begin{aligned} &q_i(x_1,x_2,...,x_n)=b_i, \quad (i=\overline{1,m}) \\ &Z=f(x_1,x_2,...,x_n)\to\min \end{aligned} \tag{7.14}$$

masalani yechish talab qilinsin.

(7.14) masalani yechishning eng sodda klassik usuli noma'lumlarni yo'qotish usulidir. Bunda

$$q_i(x_1,x_2,...,x_n)=b_i, \quad (i=\overline{1,m})$$

tenglamalar sistemasidan m ta noma'lumlarni, masalan,

$$\begin{aligned} &x_1=h_1(x_{m+1},x_{m+2},...,x_n), \\ &x_2=h_2(x_{m+1},x_{m+2},...,x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_m=h_m(x_{m+1},x_{m+2},...,x_n) \end{aligned}$$

noma'lumlar topilib $Z=f(x_1,x_2,...,x_n)\to\min$ funksiyaga keltirib qo'yiladi va $n-m$ ta $x_{m+1},x_{m+2},...,x_n$ noma'lumlarga nisbatan shartsiz optimallashtirish masalasi

$$\begin{aligned} &\varphi(x_{m+1},x_{m+2},...,x_n)= \\ &=f\left(h_1(x_{m+1},x_{m+2},...,x_n),\ ...,\ h_m(x_{m+1},x_{m+2},...,x_n),\ x_{m+1},x_{m+2},...,x_n\right)\to\min \end{aligned} \tag{7.15}$$

hosil qilinadi. Bu masala (7.14) masalaga ekvivalent:

1. Agar $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ (7.14) masalaning yechimi bo'lsa, u holda $(x_{m+1}^0,x_{m+2}^0,...,x_n^0)$ (7.15) masalaning yechimi bo'ladi;

2. Agar $(x_{m+1}^0,x_{m+2}^0,...,x_n^0)$ (7.15) masalaning yechimi bo'lsa, u holda $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ (7.14) masalaning yechimi bo'ladi.

(7.14) masalainig optimal yechimini topishning ikkinchi klassik usuli Lagranj ko'paytuvchilari usulidir.

$q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalar va ularning $x_1, x_2, ..., x_n$ noma'lumlar bo'yichaxususiy hosilalari uzluksiz bo'lsin. Noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilmaganda (7.14) masalani Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilar usuli bilan yechish mumkin.

(7.14) masalaning elementlaridan umumlashgan (kengaytirilgan) $(m+1)$ – Lagranj vektori $\bar{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda\}$ (λ_0-skalyar, $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$ – Lagranj vektori; $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – Lagranj ko'paytuvchilari) yordamida

$$F = (X, \bar{\lambda}) = \lambda_0 f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(X)) \qquad (7.16)$$

umumlashgan Lagranj funksiyasini tuzamiz. Shunday qilib (7.14) masala $F = (X, \bar{\lambda})$ – Lagranj funksiyasining oddiy ekstremumini o'rganishga keltiriladi.

Teorema (umumlashgan Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi). (7.14) masalaning har bir X^0 lokal optimal rejasi uchun shunday $\lambda^0 \neq 0$ umumlashgan Lagranj vektori mavjud bo'ladiki, uning uchun

$$\frac{\partial F(X^0, \overline{\lambda^0})}{\partial X} = 0 \qquad (7.17)$$

bo'ladi, ya'ni X^0 (7.16) umumlashgan Lagranj funksiyasining $\lambda = \lambda^0$ bo'lgandagi statsionar nuqtasi bo'ladi.

X^0 nuqtada (7.17) tenglik bajariladigan $\lambda^0 \neq 0$ vector X^0 nuqtaga mos umumlashgan Lagranj vektori deb ataladi. X^0 nuqtaga bir nechta umumlashgan Lagranj vektorlari mos kelishi mumkin.

(7.17) tenglikni $-\lambda^0$ vektor ham qanoatlantiradi. Shu sababli $\lambda^0 \geq 0$ deb olinib, Lagranj ko'paytuvchilari qoidasiga aniqlik kiritiladi.

Ko'p hollarda

$$F = (X, \bar{\lambda}) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(X)), \quad (\lambda_0 = 1) \qquad (7.18)$$

klassik Lagranj funksiyasidan foydalaniladi.

(7.18) Lagranj funksiyasi uchun, umuman olganda, Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi o'rinli emas.

(7.14) masalani tekshirishda (7.18) Lagranj funksiyasidan qachon foydalanish mumkinligini aniqlaymiz.

7-ta'rif. Agar X^0 optimal rejaga mos umumlashgan $\bar{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda\}$ Lagranj vektorlari ichida $\lambda_0 = 0$ kabilar bo'lmasa, u holda (7.14) masala va uning X^0 optimal rejasi normal deb ataladi.

8-ta'rif. Agar X^0 rejada

$$\frac{\partial q_1(X^0)}{\partial X}, \ldots, \frac{\partial q_m(X^0)}{\partial X} \tag{7.19}$$

vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda X^0 oddiy reja deb ataladi.

Teorema. Optimal reja X^0 normal bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, agar u oddiy joiz reja bo'lsa. Agar (7.14) masala normal bo'lsa, u holda $m \le n$ bo'ladi.

Endi asosiy natijani keltiramiz. Bundan keyin (7.14) masalada soddalik uchun $b_i = 0$ deb qaraymiz.

Teorema (Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi). Agar (7.14) masalaning X^0 optimal rejasida (7.19) vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda shunday yagona λ^0 Lagranj vektori topiladiki, $\{X^0, \lambda^0\}$ juftlikda

$$\frac{\partial F(X^0, \lambda^0)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda} = 0$$

tengliklar bajariladi.

Masalan, (7.14) masalada $i = 1$, $j = 2$, bo'lsa, (7.18) funksiyaning (X^0, λ^0) statsionar nuqtasini topamiz. So'ngra

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}(X^0) & g_{x_2}(X^0) \\ g_{x_1}(X^0) & F_{x_1x_1}(X^0, \lambda^0) & F_{x_2x_1}(X^0, \lambda^0) \\ g_{x_2}(X^0) & F_{x_2x_1}(X^0, \lambda^0) & F_{x_2x_2}(X^0, \lambda^0) \end{vmatrix}$$

determinantni tuzamiz. Agar $\Delta > 0 \Rightarrow X^0$ – $f(X)$ funksiyaning ***shartli minimum nuqtasi***, agar $\Delta < 0 \Rightarrow X^0$ – $f(X)$ funksiyaning ***shartli maksimum nuqtasi.***

7-misol. $z = xy$ funksiyaning $x + y = 6$ dagi ekstremumini toping.

Yechish: Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$Z = xy + \lambda(6 - x - y).$$

Bu funksiyadan x, y va λ lar bo'yicha xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo'lamiz

$$\begin{cases} Z_\lambda = 6 - x - y = 0 \\ Z_x = y - \lambda = 0 \\ Z_y = x - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ -\lambda + y = 0. \\ -\lambda + x = 0 \end{cases}$$

Sistemani yechish natijasida berilgan masalaning optimal yechimini aniqlaymiz:

$$\lambda^* = 3, \quad x^* = 3, \quad y^* = 3.$$

Demak, $X^* = (x^*, y^*) = (3;3)$ nuqta $z = xy$ funksiya uchun stasionar nuqta bo'ladi.

Topilgan qiymatni $Z^* = z^* = 9$ maksimum yoki minimumini ayta olishimiz uchun tekshirib ko'rishimiz kerak.Ushbu nuqtani ekstremumga tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan Δ determinantni tuzamiz

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1<0,\qquad \Delta<0,\qquad M=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

Demak, $x^*=(3;3)$ nuqtada z funksiya ekstremumga erishmaydi.

8-misol. $z=x_1^2+x_2^2$ funksiyaning $x_1+4x_2=2$ dagi ekstremumini toping

Yechish: Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$Z=x_1^2+x_2^2+\lambda(2-x_1-4x_2)$$

Lagranj funksiyasidan quyidagi x_1, x_2 va λ lar bo'yicha xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz.

$$\begin{cases} Z_\lambda=2-x_1-4x_2=0\\ Z_{x_1}=2x_1-\lambda=0\\ Z_{x_2}=2x_2-4\lambda=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+4x_2=2\\ -\lambda+2x_1=0\\ -4\lambda+2x_2=0\end{cases}.$$

Sistemani yechib quyidagini topamiz:

$$\lambda^*=\frac{4}{17},\qquad x_1^*=\frac{2}{17},\qquad x_2^*=\frac{8}{17}.$$

Demak, $X^*=\left(x_1^*,x_2^*\right)=\left(\frac{2}{17};\frac{8}{17}\right)$ nuqta $z=x_1^2+x_2^2$ funksiya uchun stasionar nuqta bo'ladi. Topilgan qiymatni $Z^*=z^*=\frac{4}{17}$ maksimum yoki minimumini ayta olishimiz uchun tekshirib ko'rishimiz kerak.Ushbu nuqtani ekstremumga tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan Δ determinantni tuzamiz

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0,\qquad \Delta>0,\qquad M=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2>0.$$

Demak, $x^*=\left(\frac{2}{17};\frac{8}{17}\right)$ nuqtada z funksiya minimumga erishadi.

(7.4) masalada funksiyalar o'zgaruvchili ikkitadan ko'p bo'lsa, u holda lokal ekstremum mavjudligining zaruriy sharti quyidagi tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(X,\lambda)}{\partial x_j}=0\\ \dfrac{\partial F(X,\lambda)}{\partial \lambda_i}=g_i(X)=0\end{cases} \tag{7.20}$$

Bu sistemadan (X^0,λ^0) statsionar nuqtani topamiz.

Masalaning shartli ekstremumining mavjudligi Lagranj funksiyasining d^2F – ikkinchi differensialini o'rganish bilan bog'liq: agar (X^0,λ^0) nuqtada

$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j}dx_j=0 \quad (i=1,2,...,m) \quad \sum_{j=1}^{n}dx_j^2\neq 0$ bo'lib, $d^2F(X^0,\lambda^0)<0$ bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya shartli maksimumga erishadi; agar (X^0,λ^0) nuqtada $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j}dx_j=0 \quad (i=1,2,...,m) \quad \sum_{j=1}^{n}dx_j^2\neq 0$ bo'lib, $d^2F(X^0,\lambda^0)>0$ bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya shartli maksimumga erishadi.

Shuni alohida ta'kidlash kerakki, (X^0,λ^0) nuqtada $d^2F(X^0,\lambda^0)=0$ bo'lsa, u holda (X^0,λ^0) nuqtani ekstremumga boshqa usul bilan qo'shimcha tekshirish kerak bo'ladi.

9-misol. Lagranj usulidan foydalanib, quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasini yeching

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=9,$$
$$u=x_1-2x_2+2x_3\to\min(\max)$$

Yechish: Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(X,\lambda)=x_1-2x_2+2x_3+\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2-9)$$
$$F(x_1,x_2,\lambda)=x_1+x_2+\lambda[1-(x_1-1)^2-(x_2-1)^2].$$

Bu funksiyadan xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz

$$\begin{cases} F_{x_1}=1+2\lambda x_1=0 \\ F_{x_2}=-2+2\lambda x_2=0 \\ F_{x_3}=2+2\lambda x_3=0 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=9 \end{cases}$$

Sistemani yechib quyidagini topamiz:

$$\lambda_1=\frac{1}{2},\ x_{11}=-1,\ x_{21}=2,\ x_{31}=-2,$$
$$\lambda_2=-\frac{1}{2},\ x_{12}=1,\ x_{22}=2,\ x_{32}=2.$$

Bundan $d^2u\left(-1,2,-2,\frac{1}{2}\right)=1>0;\ d^2u\left(1,-2,2,-\frac{1}{2}\right)=-1<0.$

Demak, $\left(-1,2,-2,\frac{1}{2}\right)$ – nuqta shartli minimum nuqta, $u_{\min}=-9$; $\left(1,-2,2,-\frac{1}{2}\right)$ – shartli maksimum nuqta, $u_{\max}=9$.

7.2. Qavariq programmalashtirish masalalari

Qavariq programmalashtirish optimallashtirish masalasining bir bo'limi bo'lib, u qavariq funksiyani qavariq to'plamda minimallashtirish (maksimallashtirish) nazariyasini o'rgatadi. Qavariq programmalashtirish masalasi

$$g_i(X)=g_i(x_1,x_2,...,x_n)\le b_i,\quad (i=\overline{1,m})$$
$$x_j\ge 0,\quad (j=\overline{1,n}),\quad X\in G\subset R^n, \tag{7.21}$$
$$Z=f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)\to \min$$

ko'rinishda bo'lib, bunda $g_i(X)$, $f(X)$ funksiyalar $G\subset R^n$ qavariq to'plamda aniqlangan va qavariq funksiyalardir.

(7.21) masalaning yechish usullari bilan tanishishdan oldin qavariq funksiyalar haqidagi ayrim tushunchalar bilan tanishamiz.

9-ta'rif. Agar

$$G\subset R^n,\ X_1\in G,\ X_2\in G\ \Rightarrow\ X(\lambda)=\lambda X_1+(1-\lambda)X_2\in G,\ \lambda\in[0,1]$$

bo'lsa, u holda G – qavariq to'plam bo'ladi.

10-ta'rif. Agar $f(X)$ funksiya $G\subset R^n$ qavariq to'plamda aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $X_1\in G$, $X_2\in G$ nuqtalar va $0\le\alpha\le 1$ son uchun

$$f(\alpha X_2+(1-\alpha)X_1)\le \alpha f(X_2)+(1-\alpha)f(X_1) \tag{7.22}$$
$$f(\alpha X_2+(1-\alpha)X_1)\ge \alpha f(X_2)+(1-\alpha)f(X_1) \tag{7.23}$$

tengsizliklardan biri o'rinli bo'lsa, $f(X)$ funksiya qavariq funksiya deyiladi.

11-ta'rif. Agar ixtiyoriy $X_1\in G$, $X_2\in G$ nuqtalar va $0\le\alpha\le 1$ son uchun

$$f(\alpha X_2+(1-\alpha)X_1)< \alpha f(X_2)+(1-\alpha)f(X_1) \tag{7.24}$$
$$f(\alpha X_2+(1-\alpha)X_1)> \alpha f(X_2)+(1-\alpha)f(X_1) \tag{7.25}$$

tengsizliklardan biri o'rinli bo'lsa, u holda $G\subset R^n$ qavariq to'plamda aniqlangan $f(X)$ funksiya qat'iy qavariq funksiya deyiladi.

Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qavariq funksiya bo'lsa, ixtiyoriy chekli sondagi $X_1, X_2, \dots, X_n\in G$ nuqtalar uchun quyidagi

$$\begin{cases} f\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j X_j\right)\le \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j f(X_j), \\ \lambda_j\ge 0,\quad \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j=1. \end{cases} \tag{7.26}$$

$$\begin{cases} f\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j X_j\right)\ge \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j f(X_j), \\ \lambda_j\ge 0,\quad \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j=1. \end{cases} \tag{7.27}$$

munosabatlardan biri o'rinli bo'ladi.

Qavariq funksiya va to'plamlar quyidagi xossalarga ega:

G qavariq to'plamda aniqlangan $g_i(X)=const$ funksiyalar qavariq bo'lsa, ularning nomanfiy chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lgan

$$g(X)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X),\ \ \lambda_i\geq 0,\ \ (i=\overline{1,m})$$

funksiya ham qavariq bo'ladi.

Ixtiyoriy chekli sondagi qavariq to'plamlarning kesishmasi ham qavariq to'plam bo'ladi.

Qavariq $f(X)$, $X\in R^n$ funksiyaning sath to'plamlari $\{X: f(X)\leq c\}$ $(\{X: f(X)\geq c\})$ bo'sh yoki qavariq to'plam bo'ladi.

G qavariq to'plamda aniqlangan $f(X)$ funksiyalar qavariq bo'lishi uchun u o'z ichiga olgan noma'lumlarning ixtiyoriy biri bo'yicha, qolganlarining tayin qiymatlarida qavariq bo'lishligi zarur va yetarlidir.

Agar $f_1(X), f_2(X),...,f_n(X)$ funksiyalar qavariq G to'plamda aniqlangan qavariq funksiyalar bo'lsa, $f(X)=\max\limits_{1\leq i\leq n} f_i(X)$ funksiya ham qavariq bo'ladi.

12-ta'rif. $f(X)$ qavariq funksiyaning $G\subset R^n$ to'plamdagi global maksimumi (minimumi) deb, har qanday $X\in G$ nuqtada

$$f(X^0)\geq f(X),\quad \left(f(X^0)\leq f(X),\right) \tag{7.28}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $X^0\in G$ nuqtaga aytiladi.

Agar (7.28) tengsizlik $X^0\in U_\varepsilon(X^0)$ nuqta uchun o'rinli bo'lsa, X^0 nuqta $f(X)$ funksiyaga lokal maksimum (minimum) qiymat beruvchi nuqta bo'ladi. Bu yerda: $U_\varepsilon(X^0)=\left\{X:\left|X-X^0\right|<\varepsilon\right\}$.

Qavariq funksiyaning ekstremumiga doir quyidagi teoremalar o'rinlidir.

Teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qat'iy qavariq funksiya bo'lsa, u ozining ixtiyoriy global ekstremumiga faqat bitta nuqtada erishadi.

Teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda qavariq bo'lib, bu to'plamga tegishli ikkita $X_1, X_2, ..., X_n\in G$ nuqtalarda ham global ekstremumga erishsa, shu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan ixtiyoriy nuqtada ham global ekstremumga erishadi.

Teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qavariq va differensiallanuvchi funksiya bo'lib, ixtiyoriy $X^0\in G$ nuqtada $\nabla f(X^0)=0$ bo'lsa, u holda $f(X)$ funksiya X^0 nuqtada global ekstremumga erishadi.

(7.21) masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(b_i-g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right) \qquad (7.29)$$

Agar (X^0,λ^0) nuqta (7.21) masala uchun tuzilgan $F(X,\lambda)$ funksiyaning ***egar nuqtasi*** bo‘lsa, u holda $X\in U_\varepsilon(X^0)$ va $\lambda\in U_\delta(\lambda^0)$ $(\lambda\geq 0)$.

$\left(U_\delta(\lambda^0)=\left\{\lambda:\left|\lambda-\lambda^0\right|<\delta\right\}\right.$ – λ^0 nuqtaning ixtiyoriy kichik $\delta>0$ atofi) uchun

$$F(X^0,\lambda)\leq F(X^0,\lambda^0)\leq F(X,\lambda^0) \qquad (7.30)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

$$\begin{aligned} &g_i(X)=g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geq b_i,\quad (i=\overline{1,m})\\ &x_j\geq 0,\ (j=\overline{1,n}),\quad X\in G\subset R^n, \qquad (7.31)\\ &Z=f(X)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to\max. \end{aligned}$$

masala qaraymiz.

Agar (X^0,λ^0) nuqta (7.31) masala uchun tuzilgan $F(X,\lambda)$ ***Lagranj funksiyasining egar nuqtasi*** bo‘lsa, u holda $X\in U_\varepsilon(X^0)$ va $\lambda\in U_\delta(\lambda^0)$, $(\lambda\geq 0)$ uchun

$$F(X,\lambda^0)\leq F(X^0,\lambda^0)\leq F(X^0,\lambda) \qquad (7.32)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Teorema. Agar (X^0,λ^0), $X\in G$, $\lambda^0\geq 0$ Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo‘lsa, u holda X^0 (7.21) masalaning optimal rejasi bo‘ladi va $\left(b_i-g_i(X)\right)\lambda_i^0=0$ shart bajariladi.

Bu teoremada G to‘plam va $f(X)$, $g_i(X)$ funksiyalar qavariq bo‘lishi shart emas.

(7.21) masalaga ham yuqoridagidek teorema isbotlash mumkin. Demak, (7.21) va (7.31) masalalarning optimal rejasini topish uchun Lagranj funksiyaning egar nuqtasini topish yetarli ekan.

$f(X)$ va $g_i(X)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo‘lgan hol uchun Lagranj funksiyasining egar nuqtasi haqidagi mavjudlik teoremalariga ekvivalent teoremalar dastlab G.V.Kun va A.V.Takker tomonidan olingan.

$f(X)$ va $g_i(X)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda Lagranj funksiyasi egar nuqtasi mavjudligining zaruriy va yetarlilik shartlari (7.21) masala uchun quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j}\geq 0, \qquad (7.33)$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} = 0, \quad x_j^0 \ge 0, \tag{7.34}$$

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} \le 0, \tag{7.35}$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad \lambda_i^0 \ge 0. \tag{7.36}$$

(5.28) masala uchun esa bu shartlar quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} \le 0, \tag{7.37}$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} = 0, \quad x_j^0 \ge 0, \tag{7.38}$$

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} \ge 0, \tag{7.39}$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad \lambda_i^0 \ge 0. \tag{7.40}$$

(7.33)-(7.36) va (7.37)-(7.40) munosabatlar Lagranj funksiyasi egar nuqtasi mavjudligi haqidagi ***Kun-Takker shartlari*** deb ataladi.

Teorema. $F(X,\lambda)$ funksiya egar nuqtaga ega bo‘lishi uchun (7.21) masala uchun (7.33)-(7.36) shartlarning, (7.31) masala uchun (7.37)-(7.40) shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

(7.31) masalani ko‘ramiz. Agar kamida bitta $X \in G$ nuqtada $g_i(X) < b_i$ tengsizlik (Sleyter sharti) bajarilsa, Kun-Takkerning quyidagi teoremasi o‘rinlidir.

Kun-Takker teoremasi. X^0 nuqta (7.31) masalaning optimal yechimi bo‘lishi uchun bu nuqtada (7.37)-(7.40) munosabatlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

(7.21) masala uchun ham bu kabi teorema o‘rinli bo‘ladi. Faqat bu yerda Sleyter sharti $g_i(X) < b_i$ ko‘rinishida bo‘ladi.

10-misol. Grafik usul bilan quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \to \max.$$

masalani yeching va Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshiring.

Yechish: Masalani grafik usulda yechib, uning optimal yechimi $X^0(0,8;\ 0,4)$ ekanligini ko'rish mumkin. Bunda $f(X^0)=-0,8$.

Berilgan masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$F(X,\lambda)=-x_1^2-x_2^2+\lambda_1(2x_1+x_2-2)+\lambda_2(8-2x_1-x_2)+\lambda_3(6-x_1-x_2).$$

X^0 nuqtada masalaning 2-3-chegaraviy shartlari qat'iy tengsizlikka aylanadi. Demak, masala uchun Sleyter sharti bajariladi. (7.33)-(7.36) shartlarni tekshiramiz.

Lagranj funksiyasidan xususiy hosilalar olamiz va Lagranj shartlarining bajarilishini tekshiramiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=-2x_1+2\lambda_1-2\lambda_2-\lambda_3, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2}=-2x_2+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=2x_1+x_2-2, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}=8-2x_1-x_2, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_3}=6-x_1-x_2,$$

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_1}=2\cdot 0,8+0,4-2=0, \qquad \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_2}=8-2\cdot 0,8-0,4=6>0,$$

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_3}=6-0,8-0,4=4,8>0.$$

Demak, $\lambda_2=0,\quad \lambda_3=0,\quad \left(\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_2}>0,\ \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_3}>0\right).\quad \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_1}=0$

bo'lganligi sababli $\lambda_1\neq 0$ bo'lishi mumkin. $x_j^0\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j}=0$ tenglikda $x_j^0>0$.

Demak, $\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j}=0$, $(j=1,2)$ bo'ladi, ya'ni

$$\begin{cases}-2\cdot 0,8+2\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3=0\\ -2\cdot 0,4+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases}.$$

Bundan $\lambda_1=0,8$. Demak, $(X^0,\lambda^0)=(0,8;\ 0,4;\ 0,8;\ 0;\ 0)$ egar nuqta bo'ladi.

Endi Kun-Takker teoremasidan foydalanib qavariq programmalashtirish masalasining optimal yechimini topish jarayoni bilan tanishamiz. Buning uchun quyidagi masalaga murojaat qilamiz:

$$\begin{cases}x_1+2x_2\le 8\\ 2x_1-x_2\le 12\\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0\end{cases},$$

$$Z=f(x_1,x_2)=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2\to\max.$$

Bu masaladagi maqsad funksiya chiziqli $f_1=2x_1+4x_2$ va $f_2=-x_1^2-2x_2^2$ kvadratik funksiyalarning yig'indisidan iborat. Bunda $f_2=-x_1^2-2x_2^2$ funksiya manfiy aniqlangan kvadratik formadan iborat bo'lgani uchun botiq funksiya bo'ladi. Chiziqli $f_1=2x_1+4x_2$ funksiyani ham botiq funksiya deb qarash mumkin.

Shunday qilib, berilgan masala chegaraviy shartlari chiziqli tengsizliklardan, maqsad funksiyasi esa botiq funksiyadan iborat bo'lgan qavariq programmalashtirish masalasidan iborat. Ushbu masalaga Kun-Takker teoremasini qo'llash mumkin.

Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2).$$

Lagranj funksiyasining egar nuqtasi mavjudligini ifodalovchi Kun-Takker shartlarini yozamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \le 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0 \\ x_2 \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \\ \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0 \\ \lambda_2 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0, \qquad \text{(III)}$$

(I) sistemaga v_1, v_2, w_1, w_2 nomanfiy qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, uni tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 = 2 \\ 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12 \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0,$$
$$v_1 \ge 0, \quad v_2 \ge 0, \quad w_1 \ge 0, \quad w_2 \ge 0.$$

Ushbu sistemani quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} v_1 = (2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) \\ v_2 = (4 - 4x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2) \\ w_1 = (8 - x_1 - 2x_2) \\ w_2 = (12 - 2x_1 + x_2) \end{cases} \qquad \text{(V)}$$

Ushbu tengliklarni va (II) sistemani nazarga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$x_1 v_1 = 0, \quad x_2 v_2 = 0, \quad \lambda_1 w_1 = 0, \quad \lambda_2 w_2 = 0. \qquad \text{(VI)}$$

Endi (IV) sistemaning (VI) shartlarni qanoatlantiruvchi bazis yechimini topamiz. Bu yechim ifodalovchi nuqta Lagranj funksiyasining egar nuqtasi va berilgan masalaning optimal yechimini beradi.

(IV) sistemani sun'iy bazis usulidan foydalanib yechamiz. U holda

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + z_2 = 2 \\ 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 + z_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0,$$

$$v_1 \ge 0, \quad v_2 \ge 0, \quad w_1 \ge 0, \quad w_2 \ge 0, \quad z_1 \ge 0, \quad z_2 \ge 0.$$

$$Z = Mz_1 + Mz_2 \to \min.$$

P_b	C_b	P_0	0	0	0	0	0	0	M	M	0	0
			P_1	P_2	Λ_1	Λ_2	V_1	V_2	Z_1	Z_2	W_1	W_2
Z_1	M	2	2	0	1	2	-1	0	1	0	0	0
Z_2	M	4	0	$\boxed{4}$	2	-1	0	-1	0	1	0	0
W_1	0	8	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0
W_2	0	12	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	1
Δ_j		$6M$	$2M$	$4M^*$	$3M$	M	$-M$	$-M$	0	0	0	0
Z_1	M	$\boxed{2}$	2	0	1	2	-1	0	1	0	0	0
P_2	0	1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	0
W_1	0	6	1	0	-1	1/2	0	1/2	0	-1/2	1	0
W_2	0	13	2	0	½	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	1
Δ_j		$2M^*$	$2M$	0	M	$2M$	$-M$	0	0	$-M$	0	0
P_1	0	1	1	0	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	0	0
P_2	0	1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	0
W_1	0	5	0	0	-3/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	1	0
W_2	0	11	0	0	-1/2	-9/4	1	-1/4	-1	1/4	0	1
Δ_j		0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	0	0

Bu jadvaldan otimal yechimni topamiz:

$$x_1^0 = 1, \quad x_2^0 = 1, \quad \lambda_1^0 = 0, \quad \lambda_2^0 = 0,$$

$$v_1^0 = 0, \quad v_2^0 = 0, \quad w_1^0 = 5, \quad w_2^0 = 11.$$

Bu yechim (IV) sistemaning (VI) shartlarni qanoatlantiruvchi bazis yechimi bo'ladi. Demak, $(X^0, \Lambda^0) = (1; 1; 0; 0)$ Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo'ladi. $X^0 = (1; 1)$ berilgan masalaning optimal yechimi bo'lib, unda $f(X^0) = 3$ bo'ladi.

Kun-Takkerning yetarlilik teoremalari. Yuqorida biz Kun-Takker shartlari bilan tanishdik va tengsizliklar bilan berilgan masalalarni optimallashtirishda zaruriy shartlarni ko'rib o'tdik. Ba'zi bir holatlarda Kun-Takker shartlari uchun yetarlilik shartlarini o'zi ham yetarli hisoblanandi.

Klassik optimallashtirish masalalarida maksimum va minimum uchun yetarlilik sharti asosan ikkinchi tartibli hosilalar orqali aniqlanadi. Bu yerda esa, chiziqsiz programmalashtirishda, qavariq va botiq funksiyalar uchun yetarlilik shartlari ham to'g'ridan to'g'ri olinishi mumkin. Masalani maksimallashtirish uchun, Kun va Takker quyidagicha yetarlilik teoremasini taklif qilishgan:

Teorema. Quyida berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini qaraymiz:

$$g^i(x) \le r_i, \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

$$x \ge 0$$

$$\pi = f(x) \to \min.$$

Yuqoridagi masala uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

a) $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi va botiq bo'lsa;

b) $g^i(x)$ funksiya differensiallanuvchi va qavariq bo'lsa;

c) x^* nuqta Kun-Takkerning maksimumlik shartlarini qanoatlantiradi; u holda x^* nuqtada $\pi = f(x)$ funksiya maksimum nuqtaga erishadi.

Demak, yuqoridagi teoremaning (a), (b), (c) shartlari bajarilsa x^* nuqta masalaning optimal yechimi hisoblanadi.

Boshqa tomondan qaraganda, (a) va (b) shartlar bilan va Kun-Takker shartlari masalani maksimallashtiradi. Agar nazarda tutilgan tengsizlik va (a), (b) shartlar hisobga olinsa, u holda Kun-Takker shartlari funksiyani maksimallashtirish uchun zaruriy va yetarli shart hisoblanadi.Yuqorida ko'rilgan teorema qavariq programmalashtirish deyiladi. Yetarlilik sharti faqat maksimallashtirish uchun kerak bo'ladi.

Qisman botiq programmalashtirish masalasi uchun Arrow-Enthovenning yetarlilik nazariyasi. Kun-Takkerning yetarlilik nazariyasiga yuzlanadigan bo'lsak, ayrim qavariq-botiq holatlarga duch kelamiz. Bular esa bir qancha murakkab shartlarni keltirib chiqaradi. Arrow-Enthoven yetarlilik nazariyasi deb nomlangan boshqa nazariyada esa bu holatlar maqsad va chekli funksiyalarda qisman qavariqlik va qisman botiqlik shartlarining o'zi qanoatlantiradi. Shartlar orqali ular osonlashtirilishi bilan bir qatorda, yetarlilik holatlarini o'rganish imkoniyatlari kengayadi.

Arrow-Enthoven ishining asl kelib chiqishi $f'(x)$ va $g'(x)$ funksiyalari maksimallashtirish masalasi va nomanfiy $(\geq)$ shaklidagi cheklovlar bilan bir vaqtda qisman botiq bo'lishi kerak. Bu esa qisman botiq programmalashtirish masalalarini keltirib chiqaradi. Bu muhokama jarayonida nomusbat $(\leq)$ tengsizligidan maksimallashtirish masalasining cheklovlari va $(\geq)$ tengsizligidan minimallashtirish masalasida foydalanamiz.

Berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini qaraymiz

$$g^i(x) \leq r_i, \quad (i=1,2,\dots,m);$$
$$x \geq 0;$$
$$\pi = f'(x) \to \max.$$

Yuqoridagi masala quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

a) $f(x)$ maqsad funksiyasi differensiallanuvchi va nomanfiy sohada qisman botiq;

b) $g'(x)$ funksiya differensiallanuvchi va nomanfiy sohada qisman qavariqdir;

c) x^* nuqta Kun-Takkerning maksimumlik shartlarini qanoatlantiradi;

d) Quyidagilarning ixtiyoriy bittasi qanoatlantiriladi:

(d_1) kamida bitta x_j o'zgaruvchi uchun $f_j(x) < 0$ bo'lsa;

(d_2) musbat qiymatga erishadigan x_j o'zgaruvchi uchun $f_j(x^*) < 0$;

(d_3) $f_j(x^*)$ ning barcha n-tartibli hosilalari noldan farqli va $f(x)$ funksiya x^* nuqtada ikki marta differensiallanuvchi [ya'ni $f(x)$ ning x^* da barcha ikkinchi tartibli hosilalari mavjud];

(d_4) $f(x)$ funksiya botiq.

Demak, x^* nuqta $\pi = f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi bo'ladi.

Bu nazariyaning isboti juda uzun bo'lganligi sababli, uni shu yerda to'xtatamiz. Biroq, shunga e'tibor qaratish kerakki, Arrow va Enthoven o'zlarining qisman botiqlik qisman qavariqlik nazariyasida botiqlik qavariqlik holatlarini kamaytirishga erishgan vaqtda, ular yangi (d) shartni kiritishni muhim deb topishdi. Shunga qaramasdan, (d) shartda berilgan to'rtta holatdan faqat bittasi to'liq yetarlilik shartlarini shakllantirishi kerak. Shuning uchun natijada yuqoridagi nazariya maksimum uchun to'rtta turli yetarlilik shartlari guruhidan tashkil topgan. Botiq $f'(x)$ funksiya bilan (d_4) shart bajarilganda, Arrow-Enthoven yetarlilik nazariyasi Kun-Takker yetarlilik nazariyasi bilan bir xil bo'lib qoladi. Lekin bu to'g'ri emas. Shu bilan birgalikda, Arrow va Enthoven $g'(x)$ chekli funksiyani qisman qavariq bo'lishini talab qiladi, uning yetarlilik shartlari shunda ham kamroq bo'ladi. Demak, nazariya (a) dan (d) gacha bo'lgan barcha yetarlilik shartlarini qamrab oladi. Lekin buni boshqacharoq tarzda izohlash ham mumkin, ya'ni (a), (b) va (d) shartlar bajarilsa, u holda Kun-Takker shartlari maksimum uchun yetarli shartlar bo'ladi. Bundan tashqari, agar cheklanganlik xususiyati qanoatlantirilsa, unda Kun-Takker shartlari maksimum uchun zaruriy va yetarli bo'ladi. Kun-Takker nazariyasiga o'xshab, Arrow-Enthoven nazariyasi minimallashtirish shakliga osonlik bilan o'tkazilishi mumkin. Optimallashtirish yo'nalishini saqlab qolish uchun zarur bo'ladigan aniq o'zgarishlar bilan birgalikda, (a) va (b) holatlarida qisman botiq va qisman qavariq so'zlarini almashtirishimiz kerak, Kun-Takker maksimum holatlarini minimum holatlariga almashtirish, (d_i) va (d_{ii}) dagi tengsizliklarni saqlab qoliishimiz, va (d_4) da botiq so'zini qavariqqa o'zgartirishimiz kerak bo'ladi.

7-bobga doir savollar

1. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining umumiy qo'yilishi qanday?
2. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining qanday turlari mavjud?
3. Mahalliy va global optimal reja nima?
4. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi geometrik nuqtai nazardan qanday talqin qilinadi?
5. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi grafik usulda qanday yechiladi?
6. "Shartsiz optimallashtirish masalasi" deganda qanday masalani tushunasiz?
7. Shartsiz optimallashtirish masalasining umumiy qo'yilishi qanday?
8. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining geometrik talqinidan foydalanib, masalaning optimal yechimlari haqida nima deyish mumkin?
9. Chiziqsiz programmalashtirish masalasini grafik usulda optimal yechimini topish algoritmi qanday?
10. Stasionar nuqta nima?
11. Gesse matrisasi va uni ekstremal nuqtani aniqlashdagi roli qanday?
12. Gesse matrisasi bosh minorining aniqlangan qiymati orqali funksiya haqida qanday xulosa chiqarish mumkin?
13. Cheklamalari tenglama ko'rinishda bo'lgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini yechish uchun Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilar usuli qanday?
14. Lagranj funksiyasi qanday tuziladi?
15. $F(X,\Lambda)=\lambda_0 f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-g_i(x))$ – Lagranj funksiyasidagi λ_i – Lagranj ko'paytuvchisining iqtisodiy ma'nosi nimadan iborat?
16. $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya ekstremumini aniqlashning zaruriy sharti nimadan iborat?
17. Qavariq funksiyani (pastga va yuqoriga qavariq funksiyalarni) ta'riflang.
18. Qat'iy pastga (yuqoriga) qavariq funksiyani ta'riflang.
19. Qavariq funksiya qanday xossalarga ega?
20. "Qavariq funksiyaning mahalliy va global maksimumi (minimumi)" deganda nimani tushunasiz?

21. Qavariq funksiya qachon yagona global minimumga (maksimumga) erishadi?
22. Qavariq programmalashtirish masalasi uchun Lagranj funksiyasi qanday ko'rinishga ega bo'ladi?
23. Lagranj funksiyasining egar nuqtasi nima va u qanday aniqlanadi?
24. Lagranj funksiyasi egar nuqtasining mavjud ekanligining zaruriy va yetarlik shartlari.
25. Kun-Takker teoremasini ta'riflang.
26. Sleyter sharti nimadan iborat?

7 bobga doir misol va masalalar

Grafik usulidan foydalanib, quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalalarini yeching:

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = 2(x_1 - 7)^2 + 4(x_2 - 3)^2 \to \min(\max)$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 - x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = 4(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 2)^2 \to \min(\max)$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \geq 11 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min(\max)$

Quyidagi funksiyalarning qavariq yoki qavariq emasligini ko'rsating.

4. $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + 5x_1 - 6x_2 + 8;$
5. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 + x_2;$
6. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 5x_2.$

Quyidagi masalalarda Kun-Takker shartlaridan foydalanib, berilgan nuqta qavariq programmalashtirish masalasining yechimi ekanligini aniqlang.

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 \le 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 24 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$Z = x_2^2 + 6x_1^2 - 6x_1 + 6 \to \max$

9. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 0 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$Z = x_1^2 + 4x_2^2 \to \min$

Tayansh so'z va iboralar

Chiziqsiz programmalashtirish, mahalliy optimal reja, global optimal reja, qavariq programmalashtirish, kvadratik programmalashtirish, gipersirtlar oilasi, gipersirtlar sathi, statsionar nuqta, Gesse matrisasi, Lagranj funksiyasi, shartsiz optimallashtirish masalasi, egar nuqta, qavariq funksiya, qat'iy qavariq funksiya, qavariq funksiyaning mahalliy va global maksimumi, Lagranj funksiyasining egar nuqtasi, Kun-Takker shartlari, Kun-Takker teoremasi.

8-BOB. INTEGRAL HISOB

8.1. Aniqmas integral

Bizga ma'lumki, $F(x)=x^n$ funksiyadan birinchi tartibli hosila olinsa, $f(x)=F'(x)=nx^{n-1}$ ko'rinishdagi funksiya hosil bo'ladi. Biz yuqorida qaragan bu funksiyalar o'zaro quyidagicha nomlanadi: $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi. $F(x)$ funksiyaga ixtiyoriy $C=const$ – o'zgarmas sonning qo'shilishi uning $f(x)$ – hosilasiga ta'sir qilmasligini e'tiborga olsak, $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini $F(x)+C$ ko'rinishda yozish mumkin. Demak, $f(x)=nx^{n-1}\to F(x)=x^n+C,\quad f(x)=\sin x\Rightarrow F(x)=-\cos x+C,\ldots$ Shunday qilib quyidagi ta'rif va teoremani keltirish mumkin.

$F(x)$ va $f(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, $F'(x)$ mavjud bo'lsin.

1-ta'rif. Agar barcha $x\in[a;b]$ uchun $F'(x)=f(x)$ o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ oraliqdagi boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Teorema. Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ oraliqdagi boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, u holda bu funksiyalar uchun $F_2(x)=F_1(x)+C$ $(C=const)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. $x\in[a;b]$ oraliqda $\Phi(x)=F_2(x)-F_1(x)$ funksiyani qaraymiz. Ta'rifga ko'ra $\Phi(x)=F_2'(x)-F_1'(x)=f(x)-f(x)=0$. Demak, $\Phi(x)=C$ va $F_2(x)=F_1(x)+C$.

Shunday qilib, boshlang'ich funksiyaning umumiy ko'rinishi $F(x)+C$ shaklda yoziladi.

2-ta'rif. Boshlang'ich funksiyaning $F(x)+C$ umumiy ko'rinishi berilgan $y=f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi.

$f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\int f(x)dx=F(x)+C \tag{8.1}$$

Bu yerda $\int$ – integral belgisi, $f(x)$ – integral osti funksiyasi, $f(x)dx$ – integral osti ifodasi deb ataladi.

$\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x)$ bo'lgani uchun (8.1) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\int f(x)dx=\int\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)dx=\int dF(x) \tag{8.2}$$

Aniqmas integral quydagi xossalarga ega:

1) Biror funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o'zgarmas son yig'indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

2) Aniqmas integralning differensiali (hosilasi) integral ostidagi ifodaga (funksiyaga) teng:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx \quad \left(\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)\right)$$

3) O'zgarmas ko'paytuvchi A ni integral belgisidan tashqarisiga chiqarish mumkin:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \text{ bu yerda } A \neq 0. \quad (8.3)$$

4) Chekli sondagi funksiyalarning algebraik yig'indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig'indisiga teng:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx. \quad (8.4)$$

5) Agar $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo'lsa, u holda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \text{ bu yerda } a \neq 0.$$

Integrallarni hisoblashda keng foydalaniladigan elementar funksiyalar uchun tuzilgan quyidagi asosiy integrallar jadvalini keltiramiz:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C; \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad \int e^x dx = e^x + C.$

4. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C; \ (a > 0). \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$

9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\text{arc}tg\frac{x}{a} + C; \ (a \neq 0). \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \text{arc}tgx + C.$

10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ (a>0).$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + C.$

12. $\int sh\,x\,dx = ch\,x + C.$

13. $\int ch\,x\,dx = sh\,x + C.$

14. $\int tgx\,dx = -\ln|\cos x| + C.$

15. $\int ctgx\,dx = \ln|\sin x| + C.$

16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

1-misol. Aniqmas integral asosiy xossalari va jadvaldan foydalanib integrallarni toping: 1) $\int 4x^5dx$; 2) $\int\left(3x^4+x^3-1\right)dx$; 3) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x^2}dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Yechish. 1) $\int 4x^5dx = 4\int x^5dx = \frac{4}{6}x^6 + C = \frac{2}{3}x^6 + C.$

2) $\int\left(3x^4+x^3-1\right)dx = 3\int x^4dx + \int x^3dx - \int dx = \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - x + C.$

3) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x^2}dx = \int\left(\frac{x}{x^2}+\frac{2\sqrt{x}}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx =$

$$= \int\frac{dx}{x} + 2\int\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} + \int\frac{dx}{x^2} = \ln|x| - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C.$$

4) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni toping: 1) $\int\left(tgx+ctgx\right)dx$; 2) $\int\left(3x^3+\sin x\right)dx$; 3) $\int\left(4x^3+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$; 4) $\int\left(\frac{(2x+3)^2}{x+1}\right)dx.$

Integral osti funksiyasi murakkab funksiyadan iborat bo'lsa, u holda integrallashning quyidagi asosiy qoidalaridan foydalanamiz:

- o'zgaruvchini almashtirish qoidasi;
- bo'laklab integrallash qoidasi.

Aniqmas integralni hisoblashda o'zgaruvchini almashtirish quyidagicha amalga oshiriladi: $\int f(x)dx$ integralni o'zgaruvchini alamashtirish qoidasi yordamida hisoblash kerak bo'lsin. x o'zgaruvchini t erkli o'zgaruvchining biror differensiallanuvchi funksiyasi orqali ifodalaymiz: $x=\varphi(t)$, bu yerda $t=\psi(x)$ teskari funksiya mavjud bo'lsin, deb faraz qilinadi, u holda $dx=\varphi'(t)dt$ bo'lgani uchun

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (8.5)$$

2-misol. Integralni toping: 1) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+2\sqrt{x}}$; 2) $\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2+5}}$; 4) $\int\sqrt{25-x^2}dx$; 5) $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$.

Yechish.

1) $t=1+2\sqrt{x}$ almashtirish kiritamiz; bu yerdan $x=\frac{(t-1)^2}{4}$; $dx=\frac{2(t-1)}{4}dt$.

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+2\sqrt{x}}=\int\frac{\frac{t-1}{2}\cdot\frac{2(t-1)}{4}dt}{t}=\frac{1}{4}\int\frac{(t-1)^2}{t}dt=\frac{1}{4}\int\frac{t^2-2t+1}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{4}\int tdt-\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}=\frac{t^2}{8}-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\ln|t|+C=$$

$$=\frac{\left(1+2\sqrt{x}\right)^2}{8}-\frac{1+2\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|1+2\sqrt{x}\right|+C.$$

2) $t^2=x+4$ almashtirish kiritamiz, bu yerdan $x=t^2-4$; $dx=2tdt$, shuningdek, $t=\sqrt{x+4}$.

$$\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx=\int\frac{t}{t^2-4}2tdt=2\int\frac{t^2dt}{t^2-4}=2\int\frac{t^2-4+4}{t^2-4}dt=2\int\left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt=$$

$$=2\int dt+8\int\frac{dt}{t^2-4}=2t+8\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C.$$

3) $$\int\frac{dx}{\sqrt{4x-4x^2+5}}=\frac{1}{\sqrt{4}}\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2+\frac{5}{4}}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-x-\frac{5}{4}\right)}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{-(x-0,5)^2+1,5}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-0,25)}{\sqrt{\left(\sqrt{1,5}\right)^2-(x-0,5)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-0,5}{\sqrt{1,5}}+C.$$

4) $x=5\sin t$ almashtirish kiritamiz, $dx=5\cos tdt$ shuningdek, $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda $\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-25\sin^2 t}=5\sqrt{1-\sin^2 t}=5\cos t$.

$$\int\sqrt{25-x^2}dx=\int 5\cos t\cdot 5\cos t dt=25\int\cos^2 t dt=25\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{25}{2}\int dt+\frac{25}{2}\int\cos 2t dt=$$

$$=\frac{25}{2}t+\frac{25}{4}\sin 2t+C.$$

Endi x o'zgaruvchiga qaytamiz: $t=\arcsin\frac{x}{5}$, $\sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{x}{5}\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$.

$$\int\sqrt{25-x^2}dx=\frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5}+\frac{x\sqrt{25-x^2}}{2}+C.$$

5) $t=tg\frac{x}{2}$ u holda $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $3+5\cos x=3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{8-2t^2}{1+t^2}$.

$$\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\frac{8-2t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{4-t^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|+C.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni toping: 1) $\int\left(tg(6x+1)+ctg7x\right)dx$; 2) $\int\left(3x^3+\sin(8x+3)\right)dx$; 3) $\int\sqrt{3x+6}dx$; 4) $\int\ln(7x-3)dx$.

Aniqmas integralda bo'laklab integrallash quyidagicha amalga oshiriladi: Ma'lumki, uv ko'paytmaning differensiali

$$d(uv)=udv+vdu \qquad (8.6)$$

formula bilan hisoblanadi. (8.6) formulaning ikkala tomonini ham integrallaymiz. U holda

$$\int d(uv)=\int udv+\int vdu\Rightarrow uv=\int vdu+\int udv\Rightarrow\int udv=uv-\int vdu \qquad (8.7)$$

(8.7) bo'laklab integrallash formulasi deyiladi. Bu yerda u, $v-$ differensiallanuvchi funksiyalar.

(8.7) formulani aniqmas integralga qo'llash uchun, integral ostidagi ifoda ikki qismga ajratiladi va birinchi qismini u, ikkinchi qismini esa dv, deb olinadi. So'ngra birinchi u ifodani differensiallab du ifodani, ikkinchi dv ifodani integrallab $\int vdu$ integralni hosil qilamiz.

3-misol. Integralni toping: 1) $\int x^2\ln xdx$; 2) $\int x\cos xdx$; 3) $\int xe^x dx$.

Yechish. 1) $\int x^2\ln xdx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda $u=\ln x$, $dv=x^2dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du=\frac{dx}{x}$, $v=\frac{x^3}{3}$ ifodalar hosil bo'ladi. Endi esa (8.7) formulani qo'llaymiz:

$$\int x^2\ln xdx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C.$$

2) $\int x\cos x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda $u = x,\ dv = \cos x dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du = dx,\ v = \sin x$ ifodalar hosil bo'ladi. Endi esa (8.7) formulani qo'llaymiz:

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

3) $\int xe^x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda $u = x,\ dv = e^x dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du = dx,\ v = e^x$ ifodalar hosil bo'ladi. Endi esa (8.7) formulani qo'llaymiz:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni toping: 1) $\int (3x+2)\sin(2x-3)dx$; 2) $\int 4x\ln(2x-1)dx$; 3) $\int (3x-7)e^{2x+3}dx$.

Aniqmas integralni hisoblashda integral osti funksiyaning ko'rinishini e'tiborga olgan holda integralni hisoblash usulini tanlash kerak bo'ladi. Bunday usullar ko'p bo'lib biz ulardan biri bilan tanishib chiqamiz.

Sodda ratsional ifodalar asosan to'rt xil bo'ladi. Ratsional ifodalarni integrallash shu to'rt xil sodda ifodalarni integrallashga keltiriladi. Shu sababli bu to'rt xil ifodani integrallash masalasi alohida ahamiyat kasb etadi. Ularning ko'rinishlari quyidagicha:

$$1)\ \frac{A}{x-a},\quad 2)\ \frac{A}{(x-a)^k},\quad 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

bu yerda A, M, N, a, p, q sonlar haqiqiy sonlar bo'lib, $k > 1$ natural son va $p^2 - 4q < 0$, deb hisoblanadi.

Endi yuqoridagi ifodalarni integrallash masalasiga o'tamiz.

1) $\dfrac{A}{x-a}$ ifodani integrallash quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ ifodani integrallaymiz $(k > 1)$.

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

3) $\int \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ $(p^2 - 4q)$ ifodani integrallash uchun uning suratida maxrajning differensialini ajratib olish va maxrajini kvadratlar yig'indisiga keltirish orqali jadvaldagi integrallarga keltiriladi.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2+px+q) = (2x+p)dx \\ Mx+N = \dfrac{M}{2}(2x+p) + N - \dfrac{Mp}{2} \end{array} \right| = \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} +$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d(x+p/2)}{(x+p/2)^2+q-p^2/4}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ $(k>1)$ sodda ifodani integrallash uchun $x+\frac{p}{2}=z$ almashtirish bajaramiz. U holda $dx=dz$, $x^2+px+q=\left(z-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(z-\frac{p}{2}\right)+q=z^2+q-\frac{p^2}{4}$.

U holda $a^2=q-\frac{p^2}{4}$ begilashdan so‘ng quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=M\int\frac{zdz}{(z^2+a^2)^k}+\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}=MI_0+\frac{2N-Mp}{2}I_k.$$

Bu yerda

$$I_0=\int\frac{zdz}{\left(z^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2}\int\frac{d(z^2+a^2)}{\left(z^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2(1-k)\left(z^2+a^2\right)^{k-1}}+C.$$

Demak, $I_k=\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}$ integralni hisoblash kifoya.

$$I_k=\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{z^2+a^2-z^2}{\left(z^2+a^2\right)^k}dz=\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}.$$

Bu yerda $I_{k-1}=\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}$ belgilash kiritamiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$\mathrm{I_k}=I_k=\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{a^2}\left(I_{k-1}-\int\frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}\right). \qquad (8.8)$$

$\int\frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}$ integralni hisoblash uchun uni bo‘laklab integrallaymiz.

$$\int\frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}=\left|\begin{matrix} u=z, & du=dz \\ dv=\frac{zdz}{(z^2+a^2)^k}, & v=\frac{1}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}}=\frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}I_{k-1}.$$

So‘nggi topilgan ifodani (8.8) formulaga qo‘yamiz, natijada

$$I_k=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}-\frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}\right) \qquad (8.9)$$

(8.9) rekurrent formula deb ataladi. $z=\frac{2x+p}{2}$ va $a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ almashtirishlarga qaytib, izlanayotgan integralni topamiz.

$I_1=\int\frac{dz}{z^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{z}{a}+C$ ni bilgan holda (8.9) formula yordamida $I_2=\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^2}$ integralni hisoblash mumkin. Haqiqatan ham,

$$\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+a^2}+\frac{z}{2(z^2+a^2)}\right)=$$

$$=\frac{z}{2a^2(z^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}arctg\frac{z}{a}+C.$$

Shunday qilib, biz barcha sodda ifodalarni integrallash formulalarini hosil qildik.

Endi ratsional ifoda funksiyalarni integrallash qoidasini keltiramiz. Ratsional ifodani integrallash uchun quyidagi ishlarni bajarish lozim:

1) agar qaralayotgan $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n\geq m$ ratsional ifoda noto'g'ri bo'lsa, u holda uni ko'phad va to'g'ri ratsional ifoda yig'indisi ko'rinishda ifodalab olamiz:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=R(x)+\frac{P_k(x)}{Q_m(x)},\ k<m,$$

2) agar qaralayotgan $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n<m$ ratsional ifoda to'g'ri bo'lsa, u holda uni sodda ifodalarga yoyamiz;

3) ratsional ifoda integralini uning butun qismi va sodda ratsional ifodalar integrallari yig'indisi ko'rinishida yozib olamiz va har bir integralni hisoblaymiz.

4-misol. Integralni toping: 1) $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$; 2) $\int\frac{x-1}{x^3+1}dx$.

Yechish.

1) $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$ integralni hisoblash uchun uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

Bundan $x^3+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$ ayniyatni hosil qilamiz. Bu ayniyatdan quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -3A-2B+C=0, \\ 3A+B-C+D=0, \\ -A=1. \end{cases}$$

Sistemaning yechimi: $A=-1$, $B=2$, $C=1$, $D=2$. U holda

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx = -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^3} =$$
$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

2) $\int \frac{x-1}{x^3+1}dx$ integralni hisoblash uchun uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{x-1}{x^3+1} = \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

Bundan $x-1 = A(x^2-x+1) + Mx(x+1) + N(x+1)$ ayniyatni hosil qilamiz. Bu ayniyatdan quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} A+M=0, \\ -A+M+N=1, \\ A+N=-1. \end{cases}$$

Sistemaning yechimi: $A=-\frac{2}{3}$, $M=\frac{2}{3}$, $N=-\frac{1}{3}$. U holda

$$\int \frac{x-1}{x^3+1}dx = -\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = \ln\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} + \ln\sqrt[3]{x^2-x+1} + C.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni toping: 1) $\int \frac{x^2-1}{x^3-1}dx$;

2) $\int \frac{x^2+x-1}{x^6-1}dx$; 3) $\int \frac{x^3-1}{x^8-1}dx$.

Endi aniqmas integralning iqtisodiyotga ba'zi tatbiqlari bilan tanishib chiqamiz.

Agar firmaning marjinal daromad funksiyasi $MR(Q)$ berilgan bo'lsa, ya'ni

$$MR(Q) = f(Q)$$

funksiya ma'lum bo'lsa, u holda firmaning yalpi daromad funksiyasi quyidagi aniqmas integral yordamida topiladi:

$$R(Q) = \int MR(Q)dQ = \int f(Q)dQ = F(Q) + C. \qquad (8.10)$$

Bu yerda $F(Q)$ – boshlang'ich funksiya.

5-misol. Firmaning marjinal daromad funksiyasi

$$MR(Q) = 150 - 15Q$$

ko'rinishida berilgan. Agar $Q=10$ birlik mahsulot ishlab chiqarilganda firmaning umumiy daromad $R(Q)=1000$ sh.p.b. ni tashkil etsa, u holda yalpi daromad funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechish. Umumiy daromad funksiyasi $R(Q)$ ni quyidagi integraldan foydalanib topamiz:

$$R(Q)=\int(150-15Q)dQ=150Q-\frac{15Q^2}{2}+C.$$

$Q=10$, $R(Q)=1000$ bo'lganidan foydalanib, $C=250$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, firmaning yalpi daromad funksiyasi

$$R(Q)=150Q-\frac{15Q^2}{2}+250$$

ko'rinishda bo'ladi.

Xuddi shuningdek, marjinal xarajat va foyda funksiyalari ma'lum bo'lganda umumiy xarajat va yalpi foyda funksiyalarini ham aniqmas integraldan foydalanib topish mumkin.

6-misol. Firmaning marjinal xarajat funksiyasi

$$MC(Q)=Q^2+3Q+8$$

ko'rinishga ega. Agar $Q=0$ da firmaning xarajati 250 sh.p.b. ni tashkil etsa, u holda uning umumiy xarajat funksiyasini toping.

Yechish. Umumiy xarajat funksiyasi $C(Q)$ ni quyidagi integraldan foydalanib topamiz: $\frac{dC(Q)}{dQ}=MC=Q^2+3Q+8.$

$$C(Q)=\int\left(Q^2+3Q+8\right)dQ.$$

$$C(Q)=\int Q^2dQ+3\int QdQ+8\int dQ=\frac{1}{3}Q^3+3\left(\frac{1}{2}Q^2\right)+8Q+k,$$

$C(Q)=250$, $Q=0$ da $k=250$.

Demak, umumiy xarajatlar funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$C(Q)=\frac{1}{3}Q^3+\frac{3}{2}Q^2+8Q+250.$$

7-misol. Firmaning marjinal foyda funksiyasi

$$MF(Q)=120-0,4Q.$$

ko'rinishiga ega. Agar $Q=10$ birlik mahsulot ishlab chiqarganda firmaning foydasi $F=1300$ sh.p.b. ga teng bo'lsa, u holda uning yalpi foyda funksiyasi qanday ko'rinishga ega bo'ladi?

Yechish. Marjinal foyda funksiyasi ma'lum bo'lganda yalpi foyda funksiyasini quyidagi integral yordamida topamiz:

$$F(Q)=\int MF(Q)dQ=\int(120-0,4Q)dQ=120Q-0,2Q^2+C.$$

$Q=10$ da $F=1300$ ekanligini nazarga olib, $C=120$ ekanligini topamiz. Demak, yalpi foyda funksiyasi

$$F(Q)=120Q-0,2Q^2+120,$$

ko'rinishga ega.

Ma'lumki, marjinal mehnat unumdorligi $MQ(L)$ ishlab chiqarish funksiyasi $Q(L)$ dan olingan birinchi tartibli hosiladan iborat. Shu sababli ishlab chiqarish hajmini mehnatning funksiyasi sifatida aniqlash uchun marjinal mehnat unumdorligini integrallaymiz, ya'ni

$$Q(L)=\int MQ(L)dL.$$

8-misol. Marjinal mehnat unumdorlik funksiyasi quyidagi ko'rinishda berilgan.

$$MQ(L)=\frac{5}{\sqrt{L}}-1.$$

Agar ishlab chiqarishda $L=4$ ta kishi ishlaganda 20 ta mahsulot ishlab chiqarilsa, u holda ishlab chiqarish funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechish. Ishlab chiqarish funksiyasi $Q(L)$ ni quyidagi integraldan foydalanib topamiz:

$$Q(L)=\int MQ(L)dL=\int\left(\frac{5}{\sqrt{L}}-1\right)dL=10\sqrt{L}-L+C.$$

$L=4$ da $Q(L)=20$ ekanligini inobatga olib $C=4$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, ishlab chiqarish funksiyasi

$$Q(L)=10\sqrt{L}-L+4,$$

ko'rinishga ega ekan.

Deylik, talab egiluvchanlik funksiyasi

$$E_{Q_D}(P)=f'(P)\cdot\frac{P}{Q_D}=P\cdot\frac{f'(P)}{f(P)}, \quad (8.11)$$

ma'lum bo'lsin. U holda talab funksiyasi aniqmas integral yordamida aniqlanadi. Buning uchun (8.11) ifodadan

$$\frac{E_{Q_D}(P)}{P}=\frac{f'(P)}{f(P)},$$

tenglikni hosil qilib, uning ikki tomonini integrallaymiz.

$$\int \frac{f'(P)}{f(P)} dP = \int \frac{E_{Q_D}(P)}{P} dP + C.$$

9- misol. Talabning narx bo'yicha egiluvchanlik funksiyasi

$$E_D(P) = \frac{-P^2}{170-P^2}, \qquad 0 < P < 13,$$

ko'rinishga ega. Agar tovar narxi $P=7$ sh.p.b. ga teng bo'lganda unga bo'lgan talab $Q_D = 550$ bo'lsa, u holda talab funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechish.

$$f'(P)\frac{P}{Q_D} = \frac{-P^2}{170-P^2}; \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f'(P)}{f(P)} = \frac{-P}{170-P^2}.$$

Hosil bo'lgan tenglikning ikki tomonini integrallaymiz:

$$\int \frac{f'(P)}{f(P)} dP = \int \frac{-P}{170-P^2} dP.$$

va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\ln f(P) = \frac{1}{2}\ln(170-P^2) + \ln C.$$

Bu tenglikdan $f(P)$ funksiyani aniqlaymiz.

$$f(P) = C\sqrt{170-P^2},$$

Bu tenglikka boshlang'ich shartlarni qo'yib topamiz.

$$550 = C\sqrt{170-49} \Rightarrow 550 = C\sqrt{121} \quad \Rightarrow C = 50.$$

Demak, talab funksiyasi

$$f(P) = 50\sqrt{170-P^2},$$

ko'rinishga ega.

Agar taklif egiluvchanligi $E_{Q_S}(P) = \varphi'(P)\cdot\frac{P}{Q_S} = P\cdot\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}$, (8.12) ma'lum bo'lsa, u holda taklif funksiyasi $\varphi(P)$ aniqmas integral yordamida topiladi. Buning uchun (8.12) tenglikni quyidagi

$$\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}=\frac{E_{Q_s}(P)}{P},$$

ko'rinishda yozamiz. So'ngra tenglikning ikki tomonini integrallaymiz va topamiz:

$$\int\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}dP=\int\frac{E_{Q_s}(P)}{P}dP+C.$$

10-misol. Taklifning narx bo'yicha egiluvchanlik funksiyasi

$$E_S(P)=\frac{12P^2+39P}{(3+2P)(15+3P)}$$

ko'rinishga ega. Agar tovar narxi $P=3$ sh.p.b. ga teng bo'lganda taklif $Q_S=1080$ birlik bo'lsa, u holda taklif funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra,

$$\phi'(P)\frac{P}{Q_S}=\frac{12P^2+39P}{(3+2P)(15+3P)}.$$

Bundan

$$\frac{\varphi'(P)}{Q_S}=\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}=\frac{12P+39}{(3+2P)(15+3P)}.$$

Ushbu tenglikning ikki tomonini integrallab topamiz:

$$\ln\phi(P)=\int\frac{12P+39}{(3+2P)(15+3P)}dP.$$

Bundan

$$\ln\varphi(P)=\ln(3+2P)(15+3P)+\ln C$$

va nihoyat

$$\varphi(P)=C(3+2P)(15+3P)$$

funksiyani hosil qilamiz.

Bundan, boshlang'ich shartlarni nazarga olib topamiz:

$\varphi(3)=1080=C(3+6)(15+9)\ \Rightarrow\ C=5.$

Demak, taklif funksiyasi

$\varphi(P)=5(3+2P)(15+3P)$ ko'rinishda bo'ladi.

Ma'lumki, agar $M(t)$ – kattalik biror-bir kompaniyaning t vaqtdagi fondini ifodalasa, u holda $\frac{dM(t)}{dt}$ – kattalik bu kompaniyadagi dt vaqtdagi pul oqimi bildiradi. Faraz qilamiz qandaydir bankda bir yillik pul oqimi o'zgarmas $\frac{dM(t)}{dt}=k=const$ bo'lsin. U holda bu bankning t vaqtdagi fondi quyidagicha aniqlanadi: $M(t)=\int kdt=kt+C$.

8.2. Integrallash usullari

Aniqmas integralni integrallash usullari bilan tanishib chiqamiz.

Irratsional funksiyalarni integrallash usullari. Har qanday ratsional funksiyaning boshlang'ich funksiyalari elementar funksiya bo'lishini va ularni hisoblash usullarini ko'rib chiqdik. Lekin har qanday irratsional funksiyaning boshlang'ich funksiyalari elementar funksiya bo'lavermaydi. Biz hozir boshlang'ich funksiyalari elementar bo'ladigan ba'zi bir sodda irratsional funksiyalarni integrallash bilan shug'ullanamiz. Ular asosan biror almashtirish yordamida ratsional funksiyaga keltiriladigan funksiyalardir. Biz quyida ulardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

1. $I=\int R(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\sqrt[n_2]{x^{m_2}},...,\sqrt[n_k]{x^{m_k}})dx$ $(m_1,n_1,m_2,n_2,...,m_k,n_k$ – butun sonlar) ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.

Bu ko'rinishdagi integrallar $x=t^s$, bu yerda $s-\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2},...,\frac{m_k}{n_k}$ funksiyalarning umumiy maxraji, almashtirish natijasida ratsional funksiya integraliga keltiriladi:

$$\int R(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\sqrt[n_2]{x^{m_2}},...,\sqrt[n_k]{x^{m_k}})dx=\int R(t^s,t^{r_1},t^{r_2},...,t^{r_k})st^{s-1}dt.$$

2. $I=\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.

Bu integralda R – o'z argumentlarining ratsional funksiyasi, a, b, c, d – haqiqiy sonlar va $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ – ratsional sonlar bo'lib, ularning umumiy maxraji m va $ad-bc\neq 0$ bo'lsin. Agar $ad-bc=0$ bo'lsa, u holda $\frac{ax+b}{cx+d}=const$ bo'lib $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)$ funksiya x ga nisbatan ratsional funksiya bo'ladi.

Quyidagi $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ almashtirishni kiritamiz. U holda

$$t^m=\frac{ax+b}{cx+d},\ x=\frac{t^m d-b}{a-ct^m},\ dx=\frac{m(ad-bc)t^{m-1}dt}{(a-ct^m)^2}.$$

Natijada, berilgan integral t ga nisbatan ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

3. $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad I_3=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$

ko'rinishdagi integrallarni hisoblaymiz. I_1 ko'rinishdagi integralni hisoblash uchun ildiz ostidagi funksiyadan to'la kvadrat ajratiladi:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right).$$

So'ngra $x+\frac{b}{2a}=u,\ dx=du$ almashtirish bajariladi. Natijada integral jadvaldagi $\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm k^2}}$ ko'rinishdagi integralga keltiriladi.

I_2 integral suratida ildiz ostidagi funksiyaning differensiali ajratib olinadi va bu integral ikkita integral yig'indisi ko'rinishida funksiyalanadi:

$$I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+$$

$$+\left(B-\frac{AB}{2a}\right)I_1=\frac{A}{2a}\int(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}d(ax^2+bx+c)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1=$$

$$=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1,$$

bu yerda I_1 yuqorida hisoblangan integral.

I_3 integralni hisoblash $x=\frac{1}{u},\ dx=-\frac{1}{u^2}du$ almashtirish yordamida I_1 ga keltiriladi.

11-misol. Integralni toping: 1) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$; 3) $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx.$

Yechish.

1) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ ni hisoblaymiz. $\frac{1}{2}$ va $\frac{1}{3}$ funksiyalarning umumiy maxraji 6 ga teng bo'lganligi sababli $x=t^6$ almashtirish bajaramiz. U holda $dx=6t^5dt$ bo'ladi va integral quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\int\frac{t^3 6t^5}{t^3-t^2}dt=6\int\frac{t^6}{t-1}dt=6\int(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt=$$

$$=t^6+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+$$

$$+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$$

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$ integralni hisoblaymiz. Integral ostidagi funksiya $R(x,\sqrt{x+1},\sqrt[3]{x+1})$ ko'rinishdagi funksiya bo'lib, bu yerda $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{1}{3}$. Bu funksiyalarning umumiy maxraji $m=6$. U holda $x+1=t^6$, $\sqrt{x+1}=t^3$, $\sqrt[3]{x+1}=t^2$ almashtirishlar bajarib, quyidagi $I=6\int\frac{t^3dt}{t-1}$ integralga kelamiz. Natijada

$$I=6\int(t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$

$$=2\sqrt{x+1}+3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln|\sqrt[6]{x+1}-1|+C.$$

3) $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ integralni hisoblaymiz. Bu integral I_2 ko'rinishidagi integraldir. Shu sababli funksiyaning suratini $3x-1=\frac{3}{2}(2x+2)-4$ yozib olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int\frac{(3x-1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\frac{3}{2}\int(x^2+2x+2)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+2x+2)-$$

$$-4\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

Mashqni bajaring. Integralni toping:

1) $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$; 2) $\int\frac{\sqrt{x+1}dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}}$; 3) $\int\frac{5x+4}{\sqrt{3x^2+5x+3}}dx$.

Trigonometrik funksiyalarni integrallash usullari. $I=\int R(\sin x,\cos x)dx$ integralni qaraylik. Bu ko'rinishdagi integrallarni hisoblash uchun umumiy usul mavjud. Haqiqatan ham, yuqoridagi integralda $t=tg\frac{x}{2}$ almashtirishni bajarsak,

$$x=2arctgt,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

kelib chiqadi. Bu funksiyani integralga qo'ysak,

$$I=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt$$

hosil bo'ladi. Bunda R o'z argumentlarining ratsional funksiyasi bo'lgani uchun R_1 ham ratsional funksiya bo'ladi. Demak, berilgan integral ratsional – kasr funksiyalarni integrallashga keltiriladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, $t=tg\frac{x}{2}$ universal almashtirish yordamida

$\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}$ ko'rinishdagi integrallarni topish osonlashadi.

Ba'zi hollarda bunday universal almashtirish murakkab ratsional – kasr funksiyalarni integrallashga olib keladi. Shuning uchun ba'zi hollarda boshqa almashtirishlardan foydalanish anchagina qulay bo'ladi.

a) $R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ bo'lsa, u holda $\sin x=t$ almashtirish bajariladi.

b) $R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ bo'lsa, u holda $\cos x=t$ almashtirish bajariladi.

c) $R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ bo'lsa, u holda $tgx=t$ almashtirish bajariladi.

d) $I=\int\sin^n x\cdot\cos^m xdx$ integralni qaraylik. Bunda m, n - butun sonlar. Quyidagi uchta holni ko'ramiz:

1) m va n lardan hech bo'lmaganda biri toq son bo'lsin. Masalan, m- toq son, ya'ni m=2k+1, k-butun son. U holda $t=\sin x$, $dt=\cos x$, $\cos^{2k}x=(1-\sin^2 x)^k=(1-t^2)^k$ almashtirishlar natijasida

$$I=\int\sin^n x\cdot\cos^m xdx=\int\sin^n x\cos^{2k}x\cos xdx=\int t^n\cdot(1-t^2)^k dt$$

funksiya hosil bo'ladi. Demak, t ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo'lamiz.

2) m va n musbat juft sonlar bo'lsin, ya'ni m=2s, n=2k, s, k- natural sonlar. U holda integrallash jarayonida

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \sin 2x=2\sin x\cos x$$

formulalardan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

3) Agar m va n lar juft sonlar bo'lib, ularning kamida biri manfiy bo'lsa, yuqorida bayon qilingan usul maqsadga olib kelmaydi. Bunda tgx=t almashtirishni bajarish lozim bo'ladi.

e) $\int tg^n xdx$, $\int ctg^n xdx$, $n-$natural son, n>1 ko'rinishdagi integrallar mos ravishda $tgx=t$ yoki $ctgx=t$ almashtirishlar yordamida hisoblanadi.

Masalan, $tgx = t$, $x = arctgt$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ almashtirishlarni bajarsak, $\int tg^n x dx = \int \frac{t^n}{1+t^2} dt$ hosil bo'ladi. Demak, berilgan integral ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

k) $\int \sin nx \cdot \cos mx dx$, $\int \cos nx \cdot \cos mx dx$, $\int \sin nx \cdot \sin mx dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash uchun ushbu

$$\sin nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}(\sin(n-m)x + \sin(n+m)x),$$

$$\cos nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x + \cos(n+m)x),$$

$$\sin nx \cdot \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x),$$

formulalardan foydalanib, berilgan integrallarni yig'indining integraliga keltirish mumkin.

12-misol. Integralni toping: 1) $\int tg^5 x dx$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Yechish. 1) $\int tg^5 x dx$ integralni hisoblashda $tgx = t$, $x = arctgt$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ almashtirishlarni bajaramiz. U holda

$$\int tg^5 x dx = \int \frac{t^5}{1+t^2} dt = \int (t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} =$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln(tg^2 x + 1) + C$$

hosil bo'ladi.

2) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ integralning integral ostidagi funksiyasi uchun

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

shart bajariladi, shu sababli uni hisoblashda $tgx = t$ almashtirishdan foydalanamiz. U holda

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + tg^2 x) d(tgx) = \int (1+t^2) dt = t + \frac{t^3}{3} + C = tgx + \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

Mashqni bajaring. Integralni toping:

1) $\int \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 2x} dx$; 2) $\int \frac{5 + 2tg^2 x}{\sin^2 x} dx$; 3) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$; 4) $\int \cos^8 x \sin^7 x dx$

Trigonometrik almashtirishlar yordamida integrallash usuli. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ integrallarning xususiy hollarini hisoblashni yuqorida qarab o'tdik. Bu kabi integrallarni hisoblashning bir necha usullari mavjud bo'lib, bunda biz avval trigonometrik almashtirishlarga asoslangan hisoblash usulini ko'rib o'tamiz.

ax^2+bx+c kvadrat uchhadni to'la kvadratini ajratish va o'zgaruvchini almashtirish natijasida $u^2 \pm k^2$ ko'rinishga keltirish mumkin. Shunday qilib, quyidagi uch turdagi integrallarni qaraymiz:

$$I_1=\int R(u,\sqrt{k^2-u^2})du,\ I_2=\int R(u,\sqrt{k^2+u^2})du,\ I_3=\int R(u,\sqrt{u^2-k^2})du.$$

I_1 integral $u=k\sin t$, $u=k\cos t$ almashtirishlar natijasida $\sin t$, $\cos t$ funksiyalarga nisbatan ratsional funksiya integraliga keltiriladi. Haqiqatan ham, $u=k\sin t,\ k>0$ almashtirishdan foydalansak, $du=k\cos tdt$, $\sqrt{k^2-u^2}=k\cos t$,

$\int R(u,\sqrt{k^2-u^2})du=\int R(k\sin t,k\cos t)k\cos tdt$ bo'ladi.

I_2 integral esa $u=ktgt, u=kctgt$ almashtirishlar yordamida $\sin t$, $\cos t$ funksiyalarga nisbatan ratsional funksiya integraliga keltiriladi.

Haqiqatan ham, $u=ktgt,\ k>0$ almashtirish bajaramiz. U holda $du=\frac{k}{\cos^2 t}dt,\ \sqrt{k^2+u^2}=\frac{k}{\cos t}$

$$\int R(u,\sqrt{k^2+u^2})du=\int R\left(k\frac{\sin t}{\cos t},\frac{k}{\cos t}\right)\cdot\frac{k}{\cos^2 t}dt.$$

I_3 integral $u=k\sec t=\frac{k}{\cos t}$ yoki $u=\frac{k}{\sin t}$ almashtirish yordamida sint va cost ga nisbatan ratsional funksiya integraliga keltiriladi. Haqiqatan ham, $u=\frac{k}{\cos t}$ almashtirish bajaraylik. U holda $du=\frac{k\sin t}{\cos^2 t}dt,\ \sqrt{u^2-k^2}=k\frac{\sin t}{\cos t}$

$$\int R(u,\sqrt{u^2-k^2})du=\int R\left(\frac{k}{\cos t},\frac{k\sin t}{\cos t}\right)\cdot\frac{k\sin t}{\cos^2 t}dt$$

bo'ladi. $\sin t$, $\cos t$ funksiyalarga nisbatan ratsional funksiya integraliga keltiriladi. Bu integrallar yuqorida keltirilgan metodlar yordamida hisoblanadi.

13-misol. Integralni toping: $\int\sqrt{a^2+x^2}dx.$

Yechish. $x=atgt$ almashtirish yordamida integralni

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\left|\begin{array}{c} x=atgt \\ dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt\end{array}\right|=\int\sqrt{a^2(1+tg^2 t)}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}dt=a^2\int\frac{dt}{\cos^3 t}$$

ko'rinishda yozib olamiz. $\int\frac{dt}{\cos^3 t}$ integralni hisoblashni o'quvchilarga havola qilamiz.

$\int\sqrt{a^2+x^2}dx$ integralni quyidagicha bo'laklab integrallash ham mumkin.

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{x^2+a^2}, du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} \\ dv=dx, \qquad v=x \end{matrix}\right|=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{a^2+x^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}dx+\int\frac{a^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}dx+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|,$$

$\int\sqrt{x^2+a^2}dx$ funksiyani tenglikning chap tomoniga o'tkazib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

Izoh. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$, $\int\sqrt{x^2-a^2}dx$ integrallarni ham bo'laklab integrallash mumkin. Bu integrallarni mustaqil ishlang.

Eyler almashtirishi yordamida integrallash. $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ ko'rinishdagi integralni Eyler almashtirishlari yordamida hisoblash. Agar ildiz ostidagi kvadrat uchhadning haqiqiy ildizlari bo'lmasa va $a>0$ bo'lsa, u holda ildiz osti funksiya manfiy bo'lib, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ funksiya mavjud bo'lmaydi va integrallash masalasi o'z ma'nosini yo'qotadi. Shuning uchun quyidagi ikki hol mavjud.

1) $a<0$ va ax^2+bx+c uchhad haqiqiy ildizlarga ega bo'lsin. Bu holda

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)\cdot t$$

almashtirishni bajaramiz. Bunda α, β kvadrat uchhadning haqiqiy ildizlari. Soddalik uchun $\alpha<\beta$, deb faraz qilamiz. Demak,

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2, \qquad a(x-\beta)=(x-\alpha)\cdot t^2, \qquad x=\frac{\alpha t^2-\beta a}{t^2-a},$$

$$dx=\frac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}dt, \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t=\frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}.$$

Endi topilgan funksiyalarni berilgan integralga qo'yib, t ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo'lamiz.

Agar $\alpha=\beta$ bo'lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)^2}$ funksiya mavjud bo'lmaydi, chunki $a<0$.

2) $a>0$ bo'lsin. Bu holda

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$$

almashtirishni bajaramiz. Bundan

$$x=\frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}, \qquad dx=\frac{2t^2\sqrt{a}+2bt+2c\sqrt{a}}{(b+2t\sqrt{a})^2}dt,$$

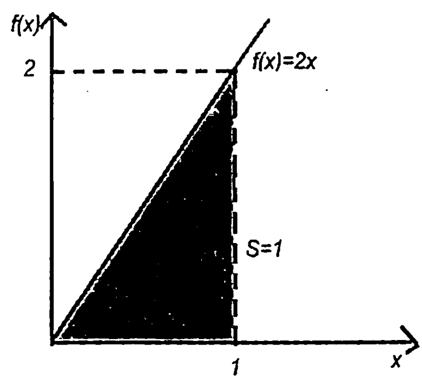
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}=\frac{bt+c\sqrt{a}+t^2\sqrt{a}}{b+2t\sqrt{a}}$$

kelib chiqadi. Topilganlarni berilgan integralga qo'yib, yana t ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo'lamiz.

Yuqorida keltirilgan almashtirishlar Eyler almashtirishlari deb ataladi.

8.3. Aniq integral

Aniq integral (Riman integrali) biror-bir intervalda aniqlangan funksiya grafigining egri chizig'i va bu intervallardan hosil bo'lgan sohaning yuzini aniqlaydi. Masalan, $f(x)=2x$ funksiyani $[0;1]$ oraliqda qaraymiz.



Bu uchburchakning yuzi $S=1$ ekanligi geometriyadan ma'lum. Biz bu misol yordamida $y=f(x)$ egri chiziqlar bilan chegaralangan sohalarning yuzini iteratsiya yordamida hisoblash uchun matematik usul bilan tanishamiz.

Buning uchun biz birinchi navbatda $f(x)$ funksiya aniqlangan intervalni kichik kesmalarga ajratamiz. Ixtiyoriy $[a,b]$ kesmani kichik qismlarga ajratish quyidagicha amalga oshiriladi. $[a;b]$ kesmaga tegishli $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ nuqtalardan foydalanib ixtiyoriy ravishda n ta qismiy kesmalar:

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n]$$

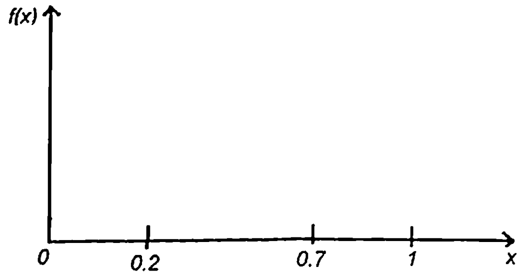
hosil qilamiz. Bu yerda

$$[x_0,x_1]+[x_1,x_2]+...+[x_{n-1},x_n]=[a,b].$$

Kichik kesmalar uzunligini mos ravishda $\Delta_i=x_i-x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$ kabi belgilab olamiz. Bizning misolimizda

$$[a,b]=[0;1]\Rightarrow a=0=x_0<x_1<x_2<...<x_n=1=b.$$

Masalan, $n=3$ bo'lib, $x_0=0$, $x_1=0.2$, $x_2=0.7$, $x_3=1$ bo'lsa, biz quyidagiga ega bo'lamiz.



Demak, $\Delta_1 = 0.2,\ \Delta_2 = 0.5,\ \Delta_3 = 0.3$.

Ixtiyoriy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ nuqta olamiz. U holda

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i \qquad (8.13)$$

yig'indi Riman yig'indisi deb ataladi.

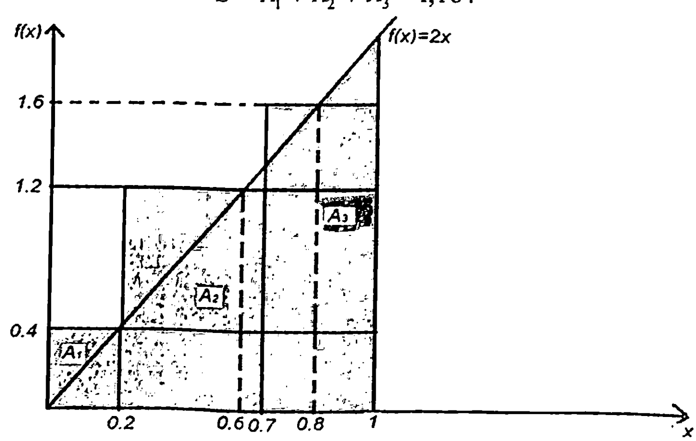
Bizning misolimizda

$$\xi_1 = 0.2,\ \xi_2 = 0.6,\ \xi_3 = 0.8 \Rightarrow f(0.2) = 0.4,\ f(0.6) = 1.2,\ f(0.8) = 1.6.$$

U holda Riman integrali

$$A_1 = 0.4 \times 0{,}2 = 0.08,\ A_2 = 1.2 \times 0{,}5 = 0.6,\ A_3 = 1.6 \times 0{,}3 = 0.18,$$

$$S = A_1 + A_2 + A_3 = 1{,}16.$$



Har bir $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ nuqtalar ixtiyoriy bo'lgani uchun bu nuqtalarni shunday tanlash mumkinki Riman yig'indisini tashkil etuvchi to'g'ri to'rtburchaklar yig'indisidan iborat yuza $f(x)$ egri chiziq va $[a,b]$ kesma bilan chegaralangan soha yuzidan (S) katta $(S_{\max})$, y'ani

$$\exists \bar{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow f(\bar{\xi}_i) \geq f(x),\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow S_{\max} = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\xi}_i)\Delta_i$$

yoki bu to‘g‘ri to‘rtburchaklar yig‘indisidan iborat yuza $f(x)$ egri chiziq va $[a,b]$ kesma bilan chegaralangan soha yuzidan kichik $(S_{\min})$, y’ani

$$\exists \underline{\xi}_i \in [x_{i-1},x_i] \Rightarrow f(\underline{\xi}_i) \le f(x),\ \forall x \in [x_{i-1},x_i] \Rightarrow S_{\min} = \sum_{i=1}^{n} f(\underline{\xi}_i)\Delta_i$$

bo‘lishi mumkin.

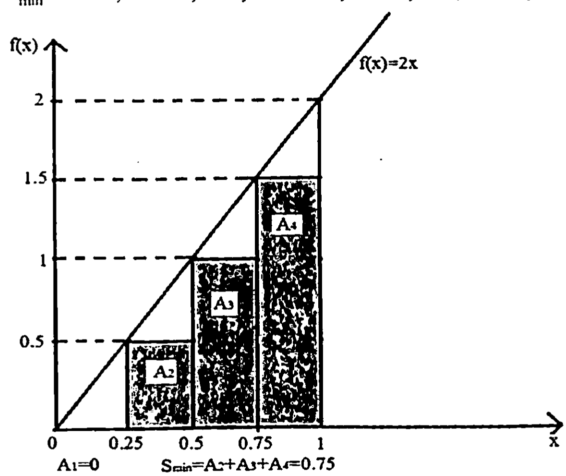
Bizning misolimizda $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0,25$, deb olsak, u holda

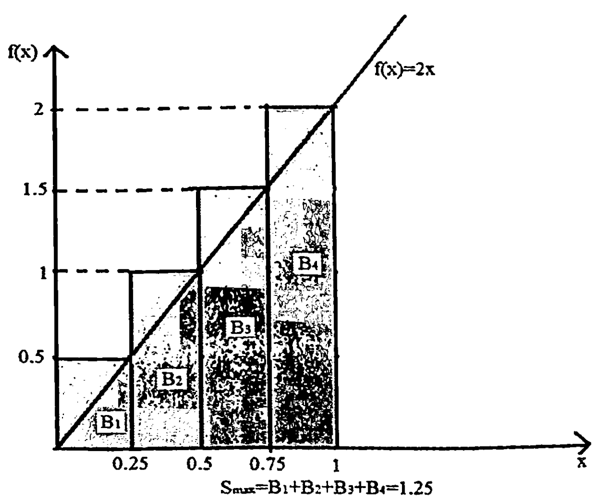
$$\bar{\xi}_1 = 0,25\ \bar{\xi}_2 = 0,5,\ \bar{\xi}_3 = 0,75,\ \bar{\xi}_4 = 1,$$

$$\underline{\xi}_1 = 0\ \underline{\xi}_2 = 0,25,\ \underline{\xi}_3 = 0,5,\ \underline{\xi}_4 = 0,75.$$

$$S_{\max} = 0,5\cdot 0,25 + 1\cdot 0,25 + 1,5\cdot 0,25 + 2\cdot 0,25 = 1,25,$$

$$S_{\min} = 0\cdot 0,25 + 0,5\cdot 0,25 + 1\cdot 0,25 + 1,5\cdot 0,25 = 0,75.$$





Bu topilgan $S_{\min}$ va $S_{\max}$ qiymatlar orasida shunday S^{*} qiymat borki $S_{\min} \le S^{*} \le S_{\max}$, $S^{*} = S$. Bizning misolimizda S^{*} qiymatni topish uchun $\Delta_i = \frac{1}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, deb olamiz. U holda $x_i = \frac{i}{n}$, deb olib $S_{\min}$ va $S_{\max}$ qiymatlarni hisoblaymiz:

$$\underline{\xi}_i = \frac{i-1}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \Rightarrow S_{\min} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1),$$

$$\overline{\xi}_i = \frac{i}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \Rightarrow S_{\min} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i.$$

Bu yerda

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1) = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n-1}{2} \cdot n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n+1}{2} \cdot n.$$

U holda

$$S_{\min} = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1) = 1 - \frac{1}{n}, \quad S_{\max} = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n+1) = 1 + \frac{1}{n}.$$

$$1 - \frac{1}{n} < S^{*} < 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_{\min} = \lim_{n \to \infty} S_{\max} = 1 = S = S^{*}.$$

$[a,b]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiya va $L \in \mathbb{R}$ –son berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. Har qanday kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday kichik musbat δ $\left([a,b] \supset \Delta_i < \delta\right)$ son topilsaki,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i - L \right| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi deyiladi. Bu yerda $\xi_i \in \Delta_i$.

L son esa $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi aniq integrali, deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$L = \int_a^b f(x)dx.$$

Bu yerda, a integralning quyi, b integralning yuqori chegarasi deyiladi.
Shunday qilib, aniq integralning ta'rifidan:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i \qquad (8.14)$$

Ma'lum vaqt oralig'ida jamg'arma bankiga tushgan pul miqdori. $u=f(t)$ – funksiya t – vaqtning har bir momentida jamg'arma bankiga tushadigan pul miqdorini ifodalasin. $[0;T]$ vaqt oralig'ida bankka tushgan pulning U umumiy miqdorini topish talab etiladi.

Agar $f(t)=const$ bo'lsa, u holda $[0;T]$ vaqt oralig'ida jamg'arma bankiga tushgan U pul miqdori $U=f(c)\cdot(T-0)=f(c)\cdot T$ formula bilan topiladi, bu yerda $c\in[0;T]$.

Agar $\left[0;\frac{T}{2}\right]$ vaqt oralig'ining har bir momentida bankka $f(c_1)$ pul birligi, $\left[\frac{T}{2};T\right]$ oraliqda vaqtning har bir momentida $f(c_2)$ pul birligi tushsa, u holda $[0;T]$ vaqt oralig'ida tushgan umumiy pul miqdori

$$U=f(c_1)\frac{T}{2}+f(c_2)\frac{T}{2}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

$f(t)$ funksiya $[0;T]$ kesmada uzluksiz funksiya bo'lsin. $0=t_0<t_1<t_2<...t_{n-1}<t_n=T$ nuqtalar yordamida $[0;T]$ kesmani kichik vaqt oraliqlariga ajratamiz. $[t_{i-1},t_i]$ vaqt oralig'ida bankka tushgan ΔU_i pul miqdori taqriban $\Delta U\approx f(c_i)\Delta t_i$ formula bilan hisoblanadi. Bu yerda $c_i\in[t_{i-1},t_i]$, $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$, $i=1,2,3,...,n$. U holda

$$U=\sum_{i=1}^{n}\Delta U_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta t_i\Rightarrow U=\lim_{\max\Delta t_i\to0}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta t_i\Rightarrow U=\int_0^T f(t)dt.$$

$f(t)\geq0$ bo'lgani uchun $[0;T]$ vaqt oralig'ida jamg'arma bankiga tushgan umumiy pul miqdori son jihatidan $f(t)$, $t=0$, $t=T$, Ot chiziqlar bilan chegaralangan figura yuziga teng.

Ma'lum vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi. $y=f(t)$ funksiya vaqt o'tishi bilan biror ishlab chiqarishning unumdorligi o'zgarishini ifodalasin. $[0;T]$ vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan Q mahsulot hajmini topamiz.

$[0;T]$ kesmani $0=t_0<t_1<t_2<...<t_{n-1}<t_n=T$ nuqtalar yordamida vaqt oraliqlariga ajratamiz. $[t_{i-1},t_i]$ vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan ΔQ_i mahsulot hajmi taqriban $\Delta Q\approx f(c_i)\Delta t_i$ formula bilan hisoblanadi. Bu yerda $c_i\in[t_{i-1},t_i]$, $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$, $i=1,2,3,...,n$. U holda

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\Delta Q_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta t_i\Rightarrow Q=\lim_{\max\Delta t_i\to0}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta t_i\Rightarrow Q=\int_0^T f(t)dt.$$

Aniq integralning asosiy xossalarini keltiramiz:

1) Aniq integralning chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o'zgaradi:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b.$

3) O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

4) Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar integrallarining yig'indisiga teng:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ... + \int_a^b f_n(x)dx.$$

5) Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda bu kesmada shunday c nuqta topiladiki, ushbu nuqtada

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

tenglik bajariladi. Bu yerda $c \in (a;b)$.

Agar $[a;x]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu yerda hosil bo'lgan soha egri chiziqli trapetsiya deb ataladi. Yuqoridagilardan ma'lumki bu sohaning yuzi

$$S(x) = \int_a^x f(x)dx$$

integral bilan aniqlanadi. $S(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lishini, ya'ni $S'(x) = f(x)$ ekanligini ko'rsatamiz.

$S(x+h) - S(x)$ ayirmani qaraylik, bunda $h > 0$. Bu ayirma asosi $[x; x+h]$ bo'lgan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng. Agar h son kichik bo'lsa, u holda: $S(x+h) - S(x) \approx f(x)\cdot h$. Demak,

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \approx f(x).$$

Bu munosabatda $h \to 0$ limitga o'tamiz:

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = S'(x) = f(x)$$

tenglik hosil bo'ladi.

$f(x)$ funksiyaning istalgan boshqa $F(x)$ boshlang'ich funksiyasi $S(x)$ funksiyadan o'zgarmas songa farq qiladi, ya'ni

$$F(x) = S(x) + C$$

Nyuton – Leybnits teoremasi. Agar $F(x)$ funksiya uzluksiz bo'lib, u $y = f(x)$ funksiyaning biror-bir boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda

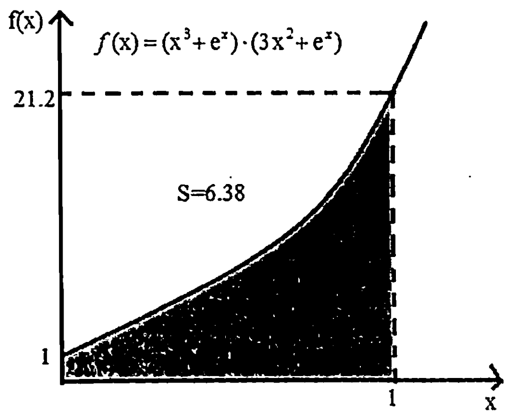
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (8.15)$$

Nyuton – Leybnits formulasi o'rinli bo'ladi.

Demak aniq integralning geometrik ma'nosi egri chiziqli trapetsiyaning yuzi ekan.

14-misol. $[0;1$ kesmada aniqlangan $f(x)=\left(x^3+e^x\right)\left(3x^2+e^x\right)$ egri chiziq, Ox koordinata o'qi, $x=0$ va $x=1$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzini toping.

Yechish. Bunday sohalar egri chiziqli trapetsiya deb ataladi.



Birinchi navbatda $f(x)=\left(x^3+e^x\right)\left(3x^2+e^x\right)$ funksiyaning aniqmas integrallaridan birini topib olamiz $(C=0)$:

$$F(x)=\int\left(x^3+e^x\right)\left(3x^2+e^x\right)dx=\frac{\left(x^3+e^x\right)^2}{2}.$$

Endi (8.15) formuladan foydalanib sohaning yuzini topamiz:

$$S=\int_0^1\left(x^3+e^x\right)\left(3x^2+e^x\right)=\left.\frac{\left(x^3+e^x\right)^2}{2}\right|_{x=0}^{x=1}=6{,}38, \quad e=2{,}71.$$

15-misol. [0;3] kesmada aniqlangan $f(x)=3xe^{x^2}$ egri chiziq, Ox koordinata o'qi, $x=0$ va $x=3$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzini toping.

Yechish. Birinchi navbatda $f(x)=3xe^{x^2}$ funksiyaning aniqmas integrallaridan birini topib olamiz $(C=0)$:

$$F(x)=\int 3xe^{x^2}dx=\frac{3e^{x^2}}{2}.$$

Endi (8.15) formuladan foydalanib sohaning yuzini topamiz:

$$S=\int_0^3 3xe^{x^2}dx=\frac{3e^{x^2}}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=3}=\frac{3e^9-3}{2}=\frac{3}{2}\left(e^9-1\right),\quad e=2,71.$$

16-misol. $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ kesmada aniqlangan $f(x)=2\sin 3x$ egri chiziq, Ox koordinata o'qi, $x=0$ va $x=\frac{\pi}{3}$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzini toping.

Yechish. Birinchi navbatda $f(x)=2\sin 3x$ funksiyaning aniqmas integrallaridan birini topib olamiz $(C=0)$:

$$F(x)=\int 2\sin 3x dx=-\frac{2\cos 3x}{3}.$$

Endi (8.15) formuladan foydalanib sohaning yuzini topamiz:

$$S=\left|\int_0^{\pi/3} 2\sin 3x dx\right|=\left|-\frac{2\cos 3x}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{3}}\right|=\frac{4}{3}.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini toping: 1) $f(x)=4\cos 2x,\ x=0,\ x=\frac{2\pi}{3},\ y=0;$

2) $f(x)=2x^2+4x+3,\ x=0,\ x=2,\ y=0.$

Aniq integralni aniq hisoblashning asosiy yagona usuli, integral ostidagi funksiya uchun boshlang'ich funksiyani aniqlash va so'ngra Nyuton – Leybnits formulasini qo'llashdir. Aniq integralni hisoblashda qo'llaniladigan boshqa usullar bilan tanishib chiqamiz.

Aniq integralni hisoblash usullari. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int_a^b f(x)dx$$

integral berilgan bo'lib, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. $x=\varphi(t)$ almashtirish bajaramiz. Bunda $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ funksiyalar $[\alpha;\beta]$ kesmada uzluksiz bo'lishi kerak. Bu yerda $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Shunday qilib,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

17-misol. Integralni hisoblang: 1) $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$ 2) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$

Yechish. 1) Bu integralda $\sqrt{x}=t$ almashtirishni bajaramiz. U holda $x=t^2,\ dx=2tdt.$ $x=1$ da $t=1$, $x=9$ da $t=3$. Demak,

$$\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \int_1^3 \frac{2tdt}{5+2t} = \int_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5}dt =$$

$$= \int_1^3 \left(1 - \frac{5}{2t+5}\right)dt = t\Big|_1^3 - 5\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+5|\Big|_1^3 =$$

$$= 3 - 1 - \frac{5}{2}(\ln 11 - \ln 7) = 2 - \frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}.$$

2) $\sin x = t$ deb almashtirish bajaramiz. U holda $\cos x dx = dt$, $x = \frac{\pi}{6}$ da, $t = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$ da $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} t^{-5}dt = -\frac{1}{4t^4}\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{4}\left(16 - \frac{16}{9}\right) = \frac{32}{9}.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni o'zgaruvchilarni almashtirish usulidan foydalanib hisoblang: 1) $\int_0^2 \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$; 2) $\int_0^{\ln 2} \frac{dz}{e^z+1}$.

Aniq integralda bo'laklab integrallash quyidagicha amalga oshiriladi: $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. U holda aniq integralda bo'laklab integrallash quyidagi formula

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \qquad (8.16)$$

bo'yicha amalga oshiriladi.

18-misol. Integralni toping: 1) $\int_1^3 x^2 \ln x dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$; 3) $\int_0^2 xe^x dx$.

Yechish. 1) $\int_1^3 x^2 \ln x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda bo'laklab integrallash qoidasidan foydalanamiz. Bunda $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^3}{3}$ ifodalar hosil bo'ladi. Endi esa (7.16) formulani qo'llaymiz:

$$\int_1^3 x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Bigg|_1^3 - \int_1^3 \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x\Bigg|_1^3 - \frac{x^3}{9}\Bigg|_1^3 = 9\ln 3 - \frac{26}{9}.$$

2) $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda ham bo'laklab integrallash qoidasidan foydalanamiz. Bunda $u = x$, $dv = \cos x dx$ belgilashlar

kiritamiz. U holda, $du = dx$, $v = \sin x$ ifodalar hosil bo'ladi. Endi esa (8.16) formulani qo'llaymiz:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

3) $\int_0^2 xe^x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda ham bo'laklab integrallash qoidasidan foydalanamiz. Bunda $u = x$, $dv = e^x dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du = dx$, $v = e^x$ ifodalar hosil bo'ladi. Endi esa (8.16) formulani qo'llaymiz:

$$\int_0^2 xe^x dx = xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = xe^x\Big|_0^2 - e^x\Big|_0^2 = e^2.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni bo'laklab integrallash qoidasidan foydalanib hisoblang: 1) $\int_1^3 x^2 \ln(x+3)dx$; 2) $\int_0^2 \cos x e^x dx$; 3) $\int_0^{\pi/2} x(\cos x + \sin x)dx$.

Integralni hisoblashni osonlashtiradigan ba'zi xossalarni keltirib o'tamiz:

1) $f(x)$ funksiya toq, ya'ni $f(-x) = -f(x)$ bo'lsa, u holda

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0;$$

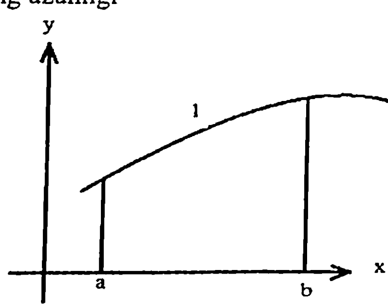
2) $f(x)$ funksiya juft, ya'ni $f(-x) = f(x)$ bo'lsa, u holda

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

8.4. Aniq integralning tatbiqlari

Aniq integralning ba'zi tatbiqlarini ko'rib chiqamiz.

Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash. $[a,b]$ kesmada aniqlangan $y = f(x)$ silliq chiziqni qaraymiz. Bu egri chiziqning $x = a$, $x = b$ to'g'ri chiziqlari bilan chegaralangan yoyining uzunligi



$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \qquad (8.17)$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

19-misol. $y=\ln\sin x$ egri chiziqning $x_1=\frac{\pi}{3}$ dan $x_2=\frac{2\pi}{3}$ gacha bo‘lgan yoyining uzunligini hisoblang.

Yechish. $y=\ln\sin x$, $y'=\frac{\cos x}{\sin x}$, $\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\frac{1}{\sin x}$, $x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{2}{3}\pi\right]$. AB yoyning l uzunligini hisoblaymiz:

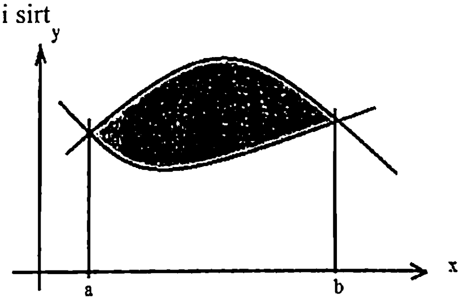
$$l=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=\ln\sqrt{3}-\ln\frac{1}{\sqrt{3}}=2\ln\sqrt{3}.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi yoylarning uzunliklarini hisoblang:
1) $y=\frac{x^2}{2}$, $x\in[1;3]$; 2) $y=\frac{(x+1)^2}{2}$, $x\in[0;3]$.

Yassi sirt yuzini hisoblash. Bizga $y=f(x)$ egri chiziq, $x=a, x=b$ to‘g‘ri chiziqlar va Ox o‘qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx$$

formula bo‘yicha hisoblanishi ma’lum. $y=f_2(x)$ va $y=f_1(x)$ egri chiziqlar bilan chegaralangan yassi sirt



yuzi quyidagi formula bilan topiladi:

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx \qquad (8.18)$$

Bu yerda a va b sonlar yuqoridagi egri chiziqlar kesishish nuqtalarining absissalari. Bu yerda $f_2(x)\geq f_1(x)$.

20-misol. $y=x^2-6$ va $y=-x^2+5x-6$ egri chiziqlar bilan chegaralangan yassi sirtning yuzini hisoblang.

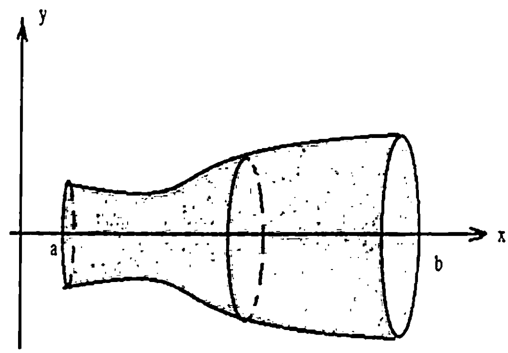
Yechish. Bu egri chiziqlarning tenglamalaridan foydalanib quyidagi tenglamalar sistemasini tuzib olamiz:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6, \\ y = -x^2 + 5x - 6. \end{cases}$$

Bu sistemadan $x_1 = 0$, $x_2 = 2{,}5$ ni topamiz. Izlanayotgan yuza:

$$S = \int_0^{2.5} \left(-x^2 + 5x - 6 - x^2 + 6\right)dx = \int_0^{2.5} \left(-2x^2 + 5x\right)dx = 5\frac{5}{24}.$$

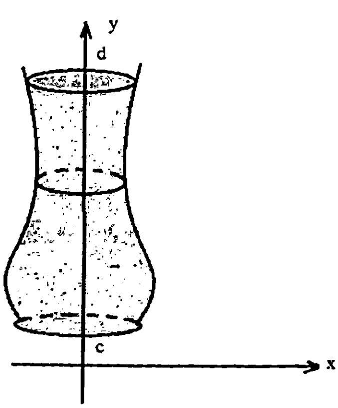
Aylanma jism hajmi va sirtini hisoblash. Uzluksiz $y = f(x)$ egri chiziq, absissalar o'qi hamda $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jism hajmini



$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx \qquad (8.19)$$

formula bilan hisoblaymiz.

Xuddi shunga o'xshash, uzluksiz $x = \varphi(y)$ egri chiziq, ordinatalar o'qi va $y = c, y = d$ $(c < d)$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning Oy o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini



$$V=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2\,dy \qquad (8.20)$$

formula bilan hisoblaymiz.

21-misol. Radiusi R ga teng bo'lgan, markazi Ox o'qida joylashgan yarim doirani Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

Yechish. Ma'lumki, radiusi R ga teng bo'lgan, markazi Ox o'qida joylashgan yarim doirani Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jism radiusi R ga teng bo'lgan shardir. Uning hajmini topish formulasini keltirib chiqaramiz. Yarim aylananing $y\ge 0$ tekislikdagi tenglamasi: $y=\sqrt{R^2-x^2}$. U holda (8.19) formulaga asosan

$$\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

Mashqni bajaring.

1) $y=2x-x^2$, $y=-x+2$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

2) $y=-x^2+4$, $y=x^2$, $x=0$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

Aylanish jismlari sirtining yuzi. $x=a, x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan $y=f(x)$ egri chiziqning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt yuzini S_x

$$S_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad (8.21)$$

formula bilan hisoblaymiz.

Xuddi shunga o'xshash, $y=c, y=d$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan uzluksiz $x=\varphi(y)$ egri chiziqning Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt yuzini

$$S_y=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}\,dy \qquad (8.22)$$

formula bilan hisoblaymiz.

22-misol. $y=\sin 2x$ sinusoidaning $x=0$ dan $x=\frac{\pi}{2}$ gacha bo'lgan yoyini Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan sirt yuzini toping.

Yechish. $y'=2\cos 2x$, u holda

$$S_x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}\,dx.$$

O‘zgaruvchini almashtiramiz: $2\cos 2x = t$, $-4\sin 2xdx = dt$, $\sin 2xdx = -\frac{1}{4}dt$. t bo‘yicha integrallash chegaralarini topamiz: agar $x = 0$ bo‘lsa, u holda $t = 2$; agar $x = \frac{\pi}{2}$ bo‘lsa, u holda $t = -2$.

Shunday qilib,

$$S = 2\pi\int_{2}^{-2}\sqrt{1+t^2}\left(-\frac{1}{4}\right)dt = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right).$$

Mashqni bajaring.

1) $y^2 = 2x$ parabolaning $x = 0$ dan $x = 2$gacha bo‘lgan yoyini Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘ladigan sirt yuzini toping.

2) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ sikloidaning bir arkasini Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘ladigan sirt yuzini toping.

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsni Oy o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘ladigan sirt yuzini toping.

Biror t vaqt davomida ishlab chiqarish jarayonining unumdorligi $y = u(t)$ funksiya bilan aniqlansin. U holda $[t_1;t_2]$ vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

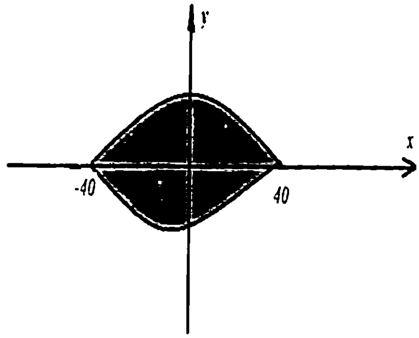
$$Q(t_1;t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)dt \qquad (8.23)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Moddiy xarajatlarni prognozlashtirish. Moddiy xarajatlarni prognozlashtirishda ko‘p hollarda turli murakkab figuralar, yuzalarni hisoblash zarurati kelib chiqadi. Aniq integral qo‘llaniladigan mos misollarni keltiramiz.

23-misol. Kema palubasi ikkita kesishuvchi parabolani eslatadi. Agar kema uzunligi 80 m, markazidagi eni 20 m va har bir kvadrat metrga 0,25 kg bo‘yoq kerak bo‘lsa, uni bo‘yash uchun qancha bo‘yoq zarur.

Yechish. Koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. Koordinatalar boshini kema markaziga, Ox o‘qini esa paluba bo‘ylab joylashtiramiz



Paluba yuzini topish uchun parabolalardan birining tenglamasini aniqlab olamiz. Parabolaning umumiy tenglamasi $y = ax^2 + bx + c$ ko'rinishiga ega. $(-40{,}0)$, $(40{,}0)$, $(0{,}10)$ nuqtalar parabolaga tegishli bo'lgani uchun ular parabola tenglamasini qanoatlantiradi: $a \cdot 40^2 - b \cdot 40 + c = 0$, $a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c = 0$, $c = 10$. Ushbu tenglamalar sistemasining yechimi quyidagi sonlar hisoblanadi. $a = -\frac{1}{160}$, $b = 0$, $c = 10$. Shunday qilib, izlanayotgan parabolaning tenglamasi $y = -\frac{x^2}{160} + 10$ ko'rinishga ega. Kema yarim palubasining yuzi

$$S = \int_{-40}^{40} \left(-\frac{x^2}{160} + 10 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{160 \cdot 3} + 10x \right) \Bigg|_{-40}^{40} =$$

$$= -1600 \cdot \frac{40}{160 \cdot 3} - 1600 \cdot \frac{40}{160 \cdot 3} + 400 + 400 = 400 \cdot \frac{4}{3}.$$

Palubaning yarmini bo'yash uchun $S \cdot 0{,}25 = \frac{400}{3}(kg)$ bo'yoq zarur. Butun palubani bo'yash uchun esa $2 \cdot S = 2 \cdot \frac{400}{3} \approx 266{,}7(kg)$ bo'yoq zarur bo'ladi.

Pul oqimini diskontlash ("diskont"-chegirma). Diskontlash masalasi $i\%$ foiz stavkasi bilan n yilga qo'yilgan S_0 miqdordagi pulning oshgan $S(n)$ qiymatini topish masalasiga teskari masala hisoblanadi. Bu holda S_0 – boshlang'ich pulni n vaqtdan keyin uning oshgan miqdori $S(n)$ bo'yicha $i\%$ foiz stavkasida aniqlash.

$S(n)$ – n yillardan olingan yakuniy pul bo'lsin va S_0 – boshlang'ich pul bo'lsin. Agar foizlar oddiy bo'lsa u holda har bir n yil yakunida $S(n)$ pul jamg'arma bankida o'tgan $n-1$ yilga nisbatan S_0 boshlang'ich pulning i foizga oshadi:

$$S(n) = S(n-1) + \frac{i}{100} S_0$$

Birinchi yil yakunida hosil bo'lgan pul

$$S(1)=S_0+\frac{i}{100}S_0=S_0\left(1+\frac{i}{100}\right)\text{ni}$$

Ikkinchi yil yakunida

$$S(2)=S_1+\frac{i}{100}S_0=S_0\left(1+\frac{i}{100}\right)+\frac{i}{100}S_0=S_0\left(1+2\frac{i}{100}\right)\text{ ni},$$

n yil yakunida:

$S(n)=S_0(1+\frac{i}{100}n)$ ni tashkil qiladi. Shuning uchun agar foizlar oddiy bo'lsa, u holda diskontlangan pul $S_0=\dfrac{S(n)}{1+\frac{i}{100}n}$ formula bo'yicha hisoblanadi.

Yuqorida ko'rsatilganidek, murakkab foizlar qo'shilganda, u holda yakuniy pul $S(n)=S_0(1+\frac{i}{100})^n$, $n\in N$ formula bo'yicha hisoblanadi. Foizlar uzluksiz qo'shilganda $S(n)=S_0e^{\frac{in}{100}}$, $n\in(0;+\infty)$ formula bo'yicha hisoblanadi. Bu yerdan diskontlangan pul (bu holda dastlabki mablag') n vaqt momentiga kelib murakkab foizlar holda $S_0=\dfrac{S(n)}{(1+\frac{i}{100})^n}$, foizlarning uzluksiz qo'shilishida esa $S_0=S(n)e^{-\frac{in}{100}}$ ga teng bo'ladi.

Endi faraz qilamizki, pullar bankka $n=0$ vaqtning boshlang'ich momentida birdan emas doimiy ravishda qo'yilsin va $S_0(n)$ uzluksiz funksiya bilan ifodalanadigan pul oqimini ifodalasin. U holda $[0;T]$vaqt bankka qo'yilgan U_d umumiy pul aniq integralni ifodalaydi:

$$U_d(T)=\int_0^T S_0(n)dn=\int_0^T S(n)e^{-\frac{in}{100}}dn.$$

Bu yerda $S(n)-$ har yili tushadigan daromad. $U_d(T)$kattalik $[0;T]$vaqtdagi diskont pul deyiladi.

24-misol. Yillik daromad 1000 pul birligini tashkil qilishi uchun, jamg'arma bankiga yillik 10% ga $[0;T]$ davrda qancha pul qo'yilishi kerak, faraz qilinadiki foizlar uzluksiz qo'shiladi.

Yechish. Masala shartiga ko'ra barcha $[0;T]$ da $S_0(n)=1$ (ming birlik), shuning uchun

$$U_d(T)=\int_0^T S_0(n)dn=\int_0^T 1\cdot e^{-\frac{10n}{100}}dn=-10e^{-0,1T}+10 \text{ (ming pul bir.)}.$$

Xususan, $T=3$ yilda

$$U_d(3)=-10e^{-0,1\cdot 3}+10\approx 2,59\text{(ming pul bir.)}.$$

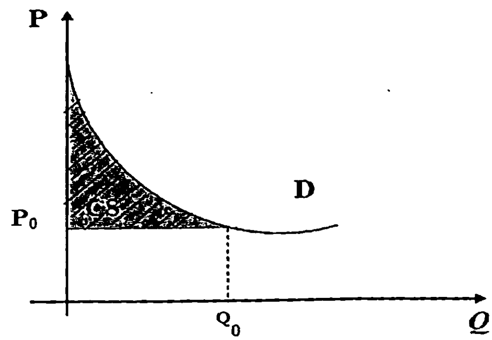
Shunday qilib uch yil davomida yillik daromad ming so'm pul birligini (uch yilda 3 ming pul birligini) tashkil qilishi uchun, jamg'arma bankiga 2,59 ming pul birligini qo'yish kerak. Uch yilda foyda 0,41 ming pul birligini tashkil qiladi. $T=10$ yilda

$$U_d(10)=-10e^{-0,1\cdot 10}+10\approx 6,32\,(\text{ming pul bir.})$$

O'n yilda foyda 3,68 ming pul birligiga yaqin bo'ladi.

Iste'molchilarning ortiqcha foydasi. Ishlab chiqaruvchi (ta'minotchilar)ning ortiqcha foydasi. Bozorda muvozanat narx o'rnatilgandan so'ng mahsulotni yuqoriroq narxda sotib olmoqchi bo'lgan iste'molchilar uni muvozanat narxida sotib olish oqibatida qandaydir yutuqqa ega bo'ladilar. Ana shunday iste'molchilar yutuqlarining yig'indisi iste'molchilarning ortiqcha foydasi deb ataladi.

Grafik ma'noda iste'molchilarning ortiqcha foydasi talab egri chizig'i, ordinatalar o'qi va absissalar o'qiga parallel va bozor muvozanati nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan chegaralangan figura yuzasiga teng deb tasavvur qilish mumkin.



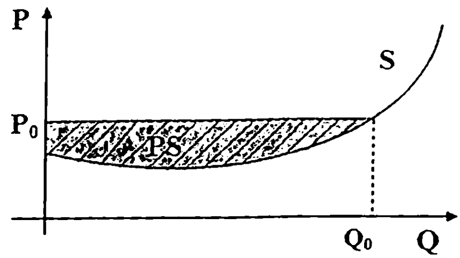
Iste'molchilarning ortiqcha foydasi CS bilan belgilanadi va quyida aniq integral yordamida topiladi.

$$CS=\int_0^{Q_0}P(Q)dQ-P_0Q_0$$

Ishlab chiqaruvchi (ta'minotchilar)ning ortiqcha foydasi ta'minotchilar o'z mahsulotini bozordagi muvozanat narxda sotganda hosil bo'ladigan umumiy foydalarini ifodalaydi va u quyidagi formula yordamida topiladi:

$$PS=P_0Q_0-\int_0^{Q_0}P(Q)\,dQ$$

Geometrik ma'noda ta'minotchilarning ortiqcha foydasini taklif egri chizig'i, ordinatalar o'qi va absissalar o'qiga parallel va bozor muvozanati nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan chegaralangan figura yuzasiga teng deb tasavvur qilish mumkin.



25-misol. Biror tovarga talab $P=70-4Q_d$ funksiya bilan berilgani ma'lum. Bu yerda $Q-$ mahsulot miqdori (dona), $P-$ bir birlik mahsulot narxi, taklif esa $P=5+Q_s$ funksiya bilan beriladi.

a) ushbu mahsulotni sotib olishdan iste'molchilar ortiqcha foydasi miqdorini;

b) ushbu mahsulotni sotishdan ishlab chiqaruvchining (ta'minotchining) ortiqcha foydasini hisoblang.

Yechish. a) Uning kattaligini o'lchash uchun $Q_d=Q_s$ tenglikdan narxning va berilgan mahsulot miqdorining muvozanat qiymatlarini aniqlash zarur. $70-4Q=P=5+Q$ $\quad 70-5=Q+4Q$ $\quad 5Q=65$ $\quad Q=13.$ $\quad Q=13$ da $P=18.$ Iste'molchilar ortiqcha foydasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$CS=\int_0^{13} PdQ-13\cdot18=\int_0^{13}(70-4Q)dQ-234=$$

$$=\left[70Q-2Q^2\right]\Big|_0^{13}-234=(910-338-0)-234=338.$$

b) Ta'minotchining ortiqcha foydasi kattaligi:

$$PS=13\cdot18-\int_0^{13} PdQ=234-\int_0^{13}(5+Q)dQ=$$

$$=234-\left[5Q+\frac{1}{2}Q^2\right]\Big|_0^{13}=234-(65+84{,}5-0)=84{,}5.$$

Kobb-Duglas funksiyasi asosida ishlab chiqarish hajmini aniqlash. Ishlab chiqarish unumdorligining o'zgarishi turli xil omillar ta'siri hisobiga funksiyani qo'llashga bog'liq, masalan, bunday funksiya Kobb-Duglas funksiyasi deb nomlanadi. Bunday holda $f(t)$ unumdorlik uchta ko'paytuvchilarning ko'paytmasi ko'rinishida tasvirlanadi.

$$f(t)=a_0A^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)K^{\gamma}(t)$$

bu yerda $A(t), L(t), K(t)$ funksiyalar tabiiy resurs, mehnat va kapital xarajatlarining miqdori $a_0,\alpha,\beta,\gamma-$biror sonlar.

26-misol. Agar Kobb-Duglas funksiyasida $A(t)=e^t$, $L(t)=(t+1)^2$, $K(t)=(100-3t)^2$, $a_0=1$, $\alpha=1$, $\beta=\gamma=0{,}5$ ($t-$vaqt yillarda) bo'lsa, besh yil uchun mahsulot chiqarish hajmini toping.

Yechish. (8.23) formuladagi $f(t)$ samaradorlik funksiyasiga qo'ysak, quyidagini olamiz:

$$Q(0;5)=\int_0^5 e^t(t+1)(100-3t)dt=\int_0^5 e^t\left(-3t^2+97t+100\right)dt.$$

Ikki marta ketma-ket bo'laklab integrallash formulasini qo'llab quyidagi natijani olamiz: $Q(0;5)=\left(-3t^2+97t+100\right)e^t\Big|_0^5-(97-6t)e^t\Big|_0^5-6e^t\Big|_0^5=64825.$

8.5. Xosmas integral

Bizga ma'lumki, $y=f(x)$ funksiya ixtiyoriy $[a;b]$ oraliqda aniqlangan va integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (8.24)$$

integral mavjud. Agar (8.24) integralning yuqori chegarasi uchun $b\to+\infty$, yoki quyi chegarasi uchun $a\to-\infty$, yoki ham yuqori ham quyi chegaralari uchun $b\to+\infty, a\to-\infty$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda (8.24) integral I tur xosmas integral deb ataladi. Shunday qilib I tur xosmas integral quyidagi ko'rinishlarda bo'lishi mumkin:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{b} f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \qquad (8.25)$$

(8.25) xosmas integrallardagi integral osti funksiyalarning aniqlanish sohasi mos ravishda quyidagi oraliqlardan iborat bo'ladi: $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$. (8.25) integrallarni hisoblash quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\begin{aligned}&\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,\\ &\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx+\lim_{c\to+\infty}\int_b^c f(x)dx,\ \forall c\in(-\infty,+\infty)\end{aligned} \qquad (8.26)$$

Agar (8.26) ifodanng o'ng tomonidagi limit osti integrallar mavjud va chekli bo'lsa, u holda ifodaning chap tomonidagi xosmas integrallar yaqinlashuvchi, aks holda esa ular uzoqlashuvchi deyiladi.

27-misol. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ xosmas integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\sqrt{x}\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{b}-1\right)=\infty.$$

Demak, bu xosmas integral uzoqlashuvchi.

28-misol. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ xosmas integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

$f(x)=\dfrac{dx}{1+x^2}$ integral osti funksiyasi butun son o'qida aniqlangan va uzluksiz. Funksiya juft funksiya. Shuning uchun

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)dx.$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

integral yaqinlashuvchi. Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi va π ga teng.

29-misol. $\int_{-\infty}^{-1}\dfrac{dx}{x^2}$ xosmas integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^{-1}=\lim_{a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)=1 .$$

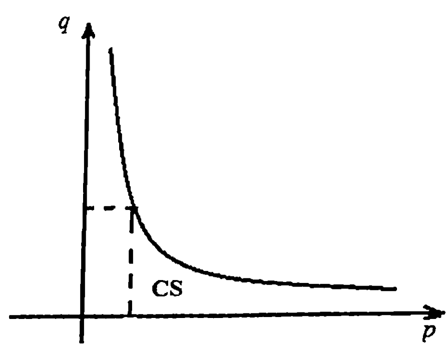
Demak, bu xosmas integral yaqinlashuvchi.

Mashqni bajaring. Quyidagi xosmas integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshiring: 1) $\int_{1}^{\infty}\dfrac{dx}{x+1}$; 2) $\int_{1}^{\infty}\dfrac{dx}{(ax+b)^{\frac{5}{4}}}$; 3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{a^2+x^2}$; 4) $\int_{-\infty}^{-1}\dfrac{dx}{x^{\frac{7}{3}}}$.

Xosmas integrallarning iqtisodiyotdagi tatbiqlari. Ko'pgina iqtisodiy masalalarning yechimlarini topish jarayonida xosmas integrallarni hisoblashga to'g'ri keladi. Masalan, talab elastikligi o'zgarmas bo'lgan holat uchun iste'molchining ortiqcha foydasini hisoblash masalasining talab egri chizig'ini quyidagicha yozish mumkin:

$$q=ap^{-\varepsilon},\ a>0,\ \varepsilon>0\Rightarrow p=\left(\frac{q}{a}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Bu yerda ε talab elastikligining bahosi. Talab egri chzig'i p, q koordinata o'qlarida quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:



U holda $p = p_0$ dan boshlab iste'molchining ortiqcha foydasi quyidagi I tur xosmas integral bilan hisoblanadi:

$$CS = \int_{p_0}^{\infty} ap^{-\varepsilon}dp.$$

U holda

$$CS = \int_{p_0}^{\infty} ap^{-\varepsilon}dp = \lim_{\tilde{p}\to\infty}\int_{p_0}^{\tilde{p}} ap^{-\varepsilon}dp = \lim_{p\to\infty}\frac{a}{1-\varepsilon}\tilde{p}^{1-\varepsilon}\Big|_{p_0}^{\tilde{p}} = \frac{a}{1-\varepsilon}\left[\lim_{\tilde{p}\to\infty}\tilde{p}^{1-\varepsilon} - p_0^{1-\varepsilon}\right].$$

Bu integral $\varepsilon > 1$ holatda yaqinlashadi.

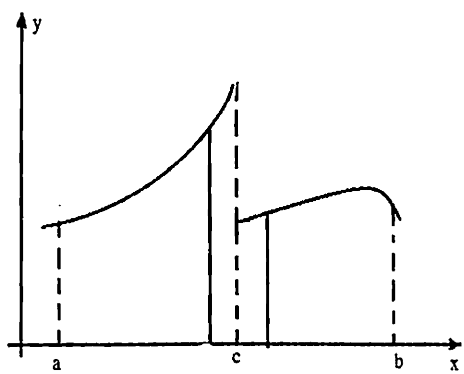
30-misol. Talab funksiyasi $q = 50p^{-2}$ bo'lsa, $p = 10$ da iste'molchining ortiqcha foydasi topilsin.

Yechim. $CS = \int_{10}^{\infty} 50p^{-2}dp = \lim_{\tilde{p}\to\infty}\int_{10}^{\tilde{p}} 50p^{-2}dp = \frac{50}{1-2}\left[\lim_{\tilde{p}\to\infty}\tilde{p}^{1-2} - 10^{1-2}\right] = 5.$

Agar integral chegaralari chekli a, b sonlardan iborat bo'lib, integral osti funksiyasi $[a,b]$ kesmaning chekli sondagi nuqtalarida aniqlanmagan bo'lsa, bunday integral II tur xosmas integral deb ataladi. Masalan, $y = f(x)$, $x \in [a,c) \cup (c,b]$ berilgan bo'lsin, u holda $\int_a^b f(x)dx$ integral II tur xosmas integral deb ataladi.

Xosmas integrallarni yaqinlashishga tekshirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \ \varepsilon > 0. \qquad (8.27)$$



Agar (8.27) formulada qatnashayotgan limitlar mavjud va chekli bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar (8.27) formulada qatnashayotgan limitlardan bittasi mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa, xosmas integral uzoqlashuvchi deb ataladi.

31-misol. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}}$ xosmas integralni hisoblaymiz. Integral ostidagi $y=\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$ funksiya $x=1$ nuqtada aniqlanmagan va nuqtadan chapda chegaralanmagan. Demak,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{(1-x)}\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=-2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{(1-1+\varepsilon)}-\sqrt{(1-0)}\right)=-2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{1}\right)=2.$$

Bu xosmas integral yaqinlashuvchi.

32-misol. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ xosmas integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)=\infty.$$

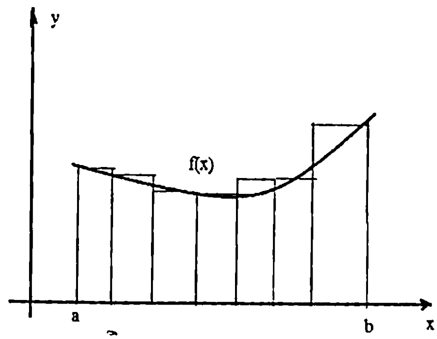
Demak, berilgan integral uzoqlashuvchi ekan.

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarni yaqinlashuvchilikka tekshiring: 1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x-1)^2}$; 2) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(3x-6)^{\frac{3}{4}}}$; 3) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$; 4) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^4}}$.

Xosmas integrallarni integrallash uchun o'zgaruvchini almashtirish va bo'laklab integrallash usullaridan foydalaniladi.

Ko'p hollarda berilgan integral osti funksiyaning boshlang'ich funksiyasini elementar funksiyalarda ifoda etish mumkin bo'lavermaydi. Bunday hollarda aniq integralni hisoblash uchun taqribiy formulalardan foydalaniladi. Bu formulalarning ba'zilari bilan tanishib chiqamiz.

Aniq integrallarni taqribiy hisoblash usullari. Aniq integrallarni taqribiy hisoblashning to'g'ri to'rtburchaklar usuli: $[a;b]$ kesmada uzluksiz $y=f(x)\geq 0$ funksiya berilgan bo'lsin. $[a;b]$ kesmani ixtiyoriy ravishda n ta teng $h=\frac{b-a}{n}$ bo'laklarga, ya'ni qismiy kesmalarga bo'lamiz: $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$. $[x_{i-1};x_i]$ oraliqqa mos $y=f(x)$ egri chiziqlarni Ox ga parallel to'g'ri chiziqlar bilan almashtiramiz.



U holda

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + ... + S_n.$$

Bu yerda $S_i = h \cdot y_{i-1}$.
Demak,

$$\int_a^b ydx \approx h(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \qquad (8.28)$$

33-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ integralning taqribiy qiymatini toping. Bu yerda $n = 5$.

(8.28) formuladan foydalanib taqribiy hisoblashni amalga oshiramiz. [0;1] kesmani quyidagicha 5 ta bo'lakka ajratamiz va y_{i-1} qiymatlarni $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ integral osti funksiya yordamida hisoblaymiz:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1; \; x_1 = 0{,}2, \quad y_1 = 0{,}992;$$
$$x_2 = 0{,}4, \quad y_2 = 0{,}94; \; x_3 = 0{,}6, \quad y_3 = 0{,}822;$$
$$x_4 = 0{,}8, \quad y_4 = 0{,}661; \; x_5 = 1; y_5 = 0{,}5.$$

So'ngra (8.28) formuladan foydalansak:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{5}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{5} \cdot 4{,}415 = 0{,}883.$$

Aniq integrallarni taqribiy hisoblashning trapetsiya usuli: $[a;b]$ kesmada uzluksiz $y = f(x) \geq 0$ funksiya berilgan bo'lsin. $[a;b]$ kesmani ixtiyoriy ravishda n ta teng $h = \frac{b-a}{n}$ bo'laklarga, ya'ni qismiy kesmalarga bo'lamiz: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. $[x_{i-1};x_i]$ oraliqqa mos $y = f(x)$ egri chiziqlarni yuqoridagi rasmdagi kabi to'g'ri chiziqlar bilan almashtirib trapetsiyalar hosil qilamiz. U holda

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + ... + S_n.$$

Bu yerda $S_i = h\cdot\frac{y_{i-1}+y_i}{2}$. Demak,

$$\int_a^b ydx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+....+y_{n-1}\right) \qquad (8.29)$$

34-misol. Yuqoridagi 33 - misolni (8.29) formuladan foydalanib taqribiy hisoblaymiz $(n=5)$:

$$x_0=0,\quad y_0=1;\ x_1=0,2,\quad y_1=0,992;$$
$$x_2=0,4,\quad y_2=0,94;\ x_3=0,6,\quad y_3=0,822;$$
$$x_4=0,8,\quad y_4=0,661;\ x_5=1,\quad y_5=0,5.$$

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{5}\left(\frac{y_0+y_5}{2}+y_1+y_2+y_3+y_4\right),\quad \int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{5}\cdot 4,165=0,833.$$

Aniq integrallarni taqribiy hisoblashning parabola usuli (Simpson formulasi). Bu holatda $n-$juft olinadi. Taqribiy hisoblanishi kerak bo'lgan integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int_a^b ydx \approx \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+...+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right) \qquad (8.30)$$

35-misol. Yuqoridagi 33-misolni Simpson formulasidan foydalanib yechamiz. Bizga ma'lumki, Simpson formulasida $n-$juft bo'lishi kerak. Shuning uchun $n=4$ deb olamiz.

$$x_0=0,\quad y_0=1;\quad x_1=0,25,\quad y_1=0,985;$$
$$x_2=0,5,\quad y_2=0,889;\ x_3=0,75,\quad y_3=0,703;$$
$$x_4=1,\quad y_4=0,5,$$

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\frac{0,25}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4\right),$$

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\frac{0,25}{3}\left(1+4\cdot 0,985+2\cdot 0,889+4\cdot 0,703+0,5\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 10,03\approx 0,836.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi integrallarning taqribiy qiymatini 3 ta usuldan foydalanib toping. Bu yerda: 1) $\int_0^2\frac{dx}{3+2x^3}$; 2) $\int_1^4\frac{dx}{\ln x}$; 3) $\int_2^4\frac{dx}{4+3x^5}$, $n=8$.

8-bobga doir savollar

1. Aniqmas integral nima (son, funksiya, funksiyalar to'plami)?
2. Asosiy integrallar jadvali integralning qaysi xossasiga asoslanib tuzilgan?
3. Aniqmas integralning xossalarini ayting.
4. Qanday integrallash qoidalarini bilasiz?

5. Qanday integrallash usullarini bilasiz?
6. Bevosita integrallash usuli nimalarga asoslangan?
7. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish usuli qanday bajariladi?
8. Aniqmas integralda bo'laklab integrallash qanday amalga oshiriladi?
9. Qanday trigonometrik funksiyalarni integrallashda $\cos x = t$ almashtirish maqsadga muvofiq bo'ladi?
10. Ratsional funksiyalarni integrallash algoritmini ayting.
11. Marjinal daromad funksiyasi ma'lum bo'lganda yalpi daromad funksiyasi qanday topiladi?
12. Marjinal xarajat funksiyasi ma'lum bo'lganda umumiy xarajat funksiyasi qanday topiladi?
13. Marjinal foyda funksiyasi ma'lum bo'lganda yalpi foyda funksiyasi qanday aniqlanadi?
14. Integral yig'indi nima, u qanday tuziladi?
15. Integral yig'indining geometrik ma'nosi nimadan iborat?
16. Aniq integralga qanday ta'rif beriladi?
17. Aniq integralning mavjud bo'lishining zaruriy sharti nimadan iborat?
18. Qanday funksiya integrallanuvchi, deyiladi?
19. Darbu yig'indilari integral yig'indi bo'la oladimi?
20. Nyuton-Leybnits formulasi qanday keltirib chiqariladi?
21. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish qanday bajariladi? U aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirishdan nimasi bilan farq qiladi?
22. Iste'molchining ortiqcha foydasini ta'riflang.
23. Iste'molchining ortiqcha foydasini geometirik shakl yordamida tasvirlang.
24. Ta'minotchining ortiqcha foydasi nima?
25. Ta'minotchining ortiqcha foydasining geometrik tasvirini ko'rsating.
26. Qanday jismga aylanma jism, deyiladi?
27. Aylanma jism hajmini hisoblash formulasini yozing.
28. Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash formulasini yozing.
29. Yassi sirt yuzini hisoblash formulasini yozing.
30. Vaqtning ma'lum oralig'ida jamg'arma bankiga tushgan pul miqdori qanday aniqlanadi?
31. Vaqtning ma'lum oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi qanday aniqlanadi?
32. Xosmas integrallarning qanday turlari mavjud? Ular qanday qilib aniq integralning umumlashmasi bo'lib hisoblanadi?
33. Integrallash sohasi chegaralanmagan xosmas integral qanday ta'riflanadi?
34. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali qanday ta'riflanadi?
35. Xosmas integrallar qanday hisoblanadi?
36. Xosmas integrallarni yaqinlashishga qanday tekshirish mumkin?
37. Xosmas integrallarning xossalarini ayting. Bu xossalar ichidan aniq integral xossalariga o'xshashlarini alohida sanab chiqing.

8-bobga doir misol va masalalar

1. Aniqmas integralni toping.

a) $\int \frac{dx}{x^3}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$; c) $\int (7x-1)^{23}dx$; d) $\int x^2 \cdot \sin(x^3+1)dx$;

e) $\int x\ln x dx$; f) $\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13}$.

2. Aniq integralni o‘zgaruvchini almashtirish usulida hisoblang.

a) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$. b) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$. c) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$. d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$. e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^4 x dx$.

3. Aniq integralni bo‘laklab integrallash usulida hisoblang.

a) $\int\limits_1^e \ln^2 x dx$; b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$; c) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$; d) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$; e) $\int\limits_0^1 xe^x dx$;

f) $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin x dx$.

4. Xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; b) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; c) $\int\limits_0^{\infty} e^{-2x}dx$; d) $\int\limits_0^{\infty} x\sin x dx$; e) $\int\limits_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$;

f) $\int\limits_1^{\infty} \frac{arctgxdx}{1+x^2}$; h) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$; i) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2}$; j) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

5. Berilgan chiziqlar bilan chegaralangan figuralar yuzalarini hisoblang.

a) $y=-x^3,\ y=-9x$.

b) $y=\arccos x,\ x=-1, x=0, y=0$.

c) $y=tg^2 x,\ x=\frac{\pi}{4},\ y=0$.

d) $y=x^2,\ y=\frac{1}{x^2}, y=0, x=0, x=3$.

6. Egri chiziqlar yoylari uzunliklarini hisoblang.

a) $y=2\sqrt{x},\ x=0$ dan $x=1$ gacha.

b) $y=\ln x,\ x=\sqrt{3}$ dan $x=\sqrt{8}$ gacha.

c) $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t, t=0$ dan $t=2\pi$ gacha.

d) $y=\ln\sin x,\ x=\frac{\pi}{3}$ dan $x=\frac{\pi}{2}$ gacha.

e) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ $t = 0$ dan $t = \dfrac{\pi}{4}$ gacha.

f) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{2\pi}{3}$.

7. $y = 1 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figurani Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

8. $y = x^3$, $y = 4x$ chiziqlar bilan chegaralangan figurani Oy o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

9. Agar kun davomida mehnat unumdorligi $f(t) = -0{,}1t^2 + 0{,}8t + 10$ empirik formula bo'yicha o'zgarsa, kunlik ish vaqti 8 soat bo'lganda, bir kunlik ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi Q ni toping.

10. Marjinal daromad funksiyasi $MR(q) = \dfrac{10}{(1+q)^2}$. Agar $R(0) = 0$ ma'lum bo'lsa, $R(q)$ daromad funksiyasini toping va uning $q = 9$ dagi qiymatini hisoblang.

11. Marjinal xarajat funksiyasi $MC(q) = \dfrac{100}{\pi} arctgq$ berilgan. Agar $C(0) = 1000$ ma'lum bo'lsa, $C(q)$xarajat funksiyasi uchun ifodani va uning $q = 100$ dagi qiymatini toping.

12. Mahsulotga bo'lgan taklab va taklif funksiyalari $p = 240 - x^2$ va $p = x^2 + 2x + 20$. ko'rinishda bo'lsa, iste'molchi hamda ta'minotchining ortiqcha foydasini aniqlang.

Tayanch so'z va iboralar: boshlang'ich funksiya, aniqmas integral, integral osti funksiyasi, integrallash o'zgaruvchisi, aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish, bo'laklab integrallash, ratsional funksiyalarni integrallash, trigonometrik almashtirishlar, irratsional funksiyalarni integrallash, integral yig'indi, aniq integral, integral chegaralari, egri chiziqli trapetsiya, Riman yig'indasi, o'rta qiymat, Nyuton – Leybnits formulasi, yassi sirt, jism hajmi, yoy uzunligi, yuza, jism hajmi, aylanma jism sirti, yalpi daromad, umumiy xarajat va yalpi foyda funksiyalari, mahsulot hajmi, vaqtning ma'lum oralig'ida jamg'arma bankiga tushgan pul miqdori, moddiy xarajatlarni prognozlashtirish, pul oqimini diskontlash masalasi, ta'minotchi va iste'molchining ortiqcha foydasi, xosmas integral.

III QISM. DINAMIK MODELLAR VA EHTIMOLLAR NAZARIYASI ASOSLARI

9 BOB. DIFFERENSIAL VA CHEKLI AYIRMALI TENGLAMALAR

9.1. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Iqtisodda dinamik jarayonlarni tatqiq qilish muhim masalalardan hisoblanadi. Bunda miqdorning vaqtga bog'liq o'zgarishi tahlil qilinadi. Ma'lumki, biror miqdorning o'sish yoki kamayish tezligi (o'zgarish tezligi) shu miqdorni ifodalovchi vaqtga bog'liq funksiyaning hosilasiga teng. Shu sabab iqtisodiy dinamik jarayonlarning modellarida noma'lum miqdorni ifodalovchi noma'lum funksiya bilan bir qatorda uning hosilalari ham ishtirok qiladi.

Masalan, ota o'zining 7 yoshdagi o'g'lining 12 yildan keyingi universitetda o'qishi bilan bog'liq 35 000 shartli pul birligini qoplash uchun 10% foiz stavkasi bilan bankka pul qo'ymoqchi. Bank foizi stavkasining ulushini uzluksiz ravishda hisoblansin. Bu masalada bizdan otaning hozirda bankka qancha miqdorda pul qo'yishi kerakligini topish talab qilinadi.

Deylik x vaqtdan keyin bank depozitidagi pul miqdori $y(x)$ ga teng bo'lsin. Masala shartiga ko'ra bu pul miqdorining o'zgarish tezligi $y'(x)$ shu vaqtdagi pul miqdori $y(x)$ ning 10% ga teng, ya'ni

$$y'(x) = 0{,}1y. \tag{9.1}$$

Masala shartiga ko'ra

$$y(12) = 35000 \tag{9.2}$$

bo'lib, $y(0)$ ni topish talab qilinadi.

Izoh. Dinamik masalalarda odatda vaqtni ifodalovchi o'zgaruvchi x emas, balki t bilan belgilanadi. Bu holatda vaqt bo'yicha hosila $\dot{y}$ kabi belgilanadi. Masalan, (9.1) tenglama bu belgilashlarda $\dot{y} = 0{,}1y$ kabi yoziladi.

Biz sodda misolda dinamik model tuzdik. Xuddi shuningdek, yetarlicha ma'lumot mavjud bo'lganda, boshqa murakkab iqtisodiy jarayonlar uchun ham matematik modellar tuzish mumkin. Bu modellar odatda "differensial tenglamalar" bilan ifodalanadi.

1-ta'rif. Erkli o'zgaruvchi x ni, noma'lum $y(x)$ funksiyani va uning hosilalarini bog'lovchi tenglamaga differensial tenglama deyiladi. Bu tenglamada ishtirok etgan hosilaning eng katta tartibi differensial tenglamaning tartibi deyiladi.

n – tartibli differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi:

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{n}) = 0\,. \tag{9.3}$$

Yuqoridagi misoldagi (9.1) differensial tenglama 1- tartibli tenglamadir.

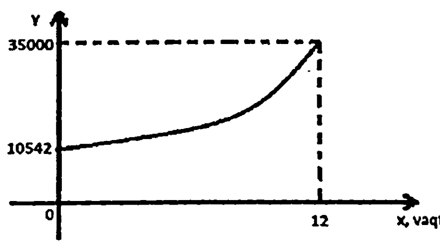
2-ta'rif. (9.3) tenglamani ayniyatga aylantiruvchi va kamida n marta differensiallanuvchi har qanday $y=f(x)$ funksiyaga (9.3) differensial tenglama yechimi deyiladi.

Masalan, $y=e^{0,1x}$ funksiya $y'=0,1y$ differensial tenglamaning yechimi bo'lib, u tenglamaning cheksiz ko'p yechimlaridan biridir. Har qanday $y=c\cdot e^{0,1x}$ funksiya ham, bu yerda, $c-$ ixtiyoriy o'zgarmas son, tenglamani qanoatlantiradi. Bu funksiya tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi. Umumiy yechimda ixtiyoriy o'zgarmas c qatnashgani uchun, tenglama yechimlari to'plami yagona ixtiyoriy c o'zgarmasga bog'liq deyiladi.

O'zgarmas c ga turli son qiymatlar berilganda, uning konkret yoki xususiy yechimlari kelib chiqadi. Misol uchun (9.1) tenglamaning (9.2) shartni qanoatlantiruvchi yechimini topaylik. (9.2) shartdan

$$c\cdot e^{0,1\cdot 12}=35000 \text{ yoki } c=35000\cdot e^{-1,2}\approx 10542.$$

Demak, ota bankka 10542 shartli p.b. miqdorida pul qo'yishi kerak ekan.



Boshqa misolni ko'raylik.

1-misol. $y'''=0$ differensial tenglama yechimlarini bevosita qurish mumkin:

$$y''=c_1,\quad y'=c_1x+c_2,\quad y=c_1x^2/2+c_2x+c_3.$$

Bu yerda, c_1, c_2 va c_3 ixtiyoriy o'zgarmaslar bo'lib, ularning har qanday qiymatlarida $y=c_1x^2/2+c_2x+c_3$ funksiya differensial tenglamani qanoatlantiradi va shu sababli $y=c_1x^2/2+c_2x+c_3$ umumiy yechim bo'lib hisoblanadi. $y'''=0$ differensial tenglama umumiy yechimi uch ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq va har birining konkret qiymatlarida xususiy yechim hosil bo'ladi.

Yuqoridagi misollardan differensial tenglama umumiy yechimida o'zgarmaslar soni tenglamaning tartibiga teng ekanligini va uning xususiy yechimlari umumiy yechim o'zgarmaslarining konkret qiymatlarida kelib chiqishini xulosa qilish mumkin.

Differensial tenglama yechimlarini qurish jarayoniga differensial tenglamani integrallash deb yuritiladi. Differensial tenglamani integrallab, masalaning qo'yilishiga qarab, uning yoki umumiy yechimi yoki xususiy yechimi topiladi.

Birinchi tartibli differensial tenglama umumiy

$$F(x;y;y')=0$$

yoki y' hosilaga nisbatan yechilgan

$$y'=f(x;y)$$

ko'rinishda yozilishi mumkin. Ushbu tenglama ham, odatda, cheksiz ko'p yechimga ega bo'lib, ulardan biror-bir xususiy yechimni ajratib olish uchun qo'shimcha shartni talab etadi. Ko'p hollarda ushbu shart Koshi masalasi shaklida qo'yiladi.

Koshi masalasi:

$$y' = f(x;y) \qquad (9.4)$$

differensial tenglamaning

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \qquad (9.5)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iborat.

(9.4), (9,5) masala yechimining mavjudlik va yagonalik sharti quyidagi teoremadan aniqlanadi.

Teorema. Agar $f(x;y)$ funksiya $(x_0;y_0)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan, uzluksiz va $\partial f/\partial y$ – uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lsa, u holda $(x_0;y_0)$ nuqtaning shunday atrofi mavjudki, bu atrofda $y' = f(x;y)$ differensial tenglama uchun $y\big|_{x=x_0} = y_0$ boshlang'ich shartli Koshi masalasi yechimi mavjud va yagonadir.

Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari tushunchalariga aniqlik kiritamiz.

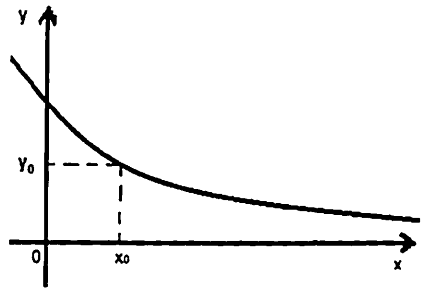
Agar boshlang'ich $(x_0;y_0)$ nuqtaning berilishi (9.4) tenglama yechimining yagonaligini aniqlasa, u holda ushbu yagona yechim xususiy yechim deyiladi.

Differensial tenglamaning barcha xususiy yechimlari to'plamiga uning umumiy yechimi deyiladi.

Odatda, umumiy yechim oshkor $y = \varphi(x,c)$ yoki oshkormas $\varphi(x,y,c) = 0$ ko'rinishda yoziladi. c o'zgarmas $(x_0;y_0)$ boshlang'ich shart asosida $y_0 = \varphi(x_0;c)$ tenglamadan topiladi.

3-ta'rif. Tenglamaning umumiy integrali (yoki yechimi), deb c o'zgarmasning turli qiymatlarida barcha xususiy yechimlari aniqlanadigan $\varphi(x,y,c) = 0$ munosabatga aytiladi.

Masalan, yechimning mavjudlik va yagonalik shartlari (teoremadagi) yuqorida ko'rilgan $y' = -y$ tenglama uchun xOy tekislikning har bir nuqtasida bajariladi. Tenglama umumiy yechimi $y = c \cdot e^{-x}$ formuladan iborat bo'lib, har qanday boshlang'ich $y\big|_{x=x_0} = y_0$ shart mos c o'zgarmas tanlanganda qanoatlantiriladi. c o'zgarmas $y_0 = c \cdot e^{-x_0}$ tenglamadan topiladi: $c = y_0 \cdot e^{x_0}$.



Differensial tenglamani shartlarsiz yechish uning umumiy yechimini (yoki umumiy integralini) topishni anglatadi.

Differensial tenglama yechimi mavjudligi va yagonaligini ta'minlaydigan muhim shartlardan biri $\partial f/\partial y$ xususiy hosilaning uzluksizligidir. Ba'zi bir nuqtalarda ushbu shart bajarilmasligi va ular orqali birorta ham integral chiziq o'tmasligi yoki, aksincha, bir nechta integral chiziqlar o'tishini bildiradi. Bunday nuqtalar differensial tenglamaning maxsus nuqtalari deyiladi.

Differensial tenglamaning integral chizig'i faqat uning maxsus nuqtalaridan iborat bo'lishi mumkin. Ushbu egri chiziqlar tenglamaning maxsus yechimlari, deb yuritiladi.

$$y' = p(x)q(y) \qquad (9.6)$$

ko'rinishdagi tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deb ataladi.

(9.6) tenglamani yechish uchun noma'lum y funksiyaning qaralayotgan o'zgarish sohasida $q(y) \neq 0$ shart bajariladi deb (9.6) tenglamani

$$dy/q(y) = p(x)dx$$

shaklda yozamiz va ikkala qismini integrallab,

$$\int dy/q(y) = \int p(x)dx$$

tenglikni olamiz. Agar $Q(y)$ funksiya $1/q(y)$ funksiyaning, $P(x)$ esa $p(x)$ ning boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsa, (9.6) tenglamaning umumiy integrali:

$$Q(y) = P(x) + C$$

ko'rinishdan iborat bo'ladi.

2-misol. $y' = xy^2$ tenglamaning barcha yechimlarini topish talab qilingan bo'lsin. $y \neq 0$ shart o'rinli, deb tenglama o'zgaruvchilarini ajratamiz:

$$dy/dx = xy^2 \Rightarrow dy/y^2 = xdx.$$

Buni integrallab, $y = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C}$ ko'rinishdagi umumiy yechimni olamiz. Ushbu yechimga tenglamani yechish jarayonida yo'qotilgan $y = 0$ yechimni ham qo'shish lozim.

3-misol. Ma'lum bir davlatda aholining o'sishi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\dot{N}(t) = 0{,}1N(t)\left(40 - N(t)\right).$$

Bu yerda $N(t)$ million miqdor (noma'lum funksiya) t vaqt momentidagi aholi sonini ifodalaydi. Agar $N(0) = 30$ bo'lsa, $N(20)$, ya'ni 20 yildan keyingi aholi sonini toping.

Tenglamada o'zgaruvchilarni ajratamiz

$$\frac{dN}{N(40 - N)} = 0{,}1dt.$$

$\dfrac{1}{N(40-N)} = \dfrac{1}{40}\left(\dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{40-N}\right)$ ayniyatni hisobga olgan holda bu tenglamani integrallasak

$$\ln\frac{N}{40 - N} = 4t + C$$

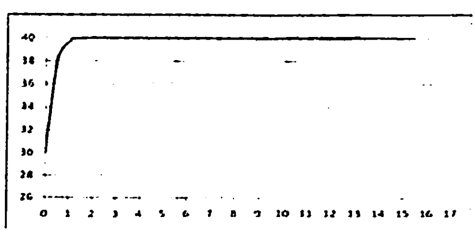
yoki

$$N(t) = \frac{40C_1e^{4t}}{1 + C_1e^{4t}} \qquad (C_1 = e^C)$$

yechimni hosil qilamiz. Masala shartiga ko'ra $t = 0$ boshlang'ich holatda

$$\frac{40C}{1+C} = 30 \quad \Leftrightarrow \quad C = 3.$$

Demak, aholi soni $N(t) = \dfrac{120e^{4t}}{1 + 3e^{4t}}$ qonuniyat bilan o'zgaradi. $N(t)$ funksiyaning Excel dasturida chizilgan grafigi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



Funksiya grafigidan ko'rinib turibdiki, mazkur model bilan ifodalangan aholi soni dastlabki 1,5 yil davomida tez o'sadi va deyarli 40 mln ga yaqinlashadi. Keyingi davrlarda o'sish tezligi juda kichik bo'lib, deyarli o'zgarmaydi. Xususan, $N(20) \approx 40$.

$$dy/dx = f\left(y/x\right) \qquad (9.7)$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama, deb ataladi.

(9.7) tenglamani yechish uchun noma'lum $y(x)$ funksiyadan $u(x) = y(x)/x$ funksiyaga o'tamiz. U holda

$$y = xu, \qquad dy/dx = u + x\,du/dx$$

tengliklar o'rinli bo'lib, (9.7) tenglama:

$$u + x\,du/dx = f(u) \Rightarrow du/(f(u) - u) = dx/x$$

ko'rinishga keltiriladi. Oxirgi tenglama o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama bo'lib, yuqorida ko'rsatilgan usulda yechiladi. Natijada

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + c.$$

$u(x)$ funksiya topilgandan so'ng, $y(x) = x \cdot u(x)$ funksiyaga qaytiladi.

4-misol. $y' + \dfrac{x+y}{x-y} = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Ushbu tenglama bir jinsli tenglama, chunki

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y+x}{y-x} = \frac{y/x+1}{y/x-1} = \frac{u+1}{u-1}.$$

Bu yerda $u = y/x$. Noma'lum u funksiyaga nisbatan o'zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{du}{\dfrac{u+1}{u-1} - u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{(u-1)du}{-u^2 + 2u + 1} = \frac{dx}{x}$$

tenglama hosil bo'ladi. Oxirgi tenglikni integrallaymiz

$$-\frac{1}{2}\ln\left|-u^2 + 2u + 1\right| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|C|.$$

So'ngra

$$x^2\left|-u^2 + 2u + 1\right| = |C|$$

yechimlarni va $y = xu$ funksiyaga qaytib, oshkormas shaklda

$$x^2 + 2xy - y^2 = C$$

umumiy integralni quramiz.

$$y' + p(x)y = f(x) \qquad (9.8)$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb ataladi.

Bu tenglamani integrallash jarayoni odatda, ikki bosqichdan iborat: dastlab, tenglama o'ng tomonidagi $f(x)$ funksiya nol bilan almashtirilib

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$

bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi topiladi. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi qurilgandan so'ng, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning biror – bir $y(x)$ xususiy yechimi topiladi.

Bir jinsli bo'lmagan tenglama umumiy yechimi, bu tenglamaning biror – bir $y_{xus}(x)$ xususiy yechimi bilan bir jinsli tenglamaning $y_{b.j.}$ yechimlari yig'indisiga teng

$$y(x) = y_{b.j.}(x) + y_{xus}(x).$$

Birinchi bosqichda bir jinsli tenglamani yechamiz. Tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bo'lgani uchun

$$dy/y = -p(x)dx.$$

Oxirgi tenglamani integrallab, $y = Ce^{-P(x)}$ umumiy yechimni quramiz, bu yerda,

$P(x)$ funksiya $p(x)$ ning boshlang'ich funksiyalaridan biri.

Ikkinchi bosqichda tenglamaning xususiy yechimlaridan birini ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usulida, ya'ni $y(x)$ xususiy yechimni

$$y(x)=u(x)e^{-P(x)}$$

shaklda qidiramiz. Ushbu ifodani (9.8) tenglamaga qo'yamiz va $u(x)$ noma'lum funksiyaga nisbatan

$$u'\cdot e^{-P(x)}-uP'(x)e^{-P(x)}+p(x)ue^{-P(x)}=f(x)$$

tenglamani olamiz. $P'(x)=p(x)$ munosabat o'rinli bo'lgani uchun, tenglamaning chap tomondagi ikkinchi va uchinchi hadlar o'zaro yeyishadi. Natijada

$$du/dx=f(x)e^{P(x)}$$

tenglama kelib chiqadi. Uni integrallab, cheksiz ko'p

$$u(x)=\int f(x)e^{P(x)}dx$$

boshlang'ich funksiyalardan birini tanlaymiz.

5-misol. $y'-2x(y+1)=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama $y'-2xy=2x$ shaklda yozilishi mumkin va u chiziqli tenglamadir. Tenglamaning mos bir jinsli tenglamasi $y'-2xy=0$ ko'rinishga ega. O'zgaruvchilarni ajratib, so'ngra integrallaymiz:

$$dy/y=2x\cdot dx \quad \Leftrightarrow \ln|y|=x^2+\ln|c| \quad \Leftrightarrow y=\pm ce^{x^2}$$

Dastlabki bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimini $y_0(x)=u(x)e^{x^2}$ ko'paytma ko'rinishida topamiz:

$$u'e^{x^2}+2xue^{x^2}-2xue^{x^2}=2x \quad \Leftrightarrow \quad u'=2xe^{-x^2}$$

va $u(x)=-e^{-x^2}+c$, umumiy yechimdan $u(x)=-e^{-x^2}$ xususiy yechimni tanlaymiz. Natijada, $y_0(x)=-e^{-x^2}\cdot e^{x^2}=-1$, shunday qilib, berilgan tenglamaning umumiy yechimini xususiy $y=-1$ va mos bir jinsli tenglama umumiy yechimi $y=c\cdot e^{x^2}$ larning yig'indisidan iborat:

$$y(x)=c\cdot e^{x^2}-1.$$

6-misol. Raqobat sharoitida biror-bir tovarga bo'lgan talab va taklif funksiyalari quyidagicha bo'lsin

$$Q_{talab}=170-8p,\ Q_{taklif}=-10+4p.$$

Agar narx talab va taklif orasidagi muvozanat shartini qanoatlantirmasa, u holda bozordagi raqobat ta'sirida u quyidagicha o'zgaradi:

$$\frac{dp}{dt}=0,5(Q_{talab}-Q_{taklif}).$$

Bu tenglamadan ko'rinib turibdiki, agar talab taklifdan katta bo'lsa, $\dot{p}>0$ bo'lib narx oshadi, aks holda, ya'ni taklif talabdan katta bo'lsa $\dot{p}<0$ bo'lib, narx kamayadi. Har ikkala holatda ham narx $Q_{talab}=Q_{taklif}$ shartni qanoatlantiruvchi muvozanat narxga yaqinlashadi. $p(0)=10$ bo'lsin. Narx dinamikasini aniqlaymiz va bozorning stabilligini tahlil qilamiz.

Tenglamada talab va taklif funksiyalarini o'rniga qo'yib, soddalashtirsak

$$\frac{dp}{dt}=-6p+90.$$

Bu tenglamaning bir jinsli qismini yechamiz.

$$\frac{dp}{dt}=-6p \Leftrightarrow \frac{dp}{p}=-6dt \Leftrightarrow p_{b.j.}(t)=C\cdot e^{-6t}.$$

Endi xususiy yechimni topamiz. $p_{xus}(t)=u(t)e^{-6t}$, $\dot{p}_{xus}=-6u(t)e^{-6t}+\dot{u}(t)e^{-6t}$ ifodalarni tenglamaga qo'ysak,

$$\dot{u}(t)=90e^{6t} \Rightarrow u(t)=15e^{6t}$$

ni hosil qilamiz. U holda $p_{xus}=15$ ni hosil qilamiz. Tekshirib ko'rib, bu xususiy yechim muvozanat narxni ifodalashiga amin bo'lamiz.

Demak, umumiy yechim quyidagicha bo'ladi

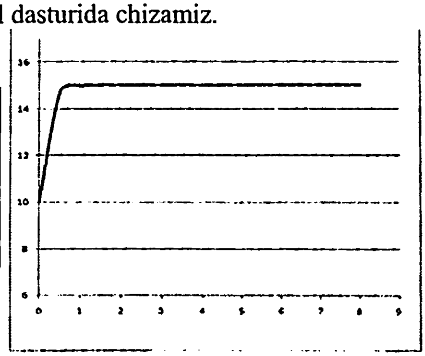
$$p(t)=p_{b.j.}(t)+p_{xus}=Ce^{-6t}+15.$$

Boshlang'ich narx $p(0)=10$ dan foydalansak, $C+15=10$ yoki $C=-5$ ni hosil qilamiz. U holda narx dinamikasi

$$p(t)=15-5e^{-6t}.$$

Bu yechimning grafigini Excel dasturida chizamiz.

T	N
0	10
0,5	14,75106466
1	14,98760624
1,5	14,99938295
2	14,99996928
2,5	14,99999847
3	14,99999992



Bundan ko'rish mumkinki, bozordagi boshlang'ich narx $p(0)=10$ juda tez suratda muvozanat narxi $p=15$ ga yaqinlashadi. Ya'ni, bozor stabillik shartini qanoatlantiradi.

Chiziqli differensial tenglamani yechishda qo'llanilgan usul ba'zi chiziqsiz tenglamalarni ham yechish imkonini beradi.

Bernulli tenglamasi. $y'+P(x)y=q(x)y^n$ tenglama Bernulli tenglamasi deb ataladi.

Bernulli tenglamasini yuqoridagi usulni qo'llab, yechish mumkin. Dastlab, $y'+P(x)y=0$ bir jinsli tenglamaning yechimlaridan biri $y_0(x)$ ni topamiz.

Tenglama umumiy yechimini $y(x)=u(x)y_0(x)$ ko'rinishda qidiramiz. Natijada, noma'lum $u(x)$ ga nisbatan,

$$u'(x)y_0(x)=q(x)u^n(x)y_0^n(x)$$
o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama kelib chiqadi va integrallanadi.

7-misol. $y'+2y-e^{2x}y^2=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Dastlab, bir jinsli $y'+2y=0$ tenglamani integrallaymiz va uning $y=ce^{-2x}$ umumiy yechimini olamiz. Yechimlaridan biri sifatida $y_0(x)=e^{-2x}$ funksiyani qarash mumkin. So'ngra, berilgan tenglamada $y(x)=u(x)e^{-2x}$ almashtirish bajaramiz:
$$e^{-2x}u'=e^{-4x}e^{2x}u^2 \Rightarrow du/u^2=dx.$$
Oxirgi tenglamani integrallab, $u(x)=1/(c-x)$ tenglikni olamiz. Natijada, tenglama umumiy yechimi:
$$y(x)=u(x)y_0(x)=e^{-2x}/(c-x).$$
Rikkati tenglamasi. $y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$ tenglama Rikkati tenglamasi deyiladi. Bunda $P(x)$, $Q(x)$ va $R(x)$ funksiyalar $(a;b)$ intervalda aniqlangan uzluksiz funksiyalardir.

Rikkati tenglamasining y_1 xususiy yechimi ma'lum bo'lsa
$$y=y_1+\frac{1}{z} \tag{9.9}$$
(z –yangi noma'lum funksiya) almashtirish yordamida chiziqli tenglamaga keltiriladi
$$y'=Ay^2+\frac{B}{x}y+\frac{C}{x^2} \tag{9.10}$$
bunda, A, B, C o'zgarmas sonlar bo'lib $(B+1^2)\geq 4AC$. Rikkati tenglamasi $y_1=\frac{a}{x}$ xususiy yechimga ega. Bu yerda $a-$ o'zgarmas son bo'lib uni aniqlash uchun bu xususiy yechim (9.10) tenglamaga qo'yiladi.

(9.10) tenglama $y=\frac{z}{x}$ almashtirish yordamida ham o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltirilishi mumkin.

8-misol. $y'=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2x^2}$ tenglamani yeching.

Yechish. $y=\frac{z}{x}$ almashtirishdan foydalansak,
$$\frac{z'x-z}{x^2}=\frac{z^2}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}, \qquad 2z'x=(z+1)^2, \qquad \frac{2dz}{(z+1)^2}=\frac{dx}{x},$$
$$-\frac{2}{z+1}=\ln|x|+C, \qquad z+1=\frac{2}{C-\ln|x|}, \quad y=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x(C-\ln|x|)}.$$

9.2. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Fan va texnikaning, xususan, iqtisodiyot muammolarini tahlil qilishda miqdorning dinamikasini o'rganish muhim masalalardan biri hisoblanadi. Bu masalalarning modellarida odatda miqdorning o'zgarish tezligini ifodalovchi birinchi tartibli hosila bilan bir qatorda tezlanish, ya'ni tezlikning o'zgarishini ifodalovchi ikkinchi tartibli hosila ham ishtirok etadi. Bunday modellarga misollar keltirishdan oldin ikkinchi tartibli tenglamalar haqida umumiy tushunchalarni keltirib o'tamiz.

$$F(x,y,y',y'')=0 \qquad (9.11)$$

ko'rinishdagi tenglama 2 – tartibli differensial tenglama deb ataladi. Qandaydir intervalda ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lgan (9.11) tenglikni qanoatlantiradigan $y(x)$ funksiya bu tenglamaning yechimi yoki uning integral egri chizig'i deb ataladi.

4-ta'rif. Agar (9.11) tenglama $x\in[a,b]$ intervalda

$$y(a)=y_0, \quad y'(a)=y_1 \qquad (9.12)$$

boshlang'ich shartlar bilan o'rganilayotgan bo'lsa, u holda (9.11) va (9.12) birgalikda Koshi masalasi deb ataladi.

5-ta'rif. Agar (9.11) tenglama $x\in[a,b]$ intervalda

$$y(a)=y_0, \quad y(b)=y_1 \qquad (9.13)$$

chegaraviy shartlar bilan o'rganilayotgan bo'lsa, u holda (9.11) va (9.13) birgalikda chegaraviy masala deb ataladi.

Ma'lumki, agar $F(x,y,z,u)$ funksiya qandaydir (x_0,y_0,z_0,u_0) nuqtada nolga teng va bu nuqtaning atrofida uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lib, $\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0,u_0)}{\partial u}\neq 0$ bo'lsa, u holda $F(x,y,z,u)=0$ tenglama bu nuqtaning qandaydir atrofida yagona $u=f(x,y,z)$ yechimga ega bo'ladi.

Xuddi shunday shartlar asosida (9.11) tenglamani quyidagicha yozib olish mumkin:

$$y''=F(x,y,y') \qquad (9.14)$$

Agar bu tenglamaning o'ng tomonidagi funksiya ikkinchi va uchinchi argumentlariga nisbatan chiziqli ($F(x,y,y',y'')=y''-py'-qy$) bo'lsa, (9.14) tenglama ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Ikkinchi tartibli differensial tenglamaga keltiriladigan iqtisodiy dinamik modellarga doir ba'zi misollarni ko'rib chiqamiz:

a) Tovar va materiallar zaxirasi hisobga olinadigan narx moslashuvchanligi modeli. Birinchi tartibli differensial tenglamani o'rganishda biz narxning talab va taklif funksiyalari orasidagi farqqa moslashuvchanligi modelini

$$\dot{p}=\alpha(Q_{talab}-Q_{taklif}), \quad \alpha>0$$

ko'rib chiqqan edik. Bunda Q_{talab} va Q_{taklif} talab va taklifni ifodalovchi funksiyalar. Bu model narxning muvozanatda bo'lmasligi sababli sotilmasdan yig'ilib qolgan mahsulot miqdorini hisobga olmaydi. Taklifning ma'lum vaqt davomida talabdan yuqori bo'lishi bozorda ortiqcha mahsulot paydo bo'lishiga olib keladi va narxni pasayishga majburlaydi. Aksincha, talabning taklifdan oshib ketishi yig'ilib qolgan talab ta'sirida narxning oshishiga olib keladi. Bu effektni hisobga oluvchi modelni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\dot{p} = \alpha(Q_{talab} - Q_{taklif}) - \beta\int_0^t \left(Q_{taklif}(\tau) - Q_{talab}(\tau)\right)d\tau, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Bu tenglamadagi ikkinchi had talab va taklif orasidagi farq natijasida yig'ilib qolgan (izoh: integral so'zi jamlash ma'nosini bildiradi) mahsulot miqdorini bildiradi.

Bu tenglikning har ikkala tarafidan hosila olsak,

$$\ddot{p} = \alpha(\dot{Q}_{talab} - \dot{Q}_{taklif}) - \beta\left[Q_{talab} - Q_{taklif}\right].$$

Talab va taklif funksiyalari chiziqli bo'lsin, ya'ni $Q_{talab} = A + Bp$, $Q_{taklif} = F + Gp$. U holda bizning tenglamamiz quyidagi:

$$\ddot{p} + \alpha(G - B)\dot{p} + \beta(G - B)p = \beta(A - F)$$

ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani hosil qilamiz.

b) Valrasa narx moslashuvchanligi modeli. Yuqoridagi misollarda raqobat sharoitidagi bozorda narxning talab va taklifdan kelib chiqqan holda

$$\dot{p} = \alpha(Q_d - Q_s), \quad \alpha > 0$$

tenglamaga muvofiq o'zgarishi aytib o'tildi. Bunga qo'shimcha ravishda Valrasa modelida ma'lum bir tovarni sotishdan olinadigan foydaning musbat yoki manfiyligidan kelib chiqqan holda korxonalarning bu mahsulotni ishlab chiqaruvchilari safiga qo'shilishi yoki bu turdagi mahsulotni ishlab chiqarishni to'xtatishi holati hisobga olinadi.

Ma'lum tovarni ishlab chiqaruvchilar soni $N(t)$ ga, firma o'z faoliyatini samarali davom ettirishi uchun zarur bo'lgan o'rtacha minimal xarajat $\bar{c}$ ga teng bo'lsin. Agar narx $\bar{c}$ dan yuqori bo'lsa, faoliyat olib borayotgan ishlab chiqaruvchilar soni ortadi, ya'ni $\dot{N}(t) > 0$. Agar narx $\bar{c}$ dan kam bo'lsa, ishlab chiqaruvchilar soni kamayadi, ya'ni $\dot{N}(t) < 0$. Buni quyidagicha algebraik ifodalashimiz mumkin

$$\dot{N} = \gamma(p - \bar{c}), \quad \gamma > 0.$$

Talab funksiyasi $Q_d = A + Bp$, $B < 0$ bo'lsin. Taklif faoliyat olib borayotgan ishlab chiqaruvchilar soniga quyidagicha bog'langan $Q_s = mN$, $m = const > 0$. Bu ifodalarni hisobga olgan holda narx dinamikasini ifodalovchi tenglamadan hosila olsak,

$$\ddot{p} = \alpha\left(B\dot{p} - m\dot{N}\right)$$

ifodani hosil qilamiz. Bu ifodaga $\dot{N}$ ning yuqorida berilgan ifodasini qo'yamiz va

$$\ddot{p} - \alpha B\dot{p} + \alpha m\gamma p = \alpha m\gamma\bar{c}$$

ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani hosil qilamiz.

Biz

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (9.15)$$

tenglamani f funksiya chiziqli va koeffitsiyentlari o'zgarmas bo'lgan holi bilan tanishamiz. Bunday tenglamalar ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama deb ataladi.

Agar (9.15) tenglamada $f(x) = 0$ bo'lsa, u holda

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (9.16)$$

tenglamaga (9.15) tenglamaning bir jinsli tenglamasi deyiladi.

Bir jinslimas (9.15) tenglama qaralayotganda uning mos bir jinsli (9.16) tenglamasi muhim ahamiyat kasb etadi. (9.16) tenglamaning yechimlar to'plami o'ziga xos xususiyatlarga egaligidan uni maxsus o'rganish maqsadga muvofiq.

Dastlab, chiziqli erkli va chiziqli bog'liq funksiyalarga to'xtalamiz. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi, chiziqli erkliligi yoki chiziqli bog'liqligi tushunchalarini ixtiyoriy funksiyalar uchun ham qo'llash mumkin.

6-ta'rif. Berilgan $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ funksiyalarning $c_1, c_2, ..., c_n$ o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli kombinatsiyasi, deb

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) \qquad (9.17)$$

tenglikka aytiladi. Agar $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ funksiyalardan istalgan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalanmasa, u holda bu funksiyalar sistemasi chiziqli erkli sistema deyiladi.

Aksincha, agar qaralayotgan funksiyalardan hech bo'lmaganda bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalansa, u holda bu funksiyalar sistemasi chiziqli bog'liq deyiladi.

Bir nechta funksiyalardan iborat sistemaning chiziqli erkliligi masalasini aniqlash usullaridan biri Vronskiy aniqlovchisi bilan bog'liq.

$y_1(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar sistemasi uchun, Vronskiy aniqlovchisi

$$W(x) = W[y_1, ..., y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_n(x) \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (9.18)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Aniqlovchi xossalariga ko'ra, agar $y_1(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar chiziqli bog'liq bo'lsa, Vronskiy aniqlovchisining qiymati x ning barcha qiymatlarida nolga teng.

Agar x ning hech bo'lmaganda bitta qiymatida $W(x) \neq 0$ bo'lsa, $y_1(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar chiziqli erklidir.

Quyidagi funksiyalarning chiziqli erkli ekanligini Vronskiy aniqlovchisi yordamida isbotlash mumkin.

9-misol. $1, x, ..., x^{m-1}$ $x \in (a,b)$ funksiyalar chiziqli erkli.

10-misol. $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_m x}$ $x \in (a,b)$ funksiyalar chiziqli erkli. Bu yerda $k_1, ..., k_m$ – turli sonlar.

11-misol. $e^{kx}, xe^{kx}, ..., x^{m-1}e^{kx}$ $x \in (a,b)$ funksiyalar chiziqli erkli.

Agar chiziqli erkli $y_1(x),...,y_n(x)$ funksiyalar $n-$tartibli differensial tenglamalar sistemasining yechimlari bo'lsa, u holda bu funksiyalarni fundamental yechimlar sistemasi deb ataymiz. Agar chiziqli erkli $y_1(x),...,y_n(x)$ funksiyalar $n-$tartibli differensial tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi bo'lsa, u holda bu funksiyalarning har qanday chiziqli kombinatsiyasi ham tenglamaning yechimi bo'ladi.

Masalan, $y_1 = \sin x$; $y_2 = \cos x$ funksiyalar $y'' + y = 0$ tenglamaning yechimlaridir.

Bu funksiyalardan tuzilgan Vronskiy aniqlovchisi

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1.$$

Demak, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ chiziqli erkli. U holda

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

funksiya ham $y'' + y = 0$ tenglamaning yechimi hisoblanadi.

Agar $y_1(x), y_2(x)$ (9.16) tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi bo'lsa, u holda

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

funksiya (9.16) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli (9.16) tenglama fundamental yechimlari sistemasini qurish usuli bilan tanishamiz. Bu usulni ixtiyoriy $n-$tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli tenglama uchun qo'llash mumkin.

(9.16) tenglama xususiy yechimini $y = e^{\lambda x}$ $\lambda = const$ ko'rinishida qidiramiz. Funksiyani ikki marta differensiallab,

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

tengliklarni olamiz. Funksiya va uning hosilalarini (9.16) tenglamaga qo'ysak,

$$(\lambda^2 + p\lambda + q) \cdot e^{\lambda x} = 0$$

tenglama hosil bo'ladi. $e^{\lambda x} \neq 0$ (har doim musbat) ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglamaga teng kuchli

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{9.19}$$

tenglamani olamiz.

(9.19) algebraik tenglama (9.16) differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

(9.16) tenglamaning fundamental yechimlari sistemasi (9.19) tenglamaning ildizlari bilan bog'liq. Shu sababli umumiy yechimni tuzishning xarakteristik tenglama yechimlari bilan bog'liq barcha hollarini ko'rib chiqamiz:

1) λ_1 **va** λ_2 **ildizlar haqiqiy va turlicha bo'lsin.** U holda $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ yechimlar (9.16) tenglamaning fundamental yechimlari sistemasini tashkil qiladi. Umumiy yechim esa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

12-misol. $y'' - 8y' + 7y = 0$ tenglama umumiy yechimini quring.

Yechish. Xarakteristik tenglama $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$ ko'rinishga ega va uning ildizlari
$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7$. Natijada, chiziqli erkli $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{7x}$ yechimlarni olamiz. Tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{7x}.$$

2) λ_1 **va** λ_2 **ildizlar** $\lambda_1 = \alpha + \beta i$; $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ **kompleks sonlar bo'lsin,** bu yerda $-\beta \neq 0$. Ildizlarga mos yechimlar:

$$z_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad z_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ bo'lganidan, ular chiziqli erkli. Eyler formulasidan foydalanib,

$$z_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad z_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

funksiyalarni olamiz. Funksiyalarning quyidagi chiziqli kombinatsiyalarini tuzamiz:

$$y_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = \frac{1}{2i}(z_1 - z_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

y_1; y_2 funksiyalar tenglamaning haqiqiy yechimlari bo'lib, chiziqli erklidir. Natijada, umumiy yechim

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

ko'rinishda yoziladi.

13-misol. $y'' - 6y' + 10y = 0$ tenglama umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

bo'lib, uning ildizlari $\lambda_1 = 3 + i$, $\lambda_2 = 3 - i$. Shunday qilib, xususiy yechimlar

$$y_1 = e^{3x}\cos x, \quad y_2 = e^{3x}\sin x.$$

Umumiy yechim

$$y = e^{3x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

3) λ_1 **va** λ_2 **ildizlar o'zaro teng va haqiqiy.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ bo'lsin. U holda fundamental yechimlar sistemasi sifatida $y_1(x) = e^{\lambda x}$ $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ chiziqli erkli funksiyalarni olish mumkin. Shunday qilib, umumiy yechim

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x).$$

14-misol. $y'' + 4y' + 4y = 0$ tenglama umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.
Umumiy yechim

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x).$$

Bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamaning yechimini qurishning ba'zi usullari bilan tanishib chiqamiz.

Teorema. Bir jinslimas (9.15) differensial tenglamaning umumiy yechimi ushbu tenglama biror $y_0(x)$ xususiy yechimi va (9.15) ning bir jinsli (9.16) tenglama umumiy yechimlari yig'indisiga teng:

$$y = y_{xususiy} + y_{bir\ jinsli}.$$

Umumiy holda (9.16) tenglamaning biror – bir xususiy yechimini ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usulida qurish mumkin. Bu usulni o'rganishni talabalarga mustaqil ish sifatida tavsiya etamiz. Tenglamaning o'ng tomoni maxsus shaklga ega bo'lgan holatlarga to'xtalib o'tamiz.

1) Agar tenglamaning o'ng tomoni o'zgarmas $f(x) = M$ bo'lsin. U holda

a) $y_{xususiy} = \dfrac{M}{q}$ agar $q \neq 0$ bo'lsa;

b) $y_{xususiy} = \dfrac{M}{p}x$ agar $q = 0,\ p \neq 0$ bo'lsa;

c) $y_{xususiy} = \dfrac{M}{2}x^2$ agar $p = 0,\ q = 0$ bo'lsa.

2) tenglamaning o'ng tomoni $f(x) = ax^m + bx^{m-1} + ... + l$ ko'rinishdagi ko'phad bo'lsin. U holda tenglamaning xususiy yechimini qurish quyidagicha amalga oshiriladi:

a) Agar (9.19) xarakteristik tenglamaning ildizlari noldan farqli bo'lsa, xususiy yechim $y = Ax^m + Bx^{m-1} + ... + L$ ko'rinishda qidiriladi.

b) Agar (9.19) xarakteristik tenglamada nol k karrali ($k = 1$ *yoki* $k = 2$) ildiz bo'lsa, xususiy yechim $y = x^k(Ax^m + Bx^{m-1} + ... + L)$ ko'rinishda qidiriladi.

3) Tenglamaning o'ng tomoni $f(x) = (ax^m + bx^{m-1} + ... + l)e^{\alpha x}$ ko'rinishda bo'lsin, u holda tenglamaning xususiy yechimini qurish quyidagicha amalga oshiriladi:

a) Agar α (9.19) xarakteristik tenglamaning ildizlaridan biri bo'lmasa, xususiy yechim $y = (Ax^m + Bx^{m-1} + ... + L)e^{\alpha x}$ ko'rinishda qidiriladi.

b) Agar α (9.19) xarakteristik tenglamaning k karrali ($k = 1$ *yoki* $k = 2$) ildizi bo'lsa, xususiy yechim $y = x^k(Ax^m + Bx^{m-1} + ... + L)e^{\alpha x}$ ko'rinishda qidiriladi.

2) va 3) holatarda yechimdan hosilalarni hisoblab, (9.15) tenglamaga qo'yiladi. Hosil bo'lgan ayniyatda o'xshash hadlarning koeffitsiyentlari taqqoslanib, $A, B, ..., L$ noma'lum koeffitsiyentlarga nisbatan tenglamalar sistemasi hosil qilinadi va bu sistemani yechib noma'lum koeffitsiyentlar topiladi.

4) Tenglamaning o'ng tomoni $f(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$ ko'rinishda bo'lsin, u holda tenglamaning xususiy yechimini qurish quyidagicha amalga oshiriladi:

a) Agar $\alpha+\beta i$ son (9.19) xarakteristik tenglamaning ildizlaridan biri bo'lmasa, xususiy yechim $y=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ ko'rinishda qidiriladi.

b) Agar $\alpha+\beta i$ (9.19) xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lsa, xususiy yechim $y=xe^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ ko'rinishda qidiriladi.

15-misol. $y''-6y'+8y=(3x-1)e^{x}$ tenglamaning xususiy yechimini toping.

Yechish. Ushbu holda $\alpha=1$. Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2-6\lambda+8=0$$

bo'lib, uning ildizlari 2 va 4 ga teng. $y_{bir\,jinsli}=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$.

Tenglamaning xususiy yechimini $y=(ax+b)e^{x}$ ko'rinishda qidiramiz. Funksiya hosilalarini aniqlaymiz:

$$y'=ae^{x}+(ax+b)e^{x}=(ax+a+b)e^{x}$$

$$y''=ae^{x}+(ax+a+b)e^{x}=(ax+2a+b)e^{x}$$

y, y', y'' ifodalarni tenglamaga qo'yiladi va e^{x} ga qisqartirilgandan so'ng:

$$(ax+2a+b)-6(ax+a+b)+8(ax+b)=3x-1$$

yoki

$$3ax-4a+3b=3x-1.$$

Mos koeffitsiyentlarni tenglab, $a=1, b=-1$ natijani olamiz. Izlanayotgan xususiy yechim:

$$y_{xususiy}=(x-1)e^{x}.$$

Tenglamaning umumiy yechimi

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}+(x-1)e^{x}.$$

16-misol. $y''-4y'+5y=12\sin x+4\cos x$ tenglamaning xususiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamani yechamiz.

$$\lambda^2-4\lambda+5=0,$$

$\lambda=2\pm i$. Bizning holatda $\alpha=0$ va $\beta=1$ bo'lib, xarakteristik tenglamaning ildizi emas. Demak, xususiy yechim quyidagicha qidiriladi:

$$y=A\sin x+B\cos x.$$

Funksiya hosilalarini aniqlaymiz:

$$y'=A\cos x-B\sin x$$

$$y''=-A\sin x-B\cos x.$$

y, y', y'' ifodalarni tenglamaga qo'yamiz va soddalashtiramiz

$$(-A\sin x-B\cos x)-4(A\cos x-B\sin x)+5(A\sin x+B\cos x)=12\sin x+4\cos x$$

yoki

$$(4A+4B)\sin x+(4B-4A)\cos x=12\sin x+4\cos x.$$

Bundan

$$\begin{cases}4A+4B=12,\\ 4B-4A=4,\end{cases}$$

yoki $A=1$, $B=2$. Xususiy yechim

$$y_{xususiy}=\sin x+2\cos x.$$

Demak, umumiy yechim

$$y=e^{2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)+\sin x+2\cos x,$$

bu yerda C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Izoh. Agar o'zgarmas koeffitsiyentli n – tartibli chiziqli

$$y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+...+p_0y=f(x)$$

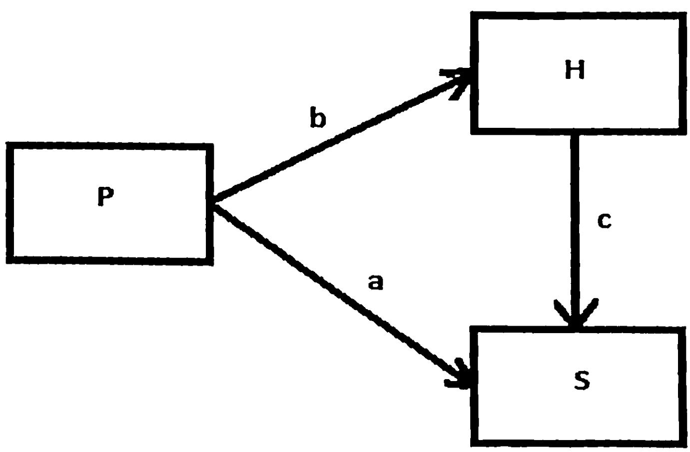
differensial tenglama o'rganilayotgan bo'lsa, uning umumiy yechimini qurish uchun

$$\lambda^n+p_{n-1}\lambda^{n-1}+...+p_0=0$$

xarakteristik tenglamadan foydalaniladi. Xususiy yechimni topish usuli ikkinchi tartibli tenglama holidagi bilan bir xil.

9.3. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi

Fizika, texnika va iqtisodiyotning ko'p masalalarida o'rganilayotgan jarayonni bir nechta miqdorlar ifodalaydi. Masalan, biror-bir mahsulot yoki xizmatga bo'lgan talabni o'rganganda mijozlarni uch toifaga bo'lishimiz mumkin: potensial mijozlar (P), ikkilanuvchi yoki kechikuvchi mijozlar (H) va xaridorlar (S). $P+H+S=N$ bo'lsin. $p=P/N$, $h=H/N$, $s=S/N$ normallangan o'zgaruvchilarni kiritamiz. Mijozlar bir turdan boshqasiga quyidagi sxema asosida harakatlansin.



Bunda a,b va c birlik vaqt davomida bir toifadagi mijozning boshqa toifaga o'tishi ehtimoli ($c<a$). O'rtacha ikkilanish vaqti $\tau_h=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ kabi aniqlanadi. Bu jarayonni quyidagi tenglamalar sistemasi bilan modellashtirishimiz mumkin.

$$\dot{p} = -ap - bs,$$

$$\dot{s} = ap + ch,$$

$$\dot{h} = bp - ch.$$

Natijada uchta tenglamadan iborat tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Shunga o'xshagan ko'plab jarayonlar differensial tenglamalar sistemasiga keltirilishi mumkin.

Umumiy holda differensial tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dotfill \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \tag{9.20}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Agar differensial tenglamalar sistemasida noma'lum funksiyaning hosilasi differensial tenglamaning chap tomonida bo'lib, o'ng tomonida hosilalar qatnashmasa bunday differensial tenglamalar sistemasiga normal differensial tenglamalar sistemasi deyiladi. (9.20) normal differensial tenglamalar sistemasidir. (9.20) tenglamalar sistemasining yechimi deb 1-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lib, (9.20) tenglamalar sistemasini ayniyatga aylantiradigan har qanday $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), ..., y_n = \varphi_n(x)$ funksiyalarga aytiladi.

(9.20) differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi, deb

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, ..., y_n(x_0) = y_n^0$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi (9.20) tenglamalar sistemasining $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), ..., y_n = \varphi_n(x)$ yechimiga aytiladi.

(9.20) differensial tenglamalar sistemasining yechimini topish quyidagicha amalga oshiriladi.

Biz o'zgarmas koeffitsiyentli normal differensial tenglamalar sistemasi:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + ... + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \dotfill \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{9.21}$$

bilan to'liqroq tanishib chiqamiz. Bu tenglamalar sistemasini matritsali shaklda $y' = Ay + f(x)$ kabi yozishimiz mumkin, bu yerda y noma'lum funksiyalar vektori, A koeffitsiyentlar matritsasi, $f(x)$ tashqi ta'sirni ifodalovchi vektor.

Agar $f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,...,f_n(x)=0$ bo'lsa, (9.21) sistema bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi deb ataladi. (9.21) sistemaning umumiy yechimi bir jinsli differensial tenlamalar sistemasining umumiy yechimi va bir jinsli bo'lmagan sistemaning xususiy yechimi yig'indisi shaklida ifodalanadi, ya'ni

$$y = y_{bir\ jinsli} + y_{xususiy}.$$

Bir jinsli differensial tenglamalar sistemasining yechimini $y_1=\alpha_1 e^{\lambda x},...,y_n=\alpha_n e^{\lambda x}$ ko'rinishda izlaymiz. Bu yerda $\alpha_1,...,\alpha_n$, λ – noma'lum sonlar. $\frac{dy_i}{dx}=\alpha_i\lambda e^{\lambda x}$ $(i=1,2,...,n)$ bo'lgani uchun (9.21) sistema quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+...+a_{1n}\alpha_n=0,\\ a_{21}y_1+(a_{22}-\lambda)\alpha_2+...+a_{2n}\alpha_n=0,\\ ....\\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+...+(a_{nn}-\lambda)\alpha_n=0.\end{cases} \tag{9.22}$$

Bu sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & ... & a_{1n}\\ ... & ... & ...\\ a_{n1} & ... & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{9.23}$$

bo'lishi kerak. Agar determinant hisoblab chiqilsa biz bu yerdan $n-$ tartibli tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama (9.21) differensial tenglamalar sistemasining xarakteristik tenglamasi, deb ataladi. Bu tenglamadan $\lambda_1,...,\lambda_n$ –(9.21) sistema matritsasining xos sonlarini, so'ngra esa λ_i $(i=1,2,...,n)$ sonlarga mos $\alpha^{(j)}=\{\alpha_1^{(j)},....,\alpha_n^{(j)}\}-$ xos vektorlarni topamiz. Natijada chiziqli erkli $\{\alpha_i^{(j)}e^{\lambda_j x}\}$ $i,j=1,2,3,...,n-$vektorlar sistemasini, ya'ni fundamental yechimlar sistemasini hosil qilamiz.

U holda (9.21) sistemaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} y_1(x)=\sum\limits_{j-1}^{n}C_j\alpha_1^{(j)}\exp(\lambda_j x),\\ ....\\ y_n(x)=\sum\limits_{j-1}^{n}C_j\alpha_n^{(j)}\exp(\lambda_j x).\end{cases}$$

Ikkita tenglamadan iborat bir jinsli avtonom sistemani alohida tahlil qilib chiqamiz

$$\begin{aligned} y_1'&=a_{11}y_1+a_{12}y_2+b_1,\\ y_2'&=a_{21}y_1+a_{22}y_2+b_2.\end{aligned} \tag{9.24}$$

Bu sistemaga mos bir jinsli tenglamalar sistemasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned} y_1'&=a_{11}y_1+a_{12}y_2,\\ y_2'&=a_{21}y_1+a_{22}y_2.\end{aligned}$$

Bu sistemaning asosiy matritsasi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ga teng. Xarakteristik tenglamani tuzamiz

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}),$$

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0. \qquad (9.25)$$

Bu tenglamaning ildizlarini (xarakteristik sonlarni yoki matritsa xos sonlarini) topamiz. Maktab kursidan bizga ma'lumki, bunda uch holat ro'y berishi mumkin.

1) $D=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})>0$. Bu holatda (9.25) tenglama ikkita bir-biridan farqli ildizlarga ega:

$$\lambda_{1,2}=\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{D}$$

Ularga mos xos vektorlarni $(A-\lambda_k E)\alpha_k=0$ tenglamalar sistemasidan topamiz:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_1-a_{11} \end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_2-a_{11} \end{pmatrix}.$$

Demak, bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi

$$y_1=C_1a_{12}e^{\lambda_1 x}+C_2a_{12}e^{\lambda_2 x},$$

$$y_2=C_1(\lambda_1-a_{11})e^{\lambda_1 x}+C_2(\lambda_2-a_{11})e^{\lambda_2 x}.$$

2) $D=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$. Bu shart ostida (9.25) tenglama ikkita bir xil yechimga ega $\lambda_1=\lambda_2=\lambda=\frac{a_{11}+a_{22}}{2}$. Bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$y_1=(C_1+C_2x)e^{\lambda x},$$

$$y_2=\left[\frac{\lambda-a_{11}}{a_{12}}(C_1+C_2x)+\frac{C_2}{a_{12}}\right]e^{\lambda x}.$$

3) $D=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})<0$. Bu shart ostida (9.25) tenglama haqiqiy sonlarda yechimga ega emas. Uning ildizlari kompleks qo'shma sonlardan iborat bo'ladi. $\lambda=h\pm iv$ bo'lsin. Bu yerda

$$h=\frac{a_{11}+a_{22}}{2},\quad v=\sqrt{|D|}.$$

U holda differensial tenglamalar sistemasining yechimi quyidagicha ifodalanadi:

$$y_1=e^{hx}(C_1\cos vx+C_2\sin vx),$$

$$y_2=e^{hx}\left(\frac{(h-a_{11})C_1+vC_2}{a_{12}}\cos vx+\frac{(h-a_{11})C_2-vC_1}{a_{12}}\sin vx\right).$$

Bunda C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmaslar. Bu o'zgarmaslarni aniqlash uchun odatda bizga ikkita shart zarur bo'ladi: $y_1(0)=a_1$, $y_2(0)=a_2$. Bu ko'rinishdagi shartlarni boshlang'ich shartlar, deb ataymiz. Tenglamalar sistemasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi Koshi masalasi deb ataladi.

17-misol. $\begin{cases} \dot{x}(t)=x+2y, \\ \dot{y}(t)=y+2x \end{cases}$ sistemaning yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik ildizlarni topamiz:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2-4=0 \Rightarrow \lambda_1=3,\ \lambda_2=-1.$$

Demak, sistemaning yechimini quyidagi ko'rinishda izlash mumkin:

$$x(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}, \quad y(t)=a_1e^{3t}+a_2e^{-t}.$$

U holda sistemadagi 1-tenglamadan quyidagini hosil qilamiz:

$$3C_1e^{3t}-C_2e^{-t}=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}+2a_1e^{3t}+2a_2e^{-t} \Rightarrow$$

$$2C_1-2a_1=0,\ -2C_2-2a_2=0 \Rightarrow a_1=C_1,\ a_2=-C_2.$$

Shunday qilib sistemaning umumiy yechimi:

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}, \\ y(t)=C_1e^{3t}-C_2e^{-t}. \end{cases}$$

Sistemani yuqori darajali tenglamaga keltirib uning yechimini topish ham mumkin. Bu usul bilan biz tanishib chiqamiz.

18-misol. $\begin{cases} y_1'=2y_1+2y_2 \\ y_2'=y_1+3y_2 \end{cases}$ sistemaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasidan x argument bo'yicha hosila olamiz $y_1''=2y_1'+2y_2'$. Ikkinchi tenglamadan foydalanib quyidagini hosil qilamiz: $y_1''=2y_1'+2y_1+6y_2$. $y_2(x)$ funksiyani $y_1(x)$ va $y_1'(x)$ orqali ifodalaymiz: $y_2=\frac{1}{2}y_1'-y_1$. So'ngra quyidagi $y_1''=5y_1'-4y_1$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamaning yechimi $y_1(x)=C_1e^{x}+C_2e^{4x}$. Bu yechimdan hosila olib $y_2(x)=-\frac{1}{2}C_1e^{x}+C_2e^{4x}$ ga ega bo'lamiz.

19-misol. $\begin{cases} y_1'=-7y_1+y_2 \\ y_2'=-2y_1-5y_2 \end{cases}$ sistemani $y_1|_{x=0}=1$, $y_2|_{x=0}=0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish. Bu yerda ham sistemaning birinchi tenglamasini differensiallab, so'ng $y_2=y_1'+7y_1$ dan foydalanib $y_1''+12y_1'+37=0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimi: $y_1=e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. Bundan

$$y_2(x)=c_2e^{-6x}(\cos x-\sin x)+c_2e^{-6x}(\cos x+\sin x)$$

yechimni aniqlaymiz. Agar $y_1|_{x=0}=1$, $y_2|_{x=0}=0$ boshlang'ich shartlardan foydalanilsa, tenglamalar sistemasining yechimi

$$y_1(x)=e^{-6x}(\cos x-\sin x)$$
$$y_2(x)=-2e^{-6x}\sin x$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasining yechimini topamiz. Buning uchun bu sistemaning xususiy yechimini topib, uni bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimiga qo'shib qo'yish yetarli. Xususiy yechimni topishni ko'rib chiqamiz.

7-ta'rif. (9.24) tenglamalar sistemasining turg'un yechimi, deb $y_1'=0$, $y_2'=0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimga aytiladi.

Turg'un yechim quyidagi algebraik tenglamalar sistemasini yechib topiladi:

$$a_{11}y_1+a_{12}y_2=-b_1,$$
$$a_{21}y_1+a_{22}y_2=-b_2.$$

Agar $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ bo'lsa,

$$\bar{y}_1=\frac{a_{21}b_1-a_{22}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$
$$\bar{y}_2=\frac{a_{12}b_1-a_{11}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

Bu holatda turg'un yechim (9.24) sistemaning xususiy yechimi bo'ladi.

20-misol. $\begin{cases}\dot{x}(t)=x+2y-5,\\ \dot{y}(t)=y+2x-4\end{cases}$ tenglamalar sistemasining umumiy yechimini toping.

Yechish. Xususiy yechimni topamiz.

$$x+2y-5=0,$$
$$y+2x-4=0$$

tenglamalar sistemasidan $\bar{x}=1$, $\bar{y}=2$ turg'un yechimni hosil qilamiz. Oldingi misollarda bu sistemaga mos bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimi quyidagicha topilgan edi:

$$\begin{cases}x_b(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-t},\\ y_b(t)=C_1e^{3t}-C_2e^{-t}.\end{cases}$$

Demak, sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{cases}x(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}+1,\\ y(t)=C_1e^{3t}-C_2e^{-t}+2.\end{cases}$$

9.4. Birinchi tartibli chekli ayirmali tenglamalar

Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishda dinamik o'zgaruvchi vaqt t uzluksiz o'zgaruvchi sifatida yoki diskret o'zgaruvchi sifatida qaralishi mumkin. Agar t uzluksiz o'zgaruvchi sifatida qaralsa, dinamikasi o'rganilayotgan miqdor

y vaqtning uzluksiz funksiyasi $y(t)$ sifatida ifodalanadi va uning dinamikasi odatda differensial tenglama yoki differensial tenglamalar sistemasi yordamida modellashtiriladi. Differensial tenglamalar haqidagi tushunchalar va ular orqali ifodalanadigan ba'zi modellar oldingi ma'ruzalarda keltirib o'tildi.

Bu yerda vaqt diskret o'zgaruvchi sifatida qaraladigan diskret tenglamalar bilan tanishamiz. t vaqt diskret bo'lganda u 0,1,2,3,... butun qiymatlarni ifodalaydi. t odatda yillarda, oylarda, kunlarda yoki ba'zi holatlarda soat, minut yoki sekundlarda ham ifodalanishi mumkin. Bu holatda o'rganilayotgan miqdorning t vaqtdagi qiymati y_t kabi belgilanadi uning dinamikasini ifodalovchi tenglamalar chekli ayirmali tenglamalar deb ataladi. Chekli ayirmali tenglamalarning tartibi qaralayotgan vaqtlar orasidagi eng katta farq bilan aniqlanadi.

21-misol. $y(t+1)=2y(t)-1$ – birinchi tartibli chekli ayirmali tenglama. $y(t+2)=2y(t)+6$ – ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglama.

Chekli ayirmali tenglamaning yechimi $\{y(t)\}$, $t=0,1,2,3,...$ – sonli ketma-ketlik sifatida qaraladi. Uni aniqlash uchun boshlang'ich shartlardan foydalaniladi. Masalan, 1-tartibli tenglama uchun shart $y(0)=y_0$ ko'rinishda; 2-tartibli tenglama uchun shart $y(0)=y_0$, $y(1)=y_1$ ko'rinishda bo'lib ularning soni tenglama tartibiga mos bo'ladi. Ko'p hollarda chekli ayirmali tenglamada $y(t)$ o'rniga y_t belgi ishlatiladi. Masalan, yuqoridagi tenglamalarni quyidagicha yozish mumkin: $y_{t+1}=2y_t-1$, $y_{t+2}=2y_t+6$. Bu ko'rinishdagi chekli ayirmali tenglamalar bilan oldindan tanishmiz.

Masalan: arifmetik progressiyada $2y_{t+1}=y_t+y_{t+2}$, geometrik progressiyada $y_{t+1}^2=y_t\cdot y_{t+2}$.

Masalan, bank depoziti bo'yicha yillik foiz stavkasi 12% bo'lib, foiz stavkasi har oyning oxirida hisoblanib borilsin. Bankka har oyning boshida 100 p.b. miqdorida pul qo'yib boriladi. Bu jarayonni quyidagicha modellashtirishimiz mumkin. Vaqtni t bilan belgilaymiz va u oylarni ifodalasin. t vaqt momentidagi depozitdagi pul miqdorini y_t kabi belgilaymiz. Bir oyda depozitdagi pul miqdori $\frac{12\%}{12}=1\%$ ga oshib boradi. U holda $y_0=100$ yordamida

$$y_{t+1}-y_t=0,01y_t+100$$

yoki

$$y_{t+1}=1,01y_t+100 \qquad (9.26)$$

munosabatni hosil qilamiz. (9.26) tenglik 1-tartibli chekli ayirmali tenglamadir.

Agar tenglamada butun argumentli funksiyaning turli vaqtlarga $(t=0,1,2,3,...)$ mos keluvchi qiymatlari qatnashsa, u holda bu tenglama chekli ayirmali tenglama deb ataladi. Tenglamaning tartibi undagi vaqtlarning eng katta farqi blan aniqlanadi.

8-ta'rif. Quyidagi

$$y_{t+k}=f(y_t,y_{t+1},...,y_{t+k-1},t) \qquad (9.27)$$

shakldagi munosabat k-tartibli chekli ayirmali tenglama deb ataladi (bu yerda $t+k-t=k$).

Agar bu tenglamaning o'ng tomonidagi f funksiya t erkli o'zgaruvchiga bo'g'liq bo'lmasa, u holda bu tenglama avtonom chekli ayirmali tenglama deb ataladi.

Agar f funksiya $y_t, y_{t+1}, ..., y_{t+k-1}$ o'zgaruvchilarning chiziqli funksiyasi bo'lsa, u holda (9.27) tenglama chekli ayirmali chiziqli tenglama deb ataladi.

Izoh. Chekli ayirmali tenglamalar diskret tenglamalar ham deb atalishi mumkin.

(9.27) tenglikni qanoatlantiruvchi $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$ ketma-ketlik (9.27) chekli ayirmali tenglamaning yechimi deb ataladi.

22-misol. $y_{t+1} = 1{,}1 y_t$ chekli ayirmali tenglamaning yechimi $y_t = C \cdot 1{,}1^{t-1}$ ko'rinishda bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$y_{t+1} = C \cdot 1{,}1^{(t+1)-1} = C \cdot 1{,}1^t = 1{,}1 \cdot C \cdot 1{,}1^{t-1} = 1{,}1 y_t.$$

Chekli ayirma deb, odatda $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$ ifodaga aytiladi. Chekli ayirmali tenglama ham differensial tenglama kabi miqdorning vaqt bo'yicha o'zgarishini ifodalaydi. Differensial tenglamada hosila vaqt bo'yicha o'zgarish tezligini ifodalasa, chekli ayirma bu miqdorning qancha miqdorda o'zgarishini ifodalaydi.

Differensial tenglamani chekli ayirmali tenglamaning limiti sifatida qarash mumkin.

Hosilaning ta'rifiga asosan $y'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h}$. Agar bu ifodada h ni yetarlicha kichik miqdor deb olsak, $y'(t) \approx \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h}$ ifodani hosil qilamiz. $h = 1$ deb qaralsa, $y'(t) = \Delta y_t$ ifodani olamiz. Bu ifodadan ko'rinib turibdiki, agar t diskret vaqt yetarlicha kichik birliklarda ifodalansa, hosila chekli ayirma bilan ifodalanishi mumkin.

Xuddi shunday, ikkinchi tartibli hosila uchun

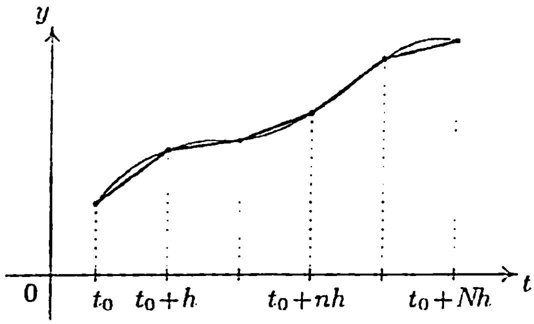
$$y''(t) \approx \Delta^2 y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$$

ifodani hosil qilishimiz mumkin. Bu yerda $\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t)$- ikkinchi tartibli chekli ayirma.

Yuqoridagilardan xulosa qilgan holda, ixtiyoriy differensial tenglamani vaqtni diskretlashtirish natijasida chekli ayirmali tenglamaga almashtirishimiz mumkin. Lekin teskarisi har doim ham o'rinli bo'lavermaydi, ya'ni, differensial tenglamaga keltirilmaydigan chekli ayirmali (diskret) tenglamalar ham mavjud.

Masalan, Fibonachchi sonlari: 1, 2, 3, 5, 8, 13,... $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ko'rinishdagi 2-tartibli chekli ayirmali tenglama bilan ifodalanadi. Ammo bu tenglamani differensial tenglama ko'rinishda yozish mumkin emas.

1-tartibli differensial tenglama va uning chekli ayirmali approksimatsiyasini (Eyler siniq chizig'ini) quyidagicha tasvirlash mumkin.



Chekli ayirmali tenglamalarning yechimini topishda ketma-ketliklar nazariyasidan foydalanish mumkin. Masalan, $y_{t+1} = 2y_t - 1$ – birinchi tartibli chekli ayirmali tenglamaning yechimini topish quyidagicha amalga oshiriladi:

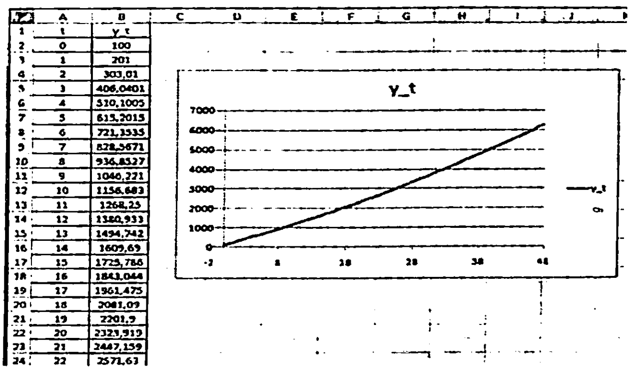
a) avval $y_{t+1} = 2y_t$ bir jinsli tenlamaning yechimi topiladi. Buning uchun yechimni $y_t = \lambda^t$ ko'rinishda qidiramiz. U holda $y_{t+1} \to \lambda^{t+1}$, $y_t \to \lambda^t$; $y_{t+1} = 2y_t \Rightarrow \lambda = 2$. Demak, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y_t = C \cdot 2^t$. Tenglamaning o'ng tomoni ko'phad bo'lganu uchun bir jinsli bo'magan tenglamaning xususiy yechimini $y_t = at + b$ ko'rinishda qidiramiz va uni tenglamaga qo'yib $a = 0, b = 1$ ni hosil qilamiz. U holda bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimini quyidagicha yozamiz: $y_t = 2^t(C-1)+1$, $C = y_0$ yechimni hosil qilamiz.

$y_{t+2} = 2y_t + 6$ – ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglamaning yechimi esa $y_0 = C_1$, $y_1 = C_2$ shartlar asosida topiladi. Bu yerda ham yuqoridagi kabi bir jinsli tengalama uchun $\lambda^2 - 2 = 0$ xarakteristik tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$. U holda bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y_t = C_1\left(\sqrt{2}\right)^t + C_2\left(-\sqrt{2}\right)^t$, $t = 0,1,2,...$ ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda ham tenglamaning o'ng tomoni ko'phad bo'lgani uchun bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimini $y_t = at^2 + bt + c$ ko'rinishda qidiramiz va uni tenglamaga qo'yib $a = 0, b = 0,\ c = -6$ ni hosil qilamiz. U holda bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimini quyidagicha yozamiz $y_t = C_1\left(\sqrt{2}\right)^t + C_2\left(-\sqrt{2}\right)^t - 6$, $t = 0,1,2,...$ ko'rinishda yoziladi. Buni to'g'ridan-to'g'ri tekshirish orqali bilish mumkin.

Shunday qilib,

$$y_{t+1} = f(y_t, t) \tag{9.28}$$

ko'rinishdagi tenglama 1-tartibli chekli ayirmali tenglama deyiladi. (9.26) tenglama MS Excel dasturida quyidagicha yechiladi.



	A	B
1	t	y_t
2	0	100
3	1	201
4	2	303,01
5	3	406,0401
6	4	510,1005
7	5	615,2015
8	6	721,3535
9	7	828,5671
10	8	936,8527
11	9	1046,221
12	10	1156,683
13	11	1268,25
14	12	1380,933
15	13	1494,742
16	14	1609,69
17	15	1725,786
18	16	1843,044
19	17	1961,475
20	18	2081,09
21	19	2201,9
22	20	2323,919
23	21	2447,159
24	22	2571,63

Bu ko'rinishdagi tenglamaning aniq yechimini topish uchun y_t miqdorning $t=0$ dagi qiymatini bilish talab qilinadi. Ya'ni, biz $y_0 = A$ shakldagi boshlang'ich shartni berishimiz zarur. Chekli ayirmali tenglamani ketma-ket yaqinlashish usulida yechish mumkin. Ya'ni (9.28) tenglikda $t=0$ deb olib, y_1 ni topamiz. Ikkinchi qadamda (9.28) tenglikka $t=1$ qiymatini qo'yib, oldingi qadamdan topilgan y_1 ning qiymati yordamida y_2 ni topamiz va hokazo. Shu usul bilan t ning bizga zarur bo'lgan ixtiyoriy qiymati uchun y_t miqdorni aniqlashimiz mumkin.

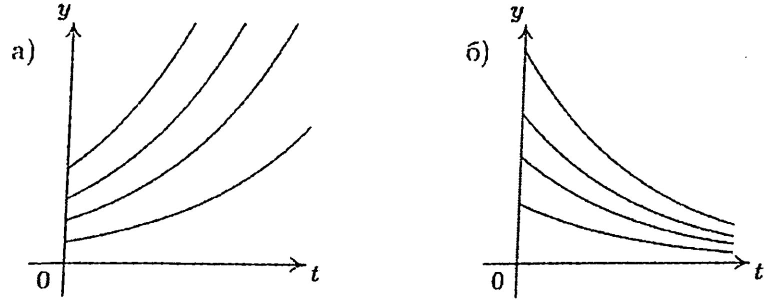
Bizga ma'lumki, $y' = ay + b$ 1-tartibli chiziqli differensial tenglama deb ataladi. Unga mos chekli ayirmali tenglama esa quyidagicha yoziladi

$$y_{t+1} = ay_t + b \tag{9.29}$$

Agar 1-tartibli chiziqli differensial tenglamada $b=0$ bo'lsa, u holda uni quyidagicha yozish mumkin

$$\frac{y'}{y} = a$$

Bu yerda a o'sish koeffitsiyenti deb ataladi va bu tenglamaning yechimi turli boshlang'ich shartlarda quyidagicha tasvirlanadi:



1-tartibli chiziqli differensial tenglamaga mos chekli ayirmali (9.29) tenglamani $h=0$ hol uchun quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t}=a.$$

Demak, $y_{t+1}=ay_t$ tenglama o'zgarmas tempda o'sishda bo'lgan jarayonni ifodalaydi.

23-misol. Faraz qilamiz bankka S_0 miqdorda m yillik foizda mablag' qo'yilgan bo'lsin. U holda t yildan so'nggi qiymatini S_t bilan belgilaymiz. Ma'lumki, bu qiymat geometrik progressiyaga asoslangan holda $S_t=\left(1+\frac{m}{100}\right)^t S_0$ formula bilan aniqlanadi. Agar foiz bir yilda bir marta hisoblanadigan bo'lsa, u holda S_t ning qiymatini $S_{t+1}=\left(1+\frac{m}{100}\right)S_t$ 1-tartibli chekli ayirmali tenglama yordamida hisoblanadi.

Agarda foiz bir yilda k marta hisoblanadigan bo'lsa, u holda S_t ning qiymatini $S_{t+1}=\left(1+\frac{m}{100k}\right)S_t$ tenglama yordamida hisoblanadi.

Agar foizni hisoblash uzlukzis, ya'ni $k\to\infty$ bo'lsa, u holda $S(t)=\lim\limits_{m\to\infty}S_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}=S_0e^{rt}$ bo'ladi.

Chekli ayirmali tenglamada $h=\frac{1}{k}$ belgilash kiritsak, u holda u quyidagi ko'rinishga keladi:

$$S_{t+1}=\left(1+\frac{m}{100k}\right)S_t \Rightarrow S_{t+1}-S_t=h\frac{m}{100}S_t \Rightarrow \frac{S_{t+1}-S_t}{h}=rS_t,\ r\equiv\frac{m}{100}.$$

Bu yerda $k\to\infty\Rightarrow h\to 0$ limitga o'tib chekli ayirmali tenglamaga mos bo'lgan quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{dS}{dt}=rS$$

Quyidagi misolni ko'ramiz: $m=8\%$, ya'ni $r=0{,}08$ bo'lsin. U holda mablag'ning o'sishi quyidagi jadval kabi bo'ladi:

yillar	$\frac{S(t)}{S_0}$ chekli ayirmali tenglamadan		$\frac{S(t)}{S_0}$ differensial tenglamadan
	$m=4$	$m=366$	
1	1,0824	1,0833	1,0833
2	1,1716	1,1735	1,1735
5	1,4859	1,4918	1,4918

10	2,2080	2,2253	2,2255
20	4,8754	4,9522	4,9530
30	10,7652	11,0202	11,0232
40	23,7609	24,5238	24,5325

$y_{t+1} = ay_t + b$ chiziqli birinchi tartibli chekli ayirmali avtonom tenglamada y_0 ma'lum deb qaraymiz. U holda $t = 0$ da

$$y_1 = ay_0 + b.$$

$t = 1$ deb olsak,

$$y_2 = ay_1 + b = a(ay_0 + b) + b = a^2 y_0 + (a+1)b.$$

$t = 2$ da

$$y_3 = ay_2 + b = a(a^2 y_0 + (a+1)b) + b =$$
$$= a^3 y_0 + (a^2 + a + 1)b.$$

Bundan ko'rinib turibdiki, shu jarayonni ixtiyoriy t gacha davom ettirsak,

$$y_t = a^n y_0 + b(1 + a + a^2 + ... + a^{t-1})$$

yoki

$$y_t = \begin{cases} a^t y_0 + b\dfrac{1-a^t}{1-a} & \text{agar } a \neq 1 \text{ bo'lsa,} \\ y_0 + bt, & \text{agar } a = 1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

yechimni hosil qilamiz.

9-ta'rif. (9.29) tenglamaning turg'un yechimi deb jarayon o'zgarmas holatda bo'ladigan yechimga aytiladi.

Turg'un yechimni hosil qilish uchun (9.29) tenglikda $y_{t+1} = y_t = \bar{y}$ deb olamiz. U holda $a \neq 1$ da

$$\bar{y} = \frac{b}{1-a}$$

yechimni hosil qilamiz. $a = 1$ da tenglama turg'un yechimga ega emas.

a parametrning qiymatiga bog'liq ravishda tenglamaning umumiy yechimi $t \to \infty$ da turg'un yechimga yaqinlashadi yoki undan uzoqlashadi. Bu savolga javob berish maqsadida tenglama yechimini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz.

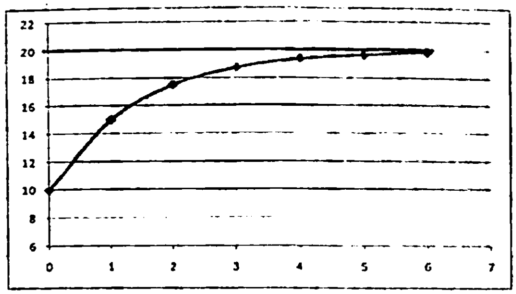
$$y_t = \frac{b}{1-a} + a^t\left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right), \quad a \neq 1, \ t = 0,1,2,...$$

Bundan ko'rinib turibdiki, $|a| < 1$ da tenglama yechimi turg'un yechimga yaqinlashadi, agar $|a| > 1$ bo'lsa, yechim uzoqlashadi.

24-misol. $y_{t+1} = ay_t + 10$ tenglamani qaraylik. $y_0 = 10$ deb olamiz. Quyidagi grafikdan ko'rish mumkinki $a = 0,5$ da tenglama yechimi turg'un yechim $\bar{y} = 20$ ga juda tez ravishda monoton yaqinlashadi.

Tenglamaning $a = 0,5$, $y_0 = 10$ da Excel dasturidagi yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

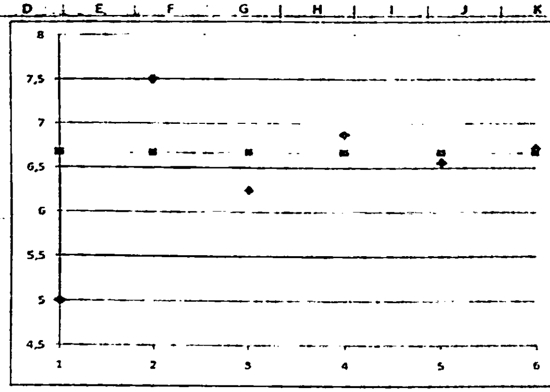
t	y_t	
0	10	20
1	15	20
2	17,5	20
3	18,75	20
4	19,375	20
5	19,6875	20
6	19,84375	20
7	19,92188	
8	19,96094	
9	19,98047	
10	19,99023	
11	19,99512	
12	19,99756	
13	19,99878	
14	19,99939	
15	19,99969	
16	19,99985	



Agar $a=-0{,}5$ deb olsak, tenglama yechimi tebranuvchi bo'ladi, ya'ni vaqt o'tishi bilan turg'un yechimdan yuqoriga va pastga sakraydi. Biroq, yechim yana turg'un yechimga yaqinlashadi. Buni quyidagi grafikda ko'rishimiz mumkin.

Tenglamaning $a=-0{,}5$, $y_0=10$ da Excel dasturidagi yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

t	y_t	
0	10	6,666667
1	5	6,666667
2	7,5	6,666667
3	6,25	6,666667
4	6,875	6,666667
5	6,5625	6,666667
6	6,71875	6,666667
7	6,640625	6,666667
8	6,679688	6,666667
9	6,660156	6,666667



Inflyatsiya modeli (Keygen modeli) bilan tanishib chiqamiz. Bu model 1956 yilda F.Keygen tomonidan taklif etilgan bo'lib, giperinflyatsiya jarayonini ifodalaydi. Modelning asosini quyidagi tenglama tashkil etadi:

pulga talab funksiyasini yozib olamiz: $\frac{M_d}{P}=e^{-\alpha\pi}$. Bu yerda $P-$ narxning aynan hozirgi paytdagi darajasi; $\pi-$ kutilayotgan inflyatsiya tempi; $\alpha>0-$ pulga bo'lgan talabning elastikligi;

kutilayotgan inflyatsiyaga moslashish (adaptatsiya) differensial tenglamasi quyidagicha bo'ladi $\pi'=\beta\left(\frac{P'}{P}-\pi\right)$. Bu yerda $\beta>0-$ adaptatsiya parametri; $\frac{P'}{P}-$ inflyatsiya tempi.

Keygen modelini quyidagicha yozib olish maqsadga muvofiq buning uchun quyidagi belgilashlardan foydalanamiz:

$$m_d = \ln M_d, \qquad p = \ln P.$$

U holda bu belgilashlardan so'ng tenglama quyidagi ko'rinishga keladi

$$m_d - p = -\alpha\pi, \qquad (9.30)$$

$$\pi' = \beta(p' - \pi), \qquad (9.31)$$

(9.30) tenglamani pulga talab funksiyasini logarifmlashdan; (9.31) tenglamani esa differensial tenglamadan hosil qilamiz.

Faraz qilamiz $M_d = const$ u holda $\pi' = \gamma\pi$, $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha\beta - 1}$.

$\pi(0) = \pi_0$ boshlang'ich shartdan foydalansak

$$\pi(t) = \pi_0 e^{\gamma t}$$

Demak, agar $\gamma < 0$ bo'lsa, inflyatsiya kamayadi.

Endi narx muvozanatini ifodalovchi Cobveb modeli bilan tanishib chiqamiz. Bozordagi biror-bir tovarga nisbatan talab funksiyasi

$$Q_d = A + Bp_t$$

ko'rinishda bo'lsin. Odatda narxni oldindan belgilashda taklifning t vaqtda qanday bo'lishi noma'lum bo'ladi va shu sabab taklifning kutilgan qiymati 1 davr oldingi, ya'ni $t-1$ vaqtdagi taklif funksiyasiga teng deb olinadi:

$$Q_s = F + Gp_{t-1}.$$

Muvozanat shartidan

$$A + Bp_t = F + Gp_{t-1}.$$

Bu tenglikni soddalashtirib

$$p_t = \frac{G}{B}p_{t-1} + \frac{F-A}{B}$$

chekli ayirmali tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning turg'un yechimi

$$\overline{p} = \frac{A-F}{G-B}$$

ga teng.

(9.29) bilan taqqoslasak, t ni $t+1$ ga almashtirish lozimligi,

$$a = \frac{G}{B}, \quad b = \frac{F-A}{B}$$

ekanligini hosil qilamiz. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$p_t = (p_0 - \overline{p})\left(\frac{G}{B}\right)^t + \overline{p}.$$

Bundan ko'rish mumkinki, narx o'zining turg'un qiymatiga $-1 < \dfrac{G}{B} < 1$ shartni qanoatlantirgandagina yaqinlashadi. Aks holda, narx turg'un bo'lmaydi va vaqt o'tishi bilan ortib boradi va $t \to \infty$ da narx cheksiz ortadi.

25-misol. Talab va taklif funksiyalari quyidagicha bo'lsin

$$Q_{talab} = 100 - 10p_t, \quad Q_{taklif} = 27 + 5p_{t-1},$$

Boshlang'ich narx $p_0 = 3$ narx dinamikasini aniqlang.

Yechish. Chekli ayirmali tenglama parametrlarini topamiz. Yuqoridagi formulalarga asosan

$$a = \frac{G}{B} = \frac{5}{-10} = -0,5,$$

$$b = \frac{F - A}{B} = \frac{27 - 100}{-10} = 7,3.$$

Demak,

$$p_t = -0,5 p_{t-1} + 7,3.$$

$|a| < 1$ hamda a manfiy bo'lgani sababli narx turg'un holatiga yaqinlashadi. Narxning turg'un (muvozanat) qiymati

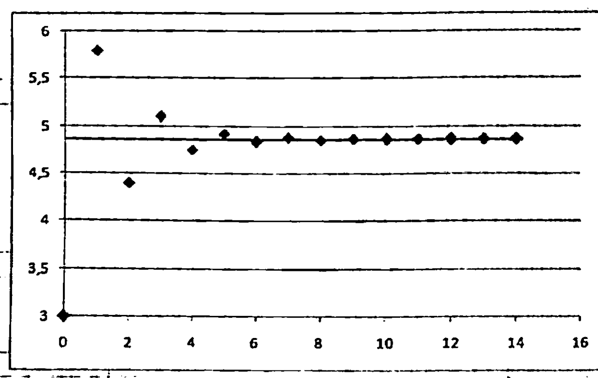
$$\bar{p} = \frac{7,3}{1,5} \approx 4,866.$$

Tenglamaning yechimi (narx dinamikasi) quyidagicha

$$p_t = -1,866 \cdot (-0,5)^t + 4,866.$$

Masala yechimi grafigini Excel dasturida chizamiz:

	A	B	C
1	t	p_t	turg'un narx
2	0	3	4,866667
3	1	5,8	4,866667
4	2	4,4	4,866667
5	3	5,1	4,866667
6	4	4,75	4,866667
7	5	4,925	4,866667
8	6	4,8375	4,866667
9	7	4,88125	4,866667
10	8	4,859375	4,866667
11	9	4,870313	4,866667
12	10	4,864844	4,866667
13	11	4,867578	4,866667
14	12	4,866211	4,866667
15	13	4,866895	4,866667
16	14	4,866553	4,866667



Grafikdan ko'rishimiz mumkinki, narx o'zining turg'un holati atrofida tebrangan holda, o'zining turg'un holatiga yaqinlashadi. $t = 4$ dan boshlab narxning muvozanat holatidan farqi 0,1 dan oshmaydi.

9.5. Ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglamalar

$$a_k(t) y_{t+k} + \cdots + a_1(t) y_{t-1} + a_0(t) y_t = f(t) \tag{9.32}$$

ko'rinishdagi tenglamalar $k-$ tartibli chekli ayirmali tenglamalar deb ataladi. Bu yerda a_0, $a_1, \ldots, a_k$, f - t ga bog'liq bo'lgan funksiyalar.

Agar bu tenlamada $f(t) = 0$ bo'lsa, u holda (9.32) ni bir jinsli $k-$ tartibli chekli ayirmali tenglama deb ataymiz:

$$a_k(t) y_{t+k} + \cdots + a_1(t) y_{t-1} + a_0(t) y_t = 0. \tag{9.33}$$

Ma'lumki, (9.32) tenglamaning umumiy yechimi unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va (9.32) tenglamaning qandaydir xususiy yechimlari yig'indisidan iborat bo'ladi.

Faraz qilamiz, $\left\{y^{(1)}(t),\ldots,y^{(k)}(t)\right\}$ - to'plam (9.33) tenglamaning yechimlar to'plami bo'lsin. Agar bu yechimlar uchun

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_t^{(1)} & y_t^{(2)} & \cdots & y_t^{(k)} \\ y_{t+1}^{(1)} & y_{t+1}^{(2)} & \cdots & y_{t+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{t+k}^{(1)} & y_{t+k}^{(2)} & \cdots & y_{t+k}^{(k)} \end{vmatrix}$$

Kazoratti determinanti noldan farqli bo'lsa, u holda $y^{(1)}(t),\ldots,y^{(k)}(t)$ yechimlar chiziqli erkli bo'ladi va $\left\{y^{(1)}(t),\ldots,y^{(k)}(t)\right\}$ sistema fundamental yechimlar sistemasi deb ataladi. U holda (9.33) tenglamaning umumiy yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$y(t)=C_1y^{(1)}(t)+\cdots+C_ky^{(k)}(t) \qquad (9.34)$$

Agar (9.33) tenglamaning koeffistiyentlari o'zgarmas sonlardan iborat bo'lsa, u holda uning yechimi

$$y_t=\lambda^t, \qquad (9.35)$$

bu yerda $\lambda=const\neq 0$ ko'rinishda qidiramiz va quyidagi xarakteristik tenglamani hosil qilamiz:

$$a_k\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \qquad (9.36)$$

Biz yechimni qurishning yuqoridagi usuli bilan ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglamalarning yechimini qurishda tanishib chiqamiz.

10-ta'rif.

$$y_{t+2}=f(y_{t+1},y_t,t) \qquad (9.37)$$

ko'rinishdagi tenglama ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglama deyiladi. Ikkinchi tartibli avtonom chiziqli tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

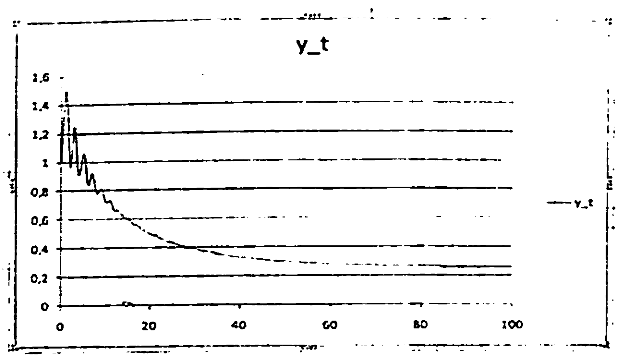
$$y_{t+2}+py_{t+1}+qy_t=b. \qquad (9.38)$$

Agar y_0 va y_2 lar ma'lum bo'lsa, yechimni oldindan berilgan t ning qiymatigacha ketma-ket yaqinlashish usulida topish mumkin. Ketma-ket yaqinlashish usuli oldingi mavzularda keltirilgan.

26-misol. $y_{t+2}=0,2y_{t+1}^{0,7}+0,7y_t$ tenglamani $y_0=1$, $y_1=1,5$ boshlang'ich shart bilan yechib, quyidagi ketma-ketlikni va yechimning grafigini hosil qilamiz.

Buning uchun Excel dasturida 1-ustunga t ning qiymatlarini kiritamiz. Ikkinchi ustunga $t=0$ va $t=1$ ga mos y ning qiymatlarini kiritamiz. $t=2$ ga mos y ning qiymatini hisoblash uchun B4 katakka tenglamani =0,2*B3^0,7+0,7*B2 ko'rinishda kiritiladi va qolgan kataklarga tegishli usulda bu formula davom ettiriladi. Hosil bo'lgan qiymatlar asosida y_t miqdorning dinamikasini ifodalovchi quyidagi grafikni hosil qilamiz.

	A	B
1	t	y_t
2	0	1
3	1	1,5
4	2	0,96564
5	3	1,245164
6	4	0,909127
7	5	1,058712
8	6	0,844538
9	7	0,918789
10	8	0,779663
11	9	0,811174
12	10	0,718511
13	11	0,726506
14	12	0,662876
15	13	0,658534
16	14	0,613304
17	15	0,603011
18	16	0,569678
19	17	0,556995
20	18	0,531552
21	19	0,512399



Grafikdan ko‘rish mumkinki, yechim tebranma harakat bilan kamayadi. Vaqt o‘tishi bilan tebranish so‘nadi. Yechim esa o‘zining turg‘un holatiga yaqinlashadi. Turg‘un qiymatning taqribiy qiymati 0,2588 ga teng.

Quyidagi 2-tartibli chiziqli bir jinsli chekli ayirmali tenglamani qaraylik

$$y_{t+2} + py_{t+1} + qy_t = 0. \qquad (9.39)$$

Bu tenglama yechimini $y_t = \lambda^t$ ko‘rinishda izlaymiz. $y_{t+1} = \lambda^{t+1}$, $y_{t+2} = \lambda^{t+2}$ larni tenglamaga qo‘ysak,

$$\lambda^{t+2} + p\lambda^{t+1} + q\lambda^t = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. $\lambda \neq 0$ shart ostida bundan

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

λ noma’lumga nisbatan kvadratik tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama (9.39) tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

Ma’lumki, bu kvadrat tenglamani yechishda uchta holat alohida qaraladi.

1) $D = p^2 - 4q > 0$ bo‘lsin. Bu holda kvadrat tenglama ikkita har xil haqiqiy ildizga ega

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D}$$

U holda (9.39) tenglamaning ikkita chiziqli erkli yechimi $y^{(1)} = \lambda_1^t$ va $y^{(2)} = \lambda_2^t$ ko‘rinishda bo‘ladi. Tenglamaning umumiy yechimi bu ikkita funksiyaning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi:

$$y_t = C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t.$$

2) $D = p^2 - 4q = 0$ bo‘lsin. Bu holda kvadrat tenglama ikkita bir xil haqiqiy ildizga ega bo‘ladi:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{p}{2}.$$

Bu holatda tenglamaning ikkita chiziqli erkli yechimi $y_1 = \lambda^t$ va $y_2 = t\lambda^t$ dan iborat va umumiy yechim quyidagicha yoziladi:

$$y_t = (C_1 + C_2 t)\lambda^t.$$

3) $D = p^2 - 4q < 0$ bo'lsin. Bu holda kvadrat tenglama ikkita kompleks qo'shma ildizlarga ega bo'ladi:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{|D|}.$$

Bu holatda yechim quyidagi ko'rinida yoziladi:

$$y_t = q^{t/2}\left(C_1 \cos\theta t + C_2 \sin\theta t\right).$$

Bu yerda θ quyidagi shartlar asosida topiladi:

$$\cos\theta = -\frac{p}{2\sqrt{q}}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2\sqrt{q}}.$$

27-misol. $y_{t+2} + 6y_{t+1} + 5y_t = 0$ tenglamaning $y_0 = 3$, $y_1 = -7$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamani tuzamiz

$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0.$$

Bu tenglama ikkita haqiqiy ildizga ega $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -5$. Demak, umumiy yechim quyidagicha bo'ladi.

$$y_t = C_1(-1)^t + C_2(-5)^t.$$

$y_0 = 3$, $y_1 = -7$ boshlang'ich shartlardan

$$C_1 + C_2 = 3, \quad C_1 + 5C_2 = 7$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Bundan, $C_1 = 2$, $C_2 = 1$.

Masalaning yechimi

$$y_t = 2(-1)^t + (-5)^t.$$

28-misol. $y_t - 6y_{t-1} + 9y_{t-2} = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

bo'lib, bitta ikki karrali $\lambda = 3$ ildizga ega. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y_t = (C_1 + C_2 t) \cdot 3^t.$$

29-misol. $y_{t+2} + 2y_{t+1} + 2y_t = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

ikkita kompleks qo'shma ildizga ega

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i.$$

$\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tengliklardan $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ni topamiz.

Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y_t = 2^{\frac{t}{2}}\left(C_1 \cos\frac{3\pi}{4}t + C_2 \sin\frac{3\pi}{4}t\right).$$

Bir jinsli bo'lmagan chiziqli chekli ayirmali tenglama deb quyidagi

$$y_{t+2} + py_{t+1} + qy_t = b(t)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bilan bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimi yig'indisiga teng, ya'ni

$$y_t = y_t^{bir\ jinsli} + y_t^{xususiy}.$$

Bir jinsli tenglamaning xususiy yechimini topishni biz yuqorida ko'rib chiqdik. Bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimini topishning noma'lum koeffitsiyentlar usulini ko'rib chiqamiz:

1) $b(t) = b = const$ bo'lsin. Bu holda yechimni quyidagicha topamiz: masalaning yechimini $y_t^{xus} = A$ ko'rinishda qidiramiz. U holda tenglamadan

$$A + pA + qA = b \qquad (9.40)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan, agar $1 + p + q \neq 0$ bo'lsa, $\bar{y} = \dfrac{b}{1+p+q}$ yechimni hosil qilamiz. Bu yechim tenglamaning turg'un yechimi deyiladi. Ko'rinib turibdiki, agar $1 + p + q = 0$ bo'lsa, turg'un yechim mavjud emas.

$1 + p + q = 0$, $p \neq -2$ bo'lsa yechimni $\bar{y}_t = Bt$ shaklda qidiramiz. Bu ifodani tenglamaga qo'ysak,

$$B(t+2) + Bp(t+1) + Bqt = b \implies B = \frac{b}{p+2}.$$

Ya'ni $\bar{y}_t = \dfrac{bt}{p+2}$ xususiy yechimni hosil qilamiz.

Agar $p = -2$, $q = -1$ bo'lsa, yechim $\bar{y}_t = Bt^2$ shaklda qidiriladi (bu holatda tenglamani $\Delta^2 y_t = b$ ko'rinishda yozish mumkin va bu ikkinchi tartibli hosilaga ekvivalent). Bu ifodani tenglamaga qo'ysak, $B = \dfrac{1}{2}b$. Demak, xususiy yechim $\bar{y}_t = \dfrac{bt^2}{2}$.

2) $b(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ ko'rinishda bo'lsin. Bu holatda xususiy yechimni $\bar{y}_t = (A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n)t^k$ shaklda qidiramiz. Bu yerda k $(k = 0,1,2)$ $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ xarakteristik tenglamada $\lambda = 1$ ildizning karraliligi. Agar $\lambda = 1$ son xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasa, $k = 0$ deb olinadi. Noma'lum $A_0, A_1, \ldots, A_n$ koeffitsiyentlarni topish uchun $\bar{y}_t$ xususiy yechimni (9.40) tenglamaga qo'yamiz va hosil bo'lgan ayniyatda o'xshash hadlarning koeffitsiyentlarini tenglashtirib, tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

3) $b(t) = a \cdot r^t$, $r \neq 1$, bo'lsin. Bu holatda yechimni $\bar{y}_t = At^k r^t$ ko'rinishda qidiramiz. Bu yerda k $(k = 0,1,2)$ $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ xarakteristik tenglamada $\lambda = r$ ildizning karraliligi. Agar $\lambda = r$ son xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasa, $k = 0$ deb olinadi. $\bar{y}_t$ xususiy yechimni (9.40) tenglamaga qo'yib noma'lum koeffitsiyentni topamiz.

30-misol. $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 10$ tenglamani yeching.

Yechish. $\lambda^2-3\lambda+2=0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari $\lambda_1=1$ va $\lambda_2=2$ dan iborat. Demak, bir jinsli tenglamaning yechimi

$$y_t=C_1+C_2 2^t.$$

Endi xususiy yechimni topamiz. $1+p+q=1-3+2=0$ bo'lganligi sababli yechimni $\overline{y}_t=At$ ko'rinishda qidiramiz. Bu yechimni tenglamaga qo'ysak,

$$A(t+2)-3A(t+1)+2At=10$$

tenglamani hosil qilamiz. Bundan $A=-10$, xususiy yechim $\overline{y}_t=-10t$ni hosil qilamiz. Tenglamaning umumiy yechimi

$$y_t=C_1+C_2 2^t-10t.$$

31-misol. $y_{t+2}+2y_{t+1}-8y_t=3t+1$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamani tuzamiz: $\lambda^2+2\lambda-8=0$. Bu tenglamaning ildizlari $\lambda_1=-4$ va $\lambda_2=2$. Bundan, bir jinsli $y_{t+2}+2y_{t+1}-8y_t=0$ tenglama yechimi

$$y_t=C_1(-4)^t+C_2 2^t.$$

Xususiy yechimni $\overline{y}_t=At+B$ ko'rinishda qidiramiz. Bu yechimni tenglamaga qo'yib quyidagini hosil qilamiz

$$A(t+2)+B+2A(t+1)+2B-8At-8B=3t+1.$$

yoki

$$-5At+(4A-5B)=3t+1.$$

Bu ayniyatda mos hadlarning koeffitsiyentlarini tenglashtirsak,

$$\begin{cases}-5A=3,\\ 4A-5B=1\end{cases}$$

tenglamalar sistemasini olamiz. Bundan, $A=-0,6$, $B=-0,68$. Demak, xususiy yechim $\overline{y}_t=-0,6t-0,68$, umumiy yechim

$$y_t=C_1(-4)^t+C_2 2^t-0,6t-0,68.$$

32-misol. $y_{t+2}-5y_{t+1}+6y_t=5\cdot 2^t$ tenglamani yeching.

Yechish. Xarakteristik tenglama $\lambda^2-5\lambda+6=0$. Uning yechimlari $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$. Bundan, bir jinsli tenglama yechimi

$$y_t=C_1 2^t+C_2 3^t.$$

$\lambda=2$ son xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lganligi sababli, tenglama yechimini $\overline{y}_t=At\cdot 2^t$ ko'rinishda qidiramiz. Bu yechimni tenglamaga qo'ysak,

$$A(t+2)\cdot 2^{t+2}-5A(t+1)\cdot 2^{t+1}+6At\cdot 2^t=5\cdot 2^t.$$

Bundan, $2A=5$, $A=2,5$ ni hosil qilamiz. Demak, xususiy yechim $\overline{y}_t=2,5t\cdot 2^t$. Tenglamaning umumiy yechimi

$$y_t=C_1 2^t+C_2 3^t+2,5t\cdot 2^t.$$

Samuelson-Xiks modeli bilan tanishib chiqamiz. Bu modelda investitsiya hajmi milliy daromadning o'sishiga proporsional deb qaraladi (akseleratsiya prinsipi). Bu faraz quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$I(t)=V\big(Y(t-1)-Y(t-2)\big) \qquad (9.41)$$

Bu yerda $V>0$ - akseleratsiya fartori, $I(t)$ - t davrdagi investitsiya miqdori, $Y(t-1)$, $Y(t-2)$ - mos holda $(t-1)$ va $(t-2)$ davrdagi milliy daromad miqdori. Talab ham oldingi davrdagi milliy daromad miqdoriga bog'liq deb qaraladi:

$$C(t)=aY(t-1)+b. \qquad (9.42)$$

Talab va taklif tengligidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$Y(t=)I(t)+C(t). \qquad (9.43)$$

(9.41) va (9.42) tenglikni e'tiborga olgan holda (9.43) ni quyidagicha yozib olamiz:

$$Y(t)=(a+V)Y(t-1)-VY(t-2)+b. \qquad (9.44)$$

Bu 2-tartibli chekli ayirmali tenglama Xiks tenglamasi deb ataladi.

Biz (9.44) tenglamaning xususiy yechimini topish uchun quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$Y(t)=Y(t-1)=Y(t-2)=Y^*. \qquad (9.45)$$

Bu yerda xususiy yechim sifatida $Y^*=const$ muvozanat yechimni olamiz. U holda

$$Y^*=(a+V)Y^*-VY^*+b,$$

$$Y^*=b(1-a)^{-1}. \qquad (9.46)$$

(9.46) formuladagi $(1-a)^{-1}$ ifoda Keyns mul'tiplikatori deb ataladi va u to'la xarajat matritsasining bir o'lchamli analogi hisoblanadi.

33-misol. $a=0{,}5$; $V=0{,}5$; $b=4$ shartlar asosida Samuelson-Xiks modelini qaraymiz. U holda (9.44) quyidagi ko'rinishga keladi:

$$Y(t)-Y(t-1)-0{,}5Y(t-2)=4.$$

U holda

$$y(t)=\frac{4}{1-0{,}5}=8.$$

ifoda bu tenglamaning xususiy yechimi bo'ladi. Xarakteristik tenglamani tuzib olamiz:

$$\lambda^2-\lambda+0{,}5=0.$$

Uning ildizlari:

$$\lambda_{1,2}=1\pm i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

U holda tenglamaning umumiy yechimi:

$$Y(t)=\left(\sqrt{2}\right)^t\left(C_1\cos\frac{\pi}{4}t+C_2\sin\frac{\pi}{43}t\right)+8.$$

9.6. Dinamik modellar

Bizga ma'lumki vaqt o'sishi bilan rivojlanib boruvchi jarayon dinamik jarayon deb ataladi. O'zida bu jarayonni aks ettiruvchi modellar esa dinamik modellar deb ataladi. Barcha dinamik modellarda $t-$ vaqt erkli o'zgaruvchi sifatida olinadi.

Dinamik sistemalarni matematik shakllantirish A.Puankarega (1854-1912) tegishlidir. Puankare modelida o'zgaruvchi sifatida fazo koordinatalari bilan birgalikda tezlik ham o'zgaruvchi bo'lib qatnashadi va sistemaning harakati to'liq va bir qiymatli aniqlanadi. Ya'ni fazoviy trayektoriyalar hech qachon kesishmaydi.

Iqtisodda uchraydigan dinamik modellar dinamik sistemalarga tegishli bo'lib, ular diskret va uzluksiz modellarga ajratib o'rganiladi. Diskret modellar chekli ayirmali tenglamalar va sistemalar, uzluksiz modellar esa differensial tenglamalar va sistemalar deb ataladi.

Biz bu mavzuda iqtisodiyotda uchraydigan ba'zi dinamik modellarni keltiramiz va ularning yechimlarini tahlil qilamiz.

$$y' = ay - by^2, \qquad (9.47)$$

ko'rinishdagi chiziqsiz tenglama logistika tenglamasi deb atalab, uning diskret ko'rinishi quyidagicha:

$$y(t+1) = ay(t) - by^2(t). \qquad (9.48)$$

Bu yerda $a,b > 0$. Bu tenglamalar Ferxyul'ste-Pirl modeli deb atalib biologik populyatsiya dinamikasini ifodalaydi va ular Mal'tus modelining al'ternetivi hisoblanadi. Bu tenglamalarni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{y'}{y} = a - by,$$

$$\frac{y(t+1)}{y(t)} = a - by(t).$$

U holda bu modellarning o'sish tempi y bo'yicha chiziqli bo'lib, kamayadi.

Yuqorida keltirilgan logistika modeliga ba'zi misollar ko'rib chiqamiz.

Reklamaning effektivligi. y qandaydir mintaqa aholisining reklama yordamida firma ishlab chiqargan mahsulotdan xabardor bo'lgan qismi bo'lsin. Aholining bu qismining o'sishida mahsulotda xabardor aholi va bu imkoniyatga ega bo'lgan aholi $(1-y)$ orasidagi axborot almashinishining intensivligi katta ahamiyatga ega. Demak, $y' = ay(1-y)$. Bu tenglamaning diskret ko'rinishi quyidagicha bo'ladi: $y(t+1) = y(t) + ay(t)(1-y(t))$. Bu yerda $a > 0$ axborot almashinishining intensivligini ko'rsatib, u firmaning reklamaga xarajati bilan bog'liq. Agar xaridorning mahsulot reklamasini esdan chiqarishini ham e'tiborga olsak, u holda tenglamaning o'ng tomoniga $(-cy)$, $c > 0$ qo'shiluvchini qo'shishimiz kerak bo'ladi.

Talab funksiyasini qurish uchun

$$E(D,I) = I\frac{D'(I)}{D(I)} \qquad (9.49)$$

elastiklik koeffitsiyenti uchun quyidagi gipotezalarni qabul qilishimiz kerak bo'ladi. Bu yerda $D = D(I)$ foyda.

a) $E(D,I) > 0$, ya'ni foyda oshishi talabning oshishiga olib keladi;

b) $E'_D(D,I) < 0$, ya'ni foyda doimiy bo'lganda talabning yuqori darajada qanoatlantirilishi iste'molning kamayishiga olib keladi;

c) $E_I'(D,I) > 0$ iste'mol darajasi o'zgarmas bo'lsa, foydaning o'zgarishiga bo'lgan munosabat foydaning darajasiga bo'lgan munosabatdan yuqori bo'ladi.

U holda a) va b) gipotezalardan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$E(D,I) = aI(M-D). \qquad (9.50)$$

Bu yerda $a,\ M>0$, $0<D<M$, chunki $E>0$. Shunday qilib, (9.50) va (9.49) dan quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{dD}{dt} = aD(M-D). \qquad (9.51)$$

Bozorga moslashish modeli. t vaqtdagi mahsulot narxini $p(t)$, talab va taklif funksiyalarini mos rayishda $D(p)$, $S(p)$ belgilaymiz. U holda $z(p) = D(p) - S(p)$ ortiqcha talab funksiyasi bo'ladi. Faraz qilamiz, narx ortiqcha talab bilan aniqlansin. U holda bu faraz quyidagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$p' = aF(z(p)). \qquad (9.52)$$

Bu tenlamaning diskret ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$p(t+1) = p(t) + aF(z(p(t))).$$

Bu yerda $a>0$ adaptatsiya parametri bo'lib, u bozorda balans o'zgarishiga nisbatan narxning reaksiyasini ko'rsatadi. $F(z)$ funksiya esa quyidagi xossalarga ega $F(0)=0$, $F(z)>0$, agar $z>0$ bo'lsa, $F(z)<0$, agar $z<0$ bo'lsa.

Xavel'mo modeli (siklik o'sish modeli). Bu model o'z ichiga darajali ishlab chiqarish modeli

$$Y = AL^{\alpha},\quad \alpha\in(0,1),\quad A>0$$

va bandlik dinamikasi tenglamasini

$$\frac{L'}{L} = a - b\frac{L}{Y}.$$

oladi. Yuqoridagi ikki tenglamadan Bernulli tenglamasini hosil qilamiz:

$$L' = aL - \frac{B}{A}L^{2-\alpha} \qquad (9.53)$$

IS-LM modeli. IS-LM modeli tovar va pul (kapital) bozorlaridagi muvozanat holatlarini umumlashtirgan holda makroiqtisodiy muvozanatni ifodalovchi modeldir. Bunda tovar bozori (IS) va pul bozori (LM) egri chiziqlari bilan ifodalanadi.

Neoklassik iqtisodiy o'sish (Solou) modeli bilan tanishamiz. Yetarlicha uzoq vaqtda iqtisodiy o'sishning darajasi qanday? Bu savolga javob berish maqsadida iqtisodiy o'sish nazariyasi paydo bo'ldi va shu bugungacha rivojlanib kelmoqda. Bu nazariyaning muhim modellaridan biri Nobel mukofoti lauriati Robert Solou tomonidan kiritilgan va zamonaviy nazariyada ham muhim modellardan hisoblanib kelayotgan neoklassik iqtisodiy o'sish modelini qaraymiz.

Bu nazariyada bir birlik aholi boshiga to'g'ri keladigan ishlab chiqarish $k = \dfrac{K}{L}$ o'zgaruvchining funksiyasi deb qaraladi, bunda $K-$ kapital mablag'ni,

L — mehnatga jalb etilgan aholi soni. Bu munosabatni quyidagi funksional munosabat ko'rinishida ifodalaymiz

$$y = f(k) = f\left(\frac{K}{L}\right).$$

$f(k)$ funksiya qavariq va o'suvchi deb qaraladi, ya'ni $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$. Ishlab chiqarilgan Y mahsulot miqdori iste'mol qilinadi yoki iqtisod qilinadi. Iqtisod qilingan mahsulot iqtisodga kiritilgan kapitalga aylanadi. Kapitalning ishlab chiqarish natijasida ortishi S koeffitsiyent bilan ifodalansin, ya'ni

$$\dot{K} = sY.$$

$k = \dfrac{K}{L}$ dan

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{L\dot{K}}{L^2} - \frac{\dot{L}K}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - k\frac{\dot{L}}{L}.$$

Ishchi kuchi o'zgarmas n darajada ortadi, ya'ni, $\dot{L} = nL$ bo'lsa,

$$\dot{k} = s\frac{Y}{L} - nk.$$

Yuqoridagi y ning ta'rifiga asosan, $y = \dfrac{Y}{L}$ ni hisobga olsak,

$$\dot{k} = sf(k) - nk$$

bu tenglama neoklassik o'sish (Solou) modeli deb yuritiladi. Tenglamaning turg'un (o'zgarmas) yechimi $\dfrac{f(k)}{k} = \dfrac{n}{s}$ tenglamadan topiladi. Bu yechim yagonadir.

34-misol. Yalpi ichki mahsulot Kobb-Duglas funksiyasi bilan ifodalansin

$$Y = A \cdot K^{\alpha} L^{\beta}.$$

Bunda A bir birlik kapital va bir birlik ishchi kuchi bilan ishlab chiqarilgan mahsulotni ifodalovchi o'zgarmas son, α va β lar kapital va ishchi kuchining elastik koeffitsiyentlari. Odatda $\alpha + \beta = 1$, $\beta = 1 - \alpha$ deb olamiz. U holda

$$y = \frac{Y}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = Ak^{\alpha}.$$

Bu holatda neoklassik o'sish modeli quyidagicha:

$$\dot{k} = Ask^{\alpha} - nk$$

Bernulli tenglamasiga keladi. Bu tenglamani yechishni ko'rib chiqamiz.
$k^{1-\alpha}(t) = z(t)$ belgilash kiritsak,

$$\dot{z} = -\frac{n}{1-\alpha}z + \frac{As}{1-\alpha}$$

birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning turg'un yechimi

$$\bar{z} = \frac{As}{n}$$

ga teng. Bunga mos dastlabki tenglamaning turg‘un yechimi $\bar{k}=\left(\frac{As}{n}\right)^{1-\alpha}$.

$$\dot{z}=-\frac{n}{1-\alpha}z$$

bir jinsli chiziqli tenglamani yechamiz

$$\frac{dz}{z}=-\frac{n}{1-\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|z|=-\frac{nt}{1-\alpha}+const \quad \Leftrightarrow \quad z=C\cdot e^{-\frac{nt}{1-\alpha}}$$

ni hosil qilamiz. Demak, umumiy yechim

$$z=C\cdot e^{-\frac{nt}{1-\alpha}}+\frac{As}{n}.$$

Bundan, aholi boshiga mos ishlab chiqarilgan mahsulot

$$k(t)=\left(C\cdot e^{-\frac{nt}{1-\alpha}}+\frac{As}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

$k(0)=k_0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimni topamiz.

$$k(0)=\left(C+\frac{As}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=k_0,$$

$$C=k_0^{1-\alpha}-\bar{k}^{1-\alpha}.$$

Demak, yechim $k(t)=\left((k_0^{1-\alpha}-\bar{k}^{1-\alpha})\cdot e^{-\frac{nt}{1-\alpha}}+\bar{k}^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$,

bu yerda $\bar{k}=\left(\frac{As}{n}\right)^{1-\alpha}$.

$t\to\infty$ da $e^{-\frac{nt}{1-\alpha}}\to 0$. Shu sababli yechim o‘zining turg‘un holatiga yaqinlashadi, ya’ni $\lim\limits_{t\to\infty}k(t)\to\bar{k}$.

Yirtqich va o‘lja modeli. Bu modeldan birinchi marotaba biologik jarayonlarni va hayvonlar populyatsiyasi (soni) ning dinamikasini o‘rganishda foydalanilgan bo‘lib, u ikkita faktor, tabiiy o‘sish faktori bilan birgalikda har xil yirtqichlar, kasalliklar, epidemiyalar ta’sirida kamayishni hisobga oladi. Keyinchalik bu model aholi sonining dinamikasini o‘rganishda, iqtisodiyot masalalarida qo‘llanila boshlagan. Iqtisodiy dinamik jarayonlarda yirtqich sifatida narxning ortishi va konkurensiya sharoiti, potensial mijozlar sonining chegaralanganligi qaralishi mumkin.

Bu model quyidagicha ikkita tenglamadan iborat

$$\dot{x}=(b-py)x,$$

$$\dot{y}=(dx-r)y$$

tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadi. Bu tenglamada x o‘ljani ifodalasa, y yirtqichni ifodalaydi. Agar $y=0$ bo‘lsa, yirtqich yo‘qligi sababli, x tabiiy eksponensial ravishda o'sadi. Agar $x=0$ bo'lsa, yemish yo'qligi sabab, y eksponensial ravishda kamayadi. Ya'ni a va r koeffitsiyentlar erkin o'sish va kamayishni ifodalaydi. p va q lar esa x va y orasidagi bog'liqlikni ifodalaydi. Bu ko'rinishdagi bog'liqliklarni keyingi kurslarda bo'ladigan ekonometrika usullari (regressiya tenglamasi) yordamida topish mumkin.

Odatda tenglamalar sistemasining yechimini topish uchun boshlang'ich shartlar, ya'ni noma'lum funksiyalarning $t=0$ dagi $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$ qiymatlarini berish kerak bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash bir nechta yirtqich va bir nechta o'ljadan iborat sistemani ham qarash mumkin. Yuqoridagi sistemani yechish uchun uni quyidagicha diskretlashtiramiz. $[0,T]$ vaqt oralig'ini $t_k = h \cdot k$, $h = T/n$, $k = 0,1,2,\dots,n$ nuqtalar bilan teng n ta bo'lakka bo'lamiz. $x(t_k)=x_k$, $y(t_k)=y_k$ belgilashlar kiritamiz va tenglamalardagi hosilalarni

$$\dot{x}(t_k) \approx \frac{x_{k+1}-x_k}{h}, \quad \dot{y}(t_k) \approx \frac{y_{k+1}-y_k}{h}$$

taqribiy qiymatlar bilan almashtiramiz va

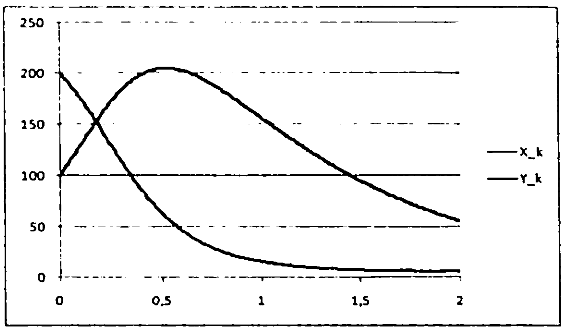
$$x_{k+1} = (bh+1)x_k - phx_k y_k,$$

$$y_{k+1} = dhx_k y_k + (1-rh)y_k$$

chekli ayirmali tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasini Excel dasturida ketma-ket qiymatlarni topib, kerakli $t=T$ davrdagi funksiyaning qiymatlarini topamiz. h ni yetarlicha kichik qilib olinsa, bu taqribiy yechim aniq yechimga juda yaqin bo'ladi.

Tenglamalar sistemasi Excel dasturida quyidagicha yechiladi:

	A	B	C	D	F–G	H–I
1	k	t	X_k	Y_k	h= 0,01	
2	0	0	200	100	b= 1	p= 0,02
3	1	0,01	198	102,8	d= 0,02	r= 1,2
4	2	0,02	195,9091	105,6373	bh+1= 1,01	ph= 0,0002
5	3	0,03	193,7291	108,5087	dh= 0,0002	1-rh= 0,988
6	4	0,04	191,4622	111,4108		
7	5	0,05	189,1106	114,3401		
8	6	0,06	186,6771	117,2926		
9	7	0,07	184,1647	120,2643		
10	8	0,08	181,5767	123,2508		
11	9	0,09	178,9166	126,2477		
12	10	0,1	176,1882	129,2503		
13	11	0,11	173,3956	132,2537		
14	12	0,12	170,5431	135,2531		
15	13	0,13	167,6352	138,2434		
16	14	0,14	164,6767	141,2194		
17	15	0,15	161,6723	144,1758		
18	16	0,16	158,6272	147,1076		
19	17	0,17	155,5464	150,0093		
20	18	0,18	152,4352	152,8759		
21	19	0,19	149,2988	155,7021		
22	20	0,2	146,1426	158,4829		
23	21	0,21	142,9718	161,2134		
24	22	0,22	139,7917	163,8886		
25	23	0,23	136,6076	166,504		



Ba'zi modellarda bitta o'zgaruvchi (funksiya) yirtqich va o'ljani ifodalashi mumkin. Misol uchun, aholi sonining dinamikasini o'rganganimizda aholi soni ortishi yashash uchun zarur ozuqa moddalarning tanqisligiga olib keladi. Bunda aholi soni har ikkala vazifani bajarmoqda. Yoki, ma'lum tovarni sotishdan olinadigan daromadni qarasak, narx ortishi bilan daromad ortadi, biroq narxning oshishi oqibatida bu tovarga talab kamaya boradi va bu teskari effektni ham beradi.

Bunday holatlarni

$$\dot{y} = y(a - by)$$

ko'rinishdagi bitta tenglama bilan ifodalanadi.

Bu tenglama 1-tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama yoki Rikkati tenglamasi sifatida qaralishi mumkin.

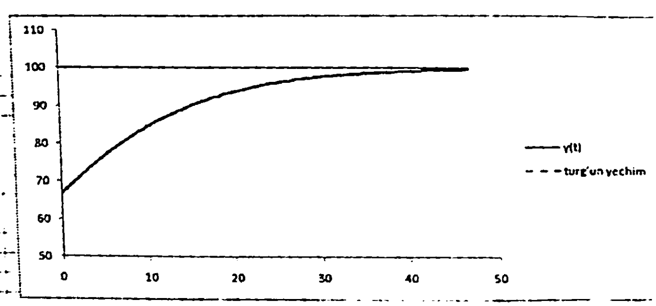
Tenglamani o'zgaruvchilarni ajratish usulida yechamiz.

$$\frac{dy}{y(a-by)} = dx \Leftrightarrow \ln\frac{by}{a-by} = at + const \Leftrightarrow y = \frac{ace^{at}}{b + bce^{at}}.$$

bunda $c = const$. Bu yechim $t \to \infty$ da o'zining turg'un yechimi $\overline{y} = \frac{a}{b}$ ga yaqinlashadi. Quyida bu funksiyaning Excel dasturida chizilgan grafigini keltiramiz.

	A	B	C
1	t	y(t)	turg'un yechim
2	0	66,66666667	100
3	0,5	67,76836743	100
4	1	68,85066915	100
5	1,5	69,91276343	100
6	2	70,95392129	100
7	2,5	71,97349346	100
8	3	72,97091011	100
9	3,5	73,94568001	100
10	4	74,89738928	100
11	4,5	75,82569964	100
12	5	76,73034624	100
13	5,5	77,61113515	100
14	6	78,46794058	100
15	6,5	79,30070177	100
16	7	80,10941973	100
17	7,5	80,89415373	100
18	8	81,65501773	100
19	8,5	82,3921767	100
20	9	83,10584287	100
21	9,5	83,796272	100
22	10	84,46375965	100
23	10,5	85,10863748	100
24	11	[illegible]	100

a= 0,1 a/b= 100
b= 0,001
c= 2



Bunda biz $a = 0{,}1,\ b = 0{,}001,\ y(0) = 66\frac{2}{3}$ deb olingan. Grafikdan ko'rinadiki, yechim vaqt o'tishi bilan o'zining turg'un yechimi $\overline{y} = 100$ ga yaqinlashadi.

9-bobga doir savollar

1. Oddiy differensial tenglama, deb qanday tenglamalarga aytiladi?
2. Differensial tenglama tartibi, deganda nima tushuniladi?
3. Differensial tenglama yechimi, deganda qanday funksiya nazarda tutiladi?

4. Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari, deb qanday yechimlarga aytiladi?
5. Tenglamani integrallash nimani anglatadi?
6. Tenglama umumiy yechimida ixtiyoriy o'zgarmaslar soni bilan tenglama tartibi qanday munosabatda?
7. Koshi masalasi, deganda qanday masala tushuniladi?
8. Koshi masalasi yechimining mavjudlik va yagonalik shartlarini bayon qiling.
9. Differensial tenglamaning maxsus nuqtalari va maxsus yechimlari, deganda nimalar tushuniladi?
10. O'zgaruvchilari ajralgan yoki ajraladigan differensial tenglamalarga misollar keltiring.
11. Bir jinsli differensial tenglama, deb qanday tenglamaga aytiladi va uni yechish usulini tushuntirib bering.
12. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama, deganda qanday tenglama tushuniladi?
13. Bir jinslimas chiziqli differensial tenglama umumiy yechimi ixtiyoriy o'zgarmaslarni variatsiyalash usulida qanday quriladi?
14. Bernulli tenglamasini yozing va u qanday yechiladi?
15. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama, deb qanday ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi?
16. Bir jinsli tenglamaning farqli jihati nimadan iborat?
17. Chiziqli – bog'liq, chiziqli erkli funksiyalarni ta'riflang.
18. Vronskiy aniqlovchisini yozing va uni nimani aniqlashda qo'llash mumkin?
19. Fundamental yechimlar sistemasi, deganda nima tushuniladi?
20. Bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini qurishning qanday sodda usuli mavjud?
21. Xarakteristik tenglama qanday tuziladi?
22. Chekli ayirmali tenglama, deb qanday tenglamalarga aytiladi?
23. Chekli ayirmali tenglama tartibi, deganda nima tushuniladi?
24. Birinchi tartibli chiziqli chekli ayirmali tenglama.
25. Narx moslashuvchanligi Cobveb modelini tushuntiring.
26. Chiziqli bir jinsli chekli ayirmali tenglama.
27. Chiziqli bir jinsli chekli ayirmali tenglamaning xarakteristik tenglamasi.
28. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli chekli ayirmali tenglama.
29. Ikkinchi tartibli Cobveb modelining mohiyatini ayting.
30. Neoklassik iqtisodiy o'sish (Solou) modelini tushuntiring.
31. Yirtqich va o'lja modeli qanday tuziladi?

9-bobga doir misol va masalalar

1. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalarning umumiy yechimini (umumiy integralini) toping.

a) $(1+y)dx-(1-x)dy=0.$

b) $\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0.$

c) $xyy' = 1 - x^2$.

d) $y'(1+y) = xysinx$.

2. Differensial tenglamalarning xususiy yechimini toping.

a) $x^2dy - y^2dx = 0,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

b) $1 + y^2 = xyy',\ y(2) = 1$.

c) $(x + xy^2)dx + (x^2y - y)dy = 0,\ y(0) = 1$.

d) $y'(x^2 - 2) = 2xy,\ y(2) = 2$.

e) $cosx\, siny\, dy = cosy\, sinx\, dx,\ y(\pi) = \pi$.

3. Bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimini (umumiy integralini) toping.

a) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

b) $\sqrt{y}\left(2\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)dx + xdy = 0$;

c) $xy' - y(\ln y - \ln x) = 0$;

d) $xy' + xtg\dfrac{y}{x} = y$.

4. Chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini (umumiy integralini) toping.

a) $y' + 2y = 3e^x$;

b) $(1 + x^2)y' + 2xy = 3x^2$;

c) $y' + ycosx = sin2x$;

d) $y'e^{x^2} - \left(xe^{x^2} - y^2\right)y = 0$.

5. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping.

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$;

b) $y'' - 2y' + y = 0$;

c) $y'' - 6y' + 13y = 0$.

6. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping.

a) $y'' + 5y' + 4y = 8x^2 - 4x - 14$;

b) $y'' - y' = 2x$;

c) $y'' + 4y' + 20y = 34e^{-x}$;

d) $y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x}$;

e) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$;

f) $y'' - 2y' + 2y = -85\cos 3x$;

g) $y'' + y = 2\sin x$;

h) $y'' + 3y' - 4y = e^x \cos x$.

7. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasining umumiy yechimini toping.

a) $\begin{cases} y' = -y + z \\ z' = 4y - z \end{cases}$ b) $\begin{cases} y' = 5y - 2z \\ z' = 13y - 5z - \sin x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y' = z + 1 \\ z' = y + 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = 3z - 2y \end{cases}$

8. Agar elastiklik $E_r = -\dfrac{1}{2}$ o'zgarmas va talabning $y = 2$ qiymatida $p = 5$ narx berilgan bo'lsa, $y = y(p)$ talab funksiyasini toping.

9. Agar talabning $y = 10$ qiymatida narx $p = 90$ berilgan hamda elastiklik $E_r = \dfrac{y - 100}{y}$, $0 < y < 100$ ko'rinishda bo'lsa, talab funksiyasini toping.

10. Tog' ruda posyolkasi aholisining soni vaqt o'tishi bilan o'zgarishi $y' = 0{,}3y(2 - 10^4 y)$ tenglama bilan ifodalanadi, bu yerda $y = y(t)$, t – vaqt (yillarda). Vaqtning boshlang'ich momentida posyolka aholisi 500 odamni tashkil etgan. Uch yildan so'ng u qanday bo'ladi.

11. Talab va taklif funksiyalari mos ravishda $y = 25 - 2p + 3\dfrac{dp}{dt}$ va $x = 15 - p + 4\dfrac{dp}{dt}$ ko'rinishiga ega. Agar boshlang'ich momentda $p = 9$ bo'lsa, muvozanat narx bilan vaqt o'rtasidagi bog'liqlikni toping.

12. Agar ishlab chiqarish hajmi (investitsiyalar normasi 0,6, sotilish bahosi 0,15 va $l = 0{,}4$ shartlarda) vaqtning boshlang'ich momentida $y_0 = y(0) = 24$ (shart.bir) ni tashkil etgan bo'lsa, to'yinmagan bozor sharoitda 6 oyda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini toping.

13. Tovar narxi $p(y) = (5 + 3e^{-y})y^{-1}$, $m = 0{,}6$, $l = 0{,}4$, $y(0) = 1$ funksiya bilan beriladi, deb faraz qilib, sotilayotgan mahsulot hajmi bilan vaqt orasidagi $y = y(t)$ bog'liqlikni toping.

Tayanch so'z va iboralar: differensial tenglama, differensial tenglama tartibi, differensial tenglama yechimi, umumiy yechim, xususiy yechim, Koshi masalasi, maxsus nuqta, maxsus yechim, o'zgaruvchilari ajralgan yoki ajraladigan differensial tenglama, bir jinsli differensial tenglama, chiziqli differensial tenglama, o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama, chiziqli erkli funksiyalar, chiziqli bog'liq funksiyalar, funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi, Vronskiy aniqlovchisi, bir jinsli chiziqli differensial tenglama, fundamental yechimlari sistemasi, xarakteristik tenglama, chekli ayirma, diskret miqdor, chekli ayirmali tenglama, diskret dinamik jarayonlar, dinamik jarayon, dinamik o'zgaruvchi.

10-BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI

10.1. Elementar hodisalar fazosi. Ehtimolning ta'riflari

Ehtimollar nazariyasi hozirgi zamon matematikasining muhim tarmoqlaridan biridir. Ehtimollar nazariyasi fanining paydo bo'lishiga qimor o'yinlarining matematik modellarini va nazariyasini yaratish yo'lidagi izlanishlar turtki bo'ldi. Bu fanning dastlabki tushunchalari shakllangan davr XVI-XVII asrlar bo'lib, Kardano, Gyuygens, Paskal, Ferma kabi olimlarning nomlari bilan bog'liqdir.

Ehtimollar nazariyasining keyingi rivojlanish davri Yakob Bernulli (1654-1705) nomi bilan bog'liq. U isbotlagan va keyinchalik "Katta sonlar qonuni" nomini olgan teorema oldingi to'plangan faktlarning birinchi nazariy asoslanishi edi. Ehtimollar nazariyasining keyingi yutuqlari Muavr, Laplas, Puasson kabi olimlarning nomlari bilan bog'liq.

XIX asrning ikkinchi yarmidan boshlab ehtimollar nazariyasining rivojlanishiga V.Ya.Bunyakovskiy, P.L.Chebishev, A.A.Markov, A.M.Lyapunov kabi rus olimlari o'z ilmiy izlanishlari bilan katta hissa qo'shdilar. Fanning mustaqil fan bo'lib uyg'unlashishida va keyingi rivojida S.N.Bernshteyn, V.I.Romanovskiy, A.N.Kolmogorov, A.Ya.Xinchin, B.V.Gnedenko, N.V.Smirnov va boshqalarning xizmatlari katta bo'ldi.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining O'zbekistonda o'z o'rnini topishida va rivojlanishida V.I.Romanovskiy, S.X.Sirojiddinov va T.A.Sarimsoqov kabi olimlarining hissalari behisobdir. Hozirgi kunda ularning shogirdlari tomonidan ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani bo'yicha ham nazariy, ham amaliy tadqiqotlar davom ettirilmoqda.

Ehtimollar nazariyasining dastlabki tushunchalari – tajriba, hodisa, elementar hodisa, ehtimollik, nisbiy chastota kabi tushunchalar bo'lib, ularni bayon qilishga o'tamiz.

Tajriba hodisani ro'yobga keltiruvchi shartlar majmui S ning bajarilishini ta'minlashdan iboratdir.

Tajribaning har qanday natijasi hodisadir. Kuzatilayotgan hodisalarni 3 turga ajratish mumkin: muqarrar, mumkin bo'lmagan va tasodifiy.

Ma'lum S shartlar majmui asosida, albatta, ro'y beradigan hodisaga ***muqarrar*** hodisa deb ataladi va Ω bilan belgilanadi. Masalan, "-10° temperaturada (normal atmosfera bosimi ostida) suv muz holatda bo'ladi" hodisasi muqarrar hodisadir.

S shartlar majmuida hech qachon ro'y bermaydigan hodisa ***mumkin bo'lmagan*** hodisa deb ataladi va $\varnothing$ belgi bilan belgilanadi. Masalan, "-10° temperaturada (normal atmosfera bosimi ostida) suv suyuq holatda bo'ladi" hodisasi mumkin bo'lmagan hodisadir.

Ma'lum bir S shartlar asosida ro'y beradigan, yoki ro'y bermaydigan hodisa ***tasodifiy*** hodisa deb ataladi va lotin alfavitining katta $A,B,C,...$ harflari bilan belgilanadi. Masalan, "10° temperaturada yomg'ir yog'adi" hodisasi tasodifiy hodisadir.

1-misol. Tajriba o'yin kubigi (shashqoltosh) bir marta tashlash bo'lsin. Bu holda: Ω={tushgan ochko 6 dan katta emas} – muqarrar hodisa; $\varnothing$={tushgan ochko 9 ga teng} – mumkin bo'lmagan hodisa; A = {tushgan ochko juft son} – tasodifiy hodisadir.

Ehtimollikni talqin etish uchun quyida beriladigan oddiy misollardan boshlaymiz. Bu misollar yordamida ehtimollik tushunchasi mohiyatini ochib beruvchi uning muhim ta'riflarini keltirib o'tamiz.

Faraz qilaylik, tanga bir marta tashlandi va "raqam" tomoni bilan tushdi. Bunday natija ***kuzatish*** deyiladi hamda kuzatishni amalga oshirish jarayoni esa ***tajriba*** deb ataladi. Probirka, mikroskop va boshqa laboratoriya jihozlarini esga soluvchi fizika fanlaridan farqli ravishda biz ifodalagan tajriba mohiyati ancha chuqurroq ma'no kasb etadi. Statistik tajribalarga internet foydalanuvchilarning qaysi Web brauzerni ma'qul ko'rishlarini va siyosiy saylovlarda saylovchilarning fikrlarini qayd etib borish, ifloslangan daryodagi kislorod eritmasi miqdorini aniqlash, test topshiruvchining bezovtalanishini kuzatish, qaydnomalardagi yo'l qo'yilgan xatoliklar miqdorini hisoblash hamda hasharotlarga qarshi yangi vositalar yordamida yo'q qilingan hasharotlar ulushi kabilar kiradi. Statistik tajribaning xususiyati shundan iboratki, natijasi noma'lum bo'lgan kuzatishni amalga oshirishdir.

Tajriba kuzatishni amalga oshirish jarayoni hisoblanib, yagona natijaga olib keladi.

Shashqoltoshni tashlashdan va uning ochko tomoni bilan tushishidan iborat soddaroq tajribani ko'rib chiqamiz. Tajribaning oltita natijasi quyidagicha bo'ladi:

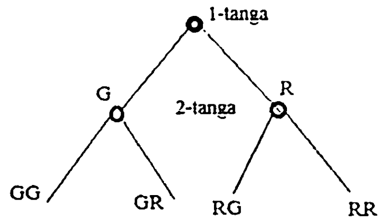
1. "Bir" ochko tushishi.
2. "Ikki" ochko tushishi.
3. "Uch" ochko tushishi.
4. "To'rt" ochko tushishi.
5. "Besh" ochko tushishi.
6. "Olti" ochko tushishi.

Shuni yodda tutish lozimki, agar tajriba bir marta o'tkazilayotgan bo'lsa, yuqoridagi oltita natijadan faqat bittasi ro'y berishi mumkin hamda natijani aniq oldindan bilish mumkin emas.

Demak, tajribada tasodifiy hodisaning ro'y berishini oldindan aytib bo'lmaydi. Tajribaning har qanday natijasi ***elementar*** hodisa deb ataladi va ω bilan belgilanadi. Tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha hodisalar to'plami ***elementar hodisalar fazosi*** deb ataladi va Ω bilan belgilanadi.

2-misol. Ikkita tanga tashlandi va ularning tushgan tomonlari aniqlandi. Tajribaning barcha elementar hodisalarini ko'rib chiqing.

Yechish. Hatto ahamiyatsizdek ko'ringan tajribaning ham elementar hodisalar to'plamini tuzayotganda e'tiborliroq bo'lishimiz kerak. Bir qarashda uchta natijadan bittasini kutishimiz mumkin: tanganing ikkita "raqam"; ikkita "gerb"; yoki bitta "raqam" va bitta "gerb" tomonlari bilan tushishini. Tanganing bitta "raqam" va bitta "gerb" tomoni bilan tushishi yana ikkita natijaga: birinchi tanganing "raqam", ikkinchi tanganing "gerb" va birinchi tanganing "gerb", ikkinchi tanganing "raqam" tomonlari bilan tushishiga



Diagrammaning yuqori qismi tangani birinchi tashlashda ikkita natija ("raqam" yoki "gerb") ga bo'linadi. Ikkinchi tangani tashlashda ham sinov natijalari ikki qismga ajraladi. Shunday qilib, tangalar tashlangandan so'ng to'rtta elementar hodisa ro'y beradi.

1. Tanganing RR tomoni bilan tushishi;
2. Tanganing RG tomoni bilan tushishi;
3. Tanganing GR tomoni bilan tushishi;
4. Tanganing GG tomoni bilan tushishi.

Bu yerda, R birinchi tangani tashlashda "raqam" tomoni bilan tushishi, G esa ikkinchi tangani tashlashda "gerb" tomoni bilan tushishidir.

3-misol. Agar tanga uch marta tashlansa, u holda

$$\omega_1 = (ggg), \omega_2 = (ggr), \omega_3 = (grr), \omega_4 = (rrr)$$

$$\omega_5 = (rrg), \omega_6 = (rgg), \omega_7 = (rgr), \omega_8 = (grg)$$

Elementar hodisalar fazosi sakkizta elementdan iborat.

4-misol. Tajriba shashqoltoshni ikki marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bu holda $\omega_{ij} = (ij)$ bo'lib, i birinchi va j ikkinchi tashlashda tushgan ochkoni bildiradi: $\Omega = \{\omega_{ij}\}, i, j = \overline{1,6}$. Elementar hodisalar soni: $n = 36$.

5-misol. Tajriba nuqtani $[a,b]$ kesmaga tashlashdan iborat bo'lsin. Bunda $\Omega = [a,b]$. Kesmadagi barcha nuqtalardan iborat bo'lib elementar hodisalar soni cheksizdir.

Shunday qilib, ehtimollar nazariyasi fanining predmeti: ommaviy bir jinsli tasodifiy hodisalar ro'y berishining ehtimollik qonuniyatlarini o'rganishdir.

Yuqorida aytilganidek, tajribaning natijasi hodisadir. Masalan, mergan nishonga o'q uzmoqda, bunda o'qning uzilishi – tajriba bo'lsa, o'qning nishonga tegishi esa hodisa bo'ladi.

Ertaga Toshkent shahrida nechta yo'l transport hodisasi ro'y beradi? Tez yordam punktlariga nechta bemor qo'ng'iroq qiladi? Murakkab texnik qurilmani sozlash uchun qancha vaqt talab qilinadi? Bu kabi savollarning bir xil o'xshashligi bor, bu savollarga aniq javob berib bo'lmaydi. Chunki bu voqealarga ta'sir etuvchi faktorlar to'liq aniqlanmagan. Haqiqatan ham, birgina yo'l transport hodisasini ro'y berishi bir nechta faktorlarga bog'liq: ob-havo, yo'lning holati, yo'lning yoritilganlik darajasi, haydovchi va piyodalarning psixologik holatlari, avtomobillarning yo'ldagi joylashuvi va hokazo. Barcha shu kabi holatlarda bizni qiziqtirgan hodisalar tasodifiydir.

Biz yuqorida hodisalarni uch turga bo'lgan edik. O'z navbatida tasodifiy hodisalar ham bir necha turlarga ajratiladi.

Bitta tajribada biror tayin hodisaning ro'y berishi tajribaning qolgan hodisalarining ro'y berishini yo'qqa chiqarsa, bunday hodisalarga birgalikda bo'lmagan hodisalar deb aytiladi.

6-misol. Tanga tashlanadi. "Gerb" tomon tushishi "raqam" tomon tushishini yo'qqa chiqaradi va aksincha. "Gerb" tushishi va "raqam" tushishi hodisalari birgalikda bo'lmagan hodisalardir.

7-misol. O'yin kubigi tashlanadi. Bunda $\Omega=\{\omega_i\},\left(i=\overline{1,6}\right)$ to'plamda 6 ta elementar hodisa bo'lib, ular birgalikda bo'lmagan hodisalardir.

2-5-misollardagi elementar hodisalar ham birgalikda bo'lmagan hodisalardir. Agar tajriba natijasida bir nechta hodisalardan bittasi va faqat bittasining ro'y berishi muqarrar hodisa bo'lsa, u holda bu hodisaga yagona mumkin bo'lgan hodisalar deyiladi.

Agar bir nechta hodisalardan hech qaysi birining ro'y berish imkoniyati boshqalariga nisbatan kattaroq deyishga asos bo'lmasa, ular teng imkoniyatli hodisalar deyiladi. Yuqoridagi 6-misolda "gerb" tushishi va "raqam" tushishi hodisalari teng imkoniyatli hodisalardir. Bu tasdiq 2-7-misollardagi har bir elementar hodisa uchun ham o'rinli.

Ehtimol tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, uning bir nechta ta'rifi mavjud.

Umumiy qilib aytganda, ehtimol – tasodifiy hodisaning ro'y berish imkoniyatini miqdoriy jihatdan xarakterlovchi sondir. Quyida ehtimolning klassik ta'rifini keltiramiz.

Dastlab quyidagi misolni ko'rib chiqamiz. Qutida 10 ta: 4 ta qizil, 4 ta ko'k, 2 ta oq shar bo'lsin. Qutidan tasodifiy tarzda shar olinganda uning rangli bo'lish imkoniyati oq bo'lishiga qaraganda ko'proqligi aniq. Bu imkoniyatni son bilan ifodalaymiz va uni hodisaning ro'y berish ehtimoli deb ataymiz. Shunday qilib, hodisaning ro'y berish imkoniyatini xarakterlovchi son hodisaning ro'y berish ehtimoli deb ataladi. Bu misolda qutidan tasodifiy ravishda shar olinganda uning rangli bo'lish ehtimolini topamiz. Olingan sharning rangli (hozir ham, keyinchalik ham rangli shar deb oq shardan boshqa rangdagi sharlarni tushunamiz) bo'lishini A hodisa sifatida qaraymiz. Tajribaning har bir natijasini ω_i elementar hodisa deb qaraymiz. Bizning misolda 10 ta elementar hodisa mavjud: ω_1,ω_2-oq shar olindi; $\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6$-qizil shar olindi; $\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}$-ko'k shar olindi. Ko'rinib turibdiki, ω_i hodisalar teng imkoniyatlidir. Bizni qiziqtirayotgan hodisaning ro'y berishiga olib keladigan elementar hodisalarni bu hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar deb ataymiz. Bizning misolimizda A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar 8 ta:

$$\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}.$$

Shunday qilib, A hodisaga qulaylik tug'diruvchi hodisalardan qaysi biri bo'lishidan qat'i nazar bittasi ro'y bersa A hodisa ro'y beradi: bizning misolimizda agar $\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}$ hodisalardan hech bo'lmaganda biri ro'y bersa, A hodisa ro'y beradi.

Ehtimolning klassik ta'rifi. A hodisaning ro'y berish ehtimoli deb, hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar hodisalar sonining, teng imkoniyatli yagona mumkin bo'lgan elementar hodisalarning umumiy soniga nisbatiga aytiladi va

$$P(A)=\frac{m}{n} \qquad (10.1)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda, $m-A$ hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar hodisalar soni; n – elementar hodisalarning umumiy soni

Ehtimolning klassik ta'rifidan bevosita uning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

1. Muqarrar hodisaning ro'y berish ehtimoli birga teng. Haqiqatan ham, bu holda $m=n$ demak, $.P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$.

2. Mumkin bo'lmagan hodisaning ro'y berish ehtimoli nolga teng. Bu holda $m=0$ va $P(\varnothing)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$.

3. Tasodifiy hodisaning ro'y berish ehtimoli nol va bir orasida yotuvchi sondir, ya'ni $0\le P(A)\le 1$. Haqiqatan ham, bu holda $0<m<n$. Shuning uchun $0<\frac{m}{n}<1$ demak, $0<P(A)<1$. Bundan tashqari $m=0\Rightarrow P(A)=0$, $m=n\Rightarrow P(A)=1$ bo'lgani uchun istalgan hodisaning ehtimoli quyidagi munosabatni qanoatlantiradi:

$$0\le P(A)\le 1 \qquad (10.2)$$

Elementar hodisalarning ro'y berish ehtimollari ularning hodisadagi ulushlari hisoblansada, elementar hodisalar to'plamidan iborat hodisaning ehtimolini aniqlashda muhim o'rin egallaydi.

8-misol. Tajriba shashqoltosh tashlashdan iborat bo'lsin. Agar shashqoltoshni tashlaganimizda juft ochko tushsa, 1 p.b. yutiladi, aks holda esa 1 p.b. yo'qotiladi. A=(1 p.b yutib olish) – hodisasining ehtimolini toping (p.b.-pul birligi).

Yechish. Eslatib o'tamiz, ushbu tajribaning elementar hodisalar fazosiga oltita elementar hodisa kiradi: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $n=6$. Shashqoltosh simmetrik bo'lgani uchun elementar hodisalar fazosiga kiruvchi elementar hodisalarni har birining ro'y berish ehtimoli $\frac{1}{6}$ ga teng. Tajriba natijasida juft ochko tushishi "ikki" ochko, "to'rt" ochko, "olti" ochkolarning tushishidan iborat elementar hodisalaridan birining ro'y berishini bildiradi. Bu elementar hodisalar to'plami hodisa deb ataladi. Uni A orqali belgilaymiz va $m=3$. U holda

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Ehtimolning klassik ta'rifidan foydalanib amaliy va nazariy masalalar yechishda kombinatsiyalar sonini aniqlash muhim ahamiyatga ega bo'lganligi sababli kombinatorikaning ba'zi bir formulalari ustida to'xtab o'tamiz.

Berilgan n ta turli elementning k ta elementlaridan tuzilgan yoki tartibi bilan, yoki elementi bilan farq qiladigan kombinatsiyalarga ***o'rinlashtirish*** deyiladi va mumkin bo'lgan barcha o'rinlashtirishlar soni

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) \qquad (10.3)$$

formula bilan topiladi.

Agar o'rinlashtirishda $k=n$ bo'lsa, o'rinlashtirishlar soni ***o'rin almashtirishlar*** (faqat tartibi bilan farq qiladigan kombinatsiyalar) soniga teng bo'ladi va bu son

$$P_n=n!=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 \qquad (10.4)$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar o'rinlashtirishda kombinatsiyalar hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qilsa, ularni n ta elementni k tadan ***guruhlash*** deyiladi va ularning soni

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (10.5)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $0!=1$ deb qabul qilingan.

Eslatma. Agar 2-ta'rifda keltirilgan n ta elementni k tadan o'rinlashtirishda tanlashlar qaytariladigan bo'lsa, ya'ni n ta turli elementdan bittalab olingan element fiksirlangandan so'ng yana o'rniga qaytarib qo'yilib bu jarayon takrorlansa, tanlab olishlar soni

$$N=n^k$$

formula bilan aniqlanadi.

9-misol. 1, 2, 3, 4 raqamlaridan foydalanib har bir raqam bir marta qatnashadigan nechta to'rt xonali son tuzish mumkin.

Yechish. Barcha tuzilishi mumkin bo'lgan sonlar $P_4=24$ ga teng.

10-misol. 25 ta xodimdan boshliq va uning o'rinbosarini necha xil usulda saylash mumkin.

Yechish. Misolning shartiga binoan mumkin bo'lgan barcha saylashlar soni (10.3) formulaga ko'ra topiladi. $A_{25}^2=25\cdot 24=600$.

11-misol. 25 ta talabadan 3 kishilik delegatsiyani necha xil usulda tuzish mumkin?

Yechish. Misolning mazmuniga ko'ra bu holda (10.5) formulani qo'llaymiz.

$$C_{25}^3=\frac{25!}{3!\cdot 22!}=\frac{23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3}=2300.$$

Ehtimolning statistik ta'rifi. Ehtimolning yuqorida keltirilgan klassik ta'rifi cheklangan bo'lib, bu ta'rifni har qanday turdagi masalalarga qo'llab bo'lmaydi. Jumladan, elementar hodisalar soni cheksiz yoki elementar hodisalar teng imkoniyatli bo'lmagan tajribalarda ehtimolni hisoblash uchun klassik ta'rifdan foydalanish mumkin emas, elementar hodisalarning teng imkoniyatliligini asoslash esa amaliyotda anchagina qiyin masaladir. Odatda, teng imkoniyatli hodisalar ro'y beradigan tajribalarda simmetriya saqlangan deb faraz qilinadi. Masalan, o'yin kubigining shakli muntazam ko'pyoq bo'lib, u bir jinsli materialdan tayyorlangan deb hisoblanadi, tangada ham shu holatni kuzatish mumkin. Ammo amaliyotda simmetriyaga asoslangan holatlar kamdan-kam uchraydi.

Shu sababli, ehtimollarni hisoblashda ehtimolning klassik ta'rifi bilan bir qatorda boshqa ta'riflardan ham foydalaniladi, jumladan, statistik ta'rifdan. Ehtimolning statistik ta'rifini keltirishdan oldin nisbiy chastota tushunchasini kiritamiz, chunki bu tushuncha statistik ta'rifda muhim ahamiyatga egadir.

Nisbiy chastota ham ehtimol kabi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi.

1-ta'rif. Kuzatilayotgan A hodisa yuz bergan tajribalar sonining tajribalar jami soniga nisbati A hodisaning nisbiy chastotasi deb ataladi va

$$W(A)=\frac{k}{n}$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $k - A$ hodisa yuz bergan tajribalar soni, $n -$ jami tajribalar soni.

Hodisa ehtimoli va nisbiy chastotasi ta'riflarini taqqoslab quyidagi xulosani chiqarish mumkin: ehtimol tajribagacha, nisbiy chastota esa tajribadan so'ng hisoblangan qiymatdir.

12-misol. Noyabr oyining 6, 7, 11, 12, 17, 21, 24-kunlarida yomg'ir yoqqan bo'lsa, noyabr oyi uchun yomg'ir yog'ish nisbiy chastotasi: $W(A)=\frac{7}{30}$.

Bir xil sharoitda o'tkazilgan ko'p sondagi tajribalar seriyasi shuni ko'rsatadiki, nisbiy chastota turg'unlik xossasiga egadir. Bu xossaning ma'nosi quyidagicha: turli tajribalarda (bir xil sharoitda va bitta hodisa ustida) topilgan nisbiy chastota qiymatlarining bir-biridan farqi kam (tajriba soni qancha katta bo'lsa, farq shuncha kam) bo'ladi va bu nisbiy chastotalar biror son atrofida tebranadi. Mana shu son hodisaning ro'y berish ehtimoli bo'ladi. Shunday qilib, nisbiy chastotani ehtimolning taqribiy qiymati sifatida qabul qilish mumkin.

13-misol. Bizning eramizdan 2000 yillar oldin Xitoyda o'g'il bola tug'ilishlar sonining jami tug'ilgan bolalar soniga nisbati deyarli 0,5 ga tengligi hisoblangan.

14-misol. Fransuz olimi Laplas London, Peterburg va Fransiyada to'plangan statistik ma'lumotlarga asoslanib, o'g'il bola tug'ilishlar sonining jami tug'ilgan bolalar soniga nisbati taxminan $\frac{22}{43}$ ga tengligini ko'rsatgan. Bu son ko'p yillar mobaynida o'zgarmay qolishini tasdiqlagan.

15-misol. Byuffon (XVIII asr) tangani 4040 marta tashlaganda 2048 marta "gerb" tomon tushib nisbiy chastota 0,5069 ga. Pirson (XIX asr) tangani 24000 marta tashlaganda 12012 martasida "gerb" tomoni tushgan va nisbiy chastota 0,5005 ga teng bo'lgan.

Ehtimolni statistik aniqlashda hodisa ehtimoli sifatida shu hodisa nisbiy chastotasi yoki unga yaqinroq sonni olinadi.

Umuman, agar tajribalar soni yetarlicha ko'p bo'lib, shu tajribalarda qaralayotgan A hodisaning ro'y berish nisbiy chastotasi – $W(A)$ biror o'zgarmas $p\in[0;1]$ son atrofida turg'un ravishda tebransa, shu p sonni A hodisaning ro'y berish ehtimoli deb qabul qilamiz. Bunday usulda aniqlangan ehtimol hodisaning statistik ehtimoli deyiladi.

Klassik ta'rif uchun keltirilgan xossalar statistik ehtimol uchun ham saqlanib qolishini osongina tekshirib ko'rish mumkin.

Geometrik ehtimollik. Yuqorida aytilganidek, tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni cheksiz bo'lsa, bu holda ehtimolning klassik ta'rifidan foydalanish mumkin emas. Masalan, l kesma L kesmaning bir qismi bo'lsin. L kesmaga tasodifiy tarzda nuqta qo'yilsin. Bunda qo'yilgan nuqta L kesmaning ixtiyoriy nuqtasida bo'lishi mumkin, nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli uning uzunligiga proporsional bo'ladi va l ning L kesmada qanday holatda joylashganligiga bog'liq bo'lmaydi deb faraz qilinsa, nuqtaning l kesmaga tushish ehtimolini ehtimolning klassik ta'rifi bilan aniqlash mumkin emas, bunday holatlardagi ehtimolning klassik ta'rifi kamchiliklarini yo'qotish uchun geometrik ehtimollik tushunchasi kiritiladi.

Yuqoridagi misolda nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli

$$P=\frac{l(uzunligi)}{L(uzunligi)}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

16-misol. Tasodifiy tarzda tashlangan nuqta muntazam ABC uchburchakning A uchidan chiqqan medians ning ixtiyoriy nuqtasiga tushadi. Bu nuqtaning AO (O – ABC uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi) kesmaga tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. Ma'lumki, uchburchak medianalari kesishish nuqtasida uchburchak uchidan boshlab hisoblanganda 2:1 nisbatda bo'linadi. Shu sababli, $AO=\frac{2}{3}m_A$ (m_A – A uchdan chiqqan mediana uzunligi). U holda $p=\frac{2}{3}$.

Biror tekislikda yassi G soha berilgan bo'lib, bu soha yassi g sohani o'z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning g sohaga tushish ehtimolini topish talab etilsin. Bu yerda Ω elementar hodisalar fazosi G ning barcha nuqtalaridan iborat. Shuning uchun, bu holda ham klassik ta'rifdan foydalana olmaymiz. Tashlangan nuqtaning g sohaga tushish ehtimoli uning yuziga proporsional bo'lib, g soha G sohaning qayerida joylashganligiga bog'liq bo'lmasin. Bu shartlarda qaralayotgan hodisaning ehtimoli

$$P = \frac{g(yuzi)}{G(yuzi)}$$

formula yordamida aniqlanadi. Bunday usuldagi ehtimollikka ***geometrik ehtimollik*** deyiladi.

17-misol. Radiusi R bo'lgan doira ichiga tavakkaliga nuqta tashlangan. Tashlangan nuqta doiraga ichki chizilgan:

a) kvadrat ichiga;

b) muntazam uchburchak ichiga tushish ehtimollarini toping.

Nuqtaning yassi figuraga tushish ehtimoli bu figuraning yuziga proporsional bo'lib, uning doiraning qayerida joylashishiga esa bog'liq emas deb faraz qilinadi.

Yechish.

$$a)\ P = \frac{kvadratning - yuzi}{doiraning - yuzi} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}.$$

$$b)\ P = \frac{uchburchak - yuzi}{doira - yuzi} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Yuqoridagi keltirilgan hollar geometrik ehtimollar uchun xususiy hollar edi. Agar sohaning o'lchovini *mes* deb belgilasak, u holda nuqtaning G sohaning qismi bo'lgan g sohaga tushish ehtimoli

$$P = \frac{mes(g)}{mes(G)}$$

formula bilan hisoblanadi.

Tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni bilish shu hodisalar rivojining qanday kechishini avvaldan ko'ra bilishga imkon beradi.

Ehtimollar nazariyasi fanining usullari hozirgi davrda amaliyotning turli sohalarida, jumladan iqtisodiyot sohasida ham keng va samarali qo'llanilmoqda. Tasodifiylik bilan bog'liq bo'lgan masalalar iqtisodiy jarayonlarni tatqiq etishda, bu jarayonlarning kechishini bashorat qilishda hamda ma'qul iqtisodiy yechimlar qabul qilishda qo'llaniladi.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullari makro va mikroiqtisodiyotni rejalashtirish va tashkil etishda, turli texnologik jarayonlarni tahlil etishda, mahsulot sifatini nazorat qilishda, ommaviy xizmat ko'rsatish jarayonini tahlil qilishda va boshqa ko'plab sohalarda o'z tatbiqlarini topmoqda.

10.2. Ehmollarni qo'shish va ko'paytirish teoremalari

Hodisa ko'p hollarda ikki yoki undan ortiq hodisalar to'plami sifatida ham qaraladi. Bunday hodisalar murakkab hodisalar deb atalib, biz bu mavzuda ularni ta'riflashga o'tamiz.

Ikkita A va B hodisalarning ***yig'indisi*** (birlashmasi) deb, A yoki B hodisaning, yoki ikkala hodisaning ham ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi va $A \cup B$ ko'rinishda belgilanadi.

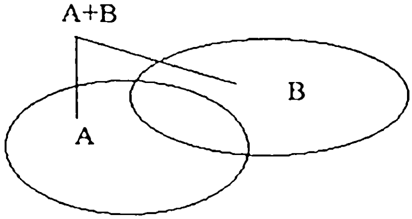
Shunday qilib, $A \cup B$ hodisa A yoki B, yoki ikkala hodisaning ro'y berishini ifodalaydigan barcha elementar hodisalardan iboratdir.

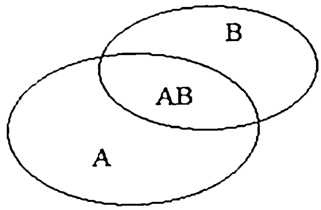
A va B hodisalarning ***ko'paytmasi*** (kesishmasi) deb, bu hodisalarning bir paytda ro'y berishidan iborat hodisaga aytiladi va $A \cap B$ ko'rinishda belgilanadi.

Shunday qilib, $A \cap B$ hodisa A va B hodisalarning bir paytda ro'y berishini ifodalaydigan barcha elementar hodisalardan iborat.

Biz bundan keyingi belgilashlarimizda $A \cup B$ o'rniga $A + B$ belgini, $A \cap B$ o'rniga esa AB belgini ishlatamiz.

Hodisalar yig'indisi va ko'paytmasi Venn diagrammasi orqali quyidagicha tasvirlanadi





Yuqorida keltirilgan $A \cup B$, $A \cap B$ murakkab hodisalarni ko'p hollarda A va B hodisalar ustida bajarilgan amallar deb ham qaraladi. Bu amallar yordamida biz hodisalarni klassifikatsiyalashimiz mumkin:

a) Agar A hodisaning ro'y berishi B hodisa ro'y berishini yo'qqa chiqarsa va shu bilan birgalikda B hodisaning ro'y berishi A hodisa ro'y berishini yo'qqa chiqarsa, u holda bu hodisalar *birgalikda bo'lmagan hodisalar* deyiladi. Aks holda esa bu hodisalar *birgalikda* deyiladi;

b) Agar A hodisaning ro'y berishi B hodisa ro'y berishiga bog'liq bo'lmasa va shu bilan birgalikda B hodisaning ro'y berishi A hodisa ro'y berishiga bog'liq bo'lmasa, u holda bu hodisalar *erkli hodisalar* deyiladi. Aks holda esa bu hodisalar *erksiz* deyiladi.

Ko'p hollarda $A+B$ hodisani A va B hodisalarning hech bo'lmaganda bittasining ro'y berishi, AB hodisani esa A va B hodisalarning bir paytda ro'y berishi deb ham qaraladi.

Biz murakkab hodisalarning ro'y berish ehtimolliklarini hisoblash qoidalari bilan tanishib chiqamiz.

1-qoida. Agar A, B hodisalar birgalikda bo'lmasa, u holda $A+B$ hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagicha hisoblanadi: $P(A+B) = P(A) + P(B)$. $P(A+B)$ ehtimollk A, B hodisalardan hech bo'lmaganda bittasining ro'y berish ehtimoli deb ham ataladi.

18-misol. Qutida 6 ta qizil, 8 ta ko'k va 6 ta oq shar bor. Qutidan tasodifiy ravishda olingan sharning rangli bo'lish ehtimoli topilsin. (Oq shar rangsiz shar deb qaraladi).

Yechish. A hodisa-qutidan olingan sharning qizil bo‘lishi; B hodisa – qutidan olingan sharning ko‘k bo‘lishi bo‘lsin, u holda: $P(A)=\frac{3}{10}$, $P(B)=\frac{2}{5}$. A va B hodisalar birgalikda bo‘lmaganligi sababli $P(A+B)$ ehtimolni topish uchun 1-qoidani qo‘llash mumkin: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}$.

2-qoida. Agar A, B erkli (bog‘liqmas) hodisalar bo‘lsa, u holda AB – hodisaning ro‘y berish ehtimoli A va B hodisalar ehtimollarining ko‘paytmasiga teng: $P(AB)=P(A)P(B)$.

19-misol. I mergan otgan o‘qning nishonga tegish ehtimoli $P(A)=0,8$, II mergan uchun bu ehtimollik $P(B)=0,7$ bo‘lsin. Agar ayiq o‘lishi uchun unga ikkita o‘qning tegishi shart bo‘lsa, u holda ikkala mergan o‘q uzgandan so‘ng, ayiqning o‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Bu yerda A va B hodisalar o‘zaro erkli hodisalar ekanligi hamda masalaning yechimi AB hodisaning ro‘y berish ehtimolini topishdan iborat ekanligi masala shartidan ko‘rinib turibdi. Shu sababli masala yechimini topishda 2-qoidadan foydalanamiz. U holda $P(AB)=P(A)P(B)=0,8\cdot 0,7=0,56$.

3-qoida. Agar A, B hodisalar birgalikda bo‘lsa, u holda $A+B$ hodisaning ro‘y berish ehtimoli quyidagicha hisoblanadi: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

20-misol. I mergan otgan o‘qning nishonga tegish ehtimoli $P(A)=0,8$, II mergan uchun bu ehtimollik $P(B)=0,7$ bo‘lsin. Agar quyon o‘lishi uchun unga bitta o‘qning tegishi yetarli bo‘lsa, u holda ikkala mergan o‘q uzgandan so‘ng, quyonning o‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Bu yerda A va B hodisalar o‘zaro erkli, ammo birgalikda hodisalar ekanligi hamda masalaning yechimi AB hodisaning ro‘y berish ehtimolini topishdan iborat ekanligi masala shartidan ko‘rinib turibdi. Shu sababli masala yechimini topishda 3-qoidadan foydalanamiz. U holda

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0,8+0,7-0,8\cdot 0,7=0,94.$$

Shartli ehtimollik. Tasodifiy hodisa tushunchasi ma’lum bir S shartlar asosida ro‘y berishi yoki ro‘y bermasligi mumkin bo‘lgan hodisa deb aniqlangan edi. Agar hodisaning ro‘y berish ehtimolini hisoblashda faqat S shartlarning bajarilishi hisobga olinib, boshqa qo‘shimcha shartlar talab qilinmasa, u holda bu ehtimol ***shartsiz ehtimol*** deb ataladi; agar hodisaning ro‘y berish ehtimolini hisoblashda S shartlardan boshqa qo‘shimcha shartlar talab qilinsa, u holda bu ehtimol ***shartli ehtimol*** deb ataladi. Agar A va B hodisalar erksiz hodisalar bo‘lsa, u holda bu hodisalarning bir paytda ro‘y berish ehtimolini hisoblash uchun shartli ehtimollik tushunchasini kiritish kerak bo‘ladi. Chunki, bu hodisalar bir-biriga bog‘liq bo‘lib, birinchi hodisa ikkinchi hodisa ro‘y berish sharti bilan amalga oshadi yoki aksincha. Faraz qilamiz, A hodisa B hodisa bilan birgalikda va undan so‘ng ro‘y bersin. U holda A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $P_B(A)$ ko‘rinishda yozilib, u B shart asosida A hodisaning ro'y berish ehtimoli deb o'qiladi va $P_B(A)$ esa ***shartli ehtimollik*** deb ataladi.

21-misol. Qutida 4 ta oq, 3 ta qora shar bor. Qutidan qaytarib solinmaslik sharti bilan ikkita shar olindi. Agar birinchi olingan shar (A – hodisa) qora bo'lsa, u holda ikkinchi olingan sharning (B – hodisa) oq bo'lish ehtimolini toping: $P_A(B) = ?$

Yechish. Birinchi tajribadan so'ng qutida 6 ta shar (4 ta oq va 2 ta qora) qoladi. Shu sababli $P_A(B) = \frac{2}{3}$.

4-qoida. Agar A, B erksiz (bog'liq) hodisalar bo'lsa, u holda AB – hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagicha hisoblanadi:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).$$

Yuqoridagi qoidalarni ikkitadan ko'p chekli sondagi hodisalar uchun ham umumlashtirish mumkin. Buning uchun quyidagi tushunchalarni kiritib olamiz.

$A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar to'plamini qaraymiz.

2-ta'rif. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi birgalikda bo'lmasa, u holda bu hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar deb ataladi.

3-ta'rif. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi o'zaro erkli bo'lsa, u holda bu hodisalar juft-jufti bilan erkli deyiladi.

4-ta'rif. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar juft-jufti bilan erkli hamda har bir hodisa va boshqa hodisalarning mumkin bo'lgan ko'paytmalari erkli bo'lsa, u holda $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar birgalikda erkli hodisalar deyiladi.

Natija. Juft-jufti birgalikda bo'lmagan chekli sondagi $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalardan hech bo'lmaganda birining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

Natija. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ birgalikda erkli hodisalar bo'lsa, u holda $A_1A_2...A_n$ ko'paytmaning ro'y berish ehtimoli mos hodisalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)$$

Natija. Umumiy holda $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli uchun quyidagi formula o'rinli:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \cdot ... \cdot P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n).$$

Shartli ehtimol tushunchasidan foydalanib, erkli hodisalarni boshqacha ta'riflash ham mumkin.

5-ta'rif. Agar A va B hodisalar uchun $P_A(B)=P(B),\quad P_B(A)=P(A)$ bo'lsa, u holda A va B erkli hodisalar deyiladi.

6-ta'rif. A hodisaga qarama-qarshi hodisa deb, A hodisaning ro'y bermasligidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi va $\overline{A}$ kabi belgilanadi.

Qarama-qarshi A va $\overline{A}$ hodisalar uchun

$$A+\overline{A}=\Omega,\quad A\cdot\overline{A}=\varnothing$$

munosabatli o'rinli ekanligidan,

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

tenglik kelib chiqishini tushunish qiyin emas. Odatda, qarama-qarshi hodisalardan birining ehtimoli p bilan belgilansa, ikkinchisining ehtimoli q bilan belgilanadi. Shunday qilib, $p+q=1$.

22-misol. A hodisa kubik bir marta tashlanganda "6" ochko tushishini bildirsin. U holda $\overline{A}$ hodisa "6" ochko tushmasligini, ya'ni qolgan 1,2,3,4,5 ochkolardan birortasining tushishini bildiradi.

3-qoida $A_1,A_2,...,A_n$ – hodisalar uchun quyidagi ko'rinishda bo'ladi (***Bul formulasi***)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+...+(-1)^{n-1}P(A_1A_2...A_n)$$

Eslatma. Agar $A_1,A_2,...,A_n$ hodisalar birgalikda bog'liqmas bo'lsa, u holda ularga qarama-qarshi bo'lgan $\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_n$ hodisalar ham birgalikda bog'liqmas bo'ladi.

23-misol. I va II to'plardan o'q otishda nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda $p_1=0,8$ va $p_2=0,9$. Bir yo'la otishda to'plardan kamida birining nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Yechish. A hodisa – I to'pdan otilgan o'qning nishonga tegishi; B hodisa – II to'pdan otilgan o'qning nishonga tegishi bo'lsin. To'plardan otilgan o'qlarning nishonga tegishi bir-biriga bog'liqmas. Shuning uchun A va B hodisalar erkli hodisalardir. Demak, 3-qoidani qo'llash mumkin:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0,8\cdot 0,9=0,72,$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,8+0,9-0,72=0,98.$$

Birgalikda erkli bo'lgan $A_1,A_2,...,A_n$ – hodisalardan hech bo'lmaganda bittasining ro'y berish ehtimoli

$$P = 1 - q_1 q_2 \dots q_n$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $q_i = P(\overline{A_i}),\ i = \overline{1,n}$.

7-ta'rif. Agar tajriba natijasida $A_1, A_2, \dots, A_n$ – hodisalar to'plamidan hech bo'lmaganda bittasi ro'y bersa va ular juft-jufti bilan birgalikda bo'lmasa, u holda bu hodisalar to'plami to'la guruh tashkil etadi deyiladi.

Ta'rifga binoan, agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar to'la guruh tashkil etsa, u holda

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega,\quad A_i A_j = \varnothing,\quad (i \neq j)$$

munosabatlar o'rinlidir.

24-misol. Ikkita talaba biror sport normativini topshirmoqda. Bu sinovda: A_1 – faqat bitta talabaning normativni topshirishi; A_2 – ikkala talabaning ham normativni topshirishi; A_3 – talabalarning ikkalasi ham normativni topshira olmasligi bo'lsa, bu hodisalar to'plami to'la guruh tashkil etadi.

To'la guruh tashkil etuvchi $A_1, A_2, \dots, A_n$ – hodisalar uchun xos bo'lgan quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. To'la guruh tashkil etuvchi $A_1, A_2, \dots, A_n$ – hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng: $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$.

Isbot. Ta'rifga asosan to'la guruh tashkil etuvchi hodisalardan hech bo'lmaganda birining ro'y berishi muqarrardir: muqarrar hodisaning ehtimoli esa birga teng bo'lgani uchun

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1.$$

Ta'rifga asosan to'la guruhda istalgan ikkita hodisa birgalikda emas, shuning uchun qo'shish qoidasiga ko'ra:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

Hodisalar to'la guruhi tushunchasi yordamida qarama-qarshi hodisalarni quyidagicha ta'riflash ham mumkin.

8-ta'rif. Agar ikkita hodisa to'la guruh tashkil etsa, u holda bu hodisalar qarama-qarshi hodisalar deb ataladi.

Yuqoridagi teoremaga asosan, qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Shuni ta'kidlab o'tamizki, ba'zan A hodisaning ehtimolini topishda avval $\overline{A}$ hodisaning ehtimolini hisoblash, keyin esa izlanayotgan ehtimolni quyidagi formula orqali topish qulay bo'ladi:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

25-misol. Qutida 20 ta detal bo'lib, ulardan 12 tasi standart. Tavakkaliga olingan 5 ta detal orasida kamida 1 standart detal bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. A – olingan detallar ichida kamida bittasi standart va $\overline{A}$ – olingan detallar orasida bitta ham standart detal yo'q hodisalari qarama-qarshi hodisalardir.

$$P(\overline{A})=\frac{m}{n}=\frac{C_8^5}{C_{20}^5},\qquad P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_8^5}{C_{20}^5}.$$

Endi qo'shish va ko'paytirish teoremalarining natijalari sifatida to'la ehtimollik va Bayes formulalarini keltiramiz.

A hodisa to'la guruh tashkil etuvchi $B_1,B_2,...,B_n$ – hodisalardan bittasining amalga oshish shartida ro'y berishi mumkin bo'lsin. $B_1,B_2,...,B_n$-hodisalardan har birining ro'y berish ehtimollari va $P_{B_i}(A),\ (i=\overline{1,n})$ – shartli ehtimolliklar ma'lum bo'lsin. U holda, A hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagi to'la ehtimol formulasi bo'yicha topiladi:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Isbot. Shartga asosan, A hodisa ro'y berishi uchun birgalikda bo'lmagan $AB_1,...,AB_n$ hodisalardan bittasining ro'y berishi zarur va yetarli, ya'ni

$$A=AB_1+AB_2+...+AB_n.$$

Shartga asosan $\{AB_i\}\ (i=\overline{1,n})$ hodisalar to'plami birgalikda bo'lmaganligi va $P(B_iA)=P(B_i)P_{B_i}(A)\ (i=\overline{1,n})$ bo'lgani uchun

$$P(A)=P(AB_1+AB_2+...+AB_n)=P(AB_1)+P(AB_2)+...+P(AB_n)=$$
$$=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

To'la ehtimol formulasi shartlarida A hodisaning ro'y berishida $B_1,B_2,...,B_n$ – hodisalardan qaysi birining amalga oshishi oldindan ma'lum bo'lmaganligi sababli $B_1,B_2,...,B_n$ – hodisalar ***gipotezalar*** deb ataladi.

Faraz qilamiz, tajriba o'tkazilgan bo'lib, uning natijasida A hodisa ro'y bergan bo'lsin. $B_1,B_2,...,B_n$ gipotezalarning ehtimollari qanday o'zgarganligini (A hodisa ro'y berganligi sababli) aniqlash masalasini qaraymiz. Boshqacha aytganda

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2),...,P_A(B_n)$$

shartli ehtimollarni izlaymiz.

Ko'rsatilgan ehtimollardan birini masalan, $P_A(B_1)$ ni topamiz. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra:

$$P(A\cap B_1)=P(A)P_A(B_1)=P(B_1)P_{B_1}(A).$$

Bundan esa,

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Bu munosabatdagi $P(A)$ ehtimolni uning to'la ehtimol formulasidagi ifodasi bilan almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P_{B_i}(A)}$$

Qolgan gipotezalarning shartli ehtimollari ham shunga o'xshash keltirib chiqariladi. Shunday qilib, ixtiyoriy B_k gipoteza uchun

$$P_A(B_k)=\frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P_{B_i}(A)}, \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

formulalar o'rinli.

Bu formulalar ***Bayes formulalari*** deb ataladi (Tom Bayes-(1702-1761)- ingliz matematigi). Bayes formulalari tajriba natijasida A hodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lgandan so'ng B_k gipotezalarning ehtimollarini qayta baholash imkonini beradi.

To'la ehtimol formulasi va Bayes formulalarining qo'llanishiga doir quyidagi misolni qaraymiz.

26-misol. Talabalarning saralash sport musobaqasida qatnashishi uchun kursning I guruhidan 4 ta, II guruhidan 6 ta, III guruhidan 5 ta talaba ajratilgan. I, II va III guruh talabalarining institut terma komandasiga kirish ehtimollari mos ravishda 0,9; 0,7 va 0,8 ga teng. Quyidagilarni toping:

a) tavakkaliga tanlangan talabaning terma komandaga tushish ehtimolini;

b) tavakkaliga tanlangan talaba terma komandaga kirgan bo'lsa, uning I, II, III guruhdan bo'lish ehtimollarini.

Yechish. Tanlangan talabaning terma komandaga kirishi A hodisa bo'lsin. U holda talaba tanlash hodisasini quyidagi elementar hodisalarga ajratish mumkin:

B_1 – tanlangan talabaning I guruhdan bo'lishi;

B_2 – tanlangan talabaning II guruhdan bo'lishi;

B_3 – tanlangan talabaning III guruhdan bo'lishi.

Masala shartiga ko'ra B_1, B_2, B_3 – hodisalar to'la guruh tashkil etadi, chunki talaba tanlashda boshqa elementar hodisa bo'lishi mumkin emas hamda ular birgalikda bo'lmaydi. U holda:

$$P(B_1)=\frac{4}{15}; \quad P(B_2)=\frac{6}{15}; \quad P(B_3)=\frac{5}{15};$$

$$P_{B_1}(A)=0,9; \quad P_{B_2}(A)=0,7; \quad P_{B_3}(A)=0,8.$$

a) tavakkaliga tanlangan talabaning terma komandaga kirish ehtimolini to'la ehtimollik formulasiga asosan topamiz:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A)=$$

$$=\frac{4}{15}\cdot 0,9+\frac{6}{15}\cdot 0,7+\frac{5}{15}\cdot 0,8=\frac{59}{75}.$$

b) Bayes formulasiga asosan:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{15}\cdot 0,9}{\frac{59}{75}}=\frac{18}{59};$$

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{15}\cdot 0,7}{\frac{59}{75}}=\frac{21}{59};$$

$$P_A(B_3)=\frac{P(B_3)P_{B_3}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{15}\cdot 0,9}{\frac{59}{75}}=\frac{20}{59}.$$

Misoldan ko'rinib turibdiki, gipotezalarning ro'y berish ehtimollari A hodisa ro'y bergandan so'ng o'zgaradi.

10.3. Erkli sinovlar ketma-ketligi. Bernulli sxemasida limit teoremalari

Ma'lumki, hodisani kuzatish uchun o'tkaziladigan tajribalar bir necha marta takrorlanishi mumkin. U holda bu tajribalar ketma-ketligida har bir tajribaning natijasi undan oldingi tajribalar natijasiga bog'liq bo'lishi yoki bog'liq bo'lmasligi mumkin. Masalan, qutida n ta qora, m ta oq shar bor. Tajriba qutidan bitta shar olinishi, A hodisa esa olingan sharning oq chiqishi bo'lsin. Buni ikki usulda amalga oshirish mumkin:

a) har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng yana qaytarib qutiga solinadi;

b) har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng qaytarib qutiga solinmaydi.

Har birini alohida ko'rib chiqamiz:

a) agar har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng yana qaytarib qutiga solinsa, har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli: $P(A)=\frac{m}{n+m}$

b) agar har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng qaytarib qutiga solinmasa, har bir tajribada $P(A)$ ehtimolning qiymatini hisoblash uchun oldingi tajriba natijasini e'tiborga olishga majburmiz. Haqiqatan ham, birinchi tajribada $P(A)=\frac{m}{n+m}$ bo'ladi, ikkinchi tajribada $P(A)=\frac{m-1}{n+m-1}$ (birinchi tajriba natijasi A hodisa bo'lsa) yoki $P(A)=\frac{m}{n+m-1}$ (birinchi tajriba natijasi $\bar{A}$ hodisa bo'lsa) va hokazo, ya'ni ikkinchi tajribadan boshlab har bir tajribaning natijasi oldingi tajribalar natijasiga bog'liq.

Bu misolning a) holatdagi tajribalar ketma-ketligini erkli sinovlar ketma-ketligi deb ataymiz.

9-ta'rif. Agar o'tkazilayotgan tajribalar ketma-ketligida har bir tajribaning natijasi (ikkinchi tajribadan boshlab) oldingi tajribalar natijasiga bog'liq bo'lmasa, u holda bu tajribalar ketma-ketligi erkli sinovlar ketma-ketligi deb ataladi.

Biz quyida bir nechta alohida sodda hodisalardan iborat bo'lgan murakkab hodisa tushunchasidan foydalanamiz.

Erkli sinovlar ketma-ketligining har bir tajribasida A hodisaning ro'y berish ehtimoli yo har xil, yoki bir xil bo'lishi mumkin. Biz soddalik uchun bu ketma-ketlikning har bir tajribasida A hodisa bir xil ehtimolga ega deb faraz qilamiz. Faraz qilaylik, n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisa ro'y berishi yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lsin va har bir sinashda A hodisaning ehtimoli bir xil, chunonchi p ga teng deb hisoblaymiz, u holda ro'y bermaslik ehtimoli $q = 1 - p$. Masalan, o'yin soqqasini tashlashdan iborat tajriba o'tkazilmoqda. Har bir tashlashda u yoki bu sonda ochkolar chiqish ehtimolligi oldingi tashlashlarda qanday ochko chiqqanligiga bog'liqmasligi ravshan, binobarin biz A hodisa sifatida 3 ochkoning chiqishini qarasak, bu yerda erkli sinovlar ketma-ketligiga ega bo'lamiz va $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.

n ta sinashda A hodisaning k marta ro'y berish, yoki $n-k$ marta ro'y bermasligidan iborat $P_n(k)$ – ehtimolini hisoblaymiz. Buning uchun ketma-ket o'tkazilgan n ta tajribani bitta murakkab tajriba deb qarasak, bu tajribaning natijasi $A_1, A_2, \dots A_n$ ko'rinishda bo'lib, uning har bir A_i $(i = \overline{1,n})$ hadi yoki A, yoki $\overline{A}$ bilan ifodalanadi. Bunday hodisalar soni 2^n ta bo'ladi. Haqiqatan ham, $A_1, A_2, \dots A_n$ hodisalar ichida:

1) $A_1, A_2, \dots A_n$ hodisaning $A_i = A$ $(i = \overline{1,n})$ shartni qanoatlantiradigan kombinatsiyasi bitta;

2) $A_1, A_2, \dots A_n$ hodisaning $\overline{A}, A, \dots A$ ko'rinishdagi kombinatsiyalari soni n ta;

k) $A_1, A_2, \dots A_n$ hodisaning $\underbrace{AA\dots A}_{k}\underbrace{\overline{A}\overline{A}\dots\overline{A}}_{n-k}$ ko'rinishdagi kombinatsiyalari soni C_n^k ta;

n) $A_1, A_2, \dots A_n$ hodisaning $A_i = \overline{A}$ $(i = \overline{1,n})$ shartni qanoatlantiradigan kombinatsiyasi bitta.

Shunday qilib, $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ ketma-ketlikni hosil qilamiz, u holda gruppalash xossasiga asosan, $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Agar n ta tajribada A hodisaning rosa k marta ro'y berishini B hodisa deb qarasak,

$$B = (\underbrace{AA\dots A}_{k}\underbrace{\overline{A}\overline{A}\dots\overline{A}}_{n-k}) \cup (\underbrace{AA\dots A}_{k-1}\underbrace{\overline{A}\overline{A}\dots\overline{A}}_{n-k}A) \cup \dots \cup \underbrace{\overline{A}\overline{A}\dots\overline{A}}_{n-k}\underbrace{AA\dots A}_{k} \qquad (10.6)$$

bo'lib, u C_n^k ta haddan iborat bo'ladi. Tajribalar ketma-ketligi erkli bo'lganligi sababli ko'paytirish teoremasiga ko'ra (10.6) ifodadagi har bir hadning ehtimolligi $p^k q^{n-k}$ bilan aniqlanadi, u holda (10.6) yig'indidagi har bir had birgalikda emasligini e'tiborga olsak:

$$P(B) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (10.7)$$

Boshlang'ich belgilashlarga qaytib,

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (10.8)$$

Bernulli (binomial) formulasi (sxemasi) ni hosil qilamiz. (10.8) binomial formula deb atalishiga sabab u

$$(p+q)^n = C_n^n p^n q^0 + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 p^0 q^n$$

Nyuton binomining umumiy hadini ifodalaydi.

27-misol. Har bir detalning standart bo'lish ehtimoli $P = 0,8$ bo'lsa, tavakkaliga olingan 5 ta detaldan 2 tasining standart bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Bu yerda $n = 5, m = 2, p = 0,8$ va $q = 0,2$. Bernulli formulasiga asosan.

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0,00512 = 0,0512 .$$

28-misol. Tanga 10 marta tashlandi. "Gerb"ning 3 marta tushish ehtimoli qanchaga teng?

Yechish. Bu hodisaning har bir tajribadagi ro'y berish ehtimoli $\frac{1}{2}$ ga teng.

Bundan, $P_{10}(3) = C_{10}^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{15}{28}$.

A hodisaning o'tkazilayotgan n ta erkli sinovda kamida k_1 marta va ko'pi bilan k_1 marta ro'y berish ehtimoli

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \ldots + P_n(k_2) \qquad (10.9)$$

formula bilan hisoblanadi.

10-ta'rif. Agar n ta erkli sinovda hodisaning k_0 marta ro'y berish ehtimoli sinovning boshqa mumkin bo'lgan natijalari ehtimollari ichida eng kattasi bo'lsa, ya'ni

$$P_n(k_0) = \max_{0 \le k \le n} \{P_n(k)\} \qquad (10.10)$$

bo'lsa, u holda k_0 soni *eng ehtimolli son* deb ataladi.

Eng ehtimolli son quyidagi qo'sh tengsizlik bilan aniqlanadi:

$$np - q \le k_0 \le np + p \qquad (10.11)$$

Eng ehtimolli sonni aniqlash uchun hamma ehtimollarni hisoblab chiqmasdan, balki sinovlar soni n ni va har bir sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimolini bilish kifoya ekan. Haqiqatan ham, eng ehtimolli sonning ta'rifidan

$$P_n(k_0) \ge P_n(k_0 - 1), \qquad P_n(k_0) \ge P_n(k_0 + 1).$$

Bu tengsizliklarga mos ravishda $P_n(k_0)$, $P_n(k_0 - 1)$, $P_n(k_0 + 1)$ larning qiymatlarini qo'yib quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!} p^{k_0} \cdot q^{n-k_0} \ge \frac{n! p^{k_0 - 1} q^{n-k_0+1}}{(k_0 - 1)!(n - k_0 + 1)},$$

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!}p^{k_0}\cdot q^{n-k_0}\geq\frac{n!p^{k_0-1}q^{n-k_0+1}}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!}p^{k_0+1}q^{n-k_0-1}$$

Bu tengsizliklarni k_0 ga nisbatan yechamiz va quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$k_0\leq np+p;\ k_0\geq np-q$$

Oxirgi ikki tengsizlikni birlashtirib, eng ehtimolli sonni aniqlovchi tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$np-q\leq k_0\leq np+p$$

Bu tengsizlikni aniqlovchi intervalning uzunligini

$$np+p-(np-q)=p+q=1$$

va hodisa n ta sinov natijasida butun son marta ro'y berishini hisobga olsak, eng ehtimolli son k_0 quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

a) agar $np-q$ son kasr bo'lsa, u holda bitta eng ehtimolli k_0 son mavjud bo'ladi;

b) agar $np-q$ butun son bo'lsa, u holda k_0 va k_0+1 eng ehtimolli sonlar mavjud bo'ladi;

c) agar np butun son bo'lsa, u holda eng ehtimolli son $k_0=np$ bo'ladi.

29-misol. Tanga 6 marta tashlanadi. Gerbli tomon tushishlarining eng ehtimolli sonini toping.

Yechish. Berilgan masalaning shartlariga asosan, $n=6$, $q=p=\frac{1}{2}$. U holda, "gerb" tushishining eng ehtimolli soni k_0 ni quyidagicha topamiz: $k_0=np=3$. Demak, eng ehtimolli son 3 ekan.

Shunday qilib, eng ehtimolli sonni aniqlash jarayonida biz np sonning Bernulli sxemasida maxsus ahamiyatga ega ekanligiga ishonch hosil qilish imkoniga ega bo'ldik. Bu shundan iborat bo'ldiki, np songa eng yaqin bo'lgan ikkita butun sonlardan biri (ba'zan ikkalasi, ba'zan o'zi) eng ehtimolli son bo'ldi.

Eslatma. np son yuqoridagiga nisbatan ham muhimroq bo'lgan talqinga ega. Chunonchi, np ni ma'lum ma'noda n ta tajribalardagi muvaffaqiyatlarning o'rtacha soni deb qarash mumkin.

30-misol. Ma'lum korxonada yaroqsizlikka yo'l qo'yish ehtimoli 0,05 ga teng. 100 ta mahsulot orasidagi yaroqsiz mahsulotlarning o'rtacha soni nimaga teng?

Yechish. Izlanayotgan son $np=100\cdot 0,05=5$ ga teng bo'ladi.

Eslatma. Binomial formulasini keltirib chiqarishda erkli sinovlar ketma-ketligining har bir sinashida A hodisaning ehtimoli bir xil, p ga teng deb hisoblangan edi. Endi esa bu ehtimollarni turlicha bo'lsin deb faraz qilamiz, ya'ni $p(A_i)=p_i$, $p(\overline{A})=q_i$, u holda (10.8) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$p_n(k) = p_1 p_2 \dots p_k q_{k+1} \dots q_n + p_1 q_2 p_3 \dots p_{k+1} q_{k+2} \dots q_n + q_1 q_2 \dots q_{n-k} p_{n-k+1} \dots p_n \quad (10.12)$$

(10.12) formulaning o'ng tomonini hosil qilish uchun

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i z) \qquad (10.13)$$

ko'paytmani qarab z^k ning koeffitsiyentlarini olish kifoya, bu yerda z ixtiyoriy parametr bo'lib, $\varphi(z)$ funksiya $p_n(k)$ ehtimollarni hosil qiluvchi funksiya deb ataladi.

Eslatma. Binomial sxemaning (Bernulli sxemasining) umumlashmasi bo'lgan polinomial sxemani ko'rib chiqamiz. Agar Bernulli sxemasida har bir tajribada faqat 2 ta hodisa $\overline{A}$ va A qaralgan bo'lsa, polinomial sxemada har bir tajribada to'la gruppa hosil qiluvchi k ta hodisa qaraladi.

Tajriba shundan iborat bo'ladiki, n ta erkli sinov o'tkaziladi va ularning har birida to'la gruppa hosil qiladigan k ta $A_1, A_2, \dots, A_k$ hodisaning faqat bittasi ro'y berishi mumkin, bunda bu hodisalarning ehtimolliklari ma'lum:

$$p_1 = p(A_1),\ p_2 = p(A_2), \dots, p(A_k).$$

n tajribada A_1 hodisa m_1 marta, A_2 hodisa m_2 marta,..., A_k hodisa m_k marta (bu yerda $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k = n$) ro'y berish ehtimoli

$$p_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \qquad (10.14)$$

Xususiy holda, $k = 2$ bo'lganda Bernulli formulasi kelib chiqadi.

Agar n ning katta qiymatlarida $p_n(k)$ ehtimollarni hisoblashda Bernulli formulasidan foydalansak juda katta sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishimizga to'g'ri keladi. Masalan, biror korxonada yaroqsiz mahsulot chiqarish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lsin. Tayyor mahsulotdan 500 tasi tekshirilsin. Tekshirilgan mahsulotlar orasida 25 tasining yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin. Bu holda har bir mahsulotning tekshirilishini bitta tajriba sifatida qarab, har birida A hodisaning (tekshirilgan bitta mahsulotning yaroqsiz deb topilishi) ro'y berish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lgan 500 ta erkli tajriba o'tkazilyapti deb hisoblashimiz mumkin, u holda Bernulli formulasiga asosan:

$$p_{500}(25) = C_{500}^{25} (0,25)^{25} \cdot (0,75)^{475},$$

bu yerda

$$C_{500}^{25} = \frac{476 \cdot 477 \cdot \ldots \cdot 499 \cdot 500}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 25}.$$

Bu misoldan ko'rinib turibdiki, n ning katta qiymatlarida $p_n(k)$ ehtimollarni hisoblashni osonlashtirish uchun boshqa asimptotik formulalardan foydalanish zaruriyati tug'iladi. Bu formulalar ehtimollar nazariyasida limit teoremalari deb ataluvchi teoremalarda keltiriladi. 1-va 2- teoremalar p ning qiymati 0 va 1 ga yaqin bo'lmagan hollarda keltiriladi ($np \geq 10$).

Teorema (Muavr-Laplasning lokal teoremasi). Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli $p(0 < p < 1)$ o'zgarmas bo'lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning k marta ro'y berish ehtimoli $p_n(k)$ uchun, k ning $\frac{|k-np|}{\sqrt{npq}} < C$, $(C = const)$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$p_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\left(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})\right) \qquad (10.15)$$

tenglik bajariladi, bu yerda $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Bu teoremani Muavr 1730 yilda $p = \frac{1}{2}$ uchun, so'ngra Laplas 1783 yilda $p \in (0;1)$ uchun isbotlagan. Biz esa bu teorema xulosasini isbotsiz qabul qilamiz.

Maxsus jadvallarda $\varphi(x)$ funksiyaning faqat x argumentining musbat qiymatlariga mos qiymatlari keltirilgan. Chunki, $\varphi(x)$ funksiya juft, ya'ni $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Shunday qilib, n ta erkli sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimoli taqriban quyidagiga teng:

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x). \qquad (10.16)$$

n ning katta qiymatlarida (10.16) ning aniqligi oshib boradi.

31-misol. Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, 400 ta tajribada A hodisa 80 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish. $n = 400$, $k = 80$, $p = 0,2$, $q = 0,8$.

$$p_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\frac{1}{8}\varphi(x), \qquad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0.$$

jadvaldan $\varphi(0) = 0,3989$.

U holda: $p_{400}(80) \approx \frac{0,3989}{8} \approx 0,04986$.

32-misol. Merganning o'qni nishonga tekkizish ehtimoli: $p = 0,75$. Mergan otgan 10 ta o'qdan 8 tasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish. $n = 10, k = 8, p = 0,75, q = 0,25$

(1.16) formulasidan foydalansak:

$$p_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}}\varphi(x) \approx 0,7301 \cdot \varphi(x),$$

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10 \cdot 0,75}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx 0,36$$

jadvaldan: $\varphi(0,36)=0,3789$. U holda: $p_{10}(8)=0,7301\cdot 0,3739\approx 0,273$.

Endi bu masalani Bernulli formulasidan foydalanib yechimini topamiz va boshqa natijaga: $p_{10}(8)=0,282$ ga kelamiz. Javoblar orasidagi katta farqni n ning qiymati kichikligi bilan tushuntiriladi.

Ma'lumki, har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p o‘zgarmas bo‘lsa, u holda n (kichik n larda) ta erkli tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli Bernulli formulasiga asosan

$$p_n(k_1,k_2)=p_n(k_1\le k\le k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

n ning katta qiymatlarda esa $p_n(k_1,k_2)$ ehtimolni hisoblash uchun quyidagi teoremadan foydalanamiz.

Teorema (Muavr- Laplasning integral teoremasi). Agar har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $p(0<p<1)$ o‘zgarmas bo‘lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli $p_n(k_1,k_2)$ uchun $n\to\infty$ da

$$p_n(k_1,k_2)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi(x'')-\Phi(x') \qquad (10.17)$$

munosabat k_1 va k_2 $(-\infty\le x'\le x''\le\infty)$ ga nisbatan tekis bajariladi, bu yerda

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}},\ \Phi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Laplas funksiyasi deb ataluvchi $\Phi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ integralning qiymatlari uchun maxsus jadval tuzilgan. Jadvalda integralning $0\le x\le 5$ kesmaga mos bo‘lgan qiymatlari berilgan, chunki $x>5$ lar uchun $\Phi(x)=0,5$ deb olish tavsiya etiladi. $\Phi(x)$ funksiya toq, ya'ni $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ bo‘lgani uchun jadvalda $x<0$ chunki funksiya qiymatlari berilmagan.

33-misol. Detalni texnik nazorat bo‘limi (TNB) tekshirmagan bo‘lish ehtimoli $p=0,2$. Tasodifan olingan 400 ta detaldan kamida 70 ta ko‘pi bilan 100 ta detalni TNB tekshirmagan bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. $p=0,2,\ q=0,8,\ n=400,\ k_1=70,\ k_2=100,$ u holda

$$x'=\frac{70-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=-1,25,\ x''=\frac{100-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=2,75.$$

(10.16) formulaga asosan, $p_{400}(70,100)=\Phi(2,5)-\Phi(-1,25)=\Phi(2,5)+\Phi(1,25)$.
Jadvaldan $\Phi(2,5)=0,4938;\ \Phi(1,25)=0,3944$. U holda

$$p_{400}(70,100)=0,4938+0,3944=0,8882.$$

Faraz qilaylik, A hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas p ga $(0<p<1)$ teng bo'lgan n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lsin. $\frac{k}{n}$ nisbiy chastotaning o'zgarmas p ehtimoldan chetlanishini absolyut qiymati bo'yicha oldindan berilgan $\varepsilon>0$ sondan katta bo'lmaslik, ya'ni $\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon$ tengsizlik bajarilishining ro'y berish ehtimoli: $p\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)$ ni baholaymiz. Yuqoridagi tengsizlikni unga teng kuchli bo'lgan $-\varepsilon\le\frac{k-np}{n}\le\varepsilon$ tengsizlik bilan almashtiramiz. Uni $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ ko'paytuvchiga ko'paytirsak: $-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$.

Agar $x'=-\sqrt{\frac{n}{pq}},\ x''=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, belgilashlarni kiritib, Muavr-Laplasning integral teoremasidan foydalansak:

$$p\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})$$

Endi boshlang'ich tengsizlikka qaytamiz:

$$p(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon)\approx2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) \qquad (10.18)$$

Xulosa qilib aytganda,

$$\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon$$

tengsizlik bajarilishining ro'y berish ehtimoli taqriban Laplas funksiyasining $x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ nuqtadagi ikkilangan qiymatiga teng ekan.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi p ehtimol $p=\frac{1}{2}$ ning atrofida bo'lganda $p_n(k)$ ni hisoblash uchun yaxshi natija beradi, lekin p bir yoki nolga yaqin qiymatlarni qabul qilsa bu formula ma'lum bir xatoliklarga olib keladi. Shuning uchun p bir yoki nolga yaqin qiymatlarni qabul qilganda $p_n(k)$ ni hisoblash uchun boshqa asimptotik formula topish zarurati tug'iladi.

Biz p ning nolga yaqin qiymatlarini ko'rish bilan chegaralanamiz $(np < 10)$, chunki p birga yaqin qiymatlarni qabul qilsa p ni q bilan almashtirish mumkin, ya'ni p ning o'rniga q ni ishlatish mumkin, chunki $p \to 1 \Rightarrow q \to 0$.

$p_n(k)$ ehtimolning $p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $(1-p=q)$ ifodasini formal ravishda ikkita n,q o'zgaruvchilarning funksiyasi deb qarash mumkin. Faraz qilamiz, k fiksirlangan, n va p esa o'zgaradi, ya'ni n va p lar mos ravishda cheksizlikka va nolga shunday intiladiki, natijada $\lambda = np$ miqdor chegaralangan bo'lib qolaveradi: $\lambda = np = const$.

Bernulli formulasiga asosan,

$$p_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Bu yerda $np = \lambda \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$ almashtirish bajaramiz. U holda

$$p_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

n juda katta sonligini e'tiborga olib $p_n(k)$ o'rniga $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(k)$ ni topamiz. Shu sababli, $p_n(k)$ ehtimolning taqribiy qiymati topiladi, chunki n juda katta son bo'lgani bilan chekli, bizda esa $n \to \infty$. Shuni ta'kidlash kerakki, $n \to \infty \Rightarrow p \to 0$, chunki $np = const$.

Shunday qilib,

$$p_n(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left[1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Bundan esa quyidagi teoremaning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema (Puassonning limit teoremasi). Agar n ta erkli sinovlar ketma-ketligida A hodisaning k marta ro'y berishida, k fiksirlangan, n va p esa o'zgaruvchan bo'lib, n va p lar mos ravishda cheksizlikka va nolga shunday intilsaki, $\lambda = np$ miqdor chegaralangan bo'lib qolaversa: $\lambda = np = const$, ya'ni turli sondagi tajribalar ketma-ketligida (n turlicha bo'lganda ham) ham A hodisa ro'y berishining o'rtacha soni np o'zgarmay qolaversa, $p_n(k)$ ehtimollik uchun

$$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (10.19)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

34-misol. Qo'shma korxona iste'molchiga 5000 sifatli mahsulot jo'natdi. Mahsulotning yo'lda shikastlanish ehtimoli 0,001 ga teng bo'lsa, yo'lda ikki yoki undan ortiq mahsulotning shikastlanish ehtimolini toping.

Yechish. Shikastlangan mahsulotlar sonini k desak, izlanayotgan ehtimol $p_{5000}(k \geq 2)$ bo'lib, u quyidagiga teng bo'ladi:

$$p_{5000}(k \geq 2) = p_{5000}(2) + p_{5000}(3) + \ldots + p_{5000}(5000)1 - [p_{5000}(0) + p_{5000}(1)].$$

Bizning holda sinashlar soni katta va hodisa ro'y berish ehtimoli 0 ga yaqin bo'lganligi uchun Puasson teoremasidan foydalanamiz. $\lambda = np = 5000 \cdot 0,001 = 5$ ekanligini e'tiborga olsak:

$$p_{5000}(0) = \frac{5^0 \cdot e^{-5}}{0!} = e^{-5};\ p_{5000}(1) = \frac{5^1 \cdot e^{-5}}{1!} 5e^{-5}.$$

U holda: $p_{5000}(m \geq 2) = 1 - e^{-5} - 5e^{-5} = 1 - 6e^{-5} \approx 0,9596$.

10.4. Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasi fanining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bilan biz oldindan tanishmiz. Masalan, tajriba o'yin soqqasi tashlanishidan iborat bo'lsin. Bunda, $\Omega = \{\omega_i\}$ $(i = \overline{1,6})$ to'plamda 6 ta elementar hodisa bo'ladi. Ochkolar soni tasodifiy miqdor bo'lsa, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sonlari esa uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bo'ladi.

11-ta'rif. Tasodifiy miqdor deb, tajriba natijasida mumkin bo'lgan, oldindan noma'lum va tasodifiy sabablarga bog'liq bo'lgan qiymatlardan bittasi va faqat bittasini tayin ehtimol bilan qabul qiladigan kattalikka aytiladi.

Tasodifiy miqdorlar odatda lotin alfavitining bosh harflari $X, Y, Z, \ldots$ bilan, ularning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari esa mos ravishda alfavitning kichik harflari x, y, z bilan belgilanadi. Masalan, X –tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari quyidagicha yoziladi: $X: x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Tasodifiy miqdorlar ikki turga ajratib o'rganiladi:

a) diskret tasodifiy miqdorlar; b) uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

Bu ikki tushuncha haqida ma'lumot berishdan oldin to'plam va uning elementlari haqida ba'zi bir ma'lumotlarni berib o'tamiz.

12-ta'rif. Agar to'plam elementlarining sonini biror-bir son bilan ifodalash mumkin bo'lsa, u holda bu to'plam chekli to'plam deb ataladi.

13-ta'rif. Agar to'plam elementlarining soni cheksiz bo'lib uning elementlarini natural sonlar to'plami bilan o'zaro bir qiymatli akslantirish mumkin bo'lsa, u holda bu to'plam sanoqli to'plam deb ataladi.

14-ta'rif. Agar to'plam elementlarining sonini cheksiz bo'lib uning elementlari va $[0;1]$ kesmadagi haqiqiy sonlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lsa, u holda bu to'plam *kontinium quvvatli to'plam* deb ataladi.

Diskret tasodifiy miqdorlarning mumkin bo'lgan qiymatlari ayrim va ajralgan bo'lib, uning mumkin bo'lgan qiymatlarining soni chekli, yoki sanoqli bo'ladi.

35-misol. X tasodifiy miqdor 100 ta buyumdan iborat guruhdagi yaroqsiz buyumlar soni. Bu miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari: $x_1 = 0, x_2 = 1, \ldots, x_{101} = 100$.

Diskret tasodifiy miqdorni tavsiflash uchun eng avvalo uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini ko'rsatish lozim. Ammo, X tasodifiy miqdorning faqat mumkin bo'lgan qiymatlarini bilish uning xususiyatlarini ta'riflashga yetarli emas, chunki tasodifiy miqdor o'zining har bir qiymatini har xil ehtimollik bilan qabul qilishi mumkin. Shu sababli, diskret tasodifiy miqdorni to'liq aniqlash uchun $x_1, x_2, \ldots$ qiymatlardan tashqari $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \ldots$ hodisalarning ehtimollarini ham, ya'ni $p_1 = p(X = x_1)$, $p_2 = p(X = x_2), \ldots$ larni ham ko'rsatish lozim.

Disket tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslikni tasodifiy miqdorning ***taqsimot qonuni*** deb ataladi.

Diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonunini ifodalash usullari va shakllari turlicha bo'lishi mumkin.

X diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni berilishining eng sodda shakli jadval bo'lib, bunda barcha mumkin bo'lgan qiymatlar va ularga mos ehtimolliklar ko'rsatilgan bo'ladi:

$$X : x_1 \; x_2 \; \ldots x_n \; \ldots$$

$$p : p_1 \; p_2 \; \ldots p_n \; \ldots$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ qiymatlar odatda ortib borish, yoki kamayib borish tartibida yoziladi.

Bundan tashqari, $\{X = x_i\}$ hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi birgalikdamasligi va $\{X = \{x_i\}\}$ hodisalar to'plami to'la gruppa tashkil etganligi sababli

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = \sum_i p_i = 1$$

tenglik har doim o'rinli bo'ladi. Ba'zan diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni grafik usulda-taqsimot ko'pburchagi yordamida ham beriladi.

Taqsimot ko'pburchagini hosil qilish uchun, absissalar o'qida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari, ordinatalar o'qida esa ularga mos ehtimollar qo'yiladi, keyin esa $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots$ nuqtalarni kesmalar bilan tutashtiriladi. Taqsimot qonuni formula (analitik) usulida ham beriladi.

36-misol. Tanga 5 marta tashlandi. "Gerb" tomonning tushish soni X tasodifiy miqdor bo'lsin. X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari 0, 1, 2, 3, 4, 5 sonlardan iborat bo'ladi. Tasodifiy miqdorning bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi yordamida hisoblanadi. Masalan, $p(X=3) = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$ va hokazo. U holda

$$X : 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$p : \frac{1}{32} \quad \frac{5}{32} \quad \frac{10}{32} \quad \frac{10}{32} \quad \frac{5}{32} \quad \frac{1}{32}$$

ko'rinishdagi jadvalni hosil qilamiz.

Diskret tasodifiy miqdorlarning berilish usullarini uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun qo'llab bo'lmaydi. Chunki uzluksiz tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar ro'yxatini tuzish mumkin emas. Shu sababli uzluksiz tasodifiy miqdorlarni ta'riflash uchun taqsimot funksiyasi tushunchasi kiritiladi.

15-ta'rif. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb, uning x (x - ixtiyoriy haqiqiy son) dan kichik qiymatlarni qabul qilish ehtimolini aniqlovchi

$$F(x) = p(X < x) \qquad (10.20)$$

funksiyaga aytiladi.

Ba'zan $F(x)$ – funksiyani ***integral taqsimot funksiyasi*** deb ham ataladi.

Endi taqsimot funksiyasidan foydalanib uzluksiz va diskret tasodifiy miqdorlarning qat'iy ta'rifini beramiz.

16-ta'rif. Agar tasodifiy miqdorning $F(x)$ – taqsimot funksiyasi uzluksiz bo'lsa, bu tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning $F(x)$ – taqsimot funksiyasi chekli yoki sanoqli sondagi I tur uzulishlarga ega bo'ldi.

Tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. Taqsimot funksiyaning qiymatlari $[0;1]$ kesmaga tegishli:

$$0 \le F(x) \le 1$$

Isbot. Bu xossaning isboti taqsimot funksiyani ehtimol sifatida ta'riflanishdan, ya'ni $F(x) = p(X < x)$ ekanligidan kelib chiqadi.

2-xossa. Taqsimot funksiyasi kamaymaydigan funksiyadir, ya'ni $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$.

Isbot. Faraz qilamiz $x_1 < x_2$ bo'lsin, u holda $(X < x_2)$ oraliqni quyidagicha yozib olish mumkin $(X < x_2) = (X < x_1) + (x_1 \le X < x_2)$. $(X < x_1), (x_1 \le X < x_2)$ tasodifiy hodisalar birgalikda emasligidan quyidagi tenglikni yozish mumkin

$$p(X < x_2) = p(X < x_1) + p(x_1 \le X < x_2).$$

Endi taqsimot funksiyaning ta'rifidan foydalansak

$$F(x_2) - F(x_1) = p(x_1 \le X < x_2) \qquad (10.21)$$

tenglikni hosil qilamiz. Ehtimolning nomanfiyligidan kerakli natijani olamiz .

2-xossadan quyidagi natijalarni keltirib chiqarish mumkin.

Natija. X tasodifiy miqdorning $[a;b)$ intervalda yotuvchi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli quyidagicha aniqlanadi.

$$p(a \le X < b) = F(b) - F(a) \qquad (10.22)$$

Buning isboti (10.2) formulada $x_1 = a, x_2 = b$ almashtirishdan kelib chiqadi.

Natija. X uzluksiz tasodifiy miqdorning belgilangan bitta aniq qiymatni qabul qilishi ehtimoli nolga teng, ya'ni $p(X = x_0) = 0$.

Buning isboti (10.22) formulada $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0 + \Delta x$ almashtirish so'ngra $\Delta x \to 0$ limitni hisoblashdan kelib chiqadi. Shu sababli, uzluksiz tasodifiy miqdorning bitta qiymatni qabul qilish ehtimolini hisoblashning ahamiyati yo'q va shunga ko'ra quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$p(a \le X \le b) = p(a < X \le b) = p(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

3-xossa. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari $(a;b)$ intervalga tegishli bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a+0} F(x)=0,\ \lim_{x\to b-0} F(x)=1 \tag{10.23}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Natija. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari butun Ox o'qda joylashgan bo'lsa, u holda quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty} F(x)=1 \tag{10.24}$$

37-misol. X tasodifiy miqdor

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}, & -1<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

taqsimot funksiya bilan berilgan bo'lsin. Sinash natijasida X tasodifiy miqdor $(0;2)$ intervalga tegishli qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish. $p(0\le X<2)=F(2)-F(0)=\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

38-misol. X diskret tasodifiy miqdor quyidagi

$$X:1\quad 4\quad 8$$

$$p:0{,}3\quad 0{,}1\quad 0{,}6$$

taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin. Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish. $F(x)=\begin{cases}0,\ agar\ \ x\le 1,\\ 0{,}3,\ agar\ \ 1<x\le 4,\\ 0{,}4,\ agar\ \ 4<x\le 8,\\ 1,\ agar\ \ x>8.\end{cases}$

Yuqorida uzluksiz tasodifiy miqdorlarni taqsimot funksiyalari yordamida aniqlagan edik. Agar tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi differensiallanuvchi bo'lsa, u holda tasodifiy miqdorning zichlik (differensial) funksiyasi tushunchasini kiritishimiz kerak bo'ladi.

17-ta'rif. Tasodifiy miqdorning zichlik (differensial) funksiyasi deb, taqsimot funksiyasidan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi va quyidagicha aniqlanadi

$$F'(x)=f(x) \tag{10.25}$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun zichlik funksiyasi muhim ahamiyatga ega bo'lib, bu funksiya yordamida uzluksiz tasodifiy miqdorlarning barcha xarakteristikalarini aniqlash mumkin. Bu yerda ularning ba'zilarini keltirib o'tamiz.

Teorema. X uzluksiz tasodifiy miqorning $(a;b)$ intervalga tegishli qiymatlarni qabul qilishi ehtimoli zichlik funksiyasidan a dan b gacha olingan aniq integral bilan aniqlanadi:

$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx \quad (10.26)$$

Isbot. Ma'lumki, natijaga asosan

$$p(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Agar bu yerda Nyuton-Leybnits formulasi va zichlik funksiyasining ta'rifi (10..25) ifodadan foydalansak, quyidagini hosil qilamiz

$$p(a \le X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Bundan tashqari, X tasodifiy miqdorning $f(x)$ zichlik funksiyasini ma'lum bo'lsa uning $F(x)$ taqsimot funksiyasini topish uchun quyidagi aniqmas integraldan foydalaniladi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad (10.27)$$

Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. $f(x)$ -funksiya nomanfiy funksiyadir, ya'ni $f(x) \ge 0$.

Isbot. Bu xossa $f(x)$ differensial funksiya kamaymaydigan $F(x)$ taqsimot funksiyaning hosilasi ekanligidan kelib chiqadi.

2-xossa. Agar tasodifiy miqdor sonlar o'qida aniqlangan bo'lsa quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad (10.28)$$

Isbot. Nyuton-Leybnits formulasi va zichlik funksiyasining ta'rifiga asosan;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = 1 - 0 = 1.$$

Eslatma. Agar X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $(a;b)$ oraliqdan iborat bo'lsa, u holda yuqoridagi formula

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \quad (10.29)$$

ko'rinishini oladi.

Bu formula geometrik nuqtai nazardan Ox o'q, $f(x)$ funksiya, $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi 1 ga tengligini bildiradi.

Eslatma. Zichlik funksiyasi faqat uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun mavjud.

39-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le 0, \\ \cos x, & agar \quad a<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$F(x)$ taqsimot funksiyani toping.

Yechish. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=0$ formuladan foydalanamiz. Agar $x\le 0$ bo'lsa, $F(x)=0$. Demak, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=0$. Agar $0<x\le\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int\limits_{0}^{x}\cos t dt=\sin x$. Agar $x>\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int\limits_{0}^{x}\cos t dt+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt=1$. Demak, izlanayotgan taqsimot funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le 0, \\ \sin x, & agar \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

40-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyaga ega:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le 0, \\ \dfrac{2}{3}\sin x, & agar \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{3}, \\ 0, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$ intervalga tegishli qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish. $p(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$ formuladan foydalanamiz. U holda

$$p\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\frac{\sqrt{2}}{9}.$$

10.5. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

Ma'lumki, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni X miqdorni to'liq tavsiflab beradi. Ammo ko'pincha taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, uni aniqlash katta qiyinchiliklar tug'diradi va biz kam ma'lumot bilan chegaralanishimizga to'g'ri keladi. Ba'zida esa tasodifiy miqdorni xarakterlovchi sonlarni qo'llash foydalidir. Bu sonlar tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari deb ataladi va ularning vazifasi tasodifiy miqdorning eng muhim xususiyatlarini qisqa shaklda ifodalashdir.

Tasodifiy miqdorning muhim sonli xarakteristikalaridan biri matematik kutilma deb ataladi. Juda ko'p masalalarning yechimini matematik kutilmani bilish orqali hal etish mumkin. Masalan, viloyatlarni taqqoslovchi ko'rsatkichlardan biri ularda yetishtirilgan hosilning o'rtachasi, ya'ni matematik kutilmasidir.

18-ta'rif. X diskret tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarining mos ehtimollariga ko'paytmalari yig'indisiga uning matematik kutilmasi deb aytiladi.

X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

$$X: x_1 \ x_2 \dots x_n$$
$$p: p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n$$

berilgan bo'lsin. U holda uning $M(X)$ – matematik kutilmasi

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i \quad (10.30)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari soni cheskiz bo'lib, u

$$X: x_1 \ x_2 \dots x_n \dots$$
$$p: p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n \dots$$

taqsimotga ega bo'lsa, u holda uning matematik kutilmasi

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n+\dots=\sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i \quad (10.31)$$

formula bilan aniqlanadi. Bunda oxirgi qator absolyut yaqinlashadi deb faraz qilinadi. Aks holda, bu tasodifiy miqdor matematik kutilmaga ega bo'lmaydi.

41-misol. Taqsimot qonuni

$$X: \; 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

$$p: \; \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6}$$

ko'rinishda bo'lgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. (10.31) formuladan foydalanamiz:

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5$$

42-misol. Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. Puasson qonuni quyidagi jadval bilan aniqlanadi:

$$X: \; 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \; k$$

$$p: \; e^{-\lambda} \quad \lambda e^{-\lambda} \quad \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2!} \quad \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} \; \ldots \; \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

u holda

$$M(x)=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

Shunday qilib, Puasson taqsimotini xarakterlovchi parametr $\lambda \cdot X$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini bildirar ekan.

43-misol. Agar A hodisaning ro'y berish ehtimoli p bo'lsa, bitta tajribada A hodisa ro'y berish sonlarining matematik kutilmasini toping.

Yechish. Bitta tajribada A hodisaning ro'y berishi sonlarini X tasodifiy miqdor desak, u faqat ikkita qiymat qabul qilishi mumkin: $x_1=1$ (A hodisa ro'y berdi), bunda $p(X=x_1)=p; x_2=0$ (A hodisa ro'y bermadi), bunda $p(X=x_2)=q$. U holda: $M(X)=p$.

X tasodifiy miqdor ustida n marta sinov o'tkazilib, uning natijalari quyidagicha bo'lsin:

$$X: \; x_1 \quad x_2 \; \ldots \; x_k$$

$$n: \; n_1 \quad n_2 \; \ldots \; n_k \; .$$

Yuqoridagi satr X miqdorning kuzatilgan qiymatlarini, pastki satr esa bu qiymatlarning chastotalarini bildiradi, ya'ni x_i $(i=\overline{1,k})$ qiymatni X miqdor n_i marta qabul qilgan.

$\overline{X}$ orqali kuzatilgan barcha qiymatlarning o'rta arifmetigini belgilaylik, u holda

$$\overline{X}=\frac{x_1n_1+x_2n_2+\ldots+x_kn_k}{n},$$

yoki

$$\overline{X}=x_1\frac{n_1}{n}+x_2\frac{n_2}{n}+\ldots+x_k\frac{n_k}{n}=x_1W_1+x_2W_2+\ldots+x_kW_k.$$

Bu yerda $W_1, W_2, ..., W_k$ – mos ravishda $x_1, x_2, ..., x_k$ qiymatlarning nisbiy chastotalari.

Demak, $\overline{X} = M(X)$, ya'ni X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uning kuzatiladigan qiymatlari o'rta arifmetigiga taqriban teng.

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. O'zgarmas miqdorning matematik kutilmasi o'zgarmasning o'ziga teng:

$$M(C) = C.$$

Isbot. C o'zgarmas miqdorni yagona C qiymatni 1 ga teng ehtimol bilan qabul qiladigan tasodifiy miqdor deb qarash mumkin. Shuning uchun, $M(C) = C \cdot 1 = C$.

Eslatma. X diskret tasodifiy miqdorning o'zgarmas C kattalikka ko'paytmasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$X : x_1, x_2, ..., x_n \Rightarrow CX : Cx_1, Cx_2, ..., Cx_n.$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma belgisi ostidan chiqarish mumkin:

$$M(CX) = CM(X).$$

Isbot. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$$\begin{matrix} X: & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p: & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{matrix}$$

ko'rinishda bo'lsin. Uholda 1-eslatmaga asosan,

$$\begin{matrix} X: & Cx_1 & Cx_2 & \dots & Cx_n \\ p: & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{matrix}$$

Bundan CX tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini hisoblaymiz

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + ... + Cx_np_n = CM(X).$$

3-xossa. Chekli sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi ularning matematik kutilmalari yig'indisiga teng:

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)$$

4-xossa. Chekli sondagi bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarning ko'paytmasiga teng:

$$M(X_1X_2...X_n) = M(X_1)M(X_2)...M(X_n).$$

3-xossadan va 43-misoldan foydalanib quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

Teorema. n ta bog'liqmas tajribalarda A hodisa ro'y berishining matematik kutilmasi: $M(X) = np$.

Matematik kutilmalarining tengligi tasodifiy miqdorlarning qabul qiladigan qiymatlari bir xil deb xulosa chiqarishga imkon bermaydi. Masalan,

$$X: -0{,}5 \quad 0 \quad 0{,}5 \qquad Y: -50 \quad 0 \quad 50$$
$$p: \quad 0{,}3 \quad 0{,}4 \quad 0{,}3 \qquad p: \quad 0{,}3 \quad 0{,}4 \quad 0{,}3$$
tasodifiy miqdorlarda $M(X) = M(Y)$, ammo ularning mumkin bo'lgan qiymatlari turlichadir. Shu sababli tasodifiy miqdorning tarqoqligini aniqlovchi ikkinchi sonli xarakteristika – dispersiya tushunchasini kiritamiz.

Dispersiya tushunchasini kiritishdan oldin tasodifiy miqdorning matematik kutilmasidan chetlanishi tushunchasini kiritib olamiz.

19-ta'rif. Tasodifiy miqdor va uning matematik kutilmasi orasidagi farqni uning chetlanishi deb ataymiz va $X - M(X)$ ko'rinishda belgilaymiz.

Tasodifiy miqdor chetlanishining muhim xossasini ko'rsatuvchi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Tasodifiy miqdor chetlanishining matematik kutilmasi nolga teng:
$$M(X - M(X)) = 0.$$

Amaliyotda tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini uning o'rtachasi atrofidagi joylashish tarqoqligini baholash zarurati tez-tez uchrab turadi. Masalan, merganlik darajasini baholashda. Shu sababli, dispersiya tushunchasi kiritiladi, chunki tasodifiy miqdor chetlanishi qiymatlar tarqoqligini baholay olmasligi yuqoridagi teoremadan ko'rinib turibdi.

20-ta'rif. X tasodifiy miqdorning $D(x)$ – dispersiyasi deb, uning chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:
$$D(X) = M(X - M(X))^2 \qquad (10.32)$$

Diskret tasodifiy miqdor uchun bu formula ushbu ko'rinishni oladi:
$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i \qquad (10.33)$$

21-ta'rif. X tasodifiy miqdorning $\sigma(X)$ – o'rtacha kvadratik chetlanishi deb, dispersiyadan olingan arifmetik kvadrat ildizga aytiladi:
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \qquad (10.34)$$

Dispersiyaning o'lchamligi tasodifiy miqdor o'lchamligining kvadratiga tengdir. O'rtacha kvadratik chetlanishniki esa tasodifiy miqdor o'lchami bilan bir xil bo'ladi.

Agar X biror-bir qimmatbaho qog'ozning daromadliligi bo'lsa, $M(X)$ uning o'rtacha daromadliligini, $D(X)$ esa riskini ifodalaydi.

44-misol. Agar A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng bo'lsa, u holda A hodisaning bitta sinovda ro'y berish sonining matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Yechish. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

$$X: 0 \quad 1$$

$$p: q \quad p$$

U holda,

$$M(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$

$$D(X) = (0-p)^2 \cdot q + (1-p)^2 \cdot p = qp^2 + pq^2 = pq(p+q) = pq$$

$$\sigma(X) = \sqrt{pq}$$

Dispersiyani hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanish tavsiya etiladi:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Tasodifiy miqdor dispersiyasi quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. O'zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C) = 0.$$

Isbot. C o'zgarmas miqdorni C qiymatini 1 ehtimol bilan qabul qiladi deb qarash mumkin. U holda

$$M(C) = C \text{ va } D(C) = (C-C)^2 \cdot 1 = 0.$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchi dispersiya belgisidan kvadrati bilan chiqariladi:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3-xossa. Chekli sondagi o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi ular dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$$

Natija. Bog'liqmas ikkita tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi ular dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D(X_1 - X_2) = D(X_1) + D(X_2)$$

Ushbu natija ikkitadan ortiq tasodifiy miqdorlar uchun o'rinli ekanligini isbotlash qiyin emas.

45-misol. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadrat chetlanishini hisoblang.

$$X: -2 \quad 1 \quad 3 \quad 6$$

$$p: 0{,}4 \quad 0{,}2 \quad 0{,}1 \quad 0{,}3$$

Yechish.

$$M(X) = -2 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}3 = 1{,}5,$$

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = (-2 - 1{,}5)^2 \cdot 0{,}4 + (1 - 1{,}5)^2 \cdot 0{,}2 +$$

$$+(3 - 1{,}5)^2 \cdot 0{,}1 + (6 - 1{,}5)^2 \cdot 0{,}3 = 11{,}25$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{11{,}25} \approx 3{,}36$$

Biz dispersiyani ta'rif bo'yicha hisobladik. Endi $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$ formula bo'yicha hisoblaylik. Buning uchun dastlab X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzib olamiz.

$$X^2:\ 4 \quad 1 \quad 9 \quad 36$$

$$p:\ 0{,}4 \quad 0{,}2 \quad 0{,}1 \quad 0{,}3$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 13{,}5 - 2{,}25 = 11{,}25.$$

Diskret tasodifiy miqdorlar kabi uzluksiz tasodifiy miqdorlarda ham matematik kutilma va dispersiya tushunchalari katta ahamiyatga ega. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun bu tushunchalar quyidagicha kiritiladi.

22-ta'rif. Mumkin bo'lgan qiymatlari (a,b) intervalga tegishli bo'lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb,

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx \tag{10.35}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar Ox o'qqa tegishli bo'lsa, u holda matematik kutilma formulasi (10.35) quyidagi ko'rinishni oladi

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{10.36}$$

Bu holatda bu xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx$$

integralning qiymati mavjud deb faraz qilinadi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $(a;b)$ intervalga tegishli bo'lsa, u holda uning dispersiyasi uchun

$$D(X) = \int_a^b (x - M(x))^2 f(x)dx \tag{10.37}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari Ox o'qqa tegishli bo'lsa, u holda uning dispersiyasi uchun

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 f(x)dx \tag{10.38}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblash uchun (10.37) va (10.38) formuladan foydalanish noqulay hisoblanadi, shu sababli dispersiyani hisoblash uchun (10.37) formulaning qulay ko'rinishini keltirib chiqaramiz.

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx=\int_a^b x^2 f(x)dx-2\int_a^b xM(X)f(x)dx+$$

$$+\int_a^b M^2(X)f(x)dx=M(X^2)-2M(X)\int_a^b xf(x)dx+M^2(X)\int_a^b f(x)dx=$$

$$=M(X^2)-M^2(X)$$

formulaga ham bu ko'rinishdagi formulani keltirib chiqarish mumkin. Shunday qilib, ko'p hollarda dispersiyani hisoblash uchun

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X) \qquad (10.39)$$

formuladan foydalaniladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyasi uchun ham diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyalarining xossalari o'rinli bo'ladi.

46-misol. Ushbu

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0,\\ x, & agar \quad 0<x\le 1,\\ 1, & agar \quad x>1\end{cases}$$

taqsimot funksiyasi bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Yechish. Ma'lumki

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x<0,\\ 1, & agar \quad 0\le x<1,\\ 0, & agar \quad x\ge 1\end{cases}$$

(10.35) formuladan foydalanib X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz:

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 1dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$$

(10.39) formuladan foydalanib X tasodifiy miqdorning dispersiyasini topamiz:

$$D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 1dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Endi tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanish darajasini aniqlashga yordam beruvchi ba'zi bir tushunchalarni kiritamiz.

23-ta'rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya momenti (yoki kovariatsiyasi) deb, quyidagi songa aytiladi:

$$K_{xy}=M[(X-M(X))(Y-M(Y))].$$

X va Y tasodifiy miqdorlar diskret bo'lsa, u holda bu formula quyidagi ko'rinishini oladi:

$$K_{xy}\sum_{i,j}(x_i - M(X))(y_i - M(Y))p_{ij},$$

bunda $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$.

Korrelyatsiya momenti ifodasini matematik kutilma xossalari asosida quyidagicha almashtirilish mumkin:

$$M[(X - M(X))(Y - M(Y))] = M[XY - XM(Y) - YM(X) + M(X)M(Y)] =$$
$$= M(XY) - M(X)M(Y) - M(Y)M(X) + M(X)M(Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$$

Teorema. Agar ikkita tasodifiy miqdor o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda ularning korrelyatsiya momenti nolga teng bo'ladi.

24-ta'rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffitsiyenti deb,

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

tenglik bilan aniqlanadigan kattalikka aytiladi.

Korrelyatsiya momenti uchun quyidagi

$$|K_{xy}| \le \sqrt{D_x D_y}$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin, chunki $|r_{xy}| \le 1$.

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lsa, u holda ularning korrelyatsiya koeffitsiyenti nolga tengligini ko'rsatish qiyin emas.

Quyidagi teorema tasodifiy miqdorlar orasida bog'lanishni tavsiflashda korrelyatsiya koeffitsiyentining ahamiyatini yana ham batafsil oydinlashtirib beradi.

Teorema. Y tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorning chiziqli funksiyasi, ya'ni $Y = aX + b$ bo'lsin, u holda agar $a > 0$ bo'lsa, $r_{xy} = 1$, agar $a < 0$ bo'lsa, $r_{xy} = -1$ bo'ladi.

Isbot.

$$K_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))] = M[(X - M(X))(aX + b - M(Y))] =$$
$$M[(X - M(X))(aX + b - aM(X) - b)] = aM[(X - M(X))]^2 = aD(X) = a\sigma_x^2$$
$$\sigma_y^2 = D(Y) = a^2 D(X) = a^2\sigma_x^2, \quad \sigma_y = |a|\sigma_x,$$
$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{a\sigma_x^2}{|a|\sigma_x^2} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

10.6. Amalda ko'p uchraydigan taqsimot qonunlari

Tasodifiy miqdorlarning amalda ko'p uchraydigan taqsimot qonunlari bilan tanishib chiqamiz.

1. Diskret tasodifiy miqdorlar uchun taqsimot qonunlari.

a) Binomial taqsimot qonuni. A hodisa ustida n ta erkli tajriba o'tkazilyotgan bo'lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil o'zgarmas p ehtimollik bilan yuz bersin. n ta tajribada A hodisaning yuz berishlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorni qaraymiz. Bu tasodifiy miqdorga mos jadval

$$\begin{array}{lcccccc} X: & 0 & 1 & 2 & \ldots. & n-1 & n \\ p: & p_n(0) & p_n(1) & p_n(2) & \ldots. & p_n(n-1) & p_n(n) \end{array}$$

ko'rinishda bo'lib, bunda $p_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $(k=0,1,2,...,n)$.

Bu jadvaldagi $p_n(k)\ (k=\overline{0,n})$ ehtimollik binomial formuladan foydalanib hisoblanganligi sababli yuqoridagi jadval bilan xarakterlanadigan taqsimot qonuni binomial taqsimot qonuni deb ataladi. Bu yerda shuni ta'kidlash kerakki $\sigma^2(X)=npq$, $M(X)=np$.

47-misol. Do'konga kirgan har bir xaridorning xarid qilish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lsa, do'kondagi 4 ta xaridorning xarid qilganlarni X tasodifiy miqdor deb qarab uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari: 0,1,2,3,4. $p_n(k)$ ehtimollarni Bernulli formulasi yordamida hisoblaymiz:

$$p_4(0)=C_4^0\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256},\quad p_4(1)=C_4^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{108}{256},$$

$$p_4(2)=C_4^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{54}{256},\quad p_4(3)=C_4^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{12}{256},$$

$$p_4(4)=C_4^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{256}.$$

Olingan ma'lumotlarni jadvalga joylashtirib

$$\begin{array}{llllll} X: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ p: & \frac{81}{256} & \frac{108}{256} & \frac{54}{256} & \frac{12}{256} & \frac{1}{256} \end{array}$$

taqsimot qonunini hosil qilamiz.

b) Puasson taqsimot qonuni. n ta erkli tajriba o'tkazilayotgan bo'lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil p ehtimol bilan yuz bersin. n ta tajribada A hodisaning yuz berishlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorni qaraymiz. Agar X tasodifiy miqdorga mos jadval

$$\begin{array}{llllll} X: & 0 & 1 & 2\ \ldots & k & \ldots \\ p: & p_0 & p_1 & p_3\cdots & p_k & \cdots \end{array}$$

ko'rinishda bo'lib, X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan $\{x_k\}$ $(k=0,1,2,...)$ qiymatlarining ehtimollari

$$p_n(k)=p_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ (k=0,1,2,...),\lambda=np=const$$

formula bilan hisoblansa, X tasodifiy miqdor Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan deyiladi. Bu yerda $M(X)=\lambda$, $\sigma^2(X)=\lambda q$.

Eslatma. Puasson taqsimot qonunida $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}p_i=1$.

48-misol. Qo'shma korxona iste'molchiga 3000 ta sifatli mahsulot jo'natdi. Mahsulotning yo'lda shikastlanish ehtimoli 0,001 ga teng bo'lsa, yo'lda shikastlangan mahsulotlar sonini X tasodifiy miqdor deb qarab uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. Shartga asosan, $\lambda=3, X:0,1,2,...,3000$. U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini:

$X:$	0	1	...	3000
$p:$	$p_{3000}(0)$	$p_{3000}(1)$	...	$p_{3000}(3000)$

c) Geometrik taqsimot qonuni. Erkli tajribalar o'tkazilyotgan bo'lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil p ehtimol bilan yuz bersin. A hodisa yuz berishi bilan tajriba to'xtatiladi. X tasodifiy miqdor A hodisaning birinchi ro'y berishigacha bo'lgan tajribalar soni bo'lsin. Agar $(k-1)$-tajribagacha A hodisa ro'y bermasdan k-tajribada ro'y bersa, bu murakkab hodisaning ehtimoli

$$p(X=k)=q^{k-1}p \tag{10.40}$$

formula bilan aniqlanadi. (10.40) formulada $k=1,2,...$ deb qarab

$X:$	1	2	3	...	k	...
$p:$	p	pq	q^2p	...	$q^{k-1}p$	...

jadvalni hosil qilamiz. Bu taqsimot qonuni geometrik taqsimot qonuni deb ataladi.

Eslatma. Geometrik taqsimot qonunida $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}p_i=1$.

49-misol. X kubikni tashlashda birinchi marta "6" ochko tushguncha o'tkaziladigan tajribalar soni bo'lsin. Ravshanki, bu holda X diskret tasodifiy miqdor bo'lib, $p=\dfrac{1}{6}$ parametrli geometrik taqsimot qonuniga bo'ysunadi. Ya'ni

$$\begin{array}{llllllll} X: & 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ p: & \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} & \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} & \ldots & \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6} & \ldots \end{array}$$

d) Gipergeometrik taqsimot qonuni. Ma'lumki, N ta detalning ichida M ta standart detal bo'lganda tasodifiy ravishda olingan n ta detalning orasida k ta standart detal bo'lishining ehtimoli $p_n(k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ formula yordamida topiladi.

Bu yerda $M(X)=\frac{Mn}{N}$, $\sigma^2(X)=\frac{n(N-n)M(N-M)}{N^2(N-1)}$

50-misol. Qutida 7 ta shar bo'lib ularning 4 tasi qora. Tasodifiy ravishda 3 ta shar olingan. Agar X tasodifiy miqdor olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonidan iborat bo'lsa, uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari: 0, 1, 2, 3. Bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollarini hisoblaymiz:

$$p_3(0)=\frac{C_3^0\cdot C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35},\qquad p_3(1)=\frac{C_3^1\cdot C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35},$$

$$p_3(2)=\frac{C_3^2\cdot C_4^1}{C_7^3}=\frac{12}{35},\qquad p_3(3)=\frac{C_3^3\cdot C_4^0}{C_7^2}=\frac{1}{35}.$$

U holda quyidagi taqsimot qonuni hosil bo'ladi:

$$\begin{array}{lllll} X: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p: & \frac{4}{35} & \frac{18}{35} & \frac{12}{35} & \frac{1}{35} \end{array}$$

2. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun taqsimot qonunlari. Endi uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun amalda ko'p uchraydigan ba'zi taqsimot va zichlik funksiyalar, hamda bu funksiyalarning xossalarini ko'rib chiqamiz.

a) Tekis taqsimot qonuni. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x<a, \\ \frac{1}{b-a}, & agar \quad a\le x<b, \\ 0, & agar \quad x\ge b \end{cases} \tag{10.41}$$

ko'rinishda bo'lsa bu tasodifiy miqdor $(a;b)$ oraliqda tekis taqsimot qonuniga bo'ysunadi deyiladi.

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ formuladan foydalanib, bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz:

1) Agar $x < a$ bo‘lsa, u holda $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$.

2) Agar $a \le x < b$ bo‘lsa, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dt + \int\limits_{a}^{x} \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$.

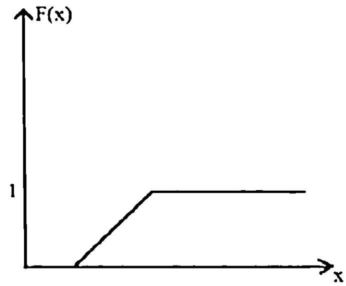
3) Agar $x \ge b$ bo‘lsa, u holda

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int\limits_{a}^{b} f(t)dt + \int\limits_{b}^{x} f(t)dt = 0 + \frac{b-a}{b-a} + 0 = 1.$$

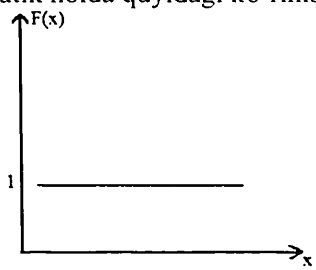
Demak,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & agar \quad a \le x < b, \\ 1, & agar \quad x \ge b \end{cases} \qquad (10.42)$$

Odatda, (10.41) zichlik funksiyasi bilan berilgan uzluksiz tasodifiy miqdorni $(a;b)$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. $(a;b)$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uchun $M(X) = \frac{a+b}{2}$, dispersiyasi uchun esa $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasining grafigi sxematik holda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



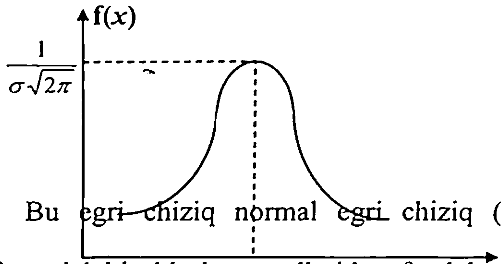
$[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasining grafigi sxematik holda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



b) Normal taqsimot qonuni. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2a^2}} \qquad (10.43)$$

ko‘rinishda bo‘lsa bu tasodifiy miqdor normal taqsimot qonuniga bo‘ysunadi deyiladi va u $N(a,\sigma)$ ko‘rinishda belgilanadi. Bu zichlik funksiya grafigining sxematik chizmasi quyidagi ko‘rinishga ega:



Bu egri chiziq normal egri chiziq (Gauss egri chizig‘i) deb aytiladi. Differensial hisoblash matodlaridan foydalanib $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2a^2}}$ funksiyani tekshirsak u quyidagi xossalarga ega bo‘ladi:

1. Funksiya butun sonlar o‘qida aniqlangan.
2. x ning barcha qiymatlarida funksiya grafigi Ox o‘qidan yuqorida yotadi.
3. Ox o‘q funksiya grafigining gorizontal asimptotasi hisoblanadi.
4. $x=a$ nuqtada funksiya maksimumga erishadi va $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ qiymatni qabul qiladi.
5. $x=a$ chiziqqa nisbatan funksiya grafigi simmetrik joylashgan.
6. $\left(a-\sigma,\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}\right)$ va $\left(a+\sigma,\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}\right)$ nuqtalar funksiya grafigining burilish nuqtalari hisoblanadi.

(10.43) formuladan ko‘rinib turibdiki, normal taqsimot qonuniga bo‘ysunuvchi uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi ikki: a va σ (σ-sigma) parametrlar bilan aniqlanadi. Demak, normal taqsimot qonuniga bo‘ysunuvchi uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini aniqlash uchun shu ikkita parametrning qiymatlarini bilish kifoya ekan. Bu parametrlarning ehtimoliy ma’nosi quyidagichadir: a parametr normal taqsimot qonuniga bo‘ysunuvchi tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga, σ uning o‘rtacha kvadratik chetlanishiga teng.

Darhaqiqat, (10.43) formula bilan aniqlanuvchi tasodifiy miqdorning aniqlanish sohasi $(-\infty;\infty)$ bo‘lganligi sababli

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2a^2}}dx$$

Bu integralni hisoblash uchun yangi $z=\frac{x-a}{\sigma}$ o'zgaruvchi kiritamiz. Bundan $x=\sigma z+a \Rightarrow dx=\sigma dz$, u holda

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma z e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=a$$

Shunday qilib, $M(X)=a$, ya'ni normal taqsimotning matematik kutilmasi a parametrga teng. Xuddi shunga o'xshash, $D(X)=\sigma^2$ ekanligini ko'rsatish mumkin (Buni mustaqil bajarib ko'ring).

Eslatma. Umumiy normal taqsimot qonuni deb, a va σ parametrlarning qiymatlari ixtiyoriy bo'lgan normal taqsimot qonuniga aytiladi.

Standart normal taqsimot qonuni deb, $a=0$ va $\sigma=1$ parametrli normal taqsimot qonuniga aytiladi. Har qanday umumiy normal taqsimot qonunini standart taqsimot qonuniga keltirish mumkin. Masalan, X tasodifiy miqdor a va σ parametrli normal taqsimot qonuniga bo'ysunuvchi tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda $z=\frac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bilan uni standart taqsimot qonuniga bo'ysundirish mumkin bo'ladi, chunki $M(Z)=0, \sigma(Z)=1$. Standart taqsimotning zichlik funksiyasi

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{10.44}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu funksiyaning qiymatlar jadvali ehtimollar nazariyasiga oid ko'plab adabiyotlarda keltirilgan.

Eslatma. Umumiy normal taqsimot funksiyasi deb,

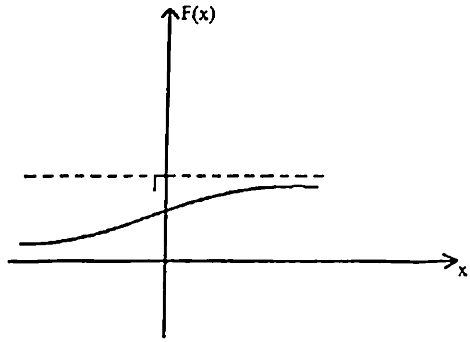
$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}dy \tag{10.45}$$

funksiyaga, normalangan taqsimot funksiyasi deb esa,

$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy \tag{10.46}$$

funksiyaga aytiladi.

$F(x)$ va $F_0(x)$ funksiyalar orasida quyidagi munosabat mavjud $F(x)=F_0\left(\frac{(x-a)}{\sigma}\right)$. $F_0(x)$ funksiyaning qiymatlari uchun maxsus jadval tuzilgan bo'lib, uning grafigi quyidagicha shaklga ega:



$F_0(x)$ funksiya va $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ Laplas funksiyasi orasida quyidagicha munosabat (mustaqil keltirib chiqariladi) mavjud

$$F_0(x)=0,5+\Phi(x).$$

c) Ko'rsatkichli taqsimot qonuni. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & agar \quad x>0\end{cases}$$

ko'rinishda bo'lsa, bu tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimot qonuniga bo'ysunadi deyiladi (bu yerda $\lambda>0$ o'zgarmas musbat son).

Ko'rsatkichli taqsimot qonuniga bo'ysunuvchi tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=0+\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda x}$.

Demak,

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & agar \quad x>0.\end{cases}$$

Ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutilishi, dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanishlari (mustaqil hisoblanadi) mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\qquad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

3. Katta sonlar qonuni. Ma'lumki, tajriba natijasida tasodifiy miqdor mumkin bo'lgan qiymatlarning qaysi birini qabul qilishini oldindan aytib bo'lmaydi, chunki bu juda ko'p tasodifiy faktorlarga bog'liq, bu faktorlarning esa hammasini hisobga olib bo'lmaydi. Ammo bir tomondan shuni ham ta'kidlash kerakki, keng qamrovli shartlar ostida ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar o'rta arifmetigi deyarli tasodifiylik xarakterini yo'qotadi.

Amaliyot uchun juda ko'p tasodifiy sabablarning birgalikdagi ta'siri tasodifga deyarli bog'liq bo'lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir, chunki bu hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko'ra bilishga imkon beradi. Bunday shartlar umumiy nomi "Katta sonlar qonuni" deb ataluvchi teoremalarda keltiriladi. Bular qatoriga Chebishev va Bernulli teoremalari mansub bo'lib, Chebishev teoremasi katta sonlar qonunining eng umumiy, Bernulli teoremasi esa sodda holi hisoblanadi.

Dastlab quyidagi ta'rifni keltiramiz.

25-ta'rif. Agar $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi mos ravishda $M(X_1), M(X_2), ..., M(X_n)$ matematik kutilishlarga ega bo'lib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $n \to \infty$ da

$$p\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \to 1 \qquad (10.47)$$

munosabat bajarilsa, berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo'ysunadi deyiladi.

Katta sonlar qonuniga oid teoremalarni isbotlashda Chebishev tengsizligidan foydalaniladi. Biz bu teoremani isbotsiz keltiramiz.

Chebishev tengsizligi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$p(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \text{ yoki } p(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (10.48)$$

Amaliyotda Chebishev tengsizligining ahamiyati cheklangan bo'lib, u ba'zan trivial baho beradi. Chebishev tengsizligining nazariy ahamiyati juda kattadir.

Teorema (Chebishev teoremasi). Agar $X_1, X_2, ..., X_n$ birgalikda erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ularning dispersiyalari yuqoridan tekis chegaralangan (ya'ni $D(X_i) \leq C$, $i = 1, 2, ...$) bo'lsa, u holda musbat ε son har qancha kichik bo'lganda ham

$$\lim_{n \to \infty} p\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (10.49)$$

munosabat bajariladi.

Shunday qilib, Chebishev teoremasi quyidagicha da'vo qiladi: agar dispersiyalari tekis chegaralangan ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar qaralayotgan bo'lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlar arifmetik o'rtacha qiymatining ularning matematik kutilmalari arifmetik o'rtacha qiymatidan chetlanishining absolyut qiymati istalgan musbat kichik sondan ham kichik bo'lishidan iborat hodisani deyarli muqarrar deb hisoblash mumkin.

Isbot. Chebishev tengsizligini

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

tasodifiy miqdorga nisbatan qo'llaymiz:

$$p\left(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2} \qquad (10.50)$$

Matematik kutilma va dispersiyaning xossalaridan foydalanib va teorema shartlariga ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz.

$$M(\overline{X})=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i),$$

$$D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)\le\frac{nC}{n^2}=\frac{C}{n}.$$

Bu ifodalarni (10.50) tengsizlikka qo'yib:

$$p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{\sum_{i=1}^{n}D(X_i)}{n^2\varepsilon^2}\ge 1-\frac{C}{n\varepsilon^2},$$

hamda ixtiyoriy hodisaning ehtimoli 1 dan katta emasligini hisobga olib,

$$1-\frac{C}{n\varepsilon^2}\le p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right)\le 1$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu munosabatdan $n\to\infty$ da teorema tasdig'i kelib chiqadi:

$$p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right)\le 1.$$

Chebishev teoremasida biz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari har xil deb faraz qilgan edik. Amaliyotda esa tasodifiy miqdorlar ko'pincha bir xil $a=M(X_i)$ matematik kutilmaga va $D(X_i)=\sigma^2$ dispersiyaga ega bo'ladi. U holda:

$$M(\overline{X})=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)=\frac{1}{n}na=a.$$

Qaralayotgan xususiy holda, Chebishev teoremasi quyidagicha ifodalanadi.

Teorema. Agar $X_1,X_2,...,X_n$ tasodifiy miqdorlar birgalikda erkli bo'lib, bir xil a matematik kutilmaga va σ^2 chekli dispersiyaga ega bo'lsa, u holda ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty}p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|<\varepsilon\right)=1 \qquad (10.51)$$

Faraz qilamiz, n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng bo'lsin. U holda hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi qanday bo'lishini oldindan ko'ra bilish mumkinmi? Bu savolga Yakob Bernulli tomonidan isbotlangan quyidagi teorema ijobiy javob beradi.

Teorema (Bernulli teoremasi). Agar n ta erkli sinashning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p o'zgarmas va sinashlar soni yetarlicha katta bo'lsa, u holda hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining p ehtimoldan chetlanishining absolyut qiymati ixtiyoriy kichik musbat sondan ham kichik bo'lish ehtimoli birga yaqinlashadi:

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (10.52)$$

Isbot. A hodisa ro'y berishlarining chastotasi μ_n ni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\mu_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Bunda X_i – A hodisaning i-sinashdagi ro'y berishlar sonini ifodalovchi tasodifiy miqdor. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar erkli bo'lib, bir xil taqsimot qonuniga egadir. Ya'ni

$$\begin{array}{ccc} X_1: 0 \quad 1 & X_2: \; 0 \quad 1 & X_n: 0 \quad 1 \\ p: \; q \quad p & p: \; q \quad p & p: \; q \quad p \end{array}$$

Bu tasodifiy miqdorlar uchun

$$M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n) = p, \quad D(X_i) = pq \le \frac{1}{4}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin. U holda

$$M(\mu_n) = M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n) = np$$

va $M\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = p$ ekanligini hisobga olsak:

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Qaralayotgan holda Chebishev teoremasining barcha shartlari bajariladi. Bernulli teoremasi sinashlar soni yetarlicha katta bo'lganda nisbiy chastota nima uchun turg'unlik xossasiga ega bo'lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta'rifini asoslaydi.

Eslatma. Bernulli teoremasidan $\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n} = p$ xulosani chiqarish mumkin emas.

Teorema yetarlicha ko'p sondagi tajribalarda nisbiy chastota har bir tarjribada hodisa ro'y berishining o'zgarmas ehtimoliga faqat ehtimol bo'yicha yaqinlashishi haqidadir. $\frac{k}{n}$ ning p ga ehtimol bo'yicha yaqinlashishi analizdagi oddiy yaqinlashishdan farq qiladi. Bu farqni to'g'ri tushunish uchun ehtimol bo'yicha yaqinlashish ta'rifini beramiz.

26-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $|x_n - x_0| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilish ehtimolligi $n \to \infty$ da birga intilsa, u holda $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ketma-ketlik x_0 ga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.

Chebishev teoremasining (yoki katta sonlar qonunining) mohiyati quyidagicha: ayrim olingan erkli tasodifiy miqdorlar o'z matematik kutilmalaridan katta farq qiladigan qiymatlarni qabul qilsada, yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlarning arifmetik o'rtacha qiymati katta ehtimollik bilan tayin o'zgarmas songa, chunonchi $\frac{1}{n}\sum M(X_i)$ songa yaqin qiymatlarni qabul qiladi.

Boshqacha qilib aytganda, ayrim tasodifiy miqdorlar anchagina sochilgan bo'lishi mumkin, lekin ularning arifmetik o'rtacha qiymatlarining tarqoqligi kam bo'ladi.

Shunday qilib, har bir tasodifiy miqdor mumkin bo'lgan qiymatlaridan qaysi birini qabul qilishini aniq ayta olmasak ham ularning arifmetik o'rtachasi qanday qiymat qabul qilishini oldindan ko'ra bilish mumkin.

Katta sonlar qonuniga ko'ra, yetarlicha ko'p sondagi erkli (dispersiyasi tekis chegaralangan) tasodifiy miqdorlarning arifmetik o'rtacha qiymatlari tasodifiylik xarakterini yo'qotadi. Bu esa quyidagicha izohlanadi: har bir miqdorning o'zining matematik kutilmasidan chetlanishi musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin, ammo arifmetik o'rtachada ular o'zaro yo'qolib ketadi.

Chebishev teoremasining amaliy ahamiyatiga doir quyidagi misolni keltiramiz.

Odatda, biror fizik kattalikni o'lchash bir necha marta amalga oshiriladi va ularning arifmetik o'rtacha qiymati izlanayotgan o'lcham sifatida qabul qilinadi. Qanday shartlarda bu usulni to'g'ri deb hisoblash mumkin? – degan savolga Chebishev teoremasi javob beradi.

Haqiqatan ham, har bir o'lchash natijalarini $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar sifatida qarab, bu tasodifiy miqdorlarga Chebishev teoremasini qo'llamoqchi bo'lsak, quyidagilar bajarilishi kerak: birgalikda erkli; bir xil matematik kutilmaga ega; dispersiyalari tekis chegaralangan. Agar har bir o'lchashning natijasi qolganlariga bog'liq bo'lmasa, birinchi shart bajariladi.

Agar o'lchashlar sistematik (bir xil ishorali) xatolarsiz bajarilsa, ikkinchi talab bajariladi. Bu holda hamma tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari bir xil bo'lib, u haqiqiy o'lchamga teng bo'ladi. Agar o'lchash asbobi aniqlikni ta'minlay olsa, uchinchi talab ham bajariladi. Bunda ayrim o'lchashlarning natijalari har xil bo'lsada, ularning tarqoqligi chegaralangan bo'ladi.

Agar yuqorida ko'rsatilgan hamma talablar bajarilgan bo'lsa, u holda o'lchash natijalariga Chebishev teoremasini qo'llashga haqlimiz. Bunda yetarlicha ko'p sonda o'lchashlar o'tkazilsa, u holda ularning arifmetik o'rtacha qiymati o'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatidan istalgancha kam farq qiladi. Statistikada qo'llanadigan tanlanma usul Chebishev teoremasiga asoslangan, bu usulning mohiyati shundan iboratki, unda uncha katta bo'lmagan tasodifiy tanlanmaga asoslanib, barcha tekshirilayotgan ob'yektlar to'plami to'g'risida mulohaza qilinadi.

51-misol. $X_1, X_2, ..., X_n$ erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagicha taqsimot qonuniga ega.

$$X_n: \quad -a \qquad a$$
$$p: \quad \frac{n+1}{2n+1} \quad \frac{n}{2n+1}$$

Berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Chebishev teoremasi o'rinlimi?

Yechish. Chebishev teoremasi shartlarini tekshiramiz:

$$M(X_n) = -a\frac{n+1}{2n+1} + a\frac{n}{2n+1} = -\frac{a}{2n+1}, \quad D(X) < a^2.$$

Demak, dispersiyalari a^2 bilan tekis chegaralangan va bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Chebishev teoremasi o'rinli.

52-misol. X diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot bilan berilgan.

$$X: \ 0{,}1 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6$$
$$p: \ 0{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}5$$

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $p(|X - M(X)| < \sqrt{0{,}4})$ ehtimolni baholang.

Yechish.

$$M(X) = 0{,}1\cdot 0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5 = 0{,}44,$$
$$D(X) = 0{,}1^2\cdot 0{,}2 + 0{,}4^2\cdot 0{,}3 + 0{,}6^2\cdot 0{,}5 - 0{,}44^2 = 0{,}0364$$

Demak, $p\left(|X - 0{,}44| < \sqrt{0{,}4}\right) \geq 1 - \dfrac{0{,}0364}{0{,}4} = 0{,}909.$

4. Markaziy limit teoremasi. Ma'lumki, normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar amaliyotda keng tarqalgan. Buni nima bilan asoslash mumkin. Bunga rus matematigi A.M.Lyapunovning quyidagi teoremasi javob beradi.

Teorema (Markaziy limit teoremasi). Agar X tasodifiy miqdor juda ko'p sondagi o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlarning yig'indisidan iborat bo'lib, har bir hadning yig'indiga ta'siri e'tiborga olinmaydigan darajada juda kam bo'lsa, u holda X ning taqsimoti normal taqsimotga yaqin bo'ladi.

Faraz qilamiz, tajriba qandaydir fizik kattalikni o'lchashdan iborat bo'lsin. Har qanday o'lchash bu kattalikning taxminiy qiymatini beradi, o'lchash natijasiga ta'sir etuvchi tasodifiy faktorlar esa juda ko'p. Har bir faktor o'lchash natijasiga e'tiborga olinmaydigan darajada bo'lsa ham ta'sir ko'rsatadi va xatolikni hosil qiladi. Ammo, bu faktorlarning soni juda ko'p bo'lganligi sababli xatoliklarning umumiy yig'indisi sezilarli darajada xatolikni hosil qiladi. Bu xatoliklar yig'indisini juda katta sondagi o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisi deb qarab, bu yig'indining taqsimoti normal taqsimotga yaqin ekanligi haqida xulosa qilishimiz mumkin.

Faraz qilamiz, $X_1, X_2, ..., X_n$ o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lib, ularning matematik kutilmalari $M(X_k) = a_k$ va dispersiyalari $D(X_k) = b_k^2$ chekli bo'lsin.

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n, \ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \ B_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

Normalangan yig'indining taqsimot funksiyasini quyidagicha belgilaymiz

$$F_n(x) = p\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right)$$

Agar normalangan yig'indining taqsimot funksiyasi x ning har qanday qiymatida va $n \to \infty$ da normal taqsimotga intilsa, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} p\left[\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (10.53)$$

bo'lsa, $X_1, X_2, ..., X_n ...$ ketma-ketlik uchun markaziy limit teoremasini qo'llash mumkin.

10.7. Korrelatsion bog'lanish. Regressiya tenglamasi

Regressiya tenlamasini tushutirishga o'tishdan oldin matematik statistikaning ba'zi tushunchalari bilan tanishib chiqamiz.

Bosh to'plamdan n hajmli tanlanma olingan bo'lsin. Bunda tanlanmaning x_i qiymati n_i marta kuzatilgan va $\sum_i n_i = n$ bo'lsin. Kuzatilgan $.x_i.$ qiymatlarning ortib yoki kamayib borish n tartibida yozilgan ketma-ketligi *variatsion qator*, ketma-ketlikning hadlari esa *variantalar* deyiladi. Kuzatishlar soni n_i *–chastotalar*, ularning x_i –tanlanma hajmiga nisbati esa $W_i = \frac{n_i}{n}$ *nisbiy chastotalar* deyiladi.

Tanlanmaning *statistik taqsimoti* deb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalardan tuzilgan quyidagi jadvalga aytiladi:

$$\begin{array}{l} x_i: \ x_1 \ \ x_2 \ ... \ x_k \ ... \\ n_i: \ n_1 \ \ n_2 \ ... \ n_k \ ... \\ x_i: \ x_1 \ \ x_2 \ ... \ x_k \ ... \\ W_i: \ W_1 \ \ W_2 \ ... \ W_k \ ... \end{array} \qquad (10.54)$$

Shunday qilib, taqsimot ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslikni, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslikni bildiradi.

53-misol. Hajmi 40 ga teng bo'lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti quyidagicha:

$$x_i: \quad 2 \quad 6 \quad 12$$
$$n_i: \quad 6 \quad 20 \quad 14$$

berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini yozing.

Yechish. Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlanma hajmiga bo'lamiz va natijada:

$$W_1 = \frac{6}{40} = 0,15; \; W_2 = \frac{20}{40} = 0,5; \; W_3 = \frac{14}{40} = 0,35.$$

U holda, nisbiy chastotalar taqsimoti:

$$x_i: \quad 2 \quad 6 \quad 12$$
$$W_i: \quad 0,15 \quad 0,5 \quad 0,35$$

Faraz qilamiz, X – belgining chastotalar statistik taqsimoti ma'lum bo'lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: $n_x - X$ belgining x – variantasidan kichik qiymatlari kuzatilgan kuzatishlar soni; n – umumiy kuzatishlar soni. U holda $\frac{n_x}{n} - X < x$ hodisaning ro'y berish nisbiy chastotasi: Agar x o'zgaradigan bo'lsa, u holda, $\frac{n_x}{n}$ nisbiy chastota ham o'zgaradi. Demak, $\frac{n_x}{n}$ nisbiy chastota x ning funksiyasidir.

27-ta'rif. Empirik taqsimot funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb, har bir x qiymat uchun $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan $F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$ funksiyaga aytiladi.

54-misol. Tanlanmaning quyidagi taqsimoti:

$$x_i: \quad 2 \quad 6 \quad 10$$
$$n_i: \quad 12 \quad 18 \quad 30$$

bo'yicha uning empirik funksiyasini tuzing.

Yechish. Tanlanma hajmini topamiz: $n = 60$. U holda

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x < 2, \\ 0,2, & agar \quad 2 \le x < 6 \\ 0,5 & agar \quad 6 \le x < 10 \\ 1 & agar \quad x \ge 10 \end{cases}$$

Bosh to'plamning $F(x)$ – taqsimot funksiyasi nazariy taqsimot funksiyasi deb ataladi. Empirik taqsimot funksiya $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasini, nazariy taqsimot funksiya esa $X < x$ hodisaning ro'y berish ehtimolini aniqlaydi. $F_n^*(x)$ funksiya uchun $F(x)$ funksiyaning barcha xossalari o'rinli, ya'ni:

1) $F_n^*(x) \in [0;1]$;

2) $F_n^*(x)$ – kamaymaydigan funksiya;

3) agar x_1 – eng kichik varianta bo'lsa, u holda $X < x_1$ qiymatlar uchun $F_n^*(x) = 0$; agar x_k – eng katta varianta bo'lsa, u holda $X \ge x_k$ qiymatlar uchun $F_n^*(x) = 1$.

Shunday qilib, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi bosh to'plam nazariy taqsimot funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Haqiqatdan ham, Bernulli teoremasiga asosan, $\lim\limits_{m\to\infty} P\left(\left|F(x) - F_n^*(x)\right| < \varepsilon\right) = 1$. Demak, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan bosh to'plam nazariy taqsimot (integral) funksiyasining taxminiy ko'rinishi sifatida foydalanish mumkin.

Odatda, tadqiqotchi ixtiyorida tanlanma asosida olingan ma'lumotlar, masalan, tanlanma son belgisini n marta kuzatish natijasida olingan $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlar bo'ladi. Demak, baholanayotgan belgining bahosi xuddi shu ma'lumotlar orqali ifodalanishi kerak.

Tanlanmadagi $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlarni erkli $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar deb qarab, nazariy taqsimot noma'lum parametrining statistik bahosini topish uchun kuzatilayotgan tasodifiy miqdorlar orqali shunday funksiya topish kerakki, u baholanayotgan parametrning taqribiy qiymatini bersin. Masalan, normal taqsimotning matematik kutilishini baholash uchun ushbu

$$\overline{X} = \frac{X_1, X_2, ..., X_n}{n}$$

funksiya xizmat qiladi.

Shunday qilib, nazariy taqsimot noma'lum parametrining statistik bahosi deb, kuzatilgan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funksiyaga aytiladi.

28-ta'rif. Agar bosh to'plamdan ixtiyoriy hajmli tanlanma olinganda ham θ^* bahoning matematik kutilmasi baholanayotgan θ^* parametrga teng, ya'ni $M(\theta^*) = 0$ bo'lsa, u holda θ^* baho siljimagan baho deb ataladi, aks holda θ^* siljigan baho deyiladi.

29-ta'rif. Agar θ^* baho va θ noma'lum parametrlar uchun $\lim\limits_{n\to\infty} M(\theta^*) = \theta$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda θ^* baho asimptotik siljimagan baho deb ataladi.

Ammo shuni ham ta'kidlash kerakki, siljimagan baho har doim ham baholanayotgan parametrga yaxshi yaqinlashadi deb hisoblash xato bo'ladi. Darhaqiqat, θ^* ning mumkin bo'lgan qiymatlari uning o'rtacha qiymati atrofida ancha tarqoq joylashgan, ya'ni $D(\theta^*)$ – dispersiyasi anchagina katta bo'lishi mumkin. U holda l – tanlanmadagi ma'lumotlar bo'yicha topilgan θ_l^* – baho $\overline{\theta^*}$ o'rtacha qiymatdan va demak, baholanayotgan θ parametrdan ancha uzoqlashgan bo'lishi mumkin.

Bu holda $\overline{\theta}_l^{*}$ ni θ ning tarqibiy qiymati sifatida qabul qilib, katta xatoga yo'l qo'ygan bo'lar edik. Shu sababli, statistik baholarga effektivlik talabi qo'yiladi.

30-ta'rif. Agar θ_n baho uchun har qanday $\varepsilon > 0$ da $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta_n - \theta| > \varepsilon) = 0$ shart bajarilsa, ya'ni θ_n baho θ ga ehtimol bo'yicha yaqinlashsa, u holda θ_n asosli baho deyiladi.

Agar θ parametrning θ_{n_1} va θ_{n_2} siljimagan baholari uchun biror n hajmli tanlanmada $D(\theta_{n_1}) < D(\theta_{n_2})$ o'rinli bo'lsa, u holda θ_{n_1} baho θ_{n_2} bahoga nisbatan n hajmli tanlanma uchun samaraliroq (optimalroq) baho deyiladi.

Berilgan n hajmli tanlanmada eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan baho, bu hajmda eng samarali baho deyiladi.

$\overline{x}_n$ – tanlanma o'rtachasi bosh to'plam matematik kutilmasi uchun siljimagan, asosli va effektiv baho bo'ladi.

Juda katta hajmli (n yetarlicha katta bo'lganida) tanlanmalar qaralganda statistik baholarga asoslilik talabi qo'yiladi.

Agar bahoning dispersiyasi $n \to \infty$ da nolga intilsa, u holda bunday baho asosli bo'ladi.

Agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_N$ – qiymatlari takrorlanmaydigan bo'lsa, $\overline{x}_B$ – bosh to'plam o'rtachasi

$$\overline{x}_B = \frac{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (10.55)$$

formula bilan topiladi; agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_k$ – qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, ..., N_k$ chastotalarga ega bo'lib, $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$ bo'lsa, u holda

$$\overline{x}_B = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_k N_k}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i N_i \qquad (10.56)$$

Bosh to'plamning kuzatilayotgan X belgisini tasodifiy miqdor sifatida qarasak, uning matematik kutilmasi uchun $M(X) = \overline{x}_B$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_n$ – qiymatlari takrorlanmaydigan bo'lsa, $\overline{x}_T$ – tanlanma o'rtachasi

$$\overline{x}_T = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (10.57)$$

formula bilan topiladi; agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_n$ – qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, ..., n_k$ chastotalarga ega bo'lib, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ bo'lsa, u holda

$$\overline{x}_T = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \qquad (10.58)$$

$M(X)-$ bosh to'plam o'rtachasining statistik bahosi sifatida tanlanma o'rtacha qabul qilinadi. $\overline{x}_T$ siljimagan baho ekanligiga, ya'ni $M(\overline{x}_T)=M(X)$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. $\overline{x_T}$ ni $\overline{X_T}$ tasodifiy miqdor, $x_1, x_2, ..., x_n$ –variantalarni erkli, bir xil taqsimlangan $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar sifatida qaraymiz. Bu miqdorlar bir xil taqsimlanganligi uchun ular bir xil sonli xarakteristikalarga, jumladan bir xil matematik kutilmaga ega: $a=M(X_i)$. Bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar arifmetik o'rtacha qiymatining matematik kutilmasi ulardan bittasining matematik kutilmasiga teng, ya'ni

$$M(\overline{X_T})=M\left(\frac{X_1, X_2, ..., X_n}{n}\right)=\frac{M(X_1)+M(X_2)+M(X_n)}{n}=\frac{na}{n}=a.$$

$X_1, X_2, ..., X_n$ miqdorlarning har biri va bosh to'plamning X belgisi (uni ham tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz) bir xil taqsimotga ega ekanligini e'tiborga oladigan bo'lsak, bu miqdorlarning va bosh to'plamning sonli xarakteristikalari bir xil degan xulosaga kelamiz. Shunday qilib, $M(\overline{X_T})=a=M(X)$. U holda $\overline{x_T}$ bosh to'plam matematik kutilmasi uchun siljimagan baho ekan.

Ma'lumki, katta sonlar qonuniga (Chebishev teoremasi) asosan ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty}P(|\overline{X_T}-M(\overline{x_T})|<\varepsilon)=1$$

ya'ni n ortishi bilan $\overline{x_T}$ –tanlanma o'rtachasi bosh to'plam matematik kutilmasiga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi. Bundan esa, $\overline{x_T}$ baho a uchun asosli baho bo'lishi kelib chiqadi.

Agar bosh to'plamdan katta hajmli bir nechta tanlanmalar olinib har birining tanlanma o'rtachalari topiladigan bo'lsa, ular o'zaro taqriban teng bo'ladi. Bu tanlanma o'rtachaning turg'unlik xossasi deyiladi.

55-misol. Quyidagi tanlanmaning

x_i:	4	8	11
n_i:	5	10	5

statistik taqsimoti bo'yicha bosh to'plam matematik kutilmasining siljimagan bahosini toping.

Yechish. (10.58) formuladan foydalanamiz. U holda $\overline{x_T}=7{,}75$.

Agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_N$ –qiymatlari takrorlanmaydigan bo'lsa, bosh to'plam dispersiyasi

$$D(X)=D_B=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x_B})^2 \qquad (10.59)$$

formula bilan topiladi; agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_k$ −qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, ..., N_k$ chastotalarga ega bo'lib, $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$ bo'lsa,u holda

$$D(X) = D_B = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \overline{x_B})^2 \qquad (10.60)$$

formula bilan aniqlanadi.

Bosh to'plam o'rtacha kvadratik chetlanishi esa

$$\sigma(X) = \sigma_B = \sqrt{D_B} \qquad (10.61)$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_n$ −qiymatlari takrorlanmaydigan bo'lsa, tanlanma dispersiya

$$D(X) = D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_T})^2 \qquad (10.62)$$

formula bilan topiladi; agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_k$ −qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, ..., n_k$ chastotalarga ega bo'lib, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ bo'lsa, u holda

$$D(X) = D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_T})^2 \qquad (10.63)$$

56-misol. Tanlanmaning $D = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$,

x_i:	4	8	11
n_i:	5	10	5

statistik taqsimoti bo'yicha uning dispersiyasini toping.

Yechish. (10.58) formuladan foydalansak: $\overline{x_T} = 7,75$. Dispersiyani hisoblash uchun (10.63) formuladan foydalanamiz. U holda

$$D_T = \frac{5(4 - 7,75)^2 + 10(8 - 7,75) + 5(11 - 7,75)}{20} = 7,0625.$$

Dispersiyani hisoblashda (10.59), (10.60), (10.62), (10.63) formulalar noqulay, shu sababli, dispersiya va matematik kutilmalarning xossalaridan foydalanib, dispersiyani hisoblash uchun qulay bo'lgan quyidagi formulani keltirib chiqarish mumkin:

$$D = \overline{x^2} - (\overline{x})^2, \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 \qquad (10.64)$$

Bosh to'plam dispersiyasi uchun statistik baho sifatida $D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_T})^2$ tanlanma dispersiyasini olish mumkin emas. Chunki bu baho siljigan baho bo'ladi. Ya'ni $M(D_T) \neq D_B$. Bu holda biz

$$M(D_T) = \frac{n-1}{n} D_B$$

tenglikni bosh to'plam dispersiyasi uchun siljimagan statistik baho sifatida olamiz va uni

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_T \qquad (10.65)$$

ko'rinishda belgilab "tuzatilgan" dispersiya deb ataymiz.

Haqiqatan ham "tuzatilgan" dispersiya bosh to'plam dispersiyasi uchun siljimagan baho bo'ladi. Chunki

$$M(s^2) = M\left(\frac{n}{n-1} D_T\right) = \frac{n}{n-1} M(D_T) = D_B.$$

Bosh to'plam o'rtacha kvadratik chetlanishining bahosi sifatida $s = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_T}$ "tuzatilgan" o'rtacha kvadratik chetlanish olinadi.

Eslatma. n ning katta qiymatlarida tanlanma dispersiyasi va "tuzatilgan" dispersiyalarning farqi juda kam bo'ladi. Shu sababli, "tuzatilgan" dispersiyadan $n < 30$ hajmli tanlanmalarda foydalanish tavsiya etiladi.

Eslatma. Agar tanlanmaning variatsion qatorida x_i – variantalarning qiymatlari katta sonlardan iborat bo'lsa, u holda x_i variantadan $u_i = \frac{x_i - c_1}{c_2}$ – shartli variantaga o'tish orqali u_i – variantalari kichik sonlardan iborat yangi variatsion qator hosil qilinadi, so'ngra yangi tanlanma uchun $\overline{u_T}$ va $D(u_T)$ xarakteristikalar topiladi. Oldingi tanlanmaning $\overline{x_T}$, $D(x_T)$ xarakteristikalarini topish uchun $\overline{x_T} = c_2 \overline{u_T} + c_1$, $D(x_T) = c_2^2 D(u_T)$ formulalardan foydalaniladi.

Matematik statistika va uning tadbiqlarida variatsion qatorning tanlanma o'rtachasi va tanlanma dispersiyasidan tashqari boshqa xarakteristikalari ham ishlatiladi. Shulardan ba'zilarini keltiramiz.

Eng katta chastotaga ega bo'lgan varianta *moda* deb ataladi va M_0 kabi belgilanadi.

Mediana deb, variatsion qator variantalarini son jihatidan teng ikki qismga ajratadigan variantaga aytiladi va M_e kabi belgilanadi. Variantalar sonining juft yoki toqligiga qarab, mediana quyidagicha aniqlanadi:

$$M_e = \begin{cases} x_{k+1}, & n = 2k+1 \\ \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, & n = 2k \end{cases}$$

Variatsiya qulochi R deb, eng katta va eng kichik variantalar ayirmasiga aytiladi:

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

Variatsiya qulochi variatsion qator tarqoqligining eng sodda xarakteristikasi bo'lib xizmat qiladi.

Variatsion qator tarqoqligining yana bir xarakteristikasi sifatida o'rtacha absolyut chetlanish θ ham ishlatiladi:

$$\theta = \frac{\sum_i n_i \left| x_i - \overline{x_T} \right|}{n}.$$

Variatsiya koeffitsiyentii V deb tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishining tanlanma o'rtachasiga nisbatini foizlardagi ifodasiga aytiladi: $V = \frac{\sigma_T}{\overline{x_T}} 100\%$.

Variatsiya koeffitsiyenti ikkita yoki undan ortiq variatsion qatorlarning tarqoqliklarini taqqoslash uchun xizmat qiladi: variatsion qatorlardan variatsiya koeffitsiyenti katta bo'lgani ko'proq tarqoqlikka ega bo'ladi.

57-misol. Quyida berilgan

$$x_i: \ 1 \quad 3 \quad 6 \quad 16$$
$$n_i: \ 4 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

tanlanma uchun M_0, M_e, R, V, θ xarakteristikalarni hisoblang.

Yechish. Yuqoridagi formulalardan fodalanamiz:

$$M_0 = 3, \ M_e = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = 3, \ R = 15, \ \overline{x_T} = 4 \Rightarrow \theta = 2{,}2, \ \sigma_T = 3{,}24 \Rightarrow V = 80{,}1\%$$

Tajribalar soni juda katta bo'lsa, nuqtaviy bahoning qiymati odatda noma'lum parametrga yaqin bo'ladi. Ammo, kuzatishlar soni kam bo'lsa, θ nuqtaviy baho va θ parametr orasidagi farq sezilarli darajada bo'lishi mumkin. Bunday hollarda parametrni baholash uchun intervalli baholardan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

31-ta'rif. Ikkita son (interval chetlari) bilan aniqlanadigan baho intervalli baho deb ataladi.

Intervalli bahoda bahoning aniqliligi va ishonchliligi tushunchalarini kiritishimiz kerak bo'ladi. Buni quyida ko'rib chiqamiz.

Tanlanma ma'lumotlari asosida topilgan θ−statistik xarakteristika θ parametrning bahosi bo'lsin. θ ni o'zgarmas son deb faraz qilamiz. Ma'lumki, θ ning aniqligi yuqori bo'lganda $|\theta - \theta|$ farqning qiymati kamayib boradi, ya'ni $|\theta - \theta| < \delta$, $\delta > 0$ tengsizlikda δ qancha kichik bo'lsa, baho shuncha aniq bo'ladi. Shu sababli, δ bahoning aniqligi deb ataladi.

Statistik usullar θ baho $|\theta - \theta| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantirishini qat'iy tasdiqlay olmaydi, balki bu tengsizlik bajarilishining qandaydir γ ehtimolligi haqida xulosa chiqara oladi.

$|\theta-\theta|<\delta$ tengsizlikning bajarilish ehtimoli γ θ parametrning $\tilde{\theta}$ baho bo‘yicha ishonchliligi (ishonchlilik ehtimoli) deyiladi. Bu yerda, $\gamma=P(|\theta-\theta|<\delta$. Ko‘p hollarda, ishonchlilik ehtimoli oldindan beriladi. Masalan, 0,95; 0,99; 0,999 va hokazo.

$\gamma=P(|\theta-\theta|<\delta$ ehtimollikni quyidagicha yozib olamiz:

$$P(\theta-\delta<\theta<\delta+\theta)=\gamma \tag{10.66}$$

Bu munosabatni quyidagicha tushunish kerak: $(\theta-\delta,\delta+\theta)$ interval θ noma’lum parametrni o‘z ichiga olish (qoplash) ehtimoli γ ga teng.

$(\theta-\delta,\delta+\theta)$ interval noma’lum parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplovchi ishonchlilik intervali deb ataladi.

3-eslatma. $(\theta-\delta,\delta+\theta)$ interval tasodifiy chetki nuqtalarga ega, chunki turli tanlanmalar uchun θ ning qiymatlari turlicha bo‘ladi. Shu sababli, tanlanma o‘zgarsa $(\theta-\delta,\delta+\theta)$ intervalning chetki nuqtalari ham o‘zgaradi.

Ishonchlilik intervallarini topish qanday amalga oshirilishi bilan normal taqsimot qonuniga bo‘ysunuvchi tasodifiy miqdorlar misolida tanishib chiqamiz.

Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan bo‘lsin. Ma’lumki, bu taqsimotni ikkita parametr: a va σ aniqlaydi. Faraz qilamiz, ulardan biri, σ– o‘rtacha kvadratik chetlanish ma’lum, ikkinchisi a–matematik kutilma esa noma’lum bo‘lsin. Bu taqsimotning matematik kutilmasi a uchun ishonchlilik intervalini γ ishonch bilan δ aniqlikda topish masalasini qaraymiz.

$\bar{x}_T$ – tanlanma o‘rtachasini $\overline{X_T}$ tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz. X belgi normal taqsimlanganligi sababli tanlanma o‘rtacha ham normal taqsimlangan bo‘ladi. Bu yerda $M(\overline{X_T})=a$, $D(\overline{X}_T)=\frac{\sigma^2}{n}$, $P(|\overline{X}_T-a|<\delta)=\gamma$ munosabat o‘rinli bo‘lsin. U holda

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

formuladan foydalanib, X ni $\overline{X}_T$ bilan σ ni esa $\sigma(\overline{X}_T)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bilan almashtirsak quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$P\left(|\overline{X}_T-a|<\delta\right)=2\Phi(t) \tag{10.67}$$

bu yerda $t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Bundan $\delta=\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ bo‘ladi. U holda (10.67) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$P(|\overline{X_T}-a|<\delta)=2\Phi(t)\Rightarrow P\left(\overline{X}_T-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}<a<\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}+\overline{X}_T\right)=2\Phi(t) \qquad (10.68)$$

Shunday qilib, ishonchlilik intervali $\left(\overline{X}_T-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}<a<\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}+\overline{X}_T\right)$ ko'rinishda bo'ladi. Bundan $\left(\overline{X}_T-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}<a<\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}+\overline{X}_T\right)$ interval a parametrni $\gamma=2\Phi(t)$ ehtimol bilan $\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ aniqlikda qoplashi kelib chiqadi.

(10.68) dan quyidagi xulosalarni chiqaramiz: tanlanma hajmining ortishi baholash aniqligi oshishiga olib keladi; agar γ ishonchlilik orttirilsa, t parametr ortadi va bu esa baholash aniqligi kamayishiga olib keladi.

58-misol. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lib uning o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=3$ Tanlanma hajmi $n=3$ va bahoning ishonchliligi $\gamma=0,95$ bo'lsin. Noma'lum parametr $a-$matematik kutilmaning $\overline{x_T}-$tanlanma o'rtachasi bo'yicha ishonchlilik intervallarini toping.

Yechish. Jadvaldan foydalanib t ni topamiz, ya'ni $2\Phi(t)=0,95\Rightarrow$ $\Phi(t)=0,475\Rightarrow t=1,96$. Bahoning aniqligi: $\delta=\frac{1,96\cdot 3}{\sqrt{36}}=0,98$. U holda ishonchlilik intervali: $(\overline{x_T}-0,98,\overline{x_T}+0,98)$.

Berilgan $\gamma=0,95$ ishonchlilikni quyidagicha tushunish kerak: agar yetarlicha ko'p sondagi tanlanmalar olingan bo'lsa, u holda ularning 95% i shunday ishonchli intervallarni aniqlaydiki, bu intervallar parametrni haqiqatan ham o'z ichiga oladi; 5% hollardagina parametr interval chegarasidan tashqarida yotishi mumkin.

4-eslatma. Agar matematik kutilmani oldindan berilgan δ aniqlik va γ ishonchlilik bilan baholash talab qilinsa, u holda bu aniqlikni beradigan tanlanmaning minimal hajmi

$$n=\frac{\sigma^2 t^2}{\delta^2} \qquad (10.69)$$

formuladan topiladi.

Bosh to'plamning X belgisi normal taqsimlangan va uning $a-$matematik kutilmasini $\overline{x_T}-$tanlanma o'rtachasi orqali baholashda $\sigma-$o'rtacha kvadratik chetlanish noma'lum bo'lsin. U holda

$$\overline{X}_T-t(\lambda,n)\frac{s}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}_T+t(\lambda,n)\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (10.70)$$

interval a uchun ishonch intervali bo'lib xizmat qiladi. Bu yerda $s-$tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlanish; $t(\gamma,n)$ esa berilgan n va γ bo'yicha maxsus jadvaldan topiladi. Bunday jadvallar ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaga oid adabiyotlarda beriladi.

59-misol. Bosh to'plamdan $n=10$ hajmli tanlanma olingan va u quyidagi statistik taqsimotga ega bo'lsin:

$$x_i : -2 1 2 3 4 5$$

$$n_i : 2 1 2 2 2 1$$

$$\overline{X}_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i, s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{6} n_i (x_i - \overline{X}_T)^2}$$

Bosh to'plamning X belgisi normal taqsimlangan bo'lsa, uning a – matematik kutilmasi uchun $\overline{x_T}$ bo'yicha $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan ishonchli intervalni toping.

Yechish. Tanlanma o'rtachani va "tuzatilgan" o'rtacha kvadratik chetlanishni mos ravishda quyidagi formulalardan topamiz:

$$\overline{X}_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i, s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{6} n_i (x_i - \overline{X}_T)^2}.$$

U holda: $\overline{x_T} = 2$, $s = 2,4$ Jadvaldan $\gamma = 0,95$ va $n = 10$ larga mos $t(0,95;10) = 2,26$ ni topamiz. Topilganlarni (10.70) ifodaga qo'yib: $(0,3;3,7)$ ishonchlilik intervalini hosil qilamiz. Bu interval noma'lum a – matematik kutilmani $\gamma = 0,95$ ishonch bilan qoplaydi.

Bosh to'plamning o'rganiladigan X son belgisi normal taqsimlangan bo'lsin. Uning σ–o'rtacha kvadratik chetlanishi uchun tanlanma ma'lumotlari bo'yicha γ ehtimol bilan ishonchlilik intervali topish talab qilinsin.

Ma'lumki, tanlanmaning s^2 – "tuzatilgan" dispersiyasi σ^2 – bosh to'plam dispersiyasi uchun siljimagan bahodir. Shu sababli, σ – noma'lum paremetrni s orqali baholaymiz. Buning uchun

$$P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma$$

munosabat bajarilishini talab qilamiz. Tayyor jadvaldan foydalanish uchun $s - \delta < \sigma < s + \delta$ tengsizlikni

$$s(1 - \frac{\delta}{s}) < \sigma < s(1 + \frac{\delta}{s})$$

tengsizlik bilan almashtiramiz. $q = \dfrac{\delta}{s}$ belgilashdan so'ng

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), q < 1 \quad 0 < \sigma < s(1+q), q > 1 \qquad (10.71)$$

ishonch intervalini hosil qilamiz. Bu yerda $q(\gamma, n)$ maxsus jadvaldan topiladi.

60-misol. Bosh to'plamning X belgisi normal taqsimlangan va $n = 50$ hajmli tanlanmaning "tuzatilgan" dispersiyasi: $s^2 = 2,25$ bo'lsin. σ noma'lum parametrni $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchlilik intervalini toping.

Yechish. Jadvaldan $n=50$ va $\gamma=0,95$ qiymatlarga mos $q=0,21$ ni topamiz. Bu yerda $q<1$ bo'lgani uchun (10.71) tengsizliknig birinchisidan foydalanib, $1,185<\sigma<1,815$ ishonchlilik intervalini topamiz.

Kundalik faoliyatimizdagi ko'pgina amaliy masalalarda, tajribalarda o'rganilayotgan Y belgining (tasodifiy miqdorning) bitta yoki bir nechta boshqa belgilarga (tasodifiy miqdorlarga) bog'liqligini aniqlash va baholash talab qilinadi. Dastlab Y belgining bitta X tasodifiy miqdorga bog'liqligini o'rganamiz.

Ikki belgi funksional bog'lanish bilan, yoki statistik bog'lanish bilan bog'langan, yoki umuman erkli bo'lishi mumkin.

32-ta'rif. Agar X belgining har bir mumkin bo'lgan qiymatiga Y belgining bitta mumkin bo'lgan qiymati mos kelsa, u holda Y, X belgining funksiyasi deyiladi.

61-misol. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti:

$$\begin{array}{lll} X: & 2 & 3 \\ p: & 0,6 & 0,4 \end{array}$$

berilgan. $Y=X^2$ funksiyaning taqsimoti topilsin.

Yechish. Y ning mumkin bo'lgan qiymatlarini topamiz: $y_1=4$, $y_2=3$. U holda Y ning taqsimoti:

$$\begin{array}{lll} Y: & 4 & 9 \\ p: & 0,6 & 0,4 \end{array}$$

62-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lib, $M(X)=a=2$, $\sigma(X)=0,5$ bo'lsa, $Y=3X+1$ chiziqli funksiyaning zichlik funksiyasini toping.

Yechish. Y ning sonli xarakteristikalarini topamiz:

$$M(Y)=3\cdot 2+1=7, \qquad \sigma(Y)=3\cdot 0,5=1,5.$$

U holda Y ning zichlik funksiyasi: $g(y)=\dfrac{1}{1,5\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(y-7)^2}{2\cdot(1,5)^2}\right)$.

Funksional bog'lanishlar aniq va tabiiy fanlar: matematika, fizika, kimyo kabi fanlarda ayniqsa yaqqol kuzatiladi.

Masalan, termometrdagi simob ustunining balandligi X havo harorati Y haqida aniq va bir qiymatli ma'lumot beradi; aylana radiusi R va uning uzunligi C orasida $C=2\pi R$ geometriyadan ma'lum bo'lgan formula bilan aniqlangan funksional bog'lanish mavjuddir.

Iqtisodiy jarayonlarda, umuman jamiyatning boshqa sohalarida tasodifiy belgilar orasida qat'iy funksional bog'lanish kamdan-kam uchraydi. Buning asosiy sabablaridan biri belgilarga ta'sir etuvchi faktorlarning xilma-xilligi va tasodifiyligidir. Bu holatda belgilar orasidagi moslik statistik bog'lanish bo'lishi mumkin.

33-ta'rif. Agar belgilardan birining o'zgarishi ikkinchi belgi taqsimotining o'zgarishiga olib kelsa, u holda bu ikki belgi orasidagi bog'lanish statistik bog'lanish deyiladi.

Masalan, agar $Y(Z_1,Z_2,V_1,V_2)$ va $X(Z_1,Z_2,U_1,U_2)$ $(Z_i,V_i,U_i$ – tasodifiy faktorlar) belgilar berilgan bo'lsin. Bu holda Y va X lar orasidagi bog'lanish statistik bog'lanish deyiladi, chunki ularning har biri bog'liq bo'lgan tasodifiy faktorlar ichida umumiylari mavjud.

Statistik bog'lanishni matematik ifodalash murakkab, shu sababli uning xususiy hollaridan biri hisoblangan korrelatsion bog'lanish bilan tanishib chiqamiz.

34-ta'rif. Agar bir-biriga statistik bog'lanishda bo'lgan ikki belgidan birining o'zgarishi ikkinchi belgi o'rtacha qiymatining o'zgarishiga olib kelsa, u holda bunday statistik bog'lanish korrelatsion bog'lanish deb ataladi.

Bir-biri bilan korrelatsion bog'lanishda bo'lgan tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz.

1. Mehnat unumdorligi X va jami ishlab chiqarilgan mahsulot Y;
2. Yig'ib olingan hosil miqdori Y va ishlatilgan o'g'itlar miqdori X;
3. Jami mahsulot miqdori X va korxonaning ish haqi fondi Y;
4. Sarflangan kapital mablag'lar X va shu mablag'lardan olingan sof foyda Y;
5. Korxonaning texnika bilan qurollanganlik darajasi X va mehnat unumdorligi ko'rsatkichi Y.

Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinib turibdiki, korrelatsion bog'lanishni matematik ifodalash, ya'ni $y = f(x)$ ko'rinishda yozish uchun shartli o'rtacha tushunchasini kiritishimiz kerak.

35-ta'rif. $X = x$ qiymatga mos keluvchi Y ning kuzatilgan qiymatlari arifmetik o'rtachasini shartli o'rtacha deb ataymiz va $\overline{y_x}$ ko'rinishda belgilaymiz.

Xuddi shunday usulda $\overline{x_y}$ – shartli o'rtacha tushunchasi ham aniqlanadi.

36-ta'rif. $Y = y$ qiymatga mos keluvchi X ning kuzatilgan qiymatlari arifmetik o'rtachasini $\overline{x_y}$ – shartli o'rtacha deb ataymiz.

63-misol. X miqdorning $x_1 = 5$ qiymatiga Y miqdorning $y_1 = 6$, $y_2 = 7$, $y_3 = 8$ qiymatlari mos keladi. $\overline{y_x} = ?$

Yechish. $\overline{y_x} = \dfrac{6+7+8}{3} = 7$.

X va Y tasodifiy miqdorlar (belgilar) ustida kuzatishlar o'tkazilgan bo'lib, kuzatishlar natijalari mos ravishda $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ bo'lsin. U holda X va Y orasidagi bog'lanishni (munosabatni) ushbu jadval ko'rinishida ifodalash mumkin.

X	x_1	x_2	....	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

Agar yuqoridagi jadvalda x_i va y_i lar turli qiymatlarini qabul qilsa, u holda shartli o'rtacha tushunchasidan foydalanmaymiz.

Agar kuzatishlar soni ko'p, ya'ni x_i qiymat m_{x_i} marta, y_j qiymat m_{y_j} marta, (x_i,y_j) juftliklar $m_{x_iy_j}$ marta takrorlanishi mumkin bo'lsa, u holda yuqoridagi jadval o'rniga korrelatsion jadval yoki korrelatsion panjara deb ataluvchi jadval ishlatiladi. $m_{x_i}, m_{y_j}, m_{x_iy_j}$ lar mos ravishda $x_i, y_j, (x_i,y_j)$ larning chastotalari deyiladi. $m_{x_iy_j}=m_{ij}$ belgilash kiritib quyidagi jadvalni hosil qilamiz. Bu yerda

$$\sum_i m_{ij}=m_{y_j},\ \sum_j m_{ij}=m_{x_i},\ \sum_i m_{x_i}=\sum_j m_{y_j}=n.$$

Y / X	y_1	y_2	...	y_l	m_x
x_1	m_{11}	m_{12}	...	m_{1l}	m_{x_1}
x_2	m_{21}	m_{22}	...	m_{2l}	m_{x_2}
...	...	...	...	...	...
x_k	m_{k1}	m_{k2}	...	m_{kl}	m_{x_k}
m_y	m_{y_1}	m_{y_2}	...	m_{y_l}	n

Bu holatda shartli o'rtacha tushunchasidan foydalanishimiz zarur.

Korrelatsion panjarada shartli o'rtacha topilishiga doir misol ko'rib chiqamiz.

64-misol. Berilgan jadvaldan foydalanib, tanlanma shartli o'rtachani toping.

X / Y	3	4	6	7	8	n_y
8	5	3	-	-	-	8
12	3	4	5	4	2	18
15	-	3	3	6	2	14
n_x	8	10	8	10	4	$n=40$

Yechish. Hisoblashlarni quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

X / Y	3	4	6	7	8	n_y
8	5	3	-	-	-	8
12	3	4	5	4	2	18
15	-	3	3	6	2	14
n_x	8	10	8	10	4	$n=40$

$\overline{y_x}$	9,5	11,7	13,125	13,8	13,5	

Belgilar orasidagi korrelatsion munosabatlar (bog'lanishlar) to'g'ri, teskari, to'g'ri chiziqli va egri chiziqli bo'lishi mumkin. Masalan, to'g'ri korrelatsion bog'lanishda belgilardan birining ortishi (kamayishi) boshqasining o'rtachasi ortishiga (kamayishiga) olib keladi, teskari bog'lanishda esa aksincha va hokazo. Masalan, daraxtning yoshi X ortib borishi bilan daraxtdagi halqalar soni Y ortib boradi, havoning harorati X pasayishi bilan nafas olish tezligi Y kamayadi va h.k.

Y ning X ga korrelatsion bog'liqligi deb, $\overline{y_x}$ shartli o'rtachaning x ga funksional bog'lanishiga aytiladi: $\overline{y_x} = f(x)$. Bu tenglama Y ning X ga regressiya tanlanma tenglamasi (ba'zida Y ning X ga regressiya tenglamasi), $f(x)$ funksiya esa Y ning X ga tanlanma regressiyasi (ba'zida regressiya funksiyasi) deb ataladi. Bu tenglama grafigi esa Y ning X ga regressiya tanlanma chizig'i (ba'zida Y ning X ga regressiya chizig'i) deyiladi.

X belgining Y belgiga regressiya tanlama tenglamasi va regressiya tanlama chizig'i ham yuqoridagiga o'xshash aniqlanadi: $\overline{x_y} = \varphi(y)$.

Korrelatsiya nazariyasi belgilar orasidagi bog'lanishni o'rganish jarayonida asosan quyidagi ikki masalani hal qiladi.

1) Belgilar orasidagi korrelatsion bog'lanish formasini aniqlash, ya'ni regressiya funksiyasining ko'rinishini (chiziqli, chiziqsiz va h.k.) topish.

Agar $f(x)$ va $\varphi(y)$ regressiya funksiyalarining ikkalasi ham chiziqli bo'lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi korrelatsion bog'lanish chiziqli, aks holda esa chiziqsiz deyiladi.

2) Korrelatsion bog'lanish zichligini (kuchini) aniqlash.

Y belgining X belgiga korrelatsion bog'lanishining zichligi $X = x$ qiymatga mos Y ning mumkin bo'lgan qiymatlari $\overline{y_x}$ – shartli o'rtacha atrofida tarqoqligi darajasini baholaydi.

Regressiya tanlanma tenglamasi

$$\overline{y_x} = f(x)$$

ko'rinishda yozilib, agar $f(x)$ regressiya chiziqli bo'lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi korrelatsion bog'lanish chiziqli deb atalar edi. Biz mana shu chiziqli korrelatsion bog'lanishni atroflicha o'rganib chiqamiz.

Buning uchun (X,Y) juftlikning sonli belgilari sistemasini o'rganamiz. Bunda ikki:

1) ma'lumotlar gruppalanmagan;

2) ma'lumotlar gruppalangan hollarni alohida-alohida qarashimiz kerak bo'ladi.

1. Tanlanma ustida o'tkazilgan n ta erkli tajriba natijasida olingan ma'lumotlardan (x_i, y_i) $i = 1,2,3,...n$ sonlar juftligi ketma-ketligi hosil qilingan bo'lib, bu ma'lumotlarni gruppalash shart bo'lmasin, ya'ni X belgining turli x

qiymatlari va ularga mos Y belgining y qiymatlari bir martadan kuzatilgan bo'lsin. Bunday holatda shartli o'rtacha tushunchasidan foydalanish shart emas. Shuning uchun izlanayotgan

$$\overline{y_x} = kx + b \tag{10.72}$$

tanlanma regressiya to'g'ri chizig'i tenglamasini quyidagicha yozishimiz mumkin

$$y = kx + b \tag{10.73}$$

Bu tenglamadagi burchak koeffitsiyentini ρ_{yx} bilan belgilab, uni Y ning X ga regressiya tanlanma koeffitsiyenti deb ataymiz. Shunday qilib, Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini

$$Y = \rho_{yx} x + b \tag{10.74}$$

ko'rinishda izlaymiz.

Bu tenglamadagi noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsiyentilarni shunday tanlashimiz kerakki, natijada kuzatish ma'lumotlari bo'yicha topilgan (x_i, y_i) nuqtalarni XOY tekislikka joylashtirganimizda bu nuqtalar mumkin qadar (10.71) to'g'ri chiziqning yaqin atrofida yotsin. Bunday talabni bajarishdan oldin $Y_i - y_i$ ifoda bilan aniqlanadigan chetlanish tushunchasini kiritib olamiz, bu yerda Y_i – (10.71) tenglamadan x_i qiymatga mos keluvchi ordinata; y_i esa x_i ga mos kuzatilgan ordinata. Noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsiyentilarni shunday tanlaymizki, chetlanishlar kvadratlarining yig'indisi eng kichik, ya'ni $\min\limits_i \sum\limits_i (Y_i - y_i)^2$ bo'lsin (noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsiyentlarni topishning bu usuli eng kichik kvadratlar usuli deb ataladi).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial p} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(px_i + b - y_i)x_i = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial p} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(px_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

Har bir chetlanish noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsiyentilarga bog'liq bo'lgani uchun chetlanishlar kvadratlari yig'indisining funksiyasi F ham bu koeffitsiyentlarga bog'liq bo'ladi: $F(\rho_{yx}, b) = \sum\limits_i (Y_i - y_i)^2$. Bu funksiyaning minimumini topish uchun noma'lum parametrlar bo'yicha xususiy hosilalarni hisoblab nolga tenglashtiramiz (hozircha ρ_{yx} o'rniga ρ yozib turamiz):

Bu sistemada elementar almashtirishlar bajarib, ρ, b larga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} px^2_i + \sum\limits_{i=1}^{n} bx_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} px_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \tag{10.75}$$

Bu sistemadan izlanayotgan parametrlarni topamiz (yozuvda ixchamlik uchun i indekslarni tushirib qoldiramiz):

$$\begin{aligned} p_{yx} &= \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}, \\ b &= \frac{n\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \end{aligned} \qquad (10.76)$$

65-misol. Hajmi $n = 5$ bo'lgan tanlanmalarning quyidagicha

X: 1 1,5 3 4,5 5

Y: 1,25 1,4 1,5 1,75 2,25

taqsimoti bo'yicha Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

Yechish. Ma'lumotlar asosida quyidagi jadvalni tuzamiz:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1,25	1	1,25
1,5	1,4	2,25	2,1
3	1,5	9	4,5
4,5	1,75	20,25	4,875
5	2,25	25	11,25
$\sum_i = 15$	$\sum_i = 8,15$	$\sum_i = 57,5$	$\sum_i = 26,975$

Jadvaldagi hisoblangan qiymatlarni (10.76) formulaga qo'ysak:

$$p_{yx} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{5\cdot 26,975 - 15\cdot 8,15}{5\cdot 57,5 - 15^2} = 0,202$$

$$b = \frac{n\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{5\cdot 57,5\cdot 8,15 - 15\cdot 269,75}{5\cdot 57,5 - 15^2} = 1,024$$

U holda regressiya tanlanma tenglamasi: $\overline{y_x} = 0,202x + 1,024$.

2. Faraz qilamiz, kuzatish natijasida olingan ma'lumotlar ko'p sonli (kamida 50 ta kuzatish o'tkazilishi kerak) bo'lib, gruppalanadigan bo'lsin. U holda ma'lumotlar korrelatsion jadval ko'rinishida beriladi:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_l	m_x
x_1	m_{11}	m_{12}	...	m_{1l}	m_{x_1}
x_2	m_{21}	m_{22}	...	m_{2l}	m_{x_2}
...	...	...	...	...	...
x_k	m_{k1}	m_{k2}	...	m_{kl}	m_{x_k}
m_y	m_{y_1}	m_{y_2}	...	m_{y_l}	n

Quyidagi ayniyatlardan:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum x\Rightarrow\sum x=n\overline{x},\ \overline{y}=\frac{1}{n}\sum y\Rightarrow\sum y=n\overline{y}$$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum x^2\Rightarrow\sum x^2=n\overline{x^2}$$

$\sum xy=n_{xy}xy$ ((x,y) juftlik n_{xy} marta kuzatilishi hisobga olingan) foydalanib, (10.75) tenglamalar sistemasini quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases}\rho n\overline{x^2}+bn\overline{x}=\sum n_{xy}xy,\\ \rho\overline{x}+b=\overline{y}.\end{cases}\qquad(10.77)$$

Bu yerda (x,y) juftlik n_{xy} marta takrorlangani uchun $\sum xy$ ifoda $\sum n_{xy}xy$ ko'rinishda yoziladi. Bu sistemadan

$$\rho_{yx}=\frac{\sum n_{xy}xy-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n(\overline{x^2}-(\overline{x})^2)}=\frac{\sum n_{xy}xy-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\sigma_x^2}\qquad(10.78)$$

ifodani topamiz. Izlanayotgan:

$$\overline{y_x}=\rho_{yx}+b\qquad(10.79)$$

regressiya tanlanma tenglamasini $\overline{y}$ uchun quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\overline{y_x}=\rho_{yx}\overline{x}+b\qquad(10.80)$$

chunki $(\overline{x},\overline{y})$ nuqta ham (10.79) tenglamaning yechimi bo'ladi. (10.79) va (10.80) tenglamalardan

$$(\overline{y_x}-\overline{y})=\rho_{yx}\left(x-\overline{x}\right)\qquad(10.81)$$

regressiya tanlanma tenglamasini hosil qilamiz. Bundan so'ng regressiya tanlanma tenglamasini (10.81) ko'rinishda izlaymiz.

Eslatma. Agar ma'lumotlarda katta sonlar qatnashsa hisoblashlarni yengillashtirish uchun x_i, y_i variantalardan mos ravishda $u_i=\frac{x_i-c_1}{c_2}$, $v_i=\frac{y_i-c_3}{c_4}$ shartli variantalarga o'tib olish mumkin.

Ma'lumki, korrelatsiya nazariyasining asosiy masalalaridan biri korrelatsion bog'lanish zichligini (kuchini) aniqlashdir.

Y belgining X belgiga korrelatsion bog'lanish zichligi Y ning $X=x$ ga mos qiymatlarining $\overline{y_x}$ –shartli o'rtacha qiymat atrofida tarqoqligi bo'yicha baholanadi. Agar tarqoqlik katta bo'lsa, u holda Y belgi X belgiga kuchsiz bog'langanligini yoki umuman bog'lanmaganligini bildiradi. Tarqoqlikning katta bo'lmasligi ular orasida ancha kuchli bog'lanish borligini ko'rsatadi.

10.8. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti va nisbati

Y va X belgilar orasidagi chiziqli korrelatsion bog'lanish zichligini xarakterlovchi kattalik korrelatsiya tanlanma koeffitsiyenti bilan tanishib chiqamiz. Ma'lumki

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2} \qquad (10.82)$$

Bu tenglikning ikkala tomonini ham $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ nisbatga ko'paytiramiz. U holda:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\cdot\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$$

Hosil bo'lgan tenglikning o'ng tomonini r_T bilan belgilaymiz va uni tanlanma *korrelatsiya koeffitsiyenti* deb ataymiz:

$$r_T = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y} \text{ (ma'lumotlar gruppalanmasa),} \qquad (10.83)$$

yoki

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y} \text{ (ma'lumotlar gruppalansa)} \qquad (10.84)$$

r_T – tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti bosh to'plam korrelatsiya koeffitsiyentining bahosi hisoblanadi, shuning uchun Y va X kattaliklarning son belgilari orasidagi chiziqli bog'liqligining o'lchovi hisoblanadi.

Agar tanlanma yetarlicha katta hajmga ega va reprezentativ bo'lsa, u holda belgilar orasidagi zichlik haqida tanlanma ma'lumotlari bo'yicha olingan xulosa ma'lum darajada bosh to'plamga ham tarqatilishi mumkin. Masalan, normal taqsimot qonuni bo'yicha taqsimlangan bosh to'plam korrelatsiya koeffitsiyentini baholash uchun $(n \geq 50)$

$$r_T - 3\frac{1-r_T^2}{\sqrt{n}} \leq r_B \leq r_T + 3\frac{1-r_T^2}{\sqrt{n}}$$

formuladan foydalanish mumkin.

Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1-xossa. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentining absolyut qiymati birdan ortmaydi, ya'ni $|r_T| \leq 1$.

2-xossa. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentining absolyut qiymati ortsa, belgilar orasidagi chiziqli korrelatsion bog'lanish zichligi ortadi.

3-xossa. Agar $|r_T| = 1$ bo'lsa, u holda kuzatilayotgan belgilarning chiziqli funksional bog'langan bo'ladi.

4-xossa. Agar $r_T = 0$ bo'lib, regressiya tanlanma chiziqlari to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi bog'lanish chiziqli korrelatsion bog'lanish bo'lmaydi.

Eslatma. Agar $r_T = 0$ bo'lsa, u holda o'rganilayotgan belgilar chiziqsiz korrelatsion bog'lanishda (masalan, parabolik, ko'rsatkichli va h.k.) bo'lishi mumkin.

Yuqorida keltirilgan xossalardan tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentining ma'nosi kelib chiqadi: tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti tanlanmada son belgilar orasidagi chiziqli korrelatsion bog'lanish zichligini xarakterlaydi: $|r_T|$ kattalik 1 ga qancha yaqin bo'lsa, chiziqli korrelatsion bog'lanish shuncha kuchli; $|r_T|$ kattalik 0 ga qancha yaqin bo'lsa, chiziqli korrelatsion bog'lanish shuncha kuchsiz.

Eslatma. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentining ishorasi regressiya koeffitsiyentlarining ishoralari bilan bir xil bo'ladi, bu quyidagi formulalardan kelib chiqadi:

$$\rho_{yx} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \qquad \rho_{xy} = r_T \frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \tag{10.85}$$

Eslatma. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti tanlanma regressiya koeffitsiyentlarining geometrik o'rtacha qiymatiga teng: $r_T = \pm\sqrt{\rho_{xy}\rho_{yx}}$.

Haqiqatan ham (10.85) dan

$$\rho_{yx}\rho_{xy} = r_T^2 \Rightarrow r_T = \pm\sqrt{\rho_{yx}\rho_{xy}}$$

Ildiz oldidagi ishora regressiya koeffitsiyentlari ishoralari bilan bir xil qilib olinishi lozim.

66-misol. Cho'chqa bolasining og'irligi Y (kg.) va yoshi X (haftalarda) orasidagi bog'lanish quyidagi jadval bilan berilgan.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,3	2,5	3,9	5,2	5,3	7,5	9,0	10,8	13,1

Shu ma'lumotlar bo'yicha tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentini toping.

Yechish. $r_T = \dfrac{\sum xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$ formulada zarur hisoblashlarni bajarsak, $r_T = 0,98$ ekanligini topamiz. Bundan esa cho'chqa bolasining og'irligi va yoshi orasidagi bog'lanish kuchli degan xulosaga kelamiz.

Eslatma. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentini hisoblashni soddalashtirish uchun shartli variantaga o'tish mumkin (bunda r_T ning qiymati o'zgarmaydi).

Kuzatilayotgan (yoki biz o‘rganmoqchi bo‘lgan) X va Y belgilar orasidagi chiziqli korrelatsion bog‘lanish zichligini baholash uchun r_T-korrelatsiya tanlanma koeffitsiyenti xizmat qilsa, chiziqsiz yoki umuman ixtiyoriy ko‘rinishdagi korrelatsion bog‘lanishning zichligini qanday baholash mumkin degan savol bo‘lishi tabiiydir. Umumiy holda korrelatsion bog‘lanishning zichligini aniqlash uchun tanlanma korrelatsion nisbat deb ataluvchi xarakteristika ishlatiladi. Bu xarakteristika bilan tanishib chiqishdan oldin tanlanma korrelatsion nisbatni kiritish bilan bog‘liq bo‘lgan ba’zi tushunchalarni keltirib o‘tamiz.

37-ta’rif. Bosh to‘plamning biror-bir gruppasiga tegishli belgilarning arifmetik o‘rtachasi gruppa o‘rtachasi deb ataladi.

Gruppa o‘rtachasini ba’zi hollarda shartli o‘rtacha deb ham yuritish mumkin. Yuqorida foydalanilgan shartli o‘rtacha tushunchasida bu holat yuz bergan.

Gruppa o‘rtachasi va gruppalar hajmi ma’lum bo‘lsa umumiy to‘plam o‘rtachasini (bosh to‘plam o‘rtachasi) topish mumkin.

67-misol. Quyidagi jadval asosida ikki gruppadan tashkil topgan to‘plam o‘rtachasi topilsin:

Gruppa	Birinchi		Ikkinchi	
Belgining qiymatlari	1	6	1	5
Chastota	10	15	20	30
Hajm	10+15=25		20+30=50	

Yechish. Gruppa o‘rtachalarini topamiz:

$$\overline{x_1} = \frac{10\cdot 1 + 15\cdot 6}{25} = 4, \quad \overline{x_2} = \frac{20\cdot 1 + 30\cdot 5}{50} = 3{,}4$$

Gruppa o‘rtachalari bo‘yicha umumiy o‘rtachani topamiz:

$$\overline{x} = \frac{25\cdot 4 + 50\cdot 3{,}4}{25+50} = 3{,}6.$$

38-ta’rif. Gruppaga tegishli belgilarning gruppa o‘rtachasiga nisbatan dispersiyasi gruppa dispersiyasi deb ataladi:

$$D_p\left(X_j\right) = \frac{\sum n_i (x_i - x_j)}{N_j} \qquad (10.86)$$

bu yerda $n_i - x_i$ qiymatning chastotasi; j – gruppa nomeri; $\overline{x_j}$ – j gruppaning gruppa o‘rtachasi; $N_j = \sum_i n_i$ – j gruppa hajmi.

68-misol. Ikki gruppadan tashkil topgan to'plamning gruppa dispersiyasi topilsin:

Gruppa	Birinchi		Ikkinchi	
Belgining qiymatlari	1	6	1	5
Chastota	10	15	20	30
Hajm	10+15=25		20+30=50	

Yechish. 67-misoldan ma'lumki, $\overline{x_1}=4$, $\overline{x_2}=3,4$. Endi gruppa dispersiyalarini topamiz:

$$D_p(X_1)=\frac{10\cdot(1-4)^2+15\cdot(6-4)^2}{25}=6$$

$$D_p(X_2)=\frac{20\cdot(1-3,4)^2+30\cdot(5-3,4)^2}{50}=\frac{115,2+76,8}{50}=3,84$$

39-ta'rif. Gruppa dispersiyalarining gruppalar hajmi bo'yicha olingan arifmetik o'rtachasi gruppalar ichki dispersiyasi deb ataladi:

$$\overline{D_{\cdot p}}=\frac{\sum N_j D_{\cdot p}(X_j)}{n},$$

bu yerda, N_j – j gruppa hajmi; $n=\sum_j N_j$ – umumiy to'plam hajmi.

Masalan, 68-misolda gruppalar ichki dispersiyasini quyidagicha topamiz:

$$\overline{D_p}=\frac{25\cdot 6+50\cdot 3,84}{75}=4,56$$

40-ta'rif. Gruppa o'rtachalarining umumiy to'plam o'rtachasiga (bosh to'plam o'rtachasi) nisbatan dispersiyasi gruppalararo dispersiya deb ataladi:

$$D_p(\overline{x_j})=\frac{\sum N_j(\overline{x_j}-\overline{x})^2}{n},$$

bu yerda $\overline{x_j}$ – j gruppaning gruppa o'rtachasi; N_j – j gruppa hajmi; $\overline{x_T}$ umumiy o'rtacha; $n=\sum_j N_j$ umumiy to'plam hajmi.

Masalan, 67-misolda gruppalararo dispersiyani topsak:

$$D_p(\overline{x_j})=\frac{25\cdot(4-3,6)^2+50\cdot(3,4-3,6)^2}{75}=\frac{4+2}{75}=0,08$$

Endi bu tushunchalardan foydalanib tanlanma korrelatsion nisbat tushunchasini aniqlaymiz.

41-ta'rif. Y ning X ga tanlanma korrelatsion nisbati deb,

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y} \qquad (10.87)$$

nisbat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Bu yerda $\sigma_{\overline{y}_x}=\sqrt{\dfrac{\sum n_x(\overline{y}_x-\overline{y})^2}{n}}$ – shartli yoki gruppalararo o‘rtacha kvadratik chetlanish; $\sigma_y=\sqrt{\dfrac{\sum n_y(y-\overline{y})^2}{n}}$ – o‘rtacha kvadratik chetlanish; n tanlanma hajmi; n_x – X belgining x qiymati chastotasi; n_y – Y belgining y qiymati chastotasi; $\overline{y}$ – Y belgining umumiy o‘rtachasi; $\overline{y}_x$ – Y belgining $X=x$ ga mos shartli o‘rtachasi (x gruppaning gruppa o‘rtachasi).

X ning Y-ga tanlanma korrelatsion nisbati ham shu kabi aniqlanadi:

$$\eta_{xy}=\frac{\sigma_{\overline{x}_y}}{\sigma_x} \tag{10.88}$$

69-misol. $n=50$ hajmli quyidagi korrelatsion jadval bo‘yicha Y belgining X belgiga korrelatsion nisbati η_{yx} ni toping.

Y \ X	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	-	6	12
n_x	10	28	12	$n=50$
$\overline{y}_x$	21	15	20	

Yechish. $\overline{y}$-umumiy o‘rtachani topamiz:

$$\overline{y}=\frac{\sum n_i y_i}{n}=\frac{38\cdot15+12\cdot25}{50}=\frac{870}{50}=17,4$$

o‘rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum n_y(y-\overline{y})^2}{n}}=\sqrt{\frac{38(15-17,4)^2+12(25-17,4)^2}{50}}=4,27.$$

$\sigma_{\overline{y}_x}$-shartli o‘rtachaning o‘rtacha kvadratik chetlanish (yoki gruppalararo o‘rtacha kvadratik chetlanish)ni topamiz:

$$\sigma_{\overline{y}_x}=\sqrt{\frac{\sum n_x(\overline{y}_x-\overline{y})}{n}}=\sqrt{\frac{10(21-17,4)^2+28(15-17,4)^2+12(20-17,4)^2}{50}}=4,27.$$

Topilganlarni (10.88) formulaga qo‘yamiz: $\eta_{yx}=\dfrac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y}=\dfrac{2,73}{4,27}=0,64$.

Tanlanma korrelatsion nisbat uchun quyidagi xossalar o‘rinli.

η_{yx} va η_{xy} kattaliklar uchun aniqlangan xossalar bir xil bo‘lganligi sababli tanlanma korrelatsion nisbat xossalarini η kattalik uchun sanab o‘tamiz.

1-xossa. Tanlanma korrelatsion nisbat quyidagi qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiradi: $0 \le \eta \le 1$.

2-xossa. Agar $\eta = 1$ bo‘lsa, belgilar funksional bog‘lanishda, ya’ni $Y = f(X)$ bo‘ladi.

3-xossa. Tanlanma korrelatsion nisbat tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentining absolyut qiymatidan kichik emas: $\eta \ge |r_T|$.

4-xossa. Agar $\eta = |r_T|$ bo‘lsa, belgilar orasida chiziqli bog‘lanish bo‘ladi.

5-xossa. Agar $\eta = 0$ bo‘lsa, belgilar korrelatsion bog‘lanishda bo‘lmaydi.

Tanlanma korrelatsion nisbatning afzalligi uning istalgan korrelatsion bog‘lanish, shu jumladan, chiziqli bog‘lanish zichligining ham o‘lchovi bo‘lib xizmat qilishidadir. Shu bilan birga tanlanma korrelatsion nisbat kamchilikka ham ega: u bog‘lanish shakli haqida hech qanday ma’lumot bermaydi.

Agar X va Y belgilar orasidagi korrelatsion bog‘lanish o‘rganilayotgan bo‘lib, $\overline{y_x} = f(x)$ regressiya grafigi egri chiziq bilan tasvirlanadigan bo‘lsa, u holda bu korrelatsiya egri chiziqli deyiladi.

Egri chiziqli korrelatsiyada ham chiziqli korrelatsiya kabi korrelatsion bog‘lanish shakli va uning zichligini aniqlash bilan shug‘ullaniladi. Egri chiziqli korrelatsiyada Y ning X ga regressiya funksiyalari quyidagi ko‘rinishda bo‘lishi mumkin:

$\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$ (ikkinchi tartibli parabolik korrelatsiya);

$\overline{y_x} = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (uchinchi tartibli parabolik korrelatsiya);

$\overline{y_x} = \dfrac{a}{x}$ (giperbolik korrelatsiya).

Regressiya funksiyasining ko‘rinishini aniqlash uchun Dekart koordinatalar sistemasida (x, y) nuqtalarning o‘rni topiladi va ularning joylashishiga qarab regressiya funksiyasining taxminiy ko‘rinishi haqida gipoteza qilinadi; o‘rganilayotgan masalaning mohiyatidan kelib chiqqan holda oxirgi xulosa qabul qilinadi. Belgilar orasidagi korrelatsion bog‘lanishni ifodalovchi regressiya funksiyalarining noma’lum parametrlarni aniqlash yoki statistik baholash masalalari ham muhim hisoblanadi. Regressiya funksiyasining noma’lum parametrlari ham eng kichik kvadratlar usuli yordamida topiladi. Egri chiziqli korrelatsiya zichligini baholashda tanlanma korrelatsion nisbatdan foydalanamiz.

Egri chiziqli korrelatsiyaning sodda hollaridan biri ikkinchi tartibli parabolik korrelatsiya ko‘rinishdagi korrelatsiyaning noma’lum parametrlarini tanlanma ma’lumotlari yordamida topamiz. Aniqlik uchun Y ning X ga regressiya tanlanma tenglamasini qaraymiz. Bunda regressiya tanlanma tenglamasi

$$\overline{y_x} = ax^2 + bx + c \qquad (10.89)$$

ko‘rinishda bo‘lib, a, b, c noma’lum parametrlarni tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha topish kerak bo‘ladi. Noma’lum koeffitsiyentlarni $v_i = y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)$ chetlanishlar kvadratlarining yig‘indisi eng kichik bo‘ladigan qilib, tanlaymiz. Shu maqsadda, quyidagi funksiyani kiritamiz: $F(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}\upsilon_i^2$. Bu funksiyani ekstremumga tekshirib va tegishli almashtirishlardan so'ng quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^2\overline{y_{x_i}} \\ a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i\overline{y_{x_i}} \\ a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i}x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i}\overline{y_{x_i}} \end{cases} \quad (10.90)$$

Kuzatish natijalari (x_i, y_i) juftliklardan foydalanib (10.90) tenglamalar sistemasidan a, b, c noma'lum parametrlar topiladi.

70-misol. Korrelatsion jadval ma'lumotlari asosida $\overline{y_x}=ax^2+bx+c$ ko'rinishdagi Y ning X ga regressiya tanlama tenglamasini toping.

Y \ X	1	1,1	1,2	n_y
6	8	2	-	10
7	-	30	-	30
7,5	-	1	9	10
n_x	8	33	9	$n=50$

Yechish. Korrelatsion jadval ma'lumotlari asosida quyidagi jadvalni tuzamiz.

x	n_x	$\overline{y_x}$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x\overline{y_x}$
1	8	6	8	8	8	8	48
1,1	33	6,73	36,3	39,93	43,93	48,32	222,09
1,2	9	7,5	10,8	12,96	15,55	18,66	67,50
Σ	50	-	55,1	60,89	67,48	74,98	337,59

Bu jadvalning Σ qatoridagi sonlarni (10.90) ga qo'yib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 74{,}98a+67{,}48b+60{,}89c=413{,}93 \\ 67{,}48a+60{,}89b+55{,}10c=373{,}30 \\ 60{,}89a+55{,}10b+50c=337{,}59 \end{cases}$$

Bu sistemadan $a=1{,}94$, $b=2{,}98$, $c=1{,}10$ yechimlarni topamiz. U holda regressiya tenglamasi

$$\overline{y_x}=1{,}94x^2+2{,}98x+1{,}10$$

ko'rinishda bo'ladi. Tekshirish uchun tenglama bo'yicha hisoblangan $\overline{y_x}$ ning qiymatlari bilan jadval bo'yicha topilgan $\overline{y_x}$ ning qiymatlarini taqqoslash mumkin. Yuqorida keltirilgan boshqa turdagi egri chiziqli regressiya tenglamalarining koeffitsiyetlarini topishda ham eng kichik kvadratlar usulidan foydalanish mumkin, ammo ba'zi hollarda oldin ma'lum bir almashtirishlarni amalga oshirish zarur. Masalan, $y = ax^b$ $(a > 0, b > 0)$ regressiya tenglamasidagi noma'lum a, b koeffitsiyentlarni topishda avvalambor bu tenglamani $\ln y = \ln a + b\ln x$ ko'rinishda yozib olamiz, so'ngra $u = \ln x$, $z = \ln y$ belgilashlar yordamida $z = bu + \ln a$ chiziqli funksiyani hosil qilamiz.

Ba'zi amaliy masalalarda ikkita emas, balki ikkitadan ko'proq belgilar orasidagi bog'lanishni o'rganish zaruriyati tug'iladi. Bu holda belgilar orasidagi korrelatsion bog'lanish *to'plamiy* (*ko'plik*) *korrelatsiya* deb ataladi.

To'plamli korrelatsiyaning eng sodda holi bo'lgan uchta belgi orasidagi chiziqli korrelatsiyani qaraymiz. Bu holda X , Y va Z belgilar orasidagi korrelatsion munosabat

$$z = ax + by + c \tag{10.91}$$

tenglama ko'rinishida ifodalanadi. Bunda quyidagi:

1) Kuzatish ma'lumotlari bo'yicha regressiyaning a, b, c noma'lum koeffitsiyentlarni topish, ya'ni $z = ax + by + c$ tanlanma tenglamani topish;

2) Z belgi bilan ikkala Y va Z belgilar orasidagi bog'lanish zichligini baholash;

3) Y fiksirlanganda (o'zgarmaganda) Z va X orasidagi, X fiksirlanganda Z va Y orasidagi bog'lanish zichligini topish masalalarini hal qilish zarur.

Birinchi masala eng kichik kvadratlar usuli bilan hal qilinadi. Analitik geometriyadan ma'lumki, (10.91) chiziqli bog'lanish tenglamasini:

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) \tag{10.92}$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu ko'rinishda esa 1-masalani hal qilish osonroq.

Ba'zi elementar hisoblashlardan so'ng a va b koeffitsiyentilar uchun quyidagi formulalarni topamiz:

$$a = \frac{r_{xz} - r_{yz}r_{xy}}{1 - r_{xy}^2}\frac{\sigma_z}{\sigma_x}, \qquad b = \frac{r_{yz} - r_{yx}r_{zx}}{1 - r_{xy}^2}\frac{\sigma_z}{\sigma_y} \tag{10.93}$$

Bunda r_{xz}, r_{yz}, r_{xy} – mos ravishda X va Z, Y va Z, X va Y belgilar orasidagi korrelatsiya koeffitsiyentilari; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – o'rtacha kvadratik chetlanishlar.

Z belgining X va Y belgilar bilan bog'liqlik zichligi quyidagi:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz} + r_{yz}^2}{1 - r_{xy}^2}}, \qquad 0 \le R \le 1 \tag{10.94}$$

umumiy tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti bilan baholanadi.

Shuningdek, Y fiksirlanganda (o'zgarmaganda) Z va X orasidagi, X fiksirlanganda Z va X bog'lanish zichligi mos ravishda:

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy} \cdot r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{yz}^2)}} \qquad (10.95)$$

$$r_{yz(x)} = \frac{r_{yz} - r_{xy} \cdot r_{xz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{xz}^2)}} \qquad (10.96)$$

xususiy tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentlari bilan baholanadi.

Tabiatda turli-tuman jarayonlarni o'rganishda, tasodifiy jarayonlarning o'zaro bog'liqlik qonunlarini ochishda, hamda umuman prognozlash masalalarida korrelatsion va regression analizning xulosalari katta ahamiyatga egadir. Xususan, iqtisodiy jarayonlarni tadqiq etishda turli iqtisodiy ko'rsatkichlarning bir-biriga bog'liqligini aniqlash va shu asosda muhim xulosalar chiqarishda korrelatsiya nazariyasi muvaffaqiyatli tatbiq etib kelinmoqda.

10.9. Statistik gipotezalar va ularni tekshirish

Amaliyotda, texnikada va iqtisodiyotda ko'pincha tasodifiylik bilan bog'liq bo'lgan biror faktni aniqlashtirish uchun statistik usul bilan tekshirish mumkin bo'lgan gipotezalarga tayanib ish ko'riladi.

Ma'lumki, har qanday ilmiy asoslangan farazni gipoteza deb aytishimiz mumkin, ammo har qanday gipotezani statistik gipoteza deb ayta olmaymiz, chunki uning alohida ajralib turadigan xususiyatlari bor, bu xususiyatlarni alohida ta'kidlash uchun biz quyidagi ta'rifni keltiramiz.

42-ta'rif. Statistik gipoteza deb, kuzatilayotgan tasodifiy miqdorning (bosh to'plamning) noma'lum taqsimot qonuni, yoki ma'lum taqsimot qonunining noma'lum parametrlari haqidagi gipotezaga aytiladi.

Masalan, quyidagi gipotezalar statistik gipotezalarga misol bo'la oladi:

1) Bir xil ishlab chiqarish sharoitlarida bir xil ishni bajarayotgan ishchilarning mehnat unumdorligi normal taqsimot qonuni bo'yicha taqsimlangan;

2) Parallel ishlayotgan stanoklarda tayyorlanayotgan bir xil turdagi detallarning o'rtacha o'lchamlari bir-biriga teng;

3) Normal taqsimot qonuniga bo'ysunuvchi ikki to'plamning dispersiyalari o'zaro teng;

1-gipotezada taqsimotning ko'rinishi haqida, 2 va 3-gipotezalarda esa parametrlar haqida faraz qilingan.

Ertaga yomg'ir yog'adi", "Bu yil mo'l hosil olamiz" kabi gipotezalar statistik gipotezalar bo'la olmaydi, chunki ularda na taqsimot qonunining ko'rinishi haqida, na uning parametrlari haqida so'z boradi.

Bosh to'plam haqida oldinga surilgan gipoteza tanlanma natijalarga asoslanib tekshiriladi va natijada qabul qilinishi yoki rad qilinishi mumkin. Bunda quyidagi tushuncha va belgilashlardan foydalaniladi:

H_0 – *asosiy* (yoki nolinchi) gipoteza deb, ma'lum faktlarga yoki tadqiqot natijalariga asoslanib ilgari surilgan statistik gipotezaga aytiladi;

H_1 – *konkurent* (yoki alternativ) gipoteza deb, asosiy gipotezaga zid bo'lgan har qanday boshqa gipotezaga aytiladi.

Masalan, "X tasodifiy miqdor Puasson taqsimot qonuniga bo'ysunadi" gipotezasi yuqoridagilarga asoslanib quyidagicha yoziladi:

$$H_0 : P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \lambda > 0, \ k = 0,1,2,3,...;$$

$$H_1 : P(X = k) \neq \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Faqat bitta da'voni o'z ichiga olgan gipoteza oddiy gipoteza; bittadan ortiq sondagi da'volarni o'z ichiga olgan gipoteza esa murakkab gipoteza deyiladi. Masalan, X tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimot:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ agar \ \ x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, \ agar \ x \geq 0. \end{cases}$$

qonuniga bo'ysunib, uning λ parametri noma'lum bo'lsin. U holda quyidagilar o'rinli:

$H_0 : \lambda = 2$ asosiy gipotezani oddiy gipoteza;

$H_1 : \lambda \neq 2$ alternativ gipoteza esa murakkab gipoteza.

Ilgari surilgan gipoteza tekshirib ko'riladi va so'ngra xulosa chiqariladi. Gipotezani tekshirish natijasida ikki turdagi xatolikka yo'l qo'yilishi mumkin. Agar to'g'ri gipoteza rad etilsa, qilingan xatolikni I tur xatolik, agar noto'g'ri gipoteza qabul qilinsa qilingan xatolik II tur xatolik deb ataladi. Bu xatoliklarni jadvalda quyidagicha tasvirlash mumkin.

H_0 – gipoteza	to'g'ri	noto'g'ri
Rad qilindi	I tur xatolik	To'g'ri qaror
Qabul qilindi	To'g'ri qaror	II tur xatolik

Amaliyotda I va II tur xatoliklarning oqibatlari har xil bo'lishi mumkin. Masalan, agar samolyotga "uchishga ruxsat berilsin" degan to'g'ri qaror rad etilgan bo'lsa, u holda bu I tur xatolik bo'lib, bunday xatolik moddiy zararga olib kelishi mumkin; agar samolyotning nosozligiga qaramasdan "uchishga ruxsat berilsin" degan noto'g'ri qaror qabul qilinsa, u holda bu II tur xatolik bo'lib, bunday xatolik halokatga olib kelishi mumkin.

Albatta, I tur xatolik II tur xatolikka qaraganda og'irroq oqibatlarga olib keladigan misollar ham keltirish mumkin.

To'g'ri qarorni ikki holda qabul qilish mumkin:

1) agar ilgari surilgan gipoteza haqiqatan ham to'g'ri bo'lsa, gipoteza qabul qilinadi;

2) agar ilgari surilgan gipoteza haqiqatan ham noto'g'ri bo'lsa, gipoteza qabul qilinmaydi.

I tur xatolikka yo'l qo'yish ehtimoli α bilan belgilanadi va u muhimlilik darajasi deb ataladi. Ko'p hollarda muhimlilik darajasi $\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01,...$ sifatida qabul qilinadi.

Biz ma'lum taqsimot qonuniga bo'ysunuvchi belgining noma'lum parametrlari haqida ilgari surilgan gipoteza statistik usulda qanday tekshirilishini ko'rib chiqamiz.

Asosiy gipoteza ilgari surilgandan so'ng, uning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini tekshirib ko'rish kerak bo'ladi. Shu maqsadda maxsus tanlangan, aniq, yoki taxminiy taqsimoti ma'lum bo'lgan tasodifiy miqdor ishlatiladi. Bu tasodifiy miqdorni K bilan belgilaymiz.

43-ta'rif. Statistik kriteriy (yoki oddiygina kriteriy) deb, asosiy gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan tasodifiy miqdorga aytiladi.

Bu tasodifiy miqdor odatda K bilan belgilanadi va K *kriteriy* deb ataladi. Masalan, agar normal taqsimot qonuniga ega X, Y bosh to'plamlarning dispersiyalari tengligi haqidagi gipoteza tekshirilayotgan bo'lsa, u holda K kriteriy sifatida "tuzatilgan" tanlanma dispersiyalar nisbati olinadi:

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2} \quad (s_x^2 > s_y^2) \tag{10.97}$$

Turli tajribalarda dispersiyalar har xil, oldindan ma'lum bo'lmagan qiymatlar qabul qilganligi uchun F tasodifiy miqdor bo'lib, u Fisher-Snedekor qonuni bo'yicha taqsimlangan.

Gipotezani tekshirish uchun kriteriyga kirgan miqdorlarning xususiy qiymatlari tanlanma bo'yicha hisoblanadi va shunday qilib kriteriyning kuzatiladigan (xususiy) qiymati hosil qilinadi.

$K_{kuzat.}$ – kuzatiladigan qiymat deb, statistik kriteriyning tanlanmalar bo'yicha hisoblangan qiymatiga aytiladi. Masalan, ikkita tanlanma asosida topilgan dispersiyalar: $s_x^2 = 20$, $s_y^2 = 15$ bo'lsa, u holda

$$K_{kuzat.} = F = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}.$$

Gipotezani tekshirish mobaynida K kriteriyning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari to'plami kesishmaydigan ikkita qism to'plamlarga ajratiladi: $K = K^- \cup K^+$. Bu yerda $K^- \cap K^+ = \varnothing$.

Ulardan biri H_0 – asosiy gipoteza rad qilinadigan qiymatlarni, ikkinchisi esa asosiy gipoteza qabul qiladigan qiymatlarini o'z ichiga oladi.

44-ta'rif. Kriteriyning H_0 – asosiy gipotezani rad qiladigan qiymatlar to'plami kritik soha deb ataladi.

45-ta'rif. Kriteriyning H_0 – asosiy gipotezani qabul qiladigan qiymatlar to'plami gipotezani qabul qilish sohasi deb ataladi.

Statistik gipotezalarni tekshirishning asosiy prinsiplarini quyidagicha ta'riflash mumkin: agar kriteriyning kuzatiladigan qiymati kritik sohaga tegishli bo'lsa, asosiy gipoteza rad qilinadi, agar kriteriyning kuzatilayotgan qiymati gipotezaning qabul qilinish sohasiga tegishli bo'lsa, asosiy gipoteza qabul qilinadi. Kriteriy bir o'lchovli tasodifiy miqdor bo'lgani uchun uning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari to'plami biror intervaldan iborat bo'ladi. Shu sababli, kritik soha va gipotezaning qabul qilinish sohasi ham intervaldan iborat bo'ladi, demak, ularni ajratib turuvchi nuqtalar to'g'risida gapirish mumkin.

46-ta'rif. Kritik nuqtalar deb, kritik sohani gipotezaning qabul qilinish sohasidan ajratib turuvchi nuqtalarga aytiladi.

Agar kritik soha $K > k_{kr.}$ tengsizlik bilan aniqlansa, u holda uni *o'ng tomonli kritik soha;*

Agar kritik soha $K < k_{kr.}$ tengsizlik bilan aniqlansa, u holda uni *chap tomonli kritik soha;*

Agar kritik soha $K > k'_{kr}$, $K < k'_{kr.}$ tengsizliklar bilan aniqlansa, u holda uni *ikki tomonli kritik soha* deyiladi.

Chap tomonli va ikki tomonli kritik sohalarni aniqlash o'ng tomonli kritik sohani topishga o'xshash bo'lganligi sababli biz faqat o'ng tomonli kritik sohani aniqlash bilan tanishib chiqamiz.

Kritik sohani aniqlash uchun kritik nuqtani topish yetarli. Bu nuqtani aniqlash uchun esa α ning qiymati berilishi kerak. So'ngra, quyidagi talabga asoslanib, $k_{kr.}$ nuqta topiladi: H_0 – asosiy gipoteza o'rinli bo'ladigan K kriteriyning $k_{kr.}$ nuqtadan katta bo'lishi ehtimoli α – muhimlilik darajasiga teng bo'lsin:

$$P(K > k_{kr.}) = \alpha. \qquad (10.98)$$

Har bir kriteriy uchun (10.98) shartni qanoatlantiruvchi kritik nuqtalarni topish jadvallari mavjud.

Kritik nuqta topilgandan so'ng, $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma ma'lumotlari bo'yicha kriteriyning kuzatilgan qiymati topiladi. Bunda agar $K > k_{kr.}$ bo'lsa, u holda asosiy gipoteza rad qilinadi; aks holda asosiy gipotezani rad qilishga asos yo'q deyiladi.

Eslatma. H_0 gipoteza qabul qilingan bo'lsin. Shu bilan bu gipoteza isbotlandi deyish xato bo'ladi. Aslida "kuzatilgan natijalar H_0 gipotezaga mos keladi va demak, uni rad qilishga asos yo'q" deyish to'g'riroq bo'ladi.

Amalda gipotezani katta ishonch bilan qabul qilish uchun boshqa statistik usullar bilan tekshiriladi yoki tanlanma hajmi orttirilib tajriba takrorlanadi.

Gipotezani qabul qilishdan ko'ra ko'proq uni rad qilishga harakat qilinadi. Haqiqatan, ma'lumki biror umumiy da'voni rad qilish bu uchun bu da'voga zid bo'lgan bitta misolni keltirish kifoya. Shu sababli kriteriy quvvati tushunchasi kritiladi.

47-ta'rif. Konkurent gipoteza to'g'ri bo'lganda kriteriyning kritik sohada bo'lish ehtimoli kriteriy quvvati deb ataladi.

Agar II tur xatolikka yo'l qo'yish ehtimoli β bo'lsa, u holda kriteriy quvvati $1-\beta$ ga teng bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, kriteriy quvvati qancha katta bo'lsa II tur xatolikka yo'l qo'yish ehtimoli shuncha kam bo'ladi. Yuqoridagi ta'riflardan ko'rinib turibdiki, α ning kamayishi β ning o'sishiga olib keladi va aksincha. Masalan, $\alpha=0$ bo'lsa, u holda barcha gipotezalar qabul qilinadi, jumladan noto'g'rilari ham. Shu sababli, ikkala parametrni bir paytda kamaytirib bo'lmaydi. I tur va II tur xatoliklarga yo'l qo'yishning oldini olishning yagona yo'li tanlanma hajmini oshirishdir.

Statistik gepotezani tekshirish qanday amalga oshirilishini quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

Normal taqsimlangan ikki bosh to'plamning dispersiyalarini taqqoslash masalasi. Dispersiyalar haqidagi gipotezalar, ayniqsa texnikada muhim ahamiyatga ega, chunki tarqoqlik xarakteristikasi bo'lgan dispersiya mashina va uskunalarning, o'lchov asboblarining, texnologik protsesslarning aniqligini baholashda juda muhim ko'rsatkich hisoblanadi.

Normal taqsimlangan bosh to'plam dispersiyalarining tengligi haqida gipoteza ilgari surilsa kriteriy sifatida $F=\frac{s_x^2}{s_y^2}$ kattalik olinishini aytib o'tgan edik. Bunda F tasodifiy miqdor bo'ysunadigan Fisher-Snedekor taqsimotining erkinlik darajalari quyidagicha aniqlanadi: $k_1=n_1-1$, $k_2=n_2-1$, bu yerda n_1 – hisoblanganda qiymati katta bo'lgan "tuzatilgan" dispersiyaga mos tanlanmaning hajmi, n_2 – hisoblanganda qiymati kichik bo'lgan "tuzatilgan" dispersiyaga mos tanlanmaning hajmi. Kritik nuqta $k_{kr.}=F(\alpha;k_1,k_2)$ tenglik bilan jadvaldan aniqlanadi.

71-misol. Normal taqsimlangan X, Y bosh to'plamlardan mos ravishda $n_1=11$, $n_2=14$ hajmli erkli tanlanmalar olinb, ularning "tuzatilgan" dispersiyalari: $s_x^2=0,76$, $s_y^2=0,38$ topilgan. $\alpha=0,05$ muhimlilik darajasida quyidagi gipotezani tekshiring:

$$\begin{cases} H_0: D(X)=D(Y) \\ H_1: D(X)\neq D(Y) \end{cases}$$

Yechish. Gipotezani tekshirish uchun $F=\frac{s_x^2}{s_y^2}$ kriteriyni tanlaymiz. U holda

$$K_{kuzat} = F = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{0,76}{0,38} = 2.$$

Fisher-Snedekor taqsimotining kritik nuqtalar jadvalidan

$\alpha = 0,05$, $k_1 = 11 - 1 = 10$, $k_2 = 14 - 1 = 13 \Rightarrow k_{kr.} = F(0,05;10,13) = 2,67$ kritik nuqtani topamiz. Bu yerda $K < k_{kr.}$ bo'lgani uchun gipotezani rad qilishga asos yo'q.

Ma'lumki, s^2 – tuzatilgan tanlanma dispersiya bosh to'plam dispersiyasi uchun siljimagan baho bo'ladi. Biz bu tuzatilgan tanlanma dispersiyasi bilan $\sigma_B^2(X)$ – bosh to'plam dispersiyasi orasidagi farq e'tiborga olinishi kerakmi yoki yo'qmi degan savolga javob beramiz. Amaliyotda $\sigma_B^2(X)$ tajriba natijasida yoki nazariy jihatdan aniqlanadi.

Buning uchun bosh to'plamdan n hajmli tanlanma ajratib olamiz. Bu tanlanmadan $k = n - 1$ erkinlik darajasida s^2 – tuzatilgan dispersiyani topamiz. U holda asosiy gipoteza $H_0 : \sigma_B^2 = M(s^2)$ ko'rinishda bo'ladi. Bu kabi gipotezalar priborlar, instrumentlar, stanoklarning aniqligini tekshirishda, texnologik jarayonlarni o'rganishda tekshiriladi. Asosiy gipotezani tekshirishda $(n-1)\frac{s^2}{\sigma_B^2}$ tasodifiy miqdordan foydalanamiz. $(n-1)\frac{s^2}{\sigma_B^2}$ kattalik haqiqatan ham tasodifiy miqdor, chunki s^2 kattalik turli tajribalarda turli qiymatlarni qabul qiladi. Bu tasodifiy miqdor $k = n - 1$ erkinlik darajasida χ^2 (xi kvadrat) taqsimotga ega bo'lganligi uchun asosiy gipotezani tekshirish kriteriysini $\chi^2 = (n-1)\frac{s^2}{\sigma_B^2}$ bilan belgilaymiz. Kritik soha alternativ gipotezaga bog'liq holda quriladi:

I. $H_0 : \sigma_B^2 = \sigma^2$; $H_1 : \sigma_B^2 < \sigma^2$ gipotezani tekshiramiz. Bu holda $P(\chi_{kuzat.}^2 > \chi_{kr.}^2(\alpha;k)) = \alpha$ ehtimollikdan foydalanib o'ng tomonli kritik soha quriladi. $\chi_{kr.}^2(\alpha;k)$ – kritik nuqta esa χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari jadvalidan foydalanib topiladi. U holda kritik soha $\chi_{kuzat.}^2 > \chi_{kr.}^2$ tengsizlikdan, asosiy gipotezani qabul qilish qiymatlari esa $\chi_{kuzat.}^2 < \chi_{kr.}^2$ tensizlikdan topiladi. Demak,

Agar $\chi_{kuzat.}^2 < \chi_{kr.}^2$ bo'lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos yo'q;

Agar $\chi_{kuzat.}^2 > \chi_{kr.}^2$ bo'lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos bor.

72-misol. Normal taqsimlangan bosh to'plamdan $n = 13$ hajmli tanlanma ajratib olinib $s^2 = 14,6$ "tuzatilgan" dispersiya topilgan. $\alpha = 0,01$ muhimlilik darajasida $H_0 : \sigma_B^2 = \sigma^2 = 12$; $H_1 : 12 < \sigma^2$ gipotezani tekshiring.

Yechish. Kuzatilgan qiymatini topamiz:

$$\chi^2 = (n-1)\frac{s^2}{\sigma_B^2} = 14,6.$$

Jadvaldan $\chi^2_{kr.}(0,01;13-1=12)=26,2$ qiymatni topamiz. Bu yerda $\chi^2_{kuzat} < \chi^2_{kr}$ bo'lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo'q.

II. $H_0:\sigma^2_B=\sigma^2$; $H_1:\sigma^2_B\neq\sigma^2$ gipotezani tekshiramiz. Bu holda $P(\chi^2>\chi^2_{kr.}(\alpha;k))=\alpha$ ehtimollikdan foydalanib ikki tomonli kritik soha quriladi. $P\left(\chi^2<\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right)=\frac{\alpha}{2}$ tengsizlikdan foydalanib chap kritik soha, $P\left(\chi^2>\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right)=\frac{\alpha}{2}$ tengsizdan foydalanib o'ng kritik soha quriladi. χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari jadvalida faqat o'ng kritik nuqtalar berilgan. Chap kritik nuqtalarni topishda yuzaga keladigan qiyinchlikdan $\chi^2<\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)$ va $\chi^2>\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)$ hodisalarning qarama-qarashiligidan, ya'ni

$$P\left(\chi^2<\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right)+P\left(\chi^2>\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\chi^2>\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right)=1-P\left(\chi^2<\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right)=1-\frac{\alpha}{2}$$

tengliklardan foydalanib qutilamiz.

Bundan ko'rinib turibdiki, chap kritik nuqtani o'ng kritik nuqta kabi izlanadi. Shunday qilib, $H_0:\sigma^2_B=\sigma^2$; $H_1:\sigma^2_B\neq\sigma^2$ gipotezani tekshirish uchun $\chi^2_{kuzat}=(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2_B}$ kuzatilgan qiymati topiladi. So'ngra $\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)$ – o'ng kritik nuqta va $\chi^2_{kr.}\left(1-\frac{\alpha}{2};k\right)$ – chap kritik nuqta topiladi. Bunda:

Agar $\chi^2_{chap\ kr.}<\chi^2_{kuzat.}<\chi^2_{o'ng\ kr.}$ bo'lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos yo'q;

Agar $\chi^2_{kuzat.}>\chi^2_{o'ng\ kr.}$ yoki $\chi^2_{chap\ kr.}>\chi^2_{kuzat.}$ bo'lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos bor.

73-misol. Normal taqsimlangan bosh to'plamdan $n=13$ hajmli tanlanma ajratib olinib $s^2=10,3$ "tuzatilgan" dispersiya topilgan. $\alpha=0,02$ muhimlilik darajasida $H_0:\sigma^2_B=\sigma^2=12$; $H_1:12\neq\sigma^2$ gipotezani tekshiring.

Yechish. Kuzatilgan qiymatini topamiz:

$$\chi^2=(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2_B}=10,3.$$

So'ngra jadvaldan $\chi^2_{chap\ kr.}=3,57$, $\chi^2_{o'ng\ kr}=26,2$ qiymatlarni jadvaldan topamiz. Bu yerda $\chi^2_{chap\ kr}<\chi^2_{kuzat}<\chi^2_{o'ng\ kr.}$ bo'lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo'q.

III. $H_0:\sigma^2_B=\sigma^2$; $H_1:\sigma^2_B>\sigma^2$ gipotezani tekshiramiz. Bu holda kritik nuqta $\chi^2_{kr}(1-\alpha;k)$ topiladi. So'ngra:

Agar $\chi^2_{kuzat.}<\chi^2_{kr.}$ bo'lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos bor;

Agar $\chi^2_{kuzat}<\chi^2_{kr.}$ bo'lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos yo'q.

74-misol. Normal taqsimlangan bosh to'plamdan $n=13$ hajmli tanlanma ajratib olinib $s^2=14,6$ "tuzatilgan" dispersiya topilgan. $\alpha=0,01$ muhimlilik darajasida $H_0:\sigma^2_B=\sigma^2=12$; $H_1:12>\sigma^2$ gipotezani tekshiring.

Yechish. Kuzatilgan qiymatini topamiz:

$$\chi^2=(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2_B}=14,6.$$

Jadvaldan $\chi^2(0,99;12)=3,57$ qiymatni topamiz. Bu yerda $\chi^2_{kuzat.}>\chi^2_{kr.}$ bo'lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo'q.

Agar D_T –tanlanma dispersiyasi topilgan bo'lsa, u holda tasodifiy miqdor sifatida $\chi^2=n\dfrac{D_T}{\sigma_B}$ kattalik olinadi.

Agar erkinlik darajasi $k>30$ bo'lsa, u holda kritik nuqta sifatida $\chi^2_{kr.}(\alpha;k)=k\left[1-\dfrac{2}{9k}+z_\alpha\sqrt{\dfrac{2}{9k}}\right]^3$, $\left(\Phi(z_\alpha)=\dfrac{1-2\alpha}{2}\right)$ kattalikning taxminiy qiymati olinadi.

Muvofiqlik kriteriysi. Ma'lumki, statistik gipotezada kuzatilayotgan belgining taqsimot qonuni haqidagi faraz ham ilgari surilar edi. Biz ko'pgina amaliy masalalar o'rganilayotganda uchraydigan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, bu taqsimot to'g'risidagi gipotezani statistik usulda tekshirishni ko'rib chiqamiz.

X tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot qonuniga egaligi haqida da'vo qiluvchi $H_0:P(X<x)=F(x)$ gipotezani tekshirish talab etilsin. Buning uchun X tasodifiy miqdor ustida n marta erkli kuzatish o'tkazib $x_1,x_2,...,x_n$ tanlanma olamiz. Bu tanlanma bo'yicha $F_n^*(x)$ empirik taqsimot funksiyasini qurish mumkin. Empirik taqsimot funksiyasi va nazariy (gipotetik) taqsimot funksiyasini taqqoslash maxsus tanlangan tasodifiy miqdor-muvofiqlik (moslik) kriteriysi yordamida bajariladi.

48-ta'rif. Muvofiqlik kriteriysi deb, bosh to'plam noma'lum taqsimotining taxmin qilinayotgan qonuni haqidagi gipotezani tekshirish uchun xizmat qiluvchi kriteriyga aytiladi.

Bir qancha muvofiqlik kriteriylari mavjud: χ^2 ("xi"-kvadrat") K.Pirson, Kolmogorov, Smirnov va boshqalar.

Normal taqsimot haqidagi gipotezani tekshirishda qo'llaniladigan Pirson kriteriysiga batafsil to'xtalamiz. Shu maqsadda empirik va nazariy chastotalarni taqqoslaymiz.

Odatda, empirik va nazariy chastotalarning farqi bo'ladi. Masalan:

empir.chast	6	13	38	74	106	85	30	10	4
nazar.chast	13	14	42	82	99	76	37	11	2

Bunda quyidagi savollar tug'iladi: Chastotalarning bunday farqlanishi tasodifiymi? Farqlanish sabablari nima? Bu kabi savollarga Pirson kriteriysi javob beradi. Bu kriteriy ham boshqa kriteriylar kabi gipoteza to'g'riligini tasdiqlamasdan, balki qabul qilingan α – muhimlilik darajasida kuzatilgan ma'lumotlari bilan uning mos yoki mosmasligini o'rnatadi.

n hajmli tanlanma asosida: $\begin{matrix} x_i: & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ n_i & n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{matrix}$ empirik taqsimot olingan bo'lsin.

Bosh to'plam normal taqsimlangan farazi asosida $n_i^{\bullet}$ nazariy chastotalar hisoblangan bo'lsin. α – muhimlilik darajasida.

H_0: bosh to'plam normal taqsimlangan gipotezani tekshirish uchun kriteriy sifatida

$$\chi^2 = \sum_i \frac{\left(n_i - n_i^{\bullet}\right)^2}{n_i^{\bullet}} \tag{10.99}$$

tasodifiy miqdorni olamiz.

Bosh to'plam qaysi taqsimot qonuniga bo'ysunishidan qat'i nazar (10.99) tasodifiy miqdor $n \to \infty$ da k erkinlik darajali χ^2 taqsimot qonuniga intilishi isbotlangan. Bu yerda $k = s - 1 - r$. s – tanlanma gruppalari (xususiy intervallar) soni, r – faraz qilinayotgan, ya'ni tanlanma ma'lumotlari asosida baholanayotgan, taqsimot parametrlari soni. Masalan, normal taqsimotda $r = 2$ va hokazo.

O'ng tamonli kritik sohani quramiz. Asosiy gipotezani to'g'ri deb faraz qilganimizda kriteriyning kritik sohaga tushish ehtimoli:

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{kr.}(\alpha;k)\right) = \alpha \tag{10.100}$$

Shunday qilib, $\chi^2 > \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ tengsizlik kritik sohani, $\chi^2 < \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ tengsizlik esa asosiy gipotezani qabul qilish sohasini aniqlaydi.

$$\chi^2_{kuzat.} = \sum_i \frac{\left(n_i - n_i^{\bullet}\right)^2}{n_i^{\bullet}} \tag{10.101}$$

formula yordamida kriteriyning kuzatilgan qiymatini, jadvaldan $\chi^2_{kr}(\alpha;k)$ – kritik nuqtani topamiz va quyidagi xulosalarni chiqaramiz.

Agar $\chi^2 < \chi^2_{kr}(\alpha;k)$ bo'lsa, u holda gipotezani rad etishga asos yo'q;

Agar $\chi^2 < \chi^2_{kr}(\alpha;k)$ bo'lsa, u holda gipotezani rad etishga asos bor.

75-misol. $\alpha = 0,05$ bo'lsa bosh to'plam normal taqsimlangan gipotezasini quyidagi jadval asosida tekshiring:

empir.chast	6	13	38	74	106	85	30	14
nazar.chast	3	14	42	82	99	76	37	13

Yechish. χ^2_{kuzat} qiymatni hisoblash uchun quyidagi jadvalni tuzamiz.

i	n_i	n_i^*	$n_i - n_i^*$	$(n_i - n_i^*)^2$	$\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$
1	6	3	3	9	3
2	13	14	-1	1	0,07
3	38	42	-4	16	0,38
4	74	82	-8	64	0,78
5	106	99	7	49	0,49
6	85	76	9	81	1,07
7	30	37	-7	49	1,32
8	14	13	1	1	0,08
$\sum$	366	366			$\chi^2_{kuzat.} = 7,9$

Erkinlik darajalari soni: $k = s - r - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$. Jadvaldan: $\chi^2_{kr.} = 11,1$.

$\chi^2_{kuzat.} < \chi^2_{kr.}$ bo'lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo'q. Demak, kuzatilgan ma'lumotlar gipoteza bilan mos.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, Pirson muvofiqlik kriteriysining asosini empirik va nazariy chastotalarni taqqoslash tashkil etadi. Empirik chastota tajribadan topiladi.

Bosh to'plam normal taqsimlanganda nazariy chastota topish usullaridan birini quyida keltiramiz:

1. X tanlanmaning barcha mumkin bo'lgan qiymatlar sohasi k ta bir xil uzunlikdagi (x_i, x_{i+1}) xususiy intervallarga bo'linadi va har bir xususiy interval x_i^* o'rtasi topiladi va i intervalga tushgan variantalar soni x_i^* variantaning chastotasi deb hisoblanadi. Natijada

$$\begin{array}{ccccc} x_i^*: & x_1^* & x_2^* & \dots & x_k^* \\ n_i & n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{array}$$

taqsimot hosil qilinadi. Bu yerda $\sum_i n_i = n$.

2. Tanlanma $\overline{x^*}$ o'rtachasi va σ^* o'rtacha kvadratik chetlanishi hisoblanadi.

3. $Z=\dfrac{\left(X-\overline{x^{*}}\right)}{\sigma^{*}}$ miqdor bilan X tasodifiy miqdor normalanadi va (z_i, z_{i+1}) intervalning chetki nuqtalari: $z_i=\dfrac{\left(x_i-\overline{x^{*}}\right)}{\sigma^{*}}$, $z_{i+1}=\dfrac{\left(x_{i+1}-\overline{x^{*}}\right)}{\sigma^{*}}$ topiladi. Bunda Z ning eng kichik qiymati $z_1 \to -\infty$, eng katta qiymati $z_k \to \infty$ deb olinadi.

4. $p_i=\Phi(z_{i+1})-\Phi(z_i)$ formula bilan X ning $\left(x_i, x_{i+1}\right)$ oraliqqa tushish ehtimoli hisoblanadi. Bu yerda $\Phi(z)$ – Laplas funksiyasi. U holda nazariy chastota: $n_i^{*}=n_i p_i$. Shuni ta'kidlash kerakki, har bir oraliq kamida 5-10 ta variantani o'z ichiga olishi lozim. Tanlanma hajmi ham yetarlicha katta, 50 dan kam bo'lmasligi lozim. Variantalari soni kam oraliqlarni birlashtirish kerak.

76-misol. Bosh to'plam normal taqsimlangan deb jadval asosida nazariy chastotalarni toping. Tanlanma hajmi $n=200$.

i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	4	6	15	6	14	16	21
2	6	8	26	7	16	18	24
3	8	10	25	8	18	20	20
4	10	12	30	9	20	22	13
5	12	14	26				

Yechish. 1. Xususiy intervallar o'rtasini topamiz va quyidagi taqsimotni hosil qilamiz:

x_i^{*}	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

2. Tanlanma o'rtachasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini topamiz: $\overline{x^{*}}=12{,}63$, $\sigma^{*}=4{,}695$.

3. (z_i, z_{i+1}) intervallarni topamiz va quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

i	x_i	x_{i+1}	$x_i-\overline{x^{*}}$	$x_{i+1}-\overline{x^{*}}$	$z_i=\dfrac{x_i-\overline{x^{*}}}{\sigma^{*}}$	$z_{i+1}=\dfrac{x_{i+1}-\overline{x^{*}}}{\sigma^{*}}$
1	4	6	-	-6,63	$-\infty$	-1,41
2	6	8	-6,63	-4,63	-1,41	-0,99
3	8	10	-4,63	-2,63	-0,99	-0,56
4	10	12	-2,63	-0,63	-0,56	-0,13
5	12	14	-0,63	1,37	-0,13	0,29
6	14	16	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	7,37	-	1,57	∞

4. p_i ehtimollikni va $n_i p_i$ nazariy chastotani topib quyidagi jadvalni tuzamiz:

i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n_i p_i$
1	$-\infty$	-1,41	-0,5	-0,4207	0,0793	15,86
2	-1,41	-0,99	-0,4207	-0,3389	0,0818	16,36
3	-0,99	-0,56	-0,3389	-0,2123	0,1266	25,32
4	-0,56	-0,13	-0,2123	-0,0517	0,1606	32,12
5	-0,13	0,29	-0,0517	0,1141	0,1658	33,16
6	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	1,57	∞	0,4418	0,5	0,0582	11,64

10-bobga doir savollar

1. Bayes formulasi va to'la ehtimol formulalari orasidagi umumiylikni ayting.
2. Ehtimollarni ko'paytirish qoidalarini keltiring.
3. Ehtimollarni qo'shish qoidalarini ayting.
4. Ehtimolning klassik ta'rifini keltiring.
5. Elementar hodisa va elementar hodisalar fazosi ta'rifini bering.
6. Erkli hodisalar ta'rifini bering.
7. Geometrik ehtimollik nima?
8. Hodisalar to'la guruhiga ta'rif bering va misollar keltiring.
9. Hodisalar yig'indisi va ko'paytmasi amallarini ta'riflang.
10. Hodisalarning turlarini ayting va ularga doir misollar keltiring.
11. I tur va II tur xatoliklarni misollar yordamida tushuntirung.
12. Kriteriy quvvatini qanday oshirish mumkin?
13. Kritik sohani qurishning qanday usullarini bilasiz?
14. Nisbiy chastotaning turg'unlik xossasi nimadan iborat?
15. Pirson kriteriysini ta'riflang.
16. Shartli ehtimol ta'rifini keltiring.
17. Statistik gipotezani ta'riflang.
18. Statistik kriteriyni ta'riflang.
19. Statistik ehtimollikni tushuntiring. Uning ehtimolning klassik ta'rifidan farqi nimada?
20. To'la ehtimol formulasida qanday shartlar talab qilinadi?

10-bobga doir misol va masalalar

1. Quyida berilgan tanlanma uchun variatsion qator hamda chastotali taqsimot tuzing: $\{5,3,7,10,5,5,2,10,7,2,7,7,4,2,4\}$.
2. Tavakkaliga tanlangan 30 ta talabalarning bo'y uzunliklaridan iborat quyidagi tanlanma berilgan. Bu tanlanma uchun interval statistik taqsimot tuzing.

178	160	154	183	155	153	167	186	155	163

157	175	170	166	159	173	182	167	169	171
179	165	156	179	158	171	175	173	172	164

3. Chastotali taqsimoti berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini toping:

a)

X_i	15	16	17	18	19
n_i	1	4	5	4	2

b)

X_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	1	3	4	6	5	2	1

4. Quyidagi tanlanma uchun nisbiy chastotali gistogramma yasang.

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	8	14	20	25	30	24	16	12	7	4

5. Quyidagi tanlanma uchun poligon yasang.

X_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
n_i	2	4	5	6	5	2	1

6. Quyidagi tanlanmaning o‘rta qiymati va dispersiyasini hisoblang.

Interval chegarasi	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44	44-46
n_i	2	3	30	40	20	5

7. Talabalardan 24 savoldan iborat test sinovi o‘tkazildi. Ushbu test natijalariga ko‘ra talabalar quyidagicha taqsimlanishdi. Tanlanma sonli xarakteristikalarini hisoblang.

To‘g‘ri javoblar soni	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Talabalar soni	2	4	8	12	16	10	3

8. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha uning empirik funksiyasini toping.

X	1	4	6
n	10	15	25

9. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang.

X	2	4	5	7	10

W	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

10. Quyidagi ma'lumotlar asosida empirik taqsimot funksiyasini toping va grafigini yasang.

X	4	7	8
n	5	2	3

11. Chastotalar poligonini yasang.

X	15	20	25	30	10
n	10	15	30	20	25

12. Nisbiy chastotalar poligonini yasang.

X	20	40	65	80
W	0.1	0.2	0.3	0.4

13. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

№	$x_i - x_{i+1}$	n_i	$\frac{n_i}{h}$
1	2-7	5	
2	7-12	10	
3	12-17	25	
4	17-22	6	
5	22-27	4	

14. Bosh to'plamning miqdoriy belgisi normal taqsimlangan. n hajmli tanlanma bo'yicha tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlanishi topilgan. Agar $n=10$ va $s=5,1$ bo'lsa, $\gamma=0,99$, ishonchlilik ehtimoli bilan:

a) dispersiyani qoplaydigan;

b) o'rtacha kvadratik chetlanishni qoplaydigan ishonchlilik oralig'ini toping.

15. Biror fizik kattalikni bog'liq bo'lmagan bir xil aniqlikdagi 9 ta o'lchash ma'lumotlari bo'yicha, o'lchashlarning o'rta arifmetik qiymati $\overline{x_n}=30,1$ va o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=6$ topilgan. O'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini ishonchli oraliq yordamida $\gamma=0,95$, ishonchlilik bilan baholang.

16. Bosh to'plamdan $n=10$ hajmli tanlanma olingan va bosh to'plam normal taqsimlangan bo'lsa, a matematik kutilmasini tanlanma o'rtacha qiymat bo'yicha 0,95 ishonchlilik bilan o'z ichiga olishi mumkin bo'lgan oraliqni toping.

X_T	-2	1	2	3	4	5

n	2	1	2	2	2	1

17. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida $\overline{x_y}, \sigma_x$ ni toping.

X / Y	4	5	6	7	n_y
10	2	11	3	2	18
20	1	13	2	10	26
30	3	6	27	6	42
40	2	9	3	-	14
n_x	8	39	35	18	$n=100$

18. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida $\overline{y_x}, \sigma_x$ ni toping.

X / Y	4	5	6	7	n_y
1	2	11	3	2	18
2	1	19	2	4	26a
3	3	9	27	3	42
4	2	-	3	9	14
n_x	8	39	35	18	$n=100$

19. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida $\overline{y_x}, \sigma_y$ ni toping.

X / Y	4	5	6	7	n_y
10	2	11	3	2	18
20	1	19	2	4	26
30	3	6	27	6	42
40	2	3	3	6	14
n_x	8	39	35	18	$n=100$

20. Jadvaldagi ma'lumotlar asosida $\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$ regressiya tanlanma tenglamasini toping.

X / Y	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1	-	-	21
13	2	14	-	-	-	16
40	-	3	22	2	-	27
80	-	-	-	15	-	15
200	-	-	-	-	21	21
n_x	21	18	23	17	21	$n=100$

21. Jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida $\overline{x_y} = ay^2 + by + c$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelatsion nisbatni aniqlang.

Y \ X	6	30	50	n_y
1	15	-	-	15
2	1	14	-	15
3	-	2	18	20
4	16	16	18	50
n_x	32	32	36	$n=100$

22. Normal taqsimlangan X va Y bosh to'plamlardan hajmlari mos ravishda n_1 va n_2 bo'lgan ikkita erkli tanlanma ajratib olingan va ularning "tuzatilgan" dispersiyalari: s_x^2, s_y^2 lar topilgan. α muhimlilik darajasida $H_0: D(X) = D(Y)$, $H: D(x) \neq D(Y)$ gipotezani tekshiring.

a) $n_1 = 10,\ n_2 = 15,\ s_x^2 = 2{,}4,\ s_y^2 = 2{,}4,\ \alpha = 0{,}05$;

b) $n_1 = 13,\ n_2 = 17,\ s_x^2 = 3{,}6,\ s_y^2 = 4{,}8,\ \alpha = 0{,}05$;

c) $n_1 = 9,\ n_2 = 12,\ s_x^2 = 3{,}6,\ s_y^2 = 7{,}2,\ \alpha = 0{,}01$;

d) $n_1 = 13,\ n_2 = 15,\ s_x^2 = 36,\ s_y^2 = 27,\ \alpha = 0{,}05$.

23. Normal taqsimlangan X va Y bosh to'plamlardan quyidagi erkli tanlanmalar ajratib olingan. $\alpha = 0{,}01$ muhimlilik darajasida $H_0: D(X) = D(Y)$, $H_1: D(X) > D(Y)$ gipotezani tekshiring.

X_T	3	4	5	6	7
n	4	2	3	3	1

Y_T	3	6	9	12	15
n	4	4	3	3	4

24. Telefon raqamini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon raqami to'g'ri terilganligi ehtimolligini toping.

25. 100 ta lotoreya biletlaridan bittasi yutuqli bo'lsin. Tavakkaliga olingan 10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo'lishi ehtimolligini toping.

26. Pochta bo'limida 6 xildagi otkritka bor. Sotilgan 4 ta otkritkadan:

a) 4 tasi bir xilda; b) 4 tasi turli xilda bo'lishi ehtimolliklarini toping.

27. Detallar partiyasi uch ishchi tomonidan tayyorlanadi. Birinchi ishchi barcha detallarning 25%ini, ikkinchi ishchi 35%ini, uchinchsi esa 40%ini tayyorlaydi. Bu uchchala ishchining tayyorlagan detallarining sifatsiz bo'lish ehtimolliklari mos ravishda 0,05; 0.04 va 0,02 ga teng bo'lsa, tekshirish uchun partiyadan olingan detalning sifatsiz bo'lish ehtimolligini toping.

28. Ikki teng kuchli shaxmatchi shaxmat o'ynashmoqda. Qaysi hodisaning ehtimolligi katta: 4 ta partiyadan 2 tasida yutishmi yoki 6 ta partiyadan 3 tasida yutish.
29. Telefon stansiyasi 2000 ta abonentga xizmat ko'rsatadi. Agar har bir abonent uchun unig bir soatning ichida qo'ng'iroq qilishi ehtimolligi 0,003 bo'lsa, bir soatning ichida 5 ta abonent qo'ngiroq qilishi ehtimolligini toping.
30. Sex ishlab chiqargan mahsulotining o'rtacha 96% i sifatli. Bazada mahsulotni qabul qilib oluvchi sexning 200 ta mahsulotini tavakkaliga tekshiradi. Agar tekshirilgan mahsulotlardan sifatsizlari soni 10 tadan ko'p bo'lsa butun mahsulotlar partiyasi sifatsiz deb, sexga qaytariladi. Mahsulotlar partiyasining qabul qilinishi ehtimolligini toping.
31. Detalning nostandart bo'lishi ehtimolligi 0,6 ga teng. $n=1200$ ta detal ichida nostandart detallar bo'lishi nisbiy chastotasining $p=0,6$ ehtimollikdan chetlashishi absolut qiymati $\varepsilon=0,05$ dan katta bo'lmasligi ehtimolligini toping.
32. Musobaqaning 10 ta ishtirokchisiga 3 ta yutuqni necha xil usul bilan taqsimlash mumkin.
33. Ma'lum uchta kitob yonma-yon turadigan qilib, 7 ta kitobni tokchaga necha xil usul bilan taxlash mumkin.
34. Birinchi talabada 7 xil, ikkinchisida 16 xildagi kitoblar bor bo'lsa, kitobga kitobni necha xil usul bilan almashtirishlari mumkin. 2 ta kitobga 2 ta kitobnichi?
35. 3,3,5,5,8 raqamlaridan nechta besh xonali son hosil qilish mumkin.
36. 9 qavatli bino liftiga 4 kishi kirdi. Ularning har biri bir-biriga bo'gliqsiz ravishda ixtiyoriy qavatga chiqishlari mumkin. Ular :
    a) turli qavatlarga; b) bitta qavatga;
    c) 5-qavatga chiqishlari ehtimolliklarini toping.
37. Imtihon biletlariga kiruvchi 60 savoldan talaba 50 tasini biladi. Tavakkaliga tanlangan 3 ta savoldan:
    a) hammasini; b) ikkitasini bilishi ehtimolligini toping.
38. Idishda 5 ta ko'k, 4 ta qizil va 3 ta yashil shar bor. Tavakkaliga olingan 3 ta sharning:
    a) bir xil rangda; b) har xil rangda;
    c) 2 tasi ko'k va 1 tasi yashil rangda bo'lishi ehtimolligini hisoblang.
39. [0,5] kesmadan tavakkaliga bitta nuqta tanlanadi. Shu nuqtadan kesmaning o'ng oxirigacha bo'lgan masofa 1,6 birlikdan oshmasligi ehtimolligini toping.
40. Idishda 4 ta oq, 3 ta ko'k va 2 ta qora shar bor. Tavakkaliga, ketma-ket, bittadan 3 ta shar olindi. Birinchi shar oq, ikkinchisi ko'k va uchinchisi qora rangda bo'lishi ehtimolligini toping.
41. Talaba imtihon 40 ta biletlarining faqat 30 tasiga javob bera oladi. Talabaga imtihonga birinchi bo'lib kirishi foydalimi, yoki ikkinchi?
42. Zavod ishlab chiqargan mahsulotning 90% i sifat talablariga javob beradi. Tekshiruvchi mahsulotni 0,96 ehtimollik bilan sifatli, 0,06 ehtimollik bilan

sifatsiz deb topadi. Tavakkaliga olingan mahsulotning sifatli deb topilishi ehtimolligini toping.

43. Oilada 3 ta farzand bor. Agar o'g'il bola tug'ilishi ehtimolligi 0,51, qiz bola tug'lishi ehtimolligi 0,49 ga teng bo'lsa,
    a) bolalarning hammasi o'g'illar,
    b) 1 tasi o'g'il va 2 tasi qiz bo'lishi ehtimolliklarini hisoblang.
44. Shoshqol tosh 10 marta tashlanganda:
    a) 6 raqami bir marta tushishi ehtimolligini;
    b) 6 raqami kamida bir marta tushish ehtimolligini;
    c) 6 raqami tushishi soni ehtimolligi maksimal qiymatga erishadigan miqdorni toping.
45. "Ehtimollar nazariyasi" fanidan ma'ruza darsida 84 ta talaba ishtirok etmoqda. Shu talabalarning ikkitasini tug'ilgan kuni shu kuni bo'lishi ehtimolligini toping.
46. A hodisaning ro'y berish ehtimolligi 0,6 ga teng. 100 ta bog'liqsiz tajribada A hodisaning 70 marta ro'y berishi ehtimolligini toping.
47. Shunday m sonni topingki, 0,95 ehtimollik bilan 800 ta yangi tug'ilgan chaqaloqlardan kamida m tasi qizlar deb aytish mumkin bo'lsin. Qiz bola tug'ilishi ehtimolligini 0,485 deb hisoblang.
48. Detalning nostandart bo'lishi ehtimolligi 0,1 ga teng. Tavakkaliga olingan 400 ta detal ichida nostandart detallar bo'lishi nisbiy chastotasining p=0,1 ehtimollikdan chetlashishi absolut qiymati $\varepsilon = 0,03$ dan katta bo'lmasligi ehtimolligini toping.
49. X va Y bog'liqsiz diskret tasodifiy miqdorlar bo'lib, $M(X) = 0$, $M(Y) = -3$, $D(X) = 2$, $D(Y) = 9$ bo'lsa, $Z = 5X - 3Y + 2$ tasodifiy miqdorlar uchun $M(Z)$ va $D(Z)$ ni hisoblang.

Tayanch so'z va iboralar

Tasodifiy hodisa, muqarrar hodisa, mumkin bo'lmagan hodisa, birgalikda bo'lmagan hodisalar, teng imkoniyatli hodisalar, ehtimolning klassik ta'rifi, kombinatorika elementlari, nisbiy chastota, nisbiy chastotaning turg'unligi, statistik ehtimollik, geometrik ehtimollik, erkli sinovlar ketma-ketligi, binomial formula, eng ehtimolli son, polinomial sxema, lokal teorema, integral teorema, hodisalar oqimi, puasson oqimi, oqimning intensivligi, nisbiy chastotaning ehtimoldan chetlanishi, birgalikda bo'lgan hodisalar, erkli hodisalar, bog'liq hodisalar, qarama-qarshi hodisalar, shartli ehtimollik, kamida bitta hodisaning ro'y berishi ehtimoli, hodisalar to'la guruhi, to'la ehtimollik formulasi, Bayes formulasi, tasodifiy miqdor, diskret tasodifiy miqdor, uzluksiz tasodifiy miqdor, taqsimot qonuni, taqsimot ko'pburchagi, taqsimot funksiyasi, taqsimot qonuni, zichlik funksiyasi, matematik kutilma, chetlanish, o'rtacha kvadratik chetlanish, dispersiya, korrelyatsiya koeffitsiyenti, taqsimot funksiya, taqsimotning zichlik funksiyasi, Binomial taqsimot qonuni, geometrik taqsimot qonuni, Puasson taqsimot qonuni, gipergeometik taqsimot qonuni, tekis taqsimot qonuni, normal taqsimot qonuni, ko'rsatkichli taqsimot qonuni, katta sonlar qonuni, Chebishev tengsizligi, markaziy limit teoremasi, tasodifiy miqdor, arifmetik o'rtacha, tekis chegaralangan dispersiya, bosh to'plam, tanlanma, statistik taqsimot, empirik taqsimot funksiyasi, poligon, gistogramma, reprezentativ tanlanma, variatsion qator, variant, siljimagan baho, effektiv baho, asosli baho, tanlanma o'rtachasi, bosh to'plam o'rtachasi, tanlanma dispersiyasi, "tuzatilgan" dispersiya, bosh to'plam dispersiyasi, nuqtaviy baho, intervalli baho, bahoning ishonchliligi, bahoning aniqligi, ishonchlilik intervali, funksional bog'lanish, statistik bog'lanish, korrelatsion bog'lanish, korrelatsion panjara, shartli o'rtacha, tanlanma regressiyasi, tanlanma regressiya tenglamasi, egri chiziqli korrelatsiya, to'plamli korrelatsiya, xususiy tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti, umumiy tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti, tanlanma korrelatsion nisbat, shartli varianta, statistik gipoteza, oddiy gipoteza, murakkab gipoteza, statistik kriteriy, kuzatiladigan qiymat, kritik nuqtalar, muhimlilik darajasi, kriteriy quvvati, muvofiqlik kriteriysi, χ^2 –kriteriy, empirik chastota, nazariy chastota, normal taqsimot, erkinlik darajasi, Laplas funksiyasi, kritik soha.

11-BOB. O'YINLAR NAZARIYASI

11.1. O'yinlar nazariyasi elementlari. Matritsali o'yin

O'yinlar nazariyasi haqida dastlabki tushunchalar. Matematikaning konfliktli (mojaroli) holatlarini, ya'ni qatnashuvchilarning (o'ynovchilarning) manfaatlari qarama-qarshi yoki bir-biriga mos kelmaydigan holatlarni o'rganuvchi bo'limi – "o'yinlar nazariyasi" deb ataladi. O'yinlar nazariyasi – konfliktli holatda qatnashayotgan har bir "o'ynovchi"ga eng katta yutuqqa (yoki eng kichik yutqazishga) erishish uchun qilinadigan harakatlarning eng yaxshisini (optimalini) aniqlashga, yo'llanma berishga imkon beruvchi matematik nazariyadir.

Ko'pgina iqtisodiy jarayonlarga ham o'yinlar nazariyasi nuqtai-nazaridan qarash mumkin. Masalan, o'yin ishtirokchilari – bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar, ta'minotchilar va iste'molchilar bo'lib, o'yining yutug'i – ishlab chiqarish fondlarining samaradorligi, daromad mablag'lari, mahsulotning bahosi yoki tannarxi bo'lishi mumkin.

O'yinlar nazariyasining yaratilishi XX asrning buyik matematiklaridan biri Jon von N'yuman bilan bog'liq. Uning Morgenshtern bilan hamkorlikda 1944 yil nashr etgan "*Iqtisodiy jarayonlar va o'yinlar nazariyasi*" monografiyasi o'yinlar nazariyasining rivojlanishida fundamental asos bo'ldi. Keyinchalik o'yinlar nazariyasi amaliy tatbiqlarga ega bo'lgan mustaqil yo'nalish sifatida rivojlandi. Shuni ta'kidlash lozimki, o'yinlar nazariyasining usullari va xulosalari ko'p marta takrorlanadigan konfliktli holatlarga nisbatan ishlatiladi.

Amalda, konfliktli holatlarni matematik usullar yordamida tadqiq etishda, muhim bo'lmagan faktlarni tashlab yuborib, holatlarning sodda modeli tuziladi. Bunday model ***o'yin*** deb ataladi. O'yinda konfliktli holat ma'lum qoida asosida rivojlanadi. O'yinning mohiyati shundaki, har bir ishtirokchi (o'yinchi) o'ziga eng yaxshi natijani beruvchi yechimni tanlashga harakat qiladi.

O'yinda ikkita yoki undan ko'p ishtirokchilarning manfaatlari to'qnashishi mumkin. Shunga muvofiq, u ikki o'ynovchili va ko'p o'ynovchili bo'lishi mumkin.

Yutuqlarning xarakteriga ko'ra o'yinlar nol summali va nol summali bo'lmagan o'yinlarga bo'linadi. Nol summali o'yinda o'yinchilarning umumiy kapitali o'zgarmaydi, faqat o'yin davomida qayta taqsimlanadi va shu sababli yutuqlar yig'indisi nolga teng bo'ladi, ya'ni $v_1 + v_2 + ... + v_n = 0$, bu yerda v_j j-o'yinchining yutug'i.

Nol summali bo'lmagan o'yinlarda o'yinchilarning yutuqlari yig'indisi noldan farqli. Masalan, lotoreya o'yinida, o'yinchilardan to'plangan badalning bir qismi lotoreya tashkilotlariga beriladi. Shuning uchun $v_1 + v_2 + ... + v_n < 0$ bo'ladi.

Biz bu yerda amaliy ahamiyati katta bo'lgan o'yinlar, ya'ni juft o'yinlarni qarash bilan cheklanamiz. Eng sodda va keng tarqalgan o'yinning ta'rifini beramiz.

1-ta'rif. Ikki ishtirokchidan iborat nol summali o'yinning stratigik formasi (X, Y, A) uchlik ko'rinishida beriladi.

Bu yerda X – I o'yinchining, Y – II o'yinchining strategiyalari, $A - X \times Y$ da aniqlangan funksiya bo'lib, $A(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$ ko'rinishda yoziladi.

Bunda I o'yinchi $x \in X$ strategiyani, II o'yinchi esa $y \in Y$ strategiyani bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda tanlaydi. Ular tanlagan strategiya ma'lum bo'lganda esa o'yin natijasiga ko'ra I o'yinchi II o'yinchidan oladigan yutug'i yoki II o'yinchi beradigan to'lovi $A(x,y)$ bilan aniqlanadi.

Masalan, ikki shaxmatchidan iborat o'yinda I shaxmatchi birga barcha shaxmat programmalari uning strategiyasi hisoblanadi va hokazo.

Yana bir o'yinni ko'rib chiqamiz. U toq yoki juft deb ataladi. Bunda I va II o'yinchilar bir paytning o'zida $\{1\}$,-$\{2\}$ raqamlardan birini aytadi. I o'yinchini toq deb nomlasak, u holda yuqorida I va II oyinchilar tomonidan aytilgan raqamlar yig'indisi toq bo'lgandagina shu yig'indiga teng miqdorda pul birligi yutadi. Aks holda esa I o'yinchi yutqazib II o'yinchi yutadi. Chunki II o'yinchining nomi juft.

Strategik formani aniqlaymiz: $X = \{1,2\}$; $Y\{1,2\}$; $A(x,y)$ – I o'yinchi uchun yutuq II o'yinchi uchun esa to'lov bo'lib, u quyidagi jadvalda ifodalangan.

$$\begin{array}{lcc} \text{II (juft)}\, y & - & \begin{array}{cc} \;\;\;\;1 & \;\;2 \end{array} \\ \text{I (toq)}\, x & - & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} -2 & +3 \\ +3 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bu yerda ikki o'yinchi ham teng imkoniyatli.

Bu o'yinni I o'yinchi nuqtai nazaridan tahlil qilamiz. Faraz qilamiz, u ixtiyoriy ravishda $\{2\}$ raqamni vaqtning $\frac{3}{5}$ qismida $\{2\}$ raqamni esa vaqtning $\frac{2}{5}$ qismida tanlasin. U holda,

1. Agar II o'yinchi $\{1\}$ ni tanlasa, u holda I o'yinchi vaqtning $\frac{3}{5}$ qismida 2 birlikda pul yutqazadi, vaqtning $\frac{2}{5}$ qismida esa 3 birlikda pul yutadi. U holda uning o'rtacha yutug'i quyidagicha aniqlanadi: $-2 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = 0$.

2. Agar II o'yinchi $\{2\}$ ni tanlasa, u holda I o'yinchi vaqtning $\frac{3}{5}$ qismida 3 birlikda pul yutadi, vaqtning $\frac{2}{5}$ qismida esa 4 birlikda pul yutqazadi. U holda uning o'rtacha yutug'i quyidagicha aniqlanadi: $3 \cdot \frac{3}{5} - 4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

Shunday qilib, II o'yinchi qanday strategiya tanlashidan qat'iy nazar har bir o'yinning oxirida I o'yinchi $\frac{1}{5}$ birlikdagi pul yutuqqa ega bo'ladi.

Endi yuqoridagi umumiy holatda ko'rib chiqamiz. Vaqt taqsimoti proportsiyasini p bilan belgilaymiz va p ning qiymatini I o'yinchining har qanday holatdagi yutug'i bir xil bo'lgan holda topamiz. Ma'lumki I o'yinchining o'rtacha yutug'i quyidagicha aniqlanadi: 1. $-2p+3(1-p)$; 2. $3p-4(1-p)$. U holda I o'yinchining yutug'ini o'zgarmaganligini e'tiborga olsak quyidagiga ega bo'lamiz: $-2p+3(1-p)=3p-4(1-p)\Rightarrow 12p=7\Rightarrow p=\frac{7}{12}$.

Demak, agar vaqt taqsimotini $p=\frac{7}{12}$, $q=\frac{5}{12}$ kabi olsak I o'yinchining yutug'i har doim bir xil, ya'ni o'zgarmas bo'lib, quyidagiga teng bo'ladi:

$$-2\cdot\frac{7}{12}+3\cdot\frac{5}{12}=\frac{1}{12}.$$

Shunday qilib, I o'yinchining har bir holatda o'rtacha yutug'i $\frac{1}{12}$ bo'lishi uchun $\{1\}$ raqamni $\frac{7}{12}$ ehtimollik bilan, $\{2\}$ raqamni esa $\frac{5}{12}$ ehtimollik bilan tanlash kerak.

Sof va aralash strategiyalarni bir-biridan farqlash kerak bo'ladi. Masalan, yuqorida keltirilgan (X,Y,A) uchlikdagi X va Y strategiyalar alohida-alohida qaralganda sof strategiyalar hisoblanadi. Agarda sof strategiyalar qandaydir proportsiyada qo'llanilsa, u holda biz aralash strategiyani hosil qilamiz. Shunday qilib, toq yoki juft o'yindagi I o'yinchining optimal strategiyasi aralash strategiyadir. Unda sof strategiyalar $\frac{7}{12}$ va $\frac{5}{12}$ nisbat bilan qo'llanilmoqda. Har qanday $x\in X$ strategiyani ham 1 ehtimollik bilan qo'llanilgan x sof strategiyaning aralash strategiyasi sifatida qarash mumkin.

O'yinning quyi va yuqori bahosi, egar nuqtasi va optimal bahosi. O'yinchining strategiyasi deb, o'yinchi mumkin bo'lgan har qanday holatda tanlaydigan rejasiga aytiladi.

Strategiyaning soniga qarab, o'yinlar chekli yoki cheksiz o'yinlarga bo'linadi.

Optimal strategiya deb, berilgan o'yinchiga, o'yin bir necha marta takrorlanganda eng katta mumkin bo'lgan o'rtacha yutuqni ta'minlovchi strategiyaga aytiladi.

Faraz qilamiz, A o'yinchi m ta $A_1,A_2,...,A_m$ strategiyalarga, B o'yinchi esa n ta $B_1,B_2,...,B_n$ strategiyalarga ega bo'lsin. Agar A o'yinchi A_i strategiyani B o'yinchi B_j strategiyani tanlasin. U holda A o'yinchining (A_i,B_j) juftlikka mos keluvchi yutug'ini a_{ij} bilani belgilaymiz.

Matritsa satrlarini A_i strategiyalarga, ustunlarini B_j strategiyalarga mos

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

keltirib A – o'yin matritsasini hosil qilamiz. Bu matritsa *to'lov matritsasi* yoki *yutuq matritsasi* deb ataladi.

O'yin matritsasini qurishning mohiyatini tushunib olish uchun quyidagi misolni ko'ramiz.

Ikki o'yinchining har biri 1 yoki 2 sonlardan birini tanlaydi va shu bilan bir paytda raqib qaysi sonni tanlaganini topishga harakat qiladi. Agar o'yinchilardan ikkalasi ham raqibining tanlagan sonini topsa yoki adashsa o'yin durang bo'ladi. Agar faqat bitta o'yinchi raqib tanlagan sonni topsa ikkinchisi esa raqib o'ylagan sonni topa olmasa, u holda birinchi o'yinchining yutuq'i tanlangan ikki sonning yig'indisidan iborat bo'lib ikkinchi o'yinchi esa shunchaga yutqazadi.

(s,t) sonlar juftligini o'yinchining strategiyasi deb ataymiz. Bu yerda s-o'yinchi tanlagan son; t-o'yinchining nazarida raqib tanlagan son. Shuday qilib har bir o'yinchining 4 ta strategiyasi mavjud: (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2). Bu o'yin haqidagi barcha ma'lumotlarni quyidagi matritsaga joylashtirish mumkin:

		II			
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
I	(1,1)	0	2	-3	0
	(1,2)	-2	0	0	3
	(2,1)	3	0	0	-4
	(2,2)	0	-3	4	0

Matritsa elementlari I o'yinchining yutuqlarini bildiradi. Masalan, agar I o'yinchi (2,2) strategiyani tanlaganda (I o'yinchi 2 sonni o'ylab II o'yinchi ham 2 sonni o'yladi deb faraz qilmoqda) II o'yinchi (2,1) (II o'yinchi 2 sonni o'ylab I o'yinchini 1 sonni o'yladi deb faraz qilmoqda) strategiyani tanlasa, u holda I o'yinchining yutug'i 4 birlikka teng bo'ladi, chunki I o'yinchi II o'yinchi o'ylagan sonni, ya'ni 2 ni topgan II o'yinchi esa I o'yinchi o'ylagan sonni, ya'ni 2 ni topa olmagan. Agar I (1,2) strategiyani tanlaganda II o'yinchi (1,1) strategiyani tanlasa, u holda I o'yinchining yutug'i -2 birlikka teng bo'ladi.

Bu misol uchun o'yin matritsasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

O'yin tugashining mohiyati quyidagicha: I o'yinchi quyidagicha fikr yuritishi kerak: agar A_{i_1} strategiyani tanlasa, u holda II o'yinchini B_j strategiyasini shunday tanlashi mumkinki, natijada $a_{i_1 j_1} = \max_{1\le i\le 4} \min_{1\le j\le 4} a_{ij}$ munosabat bajarilishi kerak.

Optimal strategiyani bunday aniqlash ***minimax*** usuli deb ataladi. Bu usul bilan tanishib chiqamiz. Buning uchun

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o'yin matritsasini qaraymiz. Bu matritsada quyidagicha tanlash ishlarini amalga oshiramiz:

$$\begin{array}{c} \overbrace{a_{31} \quad a_{52} \quad \dots \quad a_{kn}}^{\max\limits_{1\le j\le m} a_{ij}} \\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} a_{13} \\ a_{27} \\ \dots \\ a_{ms} \end{matrix}\right\} \min\limits_{1\le i\le n} a_{ij}. \end{array}$$

Bu yerda har bir satr bo'yicha eng kichik sonlar tanlab olinib $\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij} = \{a_{13}, a_{27}, \dots, a_{ms}\}$ hosil qilingan; har bir ustun bo'yicha eng katta sonlar tanlab olinib $\max\limits_{1\le i\le n} a_{ij} = \{a_{13}, a_{27}, \dots, a_{ms}\}$ hosil qilingan.

Bizning misolimizda bu tanlashlar $\min\limits_{1\le i\le 4} a_{ij} = \{-3, -2, -4, -3\}$, $\max\limits_{1\le i\le 4} a_{ij} = \{3, 2, 4, 0\}$ ko'rinishda amalga oshirilgan.

Umuman olganda B o'yinchi B_{j_1} strategiyani A o'yinchining strategiyasini bilmagan holda tanlaydi. Shu sababli yuqoridagi tanlashlar bir-biriga bog'liq emas. Endi 2-marta tanlashni quyidagicha amalga oshiramiz:

$$\max_{1\le j\le n}\left\{\min_{1\le i\le m} a_{ij} = \{a_{31}, a_{52}, \dots, a_{kn}\}\right\} = \alpha,$$

$$\min_{1\le i\le m}\left\{\max_{1\le i\le n} a_{ij} = \{a_{13}, a_{27}, \dots, a_{ms}\}\right\} = \beta.$$

Biz qarayotgan misolimizda bu quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\max_{1\le i\le 4}\left\{\min_{1\le i\le 4} a_{ij} = \{-3, -2, -4, -3\}\right\} = -2 \Rightarrow \alpha = -2,$$

$$\min_{1\le i\le 4}\left\{\max_{1\le i\le 4} a_{ij} = \{3, 2, 4, 0\}\right\} = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Demak, yuqoridagi fikrlash bo'yicha I o'yinchi $a_{21} = (1;2)$ strategiyani tanlaydi va u $\alpha = -2$ birlikdan ko'p yutqazmaydi.

Agar xuddi shuday fikrlashni II o'yinchiga nisbatan yuritsak II o'yinchida $\beta = 0$ bo'lib o'yin durang bo'ladi.

Ammo A o'yin matritsasi ikki o'yinchiga ham ma'lum bo'lib, I o'yinchi faqat o'zi uchun emas, balki II o'yinchi uchun ham o'ylashi mumkin va aksincha. Natijada strategiya tanlash cheksiz davom etishi mumkun.

Bu savolga javob berish uchun quyidagi o'yin matritsasini ko'ramiz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 2 & -3 & 6 \\ -10 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda

$$a_{i_1 j_1}=\max_{1\le i\le 4}\min_{1\le j\le 4} a_{ij}=\max\{-3,4,-3,-10\}=4,$$

ya'ni $i_1=2,\ j_1=2$;

$$a_{i_2 j_2}=\min_{1\le j\le 4}\max_{1\le i\le 4} a_{ij}=\max\{7,4,8,7\}=4,$$

ya'ni $i_2=2,\ j_2=2$.

Shuday qilib, $i=2,\ j=2$ juftlik ikki o'yinchi uchun ham optimal strategiya. Birinchi misolda har bir o'yinchi kamida -2 birlikda yutiq mavjud, ammo ular ko'proq yutiq olishga umid qilishadi.

Ikkinchi misolda esa ikki o'yinchi ham qanoatlantiradigan eng optimal strategiya topilgan. Bu ikki holatni farqlash uchun quyidagi ba'zi bir tushunchalarni kiritamiz.

2-ta'rif. Matritsali o'yin uchun $\alpha=\max\limits_{1\le j\le n}\left\{\min\limits_{1\le i\le m} a_{ij}=\{a_{31},a_{52},\dots,a_{kn}\}\right\}$ son o'yinning *quyi qiymati*, $\beta=\min\limits_{1\le j\le m}\left\{\max\limits_{1\le i\le n} a_{ij}=\{a_{31},a_{52},\dots,a_{kn}\}\right\}$ son esa o'yinning *yuqori qiymati* deb ataladi.

Teorema. Matritsali o'yinning quyi va yuqori qiymatlari uchun quyidagi munosabat o'rinli: $\alpha\le\beta$.

3-ta'rif. Agar matritsali o'yinda $\alpha=\beta$ bo'lsa, u holda o'yin egar nuqtaga ega deyiladi. Bu yerda $\alpha=\beta=V$ o'yinning bahosi deb ataladi.

4-ta'rif. Agar $\alpha=\min\limits_{1\le j\le n} a_{i_0 j}=\max\limits_{1\le i\le m}\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij}$ bo'lsa, u holda A o'yinchining i_0 strategiyasi maksimin deb ataladi.

5-ta'rif. Agar $\beta=\min\limits_{1\le i\le m} a_{ij_0}=\max\limits_{1\le j\le n}\min\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$ bo'lsa, u holda B o'yinchining j_0 strategiyasi minimaks deb ataladi.

Bu ikki strategiya garantiyalovchi strategiyalar (yutuqni garantiyalovchi strategiyalar) deb ataladi.

Teorema. Agar garantiyalovchi strategiyalarning ixtiyoriy (i_0, j_0) juftliklari uchun

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}$$

tengsizlik bajarilsagina matritsali o'yin egar nuqtaga ega bo'ladi.

Demak, agar to'lov matritsasi egar nuqtaga ega bo'lsa, u holda o'yinning yechimi ma'lum va har bir o'yinchi o'zining optimal strategiyasini qo'llaydi.

Biz quyida minimax teoremasini keltirish uchun ba'zi tushunchalarni kiritib olamiz. Agar X va Y strategiyalar chekli bo'lsa, u holda nol summali (X, Y, A) o'yin chekli bo'ladi.

Teorema. Har qanday nol summali chekli o'yin uchun quyidagilar o'rinli:

1. Bunda o'yin qiymati deb ataluvchi chekli V son mavjud;
2. I o'yinchi uchun shunday aralash strategiya mavjudki, unda I ning o'rtacha yutug'i V ning qiymati II o'yinchining harakatiga bog'liq emas;
3. II o'yinchi uchun shunday aralash strategiya mavjudki, unda uning o'rtacha to'lovi V ning qiymati I o'yinchining harakatiga bog'liq emas.

Bu yerda, agar $V > 0$ demak o'yin foydali; agar $V < 0$ demak o'yin foydasiz; agar $V = 0$ demak, o'yin durang deyiladi.

11.2. Matritsali o'yinlarni chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish

2-tartibli matritsali o'yinning egar nuqtasini topish. (2×2) o'lchamli

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

o'yin matritsasini qaraymiz. Har bir o'yinchi uchun hech bo'lmaganda bitta optimal strategiya va V o'yin qiymatini topish uchun quyidagi ishlarni amalga oshiramiz:

1. Egar nuqtani topamiz.
2. Agar egar nuqta bo'lmasa, u holda optimal strategiyani topib, o'yinning yechimini aniqlaymiz.

Faraz qilamiz, o'yinning egar nuqtasi mavjud bo'lmasin. Agar $a \ge b$ bo'lsa, u holda $b < c$ bo'ladi. Aks holda b egar nuqta bo'lib qoladi. $b < c$ bo'lgani uchun $c > d$ aks holda c egar nuqta bo'lib qoladi. Demak, $d < a$, $a > b$. Boshqa tomondan agar $a \ge b$ bo'lsa, u holda $a > b < c > d < a$. Agar $a \le b$ bo'lsa, u holda $a < b > c < d < a$. Bu shuni ko'rsatadiki:

Agar egar nuqta mavjud bo'lmasa u holda $a > b$, $b < c$, $c > d$ va $d < a$ yoki $a < b, b > c$, $c < d$ va $d > a$.

Agar I o'yinchi $(p, 1-p)$ aralash strategiyani tanlasin. U holda

$$ap + d(1-p) = bp + c(1-p) \Rightarrow p = \frac{c-d}{(a-b)+(c-d)},\ 0 < p < 1,.$$

Bundan foydalanib I o‘yinchining o‘rtacha yutug‘ini topish mumkin:

$$V = ap + d(1-p) = \frac{ac-bd}{a-b+c-d}.$$

II o‘yinchining strategiyasi $q = \dfrac{c-b}{a-b+c-d},\ 0 < q < 1$.

1-misol. $A = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsa uchun optimal strategiyani toping. Bu yerda

$$p = \frac{2-1}{0+10+2-1} = \frac{1}{11},\ q = \frac{2+10}{0+10+2-1} = \frac{12}{11}.$$

Ma'lumki, $0 < q < 1$ bo‘lishi kerak, ammo bu misolda yuqoridagi tengsizlik bajarilmayapdi. Chunki biz bu yerda egar nuqtani tekshirmadik. Bu matritsaning egar nuqtasi mavjud bo‘lib, u $V = 1$. Bu yerda $p = 0, q = 1$.

Ba’zi hollarda yuqori o‘lchamli martitsani kichraytirib (2×2) o‘lchamga keltiriladi so‘ngra uning egar nuqtasi yoki optimal strategiyasi topiladi. Bu jarayon quyidagicha amalga oshiriladi:

Agar $A = (a_{ij})$ matritsada barcha j lar uchun $a_{ij} \geq a_{kj}$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda k-satr i-satrga dominant deyiladi. Xuddi shunday usulda i-ustunga dominant k-ustunni ham aniqlash mumkin $(a_{ij} \leq a_{ik})$.

Dominant ustun yoki dominant satrni matritsadan o‘chirish mumkin. Bu jarayonni takrorlab matritsani (2×2) o‘lchamli matritsaga keltirib olish mumkin. Masalan, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ o‘yin matritsasining optimal strategiyasini topamiz. Bu matritsada 3-ustun 2-ustunga dominant. U holda 3-ustunni o‘chirib matritsani quyidagicha yozib olishimiz mumkin: $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Yangi hosil bo‘lgan matritsada esa 1-satr 3-satrga nisbatan dominant. U holda boshlang‘ich matritsa quyidagi ko‘rinishga keladi: $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Bu matritsa egar nuqtaga ega bo‘lmaganligi sababli unga mos o‘yinning optimal strategiyasini va qiymatini aniqlaymiz: $p = \frac{3}{4}, q = \frac{1}{4},\ V = \frac{7}{4}$. Shunday qilib boshlang‘ich o‘yinda I o‘yinchining optimal strategiyasi teng bo‘ladi: $\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$; II o‘yinchi uchun esa $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$.

Matritsaning satriga (ustuni) boshqa satrlarning (ustunlar) ehtimollar orqali kombinatsiyasi dominant bo‘lsa ham bu satr (ustun)ni o‘chirish mumkin.

Bunda satr uchun $pa_{i_1 j}+(1-p)a_{i_2 k}\geq a_{kj}$, $0<p<1$; ustun uchun $pa_{ij_1}+(1-p)a_{ij_2}\leq a_{ik}$, $0<p<1$ tensizliklardan foydalaniladi.

2-misol. $A=\begin{pmatrix}0&4&6\\5&7&4\\9&6&3\end{pmatrix}$ o‘yin matritsasini qaraymiz. $p=\frac{1}{2}$ ehtimollik orqali kombinatsiyasidan $\begin{pmatrix}0,5\cdot0+0,5\cdot6\\0,5\cdot5+0,5\cdot4\\0,5\cdot9+0,5\cdot3\end{pmatrix}>\begin{pmatrix}4\\7\\6\end{pmatrix}$ tengsizlik hosil qilamiz va 2-ustunni tashlab yuboramiz. Yangi hosil bo‘lgan $A'=\begin{pmatrix}0&6\\5&4\\9&3\end{pmatrix}$ matritsadan $p=\frac{1}{3}$, $1-p=\frac{2}{3}$ ehtimollar yordamida 2- satrni tashlab yuboramiz va $A''=\begin{pmatrix}0&6\\9&3\end{pmatrix}$ matritsani hosil qilamiz. Uning qiymati $V=\frac{9}{2}$.

Matritsali o‘yinni chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish. Egar nuqtaga ega bo‘lmagan matritsali o‘yinlarda $\alpha<\beta$ bo‘ladi. Minimaks strategiyalarni qo‘llash har bir o‘ynovchiga α dan oshmaydigan yutuqni va β dan kam bo‘lmagan yutqazishni beradi. Bunday hollarda o‘yinchilar bitta emas, balki bir nechta strategiyalarni qo‘llaydilar. Strategiyani tanlash tasodifan amalga oshiriladi.

Tasodifiy tanlash yo‘li bilan aniqlangan strategiyalar ***aralash strategiya*** deb ataladi.

$(m\times n)$ tartibli matritsali o‘yinda, A o‘yinchining strategiyasi $X(x_1,x_2,...,x_m)$ vektor orqali aniqlanadi. Bunda A o‘yinchi o‘zining A_i sof strategiyasini x_i ehtimollik bilan qo‘llaydi, deb hisoblanadi. $X(x_1,x_2,...,x_m)$ vektor komponentlari uchun

$$x_i\geq 0,\quad \sum_{i=1}^{m}x_i=1$$

shart bajariladi.

Xuddi shuningdek, B o‘yinchi uchun $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ vektor aniqlanadi:

$$y_j\geq 0,\quad \sum_{j=1}^{n}y_j=1$$

x_i va y_j ehtimolliklari noldan farqli bo‘lgan strategiyalar *aktiv strategiyalar* deb ataladi.

A o'yinchining aralash strategiyalarni qo'llagandagi yutug'i sifatida yutuqlarning matematik kutilishi olinadi, ya'ni

$$V = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j.$$

Teorema. Aralash strategiyalarda har bir chekli matritsali o'yin egar nuqtaga ega.

A o'yinchi tomonidan $X(x_1, x_2, ..., x_m)$ optimal strategiyaning qo'llanishi, unga B o'yinchining har qanday harakatida ham o'yinning bahosi V dan kam bo'lmagan yutuqni ta'minlash kerak. Shuning uchun quyidagi munosabat bajarilishi kerak:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{*} a_{ij} \geq V, \quad j = \overline{1,n} \tag{11.1}$$

Xuddi shunga o'xshash, B o'ynovchi uchun $Y^{*} = (y_1^{*}, y_2^{*}, ..., y_n^{*})$ optimal strategiyasi, A o'ynovchining har qanday strategiyasida V dan oshmaydigan yutqazishni ta'minlashi zarur, ya'ni

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^{*} \leq V, \quad i = \overline{1,m} \tag{11.2}$$

munosabat bajarilishi kerak.

Eng sodda matritsali o'yinda yutuqlar matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

bo'lib, matritsa egar nuqtaga ega bo'lmasa, $X = (x_1, x_2)$ va $Y = (y_1, y_2)$ aralash strategiyalarni va V – o'yinning bahosini topish uchun

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \qquad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

formulalardan foydalaniladi.

$m \times n$ tartibli matritsa bilan berilgan quyidagi o'yinni qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matritsa egar nuqtaga ega emas, deb hisoblaylik va shuning uchun o'yinning yechimini $X(x_1, x_2, ..., x_m)$, $Y(y_1, y_2, ..., y_n)$ – aralash strategiyalar shaklida izlaymiz. A – o'yinchining optimal strategiyasida (11.1) munosabat va B – o'yinchining optimal strategiyasida (11.2) munosabat bajariladi. Shuning uchun, quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi (A – o'ynovchining) optimal strategiyasini topish masalasini qo'yish mumkin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq V \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq V \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq V \end{cases} \quad (11.3)$$

O'yinning bahosi bo'lgan V kattalik noma'lum, lekin doim $V > 0$ deb hisoblash mumkin. Bunga, agar A matritsa elementlariga bir xil musbat son qo'shish sharti bilan erishish mumkin. (11.3) sistemani hamma cheklamalarini V ga bo'lib, quyidagi sistemani

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1 \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases} \quad (11.4)$$

hosil qilamiz. Bunda $t_1 = x_1 / V$, $t_2 = x_2 / V$, ..., $t_m = x_m / V$.

$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$ shartdan

$$t_1 + t_2 + ... + t_m = 1/V \quad (11.5)$$

tenglik kelib chiqadi.

O'yinning yechimi V ning qiymatini maksimallashtirish kerak. Demak, $Z = t_1 + t_2 + ... + t_m$ funksiya minimal qiymat olishi kerak. Shunday qilib, quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1 \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases}$$

$$t_i \geq 0, \ i = \overline{1,m} \quad (11.6)$$

$$Z = t_1 + t_2 + ... + t_m \rightarrow \min$$

Bu masalani yechib, t_i qiymatlar va $1/V$ kattalik topiladi hamda undan foydalanib $x_i = Vt_i$ qiymatlar topiladi. B o'ynovchining optimal strategiyasini topish uchun quyidagi shartlarni yozib olamiz:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \leq V \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \leq V \\ .... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \leq V \end{cases} \quad (11.7)$$

yoki tengsizliklarni V ga bo'lib,

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \le 1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \le 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \le 1 \end{cases} \tag{11.8}$$

sistemani hosil qilamiz. $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – noma'lumni shunday olish kerakki, bunda (11.8) shart bajarilib,

$$W = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1/V$$

funksiya maksimum qiymatga erishsin. Shunday qilib, matritsali o'yinning yechimini topish simmetrik bo'lgan ikkilangan ikkita chiziqli programmalashtirish masalasiga keltiriladi. Bu ikkilangan masalalardan birini yechib, ikkinchisining yechimini undan foydalanib hosil qilish mumkin.

3-misol. Quyidagi matritsa bilan berilgan o'yinning yechimini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Yechish. O'yinning optimal strategiyasini topish uchun quyidagi CHPMni hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 \ge 1 \\ 3t_1 + 4t_2 + 5t_3 \ge 1 \\ 4t_1 + 6t_2 + t_3 \ge 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 3t_3 \ge 1 \end{cases}$$

$$t_1 \ge 0, \ t_2 \ge 0, \ t_3 \ge 0$$

$$Z = t_1 + t_2 + t_3 \to \min$$

B o'ynovchining optimal strategiyasini topishning ikkilangan masalasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} 4u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 2u_4 \le 1 \\ 3u_1 + 4u_2 + 6u_3 + 5u_4 \le 1 \\ 2u_1 + 5u_2 + u_3 + 3u_4 \le 1 \end{cases}$$

$$u_i \ge 0, \ (i = \overline{1,4})$$

$$W = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \to \max$$

Bu ikkilangan masala yechimi $U = \left(\frac{3}{14}, 0, 0, \frac{1}{14}\right)$, $W_{\max} = \frac{1}{V} = \frac{2}{7}$ bo'ladi.

Demak, $V = \frac{7}{2}$, $Y = \left(\frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$. Dastlabki masalaning yechimi $T = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, 0\right)$ va $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ bo'ladi.

11.3. Noaniqlik va tavakkalchilk sharoitida qarorlar qabul qilish

Bu o'yinda tabiat va yechim qabul qiluvchi shaxs (YQQSH) qatnashadi. Tabiatda $T_1, T_2, ..., T_n$ holatlar mavjud bo'lib, ularga qarshi YQQSHda m ta $A_1, A_2, ..., A_m$ tadbirlar mavjud. Tabiatga qarshi o'yinni quyidagi matritsa ko'rinishida ifodalash mumkin:

A_i \ B_j	T_1	T_2	...	T_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Bu yerda a_{ij} tabiatning T_j holatida YQQSH A_i tadbirni amalga oshirganda uning ko'radigan foydasi yoki zararini ko'rsatadi. Agar a_{ij} foyda (yutuq) bo'lsa, bu matritsa "***yutuqlar matritsasi***" deyiladi. a_{ij} zarar bo'lganda esa bu matritsa "***to'lovlar matritsasi***" deyiladi.

Bu matritsa asosida YQQSH o'zining foydasini (zararini) maksimallashtiruvchi (minimallashtiruvchi) yo'lni (sof strategiyani) tanlaydi.

Bunday strategiyani tanlash uchun minimax, Vald, Laplas, Sevidj va Gurvis mezonlaridan foydalanish mumkin. Bu mezonlar bilan tanishamiz.

Laplas mezoni. Bu mezonda tabiatning barcha $T_1, T_2, ..., T_n$ holatlari teng ehtimollik bilan ro'y beradi degan fikr asos qilib olingan. Shu sababli tabiatning $T_1, T_2, ..., T_n$ holatlari $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$ ehtimollik bilan ro'y beradi. U holda agar YQQSH A_1 yo'lni tanlasa, uning yutug'i,

$$Q_1 = \frac{1}{n}a_{11} + \frac{1}{n}a_{12} + ... + \frac{1}{n}a_{1n}, \text{ yoki } Q_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar YQQSH A_2 yo'lni tanlasa, uning yutug'i,

$$Q_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$$

va hokazo. Agar YQQSH A_m yo'lni tanlasa, uning yutug'i, $Q_m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{mj}$.

YQQSH maximum yutuq beruvchi yo'lni, ya'ni

$$\max\left[\frac{1}{n}\sum_j a_{1j}, \frac{1}{n}\sum_j a_{2j}, ..., \frac{1}{n}\sum_j a_{nj}\right] = \max_i \frac{1}{n}\sum_j a_{ij},$$

yo'lni tanlaydi.

4-misol. Quyidagi tabiatga qarshi o'yinning optimal yechimini toping.

A_i \ B_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n$
A_1	7	14	14	24	$\frac{1}{4}(7+14+14+24)=14{,}75$
A_2	20	16	14	22	$\frac{1}{4}(20+16+14+22)=18$
A_3	9	8	10	23	$\frac{1}{4}(9+8+10+23)=12{,}5$
A_4	18	26	18	14	$\frac{1}{4}(18+26+18+14)=19$
p_j	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\max\limits_i \frac{1}{4}(a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in})=19$

Yechish. Laplas mezoniga ko'ra YQQSH A_4 strategiyani tanlasa, uning yutug'i eng katta, ya'ni 19 ga teng bo'ladi.

Bayes mezoni. Bu mezonda tabiatning har bir T_j holati ma'lum bir q_j ehtimollik bilan ro'y berishi aniqlangan bo'ladi. Bu holda YQQSH o'z yutug'ini maksimal qiluvchi yo'lni, ya'ni $\max\limits_i \sum\limits_j a_{ij}q_i$ beruvchi yo'lni tanlaydi.

5-misol. Quyidagi jadval ko'rinishida berilgan o'yinning yechimini Bayes mezoni yordamida toping.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \ldots + a_{in}q_n$
A_1	2	3	4	7	4,2
A_2	3	6	5	4	4,8
A_3	5	8	7	3	6,2
q_j	0.1	0.2	0.5	0.2	$\max_i(a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \ldots + a_{in}q_n)=6{,}2$

Yechish. Bu misolda optimal strategiya A_3. Bu yo'lni tanlaganda YQQSH 6,2 yutuqqa ega bo'ladi.

Vald mezoni. Bu mezon o'yinlar nazariyasidagi maximin-minimax usuliga o'xshaydi. Agar a_{ij} yutuq bo'lsa, u holda YQQSH $\max\limits_i(\min\limits_j a_{ij})$ shartni ta'minlovchi yo'lni tanlaydi. a_{ij} zarar bo'lsa, u $\min_i(\max_j a_{ij})$ shartni ta'minlovchi A_i yo'lni tanlaydi.

6-misol. (a_{ij} zarar). Jadvalda berilgan o'yinni Vald mezoni bilan yeching.

Yechish.

$$\min_j(\max_i a_{ij}) = \min(24,\ 22,\ 23,\ 26) = 22.$$

Demak, optimal strategiya A_2 va unga mos keluvchi yutug'i 22 bo'ladi.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$\max_j(a_{ij})$
A_1	7	11	14	24	24
A_2	20	16	14	22	22
A_3	9	8	10	23	23
A_4	18	26	18	14	26
					$\min_i\{\max_j(a_{ij})\} = 22$

Sevidj mezoni. Sevidj mezoni ham minimax prinsipiga asoslangan. Faqat bunda (a_{ij}) – to'lovlar yoki yutuqlar matritsasi o'rniga tavakkalchilik matritsasi deb ataluvchi (r_{ij}) matritsa ishlatiladi. Bu matritsa elementlari quyidagicha topiladi:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} = \beta_j - a_{ij},\ \ agar\ \ a_{ij} - \ yutug'\ bo'lsa, \tag{11.9}$$

$$r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij} = a_{ij} - \alpha_i,\ agar\ \ a_{ij} - \ yutqazuv\ bo'lsa. \tag{11.10}$$

Bu yerda $\beta_i - a_{ij}$ tabiatning T_j holatidagi YQQSHning maksimal yutug'i, (minimal yutqazuvi).

r_{ij} YQQSH "tabiat" ning T_j holatida to'la chora ko'rmagani oqibatida tavakkalchilikdan ko'rgan zarari yoki uning "afsuslanishi" sonini bildiradi.

7-misol. Quyidagi o'yinni Sevidj mezoni bilan yeching.

A_i \ T_j	T_1	T_2	$\max_j(a_{ij})$
A_1	110000	900	110000
A_2	100000	100000	100000
			$\min_i\{\max_j(a_{ij})\} = 100000$

Bu o'yinda YQQSH A_2 yo'lni tanlasa, uning minimal yutqazuvi 100000 bo'ladi. Lekin bu yerda tabiatning T_1 holati ham, T_2 holati ham bo'lishi mumkin.

Tabiatning aniq holati haqida tasavvurga ega bo'lish uchun tavakkalchilik matritsasini tuzamiz:

A_i \ T_j	T_1	T_2	$\max\limits_j (r_{ij})$
A_1	10000	0	10000
A_2	0	99100	99100
			$\min\limits_i\{\max\limits_j(r_{ij})\}=10000$

Demak, optimal strategiya A_1 ekan.

Gurvis mezoni. Bu mezon yasama mezondan iborat bo'lib, unga asosan a_{ij} miqdor daromadni bildirganda optimal strategiya sifatida quyidagi shartni qanoatlantiruvchi strategiya tanlanadi:

$$\max_i \left[\alpha \max_j a_{ij} + (1-\alpha)\ \min_j a_{ij}\right] \qquad \alpha \in [0,1]$$

a_{ij}–yutqazuvni bildirganda esa,

$$\min_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha)\ \max_j a_{ij}\right] \qquad \alpha \in [0,1]$$

natijani ta'minlovchi A strategiyani tanlaydi. Bu yerda α–yechim qabul qilish jarayonini subyektiv baholovchi parametr. Agar $\alpha=1$ bo'lsa, vaziyat og'ir va uni to'g'irlash uchun choralar ko'rish kerakligi talab qilinadi. $\alpha=0$ da vaziyat yaxshi (optimal) hech qanday chora ko'rmasa ham bo'ladi deb faraz qilinadi. α ni [0;1] oraliqdagi qiymati optimistik yoki pessimistik nazarga qarab belgilanadi.

8-misol. Tabiat bilan bo'lgan o'yin quyidagi to'lovlar matritsasi bilan berilgan bo'lsin. $\alpha=0,4$

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3
A_1	71	24	23
A_2	24	75	23
A_3	70	16	20
A_4	16	27	13

Bu o'yinga Gurvis mezonini qo'llab optimal strategiyani topamiz. Buning uchun quyidagi ko'rinishdagi jadval chizamiz va optimal strategiyani yuqoridagi shart bo'yicha tekshiramiz:

$$\gamma = \min_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right] \qquad \alpha \in [0,1].$$

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	$\min_j(a_{ij})$	$\max_j(a_{ij})$	γ
A_1	71	24	23	23	71	51,8
A_2	24	75	23	23	75	54,2
A_3	70	16	20	16	70	48,4
A_4	16	27	13	13	27	21,4
						$\min_i \gamma = 21,4$

Demak, a_{ij} – yutqazuv bo'lganda optimal strategiya A_4 dan iborat ekan. Agar a_{ij} – daromad bo'lsa, u holda yechim quyidagi ko'rinishda topiladi:

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	$\min_j(a_{ij})$	$\max_j(a_{ij})$	γ
A_1	71	24	23	23	71	42,2
A_2	24	75	23	23	75	43,2
A_3	70	16	20	16	70	37,6
A_4	16	27	13	13	27	18,6
	Optimal strategiya A_2					$\min_i \gamma = 43,2$

9-misol. Savdo korxonasida 500 birlik mavsumiy mahsulot sotilmay qolgan bo'lsin. Bu mahsulotning oldingi narxi 20 birlikni tashkil etgan bo'lsin. Endi savdo korxonasi oldida mahsulotning narxini tushirish masalasi turibdi. Mahsulot narxini necha foizga tushirganda uning ko'radigan zarari minimal bo'ladi?

Savdo korxonasi mahsulot narxini 20% (A_1 yo'l), 30% (A_2 yo'l), 40% (A_3 yo'l), 50% (A_4 yo'l) tushirishga mo'ljallaydi. Bu yo'llarni YQQSHning strategiyalari deb qaraymiz. "Tabiat"ning ikkita yo'li bor:

1) talabning kam egiluvchan bo'lishligi (T_1 yo'l).

2) talabning ko'p egiluvchanligi (T_2 yo'l).

Ana shularni nazarga olib quyidagi jadvallarni tuzamiz:

YQQSH strategiya	**Narxning tushishi (%)**	**Eski bahosi**	**Yangi bahosi**	**Sotiladigan tovar miqdori**	**Ko'riladigan zarar**
A_1	20	20	16	100	4400

A_2	30	20	14	150	3900
A_3	40	20	12	220	3360
A_4	50	20	10	230	3700
	4400=500·12-16·100, 3360=500·12-12·220,			3900=500·12-14·150 3700=500·12-10·230	

Bu yerda bir birlik mahsulotni savdo korxonasiga keltirish uchun sarf qilinadigan xarajat 12 birlik, deb qabul qilingan.

Xuddi shuningdek, jadval talab egiluvchanligi kuchli bo'lgan hol uchun tuziladi.

YQQSH stratgiya	Narxning tushishi (%)	Eski bahosi	Yangi bahosi	Sotiladigan tovar miqdori	Ko'riladigan zarar
A_1	20	20	16	150	3600
A_2	30	20	14	350	1100
A_3	40	20	12	400	1200
A_4	50	20	10	450	1500

I va II jadvaldan foydalanib to'lovlar matritsasini tuzamiz va yuqoridagi usullarni qo'llab yechamiz:

A_i \ T_j	T_1	T_2	$\max\limits_{i}(a_{ij})$
A_1	4400	3600	4400
A_2	3900	1100	3900
A_3	3360	1200	3360
A_4	3700	1500	3700
			$\min\limits_{i}\max\limits_{j} a_{ij} = 3360$

Demak, savdo korxonasi mahsulot narxini 40% ga tushirganda zarar minimal bo'ladi, ya'ni 3360 ga teng bo'ladi.

Masalani Laplas mezoniga asosan yechamiz:

A_i \ T_j	T_1	T_2	$a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \ldots + a_{in}q_n$
A_1	4400	3600	4000
A_2	3900	1100	2500

A_3	3360	1200	2280
A_4	3700	1500	2600
q	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\min_i(a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \ldots + a_{in}q_n) = 2280$

Bu mezon bo'yicha ham narx 40% tushirilsa zarar 2280 bo'ladi.

Sevidj mezonini qo'llash uchun (r_{ij}) matritsa tuzamiz va optimal strategiyani topamiz.

A_i \ T_j	T_1	T_2	$\max\limits_i (a_{ij})$
A_1	1100	2500	2500
A_2	600	0	600
A_3	0	100	100
A_4	400	400	400
			$\min\limits_i \max\limits_j r_{ij} = 100$

Bu mezonga ko'ra ham narx 40% ga tushirilishi ma'qul.

11-bobga doir savollar

1. O'yinlar nazariyasining asoschisi kim?
2. O'yinning ta'rifini bering.
3. O'yin strategiyasini tushuntiring.
4. Sof strategiya deganda nimani tushunasiz?
5. Minimax usulini tushuntiring.
6. Tabiat bilan o'yin deganda qanday o'yinlarni tushunish mumkin?
7. Tabiat bilan o'yin raqiblar orasidagi o'yindan qanday farq qiladi?
8. Vald mezoni bo'yicha optimal strategiya qanday topiladi?
9. Laplas mezonini ta'riflang.
10. Sevidj mezoni bo'yicha optimal strategiya qanday topiladi?
11. Gurvis mezoni qanday mezon?

11-bobga doir misol va masalalar

Quyidagi matritsali o`yinlarni min(max) va max(min) usullari bilan yeching::

1. $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 2. $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

6. Berilgan jadvaldagi ma'lumotlar asosida yutug'larni maksimallashtiruvchi strategiyani toping.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3
A_1	15	17	20
A_2	25	27	23
P	0,2	0,7	0,1

7. Berilgan daromadlar matritsasidan foydalanib, YQQSH ning optimal strategiyasini Laplas mezoni asosida toping.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	17	21	24	34
A_2	30	26	24	32
A_3	19	18	20	33
A_4	28	36	28	24

8. Tabiat bilan o'yin quyidagi to'lovlar matritsasi orqali berilgan:

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3
A_1	61	14	13
A_2	14	65	13
A_3	60	6	10

A_4	6	17	3

Vald, Sevidj va Gurvis mezonlari asosida optimal strategiyani toping.

9. Deylik, fermer xo'jaligi paxta yetishtirishga ixtisoslashgan bo'lsin. Paxta hosildorligiga "tabiat" ning 4 xil holati ta'sir ko'rsatishi mumkin bo'lsin. Tabiatning bu holatlariga qarshi fermer 3 xil chora tadbirlarni ko'rishi oqibatida turli miqdorda daromad olishi mumkin. Quyida daromadlar matritsasi keltirilgan:

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	1	2	3	6
A_2	2	5	4	3
A_3	4	7	6	2
p	0,3	0,3	0,2	0,2

Bayes mezoniga asosan maksimal daromadni ta'minlovchi optimal strategiyani toping.

Tayanch so'z va iboralar

O'yin, konflikt holat, nol summali o'yin, matritsali o'yin, strategiya, optimal strategiya, chekli va cheksiz o'yin, to'lovlar va yutuqlar matritsasi, o'yinning quyi va yuqori bahosi, maximin va minimax strategiyalar, egar nuqta, o'yinning yechimi, aralash va sof stategiyalar, matritsa, chiziqli programmalashtirish, strategiya, optimal strategiya, tabiat bilan o'yin, yechim qabul qiluvchi shaxs (YQQSH), yechim qabul qilish mezonlari, "tabiat"ga qarshi o'yin, yechim qabul qiluvchi shaxs (YQQSH), yechim qabul qilish mezonlari.

Adabiyotlar

1. Abdalimov R.R., Urazboyeva I.K. Oliy matematika. O'quv qo'llanma. T.:"Aloqachi", 2005.
2. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ. 1-қисм.-Т.: "Ўқитувчи", 1994. 416 б.
3. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ. 2-қисм.-Т.: "Ўқитувчи", 1995. 436 б.
4. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков Д.И. Лекции по математическому анализу. М.: "Высшая школа", 1999, 695 стр.
5. Ахтямов А. М. Математический анализ для социально – экономических специальностей. / Учебное пособие в 3-х частях. Уфа: Изд-во Башкирск. Ун-та, 2001. Ч. 2. 199 с. Ч. 3. 194 стр.
6. Бабаджанов Ш.Ш. Высшая математика. Часть I. Учебное пособие. Т.: « IQTISOD - MOLIYA », 2008. 336 стр.
7. Бабаджанов Ш.Ш. Высшая математика. Часть II. Учебное пособие. Т.: «АЛФА - ПРИНТ», 2008. 288 стр..
8. Боярчук А.К., Головач Г.П. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
9. Высшая математика для экономистов. Учебник. 2-е изд. / Под редакцией профессора Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2002. 471 стр.
10. Gaziyev A., Israilov I., Yaxshibayev M. "Matematik analizdan misol va masalalar" T.: "Yangi asr avlodi" 2006 y. 304 b.
11. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть I, II. Учебное пособие. М.: «Высшая школа», 2007.
12. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: «Издательство АСТ», 2003,-558 ст.
13. Jurayev T.J., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari. Darslik. T. O'zbekiston, 1999, 290 bet.
14. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. 2-е изд. М.: Дело и сервис. 1999.
15. Karimov M., Abdukarimov R. Oliy matematika. O'quv qo'lanma. T.: «IQTISOD - MOLIYA», 2009. – 204 b.
16. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов. Теория, примеры, задачи. М.: «Экзамен», 2005.
17. Коршунова Н. И., Плясунов В.С. Математика в экономике. М.: Вита-Пресс, 1996. 368 стр.
18. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. 4-е изд. М.: Дело, 2003.
19. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. 4-е изд. М.: Дело, 2003.
20. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. 6-е изд. М.: Дело, 2008. 720 стр.
21. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. 2-е изд. СПб., 2005.
22. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Высшая математика для экономического бакалавриата. Учебник. М.: Дело, 2005. – 576 с.
23. Общий курс высшей математики для экономистов. Учебник. / Под общей редакцией В.И. Ермакова. ИНФРА – М, 2007. – 656 стр.

24. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. I. М.: Интеграл-Пресс, 2002,-416 ст.
25. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. II. М.: Интеграл-Пресс, 2002,-544 ст.
26. Практикум по высшей математики для экономистов: Учебное пособие для вузов. Под редакции проф. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 320 стр
27. Rayemov M., Xujaniyozova G. "Oliy matematika" fani bo'yicha mustaqil ta'lim texnologiyasi. O'quv-uslubiy qo'llanma. Toshkent, "Ekstremum press" nashriyoti, 2011.-142 bet.
28. Raximov D.G., Roishev A.R. Oily matematika. I qism. O'quv qo'llanma. T.: «IQTISOD - MOLIYA», 2008. 120 b.
29. Сборник задач по высшей математике / К.Н.Лунгу, Д.Т.Письменный, С.Н.Федин, Ю.А. Шевченко. – 7-е изд. - М.:Айрис-пресс. 2008. 576 с.
30. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. Ч.1. М.: Финансы и статистика, 1998.
31. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике. Ч.2. М.: Финансы и статистика, 1999.
32. Сборник задач по курсу математики / Под ред. А.С. Солодовникова, А.В.Браилова. М.: Финансовая академия. 2001. 508 с.
33. Turdaxunova S. Isayeva G. Oliy matematika. Masalalar to'plami. T.: «IQTISOD - MOLIYA», 2015. – 204 bet.
34. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2000.
35. M. Hoy, J.Livernois et.al. Mathematics for Economics. The MIT Press, London& Cambridge, 2011.
36. Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. Taylor & Francis group, London and New York 2003.
37. Vassilis C. Mavron and Timothy N. Phillips. Elements of Mathematics for Economics and Finance. Springer, London, 2007.
38. M.Harrison and P.Waldron Mathematics for economics and finance. London and New York 2011 y.

1-ilova

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiya qiymatlarining jadvali

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,11804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127

1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0986	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003

2-ilova

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ funksiya qiymatlarining jadvali

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345

0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582

0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,68	0,4963	3,80	0,499828
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968

1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		

3-ilova

$t_\gamma = t(\gamma; n)$ ning qiymatlari jadvali

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,927	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291

4-ilova

$q_{\gamma} = q(\gamma;n)$ ning qiymatlari jadvali

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,28
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185

5-ilova

χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari

Erkinlik darajalari soni k	Muhimlilik darajasi α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41

18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,9	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

6-ilova

Styudent taqsimotining kritik nuqtalari

Erkinlik darajalari soni k	Muhimlilik darajasi α (ikki tomonli kiritik soha)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96

18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Muhimlilik darajasi α (bir tomonli kiritik soha)					

7-ilova

F Fisher-Snedekor taqsimotining krirtik nuqtalari

(k_1-dispersiysi katta tasodifiy miqdornnig erkinlik darajalari soni,

k_2-dispersiyasi kichik tasodifiy miqdornnig erkinlik darajalari soni)

Muhimlilik darajasi $\alpha = 0,01$												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96

14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Muhimlilik darajasi $\alpha = 0,05$												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	1937	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

MUNDARIJA

A.R. XASHIMOV
SH.SH. BABADJANOV
G.S. XUJANIYOZOVA

IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA

Darslik

Muharrir **N. Rustamova**
Badiiy muharrir **K. Boyxo'jayev**
Kompyuterda sahifalovchi **K. Boyxo'jayev**

Nashr. lits. AI № 305. 22.06.2017.
Bosishga ruxsat 18.10.2019-yilda berildi.
Bichimi 60x84/16. Ofset qog'ozi. «New Times Roman» garniturasi.
Shartli b.t. 32,9. Nashr hisob t. 34,2.
Adadi 100 dona. 38-buyurtma.

“IQTISOD-MOLIYA” nashriyoti.
100000, Toshkent, Amir Temur, 60·^·.

“DAVR MATBUOT SAVDO” MChJ
bosmaxonasida chop etildi.
100198, Toshkent, Qoʻyliq, 4-mavze, 46.