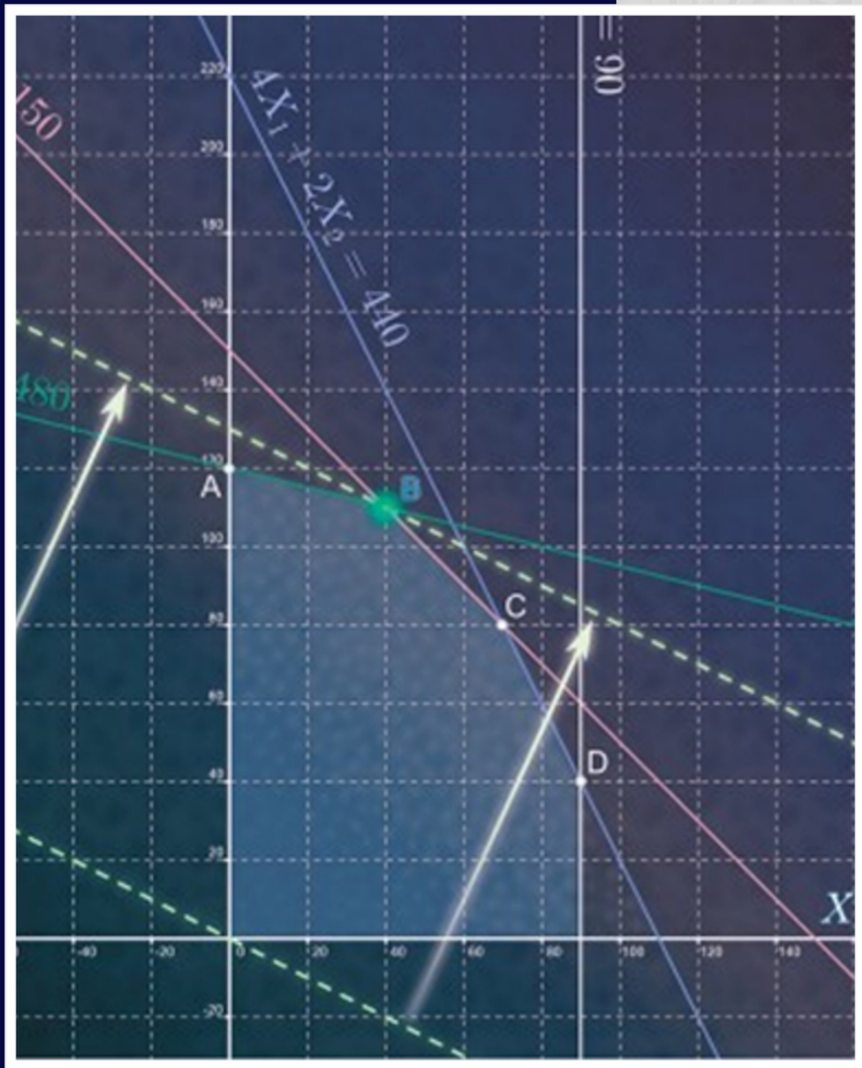
Optimal qarorlar qabul qilish usullari

CHIZIQLI DASTURLASH

G.Raimova

U.Dalaboev



Toshkent

2023

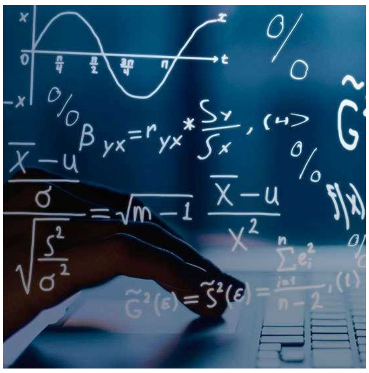
O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

G.Raimova, U.Dalaboev

OPTIMAL QARORLAR QABUL QILISH USULLARI.

Chiziqli dasturlash

Iqtisodiyot ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik



TOSHKENT

2023

УДК 330.42: 519.852
ББК 65В6: 22.18я7

Optimal qarorlar qabul qilish usullari. Chiziqli dasturlash: Darslik.
G. Raimova, U. Dalaboev. -T.: 2022.-240 b.

Taqrizchilar:

Sh.Shoraxmetov, Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, «Oliy matematika» kafedrasi professori, fizika-matematika fanlari doktori

M.Bakoev, Jahon iqtisodiyoti va diplomatiya universiteti, «Tizimli tahlil va matematik modellashtirish» kafedrasi professori, fizika-matematika fanlari doktori

Mazkur darslikda chiziqli dasturlash yordamida iqtisodiyotdagi turli vaziyatlarning matematik modellarini qurish masalalari hamda qo'yilgan masalalarning yechimini topish usullari bayon etilgan. Nazariy materialni taqdim etish ko'plab amaliy va hayotiy masalalar tahlili bilan birga keltiriladi. Mustaqil yechish uchun turli iqtisodiy muammolar asosida keyslar berilgan. Darslik iqtisodiyot yo'nalishida tahsil olayotgan talabalar, shuningdek, iqtisodiyot yo'nalishi matematik modellar bilan bog'liq fan o'qituvchilari uchun mo'ljallangan.

Jahon iqtisodiyoti va diplomatiya universiteti o'quv uslubiy kengashi tomonidan nashrga tavsiya etilgan (*14 oktabr 2022 yil, 3 sonli bayonnoma*).

O'QUV ADABIYOTINING NASHR RUXSATNOMASI Jahon iqtisodiyoti va diplomatiya universiteti rektorining 2022-yil 16-noyabrdagi 99-UM-sonli buyrug'iga asosan berilgan (qayd qilish nomeri XIM 000018)

Mundarija

Kirish

Ushbu kitob **«Iqtisodda miqdoriy usullar»** nomli turkumning birinchi kitobi bo'lib, amaliy iqtisodiy masalalar yechishda juda keng qo'llaniladigan «Chiziqli dasturlash» masalalariba bag'ishlangan. Unda ushbu sohaga oid asosiy mavzular ko'rib chiqilgan bo'lib, ular quyidagilar:

1. chiziqli dasturlash va uning tarixi haqida umumiy ma'lumot;
2. chiziqli dasturlash masalasi yordamida yechiladigan iqtisodiy masalalarning matematik modelini aniqlash;
3. chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish va yechimning turgunlik tahlilini amalga oshirish;
4. chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish va yechimning turgunlik tahlilini amalga oshirish;
5. ikkiyoqlama masalalar va ularning iqtisodiy mohiyati;
6. zamonaviy kompyuter dasturi yordamida chiziqli dasturlash masalasini yechish va olingan natijalar asosida qarorlar qabul qilish.

Mavzularni bayon qilish jarayonida masalalarning amaliy iqtisodiy jihatlariga katta e'tibor qaratilgan. Amaliy tadbiqlar uchun tanlangan masalalar iqtisodiy va ijtimoiy hayotimizning turli sohalaridan olingan. Ishlab chiqarish masalalari («Chinor» mebel sexi, «Fazilat» tikuv kombinati uchun optimal ishlab chiqarish rejasini tuzish masalalari), qishloq xo'jaligiga oid «Chorva mollari uchun optimal ratsion tuzish» masalasi, moliya sohasiga oid «Investitsiya portfelini shakllantirish» masalasi, ijtimoiy-siyosiy sohaga oid «Saylovoldi targ'ibot kompaniyasini tashkil etish» masalalari shular jumlasidandir.

Har bir bo'lim yuzasidan nazariy ma'lumotlar ko'rgazmali va qulay ravishda berilgan, amaliy masalalar tahlili bilan ochib ko'rsatilgan va olingan yechimlarning iqtisodiy talqini berilgan. Yangi bilimlarni chuqurroq o'zlashtirish maqsadida barcha tushuntirishlar rasm va diagrammalar bilan boyitilgan. Har bir yangi mavzu boyicha mustaqil ishlash uchun masala va topshiriqlar hamda ularning javoblari keltirilgan.

Ko'rib chiqilgan chiziqli dasturlash masalasining joiz sohasini qurish, masalani grafik usulda yechish va yechimning turg'unlik tahlilini amalga oshirish, masalani simpleks usulda yechish va yechimning turg'unlik tahlilini amalga oshirish; o'zaro ikkiyoqlama masala tuzish kabi vazifalarni maxsus qarorlar qabul qilishga ko'maklashuvchi zamonaviy kompyuter dasturlaridan biri bo'lgan **«POM-QM for Windows»** dasturi yordamida yechishga alohida bo'lim ajratilgan.

Olingan bilimlarni mustahkamlash maqsadida bir qator amaliy masalar **«vaziyatlar tahlili» (Case Study)** ko'rinishida berilgan. Kitob yakunida barcha ko'rib chiqilgan mavzularni qamrab olgan va berilgan namuna asosida tahlil qilinishi lozim bo'lgan turli variantdan iborat topshiriqlar to'plami berilgan.

Hozirgi vaqtda fan va ishlab chiqarishning o'sishi shu darajaga yetdiki, vaziyat unda jiddiy masalalarni yechish bo'rasida murakkab matematik hisoblash ishlarini amalga oshirishni taqozo etadi. Bu holat bir tomondan yetuk mutaxassislarni tayyorlash borasida amaliy matematikaga oid fanlarning o'qitish mazmunini kengaytirishga olib keladi. Ikkinchi tomondan matematik hisoblash ishlarining kengayishi va murakkablashuvi va zamonaviy hisoblash texnologiyalarining jadal sur'atlar bilan rivojlanishi matematik hisoblashlarning avtomatlashgan tizimlarini yaratishga olib keladi. Jadal sur'atlar bilan o'sayotgan bu ikki jarayon yetuk mutaxassislarni tayyorlash tizimida kompyuter sistemalaridan oqilona foydalanishni taqozo qiladi.

Mazkur kitob «Optimal qarorlar qabul qilish», «Iqtisodda miqdoriy usullar», «Matematik modellashtirish» kabi kurslar bo'yicha taxsil olayotgan talaba, tinglovchi, magistrlarga va shuningdek sohaga qiziqish bildirgan yuqori sinf o'quvchilariga hamda boshqaruv kadrlari uchun tavsiya etiladi.

«Iqtisodda matematik modellar» nomli turkumning rejalashtirilayotgan nashrlari:

- Chiziqli dasturlash masalalari
- Taqsimlash masalalari
- Tarmoq modellari
- Loyihalarni rejalashtirish modellari
- Noaniqlik va tavakkal sharoitida qarorlar qabul qilish
- Ziddiyatli sharoitda qarorlar qabul qilish (o'yinlar nazariyasi)
- Zaxiralarni boshqarish modellari
- Ko'p mezonli optimallashtirish modellari
- Qarorlar samaradorligini baholash modellari

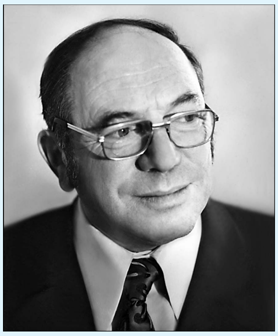
---

1 Chiziqli dasturlash usuli tarixidan

Ko'pgina boshqaruv qarorlari tashkilot va korxonalarning moddiy, iqtisodiy hamda ishchi-xizmatchi resurslarini samarali taqsimlash masalalarini yechishni taqozo etadi. Tashkilot va korxonalar ishlab chiqarish, savdo yoki xizmat ko'rsatish sohasida faoliyat ko'rsatishidan qat'i nazar, quyidagi masalalar doimiy yechim talab qiladigan masalalar qatoridan o'rin oladi:

- ishlab chiqarishning optimal rejasini aniqlash;
- sotish va sotib olish optimal rejalarini aniqlash;
- transport tashish optimal rejasini tuzish;
- zaxiralarni optimal boshqarish (nimadan qachon va qancha sotib olish yoki sotish kerak?);
- loyihalarni optimal rejalashtirish va boshqarish;
- ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlar ishini optimal tashkillashtirish hamda samaradorligini baholash va ko'pgina shu kabi masalalar.

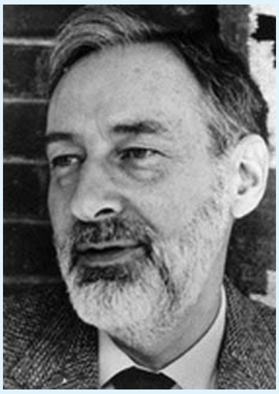
Chiziqli dasturlash usulining asoschisi deb L.V.Kantorovich tan olingan. Uning 1939 yilda chop etilgan «Ishlab chiqarishni tashkil etish va rejalashtirish» risolasida chiziqli dasturlash usulining dastlabki tushunchalari keltirilgan. L.V. Kantorovich tomonidan ilgari surilgan g'oya o'z vaqtida e'tiborsiz qolgan.



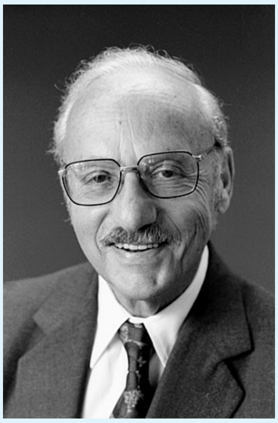
Leonid Vitalevich Kantorovich
(1912-1986)
sovet matematigi va iqtisodchisi,
chiziqli dasturlash asoschisi.
1975-yilda iqtisod bo'yicha
«Resurslarni optimal taqsimlash» nazariyasiga qo'shgan
hissasi uchun Nobel mukofotini olgan.

Ikkinchi jahon urushidan so'ng amerikalik olim T.Ch.Kupmans chiziqli dasturlash masalalari va ularning imkoniyatlarini fan va amaliyot uchun qayta kashf etdi.

Tyalling Charlz Kupmans
(1910-1985)
(Tjalling Charles Koopmans)
amerikalik iqtisodchi va matematik,
1975-yilda iqtisod bo'yicha
«Resurslarni optimal taqsimlash nazariyasiga qo'shgan hissasi uchun» Nobel mukofotini olgan.



Yana bir amerikalik olim D.Dantsig 1947-yilda chiziqli dasturlash masalalarini yechishning effektiv usuli - simpleks usulini ishlab chiqdi. «Chiziqli dasturlash» termini 1940-yillarning o'rtalarida aynan shu olim tomonidan muomalaga kiritilgan bo'lib, «dasturlash» so'zi «rejalashtirish» ma'nosida tushunilishi kerak (inglizcha «programming» so'zining yana bir ma'nosi).



Djordj Bernard Dantsig
(1914-2005)
(George Bernard Dantzig)
amerikalik olim,
simpleks usuli algoritmini ishlab chiqqan

1950-yillardan keyin elektron hisoblash mashinalarining dunyoga kelishi chiziqli dasturlash usulining tez sur'atlar bilan rivojlanishiga zamin yaratdi. Shu asnoda amaliy iqtisodiy masalalar tadqiq etilishi yangi fan tarmog'i bo'lmish chiziqli dasturlash yaratilishi va iqtisodda matematik usullar rivojlanishida yangi davr boshlanishiga olib keldi.

Chiziqli dasturlash – taqsimlash masalalari yechish vositasi.

Moddiy, ishchi yoki vaqt resurslaridan unumli foydalanish boshqaruv qarorlari qabul qilishda muhim ahamiyatga ega. Resurslar - mashina, uskuna, xom ashyo, ishchi kuchi, vaqt, mablag' yoki ombor imkoniyatlarini oqilona taqsimlash korxona yoxud tashkilot iqtisodiy samaradorlik ko'rsatkichlari yuqori bo'lishining garovidir.

Chiziqli dasturlash qarorlar qabul qilishda keng qo'llaniladigan matematik modellashtirish vositasi bo'lib, u boshqaruvchilarga resurslarni rejalashtirish va taqsimlash masalalarini yechishga yordam beradi.

Ko'p argumentli chiziqli funksiya argumentlarining chiziqli chegaralar ostidagi ekstremumini (maksimum yoki minimumni) topishga **chiziqli dasturlash** *deyiladi.*

Misol sifatida quyidagi ikki argumentli chiziqli funksiyaning

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$$

quyidagi chiziqli tengsizliklarni qanoatlantiruvchi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 127 \\ 7x_1 - x_2 \leq 83 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0.$$

maksimal qiymatini toping. Keltirilgan misol chiziqli dasturlashtirish masalasidir.

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$ funksiyaga *maqsad funksiyasi* deyiladi. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ tengsizliklarga *nomanfiylik shartlari* deyiladi. Chiziqli tengsizliklar sistemasiga esa, *chiziqli dasturlash shartlari* deyiladi.

Chiziqli dasturlash masalasi ko'pgina iqtisodiy masalalarning matematik modelidan iboratdir.

Mazkur bo'lim chiziqli dasturlash usuli mohiyati, imkoniyati va yechish usullariga bag'ishlangan bo'lib, bo'lim yakunida esa chiziqli dasturlash masalalarini yechishga keltiriladigan ba'zi amaliy masalalar tahlili va matematik modellari haqida gap boradi.

2 Chiziqli dasturlash usulining qo'llanilish doirasi

Ushbu bobda aniqlik sharoitida optimal boshqaruv strategiyasini aniqlash imkonini beruvchi miqdoriy usul va modellar nazariyasi hamda qo'llanishiga doir misollar ko'rib chiqilgan. Aniqlik sharoiti deganda, sistema boshqaruvining barcha parametr va shartlari aniq bo'lgan, ya'ni, hech qanday tasodifiylik ta'siri bo'lmagan hol tushuniladi. Bunday masalalarda chiziqli optimizatsiyalash usuli qo'llanilib, bunda ishlab chiqarishning optimal rejasini tuzish, savdo, xarid yoki tashish optimal hajmini aniqlash, optimal moliyaviy rejalashtirish va shu kabi maqsadlar ko'zlanadi. Rejalashtirish boshqaruvning asosiy funksiyalaridan biridir.

Hozirda chiziqli dasturlash masalalari ishlab chiqarish, qishloq xo'jaligi, moliyaviy, harbiy, marketing masalalarini yechishda keng qo'llanilmoqda. Qo'llanilish doirasi juda keng bo'lishi bilan bir qatorda ushbu masalalarning umumiy jihatlari bor.

Muammoni yechishdan maqsad – biror bir ko'rsatkichni maksimallashtirish yoki minimallashtirish

Barcha chiziqli dasturlash masalalarining asosida biror miqdoriy ko'rsatkichni maksimallashtirish yoki minimallashtirish yotadi. Bu miqdoriy ko'rsatkich ***maqsad funksiyasi*** deb ataladi. Chiziqli dasturlash masalasida maqsad aniq qo'yilgan va maqsad funksiya matematik ifodalangan bo'lishi kerak.

Maqsad funksiya o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lib, optimallashtirishdan maqsad maqsad funksiyasining eng katta (yoki kichik) qiymatiga erishuvchi o'zgaruvchilarning qiymatlarini topish.

Ishlab chiqarish masalalarida ishlab chiqaruvchining oldiga qo'ygan maqsadi foyda yoki daromadni oshirish, ishlab chiqarish xarajatlarini kamaytirish bo'lishi mumkin. Bunda maqsad funksiya foyda, daromad yoki ishlab chiqarish xarajatlari bo'lishi mumkin. Dehqonchilik masalalarida yer, suv, o'g'it yoki texnika zaxiralaridan unumli foydalanish evaziga yuqori hosildorlik ko'rsatkichlari(maqsad funksiya)ga erishishni maqsad qilib olish mumkin. Xizmat ko'rsatish sohasida, misol tariqasida, transport vositalari taqsimoti masalalarini ko'rish mumkin. Bunda maqsad funksiyasi sifatida transport xarajatlari (minimizatsiya masalasi), tashishdan tushadigan umumiy foyda (maksimizatsiya masalasi) yoki transport vositasini kutish vaqti (minimizatsiya masalasi) kabilarni ko'rish mumkin. Moliya sohasidan misol: bank mablag'larini shunday tarzda taqsimlash kerakki, investitsiyalardan tushadigan daromad (maqsad funksiya) maksimal bo'lsin.

Optimallashtirish masalasi ma'lum cheklanishlar doirasida amalga oshiriladi

Ixtiyoriy optimallashtirish masalasi o'zgaruvchilarga qo'yilgan ma'lum cheklanishlar doirasida amalga oshiriladi. Bu cheklanishlar quyidagi omillar bilan belgilangan bo'lishi mumkin:

- ikkilamchi maqsadlar (misol uchun, investitsion portfel riskining minimizatsiyasi masalasini yechganda daromad olish ko'zda tutiladi);
- imkoniyatdagi moddiy, ishchi, texnik yoki vaqt resurslarining cheklanganligi;
- faoliyat olib borishda belgilangan qoidalar (bozor cheklovlari, normativ aktlar, qaror qabul qiluvchi subyekt talablari va boshqalar)

Yechimlar orasidan tanlash imkoniyati bo'lishi kerak

Masala o'zgaruvchilarining masala cheklanishlarini (shartlarini) qanoatlantiruvchi qiymatlarning ixtiyoriy to'plamiga ***mumkin bo'lgan yechim*** deb ataladi. Qaror qabul qiluvchi shaxs mumkin bo'lgan yechimlar orasidan tanlash imkoniga ega bo'lishi kerak.

Misol uchun, korxona uch xil mahsulot ishlab chiqarish imkoniyatiga ega. Korxona xom ashyo, ishchi, vaqt resurslaridan kelib chiqqan holda mahsulotning har biridan turli miqdorda ishlab chiqarishi mumkin. Qaysi mahsulotdan qancha ishlab chiqarish boshqaruvchining qo'lida.

Barcha mumkin bo'lgan yechimlar orasidan maqsad funksiyasi eng katta yoki eng kichik qiymatlarga erishuvchi yechimga ***optimal yechim*** deb ataladi. Aksariyat hollarda optimal yechim bitta bo'ladi, ammo hayotda optimal yechimlar soni ko'p bo'lgan modellar ham uchraydi.

Maqsad funksiyasi va cheklanishlar – chiziqli ifodalardir

Chiziqli dasturlashda maqsad funksiyasi masala o'zgaruvchilarga chiziqli bog'liq hamda cheklanishlar chiziqli tenglama va tengsizliklar bilan ifodalanishi kerak.

Chiziqli dasturlash modellarida noma'lum o'zgaruvchilardan tashqari o'zgarmas miqdorlar ham qatnashadi. Bunday miqdorlarga ***model parametrlari*** deb ataladi. Ishlab chiqarish masalalarida mahsulotlarning narxi, xom ashyo zaxirasi - bular model parametrlari, mahsulotlarning ishlab chiqarish hajmlari bu modelning no'malum o'zgaruvchilari. Model parametrlar maqsad funksiyasining ko'rinishini va qiymatini aniqlaydi, optimal yechimga ta'sir qiladi. Model parametrlarning o'zgarishi optimal yechimning o'zgarishiga olib keladi. Ammo chiziqli dasturlash masalasini yechish jarayonida model parametrlari o'zgarmas deb olinadi. Chiziqli dasturlash usuli masalaning optimal yechimini topish bilan bir qatorda optimal yechimning model parametrlari o'zgarishi bilan qanday o'zgarishi haqida ma'lumot beradi.

Chiziqli dasturlash masalasini yechish uchun masalani formallashtirish, ya'ni, masalaning matematik modelini tuzib olish zarur. Masalaning matematik modelini tuzish quyidagi qadamlarni o'z ichiga oladi:

- mavjud muammoni aniqlab olish;
- maqsadni aniqlab olish;
- masala doirasidagi cheklanishlarni aniqlab olish;
- masala o'zgaruvchilarini aniqlab olish;
- masala parametrlarini aniqlab olish;
- masala o'zgaruvchilaridan foydalanilgan holda maqsad funksiyasi va cheklanishlarni matematik ifodalash.

3 Iqtisodiy masalalarning matematik modelini qurish

Chiziqli dasturlash masalasi ko'pgina iqtisodiy masalalarning matematik modelidan iboratdir. Iqtisodiy masalalarni chiziqli dasturlash masalasi ko'rinishida ifodalashning asosi masala parametrlarini to'g'ri tanlash va ular orqali maqsadni chiziqli funksiya orqali ifodalash, chegaralarni esa, chiziqli tengsizlik va tengliklar orqali ifodalashdan iboratdir.

Ushbu bo'limda ayrim amaliy iqtisodiy masalalarni ko'rib chiqamiz va bu masalalarni yechish uchun matematik modellarini yozib olamiz.

3.1 Ishlab chiqarishni optimal rejalashtirish masalasi

Muammoning qo‘yilishi. Quyida ishlab chiqarishning optimal rejalashtirish haqidagi amaliy masala uchun uning matematik modelini tuzish va hosil bo‘lgan chiziqli dasturlash masalasini maxsus dasturda yechish haqida gap boradi.

«Chinor» mebel sexi uchun ishlab chiqarishni optimal rejalashtirish masalasi

«Chinor» mebel sexi:

Sex ikki turdagi mahsulot ishlab chiqaradi: shkaf va televizor uchun tumba. Bir dona shkaf yasash uchun 3,5 m. standart DSP, 1 m. standart shisha va bir ishchining bir kunlik mehnati sarflanar ekan. Bitta tumba uchun 1 m. DSP, 2 m. shisha va bir ishchining bir kunlik mehnati sarflanar ekan. Bir dona shkafni sotishdan tushadigan foyda 200 $, tumbadan esa – 100 $ ekan. Sexning moddiy va mehnat resurslari cheklangan bo‘lib, sexda jami 150 ta ishchi ishlar ekan. DSP kunlik zaxirasi 350 m., shishaning zaxirasi esa 240 m.ni tashkil etar ekan. Sex maksimal foyda olish uchun bir kunda qancha shkaf va tumba ishlab chiqarishi kerak?

Masalaning matematik modelini tuzish uchun quyidagilarni aniqlab olamiz:

Boshqaruv muammosi	Ishlab chiqarish jarayonida korxona xom ashyo zaxirasidan oqilona foydalanish.
Maqsad	Zaxira imkoniyatlaridan kelib chiqqan holda «Chinor» mebel sexi foydasini maksimallashtirish.
Cheklanishlar	Moddiy va mehnat resurslariga bo‘lgan cheklanishlar: DSP kunlik zaxirasi 350 m., shishaning zaxirasi esa 240 m.ga teng, sexda jami 150 ta ishchi ishlaydi.
Masala o‘zgaruvchilari	Korxonada kundalik ishlab chiqarish lozim bo‘lgan shkaflar va tumbalar soni.
Masala parametrlari	bir dona shkaf va bir dona tumba yasash uchun ketadigan moddiy va mehnat resurslari, bir dona shkaf va bir dona tumba sotishdan tushadigan foyda miqdori. Masala parametrlari 1-jadvalda keltirilgan

Resurslar	shkaf	tumba	zahira hajmi
DSP	3,5 m.	1,0 m.	350 m.
Shisha	1,0 m.	2,0 m.	240 m.
Ishchi	1 ta	1 ta	150 ta
Foyda	**200**	**100**	

Jadval 1: Masala parametrlari.

Masalaning matematik modeli.

Belgilashlar kiritish

Masalaning matematik modelini yozishdan avval ayrim belgilashlarni kiritib olamiz. Sexning kundalik ishlab chiqaradigan shkaflar soni X va tumbalar soni Y bo'lsin. U holda sexning kundalik umumiy foydasi har ikki mahsulotdan ko'radigan foydalarning yig'indisidan iboratdir. Agar bir dona shkafdan tushadigan foyda 200$ bo'lsa, X dona shkafdan tushadigan foyda $200 \cdot X$\$ ga teng bo'ladi. Xuddi shu kabi, bir dona tumbadan tushadigan foyda 100$ bo'lsa, Y dona tumbadan tushadigan foyda $100 \cdot Y$\$ ga teng bo'ladi. Kundalik ishlab chiqilgan jami mahsulotdan tushadigan foyda $P = 200 \cdot X + 100 \cdot Y$ dollarga teng bo'ladi.

Maqsad funksiyasi

Jami mahsulotdan tushadigan foyda

$$P = 200 \cdot X + 100 \cdot Y$$

ga teng bo'ladi.

Maqsad funksiyasining ko'rinishidan ishlab chiqariladigan mahsulot hajmlari X va Y qancha katta bo'lsa, sexning ko'radigan foydasi P shuncha katta bo'lishi ma'lum. Ammo kundalik ishlab chiqariladigan shkaf va tumbalar sonini istalgancha ko'p qilib olib bo'lmaydi, chunki sexning moddiy va mehnat resurslari cheklangan.

Cheklanishlar

Qanday cheklanishlar doirasida maqsad funksiyasini optimallashtirishimiz kerakligini aniqlash uchun sex zaxirasidagi DSP, shisha miqdori va ishchilar soniga shartlarni aniqlaymiz.

Bir dona shkaf uchun 3,5 m. DSP va bir dona tumba uchun esa 1 m. DSP sarflangani uchun jami DSP sarfi $3,5X + Y$ metrga teng bo'ladi. Bu kattalik sexning DSP zaxirasi 350 metrdan oshmasligi kerak, ya'ni $3,5 \cdot X + Y \leqslant 350$.

$$\boxed{3,5 \cdot X + Y \leqslant 350}$$

Bir dona shkaf uchun 1,0 m. shisha va bir dona tumba uchun esa 2,0 m. shisha sarflangani uchun jami shisha sarfi $1,0X + 2,0Y$ metrga teng bo'ladi. Bu kattalik sexning shisha zahirasi 240 metrdan oshmasligi kerak, ya'ni $X + 2 \cdot Y \leqslant 240$.

$$\boxed{X + 2 \cdot Y \leqslant 240}$$

Bir ishchi kuniga bitta shkaf, yoki bitta tumba yasashi mumkin. Demak jami mahsulotlar soni $X+Y$ jami ishchilar sonidan oshib keta olmaydi, ya'ni $X+Y \leqslant 150$.

$X+Y \leqslant 150$

Va nihoyat, ishlab chiqariladigan shkaflar soni X va tumbalar soni Y manfiy bo‘la olmaydi, ya'ni $X \geqslant 0, \quad Y \geqslant 0$.

$X \geqslant 0, \ Y \geqslant 0$

Masalaning matematik modeli

$$P = 200X + 100Y \to \max,$$

$$\begin{cases} 3,5X + Y \leq 350, \\ X + 2Y \leq 240, \\ X + Y \leq 150, \\ X \geq 0, \quad Y \geq 0. \end{cases}$$

3.2 Chorva mollari uchun ratsion tuzish masalasi

Muammoning qo‘yilishi. Navbatdagi bo‘limda qishloq xo‘jaligi, aniqrog‘i, chorvachilik sohasidan bir amaliy masalani ko‘rib chiqamiz va uning matematik modelini tuzish va hosil bo‘lgan chiziqli dasturlash masalasini dasturda yechish haqida so‘z yuritamiz. Chorvachilik qishloq aholisi uchun oziq-ovqat va daromad olishning muhim manbaiga aylandi. Chorvachilik taraqqiyoti, sut va go‘sht mahsulotlari ishlab chiqarish hajmlarining o‘sishi, sifatining oshishi va birlik mahsulotga sarflanadigan xarajatlarni kamaytirish maqsadlari ishlab chiqarishni tashkil qilishga yangicha yondashuvlarni talab qiladi.

Ratsion masalasi:

To‘liq qiymatli ozuqa ratsioni chorva mollarining mahsuldorligini oshirishning eng muhim shartlaridan biridir. Vazni 400 kg. va 10 l. sut beradigan mollar uchun bir kunlik ovqatlanish ratsionini shunday tuzish kerakki, oziq moddalar 15 birlikdan, protein miqdori 840 gr.dan, karotin esa 320 mg.dan kam bo‘lmasin. Shu bilan birga, ratsion xarajatlari minimal bo‘lsin.

Quyidagi 2- jadvalda 1 kg. arpa va qand lavlagi uchun oziq va foydali moddaning miqdori, 1 kg. ozuqaning narxi keltirilgan.

mahsulot	oziq moddalar	protein	karotin	1 kg. ozuqa narxi
Arpa	0.50	32	30	2
Qand lavlagi	0.92	19	0	1.5

Jadval 2: Masala ma'lumotlari.

Masalaning matematik modeli.

Belgilashlar kiritish

Masalaning matematik modelini yozishdan avval ayrim belgilashlarni kiritib olamiz. Kunlik ratsiondagi arpa miqdorini X va qand lavlagi miqdorini Y deb belgilaymiz. Arpa va qand lavlagi miqdorlari kilogrammda o'lchanadi. U holda bitta chorva moli kundalik ratsionining narxi har ikki mahsulot narxlarining yig'indisidan iborat bo'ladi. Agar bir kg. arpaning narxi 2 shartli pul birligi bo'lsa, X kg. arpaning narxi $2 \cdot X$ ga teng bo'ladi. Xuddi shu kabi, bir kg. qand lavlagining narxi 1,5 shartli pul birligi bo'lsa, Y kg. qand lavlagining narxi $1,5 \cdot Y$ ga teng bo'ladi. Bitta qoramol kundalik ratsionining umumiy narxi $C = 2 \cdot X + 1,5 \cdot Y$ ga teng bo'ladi.

Maqsad funksiyasi

Qoramol kundalik ratsioni narxi

$C = 2 \cdot X + 1,5 \cdot Y$

ga teng bo'ladi.

Maqsad funksiyasining kundalik ratsionning narxi bilan aniqlangani uchun bu masala minimizatsiya masalasidir.

Cheklanishlar

Qanday cheklanishlar doirasida maqsad funksiyasini minimallashtirish kerakligini aniqlash uchun qoramol uchun kundalik protein, karotin va oziq moddasining minimal ko'rsatkichlariga murojaat qilamiz.

Ma'lumki, vazni 400 kg. va 10 l. sut beradigan mollar uchun bir kunlik ovqatlanish ratsionini shunday tuzish kerakki, oziq moddalar 15 birlikdan, protein miqdori 840 gr.dan, karotin esa 320 mg.dan kam kam bo'lmasligi kerak.

Bir kg arpada 0,50 birlik foydali oziq moddasi bo'lgani uchun X kg arpada $0,50 \cdot X$ birlik oziq moddasi bo'ladi. Xuddi shu kabi, bir kg. qand lavlagida 0,92 birlik oziq moddasi bo'lgani uchun Y kg. lavlagida $0,92 \cdot Y$ birlik oziq moddasi bo'ladi. X kg arpa va Y kg qand lavlagidan iborat kundalik ratsionda jami $0,50 \cdot X + 0,92 \cdot Y$ birlik oziq moddasi bor. Bu kattalik qoramolning kundalik oziq moddasiga bo'lgan talabidan kam bo'lmasligi kerak, ya'ni:

$0,50 \cdot X + 0,92 \cdot Y \geq 15$

Bir kg. arpada 32 gr. protein bo‘lgani uchun X kg. arpada $32 \cdot X$ gr. protein moddasi bo‘ladi. Xuddi shu kabi, bir kg. qand lavlagida 19 gr. protein bo‘lgani uchun Y kg. lavlagida $19 \cdot Y$ gr. protein moddasi bo‘ladi. X kg. arpa va Y kg. qand lavlagidan iborat kundalik ratsionda jami $32 \cdot X + 19 \cdot Y$ birlik protein moddasi bor. Bu kattalik qoramolning kundalik protein moddasiga bo‘lgan talabidan kam bo‘lmasligi kerak, ya’ni:

$$32 \cdot X + 19 \cdot Y \geq 840$$

Bir kg. arpada 30 mg. karotin moddasi bo‘lgani uchun X kg. arpada $30 \cdot X$ mg. karotin moddasi bo‘ladi. Qand lavlagi tarkibida esa karotin moddasi bo‘lmas ekan. X kg. arpa va Y kg. qand lavlagidan iborat kundalik ratsionda jami $30 \cdot X + 0 \cdot Y = X$ mg. karotin moddasi bor. Bu kattalik qoramolning kundalik karotin moddasiga bo‘lgan ehtiyojidan kam bo‘lmasligi kerak, ya’ni:

$$30 \cdot X + 0 \cdot Y \geq 320$$

Va nihoyat, kundalik ratsiondagi arpa X va qand lavlagi miqdori Y manfiy bo‘la olmaydi, ya’ni:

$$X \geq 0, \quad Y \geq 0$$

Masalaning matematik modeli

$$C = 2X + 1,5Y \to \min,$$

$$\begin{cases} 0,50X + 0,92Y \geq 15, \\ 32X + 19Y \geq 840, \\ 30X \geq 320, \\ X \geq 0, \quad Y \geq 0. \end{cases}$$

3.3 Investitsiya portfeli haqidagi masala

Navbatdagi masala moliya sohasidan bo‘lib, bank uchun samarali investitsiya portfelini tuzishga bag‘ishlangan.

Muammoning qo‘yilishi.

Investitsiya portfeli masalasi

O'zbekiston qayta tiklash va taraqqiyot banki yordam tariqasida moliyaviy ahvoli og'ir korxonalarga 100000$ *imtiyozli kredit bermoqchi. Bank kengashi bu mablag'ni ikkita yo'nalish – qurilish sohasi («Uy-joy mulk» va «Uy qurish» firmalari) va sanoatga («Toshkent» poyabzal fabrikasi, metallurgiya sohasi - Bekobod metallurgiya zavodi va Olmaliq metallurgiya zavodi) ajratdi.*
Har bir tashkilot bilan bog'liq bo'lgan kredit munosabati o'rganildi va kreditlar quyidagi foiz stavkalari bilan qaytarilishi kelishildi: «Uy-joy-mulk» kompaniyasi - foiz stavkasi - 0.06, «Uy-qurish» firmasi - 0.05, «Toshkent» poyabzal fabrikasi - 0.07, Bekobod metallurgiya zavodi - 0.06, Olmaliq metallurgiya zavodi - 0.05. (rasm 1) Kreditdan olinadigan foydani maksimallashtiruvchi optimal kredit portfelini aniqlang.

Bank kengashi quyidagi ustuvor shartlar bajarilishini e'tirof etdi:

- *qurilish sohasiga mablag'ning kamida 40% ajratilishi kerak;*
- *umumiy mablag'ning kamida 25% metallurgiya tarmog'iga ajratilishi lozim;*
- *«Uy-qurish» firmasiga ajratiladigan kredit* 6000$ *dan kam bo'lmasligi shart;*
- *Olmaliq metallurgiya zavodiga ajratiladigan kredit ham* 4000$ *dan kam bo'lmasligi shart.*

Barcha shartlarni e'tiborga olgan holda kreditdan olinadigan foydani maksimallashtiruvchi optimal kredit portfelini aniqlang.

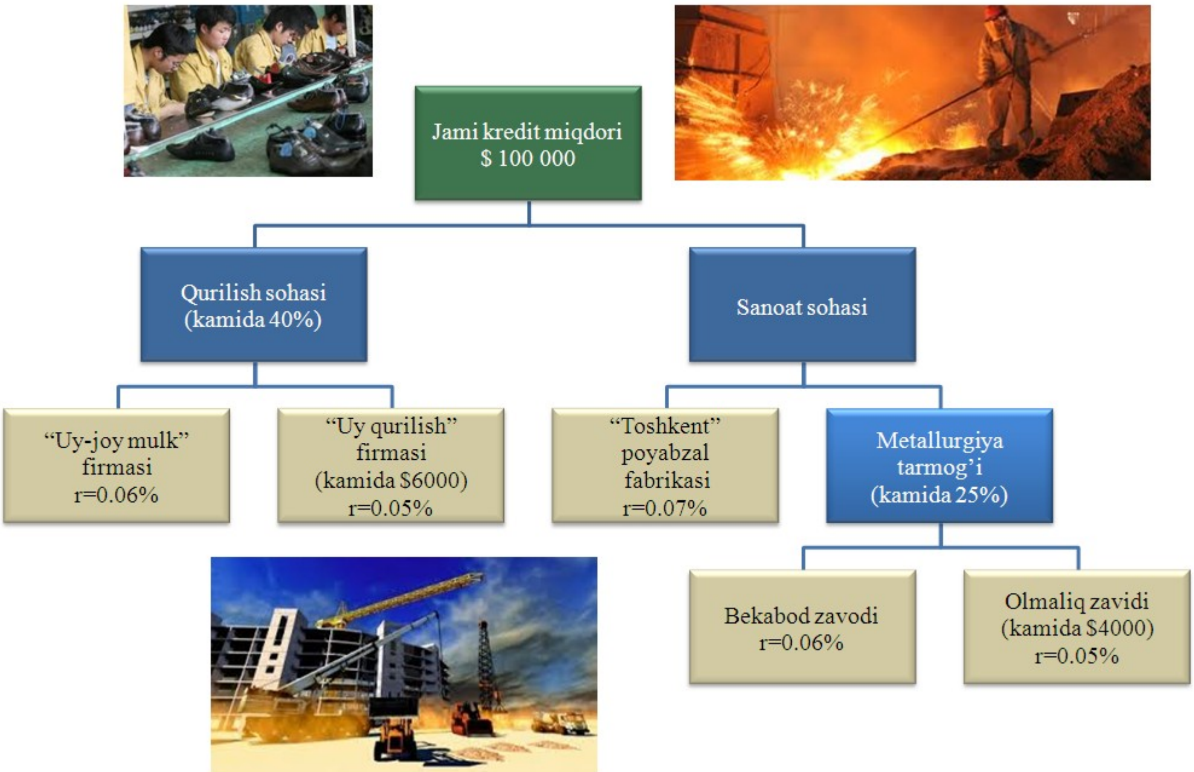
Masalani matematik modelini tuzish uchun quyidagilarni aniqlab olamiz:

Boshqaruv muammosi	Imtiyozli kreditlarni samarali taqsimlash.
Maqsad	Bankning kreditdan olinadigan foydani maksimallashtiruvchi kredit portfelini aniqlash.
Cheklanishlar	Taqsimlanayotgan mablag' miqdori, bank uchun ustuvor shartlar.
Masala o'zgaruvchilari	Har bir obyektga ajratiladigan kredit hajmi.
Masala parametrlari	foiz stavkalari, sohalar va obyektlarga ajratilishi kerak bo'lgan minimal mablag' hajmlari.

Masalaning matematik modeli.

Belgilashlar kiritish

Masalaning matematik modelini yozishdan avval ayrim belgilashlarni kiritib olamiz:



Rasm 1: Masala qo’yilishining sxema ko’rinishidagi ifodasi

- X_1 - «Uy-joy mulk» firmasiga ajratilgan kredit miqdori;
- X_2 - «Uy qurilish» firmasiga ajratilgan kredit miqdori;
- X_3 - «Toshkent» poyabzal fabrikasiga ajratilgan kredit miqdori;
- X_4 - Bekobod metallurgiya zavodiga ajratilgan kredit miqdori;
- X_5 - Olmaliq metallurgiya zavodiga ajratilgan kredit miqdori.

Kreditdan olinadigan foydani maksimallashtiruvchi optimal kredit portfelini aniqlash uchun umumiy foyda miqdorini matematik ifodalaymiz. «Uy-joy mulk» kompaniyasi beriladigan kredit hajmi X_1 ga teng bo‘lsin. U holda kredit $r = 6\%$ foiz stavkasi bilan qaytarilishini e’tiborga olsak, bankning «Uy-joy mulk» kompaniyasi beradigan kreditdan oladigan foydasi $0.06 \cdot X_1$ga teng bo‘ladi. Shu asnoda «Uy-qurilish» firmasi ($r = 5\%$), «Toshkent» poyabzal fabrikasi ($r = 7\%$;), Bekobod metallurgiya zavodi ($r = 6\%$), Olmaliq metallurgiya zavodi ($r = 5\%$) uchun bankning beradigan kreditidan oladigan foydasi mos ravishda $0.05 \cdot X_2$, $0.07 \cdot X_3$, $0.06 \cdot X_4$ va $0.05 \cdot X_5$ larga teng bo‘ladi. Jami kreditdan tushadigan umumiy foyda quyidagicha aniqlanadi:

Maqsad funksiyasi - kreditlardan tushadigan umumiy foyda miqdori:

$$F = f(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = 0.06 \cdot X_1 + 0.05 \cdot X_2 + 0.07 \cdot X_3 + 0.06 \cdot X_4 + 0.05 \cdot X_5.$$

Masala shartlari asosida aniqlanadigan cheklanishlarni tahlil qilib chiqamiz.

Umumiy kredit hajmiga cheklanish

O'zbekiston qayta tiklash va taraqqiyot banki yordam tariqasida moliyaviy ahvoli og'ir korxonalarga aynan 100000 dollar imtiyozli kredit bermoqchi, ya'ni

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 100000\$.$$

Sohalarga ajratilishi lozim mablag'larning minimal qiymati shartlarini tahlil qilib chiqaylik.

Qurilish sohasiga mablag'larning kamida 40% ajratilishi lozim

Masala shartiga qo'ra, bank kengashi quyidagi ustuvor shartlar bajarilishini e'tirof etdi: qurilish sohasiga mablag'ning kamida 40% ajratilishi, umumiy mablag'ning kamida 25% metallurgiya tarmog'iga ajratilishi lozim. Jami mablag'larning 40%i $0.4 \cdot 100000\$ = 40000\$$ ga teng. Qurilish sohasi vakillari «Uy-joy mulk» va «Uy qurish» firmalariga mos ravishda X_1 va X_2 miqdorda mablag' ajratilishi rejalashtirilmoqda. Masala shartlariga ko'ra, ikki obyektga ajratilayotgan jami kredit 40000$ dan kam bo'lmasligi kerak. Demak, ushbu shartning matematik ifodasi quyidagicha bo'ladi:

$$X_1 + X_2 \geq 40000.$$

Metallurgiya tarmog'iga mablag'larning kamida 25% ajratilishi lozim

Jami mablag'ning 25%i $0.25 \cdot 100000\$ = 25000\$$ ga teng. Metallurgiya tarmog'i vakillari ikkita bo'lib, bular Bekobod va Olmaliq metallurgiya zavodlaridir. Ularga mos ravishda X_4 va X_5 miqdorda mablag' ajratilishi rejalashtirilmoqda. Masala shartlariga ko'ra, bu ikki obyektga ajratilayotgan jami kredit 25000$ dan kam bo'lmasligi kerak. Demak, uchinchi shartning matematik ifodasi quyidagicha bo'ladi:

$$X_4 + X_5 \geq 25000$$

Ayrim obyektlarga ajratiladigan kreditning minimal hajmi shartlari

Bank kengashi qo'ygan ustuvor talablarida "Uy-qurilish"firmasiga ajratiladigan kredit 6000$ va Olmaliq metallurgiya zavodiga ajratiladigan kredit 4000$dan kam bo'lmasligi e'tirof etilgan edi. Navbatdagi ikki shartning matematik ifodasi:

$$X_2 \geq 6000$$

$$X_5 \geq 4000$$

Nomanfiylik shartlari

Bank ajratayotgan kreditlar miqdorlari nolga teng bo'lishi mumkin, ammo manfiy qiymatlarni qabul qila olmaydi:

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0, \quad X_5 \geq 0.$$

Investitsiya portfeli haqidagi masalaning matematik modeli

$$F = 0.06 \cdot X_1 + 0.05 \cdot X_2 + 0.07 \cdot X_3 + 0.06 \cdot X_4 + 0.05 \cdot X_5 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 100000, \\ X_1 + X_2 \geq 40000, \\ X_4 + X_5 \geq 25000, \\ X_2 \geq 6000, \\ X_5 \geq 4000, \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0, \quad X_5 \geq 0. \end{cases}$$

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

Quyida keltirilgan masalalar uchun matematik model tuzing.

1. Mebel fabrikasi stol va shkaf ishlab chiqaradi. Har bir mahsulotni ishlab chiqarish uchun ketadigan xom ashyo miqdorlari uning zaxiradagi hajmi hamda tayyor mahsulotlarni sotishdan tushadigan foyda jadvalda keltirilgan.

Xom ashyolar	Birlik mahsulotni ishlab chiqarish normasi		Zaxirada mavjud xom ashyo miqdori
	stol	shkaf	
1 navli taxta (m^3)	0,2	0,1	40
2 navli taxta (m^3)	0,1	0,3	45
Ishchi soati	1,2	1,5	360
Har bir mahsulotdan keladigan foyda (ming so‘m)	6	8	

   Fabrika har bir mahsulotdan qanchadan ishlab chiqarganda maksimal foyda ko‘radi? Masalaning matematik modelini quring.

2. Kompaniya simli va simsiz turdagi elektr himoya moslamasini ishlab chiqaradi. Simli moslamani tayyorlashga 2 soat, simsizini tayyorlashga esa 4 soat vaqt sarflaydi. Ishlab chiqarish uchun kompaniyaning 800 ish soat vaqti bor. Bundan tashqari, qadoqlash bo‘limi 300 ta moslamani qutilarga joylab sotishga tayyorlay oladi. Agar kompaniya simli moslamani sotishdan \$30 va simsiz moslamani sotishdan \$40 foyda olsa, eng ko‘p foyda olish uchun har bir moslamadan necha donadan ishlab chiqarish kerak?

3. Fabrika binolarning ichki va tashqi qismlarini bo‘yash uchun ikki xil bo‘yoq ishlab chiqaradi. Bo‘yoq ishlab chiqarish uchun A va B turdagi xom ashyodan foydalaniladi. Jadvalda 1 tonna bo‘yoq uchun ketadigan xom ashyo normalari, umumiy xom ashyo miqdorlari hamda har bir turdagi bo‘yoqlarning narxlari keltirilgan.

Xom ashyolar	1 tonna bo'yoq ishlab chiqarish uchun ketadigan xom ashyo miqdorlari (t)		Zaxirada mavjud xom ashyo miqdori
	Binolarning ichki qismi uchun	Binolarning tashqi qismi uchun	
A	2	3	6
B	5	2	10
1 t bo'yoq narxi (ming $)	1	2	

Tekshirishlar shuni ko'rsatdiki, binolarning tashqi qismi uchun ishlatiladigan turining kunlik normasi 1,5 tdan oshmaydi. Daromad eng yuqori bo'lishi uchun har bir turdagi bo'yoqlardan qanchadan ishlab chiqargan maqul? Masalanig matematik modelini quring.

4. Firma har bir avtomobilni sotishdan $400 foyda, stansiya vagonini sotishdan esa, $500 foyda oladi. Firma yilning keyingi choragiga buyurtma olayotganida ishlab chiqaruvchilar avtomobil 300 tadan, vagonlar esa 150 tadan ortmasligini ma'lum qildi. Sotuvga tayyorlash uchun avtomobilga 2 soat, vagonga esa 3 soat vaqt sarflanadi. Keyingi chorakda firmaning 900 soat sotuvga tayyorlash vaqti bor. Foyda eng ko'p bo'lishi uchun firma nechta avtomobil va nechta stansiya vagonini ishlab chiqarish kerak?

5. Zavod A va B turdagi tovarlar ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarishda to'rt xil xom ashyodan foydalaniladi. Jadvalda birlik tovarni ishlab chiqarishdagi xom ashyo miqdorlari; zaxiradagi xom ashyo miqdorlari va tovarlarni sotishdan tushadigan daromad miqdorlari keltirilgan.

Xom ashyo	Sarf bo'ladigan xom ashyo miqdori		Xom ashyoning zaxiradagi miqdori
	A	B	
I	2	3	21
II	1	0	4
III	0	1	6
IV	2	1	10
Birlik tovar narxi (ming so'm)	3	2	

Ishlab chiqarishni optimallashtiruvchi rejaning matematik modelini quring.

6. Saylov kompaniyasida nomzod radio va televideniye reklamalaridan foydalanishi mumkin. Tekshirishlar shuni ko'rsatdiki, televideniye orqali 1 daqiqalik xabar berish 0,09 mln. kishiga, radio orqali 1 daqiqalik xabar berish esa, 0,006 mln. kishiga yetib boradi. Nomzod 2,1 mln. kishiga xabar yetkazishi va umumiy reklama vaqti 80 daqiqadan oshmasligi kerak. Televideniye orqali xabar berish daqiqasiga $500, radio orqali esa $100 turadi. Umumiy xarajat eng kam bo'lishi uchun reklamada har bir vositadan necha minutdan foydalanish lozim?

7. Kompaniya to'rt bo'linmada kola va limonli ichimliklarni idishlarga joylaydi. Bo'limlarning bir kunlik quvvatlari quyidagi jadvalda (100 ta yashiklarda) keltirilgan.

Mahsulot turlari	Bo‘limlar			
Kola ichimligi	I	II	III	IV
Limonli ichimlik	7	3	4	1

Kompaniya kamida 6300 yashik kola va 2900 yashik limon ichimligiga ehtiyoj borligini aniqladi. Kunlik xarajatlar: I bo‘linma uchun \$500, II bo‘linma uchun \$200, III bo‘linma uchun \$300 va IV bo‘linma uchun \$100. Kompaniya eng kam xarajat qilib, keltirilgan miqdordagi ichimliklarni idishlarga joylashtirishning matematik modelini quring.

8. Duradgor firmasi ikki xil katta va kichik stullar ishlab chiqaradi. Kichik stol ishlab chiqarishga 2 soat, katta stol ishlab chiqarishga 4 soat vaqt sarflanadi. Firma har kuni ishlab chiqarishga 800 soat sarflash imkoniyatiga ega. Bo‘yovchi bo‘lim ko‘pi bilan 300 ta stolni bo‘yay oladi. Agar firma katta stoldan 400 so‘m, kichigidan 300 so‘m foyda olsa, eng ko‘p foyda olish uchun har bir stoldan nechtadan ishlab chiqarish kerak?

9. Korxona ikki xil rusumdagi sumka tikish bilan shug‘ullanadi. Korxonada to‘rtta ish bajariladi. Jadvalda ishlarning bitta sumka uchun ketadigan vaqti hamda bitta sumkani sotishdan keladigan foyda aks ettirilgan.

Mahsulot	Qirqish va bichish	Tikish	Yakunlash	Tekshirish va o‘rash	Bitta sumkadan tushadigan foyda (so‘m)
Standart	7/10	1/2	1	1/10	100
Qimmat baho	1	5/6	2/3	0	90

Tekshirish shuni ko‘rsatdiki, qirqish va bichish bo‘limida 630 soat, tikish bo‘limida 600 soat, yakunlash bo‘limida 708 soat, tekshirish va o‘rash bo‘limida 135 soat vaqt borligi aniqlandi. Masalaning matematik modelini quring.

10. Kompaniya ikki xil mahsulot ishlab chiqaradi. Bitta birinchi mahsulot sotishdan \$25, bitta ikkinchi mahsulot sotishdan \$30 foyda ko‘radi. Kompaniyada uchta ishlab chiqarish bo‘limi bo‘lib, bitta mahsulot uchun bu bo‘limlarda sarflanadigan vaqt jadvalda keltirilgan.

	1-mahsulot	2- mahsulot
1-bo‘lim	1,5	3
2-bo‘lim	2	1
3-bo‘lim	0,25	0,25

Bo‘lim kuzatuvchilari keyingi oyda 1-bo‘limda 450 ish soati, 2-bo‘limda 350 ish soati, 3-bo‘limda esa 50 ish soati borligini aniqladilar. Umumiy foyda eng yuqori bo‘lishi uchun har bir mahsulotdan qanchadan ishlab chiqarish lozim?

11. Korxona A va B turdagi velosipedlar ishlab chiqaradi. Bitta A turdagi velosipedga 2 birlik po‘lat, 6 birlik alyuminiy va 12 birlik maxsus qismlar ishlatiladi. Bitta B turdagi velosipedga 5 birlik po‘lat, 5 birlik alyuminiy va 5 birlik maxsus qismlar ishlatiladi. Korxonaga kuniga 100 birlik po‘lat, 120 birlik alyuminiy va 180 birlik

maxsus qismlar keltiriladi. Bitta A turdagi velosipeddan \$30, bitta B turdagi velosopeddan esa \$20 foyda keladi. Umumiy foyda maksimal boʻlishi uchun har bir velosopeddan qanchadan ishlab chiqarish maqsadga muvofiq?

12. «Sport jihozlari» kompaniyasi oddiy va to'p tutish qoʻlqoplarini ishlab chiqaradi. Kompaniyaniyaning qirqish va bichish boʻlimida 900 soat, yakunlash boʻlimida 300 soat, qadoqlash boʻlimida 100 soat ishlab chiqarish vaqti bor. Jadvalda bitta qoʻlqop uchun ishlab chiqarish vaqti keltirilgan.

	Qirqish va bichish	Yakunlash	Qadoqlash	Bitta qoʻlqopdan keladigan foyda
Oddiy qoʻlqop	1	1/2	1/8	\$5
Tutish qoʻlqopi	3/2	1/3	1/4	\$8

Kompaniya foydani maksimallashtirish uchun har bir qoʻlqopdan qanchadan ishlab chiqarishi kerak?

13. Firma ikki xil tovar ishlab chiqaradi. Har bir tovarga uchta uskunada ishlov beriladi. Har bir tovarga ishlov berish vaqtlari jadvalda keltirilgan.

	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

I, II, III uskunalarning haftalik soatlari mos ravishda 40, 36 va 36 s. Har bir tovardan keladigan foyda \$5 va \$3. Foyda maksimal boʻlishi uchun har bir tovardan qanchadan ishlab chiqarish kerak?

14. Firmaga fosfor miqdori 0,03% dan oshmaydigan va begona aralashmalar miqdori 3,25% dan oshmaydigan koʻmir kerak. Xarakteristikalari jadvalda koʻrsatilgan koʻmir navlaridan qanchadan olinganda (1 tonna koʻmir uchun) eng kam xarajat qilinadi va yuqoridagi talab qondiriladi? Masalaning matematik modelini quring.

Koʻmir navi	Fosfor miqdori %	Begona aralashmalar miqdori, %	Narxi, \$
A	0,06	2	30
B	0,04	4	30
C	0,02	3	45

15. Polni tozalash vositasida kami bilan 60 birlik tozalash xususiyati va kamida 60 birlik dezinfeksiya xususiyati boʻlishi lozim. Shu bilan birga teriga noxush ta'siri minimal boʻlishi kerak. Pol tozalash vositasini xarakteristikalari jadvalda keltirilgan uch turdagi tozalash moddalarining aralashmasidan hosil qilinadi.

Tozalovchi moddalar	Tozalash xususiyati	Dezinfeksiyalash xususiyati	Teriga nojo'ya ta'siri.
A	90	30	70
B	65	85	50
C	45	70	10

Optimal aralashmani topishning matematik modelini quring.

16. Firma vanna xonalar uchun ikki xil o'lchamdagi A va B javonlar ishlab chiqaradi. Tekshirishlar shuni ko'rsatdiki, har haftada 550 donagacha javonlarni realizatsiya qilish mumkin. Har bir A turdagi javonlar uchun $2m^2$ material, B turdagisiga esa, $3m^2$ material sarf bo'ladi. Haftada firma $1200m^2$ gacha material olishi mumkin. A turdagi bir dona javonni ishlab chiqarish uchun 12 daqiqa, B turdagisi uchun esa 30 daqiqa sarf bo'ladi. Haftada EHM 160 soat ishlashi mumkin. Agar A turdagi javonni sotishdan olinadigan foyda 3 p.b. va B turdagidan esa 4 p.b. bo'lsa, har haftadada qancha A turdagi va qancha B turdagi javonlarni ishlab chiqarish maqsadga muvofiq? Chiziqli dasturlash masalasini tuzing.

17. Avtomobil zavodi «Lochin» va «Pahlavon» rusumdagi mashinalar ishlab chiqaradi. Zavodda 1000 ta tajribasiz va 800 ta tajribali ishchilar ishlaydi. Har bir ishchining haftalik ish soati 40 ga teng. «Lochin» rusumidagi mashinani ishlab chiqarish uchun 30 s. tajribasiz va 50 s. tajribali ishchi soatlari sarf qilinadi; «Pahlavon» rusumidagi mashinani ishlab chiqarish uchun esa 40 s. tajribasiz va 20 s. tajribali ishchi soatlari sarf qilinadi. «Lochin» rusumidagi har bir mashina uchun \$500 lik, «Pahlavon» rusumidagi har bir mashina uchun esa \$1500 lik xom ashyo sarf qilinadi. Haftalik umumiy xarajat \$900000 dan oshmasligi lozim. Mashinalarni yetkazib beruvchi ishchilar haftada besh kun ishlab har kuni 210 dan ko'p bo'lmagan mashinalarni yetkazib beradi. «Lochin» rusumidagi har bir avtomobildan tushadigan foyda \$1000, «Pahlavon»dan esa \$500. Haftada har bir rusumdagi mashinalardan qanchadan ishlab chiqarganda zavod eng ko'p foyda ko'radi? Masalaning matematik modelini quring.

18. Tadbirkor narxlari \$250 va \$400 turadigan kompyuterlarni Xitoydan olib kelib sotish niyatida. Tadbirkor narxi \$250 li kompyuterdan \$45, \$400 likdan esa, \$50 foyda ko'radi. Kuzatishlar shuni ko'rsatdiki kompyuterlarga bo'lgan oylik talab 210 dan oshmaydi. Agar tadbirkor imkoniyat darajasi \$70,000 dan oshmasa, har bir turdagi kompyuterlardan qanchadan sotib olganda eng yuqori foyda ko'radi? Masalaning matematik modelini quring.

19. Fermerning 15 gektar yeri bo'lib, u yerga ikki xil A va B o'simliklar ekish niyatida. Yerning bir gektarini A turdagi o'simlik ekishga tayyorlash uchun bir kun, B turdagi o'simlik ekishga tayyorlash uchun esa, ikki kun kerak bo'ladi. Yerni ekishga tayyorlash uchun yilda 240 kun bor. A turdagi o'simlik hosilini yig'ishtirish uchun 0,3 kun, B turdagi o'simlik hosilini yig'ishtirish uchun esa 0,1 kun kerak bo'ladi. Hosilni yig'ishtirish 30 kundan oshmasligi kerak. Agar A turdagi o'simlikning har gektaridan olinadigan foyda \$140, B turdagi o'simlikdan esa \$235 bo'lsa, maksimal foyda olish uchun har turdagi o'simliklardan qanchadan ekish kerak? Masalaning matematik modelini quring.

20. Fermerning 50 gektar yeri bo'lib u yerga uch xil (sabzi, selder, petrushka) ekin ekishni rejalashtirmoqda. Sabzining bir gektarini yetishtirish uchun \$200 sarf qilinadi va \$60 foyda olinadi. Selderning bir gektarini yetishtirish uchun \$80 sarf qilinadi va \$20 foyda olinadi. Petrushkada bu ko'rsatkichlar mos ravishda \$140 va \$30ni tashkil qiladi. Ko'katlarni yetishtirishdagi umumiy xarajat \$10,000 dan oshmasligi lozim. Maksimal foyda olish uchun har bir ekinlardan qanchadan ekish kerak bo'ladi. Masalaning matematik modelini quring.

21. Tadbirkor olma va uzum sharbatlaridan ikki xil maxsus ichimlik tayyorlash niyatida. Birinchi ichimlik 30% olma va 70% uzum sharbati aralashmasidan, ikkinchi

ichimlik esa 60% olma va 40% uzum sharbatlari aralashmasidan tayyorlanadi. Tadbirkorda 1000 litr olma va 1500 litr uzum sharbati mavjud. Agar tadbirkor birinchi ichimlikdan \$0.60, ikkinchisidan esa \$0,50 foyda koʻradigan boʻlsa, har bir ichimliklardan necha litrdan tayyorlanganda maksimal foyda olishning matematik modelini tuzing.

22. Universitetning auditoriya va laboratoriyalari 5000 dan koʻp boʻlmagan talabalarga moʻljallangan. Universitet oʻz davlati fuqarolarini qabul qilishi 4000 dan oshmasligi kerak. Chet el fuqarolarini qabul qilishida chegara yoʻq. Universitetning oʻqituvchilar salmogʻi 440 kishidan iborat. Normaga koʻra oʻz davlatining 12 talabasiga va chet el talabalarining 10 tasiga bitta oʻqituvchi toʻgʻri keladi. Universitetning auditoriyalar hajmi 2800 oʻrindan iborat. Shu davlatning 40% talabalari va chet ellik talabalarning 80% auditoriyalarga joylashishi kerak. Yiliga universitet oʻz davlatining har bir talabasi uchun davlatdan \$2000, chet ellik talabalar uchun esa \$3000 oladi. Universitet maksimal foyda olishi uchun qabul rejasi qanday boʻlishi kerak?

23. Qandolat fabrikasi ikki turdagi konfetlar ishlab chiqaradi. Har 1 kg konfetlar uchun ketadigan xom ashyolar jadvalda berilgan.

Resurslar	I tur konfet	II tur konfet	Resurs hajmi
Shakar (kg)	0,4	0,3	120
Shokolad (kg)	0,3	0,5	150
Yongʻoq (kg)	0,3	0,5	120
Foyda (soʻm)	90	120	

Konfet ishlab chiqarishning optimal rejasini tuzing.

24. Kompaniyaning ikki zavodi boʻlib, ularda uch xil navli temir ishlab chiqariladi. 1-zavodning bir kunlik ishlashi \$70000 ga, 2-zavodniki esa \$60000 ga tushadi. Kuniga 1-zavod 400 tonna 1-nav, 500 tonna 2-nav va 450 tonna 3-nav temir ishlab chiqaradi. Kuniga 2-zavod 350 tonna 1-nav, 600 tonna 2-nav va 400 tonna 3-nav temir ishlab chiqaradi. Kompaniya 100000 tonna 1-nav 150000 tonna 2-nav va 124500 tonna 3-nav temirga buyurtma olgan. Buyurtmani bajarish uchun har bir zavod necha kun ishlaganda kompaniya eng kam xarajat sarf qiladi?

Mustaqil ish topshiriqlari javoblari

1. $$\begin{aligned}&6x+8y\to\max\\&0,2x+0,1y\le 40\\&0,1x+0,3y\le 45\\&1,2x+1,5y\le 360\\&x\ge 0,\;\; y\ge 0\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}&30x+40y\to\max\\&2x+4y\le 800\\&x+y\le 300\\&x\ge 0,\;\; y\ge 0\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}&x+2y\to\max\\&2x+3y\le 6\\&5x+2y\le 10\\&y\le 1.5\\&x\ge 0,\;\; y\ge 0\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}&400x+500y\to\max\\&x\le 300\\&y\le 150\\&2x+3y\le 900\\&x\ge 0,\;\; y\ge 0\end{aligned}$$

5.	$3x+2y \to \max$ $2x+3y \le 21$ $x \le 4$ $y \le 6$ $2x+y \le 10$ $x \ge 0,\ y \ge 0$	6.	$500x+100y \to \min$ $0.09x+0.006y \ge 2.1$ $x+y \le 80$ $x \ge 0,\ y \ge 0$
7.	$500x_1+200x_2+300x_3+100x_4 \to \min$ $15x_1+7x_2+9x_3+2x_4 \ge 6300$ $7x_1+3x_2+4x_3+x_4 \ge 2900$ $x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0$	8.	$300x+400y \to \max$ $2x+4y \le 800$ $x+y \le 300$ $x \ge 0,\ y \ge 0$
9.	$100x+90y \to \max$ $7/10x+y \le 630$ $1/2x+5/6y \le 600$ $x+2/3y \le 708$ $1/10y \le 135$ $x \ge 0,\ y \ge 0$	10.	$25x+30y \to \max$ $1.5x+3y \le 450$ $2x+y \le 350$ $0.25x+0.25y \le 50$ $x \ge 0,\ y \ge 0$
11.	$30x+20y \to \max$ $2x+5y \le 100$ $6x+5y \le 120$ $12x+5y \le 180$ $x \ge 0,\ y \ge 0$	12.	$5x+8y \to \max$ $x+3/2y \le 900$ $1/2x+1/3y \le 300$ $1/8x+1/4y \le 100$ $x \ge 0,\ y \ge 0$
13.	$5x+3y \to \max$ $0,5x+0,25y \le 40$ $0,4x+0,3y \le 36$ $0,2x+0,4y \le 36$ $x \ge 0,\ y \ge 0$	14.	$30x+30y+45z \to \min$ $0,06x+0,04y+0,02z \le 0,03$ $2x+4y+3z \le 3,25$ $x+y+z=1$ $x,y,z \ge 0$
15.	$70x_1+50x_2+10x_3 \to \min$ $90x_1+65x_2+45x_3 \ge 60$ $30x_1+85x_2+70x_3 \ge 60$ $x_1+x_2+x_3=1$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$	16.	$3x+4y \to \max$ $x+y \le 550$ $2x+3y \le 1200$ $0,2x+0,5y \le 160$ $x \ge 0,\ y \ge 0$
17.	$1000x+500y \to \max$ $30x+40y \le 40000$ $50x+20y \le 32000$ $500x+1500y \le 900000$ $x+y \le 1050$ $x \ge 0,\ y \ge 0$	18.	$45x+50y \to \max$ $x+y \le 250$ $250x+400y \le 70000$ $x \ge 0,\ y \ge 0$
19.	$140x+235y \to \max$ $x+y \le 15$ $x+2y \le 1200$ $0,3x+0,1y \le 30$ $x \ge 0,\ y \ge 0$	20.	$60x+20y+30z \to \max$ $200x+80y+140z \le 10000$ $x+y+z \le 50$ $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

21.	$140x + 235y \to \max$ $x + y \le 15$ $x + 2y \le 1200$ $0,3x + 0,1y \le 30$ $x \ge 0,\ y \ge 0$	22.	$2000x + 3000y \to \max$ $x + y \le 5000$ $x \le 4000$ $x/12 + y/10 \le 440$ $0.4x + 0.8y \le 2800$ $x \ge 0,\ y \ge 0$
23.	$90x + 120y \to \max$ $0,4x + 0,3y \le 120$ $0,3x + 0,5y \le 150$ $0,3x + 0,5y \le 120$ $x \ge 0,\ y \ge 0$	24.	$70000x + 60000y \to \min$ $400x + 350y \ge 100000$ $500x + 600y \ge 150000$ $450x + 400y \ge 124500$ $x \ge 0,\ y \ge 0$

3.4 Chiziqli dasturlash masalasi qo'yilishining shakllari

Bu bo'limda chiziqli dasturlash masalalarining umumiy shakli bayon qilinib unda chiziqli dastulashning har qanday masalasini umumiy qolipga tushirilishi keltiriladi. Chiziqli dasturlash masalalarining standart va kanonik ko'rinishlarini bayon qilamiz.

3.4.1 Chiziqli dasturlash masalasining umumiy ko'rinishi

Chiziqli dasturlash masalasi umumiy ko'rinishda quyidagicha ifodalanadi. Chiziqli maqsad funksiyasiga

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

maksimum (yoki minimum) qiymat beradigan

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in} \le b_i, \qquad i = 1, 2, ..., k,$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in} \ge b_i, \qquad i = k + 1, ..., l,$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in} = b_i \qquad i = l + 1, ..., m.$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarni topish kerak iborat bo'ladi. Ko'pincha chegaralar ichida barcha o'zgaruvchilarning yoki ular ma'lum biror qismlarining nomanfiylik shartlari keltiriladi.

$$x_i \ge 0,\ i = 1, 2, ..., s; (s \ge m).$$

Bu shartlar yuqorida keltirilgan tengsizliklarning xususiy holida kelib chiqadi, lekin amaliyotda ularni alohida guruhga ajratiladi. Bu erda a_{ij}, b_j, c_j berilgan sonlar.

3.4.2 Chiziqli dasturlash masalasining shakl ko'rinishlari

Chiziqli dasturlash masalasining standart ko'rinishida barcha chegaraviy shartlar kichik yoki teng ko'rinisidagi tengsizliklar orqali beriladi va quyidagicha bo'ladi:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdot + c_nx_n \to opt(min, max)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n} \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n} \le b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn} \le b_m \end{cases}$$

Chiziqli dasturlash masalasining kanonik ko'rinishida barcha chegaraviy shartlari tenglamalar ko'rinishida beriladi va quyidagicha bo'ladi:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdot + c_nx_n \to opt(min, max)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n} = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn} = b_m \end{cases}$$

Masalaning standart shaklda yozilishining qiziq tomoni shundaki juda ko'p amaliy masalalar standart ko'rinishda yoziladi. Chiziqli dasturlash masalasining kanonik ko'rinishda yozilishining afzalligi shundaki, masalani yechishning asosiy usullari shu shakl uchun ishlab chiqilgan. Keltirilgan chiziqli dasturlash shakllari shu ma'noda ekvivalentki, oddiy almashtirish yordamida biridan ikkinchisiga o'tish mumkin.

4 Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish

Bu bo'limda chiziqli dasturlash masalalarining sodda hollarini grafik usulda yechish imkoniyati borligi haqida so'z yuritiladi. Masalaning matematik modelidagi o'zgaruvchilar ikkiga teng bo'lganda optimal yechimni grafik usulda topish imkoniyati bor.

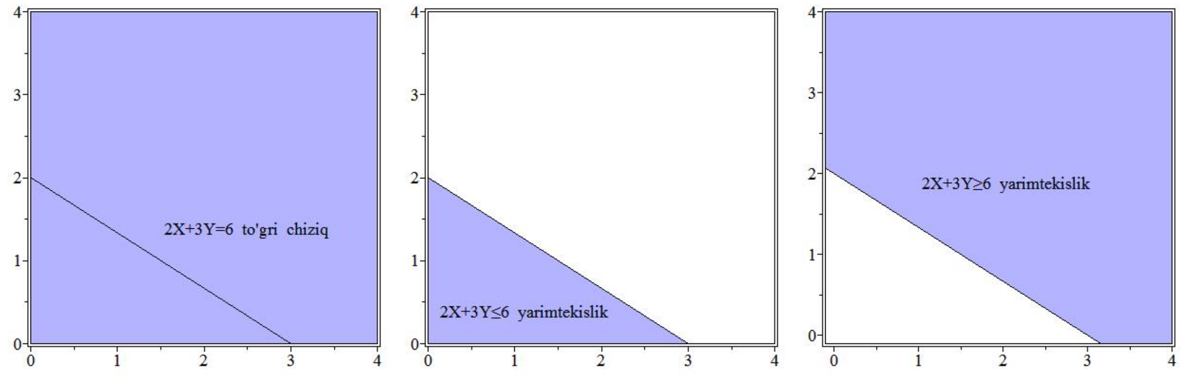
Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish ikki bosqichdan iborat:
- Tekislikda chiziqli tengsizliklarni qanoatlantiruvchi to'plamni aniqlash;
- To'plamda maqsad funksiyasiga eksremal qiymat beradigan nuqtani topish.

4.1 Joiz soha

Ikki o'zgaruvchili chiziqli tengsizlik koordinatalar tekisligida biror yarim tekislikni ifodalaydi. $ax_1 + bx_2 = c$ tenglamani qanoatlantiruvchi to'plam tekislikda to'g'ri chiziqdan iboratdir. $ax_1 + bx_2 \geq c$ yoki $ax_1 + bx_2 \leq c$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi to'plam esa, shu to'g'ri chiziqning bir tomonida yotuvchi yarimtekislikdan iborat.

Tengsizlikka qarab yarim tekislik tanlashni ko'raylik. Tekislikda to'g'ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy nuqta olinadi. Olingan nuqta koordinatalari tengsizlikka qo'yiladi. Bunda ikki holat bo'lishi mumkin. Olingan nuqta tengsizlikni qanoatlantursa, nuqta tomondagi yarim tekislik tanlanadi. Agar tengsizlik qanoatlantirilmasa, nuqta joylashmagan yarim tekislik tanlanadi (2-rasmga qarang). Chiziqli tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi soha barcha yarim tekisliklarning umumiy qismidan iborat bo'ladi.

Shunday qilib, ikki o'zgaruvchili chiziqli tengsizlik koordinatalar tekisligida biror yarim tekislikni ifodalaydi. Tengsizliklar sistemasi esa, shu yarim tekisliklarning umumiy kesishmasidan iborat bo'ladi. Chiziqli dasturlash masalasining shartlaridan iborat tengsizliklar hamda tenlamalar sistemasini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamiga **joiz soha** deyiladi. Joiz soha tengsizliklar sistemasi uchun doimo **qavariq soha**dan iborat bo'ladi. Yani, sohaga tegishli ikki nuqta olinganda ularni tutashtirivchi kesmaning barcha nuqtalari ham shu sohaga tegishli bo'ladi. Umumiy holda joiz soha qavariq ko'pburchak, chegaralanmagan qavariq ko'pburchak, kesma, nur yoki yagona nuqtalardan iborat bo'lishi mumkin. Tengsizliklar sistemasi birgalikda bo'lmagan taqdirda joiz soha



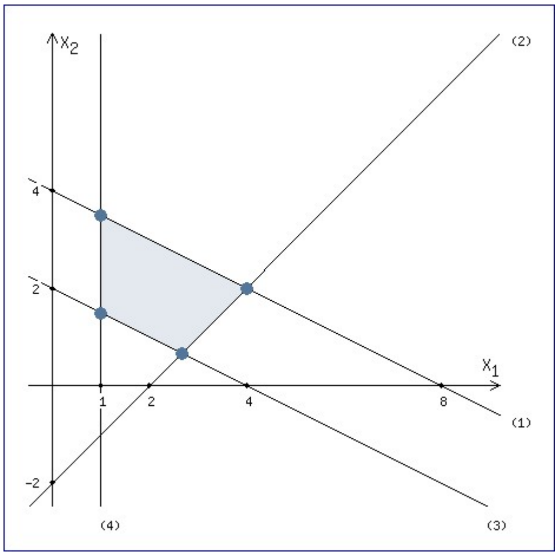
a. tog'ri chiziq b. yarimtekislik c. yarimtekislik

Rasm 2: Chiziqli tenglama va tengsizlikning geometrik ifodasi

bo'sh to'plamdan iborat bo'ladi. Yuqorida sanab o'tilgan hollarga misollar quyidagi 3-6 rasmlarda keltirilgan.

$$\begin{cases} (1) \quad x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ (2) \quad x_1 - x_2 \leq 2 \\ (3) \quad x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ (4) \quad x_1 \geq 1 \\ \qquad\;\; x_1 \leq 0, \ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

(a) Cheklanish shartlari

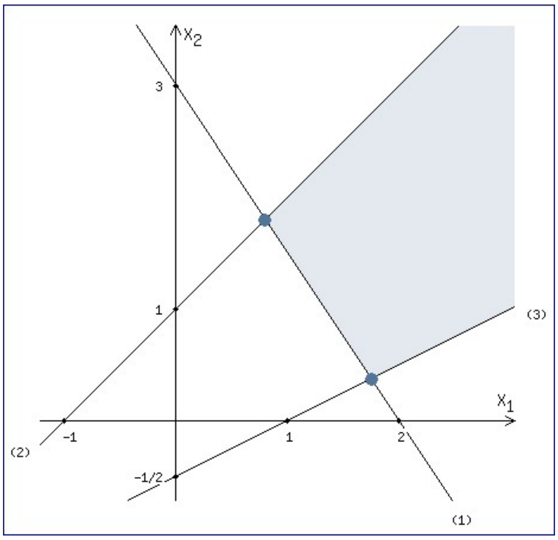


(b) Joiz soha

Rasm 3: Joiz soha qavariq ko'pburchak bo'lgan holatga misol.

$c_1x_1 + c_2x_2 = c$ to'g'ri chiziqning normal vektori $\vec{n} = (c_1; c_2)$ ga teng bo'lib, u to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi (7-rasmga qarang).. $c_1x_1 + c_2x_2 = c$ to'g'ri chiziqni o'ziga parallel holda $\vec{n}$ bo'yicha siljitganimizda c ning qiymati o'sib bo'radi; $\vec{n}$ vektorga teskari yo'nalishda esa, c ning qiymati kamayib bo'radi.

$\vec{n}$ vektor maqsad funksiyasining sath sirtiga perpendikulyardir. $\vec{n}$ vektorning yo'nalishi maqsad funksiyasining o'sish yo'nalishi bilan mos keladi. Maqsad funksiyasi kamayishining yo'nalishi esa, $\vec{n}$ vektor yo'nalishiga teskari boladi.



$$\begin{cases} (1) \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ (2) \quad -x_1 + x_2 \leq 1 \\ (3) \quad x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ \qquad x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

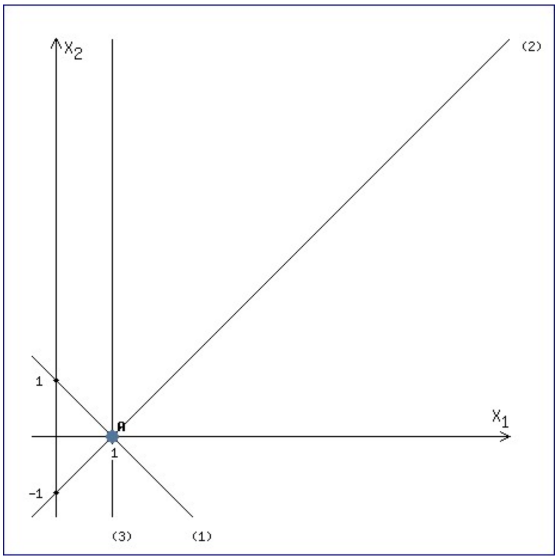
(b) Cheklanish shartlari

(a) Joiz soha

Rasm 4: Joiz soha chegaralanmagan qavariq ko'pburchak bo'lgan holatga misol.

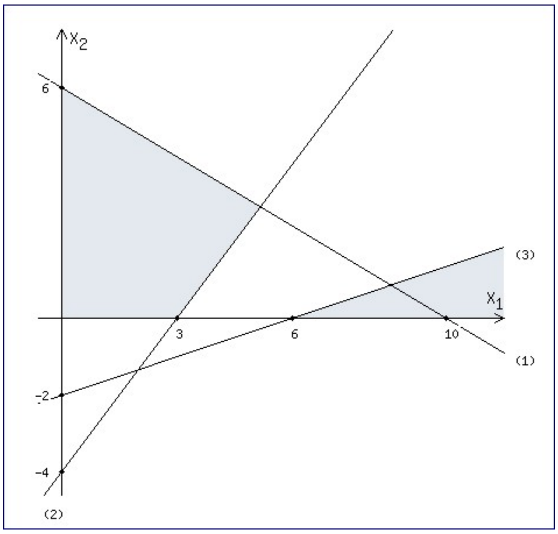
$$\begin{cases} (1) \quad x_1 + x_2 \geq 1 \\ (2) \quad x_1 - x_2 \geq 1 \\ (3) \quad x_1 \leq 1 \\ (4) \quad 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ (5) \quad x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ \qquad x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

(a) Cheklanish shartlari



(b) Joiz soha

Rasm 5: Joiz soha bitta nuqtadan iborat bo'lgan holatga misol.



(a) Joiz soha

$$\begin{cases} (1) \quad 3x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ (2) \quad 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ (3) \quad x_1 - 3x_2 \geq 6 \\ \qquad x_1 \leq 0, \ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

(b) Cheklanish shartlari

Rasm 6: Joiz soha bo'sh to'plam bo'lgan holatga misol.

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

Quyidagi chegaralar uchun joiz sohani ko'rsating.

1. $$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 \leq 100 \\ &-x_1 + 1.5x_2 \leq 200 \\ &x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &3x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ &2x_1 - x_2 \leq 200 \\ &x_1 \geq 150 \\ &x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

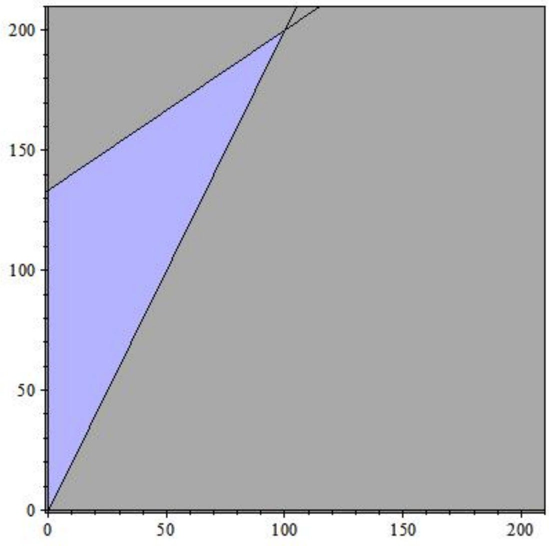
3. $$\begin{aligned} &4x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ &4x_1 + 2x_2 \geq 16 \\ &4x_1 + 2x_2 = 16 \\ &x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ &12x_1 + 8x_2 \geq 480 \\ &5x_1 + 10x_2 = 200 \\ &x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

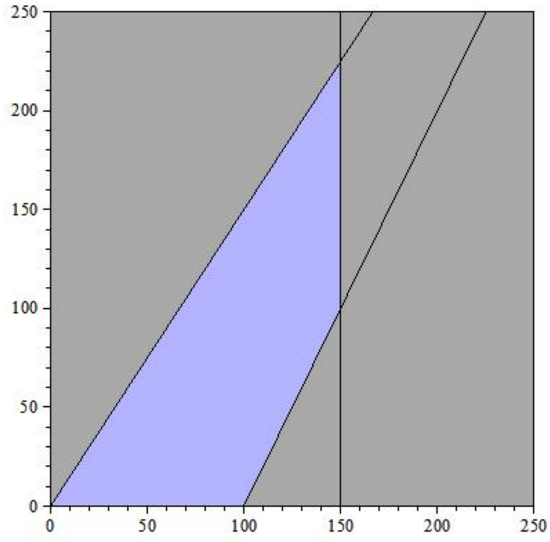
5. $$\begin{aligned} &3x_1 - 4x_2 \geq 60 \\ &-6x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ &5x_1 + 2x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} &x_1 \geq 0.25(x_1 + x_2) \\ &x_2 \leq 0.10(x_1 + x_2) \\ &x_1 \leq 0.50x_1 \geq 0.25(x_1 + x_2) \\ &(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

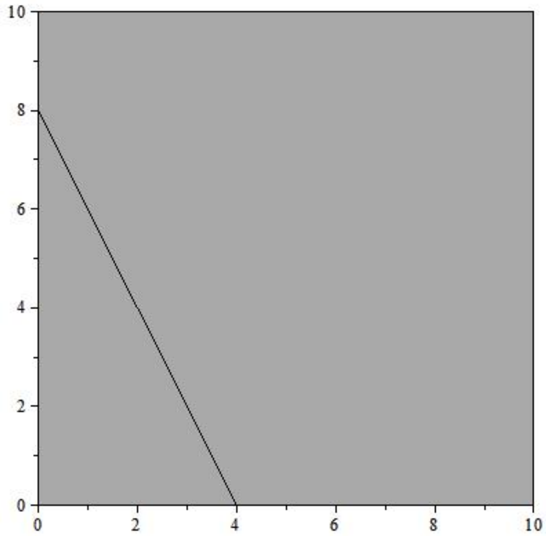
Mustaqil ish topshiriqlari javoblari



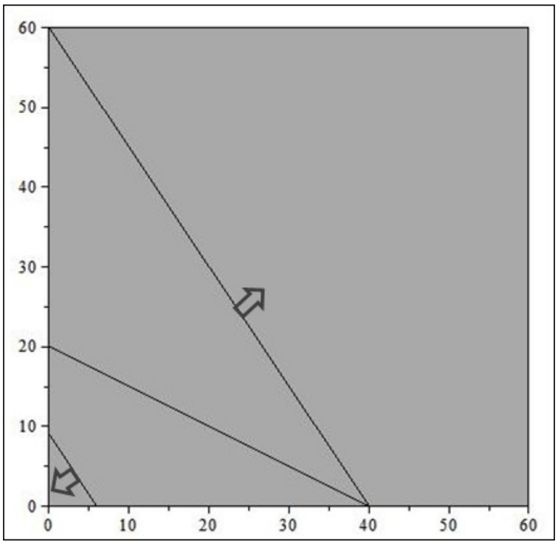
(1) Joiz soha - uchburchak



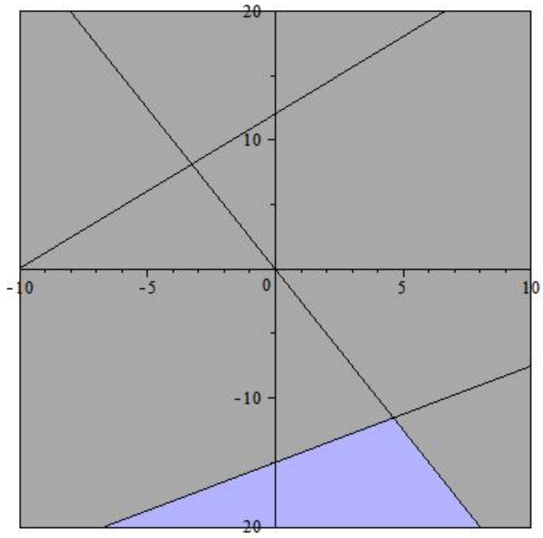
(2) Joiz soha - to'rtburchak



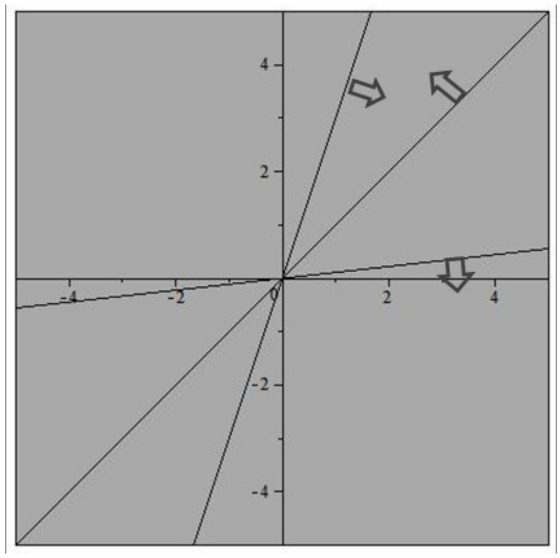
(1) Joiz soha - kesma



(2) Joiz soha - bo'sh to'plam



(1) Joiz soha - chegaralanmagan soha

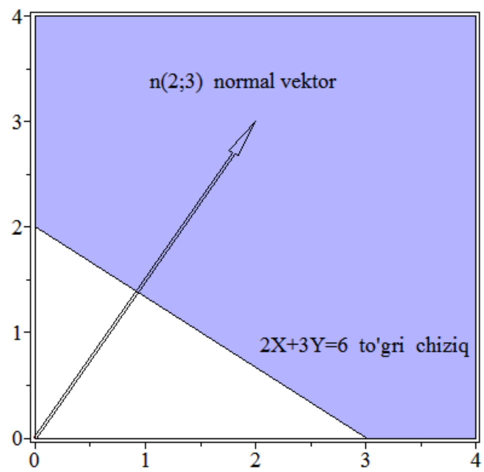


(2) Joiz soha - (0;0) nuqta

4.2 Masalani grafik usulda yechish bosqichlari

Masalaning grafik usulda yechishdagi asosiy g'oya quyidagichadir. $\vec{n}$ vektor yo'nalishida joiz sohadagi $X^* = (x_1^*; x_2^*)$ optimal nuqta izlanadi. Optimal nuqta shunday nuqtaki bu nuqta orqali o'tgan maqsad funksiyasining qiymati maksimal (minimal) bo'ladi. Optimal yechim joiz sohaning chegarasida joylashgan bo'ladi.

Chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimini topish jarayonida quyidagi holatlar ro'y berishi mumkin: Masalaning yagona yechimi mavjud; masala cheksiz ko'p yechimga ega; maqsad funksiyasi joiz sohada chegaralangan emas; joiz soha yagona nuqtadan iborat; masalaning yechimi mavjud emas.



Rasm 7: To'gri chiziq va uning normal vektori

Masalani grafik usulda yechish quyidagi tartibda amalga oshiriladi.

1. Masala shartidagi tengsizliklarni tengliklar bilan almashtirib, unga mos kelgan to'g'ri chiziqlarni chiszish.

2. Har bir tengsizlikka mos kelgan yarim tekisliklarni belgilab chiqish. $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$ shartlarga ko'ra, joiz soha 1-chorakda joylashadi.

3. Barcha tengsizliklarni qanoatlantiruvchi joiz sohani aniqlash. Agar bunday soha mavjud bo'lmasa masalaning yechimi mavjud emas.

4. Agar joiz soha bo'sh bo'lmasa, u holda maqsad funksiyasining sath chizig'i grafigini qurish kerak. Buning uchun maqsad funksiyasining biror sath chizig'ini $c_1x_1+c_2x_2 = c$ olamiz. Bu yerda c ixtiyoriy son: masalan, qulaylik uchun bu sonni c_1 va c_2 sonlarga karrali qilib olish qulay.

5. $\vec{n} = (c_1; c_2)$ vektorni qurish. Buning uchun $(0; 0)$ nuqtadan boshlanib $(c_1; c_2)$ nuqtada tugallanadigan vektor chizish lozim. Agar maqsad funksiyasining sath chizig'i va $\vec{n}$ vektor to'g'ri qurilgan bo'lsa, grafikda ular o'zaro perpendikulyar joylashadi.

6. Maqsad funksiyasining maksimal qiymatini topish uchun maqsad funksiyasini ifodalovchi to'g'ri chiziqni $\vec{n} = (c_1; c_2)$ vektor yo'nalishida siljitib borish kerak. Maqsad funksiyasining minimal qiymatini topish uchun esa, chiziqni $\vec{n} = (c_1; c_2)$ vektor yo'nalishida teskari tomonga siljitib borish kerak. Siljitish jaroyonida joiz sohaning oxirgi nuqtasini tark etuvchi nuqta maksimal yoki minimal nuqta bo'ladi. Agar bunday nuqta mavjud bo'lmasa, joiz sohaning chegaralanmaganligi to'g'risida xulosa qilamiz.

7. Maqsad funksiyasining maksimal (minimal) qiymatini aniqlashdan avval optimal qiymatga erishish nuqtasi koordinatalarini topish kerak bo'ladi. Buning uchun optimal nuqta qaysi to'g'ri chiziqlarga tegishliligini aniqlab, ular yordamida tuzilgan tenglamalar sistemasini yechish yetarlidir.

Quyidagi masalani grafik usulda yechishga to'xtalaylik.

$$4x_1 + 5x_2 \to \max$$

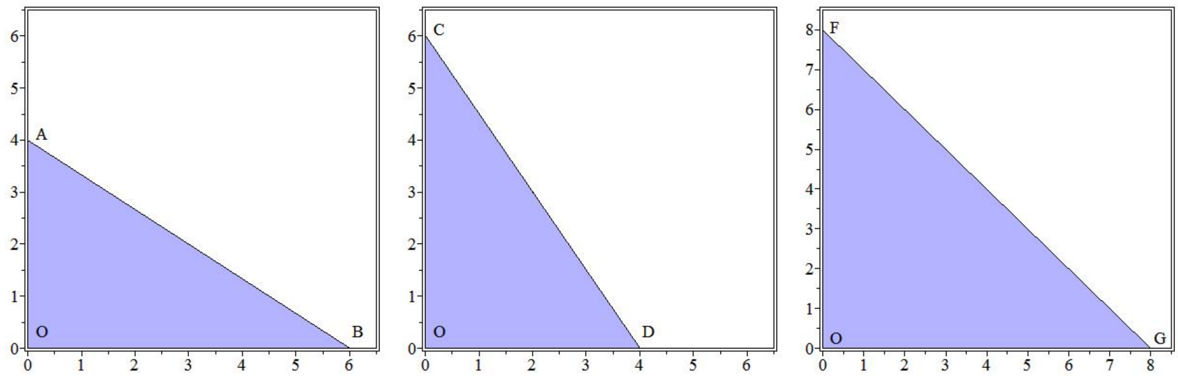
$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 24 & (a) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12 & (b) \\ x_1 + x_2 \leq 8 & (c) \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0.$$

Avvalo, joiz sohani topamiz. Nomanfiylik shartlarini e'tiborga olsak, joiz soha Dekart koordinatalar sistemasining $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ tengsizliklari bilan aniqlanadigan birinchi choragida joylashishiga isonch hosil qilamiz.

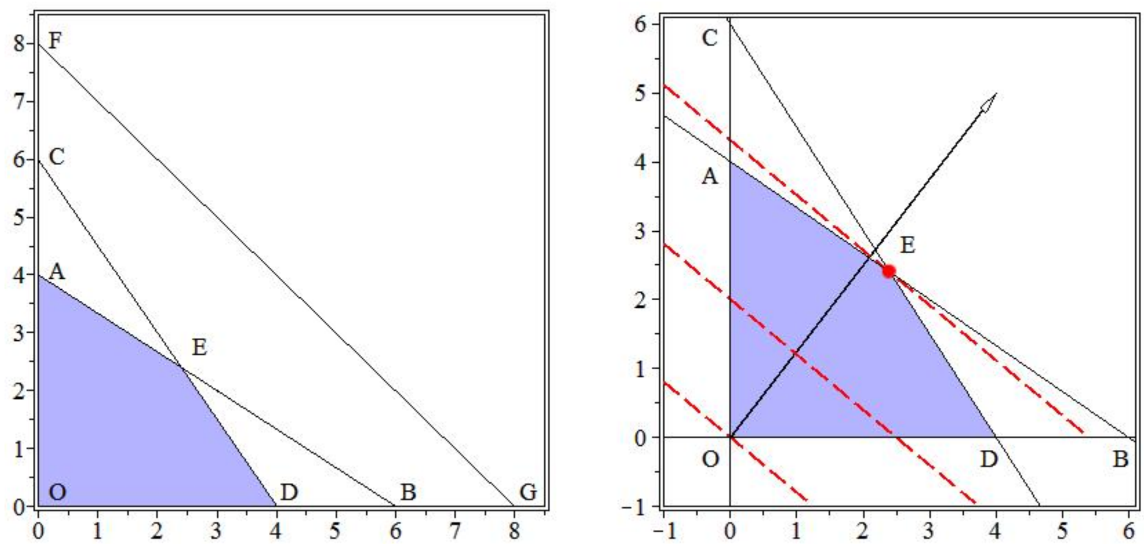
1-tengsizlik: $4x_1 + 6x_2 \leq 24$ tengsizlikni tenglik bilan almashtiramiz va $4x_1 + 6x_2 = 24$ to'g'ri chiziqning grafigini chizamiz. To'g'ri chiziqning grafigini chizishda uning koordinata o'qlari bilan kesishadigan nuqtalarini topish qulaylik tug'diradi. $x_1 = 0$ bo'lganda $x_2 = 4$ kelib chiqadi. $x_2 = 0$ bo'lganda $x_1 = 6$ ga teng bo'ladi.

Dekart koordinatalar sistemasida $(0; 4)$ va $(6; 0)$ nuqtalar orqali to'g'ri chiziq o'tkazib, $4x_1 + 6x_2 = 24$ funksiyaning grafigini hosil qilamiz. Bu to'g'ri chiziq tekislikni ikki qismga ajratadi. Tengsizlikni qanoatlantiruvchi yarim tekislikni aniqlash uchun tekislikda joylashgan to'g'ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy nuqta, masalan, koordinatalar boshi $0; 0$ nuqtani olamiz. Bu koordinatalarni tengsizlikka qo'yamiz: $4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \leq 24$, ya'ni $0 \leq 24$ kelib chiqadi. Demak, 2 ta yarimtekisliklardan koordinatalar boshini o'z ichiga olgan



(a) (b) (c)

Rasm 8: Joiz sohani aniqlash jarayoni



(a) Joiz soha (b) Yechim topish

Rasm 9: Masalaning grafik usulda yechimini topish

yarim tekislikni tanlaymiz. Shunday qilib, (a) tengsizlikni qanoatlantiruvchi soha OAB uchburchakdan iborat bo'ladi (8 (a)-rasmga qarang).

2-tengsizlik: $3x_1 + 2x_2 \leq 12$ tengsizlikni tenglik bilan almashtiramiz va $3x_1 + 2x_2 = 12$ to'g'ri chiziqning grafigini chizamiz. Bu to'g'ri chiziq koordinata o'qlarini $(0;6)$ va $(4;0)$ nuqtalarda kesib o'tadi. $(0;0)$ nuqtani tengsizlikka qo'ysak, $0 \leq 12$ tengsizlikni qanoatlantirishini ko'ramiz. Demak, yarimtekisliklardan koordinata boshini o'z ichiga olganini tanlaymiz. Natijada (b) tengsizlikni qanoatlantiruvchi soha OCD uchburchakdan iborat bo'ladi (8 (b)-rasmga qarang).

3-tengsizlik: $x_1 + x_2 \leq 8$. Usbu $x_1 + x_2 = 8$ to'g'ri chiziq koordinata o'qlarini $(0;8)$ va $(8;0)$ nuqtalarda kesib o'tadi. $(0;0)$ nuqtani tengsizlikka qo'ysak, $0 \leq 8$ tengsizlikni qanoatlantirishini ko'ramiz. Demak, (c) tengsizlikni qanoatlantiruvchi soha OFG uchburchakdan iborat bo'ladi (8 (b)-rasmga qarang). Yuqorida keltirilgan barcha sohalarning umumiy qismini olsak, $OAED$ to'rtburchakdan iborat bo'lgan joiz sohaga ega bo'lamiz (9 (a) – rasm).

Endi joiz sohada maqsad funksiyasi $f(x_1;x_2) = 4x_1 + 5x_2$ maksimal qiymatga erishadigan nuqtani topishga o'tamiz. Buning uchun avval normal vektor $\vec{n} = (4,5)$ ni quramiz. Agar maqsad funksiyasiga aniq qiymat bersak, y'ani, c ni aniq songa tenglashtirsak, hosil bo'lgan to'g'ri chiziq $\vec{n}$ vektorga perpendikulyar bo'ladi (c ga qanday qiymat berishidan qat'i nazar). To'g'ri chiziqni maksimasiya masalasini ko'rayotganimiz uchun $\vec{n}$ vektor yo'nalishida o'ziga parallel ravishda siljitib boramiz. To'g'ri chizig'imiz joiz sohaning oxirgi tark etadigan nuqtasi maqsad funksiyasiga maksimal qiymat beradigan E nuqta bo'ladi (9 (b) – rasm). E nuqtaning koordinatalarini topish uchun AB va CD to'g'ri chiziqlar tenglamalari yordamida sistema tuzib uni yechamiz:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \quad (x_1^*; x_2^*) = \left(\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right), \quad f\left(x_1^*; x_2^*\right) = \frac{108}{5}.$$

Demak, tenglamalar sistemasini yechib AB va CD to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi E ning koordinatalarini topdik: $(x_1^*; x_2^*) = \left(\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right)$. Maqsad funksiyasining optimal qiymati esa quyidagicha topiladi:

$$f_{max} = f(x_1^*; x_2^*) = f\left(\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right) = 4 \cdot \frac{12}{5} + 5 \cdot \frac{12}{5} = \frac{108}{5} = 21.6.$$

4.3 Masalani grafik usul orqali yechishning maxsus hollari

Chiziqli dasturlash masalasining yechimi mavjud bo'lmagan hollar:

1. Joiz soha bo'sh to'plamdan iborat. Bu holda barcha tengsizliklarni qanoatlantiruvchi soha mavjud bo'lmaydi, ya'ni birorta ham nuqta cheklanishlarni qanoatlantirmaydi (6-rasm).

2. Joiz soha chegaralanmaganligi bois maqsad funksiyasining optimal qiymati yo'q. Shuni aytish lozimki, joiz soha chegaralanmagan taqdirda ham optimal yechim mavjud bo'lishi mumkin.

Misol tariqasida quyidagi maksimizatsiya masalasini ko'rib chiqaylik (10-rasm):

Biz chap pastki burchakdan o'ng yuqori tomonga chizmada qizil rangda berilgan vektorga perpendikulyar sath chiziqni harakatlantiramiz.

Sath chiziq birinchi marta joiz sohani kesib o'tadigan nuqtada, maqsad funksiyasi eng kichik qiymatiga erishadi.Sath chizig'i oxirgi marta joiz sohani kesib o'tadigan nuqtada maqsad funktsiyasi eng katta qiymatiga erishadi.

Maksimizatsiya masalasini yechayotganimiz bois maqsad funksiyasining sath chizig'ini chizmada qizil rangdagi normal vektori yo'nalishida qancha harakatlantirsak ham chiziq joiz sohani tark etmaydi.Rasmda joiz sohani qizil rangdagi sath chizig'i so'nggi tark etish nuqtasini aniqlash mumkin emas, ya'ni maqsad funksiyasi cheksiz darajada oshadi. Masalaning yechimi $f_{max} = +\infty$ bo'lib, maqsad funksiyasi joiz sohada chegaralanmaganini anglatadi. Vaholanki, quyidagi minimizatsiya masalasini ko'rsak:

$$x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} (1) \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ (2) \quad -x_1 + x_2 \leq 1 \\ (3) \quad x_1 - 2x_2 \leq 1 \end{cases}$$

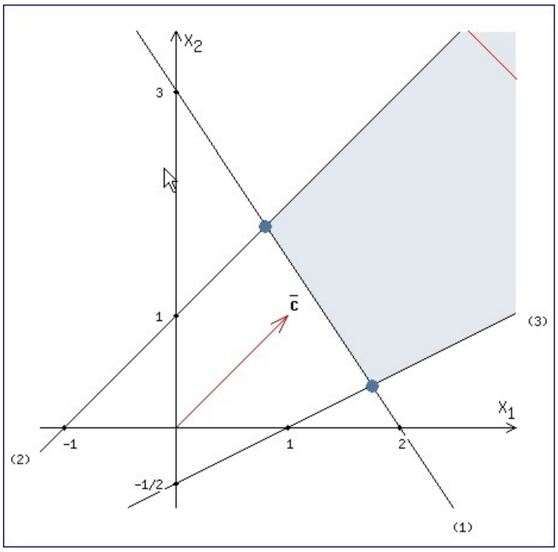
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0.$$

$$x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} (1) \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ (2) \quad -x_1 + x_2 \leq 1 \\ (3) \quad x_1 - 2x_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

(a) Chiziqli dasturlash masalasi



(b) Masalani grafik usulda yechish

Rasm 10: Maqsad funksiya chegaralanmagan hol.

joiz soha chegarlanmagan bo'lsa-da, masala yechimi mavjud va yagona bo'ladi. Bu holda optimal nuqta chizmadagi (1) va (3) chiziqlarning kesishish nuqtasidan iborat bo'lib, uning koordinatalari $(x_1^*; x_2^*) = (7/4; 3/8)$ ga teng. Maqsad funksiyasining mimimal qiymati esa quyidagicha:

$$f_{min} = f(x_1^*; x_2^*) = f\left(\frac{7}{4}; \frac{3}{8}\right) = \frac{7}{4} + \frac{3}{8} = \frac{17}{8} = 2.125.$$

Chiziqli dasturlash masalasining yechimi mavjud bo'lgan hollar:

1. Joiz soha yagona nuqtadan iborat. Bu nuqta ham minimizatsiya, ham maksimizatsiya masalasi uchun optimal yechim bo'ladi (6-rasmga qarang).

2. Optimal yechim yagona. Maqsad funksiyasining sath chizig'i joiz sohani yagona nuqtada tark etadi (9-rasmga qarang).

3. 3. Optimal yechim cheksiz ko'p. Bu holda maqsad funksiyasining sath chizig'i joiz sohani yoki nur, yoki kesma bo'yicha tark etadi.

Optimal yechim cheksiz ko'p bo'lgan hollarga misollar ko'raylik. Birinchi misolda maqsad funksiyasi maksimal qiymatga nur nuqtalarida erishadi (11-rasm).

Chizmadan ko'rinib turibdiki, joiz soha chegaralanmagan. Qoidaga ko'ra $F(x_1; x_2) = -x_1 + x_2$ maqsad funksiyasining sath chizig'ini chizmada $\vec{c}$ kabi belgilangan qizil rangdagi vektor yo'nalishida parallel siljitsak, sath chizig'i joiz sohani A niqtadan boshlanuvchi nur orqali tark etadi. Demak, A nuqta va nur ustida yotgan ixtiyoriy nuqta optimal yechim bo'ladi. A nuqta (2) va (3) to'gri chiziqlarning kesishish nuqtasi ekanligidan uning koordinatalarini topish uchun quyidagi tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} (2) \quad x_1 - x_2 = 1 \\ (3) \quad x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 = 1/2 \end{cases}$$

$A(3/2, 1/2)$ nuqtasida maqsad funksiyasining qiymatini hisoblaylik:

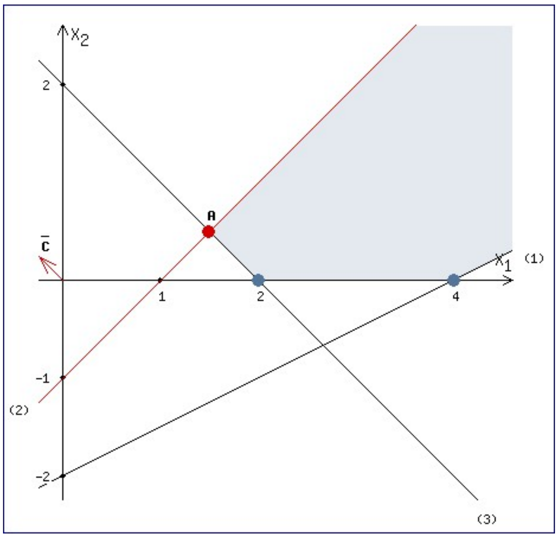
$$F_{max} = F(A) = -1 \cdot 3/2 + 1 \cdot 1/2 = -1.$$

$$-x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} (1) \quad x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ (2) \quad x_1 - x_2 \geq 1 \\ (3) \quad x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

(a) Chiziqli dasturlash masalasi



(b) Masalani grafik usulda yechish

Rasm 11: Cheksiz ko'p yechim bo'lgan hol.

A nuqtada boshlangan nurning har qanday nuqtasining koordinatalari quyidagicha yozilishi mumkin:

$$x_1 = 3/2 + 1 \cdot t, \quad x_2 = 1/2 + 1 \cdot t, \quad bu\ erdat \geq 0.$$

$t = 1$ ga mos kelgan nuqtani B deb belgilaylik. B nuqtaning koordinatalarini topaylik.

$$x_1 = 3/2 + 1 \cdot 1 = 5/2, \quad x_2 = 1/2 + 1 \cdot 1 = 3/2.$$

$B(5/2, 3/2)$ nuqtada maqsad funksiyasining qiymatini hisoblaylik:

$$F(B) = -1 \cdot 5/2 + 1 \cdot 3/2 = -1,$$

$F_{max} = F(A) = F(B)$ ekan. A nuqtadan boshlanuvshi nurning ixtiyoriy nuqtasida maqsad funksiyasi optimal qiymatga erishadi:

$$F_{max} = -1 \cdot x_1^* + 1 \cdot x_2^* = -1 \cdot (3/2 + 1 \cdot t) + 1/2 + 1 \cdot t) = -1.$$

Masalaninig yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$(x_1^*; x_2^*) = (3/2 + t; 1/2 + t), \ (t \geq 0), \ F_{max} = -1.$$

.

Navbatdagi misolda maqsad funksiyasi minimal qiymatga kesmaning nuqtalarida erishadi (12-rasm). Joiz soha beshburchakdan iborat bo'lib, chizmada boyab ko'rsatilgan. Minimallashtirish masalasini yechayottganimiz bois $F(x_1; x_2) = 2x_1 + 2x_2$ maqsad funksiyasining satx chizig'ini chizmada $\vec{c}$ kabi belgilangan qizil rangdagi vektor yo'nalishiga qarshi yo'nalishda parallel siljitsak, sath chizig'i joiz sohani AB kesma orqali tark etadi. Demak, AB kesma ustida yotgan ixtiyoriy nuqta optimal yechim bo'ladi. Kesma uchlarining koordinatalarini topamiz. A nuqta (1) va (2) to'gri chiziqlarning kesishish nuqtasi ekanligidan uning koordinatalarini topish uchun quyidagi tenglamalar sistemasini yechamiz:

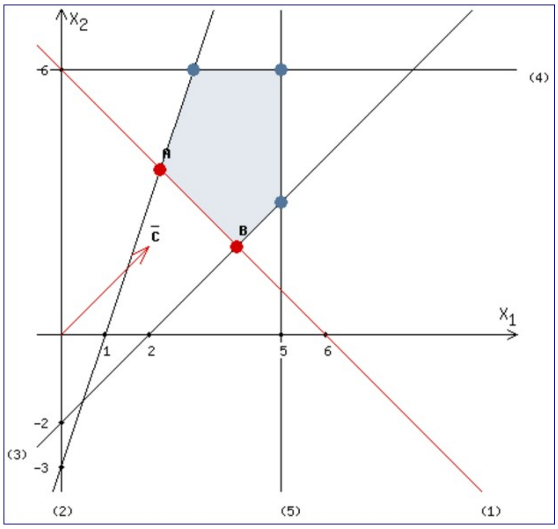
$$\begin{cases} (1) \quad x_1 + x_2 = 6 \\ (2) \quad 3x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9/4 \\ x_2 = 15/4 \end{cases}$$

$$2x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} (1) & x_1 + x_2 \geq 6 \\ (2) & 3x_1 - x_2 \geq 3 \\ (3) & x_1 - x_2 \leq 2 \\ (4) & x_2 \leq 6 \\ (5) & x_1 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

(a) Chiziqli dasturlash masalasi



(b) Masalani grafik usulda yechish

Rasm 12: Cheksiz ko'p yechim bo'lgan holat.

$A(9/4; 15/4)$ nuqtada maqsad funksiyasining qiymatini hisoblaylik:

$$F_{min} = F(A) = 2 \cdot 9/4 + 2 \cdot 15/4 = 12.$$

B nuqta (1) va (3) to'gri chiziqlarning kesishish nuqtasi ekanligidan uning koordinatalarini topish uchun quyidagi tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} (1) & x_1 + x_2 = 6 \\ (3) & x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$B(4; 2)$ nuqtada maqsad funksiyasining qiymatini hisoblaylik:

$$F(B) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 12.$$

$F_{min} = F(A) = F(B)$ ekan. Funksiyaning optimal qiymati 12 ga teng ekan. Optimal yechim, ya'ni AB kesmaning har qanday nuqtasining koordinatalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$x_1 = 9/4 \cdot t + 4 \cdot (1 - t), \quad x_2 = 15/4 \cdot t + 2 \cdot (1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ba'zi hollarda o'zgaruvchilar soni ikkidan yuqori bo'lganda ham grafik usulda yechish imkoniyati paydo bo'ladi. Fikrimizni quyidagi misolda bayon qilaylik.

$$f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_4 = 8 \\ 7x_1 + 10x_2 + 7x_5 = 70 \end{cases} \qquad (*)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

Tengliklardagi x_3, x_4, x_5 o'zgaruvchilarni tashlab yuborish hisobiga tengsizliklar hosil qilamiz. Tengliklardan x_3, x_4, x_5 o'zgaruvchilarni x_1, x_2 o'zgaruvchilar orqali ifodalab, maqsad funksiyasini ham ikki o'zgaruvchili funksiyaga keltiramiz. Natijada masala quyidagi ko'rinishni oladi.

$$f = x_1 + x_2 + \tfrac{1}{5}(12 - 2x_1 - 4x_2) - \tfrac{1}{2}(8 - 5x_1 + x_2) + \tfrac{1}{7}(70 - 7x_1 - 10x_2) \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 5x_1 - x_2 \geq 8 \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

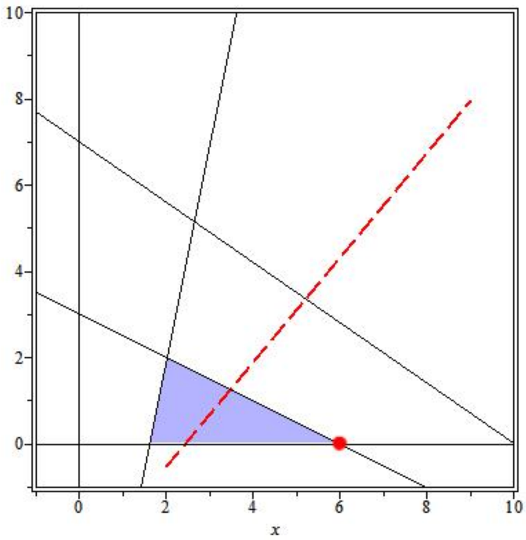
Maqsad funksiyasini soddalashtiramiz; $f = (21/10) \cdot x_1 - (121/70) \cdot x_2 + 42/5$.

$$(21/10) \cdot x_1 - (121/70) \cdot x_2 + 42/5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 5x_1 - x_2 \geq 8 \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0.$$

(a) Chiziqli dasturlash masalasi



(b) Masalani grafik usulda yechish

Yangi hosil qilingan masalani grafik usulda yechib quyidagi javobni olamiz:

$$(x_1^*; x_2^*) = (6; 0), \quad f_{max} = (21/10) \cdot 6 - (121/70) \cdot 0 + 42/5 = 21.$$

Endi (*) tengliklar yordamida x_3^*, x_4^*, x_5^* larni topamiz: $x_3^* = 0, x_4^* = 12, x_5^* = 4$.

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

Berilgan chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yeching.

1. $5x_1 + 5x_2 \to \max$, $x_1 \leq 100,$ $x_2 \leq 80,$ $2x_1 + 4x_2 \leq 400,$ $x_1, x_2 \geq 0.$

2. $2x_1 + 3x_2 \to \max$, $x_1 + 2x_2 \leq 6,$ $5x_1 + 3x_2 \leq 15,$ $x_1, x_2 \geq 0.$

3. $3x_1 + 4x_2 \to \min$, $x_1 + 3x_2 \geq 6,$ $x_1 + x_2 \geq 4,$ $x_1, x_2 \geq 0.$

4. $-3x_1 - 4x_2 \to \min$, $x_1 - 3x_2 \geq 1,$ $x_2 \leq 2,$ $x_1, x_2 \geq 0.$

5.	$2x_1 + x_2 \to \min$ $x_1 + x_2 \geq 10,$ $3x_1 + 5x_2 \leq 15,$ $x_1, x_2 \geq 0.$	6.	$x_1 + x_2 \to \max$ $2x_1 + x_2 \leq 4,$ $x_1 + 2x_2 \leq 3,$ $x_1, x_2 \geq 0.$
7.	$z = 2.5\,x_1 + x_2 \to \max$ $3x_1 + 5x_2 \leq 1.5,$ $5x_1 + 2x_2 \leq 10,$ $x_1, x_2 \geq 0.$	8.	$z = x_1 + x_2/2 \to \max$ $2x_1 + x_2 \leq 20,$ $x_1 + 3x_2 \leq 35,$ $x_1, x_2 \geq 0.$
9.	$z = 0.12x_1 + 0.15x_2 \to \min$ $60x_1 + 60x_2 \geq 300,$ $12x_1 + 6x_2 \geq 36,$ $10x_1 + 30x_2 \geq 90,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	10.	$z = -3x_1 - 4x_2 \to \min$ $x_1 + x_2 \leq 20,$ $-x_1 + 4x_2 \leq 20,$ $x_1 \geq 10,$ $x_2 \geq 5,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
11.	$3x_1 + 2x_2 \to \max$ $2x_1 + 2x_2 \leq 8,$ $3x_1 + 2x_2 \leq 12,$ $x_1 + 0,5x_2 \leq 3,$ $x_1, x_2 \geq 0.$		a) optimal yechimni toping. b) masalada ortiqcha chegara bormi? Agar ortiqcha chegara bo‘lsa, u qaysi chegara? Agar ortiqcha chegara olib tashlansa, masalaning yechimi o‘zgaradimi?
12.	$x_1 + 2x_2 \to \min$ $x_1 + 4x_2 \leq 21,$ $2x_1 + x_2 \geq 7,$ $3x_1 + 1.5x_2 \leq 21,$ $-2x_1 + 6x_2 \geq 0,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$		a) optimal yechimni toping va optimal yechimdagi maqsad funksiyasining qiymatini toping. b) har bir chegaralardagi ortiqcha va yetmaydigan mahsulotlarni aniqlang. c) agar maqsad funksiyasi $5x_1 + 2x_2$ ga o‘zgarsa, optimal yechim qanday bo‘ladi?

13. Quyidagi maxsus hollarga oid masalalarni grafik usulda yeching.

1) $4x_1 + 8x_2 \to \max,$ $2x_1 + 2x_2 \leq 10,$ $-x_1 + x_2 \geq 8,$ $x_1, x_2 \geq 0.$

2) $x_1 + x_2 \to \max,$ $8x_1 + 6x_2 \geq 24,$ $4x_1 + 6x_2 \geq -12,$ $2x_2 \geq 4,$ $x_1, x_2 \geq 0.$

3) $x_1 + x_2 \to \max,$ $x_1 + x_2 \leq 1,$ $x_1, x_2 \geq 0.$

4) $x_1 + 2x_2 \to \max,$ $x_1 - x_2 \leq 1,$ $x_1 - 2x_2 \leq 1,$ $x_1, x_2 \geq 0.$

Noma’lumni yo‘qotish va grafik usuldan foydalanib quyidagi 14-17 masalalarning optimal yechimini toping:

14. $$\begin{aligned} &-x_1 + 3x_2 + x_3 \le 4, \\ &7x_1 - 2x_3 \le 16, \\ &x_1 + 3x_2 \le 24, \\ &2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} &x_1 + x_3 - 7x_4 + x_5 \to \max, \\ &x_1 - x_2 + 6x_4 - 2x_5 = -7, \\ &x_2 - x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 24, \\ &x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 32, \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} &-x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 \to \min, \\ &x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 + 2x_5 = -5, \\ &x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2, \\ &-2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 6, \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_3 - 9x_4 \to \max, \\ &2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 \le 6, \\ &x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 5, \\ &5x_1 + x_2 - 3x_4 = 11, \\ &3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{aligned}$$

Mustaqil ish topshiriqlari javoblari

1. $x_1 = 100,\ x_2 = 50, \quad max = 750.$
2. $x_1 = 12/7,\ x_2 = 15/7, \quad max = 54/7.$
3. $x_1 = 3,\ x_2 = 1, \quad min = 13.$
4. optimal yechim mavjud emas.
5. optimal yechim mavjud emas.
6. $x_1 = 5/3,\ x_2 = 2/3, \quad max = 7/3.$
7. $x_1 = 1/2,\ x_2 = 0, \quad z = 5/4.$
8. $x_1 = 10k + 5(1-k),\ x_2 = 10(1-k), \qquad z = 10$, yechin cheksiz kop.
9. optimal yechim mavjud emas.
10. $x_1 = 12,\ x_2 = 8, \quad min = -68.$
11. a) $x_1 = 2,\ x_2 = 2, \quad max = 10.$
    b) 2-chegara ortiqcha; 2-chegara olib tashlansa, optimal yechim o‘zgarmaydi.
12. a) $x_1 = 7/2,\ x_2 = 0, \quad min = 7/2.$
    b) birinchi chegara uchun ortiqcha 17,5 ga teng. c) $x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ min = 15.$
13. 1) joiz soha bo‘sh; 2) joiz soha chegaralanmagan; 3) cheksiz ko‘p yechimga ega;
    4) maqsad funksiyasi joiz sohada cheksiz o‘sadi.
14. $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6, \quad max = 14.$
15. $x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6,\ x_4 = 0,\ x_5 = 5, \quad max = 14.$
16. Joiz soha bo‘sh to‘plam.
17. $x_1 = 9/4,\ x_2 = 1/2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1/4, \quad max = 1/2.$

4.4 Ishlab chiqarishning optimal rejalashtirish masalasini grafik usulda yechish

Muammoning qo'yilishi. Quyida keltirilgan ishlab chiqarishning optimal rejalashtirish haqidagi amaliy masala uchun uning matematik modelini 3.1 - bo'limda tuzgan edik.

«Chinor» mebel sexi:

Sex ikki turdagi mahsulot ishlab chiqaradi: shkaf va televizor uchun tumba. Bir dona shkaf yasash uchun 3,5 m. standart DSP, 1 m. standart shisha va bir ishchining bir kunlik mehnati sarflanar ekan. Bitta tumba uchun 1 m. DSP, 2 m. shisha va bir ishchining bir kunlik mehnati sarflanar ekan.
Bir dona shkafni sotishdan tushadigan foyda 200 $, tumbadan esa – 100 $ ekan. Sexning moddiy va mehnat resurslari cheklangan bo'lib,ssexda jami 150 ta ishchi ishlaydi. DSP kunlik zaxirasi 350 m., shishaning zaxirasi esa 240 m.ni tashkil etadi.
Sex maksimal foyda olish uchun bir kunda qancha shkaf va tumba ishlab chiqarishi kerak?

CD disk: masalalar fayllari>**Chinor mebel sexi.lin**

Masalaning matematik modeli quyidagicha edi:

$$P = 200X + 100Y \to \max,$$

$$\begin{cases} 3,5X + Y \leq 350, \\ X + 2Y \leq 240, \\ X + Y \leq 150, \\ X \geq 0, \quad Y \geq 0. \end{cases}$$

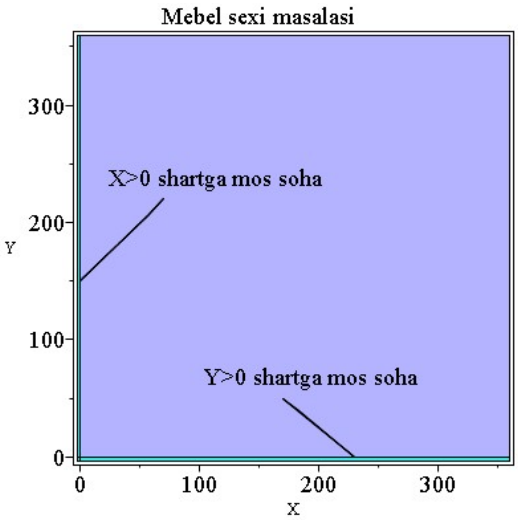
Eslatib otamiz, kichik hajmdagi chiziqli dasturlash masalasini yechishning eng oson usuli grafik usuldir. Bunday masalalar qatoriga yuqorida ko'rib o'tilgan mebel sexi haqidagi masala ham kiradi.

Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda faqatgina masala o'zgaruvchilari soni ikkita bo'lgan holdagina yechish mumkin

Masalani grafik usulda yechish uchun masala o'zgaruvchilari soni ikkita bo'lishi kerak (ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan shkaflar soni X va tumbalar soni Y kabi). Masala o'zgaruvchilar soni ikkitadan ko'p bo'lganida masala cheklanishlari bilan aniqlanadigan mumkin bo'lgan yechimlar sohasini tekislikda tasvirlab bo'lmaydi.

Masalaning grafik usulida yechish katta hajmdagi masalalarni yechish jarayoni mohiyatini tushunishga yordam beradi. «Chinor» mebel sexi haqidagi masalani grafik usulda yechish uchun masala cheklanishlarini (shartlarini) tekislikda tasvirlashga harakat qilamiz.

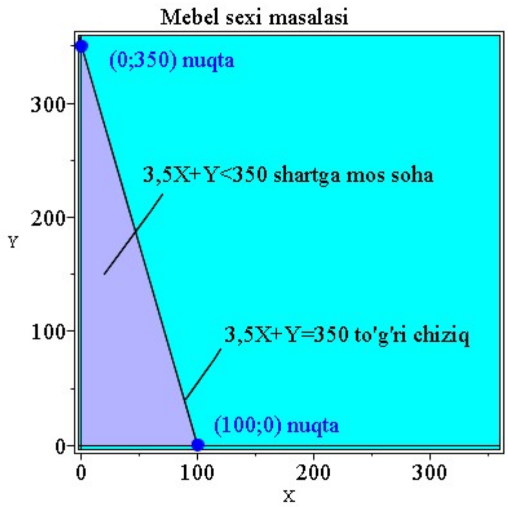
$X \geq 0$ va $Y \geq 0$ shartlarining geometrik tasviri



Koordinatalar tekisligining gorizontal o'qiga shkaflar soni X ni va vertikal o'qiga tumbalar soni Y ni mos qo'yamiz. Ishlab chiqarish hajmi nomanfiyligi, ya'ni $X \geq 0$ va $Y \geq 0$ ekanligidan, koordinatalar tekisligining faqatgina birinchi choragida ishlashimiz ma'lum bo'ladi.

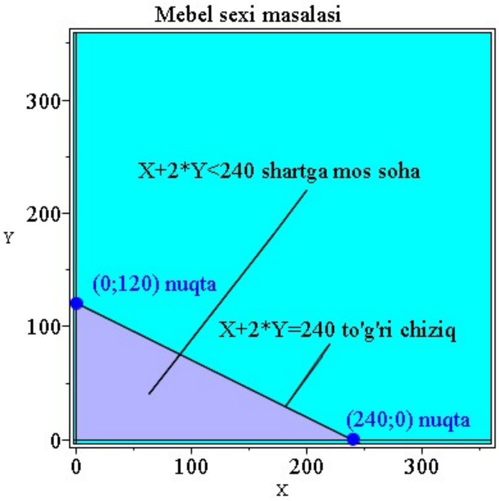
$3.5X + Y \leq 350$ shartining geometrik tasviri

Zaxiradagi DSP miqdori bilan aniqlanadigan birinchi $3,5X + Y \leq 350$ shartni geometrik tasvirlaymiz. Ma'lumki, $3,5X + Y = 350$ tenglama tekislikda to'g'ri chiziqni aniqlaydi. $3,5X+Y \leq 350$ tengsizlik esa ushbu to'g'ri chiziq bilan chegaralangan yarim tekislikni aniqlaydi.



$3,5X + Y = 350$ tenglama bilan aniqlanadigan to'g'ri chiziq tekislikni ikkita yarim tekislikka ajratadi. Shu yarim tekisliklarning qay biri $3,5X + Y \leq 350$ sohaga mos keladi? Buni aniqlash uchun quyidagicha yo'l tutamiz. Ma'lumki, $(y, x) = (0; 0)$ nuqta koordinatalar boshini aniqlaydi va grafikning chap pastki burchagida joylashgan. $x = 0$ va $y = 0$ qiymatlarni $3,5X+Y \leq 350$ tengsizlikka olib borib qo'yamiz. Agar tengsizlik o'rinli bo'lsa, $(0; 0)$ nuqta yotgan yarim tekislik, aks holda, ya'ni, tengsizlik o'rinli bo'lmasa, $(0; 0)$ nuqta yotmagan yarim tekislik tanlanadi. $3,5X + Y = 3,5 \cdot 0 + 0 = 0 \leq 350$, demak, tengsizlik o'rinli bo'lgani uchun $(0; 0)$ nuqta yotgan **pastki** yarim tekislik olinadi.

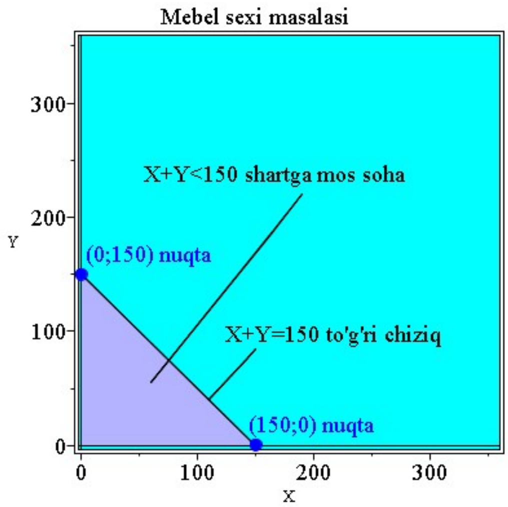
$X + 2Y \leq 240$ *shartining geometrik tasviri*



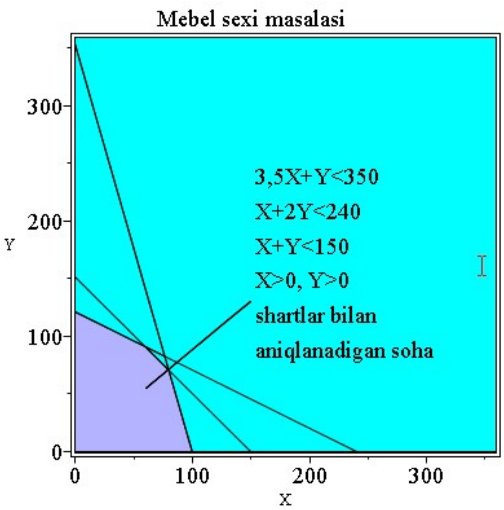
Zaxiradagi shisha miqdori bilan aniqlanadigan ikkinchi $X+2Y \leq 240$ shartni geometrik tasvirlaymiz. Avvalgidek ish tutamiz, $X + 2Y = 240$ tenglama tekislikda to'g'ri chiziqni aniqlaydi. $X + 2Y \leq 240$ tengsizlik esa ushbu to'g'ri chiziq bilan chegaralangan yarim tekislikni aniqlaydi.

$X + Y \leq 150$ *shartining geometrik tasviri*

Korxonaning ishchi kuchi zaxirasi bilan aniqlanadigan uchinchi $X + Y \leq 150$ shartni geometrik tasvirlaymiz.
Ma'lumki, $X + Y = 150$ tenglama tekislikda to'g'ri chiziqni aniqlaydi. $X + Y \leq 150$ tengsizlik esa ushbu to'g'ri chiziq bilan chegaralangan yarim tekislikni aniqlaydi.

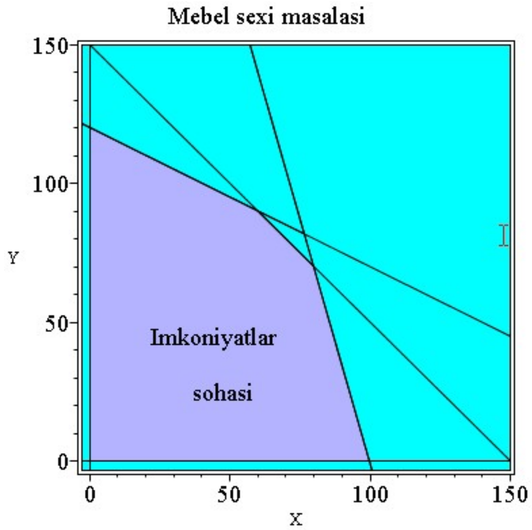


Barcha shartlar bilan aniqlanadigan sohaning geometrik tasviri

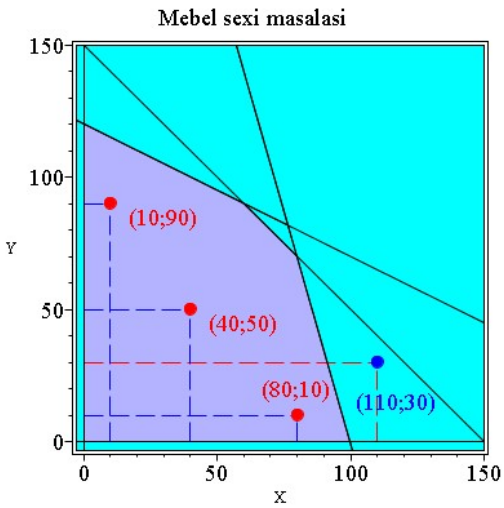


Zaxiradagi DSP va shisha miqdorlari, korxonaning ishchi kuchi va nomanfiylik shartlari bilan aniqlanadigan mumkin bo'lgan qiymatlarning, ya'ni ***imkoniyatlar sohasi*** yoki ***joiz soha***ning geometrik tasviri.

Ushbu sohaning ixtiyoriy nuqtasi (x, y) bilan aniqlanadigan ishlab chiqarish rejasini amalga oshirishga korxonaning qurbi yetadi, ya’ni, ishlab chiqarish rejasi zaxiradagi DSP, shisha miqdori, ishchi kuchi imkoniyatlari doirasida bo’ladi.



Yuqoridagi gaplarning isboti sifatida turli uchta ishlab chiqarish rejasini tahlil qilib chiqamiz.



Birinchi reja: $(x, y) = (10, 90)$, ya’ni bir kunda $x = 10$ dona shkaf va $y = 90$ dona tumba ishlab chiqarish.
Ikkinchi reja: $(x, y) = (40, 50)$, ya’ni bir kunda $x = 40$ dona shkaf va $y = 50$ dona tumba ishlab chiqarish.
Uchinchi reja: $(x, y) = (80, 10)$, ya’ni bir kunda $x = 80$ dona shkaf va $y = 10$ dona tumba ishlab chiqarish.
To‘rtinchi reja: $(x, y) = (110, 30)$, ya’ni bir kunda $x = 110$ dona shkaf va $y = 30$ dona tumba ishlab chiqarish.

Ishlab chiqarishning birinchi rejasini tahlil qilamiz. Korxona har kuni $x = 10$ dona shkaf va $y = 90$ dona tumba ishlab chiqarishini rejalashtirsin. Bir dona shkafga 3,5 m. DSP sarflansa, 10 dona shkafga $3,5 \cdot 10 = 35$ metr DSP sarflanadi. Bir dona tumbaga 1 m. DSP sarflangani uchun 90 dona tumbaga $1 \cdot 90 = 90$ metr DSP sarflanadi. Ushbu ishlab chiqarish rejasini amalga oshirish uchun $3,5 \cdot 10 + 1 \cdot 90 = 35 + 90 = 125$ metr DSP kerak bo‘lar ekan. Bu ko‘rsatkichqa ko’ra sexning DSP zaxirasi 350 metrdan oshmaydi, ya’ni: $125 \leq 350$. Sexning DSP zaxiradan kelib chiqib 10 dona shkaf va 90 dona tumba ishlab chiqarish imkoniyati bor ekan.

Bir dona shkafga 1,0 m. shisha sarflansa, 10 dona shkafga $1 \cdot 10 = 10$ metr shisha sarflanadi. Bir dona tumbaga 2 metr shisha sarflangani uchun 90 dona tumbaga $2 \cdot 90 = 180$ metr shisha sarflanadi. Ishlab chiqarish rejasini amalga oshirish uchun $1 \cdot 10 + 2 \cdot 90 = 10 + 180 = 190$ metr shisha kerak bo‘lar ekan. Bu ko‘rsatkichga ko’ra sexning shisha zaxirasi 240 metrdan oshmaydi, ya’ni: $190 \leq 240$. Sexning shisha zaxirasidan kelib chiqib, 10 dona shkaf va 90 dona tumba ishlab chiqarish imkoniyati bor ekan.

Korxonaning jami ishchilar soni 150 kishiga teng. Bir ishchi kuniga bitta shkaf yoki bitta tumba yasashi mumkin. Demak, 10 ta shkaf yasash uchun bir kunda 10 ishchi band bo‘ladi, 90 ta tumba yasash uchun esa 90 ta ishchi band bo‘ladi. Jami band bo‘lgan ishchilar soni $10 + 90 = 100$, jami ishchilar sonidan oshib ketmaydi.

Korxona har kuni $x = 10$ dona shkaf va $y = 90$ dona tumba ishlab chiqarishini rejalashtirsin. U holda ushbu rejani amalga oshirgandan so‘ng ishlatilmagan $350 - 125 =$

225 metr DSP va $240 - 195 = 45$ metr shisha ortib qoladi. Shuningdek, $150 - 100 = 50$ ta ishchi ishsiz qoladi. Ishlab chiqarish jarayonini tashkil etishda korxonaning bor imkoniyatlaridan unumli foydalanilmadi. Endi korxonaning kundalik foydasi nimaga teng boʻlishini koʻraylik. Sexning kundalik ishlab chiqaradigan shkaflar soni X va tumbalar soni Y boʻlganida, sexning kundalik umumiy foydasi har ikki mahsulotdan koʻradigan foydalarning yigʻindisidan iborat boʻladi: $P = 200X + 100Y$. Agar bir dona shkafdan tushadigan foyda 200$ boʻlsa, 10 dona shkafdan tushadigan foyda 2000$ ga teng boʻladi. Xuddi shu kabi, bir dona tumbadan tushadigan foyda 100$ boʻlsa, 90 dona tumbadan tushadigan foyda 9000$ ga teng boʻladi. Kundalik ishlab chiqilgan jami mahsulotdan tushadigan foyda $P = 200 \cdot 10 + 100 \cdot 90 = 2000 + 9000 = 11000$ ga teng boʻlar ekan.

Shu tariqa ikkinchi va uchinchi ishlab chiqarish rejasini tahlil etib, natijalarni 3-jadvalga kiritamiz.

Toʻrtinchi ishlab chiqarish rejasini ifodalovchi $(110, 30)$ nuqta masala shartlariga mos keluvchi imkoniyatlar sohasidan tashqarida joylashgan. Ushbu rejani amalga oshirish uchun zarur xom ashyo hajmlarini aniqlaymiz. Bir dona shkafga 3,5 m. DSP sarflansa, 110 dona shkafga $3,5 \cdot 110 = 385$ metr DSP kerak ekan. Bir dona tumbaga 1 m. DSP sarflangani uchun 30 dona tumbaga $1 \cdot 30 = 30$ metr DSP sarflanadi. Ishlab chiqarish rejasini amalga oshirish uchun jami $3,5 \cdot 110 + 1 \cdot 30 = 385 + 30 = 415$ metr DSP kerak boʻlar ekan. Bu koʻrsatkich sexning DSP zaxirasi 350 metrdan koʻp, yaʼni, $415 \geq 350$ ekan. Sexning mavjud DSP zaxirasi 110 dona shkaf va 30 dona tumba ishlab chiqarish uchun qoʻshimcha $415 - 350 = 65$ metr DSP kerak ekan.

Bir dona shkafga 1,0 m. shisha sarflansa, 110 dona shkafga $1 \cdot 110 = 110$ metr shisha sarflanadi. Bir dona tumbaga 2 metr shisha sarflangani uchun 30 dona tumbaga $2 \cdot 30 = 60$ metr shisha sarflanadi. Ishlab chiqarish rejasini amalga oshirish uchun $1 \cdot 110 + 2 \cdot 30 = 110 + 60 = 170$ metr shisha kerak boʻlar ekan. Bu koʻrsatkichga ko'ra sexning shisha zaxirasi 240 metrdan oshmaydi, yaʼni: $190 \leq 240$. Sexning shisha zaxirasidan kelib chiqib, 110 dona shkaf va 30 dona tumba ishlab chiqarish imkoniyati bor ekan.

Korxonaning jami ishchilar soni 150 kishiga teng. Bir ishchi kuniga bitta shkaf yoki bitta tumba yasashi mumkin. Demak, 110 ta shkaf va 30 ta tumba yasash uchun 140 ta ishchi band boʻladi. Jami band boʻlgan ishchilar soni $110 + 30 = 140$, jami ishchilar sonidan oshib ketmaydi. Xulosa qiladigan boʻlsak, toʻrtinchi rejani amalga oshirish uchun shisha va ishchi kuchi zaxirasi yetarli boʻlsada, ammo mavjud DSP hajmi yetarli emas ekan.

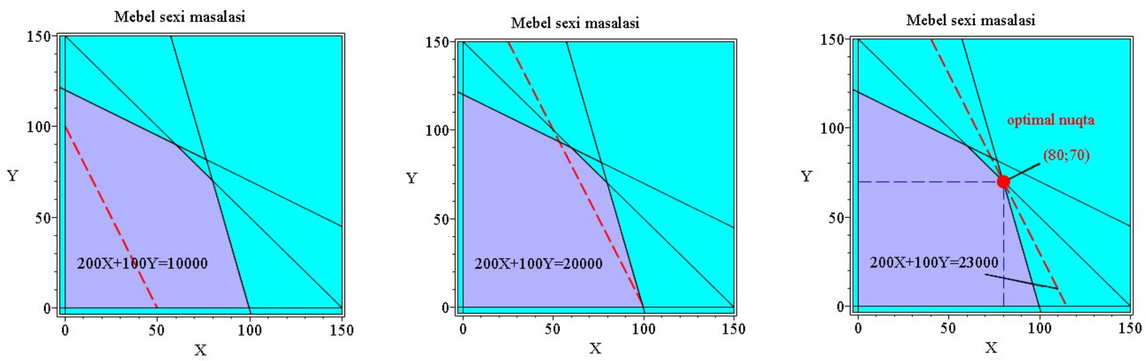
Savol: *Qaysi mahsulotdan qancha ishlab chiqarsak korxonaning xom ashyo zaxirasining imkoniyati yetarli boʻladi?*
Javob: *Masala shartlari asosida aniqlangan imkoniyatlar sohasiga tegishli ishlab chiqarish rejalari uchungina korxona zaxirasi hajmi yetarli boʻladi!*

Yuqoridagi jadvaldan koʻrinib turibdiki, korxona zaxirasi imkoniyatlari doirasida turli ishlab chiqarish rejalarini amalga oshirish mumkin. Birinchi, ikkinchi va uchinchi ishlab chiqarish rejalari bunga yaqqol misol boʻla oladi. Turli rejalarda korxonaning oladigan foyda miqdori turlicha. Tahlil qilingan rejalar orasida uchinchi reja, yaʼni 80 dona shkaf va 10 dona tumba ishlab chiqarish rejasiga amal qilganda korxona eng katta foyda 17000$ olar ekan. Bunda «Zaxiradagi DSP, shisha va ishchi kuchi imkoniyatlaridan yanada unumliroq foydalangan holda bundan ham ziyodroq foyda olish imkoniyati bormi?» degan savol tugʻilishi tabiiy.

Faraz qilaylik, korxona ishlab chiqarishdan 10000$ foyda olishni moʻljallayotgan

Reja	1- reja	2- reja	3- reja	4- reja
shkaflar soni	10 dona	40 dona	80 dona	110 dona
tumbalar soni	90 dona	50 dona	10 dona	30 dona
DSP sarfi	125 m.	90 m.	290 m.	415 dona
ortiqcha DSP	225 m.	160 m.	70 m.	-65 m.
shisha sarfi	190 m.	140 m.	100 m.	190 m.
ortiqcha shisha	50 m.	100 m.	140 m.	50 m.
band ishchilar	100 ta	90 ta	90 ta	140 ta
bekorchi ishchilar	50 ta	60 ta	60 ta	10 ta
Foyda	**11 000$**	**13 000$**	**17 000$**	—

Jadval 3: Turli ishlab chiqarish rejalari tahlili.



a. foyda = 10000 b. foyda = 20000 c. foyda = 23000

Rasm 13: Foydaning turli ko‘rsatkichlariga mos keladigan grafiklar

bo‘lsin. Korxona $(x, y) = (0, 100)$ ishlab chiqarish rejasi asosida, ya’ni shkaflar ishlab chiqarmay, balki faqat 100 dona tumba ishlab chiqarsa, uning foydasi $200 \cdot X + 100 \cdot Y = 200 \cdot 0 + 100 \cdot 100 = 10000$ ni tashkil etar ekan. $(x, y) = (50, 0)$ va $(x, y) = (30, 40)$ rejalar uchun ham korxonaning foydasi 10000$ ga teng bo‘ladi. $200X+100Y = 10000$ to‘g‘ri chiziq maqsad funksiyasining $P = 10000$ qiymatiga mos keluvchi sath chizig‘i deb ataladi. Ushbu chiziqning grafigi 13 (a)- rasmda qizil punktir chiziq bilan tasvirlangan. Imkoniyatlar sohasidagi sath chizig‘i ustida joylashgan barcha nuqtalar yordamida aniqlanadigan ish rejalarida foydaning qiymati aynan 10000$ ga teng bo‘ladi.

$200X + 100Y = 20000$ to‘gri chiziq maqsad funksiyasining $P = 20000$ qiymatiga mos keluvchi sath chizig‘ini aniqlaydi. Ushbu chiziqning grafigi 13 (b) rasmda qizil punktir chiziq bilan tasvirlangan. Sath chizig‘i ustida joylashgan imkoniyatlar sohasidagi barcha nuqtalar yordamida aniqlanadigan ish rejalarida foydaning qiymati aynan $20000ga teng bo‘ladi. Masalan, $(x, y) = (100, 0)$, $(x, y) = (0, 200)$ va $(x, y) = (60, 80)$ rejalar uchun ham korxonaning foydasi 20000$ ga teng bo‘ladi.

13 (a) va (b) grafiklarni solishtiramiz: 10000 va 20000 qiymatlarga mos keluvchi sath chiziqlari parallel bo‘lib, birinchisini yuqoriga siljitish yordamida ikkinchisi hosil qilingan.

Savol: *Bor imkoniyatlar doirasida ishlab chiqarish rejasini qanday tuzganimizda korxonaning foydasi eng katta bo'ladi?*
Javob: *Maqsad funksiyasining sath chizig'ini yuqoriga, toki u imkoniyatlar sohasini tark etmagunga qadar siljitish lozim. Sath chizig'ining imkoniyatlar sohasini tark etish nuqtasi imkoniyatlar doirasidagi eng katta daromad keltiruvchi ishlab chiqarish rejasini aniqlaydi.*

13 (c)- rasmdagi grafikka e'tibor qaratamiz. Maqsad funksiyasining sath chizig'i (qizil punktir chiziq) imkoniyatlar sohasini $(80, 70)$ nuqtada tark etadi. Bu nuqtaning koordinatalarini aniqlash uchun quyidagicha yo'l tutamiz. Nuqta korxonaning DSP zaxirasi bilan aniqlanadigan $3,5X + Y = 350$ to'g'ri chiziq va ishchi kuchi zaxirasi bilan aniqlanadigan $X + Y = 150$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo'lib, uning koordinatalarini topish uchun quyidagi tenglamalar sistemasini yechish kerak.

$$\begin{cases} 3,5X + Y = 350 \\ X + Y = 150 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini yechish uchun birinchi tenglamadan ikkinchisini ayiramiz.

$$3.5X - X + Y - Y = 350 - 150 \Rightarrow 2.5X = 200 \Rightarrow X = 80$$

Yuqorida hosil bo'lgan tenglamani yechib, $X = 80$ ekanligi aniqlangan. $X = 80$ qiymatni tenglamalardan biriga qo'yib Y ning qiymatini topish mumkin. Masalan, $X = 80$ qiymatni ikkinchi tenglamaga qo'yib, Y ning qiymatini topamiz:

$$X = 80 \Rightarrow X + Y = 150 \Rightarrow 80 + Y = 150 \Rightarrow Y = 70$$

$(x, y) = (80, 70)$ nuqta optimal nuqta bo'lib, aynan $X = 80$ dona shkaf va $Y = 70$ dona tumba ishlab chiqarilganida korxonaning foydasi eng katta bo'ladi va

$$200 \cdot X + 100 \cdot Y = 200 \cdot 80 + 100 \cdot 70 = 16000 + 7000 = 23000$$

ni tashkil etar ekan.

4.5 Chorva mollari uchun ratsion tuzish masalasini grafik usulda yechish

Muammoning qo'yilishi. 3.2 - bo'limda qishloq xo'jaligi, aniqrog'i, chorvachilik sohasidan bir amaliy masalani ko'rib chiqib, uning matematik modelini tuzgan edik.

Ratsion masalasi:

To'liq qiymatli ozuqa ratsioni chorva mollarining mahsuldorligini oshirishning eng muhim shartlaridan biridir. Vazni 400 kg. va 10 l. sut beradigan mollar uchun bir kunlik ovqatlanish ratsionini shunday tuzish kerakki, oziq moddalar 15 birlikdan, protein miqdori 840 gr.dan, karotin esa 320 mg.dan kam bo'lmasin. Shu bilan birga, ratsion xarajatlari minimal bo'lsin.

Quyidagi 4- jadvalda 1 kg. arpa va qand lavlagi uchun oziq va foydali moddaning miqdori, 1 kg. ozuqaning narxi keltirilgan.

mahsulot	oziq moddalar	protein	karotin	1 kg. ozuqa narxi
Arpa	0.50	32	30	2
Qand lavlagi	0.92	19	0	1.5

Jadval 4: Masala ma'lumotlari.

Masalaning matematik modeli. Masalaning matematik modelini yozishdan avval ayrim belgilashlarni kiritib olgan edik. Kunlik ratsiondagi arpa miqdorini X va qand lavlagi miqdorini Y deb belgilaymiz. Arpa va qand lavlagi miqdorlari kilogramda o'lchanadi. U holda bitta chorva moli kundalik ratsionining narxi har ikki mahsulot narxlarining yig'indisidan iborat bo'ladi.

Masalaning matematik modeli

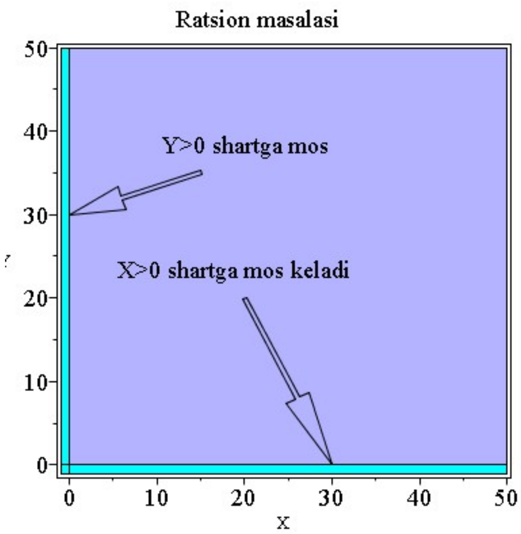
$$C = 2X + 1,5Y \to \min,$$

$$\begin{cases} 0,50X + 0,92Y \geq 15, \\ 32X + 19Y \geq 840, \\ 30X \geq 320, \\ X \geq 0, \quad Y \geq 0. \end{cases}$$

Masalaning grafik usulda yechilishi.

Masaladagi noma'lumlar soni ikkita bo'lgani uchun uni grafik usulda yechish mumkin. Masala cheklanishlari bilan aniqlanadigan mumkin bo'lgan yechimlar sohasini tekislikda tasvirlaymiz.

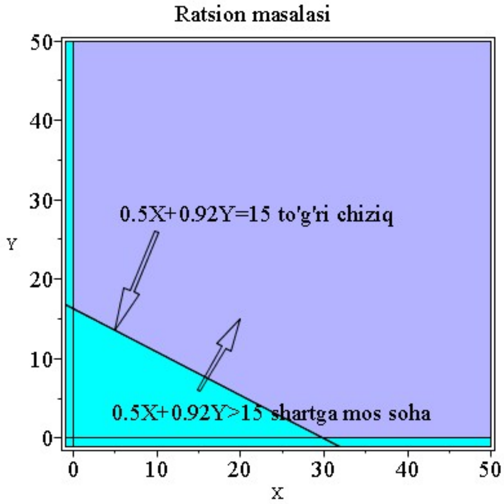
$X \geq 0$ va $Y \geq 0$ shartlarining geometrik tasviri



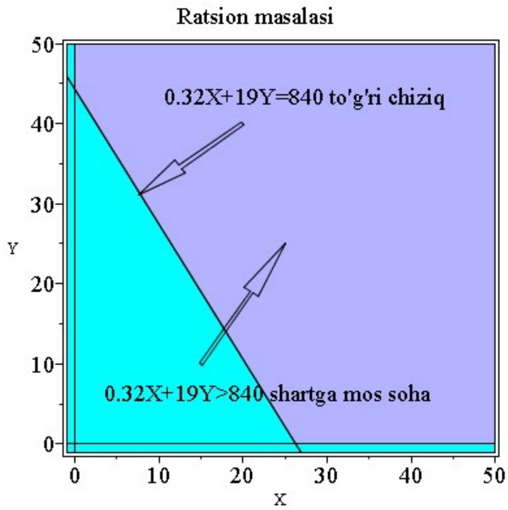
Koordinatalar tekisligining gorizontal o'qiga ratsiondagi arpa miqdori X ni va vertikal o'qiga ratsiondagi qand lavlagi miqdori Y ni mos qo'yamiz. Ratsiondagi ushbu ozuqa turlarining miqdori nomanfiyligi, ya'ni $X \geq 0$ va $Y \geq 0$ ekanligidan, koordinatalar tekisligining faqatgina birinchi choragida ishlashimiz ma'lum bo'ladi.

$0,50X + 0,92Y \geq 15$ *shartining geometrik tasviri*

Ratsiondagi oziq moddalarning minimal miqdori bilan aniqlanadigan birinchi $0,50X + 0,92Y \geq 15$ shartni geometrik tasvirlaymiz. Ma'lumki, $0,50X + 0,92Y = 15$ tenglama tekislikda to'g'ri chiziqni aniqlaydi. $0,50X+0,92Y \geq 15$ tengsizlik esa ushbu to'g'ri chiziq bilan chegaralangan yarim tekislikni aniqlaydi.



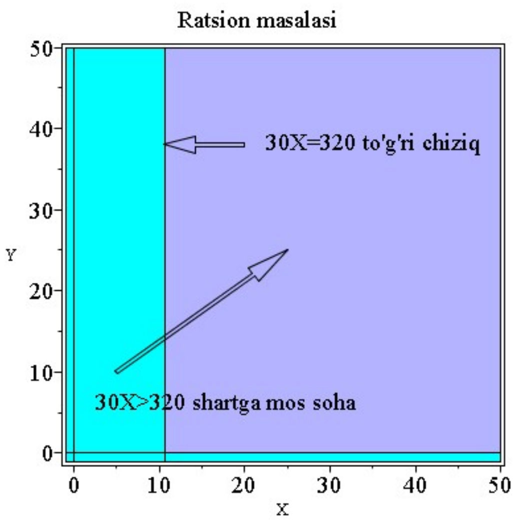
$32X + 19Y \geq 840$ *shartining geometrik tasviri*



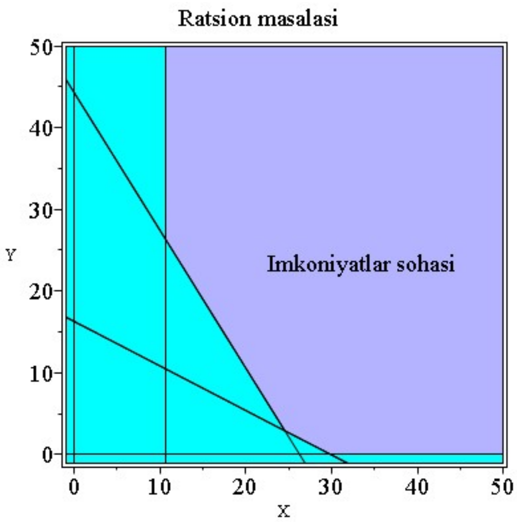
Ratsiondagi proteinning minimal miqdori bilan aniqlanadigan ikkinchi $32X + 19Y \geq 840$ shartni geometrik tasvirlaymiz. Avvalgidek ish tutamiz, $32X + 19Y = 840$ tenglama tekislikda to'g'ri chiziqni aniqlaydi. $32X + 19Y \geq 840$ tengsizlik esa ushbu to'g'ri chiziq bilan chegaralangan yarim tekislikni aniqlaydi.

$30X \geq 320$ *shartining geometrik tasviri*

Ratsiondagi karotinning minimal miqdori bilan aniqlanadigan uchinchi $30X \geq 320$ shartni geometrik tasvirlaymiz.
Ma'lumki, $30X = 320$ tenglama tekislikda to'g'ri chiziqni aniqlaydi. $30X \geq 320$ tengsizlik esa ushbu to'g'ri chiziq bilan chegaralangan yarim tekislikni aniqlaydi.

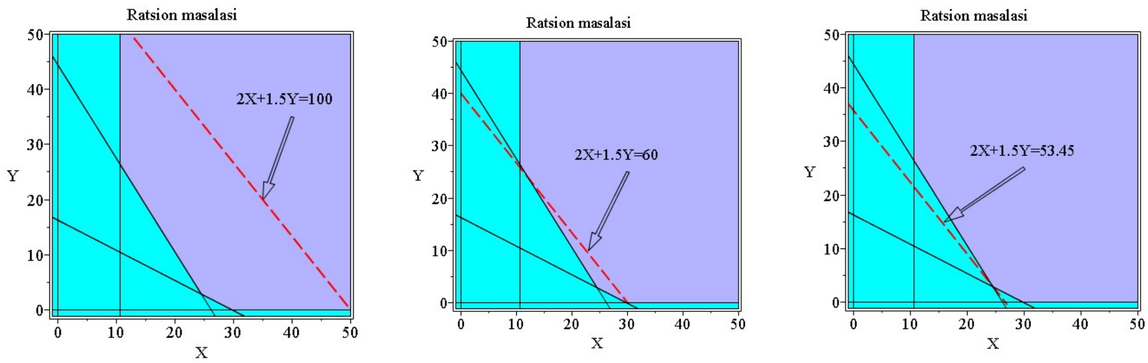


Barcha shartlar bilan aniqlanadigan sohaning geometrik tasviri



Vazni 400 kg. va 10 litr sut beradigan chorva mollarining ratsionidagi kerakli oziq moddalar, protein, karotinlarning minimal miqdorlari va nomanfiylik shartlari bilan aniqlanadigan mumkin bo‘lgan qiymatlarning, ya’ni **imkoniyatlar sohasi**ning geometrik tasviri.

Ushbu sohaning ixtiyoriy nuqtasi (x, y) bilan aniqlanadigan ovqatlanish ratsioni talab darajasida, ya’ni ushbu ratsiondagi kerakli oziq moddalar, protein, karotinlarning miqdorlari minimal talablarga javob beradi. Turli ovqatlanish ratsionlari orasida qaysi biri eng kam xarajat talab qiladi?



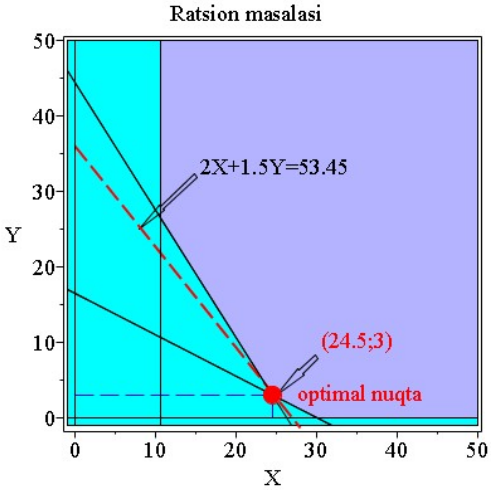
a. narx $= 100$ b. narx $= 60$ c. narx $= 53,45$

Rasm 14: Narxning turli ko‘rsatkichlariga mos keladigan grafiklar

$2 \cdot X + 1,5 \cdot Y = 100$ to’g’ri chiziq maqsad funksiyasining $C = 100$ qiymatiga mos keluvchi sath chizig‘ini aniqlaydi. Ushbu chiziqning grafigi 96 (a)- rasmda qizil punktir chiziq bilan tasvirlangan. Sath chizig‘i ustida joylashgan imkoniyatlar sohasidagi barcha nuqtalar yordamida aniqlanadigan ovqatlanish ratsioni uchun narxning qiymati aynan 100ga teng bo‘ladi. 96 (b),(c)- rasmdagi grafiklarda narxning $C = 60$ va $C = 53,45$ qiymatlariga mos kelgan maqsad funksiyasining grafigi qizil punktir chiziqlar bilan berilgan.

Savol: *Bor imkoniyatlar doirasida ovqatlanish ratsionini qanday tuzganimizda ratsion narxi eng arzon bo'ladi?*
Javob: *Maqsad funksiyasining sath chizig'ini pastga, toki u imkoniyatlar sohasini tark etmagunga qadar siljitish lozim. Sath chizig'ining imkoniyatlar sohasini tark etish nuqtasi imkoniyatlar doirasidagi eng arzon ovqatlanish ratsionini aniqlaydi.*

Maqsad funksiyasining sath chizig'i (qizil punktir chiziq) imkoniyatlar sohasini $(24,5; 3,0)$ nuqtada tark etadi. $(x, y) = (24,5; 3,0)$ nuqta optimal nuqta bo'lib, qoramolning kundalik ratsionida aynan $X = 24,5$ kg. arpa va $Y = 3$ kg. qand lavlagi bo'lgan taqdirida ratsion barcha talablarga javob beradi va eng arzon bo'ladi hamda $2 \cdot X + 1,5 \cdot Y = 2 \cdot 24,5 + 1,5 \cdot 3,0 = 53,45$ shartli pul birligini tashkil etar ekan.



Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

Quyida berilgan masalalarni grafik usulda yeching.

1. Korxona ikki xil sumkalarni tikish bilan shug'ullanadi. Korxonada to'rtta ish bajariladi. Jadvalda ishlarning bitta sumka uchun ketadigan vaqti hamda bitta sumkani sotishdan keladigan foyda aks ettirilgan.

Mahsulot	Qirqish va bichish	Tikish	Yakunlash	Tekshirish va o'rash	Bitta sumkadan tushadigan foyda (so'm)
Standart	7/10	1/2	1	1/10	100
Qimmat baho	1	5/6	2/3	0	90

Tekshirish shuni ko'rsatdiki, qirqish va bichish bo'limida 630 soat, tikish bo'limida 600 soat, yakunlash bo'limida 708 soat, tekshirish va o'rash bo'limida 135 soat vaqt borligi aniqlandi. Masalaning matematik modelini quring.
1) grafik usul yordamida har sumkadan qanchadan ishlab chiqarishini aniqlang;
2) maksimal foydani toping;
3) har bir bo'lim uchun aktiv bo'lmagan vaqtni aniqlang;
4) qimmatbaho sumkadan tushadigan foyda 18 so'm bo'lsa, optimal yechim qanday bo'ladi va korxonaning foydasi qanchaga teng?
5) agar tikish bo'limida 750 soat bo'lsa, optimal yechim qanday o'zgaradi va korxona foydasi nimaga teng?

2. Ma'lum davr mobaynida kompyuter ishlab chiqaruvchi «Tezkor» firmasi ikki turdagi kompyuterlarni ishlab chiqarish niyatida: «Shiddat-1» va «Shiddat-2». Ikkala model uchun ham 7712 markali mikroprotsessor ishlatiladi. «Shiddat-1» rusumli

kompyuterni yig‘ish uchun 1,5 soat «Shiddat-2» rusumli kompyuterni yig‘ish uchun esa 3 soat vaqt sarflanadi. Belgilangan davrda firmaning 3400 mikroprotsessori va 6000 soat yig‘ish vaqti mavjud. Menejerning ko‘rsatmasiga binoan «Shiddat-2» kompyuterlarning soni umumiy kompyuterlar sonining kamida 25% tashkil qilmog‘i lozim. Agar «Shiddat-1» rusumli kompyuterdan keladigan foyda 500 pul birligiga, «Shiddat-2» rusumli kompyuterdan keladigan foyda esa 750 pul birligiga teng bo‘lsa, har bir rusumli kompyuterlardan qanchadan ishlab chiqarish maqsadga muvofiq? Firmaning maksimal foydasini aniqlang.

3. Fermer o‘z mollari uchun ikki xil ozuqa sotib olish niyatida. Ozuqalarning ingrediyent miqdorlari va narxlari hamda zarur bo‘lgan ingrediyentlar jadvalda keltirilgan. Fermer har bir ozuqadan qancha miqdorda olsa, eng kam xarajat qiladi?

	1-ozuqa (kg)	2-ozuqa (kg)	Minimal talab(kg)
A ingrediyent	3	5	40
B ingrediyent	4	3	46
ozuqaning har kg. narxi	2	3	

4. Ikki zavodda uch xil mahsulot ishlab chiqariladi. Jadvalda zavodlarning kunlik imkoniyat darajasi, mahsulotga bo‘lgan buyurtma hamda zavodlarning kunlik xarajatlari keltirilgan. Har bir zavod necha kun ishlaganda xarajat minimum bo‘ladi?

	1-zavod	2-zavod	buyurtma
1-mahsulot	80	20	1600
2-mahsulot	10	10	500
3-mahsulot	20	70	2000
Kunlik xarajat	\$10000	\$20000	

5. Firma ikki xil o’lchamdagi A va B kitob javonlar ishlab chiqaradi. Har bir A turdagi javonlar uchun $3m^2$ material, B turdagisiga esa $4m^2$ material sarf bo‘ladi. Haftada firma $1700m^2$ gacha material olishi mumkin. A turdagi bir dona javonni ishlab chiqarish uchun 12 daqiqa va B turdagisi uchun esa 30 daqiqa vaqt sarf bo‘ladi. Haftada mashinalar 160 soat ishlashi mumkin. Agar A turdagi javonni sotishdan olinadigan foyda 2 p.b. va B turdagidan esa 4 p.b. bo‘lsa, har haftadada qancha A turdagi va qancha B turdagi javonlarni ishlab chiqarish maqsadga muvofiq?

6. Kompaniyaning ikkita neftni qayta ishlovchi zavodi bor. Birinchi zavodning kunlik xarajati 20000 pul birligiga, ikkinchi zavodniki esa 25000 pul birligiga teng. Birinchi zavod har kuni 400 barrel birinchi nav, 300 barrel 2-nav va 200 barrel 3-nav benzin ishlab chiqaradi. Ikkinchi zavod esa, har kuni 300 barrel birinchi nav, 400 barrel 2-nav va 500 barrel 3-nav benzin ishlab chiqaradi. Kompaniyaga 25000 barrel 1-navga, 27000 barrel 2-navga va 30000 barrel 3-navga buyurtma tushgan. Talabni qondirish uchun va xarajatni minimallashtirish uchun har bir zavodni necha kun ishlatish kerak?

7. Kompaniyaning ikkita metallurgiya zavodi bor. Birinchi zavodning kunlik xarajati 70000 pul birligiga teng bo‘lib, har kuni 400 t birinchi nav, 500 t 2-nav va 450 t 3-nav temir ishlab chiqaradi. Ikkinchi zavodning kunlik xarajati 60000 pul birligiga

teng bo‘lib, har kuni 350 t birinchi nav, 600 t 2-nav va 400 t 3-nav temir ishlab chiqaradi. Kompaniyaga 100000 t 1-navga, 150000 t 2-navga va 124500 t 3-navga buyurtma tushgan. Talabni qondirish uchun va xarajatni minimallashtirish uchun har bir zavodni necha kun ishlatish kerak?

8. Firmaga fosfor miqdori 0,03% dan va begona aralashmalar miqdori 3,25% dan oshmaydigan ko‘mir kerak. Xarakteristikalari jadvalda ko‘rsatilgan ko‘mir navlaridan qanchadan olinganda (1 t ko‘mir uchun) eng kam xarajat qilinadi va yuqoridagi talab qondiriladi? Masalaning matematik modelini quring va grafik usulda yeching.

Ko‘mir navi	Fosfor miqdori, %	Begona aralashmalar miqdori, %	Narxi, $
A	0,06	2	30
B	0,04	4	30
C	0,02	3	45

Mustaqil ish topshiriqlari javoblari

1. 1) Standart sumkadan 540 ta, qimmatbaho sumkadan esa 252 ta ishlab chiqariladi. 2) Sumkalarni ishlab chiqarishdagi maksimal foyda 76650 so‘mga teng. 3) Qirqish va bichish bo‘limida 0 soat; tikish bo‘limida 480 soat; yakunlash bo‘limida 0 soat; tekshirish va o‘rash bo‘limida esa 81 soat noaktiv vaqt mavjud.

2. «Shiddat-1» rusumli kompyuterdan 2800 dona, «Shiddat-2» rusumli kompyuterdan esa, 600 dona ishlab chiqarilganda foyda maksimal bo‘ladi va u 1850000 pul birligiga teng.

3. 1-ozuqadan 10 kg, 2-ozuqadan 2 kg sotib olinganda fermer ozuqalarni sotib olish uchun eng kam xarajat - 26 pul birligi sarf qiladi.

4. 1-zavod 30 kun, 2-zavod 20 kun ishlaganda xarajat minimal bo‘ladi va u $700000 ga teng.

5. Har haftadada A turdagi javonlardan 300 dona, B turdagi javonlardan esa 200 dona ishlab chiqarilganda foyda maksimal bo‘ladi va u 1400 pul birligiga teng.

6. Birinchi zavod 25 kun ikkinchi zavod 50 kun ishlaganda xarajat minimal bo‘ladi va bu xarajat 170000 pul birligiga teng.

7. Xarajatni minimallashtirish uchun birinchi zavodni 210 kun ikkinchi zavodni 75 kun ishlatish kerak.

8. Har bir tonna aralashmada A navli ko‘mir ulushi 1/12, B navli ko‘mir ulushi 1/3 va C navli ko‘mir ulushi esa 7/12 bo‘lganda xarajat minimal bo‘lib, u 155/4 ga teng.

4.6 Turg'unlik tahlili

Chiziqli dasturlashning asosiy vazifasi statik optimal yechim topish bo'lib, tabiiyki dastlabki shartlar o'zgarganda, olingan yechim o'z ahamiyatini yo'qotadi. Chiziqli dasturlashda turg'unlik tahlili olingan optimal yechimning dastlabki ma'lumotlardagi o'zgarishlarga qay darajada sezgirligini tekshirish bilan bog'liq bo'lib, bu tahlil optimal yechim topilganidan keyin amalga oshiriladigan jarayondir.

Grafik usulda olingan natijani turg'unlik tahlilida olingan optimal yechimga maqsad funksiyasining koeffitsiyentlarining o'zgarishi (narx-navoning optimal yechimga ta'siri) chegaralarning o'ng tomon tahlili (masalan, ishlab chiqarish jarayonida zaxiradagi xom ashyo miqdorlari ozgarishining optimal yechimga ta'siri) o'rganiladi. Bu tahlil bizga optimal ishlab chiqarish rejasini qachongacha saqlash mumkinligini va resurslarning kamyob yoki kamyob bo'lmaganini aniqlashga yordam beradi. Bundan tashqari kamyob resurslarning qaysilari samaradorliroq ekanligini aniqlashga yordam beradi.

Mahsulot va xom ashyo narxi, xom ashyo zaxiralari, bozor talabi va h.k. kabi iqtisodiy parametrlarning muqarrar ravishda o'zgarishi avvalgi ishlab chiqarish rejimining nomaqbulligi yoki yaroqsizligiga olib kelishi mumkin. Bunday vaziyatlarni hisobga olish uchun turg'unlik tahlillari o'tkaziladi, ya'ni dastlabki model parametrlarida yuzaga kelishi mumkin bo'lgan o'zgarishlarning chiziqli dasturlash muammosining optimal yechimga qanday ta'sir qilishi o'rganiladi.

Turg'unlik tahlili doirasida bajariladigan quyidagi uchta masalani ko'rsatish mumkin:

1. Resurslarni kamaytirish yoki oshirish tahlili:
   - maqsad funksiyasining optimal qiymatini yaxshilash uchun kamyob resurslarning zaxirasini ($\leq$ turdagi cheklovlarni) qancha oshirish mumkin?
   - maqsad funksiyasining optimal qiymatini saqlab qolganda, kamyob bo'lmagan resurs zaxirasini ($\leq$ turdagi cheklovlarni) qancha miqdorda kamaytirish mumkin?
2. Qaysi resurslarning ($\leq$ turdagi cheklovlarni) zaxirasini oshirish eng foydali?
3. Maqsad funksiya koeffitsiyentlaridagi o'zgarishlarni tahlil qilish: Maqsad funksiya koeffitsiyentlarining optimal echimni o'zgartirmaydigan o'zgarish oralig'i qanday?

Turg'unlik tahliliga oid fikrlarni biror masalada ko'rib chiqamiz.

«Fazilat» tikuv sexi haqida masala

Kichik bir sexning kunlik ichlab chiqarish rejasini ko'raylik. Sex bichuvchilari yangi ayollarning shim va ko'ylaklarini ishlab chiqishni taklif qilishdi. Sex imkoniyatlari va mahsulotlardan keladigan foyda jadvalda berilgan. Kunda qancha shim va qancha ko'ylak ishlab chiqarilganda tushum eng yuqori bo'lishini aniqlash zarur. Bu mahsulotlarga bo'ladigan talab shuni ko'satdiki, shimlarga bo'ladigan kunlik talab 18 dan oshmasligi ma'lum bo'ldi.Sex maksimal foyda olish uchun bir kunda qanchadan mahsulot ishlab chiqarishi kerak?

Ishlab chiqarish resurslari.	Birlik mahsulotni ishlab chiqarishdagi resurslar miqdori		Maksimal resurs
	shim	ko'ylak	
Material,(m)	1,5	2	42
Mehnat hajmi (ishchi soat)	3	2	60
Qo'shimcha xarajatlar.	5	5	200
Mahsulotlarning sotilish narxi ($)	60	50	

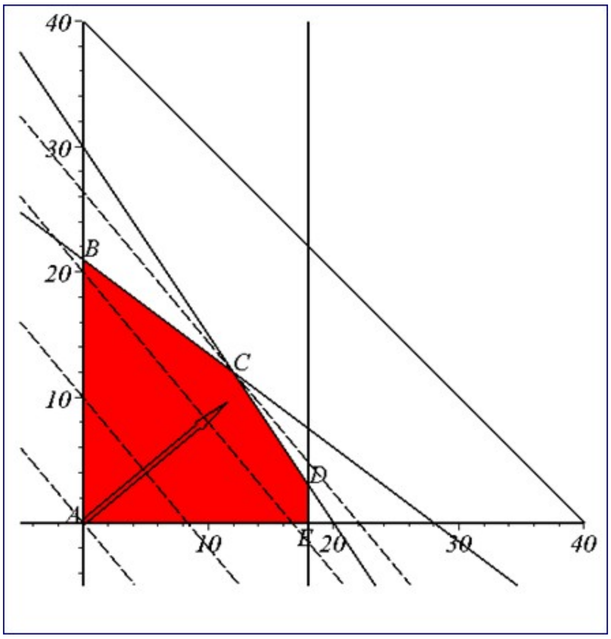
CD disk: masalalar fayllari>**Tikuv sexi.lin**

Masalaning matematik modelini quramiz. x_1 orqali kunlik shimlarni ishlab chiqarish hajmini, x_2 orqali esa ko'ylaklar sonini belgilaylik. Bizning maqsad daromadni maksimallashdan iborat, buniing matematik ifodasi esa $60x_1 + 50x_2 \rightarrow max$ bo'ladi. Har bir resurslarning chegaralarini va mahsulotlarga bo'lgan talabdan kelib chiqqan holda masalaning matematik ifodasini quyidagicha yozish mumkin.

Masalaning matematik modeli:

$$z = 60x_1 + 50x_2 \rightarrow max, \quad \textit{tikuv sexi daromadi}$$

$$\begin{array}{ll} (a) \quad 1.5x_1 + 2x_2 \leq 42, & \textit{material sarfi} \\ (b) \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 60, & \textit{ishchi soat sarfi} \\ (c) \quad 5x_1 + 5x_2 \geq 200, & \textit{qo'shimcha xarajatlar} \\ (d) \quad x_1 \leq 18, & \textit{kundalik talab} \\ \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, & \textit{nomanfiylik shartlari} \end{array} \tag{1}$$



Rasm 15: masalani grafik usulda yechish

Masalani grafik usulda yechamiz (15-rasm). Joiz soha ABCDE ko'pburchakdan iborat bo'ladi. Rasmdan ko'rinib turibdiki, maksimal daromad, C nuqtada, ya'ni (a) va (b) lardan hosil bo'lgan chiziqlarning kesishish nuqtasidan iborat bo'ladi. C nuqtaning koordinatalarini quyidagi sistemani yechib topamiz:

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 2x_2 = 42, \\ 3x_1 + 2x_2 = 60. \end{cases}$$

Bu sistema yechimlari: $x_1 = 12$, $x_2 = 12$ bo'ladi. Demak, kunda sex 12 ta shim va 12 ta ko'ylak ishlab chiqarilganda daromad maksimal bo'ladi. Bu qiymatlarni maqsad funksiyasiga qo'yib, maksimal daromadni topamiz.

$$z(12,12) = 60 \cdot 12 + 50 \cdot 12 = 1320\$$$

Endi, turg'unlik tahlili bilan shug'ullanamiz. Turg'unlik tahlilida masala parametrlarining o'zgarishi optimal yechimga qanday ta'sir qilishi o'rganiladi. Masalan, sexning ishlab chiqarish mahsulotlarini rejalashtirish masalasida, talabning o'zgarishi yoki resurslarning o'zgarishi optimal yechimga qanday ta'sir qilishi o'rganiladi. Bundan tashqari, mahsulotlarga bo'lgan bozor narxlarining o'zgarishi optimal yechmga qanday ta'sir qilishini aniqlash ham maqsadga muvofiqdir.

Turg'unlik tahlili, masalaga, ma'lum bir ma'noda, dinamik tus beradi. Olingan optimal yechimga masala parametrlarining o'zgarishining ta'siri aniqlanadi.

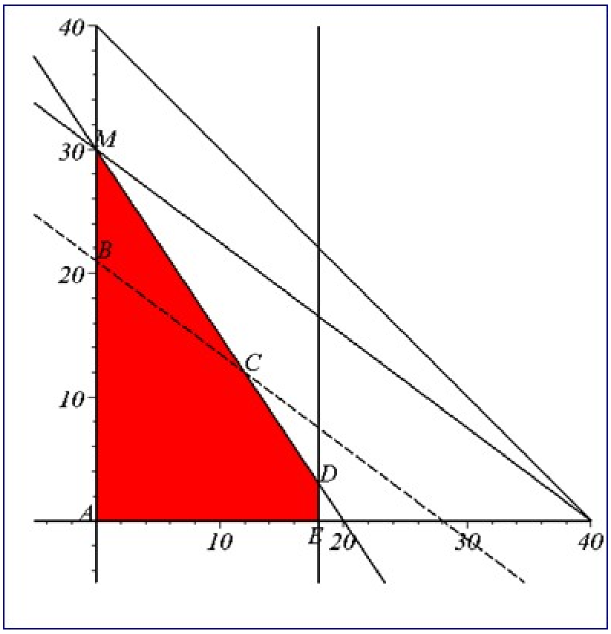
4.6.1 Shartlar o'ng tomonining turg'unligi

Optimal yechim topilgandan so'ng, ishlab chiqarish omillarining o'zgarishi optimal yechimga qanday ta'sir qilishni o'rganinsh zaruriyati tug'iladi. Bu yerda quyidagi savollarni tahlil qilish ahamiyatlidir:
1. Maqsad funksiyasining optimal qiymatini yaxshilash uchun, biror resursning miqdorini qanchagacha ko'tarish mumkin?
2. Topilgan maqsad funksiyasining optimal qiymatini saqlab qolgan holda, biror resurs miqdorini qanchagacha kamaytirish mumkin?

Bu savollarga javob berishdan avval, ba'zi tushunchalarni kiritamiz. Optimal nuqtani hosil qilishda qatnashgan shartlarni ifodalaovchi resurslarga **kamyob resurslar** deyiladi. Bunday resurslar ishlab chiqarishda to'la sarf bo'ladi. Optimal yechimni hosil qilishda qatnashmagan, lekin joiz sohada joylashgan shartlarni ifodalovchi resurslar esa, **kamyob bo'lamagan resurslar** turkumiga kiradi. Joiz sohani tashkil qilishda qatnashmagan shartlarga mos keluvchi resurslar esa, ortiqcha resurslarni tashkil qiladi. Bu tushunchalarni kiritgandan so'ng yuqorida bayon qilingan savollarni quyidagi tahrirda qayta keltirish mumkin.
1. Optimal yechimni yaxshilash uchun kamyob resurslar miqdorini qanchagacha ko'tarish mumkin?
2. Optimal yechimni o'zgarishsiz qoldirish uchun kamyob bo'lmagan resurs miqdorini qanchagacha
kamaytirish mumkin?

O'ng tomon turg'unlik tahlilini yuqorida keltirilgan masala uchun ko'raylik. (a) va (b) shartlariga mos keluvchi resurslar, ya'ni, material hajmi va mehnat resurslari kamyob resurs hisoblanadi.

Kamyob bo'lgan material miqdorining o'sishi grafikda (a) shartga mos keluvchi BC chiziqni o'ziga parallel holda M nuqtagacha ko'tarishdan iboratdir. BC to'g'ri chiziqni



Rasm 16: Turg'unlik tahlili

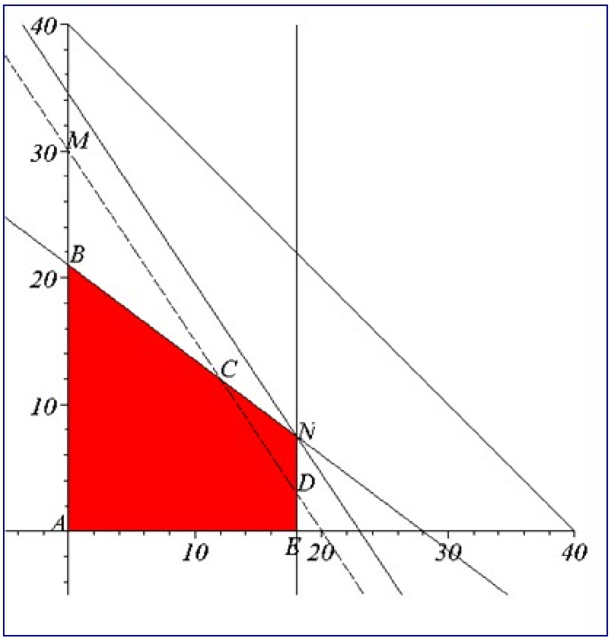
o'ziga parallel holda M dan yuqoriga siljitish maqsadga muvofiq emas. Aks holda, resurs ortiqcha bo'lib qoladi (shartni ifodalovchi to'g'ri chiziq joiz sohadan chiqib ketadi va optimal yechimga ta'sir qilmaydi). Natijada joiz sohaga BMC uchburchak qo'shiladi va optimal yechim M nuqtadan iborat bo'ladi (16-rasm). Material miqdorining o'sishini quyidagicha aniqlaymiz. M nuqtaning koordinatasini aniqlaymiz M(0;30). Bu qiymatni (a) shartning chap tomoniga qo'yib, material miqdorini maksimal qanchaga ko'tarish mumkinligini topamiz: 1.5·0+2·30 = 60m. Shunday qilib material miqdorini $60-42 = 18$m ga ko'tarish mumkin ekan. Bu holda foydaning o'zgarishi $150-1320 = 180$ dollardan iborat bo'ladi.

Endi ikkinchi kamyob resurs - ishchi soat miqdorini qanchagacha ko'tarishni ko'raylik. Bu holda (b) shartga mos keluvchi CD to'g'ri chiziqni o'ziga parallel holda N nuqtagacha siljitishdan iborat bo'ladi. CD to'g'ri chiziqni bundan ham yuqoriga siljitish maqsadga muvofiq emas, aks holda shart ortiqcha bo'lib qoladi. Endi joiz soha ABNE ko'pburchakdan iborat bo'ladi (17-rasm). Yangi optimal nuqta N nuqtadan iborat bo'ladi. Quyidagi sistemani yechib

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 2x_2 = 42 \\ x_1 = 18 \end{cases}$$

N nuqta koordinatalarini topamiz N(18;7,5). Bu koordinatalarni (b) shartning chap tomoniga qo'yib, ishchi vaqtining maksimal qiymatga ko'tarish mumkinligini topamiz: $3 \cdot 0 + 2 \cdot 7.5$ ishchi soati. Ishchi vaqtini o'zgarishi $69 - 60 = 9$ ishchi soatidan iborat. Bu holatda foyda esa $60 \cdot 18 + 50 \cdot 7.5 = 1455$ dollarni tashkil etib, $1455 - 1320 = 135$ dollarga o'sadi.

Endi fikrimizni ortiqcha bo'lgan kamyob resurslarga qarataylik. (c) shart ortiqcha bo'lganligi uchun, uni kamaytirish mumkin. Bu fikrni grafik jihatdan ifodalaydigan bo'lsak, (c) chiziqni C nuqtagacha siljitishdan iboratdir (chunki qo'shimcha xarajatlarni kamaytirish shunday bo'lishi kerakki, optimal yechimga ta'sir qilmasligi lozim) (15-rasm). C nuqta koordinatalarini (c) shartning chap tomoniga qo'yib, zarur bo'lgan qo'shimcha xarajatlarni aniqlaymiz: $5 \cdot 12 + 5 \cdot 12 = 120$. Demak, qo'shimcha xarajatlarni $120 -$



Rasm 17: Turg'unlik tahlili

200 = −80 dollargacha kamaytirish mumkin bo'lar ekan. Shu bilan birga foyda miqdori o'zgarishsiz qoladi. (d) shart ko'ylaklarga bo'lgan talabdan kelib chiqqan edi. Optimal yechimga ta'sir qilmagan holda, (d) chiziqni o'ziga parallel holda C nuqtagacha siljitish mumkin. Talabning kamayishi bu holda 6 birlikka teng bo'ladi. Keltirgan tahlillarimizni 5-jadvalga jamlaymiz.

Jadval 5: Turg'unlik tahlili ma'lumotlari

Resurs	Resurs turi	Resursning maksimal o'zgarishi	Foydaning maksimal o'zgarishi
1	Kamyob	60-42=18 m	1500-1320=180
2	Kamyob	69-60=9 ishchi soati	1455-1320=135
3	Ortiqcha	120-200=-80 dollar	1320-1320=0
4	Kamyob bo'lmagan	12-18=-6 dona	1320-1320=0

Biz yuqorida kamyob resurslarni qanchagacha ko'tarish mumkinligini va bundagi foydaning o'zgarishini aniqladik. Endi qaysi kamyob resurslarni birinchi navbatda ko'tarish maqsadga muvofiq bo'lishini aniqlaylik. Qo'shimcha kamyob resurslarni bir birlikka ko'tarishdan keladigan foyda miqdorini aniqlaylik. Buning uchun qo'shimcha resurslarning bahosini aniqlaymiz. y_i qo'shimcha birik i-resursning bahosi bo'lsin:

$$y_i = \frac{Foydaning\ maksimal\ o'zgarishi}{i - resurs\ haj\min ing\ maksimal\ o'zgarishi}.$$

Jadvaldagi ma'lumotlardan foydalanib, har bir resursning bahosini aniqlaymiz.

$$y_1 = \frac{180\ dollar}{18\,m.} = 10\ dollar/m;$$

$$y_2 = \frac{135\,dollar}{9\,ishchi - soat.} = 15\ dollar/ishchi - soat;$$

$$y_3 = \frac{0}{-80\,dollar} = 0; \qquad y_4 = \frac{0}{-6\,dona} = 0.$$

Keltirilgan natijalar shuni ko'rsatadiki, qo'shimcha mablag'ni ishchi soat vaqtini kengaytirishga qaratish, so'ng qo'shimcha material olishga sarflash kerak bo'ladi. Kamyob bo'lmagan resurslarning hajmini ko'paytirishning hojati yo'q.

4.6.2 Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlili

Masalani grafik usulda yechish jarayonida maqsad funksiyasining koordinatalar sistemasidagi holati optimal yechimni aniqlashda asosiy omil bo'ladi. Shuning uchun maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining o'zgarishi resurs holatlarini o'zgartirib yuboradi. Ya'ni, kamyob resurs kamyob bo'lmagan resursga va aksincha aylanishi mumkin. Biz maqsad funksiya koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlilida quyidagi savollarni yoritishga harakat qilamiz:
1. Maqsad funksiyasi biror koeffitsiyentining o'zgarishi optimal yechimga qanday ta'sir qilishi;
2. Biror resurs mavqeini o'zgartirish uchun, maqsad funksiyasining biror koeffitsiyentini qanchagacha o'zgartirish lozim bo'ladi.

Keltirilgan savollarni tikuv sexi haqidagi masala uchun ko'raylik. Shim va ko'ylakdan keladigan foydani mos ravishda c_1 va c_2 bilan belgilaylik. U holda, maqsad funksiyasi $z = c_1x_1 + c_2x_2$ ko'rinishda bo'ladi. c_1 ni oshirganimizda (yoki $c_2$ni kamaytirganimizda) maqsad funksiyasini ifodalovchi to'g'ri chiziq C nuqta atrofida soat mili bo'ylab aylanadi. Agar c_1 ni kamaytirganimizda (yoki c_2 ni oshirganimizda), to'g'ri chiziq qarama-qarshi yo'nalishda aylanadi. Demak, maqsad funksiyasini ifodalovchi to'g'ri chiziqning holati (a) va (b) to'g'ri chiziqlar orasida bo'lganda C nuqta optimal nuqta bo'lib qolaveradi (15-rasm). Agar $z = c_1x_1 + c_2x_2$ to'g'ri chiziq og'maligi (a) shartni ifodalovchi to'g'ri chiziq og'maligiga teng bo'lganda optimal yechim BC kesmani tashkil qiladi. Xuddi shuningdek $z = c_1x_1 + c_2x_2$ to'g'ri chiziq og'maligi (b) shartni ifodalovchi to'g'ri chiziq og'maligiga teng bo'lgan taqdirda, optimal yechim CD kesmadan iborat bo'ladi. $z = c_1x_1+c_2x_2$ to'g'ri chiziq og'maligi ko'rsatilgan oraliqdan chiqib ketganda, optimal yecim o'zgaradi.

c_1 va c_2 o'zgarishi qanday bo'lganda C nuqta optimalligi saqlanishini ko'raylik. $c_2 = 50$ ni o'zgarishsiz qoldiraylik. Bunda c_1 ning o'zgarishi (a) va (b) chiziqlarning og'maligidan aniqlanadi. $z = c_1x_1 + c_2x_2$ chiziqning burchak koeffitsiyenti $c_1/50$ ga teng. (a) va (b) chiziqlarning burchak koeffitsiyentlari esa mos ravishda $3/4$ va $3/2$ ga tengdir. c_1 ning minimal qiymatini $c_1/50 = 3/4$ tenglikdan aniqlaymiz: $minc_1 = 37.5$ dollar. $c_1$ning maksimal qiymatini $c_1/50 = 3/2$ tenglikdan aniqlaymiz: $maxc_1 = 75$ dollar. Demak, $c_1$ning ozgarishi $37.5 \leq c_1 \leq 75$ oraliqda bolganda C nuqtaning optimalligi saqlanib qoladi.

Xuddi shunday tahlilni c_2 koeffitsiyent uchun ham amalga oshiramiz. $c_1 = 60$ni o'zgarishsiz qoldiraylik. Maqsad funksiyasining burchak koeffitsiyenti $60/c_2$ga teng bo'ladi. (a) va (b) chiziqlarning burchak koeffiesentlaridan:

$$60/c_2 = 3/4, \text{ bundan } maxc_2 = 80;$$

$$60/c_2 = 3/2, \text{ bundan } maxc_2 = 40$$

tengliklar hosil bo'ladi. Demak, c_2 ning ozgarishi $40 \leq c_2 \leq 80$ oraliqda bo'lganda C nuqtaning optimalligi saqlanib qoladi.

Shuni takidlash lozimki, $c_1 = 37.5$ bo'lib, c_2 o'zgarishsiz qolganda, (b) resurs kamyob bo'lmay qoladi. Bu shuni ko'rsatadiki, agar bitta shimdan keladigan foyda 37,5 dollardan kichik bo'lsa, kunlik ishlab chiqarish rejasini qaytadan ko'rib chiqish lozim bo'ladi. Chunki endi B(21;0) nuqta optimal nuqta bo'ladi. c_1 75 dollardan oshib ketib, c_2 o'zgarishsiz qolganda esa, kunlik rejada 18 ta shim va 3 ta ko'ylak ishlab chiqarish maqsadga muvofiq bo'ladi (D nuqta optimal nuqta). Xuddi shunga o'xshash xulosani ko'ylak narxi $40 \leq c_2 \leq 80$ chegaradan chiqqanda ham keltirish mumkin.

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

1. Quyidagi masalalar berilgan:

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 \to \max,\\
&x_1 + x_2 \leq 10,\\
&2x_1 + x_2 \geq 4,\\
&x_1 + 3x_2 \leq 24,\\
&2x_1 + x_2 \leq 16,\\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

   1) masalani grafik usulida yeching;
   2) c_1 koeffitsiyentning turg'unlik oralig'ini toping;
   3) c_2 koeffitsiyentning turg'unlik oralig'ini toping.
   4) Agar c_1 2 dan 2,5 ga oshsa, optimal yechim qanday o'zgaradi?
   5) Agar c_2 3 dan 1 ga kamaysa, optimal yechim qanday o'zgaradi?
   6) Birinchi chegara o'ng qismini nechagacha oshirish mumkin?
   7) 1- va 2- chegaralar uchun ikkiyoqlama bahoni hisoblang va izohlang.

2. Quyidagi masalalar berilgan:

$$\begin{aligned}
&2) x_1 + x_2 \to \min\\
&x_1 + 2x_2 \geq 7,\\
&2x_1 + x_2 \geq 5\\
&x_1 + 6x_2 \geq 11\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

   1) masalani grafik usulida yeching;
   2) c_1 koeffitsiyentning turg'unlik oralig'ini toping;
   3) c_2 koeffitsiyentning turg'unlik oralig'ini toping.
   4) Agar c_1 1 dan 1,5 ga oshsa, optimal yechim qanday o'zgaradi?
   5) Agar c_2 1 dan 1/3 ga kamaysa, optimal yechim qanday o'zgaradi?
   6) Birinchi chegara o'ng qismini nechagacha oshirish mumkin?
   7) 1- va 2- chegaralar uchun ikkiyoqlama bahoni hisoblang va izohlang.

3. Fabrika stol va shkaf ishlab chiqarish uchun zaruriy resurslardan foydalanadi. Jadvalda birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun ketadigan resurs normalari, mahsulotdan keladigan foyda va resurslarning umumiy miqdori keltirilgan.

Resurslar	Birlik mahsulot uchun ketadigan resurs miqdori		Resurslarning umumiy hajmi
	stol	shkaf	
Birinchi tur yog‘och, m_3	0,2	0,1	40
Ikkinchi tur yog‘och, m_3	0,1	0,3	45
Mehnat hajmi (ishchi/soat)	1,2	1,5	360
Birlik mahsulotdan tushadigan foyda (ming so‘m)	6	8	

1) Foydani maksimallashtirish uchun har bir mahsulotdan qanchadan ishlab chiqarish kerak?
2) Fabrika uchun zaxiradagi qaysi resurslarni ko‘paytirish maqsadga muvofiq?
3) Zaxiradagi birinchi tur yog‘och miqdorini $10m^3$ ga oshirilsa, yechimga qanday ta’sir qiladi?
4) Agar birlik stoldan keladigan foyda 4 ming so‘mga oshsa, yechimga ta’sir qiladimi?

4. Konditer fabrikasi A va B turdagi konfetlarni ishlab chiqarish uchun shakar va meva pyuresidan foydalanadi. Jadvalda 1 kg konfetni ishlab chiqarish uchun ketadigan resurs normalari, mahsulotdan keladigan foyda va resurslarning umumiy hajmi keltirilgan.

Resurslar	1 kg mahsulot uchun ketadigan resurs miqdori		Resurslarning umumiy hajmi
	A turli konfet	B turli konfet	
Shakar (kg)	0,2	0,6	180
Meva pyuresi (kg)	0,4	0,2	120
Mehnat hajmi (ishchi soat)	0,4	0,5	180
1 kg.konfetdan tushadigan foyda (so‘m)	45	60	

1) Har bir turdagi konfetlardan qanchadan ishlab chiqarilganda foyda maksimal bo‘ladi?
2) Qaysi resurs hajmlarini kamaytirish imkoniyati bor va qanchaga?
3) Agar shakar hajmini 200 kgga oshirilsa, yechimga qanday ta’sir qiladi?
4) Agar A turdagi konfetdan keladigan foyda 90 so‘m bo‘lsa, yechim qanday o‘zgaradi?

5. Fabrika stol va shkaf ishlab chiqarish uchun zaruriy resurslardan foydalanadi. Jadvalda birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun ketadigan resurs normalari, mahsulotdan keladigan foyda va resurslarning umumiy miqdori keltirilgan.

Resurslar	Birlik mahsulot uchun ketadigan resurs miqdori		Resurslarning umumiy hajmi
	stol	shkaf	
Birinchi tur yog‘och	1	3	360
Ikkinchi tur yog‘och	1	0,5	200
Mehnat hajmi (ishchi soat)	2,5	3	900
Birlik mahsulotdan tushadigan foyda (ming so‘m)	18	24	

1) Foydani maksimallashtirish uchun har bir mahsulotdan qanchadan ishlab chiqarish kerak?
2) Qaysi resursning ikkiyoqlama qiymati eng yuqori?
3) Zaxiradagi qaysi resursning hajmini qanchaga kamaytirish mumkin?
4) Boshlang‘ich yechimni saqlagan holda har bir stoldan keladigan foydani qanchaga ko‘tarish mumkin?

6. Zavod A va B turdagi tovarlar ishlab chiqaradi. Tovar ishlab chiqarishda to‘rt xil xom ashyodan foydalaniladi. Birlik tovarni ishlab chiqarishga ketadigan xom ashyo hajmi, zaxiradagi xom ashyo hajmi va birlik tovardan keladigan foyda jadvalda ko‘rsatilgan.

Xom ashyo turlari	Birlik tovarga ketadigan xom ashyo (kg)		Zaxiradagi xom ashyo hajmi
	A tur	B tur	
I	2	3	21
II	1	0	6
III	0	1	6
IV	2	1	10
Birlik tovar narxi (10 ming so‘m)	3	2	

1) Maksimal daromad keltiradigan rejani aniqlang.
2) Zavod uchun qaysi turdagi xom ashyoni qanchaga ko‘paytirish maqsadga muvofiq?
3) Qaysi turdagi xom ashyolar ortiqcha sanaladi?
4) Agar B turdagi tovar narxini 20 ming so‘mga oshirilsa, yechimga qanday ta’sir qiladi?

7. Jadvalda sut kombinatining yogurt ishlab chiqarishdagi normalari, resurs hajmi va mahsulot narxlari keltirilgan.

Resurslar	Yog‘li yogurt	Sutli yogurt	Umumiy hajmi
Sut (kg)	0,2	0,3	240
Yog‘ (kg)	0,6	0,2	480
Jihozlar (soat)	1	0,3	900
1 kg mahsulot narxi ($)	50	30	

1) Maksimal daromad keltiradigan rejani aniqlang.
2) Resurs hajmining turg‘unligini aniqlang.
3) Eng kamyob resursni aniqlang.
4) Optimal rejaning mahsulot narxining o‘zgarishidagi turg‘unligini aniqlang.

Mustaqil ish topshiriqlari javoblari

1- topshiriq.
1)$x = 3$, $y = 7$, $max = 27$.
2) $1 \le c_1 \le 3$.
3) $2 \le c_2 \le 6$.
4) $x = 3$, $y = 7$, $max = 28.5$.
5) $max = 16$, cheksiz ko‘p yechim.
6) 1-chegara o’ng qismini $28\frac{4}{5}$gacha oshirish mumkin.
7) 1-chegara uchun ikkiyoqlama baho 1,5 ga teng; 2-chegara uchun ikkiyoqlama baho 0 ga teng.

2- topshiriq.
1)$x = 1$, $y = 3$, $min = 4.2$.
2) $0.5 \le c_1 \le 2$.
3) $0.5 \le c_2 \le 2$.
4) $x = 1$, $y = 3$, $min = 4.5$.
5) $x = 0$, $y = 5$, $min = 1\frac{2}{3}$.
6) 1-chegara o’ng qismini $4\frac{9}{11}$gacha oshirish mumkin.
7) 1- va 2- chegaralar uchun ikkiyoqlama baho $1/3$ ga teng.

3- topshiriq.
1) Fabrikaning foydasi maksimal bo‘lishi uchun stoldan 150 ta shkafdan esa 100 ta ishlab chiqarilishi kerak. Maksimal foyda 1700 ming so‘mga teng bo‘ladi.
2) Fabrika uchun birinchi va ikkinchi resurslarni ko‘paytirish foydali. Ikkala resursning ikkiyoqlama qiymatlari 2 ga teng.
3) Birinchi navli yog‘och hajmini $10m^3$ ga oshirilganda birinchi chegara o‘ng qismining turg‘unlik doirasidan chiqib ketadi. Ishlab chiqarish rejasi o‘zgaradi: stoldan $1370/7$, shkafdan $600/7$ ta ishlab chiqarish optimal bo‘ladi.
4) Stoldan tushadigan foyda 4 ming so‘mga oshirilganda ham ishlab chiqarish rejasining optimalligi saqlanib qoladi.

4- topshiriq.
1) Fabrikaning foydasi maksimal bo‘lishi uchun A turdagi konfetdan $128\dfrac{4}{7}$ kg va B turdagi konfetdan esa $257\dfrac{1}{7}$ kg ishlab chiqarishi kerak. Maksimal foyda $21214\dfrac{2}{7}$ so‘mga teng bo‘ladi.
2) Ikkinchi resursni $17\frac{1}{7}$ kg gacha kamaytirilganda ham ishlab chiqarishning optimallik rejasi saqlanib qoladi.
3) Shakar hajmi 200 kgga oshirilganda ishlab chiqarishning optimallik rejasi saqlanmaydi. Yangi optimal reja A turdagi konfet uchun $57\dfrac{1}{7}$ kg, B turdagi konfet uchun esa $314\dfrac{2}{7}$ kg

bo‘ladi. Maksimal foyda esa $21428\frac{4}{7}$ so‘mga teng bo‘ladi.
4) A turdagi konfetdan tushadigan foyda 90 so‘mga oshirilganda ishlab chiqarish rejasining optimalligi saqlanib qolmaydi. Yangi optimal ishlab chiqarish rejasi: A turdagi konfetdan 200 kg, B turdagi konfetdan esa 200 kg ishlab chiqarishi kerak.

5- topshiriq.
1) Fabrikaning foydasi maksimal bo‘lishi uchun stuldan 168 ta, stoldan esa 64 ta ishlab chiqarilishi kerak. Maksimal foyda 4560 ming so‘mga teng bo‘ladi.
2) Fabrika uchun birinchi va ikkinchi resurslarni ko‘paytirish fabrika uchun foydali. Birinchi resursning ikkiyoqlama qiymati 6 ga ikkinchi resursning ikkiyoqlama qiymati 12 ga teng.
3) Ishlab chiqarish hajmining optimalligini saqlagan holda uchinchi resurs hajmini 288 ishchi/soatiga kamaytirish mumkin.
4) Stuldan tushadigan foydani 48 ming so‘mga oshirilganda ham ishlab chiqarish rejasining optimalligi saqlanib qoladi.

6- topshiriq.
1) Zavodning daromadi maksimal bo‘lishi uchun A turdagi tovardan $2\frac{1}{4}$ kg, B turdagi tovardan esa $5\frac{1}{2}$ kg ishlab chiqarilishi kerak. Maksimal daromad $170\frac{3}{4}$ ming so‘mga teng bo‘ladi.
2) Zavod uchun birinchi va ikkinchi resurslarni ko‘paytirish foydali. Birinchi resursning ikkiyoqlama qiymati 1/4 ga, ikkinchi resursning ikkiyoqlama qiymati 5/4 ga teng. Avvalo, ikkinchi resurs zaxirasini ko‘paytirish maqsadga muvofiq.
3) Ikkinchi turdagi xom ashyo ortiqcha sanaladi. Chunki, ikkinchi chegarani olib tashlash bilan joiz soha o‘zgarmaydi.
4) B turdagi tovar narxini 30 ming so‘mga oshirilganda ham ishlab chiqarish rejasining optimalligi saqlanib qoladi.

7- topshiriq.
1) Zavodning daromadi maksimal bo‘lishi uchun yog‘li yogurtdan $685\frac{5}{7}$ kg, sutli yogurtdan esa $342\frac{6}{7}$ kg ishlab chiqarilishi kerak. Maksimal daromad $44571\frac{2}{7}$ teng bo‘ladi.
2) Zavod uchun birinchi va ikkinchi resurslarni ko‘paytirish foydali. Birinchi resursni 720 kg gacha, ikkinchi resursni esa 545 kg gacha ko‘tarish mumkin.
3) Eng kamyob resurs yog‘ hisoblanadi, chunki uning ikkiyoqlama qiymati eng katta va $64\frac{26}{91}$ ga teng.
4) Masalaning qolgan barcha parametrlari saqlangan holda, yog‘li yogurt narxi $20 \leq c_1 \leq 90$ oraliqda bo‘lganda ham ishlab chiqarish rejasining optimalligi saqlanib qoladi. Sutli yogurt narxining turg‘unlik oralig‘i $16\frac{2}{3} \leq c_2 \leq 75$ ga teng.

4.7 Ishlab chiqarish masalasi yechimi uchun turg’unlik tahlili

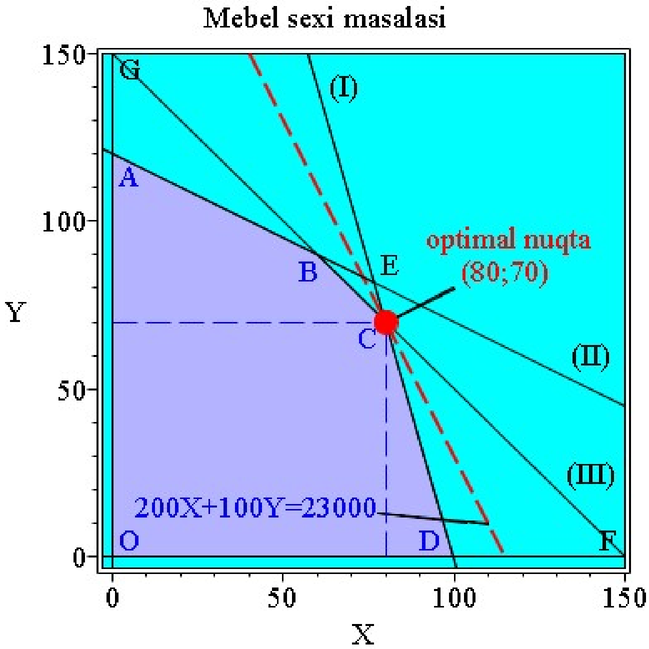
3.1 - bo’limda ishlab chiqarishni optimal rejalashtirish haqidagi amaliy masalaning matematik modelini qurib, 4.4 - bo’limda uni grafik usulda yechgan edik (18-rasmga qarang).

Masalaning matematik modeli:

$$P = 200X + 100Y \to \max,$$
$$\begin{cases} 3,5X + Y \le 350, & \textbf{(I)} \\ X + 2Y \le 240, & \textbf{(II)} \\ X + Y \le 150, & \textbf{(III)} \\ X \ge 0, \quad Y \ge 0. \end{cases}$$

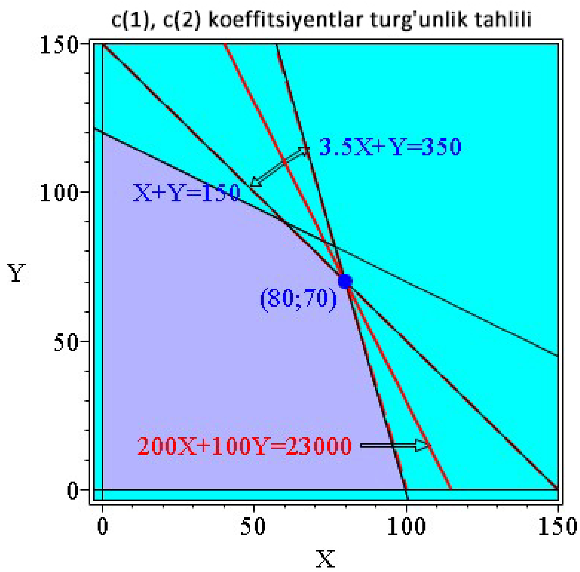
Masalaning yechimi:

Optimal shkaflar soni: $x = 80$ ta,
optimal tumbalar soni: $y = 70$ ta.
Maksimal foyda qiymati:
$P^* = 23000\$$.



Rasm 18: Masalani grafik usulda yechish natijalari

a) Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari uchun turg'unlik oralig'ini topish.



Rasm 19: Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari uchun turg'unlik tahlili.

Maqsad funksiyasining c_i koeffitsiyentlarining optimal yechim o'zgarishsiz qoladigan o'zgartirish chegaralarini aniqlaymiz. Optimal yechim C nuqtada joylashgan bo'lib, u (I) va (III) to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidir. Demak, maqsad funksiyasining burchak koeffitsiyenti shu to'g'ri chiziqlar burchak koeffitsiyentlari orasida o'zgargan taqdirda maqsad funksiyasi joiz sohani C nuqtada tark etadi (4.7- rasmga qarang).
(I) tog'ri chiziq tenglamasi: $3.5X + Y = 350 \quad \to \quad Y = 350 - 3.5X$,
burchak koeffitsiyenti: $k = -3.5$;
(III) tog'ri chiziq tenglamasi: $X + Y = 150 \quad \to \quad Y = 150 - X$,

burchak koeffitsiyenti: $k = -1$;
Maqsad funksiyasi tenglamasi: $c_1X + c_2Y = 23000 \quad \rightarrow \quad Y = \dfrac{23000}{c_2} - \dfrac{c_1}{c_2}X$,
burchak koeffitsiyenti: $k = -\dfrac{c_1}{c_2}$.

$$-3.5 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -1 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 3.5 \quad \Rightarrow \quad c_2 \leq c_1 \leq 3.5c_2$$

Agar maqsad funksiyaning koeffitsiyentlari $c_2 \leq c_1 \leq 3.5c_2$ shartni qondirsa, optimal yechim o'zgarmaydi.
♦ Tumba narxi o'zgarishsiz qolganda, ya'ni $c_2 = 100$ bo'ganda c_1 koeffitsiyent

$$c_2 \leq c_1 \leq 3.5c_2 \quad \Rightarrow \quad 100 \leq c_1 \leq 350$$

chegaralar ichida o'zgaradi. Shu bilan birga, maqsad funksiyaning qiymati $P_1 \leq P^* \leq P_2$ oraliqda o'zgaradi, bu erda

$$P_1 = 100X + 100Y = 100 \cdot 80 + 100 \cdot 70 = 15000,$$

$$P_2 = 350X + 100Y = 350 \cdot 80 + 100 \cdot 70 = 35000,$$

ya'ni $15000 \leq P^* \leq 35000$.

Xom ashyo va mehnat zaxiralari hajmi (350 m. DSP, 240 m. shisha, 150 ta ishchi) va bir dona tumbadan tushadigan foyda (100\$) o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. U holda bir dona shkafdan tushadigan foyda $(100; 350)$ oraliqda o'zgarganida amaldagi $(X, Y) = (80, 70)$ ishlab chiqarish rejasi yangi sharoit uchun ham optimalligicha qoladi!
Optimal foyda qiymati $15000 \leq P^* \leq 35000$ oraliqda o'zgaradi.

♦ Shkaf narxi o'zgarishsiz qolganda, ya'ni $c_1 = 200$ qiymatida c_2 koeffitsiyent

$$1 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 3.5 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \frac{200}{c_2} \leq 3.5 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{7} \leq \frac{c_2}{200} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 400/7 \leq c_2 \leq 200$$

chegaralar ichida o'zgaradi. Shu bilan birga, maqsad funksiyaning qiymati $P_3 \leq P^* \leq P_4$ o'zgaradi, bu erda

$$P_3 = 200X + \frac{400}{7}Y = 200 \cdot 80 + \frac{400}{7} \cdot 70 = 20000,$$

$$P_4 = 200X + 200Y = 200 \cdot 80 + 200 \cdot 70 = 30000,$$

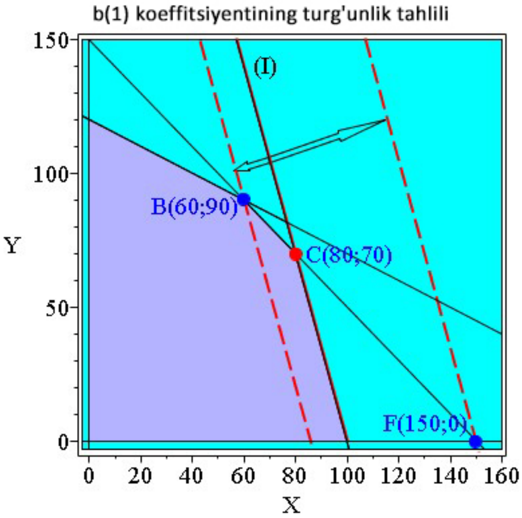
ya'ni $20000 \leq P^* \leq 30000$.

Xom ashyo va mehnat zaxiralari hajmi (350 m. DSP, 240 m. shisha, 150 ta ishchi) va bir dona shkafdan tushadigan foyda (200\$) o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. U holda bir dona tumbadan tushadigan foyda $(400/7; 200) = (57,14; 200)$ oraliqda o'zgarganida amaldagi $(X, Y) = (80, 70)$ ishlab chiqarish rejasi yangi sharoit uchun ham optimalligicha qoladi!
Optimal foyda qiymati $20000 \leq P^* \leq 30000$ oraliqda o'zgaradi.

b) Shartlarning o'ng tomonlari uchun turg'unlik intervallarini topish. Optimal nuqta C bo'lib, u (I) va (III) cheklovlariga mos keladigan chiziqlar kesishmasida joylashgan. Demak, (I) va (III) cheklovlarga mos kelgan DSP va mehnat resurslar kamyob bo'lib, ular reja amalida to'liq sarflanadi. (II) cheklovga mos kelgan shisha resursi esa kamyob emas: $X + 2Y = 80 + 2 \cdot 70 = 220$m sarflanib, zaxirada $240 - 220 = 20$m ortib qoladi. Optimal bazis saqlanib qoladigan holda cheklovlarning b_i o'ng qismidagi o'zgarishlar chegaralarini aniqlaymiz.

I - cheklanish.

Birinchi resurs (b_1 koeffitsiyent) ortishi bilan (I) to'gri chiziq parallel ravishda yuqoriga (III) shart to'g'ri chizig'i va OX o'qi kesishmasi F nuqtasiga ko'chadi. b_1 koeffitsiyent kamayishi bilan (I) to'g'ri chiziq parallel ravishda pastga (II) va (III) shartlarga mos to'g'ri chiziqlar kesishmasi B nuqtasiga ko'chadi.



F nuqta koordinatalari quyidagi tenglama sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} \textbf{(III)} & X + Y = 150 \\ \textbf{(OX)} & Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 150 \\ Y = 0 \end{cases}$$

Birinchi resurs zaxirasi b_1^+ qiymatiga oshirilishi mumkin:

$$b_1^+ = 3.5X + Y = 3.5 \cdot 150 + 1 \cdot 0 = 525.$$

B nuqtaning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} \textbf{(II)} & X + 2Y = 240 \\ \textbf{(III)} & X + Y = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 60 \\ Y = 90 \end{cases}$$

Birinchi resurs zaxirasi b_1^- qiymatiga kamaytirilishi mumkin:

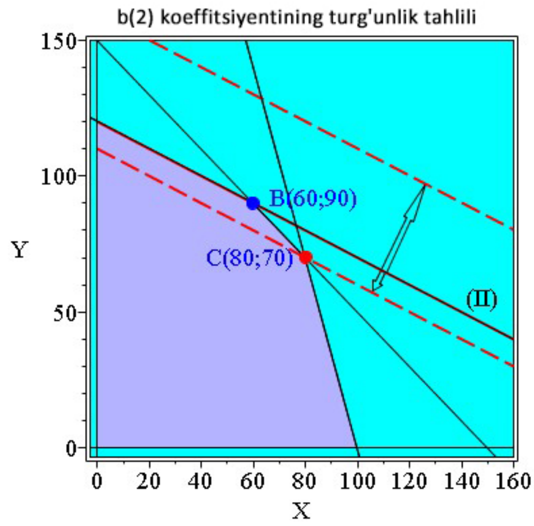
$$b_1^- = 3.5X + Y = 3.5 \cdot 60 + 1 \cdot 90 = 300.$$

Shunday qilib, (I) cheklanishning o'ng tomoni o'zgarish oralig'i $300 \leq b_1 \leq 525$, maksimal orttirma $\Delta b_1 = 525 - 350 = 175$ ga teng bo'lib, bunda maqsad funksiyaning optimal qiymati $P = 200X + 100Y = 200 \cdot 150 + 200 \cdot 0 = 30000$ gacha oshadi, maqsad funksiyaning maksimal orttirmasi $\Delta P = 30000 - 23000 = 7000$ ga teng bo'lar ekan. Birinchi resurs uchun ikkiyoqlama qiymat quyidagicha topiladi:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta P}{\Delta b_1} = \frac{7000}{175} = 40.$$

Shisha zaxirasi (240 m.), ishchilar soni (150 ta) va har ikki mahsulotdan tushadigan foyda (200\$ va 100\$) o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. DSP zaxirasi (300;525) oraliqda o'zgarganida optimal reja doirasida DSP zaxirasi to'liq sarflanadi, ya'ni optimal reja o'zrargan taqdirda ham resurs kamyoblik xususiyatini saqlaydi.

II-cheklanish.
Ikkinchi resurs kamyob bolmagan resurs bo'lib, uning (b_2 koeffitsiyent) ortishi bilan (II) to'gri chiziq parallel ravishda yuqoriga ko'chadi. Ikkinchi resursning qiymati cheksiz oshgan taqdirda ham optimal yechim o'zgarmaydi: $b_2^+ = +\infty$. Ikkinchi resurs (b_2 koeffitsiyent) kamaytirilganda, (II) chiziq parallel ravishda pastga C nuqtagacha ko'chadi. Shundan so'ng to'gri chiziq optimal nuqtani aniqlaydi.



C nuqta optimal yechimni aniqlaydi, uni (I) va (III) shartlarga mos chiziqlardan tuzilgan tenglama sistemasini yechib C nuqta koordinatalarini aniqlagan edik: $(80; 70)$. Demak, ikkinchi resurs zaxirasi b_2^- qiymatiga kamaytirilishi mumkin:

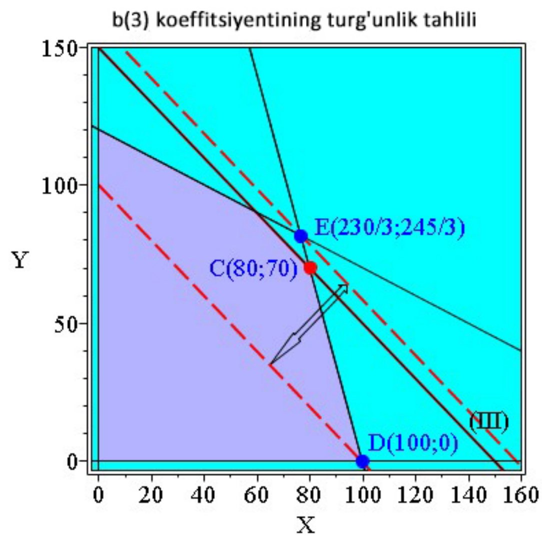
$$b_2^- = X + 2Y = 1 \cdot 80 + 2 \cdot 70 = 220.$$

Shunday qilib, (II) cheklanishning o'ng tomoni o'zgarish oralig'i $220 \leq b_2 \leq +\infty$, maksimal orttirma $\Delta b_2 = 240 - 220 = 20$ ga teng bo'lib, bunda maqsad funksiyaning optimal qiymati o'zgarmaydi, maqsad funksiyaning maksimal orttirmasi $\Delta P = 0$ ga teng bo'lar ekan. Ikkinchi resurs uchun ikkiyoqlama qiymat nolga teng:

$$\Delta_2 = \frac{\Delta P}{\Delta b_2} = \frac{0}{20} = 0.$$

DSP zaxirasi (350 m.), ishchilar soni (150 ta) va har ikki mahsulotdan tushadigan foyda (200\$ va 100\$) o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. Shisha zaxirasi (220;+∞) oraliqda o'zgarganida optimal reja o'zgarmaydi va shisha zaxirasi to'liq sarflanmaydi, ya'ni resurs kamyob emaslik husuiyatini saqlaydi.

III - cheklanish.
Uchinchi resurs (b_3 koeffitsiyent) ortishi bilan (III) shart to'gri chizig'i parallel ravishda yuqoriga (I) va (II) shart to'g'ri chiziqlari kesishmasi E nuqtasiga ko'chadi. b_1 koeffitsiyent kamayishi bilan (III) to'g'ri chiziq parallel ravishda pastga (I) shartlarga mos to'g'ri chiziq va OX o'qi kesishmasi D nuqtasiga ko'chadi.



E nuqtaning koordinatalarini quyidagi tenglama sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} \textbf{(I)} \quad 3.5X + Y = 350 \\ \textbf{(II)} \quad X + 2Y = 240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{230}{3} \\ Y = \dfrac{245}{3} \end{cases}$$

Uchinchi resurs zaxirasi b_3^+ qiymatiga oshirilishi mumkin:

$$b_3^+ = X + Y = \frac{230}{3} + \frac{245}{3} = 158\frac{1}{3}.$$

D nuqtaning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} \textbf{(I)} \quad 3.5X + Y = 350 \\ \textbf{(OX)} \quad Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 100 \\ Y = 0 \end{cases}$$

Uchinchi resurs zaxirasi b_3^- qiymatiga kamaytirilishi mumkin:

$$b_3^- = X + Y = 100 + 0 = 100.$$

Shunday qilib, (III) cheklanishning o'ng tomoni o'zgarish oralig'i $100 \leq b_3 \leq 158\frac{1}{3}$, maksimal orttirma $\Delta b_3 = 150 - 100 = 50$ ga teng bo'lib, bunda maqsad funksiyaning optimal qiymati $P = 200X + 100Y = 200 \cdot 100 + 100 \cdot 0 = 20000$ gacha kamayadi, maqsad funksiyaning maksimal orttirmasi $\Delta P = 23000 - 20000 = 3000$ ga teng bo'lar ekan. Uchinchi resurs uchun ikkiyoqlama qiymat quyidagicha topiladi:

$$\Delta_3 = \frac{\Delta P}{\Delta b_3} = \frac{3000}{50} = 60.$$

Shuni aytish lozimki, b_3 bo'yicha maksimal orttirma o'rniga minimal orttirmani ko'rgan taqdirda ham resurs uchun ikkiyoqlama qiymat o'zgarmaydi:

$$\Delta b_3 = 158\frac{1}{3} - 150 = 8\frac{1}{3} = \frac{25}{3},$$

$$P = 200 \cdot \frac{230}{3} + 100 \cdot \frac{245}{3} = 23500, \quad \Delta P = 23500 - 20000 = 500,$$

$$\Delta_3 = \frac{\Delta P}{\Delta b_3} = \frac{500}{25/3} = 60.$$

DSP zaxirasi (350 m.), shisha zaxirasi (240 m.) va har ikki mahsulotdan tushadigan foyda (200$ va 100$) o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. Ishchilar soni ($100; 158\frac{1}{3}$) oraliqda o'zgarganida optimal reja doirasida ishchi kuchi to'liq sarflanadi, ya'ni optimal reja o'zrargan taqdirda ham resurs kamyoblik xususiyatini saqlaydi.

Resurslar uchun ikkiyoqlama qiymatlar $\Delta_1 = 40$, $\Delta_2 = 0$ va $\Delta_3 = 60$ ekanligini aniqlagan edik. $\Delta_2 = 0$ ekanligidan ikkinchi resurs zaxirasini oshirishdan naf yo'q. Qo'shimcha mablag'lar evaziga zaxiralarni oshirish imkoniyati bor bo'lsa, kamyob bo'lgan DSP va ishchi kuchi resurslari zaxirasini oshirish maqsadga muvofiq bo'lib, birinchi navbatda e'tiborni ishchi resurslariga qaratish lozim ($\Delta_3 > \Delta_1$).

4.8 Chorva mollari ratsioni masalasi yechimi uchun turg'unlik tahlili

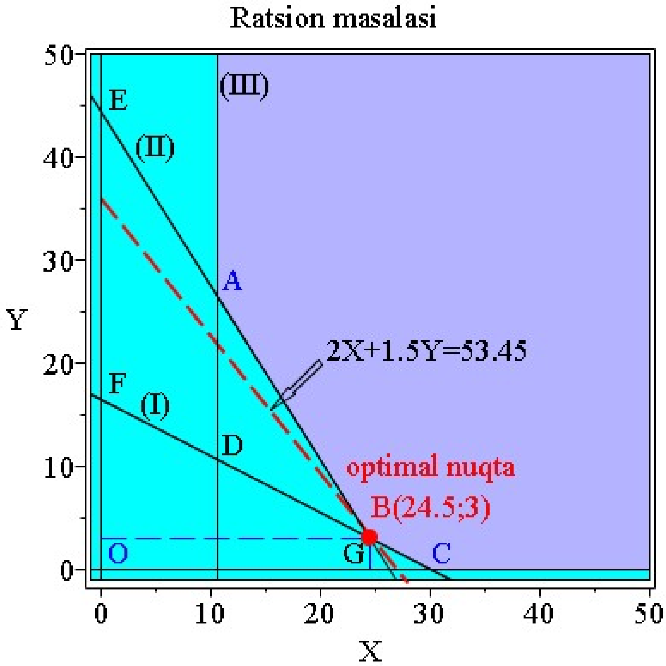
3.2 - bo'limda ishlab chiqarishning optimal rejalashtirish haqidagi amaliy masalaning matematik modeli qurib, 4.5 - bo'limda uni grafik usulda yechgan edik.

Masalaning matematik modeli:

$$C = 2X + 1,5Y \to \min,$$
$$\begin{cases} \textbf{(I)} \quad 0,50X + 0,92Y \geq 15, \\ \textbf{(II)} \quad 32X + 19Y \geq 840, \\ \textbf{(III)} \quad 30X \geq 320, \\ X \geq 0, \quad Y \geq 0. \end{cases}$$

Masalaning yechimi:

Qoramolning kundalik ratsionida $X = 24.5$ ***kg*** arpa va $Y = 3$ ***kg*** qand lavlagi bo'lgan taqdirda ratsion barcha talablarga javob bergan holda narxi eng arzon $C^* = 53.45$ ***shartli pul birligi*** bo'ladi.



a) Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari uchun turg'unlik oralig'ini topish. Maqsad funksiyasining c_i koeffitsiyentlarining optimal yechim o'zgarishsiz qoladigan o'zgartirish chegaralarini aniqlaymiz. Optimal yechim - B nuqtasi (I) va (II) to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasidir.

(I) to'g'ri chiziq tenglamasi $\to$ $0.5X + 0.92Y = 15 \to Y = \frac{375}{3} - \frac{25}{46}X$, burchak koeffitsiyenti $k = -\frac{25}{46}$; (II) tog'ri chiziq tenglamasi $\to$ $32X + 19Y = 840 \to Y = \frac{840}{19} - \frac{32}{19}X$, burchak koeffitsiyenti $k = -\frac{32}{19}$; Maqsad funksiyasi: $\to$ tenglama $c_1X + c_2Y = 53\frac{9}{20} \to Y = \frac{1069}{20c_2} - \frac{c_1}{c_2}X$, burchak koeffitsiyenti $k = -\frac{c_1}{c_2}$.

$$-\frac{32}{19} \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -\frac{25}{46} \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{46} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{32}{19} \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{46}c_2 \leq c_1 \leq \frac{32}{19}c_2.$$

Agar maqsad funksiyaning koeffitsiyentlari $\frac{25}{46}c_2 \leq c_1 \leq \frac{32}{19}c_2$ shartni qondirsa, optimal yechim o'zgarmaydi.

♦ koeffitsiyentning o'zgarmas $c_2 = 1.5$ qiymatida c_1 koeffitsiyent

$$\frac{25}{46}c_2 \leq c_1 \leq \frac{32}{19}c_2 \;\Rightarrow\; \frac{25}{46}\cdot\frac{3}{2} \leq c_1 \leq \frac{32}{19}\cdot\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; \frac{75}{92} \leq c_1 \leq \frac{48}{19} \;\Rightarrow\; 0.8152 \leq c_1 \leq 2.5263$$

chegaralar ichida o'zgaradi. Shu bilan birga, maqsad funksiyaning qiymati $C_1 \leq C^* \leq C_2$ o'zgaradi, bu yerda

$$C_1 = \frac{75}{92}X + \frac{3}{2}Y = \frac{75}{92}\cdot\frac{49}{2} + \frac{3}{2}\cdot 3 = 24.472, \quad C_2 = \frac{48}{19}X + \frac{3}{2}Y = \frac{48}{19}\cdot\frac{49}{2} + \frac{3}{2}\cdot 3 = 66.394.$$

*Chorva mollari uchun ratsionga bolgan talab va qand lavlagi narxi (1.5 sh.p.b.) o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. U holda 1 kg arpa narxi $(0.8152; 2.5263)$ oraliqda o'zgarganida ham kundalik ratsionida optimal **X=24.5 kg** arpa va **Y=3 kg** qand lavlagi bo'lgan reja ratsionning barcha talablarga javob bergan holda narxi eng arzoniligicha qoladi!*
Optimal narx qiymati $24.472 \leq C^* \leq 66.394$ oraliqda o'zgaradi.

♦ koeffitsiyentning o'zgarmas $c_1 = 2$ qiymatida c_2 koeffitsiyent

$$\frac{25}{49} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{32}{19} \;\Rightarrow\; \frac{25}{46} \leq \frac{2}{c_2} \leq \frac{32}{19} \;\Rightarrow\; \frac{38}{32} \leq c_2 \leq \frac{92}{25} \;\Rightarrow\; 1.1875 \leq c_2 \leq 3.68$$

chegaralar ichida o'zgaradi. Shu bilan birga, maqsad funksiyaning qiymati $C_3 \leq C^* \leq C_4$ oraliqda o'zgaradi, bu yerda

$$C_3 = 2X + \frac{38}{32}Y = 2 \cdot \frac{49}{2} + \frac{38}{32} \cdot 3 = 52.5625, \quad C_4 = 2X + \frac{92}{25}Y = 2 \cdot \frac{49}{2} + \frac{92}{25} \cdot 3 = 325,$$

ya'ni $52.262 \leq C^* \leq 60.04$.

*Chorva mollari uchun ratsionga bolgan talab va arpa narxi (2 sh.p.b.) o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. U holda 1 kg lavlagi narxi $(1.1875; 3.68)$ oraliqda o'zgarganida ham kundalik ratsionida **X=24.5 kg** arpa va **Y=3 kg** qand lavlagi bo'lgan optimal reja ratsionning barcha talablarga javob bergan holda narxi eng arzoniligicha qoladi!*
Optimal narx qiymati $52.262 \leq C^* \leq 60.04$ oraliqda o'zgaradi.

b) Shartlarning o'ng tomonlari uchun turg'unlik intervallarini topish. Optimal rejani aniqaydigan B nuqta I va II cheklovlariga mos keladigan to'g'ri chiziqlarga mos keladi. Bu esa "$\geq$" ko'rinishidagi shartlarimiz optimal rejada "$=$" tenglik bilan bajarilishini, ya'ni oziq moddalar va proteinga bo'gan minimal talab bajarililishini anglatadi. Optimal reja $(X; Y) = (24.46; 3)$ ekanligini inobatga olib, shunga ishonch hosil qilamiz:
oziq moddalar: (I) $0.50X + 0.92Y = 0.50 \cdot 24.46 + 0.92 \cdot 3 = 15$ (*minimal talab*);
protein: (II) $32X + 19Y = 32 \cdot 24.46 + 19 \cdot 3 = 840$ (*minimal talab*).
Optimal rejada karotinga bo'gan talab ortig'i bilan bajariladi:
karotin: (III) $30X = 30 \cdot 24.46 = 733.8 \geq 320$ (*minimal talabdan* 413.8 *mgr ortiq*).

Optimal bazis saqlanib qoladigan holda cheklovlarning b_i o'ng qismidagi o'zgarishlar chegaralarini aniqlaymiz.

I cheklanish. Birinchi minimal talab (b_1 koeffitsiyent) ortishi bilan (I) to'gri chiziq parallel ravishda yuqoriga (II) va (III) to'g'ri chiziqlar kesishmasi A nuqtasiga ko'chadi. A nuqtaning koordinatalarini quyidagi tenglama sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} 32X + 19Y = 840 \\ 30X = 320 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 10\dfrac{2}{3} \\ \\ Y = 26\dfrac{14}{57} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 10.667 \\ Y = 26.245 \end{cases}$$

Birinchi minimal talabni b_1^+ qiymatiga oshirilishi mumkin:

$$b_1^+ = 0.50X + 0.92Y = 0.50 \cdot 10.667 + 0.92 \cdot 26.245 = 29.479.$$

Birinchi minimal talab (b_1 koeffitsiyent) kamaytirilganda, (I) chiziq parallel ravishda (II) chiziq va OX o'qining kesishish nuqtasi G gacha ko'chadi. G nuqtaning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} 32X + 19Y = 840 \\ Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 26,25 \\ Y = 0 \end{cases}$$

Birinchi resurs zaxirasi b_1^- qiymatiga kamaytirilishi mumkin:

$$b_1^- = 0.50X + 0.92Y = 0.50 \cdot 26.25 + 0.92 \cdot 0 = 13.125$$

Shunday qilib, (I) chegaraning o'ng tomoni o'zgarish oralig'i $13.125 \leq b_1 = 15 \leq 29.479$, maksimal orttirma $\Delta b_1 = 29.479 - 15 = 14.479$ ga teng bo'lib, bunda maqsad funksiyaning optimal qiymati $C = 2X + 1.5Y = 2 \cdot 10.667 + 1.5 \cdot 26.245 = 60.7015$ gacha oshadi. Maqsad funksiyaning orttirmasi $\Delta C = 60.7015 - 53.44 = 7.2615$ ga teng bo'lar ekan. b_1 uchun ikkiyoqlama qiymat quyidagicha topiladi:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta C}{\Delta b_1} = \frac{7.2615}{14.479} = 0.501.$$

Chorva mollari uchun ratsionga protein, karotin miqdoriga bo'lgan minimal talab va arpa hamda qand lavlagi narxi o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. Oziq modda bo'lgan minimal talab $(13.125; 29.479)$ *oraliqda o'zgarganida ham optimal reja doirasida oziq moddaga bo'lgan talab minimal ravishda qondiriladi.*

II cheklanish. Ikkinchi minimal talab (b_2 koeffitsiyent) ortishi bilan (II) to'gri chiziq parallel ravishda yuqoriga (I) to'g'ri chiziq va OX o'qi kesishmasi C nuqtasiga ko'chadi. C nuqtaning koordinatalarini quyidagi tenglama sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} 0.5X + 0.92Y = 15 \\ Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 30 \\ Y = 0 \end{cases}$$

Ikkinchi minimal talab b_2^+ qiymatiga oshirilishi mumkin:

$$b_2^+ = 32X + 19Y = 32 \cdot 30 + 0 = 960.$$

Ikkinchi minimal talab (b_2 koeffitsiyent) kamaytirilganda, (II) chiziq parallel ravishda pastga (I) va (III) chiziqlarning kesishishi nuqtasi D gacha ko'chadi. D nuqtaning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} 0.5X + 0.92Y = 15 \\ 30X = 320 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 5\frac{1}{3} \\ \\ Y = 10\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 10.6(6) \\ \\ Y = 10.507 \end{cases}$$

Ikkinchi minimal talab b_2^- qiymatiga kamaytirilishi mumkin:

$$b_2^- = 32X + 19Y = 32 \cdot 10.(6) + 19 \cdot 10.507 = 538.89.$$

Shunday qilib, (II) chegaraning o'ng tomoni o'zgarish chegaralari $538.89 \leq b_2 = 840 \leq 960$, maksimal orttirma $\Delta b_2 = 840 - 538.89 = 301.1014$ ga teng bo'lib, bunda maqsad funksiyaning optimal qiymati $C = 2X + 1.5Y = 2 \cdot 10.507 + 1.5 \cdot 10.6(6) = 37.01449$ gacha oshadi, maqsad funksiyaning orttirmasi $\Delta C = 53.44 - 37.01449 = 16.42581$ ga teng bo'lar ekan. b_2 uchun ikkiyoqlama qiymat quyidagicha topiladi:

$$\Delta_2 = \frac{\Delta C}{\Delta b_2} = \frac{16.42581}{301.1014} = 0.0547$$

Chorva mollari uchun ratsionga oziq modda, karotin miqdoriga bo'lgan minimal talab va arpa hamda qand lavlagi narxi o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. Proteinga bo'lgan minimal talab $(538.89; 960)$ *oraliqda o'zgarganida ham optimal reja doirasida proteinga bo'lgan talab minimal ravishda qondiriladi.*

III cheklanish. Uchinchi minimal talab (b_3 koeffitsiyent) ortishi bilan (III) to'gri chiziq parallel ravishda G nuqtagacha ko'chadi. Shundan so'ng to'gri chiziq optimal nuqtani aniqlaydi. G nuqta optimal nuqta bo'lib, uning koordinatalari (I) va (II) tenglamalardan iborat bo'lib, ular yechib aniqlangan edi: $G(24.5; 3)$.

Uchinchi minimal talab b_3^+ qiymatiga oshirilishi mumkin:

$$b_3^+ = 30X = 30 \cdot 24.5 = 735.$$

Uchinchi minimal talab (b_3 koeffitsiyent) kamayishi bilan (III) to'gri chiziq parallel ravishda chapga ko'chadi. Uchinchi resursning qiymati cheksiz kamaygan taqdirda ham optimal yechim o'zgarmaydi: $b_3^- = -\infty$.

Shunday qilib, (III) chegaraning o'ng tomoni o'zgarish chegaralari $-\infty \leq b_3 \leq 735$, maksimal orttirma $\Delta b_3 = 735 - 320 = 415$ ga teng bo'lib, bunda maqsad funksiyaning optimal qiymati o'zgarmaydi, maqsad funksiyaning maksimal orttirmasi $\Delta L = 0$ ga teng bo'lar ekan.

b_3 resursning ikkiyoqlama qiymati quyidagi nisbat kabi aniqlanadi:

$$\Delta_3 = \frac{\Delta C}{\Delta b_3} = \frac{0}{415} = 0.$$

Chorva mollari uchun ratsionga oziq modda, protein miqdoriga bo'lgan minimal talab va arpa hamda qand lavlagi narxi o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. Karotinga bo'lgan minimal talab $(-\infty; 735)$ *oraliqda o'zgarganida ham optimal reja doirasida karotinga bo'lgan talab minimal talab ortig'i bilan qondiriladi.*

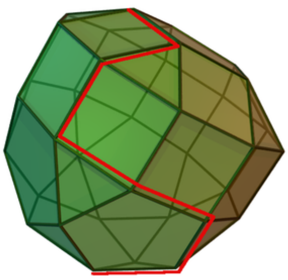
Resurslar uchun ikkiyoqlama qiymatlar $\Delta_1 = 0.501$, $\Delta_2 = 0.0547$ va $\Delta_3 = 0$ ekanligini aniqlagan edik. Xulosa qiladigan bo'lsak, ratsion narxini kamaytirish zaruriyati tug'ilgan taqdirda ozuqadagi oziq modda va protein miqdorining minimal hajmini kamaytirish ratsion tannarxini tushirishga olib keladi $(\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0)$.

5 Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish

Agar chiziqli dasturlash masalasining matematik modelidagi o'zgaruvchilar soni ikkidan ortiq bo'lgan taqdirda (ba'zi hollar bundan mustasno) masalani grafik usulda yechish imkoniyati bo'lmaydi. Bunday masalalarni yechishda simpleks usuli universial hisoblanadi.

Simpleks usuli *- chiziqli dasturiy masalasining maqsad funksiyasi optimal (maksimal yoki minimal) qiymatini qabul qilmaguncha, bir bazis yechimdan (yechimlar ko'pburchagining bir uchidan) boshqa yechimga ketma-ket o'tish usulidir.*

Simpleks usuli - faqat ikki o'zgaruvchili bo'lgan masalani yechishga mo'ljallangan grafik usulidan farqli, har qanday chiziqli dasturlash masalasini yechish imkoniyatini beradigan ***universal usul****dir.*



Rasm 20: Ko'pburchakning bir uchidan keyingisiga o'tish.

Simpleks usuli 1947-yilda amerikalik matematik R. Danzig tomonidan taklif qilingan, o'sha vaqtdan boshlab sanoat islab chiqarish ehtiyojlari uchun bu usul minglab o'zgaruvchilar va cheklovlar qatnashgan chiziqli dasturlash muammolarini yechishda ko'p qo'llanilgan.

Simpleks usulni bayon qilishdan avval chiziqli tenglamalar sistemasining ba'zi tushunchalarini esga olaylik.

Bizga n o'zgaruvchili m ta tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ \ (i = 1, 2, ..., m),$$

ya'ni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2}$$

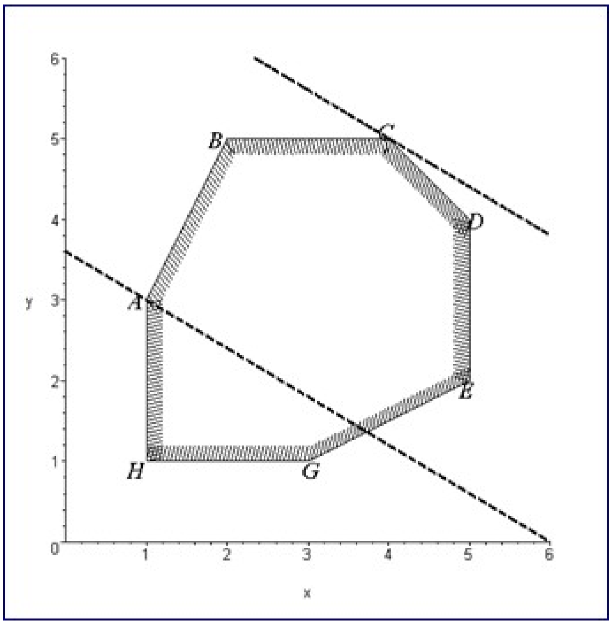
Chiziqli dasturlash masalalarida $A = (a_{ij}), (i = 1, 2, ..., m; \ j = 1, 2, ..., n)$ matritsaning rangi $r = m$ bo'lib, $m < n$ bo'lgan holat qiziqish uyg'otadi.

Agar (2) sistemaning m ta o'zgaruvchilari oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsaning determinanti noldan farqli bo'lsa, bunday o'zgaruvchilarga ***bazis o'zgaruvchilar*** deyiladi. Qolgan $n - m$ o'zgaruvchilarga esa ***ozod yoki nobazis o'zgaruvchilar*** deyiladi. Agar (2) sistemaning $(x_1, x_2, ..., x_n)$ yechimlari $x_j \geq 0$, $(j = 1, 2, ..., n)$ shartni qanoatlantirsa, bunday yecimlarga ***mumkin bo'lgan yechimlar*** deyiladi. Aks holda ***mumkin bo'lmagan yechimlar*** deyiladi. Nobazis o'zgaruvchilar nolga teng bo'lgan sistemaning yechimiga ***bazis yechim*** deyiladi.

5.1 Simpleks usulining geometrik talqini

Chiziqli dasturlash masalasini yechish jarayonida shu narsa aniqlandiki, agar masalaning optimal yechmi mavjud bo'lsa, bu yechimni joiz sohaning tugun nuqtalaridan izlash kerakligi kelib chiqadi. Yana shu narsani takidlash mumkinki, chiziqli dasturlash masalasi yechimga ega bo'lganda, bu yechim mumkin bo'lgan bazis yechimlarning biri bilan mos keladi. Demak, optimal yechimni topish uchun chiziqli dasturlash masalasining shartlaridan kelib chiqadigan tenglamalar sistemasini barcha mumkin bo'lgan barcha bazis yechimlarining ichidan maqsad funksiyasiga optimllikni taqdim qiladigan yechimni topish kerak bo'ladi. Bu geometrik nuqtayi nazardan joiz sohani tashkil qiluvchi ko'pburchak barcha ***tugun nuqtalari***ni ya'ni uchlarini tekshirib chiqishdan iborat bo'ladi. Albatta, yechimni bunday aniqlash, agar yechim mavjud bo'lsa, maqsadga olib keladi. Ammo real masalalarni bu usulda yechimini topishda katta qiyinchiliklarga duch kelinadi.

Tugun nuqtalarini qarab chiqish jarayonini maqsad funksiyasining qiymatini inobatga olgan holda amalga oshirilganda maqsadga tezroq yetiladi. Bunda har bir keyingi qadamga otilish jarayonida maqsad funksiyasining yaxshilanib borishiga qarab tanlanib boradi. Bu fikrni grafik usulda oydinlashtirishga harakat qilamiz.



Rasm 21: yechimlar ko'pburchagi.

Joiz soha ABCDEGH ko'pburchakdan iborat bo'lsin (5.1-rasm). Faraz qilaylik A nuqta mumkin bo'lgan boshlang'ich bazis yechim bo'lsin. Umuman olganda optimal nuqtani topish uchun 7 ta tugun nuqtalardagi maqsad funksiyasining qiymatlarini hisoblash lozim bo'ladi. Rasmdan ko'rinib turibdiki, A tugun nuqtadan so'ng qo'shni B nuqtaga, so'ng esa optimal nuqta C ga o'tish maqsadga muvofiqdir. 7 nuqta o'rniga uch nuqtani tekshirish yetarli bo'ldi. ***Simpleks usul yechimni qadamba qadam yaxshilanib borishini ta'minlovchi usul hisoblanadi.***

Simpleks usulining geometrik talqini shundan iboratki, boshlang'ich tugun nuqtadan keyingi qo'shni nuqtaga o'tishda maqsad funksiyasining qiymati optimal nuqtaga erishgunga qadar yaxshilanib boradi.

Masalani simpleks usulda yechish jarayonida quyidagi uch bosqichni amalga oshirishni uddalay olish lozim bo'ladi:

1. Mumkin bo'lgan boshlang'ich bazisni aniqlash;
2. Yaxshilangan yechimga o'tish qoidasini topish;
3. Yechimning optimalligini tekshirish.

Simpleks usulni qo'llash uchun masala kanonik ko'rinishda ifodalanishi kerak.

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

1. Quyidagi chiziqli dasturlash masalalarini ko‘pyoq uchlarini to‘la tekshirish usuli bilan yeching.

$$\begin{aligned}
&f = 2x_1 + x_2 \to \max,\\
&-x_1 + 3x_2 \le 12,\\
&2x_1 - 3x_2 \le 4,\\
&3x_1 + 2x_2 \le 19,\\
&x_1 \le 0,\;\; x_2 \le 0.
\end{aligned}$$

2. Quyidagi chiziqli dasturlash masalalarini ko‘pyoq uchlarini to‘la tekshirish usuli bilan yeching.

$$\begin{aligned}
&w = x_1 + x_2 + x_3 \to \max,\\
&x_1 - x_2 + x_3 \le 4,\\
&2x_1 + x_2 + x_3 \le 3,\\
&3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6,\\
&-x_1 + 2x_2 - x_3 \le -3.
\end{aligned}$$

Mustaqil ish topshiriqlari javoblari

1- topshiriq.

Ko’pburchak uchlari:

$x_1 = 0,\;\; x_2 = 0, \quad f = 0.$

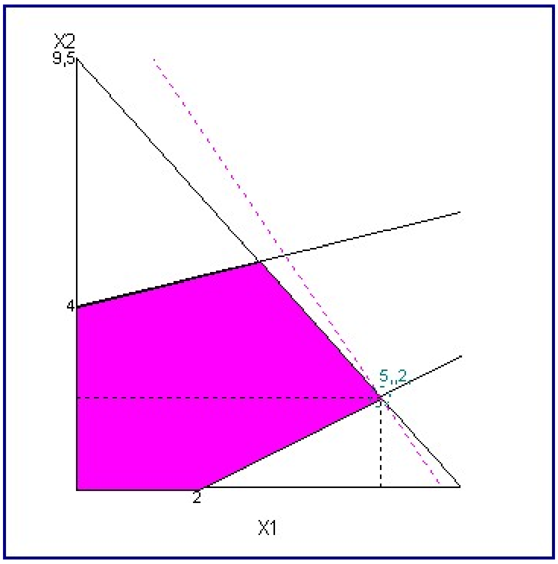
$x_1 = 0,\;\; x_2 = 4, \quad f = 4.$

$x_1 = 2,\;\; x_2 = 0, \quad f = 4.$

$x_1 = 3,\;\; x_2 = 5, \quad f = 11.$

$x_1 = 5,\;\; x_2 = 2, \quad f = 12.$

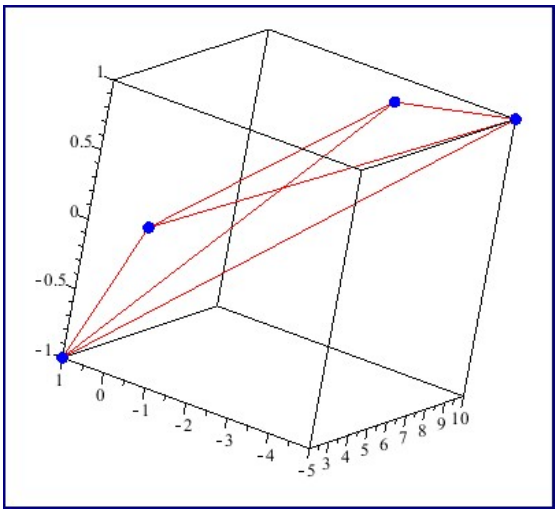
$f_{max} = f(5;2) = 12.$



Joiz soha - ko’pburchak

2- topshiriq.

Ko'pyoq uchlari:
$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2, \quad w = 2.$
$x_1 = -3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 8, \quad w = 6.$
$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3, \quad w = 3.$
$x_1 = -5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 10, \quad w = 6.$
$w_{max} = w(-3; 1; 8) = w(-5; 1; 10) = 6.$
Cheksiz ko'p yechim: $x_1 = 2k - 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 10 - 2k$, $0 \le k \le 1$.



Joiz soha - ko'pyoq

5.2 Simpleks algoritm

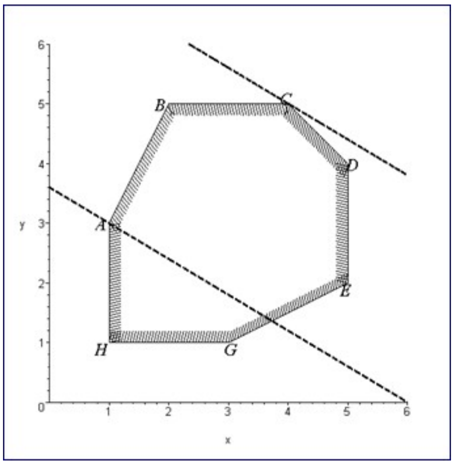
Simpleks usulning mohiyatini biror misolda bayon qilish ma'qulroq. Bizga standart ko'rinishdagi chiziqli dasturlash masalasi berilgan bo'lsin.

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{4}$$

Masalanining optimal yechimini grafik usulda oson topish mumkin (5.2-rasm). Optimal nuqta A nuqta, uning koordinatalari $(6; 2)$ bo'lib maqsad funksiyasining optimal qiymati $z = 18$ ga teng.

Berilgan masalani kanonik ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun (4) tengsizliklar sistemasidan tengliklarga qo'shimcha nomanfiy o'zgaruvchilar kiritamiz.



Rasm 22: grafik usulda yechish.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 14. \end{cases} \tag{5}$$

(5) sistema 4 noma'lumli tenglamalar sistemasiga aylandi. Ma'lumki, bazis yechimda nobazis o'zgaruvchilar nolga teng bo'lib, ular joiz sohaning biror tugun nuqtasidan iborat bo'ladi. (4) tenglamalar sistemasida bazis o'zgaruvchilar sifatida o'zgaruvchilarni olamiz. nobazis (erkin) o'zgaruvchilar bo'ladi. (5) sistemani bazis o'zgaruvchilar orqali yechamiz.

$$\begin{cases} s_1 = 10 - x_1 - 2x_2, \\ s_2 = 14 - 2x_1 - x_2. \end{cases} \tag{6}$$

Nobazis o'zgaruvchilarni nolga teng deb olib, bazis o'zgaruvchilarni (6) dan topamiz. $s_1 = 10$, $s - 2 = 14$. s_1, s_2 o'zgaruvchilarning qiymatlari musbat bo'lganligi uchun mumkin bo'lgan bazis o'zgaruvchilardir.

Boshlang'ich bazisni bunday aniqlash chiziqli dasturlash masalalarining shartlaridagi munosabatlar «kichik yoki teng» ko'rinishda bo'lganda qulaydir. Demak, standart ko'rinishdagi masalani kanonik ko'rinishga keltirish jarayonida kiritilgan qo'shimcha o'zgaruvchilar bazis bo'ladi. Qolgan barcha o'zgaruvchilar erkin o'zgaruvchilar bo'ladi va ular nolga tenglab olinadi. Demak, bu holatda koordinata boshi boshlang'ich mumkin bo'lgan yechimdan iborat bo'ladi.

Agar bazis o'zgaruvchilar barcha shartlarda ishtirok etmasa, u holda $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ mumkin bo'lmagan yechimdan iborat bo'lib qoladi. Bunda koordinata boshi mumkin bo'lgan yechimni tashkil qilmaydi. Bunday hollarda maxsus usullar ishlatiladi.

Shunday qilib, masalamizning boshlang'ich yechimi: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 10$. $s_2 = 14$ dan iborat va bu nuqta tugun nuqtalardan biri bo'lgan koordinatalar boshidan iboratdir. Tabiiyki, bu yechim optimal emas, chunki maqsad funksiyasining qiymati nolga teng, ya'ni hech qanday mahsulot ishlab chiqarilmaydi.

Ma'lumki, maqsad funksiyasining qiymatini erkin o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlarining musbatlaridan amalga oshirish mumkin. Buning uchun yangi bazisga o'tiladi va bu o'zgaruvchi noldan farqli qiymat qabul qiladi, erkin o'zgaruvchilar ichida ishtirok etmaydi. Bunda bazis o'zgaruvchilardan biri erkin o'zgaruvchilarga, erkin o'zgaruvchilardan biri esa bazis o'zgaruvchiga o'tadi. Geometrik nuqtayi nazardan bu almashish bir tugun nuqtadan shunday qo'shni bo'lgan tugun nuqtaga o'tiladiki, unda maqsad funksiyasining qiymati yaxshilanib boradi. Qaralayotgan masalamizda z ning qiymatini oshirish uchun bazisga x_1 ni yoki x_2 ni kiritish mumkin, chunki bu o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlarning ikkisi ham musbatdir. Aniqlik uchun bunday holatda eng katta koeffitsiyentga ega bo'lgan o'zgaruvchi bazisga kiritiladi, chunki shunda maqsad funksiyasi tezroq o'shadi.

Demak, x_2 ni bazisga kiritamiz. Endi x_2 ning qiymatini qanchagacha ko'tarish mumkinligini aniqlaylik.

(5) sistema $x_2$ning o'sishiga chegara qo'yadi. Barcha o'zgaruvchilarning nomanfiy bo'lmasligidan quyidagi tengsizliklar bajarilishi kerak (x_1 erkin o'zgaruvchi bo'lgani uchun nolga teng deb olamiz):

$$\begin{cases} s_1 = 10 - 2x_2 \geq 0, \\ s_2 = 14 - x_2 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \leq 5, \\ x_2 \leq 14. \end{cases} \tag{7}$$

(5) sistemaning har bir tenglamasi x_2 ning qanchagacha o'zgarishi mumkinligini aniqlaydi. Shuni e'tiborga olish kerakki, chegara tenglamadan kelib chiqadigan x_2 ning o'zgarishiga chegara ozod hadni x_2 koeffitsiyentga bo'lishdan hosil bo'ladi. Shuni ta'kidlash lozimki, x_2 ga chegara ozod had bilan x_2 oldidagi koeffitsiyentlar bir xil bo'lganda unga yuqoridan chegara qo'yiladi, x_2 oldidagi koeffitsiyent manfiy bo'lganda yoki 0 ga teng bo'lib qolsa, x_2 ning o'sishiga chegara qo'ymaydi.

Ozod had nolga teng bo'lganda ham bazisga kiruvchi o'zgaruvchiga chegara hosil qilmasligini aniqlash qiyin emas. (7) tengsizliklardan x_2 ning mumkin bo'lgan eng yuqori chegarasi $x_2 = min 5; 14 = 5$ ga teng bo'ladi. $x_2 = 5$ bo'lganda x_1 o'zgaruvchi nolga teng bo'ladi va erkin o'zgaruvchiga aylanadi.

Bazisga kiruvchi mumkin bo'gan eng katta qiymatni taqdim qiluvchi tenglamaga ***hal qiluvchi tenglama*** deyiladi (bizning misolimizda 1-tenglama). Shunday qilib, x_2 ni bazisga kiritib, s_1 o'zgaruvchini erkin o'zgaruvchilar qatoriga kiritamiz. Bazis o'zgaruvchilar: s_1, x_2; erkin o'zgaruvchilar x_1, s_2.

Navbatdagi qadamda yangi basiz o'zgaruvchilarni erkin o'zgaruvchilar orqali ifodalaymiz.

$$\begin{cases} x_2 = 5 - x_1/2 - s_1/2, \\ s_2 = 9 - 3x_1/2 + s_1/2. \end{cases} \tag{8}$$

Yangi yechim $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $s_1 = 0$, $s_2 = 9$ mumkin bo'gan bazis yechim bo'lib, u navbatdagi qo'shni tugun nuqtadan iboratdir.

Maqsad funksiyasini erkin o'zgaruvchilar orqali ifodalaymiz.

$$z = 2x_1 + 3x_2 = 2x_1 + 3(5 - x_1/2 - s_1/2) = x_1/2 - 3s_1/2 + 15. \tag{9}$$

Maqsad funksiyasining yaxshilangan qiymati $z = 15$.

Maqsad funksiyasining bu qiymati ham optimal emas, chunki (8) da x_1 oldidagi koeffitsiyent musbat bo'lgani uchun z ning qiymatini yana oshirish mumkin. Yuqorida keltirilgan mulohazalar kabi, (7) x_1 qanchagacha ko'tarish mumkinligini aniqlashimiz mumkin: $x_1 = \min\{10; 6\} = 6$. Demak, ikkinchi tenglama hal qiluvchi tenglama hisoblanadi va x_1 ni bazisga kiritib, s_2 ni bazisdan chiqaramiz. Demak, yangi bazis o'zgaruvchilar: x_1, x_2, erkin o'zgaruvchilar esa s_1, s_2 bo'ladi.

Yuqoridagidek, bazis o'zgaruvchilarni erkin o'zgaruvchilar bilan ifodalaymiz.

$$\begin{cases} x_2 = 2 - 2s_1/3 + s_2/3, \\ x_1 = 6 + s_1/3 - 2s_2/3. \end{cases} \tag{10}$$

Navbatdagi bazis yechim $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$. Maqsad funksiyasining qiymati $z = 18$ bo'ladi, Endi optimallikka erishganimizni bilish uchun maqsad funksiyani erkin o'zgaruvchilar orqali ifodalaymiz.

$$z = 2x_1 + 3x_2 = 18 - 4s_1/3 - s_2/3.$$

Maqsad funksiyasining erkin o'zgaruvchilari oldida musbat koeffitsiyentlar qolmagani uchun z ni yaxshilab bo'lmaydi. Biz optimal nuqtani topdik. Demak, $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ optimal nuqta A nuqtaning koordinatasidan iborat.

Endi optimallik mezonini keltiramiz.

Agar maqsad funksiyasini erkin o'zgaruvchilar orqali ifodalaganda musbat koeffisietlar mavjud bo'lmasa, topilgan yechim optimal bo'ladi.

Hisoblashlarda qulaylik yaratish maqsadida simpleks usulning jadval ko'rinishdagi ifodasi maqsadga muvofiqdir. Endi simpleks usulning jadval ko'rinishdagi ifodasini keltiramiz.

5.3 Simpleks jadval

Chiziqli dasturlash masalalsini simpleks usulida yechishda quyidagi algoritmga amal qilinadi.

1-qadam. *Boshlang'ich simpleks jadvalni qurish;*
2-qadam. *Yechimni optimallikka tekshirish. Optimal yechim topilganda jarayonni tugallash;*
3-qadam. *Optimallikka yo'naltiruvchi holatni topish;*
4-qadam. *Yangi yechimga o'tish va 2-qadamga qaytish.*

Simleks jadvalning umumiy ko'rinishi 23 – rasmda keltirilgan (m-shartlar soni, n-o'zgaruvchilar soni)

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>x1</td><td>x2</td><td>...</td><td>xn</td><td>s1</td><td>...</td><td>sm</td><td>b</td></tr>
<tr><td>B</td><td>cb</td><td colspan="7">Maqsad funksiya</td><td></td></tr>
<tr><td>Bazis o'zgaruvchilar</td><td>Maqsad funksiyasining bazisga kirgan koeffitsiyentlari</td><td colspan="7">Masala shartlarining koeffitsiyentlari</td><td>Bazis yechim qiymatlari</td></tr>
<tr><td colspan="2">zj</td><td colspan="7">cj-zj satrini hisoblash</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cj-zj</td><td colspan="7">Optimallik mezonini aniqlovchi satr</td><td></td></tr>
</table>

Rasm 23: Simpleks jadval ko'rinishi

- Jadvalning birinchi satrida barcha (asosiy va qo'shimcha) o'zgaruvchilar qayd qilinadi;
- Jadvalning **B** harfi bilan ajratilgan birinchi ustunida bazis o'zgaruvchilar keltiriladi.
- Jadvalning ikkinchi satrida 3-katakdan boshlab maqsad funksiyasining koeffitsiyentlari keltiriladi.
- **cb** ustunda bazisga kirgan o'zgaruvchilarning koeffitsiyentlari joylashtiriladi (oxirgi ikki satrdan tashqari).
- Bazis o'zgaruvchilar uchun ajratilgan satrlarda shartlarning koeffitsiyentlari keltiriladi.
- Oxirgi **b** ustunda bazis o'zgaruvchilarning qiymatlari joylashadi
- Oxirgi **cj-zj** satr optimallik mezonini aniqlashga qaratilgandir.
- **zj** satidagi ma'lumot yordamida oxirgi **cj-zj** satr hisoblanadi bu satrning oxirgi katagida maqsad funksiyasining joriy qiymati joylashadi.

Yuqorida keltirgan (3)-(4) misolimizni simpleks usulda yechaylik. Masalani kanonik ko'rinishga keltirish uchun quyidagi qo'shimcha s_1, s_2 o'zgaruvchilar kiritamiz.

Masalaning umumiy va kanonik ko'rinishlarini solishtiring:

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max, \qquad z = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 14, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad s_1 \ge 0, \quad s_2 \ge 0. \end{cases}$$

Jami 4 ta, ya'ni 2 ta asosiy x_1, x_2 va 2 ta qo'shimcha s_1, s_2 ozgaruvchilar bor. Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari vektori C, cheklanish shartlari koeffitsiyentlaridan iborat matrisa A va shartlar o'ng tomonlari vectori B lar quyidagicha aniqlanadi:

$$C = (c_1; c_2; c_3; c_4) = (2; 3; 0; 0),$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Birinchi qadam. Boshalng'ich simpleks jadvalni qurish.

Yuqorida keltirilga misolimizning simpleks jadvalini quraylik. Maqsad funksiyasini

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2$$

ko'rinishda yoizib olib, (5) sistemani inobatga olgan holda boshlang'ich jadvalni quyidagicha to'ldiramiz (24-rasm).

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b
		2	3	0	0	
s_1	0	1	2	1	0	10
s_2	0	2	1	0	1	14
z_j		0	0	0	0	**0**
c_j-z_j		2	3	0	0	

Rasm 24: Boshlang'ich simpleks jadval

Boshlang'ich simpleks jadvalning 2,3,4 satrlari bevosita maqsad funksiyasining va sistema koeffitsiyentlaridan iboratdir (A matrisa, C va B vectorlarga e'tibor bering). z_j satr elementlari quyidagicha topiladi. Maqsad funksiyasining bazisdagi koeffitsiyentlaridan iborat bo'lgan vektor shartlar ustunidagi vektorlarga skalyar ko'paytiriladi. Ya'ni $c_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektor $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorga skalyar ko'paytiriladi va h.k. Shu yo'l bilan z_j satrning barcha elementlari topiladi. $c_j - z_j$ satr elementlari maqsad funksiyasining koeffitsiyentlaridan mos ravishda z_j satr elementlarini ayirishdan hosil bo'ladi. Bazisda qatnashmagan o'zgaruvchilar nolga teng bo'lgani uchun $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Bazis o'garuvchilarning qiymati oxirgi ustundan olinadi: $s_1 = 10$, $s_2 = 14$. z_j satrning oxirgi katagida joylashgan son maqsad funksiyasining boshlang'ich qadamdagi qiymatidan iborat $z = 0$.

Birinchi qadamda oxirgi satrning qiymatlari maqsad funksiyasining koeffitsiyentlari bilan mos keladi. Shu bilan birinchi qadam tugaydi.

Ikkinchi qadam. Olingan natijani optimallaikka tekshirish.

Olingan natijaning optimalligi $c_j - z_j$ satrdagi barcha sonlarning nomusbatligidan aniqlanadi. ***Agar $c_j - z_j$ satrida joylashgan barcha elementlar nol yoki manfiy bo'lsa olingan natija optimal bo'ladi va jarayon tugallanadi.*** Agar bu elementlar ichida kamida bitta musbat element mavjud bo'lsa, optimallikka erishilmagan bo'ladi va yechimni yaxshilash mumkin bo'ladi.

Qaralayotgan misolimizda oxirgi satr elementlari ichida ikkita musbat son bo'lgani uchun natija optimal emas. Shu bilan optimallik shartini tekshirish tugallanadi.

Uchinchi qadam. Optimallikka yo'naltiruvchi holatni topish.

Boshlang'ich jadval oxirgi satridan maksimal elementini aniqlaymiz, bu element 3 ga teng. Simleks jadvalning oxirgi satrida joylashgan musbat elementlarining eng kattasi joylashgan ustunga ***hal qiluvchi ustun*** deyiladi (25-rasmdagi jadval).

25-rasmda keltirilgan jadvalda hal qiluvchi ustun strelka bilan ko'rsatilgan. Hal qiluvchi satrni topish maqsadida qo'shimcha ustun kiritib ustun elementlarini mos ravishda hal qiluvchi ustun elementlariga bo'lib chiqamiz. Hosil bo'lan sonlarning kichigini olamiz: $\min(5; 14) = 5$ (natijani 5.1 bo'limdagi mulohazalar bilan solishtiring). Demak, jadavalning uchinchi satri hal qiluvchi satr bo'lib, ushbu satr strelka bilan ko'rsatilgan. Hal qilluvchi satr bilan hal qiluvchi ustunlarning kesishishida joylashgan element ***hal qiluvchi element*** deyiladi. Bizning misolimizda hal qiluvchi element 2 ga teng va jadvalda qizil rangda berilgan. Shu bilan 3-qadamni tugallaymiz.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b	b_i/a_{ij}
		2	3	0	0		
s_1	0	1	**2**	1	0	10	10/2=5
s_2	0	2	1	0	1	14	14/1=14
z_j		0	0	0	0	**0**	
c_j-z_j		2	3	0	0		

Rasm 25: Hal qiluvchi elementni aniqlash

4-qadam. Yangi yechimga o'tish.

Yangi yechimga o'tish bazis o'zgaruvchilarni almashirishdan boshlanadi. Hal qiluvchi satr boshidagi bazis o'zgaruvchi hal qiluvchi ustundagi o'zgaruvchi bilan almashadi, shunga mos koeffitsiyentlar ham almashadi. Simpleks jadvalning 3- va 4- satrlaridagi elementlar Gauss-Jordan usuli bilan hal qiluvchi element yordamida qayta hisoblanib chiqiladi. Gauss-Jordan usulida quyidagicha yo'l tutiladi:

1) Hal qiluvchi satr hal qiluvchi elementga bo'linadi. Hal qiluvchi ustunning qolgan elementlari nollar bilan to'ldiriladi.

2) Qolgan satrlarni «to'rtburchak» usulida qayta hisoblanadi. Ushbu usul bilan chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss Jordan usuli bilan yechish mavzusidan tanishsiz.

$a(i,j)$	...	$a(i,k)$
...		...
$a(s,j)$	...	$a(s,k)$

Rasm 26: «To'rtburchak» usuli.

«To'rtburchak» usuli haqida eslatib o'tamiz. $a(i,j) = a_{ij}$ kabi jadvalning i- satr va j- ustun kesishmasida joylashgan elementni belgilab olaylik. Faraz qilaylik $a(s,k)$- hal qiluvchi element va $a(i,j)$ qayta hisoblanishi lozim element bo'sin. Jadvalning $a(s,k)$ va $a(i,j)$ qiymatlari joylashgan kataklardan foydalanib quyidagi 26 - rasmda keltirilgandek to'g'ri to'rtburchak tuzib olamiz. $a(i,j)$ ning yangi qiymati $a^*(i,j)$ quyidagi formila yordamida hisoblanadi:

$$a^*(i,j) = a(i,j) - \frac{a(s,j) \cdot a(i,k)}{a(s,k)}$$

Qayta hisoblash natijasida, quyidagi 27- rasmdagi jadvalga keltiramiz. Shunday qilib ikkinchi jadval tuzilib, yangi simpleks jadval hosil qilindi.

Hisoblashlarni tezlashtirish maqsadida quyidagi qoidalardan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b
		2	3	0	0	
x_2	3	1/2	1	1/2	0	5
s_2	0	3/2	0	-1/2	1	9
z_j		3/2	3	3/2	0	**15**
c_j-z_j		1/2	0	-3/2	0	

Rasm 27: Ikkinchi simpleks jadval

• Agar hal qiluvchi satrda 0 ga teng elementlar bo'lsa, unga mos ustun elementlarining qiymati yangi jadvalda o'zgarishsiz qoladi;

• Agar hal qiluvchi ustunda 0 ga teng elementlar bo'lsa, unga mos satr yangi jadvalda o'zgarishsiz qoladi. Ikkinchi qadamga o'tib yana optimallik mezonini tekshiramiz.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b	b_i/a_{ij}
		2	3	0	0		
x_2	3	1/2	1	1/2	0	5	10
s_2	0	**3/2**	0	-1/2	1	9	6
z_j		3/2	3	3/2	0	**15**	
c_j-z_j		1/2	0	-3/2	0		

Rasm 28: Hal qiluvchi elementni aniqlash

Yangi simpleks jadval oxirgi satrida musbat element 1/2 bo'lgani uchun optimal yechim olingani yo'q. Demak, yana yangi jadval quramiz. Endi hal qiluvchi ustun oxirgi satrdagi yagona musbat elementga mos kelgan x_1 ustunidir (28-rasmdagi jadvalga qarang).

Oxirgi ustundagi minimal qiymat $\min(10; 6) = 6$ bo'lgani uchun hal qiluvchi satr to'rtinchi satr bo'ladi. Demak, x_1 o'zgaruvchi bazisga kirib, s_2 esa bazisdan chiqadi. Yuqorida keltirilgan qoida bo'yicha yangi jadvalni quramiz (29-jadval).

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b
		2	3	0	0	
x_2	3	0	1	2/3	-1/3	2
x_1	2	1	0	-1/3	2/3	6
z_j		2	3	4/3	1/3	**18**
c_j-z_j		0	0	-4/3	-1/3	

Rasm 29: Oxirgi simpleks jadval

Hosil bo'lgan jadvalning oxirgi satriga nazar solsak, satrdagi barcha elementlar nomusbat bo'lib, bu biz optimal yechimga yetib kelganligimizdan dalolat beradi.

Jadvaldan optimal reja $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $s_1 = 0$ va $s_2 = 0$ ekanligini va maqsad funksiyasining optimal qiymati $z_{max} = z(6;2) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 18$ ekanligini aniqlash mumkin. Oxirgi jadvalda maqsad funksiyasining optimal qiymati pushti rang katakda hosil bo'lgan.

Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish universal usuldir. Bu usulda grafik usul kabi o'zgaruvchilar soniga chegara qo'yilmaydi.

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

1. Quyidagi masalalarni kanonik ko'rinishga keltiring.

1) $\begin{array}{l} \max \quad 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} \max \quad x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$

3) $\begin{array}{l} \max \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_3 \le 8 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} \max \quad 6x_1 - 9x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$

2. Quyidagi masalalarning standart formada emasligini izohlang.

1) $\begin{array}{l} \min \quad x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} \max \quad x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 \le -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$

3) $\begin{array}{l} \max \quad x_1 + 3_2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \le 5 \\ 2x_1 - 2x_3 \ge 1 \\ x_2 + x_3 \le 0 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} \max \quad x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$

3. Quyidagi masalalarda boshlang'ich simpleks jadval berilgan.
   a. Boshlang'ich jadvalni to'ldiring.
   b. Masalani kanonik ko'rinishda yozing.
   c. Boshlang'ich bazisni aniqlang.
   d. Hal qiluvchi elementni toping.
   e. Keyingi iteratsiyada qaysi o'zgaruvchi bazisga kirishini va qaysi o'zgaruvchi bazisdan chiqishini aniqlang.

1)

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b
		4	11	0	0	
		2	4	1	0	24
		1	1	0	1	5
z_j						
$c_j - z_j$						

B	C_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
		5	3	4	0	0	
		3	1	1	1	0	100
		4	3	0	0	1	250
z_j							
c_j-z_j							

2)

B	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		6	7	0	0	0	
		10	27	1	0	0	200
		4	51	0	1	0	400
		15	27	0	0	1	350
z_j							
c_j-z_j							

3)

B	C_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
		1	3	1	0	0	0	
		5	5	7	1	0	0	12
		4	0	6	0	1	0	48
		0	1	1	0	0	1	8
z_j								
c_j-z_j								

4)

4. Keltirilgan masalalarda quyidagilarni tekshiring:
   a. Simpleks jadvalning oxiriga yetkazilganligini aniqlang;
   b. Agar simpleks jadval oxiriga yetkazilmagan bo‘lsa, hal qiluvchi elementni toping.

B	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b
		4	9	0	0	
x_2	9	0	1	2/7	-1/7	38
x_1	4	1	0	-3/7	5/7	10
z_j		4	9	6/7	11/7	382
c_j-z_j		0	0	-6/7	-11/7	

1)

2)

B	c_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
		15/2	15	10	0	0	0	
x_1	15/2	1	0	1	1/2	0	0	4
x_2	15	0	1	1/4	-1/8	1/2	0	1/2
s_3	0	0	0	3/4	-3/8	-1/2	1	3/2
z_j		15/2	15	45/4	15/8	15/2	0	75/2
c_j-z_j		0	0	-5/4	-15/8	-15/2	0	

3)

B	c_b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b
		3	4	1	7	0	0	0	
s_1	0	38/5	9/5	19/5	0	1	-1/5	0	32/5
x_4	7	2/5	6/5	1/5	1	0	1/5	0	3/5
s_3	0	1/5	8/5	23/5	0	0	-2/5	1	34/5
z_j		14/5	42/5	7/5	7	0	7/5	0	21/5
c_j-z_j		1/5	-22/5	-2/5	0	0	-7/5	0	

5. Quyidagi masalalarni simpleks va grafik usullarda yeching.

1) $\begin{array}{l} \max \quad 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 48 \\ x_1 + x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$
2) $\begin{array}{l} \max \quad 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$
3) $\begin{array}{l} \max \quad 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$

4) $\begin{array}{l} \max \quad x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$
5) $\begin{array}{l} \max \quad 4x_1 + 9x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 134 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$

6. Quyidagi masalalarni simpleks usulida yeching.

1) $\begin{array}{l} \max \quad 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 42 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 42 \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 42 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$
2) $\begin{array}{l} \max \quad x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$

3) $\begin{array}{l} \max \quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 \\ 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$
4) $\begin{array}{l} \max \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 59 \\ 2x_1 + \quad 3x_3 \leq 75 \\ x_2 + 6x_3 \leq 54 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$

5) $\begin{array}{l} \max \quad x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 60 \\ x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 50 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_4 \leq 72 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$

6) $\begin{array}{l} \max \quad 2,5x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 1,4x_2 + 0,2x_3 + 0,8x_4 \leq 1600 \\ 2x_1 + 2x_2 + 1,6x_3 + x_4 \leq 1300 \\ 1,2x_1 + x_2 + x_3 + 1,2x_4 \leq 960 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$

Mustaqil ish topshiriqlari javoblari

1. Quyidagi masalalarni kanonik ko‘rinishga keltiring.

1) $\begin{array}{l} \max \quad 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + s_1 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_2 = 12 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$

2) $\begin{array}{l} \max \quad x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 \\ x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 1 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$

3) $\begin{array}{l} \max \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 0s_1 + 0s_2 \\ x_1 + 2x_2 + s_1 = 12 \\ x_1 + x_3 + s_2 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$

4) $\begin{array}{l} \max \quad 6x_1 - 9x_2 + 0s_1 + 0s_2 \\ 2x_1 - 3x_2 + s_1 = 6 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 20 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$

3. Quyidagi masalalarda boshlang‘ich simpleks jadval berilgan. Savollarga javob bering.

1) **a.**

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b
		4	11	0	0	
s_1	0	2	4	1	0	24
s_2	0	1	1	0	1	5
z_j		0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		4	11	0	0	

b.

$\begin{array}{l} \max \quad 4x_1 + 11x_2 + 0s_1 + 0s_2 \\ 2x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 5 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$

c. Boshlang‘ich bazis s_1, s_2.

d. Hal qiluvchi element: 4.

e. s_1 bazisdan chiqadi, x_2 bazisga kiradi.

2) **a.**

B	c_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
		5	3	4	0	0	
s_1	0	3	1	1	1	0	100
s_2	0	4	3	0	0	1	250
z_j		0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		5	3	4	0	0	

b.

$\begin{array}{l} \max \quad 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 0s_1 + 0s_2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 100 \\ 4x_1 + 3x_2 + +4x_3 + s_2 = 250 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$

c. Boshlang‘ich bazis s_1, s_2.

d. Hal qiluvchi element: 3.

e. s_2 bazisdan chiqadi, x_1 bazisga kiradi.

3) **a.**

B	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		6	7	0	0	0	
s_1	0	10	27	1	0	0	200
s_2	0	4	51	0	1	0	400
s_3	0	15	27	0	0	1	350
z_j		0	0	0	0	0	0
c_j-z_j		6	7	0	0	0	

b.

max $\quad 5x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$
$10x_1 + 27x_2 + s_1 = 200$
$4x_1 + 51x_2 + s_2 = 400$
$15x_1 + 27x_2 + s_3 = 350$
$x_1, x_2, s_1, s2, s_3 \geq 0$

c. Boshlang‘ich bazis s_1, s_2, s_3.
d. Hal qiluvchi element: 27.
e. s_1 bazisdan chiqadi, x_2 bazisga kiradi.

4) **a.**

B	C_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
		1	3	1	0	0	0	
s_1	0	5	5	7	1	0	0	12
s_2	0	4	0	6	0	1	0	48
s_3	0	0	1	1	0	0	1	8
z_j		0	0	0	0	0	0	0
c_j-z_j		1	3	1	0	0	0	

b.

max $\quad x_1 + 3x_2 + x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$
$5x_1 + 5x_2 + 7x_3 + s_1 = 12$
$4x_1 + x_3 + s_2 = 48$
$x_2 + x_3 + s_3 = 8$
$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

c. Boshlang‘ich bazis s_1, s_2, s_3.
d. Hal qiluvchi element: 5.
e. s_1 bazisdan chiqadi, x_2 bazisga kiradi.

4.Keltirilgan masalalarda quyidagilarni tekshiring: a. Simpleks jadvalning oxiriga yetkazilganligini aniqlang; b. Agar simpleks jadval oxiriga yetkazilmagan bo‘lsa, hal qiluvchi elementni toping.

1) a. Simpleks jadval oxiriga yetkazilgan.
2) a. Simpleks jadval oxiriga yetkazilgan.
3) a. Simpleks jadval oxiriga yetkazilmagan; b.Hal qiluvchi element 38/5.

5. Quyidagi masalalarni simpleks va grafik usullarda yeching.

1) Optimal nuqta $x_1 = 20$, $x_2 = 10$, optimal qiymat max $= 80$.
2) Optimal nuqta $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, optimal qiymat max $= 11$.
3) Optimal nuqta $x_1 = 6/7$, $x_2 = 5/7$, optimal qiymat max $= 38/7$.
4) Optimal nuqta $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, optimal qiymat max $= 1$.
5) Optimal nuqta $x_1 = 10$, $x_2 = 38$, optimal qiymat max $= 382$.

6. Quyidagi masalalarni simpleks usulida yeching.

1) $x_1 = 0,\ x_2 = 21,\ x_3 = 21;$ max $= 210$.
2) $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 5;$ max $= 14$.
3) $x_1 = 16/19,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 5/19;$ max $= 83/19$.
4) $x_1 = 30,\ x_2 = 24,\ x_3 = 5;$ max $= 99$.
5) $x_1 = 0$, $x_2 = 24$, $x_3 = 12$, $x_4 = 0$; max $= 60$.
6) $x_1 = 0$, $x_2 = 650$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; max $= 3250$.

5.4 Amaliy ishlab chiqarish masalasini simpleks usulda yechish

Quyidagi amaliy masalani simpleks jadval usuli bilan yechishni ko'raylik.

Velosiped ishlab chiqarish masalasi

Korxona velosipedning uch xil modelini ishlab chiqaradi. Har bir velosiped modellarini yig'ish, bo'yash va qadoqlash uchun talab qilinadigan vaqt quyidagi jadvalda keltirilgan. Yig'ish, bo'yash va qadoqlash bo'limlarining imkoniyatlari mos ravishda 4006 soat, 2495 soat va 1500 soatga teng. Har bir A model velosipeddan tushadigan foyda $45, B modeldan $50 va C modeldan $55 ga teng. Maksimal foyda olish uchun velosipedning har bir modelidan qanchadan ishlab chiqarish maqsadga muvofiq?

Quyidagi jadvalda har bir turdagi velosiped uchun yig'ish, bo'yash va qadoqlash uchun talab qilinadigan vaqt sarfi keltirilgan:

	A model	**B model**	**C model**
Yig'ish	2	2,5	3
Bo'yash	1,5	2	1
Qadoqlash	1	0,75	1,25

Masalani yechish jarayonini uning matematik modelini qurishdan boshlaymiz. A turdagi modeldan x_1 ta, B modeldan x_2 ta va C modeldan x_3 dona ishlab chiqaradi deb belgilasak, ***masalaning matematik modeli***ni quyidagi ko'rinishda yozib olishimiz mumkin bo'ladi:

Masalaning matematik modeli:

$$\max \quad 45x_1 + 50x_2 + 55x_3,$$

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 5/2x_2 + 3x_3 \le 4006,\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \le 2495,\\
&x_1 + 0,75x_2 + 1,25x_3 \le 1500,\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

Matematik modelni kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$\max \quad 45x_1 + 50x_2 + 55x_3 + 0\cdot s_1 + 0\cdot s_2 + 0\cdot s_3,$$

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 5/2x_2 + 3x_3 + s_1 = 4006,\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 \;\; + s_2 \; = 2495,\\
&x_1 + 0,75x_2 + 1,25x_3 + s_3 = 1500,\\
&x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

Masalaning kanonik ko'rinishidan boshlang'ich jadvalni quramiz (30-rasm). Jadvalning oxirgi satri tahliliga ko'ra, musbat qiymatli elementlar mavjudligidan optimal yechim topish uchun ishni davom ettiramiz. Ushbu satrda joylashgan eng katta element 55 ga tengligidan hal qiluvchi ustunni x_3 deb tanlab olamiz. So'ngra jadvalning oxirgi yordamchi ustunini to'ldiramiz. Eng kichik musbat element 1200 ga teng bo'lgani uchun hal qiluvchi satr sifatida s_3 satrni olamiz. Hal qiluvchi satr va ustunlarning kesishmasida joylashgan 5/4 qiymat hal qiluvchi element bo'ladi.

B	c_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b	b_i/a_{ij}
		45	50	55	0	0	0		
s_1	0	2	5/2	3	1	0	0	4006	4006/3
s_2	0	3/2	2	1	0	1	0	2495	2495
s_3	0	1	3/4	**5/4**	0	0	1	1500	1200
Z_j		0	0	0	0	0	0	**0**	
c_j-Z_j		45	50	55	0	0	0		

Rasm 30: Birinchi simpleks jadval

Ushbu bosqich yakuniga ko'ra bazisdan s_3 o'zgaruvchi chiqib ketadi va uning o'rniga x_3 o'zgaruvchi kiradi. Ikkinchi simpleks jadvalni to'ldiramiz (31- jadval). Ikkinchi jadvalning

B	c_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b	b_i/a_{ij}
		45	50	55	0	0	0		
s_1	0	-2/5	**7/10**	0	1	0	-12/5	406	1421/5
s_2	0	7/10	7/5	0	0	1	-4/5	1295	925
x_3	55	4/5	3/5	1	0	0	4/5	1200	2000
Z_j		44	33	555	0	0	44	**66000**	
c_j-Z_j		1	17	0	0	0	-44		

Rasm 31: Ikkinchi simpleks jadval

oxirgi satri tahliliga ko'ra, musbat qiymatli elementlar mavjudligidan optimal yechim topish uchun ishni davom ettiramiz. Ushbu satrda joylashgan eng katta element 17 ga tengligidan hal qiluvchi ustunni x_2 deb tanlab olamiz. So'ngra jadvalning oxirgi yordamchi ustunini to'diramiz. Eng kichik musbat element 406 ga teng bo'lgani uchun hal qiluvchi satr sifatida s_1 satrni olamiz. Hal qiluvchi satr va ustunlarning kesishmasida joylashgan 7/10 qiymat hal qiluvchi element bo'ladi. Navbatdagi bosqich yakuniga ko'ra bazisdan s_1 o'zgaruvchi chiqib ketadi va uning o'rniga x_2 o'zgaruvchi kiradi. Uchinchi simpleks jadvalni shakllantirishga o'tamiz (32- jadval).

Jadvalning oxirgi satrida musbat element mavjud bo'lgani tufayli hali optimal yechim topilmadi. Bazisga s_3 kiritilib bazisdan s_2 chiqaziladi. Natijada 33- jadvalga kelamiz. To'rtinchi jadvalning oxirgi satri tahliliga ko'ra, musbat qiymatli elementlar mavjudligidan optimal yechim topish uchun ishni davom ettiramiz. Ushbu satrda joylashgan yagona musbat element 75/4 ga tengligidan hal qiluvchi ustunni x_1 deb tanlab olamiz. So'ngra jadvalning oxirgi yordamchi ustunini to'ldiramiz. Eng kichik musbat element 483/4 ga teng bo'lgani uchun hal qiluvchi satr sifatida s_3 satrni olamiz. Hal qiluvchi satr va ustunlarning kesishmasida joylashgan 3/8 qiymat hal qiluvchi element bo'ladi. Navbatdagi bosqich

B	c_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b	b_i/a_{ij}
		45	50	55	0	0	0		
x_2	50	-4/7	1	0	10/7	0	-24/7	580	
s_2	0	3/2	0	0	-2	1	**4**	483	483/4
x_3	55	8/7	0	1	-6/7	0	20/7	582	2037/10
Z_j		270/7	50	55	170/7	0	44	**75860**	
c_j-z_j		75/7	0	0	-170/7	0	100/7		

Rasm 32: Uchinchi simpleks jadval

B	c_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b	b_i/a_{ij}
		45	50	55	0	0	0		
x_2	50	5/7	1	0	-2/7	6/7	0	994	6958/5
s_3	0	**3/8**	0	0	-1/2	1/4	1	483/4	322
x_3	55	1/14	0	1	4/7	-5/7	0	507	7098
Z_j		555/14	50	55	120/7	25/7	0	**77585**	
c_j-z_j		75/14	0	0	-120/7	-25/7	0		

Rasm 33: To'rtinchi simpleks jadval

yakuniga ko'ra bazisdan s_3 o'zgaruvchi chiqib ketadi va uning o'rniga x_1 o'zgaruvchi kiradi. Yakuniy simpleks jadvalni shakillantirishga o'tamiz (34- rasm).

B	c_b	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
		45	50	55	0	0	0	
x_2	50	0	1	0	2/3	8/21	-40/21	764
x_1	45	1	0	0	-4/3	2/3	8/3	322
x_3	55	0	0	1	2/3	-16/21	-4/21	484
Z_j		45	50	55	120/7	50/7	100/7	**79310**
c_j-z_j		0	0	0	-120/7	-50/7	-100/7	

Rasm 34: Yakuniy simpleks jadval

So'nggi jadvalning oxirgi satri tahliliga ko'ra, musbat qiymatli elementlar mavjud bo'lmaganligi sabab optimal yechim topilganligi haqida xulosa chiqarish mumkin. Jadvalning oxirgi ustunidagi ma'lumotga ko'ra, velosipedning A modelidan 322 dona, B modelidan 764 dona va C modelidan 484 dona ishlab chiqarilganda olinadigan foyda eng ko'p bo'ladi va uning miqdori 79310$ ga tengdir. s_1, s_2 va s_3 qoldiq o'zgaruvchilarning bazis o'zgaruvchilar orasida qatnashmaganligi ularning qiymatlari nolga tengligini ko'rsatadi. Bu esa o'z navbatida bo'limlarning imkoniyatlaridan to'la foydalanganligidan dalolat beradi, ya'ni ushbu ishlab chiqarish rejasida yig'ish, bo'yash va qadoqlash bo'limlarining imkoniyatlari mos ravishda 4006 soat, 2495 soat va 1500 soat to'liq sarflanadi.

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

1. Tadbirkor narxlari \$250 va \$400 turadigan kompyuterlarni Xitoydan olib kelib sotish niyatida. Tadbirkor narxi \$250 li kompyuterdan \$45, \$400 likdan esa, \$50 foyda ko‘radi. Kuzatishlar shuni ko‘rsatdiki kompyuterlarga bo‘lgan oylik talab 210 dan oshmaydi. Agar tadbirkor imkoniyat darajasi \$70,000 dan oshmasa, har bir turdagi kompyuterlardan qanchadan sotib olganda eng yuqori foyda ko‘radi? Masalani simpleks usulda yeching.

2. Fermerning 15 gektar yeri bo‘lib, u yerga ikki xil A va B turdagi o‘simliklar ekish niyatida. Yerning bir gektarini A turdagi o’simlik ekishga tayyorlash uchun bir kun, B turdagi o’simlik ekishga tayyorlash uchun esa ikki kun kerak bo‘ladi. Yerni ekishga tayyorlash uchun yilda 240 kun bor. A turdagi o’simlik hosilini yig‘ishtirish uchun 0.3 kun, B turdagi o’simlik hosilini yig‘ishtirish uchun esa 0.1 kun kerak bo‘ladi. Hosilni yig‘ishtirish 30 kundan oshmasligi kerak. Agar A turdagi o‘simlikning har gektaridan olinadigan foyda \$140, B turdagi o‘simlikdan esa \$235 bo‘lsa, maksimal foyda olish uchun har turdagi o‘simliklardan qanchadan ekish kerak? Masalani simpleks usulda yeching.

3. Fermerning 50 gektar yeri bo‘lib u yerga uch xil (sabzi, selder, petrushka) ekin ekishni rejalashtirmoqda. Sabzining bir gektarini yetishtirish uchun \$200 sarf qilinadi va \$60 foyda olinadi. Selderning bir gektarini yetishtirish uchun \$80 sarf qilinadi va \$20 foyda olinadi. Petrushkada bu ko’rsatkichlar mos ravishda \$140 va \$30 ni tashkil qiladi. Ko‘katlarni yetishtirishdagi umumiy xarajat \$10,000 dan oshmasligi lozim. Maksimal foyda olish uchun har bir ekindan qanchadan ekish kerak bo‘ladi? Masalani simpleks usulda yeching.

4. Tadbirkor olma va uzum sharbatlaridan ikki xil maxsus ichimlik tayyorlash niyatida. Birinchi ichimlik 30% olma va 70% uzum sharbatlari aralashmasidan, ikkinchi ichimlik esa 60% olma va 40% uzum sharbatlari aralashmasidan tayyorlanadi. Tadbirkorda 1000 litr olma va 1500 litr uzum sharbati mavjud. Agar tadbirkor birinchi ichimlikdan \$0.60, ikkinchisidan esa \$0,50 foyda ko‘radigan bo‘lsa, har bir ichimlikdan necha litrdan tayyorlanganda maksimal foyda olish mumkin? Masalani simpleks usulda yeching.

5. Korxona velosipedning uch xil modelini ishlab chiqaradi. Har bir velosiped modellarini yig‘ish, bo‘yash va qadoqlash uchun talab qilinadigan vaqt soatlarda jadvalda keltirilgan.

	A model	B model	C model
Yig‘ish	2	2,5	3
Bo‘yash	1,5	2	1
Qadoqlash	1	0,75	1,25

Yig‘ish, bo‘yash va qadoqlash bo‘limlarining imkoniyatlari mos ravishda 4006 soat, 2495 soat va 1500 soatga teng. Har bir A modeldagi velosipeddan tushadigan foyda

$45, B modeldan $50 va C modeldan $55 ga teng. Maksimal foyda olish uchun har bir velosipeddan qanchadan ishlab chiqarish maqsadga muvofiq? Masalani matematik modelini quring va simpleks usulida yeching.

6. Bundan avvalgi masalada yig‘ish, bo‘yash va qadoqlash bo‘limlarining imkoniyatlari mos ravishda 4000 soat, 2500 soat va 1500 soatga teng. Har bir modeldagi velosipeddan tushadigan foyda A modeldan $48, B modeldan $50 va C modeldan $52 ga teng. Maksimal foyda olish uchun har bir velosipedni qanchadan ishlab chiqarilish maqsadga muvofiq?

7. Kompaniya o‘z mahsulotini gazeta va televideniye orqali reklama qilish uchun $600000 mablag‘ ajratgan. Televideniye orqali 1 minutlik xabar berish $60000 turadi, xabarni gazetada e’lon qilish esa, $15000 turadi. Televideniyedagi har bir xabar 15 mln. kishiga, gazeta orqali xabar berish esa 3 mln. kishiga yetib boradi. Kompaniyaning tadqiqot markazi televideniye orqali xabarni reklama uchun ajratilgan pulni 90%dan oshirmaslikni maslahat berdi. Reklama uchun ajratilgan pulni qanday taqsimlaganda xabar mumkin qadar ko‘p kishiga yetib boradi? Masalaning matematik modelini quring va simpleks usulida yeching.

8. Bundan avvalgi masalani qolgan shartlar o‘zgarishsiz qolganda xabarni gazetada e’lon qilish $30000 bo‘lgan holatda yeching.

9. Kompaniya yuk ortuvchi mashina va yuk tashuvchi aravalarni ishlab chiqaradi. Har ortuvchi mashinadan $80 va har bir aravadan $40 foyda ko‘radi. Kompaniyaning metallni qayta ishlash, payvandlash va yig‘ish bo‘limlari mavjud. Bo‘limlarning oylik quvvati va birlik mexanizmlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan vaqtlari (soatlarda) jadvalda keltirilgan.

Bo‘limlar	Yuk ortuvchi mashina	Yuk tashuvchi arava	Oylik quvvati
Metallni qayta ishlash	6	4	2400
Payvandlash	2	3	1500
Yig‘ish	9	3	2700

Foyda maksimal bo‘lishi uchun yuk ortuvchi mashina va yuk tashuvchi aravalarni qanchadan ishlab chiqarish kerak?

Mustaqil ish topshiriqlari javoblari

1. $x = 200,\ y = 50; \quad max = 11500.$
2. $x = 60,\ y = 90; \quad max = 29550.$
3. $x = 50,\ y = 0,\ z = 0; \quad max = 3000.$
4. $x = 5000/3,\ y = 2500/3; \quad max = 4250/3.$
5. A rusumli modeldan 322 dona, B rusumli modeldan 764 dona va C rusumli modeldan 784 dona ishlab chiqarilganda, korxona eng ko‘p foyda ko‘radi va bu foyda $79310 ga teng.
6. A rusumli modeldan $1000/3$ dona, B rusumli modeldan $16000/21$ dona va C rusumli

modeldan 10000/21 dona ishlab chiqarilganda korxona eng ko‘p foyda ko‘radi va bu foyda \$552000/7 ga teng.

7. $\max \quad 250x_1 + 200x_2,$
$x_1 + x_2 \leq 600000,$
$x_1 \leq 540000,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

Reklamaga ajratilgan pulning \$540000 televideniyada reklama uchun, \$60000 esa radioda reklama uchun sarf qilinganda xabar eng ko‘p 147000000 kishiga yetib boradi.

8. $\max \quad 250x_1 + 100x_2,$
$x_1 + x_2 \leq 600000,$
$x_1 \leq 540000,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

Reklamaga ajratilgan pulning \$540000 televideniyada reklama uchun, \$60000 esa radioda reklama uchun sarf qilinganda xabar eng ko‘p 141000000 kishiga yetib boradi.

9. Foyda maksimal bo‘lishi uchun yuk ortuvchi mashinadan 200 ta yuk tashuvchi aravalardan 300 ta ishlab chiqarish kerak. Shunda maksimal foyda \$28000 bo‘ladi.

5.5 Sun’iy o’zgaruvchilar kiritish usuli (M usul)

Agar masala standart ko’rinishda bo’lmasa boshlang’ich bazisni topish oson hal qilinmaydi. Boshlang’ich bazisni oson hal qilish usuli sun’iy o’zgaruvchilar kiritish usulidir (M-usul). Bu usul yordamida boshlang’ich bazisni aniqlash jarayoni osonlashadi.

Yuqorida keltirilgan misolimizda qoldiq o’zgaruvchilar masalaning kanonik ko’rinishidagi s_1, s_2, s_3 oldidagi koeffitsiyentlar birlik matritsani tashkil qiladi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bunda qoldiq o’zgaruvchilarni bazis o’zgaruvchilar deb olib, boshlang’ich jadvalni oson topish mumkinligini ko’rdik. Umumiy holda boshlang’ich bazisni (boshlang’ich jadvalni qurish) aniqlash oddiy hal qilinmaydi.

Fikrimizni quyidagi misolda bayon qilamiz.

$$\begin{aligned} & z = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \to \max \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

Avvalo, bazis o’zgaruvchilarni aniqlash lozim. x_1, x_2 o’zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

determinanti noldan farqli bo’lgani uchun bazis o’zgaruvchi sifatida olishimiz mumkin. Lekin, x_2, x_3 o’zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

determinanti nolga teng bo’lgani uchun ularni bazis o’zgaruvchilar sifatida olib bo’lmaydi. Xuddi shuningdek, x_1, x_4 o’zgaruvchilar ham bazis uchun yaramaydi.

x_1, x_2 o'zgaruvchilarni bazis sifatida olishga harakat qilaylik. Buning uchun (11) sistemani Gauss-Jordan usuli bilan yechamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Yana shuni ta'kidlash lozimki, x_1, x_2 mumkin bo'lgan bazis yechim bo'la oladi. Erkin o'zgaruvchilarni nolga teng ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$) bo'lganda bazis yechim qiymatlari $x_1 = 2$, $x_0 = 2$ bo'ladi, ya'ni mumkin bo'lgan bazis yechimni tashkil qiladi. Bunday amaldan so'ng boshlang'ich jadvalni tuzish mumkin (35-rasm). Boshlang'ich simpleks jadval qurilgandan

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b
		2	3	0	0	
x_2	3	1/2	1	1/2	0	5
s_2	0	3/2	0	-1/2	1	9
z_j		3/2	3	3/2	0	**15**
c_j-z_j		1/2	0	-3/2	0	

Rasm 35: Dastlabki simpleks jadval

so'ng keyingi jadvallarga o'tiladi.

Demak, shu narsani xulosa qilish mumkinki, ko'p hollarda boshlang'ich jadvalni tuzishdan avval ancha mehnat qilishga to'g'ri kelar ekan. Masalani kanonik ko'rinishga keltirilgandan so'ng, bazis o'zgaruvchilarni aniqlash lozim, buning uchun bazisga kiritiladigan o'zgaruvchilardan hosil bo'lgan matritsa determinanti noldan farqli ekanligini tanlash lozim. Sistemani Gauss-Jordan usuli bilan yechgandan so'ng bazis yechimning mumkin bo'lgan bazisligini aniqlash kerak bo'ladi. Ana shundan so'ng boshlang'ich jadval quriladi. Simpleks usulning sun'iy bazis kiritish usuli bunday qiyinchiliklarga barham beradi.

Sun'iy bazis kiritish usulini ***M usul*** deb ham yuritishadi. Sun'iy bazis kiritish usuli chiziqli progarmmalash masalasi shartlarida ixtiyoriy cheklashlar: teng (=), kichik yoki teng ($\leq$), katta yoki teng ($\geq$) bo'lganda ishlatiladi. Cheklashlar ($\geq$) ko'rinishda qatnashgan shartlarda masalani kanonik ko'rinishga keltirish uchun ***qo'simcha o'zgaruvchilar*** kiritiladi. Masala kanonik ko'rinishga keltirilgandan so'ng cheklashlari ($\geq$) yoki (=) shartlar bilan berilganlarga ***sun'iy o'zgaruvchi*** kiritamiz. Sun'iy bazis kiritish usuli boshlang'ich bazisni qurish uchun kerak bo'ladi.

Barcha o'zgaruvchilar qatori sun'iy o'zgaruvchilarga ham nomanfiylik sharti kiritiladi. Sun'iy o'zgaruvchilarning hech qanday iqtisodiy ma'nosi yo'q, u faqat boshlang'ich bazisni shakllantirish uchungina kerak, xolos.

Optimal yechimga erishilgandan so'ng, oxirgi jadvalda sun'iy o'zgaruvchilarning qiymati nolga teng bo'lishi lozim. Agar sun'iy o'zgaruvchilarning qiymati nolga teng bo'lmasa, masalaning yechimi mavjud emasligini ko'rsatadi.

1-misol. Quyidagi masalani sun'iy o'zgaruvchi kiritish usuli bilan yechishni ko'raylik.

$$z = 2x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{12}$$

Bu masalani quyidagi masala bilan almashtiramiz:

$$
\begin{aligned}
&z = 2x_1 + 2x_2 + 0 \cdot s_1 - Ma_2 \to \max \\
&\begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 4, \\ x_1 + x_2 + a_2 = 3, \\ x_1,\ x_2, s_1, a_2 \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Bu yerda s_1 – birinchi chegaraning qoldiq o'zgaruvchichisi, a_2– ikkinchi chegara uchun kiritilgan sun'iy o'zgaruvchi. Sun'iy o'zgaruvchining indeksi sun'iy o'zgaruvchi qaysi shartlarga kiritilganligini ko'rsatadi. Maqsad funksiyasidagi M yetarli katta musbat son. Shuni ta'kidlash kerakki, (13) masalani simpleks usulda yechgandan so'ng oxirgi jadvalda $a_2 = 0$ bo'lsa, (13) ning yechimi (12) masala uchun yechim bo'ladi. (13) masala uchun boshlang'ich jadval 36-jadval ko'rinishida bo'ladi.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	a_2	b
		2	3	0	-M	
s_1	0	1	**2**	1	0	4
a_2	-M	1	1	0	1	3
z_j		-M	-M	0	-M	**-3M**
c_j-z_j		2+M	3+M	0	0	

Rasm 36: Birinchi simpleks jadval

Keyingi jadvalda x_2 bazisga kirib, s_1 bazisdan chiqadi (37–jadval).

B	c_b	x_1	x_2	s_1	a_2	b
		2	3	0	-M	
x_2	3	1/2	1	1/2	0	2
a_2	-M	**1/2**	0	-1/2	1	1
z_j		3/2-MF/2	3	3/2+MF/2	-M	**6-M**
c_j-z_j		1/2+M/2	0	-3/2-M/2	0	

Rasm 37: Ikkinchi simpleks jadval

37- jadvalga ko'ra, x_1 bazisga kiradi va sun'iy o'zgaruvchi a_2 bazisdan chiqadi. Sun'iy o'zgaruvch bazisdan chiqqandan so'ng, keyingi jadvallarda a_2 ustunini jadvallarda qatnashishiga hojat qolmaydi. Chunki qo'shimcha o'zgaruvchilardan farqli sun'iy o'zgaruvchi basiz o'zgaruvchilar safida bir marotaba chiqib ketsa, u boshqa kirolmaydi. Shuning uchun, bu ustunni jadvaldan chiqarib yuborgani maqsadga muvofiq. Hisoblashlar natijasida 38- rasmdagi jadvalga kelamiz.

Demak, biz oxirgi jadvalga yetib keldik. Optimal yechim: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Qoldiq o'zgaruvchi va sun'iy o'zgaruvchilar bazisda bo'lmaganligi uchun $s_1 = 0$, $a_2 = 0$ bo'ladi. Maqsad funksiyasi qiymati $z_{max} = z(2;1) = 7$ ga teng. Demak $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $z_{max} = 7$ yechim ham (12) masalaning optimal yechimi bo'lar ekan.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	b
		2	3	0	
x_2	3	0	1	1	1
x_1	2	1	0	-1	2
z_j		2	3	1	**7**
c_j-z_j		0	0	-1	

Rasm 38: Uchinchi simpleks jadval

2-misol. Endi shartlarda ($\geq$) «katta va teng» ishorali masalani ko'raylik.

$$z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 20, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 50, \\ x_1,\ x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \tag{14}$$

(14) misolning birinchi shartiga, avval, qo'shimcha s_1 ozgaruvchi kiritamiz: $x_1 - 2x_2 + x_3 - s_1 = 0$. Endi birinchi va ikkinchi shartlarga sun'iy a_1, a_2 o'zgaruvchilar kiritib misolni kanonik ko'rinishda yozamiz:

$$z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 0 \cdot s_1 - Ma_1 - Ma_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - s_1 + a_1 = 20, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + a_2 = 50, \end{cases} \tag{15}$$
$$x_1,\ x_2, x_3, s_1, a_1, a_2 \geq 0.$$

(15) misolda sun'iy o'zgaruvchilar bazisga kiritiladi. Boshlang'ich jadval ko'rinishi 39-rasmda keltirilgan.

B	c_b	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	a_2	b
		2	5	3	0	-M	-M	
a_1	-M	**1**	-2	1	-1	1	0	20
a_2	-M	2	4	1	0	0	1	10
z_j		-3M	-2M	-2M	M	-M	-M	**-10M+40**
c_j-z_j		2+3M	5+2M	3+2M	-M	0	0	

Rasm 39: Birinchi simpleks jadval

Birinchi ustun hal qiluvchi ustun bo'lib, birinchi satr hal qiluvchi satr bo'lgani uchun, x_1 bazisga kiritilib, a_1 ni bazisdan chiqaramiz. Gauss-Jordan usuli bilan yangi 40- rasmdagi jadvalni quramiz. Shu bilan birga a_1 ustunni ham hisoblashdan chiqaramiz.

40 - rasmdagi jadvalga ko'ra a_2 bazisdan chiqib, x_2 bazisga kiradi. Natijada biz 41 - rasmdagi jadvalga kelamiz.

Oxirgi satrda musbat element mavjudligi optimal yechimga hali kelmaganligimizni ko'rsatadi. 41 -rasmdagi jadvalga ko'ra x_1 bazisdan chiqib, x_3 bazisga kiradi. Natijada 42 - rasmdagi jadvalga kelamiz.

B	c_b	x_1	x_2	x_3	s_1	a_2	b
		2	5	3	0	-M	
x_1	2	1	-2	1	-1	0	20
a_2	-M	0	8	-1	2	1	10
z_j		2M	-8M-4	M+2	-2-2M	-M	-
c_j-z_j		0	9+8M	1-M	2M+2	0	

Rasm 40: Ikkinchi simpleks jadval

B	c_b	x_1	x_2	x_3	s_1	b
		2	5	3	0	
x_1	2	1	0	3/4	-1/2	45/2
x_2	5	0	1	-1/8	1/4	5/4
z_j		2	5	7/8	1/4	**205/4**
c_j-z_j		0	0	17/8	-1/4	

Rasm 41: Uchinchi simpleks jadval

B	c_b	x_1	x_2	x_3	s_1	b
		2	5	3	0	
x_3	3	4/3	0	1	-2/3	30
x_2	5	1/6	1	0	1/6	5
z_j		29/6	5	3	-7/6	**115**
c_j-z_j		-17/6	0	0	7/6	

Rasm 42: To'rtinchi simpleks jadval

42 - rasmdagi jadvaldan ko'rinadiki hisoblashni yana davom ettirar ekanmiz, s_1 ni x_2 bazis o'rniga kiritgandan so'ng 43 - rasmdagi jadval hosil bo'ladi.

Nihoyat oxirgi jadvalga yetib keldik.

Demak, optimal yechim $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 50$ ga teng bo'lib, maqsad funksiyasining maksimal qiymati $z_{max} = 150$ ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, chiziqli dasturlash masalalarining shartlari «teng» yoki «katta yoki teng» ko'rinishdagi cheklashlarda biz sun'iy o'zgaruvchi kiritish bilan boshlang'ich bazis yechimga zamin yaratar ekanmiz. Hisoblash jarayonida sun'iy ozgaruvchilar sekin asta bazisdan chiqa boshlaydi. Har bir bazisdan chiqib ketgan sun'iy o'zgaruvchi ustunini ham jadvaldan olib tashlaymiz. Oxirgi jadvalda sun'iy o'zgaruvchi bazis o'zgaruvchilar ichida

B	c_b	x_1	x_2	x_3	s_1	b
		2	5	3	0	
x_3	3	2	4	1	0	50
s_1	0	1	6	0	1	30
z_j		6	12	3	0	**150**
c_j-z_j		-4	-7	0	0	

Rasm 43: Beshinchi simpleks jadval

qatnashmaydi. Agar, mobodo, oxirgi jadvalda sun'iy o'zgaruvchi qatnashib qolsa, joiz soha bo'sh to'plam ekanligidan dalolat beradi.

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

Quyidagi masalalarda sun'iy o'zgaruvchi kiritish usuli bilan yeching.

1) $$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 \to \max, \\ &x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \le 10, \\ &x_1 + x_2 = 12, \\ &x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 \le 18. \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \max, \\ &x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ &x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24, \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} &x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max, \\ &x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ &2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} &x_1 - 10x_2 + x_3 \to \max, \\ &-x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 13, \\ &x_1 + 14,5x_2 + 7x_3 = 15, \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} &x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to \max, \\ &x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ &2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{aligned}$$

Mustaqil ish topshiriqlari javoblari

Quyidagi masalalarda sun'iy o'zgaruvchi kiritish usuli bilan yeching.

1) $x_1 = 0,\ x_2 = 12;\quad max = 48.$

2) $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0;\quad max = 10.$

3) $x_1 = 5,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0;\quad max = 13.$

4) $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2;\quad max = 3.$

5) $x_1 = 7/3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2/3;\quad max = 3.$

5.6 Simpleks usulning maxsus hollari

Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulida yechish jarayonida maxsus hollarni kuzatgan edik (optimal yechim cheksiz ko'p, joiz yechimlar sohasi – bo'sh to'plam va maqsad funksiyasi joiz yechimlar sohasida cheksiz o'sadi). Bu holatlarni simpleks usul bilan yechishda qanday aniqlash mumkinligini ko'ramiz.

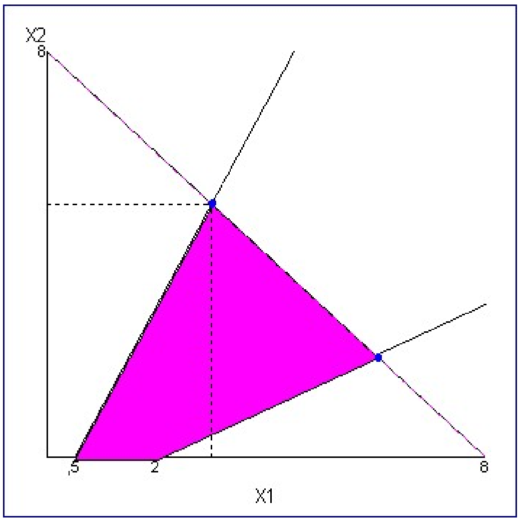
5.6.1 Optimal yechimlar cheksiz ko'p

Optimal yechimlar cheksiz ko'p bo'lgan holni grafik usul yordamida ko'rgan edik. Masalani simpleks-usul bilan yechayotganimizda so'nggi jadvalga kelmagunimizcha optimal yechimlar cheksiz ko'p bo'lish yoki bo'lmasligini bila olmaymiz. Agar so'nggi jadvalda bazisga kirmagan o'zgaruvchilarga mos keluvchi ustunlardagi biror $c_j - z_j$ son nolga teng bo'lsa, optimal yechim cheksiz ko'p bo'ladi.

Quyidagi masalani yechib ko'raylik.

Masalaning berilishi:

$$z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1, \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$



Masalani simpleks jadval usulida yechish uchun uni kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$z = 3x_1 + 3x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 - M \cdot a_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - s_2 + a_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + s_3 = 2, \\ x_1, \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ s_1 \ge 0,\ s_2 \ge 0,\ s_3 \ge 0,\ a_2 \ge 0. \end{cases}$$

Maqsad funksiyasi $z = 3x_1 + 3x_2$ ning sath chizig'i birinchi shart bilan aniqlanadigan $x_1 + x_2 = 8$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lib, sath chizig'i joiz sohani aynan shu chegara boylab tark etadi. Chizmaga ko'ra uchlari $(3; 5)$ va $(6; 2)$ nuqtadan iborat kesmaning ixtiyoriy nuqtasi berilgan masala uchun optimal yechim bo'ladi. Endi ushbu masalani oxirgi simpleks jadvalini ko'raylik (44- rasm).

44 - rasmdagi jadvalda $c_j - z_j$ satrning barcha elementlari nol yoki manfiy. Bu esa optimal yechimga kelganimizni bildiradi. Optimal yechim $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ va $s_3 = 9$ bo'ladi. Maqsad funksiyasining optimal qiymati $z_{max} = 24$ ga teng. Lekin s_2 ustunning $c_j - z_j$ satrida 0 turibdi. Bu esa masalaning yana boshqa optimal yechimi borligini bildiradi. Biz s_2 ni bazisga kiritsak maqsad funksiyasining qiymati o'zgarmaydi (45 - rasm).

45 - rasmda keltirilgan jadvaldan boshqa $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $s_1 = 0$, $s_2 = 9$ va $s_3 = 0$ yechimni hosil qilamiz. Bu yechim ham optimal, chunki barcha $c_j - z_j \le 0$ va

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		3	3	0	0	0	
x_1	3	1	0	2/3	1/3	0	5
x_2	3	0	1	1/3	-1/3	0	3
s_3	0	0	0	1	1	1	9
z_j		3	3	3	0	0	**24**
c_j-z_j		0	0	-3	0	0	

Rasm 44: Oxirgi simpleks jadval

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		3	3	0	0	0	
x_1	3	1	0	1/3	0	-1/3	2
x_2	3	0	1	2/3	0	1/3	6
s_2	0	0	0	1	1	1	9
z_j		3	3	3	0	0	**24**
c_j-z_j		0	0	-3	0	0	

Rasm 45: Oxirgi simpleks jadval

maqsad funksiyasining bu yechimga mos kelgan qiymati ham 24 ga teng. Hosil bo'lgan yechimlarning chiziqli kombinatsiyasini olib, yechimning cheksiz ko'pligini aniqlaymiz:

$$x_1 = 5\alpha + 2(1-\alpha),\ x_2 = 3\alpha + 6(1-\alpha),\ s_1 = 0,\ s_2 = 9(1-\alpha),\ s_3 = 9\alpha, \quad \alpha \in [0;1].$$

$$z_{max} = 24.$$

5.6.2 Joiz yechimlar sohasi – bo'sh to'plam

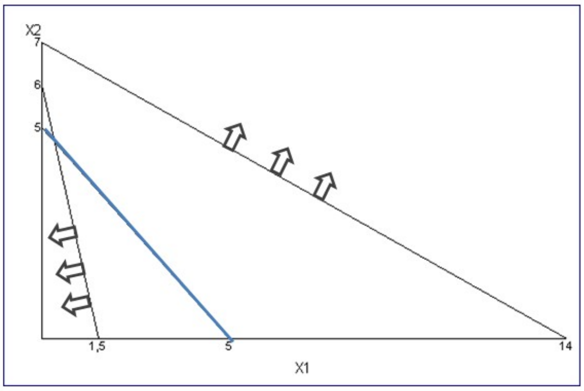
Bu hol chiziqli dasturlash masalasining barcha chegaralarini, xususan, nomanfiylik shartlarini ham qanoatlantiruvchi nuqta yo'q bo'lganda ro'y beradi.

Simpleks usul yordamida bu hol ro'y berganini qanday aniqlashni ko'raylik. Aytaylik, bir necha yaqinlashishdan keyin $c_j - z_j$ satrida musbat son bo'lmagan so'nggi jadvalga keldik. Agar jadvalda biror sun'iy o'zgaruvchining qiymati musbat bo'lsa, u holda berilgan masalaning joiz yechimlari sohasi bo'sh to'plam bo'ladi.

Masalaning berilishi:

$$z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ 4x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ x_1, \geq 0, \; x_2 \geq 0. \end{cases}$$



Masalani simpleks jadval usulida yechish uchun uni kanonik ko'rinishga keltiraylik:

$$z = x_1 + x_2 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 - M \cdot a_1 - M \cdot a_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + a_1 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + s_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - s_3 + a_3 = 14, \\ x_1, \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; s_2 \geq 0, \; s_3 \geq 0, \; a_1 \geq 0, \; a_3 \geq 0. \end{cases}$$

46 - rasmda quyidagi misolning boshlang'ich jadvali keltirilgan.

B	c_b	x_1	x_2	s_2	s_3	a_1	a_3	b
		1	1	0	0	-M	-M	
a_1	-M	1	1	0	0	1	0	5
s_2	0	4	1	1	0	0	0	6
a_3	-M	1	2	0	-1	0	1	14
z_j		-2M	-3M	0	M	-M	-M	**-19M**
c_j-z_j		1+2M	1+3M	0	-M	0	0	

Rasm 46: Dastlabki simpleks jadval

Keyingi qadam natijalarini 47 - rasmdagi jadvalga keltiramiz. So'nggi jadval $c_j - z_j$ satrining barcha elementlari 0 yoki manfiy sonlardan iborat. Go'yoki biz optimal yechimga kelgandaymiz. Lekin yechimda a_3 sun'iy o'zgaruvchining qiymati $a_3 = 4$ - musbat. Bu esa berilgan masalaning joiz yechimlari sohasi bo'sh to'plam ekanligini bildiradi.

B	c_b	x_1	x_2	s_2	s_3	a_1	a_3	b
		1	1	0	0	-M	-M	
x_2	1	1	1	0	0	1	0	5
s_2	0	3	0	1	0	0	0	1
a_3	-M	-1	0	0	-1	-2	1	4
z_j		1+M	1	0	M	1+M	-M	**5-4M**
c_j-z_j		-M	0	0	-M	-1-3M	0	

Rasm 47: Navbatdagi simpleks jadval

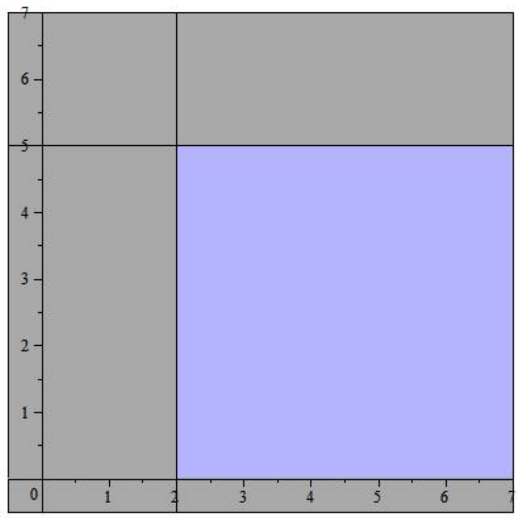
5.6.3 Maqsad funksiyasi joiz yechimlar sohasida cheksiz o'sadi

Maqsad funksiyasi joiz yechimlar sohasida cheksiz o'sadigan holni grafik nuqtayi nazardan ko'rib chiqqan edik. Endi bu hol simpleks usul yordamida qanday aniqlanishini ko'rib chiqamiz.

Masalaning berilishi:

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 2, \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$



Ushbu masalaga murojaat qilamiz. Birinchi chegaraga s_1 qo'shimcha, ikkinchi chegaraga esa s_2 qo'shimcha o'zgaruvchilarni kiritib masalani kanonik shaklini hosil qilamiz. Masalani simpleks usulda yechish uchun birinchi chegaraga a_1 sun'iy o'zgaruvchi kiritamiz. Natijada quyidagi masalani hosil qilamiz:

$$z = 2x_1 + x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 - M \cdot a_1 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - s_1 + a_1 = 2, \\ x_2 + s_2 = 5, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ a_1 \geq 0. \end{cases}$$

Boshlang'ich jadvaldan keyingisini jadvalni hosil qilish jarayonida a_1 o'zgaruvchi o'rniga x_1 ni bazisga kiritamiz va navbatdagi jadvalda a_1 ustunni tashlab yuboramiz (48 - rasm).

Ushbu simpleks jadvalning $c_j - z_j$ satrdagi musbat sonlarning eng kattasi s_1 ustunda va uning qiymati 2 ga teng. Agar s_1 o'zgaruvchi bazisga kiritilsa, maqsad funksiyasining qiymati ortishini bilamiz. Lekin hal qiluvchi element topish uchun s_1 ustunda musbat son

B	c_b	x_1	x_2	s_2	s_3	b
		2	1	0	0	
x_1	2	1	0	-1	0	2
s_2	0	0	1	0	1	5
z_j		2	0	-2	0	**4**
c_j-z_j		0	1	2	0	

Rasm 48: Navbatdagi simpleks jadval

yo'q, ya'ni hal qiluvchi satrni aniqlash imkoniyati yoq. Bu esa maqsad funksiyasining joiz yechimlar sohasida yuqoridan chegaralanmaganligini bildiradi.

Umuman, agar jadvalning $c_j - z_j$ satridagi sonlarning ichida birortasi musbat bo'lib, bu ustundagi a_{ij} sonlarning ichida musbat son topilmasa, u holda maqsad funksiyasi joiz yechimlar sohasida cheksiz o'sadi.

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

1. Quyidagi masalalarni simpleks va grafik usullarda yeching.

1) $$\begin{array}{l} \max \quad x_1 + 2x_2 \\ x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

28) $$\begin{array}{l} \max \quad x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 20 \\ -2x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{l} \max \quad 2,5x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

4) $$\begin{array}{l} \max \quad x_1 + 0.5x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 + 3x_2 \leq 35 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

5) $$\begin{array}{l} \max \quad 6x_1 - 9x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

2. Quyidagi masalalarni simpleks usulida yeching.

1) $$\begin{array}{l} \max \quad x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 40 \\ x_1 + x_3 \leq 25 \\ 2x_2 + 3x_3 \leq 32 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

2) $$\begin{array}{l} \max \quad x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 3x_2 + 7x_3 + x_4 \leq 42 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

3. Quyidagi masalalarda sun'iy o'zgaruvchi kiritish usuli bilan yeching.

1) $$\begin{array}{l} 4x_1 + 8x_2 \to \max, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$

2) $$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 4, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 20, \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 \le 16, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{array}$$

3) $$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \to \max, \\ 8x_1 + 6x_2 \ge 24, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge -12, \\ 2x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$

4) $$\begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 \to \max, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{array}$$

5) $$\begin{array}{l} x_1 + 10x_2 - x_3 + 5x_4 \to \max, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{array}$$

Mustaqil ish topshiriqlari javoblari

1. Quyidagi masalalarni simpleks va grafik usullarda yeching.

   1) Optimal yechim mavjud emas. Maqsad funksiyasi chegaralanmagan.
   2) Optimal yechim mavjud emas. Maqsad funksiyasi chegaralanmagan.
   3) Masala cheksiz ko‘p yechimga ega.
   $x_1 = 2k + 4/3 \cdot (1-k)$, $x_2 = 5/3 \cdot (1-k)$, $\max = 5$, $(0 \le k \le 1)$.
   4) Masala cheksiz ko‘p yechimga ega.
   $x_1 = 10k + 5(1-k)$, $x_2 = 10(1-k)$, $\max = 10$, $(0 \le k \le 1)$.
   5) Masala cheksiz ko‘p yechimga ega.
   $x_1 = 3k + 66/5 \cdot (1-k)$, $x_2 = 34/5 \cdot (1-k)$, $\max = 18$, $(0 \le k \le 1)$.

2. Quyidagi masalalarni simpleks usulida yeching.

   1) Masala cheksiz ko‘p yechimga ega. $x_1 = 23k + 43/3 \cdot (1-k)$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2k + 32/3 \cdot (1-k)$; $\max = 25$, $(0 \le k \le 1)$.
   2) Masala cheksiz ko‘p yechimga ega. $x_1 = 24(1-k)$, $x_2 = 12k$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; $\max = 25$, $(0 \le k \le 1)$.

3. Quyidagi masalalarda sun’iy o‘zgaruvchi kiritish usuli bilan yeching.
   1) Joiz soha bo’sh to’plam.
   2) Masala cheksiz ko’p yechimga ega.
   $x_1 = 4k$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8 \cdot (1-k)$, $0 \le k \le 1$; $max = 8$.
   3) Optimal yechim mavjud emas. Maqsad funksiyasi chegaralanmagan.
   4) Optimal yechim mavjud emas. Maqsad funksiyasi chegaralanmagan.
   5) Optimal yechim mavjud emas. Maqsad funksiyasi chegaralanmagan.

5.7 Minimallashtirish masalasini simpleks usulda yechish

Minimizatsiya masalasini simpleks usulda qanday hal qilish mumkinligini ko'raylik. Minimizatsiya masalasining simpleks usul yordamida yechishning ikkita usulini keltiramiz.

1-usul. Maksimallashtirish masalasida eng katta musbat $c_j - z_j$ ga mos keluvchi o'zgaruvchi bazisga kiritilar edi. Minimallashtirish masalasida biz qoidani o'zgartiramiz. Eng kichik manfiy $c_j - z_j$ ga mos keluvchi o'zgaruvchini bazisga kiritamiz. Masalani yechish qachongacha davom ettiriladi? Minimizasiya masalasida $c_j - z_j$ satrning barcha elementlari 0 yoki musbat bo'lguniga qadar davom ettiriladi. Qolgan barcha qoidalar maksimallashtirish masalasini yechish kabi bo'ladi. Yana shuni nazarda tutish lozimki, sun'iy o'zgaruvchi kiritish zaruriyati tug'iladigan masalarda maqsad funksiyasiga yetarli katta musbat koeffitsiyentli sun'iy o'zgaruvchi kiritiladi. Fikrimizni quyidagi misolda bayon qilamiz.

$$
\begin{aligned}
& w = x_1 + x_2 \to \min \\
& \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Maksimallashtirish masalasidagi kabi ikkala shartga ham ortiq va sun'iy o'zgaruvchilar kiritamiz. Maqsad funksiyasida esa yetarli katta musbat koeffisietli sun'iy o'zgaruvchi kiritiladi.

$$
\begin{aligned}
& w = x_1 + x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + Ma_1 + Ma_2 \to \min \\
& \begin{cases} 2x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - s_2 + a_2 = 2, \\ x_1,\ x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

(17) - masalaga ko'ra boshlang'ich 49 -jadvalni qurish mumkin.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	b
		1	1	0	0	M	M	
a_1	M	2	1	-1	0	1	0	2
a_2	M	1	2	0	-1	0	1	2
z_j		3M	3M	-M	-M	M	M	**4M**
c_j-z_j		1-3M	1-3M	M	M	0	0	

Rasm 49: Boshlang'ich simpleks jadval

Jadvalning oxirgi satrida birinchi va ikkinchi ustunlarda teng manfiy sonlar joylashgan. Aniqlik uchun chapdagisini olamiz. Demak, hal qiluvchi ustun birinchi ustun bo'ladi. Hal qiluvchi satrni aniqlash maksimallashtirish masalasi kabi bo'ladi. Bizning misolimizda birinchi satr hal qiluvchi bo'ladi. Demak, bazisga x_1 o'zgaruvchi kiradi a_1 esa bazisdan chiqadi. Kerakli hisoblashlarni amalga oshirib 50 - rasmdagi jadvalni hosil qilamiz.

50 - rasmdagi jadvalga ko'ra hal qiluvchi ustun ikkinchi ustundir. Hal qiluvchi satr esa ikkinchi satr hisoblanadi. a_2 sun'iy o'zgaruvchini bazisdan chiqarib (keyingi jadvalda sun'iy o'zgaruvchi ustunini ham chiqarib yuboramiz) x_2 ni bazisga kiritib hisoblashlar

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	b
		1	1	0	0	M	
x_1	1	1	1/2	-1/2	0	0	1
a_2	M	0	3/2	1/2	-1	1	1
z_j		1	1/2+3M/2	-1/2+M/2	-M	M	**1+M**
c_j-z_j		0	1/2-3M/2	1/2-M/2	M	0	

Rasm 50: Navbatdagi simpleks jadval

natijasida 51 -rasmdagi jadvalni hosil qilamiz. Ushbu jadvalning oxirgi satrida manfiy elementlar yo'q bo'lgani uchun, optimal yechimga yetib keldik. Shunday qilib masalaning yechimi quyidagicha bo'ladi.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b
		1	1	0	0	
x_1	1	1	10	-2/3	1/3	2/3
x_2	1	0	1	1/3	-2/3	2/3
z_j		1	1	-1/3	0	**4/3**
c_j-z_j		0	0	1/3	0	

Rasm 51: Oxirgi simpleks jadval

$x_=2/3, \quad x_2 = 2/3, \quad w_{min} = 4/3.$

2-usul. Bu usul minimallashtirish masalasi maqsad funksiyasini -1 ga ko'paytirib maksimallashtirish masalasiga o'tishdan iborat. Bu maksimallashtirish masalasini yechib dastlabki minimallashtirish masalasining optimal yechimini hosil qilamiz.

(16) - masalani bu usulda yechib ko'raylik. Masalaning maqsad funksiyasini -1 ga ko'paytirib maksimizatsiya masalasiga o'tamiz.

$$\begin{aligned} & z = -x_1 - x_2 \to \max \\ & \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Masalani simplex usulda yechish uchun quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{aligned} & z = -x_1 - x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 - Ma_1 - Ma_2 \to \max \\ & \begin{cases} 2x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - s_2 + a_2 = 2, \end{cases} \\ & x_1, \; x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{19}$$

(19) ga ko'ra boshlang'ich simpleks 52 - rasmdagi jadvalni quramiz.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	b
		-1	-1	0	0	-M	-M	
a_1	-M	2	1	-1	0	1	0	2
a_2	-M	1	2	0	-1	0	1	2
z_j		-3M	-3M	M	M	-M	-M	**-4M**
c_j-z_j		-1+3M	-1+3M	-M	-M	0	0	

Rasm 52: Dastlaki simpleks jadval

Qolgan jadvalni tuzish jarayoni odatdagidek kechadi. Xulosa qilish uchun yakuniy jadvalni 53 - rasmda keltiramiz.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b
		1	1	0	0	
x_1	-1	1	0	-2/3	1/3	2/3
x_2	-1	0	1	1/3	-2/3	2/3
z_j		-1	-1	1/3	1/3	**-4/3**
c_j-z_j		0	0	-1/3	-1/3	

Rasm 53: Yakuniy simpleks jadval

Bu jadvalning oxirgi satrida musbat elementlar mavjud emas. Demak, optimal yechim $x_1 = 2/3$, $x_2 = 2/3$, $z_{max} = -4/3$ bo'ladi. Lekin bu yechimga maksimizasiya masalasi maqsad funksiyasining $-4/3$ qiymati mos keladi. Dastlabki minimallashtirish masalasi maqsad funksiyasining minimum qiymatini topish uchun uni -1 ga ko'paytiramiz. Demak, maqsad funksiyasining minimum qiymati $w = 4/3$ ga teng ekan. Shunday qilib (16) masalaning yechimi quyidagicha bo'ladi.

$$x_{=}2/3, \quad x_2 = 2/3, \quad w_{min} = 4/3.$$

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

Quyidagi minimizatsiya masalalarini yeching.

1) $$\begin{aligned}&2x_1 + 2x_2 \to \min,\\ &x_1 + 2x_2 \geq 3,\\ &3x_1 + 2x_2 \geq 5,\\ &x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}&14x_1 + 20x_2 \to \min,\\ &x_1 + 2x_2 \geq 4,\\ &7x_1 + 6x_2 \geq 20,\\ &x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}&8x_1+4x_2+6x_3\to \min,\\&3x_1+2x_2+x_3\geq 6,\\&4x_1+x_2+3x_3\geq 7,\\&2x_1+x_2+4x_3\geq 8,\\&x_1,x_2,x_3\geq 0.\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}&8x_1+16x_2+18x_3\to \min,\\&2x_1+2x_2-2x_3\geq 4,\\&-4x_1+3x_2-x_3\geq 1,\\&x_1-x_2+3x_3\geq 8,\\&x_1,x_2,x_3\geq 0.\end{aligned}$$

Mustaqil ish topshiriqlari javoblari

Quyidagi minimizatsiya masalalarini yeching.

1) $x_1=1,\ x_2=1;\quad min=4.$
2) $x_1=2,\ x_2=1;\quad min=48.$
3) $x_1=1/5,\ x_2=2,\ x_3=7/5;\quad min=18.$
4) $x_1=5/3,\ x_2=11/3,\ x_3=10/3;\quad min=132.$

5.8 Ishlab chiqarishni optimal rejalashtirish masalasini simpleks usulda yechish

3.1 - bo'limda ishlab chiqarishning optimal rejalashtirish haqidagi amaliy masalaning matematik modelini qurib, uni grafik usulda yechgan edik. Endi esa ushbu chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish jarayonini ko'rib chiqamiz. Keling, masala shartlarini esga olaylik.

«Chinor» mebel sexi:

Sex ikki turdagi mahsulot ishlab chiqaradi: shkaf va televizor uchun tumba. Bir dona shkaf yasash uchun 3,5 m. standart DSP, 1 m. standart shisha va bir ishchining bir kunlik mehnati sarflanadi. Bitta tumba uchun 1 m. DSP, 2 m. shisha va bir ishchining bir kunlik mehnati sarflanadi. Bir dona shkafni sotishdan tushadigan foyda 200 \$, tumbadan esa – 100 \$.
Sexning moddiy va mehnat resurslari cheklangan bo'lib, sexda jami 150 ta ishchi ishlar ekan. DSP kunlik zaxirasi 350 m., shishaning zaxirasi esa 240 m.ni tashkil etadi. Sex maksimal foyda olish uchun bir kunda qancha shkaf va tumba ishlab chiqarishi kerak?

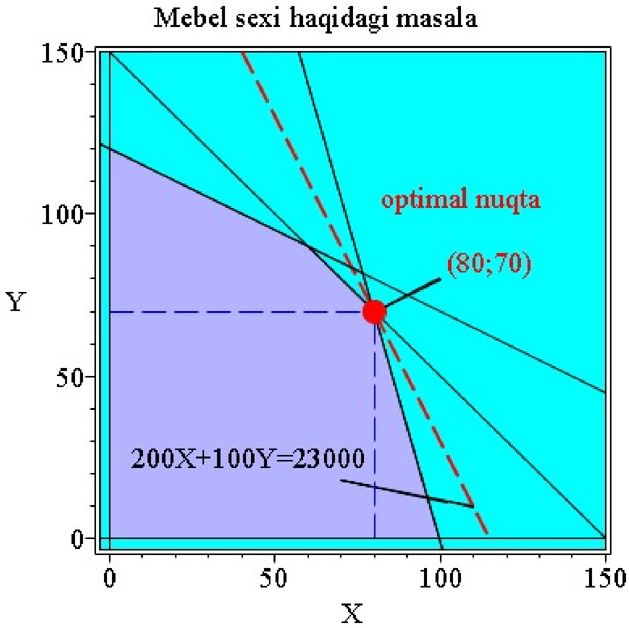
Masalaling matematik modelini qurish uchun quyidagi belgilashlarni kiritib olgan edik. Sexning kundalik ishlab chiqaradigan shkaflar soni X va tumbalar soni Y bo'lsin. U holda sexning kundalik umumiy foydasi P har ikki mahsulotdan ko'radigan foydalarning yig'indisidan iboratdir.

Masalaning matematik modeli

$$P = 200X + 100Y \to \max,$$

$$\begin{cases} 3,5X + Y \leq 350, \\ X + 2Y \leq 240, \\ X + Y \leq 150, \\ X \geq 0, \quad Y \geq 0. \end{cases}$$

Masalani grafik usulda yechish bilan 4.4- bo'limda shug'ullanib, quyidagi natijalarni olgan edik (54 rasmga qarang).



Masalaning yechimi:
Optimal shkaflar soni: $x = 80$ ta,
optimal tumbalar soni: $y = 70$ ta.
Maksimal foyda qiymati:
$P = 23000\$$.

Rasm 54: Masalani grafik usulda yechish

Masalaning matematik modelini kanonik ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun cheklanish shartlari «$\leq$» ko'rinishidagi tengsizliklar bilan berilgani sababli masalaga har bir tengsizlik uchun s_i $(i = 1, 2, 3.)$ **qo'shimcha o'zgaruvchilar** kiritamiz. Umumiylikka zid kelmagan holda (X, Y) belgilash o'rniga $x_1, x_2)$ belgilashga o'tib olaylik. Natijada masala modelining kanonik ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

Masala matematik modelining kanonik ko'rinishi:

$$P = 200 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3,5x_1 + x_2 + s_1 = 350, \\ x_1 + 2x_2 + s_2 = 240, \\ x_1 + x_2 + s_3 = 150, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0, \quad s_3 \geq 0. \end{cases}$$

Masalaning kanonik ko'rinishidan foydalanib dastlabki simpleks jadvalni tuzamiz va tahlil qilamiz (55- rasm).

55- jadvalning oxirgi satrida musbat elementlar bo'lgani sababli navbatdagi simpleks jadval qurishimiz lozim bo'ladi. oxirgi satrdagi maksimal element 200 bo'lgani uchun

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b_i/a_{ij}
		200	100	0	0	0		
s_1	0	**7/2**	1	1	0	0	350	100
s_2	0	1	2	0	1	0	240	240
s_3	0	1	1	0	0	1	150	150
Z_j		0	0	0	0	0	**0**	
c_j-Z_j		200	100	0	0	0		

Rasm 55: Boshlang'ich simpleks jadval

hal qiluvchi ustun «x_1» ustunligini aniqlaymiz. Jadvalning oxirgi ustunini hisoblagach, ustundagi eng kichik musbat element 100 ligidan hal qiluvchi satr «s_1» satr ekanligini aniqlaymiz. Hal qiluvchi element hal qiluvchi satr va hal qiluvchi ustunlar kesishmasida joylashgan bo'lib, u jadvalda qizil rang bilan ajratilgan $7/2$ qiymatdan iborat. Maqsad funksiyasining ushbu $(x_1, x_2; s_1, s_2, s_3) = (0, 0; 350, 240, 150)$ bazis yechimdagi qiymati 0 ga teng.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b_i/a_{ij}
		200	100	0	0	0		
x_1	200	1	2/7	2/7	0	0	100	350
s_2	0	0	12/7	-2/7	1	0	140	245/3
s_3	0	0	**5/7**	-2/7	0	1	50	70
Z_j		200	400/7	400/7	0	0	**20000**	
c_j-Z_j		0	300/7	-400/7	0	0		

Rasm 56: Ikkinchi simpleks jadval

Birinchi jadval tahliliga ko'ra, bazisdan s_1 o'garuvchi chiqib, uning o'rniga x_1 o'zgaruvchi kiradi. Simpleks jadval tuzish qoidasiga asosan ikkinchi jadvalni hosil qilamiz (56- rasm).

Ikkinchi jadval oxirgi satrida musbat element mavjud. Demak, optimal yechim topilmagan. Tahlili natijasiga ko'ra hal qiluvchi ustun «x_2» va hal qiluvchi satr «s_3» ekanligini aniqlaymiz. Shuning uchun hal qiluvchi element $5/7$ ga teng. Maqsad funksiyasining navbatdagi $(x_1, x_2; s_1, s_2, s_3) = (100, 0; 0, 140, 50)$ bazis yechimdagi qiymati 20000 ga teng. Uchinchi jadvalni shakillantiramiz (57- rasm).

Uchinchi jadvalning oxirgi satrida manfiy elementlar yo'qligi optimal yechim topilganidan dalolat beradi. Bunda bazis o'zgaruvchilar x_1, x_2 va s_2 lar bo'lib, nobazis o'zgaruvchilar esa s_1, s_2 lardir. Bazis o'zgaruvchilarning qiymatini aniqlash uchun uchinchi jadvalning oxirgi ustuniga murojaat qilamiz: $x_1 = 80$, $x_2 = 70$ va $s_2 = 20$. Nobazis o'zgaruvchilarning qiymati esa 0 ga teng bo'lishini bilamiz. Maqsad funksiyasining navbatdagi $(x_1, x_2; s_1, s_2, s_3) = (80, 70; 0, 20, 0)$ bazis yechimdagi qiymati optimal bo'lib, u 23000 ga teng.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		200	100	0	0	0	
x_1	200	1	0	2/5	0	-2/5	80
s_2	0	0	0	2/5	1	-12/5	20
x_2	100	0	1	-2/5	0	7/5	70
Z_j		200	100	40	0	60	**23000**
c_j-Z_j		0	0	-40	0	-60	

Rasm 57: Oxirgi simpleks jadval

Masalaning yechimi:
Demak, sex uchun kundalik optimal ishlab chiqarish rejasi $X = x_1 = 80$ ta shkaf va $Y = x_2 = 70$ ta tumbadan iborat ekan. $s_1 = 0$ va $s_3 = 0$ bo'lgani uchun zaxiradagi DSP va mehnat resurslari to'laligicha sarflanadi. $s_2 = 20$ ekanligidan zaxirada 20 metr shisha ortib qolishi haqida xulosa chiqarish mumkin. Sexning kundalik foydasi rejaga muvofiq eng yuqori bo'lib, $P = 23000\$$ ga teng bo'lar ekan.

5.9 Chorva mollari uchun ratsion tuzish masalasini simpleks usulda yechish

Yuqorida 3.2- bo'limda chorva mollari uchun ratsion tuzish haqidagi amaliy masalaning matematik modelini qurib, uni grafik usulda yechgan edik. Endi esa ushbu chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish imkoniyatlarini ko'rib chiqamiz. Masala shartlarini yodga olaylik.

Ratsion masalasi:

To'liq qiymatli ozuqa ratsioni chorva mollarining mahsuldorligini oshirishning eng muhim shartlaridan biridir. Vazni 400 kilogramm va 10 litr sut beradigan mollar uchun bir kunlik ovqatlanish ratsionini shunday tuzish kerakki, oziq moddalar 15 birlikdan, protein miqdori 840 grammdan, karotin esa 320 milligrammdan kam bo'lmasin. Shu bilan birga, ratsion xarajatlari minimal bo'lsin.

Quyidagi 6- jadvalda 1 kg. arpa va qand lavlagi uchun oziq va foydali moddaning miqdori, 1 kg. ozuqaning narxi keltirilgan.

mahsulot	oziq moddalar	protein	karotin	1 kg. ozuqa narxi
Arpa	0.50	32	30	2
Qand lavlagi	0.92	19	0	1.5

Jadval 6: Masala ma'lumotlari.

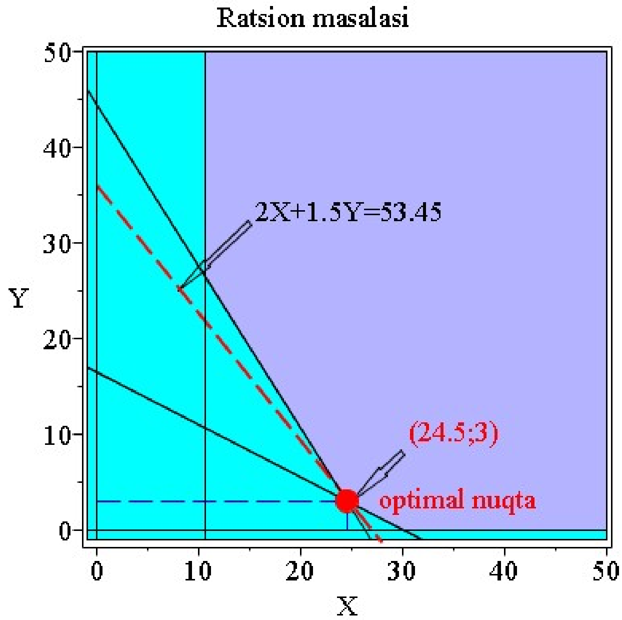
Masalaning matematik modelini berishdan avval ayrim belgilashlarni esga olaylik. Kunlik ratsiondagi arpa miqdorini X va qand lavlagi miqdorini Y deb belgilaymiz. C - qoramol kundalik ratsioni narxi bo'lsin.

Masalaning matematik modeli

$$C = 2X + 1,5Y \to \min,$$

$$\begin{cases} 0,50X + 0,92Y \geq 15, \\ 32X + 19Y \geq 840, \\ 30X \geq 320, \\ X \geq 0, \quad Y \geq 0. \end{cases}$$

Masalani grafik usulda yechish bilan 4.5- bo'limda shug'ullanib quyidagi natijalarni olgan edik (58-rasmga qarang).



Masalaning yechimi:
Qoramolning kundalik ratsionida $X = 24.5$ ***kg*** arpa va $Y = 3$ ***kg*** qand lavlagi bo'lgan taqdirda ratsion barcha talablarga javob bergan holda narxi eng arzon $C = 53.45$ shartli pul birligi bo'ladi.

Rasm 58: Masalani grafik usulda yechish natijasi

Masalani simpleks usulda yechish bilan shug'ullanamiz. Masalaning matematik modelini kanonik ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun cheklanish shartlari «$\geq$» ko'rinishidagi tengsizliklar bilan berilgani sababli masalaga har bir tengsizlik uchun s_i ($i = 1, 2, 3.$) **qo'shimcha o'zgaruvchilar** va a_i ($i = 1, 2, 3.$) **sun'iy o'zgaruvchilar** kiritamiz. Umumiylikka zid kelmagan holda (X, Y) belgilash o'rniga x_1, x_2) belgilashga o'tib olaylik. Natijada masala modelining kanonik ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

Masala matematik modelining kanonik ko'rinishi:

$$C = 2 \cdot x_1 + 1,5 \cdot x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + M \cdot a_1 + M \cdot a_2 + M \cdot a_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 0,50x_1 + 0,92x_2 - s_1 + a_1 = 15, \\ 32x_1 + 19x_2 - s_2 + a_2 = 840, \\ 30x_1 - s_3 + a_3 = 320, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0,\ a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ a_3 \geq 0, \\ M > 0 - \ \textit{etarlicha katta son.} \end{cases}$$

Masalaning kanonik ko'rinishidan foydalanib dastlabki simpleks jadvalni tuzamiz va tahlil qilamiz (59- rasm).

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	b	b_i/a_{ij}
		2	3/2	0	0	0	M	M	M		
a_1	M	1/2	23/25	-1	0	0	1	0	0	15	30
a_2	M	32	19	0	-1	0	0	1	0	840	105/4
a_3	M	**30**	0	0	0	-1	0	0	1	320	32/3
z_j		125M/2	498M/25	-M	-M	-M	M	M	M	**1175M**	
c_j-z_j		2-125M/2	3/2-498M/25	M	M	M	0	0	0		

Rasm 59: Boshlang'ich simpleks jadval

Minimizatsiya masalasini yechayotganimiz bois optimal yechimga erishganligimiz haqidagi qarorni simpleks jadvalning oxiridagi satrda manfiy elementlar yoqligiga asosan chiqaramiz. Agar bu satrda manfiy elementlar bor bo'lsa, eng kichigiga mos kelgan uctunda joylashgan o'zgaruvchi bazisga kiritilishi maqsad funksiyasining qiymati yaxshlanishiga (kamida yomonlashmasligiga olib keladi). 59- rasmda keltirilgan jadvalning oxirgi satrida manfiy elementlar 2 ta bo'lib, ulardan kichigi $2 - 125 \cdot M/2$ ga teng bo'lgani sababli bazisga «x_1» o'zgaruvchi kiradi. Birinchi jadvalning oxirgi yordamchi ustunini to'ldirib chiqamiz. Eng kichik musbat qiymat 32/3 bo'lib, u «a_3» sun'iy o'zgaruvchiga mos kelgan satrda joylashgan. Demak, bazisdan aynan «a_3» o'zgaruvchi chiqib ketadi. Hal qiluvchi element hal qiluvchi satr va hal qiluvchi ustunlar kesishmasida joylashgan bo'lib, u jadvalda qizil rang bilan ajratilgan 30 qiymatdan iborat. Maqsad funksiyasining usbu bazis yechimdagi qiymati **1175M** ga teng. Ikkinchi simpleks jadvalni tuzamiz (60- rasm). Yangi jadvaldan bazisdan chiqib ketgan sun'iy o'zgaruuvchi «a_3» ustunni chiqarib tashlasak ham bo'ladi. Bir bor bazisdan chiqib ketgan sun'iy o'zgaruvchi ikkinchi bor bazisga kirmaydi.

Ikkinchi jadval tahliliga ko'ra basisdan «a_1» o'zgaruvchi chiqib, uning o'rniga «x_2» o'zgaruvchi kiradi. Maqsad funksiyasining ushbu bazis yechimdagi qiymati **1525M/3+64/3** ga teng. Simpleks jadval tuzish qoidasiga asosan uchinchi jadvalni hosil qilamiz (61- rasm).

Uchinchi jadval oxirgi satrida manfiy elementlar mavjud. Demak, optimal yechim topilmagan. Tahlili natijasiga ko'ra hal qiluvchi ustun «s_1» va hal qiluvchi satr «a_2» ekanligini aniqlaymiz. Shuning uchun hal qiluvchi element 475/23 ga teng. Maqsad funksiyasining navbatdagi qiymati **20633M/69+5119/138** ga teng. Keyingi to'rtinchi jadvalni shakllantiramiz (62- rasm).

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	b	b_i/a_{ij}
		2	3/2	0	0	0	M	M		
a_1	M	0	**23/25**	-1	0	1/60	1	0	29/3	725/69
a_2	M	0	19	0	-1	16/15	0	1	1496/3	1496/57
x_1	2	1	0	0	0	-1/30	0	0	32/3	∞
z_j		2	498M/25	-M	-M	13M/12-1/15	0	0	**1525M/3+64/3**	
c_j-z_j		0	3/2-498M/25	M	M	-13M/12+1/15	0	0		

Rasm 60: Ikkinchi simpleks jadval

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_2	b	b_i/a_{ij}
		2	3/2	0	0	0	M		
x_2	3/2	0	1	-25/23	0	5/276	0	725/69	-
a_2	M	0	0	**475/23**	-1	997/1380	1	20633/69	29/57
x_1	2	1	0	0	0	-1/30	0	32/3	∞
z_j		2	3/2	475M/23-75/46	-M	997M/1380-109/2760	M	**20633M/69+5119/138**	
c_j-z_j		0	0	-475M/23+75/46	M	-997M/1380+109/2760	0		

Rasm 61: Uchinchi simpleks jadval

To'rtinchi jadvalning oxirgi satrida yagona manfiy element $-1/57$ bor. Basizga s_3 o'zgaruvchi s_1 o'rniga kiradi. Maqsad funksiyasi qiymati $\mathbf{3460/57}$ ga teng. Beshinch jadvalni shakllantiramiz (63- rasm).

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	b_i/a_{ij}
		2	3/2	0	0	0		
x_2	3/2	0	1	0	-1/19	16/285	1496/57	17765/38
s_1	0	0	0	1	-23/475	**997/28500**	20633/1425	413,90
x_1	2	1	0	0	0	-1/30	32/3	–
z_j		2	3/2	0	-3/38	1/57	**3460/57**	
c_j-z_j		0	0	0	3/38	-1/57		

Rasm 62: To'rtinchi simpleks jadval

Beshinchi jadvalning oxirgi satrida manfiy elementlar yo'qligi optimal yechim topilganidan dalolat beradi. Bunda bazis o'zgaruvchilar x_1, x_2 va s_3 lar bo'lib, nobazis o'zgaruvchilar esa s_1, s_2, a_1, a_2, a_3 lardir. Bazis o'zgaruvchilarning qiymatini aniqlash uchun beshinchi jadvalning oxirgi ustuniga murojaat qilamiz: $x_1 = 24390/997 = 24.463$, $x_2 = 3000/997 = 3.009$ va $s_3 = 412660/997 = 413.90$. Nobazis o'zgaruvchilarning qiymati esa 0 ga teng bo'lishini bilamiz. Maqsad funksiyasining opimal, ya'ni minimal qiymati $C = 53280/997 = 53.440$ ga teng.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		2	3/2	0	0	0	
x_2	3/2	0	1	-1600/997	25/997	0	3000/997
s_3	0	0	0	28500/997	-1380/997	1	412660/997
x_1	2	1	0	950/997	-46/997	0	24390/997
z_j		2	3/2	-500/997	-109/1994	0	**53280/997**
c_j-z_j		0	0	500/997	109/1994	0	

Rasm 63: Oxirgi simpleks jadval

Masalaning yechimi:
Demak, chorva mollari uchin kundalik ratsioni $X = x_1 = 24.663$ kilogramm arpa va $Y = x_2 = 3$ kilogramm qand lavlagidan iborat bo'lsa, ratsionga qo'yilgan barcha talablar bajarilar ekan. Shu bilan birga ozuqa narxi eng arzon bo'lib, $C = 53.440$ shartli pul birligiga teng bo'lar ekan. $s_1 = 0$ va $s_2 = 0$ bo'lgani uchun oziq moddalar va proteinga bo'lgan minimal talab qondirilib, $s_2 = 413.9$ ekanligidan ozuqagagi karotin miqdori minimal talabdan 413.9 milligramm ziyodligi haqida xulosa chiqarish mumkin.

5.10 Investitsiya portfeli haqidagi masalani simpleks usulda yechish

3.3- bo'limda iInvestitsiya portfelini shakllantirish haqidagi amaliy masalani ko'rib uning matematik modelini qurgan edik. Masala shartlarini esga olaylik.

Investitsiya portfeli masalasi

O'zbekiston qayta tiklash va taraqqiyot banki yordam tariqasida moliyaviy ahvoli og'ir korxonalarga 100000$ imtiyozli kredit bermoqchi. Bank kengashi bu mablag'ni ikkita yo'nalish – qurilish sohasi («Uy-joy mulk» va «Uy qurish» firmalari) va sanoatga («Toshkent» poyabzal fabrikasi, metallurgiya sohasi - Bekobod metallurgiya zavodi va Olmaliq metallurgiya zavodi) ajratdi. Har bir tashkilot bilan bog'liq bo'lgan kredit munosabati o'rganildi va kreditlar quyidagi foiz stavkalari bilan qaytarilishi kelishildi: «Uy-joy-mulk» kompaniyasi - foiz stavkasi - 0.06, «Uy-qurish» firmasi - 0.05, «Toshkent» poyabzal fabrikasi - 0.07, Bekobod metallurgiya zavodi - 0.06, Olmaliq metallurgiya zavodi - 0.05. Kreditdan olinadigan foydani maksimallashtiruvchi optimal kredit portfelini aniqlang.

Bank kengashi quyidagi ustuvor shartlar bajarilishini e'tirof etdi:

- *qurilish sohasiga mablag'ning kamida 40% ajratilishi kerak;*
- *umumiy mablag'ning kamida 25% metallurgiya tarmog'iga ajratilishi lozim;*
- *«Uy-qurish» firmasiga ajratiladigan kredit* 6000$ *dan kam bo'lmasligi shart;*
- *Olmaliq metallurgiya zavodiga ajratiladigan kredit ham* 4000$ *dan kam bo'lmasligi shart.*

Barcha shartlarni e'tiborga olgan holda kreditdan olinadigan foydani maksimallashtiruvchi optimal kredit portfelini aniqlang.

Masalaning matematik modelini tuzishda quyidagi belgilashlardan foydalanganmiz:
- X_1 - «Uy-joy mulk» firmasiga ajratilgan kredit miqdori;
- X_2 - «Uy qurilish» firmasiga ajratilgan kredit miqdori;
- X_3 - «Toshkent» poyabzal fabrikasiga ajratilgan kredit miqdori;
- X_4 - Bekobod metallurgiya zavodiga ajratilgan kredit miqdori;
- X_5 - Olmaliq metallurgiya zavodiga ajratilgan kredit miqdori,
- F - kreditdan tushadigan umumiy foyda miqdori.

Investitsiya portfeli haqidagi masalaning matematik modeli:

$$F = 0.06 \cdot X_1 + 0.05 \cdot X_2 + 0.07 \cdot X_3 + 0.06 \cdot X_4 + 0.05 \cdot X_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 100000, \\ X_1 + X_2 \geq 40000, \\ X_4 + X_5 \geq 25000, \\ X_2 \geq 6000, \\ X_5 \geq 4000, \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0, \quad X_5 \geq 0. \end{cases}$$

Masalani simpleks usulda yechish bilan shug'ullanamiz. Masalaning matematik modelini kanonik ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun birinchi cheklanish «=» korinishida bo'lgani uchun unga a_1 sun'iy o'zgaruvchi, qolgan cheklanish shartlari «$\geq$» ko'rinishidagi tengsizliklar bilan berilgani sababli har bir tengsizlik uchun bittadan qo'shimcha s_i va sun'iy o'zgaruvchilar kiritamiz ($i = 2, 3, 4, 5.$). Natijada masala modelini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz.

$$\begin{aligned} F = {} & 0.06 \cdot X_1 + 0.05 \cdot X_2 + 0.07 \cdot X_3 + 0.06 \cdot X_4 + 0.05 \cdot X_5 + \\ & + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + 0 \cdot s_4 + 0 \cdot s_5 - \\ & - M \cdot a_1 - M \cdot a_2 - M \cdot a_3 - M \cdot a_4 - M \cdot a_5 \to \max, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + a_1 = 100000, \\ X_1 + X_2 + s_2 + a_2 = 40000, \\ X_4 + X_5 + s_3 + a_3 = 25000, \\ X_2 + s_4 + a_4 = 6000, \\ X_5 + s_5 + a_5 = 4000, \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0, \quad X_5 \geq 0; \\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0,\ s_4 \geq 0,\ s_5 \geq 0,\ a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ a_3 \geq 0,\ a_4 \geq 0,\ a_5 \geq 0; \\ M > 0 - \ \textit{etarlicha katta son.} \end{cases}$$

Masalaning simpleks jadvallari 64 - 69 chi rasmlarda keltirilgan.

B	c_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_2	s_3	s_4	s_5	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b	b_i/a_{ij}
		0,06	0,05	0,07	0,06	0,05	0	0	0	0	-M	-M	-M	-M	-M		
a_1	-M	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	100000	100000
a_2	-M	1	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	40000	40000
a_3	-M	0	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	25000	∞
a_4	-M	0	**1**	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	6000	**6000**
a_5	-M	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	4000	∞
z_j		-2M	-3M	-M	-2M	-3M	M	M	M	M	-M	-M	-M	-M	-M	**-175000M**	
c_j-z_j		0,06+2M	**0,05+3M**	0,07+M	0,06+2M	0,05+3M	-M	-M	-M	-M	0	0	0	0	0		

Rasm 64: Birinchii simpleks jadval

B	c_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_2	s_3	s_4	s_5	a_1	a_2	a_3	a_5	b	b_i/a_{ij}
		0,06	0,05	0,07	0,06	0,05	0	0	0	0	-M	-M	-M	-M		
a_1	-M	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	94000	94000
a_2	-M	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	1	0	0	34000	∞
a_3	-M	0	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	25000	**25000**
x_2	0,05	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	6000	∞
a_5	-M	0	0	0	0	**1**	0	0	0	-1	0	0	0	1	4000	**4000**
z_j		-2M	0,05	-M	-2M	-3M	M	M	-2M-0,05	M	-M	-M	-M	-M	**-157000M+300**	
c_j-z_j		2M+0,06	0	M+0,07	2M+0,06	**3M+**	-M	-M	2M+0,05	-M	0	0	0	0		

Rasm 65: Ikkinchi simpleks jadval

B	c_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_2	s_3	s_4	s_5	a_1	a_2	a_3	b	b_i/a_{ij}
		0,06	0,05	0,07	0,06	0,05	0	0	0	0	-M	-M	-M		
a_1	-M	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	90000	90000
a_2	-M	**1**	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	1	0	34000	**34000**
a_3	-M	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	0	0	1	21000	∞
x_2	0,05	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	6000	∞
x_5	0,05	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	4000	∞
z_j		-2M	0,05	-M	-2M	0,05	M	M	-2M-0,05	-2M+0,05	-M	-M	-M	**-145000M+500**	
c_j-z_j		**2M+0,06**	0	M+0,07	2M+0,06	0	-M	-M	2M+0,05	2M-0,05	0	0	0		

Rasm 66: Uchinchi simpleks jadval

B	c_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_2	s_3	s_4	s_5	a_1	a_3	b	b_i/a_{ij}
		0,06	0,05	0,07	0,06	0,05	0	0	0	0	-M	-M		
a_1	-M	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	56000	56000
x_1	0,06	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	34000	∞
a_3	-M	0	0	0	**1**	0	0	-1	0	1	0	1	21000	**21000**
x_2	0,05	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	6000	∞
x_5	0,05	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	4000	∞
z_j		0,06	0,05	-M	-2M	0,05	-M-0,06	M	0,01	-2M+0,05	-M	-M	**-77000M+2540**	
c_j-z_j		0	0	M+0,07	**2M+0,06**	0	M+0,06	-M	-0,01	2M-0,05	0	0		

Rasm 67: To'rtinchi simpleks jadval

B	c_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_2	s_3	s_4	s_5	a_1	b	b_i/a_{ij}
		0,06	0,05	0,07	0,06	0,05	0	0	0	0	-M		
a_1	-M	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	35000	35000
x_1	0,06	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	34000	∞
x_4	0,06	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	0	21000	∞
x_2	0,05	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	6000	∞
x_5	0,05	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	4000	∞
z_j		0,06	0,05	-M	0,06	0,05	-0,06	-M-0,06	0,01	0,01	-M	**-35000M+3800**	
c_j-z_j		0	0	M+0,07	0	0	0,06	M+0,06	-0,01	-0,01	0		

Rasm 68: Beshinchi simpleks jadval

B	c_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_2	s_3	s_4	s_5	b
		0,06	0,05	0,07	0,06	0,05	0	0	0	0	
x_3	0,07	0	0	1	0	0	1	1	0	0	35000
x_1	0,06	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	34000
x_4	0,06	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	21000
x_2	0,05	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	6000
x_5	0,05	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	4000
z_j		0,06	0,05	0,07	0,06	0,05	0,01	0,01	0,01	0,01	**6250**
c_j-z_j		0	0	0	0	0	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	

Rasm 69: Oltinchi simpleks jadval

Dastjlabki qadamda bazis o'zgaruvchilar sifatida $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ o'zgaruvchilar olinib birinchi simpleks jadval shakllantiriladi. Optimal yechim hosil qilinganligi haqidagi xulosani jadvalning oxirgi satrida barcha elementlar nomusbatligi asosida chiqariladi. Hal qiluvchi ustun oxirgi satrdagi eng katta musbat elementga mos ravishda tanlanib, basisga shu ustunda joylashgan o'zgaruchi kiradi. Hal qiluvchi satr jadvalning oxirgi qo'shimcha ustunida joylashgan eng kishik musbat element asosida aniqlanib, bazisdan shu satrda joylashgan o'zgaruvchi chiqadi. Hisoblash natijalarini qisqa ko'rinishda quyidagi jadvalda beramiz:

jadval tartibi	bazisdan chiqadi	bazisga kiradi	F qiymati
1	a_4	x_2	$-175000M$
2	a_5	x_5	$-157000M + 300$
3	a_2	x_1	$-145000M + 500$
4	a_3	x_4	$-77000M + 2540$
5	a_1	x_3	$-35000M + 3800$
6	bazis $(x_1, x_2, x_3.x_4, x_5)$		6250

Masalaning yechimi:
O'zbekiston qayta tiklash va taraqqiyot banki yordam tariqasida moliyaviy ahvoli og'ir korxonalarga bermoqchi bo'lgan 100000\$ imtiyozli kreditni quyidagicha taqsimlashi kerak:

«Uy-joy mulk» firmasiga - $X_1 = 34000\$$,
«Uy qurilish» firmasiga - $X_2 = 6000\$$,
«Toshkent» poyafzal fabrikasiga - $X_3 = 35000\$$,
Bekobod metallurgiya zavodiga - $X_4 = 21000\$$,
Olmaliq metallurgiya zavodiga - $X_5 = 4000\$$.

Bank uchun ushbu optimal kredit portfelidan olinadigan maksimal foyda $F = 6250\$$ ga teng bo'ladi.

6 Simpleks jadval yordamida turg'unlik tahlilini o'tkazish

Biz turg'unlik tahlili tushunchasi bilan chiziqli dasturlash masalasini grafik usul bilan yechish jarayonida tanishgan edik.

Endi simpleks jadval yordamida turg'unlik tahlilini qanday hal qilish lozimligini ko'raylik. Solishtirish maqsadida 4.6 - bo'limda grafik usul yordamida tahlil qilingan "Fazilat" tikuv sexi haqida masalaga qaytaylik. Masalaning matematik modeli 1 da aniqlangan edi:

$$z = 60x_1 + 50x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 1.5x_1 + 2x_2 \le 42, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 60, \\ 5x_1 + 5x_2 \le 200, \\ x_1 \le 18, \\ x_1, \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Masalani kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$z = 60x_1 + 50x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 1.5x_1 + 2x_2 + s_1 = 42, \\ 3x_1 + 2x_2 + s_2 = 60, \\ 5x_1 + 5x_2 + s_3 = 200, \\ x_1 + s_4 = 18, \\ x_1, x_2 \ge 0, \ s_1, s_2, s_3 \ge 0. \end{cases}$$

Shu masalani simpleks usul bilan yechish orqali quyidagi oxirgi 70 - jadvalga yetib kelamiz.

6.1 Simpleks usulda shartlarning o'ng tomoni turg'unlik tahlili

Masalaning ikkiyoqlama qiymati va zaxiradagi resurs miqdorlarini o'zgarishining turg'unligini jadvalga qarab aniqlash qoidasi bilan tanishamiz.

Oxirgi jadvalning z_j satrining s_1, s_2, s_3, s_4 qo'shimcha o'zgaruvchilar ustuniga mos kelgan qiymatlar grafik usul yordamida olingan ikkiyoqlama qiymatlarga mos kelishini kuzatish mumkin. Qo'shimcha o'zgaruvchilarning z_j satriga to'g'ri kelgan qiymatlar

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
		60	50	0	0	0	0	
s_4	0	0	0	2/3	-2/3	0	1	6
x_2	50	0	1	1	-1/2	0	0	12
s_3	0	0	0	-5/3	-5/6	1	0	80
x_1	60	1	0	-2/3	2/3	0	0	12
z_j		60	50	10	15	0	0	**1320**
c_j-z_j		0	0	-10	-15	0	0	

Rasm 70: Yakuniy simpleks jadval

resurslarning ikkiyoqlama qiymatidan iborat bo'ladi. Jadvalga ko'ra birinchi resursning ikkiyoqlama qiymati $y_1 = 10$ ga, ikkinchi resursniki $y_2 = 15$, uchinchiniki $y_3 = 0$ va to'rtinchi resursniki esa $y_4 = 0$ ga teng bo'ladi. Ikkiyoqlama qiymat resursning bahosini beradi. Bu ma'lumotlar birinchi va ikkinchi resurslarning kamyob ekanligini ko'rsatadi. Shu bilan birga ikkinchi resursning ikkiyoqlama qiymati birinchiga qaraganda katta bo'lgani uchun birinchi navbatda ikkinchi resursni ko'paytirish maqsadga muvofiq ekanligini ko'rsatadi.

Demak, masalaning ikkiyoqlama qiymatlarini oxirgi jadvaldagi qo'shimcha o'zgaruvchilar ustunidagi z_j satrda joylashgan sonlardan olinadi.

Endi o'ng tomonning turg'unlik oralig'ini simpleks jadvaldan topishni ko'ramiz. Bu oraliq shunday oraliqki, unda ikkiyoqlama qiymat o'zgarishsiz qoladi. Ya'ni bu shunday oralaiqki, undan tashqariga chiqilganda shart ortiqcha chegaraga o'tib qoladi.

O'ng tomon turg'unlik oralig'ini aniqlash uchun simpleks jadval ustida kerakli hisoblashlarni amalga oshirishga to'g'ri keladi.

Shartlarning o'ng tomoni o'zgargan taqdirda simpleks jadvalning o'zgarishini ko'raylik. Buning uchun biror shartni o'zgartirib masalani qaytadan simpleks usulda yechish yetarlidir. Agar simpleks jadvalning ustunidagi miqdorlarning hech qachon hal qiluvchi element bolmasligini inobatga olsak, o'ng tomoni o'zgargan masala uchun yangi simpleks jadvalni qurish shart emas. Fikrimizni yuqoridagi misolda ko'raylik. Aytaylik, birinchi shartning o'ng tomonini 42 birlikdan 45 birlikka oshirib, uni simpleks jadval yordamida qayta hisoblab chiqsak, oxirgi 71 - jadvalga kelamiz.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
		60	50	0	0	0	0	
s_4	0	0	0	2/3	-2/3	0	1	8
x_2	50	0	1	1	-1/2	0	0	15
s_3	0	0	0	-5/3	-5/6	1	0	75
x_1	60	1	0	-2/3	2/3	0	0	10
z_j		60	50	10	15	0	0	**1350**
c_j-z_j		0	0	-10	-15	0	0	

Rasm 71: Qayta hisoblangan simpleks jadval

Agar 71 - rasmdagi jadvalga nazar solsak, uning 70 - rasmdagi jadvaldan farqi faqat oxirgi ustunda ekanligini ko'rish mumkin. Qolgan qiymatlar esa o'zgarishsiz qolar ekan. Bu xulosa oldingi ko'rib chiqilgan jadvallar uchun ham o'rinlidir. 71 - rasmdagi jadvalni hosil qilish uchun 70 - rasmdagi jadvaldal foydalanib oson keltirib chiqarish mumkin. Buning uchun quyidagicha yo'l tutiladi: 70 - rasmdagi jadvalning b va s_1 ustunlaridan foydalanamiz. s_1 ustunni tanlanishiga sabab biz faqat birinchi shartning o'ng tomoninigina o'zgartirdik. Biz birinchi shartning o'ng tomonini 3 birlikka oshirganimiz uchun 71 - jadvalning b ustunidagi elementlarni quyidagicha hisoblashlarni amalga oshiramiz. 70 - jadvalning birinchi satrining b va s_1 ustunidagi joylashgan elementlardan foydalanib, quyidagi hisoblashni amalga oshiramiz: $6 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 8$. Bu yerda $6 - b$ ustundagi, $\frac{2}{3} - s_1$ ustundagi qiymatlar bo'lib, 3 soni esa birinchi shartning o'ng tomonini 3 birlikka oshirganimizdir. Qolgan ustunlarda ham hisoblashni shu tarzda davom ettirsak, $12+1\cdot 3 = 15$, $80 - \frac{5}{3} \cdot 3 = 75$, $12 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 10$ qiymatlarga ega bo'lamiz. Hosil bo'lgan qiymatlar 71 - jadvalning b ustunidagi qiymatlar bilan bir xildir. Demak, 71 - jadvalni 70 - jadvaldan foydalanib shu tarzda hosil qilish mumkin ekan.

Endi birinchi shartning o'ng tomonini d_1 birlikka oshiradigan bo'lsak, yangi jadvalning b ustunidagi qiymatlar

$$6 + \frac{2}{3} \cdot d_1, \quad 12 + 1 \cdot d_1, \quad 80 - \frac{5}{3} \cdot d_1, \quad 12 - \frac{2}{3} \cdot d_1$$

larga teng bo'ladi. Ikkinchi shartning o'ng tomoni o'zgartiriladigan taqdirda s_2 ustun elementlaridan foydalanamiz. Masalan, agar ikkinchi shartni o'zgartirib qolgan parametrlarni o'zgartirishsiz qoldirilganda yakuniy jadvaldagi b ustunidagi qiymatlar

$$6 - \frac{2}{3} \cdot d_2, \quad 12 - \frac{1}{2} \cdot d_2, \quad 80 - \frac{5}{6} \cdot d_2, \quad 12 + \frac{2}{3} \cdot d_2$$

ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, o'ng tomon biror shartining o'zgarishi simpleks jadvalning o'ng qismigagina ta'sir qilar ekan. Ya'ni, zaxira miqdorining o'zgarishi mumkin bo'lgan yechimgagina ta'sir etadi. Bazis yechimlarning nomanfiy bo'lishligini e'tiborga olgan holda d_1 ning o'zgarish oralig'ini topamiz. Demak, quyidagi tengsizliklarni yechib,

$$\begin{cases} 6 + \frac{2}{3}d_1 \geq 0, \\ 12 + d_1 \geq 0, \\ 80 - \frac{5}{3}d_1 \geq 0, \\ 12 - \frac{2}{3}d_1 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \quad -9 \leq d_1 \leq 18.$$

d_1 ning o'zgarish chegarasini topamiz. $b_1 = 42 + d_1$ tenglikdan birinchi shart o'ng tomonning turg'unligini aniqlaymiz: $33 \leq b_1 \leq 60$. Bu xulosa grafik usul yordamida olingan natija bilan mos keladi. Xuddi shu yo'l bilan qolgan o'ng tomonlarning turg'unligini aniqlash mumkin.

6.2 Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlili

Simpleks jadvalni qurish jarayonida maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining o'zgarishi jadvalning oxirgi ikki satriga ta'sir qiladi. Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unligini topish qoidasi 70 - rasmdagi oxirgi jadval yordamida onson hal qilinadi.

Bizning maqsad 70 - rasmdagi jadval yordamida, masalan, maqsad funksiyasining birinchi koeffitsiyentining turg'unligini ko'raylik. Buning uchun 70 - rasmdagi jadvalda x_1 oldidagi koeffitsiyentni c_1 bilan almashtirib jangi 72 - rasmdagi jadvalni hisoblab chiqamiz.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
		c_1	50	0	0	0	0	
s_4	0	0	0	2/3	-2/3	0	1	6
x_2	50	0	1	1	-1/2	0	0	12
s_3	0	0	0	-5/3	-5/6	1	0	80
x_1	c_1	1	0	-2/3	2/3	0	0	12
z_j		c_1	50	$50-2c_1/3$	$-25+2c_1/3$	0	0	**$600+12c_1$**
c_j-z_j		0	0	$-50+2c_1/3$	$25-2c_1/3$	0	0	

Rasm 72: Qayta hisoblangan simpleks jadval

Optimal yechimni o'zgarishsiz qolishini talab qilsak, 72 - jadvalning oxirgi satridagi sonlar nomusbat bo'lishligini talab qilamiz. U holda,

$$\begin{cases} -50 + 2c_1/3 \leq 0, \\ 25 - 2c_1/3 \leq 0, \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasidan $75/2 \leq c_1 \leq 75$ ekanligi kelib chiqadi. Bu natija grafik usul yordamida olingan natija bilan mos tushadi. Xuddi shuningdek maqsad funksiyasining ikkinchi koeffitsiyentining turg'unligini topish mumkin $40 \leq c_2 \leq 80$.

Yana shuni ta'kidlash lozimki, c_1 ning qiymati optimallik oralig'ida joylashganda, optimal yechim o'zgarishsiz qolib, maqsad funksiyasining qiymatini esa $z = 600 + 12c_1$ tenglikdan topamiz. Masalan, $c_1 = 40$ bo'lganda bu qiymat turg'unlik chegarasida bo'lgani uchun, optimal yechim $x_1 = 12$, $x_2 = 12$ va $s_1 = 0$, $s_2 =$, $s_3 = 80$, $s_4 = 6$ saqlanib, maqsad funksiyasining qiymati $z = 600 + 12c_1 = 1800$ ga teng bo'ladi.

6.3 Ishlab chiqarish masalasi yechimi uchun turg'unlik tahlili

«Chinor» mebel sexi uchun optimal ishlab chiqarish rejasini tuzish haqidagi masalani 5.8-bo'limda simpleks usulda yechgan edik. Oxirgi simpleks jadval quyidagi rasmda keltirilgan bo'lib, uning asosida quyidagi xulosalarni chiqargan edik:

optimal yechim $(x;y) = (80;70)$**,** $F_{max} = 23000\$$**.**

Simpleks jadvali asosida maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlilini o'tkazish

• Maqsad funksiyasining c_1 koeffitsiyentining turg'unlik tahlilini o'tkazish uchun oxirgi simpleks jadvaldagi maqsad funksiyasininq «200» qiymatining o'rniga c_1 yozib jadvalni qayta hisoblab chiqamiz (74- rasm).

Yechim optimalligicha qolishi uchun, ya'ni usbu jadval oxirgisi bo'lishi uchun uning oxirgi satrida barcha elementlar manfiy yoki nolga teng bo'lishi kerak. Buni inobatga olib quyidagi tengsizliklar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -2c_1/5 + 40 \leq 0 \\ -2c_1/5 - 140 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \geq 100 \\ c_1 \leq 350 \end{cases} \Rightarrow \quad 100 \leq c_1 \leq 350.$$

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		200	100	0	0	0	
x_1	200	1	0	2/5	0	-2/5	80
s_2	0	0	0	2/5	1	-12/5	20
x_2	100	0	1	-2/5	0	7/5	70
z_j		200	100	40	0	60	**23000**
c_j-z_j		0	0	-40	0	-60	

Rasm 73: Oxirgi simpleks jadval

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		c_1	100	0	0	0	
x_1	c_1	1	0	2/5	0	-2/5	80
s_2	0	0	0	2/5	1	-12/5	20
x_2	100	0	1	-2/5	0	7/5	70
z_j		c_1+100	100	$2c_1/5$-40	0	$-2c_1/5$+140	**$80c_1$+7000**
c_j-z_j		-100	0	$-2c_1/5$+40	0	$2c_1/5$-140	

Rasm 74: c_1 koeffitsiyenti turg'unlik tahlili uchun qayta tuzilgan jadval

Demak, shkafning narxi $100 \leq c_1 = 200 \leq 350$ oraliqda o'zgarganda ham $(x; y) = (80; 70)$ reja optimalligacha qolaveradi. $F = 80c_1 + 7000$ va $100 \leq c_1 \leq 350$ ekanligidam maqsad funksiyasininq qiymati quyidagi oraliqda o'zgaradi:

$$80 \cdot 100 + 7000 \leq F \leq 80 \cdot 350 + 7000 \quad \Rightarrow \quad 15000 \leq F \leq 35000.$$

• Maqsad funksiyasining c_2 koeffitsiyentining turg'unlik tahlilini o'tkazish uchun oxirgi simpleks jadvaldagi maqsad funksiyasininq «100» qiymatining o'rniga c_2 yozib jadvalni qayta hisoblab chiqamiz (75- rasm).

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		200	c_2	0	0	0	
x_1	200	1	0	2/5	0	-2/5	80
s_2	0	0	0	2/5	1	-12/5	20
x_2	c_2	0	1	-2/5	0	7/5	70
z_j		200	c_2	80-$2c_2/5$	0	-80+$7c_2/5$	**$70c_2$+16000**
c_j-z_j		0	0	-80+$2c_2/5$	0	80-$7c_2/5$	

Rasm 75: c_2 koeffitsiyent turg'unlik tahlili uchun qayta tuzilgan jadval

Yechim optimalligicha qilishi uchun, ya'ni usbu jadval oxirgisi bo'lishi uchun uning oxirgi satrida barcha elementlar manfiy yoki nolga teng bo'lishi kerak. Buni inobatga olib quyidagi tengsizliklar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -80 + 2c_2/5 \leq 0 \\ 80 - 7c_2/5 - 140 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 \leq 200 \\ c_2 \geq \dfrac{400}{7} \end{cases} \Rightarrow \quad 57.1428 \leq c_2 \leq 200.$$

Demak, tumbaning narxi $400/7 \leq c_2 = 100 \leq 200$ oraliqda o'zgarganda ham $(x; y) = (80; 70)$ reja optimalligacha qolaveradi. $F = 70c_2 + 16000$ va $400/7 \leq c_2 \leq 200$ ekanligidam maqsad funksiyasininq qiymati quyidagi oraliqda o'zgaradi:

$$70 \cdot 400/7 + 16000 \leq F \leq 70 \cdot 200 + 16000 \quad \Rightarrow \quad 20000 \leq F \leq 30000.$$

Simpleks jadvali asosida shartlarning o'ng tomoni koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlilini o'tkazish

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		200	100	0	0	0	
x_1	200	1	0	2/5	0	-2/5	80
s_2	0	0	0	2/5	1	-12/5	20
x_2	100	0	1	-2/5	0	7/5	70
Z_j		200	100	**40**	**0**	**60**	**23000**
c_j-z_j		0	0	-40	0	-60	

Rasm 76: b_i turg'unlik tahlili uchun foydalanadigan ustunlar

• Birinchi shart o'ng tomonining b_1 koeffitsienti turg'unlik tahlilini o'tkazish uchun oxirgi simpleks jadvalining yashil rangga bo'yalgan kataklaridan foydalanamiz (76- rasm). Buning uchun qo'shimcha s_1 o'zgaruvchi joylashgan ustundagi qiymatlarni d_1 ga kopaytirib b ustundagi mos qiymatlarga qo'shamiz.

Natijada hosil bo'lgan ifodalardan foydalanib tengsizliklar sistemasini tuzib olib, uni yechamiz (77- rasm):

s_1	x	d_1	+	b	=	s_1 x d_1+b
2/5	x	d_1	+	80	=	2/5 x d_1+80
2/5	x	d_1	+	20	=	2/5 x d_1+20
-2/5	x	d_1	+	70	=	-2/5 x d_1+70

Rasm 77: b_1 koeffitsiyent turg'unlik tahlili

$$\begin{cases} 2/5 \cdot d_1 + 80 \geq 0 \\ 2/5 \cdot d_1 + 20 \geq 0 \\ -2/5 \cdot d_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \geq -200 \\ d_1 \geq -50 \\ d_1 \leq 350/2 \end{cases} \Rightarrow -50 \leq d_1 \leq 175.$$

U holda $b_1 + d_1$ ifodadan d_1 o'zgarish oralig'ini inobatga olib $350 - 50 \leq b_1 \leq 350 + 175$ $\Rightarrow$ $300 \leq b_1 \leq 525$ hosil qilamiz. Xuddi shinday mulohazalarni yuritib, b_2 uchun quyidagi natijalarni olamiz (78- rasm):

s_2	x	d_2	+	b	=	s_2 x d_2+b
0	x	d_2	+	80	=	0 x d_2+80
1	x	d_2	+	20	=	1 x d_2+20
0	x	d_2	+	70	=	0 x d_2+70

Rasm 78: b_2 koeffitsiyent turg'unlik tahlili

$1 \cdot d_2 + 20 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -20 \leq d_2 \leq \infty$. U holda $b_2 + d_2$ ifodadan d_2 o'zgarish oralig'ini inobatga olib $240 - 40 \leq b_2 \leq 240 + \infty \quad \Rightarrow \quad 220 \leq b_2 \leq \infty$ hosil qilamiz.

Uchinchi shart o'ng tomoni b_3 uchun quyidagi natijalarni olamiz (79- rasm):

s_3	x	d_3	+	b	=	s_3 x d_3+b
-2/5	x	d_3	+	80	=	-2/5 x d_3+80
-12/5	x	d_3	+	20	=	-12/5 x d_3+20
7/5	x	d_3	+	70	=	7/5 x d_3+70

Rasm 79: b_3 koeffitsient turg'unlik tahlili

$$\begin{cases} -2/5 \cdot d_3 + 80 \geq 0 \\ -12/5 \cdot d_3 + 20 \geq 0 \\ 7/5 \cdot d_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_3 \leq 200 \\ d_3 \leq 25/3 \\ d_3 \geq -50 \end{cases} \Rightarrow -50 \leq d_3 \leq 25/3.$$

U holda $b_3 + d_3$ ifodadan d_3 o'zgarish oralig'ini inobatga olib

$$150 - 50 \leq b_3 \leq 150 + 25/3 \quad \Rightarrow \quad 100 \leq b_3 \leq 158\frac{1}{3}$$

hosil qilamiz.

Resurslar uchun oxirgi simpleks jadvalning ikkiyoqlama qiymatlari qo'shimcha s_1. s_2 va s_3 o'zgaruvchilarga mos ustunlarning Z_i satrida joylashgan bo'lib 76- rasmdagi jadvalda to'q pushti rang bilan ajratilgan: $\Delta_1 = 40$, $\Delta_2 = 0$ va $\Delta_3 = 60$.

Turg'unlik tahlili natijalari:
$100 \leq c_1 \leq 350 \quad 400/7 \leq c_2 \leq 200$;
$300 \leq b_1 \leq 525, \quad 220 \leq b_2 \leq \infty, \quad 100 \leq b_3 \leq 158\frac{1}{3}$;
$\Delta_1 = 40, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = 60.$

6.4 Chorva mollari ratsioni masalasi yechimi uchun turg'unlik tahlili

Chorva mollari uchun optimal ratsion tuzish haqidagi masalani 5.9- bo'limda simpleks usulda yechgan edik. Oxirgi simpleks jadval quyidagi rasmda keltirilgan bo'lib, uning asosida ushbu xulosalarni chiqargan edik:

Optimal yechim $(x;y) = (24.663;3)$, ***ratsionning minimal narxi*** $C_{min} = 53.44$.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		2	3/2	0	0	0	
x_2	3/2	0	1	-1600/997	25/997	0	3000/997
s_3	0	0	0	28500/997	-1380/997	1	412660/997
x_1	2	1	0	950/997	-46/997	0	24390/997
z_j		2	3/2	-500/997	-109/1994	0	**53280/997**
c_j-z_j		0	0	500/997	109/1994	0	

Rasm 80: Oxirgi simpleks jadval

Simpleks jadvali asosida maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlilini o'tkazish

• Maqsad funksiyasi c_1 koeffitsiyentining turg'unlik tahlilini o'tkazish uchun oxirgi simpleks jadvaldagi maqsad funksiyasi «2» qiymatining o'rniga c_1 yozib jadvalni qayta hisoblab chiqamiz (81- rasm).

C	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		c_1	3/2	0	0	0	
x_2	3/2	0	1	-1600/997	25/997	0	3000/997
s_3	0	0	0	28500/997	-1380/997	1	412660/997
x_1	c_1	1	0	950/997	-46/997	0	24390/997
z_j		c_1	3/2	$(950c_1-2400)/997$	$(75-92c_1)/997$	0	$(24390c_1+4500)/997$
c_j-z_j		0	0	$(-950c_1+2400)/997$	$(92c_1-75)/997$	0	

Rasm 81: c_1 koeffitsiyenti turg'unlik tahlili uchun qayta tuzilgan jadval

Yechim optimalligicha qolishi uchun, ya'ni usbu jadval oxirgisi bo'lishi uchun uning oxirgi satrida barcha elementlar musbat yoki nolga teng bo'lishi kerak. Buni inobatga olib quyidagi tengsizliklar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{-950c_1+2400}{997} \geq 0 \\ \\ \dfrac{92c_1-75}{997} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -950c_1+2400 \geq 0 \\ \\ 92c_1-75 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \leq 48/19 = 2.5263 \\ \\ c_1 \geq 75/92 = 0.8152 \end{cases}$$

Demak, arpa narxi $0.8152 \leq c_1 = 2 \leq 2.5263$ oraliqda o'zgarganda ham $(x;y) = (24.663;3)$ yechim optimalligacha qolaveradi.

$$C = \frac{24390c_1 + 4500}{997} \text{ va } 0.8152 \leq c_1 \leq 2.5263$$

ekanligidam maqsad funksiyasininq qiymati quyidagi oraliqda o'zgaradi:

$$\frac{24390 \cdot 0.8152 + 4500}{997} \leq C \leq \frac{24390 \cdot 2.5263 + 4500}{997} \quad \Rightarrow \quad 24.456 \leq C \leq 66.315.$$

• Maqsad funksiyasi c_2 koeffitsiyentining turg'unlik tahlilini o'tkazish uchun oxirgi simpleks jadvaldagi maqsad funksiyasining «3/2» qiymatining o'rniga c_2 yozib, jadvalni qayta hisoblab chiqamiz (82- rasm).

C	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		2	c_2	0	0	0	
x_2	c_2	0	1	-1600/997	25/997	0	3000/997
s_3	0	0	0	28500/997	-1380/997	1	412660/997
x_1	2	1	0	950/997	-46/997	0	24390/997
z_j		2	c_2	$(1900-1600c_2)/997$	$(25c_2-92)/997$	0	$(3000c_2+48780)/997$
$c_j - z_j$		0	0	$(1600c_2-1900)/997$	$(92-25c_2)/997$	0	

Rasm 82: c_2 koeffitsiyenti turg'unlik tahlili uchun qayta tuzilgan jadval

Yechim optimalligicha qolishi uchun, ya'ni usbu jadval oxirgisi bo'lishi uchun uning oxirgi satrida barcha elementlar musbat yoki nolga teng bo'lishi kerak. Buni inobatga olib quyidagi tengsizliklar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{-1900 + 1600c_2}{997} \geq 0 \\[2ex] \dfrac{92 - 25c_2}{997} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1900 + 1600c_2 \geq 0 \\[2ex] 92 - 25c_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 \geq 19/16 = 1.1875 \\[2ex] c_2 \leq 92/25 = 3.68 \end{cases}$$

Demak, qand lavlagi narxi $1.1875 \leq c_2 = 2 \leq 3.68$ oraliqda o'zgarganda ham $(x; y) = (24.663; 3)$ yechim optimalligacha qolaveradi.

$$C = \frac{3000c_2 + 48780}{997} \text{ va } 1.1875 \leq c_2 \leq 3.68$$

ekanligidan maqsad funksiyasininq qiymati quyidagi oraliqda o'zgaradi:

$$\frac{3000 \cdot 1.1875 + 48780}{997} \leq C \leq \frac{3000 \cdot 3.68 + 48780}{997} \quad \Rightarrow \quad 52.5 \leq C \leq 60.$$

Simpleks jadvali asosida shartlarning o'ng tomoni koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlilini o'tkazish

• Shartning o'ng tomonlari b_i koeffitsiyentining turg'unlik tahlilini o'tkazish uchun oxirgi simpleks jadvalining quyidagi qismidan foydalanamiz (83- rasm). Buning uchun har bir qo'shimcha s_i o'zgaruvchi joylashgan ustundagi qiymatlarni d_i ga kopaytirib b ustundagi mos qiymatlaridan ayiramiz va quyidagi tenhsizliklar sistemalarini yechamiz.

s_1	s_2	s_3	b
-1600/997	25/997	0	3000/997
28500/997	-1380/997	1	412660/997
950/997	-46/997	0	24390/997

Rasm 83: b_i koeffitsiyenti turg'unlik tahlili uchun foydalanadigan ustunlar

b_1 koeffitsyient uchun:

$$\begin{cases} \dfrac{1600}{997} \cdot d_1 + \dfrac{3000}{997} \geq 0 \\ \dfrac{-28500}{997} \cdot d_1 + \dfrac{412660}{997} \geq 0 \\ \dfrac{-950}{997} \cdot d_1 + \dfrac{24390}{997} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1600 \cdot d_1 + 3000 \geq 0 \\ -28500 \cdot d_1 + 412660 \geq 0 \\ -950 \cdot d_1 + 24390 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1 \geq -15/8 = -1.875 \\ d_1 \leq 20633/1425 = 14.479 \\ d_1 \geq 2439/95 = 25.673 \end{cases} \Rightarrow -1.875 \leq d_1 \leq 14.479.$$

U holda $b_1 + d_1$ ifodadan d_1 o'zgarish oralig'ini inobatga olib,

$$15 - 1.875 \leq b_1 \leq 15 + 14.479 \quad \Rightarrow \quad 13.125 \leq b_1 \leq 29.479$$

hosil qilamiz.

b_2 koeffitsiyent uchun:

$$\begin{cases} -\dfrac{25}{997} \cdot d_2 + \dfrac{3000}{997} \geq 0 \\ \dfrac{1380}{997} \cdot d_2 + \dfrac{412660}{997} \geq 0 \\ \dfrac{46}{997} \cdot d_2 + \dfrac{24390}{997} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -25 \cdot d_2 + 3000 \geq 0 \\ 1380 \cdot d_2 + 412660 \geq 0 \\ 46 \cdot d_2 + 24390 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -299.029 \leq d_1 \leq 120.$$

U holda $b_2 + d_2$ ifodadan d_2 o'zgarish oralig'ini inobatga olib,

$$840 - 299.029 \leq b_2 \leq 840 + 120 \quad \Rightarrow \quad 540.971 \leq b_2 \leq 960$$

hosil qilamiz.

b_3 koeffitsiyent uchun:

$$\begin{cases} -0\cdot d_3+\dfrac{3000}{997}\geq 0 \\ \\ -1\cdot d_3+\dfrac{412660}{997}\geq 0 \\ \\ -0\cdot d_3+\dfrac{24390}{997}\geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \infty < d_3 \leq \frac{412660}{997} = 413.9$$

U holda b_3+d_3 ifodadan d_3 o'zgarish oralig'ini inobatga olib,

$$\infty \leq b_3 \leq 320+413.9 \quad \Rightarrow \quad \infty \leq b_3 \leq 733.9$$

hosil qilamiz.

Turg'unlik tahlili natijalari:
$0.8152 \leq c_1 \leq 2.5263 \quad 1.1875 \leq c_2 \leq 3.68;$
$13.125 \leq b_1 \leq 29.479, \quad 540.971 \leq b_2 \leq 960, \quad \infty \leq b_3 \leq 733.9$

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

Quyidagi masalalarning optimal yechimi uchun simpleks jadvali asosida maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari va o'ng tomon koeffitsiyentlari turg'unlik tahlilini amalga oshiring.

1) $\begin{array}{l} 2x_1+2x_2 \to \max, \\ x_1+2x_2 \leq 6, \\ 2x_1+x_2 \leq 8, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$

2) $\begin{array}{l} x_1-2x_2 \to \min, \\ 5x_1+3x_2 \geq 30, \\ x_1-x_2 \leq 3, \\ -3x_1+5x_2 \leq 15, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$

3) $\begin{array}{l} 3x_1+2x_2 \to \max, \\ 15x_1+4x_2 \leq 1095, \\ 11x_1+5x_2 \leq 865, \\ 9x_1+10x_2 \leq 1080, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$

4) $\begin{array}{l} x_1+3x_2+3x_3 \to \max, \\ 5x_1+10x_2+6x_3 \leq 2000, \\ 4x_1+5x_2+8x_3 \leq 2000, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$

Mustaqil ish topshiriqlari javoblari

Quyidagi masalalarning optimal yechimi uchun simpleks jadvali asosida maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari va o'ng tomon koeffitsiyentlari turg'unlik taxlilini amalga oshiring.

1) $x_1=10/3;\ x_2=4/3;\quad max=28/3.$
$-\infty \leq c_1 = 1 \leq 1.2;\ -\infty \leq c_2 = -5/3 \leq 4.$

$-\infty \le b_1 = 30 \le 111$; $-1.7647 \le b_2 = 3 \le +\infty$; $-5.25 \le b_3 = 15 \le +\infty$.

2) $x_1 = 15$; $x_2 = 12$; $\quad min = -9$.
$1 \le c_1 = 2 \le 4$; $1 \le c_2 = 2 \le 4$.
$4 \le b_1 = 6 \le 7$; $6 \le b_2 = 8 \le 12$; $4/3 \le b_3 = 2 \le +\infty$.

3) $x_1 = 50$; $x_2 = 63$; $\quad max = 276$.
$1.8 \le c_1 = 3 \le 4.4$; $15/11 \le c_2 = 2 \le 10/3$.
$1002 \le b_1 = 1095 \le +\infty$; $540 \le b_2 = 865 \le 918,0265$; $885 \le b_3 = 1080 \le 1730$.

4) $x_1 = 0$; $x_2 = 80$; $x_3 = 200$; $\quad max = 840$.
$-\infty \le c_1 = 1 \le 93/50$; $15/8 \le c_2 = 3 \le 5$; $9/5 \le c_3 = 3 \le 24/5$.
$1500 \le b_1 = 2000 \le 4000$; $1000 \le b_2 = 2000 \le 266\frac{2}{3}$.

7 Ikkiyoqlama masalallar

Chiziqli dasturlashning har bir masalasiga ikkiyoqlama masala deb ataluvchi masala mos qo'yiladi. Ikkiyoqlama masalaning kelib chiqishini tushuntirish uchun bir masalani ko'rib chiqayalik.

7.1 Ikkiyoqlama masala tushunchasi

Biror korxona ikki xil mahsulot ishlab chiqaradi. Birlik birinchi mahsulotni sotishdan \$3, ikkinchisidan esa, \$5 foyda keladi. Har bir mahsulotni ishlab chiqarish uchun ketadigan resurs miqdorlari va zaxira xajmlari 7.1 - jadvalda keltirilgan.

	1-mahsulot	2- mahsulot	zaxira miqdori
1-resurs	1	-	4
2-resurs	-	2	12
3-resurs	3	2	18

Jadval 7: Birlik mahsulot uchun sarflanadigan resurs miqdorlari va zaxira xajmlari

Birinchi mahsulotdan x_1 miqdorda, ikkinchidan esa x_2 miqdorda ishlab chiqariladi deb belgilasak, masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi.

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 \le 4, \\ 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18, \end{cases} \tag{20}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Boshqa 2- korxona 1- korxonaning resurslarini sotib olmoqchi. Resurslarga qanday narx qo'yish kerak?

Faraz qilaylik, resurslar birliklarining narxi mos ravishda y_1, y_2, y_3 bo'lsin. U holda $4y_1 + 12y_2 + 18y_3$ ifoda resurslarning umumiy narxini belgilaydi. Albatta, 2-korxona mumkin qadar resurslarni arzon sotib olishga harakat qiladi. Ya'ni

$$4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \to min.$$

Birinchi korxona resurslarni sotishda mahsulotni tayyorlab tushadigan foydadan kam sotmaslikka harakat qiladi. Birinchi mahsulotning birligi uchun ketadigan resurs miqdori $y_1 + 3y_2$ ga teng. Birinchi korxonaning birinchi mahsuloti birligidan keladigan foyda 3 ga teng bo'lgani uchun $y_1 + 3y_3 \geq 3$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Xuddi shuningdek, ikkinchi mahsulot uchun $2y_2+2y_3 \geq 5$ tengsizlikka ega bo'lamiz. $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$ shartlarning qo'yilishi o'z-o'zidan ravshan.

Shunday qilib, biz chiziqli dasturlash masalasiga keldik.

$$\begin{array}{l} w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} y_1 + 3y_3 \geq 3, \\ 2y_2 + 2y_3 \geq 5, \end{cases} \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0. \end{array} \tag{21}$$

(21) masala (20) ga ***simmetrik ikkiyoqlama masala*** deyiladi. (20) esa ***boshlang'ich masala*** deyiladi. Umumiy ko'rinishda ikkiyoqlama masalani keltiramiz.

Quyidagi standart ko'rinishdagi maksimallashtirish masalasi uchun

$$\begin{array}{l} z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \max \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \\ x_j \geq 0,\ (j = 1, 2, ..., n) \end{array} \tag{22}$$

ikkiyoqlama masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{array}{l} w = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \rightarrow \min \\ \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases} \\ y_i \geq 0,\ (i = 1, 2, ..., m) \end{array} \tag{23}$$

$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m$ resurs narxlarini ***oshkormas***, ***ikkiyoqlama narxlar*** deyiladi. Boshlang'ich masala optimal rejani aniqlash bo'lsa, ikkiyoqlama masalada resurslarning optimal narxini shunday topish kerakki, unda resurslarning umumiy qiymati minimal bo'lib, birlik mahsulot ishlab chiqarishdagi xarajatlar birlik mahsulot narxidan kam bo'lmasligi lozim.

O'zaro simmetrik ikkiyoqlama bo'lgan (22) va (23) masalalar quyidagi xossalarga ega:

1. Ikkiyoqlama masalalarning birida maqsad funksiyasining maksimumi izlansa, unga ikkiyoqlama bo'lgan masalada maqsad funksiyasining minimumi izlanadi.

2. Boshlang'ich masaladagi sistema shartlarini ifodalovchi matritsa koeffitsiyentlarini transponirlash yordamida ikkiyoqlama masalaning koeffitsiyentlari hosil qilinadi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Ikkiyoqlama masalaning o'zgaruvchilar soni boshlang'ich masalaning shartlar soniga teng va aksincha.

4. Ikkiyoqlama masala maqsad fuinksiyasining koeffitsiyentlari boshlang'ich masala shartlar o'ng tomonlaridan iborat va aksincha.

5. Boshlang'ich va ikkiyoqlama masalalar shartlaridagi tengsizlik belgilari qarama-qarshidir. Maksimallashtirish masalasida barcha shartlardagi tengsizlik belgisi «$\leq$» ko'rinishda bo'lsa, minimallashtirish masalasida esa «$\geq$» ko'rinishga egadir.

Ikkiyoqlama masala uchun tuzilgan ikkiyoqlama masala boshlang'ich masaladan iborat bo'ladi. Shuning uchun qaysi masalani boshlang'ich deb olishning ahamiyati yo'q. Shu ma'noda bunday masalalarni ***o'zaro juft ikkiyoqlama masalalar*** deyiladi.

Berilgan masalaga ikkiyoqlama masalani tuzishga oid misollar ko'rib chiqamiz.

1-Misol. Quyidagi masalaning ikkiyoqlama masalasini quramiz.

$$
\begin{aligned}
& z = -x_1 + 2x_2 \to \max \\
& \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \end{cases} \\
& \ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Boshlang'ich masala maksimallashtirish bo'lgani uchun, barcha shartlardagi tengsizliklarni «$\leq$» ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun birinchi va to'rtinchi tengsizliklarni (-1) ga ko'paytiramiz.

$$
\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ -x_1 - x_2 \leq -5, \end{cases}
$$

Endi ikkiyoqlama masalani tuzish mumkin bo'ladi.

$$
\begin{aligned}
& w = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min \\
& \begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2, \end{cases} \\
& y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}
\tag{25}
$$

(25) masala (24) ga ikkiyoqlama masala bo'ladi.

2-misol. Agar shartlar ichida «$=$» belgisi qatnashgani mavjud bo'lsa, bu shart ekvivalent bo'lgan ikki «$\leq$» va «$\geq$» shartlar bilan almashtiriladi. Masalan, quyidagi masalaga

$$
\begin{aligned}
& w = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \min \\
& \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10, \end{cases} \\
& \ x_1, x_2, x_3 \geq 0,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

ikkiyoqlama masala tuzish uchun uchinchi shartni unga ekvivalent bo'lgan ikki shart bilan almashtiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 10, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 10, \\ -x_1 - x_2 - x_3 \geq -10. \end{cases}$$

Demak ikkiyoqlama masala quyidagicha bo'ladi.

$$z = 2y_1 + 12y_2 + 10y_3 - 10y_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 1, \\ -y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \leq 3, \\ 4y_1 + 5y_2 + y_3 - y_4 \leq 5, \end{cases}$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0.$$

Masalaga diqqat bilan qarasak, y_3 va y_4 o'zgaruvchilar maqsad funksiyasi va uchala shartda faqat $y_3 - y_4$ ko'rinishda qatnashmoqda. Shuning uchun yangi y_3' o'zgaruvchini $y_3' = y_3 - y_4$ ko'rinishda yozib olamiz. $y_3 \geq 0$ va $y_4 \geq 0$ nomanfiylik shartlarini e'tiborga olsak, yangi y_3' o'zgaruvchimiz manfiy qiymatlar ham qabul qilishi mumkinligini tushunamiz. Barchasini e'tiborga olib ikkiyoqlama masalani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$z = 2y_1 + 12y_2 + 10y_3' \to \max$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3' \leq 1, \\ -y_1 + 4y_2 + y_3' \leq 3, \\ 4y_1 + 5y_2 + y_3' \leq 5, \end{cases} \tag{27}$$
$$y_1 \geq 0, \;\; y_2 \geq 0, y_3' - \forall.$$

Bunda «$\forall$» belgi «ixtiyoriy» ma'nosini anglatib, y_3' o'zgaruvchi ixtiyoriy ishorali qiymatlarni qabul qilishini bildiradi. (26) va (27) masalalar o'zaro simmetrik ikkiyoqlama masalalar bo'ladi.

7.2 Ikkiyoqlama masalalarga oid teoremalar

Ikkiyoqlama masalalar jufti orasidagi munosabatlar ikkiyoqlama masalalarga oid teoremalarda o'z aksini topadi.

Teorema. *Agar o'zaro ikkiyoqlama masalalardan birining optimal yechimi mavjud bo'lsa, ikkinchisining ham optimal yechimi mavjud bo'lib,*

$$z_{\max} = w_{\min}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar o'zaro ikkiyoqlama masalalarning birortasidagi maqsad funksiyasi chegaralanmagan bo'lsa, ikkinchisining joiz sohasi bo'sh to'plam bo'ladi.

Bu teorema (22) va (23) ikkiyoqlama masalalarning bir vaqtda yechimi mavjud bo'lishi yoki bo'lmasligini ko'rsatadi va optimal yechimlarning ustma-ust tushishini ko'rsatadi. Bundan shu narsa kelib chiqadiki, ikkiyoqlama masalarning birini yechish bilan ikkinchisining ham yechimini topgan bo'lamiz. Binobarin, o'zaro ikkiyoqlama masallarning qaysisini yechish oson ko'chsa, shunisini yechish maqsadga muvofiq. Masalan, (24) va (25) o'zaro ikkiyoqlama masalalarda (24) ni grafik usulda yechib, $z_{max} = 36$ ekanligini aniqlash mumkin. U holda teoremaga ko'ra (25) masalaning optimal yechimi ham $w_{min} = 36$ bo'ladi.

Bu teoremaning iqtisodiy ma'nosi shuni ko'rsatadiki, korxona uchun optimal reja bo'yicha mahsulot ishlab chiqrish yoki, resurslarni optimal narxda sotishning farqi yo'q.

Endi fikrimizni teoremaning ikkinchi qismiga qaratamiz. Quyidagi o'zaro ikkiyoqlama masalani ko'raylik:

Boshlang'ich masala:

$$z = -8y_1 + 2y_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq 1, \\ -2y_1 + y_2 \geq -1, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0.$$

Ikkiyoqlama masala:

$$w = x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0.$$

Masalani grafik yoki simpleks usulda yechishda $z_{min} = -\infty$ ekanligini ko'rish mumkin. Ikkiyoqlama masalada joiz soha bo'sh ekanligini ko'rish qiyin emas.

Izoh. Teoremaning ikkinchi bandida keltirilgan xulosaning teskarisi umuman olganda to'g'ri emas. Ya'ni, boshlang'ich masalaning joiz sohasi bo'shligidan ikkiyoqlama masala maqsad funsiyasining chegalanmaganligi kelib chiqmaydi.

Bu fikrning tasdig'ini quyidagi misolda ko'rish mumkin:

Boshlang'ich masala:

$$z = 3x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \leq 5, \\ 2x_1 \leq -7, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0.$$

Ikkiyoqlama masala:

$$w = 5y_1 - 7y_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 \geq 3, \\ -4y_1 \geq 5, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0.$$

Bu masalalarning har birining joiz sohalari bo'sh ekanligini tekshirish qiyin emas.

Quyidagi 7.2- jadvalda o'zaro ikkiyoqlama masalalar orasidagi qiyosiy munosabatlarning ro'y berish holatlari keltirilgan.

Boshlang'ich $\Rightarrow$ Ikkiyoqlama $\Downarrow$	Optimal yechim mavjud	Maqsad funksiyasi chegaralanmagan	Joiz soha bo'sh to'plam
Optimal yechim mavjud	**v**		
Maqsad funksiyasi chegaralanmagan			**v**
Joiz soha bo'sh to'plam		**v**	**v**

Jadval 8: O'zaro ikkiyoqlama masalalar orasidagi munosabatlar

O'zaro ikkiyoqlama masalalarning orasidagi munosabat ular optimal yechimlarining tengligidangina chegaralanmaydi.

O'zaro ikkiyoqlama bo'lgan 22 va 23- masalalarni qaraylik. Simpleks jadval yordamida yechishda qoldiq va ortiq o'zgaruvchilar kiritar edik. Ya'ni 22 va 23 masala shartlari quyidagi ko'rinishga keltiriladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + s'_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + s'_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + s'_m = b_m, \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m - s''_1 = c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m - s''_2 = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m - s''_n = c_n, \end{cases} \tag{29}$$

28 va 29- sistemada $s'_1, s'_2, \ldots, s'_m$ boshlang'ich masala uchun qoldiq qo'shimcha o'zgaruvchilar, $s''_1, s''_2, \ldots, s''_n$ esa ortiq qo'shimcha o'zgaruvchilardir.

O'zaro ikkiyoqlama masalalar o'zgaruvchilari orasida 7.2-jadvalda ko'rsatilgan munosabatlar mavjud. Bu munosabat orqali biz biror ikkiyoqlama masala yechimi yordamida boshqasining yechimlarini topib olamiz.

Boshlang'ich masala o'zgaruvchilari											
Asosiy						Qoldiq					
x_1	x_2	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	s''_1	s''_2	$\cdots$	s''_i	$\cdots$	s''_m
$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$
s'_1	s'_2	$\cdots$	s'_j	$\cdots$	s'_n	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m
Ortiq						Asosiy					
Ikkiyoqlama masala o'zgaruvchilari											

Jadval 9: O'zaro ikkiyoqlama masalalar o'zgaruvchilari orasidagi munosabatlar

Teorema. *Ikkiyoqlama masalaning optimal yechimlari quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi:*

$$y_i \cdot s'_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, m,$$
$$x_j \cdot s''_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Bu teoremadan quyidagi xulosalarni qilish mumkin.

1. i-resursning optimal narxi nolga teng bo'lmasa ($y_i^* > 0$), optimal rejada resurs to'la ishlatiladi ($s'_i = 0$).

2. Agar optimal rejada resurs to'la ishlatilmasa, ($s'_i > 0$), u holda uning bahosi nolga teng ($y_i^* = 0$).

3. Agar j-mahsulot optimal rejaga kirsa ($x_j^* > 0$), u holda uning resursdagi bahosi zararsizdir ($s''_j = 0$).

4. Agar j-mahsulot optimal resurs bahosida zararli bo'lsa ($s''_j > 0$), u holda u optimal rejaga kirmaydi ($x_j^* = 0$).

B	c_b	x_1	x_2	s'_1	s'_2	s'_3	b
		3	5	0	0	0	
s'_1	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
x_2	5	0	1	0	1/2	0	6
x_1	3	1	0	0	-1/3	1/3	2
z_j		3	5	0	3/2	1	**36**
c_j-z_j		0	0	0	-3/2	-1	

Rasm 84: Oxirgi simpleks jadval

84- rasmdagi jadvalga ko'ra yechim $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $s'_1 = 2$, $s'_2 = 0$ va $s'_3 = 0$ bo'ladi.

(21) ikkiyoqlama masalaning oxirgi simpleks jadvali 85- rasmdagi jadvalda keltirilgan (masala maksimallashtirishga keltirib yechilgan va sun'iy o'zgaruvchilar tushirib qoldirilgan).

B	c_b	y_1	y_2	y_3	s''_2	s''_3	b
		-4	-12	-18	0	0	
y_3	-18	1/3	0	1	-1/3	0	1
y_2	-12	-1/3	1	0	1/3	-1/2	3/2
z_j		-2	-12	-18	2	6	-36
c_j-z_j		-2	0	0	-2	-6	

Rasm 85: Oxirgi simpleks jadval

85- rasmdagi jadvalga ko'ra ikkiyoqlama masalaning yechimlari: $y_1 = 0$, $y_2 = 3/2$, $y_3 = 1$, s''_1 va $s''_2 = 0$ bo'ladi. Biz ikkiyoqlama masalaning yechimlarini boshlang'ich masalaning oxirgi jadvalidan olishimiz mumkin. Buning uchun o'zaro ikkiyoqlama masalalarning o'zgaruvchilari orasidagi munosabatdan, 85- jadvalning oxirgi satrini -1 ga ko'paytirsak, ikkiyoqlama masalaning yechimlarini topgan bo'lamiz.

x_1	x_2	s'_1	s'_2	s'_3
s''_1	s''_2	y_1	y_2	y_3

Demak, o'zaro ikkiyoqlama masalaning birortasini simpleks usulda yechib, ikkinchi masalaning yechimini topish mumkin bo'lar ekan.

7.3 Kanonik ko'rinishda berilgan masala uchun ikkiyoqlama masala tuzish tartibi

Ushbu bo'limda standart ko'rinishda berilgan masala uchun ikkiyoqlama tuzish qoidalarini keltirib o'tamiz:

1. Boshlang'ich masalaning cheklanishlar sistemasida barcha tengsizliklar bir xil ko'rinishga olib kelinadi: agar dastlabki masalada maqsad funksiyasi maksimallashtirilayotgan bo'lsa, shartlar «($\leq$) kichik yoki teng» belgisi bilan yoziladi, agar minimallashtirilayotgan bo'lsa - «($\geq$) katta yoki teng» belgisi bilan

yozib olinadi. Tengsizlik ishorasini kerakligiga almashtirish uchun uni (-1) ga ko'paytiriladi.

2. Cheklanishlar sistemasi kerakli ko'rinishga keltililganidan so'ng dastlabki masala uchun A koeffitsiyentlar matritsasini tuzib olinadi. A matritsaga nisbatan transponirlangan A^T matritsa hosil qilinadi.

3. Ikkiyoqlama masala uchun shartlar sistemasini transponirlangan A^T matritsa koeffitsiyentlaridan foydalanib tengsizlik ishorasi 1-bandda hosil qilingan masala shartlariga teskari holda yoziladi. Bunda shartlarning o'ng tomonlari sifatida dastlabki masalaning maqsad funksiyasi koeffitsyientlari olinadi. Ikkiyoqlama masalaning shartlari soni dastlabki masalaning o'zgaruvchilari soniga teng bo'ladi.

4. 1-bandda hosil qilingan masalaning cheklanishlar sistemasining o'ng tomonlari ikkiyoqlama masala o'zgaruvchilari uchun koeffitsiyentlar sifatida qabul qilinib, ikkilamchi masalaning maqsad funksiyasi yozib olinadi.Ikkiyoqlama masalaning o'zgaruvchilari soni dastlabki masalaning shartlari soniga teng bo'ladi.

5. Ikkiyoqlama masalani tuzishda maqsad funksiyani optimallastirish xarakteri dastlabki masalaga teskari olinadi, ya'ni maqsad funksiyasi minimallashtiriladi, agar dastlabki masalasi maksimallashtirish bo'lsa va aksincha.

6. Ikki yoqlama masala o'zgaruvchilari uchun nomanfiylik shartlari yoziladi.

1-misol. Berilgan masalaga ikkiyoqlama masala tuzing:

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Yechish. Dastlabki masala shartlari sistemasida uchinchi tengsizlik ikkiyoqlama masala tuzish qoidalarining 1-bandini qondirmaydi. Shuning uchun uni minus birga ko'paytiramiz:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 - x_2 \le -1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Dastlabki masala shartlari sistemasidan foydalanib koeffitsiyentlar matritsasi A ni tuzib olamiz.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad A^T = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ikkiyoqlama masalani tuzishni osonlashtirish uchun kengaytirilgan B matritsadan foydalanish yaxshiroqdir, B matrisaga boshlang'ich masalani cheklanishlar sistemasining koeffitsiyentlar bilan bir qatorda, maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari va shartlarning o'ng tomonlari koeffitsiyentlarni yozamiz, buning uchun chiziq bilan ajratilgan qo'shimcha ustun va satrdan foydalanamiz. B matritsasi transponirlash natijasida B^T matritsa hosil qilinadi:

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ \mathit{3} & \mathit{1} & \boldsymbol{F} \end{array}\right) \qquad B^T = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ \mathit{2} & \mathit{2} & \mathit{-1} & \mathit{5} & \boldsymbol{Z} \end{array}\right)$$

Dastlabki va ikki yoqlama masala uchun maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari mos ravishda B va B^T matritsalarning oxirgi satrida va shartlarning o'ng tomon koeffitsiyentlari oxirgi ustunda joylashgan. B^T matritsadan foydalanib ikkiyoqlama masalani yozib olamiz:

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max \qquad Z = 2y_1 + 2y_2 - y_3 + 5y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \ge 3 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \ge 1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \qquad y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0$$

7.4 Umumiy ko'rinishda berilgan masala uchun ikkiyoqlama masala tuzish tartibi

Keling, endi dastlabki masala umumiy shaklda berilgan holda (cheklanishlar sistemasi turli belgilar bilan berilgan tengsizliklar va tenglamalardan iborat, o'zgaruvchining nomanfiylik shartlari majburiy emas) ikkiyoqlama masalani tuzish tartibini ko'rib chiqaylik. Bunday holat uchun qoidalar o'rinlidir:

1. Dastlabki masala shartlari o'ng tomon koeffitsiyentlari - ikkiyoqlama masalada maqsad funksiyasining koeffitsiyentlari.

2. Dastlabki masaladagi maqsad funksiyasining koeffitsiyentlari ikkiyoqlama masala shartlari o'ng tomon koeffitsiyentlaridir.

3. Dastlabki masalaning kengaytirilgan matritsasining transponirlangani - ikkiyoqlama masalaning kengaytirilgan matritsasi.

4. Dastlabki masalada j- noma'lum o'zgaruvchi nomanfiy bo'lsa, ikkiyoqlama masalaning j- sharti «$\ge$» ko'rinishidagi tengsizlikdan iborat.

5. Dastlabki masalada j- noma'lum o'zgaruvchi ishorasiga shart qo'yilmagan bo'lsa, ikkiyoqlama masalaning j- sharti tenglamadan iborat.

6. Dastlabki masalada j- noma'lum o'zgaruvchi nomusbat bo'lsa, ikkiyoqlama masalaning j- sharti «$\le$» ko'rinishidagi tengsizlikdan iborat.

7. Dastlabki masalada i- shart (cheklanish) «$\le$» ko'rinishidagi tengsizlikdan iborat bo'lsa, ikkiyoqlama masalaning i - noma'lum o'zgaruvchisi nomanfiy bo'ladi.

8. Dastlabki masalada i- shart (cheklanish) «$\ge$» ko'rinishidagi tengsizlikdan iborat bo'lsa, ikkiyoqlama masalaning i - noma'lum o'zgaruvchisi nomusbat bo'ladi.

9. Dastlabki masalada i- shart (cheklanish) tenglama ko'rinishida bo'lsa, ikkiyoqlama masalaning i- noma'lum o'zgaruvchisi ishorasiga shart qo'yilmaydi.

2-misol. Berilgan masalaga ikkiyoqlama masala tuzing:

$$F = 5x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 6 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 - \forall,\ x_3 \leq 0$$

Yechish. Ko'rib turganingizdek, dastlabki masala umumiy shaklda berilgan. Buni ikkiyoqlama masala tuzishda shartlar belgilanganda tengsizlik ishoralarini aniqlaganda inobatga olamiz. Ishni dastlabki masala uchun koeffitsiyentlarning kengaytirilgan matritsasi B ni tuzishdan boshlaymiz va uni transponirlab B^T matritsasini tuzamiz:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & F \end{array}\right) \qquad B^T = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 6 & Z \end{array}\right)$$

B^T matritsadan foydalanib ikkiyoqlama masalani yozib olamiz:

$$F = 5x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 6 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 - \forall,\ x_3 \leq 0$$

$$Z = y_1 + 2y_2 - y_3 + 6y_4 \to \max$$
$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \leq 5 \\ 3y_1 - y_2 + 3y_3 - y_4 = 4 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 \geq 1 \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 - \forall,\ y_4 \leq 0$$

7.5 Ikkiyoqlama masalaning iqtisodiy talqini

Ikkiyoqlama masalaning iqtisoqiy talqinini yuqorida 3.1- bo'limda ko'rib chiqilgqan «Chinor» mebel sexi uchun optimal ishlab chiqarish rejasini tuzishga bagishlangan misolda qarab chiqamiz. Masala shartini eslatib o'tamiz:

Sex ikki turdagi mahsulot ishlab chiqaradi: shkaf va televizor uchun tumba. Bir dona shkaf yasash uchun 3,5 m. standart DSP, 1 m. standart shisha va bir ishchining bir kunlik mehnati sarflanar ekan. Bitta tumba uchun 1 m. DSP, 2 m. shisha va bir ishchining bir kunlik mehnati sarflanar ekan. Bir dona shkafni sotishdan tushadigan foyda 200 \$, tumbadan esa – 100 \$ ekan.Sexning moddiy va mehnat resurslari cheklangan bo'lib,sexda jami 150 ta ishchi ishlar ekan. DSP kunlik zaxirasi 350 m., shishaning zaxirasi esa 240 m.ni tashkil etar ekan.Sex maksimal foyda olish uchun bir kunda qancha shkaf va tumba ishlab chiqarishi kerak?

Masalaning matematik modelini yozishdan avval ayrim belgilashlarni kiritib olgan edik. Sexning kundalik ishlab chiqaradigan shkaflari soni x_1 va tumbalar soni x_2 bo'lsin. Kundalik ishlab chiqilgan jami mahsulotdan tushadigan foyda F bo'lsin.

Masalaning matematik modeli:

$$F = 200x_1 + 100x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3,5x_1 + x_2 \le 350, \\ x_1 + 2x_2 \le 240, \\ x_1 + x_2 \le 150, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Faraz qilaylik sex rahbari mahsulot ishlab chiqishdan voz kechib, xom ashyo zaxirasini xaridorga sotmoqchi. Sotganda xaridor birlik resurslarga shunday baho qo'yishi kerakki, bunda ishlab chiqaruvchini sotishdan oladigan foydasi mebel ishlab chiqarishdan oladugan foydasidan kam bo'lmasin. Tabiiyki, xaridor uchun jami xarid narxi imkon qadar arzon bo'lishi kerak. y_1 -sifatida 1 metr DSP, y_2 -sifatida 1 metr shisha va y_3 -sifatida bir ishchi kuchi narxini belgilab olaylik. DSP zaxirasi 350 m., shisha zaxirasi - 240 m. va ishchi kuchi zaxirasi 150 ekanligini inobatga olsak, jami xarid narxi

$$C = 350x_1 + 240x_2 + 150x_3$$

bo'lib, xaridor uchun u minimal bo'lishi kerak.

Bir dona shkaf yasash uchun 3,5 m. standart DSP, 1 m. standart shisha va bir ishchining bir kunlik mehnati sarflanishi va shkafni sotishdan tushadigan foyda 200 $ ekanligini e'tiborga olib, quyidagi shartni yozib olamiz:

$$3.5 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 \ge 200.$$

Bu shartning iqtisodiy ma'nosi quyidagicha: Bitta shkaf yasash uchun ketadigan ishlab chiqarish resurslarini sotishdan keladigan foyda shkaf sotishdan keladigan foydadan kam bo'lmasin.

Xuddi shu kabi, bitta tumba uchun 1 m. DSP, 2 m. shisha va bir ishchining bir kunlik mehnati sarflanishi va tumbadan tushadigan foyda 100$ ekanligini e'tiborga olib ikkinchi shartni yozib olamiz:

$$1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 \ge 100.$$

Va nihoyat, y_1, y_2 va y_3 resurslarning narxi ekanligi va narx manfiy bo'lmasligini e'tiborga olsak, $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$ va $y_3 \ge 0$ shartlarni yozib olamiz. Shunday qilib, xaridorga nisbatan eng arzon narx belgilash masalasining matematik modeli quyidagicha ifodalanadi:

$$C = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3.5y_1 + y_2 + y_3 \ge 200, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 100, \\ y_1 \ge 0, \ y_2 \ge 0, \ y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Dastlabki masala	Ikkiyoqlama masala
$F = 200x_1 + 100x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3,5x_1 + x_2 \le 350, \\ x_1 + 2x_2 \le 240, \\ x_1 + x_2 \le 150, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$	$C = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 \to \min,$ $\begin{cases} 3.5y_1 + y_2 + y_3 \ge 200, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 100, \\ y_1 \ge 0, \ y_2 \ge 0, \ y_3 \ge 0. \end{cases}$

Ikkiyoqlama masalaning iqtisoqiy talqiniga yana bir amaliy misol ko'rib chiqaylik.

L gektar maydoni, F miqdorda o'g'iti va P miqdorda pestitsidi bor fermer bug'doy va arpa yetishtirmoqchi. Birlik maydonda bug'doy yetishtirish uchun fermer f_1 miqdorda o'g'it va p_1 miqdorda pestitsid ishlatishi lozim. Arpa uchun bu ko'rsatkichlar mos ravishda f_2 va p_2 ga teng. Birlik maydonda yetishtirilgan bug'doy va arpa narxi mos ravishda S_1 va S_2 ga teng bo'lsa, maksimal daromad olish uchun fermer qancha maydonda bu'qdoy (x_1) va qancha maydonda arpa (x_2) yetishtirishi kerak?

Masalaning matematik modelini yozib olaylik.

Maqsad – bug'doy va arpa yetishtirishdan daromadni maksimal darajada oshirish:

$$F = S_1x_1 + S_2x_2 \to max$$

Fermar yer maydoni L gektar bilan chegaralangan:

$$x_1 + x_2 \leq L$$

Fermar zaxirasidagi o'g'it hajmi F bilan chegaralangan (imkoniyatidan ortiq ishlata olmaydi):

$$f_1x_1 + f_2x_2 \leq F$$

Fermar zaxirasidagi pestitsid hajmi P bilan chegaralangan (imkoniyatidan ortiq ishlata olmaydi:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq P$$

Foydalanadigan maydonlar hajmi manfiy bo'la olmaydi:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Ikkiyoqlama masala tuzamiz. Rejalashtirish guruhi mahsulot ishlab chiqarish toliq qiymatini minimallashtirish masalasini tahlil qilmoqa. y_L -bir gektar yerning (arenda) narxi, y_F - birlik miqdorda o'g'it narxi, y_P - birlik miqdorda pestitsid narxi bo'lsin.

Masalaning matematik modelini yozib olaylik.

Maqsad - mahsulot ishlab chiqarish to'liq qiymatini minimallashtirish:

$$C = Ly_L + Fy_f + Py_P \to \min$$

Fermer birlik maydondan olinadigan bug'doy hajmi uchun kamida S_1 miqdorda daromad qilishi kerak:

$$y_L + f_1y_F + p_1y_P \geq S_1$$

Fermer birlik maydondan olinadigan arpa hajmi uchun kamida S_2 miqdorda daromad qilishi kerak:

$$y_L + f_2y_F + p_2y_P \geq S_2$$

Narxlar manfiy bo'la olmaydi:

$$y_L \geq 0, \; y_F \geq 0, \; y_P \geq 0$$

Dastlabki masala	Ikkiyoqlama masala:
$F = S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq L, \\ f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 \leq F, \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \leq P, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$	$C = L \cdot y_L + F \cdot y_F + P \cdot y_P \to \min,$ $\begin{cases} y_L + f_1 \cdot y_F + p_1 \cdot y_P \geq S_1, \\ y_L + f_2 \cdot y_F + p_2 \cdot y_P \geq S_2, \\ y_L \geq 0, \; y_F \geq 0, \; y_P \geq 0. \end{cases}$

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

1. Quyidagi minimizatsiya masalalari uchun ikkiyoqlama masalani keltiring.

1) $\begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 \to min, \\ 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \end{array}$

2) $\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \to \min, \\ 5x_1 + x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$

3) $\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 + x_3 \to \min, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 23, \\ x_1 + x_3 \geq 10, \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 40, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$

4) $\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 10x_3 \to \min, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 6x_1 + x_2 + x_3 \geq 9, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$

5) $\begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 \to min, \\ 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \end{array}$

6) $\begin{array}{l} x_1 + 10x_2 - x_3 \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$

2. Quyida minimizatsiya masalalari keltirilgan. Quyidagilarni bajaring:
a) masalani grafik usulda yeching;
b) berilgan masalaga ikkiyoqlama masalani tuzing;
c) ikkiyoqlama masalani grafik usulda yeching.

1) $\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 \to min, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1, \;\; x_2 \geq 0. \end{array}$

2) $\begin{array}{l} 2x_1 + 6x_2 \to \min, \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 0, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1, \;\; x_2 \geq 0. \end{array}$

3) $\begin{array}{l} 6x_1 + 3x_2 \to \min, \\ 4x_1 + 1x_2 \geq 4, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$

4) $\begin{array}{l} x_1 + 6x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 15, \\ -x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$

5) $\begin{array}{l} x_2 \to min, \\ x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ -6x_1 + 5x_2 \geq 3, \\ x_1, \;\; x_2 \geq 0. \end{array}$

6) $\begin{array}{l} 3x_1 + 8x_2 \to \min, \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$

7) $\begin{array}{l} x_1 + x_2 \to min, \\ 5x_1 + x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1, \;\; x_2 \geq 0. \end{array}$

8) $\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 \to \min, \\ 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ -4x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$

3. Ikkiyoqlama masalalarni tuzish qoidalaridan va chiziqli dasturlash masalasini grafik usulida yechishdan foydalanib, quyidagi masalalarning yechimlarini toping.

1) $$\begin{aligned}&3x_1+11x_2+5x_3+x_4\to\min\\&-3x_1+x_2+3x_3-x_4\ge 4,\\&3x_1+3x_2-5x_3-3x_4\ge 7,\\&x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4.\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}&3x_1+11x_2+10x_3+x_4\to\min,\\&-3x_1+x_2+4x_3-x_4\ge 1,\\&3x_1+3x_2-5x_3-3x_4\ge 7,\\&x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4.\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}&6x_1+11x_2+5x_3+x_4\to\min,\\&-3x_1+x_2+3x_3-x_4\ge 1,\\&4x_1+3x_2-5x_3-3x_4\ge 7,\\&x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4.\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}&6x_1+11x_2+10x_3+x_4\to\min,\\&-3x_1+x_2+4x_3-x_4\ge 3,\\&4x_1+3x_2-5x_3-3x_4\ge 7,\\&x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4.\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}&x_1+x_2+2x_3+8x_4\to\min,\\&2x_1-x_2+3x_3-2x_4=3,\\&-x_1+3x_2-4x_3+4x_4=1,\\&x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4.\end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned}&4x_1-3x_2-6x_3-x_4\to\max,\\&-2x_1-x_2+5x_3+2x_4\ge 4,\\&-3x_1+x_2-x_3-x_4\ge 1,\\&x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4.\end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned}&7x_1+x_3-4x_4\to\max,\\&x_1-x_2+2x_3-x_4\ge 6,\\&2x_1+x_2-x_3\ge -1,\\&x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4.\end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned}&x_1+x_2+x_3\to\max,\\&x_1+2x_2+3x_3-2x_4-x_5\ge 6,\\&x_1-x_2-2x_3+x_4+x_5\ge 5,\\&x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4,5.\end{aligned}$$

4. Quyidagi masalalarga ikkiyoqlama masala tuzib, ikkiyoqlama masalani simpleks usulda yeching.

1) $$\begin{aligned}&8x_1+4x_2+6x_3\to\min,\\&3x_1+2x_2+x_3\ge 6,\\&4x_1+x_2+3x_3\ge 7,\\&2x_1+x_2+4x_3\ge 8,\\&x_i\ge 0,\ i=1,2,3.\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}&8x_1+16x_2+18x_3\to\min,\\&2x_1+2x_2-2x_3\ge 4,\\&-4x_1+3x_2-x_3\ge 1,\\&x_1-x_2+3x_3\ge 8,\\&x_i\ge 0,\ i=1,2,3.\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}&6x_1+2x_2+3x_3\to\min,\\&3x_1+2x_2+x_3\ge 28,\\&6x_1+x_3\ge 24,\\&3x_1+x_2+2x_3\ge 40,\\&x_i\ge 0,\ i=1,2,3.\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}&42x_1+5x_2+17x_3\to\min,\\&3x_1-x_2+7x_3\ge 5,\\&-3x_1-x_2+x_3\ge 8,\\&6x_1+x_2+x_3\ge 16,\\&x_i\ge 0,\ i=1,2,3.\end{aligned}$$

5. Kompaniya to‘rt bo‘linmada kola va limonli ichimliklarni idishlarga joylaydi. Bo‘limlarning bir kunlik quvvatlari quyidagi jadvalda (100 ta yashiklarda) keltirilgan.

Mahsulot turlari	Bo‘limlar			
	I	II	III	IV
Kola ichimligi				
Limonli ichimlik	7	3	4	1

Kompaniya kamida 6300 yashik kola va 2900 yashik limon ichimligiga ehtiyoj borligini aniqladai. Kunlik xarajatlar: I bo‘linma uchun \$500, II bo‘linma uchun \$200, III bo‘linma uchun \$300 va IV bo‘linma uchun \$100. Kompaniya eng kam xarajat qilib, keltirilgan miqdordagi ichimliklarni idishlarga joylashtirishning matematik modelini quring. Unga ikkiyoqlama masala tuzib, simpleks usulida yeching.

6. Firmaga fosfor miqdori 0,03% dan oshmaydigan va begona aralashmalar miqdori 3,25% dan oshmaydigan ko‘mir kerak. Xarakteristikalari jadvalda ko‘rsatilgan ko‘mir navlilaridan qanchadan olinganda (1 tonna ko‘mir uchun) eng kam xarajat qilinadi va yuqoridagi talab qondiriladi? Masalaning matematik modelini quring.Unga ikkiyoqlama masala tuzib, simpleks usulida yeching.

Ko‘mir navlii	Fosfor miqdori %	Begona aralashmalar miqdori, %	Narxi, $
A	0,06	2	30
B	0,04	4	30
C	0,02	3	45

7. Polni tozalash vositasida kami bilan 60 birlik tozalash xususiyati va kamida 60 birlik dezinfeksiya xususiyati bo‘lishi kerak. Shu bilan birga teriga noxush ta’siri minimal bo‘lishi kerak. Pol tozalash vositasining xarakteristikalari jadvalda keltirilgan uch turdagi tozalash moddalarining aralashmasidan hosil qilinadi.

Tozalovchi moddalar	Tozalash xususiyati	Dezinfeksiyalash xususiyati	Teriga nojo’ya ta’siri.
A	90	30	70
B	65	85	50
C	45	70	10

Optimal aralashmani topishning matematik modelini quring. Unga ikkiyoqlama masala tuzib, simpleks usulida yeching.

8. Kompaniyaning ikki zavodi bo‘lib, ularda uch xil navli temir ishlab chiqariladi. 1-zavodning bir kunlik ishlashi $70000 ga, 2-zavodniki esa $60000 ga tushadi. Kuniga 1-zavod 400 tonna 1-nav, 500 tonna 2-nav va 450 tonna 3-nav temir ishlab chiqaradi. Kuniga 2-zavod 350 tonna 1-nav, 600 tonna 2-nav va 400 tonna 3-nav temir ishlab chiqaradi. Kompaniya 100000 tonna 1-nav 150000 tonna 2-nav va 124500 tonna 3-nav temirga buyurtma olgan. Buyurtmani bajarish uchun har bir zavod necha kun ishlaganda kompaniya eng kam xarajat sarf qiladi? Masalaning matematik modelini quring.Unga ikkiyoqlama masala tuzib, simpleks usulida yeching.

9. Tarkibida oqsil va uglevodorodlar bo‘lgan ikki xil parhezli ichimlik suvi iste’mol qilinadi. Birinchi ichimlikning har litrida 1 birlik oqsil moddasi va 3 birlik uglevodorod moddasi bor. Ikkinchi ichimlikning har litrida esa 2 birlik oqsil moddasi 2 birlik uglevodorod moddasi bor. Sportchi uchun 3 birlik oqsil moddasi va 5 birlik uglevodorod moddasi bor ichimlik iste’mol qilish talab qilinadi. Keltirilgan talablarni qondirish uchun har bir ichimliklardan qanchadan olinganda xarajat minimal bo‘ladi?

   a) birinchi ichimlikning har litri $2, ikkinchisiniki esa $3;

   b) birinchi ichimlikning har litri $4, ikkinchisiniki esa $2;

   c) birinchi ichimlikning har litri $1, ikkinchisiniki esa $3;

   d) birinchi ichimlikning har litri $1, ikkinchisiniki esa $2.

10. 7. Sportchi ikki xil parhezli ichimlik suvi iste’mol qilinadi. Ichimlik xossalari jadvalda keltirilgan.

Ichimlik	Oqsil	Uglevodorod	Vitamin
I	4	2	1
II	1	5	1

Sportchi uchun 4 birlik oqsil moddasi, 10 birlik uglevodorod moddasi va 3 birlik vitaminli ichimlik iste'mol qilish talab qilinadi. Keltirilgan talablarni qondirish uchun har bir ichimliklardan qanchadan olinganda xarajat minimal bo‘ladi?

a) birinchi ichimlikning har litri \$5, ikkinchisiniki esa \$8;

b) birinchi ichimlikning har litri \$7, ikkinchisiniki esa \$4;

c) birinchi ichimlikning har litri \$1, ikkinchisiniki esa \$5;

d) birinchi ichimlikning har litri \$8, ikkinchisiniki esa \$1.

11. Kompaniyaning uch zavodi bo‘lib, bunda uch turdagi mahsulot ishlab chiqariladi. Zavodlarning kunlik quvvatlari jadvalda keltirilgan (ming birlikda).

	1-mahsulot	2-mahsulot	3-mahsulot
1-zavod	8	4	8
2-zavod	6	6	3
3-zavod	12	4	8

1-mahsulotga 300000, 2-mahsulotga 172000, 3-mahsulotga esa, 249500 dona talab tushgan. Zavodlarning bir kun ishlash jarayonidagi xarajati mos ravishda \$55000, \$60000 va \$60000 turadi. Talabni qondirish va xarajatni minimallashtirish uchun har bir zavodni necha kun ishlatish kerak?

Mustaqil ish topshiriqlari javoblari

1. Quyidagi minimizatsiya masalalari uchun ikkiyoqlama masalani keltiring.

1) $$\begin{aligned}&4y_1+4y_2\to\max,\\&2y_1+y_2\le 3,\\&y_1+2y_2\le 3,\\&y_1,y_2\ge 0.\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}&9y_1+10y_2\to\max,\\&5y_1+2y_2\le 2,\\&y_1+2y_2\le 1,\\&y_1,y_2\ge 0.\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}&23y_1+10y_2+40y_3\to\max,\\&3y_1+y_2+8y_3\le 4,\\&2y_1+y_3\le 1,\\&y_1+y_2+2y_3\le 1,\\&y_1,y_2,y_3\ge 0.\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}&6y_1+9y_2\to\max,\\&2y_1+6y_2\le 1,\\&y_1+y_2\le 4,\\&3y_1+y_2\le 10,\\&y_1,y_2\ge 0.\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}&-y_1-2y_2\to\min,\\&-y_1-y_2\ge 1,\\&-y_1+y_2\ge 10,\\&y_1-y_2\le 1,\\&y_1,y_2\ge 0.\end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned}&y_1+2y_2-2y_3\to\max,\\&y_1+y_2-y_3\le 1,\\&y_1-y_2+y_3\le 2,\\&-4y_1\le 3,\\&y_1,y_2,y_3\ge 0.\end{aligned}$$

2. Minimizatsiya masalalari keltirilgan. Quyidagilarni bajaring: a) masalani grafik usulda yeching; b) berilgan masalaga ikkiyoqlama masalani tuzing; c) ikkiyoqlama masalani grafik usulda yeching.

1) $x_1 = 4/3,\ x_2 = 5/3, \quad min = 8.$
2) $x_1 = 3k,\ x_2 = 2k + 3(1-k),$ $\ 0 \le k \le 1, \quad min = 18.$
3) $x_1 = 1/2,\ x_2 = 2, \quad min = 9.$
4) $x_1 = 0,\ x_2 = 3, \quad min = 18.$
5) $x_1 = 1,\ x_2 = 9/5, \quad min = 9/5.$
6) $x_1 = 10/3,\ x_2 = 1/3, \quad min = 38/3.$
7) $x_1 = 5 - 4k,\ x_2 = 4k,$ $\ 0 \le k \le 1, \quad min = 5.$
8) $x_1 = 1,\ x_2 = 3, \quad min = 8.$

3. Ikkiyoqlama masalalarni tuzish qoidalaridan va chiziqli dasturlash masalasini grafik usulida yechishdan foydalanib, quyidagi masalalarning yechimlarini toping.

1) $x_1 = 0,\ x_2 = 41/14,\ x_3 = 5/14,\ x_4 = 0, \quad min = 34.$
2) $x_1 = 1/3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0, \quad min = 23.$
3) $x_1 = 4/13,\ x_2 = 25/13,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0, \quad min = 23.$
4) $x_1 = 0,\ x_2 = 43/17,\ x_3 = 2/17,\ x_4 = 0, \quad min = 29.$
5) $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0, \quad min = 3.$
6) Maqsad funksiyasi chegaralanmagan.
7) $x_1 = 4/5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 13/5,\ x_4 = 0, \quad max = 41/5.$
8) $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 11,\ x_4 = 27, \quad max = 38.$

4. Quyidagi masalalarga ikkiyoqlama masala tuzib, ikkiyoqlama masalani simpleks usulda yeching.

1) $x_1 = 1/5,\ x_2 = 2,\ x_3 = 7/5, \quad min = 18.$
2) $x_1 = 5/3,\ x_2 = 11/3,\ x_3 = 10/3, \quad min = 132.$
3) $x_1 = 4/3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 16, \quad min = 64.$
4) $x_1 = 8/9,\ x_2 = 0,\ 32/3, \quad min = 656/3.$

5. $x_1 = 0,\ x_2 = 2900/3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0, \quad min = 580000/3.$

6. $x_1 = 1/12,\ x_2 = 1/3,\ x_3 = 7/12, \quad min = 155/4.$

7. $x_1 = 4/3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 16, \quad min = 64.$

8. $x_1 = 0,\ x_2 = 311\frac{1}{4}, \quad min = 1.8675 \cdot 10^7.$

9. a) Birinchi ichimlikdan 1 litr, 2-ichimlikdan ham 1 litr; $min = 5.$
b) Birinchi ichimlikdan 0 litr, 2-ichimlikdan 1,5 litr; $min = 5.$
c) Birinchi ichimlikdan 3 litr, 2-ichimlikdan ham 0 litr; $min = 3.$
d) Masala chekchiz ko‘p yechimga ega: birinchi ichmlikdan $k + 3(1-k)$ litr, ikkinchidan esa k litr; $min = 3.$

10. a) Birinchi ichimlikdan 3 litr, 2-ichimlikdan 0 litr; $min = 15.$
b) Birinchi ichimlikdan $1/3$ litr, 2-ichimlikdan $1/3$ litr; $min = 13.$
c) Birinchi ichimlikdan 3 litr, 2-ichimlikdan ham 0 litr; $min = 3.$
d) Birinchi ichmlikdan 0 litr, ikkinchidan esa 4 litr; $min = 4.$

11. Birinchi zavod $22333\frac{1}{3}$ kun, ikkinchisi $10555\frac{5}{9}$ kun va uchinchisi $4833\frac{1}{3}$ kun ishlaganda firma eng kam xarajat qiladi va u $6455/3 \cdot 10^6$ ga teng.

8 Butun sonli chiziqli dasturlash

8.1 Masalaning qo'yilishi

Chiziqli dasturlashga tegishli ko'pgina iqtisodiy masalalarda uning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra yechim butun sonlardan iborat bo'lishini taqozo qiladi. Masalan, ishlab chiqarish rejasini optimallashda ishlab chiqariladigan mahsulotlar turi bo'linmaydigan turda bo'lishi mumkin.

Butun sonli chiziqli dasturlash masalasi quyidagicha qo'yiladi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{30}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, ..., n, , \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{31}$$

$$x_i, \quad (i = 1, 2, ..., n) - butun \;\; sonlar. \tag{32}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi va

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{33}$$

funksiyani maksimallashtiruvchi (minimal) qiymatlarni topish. Butun sonli chiziqli dasturlash masalasini yechishning eng sodda usuli, uzluksiz masalani yechib, uni butun songacha yaxlitlashdir. Albatta, bu usul yaxlitlashda qo'yilgan xatolik kam bo'lgan holda maqsadga muvofiqdir. Aks holda bunda katta xatoliklarga yo'l qo'yish mumkin.

Fikrimizni quyidagi sodda misolga qarataylik.

$$\begin{array}{l} z = 21x_1 + 11x_2 \to \max \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 13, \\ x_1, \geq 0, \; x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 - butun. \end{array} \tag{34}$$

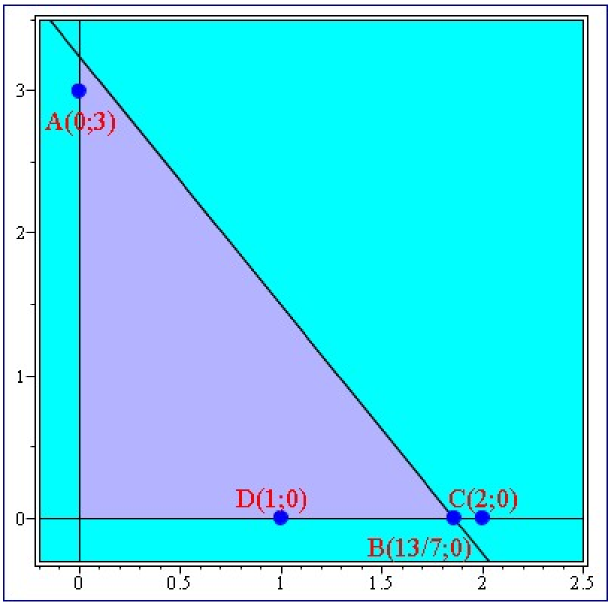
Misolning butun sonli optimal yechimi A nuqtadan iborat bo'lib, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $z_{max} = 33$ bo'ladi (buni grafik usulda yechib ishonch hosil qilish mumkin (86-rasmga qarang)). Yechimning butunligini inobatga olinmasa, masalaning yechimi B nuqtada yotadi, ya'ni $x_1 = 13/7$, $x_2 = 0$, $z_{max} = 39$ bo'ladi. Agar yechimni yaxlitlasak, u holda C nuqtani hosil qilamiz va $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z_{max} = 42$ bo'lib, yechim joiz sohadan chiqib ketadi. Agar yaxlitlash jarayonida yechimning kasr qismini tashlab yuborsak D nuqtani hosil qilamiz va $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $z_{max} = 21$ natija chiqadi va bu optimal butun yechimdan ancha yiroqdadir.

Biz bu bo'ilmda butun sonli chiziqli dasturlash masalalarini yechishning grafik, Gomori (kesuvchi tekisliklar), tarmoqlar va chegaralar usuli bilan tanishamiz.

8.2 Butun sonli chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish

Chiziqli dasturlash masalasida o'zgaruvchilar ikkiga teng bo'lganda grafik usulda yechish imkoniyati borligini ko'rgan edik. Ikki o'zgaruvchili butun sonli chiziqli dasturlash masalasini ham grafik usulda yechish imkoniyati mavjud.

Butun sonli chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechishni quyidagi masalani yechish jarayonida ko'rsatamiz.



Rasm 86: Masala uchun joiz soha

Ishlab chiqarishni kengaytirish masalasi:

Firma ishlab chiqarishni kengaytirish maqsadida 19/3 m^3 maydon va dastgohlarni sotib olish uchun esa 10 ming pul birligi ajratdi. Firma ikki turdagi dastgohlarni sotib olish niyatida. Birinchi tur dastgohning bir komplekti 1 ming pul birligiga ikkinchi tur dastgohniki esa 3 ming pul birligiga teng. Birinchi turdagi dastgoh ishlab chiqarishni kuniga 2 birlikka ikkinchi tur dastgoh esa 4 birlikka oshirishi ma'lum. Birinchi tur dastgohlarni joylashtirish uchun 2 m^2 ikkinchi tur dastgohlar uchun esa 1 m^2 maydon kerak bo'ladi. Har bir dastgohdan qanchadan sotib olinganda ishlab chiqarish samaradorligi eng yuqori bo'ladi?

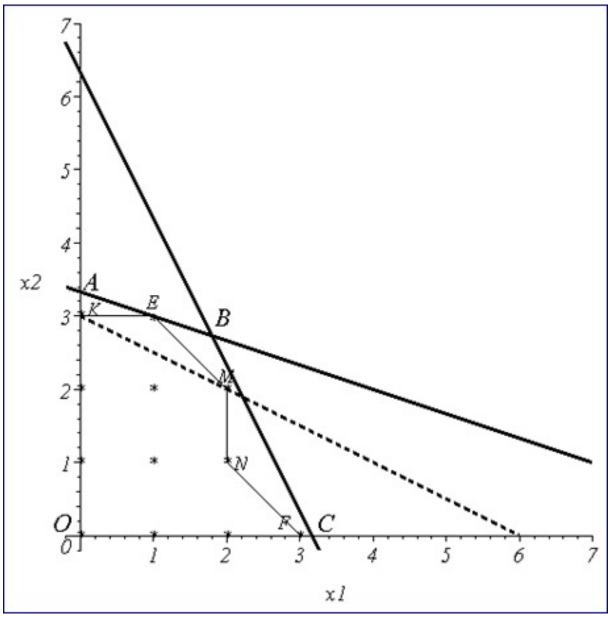
Masalaning matematik modeli quyidagicha bo'lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas:

$$\begin{array}{l} z = 2x_1 + 4x_2 \to \max \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases} \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{array} \tag{35}$$

$$x_1,\ x_2 - \textbf{butun} \quad \textbf{sonlar} \tag{36}$$

(36) shart hisobga olinmaganda uzluksiz masalaning joiz sohasi OABC ko'pburchakdan iborat (86-rasmga qarang). Punktir chiziq orqali maqsad funksiyasining quyidagi $z = 2x_1 + 4x_2 = 12$ sath chizig'i grafigi keltirilgan. Grafik usuldan foydalanib uzluksiz masalaning optimal yechimi B nuqta ekanligini ko'rish qiyin emas. Demak,

$x_1 = 9/5$, $x_2 = 41/15$ va $z_{max} = 218/14$ bo'ladi. Bu yechim (35) shartlarni qanoatlantirib, (35) shartni qanoatlantirmaydi. Joiz sohada («*») ko'rsatilgan 12 ta butun nuqtalar (36) shartni qanoatlantiradi. Masalaning (36) shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish uchun OABC ko'pburchak o'rniga barcha butun nuqtalarni o'z ichiga oluvchi OKEMNF ko'p burchakni qaraymiz. Bu shunday ko'pburchakki, uning uchlari butun sonlardan iboratdir. OKEMNF ko'pburchakdagi z maqsad funksiyaning maksimal qiymati masalaning yechimidan iborat bo'ladi.



Rasm 87: Masalaning grafik usuldagi yechimi

87- rasmdan ko'rinib turibdiki, optimal nuqta E nuqtadan iboratdir. Shunday qilib, ***masalaning yechimi*** $x_1 = 1$***,*** $x_2 = 3$ ***va*** $z_{max} = 14$ ***bo'ladi***.

8.3 Gomori usuli

Gomori tomonidan taklif qilingan bu usul butun sonli chiziqli dasturlash masalasining matematik modelida qatnashgan o'zgaruvchilar soni ixtiyoriy bo'lganda ham ishlatish mumkin.

Avvalo, uzluksiz (30), (31), (33) masala yechiladi. Ya'ni (32) shartni inobatga olmasdan masalani simpleks usulda yechamiz. Agar olingan natija butun bo'lsa, jarayon to'xtatiladi va izlangan natijaga erishamiz. Agar natija butun bo'lmasa, unda joiz sohaning barcha butun nuqtalarini o'z ichiga oladigan va topilgan uzluksiz masalaning yechimini o'z ichiga olmaydigan qo'shimcha shart kiritiladi. Bu qo'shimcha shart to'g'ri ***kesuvchi tekislik*** deyiladi. Geometrik jihatdan bu kesuvchi tekislik shundayki, uzluksiz masalaning joiz sohasini tashkil qiluvchi ko'pyoqni shunday kesadiki, unda uzluksiz masalaning barcha butun nuqtalari saqlanib qoladi.

Yangi qo'shimcha shartni inobatga olgan holda masala yana yechiladi. Chekli qadamlardan keyin butun yechimga kelamiz yoki, shartlarning birgalikda emasligini kuzatamiz. (30)-(33) masalani (32) shartni hisobga olmasdan simpleks usulda yechib quyidagi tengliklarga kelamiz:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}^* x_j = b_i^*, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{37}$$

Bu yerda x_i, $i = 1, 2, ..., m$ oxirgi simplex jadvaldagi bazis o'zgaruvchilar, x_i, $i = m + 1, ..., n$ nobazis o'zgaruvchilardir, b_i^* esa bazis o'zgaruvchilarning qiymati.

Ba'zi belgilashlarni kiritaylik. $\{c\}$ belgi sonning kasr qismini bildiradi, ya'ni $\{c\} = c - [c]$, bunda $[c]$ sonning butun qismi. Sonning butun qismi deb o'zidan katta bo'lmagan eng katta butun songa aytiladi. Masalan, $c = 2\frac{1}{3}$ bo'lsa, $\{c\} = 2\frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3}$ bo'ladi va $c = -2\frac{1}{3}$ bo'lsa, $\{c\} = -2\frac{1}{3} - (-3) = \frac{2}{3}$ bo'ladi. Ma'lumki, $c \geq [c]$, $0 \leq \{c\} < 1$.

Kiritilgan belgilashlarga ko'ra (37) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$x_i - [b_i^*] + \sum_{j=m+1}^{n} [a_{ij}^*] x_j = \{b_i^*\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a_{ij}^*\} x_j. \tag{38}$$

Faraz qilaylik, x_i bazis yechim butun bo'lsin. U holda (38) tenglikning o'ng tomoni

$$d = \{b_i^*\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a_{ij}^*\} x_j \tag{39}$$

butun son bo'ladi. $0 \leq \{b_i^*\} < 1$, $0 \leq \{a_{ij}^*\} < 1$ bo'lgani uchun esa $d \leq 0$ yoki $d \geq 1$ bo'lishi mumkin. Agar $d \geq 1$ bo'lsa, (39) dan

$$\{b_i^*\} = d + \sum_{j=k+1}^{n} \{a_{ij}^*\} x_j \geq 1 + \sum_{j=k+1}^{n} \{a_{ij}^*\} x_j \geq 1$$

kelib chiqadi. Bu esa $0 \leq \{b_i^*\} < 1$ shartiga zid. Shuning uchun $d \leq 0$ bo'ladi, ya'ni

$$\sum_{j=m+1}^{n} \left\{a_{ij}^*\right\} x_j \geq \{b_i^*\}\,. \tag{40}$$

Agar natijalarning bir nechtasi uchun yechim butun bo'lmasa, (40) qo'shimcha shart eng katta butun 5) $z_{max} = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; 6) $z_{min} = 50$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$. yechimdan tanlanadi. Agar (30), (31), (33) va (40) yaxshilgandan so'ng yana yechimda kasrli yechim uchrasa jarayon yana butun natija olinganga qadar takrorlanadi.

(35)-(36) masalani Gomori usuli bilan yechishni ko'rib chiqamiz. Masalani simpleks usulda yechib, 88-rasmdagi jadvalga kelamiz.

Ikki yechim ham butun emas. x_1 ning kasr qismi katta bo'lgani uchun (40) shart bizning misolda quyidagicha bo'ladi.

$$\left\{\frac{3}{5}\right\} s_1 + \left\{-\frac{1}{5}\right\} s_2 \geq \left\{\frac{9}{5}\right\}$$

yoki

$$\frac{3}{5} s_1 + \frac{4}{5} s_2 \geq \frac{4}{5}. \tag{41}$$

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	b
		2	4	0	0	
x_1	2	1		3/5	-1/5	9/5
x_2	4		1	-1/5	2/5	41/15
z_j		2	4	2/5	6/5	**218/15**
c_j-z_j		0	0	-2/5	-6/5	

Rasm 88: Simpleks jadval

(41) tengsizlikni grafik usul bilan taqqoslash maqsadida, jadvaldan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$x_1 + \frac{3}{5}s_1 - \frac{1}{5}s_2 = \frac{9}{5}, \quad x_2 - \frac{1}{5}s_1 + \frac{2}{5}s_2 = \frac{41}{15}.$$

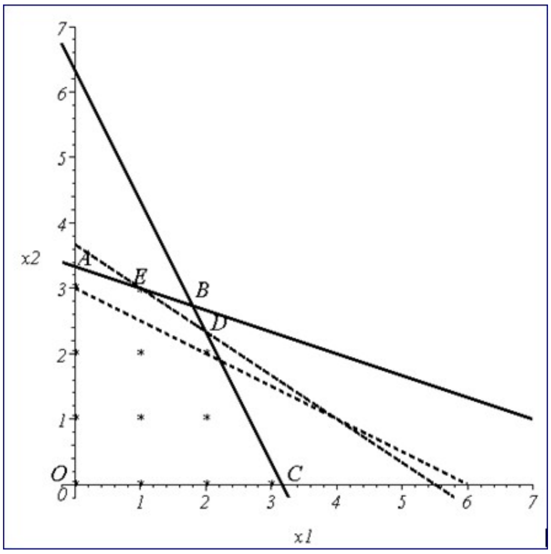
Bu sistemadan s_1 va s_2 larni x_1, x_2 orgali ifodalaymiz:

$$s_1 = -2x_1 - x_2 + \frac{19}{3}, \quad s_2 = 10 - 3x_2 - x_1.$$

U holda (41) tengsizlik

$$\frac{3}{5}s_1 + \frac{4}{5}s_2 \geq \frac{4}{5}. \tag{42}$$

ko'rinishga keladi. (42) tengsizlikni (36) shartlarga qo'shib joiz sohani ifodalaymiz (89)-rasm).



Rasm 89: Masala grafigi

Rasmdan ko'rinib turibdiki, (36) shart qo'shilganda boshlang'ich joiz sohadan EBD uchburchak kesib tashlanganligini ko'rsatadi. Shuning uchun ham ba'zan bu usulni ***kesuvchi tekisliklar usuli*** deb ham yuritiladi. Natijada yangi joiz soha: OAEDC ko'pburchak hosil bo'ladi va yechim yangi sohada izlanadi.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a	b
		2	4	0	0	0	-M	
x_1	2	1		3/5	-1/5		0	9/5
x_2	4	0	1	-1/5	2/5		0	41/15
a	-M	0	0	3/5	4/5	-1	1	4/5
z_j		2	4	-3M/5	-4M/5	M	-M	
c_j-z_j		0	0	3M/5	4M/5	-M	0	

Rasm 90: Simpleks jadvali

(36) tengsizlikni oxirgi jadvalga kiritish uchun sun'iy o'zgaruvchi kiritib quyidagi 90- jadvalga kelamiz.

Simpleks usulining yechhish qoidasiga ko'ra quyidagi 90- rasmda keltirilgan oxirgi jadvalga kelamiz.

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		2	4	0	0	0	
x_1	2	1	0	0	-1	1	1
x_2	4	0	1	0	2/3	-1/3	3
s_1	0	0	0	1	4/3	-5/3	4/3
z_j		2	4	0	2/3	2/3	**14**
c_j-z_j		0	0	0	-2/3	-2/3	

Rasm 91: Oxirgi simpleks jadvali

Asosiy o'zgaruvchilarning qiymati butun bo'lgani uchun butun sonli yechimga erishdik: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ va $z_{max} = 14$. Bu natija grafik usulda olingan natija bilan mos keladi.

8.4 Tarmoqlar va chegaralar usuli

Bu usulda boshlag'ich masala ketma-ket tartibli variantlarga ajratilib, variantlarning keraksizini tashlab yuborib, maqsadga muvofiqligi saqlanadi. Maqsadga muvofiq deb tanlangan masala yana tarmoqlarga ajratiladi va maqsadga muvofiqligi tanlanadi va h.k. Jarayon optimal butun yechim olingunga qadar davom ettiriladi.

Tarmoqlar usulining algoritmi quyidagicha.

Avvalo, Gomori usuli kabi, o'zgaruvchilarning butunligini inobatga olinmasdan masala simpleks usulda yechiladi. Aytaylik, bu yechim X_0 bo'lsin. Agar yechim komponentalari ichida kasr son bo'lmasa, yechim aniqlangan va $z_{max} = z(X_0)$ bo'ladi.

X_0 yechimlari ichida kasrli sonlar bo'lsa, tartibli keyingi rejani aniqlashga o'tiladi. Aytaylik, x_{i_0} o'zgaruvchi kasrli bo'lsin va $[x_{i_0}] = k$. Quyidagi ikki chiziqli dasturlash masalasini qaraymiz.

I masala:

$$z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,2,...,m,$$
$$x_{i_0}\le k,\ x_j\ge 0,\ j=1,2,...,n.$$

II masala:

$$z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,2,...,m,$$
$$x_{i_0}\ge k+1,\ x_j\ge 0,\ j=1,2,...,n.$$

I va **II** masalalarni simpleks usuli bilan yechamiz. Tabiiyki, bu yerda quyidagi hollardan birortasi uchrashi mumkin.

1. Masalalardan biri yechimga ega emas, ikkinchisining esa, optimal butun yechimi mavjud. U holda bu yechim boshlang'ich masalaning optimal yechimi bo'ladi.

2. Masalalardan biri yechimga ega emas, ikkinchisining esa, optimal butun bo'lmagan yechimi mavjud. U holda yuqoridagi kabi, masalani ikki tarmoqqa ajratamiz.

3. Ikki masala ham yechimga ega. Shulardan biri optimal butun yechimga ega. Ikkinchisining esa, optimal yechimida kasrli o'zgaruvchilar bor. Ikkala masalaning ham maqsad funksiyasini topib ularni solishtiramiz. Agar butun yechimli masalaning maqsad funksiyasi qiymati kasrli masalaning maqsad funksiyasi qiymatidan katta bo'lsa, butun sonli masalaning yechimlari boshlang'ich masalaning yechimi bo'ladi. Aks holda, yuqoridagidek, yechimi kasrli bo'lgan masalani yana ikki qismga ajratamiz.

4. Ikki masala ham kasrli yechimga ega. Maqsad funksiyasining qiymati katta bo'lgan masalani tanlab, undan yuqoridagidek ikki masala tuzamiz.

Shunday qilib, bayon qilingan algoritm biror daraxtni eslatadi. Bu daraxt uchi (refeq:bs1), (31) va (33) ning optimal yechimi dan iborat. X_0 dan chiqqan tarmoq uchlari esa, **I** va **II** masalaning tarmoq uchlaridir. Bularning har birining tarmoq uchlari mavjud. Shu bilan birga har bir qadamda maqsad funksiyasining qiymati eng katta uch tanlanadi. Agar jarayonning biror qadamida butun yechim olingan bo'lib, maqsad funksiyasining qiymati boshqa tarmodagidan katta bo'lsa, olingan yechim boshlang'ich masalaning yechimi bo'ladi.

1-misol. Tarmoqlar usulini (35)- misolda ko'raylik. Maqsad funksiyasining eng kichik qiymati sifatida $(0,0)$ nuqtani olamiz $z_0=z(0;0)=0$.

1-bosqich. (35)- masalani simpleks usul bilan yechamiz:

$$x_1=9/5,\quad x_2=41/15,\quad z_{max}=218/14.$$

Ikkala yechim komponentalari kasrli. Birortasini, masalan, birinchisini olib ikki masala tuzamiz ($1<x_1<2$ oraliq hisoblashdan chiqariladi):

2- masala:

$$z=2x_1+4x_2\to\max$$
$$\begin{cases}2x_1+3x_2\le 19/3,\\ x_1+3x_2\le 10,\end{cases}$$
$$x_1\le 1,$$
$$x_1,\ x_2\ge 0,$$
$$x_1,\ x_2-\text{butun}.$$

3- masala:

$$z=2x_1+4x_2\to\max$$
$$\begin{cases}2x_1+3x_2\le 19/3,\\ x_1+3x_2\le 10,\end{cases}$$
$$x_1\ge 2,$$
$$x_1,\ x_2\ge 0,$$
$$x_1,\ x_2-\text{butun}.$$

2- bosqich. 2- yoki 3- masalalarning birortasini simpleks usulda yechamiz. 2-masalani yechib, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ va $z_{max} = 14$ natijaga erishamiz.

3-masalaning yechimi: $x_1 = 2$, $x_2 = 7/3$ va $z_{max} = 40/3$. $14 > 40/3$ bo'lganligi uchun, 2-masalaning yechimi boshlang'ich masalaning yechimi bo'ladi.

2- Misol. Quyidagi misolni tarmoqlar usulida yechamiz.

$$
\begin{aligned}
& z = 3x_1 + x_2 \to \max \\
& \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 5, \\ 0 \le x_2 \le 4, \end{cases} \\
& x_1,\ x_2 - \text{butun}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

1-bosqich. Masalani simpleks usulda yechamiz: $x_1 = 4.5$, $x_2 = 0$ va $z_{max} = 13.5$. x_1 kasrli bo'lgani uchun joiz sohadan $4 < x_1 < 5$ maydonni yo'qotamiz. Natijada boshlang'ich masala quyidagi ikki masalaga tarmoqlanadi.

2- masala:

$$
\begin{aligned}
& z = 3x_1 + x_2 \to \max \\
& \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 4, \\ 0 \le x_2 \le 4, \end{cases} \\
& x_1,\ x_2 - \text{butun}.
\end{aligned}
$$

3- masala:

$$
\begin{aligned}
& z = 3x_1 + x_2 \to \max \\
& \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 5 \le x_1 \le 5, \\ 0 \le x_2 \le 4, \end{cases} \\
& x_1,\ x_2 - \text{butun}.
\end{aligned}
$$

2-bosqich. Ikki masaladan birortasini simpleks usul bilan yechamiz. 3-masalani simpleks usul bilan yechilganda yechimning mavjud emasligini ko'rish mumkin. 2-masalani simpleks usul bilan yechib quyidagi natijaga kelamiz: $z_{max} = 38/3$, $x_1 = 4$, $x_2 = 2/3$.

3-bosqich. x_2 kasr bo'lganligi uchun $0 < x_2 < 1$ maydonni yo'qotamiz. Natijada 2-masala ikki tarmoqqa bo'linadi.

4- masala:

$$
\begin{aligned}
& z = 3x_1 + x_2 \to \max \\
& \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 4, \\ 0 \le x_2 \le 0, \end{cases} \\
& x_1,\ x_2 - \text{butun}.
\end{aligned}
$$

5- masala:

$$
\begin{aligned}
& z = 3x_1 + x_2 \to \max \\
& \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 4, \\ 1 \le x_2 \le 4, \end{cases} \\
& x_1,\ x_2 - \text{butun}.
\end{aligned}
$$

4- bosqich. 4-masalani simpleks usulda yechamiz: $z_{max} = 12$, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$. Natija butun bo'lgani uchun $z_0 = 12$. 5-masalani simpleks usulda yechamiz: $z_{max} = 12.25$, $x_1 = 3.75$, $x_2 = 1$.

5-masala maqsad funksiyasining qiymati 4-masala maqsad funsiyasining qiymatidan katta bo'lgani uchun hisoblashni davom ettiramiz. 5-masalani ikki tarmoqqa ajratamiz.

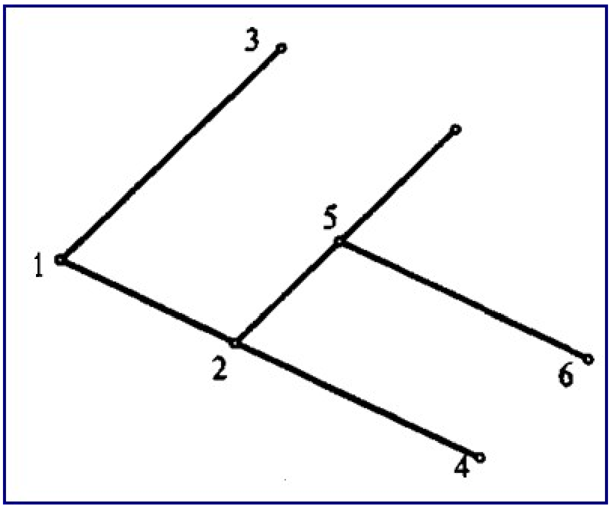
6- masala:

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 3, \\ 1 \le x_4 \le 0, \end{cases}$$
$x_1,\ x_2 -$ butun.

7- masala:

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 4 \le x_1 \le 4, \\ 1 \le x_2 \le 4, \end{cases}$$
$x_1,\ x_2 -$ butun.

5-bosqich. 7-masalada joiz soha bo'sh to'plam. 6-masalaning yechimi: $z_{max} = 10.5$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1.5$. 6-masalaning maqsad funksiyasining qiymati $z_0 = 12$ dan kichik bo'lgani uchun jarayonni tugallaymiz. Demak, boshlang'ich masalaning optimal butun yechimi 4-bosqichda topilgan 4-masalaning yechimidan iborat bo'ladi $z_{max} = 12$, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$. (8.4-rasm).



Rasm 92: Tarmoq.

Izoh. Tarmoqlar usulini ketma-ket qo'llash jarayonida keyingi tarmoq masalasi oldingidan bitta shartning o'zgarishidan hosil qilinishini kuzatish qiyin emas. Shuning uchun keyingi tarmoq masalasini simplex usul bilan yechish jarayonida yechimni boshidan boshlamasdan, balki, oldingi tarmoqda olingan masalaning oxirgi jadvaliga o'zgartirish kiritib hisoblashni davom ettirish maqsadga muvofiqdir.

Tayanch iboralar.

Butun sonli dasturlash; butun sonli dasturlashni grafik usulda yechish; kesuvchi tekisliklar usuli; Gomori usuli; chegaralar va tarmoqlar usuli.

Savollar.

1. Qanday masalalar butun sonli chiziqli dasturlash masalasi deyiladi?
2. Gomori usulining mohiyati nimadan iborat?
3. Tarmoqlar va chegaralar usuli qanday amalga oshiriladi?

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

1. Quyidagi masalalarni grafik, Gomori, tarmoqlar va chegaralar usulida yeching.

1) $$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 - \text{butun}.$$

2) $$z = 5x_1 + 4x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 7, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 - \text{butun}.$$

---

3) $$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 60, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 34, \\ x_2 \ge 8, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 - \text{butun}.$$

4) $$z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 50, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 81, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0. \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 - \text{butun}.$$

---

5) $$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 6, \\ -3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 - \text{butun}.$$

6) $$z = 5x_1 + 7x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26, \\ x_1 + 4x_2 \ge 25, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 - \text{butun}.$$

---

7) $$z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 \le 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 - \text{butun}.$$

8) $$z = 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 \ge 5, \\ -1.5x_1 + 0.5x_2 + x_3 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 - \text{butun}.$$

---

2. Firma uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Birlik mahsulotni ishlab chiqarishga ketadigan vaqt va xom ashyo miqdorlari jadvalda keltirilgan.

Mahsulot turi	Vaqt (soat)	Xom ashyo (kg)
1	3	4
2	4	3
3	5	6
Kunlik imkoniyat	100	100

Har bir mahsulotdan keladigan daromad mos ravishda 25, 30 va 45 dollarga teng. Uchinchi turdagi mahsulot ishlab chiqariladigan bo'lsa, kunlik normasi 5 birlikdan kam bo'lmasligi talab qilinadi. Butun sonli chiziqli dasturlash masalasiga keltiring va yeching.

3. Firmaning dastgohini ikki usulga sozlash imkoniyati bor. Dastgoh birinchi usulga sozlanganda kuniga 20 donadan ko'p bo'lmagan birinchi tur va 10 donadan ko'p bo'lmagan ikkinchi tur mahsulot ishlab chiqaradi. Dastgoh ikkinchi usulga sozlanganda esa bu ko'rsatkich mos ravishda 12 va 22 birliklarga teng. Mahsulotlarga umumiy kunlik talab 35 birlikdan oshmaydi. Mahsulotlarni sotishdan tushadigan foyda 10 va 12 dollarga teng. Yuqori foyda olish uchun dastgohni qaysi usulga sozlash ma'qul?

Mustaqil ish topshiriqlari javoblari

1. Quyidagi masalalarni grafik, Gomori, tarmoqlar va chegaralar usulida yeching.

1.	$z_{max} = 12,\ x_1 = 4,\ x_2 = 0.$	2.	$z_{min} = 12,\ x_1 = 0,\ x_2 = 3.$
3.	$z_{max} = 25,\ x_1 = 2,\ x_2 = 7.$	4.	$z_{min} = 33,\ x_1 = 17,\ x_2 = 16.$
5.	$z_{max} = 35,\ x_1 = 9,\ x_2 = 4.$	6.	$z_{min} = 52,\ x_1 = 2,\ x_2 = 6.$
7.	$z_{max} = 3,\ x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_0.$	8.	$z_{min} = 24,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2.$

2. Firma birinchi tur mahsulot ishlab chiqarmasdan, ikkinchi va uchinchi tur mahsulotlardan 11 tadan ishlab chiqarsa eng yuqori daromad oladi va bu daromad 825 dollarga teng.

3. Dastgohni ikkinchi usulga sozlash maqsadga muvofiq. Chunki foyda 384 dollarni tashkil qiladi, birinchi usulga sozlanganda esa foyda 320 dollardan iborat bo'lar edi.

9 Chiziqli dasturlash masalalarini «POM QM for Windows» dasturi yordamida yechish

9.1 «POM QM for Windows» dasturi haqida umumiy ma'lumot

Ushbu bo'limda biz qarorlar qabul qilishga ko'maklashuvchi quyidagi zamonaviy kompyuter dasturlaridan biri bilan tanishamiz:

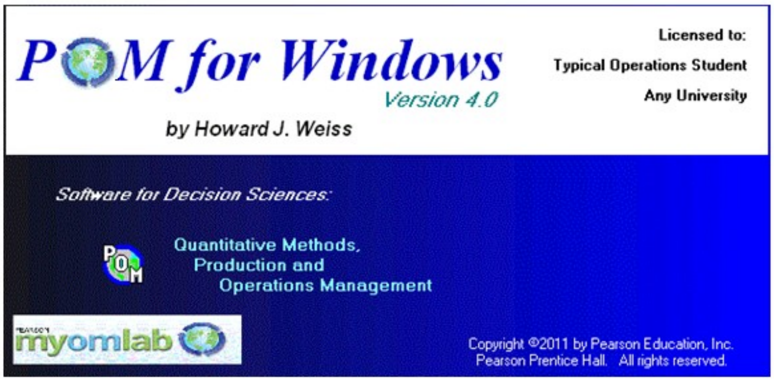
*Software for Decision Sciences: Quantitative Methods, Production and Operations Management – **POM-QM for Windows**.*

«POM-QM for Windows» kompyuter dasturi ishlab chiqarishni boshqarish, operativ boshqarish va iqtisodda miqdoriy usullarga oid hisob-kitoblarni bajarishga mo'ljallangan maxsus dasturiy ta'minotdir. Dastur muallifi ***Howard J. Weiss*** bo'lib, dasturning installyatsiya faylini quyidagi rasmiy saytlardan olish mumkin.

`https://wps.prenhall.com/bp_weiss_software_1/`

`https://support.pearson.com/getsupport/s/?sitename=CW+-+WPS`

Windows interfeysi, uning moslashuvchanligi, dizayni qulayligi va foydalanuvchini qo'llab-quvvatlash tizimi mavjudligi tufayli, bu dasturiy paket biznes va boshqaruv



Rasm 93: POM QM dasturi qutlov oynasi

sohasida amaliy iqtisodiy masalalarni yechishda matematik modellar ishlab chiqish va miqdoriy hisob-kitoblar uchun eng qulay hisoblanadi.

Ushbu dasturning grafik interfeysi «Windows» uchun standart hisoblanadi. Jadvallar, matn muharrirlari yoki taqdimot tayyorlash dasturlari bilan ishlagan har bir kishii bu dasturdan hech qanday muammosiz foydalana oladi. Uning interfeysi standart menyu, asboblar paneli, holat majmuasi hamda «Windows» dasturlari uchun yordam fayllarini o'z ichiga oladi.

Jadvallardan foydalanadigan muharrir tufayli ma'lumotlarni kiritish va tahrirlash juda oson bo'ladi. Bundan tashqari, ma'lumotlarni kiritishda ekranda har doim aniq tushuntirishlar berilganligi va noto'g'ri ma'lumotlar kiritishda xato xabar ko'rsatilishi ishni yengillashtiradi.

Dasturda quyidagi modullar mavjud bo'lib, har bir modul alohida guruh muammolarni yechishga mo'ljallagan.

- Aggregate (Production) Planning
- Assembly Line Balancing/Line Balancing
- The Assignment Model
- Breakeven/Cost-Volume Analysis
- Capital Investment/Financial Analysis
- Decision Analysis
- Forecasting
- Game Theory
- Goal Programming
- Integer and Mixed Integer Programming
- Inventory
- Job Shop Scheduling (Sequencing)/Scheduling
- Layout/Flexible-Flow Layout
- Learning (Experience) Curves
- Linear Programming
- Location
- Lot Sizing
- Markov Analysis
- Material Requirements Planning/Resource Planning
- Networks

- Productivity
- Project Management
- Quality Control/Process Performance and Quality
- Reliability
- Simulation
- Statistics
- The Transportation Model
- Waiting Lines
- Work Measurement/Measuring Output Rates

Shulardan ayrimlarini sanab o'taylik. «The Assignment Model» – moduli tsqsimlash masalalarining bir turi bo'lgan tayinlash masalalarini yechishga, «Decision Analysis» moduli noaniqlik va risk sharoitida qaror qabul qilishga ko'maklashishga, xususan «qarorlar» daraxti usulini qo'llashga, «Forecasting» moduli dinamik statistik ma'lumotlar asosida bashorat modellari qurishga, «Inventory» moduli zaxiralarni boshqarish masalalarini yechishga, «Game Theory» moduli esa ziddiyatli sharoitda ko'riladigan masalalar - o'yinlar nazariyasi masalasini yechishga mo'ljallangan. «The Transportation Model» moduli transport masalalarini yechishga, «Networks» moduli tarmoq masalalari, shu jumladan, tarmoq shaklida berilgan transport masalalari, kommivoyajer, maksimal oqim va minimal o'zanli daraxt qurish masalalarini yechishga mo'ljallangan. «Project Management» - modulida esa loyihalarni boshqarish masalalarini yechish mumkin.

Yuqoridagi bo'limlarda ko'rib chiqilgan chiziqli optimizatsiya masalalarini yechishda dasturning «Linear Programming», ya'ni «Chiziqli dasturlash» va «Integer and Mixed Integer Programming» – «Butun sonli va aralash dasturlash» nomli modullaridan samarali foydalanish mumkin. Chiziqli dasturlash masalalarini dasturda yechish davomida quyidagi natijalarni olish mumkin: masalani grafik usulda yechimi, simpleks usulda yechimi, o'ng tomon koeffitsiyentlari va maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlili, ikkiyoqlama qiymatlar, dastlabki masalaga o'zaro ikkiyoqlama masala tuzish natijalari.

Bu dasturning kerakli modul imkoniyatlarini namoyish qilish maqsadida yuqoridagi bo'limlarda ko'rib chiqilgan masalalarni dasturda yechib chiqamiz.

9.2 Ishlab chiqarishni optimal rejalashtirish masalasini «POM QM for Windows» dasturi yordamida yechish

3.1 - bo'limda ishlab chiqarishning optimal rejalashtirish haqidagi amaliy masalaning matematik modelini qurib, uni grafik va simpleks usulda yechgan edik. Endi esa ushbu chiziqli dasturlash masalasini maxsus dasturda yechish imkoniyatlarini o'rganib chiqamiz. Keling, masala shartlarini esga olaylik.

Resurslar	shkaf	tumba	zaxira hajmi
DSP	3,5 m.	1,0 m.	350 m.
Shisha	1,0 m.	2,0 m.	240 m.
Ishchi kuchi	1 ta	1 ta	150 ta
Foyda	**200**	**100**	

Jadval 10: Masala parametrlari.

«Chinor» mebel sexi uchun ishlab chiqarishni optimal rejalashtirish masalasi

«Chinor» mebel sexi:

Sex ikki turdagi mahsulot ishlab chiqaradi: shkaf va televizor uchun tumba. Bir dona shkaf yasash uchun 3,5 m. standart DSP, 1 m. standart shisha va bir ishchining bir kunlik mehnati sarflanar ekan. Bitta tumba uchun 1 m. DSP, 2 m. shisha va bir ishchining bir kunlik mehnati sarflanar ekan. Bir dona shkafni sotishdan tushadigan foyda 200 \$, tumbadan esa – 100 \$ ekan. Sexning moddiy va mehnat resurslari cheklangan bo'lib, sexda jami 150 ta ishchi ishlar ekan. DSP kunlik zaxirasi 350 m., shishaning zaxirasi esa 240 m.ni tashkil etar ekan. Sex maksimal foyda olish uchun bir kunda qancha shkaf va tumba ishlab chiqarishi kerak?

Masala ma'lumotlaridan foydalanib quyidagi 10- jadvalni shakllantirgan edik.

Masalaning matematik modelini qurish uchun quyidagi belgilashlar kiritib olgan edik. Sexning kundalik ishlab chiqaradigan shkaflar soni X va tumbalar soni Y bo'lsin. U holda sexning kundalik umumiy foydasi P har ikki mahsulotdan ko'radigan foydalarning yig'indisidan iboratdir.

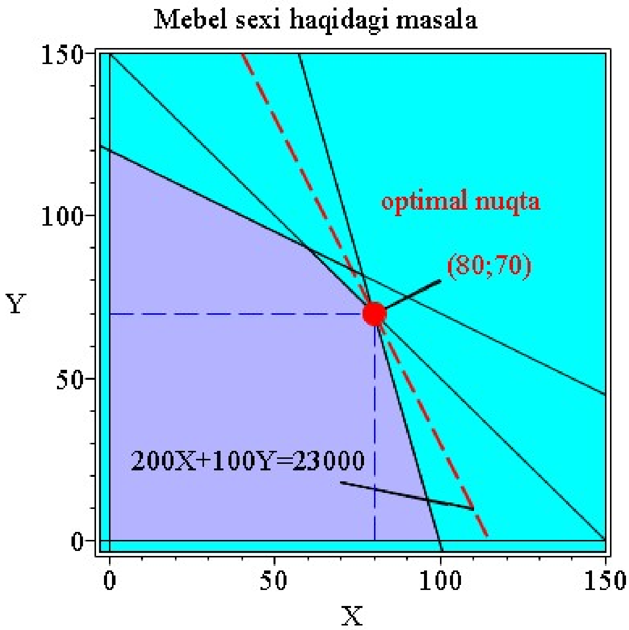
Masalaning matematik modeli

$$P = 200X + 100Y \to \max,$$

$$\begin{cases} 3,5X + Y \leq 350, \\ X + 2Y \leq 240, \\ X + Y \leq 150, \\ X \geq 0, \quad Y \geq 0. \end{cases}$$

Masalani grafik usulda yechish bilan 4.4- bo'limda shug'ullanib quyidagi natijalarni olgan edik (54-rasmga qarang).

Masalani simpleks usulda yechish bilan 5.8 bo'limda tanishganmiz.



Masalaning yechimi:
Optimal shkaflar soni: $X = 80$ ta, optimal tumbalar soni: $Y = 70$ ta.
Maksimal foyda qiymati: $P = 23000\$$.

Rasm 94: Masalani grafik usulda yechish

Masalani «POM QM for Windows» dasturi yordamida yechish

«Chinor» mebel sexi haqidagi masalani maxsus «QM for Windows» dasturida yechish jarayonini ko'rib chiqamiz. Buning uchun «QM for Windows» dasturining «Linear Programming», ya'ni «Chiziqli dasturlash» moduliga murojaat qilamiz.

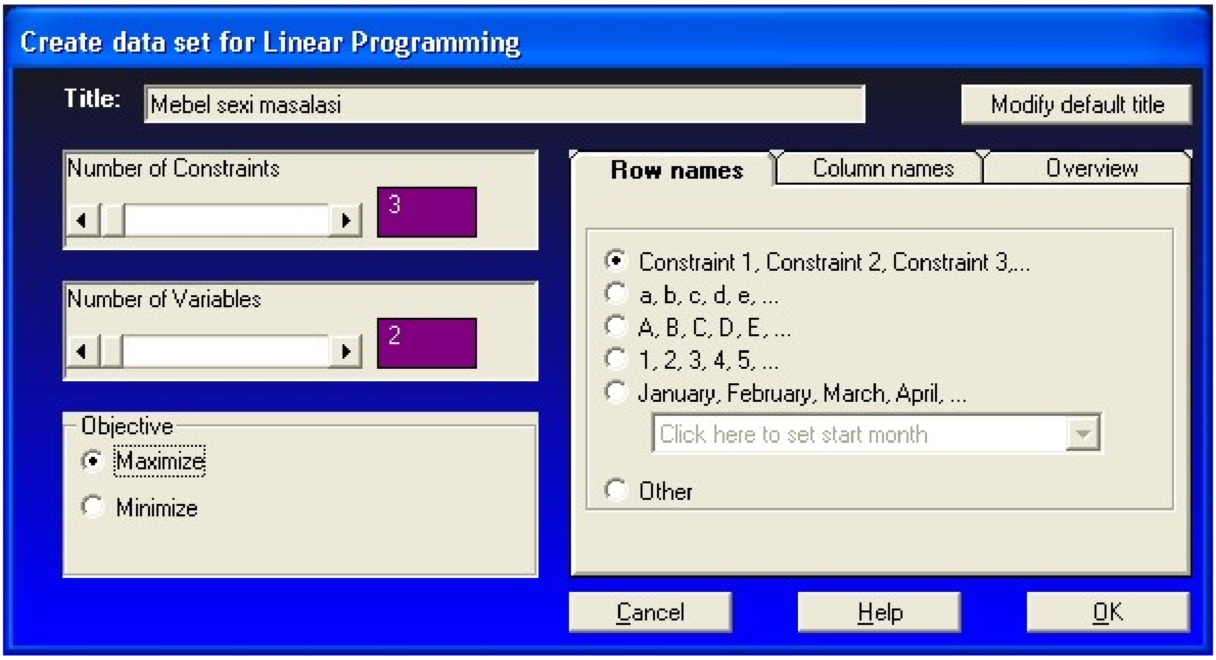
Dasturga masala parametrlarini kiritish oynasi

Dasturga masala parametrlarini kiritish oynasi ko'rinishi 95- rasmda berilgan bo'lib, unda masala parametrlarini aniqlash talab qilinadi. Buning uchun masala nomini, noma'lumlar sonini, shartlar soni va maqsadimizni aniqlashimiz kerak.

Keling, «Chinor» mebel sexining optimal ishlab chiqarish rejasini tuzish haqidagi masalani qisqa qilib *«mebel sexi masalasi»* deb ataymiz. Masalamizdagi noma'lumlar soni ikkita bo'lib, bular ishlab chiqarilishi lozim bo'lgan shkaflar soni X va tumbalar soni Y dir. Masala shartlari uchta bo'lib, bular zaxiradagi DSP, shisha hajmlari va ishchi kuchi soniga bo'lgan shartlardir. Shuni aytib o'tish kerakki, ishlab chiqarish hajmlariga qo'yilgan nomanfiylik shartlari $X \geq 0$ va $Y \geq 0$ larni dasturga kiritish kerak emas. Dasturda nomanfiylik shartlari avtomatik ravishda e'tiborga olinadi. Masalani yechishdan maqsad - maqsad funksiyasi, ya'ni foydaning **maksimizatsiya**sidir. Shunday qilib:

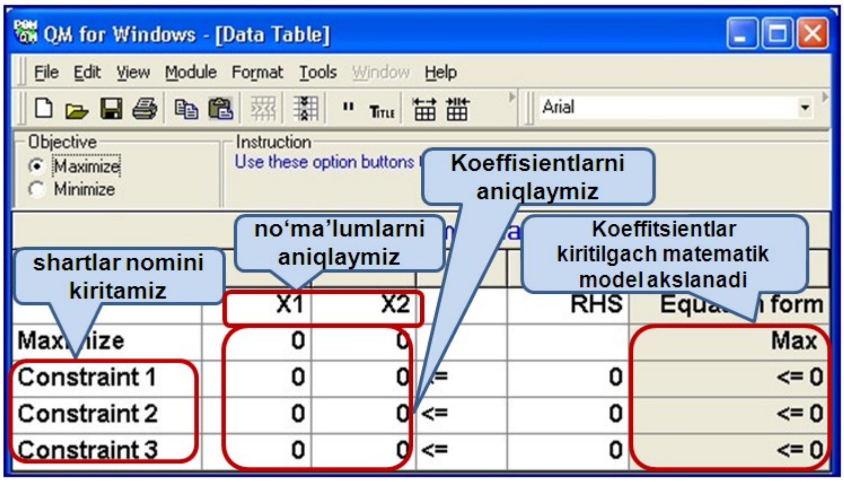
· masala nomi (Title): Mebel sexi masalasi
· shartlar soni (number of constraints):3
· o'zgaruvchilar soni (number of variables):2
· maqsad (objective): maksimizatsiya(maximize)

Masala parametrlarini aniqlagach, «OK» tugmasini bosamiz. Navbatdagi oynada



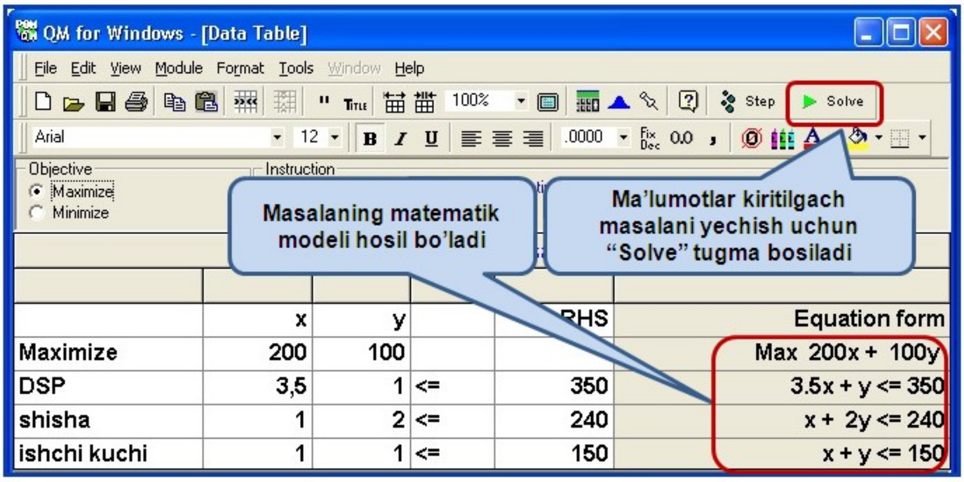
Rasm 95: Dastlabki oyna ko‘rinishi

(96-rasm) dastlab shartlarning shartli nomlari - «DSP», «shisha», «ishchi kuchi» va noma’lumlarning «X», «Y» belgilanishlarini kiritamiz.



Rasm 96: Matematik modelni kiritish

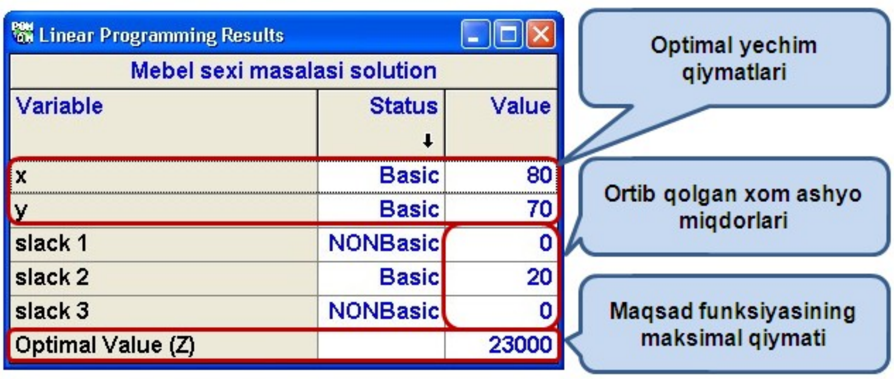
Jadvalning markaziy qismiga masalaning maqsad funksiyasi va shartlari koeffitsiyentlarini kiritamiz. Ma’lumotlar kiritilgandan so‘ng masalaning matematik modeli oynaning o‘ng tomonida akslanadi. Dasturga masalaning ma’lumotlari kiritilganidan so‘ng oyna quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi (107- rasmga qarang). Barcha ma’lumotlar to‘g‘ri kiritilganiga ishonch hosil qilgach, masalani yechish uchun «Solve» tugmasini bosamiz.



Rasm 97: Ma'lumotlar kiritilgan oyna

Natijalar jami 6 ta oynada taqdim etiladi:
· «Linear Programming Results» oynasi: masalaning yechimi (optimal nuqta, optimal qiymat, zaxira qoldiqlari)
· «Ranging» oynasi: turg'unlik tahlili natijalari
· «Original Problem w/answers» oynasi: optimal yechim va xom ashyo turlari uchun ikkiyoqlama qiymatlar
· «Iterations» oynasi: masalaning simpleks jadvallari
· «Dual» oynasi: ikkiyoqlama masala modeli
· «Graph» oynasi: masala yechimining grafik usuli

Odatda, dastur natijalari taqdim etilayotganda matnda foydalanuvchi tomonidan kiritilgan ma'lumotlar qora rangli shriftda, hisoblash natijalari esa ko'k rangda beriladi. Masala faylini foydalanuvchi xohishiga ko'ra nomlanib kerakli joyda saqlab qo'yish mumkin. «POM QM for Windows» dasturining «Chiziqli dasturlash» («Linear Programming») modulida yaratilgan fayllar « .lin» kengaytirma bilan saqlanadi. Barcha natijalarni Excell fayl ko'rinishida ham saqlab qo'yish mumkin. Dasturda yaratilgan rasmlarni « .bmp» kengaytirma bilan saqlash imkoniyati bor. Dastur interfeysida ekrandan nusxa olish uchun «Print Screen» tugmasi ham ko'zda tutilgan.



Rasm 98: «Linear Programming Results» oynasi

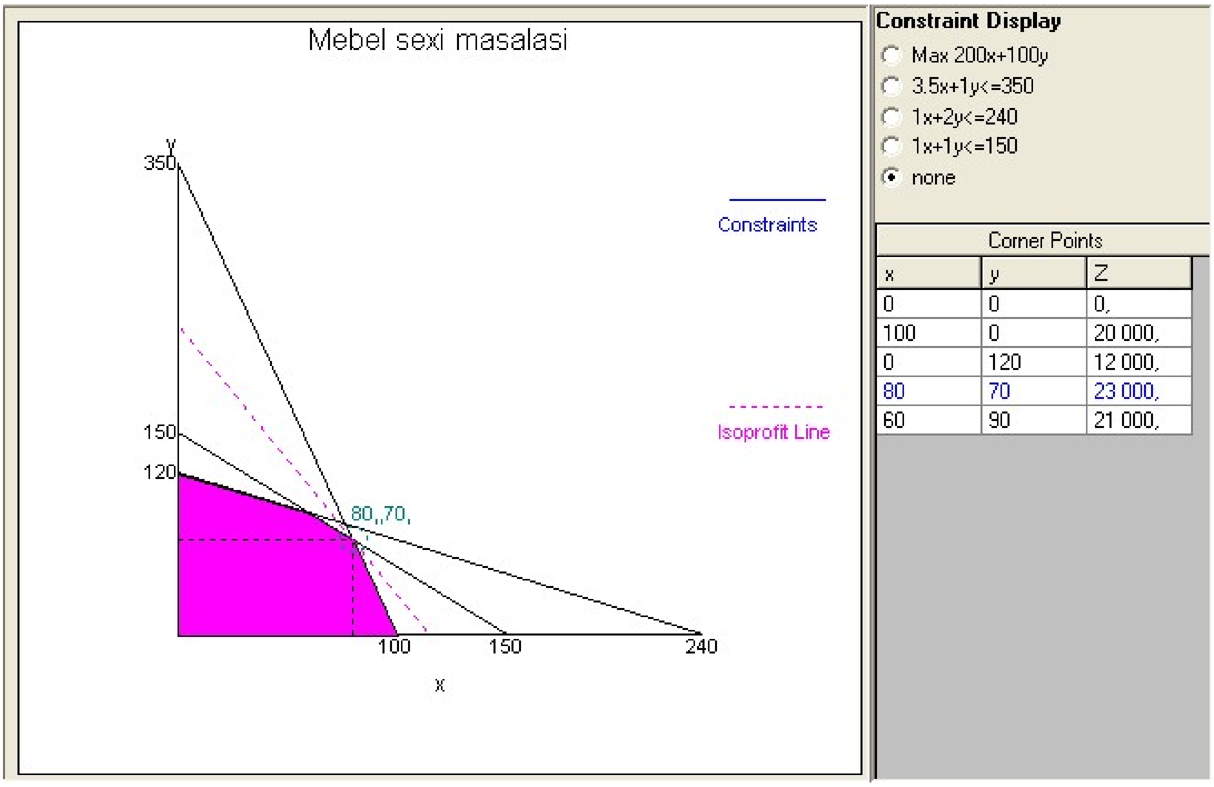
Natijalarning jadval ko'rinishidagi taqdimoti

Masala yechimi natijalarining jadval ko'rinishidagi taqdimoti 108- rasmda keltirilgan **«Linear Programming Results» oynasi**da keltiriladi. Jadvalning birinchi **«variable»** ustunida x va y asosiy o'zgaruvchilar hamda s_1, $s_2.s_3$ (slack 1, slack 2, slack 3) o'zgaruvchilar keltirilgan. Ikkinchi **«status»** ustunida o'zgaruvchilarning maqomi, ya'ni basiz yoki nobazis ekanligi berilgan. Oxirgi **«value»** ustunida (X, Y) optimal ishlab chiqarish rejasi $(80, 70)$, xom ashyo zaxirasi qoldiqlari $s_1 = 0$, $s_2 = 20$, $s_3 = 0$ qiymatlari, jadvalning oxirgi **«Optimal value (Z)»** satrida maqsad funksiyasining optimal qiymati 23000 - maksimal foyda keltirilgan.

«Linear Programming Results» oynasi natijalariga ko'ra quyidagi xulosalarni chiqara olamiz.

Bor imkoniyatlar doirasida ishlab chiqarish rejasini qanday tuzganimizda korxonaning foydasi eng katta bo'ladi?

Javob: Agar sex kundalik ishlab chiqarish rejasi $X = 80$ ta shkaf va $Y = 70$ ta tumbadan iborat bo'lsa, u holda sexning kundalik umumiy foydasi maksimal bo'lib $P = 23000\$$ ni taskil etadi. Bunda zaxiradagi DSP $(s_1 = 0)$ va ishchi kuchi $(s_3 = 0)$ to'liqligicha sarflanib, shishadan 20 m. ortib qoladi $(s_2 = 20)$.

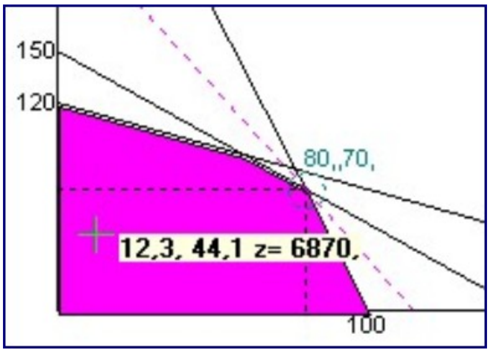


Rasm 99: Masalaning grafik usuldagi yechimi «Graph» oynasida keltiriladi

Masala yechimining grafik tasviri

«QM for Windows» dasturi ikkita noma'lumli masalalarni grafik usulda yechish imkoniyatini ham beradi. Mebel sexi haqidagi masalaning grafik yechimining dastur taqdimoti 109-rasmda keltirilgan. Bunda qora rangdagi to'g'ri chiziqlar korxona zaxirasi bilan aniqlanadigan shartlarga mos keladi. Pushti rang bilan ajratilgan soha masalaning *imkoniyatlar sohasini* aniqlaydi. Pushti rangli punktir chiziq maqsad funksiyasining optimal qiymati bilan aniqlanadi. Yashil rangli aylana optimal ishlab chiqarish rejasining geometrik tasviridir.

Rasmning o'ng tomonida keltirilgan jadvalda joiz sohani tashkil qilgan ko'pburchakning 5 ta uchi koordinatalari va bu nuqtadagi maqsad funksiyasining qiymatlari berilgan. Optimal yechimga mos kelgan holat 80; 70; 23000 ko'k rangda ajratib qo'yilgan.



Rasm 100: Interfaol grafik

Dasturning «Graph» oynasi interfaol bo'lib, kursor yordamida grafik ustida biror nuqta tanlanib olinganda shu nuqta koordinatalari va maqsad funksiyasining qiymatlarini ekranda ko'rish mumkin. Kursor harakati bilan birga ma'lumotlar ham o'zgarishi oqibatida harakat yo'nalishiga qarab maqsad funksiyasining qiymatlari osishi yoki kamayishi haqida xulosa chiqarish mumkin (100-rasmga qarang).

«Constraint Display» maydonida kerakli shart yoki maqsad funksiyasini tanlash orqali grafikda shartga mos chiziqni rang bilan ajratib olish mumkin (109-rasmga qarang).

Masalani simpleks usulda yechish

Ushbu masalani simpleks usulda yechish bilan 5.8 bo'limda shug'ullanganmiz. Jami uchta simpleks jadval to'ldirish orqali optimal yechimni hosil qilgan edik (102- rasmdagi jadvallarga qarang).

«QM for Windows» dasturining «Linear Programming» modulida simpleks usuli natijalari ***«Iterations» oynasi***da taqdim etiladi. Quyidagi 101- rasmda aynan shu jadvallar keltirilgan.

Dastur taqdim etgan simpleks jadvallar biz foydalanib kelayotgan umumiy ko'rinishi 23- rasmda keltirilgan shakldagi quyidagi jihatlari bilan farq qiladi. Dastur taqdim etgan simpleks jadvalning **«Cj»** va ***«Basic variable»*** ustunlari mos ravishda biz foydalangan shakldagi bazis o'zgaruvchilar oldidagi maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari joylashgan **«Cb»** va bazis o'zgaruvchilar joylashgan ***«B»*** to'g'ri keladi. Dastur simpleks jadvalning **«Quantity»** ustuni esa bizning jadvaldagi oxirgi **«b»** ustunga mos keladi. Dastur taqdim etgan jadvalni 5.8- bo'limda olingan natijalar bilan solishtirib ko'ring (102- rasm).

Masala koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlili

«QM for Windows» dasturi masala koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlilini o'tkazish imkoniyatini beradi. Ishlab chiqarish masalasi yechimining turg'unlik tahlilini amalga oshirishning grafik usulini 4.7-bo'limda, simpleks jadvallar asosida tahlil o'tkazishni esa 6.3- bo'limda ko'rib chiqdik.

Shuni aytib o'tish kerakki, mebel sexining o'z mahsulotlarini sotishdan ko'radigan foydasi o'zgarib turadi va bunga turli faktorlar ta'sir qiladi. Masalan:

- shkaf va tumba ishlab chiqarish uchun zarur xom ashyolar, ya'ni DSP yoki shisha

Iterations

Mebel sexi masalasi solution							
Cj	Basic Variables	Quantity	200 x	100 y	0 slack 1	0 slack 2	0 slack 3
Iteration 1							
0	slack 1	350	3,5	1	1	0	0
0	slack 2	240	1	2	0	1	0
0	slack 3	150	1	1	0	0	1
	zj	0	0	0	0	0	0
	cj-zj		200	100	0	0	0
Iteration 2							
200	x	100	1	0,2857	0,2857	0	0
0	slack 2	140	0	1,7143	-0,2857	1	0
0	slack 3	50	0	0,7143	-0,2857	0	1
	zj	20 000	200	57,1429	57,1429	0	0
	cj-zj		0			0	0
Iteration 3							
200	x	80,0	1	0	0,4	0	-0,4
0	slack 2	20,0	0	0	0,4	1	-2,4
100	y	70	0	1	-0,4	0	1,4
	zj	23 000,0	200	100	40	0	60
	cj-zj		0	0	-40,0	0	-60,0

Optimal yechim haqidagi ma'lumot uchinchi simpleks jadvalning shu maydonlarida joylashgan

Rasm 101: Masalaning simpleks jadvallari keltirilgan «Iterations» oynasi

narxining o'zgarishi;

- bozordagi shkaf va tumbalarga bo'lgan talabning o'zgarishi;
- mehnat haqining o'zgarishi va boshqalar.

Xom ashyolar narxining oshishi, mehnat haqining oshishi va talabning kamayishi natijasida mahsulot narxining tushishi foydaning kamayishiga olib keladi. Bozor sharoiti o'zgarishi mebel sexining ishlab chiqarish rejasini qayta ko'rib chiqishni taqozo etadi. Optimal ishlab chiqarish rejasini tuzish masalani yangi ma'lumotlar asosida qayta yechmasdan turib, yangi sharoit uchun ham amaldagi ishlab chiqarish rejasi optimalmi, ya'ni eng katta foydaga olib keluvchi rejami, degan savol tug'ilishi tabiiy. Masala koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlili natijalarini «QM for Windows» dasturi «Linear Programming» modulining «Ranging» natijalar oynasida taqdim etiladi (110 - rasmga qarang).

Mazkur jadval ikki qismdan iborat bo'lib, yuqori qismida maqsad funksiya koeffitsiyentlarining, quyi qismida esa shartlarning o'ng tomonlariga mos koeffitsiyentlar tahlili natijalari keltirilgan. **«Original Value»** ustunida koeffitsiyentlarning haqiqiy qiymatlari, **«Lower Bound»** va **«Upper Bound»** ustunlarida esa yechim optimalligi saqlanadigan intervalning quyi hamda yuqori chegaralari beriladi. **«Infinity»** degan yozuv «∞» degan ma'noni anglatadi.

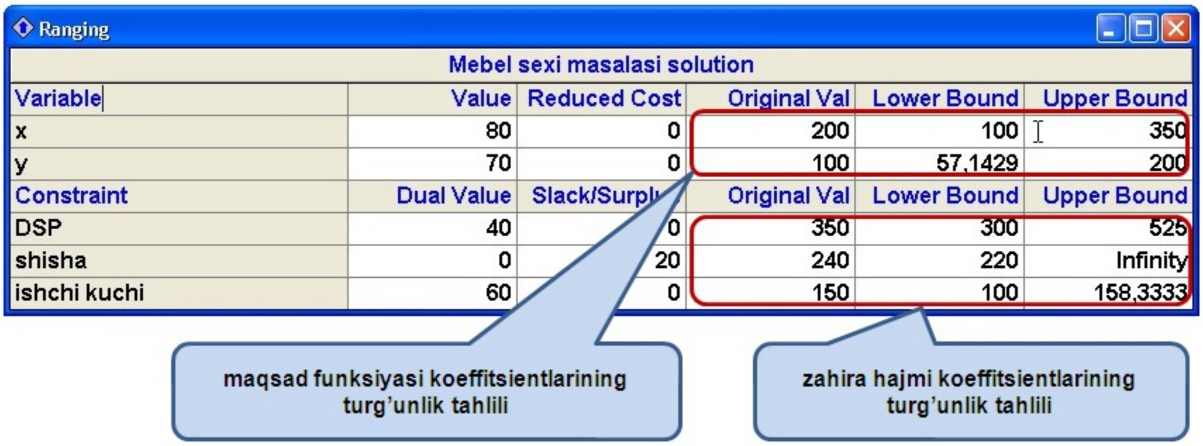
Bu oynadagi ma'lumotlarni quyidagi jadvalga jamlaymiz (11- jadval):

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		200	100	0	0	0	
s_1	0	7/2	1	1	0	0	350
s_2	0	1	2	0	1	0	240
s_3	0	1	1	0	0	1	150
z_j		0	0	0	0	0	0
c_j-z_j		200	100	0	0	0	

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		200	100	0	0	0	
x_1	200	1	2/7	2/7	0	0	100
s_2	0	0	12/7	-2/7	1	0	140
s_3	0	0	5/7	-2/7	0	1	50
z_j		200	400/7	400/7	0	0	2000
c_j-z_j		0	300/7	-	0	0	

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
		200	100	0	0	0	
x_1	200	1	0	2/5	0	-2/5	80
s_2	0	0	0	2/5	1	-12/5	20
x_2	100	0	1	-2/5	0	7/5	70
z_j		200	100	40	0	60	2300
c_j-z_j		0	0	-40	0	-60	

Rasm 102: 5.8- bo'limdan olingan masalaning simpleks jadvallari



Ranging

Mebel sexi masalasi solution

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
x	80	0	200	100	350
y	70	0	100	57,1429	200
Constraint	Dual Value	Slack/Surpl	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
DSP	40	0	350	300	525
shisha	0	20	240	220	Infinity
ishchi kuchi	60	0	150	100	158,3333

Rasm 103: «Ranging» oynasida turg‘unlik tahlili natijalari keltirilgan

Koeffitsientlar	**qiymatlari**	**quyi chegara**	**yuqori chegara**
	original val	lower bound	upper bound
X (shkaf: foyda)	**200**	100	350
Y (tumba: foyda)	**100**	57.14	200
DSP (zaxira)	**350**	300	525
Shisha (zaxira)	**240**	220	∞
Ishchi kuchi (zaxira)	**150**	100	158.33

Jadval 11: Turg'unlik tahlili natijalari

Savol: *Xom ashyo va mehnat zaxiralari hajmi (350 m. DSP, 240 m. shisha, 150 ta ishchi) va bir dona tumbadan tushadigan foyda (100\$) o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. U holda bir dona shkafdan tushadigan foyda qaysi oraliqda o'zgarganida amaldagi* $(X, Y) = (80, 70)$ *ishlab chiqarish rejasi yangi sharoit uchun ham optimalligicha qoladi?*
Javob: *Boshqa ma'lumotlar o'zgarishsiz qolganda shkafdan tushadigan foyda (100,350) oraliqda o'zgarganida amaldagi reja optimalligicha qoladi. Bunda maksimal foyda o'zgaradi.*

Korxona amaldagi $X = 80$ ta shkaf va $Y = 70$ ta tumba ishlab chiqarish rejasini amalga oshirish natijasida $P = 200 \cdot 80 + 100 \cdot 70 = 23000\$$ foyda ko'radi. Turli faktorlar (shkaf va tumba ishlab chiqarish uchun zarur xom ashyo narxining o'zgarishi, bozordagi mahsulotlarga bo'lgan talabning o'zgarishi, mehnat haqining o'zgarishi va boshqalar) ta'siri ostida, bir mahsulot realizatsiyasidan tushadigan foyda o'zgarsa, tabiiyki, umumiy foyda o'zgaradi. Misol uchun, bir dona shkafdan tushadigan foyda oshsa va 220\$ ga teng bo'lsa, u holda korxonaning umumiy foydasi $P = 220 \cdot 80 + 100 \cdot 70 = 24600\$$ ga yetar ekan. Agar korxona xom ashyo zaxirasi va ishchilar soni o'zgarishsiz qolsa, bir dona tumbadan tushadigan foyda 70\$ ligicha qolsa, bir dona shkafdan tushadigan foyda \$100 dan 350\$ gacha o'zgargan taqdirda ham amaldagi $(X, Y) = (80, 70)$ ishlab chiqarish rejasi shu sharoitda eng katta foyda keltiruvchi reja bo'lib qolar ekan. Demak, yangi tahlil va yangi reja ishlab chiqarish zaruriyati yo'q.

Savol: *Xom ashyo va mehnat zaxiralari hajmi (350 m. DSP, 240 m. shisha, 150 ta ishchi) va bir dona shkafdan tushadigan foyda (200\$) o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. U holda bir dona tumbadan tushadigan foyda qaysi oraliqda o'zgarganida amaldagi* $(X, Y) = (80, 70)$ *ishlab chiqarish rejasi yangi sharoit uchun ham optimalligicha qoladi?*
Javob: *Boshqa ma'lumotlar o'zgarishsiz qolganda tumbadan tushadigan foyda (57,14;200) oraliqda o'zgarganida amaldagi reja optimalligicha qoladi. Bunda maksimal foyda o'zgaradi.*

Xuddi yuqoridagidek, korxona xom ashyo zaxirasi va ishchilar soni o'zgarishsiz qolsa, bir dona shkafdan tushadigan foyda \$200 ligicha qolsa, bir dona tumbadan tushadigan foyda 57,14\$ dan 200\$ gacha o'zgargan taqdirda ham amaldagi $(X, Y) = (80, 70)$ ishlab chiqarish rejasi shu sharoitda eng katta foyda keltiruvchi reja bo'lib qolar ekan. Mahsulotlardan tushadigan foyda ko'rsatkichlarining bir vaqtda o'zgarishi holatii tahlili usullari mavjud bo'lib, bu kitob doirasida o'rganilmaydi.

Savol: *Shisha zaxirasi (240 m.), ishchilar soni (150 ta) va har ikki mahsulotdan tushadigan foyda (200$ va 100$)o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. DSP zaxirasi qaysi oraliqda o'zgarganida optimal reja doirasida DSP zaxirasi to'liq sarflanadi?*
Javob: *Boshqa ma'lumotlar o'zgarishsiz qolganda DSP zaxirasi (300;525) oraliqda o'zgarganida optimal reja doirasida DSP zaxirasi to'liq sarflanadi*

Masala shartlari asosida tuzilgan optimal ishlab chiqarish rejasi $(X, Y) = (80, 70)$ doirasida DSP mavjud zaxirasi uchun 350 m. to'liq sarf bo'ladi: $3,5 \cdot X + 1 \cdot Y = 3,5 \cdot 80 + 1 \cdot 70 = 280 + 70 = 350m$. Ya'ni, DSP - ishlab chiqarish uchun tanqis (kamyob, defitsit) xom ashyo bo'ladi. Mavjud DSP zaxirasi hajmi (350 m.) o'zgarishi, albatta, yangi optimal reja tuzilishini taqozo etadi. DSP zaxirasi (300 m.; 525 m.) oraliqda o'zgarganida yangi rejani amalga oshirishi DSP zaxirasi to'liq sarf bo'lishiga olib keladi, ya'ni bu xom ashyo turi tanqisligicha qoladi.

Savol: *DSP zaxirasi (350 m.), ishchilar soni (150 ta) va har ikki mahsulotdan tushadigan foyda (200$ va 100$)o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. Shisha zaxirasi qaysi oraliqda o'zgarganida optimal reja doirasida shisha zaxirasi to'liq sarflanmaydi?*
Javob: *Boshqa ma'lumotlar o'zgarishsiz qolganda shisha zaxirasi* $(220; \infty)$ *oraliqda o'zgarganida optimal reja doirasida shisha zaxirasi to'liq sarflanmaydi.*

Masala shartlari asosida tuzilgan optimal ishlab chiqarish rejasi $(X, Y) = (80, 70)$ doirasida shishaning mavjud zaxirasi 240 m. to'liq sarf bo'lmaydi, balki 20 m. shisha ortib qoladi: $1 \cdot X + 2 \cdot Y = 1 \cdot 80 + 2 \cdot 70 = 80 + 140 = 220 < 240m$. Ya'ni, shisha - ishlab chiqarish uchun tanqis bo'lmagan xom ashyo bo'ladi. Shisha zaxirasi $(220; \infty)$ oraliqda o'zgarganida optimal rejani amalga oshirishi shisha zaxirasi to'liq sarf bo'lmasligiga olib keladi, ya'ni bu xom ashyo turi notanqisligicha qoladi.

Savol: *DSP zaxirasi (350 m.), shisha zaxirasi (240 m.) va har ikki mahsulotdan tushadigan foyda (200$ va 100$)o'zgarishsiz qolgan bo'lsin. Ishchilar soni qaysi oraliqda o'zgarganida optimal reja doirasida barcha ishchilar band bo'ladi?*
Javob: *Boshqa ma'lumotlar o'zgarishsiz qolganda ishchilar soni* $(100, 158)$ *oraliqda o'zgarganida optimal reja doirasida barcha ishchilar band bo'ladi.*

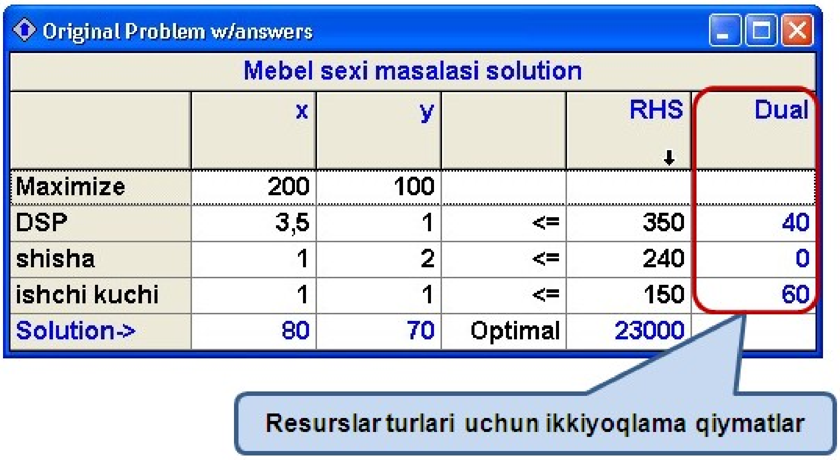
Masala shartlari asosida tuzilgan optimal ishlab chiqarish rejasi $(X, Y) = (80, 70)$ doirasida barcha ishchilar (150 ta) band bo'lishadi: $1 \cdot X + 1 \cdot Y = 1 \cdot 80 + 1 \cdot 70 = 80 + 70 = 150ta$. Ya'ni, ishlab chiqarish jarayonida mehnat kuchi tanqis bo'ladi. Mavjud ishchilar soni (150 m.)ning o'zgarishi, albatta, yangi optimal reja tuzilishini taqozo etadi. Ishchilar soni (100 ta, 158 ta) oraliqda o'zgarganida yangi rejani amalga oshirish jarayonida barcha ishchilar band bo'ladi, ya'ni mehnat kuchi tanqisligicha qoladi.

Ikkiyoqlama qiymatlar tahlili

«QM for Windows» dasturi masala uchun ikkiyoqlama qiymatlar tahlilini o'tkazish imkoniyatini beradi. Ikkiyoqlama qiymatlar amaliy ma'nosini yoritishga harakat qilamiz. Ikkiyoqlama qiymatlar har bir xom ashyo uchun aniqlanadi va xom ashyo zaxirasining bir birlikka o'zgarishi foydaning qanchaga o'zgarishini tushuntiradi. Xom ashyo turlari uchun ikkiyoqlama qiymatlar asosiy natijalar oynasida berilgan (104- rasmga qarang).

Bu oynadagi ma'lumotlarni quyidagi 12- jadvalga jamlaymiz.

Ishlab chiqarishni optimal rejalashtirish toifasidagi masalalarda ikkiyoqlama qiymatlar ishlab chiqarishni rivojlantirish uchun qo'shimcha mablag'ni qaysi zaxira hajmini oshirishga sarflash maqsadga muvofiqligini aniqlashga yordam beradi.



Mebel sexi masalasi solution					
	x	y		RHS	Dual
Maximize	200	100			
DSP	3,5	1	<=	350	40
shisha	1	2	<=	240	0
ishchi kuchi	1	1	<=	150	60
Solution->	80	70	Optimal	23000	

Rasm 104: "Original Problem w/answers" oynasi

xom ashyo	ikkiyoqlama qiymat (dual)
DSP	40
Shisha	0
Ishchi kuchi	60

Jadval 12: Ikkiyoqlama qiymatlar.

Savol: *xom ashyo va mehnat zaxiralaridan qay birining oshirilishi foydaning tezroq o'sishiga olib keladi?*
Javob: *Ikkiyoqlama qiymati nolga teng resurs zaxirasini oshirish foydaning ko'payishiga olib kelmaydi. Ikkiyoqlama qiymati eng katta bo'lgan resurs zaxirasini oshirish foydaning tezroq ko'payishiga olib keladi.*

DSP uchun ikkiyoqlama qiymat 40 ga teng. Bu degani DSP zaxirasini bir birlik, ya'ni 1 metrga oshirish korxona daromadini 40$ oshishiga olib kelar ekan. Shisha uchun ikkiyoqlama qiymat 0 ga teng. $(X, Y) = (80, 70)$ optimal reja doirasida shisha zaxirasi to'liq sarflanmaydi, ya'ni 20 m. shisha ortib qoladi. Shuning uchun shisha zaxirasini oshirish shu sharoitda foydaning ortishiga olib kelmaydi. Ishchi kuchi resursi uchun ikkiyoqlama qiymat 60 ga teng. Bu degani ishchilar sonini bir birlikka, ya'ni 1 ta odamga oshirish korxona daromadini 60$ oshishiga olib kelar ekan. Shuning uchun ishlab chiqarishni rivojlantirish uchun qo'shimcha mablag' kiritish imkoniyati bo'lsa, avvalo e'tiborni mehnat resurslariga qaratish kerak.

Dastlabki masalaga nisbatan ikkiyoqlama masala tuzish

O'zaro ikkiyoqlama masalalar va ularning amaliy (iqtisodiy) talqini haqida 7-bo'limda so'z yuritgan edik. Dastlabki masala uchun ikkiyoqlama masala modeli aniqlash qoidalarini esga olamiz.

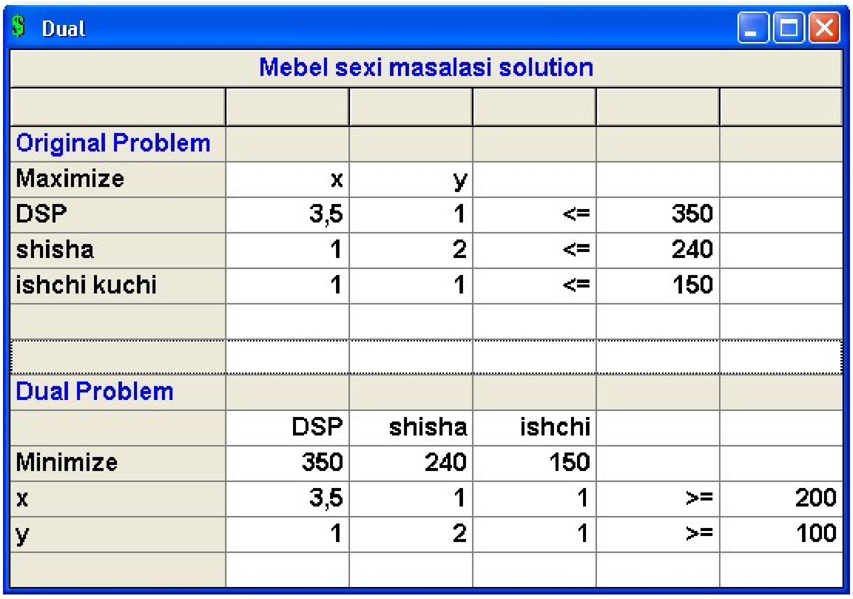
- Dastlabki masala maksimallashtirish masalasi bo'lgani uchun ikkinchi, ya'ni unga ikkiyoqlama masala minimallashtirish masalasi bo'ladi.
- Birinchi - maksimallashtirish masalasida shartlarni «$\leq$» tengsizlik ko'rinishiga keltirib yozib olish kerak. Shunda ikkinchi masalada shartlarni «$\geq$» tengsizlik ko'rinishiga keltirib yozib olamiz.

- Birinchi masalada no'malumlar soni 2 ta bo'lgani uchun ikkinchi masalada shartlar soni 2 ta bo'ladi.
- Birinchi masalaning maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari ikkinchi masala shartlarining o'ng tomoni koeffitsiyentlari bo'ladi.
- Birinchi masalada shartlar soni 3 ta bo'lgani uchun ikkinchi masalada noma'lumlar soni soni 3 ta bo'ladi.
- Birinchi masala shartlarining o'ng tomoni koeffitsiyentlari ikkinchi masalaning maqsaq funksiyasi koeffitsiyentlari bo'ladi.
- Va nihoyat, birinchi va ikkinchi masala shartlarini aniqlaydigan tengsizliklar koeffitsiyentlaridan iborat matritsalar o'zaro transponirlangan bo'ladi.

Barcha talablarni e'tiborga olib o'zaro ikkiyoqlama masalalarni keltiramiz. Bunda shartli ravishda birinchi masala no'malumlarini x_1 dva x_2 deb hamda ikkinchi masala nova'lumlarini y_1, y_2 va y_3 deb belgilab oldik.

Birinchi masala	***Ikkinchi masala***
$P = 200x_1 + 100x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3,5x_1 + x_2 \leq 350, \\ x_1 + 2x_2 \leq 240, \\ x_1 + x_2 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$	$Z = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 \to \min, \quad \begin{cases} 3,5y_1 + y_2 + y_3 \geq 200, \\ y_1 + 2y_2 \geq 100, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0. \end{cases}$

Dastlabki masala ikkiyoqlama masala tuzish natijalari dasturnig «Linear Programming» modulining «Dual» natijalar oynasida taqdim etiladi (105- rasmga qarang).



Mebel sexi masalasi solution					
Original Problem					
Maximize	x	y			
DSP	3,5	1	<=	350	
shisha	1	2	<=	240	
ishchi kuchi	1	1	<=	150	
Dual Problem					
	DSP	shisha	ishchi		
Minimize	350	240	150		
x	3,5	1	1	>=	200
y	1	2	1	>=	100

Rasm 105: «Dual» oynasi natijalari

Yuqorida keltirilgan o'zaro ikkiyoqlama masalalar matematik modellari bilan «Dual» oynasi natijalarini solishtirib tegishli xulosalar chiqarish mumkin.

Shu bilan ishlab chiqarishning optimal rejasini tuzish haqidagi masalani «POM QM for Windows» dasturining «Linear Programming» modulida yechish jarayonida dastur imkoniyatlari bilan to'liq tanishib chiqdik.

9.3 Chorva mollari uchun ratsion tuzish masalasini «POM QM for Windows» dasturida yechish

Yuqorida 3.2- bo'limda chorva mollari uchun ratsion tuzish haqidagi amaliy masalaning matematik modelini qurib, uni grafik va simpleks usulda yechgan edik. Endi esa ushbu chiziqli dasturlash masalasini maxsus dasturda yechish imkoniyatlarini ko'rib chiqamiz. Keling, masala shartlarini esga olaylik.

Ratsion masalasi:

To'liq qiymatli ozuqa ratsioni chorva mollari mahsuldorligini oshirishning eng muhim shartlaridan biridir. Vazni 400 kg. va 10 l. sut beradigan mollar uchun bir kunlik ovqatlanish ratsionini shunday tuzish kerakki, oziq moddalar 15 birlikdan, protein miqdori 840 gr.dan, karotin esa 320 mg.dan kam bo'lmasin. Shu bilan birga, ratsion xarajatlari minimal bo'lsin.

Quyidagi 13- jadvalda 1 kg. arpa va qandlavlagi uchun oziq va foydali moddaning miqdori, 1 kg. ozuqaning narxi keltirilgan.

mahsulot	oziq moddalar	protein	karotin	1 kg. ozuqa narxi
Arpa	0.50	32	30	2
Qandlavlagi	0.92	19	0	1.5

Jadval 13: Masala ma'lumotlari.

Masalaning matematik modelini berishdan avval ayrim belgilashlarni esga olaylik. Kunlik ratsiondagi arpa miqdorini X va qandlavlagi miqdorini Y deb belgilaymiz. C - qoramol kundalik ratsioni narxi bo'lsin.

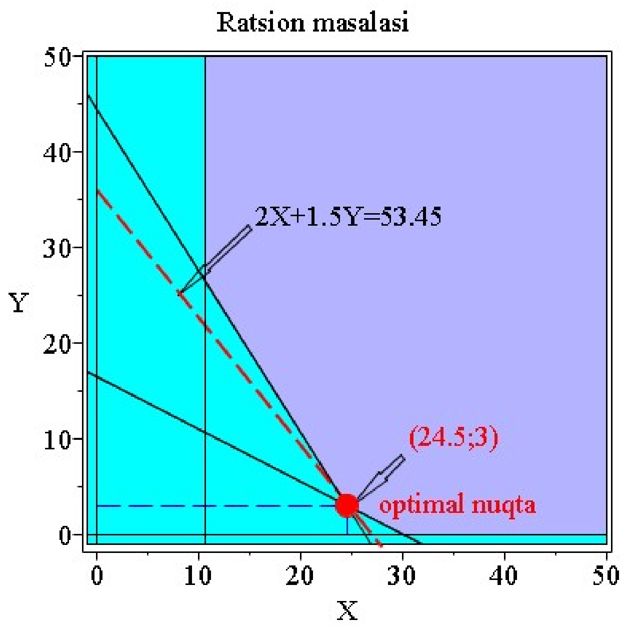
Masalaning matematik modeli

$$C = 2X + 1,5Y \to \min,$$

$$\begin{cases} 0,50X + 0,92Y \geq 15, \\ 32X + 19Y \geq 840, \\ 30X \geq 320, \\ X \geq 0, \quad Y \geq 0. \end{cases}$$

Masalani grafik usulda yechish bilan 3.2- bo'limda shug'ullanib quyidagi natijalarni olgan edik (106-rasmga qarang).

Masalani simpleks usulda yechish bilan 5.9 bo'limda tanishganmiz.



Masalaning yechimi:
Qoramolning kundalik ratsionida $x = 24.5$ kg arpa va $y = 3$ kg qandlavlagi bo'lgan taqdirda ratsion barcha talablarga javob bergan holda narxi eng arzon $C = 53.45$ shartli pul birligi bo'ladi.

Rasm 106: Masalani grafik usulda yechish

Masalani «POM QM for Windows» dasturi yordamida yechish

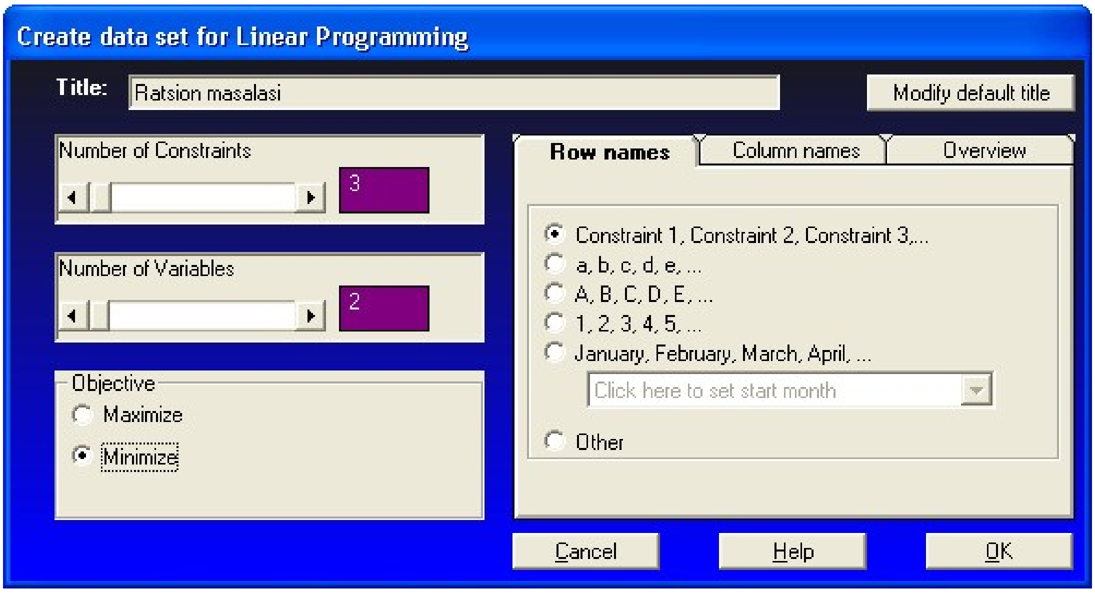
Chorva mollari uchun ratsion tuzish haqidagi masalani maxsus «QM for Windows» dasturida yechish jarayonini ko'rib chiqamiz. Buning uchun «QM for Windows» dasturining «Linear Programming», y'ani «Chiziqli dasturlash» moduliga murojaat qilish lozimligini eslatib o'tamiz.

Dasturga masala shartlarini kiritish

Dasturga masala parametrlarini kiritish uchun masala nomini, noma'lumlan sonini, shartlar sonini va maqsadimizni aniqlashimiz kerak (107- rasmga qarang). Vazni 400 kg. va 10 litr sut beradigan chorva mollari uchun bir kunlik ovqatlanish ratsioni haqidagi masalani qisqa qilib *«Ratsion masalasi»* deb ataymiz. Masaladagi noma'lumlar soni ikkita bo'lib, kundalik ratsiondagi arpa miqdori X va qandlavlagi miqdori Y dir. Masala shartlari uchta bo'lib, kundagik ratsiondagi oziq moddalar, protein va karotinlarning minimal miqdorlari shartlardir. Masalani yechishdan maqsad - maqsad funksiyasi narxning **minimizatsiya**sidir. Shunday qilib:

· masala nomi (Title): ratsion masalasi
· shartlar soni (number of constraints):3
· o'zgaruvchilar soni (number of variables):2
· maqsad (objective): minimizatsiya(minimize)

Navbatdagi oyna jadvalining markaziy qismiga masalaning maqsad funksiyasi va shartlari koeffitsiyentlarini kiritamiz. Ma'lumotlar kiritilgandan so'ng masalaning matematik modeli oynaning o'ng tomonida akslanadi (108- rasmga qarang). Barcha ma'lumotlar to'g'ri kiritilganiga ishonch hosil qilgach, masalani yechish uchun «Solve» tugmasini bosamiz.



Rasm 107: Masalaning dastlabki ma'lumotlarini kiritish

Ratsion masalasi					
	X1	X2		RHS	Equation form
Minimize	2	1,5			Min 2X1 + 1.5X2
oziq moddalar	,5	,92	>=	15	.5X1 + .92X2 >= 15
protein	32	19	>=	840	32X1 + 19X2 >= 840
karotin	30	0	>=	320	30X1 >= 320

Rasm 108: Masalaning parametrlari kiritilgan oyna

Natijalarning jadval va grafik ko'rinishidagi taqdimotlari

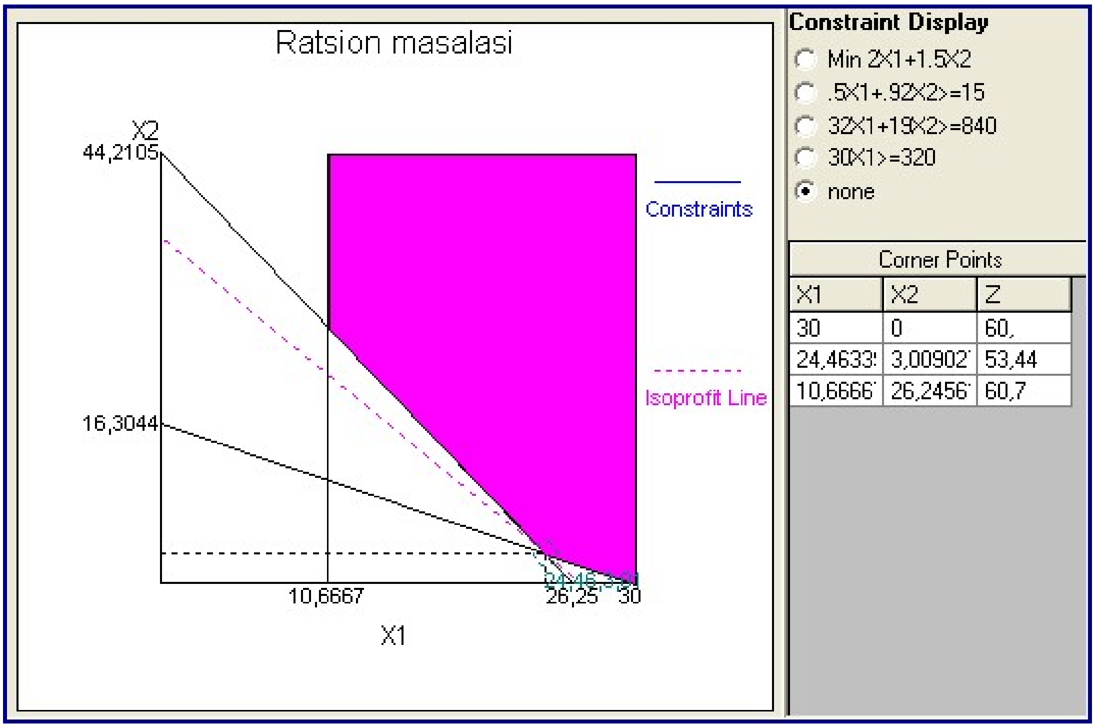
Masala yechimi natijalarining jadval taqdimoti 109- rasmda keltirilgan. Jadvalning markaziy qismida qora shrift bilan masala koeffitsiyentlari berilgan. Ko'k rangli shriftda hisoblash natijalari berilgan. Jadvalning ohirgi satrida optimal ratsion $(X, Y) = (24,4634; 3,009)$ va maqsad funksiyasining optimal qiymati - minimal narx $Cmin = 53,4403$ keltirilgan.

Ratsion masalasi grafik yechimining dastur taqdimoti 110- rasmda keltirilgan. Bunda qora rangdagi to'g'ri chiziqlar masalaning oziq moddalar, protein va karotin minimal miqdori bilan aniqlanadigan shartlarga mos keladi. Pushti rang bilan ajratilgan soha masalaning *imkoniyatlar sohasini* aniqlaydi. Pushti rangli punktir chiziq maqsad funksiyasining optimal qiymati bilan aniqlanadi. Yashil rangli aylana optimal ishlab chiqarish rejasining geometrik tasviridir.

Linear Programming Results

Ratsion masalasi solution		
Variable	Status	Value
X1	Basic	24,4634
X2	Basic	3,009
surplus 1	NONBasic	0
surplus 2	NONBasic	0
surplus 3	Basic	413,9017
Optimal Value (Z)		53,4403

Rasm 109: Natijalar jadvali



Rasm 110: Ratsion masalasi yechimining grafigi

9.4 Investitsiya portfeli haqidagi masalani «POM QM for Windows» dasturida yechish

Yuqorida 3.3- bo'limda imtiyozli kreditlar berish bilan bogliq investitsiya haqidagi moliya sohasiga oid masalaning matematik modelini qurib, 5.10- bo'limda uni simpleks usulda yechgan edik. Endi esa ushbu masalani maxsus kompyuter dasturida yechish imkoniyatlarini ko'rib chiqamiz. Masala shartlarini yana bir bor esga olaylik.

Investitsiya portfeli masalasi

O'zbekiston qayta tiklash va taraqqiyot banki yordam tariqasida moliyaviy ahvoli og'ir korxonalarga 100000$ *imtiyozli kredit bermoqchi. Bank kengashi bu mablag'ni ikkita yo'nalish – qurilish sohasi ("Uy-joy mulk"va "Uy qurish"firmalari) va sanoatga ("Toshkent"poyabzal fabrikasi, metallurgiya sohasi - Bekobod metallurgiya zavodi va Olmaliq metallurgiya zavodi) ajratdi. Har bir tashkilot bilan bog'liq bo'lgan kredit munosabati o'rganildi va kreditlar quyidagi foiz stavkalari bilan qaytarilishi kelishildi: "Uy-joy-mulk"kompaniyasi - foiz stavkasi - 0.06, "Uy-qurish"firmasi - 0.05, "Toshkent"poyabzal fabrikasi - 0.07, Bekobod metallurgiya zavodi - 0.06, Olmaliq metallurgiya zavodi - 0.05. Kreditdan olinadigan foydani maksimallashtiruvchi optimal kredit portfelini aniqlang.*

Bank kengashi quyidagi ustuvor shartlar bajarilishini e'tirof etdi:

- *qurilish sohasiga mablag'ning kamida 40% ajratilishi kerak;*
- *umumiy mablag'ning kamida 25% metallurgiya tarmog'iga ajratilishi lozim;*
- *"Uy-qurish"firmasiga ajratiladigan kredit* 6000$ *dan kam bo'lmasligi shart;*
- *Olmaliq metallurgiya zavodiga ajratiladigan kredit ham* 4000$ *dan kam bo'lmasligi shart.*

Barcha shartlarni e'tiborga olgan holda kreditdan olinadigan foydani maksimallashtiruvchi optimal kredit portfelini aniqlang.

Masalaning matematik modelini berishdan avval ayrim belgilashlarni yodga olaylik.
- X_1 - "Uy-joy mulk"firmasiga ajratilgan kredit miqdori;
- X_2 - "Uy qurilish"firmasiga ajratilgan kredit miqdori;
- X_3 - "Toshkent"poyabzal fabrikasiga ajratilgan kredit miqdori;
- X_4 - Bekobod metallurgiya zavodiga ajratilgan kredit miqdori;
- X_5 - Olmaliq metallurgiya zavodiga ajratilgan kredit miqdori;
- F - kreditlardan tushadigan jami foyda miqdori.

Investitsiya portfeli haqidagi masalaning matematik modeli

$$F = 0.06 \cdot X_1 + 0.05 \cdot X_2 + 0.07 \cdot X_3 + 0.06 \cdot X_4 + 0.05 \cdot X_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 100000, \\ X_1 + X_2 \geq 40000, \\ X_4 + X_5 \geq 25000, \\ X_2 \geq 6000, \\ X_5 \geq 4000, \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0, \quad X_5 \geq 0. \end{cases}$$

Masalani «POM QM for Windows» dasturi yordamida yechish

Chiziqli dasturlash masalasidagi noma'lumlar soni beshta bo'lgani uchun ushbu masalani grafik usulda yechish mumkin emas. Masalani yechish uchun umumiy ko'rinishdagi chiziqli dasturlash masalasini yechishning maxsus **simpleks usuli** qo'llaniladi. «Investitsiya portfeli» haqidagi masalani «QM for Windows» dasturida yechish uchun dasturning «Linear Programming», ya'ni «Chiziqli dasturlash» moduliga murojaat qilamiz. Dasturga masala parametrlarini kiritish uchun masalaning nomini, noma'lumlar soni, shartlar soni va maqsadimizni aniqlashimiz kerak.

· masala nomi (Title): investitsiya portfeli
· shartlar soni (number of constraints):5
· o'zgaruvchilar soni (number of variables):5
· maqsad (objective): maksimizatsiya(maximize)

Dasturga masala parametrlari kiritilgach, masalaning matematik modeli muloqot oynasining o'ng tomonida akslanadi (111- rasm).

Investitsiya portfeli masalasi								
	X1	X2	X3	X4	X5		RHS	Equation form
Maximize	,06	,05	,07	,06	,05			Max .06X1 + .05X2 + .07X3 + .06X4 + .05X5
JAMI KREDIT	1	1	1	1	1	=	100000	X1 + X2 + X3 + X4 + X5 = 100000
qurilish sohasi	1	1	0	0	0	>=	40000	X1 + X2 >= 40000
metallurgiya tarmog'i	0	0	0	1	1	>=	25000	X4 + X5 >= 25000
Uy qurilish firmasi	0	1	0	0	0	>=	6000	X2 >= 6000
Olmaliq zavodi	0	0	0	0	1	>=	4000	X5 >= 4000

Rasm 111: Matematik modelni aniqlash

Natijalarning taqdimoti

Masala echimi natijalarining jadval taqdimoti 112-rasmda keltirilgan.

Natijalar jadvali asosida quyidagi savollarga javob beramiz:

Bank kengashi kreditga ajratilgan mablag'ni qanday taqsimlashi kerak?

O'zbekiston qayta tiklash va taraqqiyot banki yordam tariqasida moliyaviy ahvoli og'ir korxonalarga bermoqchi bo'lgan 100000$ imtiyozli kreditni quyidagicha taqsimlashi kerak:

- «Uy-joy mulk» firmasiga - $X_1 = 34000\$$
- «Uy qurilish» firmasiga - $X_2 = 6000\$$
- «Toshkent» poyafzal fabrikasiga - $X_3 = 35000\$$
- Bekobod metallurgiya zavodiga - $X_4 = 21000\$$
- Olmaliq metallurgiya zavodiga - $X_5 = 4000\$$

Bank kreditdan oladigan maksimal foyda nimaga teng?

Investitsiya portfeli masalasi solution		
Variable	Status	Value
X1	Basic	34000
X2	Basic	6000
X3	Basic	35000
X4	Basic	21000
X5	Basic	4000
artfcl 1	NONBasic	0
surplus 2	NONBasic	0
surplus 3	NONBasic	0
surplus 4	NONBasic	0
surplus 5	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		6250

Rasm 112: Natijalar jadvali

O‘zbekiston qayta tiklash va taraqqiyot banki uchun ushbu optimal kredit portfelidan olinadigan maksimal foyda 6250$ ga teng.

Qurilish sohasiga ajratilgan jami kreditlar qanchaga teng?

Bank qurilish sohasiga, ya’ni «Uy-joy mulk» va «Uy qurilish» firmalariga ajratgan jami kredit

$$X_1 + X_2 = 34000 + 6000 = 40000\$$$

ga teng.

Qurilish sohasiga ajratilgan kreditlardan tushadigan foyda nimaga teng?

Bankning qurilish sohasiga ajratgan jami kreditdan oladigan foydasi

$$0.06 \cdot X_1 + 0.05 \cdot X_2 = 0.06 \cdot 34000 + 0.05 \cdot 6000 = 2040 + 300 = 2340\$$$

ga teng.

Sanoat sohasiga ajratilgan jami kreditlar qanchaga teng?

Bank sanoat sohasiga, ya’ni «Toshkent» poyafzal fabrikasi, Bekobod va Olmaliq metallurgiya zavodlariga ajratgan jami kredit

$$X_3 + X_4 + X_5 = 35000 + 21000 + 4000 = 60000\$$$

ga teng.

Sanoat sohasiga ajratilgan kreditlardan tushadigan foyda nimaga teng?

Bankning sanoat sohasiga ajratgan jami kreditdan oladigan foydasi

$$0.07 \cdot X_3 + 0.06 \cdot X_4 + 0.05 \cdot 4000 = 0.07 \cdot 35000 + 0.06 \cdot 21000 + 0.05 \cdot 4000 =$$

$$= 2450 + 1260 + 200 = 3910\$$$

ga teng.

Metallurgiya tarmog'iga ajratilgan jami kreditlar qanchaga teng?

Bank metallurgiya tarmog'iga, ya'ni Bekobod va Olmaliq metallurgiya zavodlariga ajratgan jami kredit

$$X_4 + X_5 = 21000 + 4000 = 25000\$$$

ga teng.

Metallurgiya tarmog'iga ajratilgan kreditdan tushadigan foyda nimaga teng?

Bankning metallurgiya tarmog'iga ajratgan jami kreditdan oladigan foydasi

$$0.06 \cdot X_4 + 0.05 \cdot 4000 = 0.06 \cdot 21000 + 0.05 \cdot 4000 = 1260 + 200 = 1460\$$$

ga teng.

9.5 Butun sonli dasturlash masalasini «POM QM for Windows» dasturida yechish

8.2 - bo'limda ishlab chiqarishni kengaytirish haqidagi amaliy masalaning matematik modelini qurib, uni yechgan edik. Endi esa ushbu butun sonli chiziqli dasturlash masalasini maxsus dasturda yechish imkoniyatlarini o'rganib chiqamiz. Keling, masala shartlarini esga olaylik.

Ishlab chiqarishni kengaytirish masalasi:

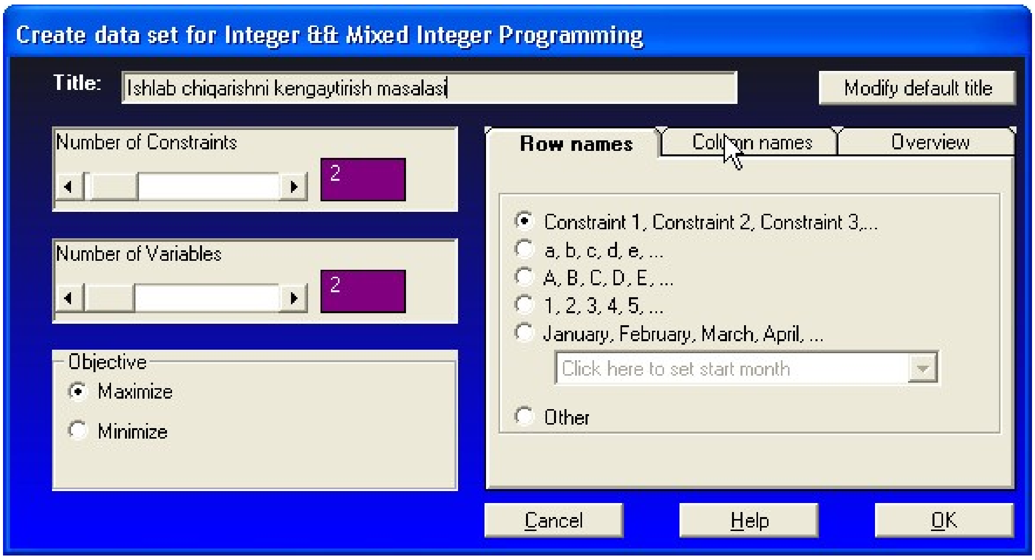
Firma ishlab chiqarishni kengaytirish maqsadida 19/3 m^3 maydon va dastgohlarni sotib olish uchun esa 10 ming pul birligi ajratdi. Firma ikki turdagi dastgohlarni sotib olish niyatida. Birinchi tur dastgohning bir komplekti 1 ming pul birligiga ikkinchi tur dastgohniki esa 3 ming pul birligiga teng. Birinchi turdagi dastgoh ishlab chiqarishni kuniga 2 birlikka ikkinchi tur dastgoh esa 4 birlikka oshirishi ma'lum. Birinchi tur dastgohlarni joylashtirish uchun 2 m^2 ikkinchi tur dastgohlar uchun esa 1 m^2 maydon kerak bo'ladi. Har bir dastgohlardan qanchadan sotib olinganda ishlab chiqarish samaradorligi eng yuqori bo'ladi?

Masalaning matematik modeli quyidagicha edi:

$$\begin{array}{l} z = 2x_1 + 4x_2 \to \max \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases} \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \\ x_1,\, x_2 - \text{ butun sonlar.} \end{array}$$

Bunda x_1, x_2 -xarid qilinadigan 1- va 2- tur dastgohlar soni, z - ishlab chiqarish samaradorligi.

Masalani «POM QM for Windows» dasturi yordamida yechish



Rasm 113: Dastlabki oyna

Ushbu masalani maxsus «QM for Windows» dasturida yechish uchun dasturning «Integer & Mixed Integer Programming» moduliga murojaat qilamiz. Masala ma'lumotlarini kiritishning dastlabki oynasi 113 - rasmda keltirilgan.

· masala nomi (Title): Ishlab chiqarishni kengaytirish masalasi
· shartlar soni (number of constraints):2
· o'zgaruvchilar soni (number of variables):2
· maqsad (objective): maksimizatsiya(maximize)

Masala parametrlarini aniqlagach, «OK» tugmasini bosamiz. Navbatdagi oynada (113-rasm) cheklanishlarning shartli nomlari - «maydon», «mablag» va noma'lumlarning «x_1», «x_2» belgilanishlarini, shundan so'ng qolgan ma'lumotlarni ham kiritamiz. Jadvalning oxirgi satrida x_1 va x_2 o'zgaruvchilar butun ekanligini ko'rsatamiz:

$$\text{«Variable type»} = \text{«integer»}.$$

	X1	X2		RHS	Equation form
Maximize	2	4			Max 2X1 + 4X2
maydon	2	1	<=	6,33	2X1 + X2 <= 6.333333
mablag'	1	3	<=	10	X1 + 3X2 <= 10
Variable type	Integer	Integer			

Rasm 114: Ma'lumotlarni kiritish

Masalaning yechimining jadval ko'rinishidagi taqdimoti «Original Problem w/answers» oynasida beriladi (115-rasmga qarang).

Ishlab chiqarishni kengaytirish masalasi solution				
	X1	X2		RHS
Maximize	2	4		
maydon	2	1	<=	6,33
mablag'	1	3	<=	10
Variable type	Integer	Integer		
Solution->	1	3	Optimal Z->	14

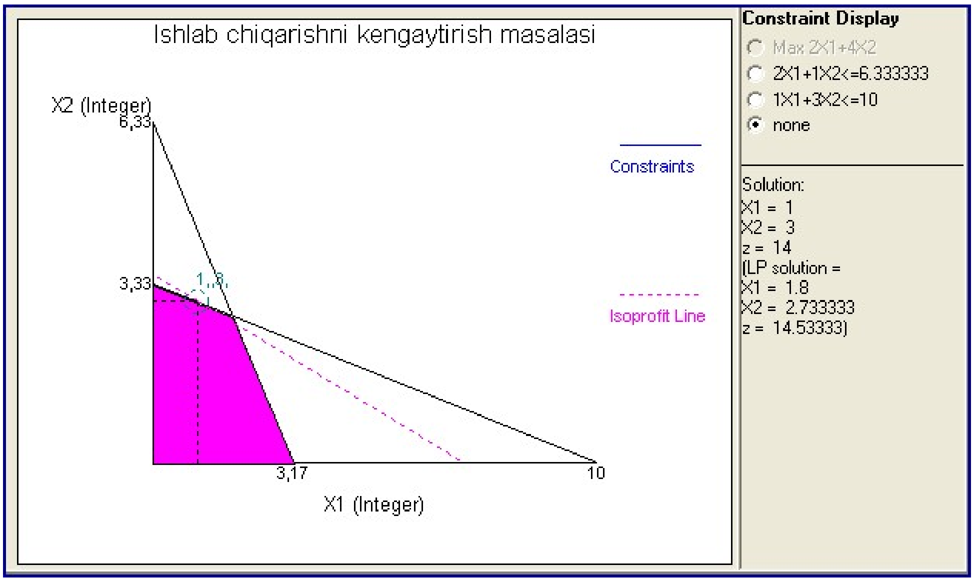
Rasm 115: Masala yechimining jadval ko'rinishi

Masalaning yechimi $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ va $z_{max} = 14$ bo'ladi. Yani ishlab chiqarishni kengaytirish uchun 1 dona 1- tur dastgohdan va 3 dona 2- tur dastgohdan xarid qilinsa, ishlab chiqish samaradorligi eng yuqori 14 ko'satkichga erishadi.

Masala yechimining grafik ko'rinishidagi taqdimoti «Graph> oynasida beriladi (116-rasm). Rasmning o'ng tomonida butun sonli chiziqli dasturlash masalasi yechimi bilan birga chiziqli dasturlash masalasi yechimi ham berilgan:

$$\text{Solution:} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad z = 14.$$

$$\text{LP Solution:} \quad x_1 = 1.8, \quad x_2 = 2.73333, \quad z = 14.5333.$$



Rasm 116: Masala yechimining grafik ko'rinishi

Masalani tarmoqlar va chegaralar usuli yordamida yechish natijalari «Iteration Results» oynasida beriladi (117-rasm).

Ishlab chiqarishni kengaytirish masalasi solution						
Iteration	Level	Added constraint	Solution type	Solution Value	X1	X2
			Optimal	14	1	3
1	0		NONinteger	14,53	1,8	2,73
2	1	X1<= 1	INTEGER	14	1	3
3	1	X1>= 2	Suboptimal	13,33	2	2,33

Rasm 117: «Iteration Results» oynasi

10 Vaziyatlar tahlili

Ushbu bo’limda chiziqli dasturlash masalasiga keltiriladigan ayrim muammoli vaziyatlar keltirilgan. Ulardan birinchisi «Partiya dasturining saylovoldi targ‘ibot kompaniyasi masalasi» namuna sifatida tahlil qilib chiqilgan bo’lib, qolgan vaziyatlar tahlili o’quvchiga havola qilinadi.

CASE STUDY

Vaziyatlar tahlili

10.1 Partiya dasturining saylovoldi targ‘ibot kompaniyasi masalasi

Muammoning qo‘yilishi. Quyida yana bir masala - targ‘ibot haqidagi amaliy masala uchun uning matematik modelini tuzish va hosil bo‘lgan chiziqli dasturlash masalasini yechish haqida gap boradi.

Targ‘ibot masalasi:

Siyosiy partiya navbatdagi saylov oldidan dasturini targ‘ibot qilish va ko‘proq saylovchilarni dastur bilan tanishtirmoqchi. Buning uchun mahalliy axborot vositasidan unumli foydalanib, imkon qadar ko‘proq fuqarolarni o‘z dasturi bilan tanishtirish maqsadida o‘z targ‘ibot kompaniyasini rejalashtirmoqda. Hududlardagi holat o‘rganib chiqilishi va samarali targ‘ibot kompaniyasi o‘tkazilishi zarur.

Hududlardagi holat o‘rganib chiqildi va quyidagi ma’lumotlar olindi:

- Targ‘ibot uchun ikki turdagi mahalliy axborot vositalari, ya’ni hududlardagi mahalliy televidenie va mahalliy radio xizmatidan foydalanish zarur.
- Targ‘ibot uchun mahalliy aholini ikki toifaga ajratib tahlil etish kerak, ya’ni 18 yoshdan 40 yoshgacha bo‘lgan fuqarolar va 40 yoshdan katta fuqarolar.
- Turli toifadagi odamlar uchun televidenie va radio muxlislari soni o‘rganildi.

- Birinchi va ikkinchi toifadagi odamlar uchun televidenie va radio orqali targ‘ibot samaradorligi baholandi.
- Televidenie va radio orqali chiqishlarning narxlari aniqlandi.
- Mahalliy televidenie va radioda mumkin bo‘lgan chiqishlar soni aniqlandi.

Barcha ma’lumotlar quyidagi jadvalga jamlandi (14-jadval).

	mahalliy televidenie	**mahalliy radio**
18 yoshdan 40 yoshgacha bo‘lgan fuqarolar soni	25 000	20 000
18 - 40 yosh uchun targ‘ibot samaradorligi	0,8	0.5
40 yoshdan katta bo‘lgan fuqarolar soni	20 000	50 000
40 yoshdan kattalar uchun targ‘ibot samaradorligi	0,5	0.8
har bir chiqishning o‘rtacha narxi (ming so‘m)	300	195
maksimal chiqishlar soni	25	20

Jadval 14: Ma’lumotlar jadvali.

Partiya rahbari kamida 310000 nafar 18 yoshdan 40 yoshgacha bo‘lgan va kamida 400000 nafar 40 yoshdan katta fuqarolarni o‘z dasturi bilan tanishtirish uchun yuqoridagi axborot vositalaridan foydalanish bo‘yicha optimal qaror tayyorlash masalasini qo‘ydi.

Quyidagi savollarga javob berish talab qilindi:

1. Bu maqsadga erishish uchun necha marotaba mahalliy televidenie va radioda chiqishlar qilish kerak?
2. Mahalliy televidenie va radioda chiqishlarning umumiy xarajatlari qancha?
3. Har ikki turdagi axborot vositasida chiqishlarning xarajati qanday?
4. Qancha fuqarolar dasturdan xabardor qilinishi kutilmoqda?

Masalaning matematik modeli. Masalaning matematik modelini tuzush uchun quyidagilarni aniqlab olamiz:

Boshqaruv muammosi	Partiya dasturining targ‘ibot ishlarini samarali tashkil etish.
Maqsad	Kam moddiy xarajatlar bilan mo‘ljallangan sondagi fuqarolarga partiya dasturi haqida ma’lumot berish.
Cheklanishlar	Har bir toifadan eng kamida qamrab olinishi kerak bo‘lgan fuqarolar soni.
Masala o‘zgaruvchilari	Mahalliy televideniedagi va mahalliy radiodagi chiqishlar soni.

Masala parametrlari

Turli toifadagi fuqarolar soni, turli toifadagi fuqarolar uchun televidenie va radio orqali qilingan targ‘ibot samaradorligi, mahalliy televidenie va radioning xizmat ko‘rsatish imkoniyati mavjud hududlar soni, televidenie va radiodagi har bir chiqishning o‘rtacha narxlari.

Masala parametrlari 14- jadvalda keltirilgan.

Belgilashlarni kiritish

Masalaning matematik modelini yozishdan avval ayrim belgilashlarni kiritib olamiz. Partiyaning mahalliy televidenie orqali rejalashtirilayotgan chiqishlari soni X_1 va mahalliy radio orqali rejalashtirilayotgan chiqishlari soni X_2 bo‘lsin. U holda targ‘ibot kompaniyasi uchun jami xarajatlar har ikki turdagi targ‘ibot xarajatlari yig‘indisidan iboratdir. Agar mahalliy televidenieda bir marotaba chiqishning narxi 300 ming so‘m bo‘lsa, X_1 marta chiqishning umumiy xarajati $300 \cdot X_1$ ga teng bo‘ladi. Xuddi shu kabi mahalliy radioda bir marotaba chiqishning narxi 195 ming so‘m bo‘lsa, X_2 marta chiqishning umumiy xarajati $195 \cdot X_2$ ga teng bo‘ladi. Shunda jami targ‘ibot xarajatlari $F = 300 \cdot X_1 + 195 \cdot X_2$ ga teng bo‘ladi.

Maqsad funksiyasi

Jami targ‘ibot xarajatlari quyidagicha aniqlanadi:

$$F = 300 \cdot X_1 + 195 \cdot X_2$$

Maqsad funksiyasi targ‘ibot xarajatlari bilan aniqlangani uchun uni minimallashtirish masalasini qo‘yamiz. xarajatlarning eng kichik qiymati nolga teng bo‘lib, bu qiymat umuman televidenie va radioda chiqishlar bo‘lmagan hol, ya’ni $X_1 = 0$ va $X_2 = 0$ ga mos keladi. Ammo masala shartlariga ko‘ra, partiya dasturi haqida ma’lumotga ega bo‘lgan fuqarolarning minimal soniga cheklanishlar mavjud bo‘lib, bu shartlarning bajarilishi mahalliy televidenie va radiodan chiqishlarni taqozo etadi.

Cheklanishlar

Qanday cheklanishlar doirasida maqsad funksiyasini optimallashtirishimiz kerakligini aniqlash uchun har bir toifadan eng kamida qamrab olinishi kerak bo‘lgan fuqarolar soniga qo‘yilgan talablarni tahlil etamiz.

Hududda birinchi toifa, ya’ni 18 yoshdan 40 yoshgacha bo‘lgan fuqarolar orasida televidenie muxlislari soni 25 000 ta bo‘lib, mahalliy televideniedan qilingan targ‘ibot samaradorligi 0,8 ga teng. Demak, birinchi toifa fuqarolarining 80%i, ya’ni $25000 \cdot 80/100 = 20000$ tasi partiyaning TV orqali qilinadigan targ‘ibotidan xabardor bo‘lar ekan.

Hududda birinchi toifa fuqarolari orasida radio muxlislari soni 20000 ta bo‘lib, mahalliy radiodan qilingan targ‘ibot samaradorligi 0,5 ga teng. Birinchi toifa fuqarolarining 50%i, ya’ni $20000 \cdot 50/100 = 10000$ tasi partiyaning radio orqali qilinadigan targ‘ibotidan xabardor bo‘lar ekan.

Agar mahalliy televidenie orqali chiqishlar soni $X1$ va mahalliy radioda chiqishlar soni $X2$ ta bo‘lsa, birinchi toifa fuqarolar orasida partiyaning targ‘ibotidan xabardorlarining umumiy soni $20000 \cdot X1 + 10000 \cdot X2$ ta bo‘lar ekan.

Birinchi cheklanish:

partiya rahbari kamida 310 000 nafar 18 yoshdan 40 yoshgacha bo'lgan fuqarolarni o'z dasturi bilan tanishtirishi kerak:

$$20000 \cdot X1 + 10000 \cdot X2 \geq 310000.$$

Hududda ikkinchi toifa, ya'ni 40 yoshdan katta bo'lgan fuqarolar orasida televidenie muxlislari soni 20000 ta bo'lib, mahalliy radiodan qilingan targ'ibot samaradorligi 0,5 ga teng. Demak, ikkinchi toifa fuqarolarining 50%i, ya'ni $20000 \cdot 50/100 = 10000$ tasi partiyaning televidenie orqali qilinadigan targ'ibotidan xabardor bo'lar ekan.

Hududda ikkinchi toifa fuqarolari orasida radio muxlislari soni 50 000 ta bo'lib, mahalliy radiodan qilingan targ'ibot samaradorligi 0.8 ga teng. Ikkinchi toifa fuqarolarining 80%i, ya'ni $50000 \cdot 80/100 = 40000$ tasi partiyaning radio orqali qilinadigan targ'ibotidan xabardor bo'lar ekan.

Agar mahalliy televidenie orqali chiqishlar soni $X1$ va mahalliy radioda chiqishlar soni $X2$ ta bo'lsa, ikkinchi toifa fuqarolar orasida partiyaning targ'ibotidan xabardorlarning umumiy soni $10000 \cdot X1 + 40000 \cdot X2$ ta bo'lar ekan.

Ikkinchi cheklanish:

partiya rahbari kamida 400 000 nafar 40 yoshdan katta bo'lgan fuqarolarni o'z dasturi bilan tanishtirishi kerak:

$$10000 \cdot X1 + 40000 \cdot X2 \geq 400000.$$

Mahalliy televidenie va radioda chiqishlarning soni chegaralangan bo'lib, ular 14-jadvalda berilgan).

Uchinchi va to'rtinchi cheklanishlar:

mahalliy televidenie orqali maksimal chiqishlar soni 25 ta va radioda maksimal chiqishlarning soni 20 taga teng:

$$X1 \leq 25, \qquad X2 \leq 20.$$

Mahalliy televidenie va radioda chiqishlarning soni manfiy bo'la olmaydi, ya'ni musbat yoki noldan katta ekanligini e'tiborga olib, masalaning matematik modelini hosil qilamiz.

Targ'ibot haqidagi **masalaning matematik modeli:**

$$F = 300 \cdot X_1 + 195 \cdot X_2 \to \min,$$

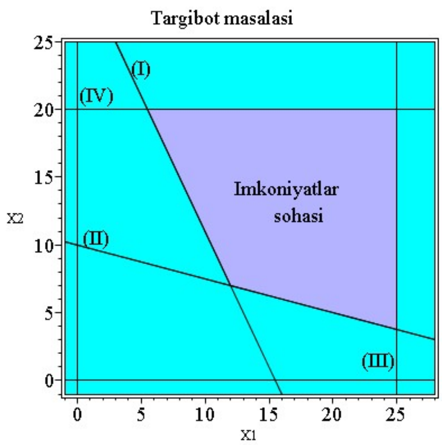
$$20000 \cdot X_1 + 10000 \cdot X_2 \geq 310000,$$
$$10000 \cdot X_1 + 40000 \cdot X_2 \geq 400000,$$
$$X_1 \leq 25,$$
$$X_2 \leq 20,$$
$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0.$$

Masalani grafik usulda yechish

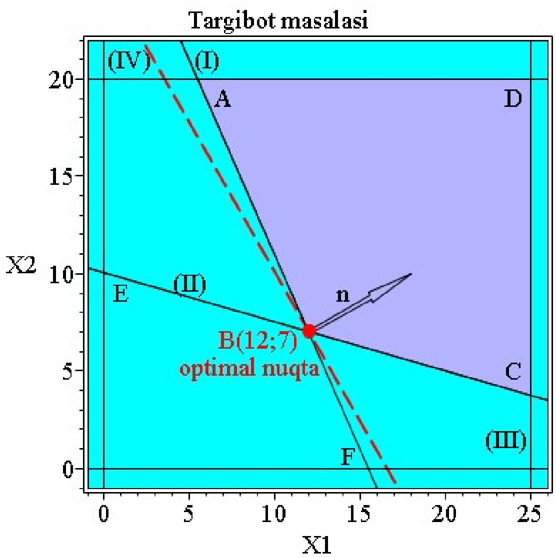
Masalani grafik usulda yechaylik. Dastlab joiz sohani tuzib olaylik. Jami shartlarimiz 6 ta bo'lib, ulardan faqat 4 tasi (I)-(IV) joiz soha chegarasini aniqlaydi. (V)-(VI) shartlar ortiqcha shartlardir (118- rasmga qarang).

Cheklanishlar sistemasi:

$$\begin{aligned} 20000X_1 + 10000X_2 &\geq 310000 \quad &(I)\\ 10000X_1 + 40000X_2 &\geq 400000 \quad &(II)\\ X_1 &\leq 25 \quad &(III)\\ X_2 &\leq 20 \quad &(IV)\\ X_1 &\geq 0 \quad &(V)\\ X_2 &\geq 0 \quad &(VI) \end{aligned}$$



Rasm 118: Joiz sohani aniqlash



Joiz soha ABCD to'rtburchakdan iborat. Maqsad funksiyasining sath chizig'i chizmada qizil punktir chiziq bilan berilgan. Minimizatsiya masalasini yechayotganimiz uchun sath chizig'i oz'ining normal vektori (n) yonalishiga qarama qarshi yo'nalishda harakatlanganda joiz sohani B nuqtada tark etadi. Demak, B nuqtada barcha shartlarni qanoatlantirgan holda maqsad funksiya minimal qiymatga erishar ekan.

B nuqtasi (I) va (II) shartlar bilan aniqlanadigan to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo'lgani uchun B nuqtaning koordinatalarini quyidagi tenglamalar sistemasini yechib topamiz:

$$\begin{cases} \text{(I)} \quad 20000X_1 + 10000X_2 = 310000 \\ \text{(II)} \quad 10000X_1 + 40000X_2 = 400000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 12 \\ X_2 = 7 \end{cases}$$

Masala yechimi natijalariga asosan yuqorida qo'yilgan savollarga javob beraylik.

- ***Maqsadga erishish uchun necha marotaba mahalliy televidenie va radioda chiqishlar qilish kerak?*** $X_1 = 12$ va $X_2 = 7$ bo'lgani uchun maqsadga erishish uchun 12 marta mahalliy televidenie va 7 marta radioda chiqishlar qilish kerak.
- ***Har ikki turdagi axborot vositasida chiqishlarning xarajati qanday?*** $300 \cdot 12 = 3600$ va $195 \cdot 7 = 1365$ ming so'm bo'lgani uchun, televidenie va radioda chiqishlarning xarajatlari mos ravishda 3 mln. 600 ming va 1 mln. 365 ming so'mga teng.
- ***Mahalliy televidenie va radioda chiqishlarning umumiy xarajatlari qancha?*** $F = 300 \cdot 12 + 195 \cdot 7 = 4965$ ming so'm bo'lgani uchun, mahalliy televidenie va radioda chiqishlarning umumiy xarajatlari 4 mln. 965 ming so'mga teng.
- ***Qancha fuqarolar dasturdan xabardor qilinishi kutilmoqda?*** Birinchi toifa fuqarolar uchun $20000 \cdot 12 + 10000 \cdot 7 = 310000$ va ikkinchi toifa fuqarolar uchun $10000 \cdot 12 + 40000 \cdot 7 = 400000$ bo'lgani uchun, jami 710000 ta fuqarolar dasturdan xabardor qilinishi kutilmoqda.

Grafik usuldagi yechimning turg'unlik tahlili

a) maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlili.

Optimal B nuqta (I) va (II) shartlar bilan aniqlanadigan to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo'lgani uchun aynan shu chiziqlarning burchak koeffitsiyentlarini topamiz:

(I)- shart:

$20000X_1 + 10000X_2 = 310000 \ \Rightarrow 2X_1 + X_2 = 31 \Rightarrow X_2 = 31 - 2X_1 \ \Rightarrow k = -2$

(II)- shart:

$10000X_1 + 40000X_2 = 400000 \ \Rightarrow X_1 + 4X_2 = 40 \Rightarrow X_2 = 40 - \frac{1}{4}X_1 \ \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$

Maqsad funksiyasi:

$c_1X_1 + c_2X_2 = 4965 \Rightarrow X_2 = \frac{4965}{c_2} - \frac{c_1}{c_2}X_2 \ \Rightarrow k = -\frac{c_1}{c_2}$

Quyidagi qo'sh tengsizlikni yechamiz:

$$-2 \le -\frac{c_1}{c_2} \le -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \le \frac{c_1}{c_2} \le 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{c_2}{4} \le c_1 \le 2c_2$$

Agar maqsad funksiyaning koeffitsiyentlari $\frac{c_2}{4} \le c_1 \le 2c_2$ shartni qondirsa, optimal yechim o'zgarmaydi.

♦ Ikkinchi koeffitsiyentning o'zgarmas $c_2 = 195$ qiymatida birinchi c_1 koeffitsiyent

$$\frac{c_2}{4} \le c_1 \le 2c_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{195}{4} \le c_1 \le 2 \cdot 195 \quad \Rightarrow \quad 48.75 \le c_1 \le 390$$

chegaralar ichida o'zgaradi. Shu bilan birga, maqsad funksiyaning qiymati $F_1 \leq F^* \leq F_2$ o'zgaradi, bu erda

$$F_1 = 48.75X_1 + 195X_2 = 48.75 \cdot 12 + 195 \cdot 7 = 1950,$$

$$F_2 = 390X_1 + 1956X_2 = 390 \cdot 12 + 195 \cdot 7 = 6045,$$

ya'ni $1950 \leq F^* \leq 6045$.

⧫ Birinchi koeffitsiyentning o'zgarmas $c_1 = 300$ qiymatida ikkinchi c_2 koeffitsiyent

$$\frac{1}{4} \leq \frac{300}{c_2} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{c_2}{300} \leq 4 \quad \Rightarrow 150 \leq c_2 \leq 1200$$

chegaralar ichida o'zgaradi. Shu bilan birga, maqsad funksiyaning qiymati $F_3 \leq F^* \leq F_4$ o'zgaradi, bu yerda

$$F_3 = 300X_1 + 150X_2 = 300 \cdot 12 + 150 \cdot 7 = 4650,$$

$$F_4 = 300X_1 + 1200X_2 = 300 \cdot 12 + 1200 \cdot 7 = 12000,$$

ya'ni $4650 \leq F^* \leq 12000$.

Masala barcha shartlari o'zgarishsiz qolganda televidenieda bir martalik chiqish narxi (48.75;390) ming so'm oraliq'ida o'zgarganida ham chiqishlar soni ($X_1 = 12$; $X_2 = 7$) ga teng bo'lgan reja optimal rejaligicha qolar ekan. Targ'ibot xarajatlari bunda

$$1950 \leq F^* = 4965 \leq 6045$$

ming so'm oraliqda o'zgaradi.

Masala barcha shartlari o'zgarishsiz qolganda radio orqali bir martalik chiqish narxi (150;1200) ming so'm oraliq'ida o'zgarganida ham chiqishlar soni ($X_1 = 12$; $X_2 = 7$) ga teng bo'lgan reja optimal rejaligicha qolar ekan. Targ'ibot xarajatlari bunda

$$4650 \leq F^* = 4965 \leq 12000$$

ming so'm oraliqda o'zgaradi.

b) O'ng tomon koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlili.

1-cheklanish. Birinchi b_1 koeffitsiyent ortishi bilan (I) to'gri yuqoriga parallel ravishda (II) va (III) to'g'ri chiziqlar kesishmasi C nuqtasiga ko'chadi. b_1 koeffitsiyent kamayishi bilan (I) to'gri pastga parallel ravishda OY o'qi va (II) to'g'ri chiziq kesishmasi E nuqtasiga ko'chadi (119 (a) - chizmaga qarang).

C nuqtaning koordinatalari quyidagi tenglama sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} \text{(II)} & X_1 + 4X_2 = 40 \\ \text{(III)} & X_1 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 25 \\ X_2 = 3.75 \end{cases}$$

Birinchi koeffitsiyent b_1^+ qiymatiga oshirilishi mumkin:

$$b_1^+ = 20000X_1 + 10000X_2 = 20000 \cdot 25 + 10000 \cdot 3.75 = 537500.$$

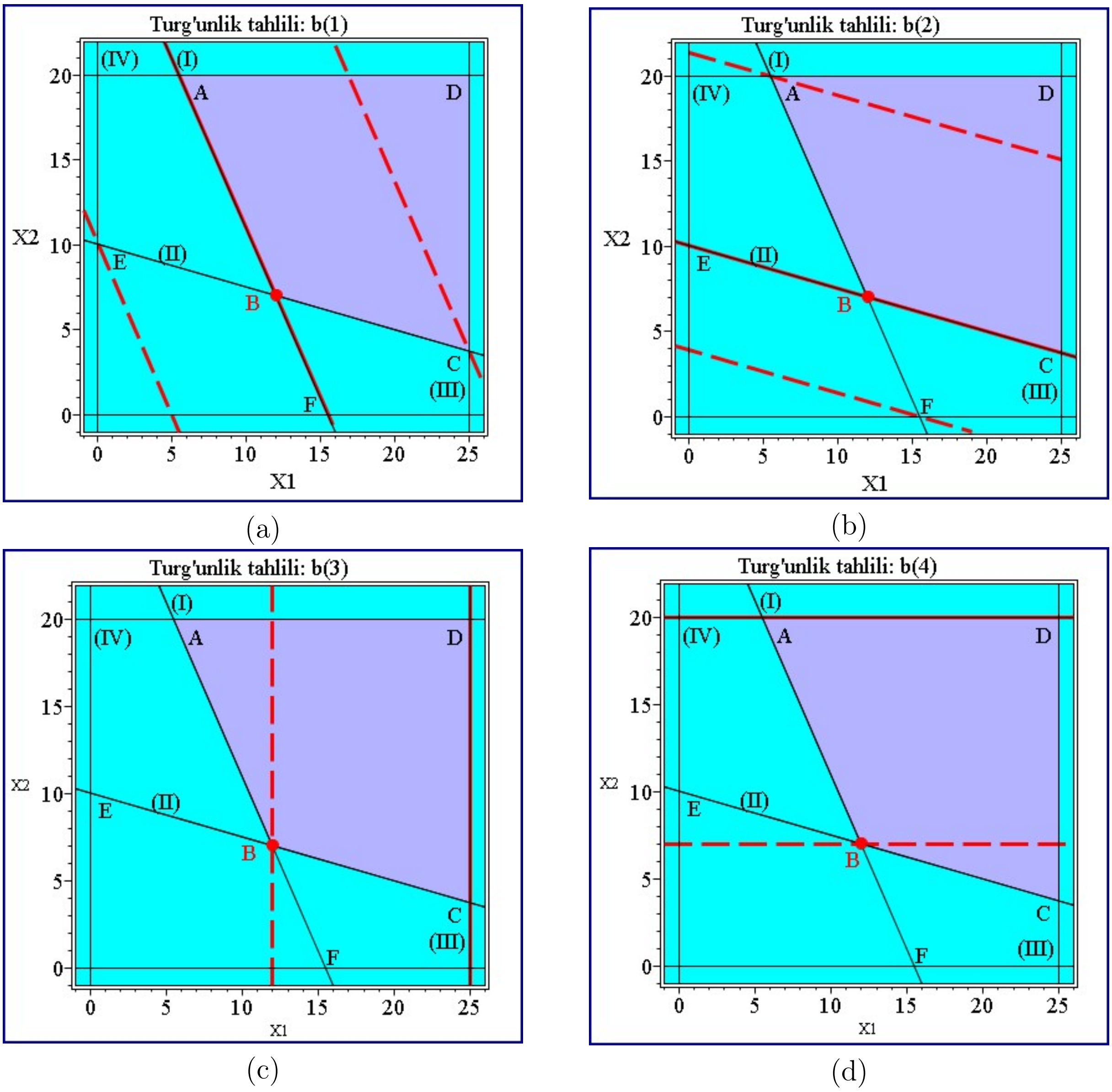
E nuqtaning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} (II) & X_1 + 4X_2 = 40 \\ (OY) & X_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 10 \end{cases}$$

Birinchi koeffitsiyent b_1^- qiymatiga kamaytirilishi mumkin:

$$b_1^- = 20000X_1 + 10000X_2 = 20000 \cdot 0 + 10000 \cdot 10 = 100000.$$

Shunday qilib, (I) cheklanishning o'ng tomoni o'zgarish oraligi $100\,000 \leq b_1 \leq 537\,000$ ga teng ekan.



Rasm 119: O'ng tomon koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlili

2-cheklanish. Ikkinchi b_2 koeffitsiyent ortishi bilan (II) to'gri yuqoriga parallel ravishda (I) va (IV) to'g'ri chiziqlar kesishmasi A nuqtaga ko'chadi. b_2 koeffitsiyent kamayishi bilan (II) to'gri pastga parallel ravishda OX o'qi va (I) to'g'ri chiziq kesishmasi F nuqtasiga ko'chadi (119 (b) - chizmaga qarang).

A nuqtaning koordinatalari quyidagi tenglama sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} \text{(I)} \quad 2X_1 + X_2 = 31 \\ \text{(IV)} \quad X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 5.5 \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

Ikkinchi koeffitsiyent b_2^+ qiymatiga oshirilishi mumkin:

$$b_2^+ = 10000X_1 + 40000X_2 = 10000 \cdot 5.5 + 40000 \cdot 0 = 855\ 000.$$

F nuqtaning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} \text{(I)} \quad 2X_1 + X_2 = 31 \\ \text{(OX)} \quad X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 15.5 \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

Ikkinchi koeffitsiyent b_2^- qiymatiga kamaytirilishi mumkin:

$$b_2^- = 10000X_1 + 40000X_2 = 10000 \cdot 15.5 + 40000 \cdot 0 = 155\ 000.$$

Shunday qilib, (II) cheklanishning o'ng tomoni o'zgarish oraligi $155\ 000 \leq b_2 \leq 855\ 000$ ga teng ekan.

3-cheklanish. Uchinchi b_3 koeffitsiyent ortishi bilan (III) to'gri o'ngga parallel ravishda istalgancha ko'chirilishi mumkin bo'lgani uchun $b_2^+ = +\infty$. b_3 koeffitsiyent kamayishi bilan (III) to'gri chapga parallel ravishda (I) va (II) to'g'ri chiziqlar kesishmasi bo'lgan optimal B (12;7) nuqtasiga ko'chadi (119 (c) - chizmaga qarang).

Uchinchi koeffitsiyent b_3^- qiymatiga kamaytirilishi mumkin:

$$b_3^- = X_1 = 12.$$

(III) cheklanishning o'ng tomoni o'zgarish oraligi $12 \leq b_3 \leq +\infty$ ga teng ekan.

4-cheklanish. To'rtinchi b_4 koeffitsiyent ortishi bilan (IV) to'gri yuqoriga parallel ravishda istalgancha ko'chirilishi mumkin bo'lgani uchun $b_4^+ = +\infty$. b_4 koeffitsiyent kamayishi bilan (IV) to'gri pastga parallel ravishda (I) va (II) to'g'ri chiziqlar kesishmasi bo'lgan optimal B (12;7) nuqtasiga ko'chadi (119 (d) - chizmaga qarang).

To'rtinchi koeffitsiyent b_4^- qiymatiga kamaytirilishi mumkin:

$$b_4^- = X_2 = 7.$$

(IV) cheklanishning o'ng tomoni o'zgarish oraligi $7 \leq b_4 \leq +\infty$ ga teng ekan.

Masalani simpleks usulda yechish

Endi masalani simpleks usulda yechish bilan shugullanamiz. Masalaning matematik modelini kanonik ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun birinchi 2 ta cheklanish shartlari «$\geq$» ko'rinishidagi tengsizliklar bilan berilgani sababli har bir tengsizlik uchun s_i $(i = 1, 2.)$ **qo'shimcha ortiq o'zgaruvchilar** va a_i $(i = 1, 2.)$ **sun'iy o'zgaruvchilar** kiritamiz. Oxirgi 2 ta cheklanish shartlari «$\leq$» ko'rinishidagi tengsizliklar bilan berilgani sababli har bir tengsizlik uchun s_i $(i = 3, 4.)$ **qo'shimcha qoldiq o'zgaruvchilar** kiritamiz. Natijada masala modelining kanonik ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

Masala matematik modelining kanonik ko'rinishi:

$$F = 300 \cdot X_1 + 195 \cdot X_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + 0 \cdot s_4 + M \cdot a_1 + M \cdot a_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 20000X_1 + 10000X_2 - s_1 + a_1 = 310000, \\ 10000X_1 + 40000X_2 - s_2 + a_2 = 400000, \\ X_1 + s_3 = 25, \\ X_2 + s_4 = 20, \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0,\ s_4 \geq 0,\ a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0, \\ M > 0 - \ \mathit{etarlicha\ katta\ son}. \end{cases}$$

Masalaning kanonik ko'rinishidan foydalanib dastlabki simpleks jadvalni tuzamiz va tahlil qilamiz (120- rasm).

B	c_b	X_1	X_2	s_1	s_2	s_3	s_4	a_1	a_2	b	b_i/a_{ij}
		300	195	0	0	0	0	M	M		
a_1	M	20000	10000	-1	0	0	0	1	0	310000	31
a_2	M	10000	**40000**	0	-1	0	0	0	1	400000	10
s_3	0	1	0	0	0	1	0	0	0	25	∞
s_4	0	0	1	0	0	0	1	0	0	20	20
Z_j		30000M	50000M	-M	-M	0	0	M	M	**710000M**	
c_j-z_j		300-30000M	195-50000M	M	M	0	0	0	0		

Rasm 120: Boshlang'ich simpleks jadval

Minimizatsiya masalasini yechayotganimiz bois optimal yechimga erishganligimiz haqidagi qarorni simpleks jadvalning oxiridagi satrda manfiy elementlar yo'qligiga asosan chiqaramiz. Agar bu satrda manfiy elementlar bor bo'lsa, eng kichigiga mos kelgan uctunda joylashgan o'zgaruvchi bazisga kiritilishi maqsad funksiyasining qiymati yaxshlanishiga (kamida yomonlashmasligiga) olib keladi. 120- rasmda keltirilgan jadvalning oxirgi satrida manfiy elementlar 3 ta bo'lib, ulardan kichigi $195 - 50000 \cdot M$ ga teng bo'lgani sababli bazisga X_2 o'zgaruvchi kiradi. Birinchi jadvalning oxirgi yordamchi ustunini to'ldirib chiqamiz. Eng kichik musbat qiymat 10 bo'lib, u a_2 sun'iy o'zgaruvchiga mos kelgan satrda joylashgan. Demak, bazisdan aynan a_2 o'zgaruvchi chiqib ketadi. Hal qiluvchi element hal qiluvchi satr va hal qiluvchi ustunlar kesishmasida joylashgan bo'lib, u jadvalda qizil rang bilan ajratigan «40000» qiymatdan iborat. Maqsad funksiyasining usbu bazis yechimdagi qiymati **7100000M** ga teng. Ikkinchi simpleks jadvalni tuzamiz (121- rasm).

Ikkinchi jadval tahliliga ko'ra bazisdan a_1 o'zgaruvchi chiqib, uning o'rniga X_1 o'zgaruvchi kiradi. Maqsad funksiyasining usbu bazis yechimdagi qiymati **210000M+1950** ga teng. Simpleks jadval tuzish qoidasiga asosan uchinchi jadvalni hosil qilamiz (122- rasm).

Uchinchi jadvalning oxirgi satrida manfiy elementlar yo'qligi optimal yechim topilganidan dalolat beradi. Bunda bazis o'zgaruvchilar X_1, X_2, s_3 va s_4 lar bo'lib, nobazis o'zgaruvchilar esa s_1, s_2, a_1, a_2 lardir. Bazis o'zgaruvchilarning qiymatini aniqlash uchun uchinchi jadvalning oxirgi ustuniga murojaat qilamiz: $X_1 = 12$, $X_2 = 7$, $s_3 = 13$ va

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	a_1	a_2	b	b_i/a_{ij}
		300	195	0	0	0	0	M	M		
a_1	M	**17500**	0	-1	1/4	0	0	1	-1/4	210000	12
x_2	195	1/4	1	0	-1/40000	0	0	0	1/40000	10	40
s_3	0	1	0	0	0	1	0	0	0	25	25
s_4	0	-1/4	0	0	1/40000	0	1	0	-1/40000	10	-40
z_j		17500M+195/4	195	-M	M/4-39/8000	0	0	M	-M/4+39/8000	**210000M+1950**	
c_j-z_j		1005/4-175000M	0	M	39/8000-M/4	0	0	0	5/4M-39/8000		

Rasm 121: Ikkinchi simpleks jadval

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	a_1	a_2	b
		300	195	0	0	0	0	M	M	
x_1	300	1	0	-1/17500	1/70000	0	0	1/17500	-1/70000	12
x_2	195	0	1	1/70000	-1/35000	0	0	-1/70000	1/35000	7
s_3	0	0	0	1/17500	-1/70000	1	0	-1/17500	1/70000	13
s_4	0	0	0	-1/70000	1/35000	0	1	1/70000	-1/35000	13
z_j		300	195	-201/14000	-9/7000	0	0	201/14000-M	9/7000-M	**4965**
c_j-z_j		0	0	201/14000	9/7000	0	0	M-201/14000	M-9/7000	

Rasm 122: Uchinchi simpleks jadval

$s_4 = 13$. Nobazis o'zgaruvchilarning qiymati esa 0 ga teng bo'lishini bilamiz. Maqsad funksiyasining opimal, ya'ni minimal qiymati $F = 4965$ ga teng.

Masala yechimining simpleks jadval asosida turg'unlik tahlili

Simpleks jadvali asosida maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlilini o'tkazish

• Maqsad funksiyasining c_1 koeffitsiyentining turg'unlik tahlilini o'tkazish uchun oxirgi simpleks jadvaldagi maqsad funksiyasininq «300» qiymatining o'rniga c_1 yozib jadvalni qayta hisoblab chiqamiz (123- rasm).

B	c_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
		c_1	195	0	0	0	0	
x_1	c_1	1	0	-1/17500	1/70000	0	0	12
x_2	195	0	1	1/70000	-1/35000	0	0	7
s_3	0	0	0	1/17500	-1/70000	1	0	13
s_4	0	0	0	-1/70000	1/35000	0	1	13
z_j		c_1	195	$-c_1/17500+39/14000$	$c_1/70000-39/7000$	0	0	**$12c_1+1365$**
c_j-z_j		0	0	$c_1/17500-39/14000$	$-c_1/70000+39/7000$	0	0	

Rasm 123: c_1 turg'unlik tahlili uchun qayta tuzilgan jadval

Yechim optimalligicha qolishi uchun, ya'ni usbu jadval oxirgisi bo'lishi uchun uning oxirgi satrida barcha elementlar musbat yoki nolga teng bo'lishi kerak. Buni inobatga olib quyidagi tengsizliklar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -c_1/175000 - 39/14000 \geq 0 \\ -c_1/70000 + 39/7000 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20c_1 \geq 975 \\ c_1 \leq 390 \end{cases} \Rightarrow \quad 48.75 \leq c_1 \leq 390.$$

Maqsad funksiyasining optimal qiymati bunda quyidagi oraliqda o'zgaradi:

$$1950 = 12 \cdot 48.75 + 1395 \leq 12c_1 + 1395 \leq 12 \cdot 390 + 1395 = 6045.$$

• Maqsad funksiyasining c_2 koeffitsiyentining turg'unlik tahlilini o'tkazish uchun oxirgi simpleks jadvaldagi maqsad funksiyasininq «195» qiymatining o'rniga c_2 yozib jadvalni qayta hisoblab chiqamiz (124- rasm).

B	C_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	b
		300	c_2	0	0	0	0	
X_1	300	1	0	-1/17500	1/70000	0	0	12
X_2	c_2	0	1	1/70000	-1/35000	0	0	7
S_3	0	0	0	1/17500	-1/70000	1	0	13
S_4	0	0	0	-1/70000	1/35000	0	1	13
Z_j		c_1	195	c_2/70000-3/175	-c_2/35000+3/700	0	0	**7c_2+3600**
C_j-Z_j		0	0	-c_2/70000+3/175	c_2/35000-3/700	0	0	

Rasm 124: c_2 turg'unlik tahlili uchun qayta tuzilgan jadval

Yechim optimalligicha qolishi uchun, ya'ni usbu jadval oxirgisi bo'lishi uchun uning oxirgi satrida barcha elementlar musbat yoki nolga teng bo'lishi kerak. Buni inobatga olib quyidagi tengsizliklar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -c_2/70000 + 3/175 \geq 0 \\ c_2/35000 - 3/700 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25c_2 \leq 30000 \\ c_2 \geq 150 \end{cases} \Rightarrow \quad 150 \leq c_2 \leq 1200.$$

Maqsad funksiyasining optimal qiymati bunda quyidagi oraliqda o'zgaradi:

$$4650 = 7 \cdot 150 + 3600 \leq 7c_2 + 3600 \leq 7 \cdot 1200 + 3600 = 12000.$$

Simpleks jadvali asosida shartlarning o'ng tomoni koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlilini o'tkazish

Ong tomon koeffitsiyentlarining turg'unlik tahlilini o'tkazish uchun oxirgi simpleks jadvalining 5 ta s_1, s_2, s_3, s_4 va b ustundagi ma'lumotlardan foydalanamiz (125-rasm).

• Birinchi shartning o'ng tomoni b_1 koeffitsiyentining turg'unlik tahlilini o'tkazish uchun qo'shimcha s_1 o'zgaruvchi joylashgan ustundagi qiymatlarni d_1 ga kopaytirib b ustundagi mos qiymatlaridan ayiramiz. Natijada hosil bo'lgan ifodalardan foydalanib tengsizliklar sistemasini tuzib olib, uni yechamiz:

s_1	s_2	s_3	s_4	b
-1/17500	1/70000	0	0	12
1/70000	-1/35000	0	0	7
1/17500	-1/70000	1	0	13
-1/70000	1/35000	0	1	13

Rasm 125: b_i turg'unlik tahlili uchun foydalanadigan ustunlar

$$\begin{cases} 12 + 1/17500 \cdot d_1 \geq 0 \\ 7 - 1/70000 \cdot d_1 \geq 0 \\ 13 - 1/17500 \cdot d_1 \geq 0 \\ 13 + 1/70000 \cdot d_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \geq -210000 \\ d_1 \leq 490000 \\ d_1 \leq 227500 \\ d_1 \geq -910000 \end{cases} \Rightarrow \quad -210000 \leq d_1 \leq 227500.$$

U holda $b_1 + d_1$ ifodadan d_1 o'zgarish oralig'ini inobatga olib

$$310000 - 210000 \leq b_1 = 310000 \leq 310000 + 227500 \;\Rightarrow\; 100000 \leq b_1 \leq 537500$$

hosil qilamiz.

• Ikkinchi shartning o'ng tomoni b_2 koeffitsiyentining turg'unlik tahlilini o'tkazish uchun qo'shimcha s_2 o'zgaruvchi joylashgan ustundagi qiymatlarni d_2 ga kopaytirib b ustundagi mos qiymatlaridan ayiramiz. Tengsizliklar sistemasini tuzib olib, uni yechamiz:

$$\begin{cases} 12 - 1/70000 \cdot d_2 \geq 0 \\ 7 - 1/35000 \cdot d_2 \geq 0 \\ 13 + 1/70000 \cdot d_2 \geq 0 \\ 13 - 1/35000 \cdot d_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 \leq 840000 \\ d_2 \geq -245000 \\ d_2 \geq -910000 \\ d_2 \leq 455000 \end{cases} \Rightarrow \quad -245000 \leq d_2 \leq 455000.$$

U holda $b_2 + d_2$ ifodadan d_2 o'zgarish oralig'ini inobatga olib

$$400000 - 245000 \leq b_2 = 400000 \leq 400000 + 455000 \;\Rightarrow\; 155000 \leq b_2 \leq 855000$$

hosil qilamiz.

• Uchinchi shart o'ng tomonining b_3 koeffitsiyenti uchun:

$$13 + d_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -13 \leq d_3 \leq \infty.$$

$b_3 + d_3$ ifodadan d_3 o'zgarish oralig'ini inobatga olib

$$25 - 13 \leq b_3 = 25 \leq 25 + \infty \quad \Rightarrow \quad 12 \leq b_3 \leq \infty$$

hosil qilamiz.

• To'rtinchi shart o'ng tomonining b_4 koeffitsiyenti uchun:

$$13 + d_4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -13 \leq d_4 \leq \infty.$$

$b_4 + d_4$ ifodadan d_4 o'zgarish oralig'ini inobatga olib

$$20 - 13 \leq b_4 = 20 \leq 20 + \infty \quad \Rightarrow \quad 7 \leq b_4 \leq \infty$$

hosil qilamiz.

Olingan natijalarni grafik usulda turg'unlik natijalari bilan solishtiring.

Ikkiyoqlama masala tuzish

Berilgan masalaga ikkiyoqlama masala tuzamiz. Masalaning matematik modeli quyidagicha edi:

$$F = 300X_1 + 195X_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 20000X_1 + 10000X_2 \geq 310000 \\ 10000X_1 + 40000X_2 \geq 400000 \\ X_1 \leq 25 \\ X_2 \leq 20 \end{cases}$$
$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0.$$

Dastlabki minimizatsiya masala shartlari sistemasida uchinchi va to'rtinchi tengsizliklar ikkiyoqlama masala tuzish qoidalariga ko'ra «($\geq$)» ko'rinishda yozib olinishi kerak. Shuning uchun bu tengsizliklarni minus birga ko'paytiramiz:

$$F = 300X_1 + 195X_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 20000X_1 + 10000X_2 \geq 310000 \\ 10000X_1 + 40000X_2 \geq 400000 \\ -X_1 \geq -25 \\ -X_2 \geq -20 \end{cases}$$
$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0.$$

Dastlabki masala uchun koeffitsiyentlarning kengaytirilgan matritsasi B ni tuzib olamiz va uni transponirlab B^T matritsasini topamiz:

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 20\,000 & 10\,000 & 310\,000 \\ 10\,000 & 40\,000 & 400\,000 \\ -1 & 0 & -25 \\ 0 & -1 & -20 \\ \mathit{300} & \mathit{195} & \mathit{F} \end{array}\right) \qquad B^T = \left(\begin{array}{cccc|c} 20\,000 & 10\,000 & -1 & 0 & 300 \\ 10\,000 & 40\,000 & 0 & -1 & 195 \\ \mathit{310\,000} & \mathit{400\,000} & \mathit{-25} & \mathit{-20} & \mathit{Z} \end{array}\right)$$

B^T matritsadan foydalanib ikkiyoqlama masalani yozib olamiz:

$$Z = 310\,000Y_1 + 400\,000Y_2 - 25Y_3 - 20Y_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 20\,000Y_1 + 10\,000Y_2 - Y_3 \leq 300 \\ 10\,000Y_1 + 40\,000Y_2 - Y_4 \leq 195 \end{cases}$$
$$Y_1 \geq 0, \quad Y_2 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \quad Y_4 \geq 0.$$

Masalani «POM QM for Windows» dasturi yordamida yechish

Targ‘ibot haqidagi masalani «QM for Windows» dasturida yechish uchun dasturning «Linear Programming», ya’ni «Chiziqli dasturlash» moduliga murojaat qilamiz. Dasturga masala parametrlarini kiritish uchun uning nomini, noma’lumlar soni, shartlar sonini va maqsadimizni aniqlashimiz kerak.

· masala nomi (Title): targ‘ibot masalasi
· shartlar soni (number of constraints):4
· o‘zgaruvchilar soni (number of variables):2
· maqsad (objective): minimizatsiya(minimize)

Dasturga masala parametrlari kiritilgach, masalaning matematik modeli muloqot oynasining o‘ng tomonida akslanadi (126-rasm).

Targ'ibot masalasi

	X1	X2		RHS	Equation form
Minimize	300	195			Min 300X1 + 195X2
birinchi toifa	20000	10000	>=	310000	20000X1 + 10000X2 >= 310000
ikkinchi toifa	10000	40000	>=	400000	10000X1 + 40000X2 >= 400000
TV da maksimal chiqishlar	1	0	<=	25	X1 <= 25
Radioda maksimal chiqishlar	0	1	<=	20	X2 <= 20

Rasm 126: Boshlang‘ich ma’lumotlarni kiritish

Natijalarning taqdimoti

Masala yechimi natijalarining jadval taqdimoti 127-rasmda keltirilgan.

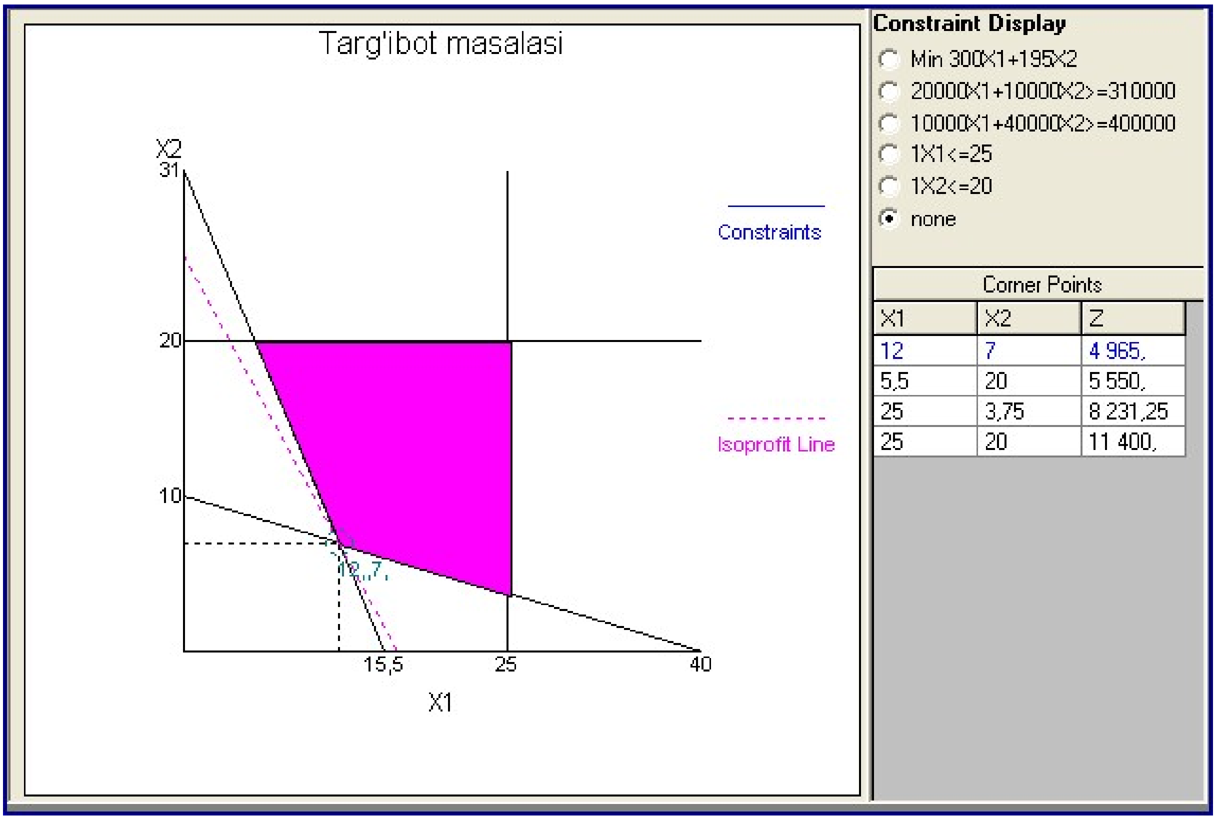
Linear Programming Results

Targ'ibot masalasi solution

Variable	Status	Value
X1	Basic	12
X2	Basic	7
surplus 1	NONBasic	0
surplus 2	NONBasic	0
slack 3	Basic	13
slack 4	Basic	13
Optimal Value (Z)		4965

Rasm 127: Natijalar jadvali

Masala yechimining grafik usulda aniqlanishi 128-rasmda keltirilgan.



Rasm 128: Masala yechimining grafigi

Masala yechimining turg'unlik tahlili 129-rasmda keltirilgan.

Targ'ibot masalasi solution					
Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	12	0	300	48,75	390
X2	7	0	195	150	1200
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
birinchi toifa	-,0144	0	310000	100000	537500
ikkinchi toifa	-,0013	0	400000	155000	855000
TV da maksimal chiqishlar	0	13	25	12	Infinity
Radioda maksimal chiqishlar	0	13	20	7	Infinity

Rasm 129: Masala yechimining turg'unlik tahlili

Masala yechimining simpleks jadvallari 130-rasmda keltirilgan.

Masala va ikkiyoqlama masala haqidagi ma'lumot 131-rasmda keltirilgan.

Targ'ibot masalasi solution										
Cj	Basic Variables	Quantity	300 X1	195 X2	0 artfcl 1	0 surplus 1	0 artfcl 2	0 surplus 2	0 slack 3	0 slack 4
Phase 1 - Iteration 1										
1	artfcl 1	310 000	20 000	10 000	1	-1	0	0	0	0
1	artfcl 2	400 000	10 000	40 000	0	0	1	-1	0	0
0	slack 3	25	1	0	0	0	0	0	1	0
0	slack 4	20	0	1	0	0	0	0	0	1
	zj	710 000	-30000	-50000	1	1	1	1	0	0
	cj-zj		30 000	50 000	0	-1	0	-1	0	0
Iteration 2										
1	artfcl 1	210 000	17 500	0	1	-1	-0,25	0,25	0	0
0	X2	10	0,25	1	0	0	0,0	0,0	0	0
0	slack 3	25	1	0	0	0	0	0	1	0
0	slack 4	10	-0,25	0	0	0	0,0	0,0	0	1
	zj	210 000	-17500	0	1	1	2,25	-,25	0	0
	cj-zj		17 500	0	0	-1	-1,25	0,25	0	0
Iteration 3										
0	X1	12	1	0	0,0001	-0,0001	0,0	0,0	0	0
0	X2	7	0	1	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0
0	slack 3	13	0	0	-0,0001	0,0001	0,0	0,0	1	0
0	slack 4	13	0	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	1
	zj	0	0	0	2	0	2	0	0	0
	cj-zj		0	0	-1	0	-1	0	0	0
Phase 2										
300	X1	12	1	0	0,0001	-0,0001	0,0	0,0	0	0
195	X2	7	0	1	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0
0	slack 3	13	0	0	-0,0001	0,0001	0,0	0,0	1	0
0	slack 4	13	0	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	1
	zj	4 965	300	195	-,0144	,0144	-,0013	,0013	0	0
	cj-zj		0	0	0,0144	-0,0144	0,0013	-0,0013	0	0

Rasm 130: Simpleks jadvallar

Targ'ibot masalasi solution						
Original Problem						
Minimize	X1	X2				
birinchi toifa	20000	10000	>=	310000		
ikkinchi toifa	10000	40000	>=	400000		
TV da maksimal chiqishlar	1	0	<=	25		
Radioda maksimal chiqishlar	0	1	<=	20		
Dual Problem						
	birinchi	ikkinchi	TV da	Radioda		
Maximize	310000	400000	-25	-20		
X1	20000	10000	-1	0	<=	300
X2	10000	40000	0	-1	<=	195

Rasm 131: Ikkiyoqlama masala

10.2 Fermer xo'jaligi ish faoliyati

Fermer Mirhosil Dehqonovning 300 akr hosildor yeri bor bo'lib, navbatdagi mavsumda u bug'doy, makkajo'xori, suli va soya yetishtirmoqchi. Jadvalda yetishtirilishi ko'zda tutilayotgan ekinlarning kutilayotgan hosildorligi, moddiy va mehnat xarajatlari, suv sarfi va ekin donining kutilayotgan narxi keltirilgan (1 bushel = 36.6 litr, 1 akr = 0,4 gektar).

ekin turi	hosildorlik, bush. \ akr	mehnat, kishi \ akr	mablag', $ \ akr	suv sarfi, akrofut \ akr	narxi, $ \ bush.
bug'doy	210	4	50	2	3.20
makkajo'xori	300	5	75	6	2.55
suli	180	3	30	1	1.45
soya	240	10	60	4	3.10

O'tgan yilgi don mahsulotlari bozori tahlili asosida fermer Mirhosil 30 ming busheldan kam bo'lmagan bug'doy, 30 ming busheldan kam bo'lmagan makkajo'xori, ammo 25 ming busheldan ko'p bo'lmagan suli hosili yetishtirmoqchi. Uning ixtiyorida ekin yerlari va hosilga ishlov berishga ajratilgan 25 ming dollar mablag'i bo'lib, fermer 150 kunlik mavsum davomida har kuni 12 soatdan ishlashni rejalashtirmoqda. Uning ixtiyoridagi suv zaxirasi 1200 akrofut miqdorda bo'lib, shu imkoniyatlari doirasidan chetga chiqa olmaydi.

- Fermer mo'ljallangan hosildan eng ko'p foyda olish uchun har bir ekin turi uchun qancha akr ekin maydoni ajratishi kerak?
- Mo'ljallangan ekin turlarining barchasini yetishtirish maqsadga muvofiqmi? Optimal rejaga kiritilmagan ekin turi bo'lgan taqdirda: hosildorlik ko'rsatkichi o'zgarmagan holda ekin narxi qanchagacha oshirilsa, bu ekin turini yetishtirish foyda olishga olib keladi? Ekin narxi o'zgarmas bo'lgan holda ekinning kutilayotgan hosildorligi qanchaga oshsa, bu ekin turini yetishtirish foyda olishga olib keladi?
- Agar yetishtirilishi lozim bo'lgan makkajo'xori hosiliga bo'lgan shart olib tashlansa, makkajo'xori yetishtirish optimal rejaga kiritiladimi? Makkajo'xori yetishtirilmagan taqdirda olinadigan foyda miqdori qanday o'zgaradi?
- Mahalliy rieltorlik firmasi fermer Mirhosilga uning dalalariga qo'shni bo'lgan 40 akr maydonni bir mavsumga 2 ming dollarga ijaraga berish taklifi bilan chiqdi. Fermer bu taklifga rozi bo'lishi kerakmi?

10.3 Reklama kampaniyasi

Hududda faoliyat ko'rsatuvchi kompaniya bir million kishini uning reklama e'lonlari haqidagi ma'lumotiga ega bo'lishini istaydi. Kompaniya reklama targ'ibot ishlarini mahalliy televidenie va radiostansiyalar, pochta, mahalliy gazetalar hamda elektron pochta orqali amalga oshirmoqchi. Kompaniyaning marketing bo'limi turli reklama vositalarining samarasini baholab chiqdi va quyidagi xulosaga keldi:

reklama turi	mahalliy televidenie	radio-stansiyalar	pochta pochta	mahalliy gazetalar	elektron pochta
nisbiy samaradorlik	0,70	0,60	0,30	1.00	0.10

Sunday qilib, mahalliy televidenie auditoriyasi o‘rta hisobda 50 ming kishidan iborat bo‘lsada, reklamadan boxabar kishilar soni $50000 * 0.7 = 35000$ tani tashkil etar ekan.

Navbatdagi jadvalda reklama joylashtirish mumkin bo‘lgan obyektlar soni, ommaviy axbarot vositalari yoki tashkilotlarining o‘rtacha auditoriya hajmi, reklama aksiyasining narxlari berilgan. Quyidagi savollarga javob berish lozim:

reklama turi	mahalliy televidenie	radio-stansiyalar	pochta	mahalliy gazetalar	elektron pochta
auditoriya hajmi, kishi	50 000	25 000	20 000	15 000	100 000
reklama narxi, $	600	200	250	280	300
maksimal obyektlar soni	13	15	10	17	3

a) Reklama kampaniyasining minimal narxi qanday?
b) Har bir reklama vositasiga qanchadan mablag‘ ajratish kerak?

10.4 Talabning elastikligi

Kiyim-kechak mahsulotlari bilan savdo qiluvchi firma yangi mavsumda savdo qilish uchun bir qator mahsulotlarni ulgurji xarid qildi. Shu jumladan, 600 dona erkaklar shimining yangi modelini 40 000 so‘mdan xarid qildi va 6 oylik mavsum davomida sotish mo‘ljallangan. Mavsum davomida sotilmagan mahsulot qoldiqlari o‘z tannarxida realizatsiya qilinadi. Savdo hajmlarining tahlili shuni ko‘rsatdiki, mahsulot mavsumiy bo‘lgani uchun, xattoki, uning narxi o‘zgarmas bo‘lgan taqdirda ham mahsulotga bo‘lgan talab oydan oyga o‘zgarar ekan. Jadvalda mavsum davomida mahsulotga bo‘lgan talab ko‘rsatkichlari berilgan. Mavsumning birinchi oyidagi talab hajmi bir birlik deb qabul qilingan.

1-oy	2-oy	3-oy	4-oy	5-oy	6-oy
1	1.5	1	0.7	0.3	0.2

Marketing bo‘limining tahliliga asosan do‘konlarda mahsulotning narxi 100 000 so‘m bo‘lgan taqdirda birinchi oy 100 dona yangi modeldagi shim sotilar ekan. Mahsulotga bo‘lgan talab elastikligi juda katta bo‘lganligi tufayli sotuv hajmi mahsulot narxiga juda bog‘liq bo‘ladi. Marketing bo‘limining tahliliga asosan mahsulotning narxi 40 000 so‘mdan to 160 000 so‘mgacha o‘zgarganda mahsulotga talab 290 dona shimdan to bir dona shimgacha o‘zgarar ekan. Tahlil natijalari quyidagi jadvalda berilgan.

narx, ming so‘m	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160
talab, dona	290	280	270	240	200	150	100	60	30	15	10	5	1

Logistika bo‘limi mahsulotni sotishdan tushadigan foyda eng ko‘p bo‘lishini ko‘zlagan holda mahsulotning dastlabki narxi va keyingi besh oydagi narxini belgilaydi. Tabiiyki, mahsulotning narxi vaqt o‘tishi bilan oshishi yo kamayishi mumkin.

- Chiziqli optimizatsiya masalasini tuzing. Berilgan ma’lumotlarga asoslangan holda berilgan mahsulot uchun olti oylik narx siyosatini aniqlang. Bunda foyda miqdori qanchaga teng bo‘ladi?
- Faraz qilaylik: marketing bo‘limi mahsulot narxining bir kamayib, bir oshishi do‘kon imidjiga salbiy ta’sir ko‘rsatadi, deb hisoblaydi. Agar firmaning narx siyosati mahsulot narxining kamaytirilishiga yo‘naltirilgan bo‘lsa, mavsum davomida mahsulot narxi qanday aniqlanishi kerak. Bunda maksimal foyda qanday o‘zgaradi?
- Agar mahsulotning narxini faqat oshirish mumkin bo‘lsa, maksimal foyda qanchaga teng bo‘ladi? Tabiiyki, moliyaviy oqimlar hisobida diskont miqdorini e’tiborga olish kerak: avvalroq olingan mablag‘larni qayta investitsiyalab qo‘shimcha foyda olish mumkin. Ushbu faktorni e’tiborga olish uchun navbatdagi oylarda olingan pul mablag‘larining dastlabki (birinchi) oydagi pul qiymatiga keltirish kerak. Buning uchun ikkinchi oydagi pul tushumini diskont stavkasiga bo‘lish lozim (5% lik ichki daromad normasiga asosan 1.05 ga), uchinchi oydagi tushumni 1.05^2 ga, to‘rtinchisidagini -1.05^3 ga va h.k.
- Diskont miqdorini e’tiborga olgan holda masalaga o‘zgartirish kiriting. Birinchi masalaning diskontlangan foydasi qanchaga teng bo‘ladi? Diskont miqdorini e’tiborga olib optimal narx siyosatini ishlab chiqing. Diskontlangan foyda va birinchi masala uchun aniqlangan foyda miqdorini solishtiring.

10.5 Maktab tushliklari

Umumiy ovqatlanish laboratoriyasi (instituti) maktab tushliklari uchun optimal menyu ishlab chiqish bo‘yicha taklif va tavsiyalar ishlab chiqishi kerak. Masala shunday qo‘yilganki, maktab tushliklari maxsus pazandachilik shartlari bilan bir qatorda, o‘sib kelayotgan organizm uchun zarur bo‘lgan bir qator moddalarga bo‘lgan ehtiyojni qondirishi, shu bilan birga, berilgan shartlar doirasida minimal narxga ega bo‘lishi kerak.

Quyidagi 15- jadvalda tushlikda ishlatilishi mumkin bo‘lgan asosiy masalliqlar va ularning narxlari berilgan.

mahsulot	narxi (1 kg uchun sh.p.b.da)
mol go‘shti	100
yog‘	70
non	10
sabzi	30
baliq	95
tuxum	105
sut	20
pishloq	100
kartoshka	20

Jadval 15: Masalliqlar va ularning narxlari

Navbatdagi 16- jadvalda bitta tushlik hisobida yuqori sinf o‘quvchilarining ayrim zaruriy moddalar va kaloriyalarga bo‘lgan minimal ehtiyoji berilgan.

	miqdori	birligi
kaloriya	2000	kkal
oqsil	70	gr
temir	10	mg
kalsiy	800	mg
A	1,5	mg
V1	1	mg
V2	1,5	mg
RR	8	mg

Jadval 16: Minimal ehtiyojlar

Moddalarning berilgan mahsulotlarning 1 kilogrammidagi salmog‘i 17- jadvalda berilgan.

	go‘sht	yog‘	non	sabzi	baliq	tuxum	sut	pishloq	kartoshka
kaloriya	1200	7800	2000	400	650	1500	600	3000	900
oqsil	160		70		140	110	50	300	17
temir	25		20						12
kalsiy			250				1200	8000	100
A	0,1	6		90		7	0,5	2	
V1	2,5		2,6						
V2	2		1,3		2	8	1,9	4,5	0,5
RR	20		4,5		50	2			9

Jadval 17: Moddalarning salmog‘i

Bo‘sh kataklar zaruriy moddaning mahsulot tarkibida yo‘qligini anglatadi. Ovqat ratsioni quyidagi talablarga javob berishi lozim:

1. Yog‘ miqdori 20 gr.dan 30 gr.gacha bo‘lishi lozim.

2. Iste'mol qilinadigan non miqdori 400 gr.dan oshmasligi kerak.
3. Go'sht va baliq miqdori 50 gr.dan kam bo'lmasligi kerak.
4. Tuxum miqdori 20 gr.dan kam bo'lmasligi lozim.
5. Kartoshka miqdori 300 gr. dan oshmasligi kerak.

Yuqoridagi ma'lumotlarga asoslangan holda chiziqli optimizatsiya masalasini tuzing. Mahsulotlarning shunday tarkibini topingki, bunda masalaning barcha shartlari bajarilgan holda tushlik narxi minimal bo'lsin. Bunday tushlik narxi qanchaga teng bo'ladi?

10.6 Bankning kredit siyosatini aniqlash

Bank xizmatlarining to'liq to'plamini taqdim etuvchi bank 12 mln. dollarlik kreditlar portfelini shakllantirish jarayonida. Jadvalda bank kreditlarining mumkin bo'lgan turlariga oid ma'lumot ko'rsatilgan/ Boshqa moliyaviy institutlar bilan raqobat kurash ortida bank qishloq xo'jaligi va tijorat kreditlariga 40% dan kam bo'lmagan mablag'larni joylashtirishga majbur.

Kredit turi	Kredit stavkasi	Qaytarilmaslik ehtimoli
maqsadsiz kreditlar	0.14	0.1
avtomobil xaridi uchun	0.13	0.07
yu-joy xaridi uchun	0.12	0.03
qishloq xo'jaligi	0.125	0.05
tijorat kreditlari	0.1	0.02

Qurilish industriyasini qo'llash maqsadida bank maqsadsiz kreditlar, avtomobil va uy-joy xaridi uchun jami kreditlarning 50% dan kam bo'lmagan mablag'larni uy-joy sotib olish uchun olinadigan kreditlarga ajratmoqchi. kreditlar investitsiya qilish rejalari maqsadsiz kreditlar, avtomobil va uy-joy sotib olish uchun kreditlar miqdori. Kredit portfelidagi qaytarilmaydigan kreditlarning mumkin bo'lgan maksimal ulushi 4% ga teng.

Bank foydasini maksimal darajada oshirishga, ya'ni daromad bilan qaytarilmaydigan kreditlarning kutilgan miqdori orasidagi farqni oshirishga harakat qiladi. Bank uchun kreditlar portfeli qanday shakllantirilganda bankning umumiy siyosati talablari bajarilgan holda foydasi yuqori bo'ladi?

11 Mavzularni mustahkamlash uchun masala va topshiriqlar

11.1 Chiziqli dasturlash masalasining matematik modelini qurishga oid masalalar to'plami

Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar

1. Mebel fabrikasi stol va shkaf ishlab chiqaradi. Har bir mahsulotni ishlab chiqarish uchun ketadigan xomashyo miqdorlari uning zaxiradagi hajmi hamda tayyor mahsulotni sotishdan tushadigan foyda jadvalda keltirilgan.

Xomashyolar	Birlik mahsulot normasi		Zaxiradagi xomashyo miqdori
	shkaf	stol	
1 navli taxta (m^3)	0,2	0,1	40
2 navli taxta (m^3)	0,1	0,3	45
Ishchi soati	1,2	1,5	360
Har bir mahsulotdan keladigan foyda (ming so‘m)	6	8	

Fabrika har bir mahsulotdan qanchadan ishlab chiqarganda maksimal foyda ko‘radi? Masalaning matematik modelini quring.

2. Kompaniya simli va simsiz turdagi elektr himoya moslamasini ishlab chiqaradi. Simli moslamani tayyorlashga 2 soat, simsizini tayyorlashga esa 4 soat vaqt sarflaydi. Ishlab chiqarish uchun kompaniyaning 800 ish soat vaqti bor. Bundan tashqari, qadoqlash bo‘limi 300 ta moslamani qutilarga joylab sotishga tayyorlay oladi. Agar kompaniya simli moslamani sotishdan 30$ va simsiz moslamani sotishdan 40$ foyda olsa, eng ko‘p foyda olish uchun har bir moslamadan necha donadan ishlab chiqarish kerak?

3. Fabrika binolarning ichki va tashqi qismlarini bo‘yash uchun ikki xil bo‘yoq ishlab chiqaradi. Bo‘yoq ishlab chiqarish uchun 2 turdagi xomashyodan foydalaniladi. Jadvalda 1 tonna bo‘yoq uchun ketadigan xomashyo normalari, umumiy xomashyo miqdorlari hamda har bir turdagi bo‘yoqlarning narxlari keltirilgan.

Xomashyolar	1 t. bo‘yoq uchun ketadigan xomashyo miqdorlari (t)		Zaxiradagi xom ashyo miqdori
	binolar ichki qismi uchun	binolar tashqi qismi uchun	
A	2	3	6
B	5	2	10
1 t. bo‘yoq narxi (ming $)	1	2	

Tadqiqotlar shuni ko‘rsatdiki, binolarning tashqi qismi uchun ishlatiladigan bo’yoq turining kunlik normasi 1,5 tonnadan oshmaydi. Daromad eng yuqori bo‘lishi uchun har bir turdagi bo‘yoqlardan qanchadan ishlab chiqargan ma’qul? Masalaning matematik modelini quring.

4. Firma har bir avtomobilni sotishdan 400$ foyda, stansiya vagonini sotishdan esa 500$ foyda oladi. Firma yilning keyingi choragiga buyurtma olayotganida ishlab chiqaruvchilar avtomobil 300 tadan, vagonlar esa 150 tadan ortmasligini ma’lum qildi. Sotuvga tayyorlash uchun avtomobilga 2 soat, vagonga esa 3 soat vaqt sarflanadi. Keyingi chorakda firmaning mahsulotni 900 soat sotuvga tayyorlash uchun vaqti bor. Foyda eng ko‘p bo‘lishi uchun firma nechta avtomobil va nechta stansiya vagonini ishlab chiqarishi kerak?

5. Zavod A va B turdagi tovarlar ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarishda to‘rt xil xomashyodan foydalaniladi. Jadvalda birlik tovarni ishlab chiqarishdagi xomashyo miqdorlari, zaxiradagi xomashyo miqdorlari va tovarlarni sotishdan tushadigan daromad miqdorlari keltirilgan.

Xomashyo	Sarf bo‘ladigan xomashyo miqdori		Xomashyoning zaxiradagi miqdori
	A	B	
I	2	3	21
II	1	0	4
III	0	1	6
IV	2	1	10
Birlik tovar narxi (ming so‘m)	3	2	

Ishlab chiqarishni optimallashtiruvchi rejaning matematik modelini quring.

6. Saylov kompaniyasida nomzod radio va televidenie reklamalaridan foydalanishi mumkin. Tadqiqotlar shuni ko‘rsatdiki, televidenie orqali 1 daqiqalik xabar berish 0,09 mln. kishiga, radio orqali 1 daqiqalik xabar berish esa 0,006 mln. kishiga yetib boradi. Nomzod 2,1 mln. kishiga xabar etkazishi va umumiy reklama vaqti 80 daqiqadan oshmasligi kerak. Televidenie orqali xabar berish daqiqaiga 500$, radio orqali esa 100$ turadi. Umumiy xarajat eng kam bo‘lishi uchun har bir vositadan necha daqiqadan foydalanish lozim?

7. Firma uch xil modeldagi (I, II va III) mahsulot ishlab chiqaradi, buning uchun mos ravishda 4000 va 6000 birlik miqdorda bo‘lgan A va B xomashyodan foydalanadi. Har bir modeldagi mahsulotning bittasini tayyorlash uchun sarflanadigan xomashyoning birlik miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan:

Xomashyo	Bitta mahsulot tayyorlash uchun xomashyo sarfi (birlik miqdorda)		
	I model	II model	III model
A	2	3	5
B	4	2	7

I modeldagi mahsulotni ishlab chiqarish mehnat unumdorligi II va III modeldagi mahsulot ishlab chiqarish mehnat unumdorligiga qaraganda mos ravishda ikki va uch barobar ko‘p. Firma ishchilari I modeldagi mahsulotni ko‘pi bilan 1500 ta ishlab chiqarish imkoniyatiga ega. Sotuv bozorini o‘rganish shuni ko‘rsatdiki, I, II va III modeldagi mahsulotlarga bo‘lgan eng kam talab mos ravishda 200, 200 va 150 tadan iborat ekan. Bulardan tashqari, har bir modeldagi ishlab chiqarilgan mahsulotlarning nisbati 3:2:5 kabi bo‘lishi zarur. Har bir modeldagi mahsulotlarni sotishdan keladigan foyda salmog‘i mos ravishda 30$, 20$ va 50$ ga teng. Har bir modeldagi mahsulotdan qancha ishlab chiqarish kerakki, bundan firma eng ko‘p foyda ko‘rsin?

8. Duradgor firmasi ikki xil katta va kichik stollar ishlab chiqaradi. Kichik stol ishlab shiqarishga 2 soat, katta stol ishlab chiqarishga 4 soat vaqt sarflanadi. Firma har kuni ishlab chiqarishga 800 soat sarflash imkoniyatiga ega. Bo‘yovchi bo‘lim ko‘pi bilan 300 ta stolni bo‘yay oladi. Agar firma katta stoldan 40 ming so‘m, kichigidan 30 ming so‘m foyda olsa, eng ko‘p foyda olish uchun har bir stoldan nechtadan ishlab chiqarish kerak?

9. Korxona ikki xil sumkalarni tikish bilan shug‘ullanadi. Korxonada to‘rtta ish bajariladi. Jadvalda ishlarning bitta sumka uchun ketadigan vaqtlari hamda bitta sumkani sotishdan keladigan foyda aks ettirilgan.

mahsulot turi	qirqish va bichish	tikish	yakunlash	tekshirish va o‘rash	bitta sumkadan olinadigan foyda
standart	7/10	1/2	1	1/10	50 ming so‘m
original	1	5/6	2/3	0	90 ming so‘m

Tekshirish shuni ko‘rsatdiki, qirqish va bishish bo‘limida 630 soat, tikish bo‘limida 600 soat, yakunlash bo‘limida 708 soat, tekshirish va o‘rash bo‘limida 135 soat vaqt borligi aniqlandi. Eng ko‘p foyda olish uchun korxona har bir sumkadan nechtadan ishlab chiqarishi kerak? Masalaning matematik modelini quring.

10. Kompaniya ikki xil mahsulot ishlab chiqaradi. Bitta birinchi mahsulot sotishdan 25$, bitta ikkinchi mahsulot sotishdan 30$ foyda ko‘radi. Kompaniyada uchta ishlab chiqarish bo‘limi bo‘lib, bitta mahsulot uchun bu bo‘limlarda sarflanadigan vaqt jadvalda keltirilgan.

	birinchi mahsulot	ikkinchi mahsulot
birinchi bo‘lim	1,5	3
ikkinchi bo‘lim	2	1
uchinchi bo‘lim	0,25	0,25

Bo‘lim kuzatuvchilari keyingi oyda 1-bo‘limda 450 ish soati, 2-bo‘limda 350 ish soati, 3-bo‘limda esa 50 ish soati borligini aniqladilar. Umumiy foyda eng yuqori bo‘lishi uchun har bir mahsulotdan qanchadan ishlab chiqarish lozim?

11. Korxona A va B turdagi velosipedlar ishlab chiqaradi. Bitta A turdagi velosipedga 2 birlik po‘lat, 6 birlik alyuminiy va 12 birlik maxsus qismlar ishlatiladi. Bitta B turdagi velosipedga 5 birlik po‘lat, 5 birlik alyuminiy va 5 birlik maxsus qismlar ishlatiladi. Korxonaga kuniga 100 birlik po‘lat, 120 birlik alyuminiy va 180 birlik

maxsus qismlar keltiriladi. Bitta A turdagi velosipeddan 30$, bitta B turdagi velosipeddan esa 20$ foyda keladi. Umumiy foyda maksimal bo‘lishi uchun har bir velosopeddan qanchadan ishlab chiqarish maqsadga muvofiq?

12. «Sport jihozlari» kompaniyasi beysbol uyini uchun oddiy va tutish qo‘lqoplarini ishlab chiqaradi. Kompaniyaning qirqish va bichish sexida 900 soat, yakunlash sexi 300 soat, qadoqlash sexida 100 soat ishlab chiqarish vaqti bor. Jadvalda bitta qo‘lqop uchun ishlab chiqarish vaqtlari keltirilgan.

mahsulot turi	qirqish va bichish	yakunlash	qadoqlash	bitta qo‘lqopdan olinadigan foyda
oddiy qo‘lqop	1	1/2	1/8	$5
tutish qo‘lqopi	3/2	1/3	1/7	$8

Kompaniya foydani maksimallashtirish uchun har bir qo‘lqop turidan qancha ishlab chiqarishi kerak?

13. Firma ikki xil tovar ishlab chiqaradi. Har bir tovarga uchta uskunada ishlov beriladi. Har bir tovarga ishlov berish vaqtlari jadvalda keltirilgan.

	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

I, II, III uskunalarning haftalik soatlari mos ravishda 40, 36 va 36 soat. Har bir tovardan keladigan foyda 5$ va 3$. Foyda maksimal bo‘lishi uchun har bir tovardan qanchadan ishlab chiqarishi kerak?

14. Firmaga fosfor miqdori 0,03% dan oshmaydigan va begona aralashmalar miqdori 3,25% dan oshmaydigan ko‘mir kerak. Xarakteristikalari jadvalda ko‘rsatilgan ko‘mir navlaridan qanchadan olinganda (1 tonna ko‘mir uchun) eng kam xarajat qilinadi va yuqoridagi talab qondiriladi? Masalaning matematik modelini quring.

ko‘mir navlari	focfor miqdori (%)	begona aralashmalar (%)	narxi ($)
A	0,06	2,0	30
V	0,04	4,0	30
S	0,02	3,0	45

15. Polni tozalash vocitacida kami bilan 60 birlik tozalash xususiyati va kamida 60 birlik dezinfeksiya xususiyati bo‘lishi kerak. Shu bilan birga, teriga noxush ta’siri minimal bo‘lishi kerak. Polni tozalash vositasining xarakteristikalari jadvalda keltirilgan uch turdagi tozalash moddalarining aralashmasidan hosil qilinadi.

tozalovchi moddalar	tozalash xususiyati	dezinfeksiyalash xususiyati	teriga nojo‘ya ta’siri
A	90	30	70
B	65	85	50
C	45	70	10

Optimal aralashma topishning matematik modelini quring.

16. Firma vannaxonalar uchun ikki xil oʻlchamdagi A va B javonlar ishlab chiqaradi. Tekshirishlar shuni koʻrsatdiki, har haftada 550 donagacha javonlarni realizatsiya qilish mumkin. Har bir A turdagi javonlar uchun 2 m^2 material, B turdagisiga esa, 3 m^2 material sarf boʻladi. Haftada firma 1200 m^2 gacha material olishi mumkin. A turdagi bir dona javonni ishlab chiqarish uchun 12 daqiqa, V turdagisi uchun esa 30 daqiqa vaqt sarf boʻladi. Haftada EHM 160 soat ishlashi mumkin. Agar A turdagi javonni sotishdan olinadigan foyda 30 ming soʻm va V turdagidan esa 40 ming soʻm boʻlsa, har haftada qancha A turdagi va qancha V turdagi javonlarni ishlab chiqarish maqsadga muvofiq? Chiziqli dasturlash masalasini tuzing.

17. Avtomobil zavodi «Lochin» va «Pahlavon» rusumidagi mashinalar ishlab chiqaradi. Zavodda 1000 ta oʻrta malakasli va 800 ta yuqori malakali ishchilar ishlaydi. Har bir ishchining haftalik ish soati 40 ga teng. «Lochin» rusumidagi mashinani ishlab chiqarish uchun 30 soat oʻta malakali va 50 soat yuqori malakali ishchi soatlari sarf qilinadi; «Pahlavon» rusumidagi mashinani ishlab chiqarish uchun esa 40 soat oʻrta malakali va 20 soat yuqori malakali ishchi soatlari sarf qilinadi. «Lochin» rusumidagi har bir mashina uchun 500$ lik, «Pahlavon» rusumidagi har bir mashina uchun esa 1500$ lik xomashyo sarf qilinadi. Haftalik umumiy xarajat 900000$ dan oshmasligi lozim. Mashinalarni etkazib beruvchi ishchilar haftada besh kun ishlab, har kuni 210 dan koʻp boʻlmagan mashinalarni yetkazib beradi. «Lochin» rusumidagi har bir avtomobildan tushadigan foyda 1000$, «Pahlavon»dan esa 500$. Haftada har bir rusumdagi mashinalardan qanchadan ishlab chiqarganda zavod eng koʻp foyda koʻradi? Masalaning matematik modelini quring.

18. Tadbirkor narxlari 250$ va 400$ turadigan kompyuterlarni Xitoydan olib kelib sotish niyatida. Tadbirkor narxi 250$li kompyuterdan 45$, 400$likdan esa, 50$ foyda koʻradi. Kuzatishlar shuni koʻrsatdiki kompyuterlarga boʻlgan oylik talab 210 tadan oshmaydi. Agar tadbirkor imkoniyat darajaci 70 000$ dan oshmaca, har bir turdagi kompyuterlardan qanchadan sotib olganda eng yuqori foyda koʻradi? Masalaning matematik modelini quring.

19. Fermerning 15 gektar yeri boʻlib, u yerga ikki xil A va B oʻsimliklar ekish niyatida. Yerning bir gektarini A turdagi oʻsimlik ekishga tayyorlash uchun bir kun, B turdagi oʻsimlik ekishga tayyorlash uchun esa, ikki kun kerak boʻladi. Yerni ekishga tayyorlash uchun yilda 240 kun bor. Bir gektar maydondan A turdagi oʻsimlik hosilini yigʻishtirish uchun 0,3 kun, B turdagi oʻsimlik hosilini yigʻishtirish uchun esa 0,1 kun kerak boʻladi. Hosilni yigʻishtirish 30 kundan oshmasligi kerak. Agar A turdagi oʻsimlikning har gektaridan olinadigan foyda 140$, B turdagi oʻsimlikdan esa 235$ boʻlsa, maksimal foyda olish uchun har turdagi oʻsimlikdan qanchadan ekish kerak? Masalaning matematik modelni quring.

20. Fermerning 50 gektar yeri boʻlib, u yerga uch xil (sabzi, selder, petrushka) ekin ekishni rejalashtirmoqda. Sabzining bir gektarini yetishtirish uchun 200$ sarf qilinadi va 60$ foyda olinadi. Selderning bir gektarini yetishtirish uchun 80$ sarf qilinadi va 20$ foyda olinadi. Petrushkada bu koʻrcatkichlar mos ravishda 140$ va 30$ tashkil qiladi. Koʻkatlarni yetishtirishdagi umumiy xarajat 10 000$ dan oshmasligi lozim. Maksimal foyda olish uchun har bir ekinlardan qanchadan ekish kerak boʻladi. Masalaning matematik modelini quring.

21. Tadbirkor olma va uzum sharbatlaridan ikki xil maxsus ichimlik tayyorlash niyatida. Birinchi ichimlik 30% olma va 70% uzum sharbatlari aralashmasidan, ikkinchi

ichimlik esa 60% olma va 40% uzum sharbatlari aralashmasidan tayyorlanadi. Tadbirkorda 1000 litr olma va 1500 litr uzum sharbati mavjud. Agar tadbirkor birinchi ichimlikdan 0,60$, ikkinchicidan esa 0,50$ foyda ko'radigan bo'lca, har bir ichimlikdan necha litrdan tayyorlangandagi maksimal foyda olishning matematik modelini tuzing.

22. Universitetning auditoriya va laboratoriyalari 5000 dan ko'p bo'lmagan talabalarga mo'ljallangan. Universitet o'z davlatining fuqarolarini qabul qilish soni 4000 dan oshmasligi kerak. Chet el fuqarolarini qabul qilishida chegara yo'q. Universitetning o'qituvchilar salmog'i 440 kishidan iborat. Normaga ko'ra, o'z davlatining 12 talabasiga va chet el talabalarining 10 tasiga bitta o'qituvchi to'g'ri keladi. Universitetning auditoriyalar hajmi 2800 o'rindan iborat. Shu davlatning 40% talabalari va chet ellik talabalarning 80% auditoriyalarga joylashishi kerak. Yiliga universitet o'z davlatining har bir talabasi uchun davlatdan 2000$, chet ellik talabalar uchun esa 3000$ oladi. Universitet maksimal foyda olishi uchun qabul rejaci qanday bo'lishi kerak?

23. Qandolat fabrikasi ikki turdagi konfetlar ishlab chiqaradi. Har 1 kg. konfetlar uchun ketadigan xomashyo jadvalda berilgan.

xomashyo turi	I tur konfet	II tur konfet	xomashyo zaxirasi
shakar (kg)	0,4	0,3	120
shokolad (kg)	0,3	0,5	150
yong'oq (kg)	0,3	0,5	120
foyda (co'm)	90	120	

Konfet ishlab chiqarishning optimal rejasini tuzing.

24. Kompaniyaning ikki zavodi bo'lib, ularda uch xil navli temir ishlab chiqariladi. 1-zavodning bir kunlik ishlashi 70000$ga, 2-zavodniki eca 60000$ga tushadi. Kuniga 1-zavod 400 tonna 1-nav, 500 tonna 2-nav, 450 tonna 3-nav temir ishlab chiqaradi. Kuniga 2-zavod esa 350 tonna 1-nav, 600 tonna 2-nav va 400 tonna 3-nav temir ishlab chiqaradi. Kompaniya 100000 tonna 1-nav, 150000 tonna 2-nav va 124500 tonna 3-nav temirga buyurtma olgan. Buyurtmani bajarish uchun har bir zavod necha kun ishlaganda kompaniya eng kam xarajat sarf qiladi?

25. Tumanga qarashli 4 ta jamoa xo'jaligining ekin maydonlari mos holda 100, 120, 130, 80 ga. Tuman rejasiga ko'ra, 3 xil ekindan 5000, 3500, 7000 tonna hosil olinishi kerak. Jamoa xo'jaligining ekin maydonlarining har bir gektaridan olishi kutilayotgan I,II va III ekin miqdori jadvalda keltirilgan. Jamoa xo'jaliklari bo'yicha maksimal hosil olinishi uchun ekin maydonlari qanday taqsimlanishi kerak?

	I ekin	II ekin	III ekin
1- jamoa ho'jaligi	4	3	8
2- jamoa ho'jaligi	3	5	9
3- jamoa ho'jaligi	3	5	4
4- jamoa ho'jaligi	6	4	3

26. Sexda 3 ta bir-birini almashtira oladigan qurilma-stanoklar bor, ularning quvvati oyiga 400,850,300 norma-vaqtgacha. Sex 5 xil mahsulot tayyorlash majburiyatini

olgan: P1- 600 birlik; P2 -350, P3- 450, P4- 500, P5-600 birlik. Birinchi stanok har bir xil mahsulotning bir birligini tayyorlashi uchun mos holda 0.3, 0.6, 0.4, 0.8 va 0.5 soat sarflaydi, ikkinchi stanok - 0.6; 0.8; 0.7 va 0.9 soat, uchinchi stanok - 1.4, 0.5, 0.9, 0.6 va 1 soat sarflaydi. Bir birlik mahsulot tayyorlash uchun birinchi stanokning xarajatlari mos holda 20, 10, 40, 50 va 80 pul birligi; ikkinchisiniki - 50, 40, 30 va 60; uchinchisiniki 65, 90, 30, 20 va 50. Mahsulotlar bir birligining bahosi - 80, 100, 60, 50 va 85 pul birligiga teng boʻlsa, majburiyat bajarilishini kafolatlaydigan mahsulot ishlab chiqarish rejasi shunday tuzilsinki, maksimal foyda olinsin.

27. Firma stol va stullar ishlab chiqarishga ixtisoslashgan. Ularni tayyorlashga ishlatiladigan 72 m^3 birinchi xil va 56 m^3 ikkinchi xil yogʻoch mahsulotlari mavjud. Stol va stullarning bir birligini tayyorlashga sarflangan yogʻoch mahsulotlarining normasi jadvalda berilgan.

	1-xil yogʻoch	2-xil yogʻoch
stol	0.18	0.08
stul	0.09	0.28

Firma bitta stoldan 4.4$ sof daromad oladi, stuldan esa - 2.8$. Maksimal daromad olish uchun firma nechtadan stol va stullar tayyorlashi lozim? Bunday masalaning iqtisodiy matematik modelini tuzing.

28. Uzunligi 750 sm.dan boʻlgan simlarni uzunligi 250 sm., 200 sm. va 150 sm.li kesmalarga qirqish kerak. Uzunligi 250 sm. boʻlgan kesmadan 200000 ta, 200 sm.ligidan 250000 ta va 150 sm.li kesmadan 50000 ta tayyorlash buyurtmasi olindi. Eng kam chiqindi chiqishini ta'minlab buyurtma bajariladigan eng kam sondagi simlar qirqiladigan optimal qirqish rejasining iqtisodiy matematik modelini tuzing.

29. Savdo firmasi P1, P2, P3 xil mahsulotlar sotadi. Buning uchun 460 m^2 maydonga ega boʻlgan foydali joydan va 500 odam / soat ishchi vaqtidan foydalaniladi. Firmaning tovar aylantirishi (tovar oboroti) 240000 pul birligiga teng. Maksimal daromad keltiradigan tovar aylantirish rejasini tuzish zarur. Ma'lumotlar jadvalda berilgan. Bu masalaning matematik modelini tuzing.

Xomashyo	1000 ming pul birligini aylantirishga sarflanadigan resurslar		
	P1	P2	P3
foydali maydon, m^2	1,5	2	3
ishchi vaqti odam/soat	3	2	1,5
daromad	50	65	70

30. Shahar turar-joy mavzesini P-18 va P-12 seriyali uylar bilan qurish optimal rejalashtirilishi kerak. Har bir seriyali uylarni hajmiy-rejaviy koʻrsatkichlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

xonadon	**P-18**	**P-12**
2 kishilik	100	70
3 kishilik	120	90
4 va undan koʻp kishilik	130	110

Qurilishi rejalashtirilayotgan turar-joy mavzesi tomonidan aholining demografik xususiyatlari e'tiborga olinsa: 2 kishilik xonalar soni 700 dan, 3 kishilik xonalar soni 1400 dan, 4 va undan ortiq kishilik xonalar soni 1100 dan ko'p bo'lmasligi talab qilinadi. Turar-joy mavzesi qurilishi shunday tashkil qilinishi kerakki, xonalarning umumiy soni yuqoridagi hamma shartlar bajarilgan holda maksimal bo'lsin.

31. Chinoz tumanining baliq xo'jaliklaridan birida tolstolobik va sazan baliqlari yetishtirilmoqda va shu maqsadda A va B yem turidan foydalanilyapti. Tolstolobikning o'rtacha vazni 2 kg., sazanning esa - 1 kg.ni tashkil etadi. Tolstolobik o'rtacha hisobda A yemining 1 birligini va B yemining 3 birligini iste'mol qiladi, sazan esa A yemidan 2 birlik va B yemidan 1 birlik tanovul qiladi. A yemining kundalik zaxirasi 600 birlikni, B yemining kundalik zaxirasi esa 800 birlikni tashkil etadi. Baliqlar umumiy vaznini maksimallashtirish uchun har bir baliq turidan qancha miqdorda ishlab chiqarish lozim? Sazan soni 50 tadan ortiq bo'lishi lozim, chunki 50 ta sazanga buyurtma bor.

32. Samarqand choy qadoqlash fabrikasi ikkita navini - «95» va «110» ko'k choy navlarini qadoqlaydi. Ularni qadoqlash uchun fabrika chet eldan, ya'ni Seylon, Hindiston va Gruziyadan choy barglarini sotib oladi va ulardan turli nisbatlarda foydalanadi. Quyidagi jadvalda bu xomashyolarning kundalik zaxirasi ko'rsatilgan.

choy barglari	**«95» navi**	**«110» navi**	**bir kunlik zaxira (kg)**
Seylon	0,6	0,3	52
Hindiston	0,3	0,2	48
Gruziya	0,1	0,5	36

Fabrika foydasini maksimallashtirish uchun qadoqlashning bir kunlik optimal rejasini tuzing. Quyidagi qo'shimcha ma'lumotdan foydalaning: 1 kg. «95»choyidan tushadigan foyda 18 dollarni, 1 kg. «110» choyidan tushadigan foyda esa 14 dollarni tashkil etadi. Fabrika foydasini maksimallashtirish uchun qadoqlashning bir kunlik optimal rejasini tuzing.

33. Firma kitob javonlariga kitob qo'yish uchun ikki xil A va V modelda yig'iladigan taxtachalar (polka) ishlab chiqarishga ixtisoslashgan bo'lib, A modeldagi har bir mahsulotni ishlab chiqarish uchun 4 m^2, V modeldagisi uchun esa 5 m^2 yuqori sifatli taxta (yog'och) ishlatiladi. Firmani xomashyo bilan ta'minlovchilar haftasiga 1800 m^2 gacha taxta yetkazib bera oladi. A modeldagi har bir mahsulotga ishlov berish uchun 15 daqiqa, V modeldagisiga 30 daqiqa mashina (stanok) vaqti sarflanadi. Haftasiga 160 soatgacha mashina vaqti sarflanishi mumkin. Agar A modeldagi har bir mahsulotni sotishdan 5 dollar, V modeldagi har bir mahsulotni sotishdan 6 dollar foyda kelsa, firmaning haftalik foydasi eng ko'p bo'lishi uchun ulardan haftasiga necha donadan ishlab chiqarish kerak?

34. Buxoroda mehmonxonalar uchun pirog va tort pishiradigan konditerlik fabrikasi ochildi. Har bir mahsulotni tayyorlash uchun shakar, tuxum va undan foydalaniladi. Har bir mahsulotning 1 kg. uchun sarflanadigan ingrediyentlar hajmi va ularning bir kunlik zaxiralari quyidagi jadvalda keltirilgan.

ingrediyentlar	konditerlik mahsuloti (1 kg)		zaxira
	pirog	tort	
shakar	0,1 kg	0,4 kg	60 kg
tuxum	4 dona	6 dona	1000 dona
un	0,6 kg	0,3 kg	96 kg

1 kg. pirog sotilishi 3 dollar foyda keltiradi, 1 kg. tort sotilishi esa 6 dollar foyda keltiradi. Foydani maksimal qilish uchun pirog va tort ishlab chiqarish kundalik rejasini tuzing.

35. Uch oylik jo‘jalarni keyingi ikki oy davomida boqish uchun iloji boricha arzon ratsion tuzish lozim, lekin jo‘jalar sog‘lom va yaxshi o‘sishi uchun ozuqadan kerakli oqsil, yog‘ va uglevodlarni olishi lozim (jadvalga qarang). Jo‘jalar ozuqasi so‘k va beda o‘tidan iborat. Bir sutkada jo‘ja kerakli oqsil, yog‘ va uglevodlarga bo‘lgan minimal ehtiyojini qondirishi kerak (jadvalda berilgan).

	1 kg so‘kda	1 kg beda o‘tida	1 sutka uchun minimal ehtiyoj
oqsil, kg	0,3	0,1	0,09 kg
yog‘lar, kg	0,08	0,01	0,02 kg
uglevodlar, kg	0,5	0,4	0,2 kg
ozuqa qiymati (doll./kg)	0,8	0,2	

Jo‘ja o‘rtacha hisobda kamida 400 g. oziqa iste’mol qilishi shart. Ozuqa qiymatini minimallashtirish uchun jo‘janing 1 sutkali ozuqa ratsioni qanday bo‘lishi kerak, ya’ni ozuqlanishi uchun necha kg. so‘k va beda o‘ti lozim?

36. Go‘sht uchun boqilayotgan yoshi ikkiga to‘lgan qoramolni semirtirish uchun uch xil ozuqadan foydalanilyapti: yem-xashak, paxta chigiti kunjarasi va bug‘doy kepagi. Bir kg. ozuqa tarkibidagi oqsil, yog‘ va uglevodlar, ularning bir sutkadagi minimal iste’moli miqdorlari quyidagi jadvalda berilgan.

	1 kg. yem-xashakda	1 kg. paxta chigiti kunjarasida	1 kg. bug‘doy kepagida	1 sutka uchun minimal ehtiyoj, kg.
Oqsil, kg	0,08	0,11	0,22	1
Yog‘lar, kg	0,02	0,42	0,08	0,9
Uglevodlar, kg	0,12	0,12	0,4	2
Salbiy ta’sir etuvchi moddalar, kg	0,005	0,003	-	0,04 (dan oshmasligi kerak)
Ozuqa qiymati, doll. / kg	0,09	0,5	0,6	

Qoramol o‘rtacha hisobda kamida 10 kg. ozuqa iste’mol qilishi shart. Salbiy ta’sir etuvchi moddalarning kundalik iste’moli 0,04 kg. oshmasligi lozim. Ozuqa qiymatini minimallashtirish uchun qoramolning 1 sutkalik ozuqa ratsioni qanday bo‘lishi kerak, ya’ni necha kg. yem-xashak, paxta chigiti kunjarasi va bug‘doy kepagidan oziqlanishi lozim?

37. Sirkda ikki yoshli nemis zotli kuchuklar uchun oziqlanish ratsionini tuzish lozim. Birinchidan, ratsion qiymati iloji boricha arzon bo‘lishi shart, chunki ortiqcha sarf-xarajatlarning oldini olmoq zarur. Ikkinchidan, optimal ratsion kuchuk sog‘lomligini ta’minlashi zarur. Ozuqa ratsioni mol go‘shti va sulidan iborat. Kuchuk kamida 1,8 kg. bo‘lgan ozuqani iste’mol qilishi lozim (Agar bu shart qo‘yilmasa, optimal ratsion vazni pasayib ketishi mumkin). Tuzilgan ozuqada oqsil ulushi kamida 20%, yog‘lar ulushi 10%, uglevodlar ulushi 30% bo‘lishi shart (jadvalda ko‘rsatilgan). Kuchuklar haddan ziyod semirib ketmasligi uchun ozuqadagi yog‘lar ulushi 40%dan oshib ketmasligi lozim.

	1 kg. ozuqa turida		ozuqadagi minimal miqdori
	1 kg. mol go‘shtida	1 kg. sulida	
oqsil, kg	0,25	0,08	0,02
yog‘lar, kg	0,15	0,04	0,1, ammo 0,4 dan oshmasligi lozim
uglevodlar, kg	0,35	0,6	0,3
ozuqa turi qiymati, doll./kg	5	2	

Ozuqa ratsioni qiymatini minimallashtirish uchun har bir kuchuk bir kunda necha kg. go‘sht va necha kg. suli eyishi kerak?

38. Olmaliq metallurgiya kombinatiga ko‘mir kerak. Lekin ko‘mir navlari va narxi har xil bo‘lganligi uchun kombinat ko‘mir navlarini qorishma qilib ishlatishga qaror qildi. Metall sifatli ishlab chiqarilishi uchun qorishma ko‘mir tarkibida fosfor 0.03%dan ortiq bo‘lmasligi va kullar 3.25%dan oshmasligi zarur. Kombinat uchta ko‘mir navidan foydalanadi: A, B va C. Har bir ko‘mir navi tarkibida yuqorida aytilgan moddalar uchraydi (jadvalga qarang).

	salbiy moddalar miqdori, %			qorishma ko‘mirda salbiy moddalarga cheklovlar,%
	A ko‘mir	B ko‘mir	C ko‘mir	
fosfor, %	0.06	0.04	0.02	0.03
kullar, %	2	4	3	3.25
ko‘mir navi qiymati, doll. /tonna	1	1	1.5	

Qorishma ko‘mir qiymatini minimal qilish uchun ko‘mir navlarini qanaqa mutanosiblikda qorishma qilish lozim?

39. Toshkenda non va patir non yopadigan novvoyxona ochildi. Har bir non turini yopish uchun sut, yog‘, xamirturush kerak. Har bir mahsulotning 1 donasi uchun sarflanadigan ingrediyentlar hajmi va ularning bir kunlik zaxirasi quyidagi jadvalda ko‘rsatilgan.

ingrediyentlar	novvoyxona mahsulotlari		ingrediyentlarning kundalik zaxiralari
	non, bir dona	patir, bir dona	
sut	-	0,05	26 litr
yog‘	-	0,04	20 kg
xamirturush	0,001	0,002	2 kg
un	0,5	0,8	1000 kg

1 dona non sotilishi 700 so‘m foyda keltiradi, 1 dona patir sotilishi esa 1500 so‘m foyda keltiradi. Foydani maksimal qilish uchun non va patir ishlab chiqarish kundalik rejasini tuzing. Masalaning matematik modelini tuzing va optimal echimni toping.

40. «O‘zbekinvest» kompaniyasi rahbariyati 2012- yil yanvar oyi uchun reklama byudjetini 28000$ miqdorda belgiladi. Rahbariyat quyidagi talablarni qo‘ydi:

- televidenieda kamida 8 marotaba reklama qilish kerak;
- kamida 40000 mijozni jalb etish lozim;
- televidenie orqali reklama qilishga ketadigan xarajat 15000$dan oshmasligi lozim.

Marketing bo‘limi tasarrufida quyidagi ma’lumotlar mavjud:

reklama uchun vosita	bo‘ladigan mijoz soni	reklama narxi, doll.	bir oyda maksimal soni	media vositasidagi bir marotaba reklama naflilik balli
kunduzgi TV (1 min.)	1100	1500	15	60
kechki TV (30 sek.)	1900	3000	10	85
kundalik gazeta (to‘liq bet)	1300	400	25	40
haftalik gazeta yarim bet)	2700	1000	4	60
radio (30 sek.)	350	100	30	25

Marketing bo‘limi shu mablag‘ni media vositalari orasida shunday taqsimlashi lozimki, natijada umumiy naflilik ballari miqdori maksimal bo‘lsin. Natijalar asosida quyidagi jadvalni to‘ldiring.

reklama uchun media vositasi	bir oyda optimal reklama soni	reklama uchun optimal byudjet, doll
kunduzgi TV (1 min.)		
kechki TV (30 sek.)		
kundalik gazeta (to‘liq bet)		
haftalik gazeta (yarim bet)		
radio (30 sek.)		

41. Yigiruv fabrikasi ayollar ko‘ylagi va kostyumbop gazlama uchun yigirilgan ip ishlab chiqarishda to‘rt xil turdagi xomashyodan foydalanadi. Har bir turdagi

xomashyoning miqdori chegaralangan bo‘lib, ular mos ravishda 120, 160, 120 va 80 birlikka teng. Har bir turdagi yigirilgan ipning bir birligini tayyorlash uchun zarur bo‘lgan har bir turdagi xomashyoning birlik miqdori hamda har bir turdagi yigirilgan ipning bir birligini sotishdan fabrika oladigan foyda haqidagi ma’lumotlar quyidagi jadvalda keltirilgan:

xomashyo turi	xomashyo miqdori (shartli birlikda)	yigirilgan ip ishlab chiqarish uchun zarur xomashyoning birlik miqdori	
		kostyum uchun	ko‘ylak uchun
lavsanli shtapel tola	120	4	0
nitronli shtapel tola	160	0	4
jun 70^K	120	2	2
jun 64^K	8	2	1
fabrika oladigan foyda		3	2

Yigirilgan ip ishlab chiqarishning shunday rejasi tuzilsinki, ularni sotishdan fabrika eng ko‘p foyda ko‘rsin.

42. Ikki turdagi buyumni tayyorlash jarayoni ularning har biriga ketma-ket uchta stanokda ishlov berish bilan boradi. Sutkalik i - stanokdan foydalanish vaqti b_i soatni tashkil etadi ($i = 1, 2, 3$), j -turdagi har bir buyumga ($j = 1, 2$), i - stanokda ishlov berish vaqti esa a_{ij} soatga teng. j -turdagi bitta buyumni sotishdan keladigan foyda c_j pul birligini tashkil etadi. Keladigan foyda eng ko‘p bo‘lishi uchun buyumlarning har biridan sutkalik ishlab chiqarish rejasini tuzing. Bu erda

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \end{pmatrix}, \ c_1 = 65, \ c_2 = 80.$$

43. Firma ikki turdagi gazlamadan ayollar kostyumi va ko‘ylaklarini ishlab chiqaradi. Ko‘ylak uchun birinchi turdagi gazlamadan $1.5m^2$, ikkinchi turidan $0.5m^2$, kostyum uchun esa mos ravishda $1.6m^2$ va $0.8m^2$ sarflanadi. Firmaga bitta kostyumni sotishdan keladigan foyda 5 ming so‘m, bitta ko‘ylakni sotishdan keladigan foyda esa 3 ming so‘mni tashkil etadi. Birinchi tur gazlama miqdori $141m^2$, ikkinchi turdagisi esa $63m^2$ bo‘lsa, firmaning ishlab chiqarish rentabelligi eng yuqori bo‘lishi uchun nechta ko‘ylak va kostyum tikish kerakligini aniqlang.

44. Birinchi va ikkinchi navli benzindan har xil maqsadlar uchun ikki xil A va B aralashma tayyorlanadi. A aralashma tarkibi 60% birinchi navli va 40% ikkinchi navli benzindan tashkil topadi; B aralashma tarkibi esa 80% birinchi navli, 20% ikkinchi navli benzindan iborat. Bir kg. A turdagi aralashmaning sotilish narxi 10 pul birligiga, 1 kg. B aralashmaning sotilish narxi esa 12 pul birligiga teng. Zaxirada 50 tonna birinchi navli va 30 tonna ikkinchi navli benzin bo‘lsa, eng yuqori foyda olish uchun har bir turdagi aralashmadan qanchadan tayyorlash rejasini tuzing.

45. Inson o‘z salomatligi va ish qobiliyatini saqlab turish uchun sutkasiga ma’lum miqdorda oqsil, yog‘, uglevodlar, suv va vitaminlar kabi ozuqa moddalarini iste’mol qilishi zarur. Ularning miqdori turli turdagi ovqatlarda turli xil bo‘ladi. Bu yerda

biz ikki turdagi O_1 va O_2 ovqat bilan chegaralanamiz. Quyidagi jadvalda har bir ovqat birligi tarkibidagi moddalarning miqdori keltirilgan:

inson organizmi uchun zarur bo'lgan moddalar turi	zaruriy moddalarning sutkalik eng kam me'yori	ovqat turi	
		O_1	O_2
B_1 - yog'lar	10	1	5
B_2 - oqsillar	12	3	2
B_3 - uglevodlar	16	4	2
B_4 - suv	10	2	2
B_5 - vitaminlar	1	1	0

O_1 turdagi ovqat birligining narxi 20 pul birligiga, O_2 turdagi ovqat birligining narxi esa 30 pul birligiga teng. Ovqatlanishni shunday tashkil etish kerakki, birinchidan, uning narxi eng kam bo'lsin, ikkinchidan, inson organizmi barcha turdagi ozuqa moddalarning sutkalik eng kam me'yoridan kam bo'lmagan miqdorda olsin.

46. Firmaning tikuv sexida 84 m. gazlama bo'lib, bitta xalat tikish uchun 4 m., bitta kurtka tikish uchun esa 3 m. gazlama sarflanadi. Bulardan tashqari 15 tadan ko'p bo'lmagan xalat va 20 tadan kam bo'lmagan kurtka tikish mumkin. Agar xalatning narxi 6 pul birligiga,kurtkaning narxi 3 pul birligiga teng bo'lsa, tayyorlangan mahsulotni sotishdan firma eng ko'p foyda olishi uchun necha dona xalat va kurtka tikishi lozim?

47. Firmaning texnik nazorat bo'limida 1-va 2-razryadli nazoratchilar bo'lib, ular 8 soatlik ish kuni davomida 1800 tadan kam bo'lmagan mahsulotni nazoratdan o'tkazishlari zarur. Birinchi razryadli nazoratchi bir soatda 25 ta buyumni tekshiradi va 98% holda xatolikka yo'l qo'ymaydi, 2-razryadli nazoratchi esa bir soatda 15 ta buyumni tekshiradi va uning aniqliligi 95% ni tashkil etadi. Birinchi razryadli nazoratchining bir soatlik ish haqi 4 dollarga, 2-razryadli nazoratchiniki 3 dollarga teng. Nazoratchining har bir xatosi uchun firma 2 dollar miqdorda zarar ko'radi. Firma 8 ta birinchi razryadli va 10 ta ikkinchi razryadli nazoratchidan foydalanishi mumkin. Firma rahbariyatidan nazoratchilar tarkibi qanday bo'lganda, ulardan keladigan umumiy zarar eng kam miqdorda bo'lishini aniqlab berishingizni so'raydi.

48. Uncha katta bo'lmagan fabrika ikki turli I va II markali bo'yoq ishlab chiqaradi. Bu mahsulotlarning ikkalasi ham ulgurji savdo yo'li bilan sotiladi. Ularni ishlab chiqarishda boshlang'ich xomashyo sifatida ikki turli A va B mahsulotlardan foydalaniladi. A va B mahsulotlarning sutkalik mumkin bo'lgan eng ko'p miqdori mos ravishda 7 tonna va 9 tonnani tashkil etadi. Har bir turdagi bo'yoqning 1 tonnasini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan A va B mahsulotlarning miqdori quyidagi jadvalda berilgan:

boshlang'ich xomashyo mahsulotlari	bo'yoqning tonnasiga sarflanadigan A va B turdagi mahsulot miqdori (tonnada)		A va B turdagi xomashyo mahsulotlarining eng ko'p miqdori (tonnada)
	I - turdagi bo'yoq	II - turdagi bo'yoq	
A	3	2	7
B	2	3	9

Sotish bozorini o‘rganish shuni ko‘rsatdiki, I turdagi bo‘yoqqa bo‘ladigan bir sutkalik talab II turdagi bo‘yoqqa bo‘ladigan talabga nisbatan hech qachon 1 tonnadan ko‘p bo‘lmas ekan. Bulardan tashqari, I turdagi bo‘yoqqa bo‘ladigan sutkalik talab hech qachon 3 tonnadan oshmas ekan. Ulgurji savdoda har bir turdagi bo‘yoq 1 tonnasining narxi mos ravishda 3000 va 2000 shartli pul birligiga teng bo‘lsa, firma har qaysi turdagi bo‘yoqdan qancha miqdorda ishlab chiqarish kerakki, ularni sotishdan firma eng ko‘p foyda ko‘rsin?

49. Firma uch xil: mehnat, xomashyo va jihoz resurslaridan foydalanib, to‘rt xil: P1, P2, P3 va P4 mahsulot ishlab chiqaradi. Quyidagi jadvalda har bir mahsulot birligini tayyorlashga har bir resursdan bo‘ladigan sarf me’yori hamda har bir mahsulot birligini sotishdan olinadigan foyda (daromad) keltirilgan:

resurslar turi	mahsulot turi				resurslar hajmi
	P1	P2	P3	P4	
mehnat	1	1	1	1	16
xomashyo	6	5	4	3	110
jihoz	4	6	10	13	100
daromad (shartli pul birligida)	60	70	120	130	

Har bir turdagi mahsulotdan ishlab chiqariladigan shunday reja tuzilsinki, bundan firma eng ko‘p foyda ko‘rsin.

50. Fabrika uch xil turdagi gazlama ishlab chiqarishga ixtisoslashgan bo‘lib, birinchi, ikkinchi va uchinchi turdagi gazlamalardan bir sutkalik ishlab chiqarish rejasi mos ravishda 90 m., 70 m., 60 m.dan kam emas. Sutkalik resurslar taqsimoti esa quyidagicha:780 birlik ishlab chiqarish jihozlari; 850 birlik xomashyo; 790 birlik elektr energiyasi. Ularning har biridan 1 m. gazlama ishlab chiqarish uchun bo‘ladigan sarf quyidagi jadvalda keltirilgan:

resurslar	gazlamalar		
	I	II	III
ishlab chiqarish jihozlari	2	3	4
xomashyo	1	4	5
elektr energiyasi	3	4	2

I, II va III turdagi gazlamalar 1 metrining narxi mos ravishda 80, 70, 60 shartli pul birligi bo‘lsa, fabrika har bir turdagi gazlamadan necha metrdan ishlab chiqarish kerakki, ularni sotishdan keladigan foyda eng ko‘p bo‘lsin?

51. Asaka avtomobil ishlab chiqarish zavodi o‘zining texnologik imkoniyatlaridan kelib chiqib, oyiga 1000 tadan ko‘p bo‘lmagan to‘rt xil model – Xat, Sedan, Jip va Lasseti kabi avtomobillarni ishlab chiqaradi. Buning uchun zavod bir oyda 900 tonnadan ko‘p bo‘lmagan po‘lat ishlatadi. Zavodda 1000 ta ishchi bo‘lib, ularning har biri bir oyda 150 soatdan ishlaydi. Har bir modeldagi avtomobildan bir donasini ishlab chiqarish uchun zarur bo‘lgan me’yoriy ma’lumotlar quyidagi jadvalda keltirilgan:

avtomobil modeli	bitta avtomobilga sarflanadigan po‘lat miqdori (tonnada)	bitta avtomobil ishlab chiqarish uchun ketadigan vaqt (soat)	bitta avtomobilni sotishdan keladigan foyda ($)
Xat	0,76	80	625
Sedan	1,0	130	825
Jip	0,72	110	600
Lasetti	1,50	140	1200

Bulardan tashqari, har bir modeldagi avtomobillarga qo‘shimcha cheklanishlar bo‘lib, ular avtomobillarga bo‘lgan talablarga bog‘liq holda dillerlar tomonidan bo‘ladigan buyurtmalardir. Dillerlar har bir modeldagi avtomobillardan 100 tadan kam bo‘lmagan va 700 tadan ko‘p bo‘lmagan miqdorga buyurtma berishlari mumkin (bu erda buyurtmaning quyi chegarasi dillerlik punktlarini zararsiz ishlayotganliklari bilan, yuqori chegarasi esa eng ko‘pi bilan bo‘ladigan buyurtma bilan bog‘liq. Har qaysi modeldan necha donadan ishlab chiqarish kerakki, bundan zavod eng ko‘p foyda ko‘rsin?

52. Samarqand choy qadoqlash fabrikasi hind, gruzin va krasnodar choylari-ni aralashmasidan ikki xil A va B navli choy ishlab chiqaradi. Quyidagi jadvalda keltirilgan me’yoriy ma’lumotlardan foydalanib, A va B navli choy ishlab chiqarishni shunday rejasini tuzingki, bundan fabrika eng ko‘p foyda ko‘rsin.

choy turi (ingrediyentlar)	**sarf ma’yori tonna/sutka**		**ingrediyentlar hajmi**
	A	B	
hind choyi	0,5	0,2	600
gruzin choyi	0,2	0,6	870
krasnodar choyi	0,3	0,2	430
1 tonna mahsulotdan olinadigan foyda	320	290	

Fabrika foydasini maksimallashtirish uchun qadoqlashning bir kunlik optimal rejasini tuzing. Quyidagi qo‘shimcha ma’lumotdan foydalaning: 1 kg. «95»choyidan tushadigan foyda 18 dollarni, 1 kg. «110» choyidan tushadigan foyda esa 14 dollarni tashkil etadi. Fabrika foydasini maksimallashtirish uchun qadoqlashning bir kunlik optimal rejasini tuzing.

53. To‘quv fabrikasi 300 ta 1-turli va 200 ta 2-turli to‘quv dastgohiga ega bo‘lib, bu dastgohlar yordamida ikki xil gazlama ishlab chiqarish mumkin. Ikkala dastgoh ham har bir turdagi gazlama ishlab chiqarish uchun moslashgan bo‘lsa-da, birinchi dastgohda ishlab chiqarilgan gazlama ikkinchi dastgohda ishlab chiqarilgan xuddi shu gazlamadan miqdor jihatdan farq qiladi. Birlik vaqt ichida 1-turdagi dastgoh 1-turdagi gazlamadan 10 m. va 2-turdagi gazlamadan 8 m. ishlab chiqaradi, 2-turdagi dastgoh esa mos ravishda 8 va 6 m. gazlama ishlab chiqara oldi. Fabrika 1-turdagi gazlamaning har bir metridan 2 pul birligi miqdorida, 2-turdagi gazlamaning har bir metridan esa 3 pul birligi miqdorida foyda ko‘radi. Rejaga asosan fabrika birlik vaqt

ichida 1-turdagi gazlamadan 2700 m.dan va 2-turdagi gazlamadan 1400 m.dan kam bo'lmagan miqdorda ishlab chiqarishi zarur. Dastgohlar ishini shunday taqsimlash kerakki, ham reja bajarilsin, ham fabrika birlik vaqt ichida eng ko'p foyda ko'rsin.

54. Mis, qo'rg'oshin va ruxdan iborat qotishma tayyorlash uchun xomashyo sifatida tarkibi va narxi bilan farq qiluvchi yuqoridagi metallardan tashkil topgan ikkita qotishmadan foydalaniladi. Bu qotishmalar haqidagi ma'lumotlar quyidagi jadvalda keltirilgan:

qotishma tarkibi	**tashkil etuvchilarning tarkibi (% da)**	
	birinchi qotishma	ikkinchi qotishma
mis	10	10
qo'rg'oshin	10	30
rux	80	60
1 kg.ning narxi	4	6

Olingan qotishma tarkibida 2 kg.dan ko'p bo'lmagan mis, 3 kg.dan kam bo'lmagan qo'rg'oshin bo'lishi zarur, ruxning miqdori esa 7,2 kg.dan 12,8 kg.gacha bo'lishi mumkin. Yangi qotishma olish uchun xomashyoga eng kam sarfni ta'minlaydigan birinchi va ikkinchi qotishmalarning miqdorini aniqlang.

55. Zavodda ikki turdagi A_1 va A_2 mahsulot tayyorlash uchun xomashyo sifatida alyumin va mis ishlatiladi hamda tokarlik va frezerlik stanoklaridan foydalaniladi. Quyidagi jadvalda keltirilgan ma'lumotlardan foydalanib, eng ko'p foyda olish uchun zarur bo'lgan birinchi va ikkinchi turdagi mahsulotlarning miqdorini aniqlang.

xomashyo turi (resurslar)	resurslar hajmi	bitta mahsulot uchun xarajat miqdori	
		A_1 mahsulot	A_2 mahsulot
alyumin (1kg)	570	10	70
mis (1kg)	420	20	50
tokarlik stanogi (stanok-soat)	5600	300	
frezerlik stanogi (stanok-soat)	3200	200	100
1 mahsulotdan tushadigan foyda (sh.p.b.)		3	8

56. Zavod zaxirada mavjud 390 tonna xomashyodan foydalanib, ikki xil turdagi A1 va A2 mahsulot ishlab chiqaradi. Rejaga ko'ra, A1 turdagi mahsulot miqdori umumiy mahsulot ishlab chiqarish hajmining 60 %dan kam bo'lmasligi zarur. Bir tonna A1 va A2 turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflanadigan xomashyo miqdori, mos ravishda 2 va 1 tonnani tashkil etadi. Bir tonna A1 va A2 turdagi mahsulot narxi esa mos ravishda 2 va 3 pul birligiga teng. Ishlab chiqarilgan mahsulot narxi eng yuqori bo'ladigan A1 va A2 turdagi mahsulot ishlab chiqarish rejasini aniqlang.

57. Korxona quyidagi miqdordagi: M1=16, M2=10, M3=6 va M4=7 kabi to'rt turli ishlab chiqarish quvvatiga (soatlarda) ega va ikki xil A va B turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Bir birlik A mahsulotga har bir turdagi quvvatning sarf me'yori (normasi)

mos ravishda quyidagiga teng: 2, 1, 0, 1; bir birlik B mahsulot uchun esa 1, 1, 1, 0 ga teng. Bir birlik A mahsulotni sotishdan keladigan foyda 3 pul birligini tashkil etadi, bir birlik B mahsulotdan keladigan foyda esa 4 pul birligiga teng. Ikki turdagi A va B mahsulot ishlab chiqarishning shunday rejasi tuzilsinki, ularning barchasini sotishdan korxona eng ko'p foyda ko'rsin.

58. Zavod mavjud to'rt turdagi mashinalarning imkoniyatlaridan kelib chiqib, ikki xil turdagi mahsulot ishlab chiqaradi va har bir turdagi mahsulotga ana shu mashinalarda ketma-ket ishlov beriladi. Har kuni birinchi turdagi mashina bu mahsulotlarga 18 soat davomida, ikkinchi mashina 12 soat davomida, uchinchi mashina 12 soat davomida, to'rtinchi mashina esa 9 soat davomida ishlov bera oladi. Quyidagi jadvalda ikkala turdagi mahsulotning har biriga mashinalar tomonidan ishlov berish uchun ketadigan zaruriy vaqt ko'rsatilgan:

mahsulot turi	mashinalar turi			
	I	II	III	IV
I	1	0.5	1	0
II	1	1	0	1
mashinalarning ishlash imkoniyati (soat)	18	12	12	9

Zavod I turdagi mahsulotning bittasini sotishdan 4 shartli pul birligida, II turdagi mahsulotning bir birligini sotishdan esa 6 shartli pul birligida foyda ko'radi. Shunday ishlab chiqarish rejasi tuzilsinki, ana shu reja asosida ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotishdan zavod eng ko'p foyda olsin.

59. Uch turdagi kimyoviy modda A, B, C lardan aralashma hosil qilish talab etiladi. Hosil qilingan aralashma tarkibida A modda miqdori 6 birlikdan, B modda miqdori 8 birlikdan, C modda miqdori esa 12 birlikdan kam bo'lmasligi zarur. A, B, C moddalar uch xil turdagi I, II, III mahsulotlar tarkibida bo'lib, ularning konsentratsiyasi quyidagi jadvalda ko'rsatilgan.

mahsulot turi	kimyoviy moddalar		
	A	B	C
I	2	1	3
II	1	2	4
III	3	1,5	2

I, II, III turdagi mahsulotlarning narxi har xil bo'lib, ularning bir birligining narxi mos ravishda 2, 3, 2.5 pul birligiga teng. Aralashmani shunday hosil qilish kerakki, foydalaniladigan mahsulotlarning narxi eng kam miqdorda bo'lsin.

60. Yuqori Chirchiq tumanining baliq xo'jaliklaridan birida tolstolobik va sazan baliqlari yetishtirilmoqda, va shu maqsadda A va B yem turidan foydalanilyapti. Tolstolobikning o'rtacha vazni 2 kg., sazanning esa - 1 kg.ni tashkil etadi. Tolstolobik o'rtacha hisobda A yemining 1 birligini va B yemining 3 birligini iste'mol qiladi, sazan esa A yemidan 2 birlik va B yemidan 1 birlik tanovul qiladi. A yemining kundalik zaxirasi 600 birlikni, B yemining kundalik zaxirasi esa 700 birlikni tashkil etadi. Baliqlar umumiy vaznini maksimallashtirish uchun har bir baliq turidan qancha miqdorda yetishtirish lozim? Sazan soni 65 tadan ortiq bo'lishi lozim, chunki 65 ta sazanga buyurtma bor.

11.2 Chiziqli dasturlash masalasini yechishga oid namunaviy misol tahlili

Topshiriq shartlari:

1. Masalani grafik usulda yechish.

1.1. Joiz soha qurish (imkoniyatlar sohasi)
1.2. Optimal yechimni va funksiyaning optimal qiymatini toping.
1.3. Maqsad funksiyasi c_i koeffitsiyentlari uchun turg'unlik intervallarini toping.
1.4. Shartlarning b_i o'ng tomon koeffitsiyentlari uchun turg'unlik intervallarini toping.
1.5. Ikkiyoqlama qiymatlar (resurslarning qadriyatlari) ni aniqlang.
1.6. Natijalar jadvalini shakllantiring.

2. Masalani simpleks usulda yechish.

2.1. Masalani kanonik ko'rinishga keltiring.
2.2. Simpleks jadvallarni to'ldiring.
2.3. Oxirgi simpleks jadvalida optimal reja va funksiyaning optimal qiymatini toping.
2.4. Ikkiyoqlama qiymatlar jadvalini tuzing.
2.5. Maqsad funksiyasi c_i koeffitsiyentlari uchun turg'unlik intervallarini toping.
2.6. Shartlarning b_i o'ng tomon koeffitsiyentlari uchun turg'unlik intervallarini toping.

3. Ikkiyoqlama masalani tuzing.

Quyidagi topshiriq shartlarini bajarishni ushbu misolda ko'rib chiqamiz. Quyidagi chiziqli dasturlash masalasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (I) \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (II) \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \quad (III) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$$L = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

1. Masalani grafik usulda yechish.

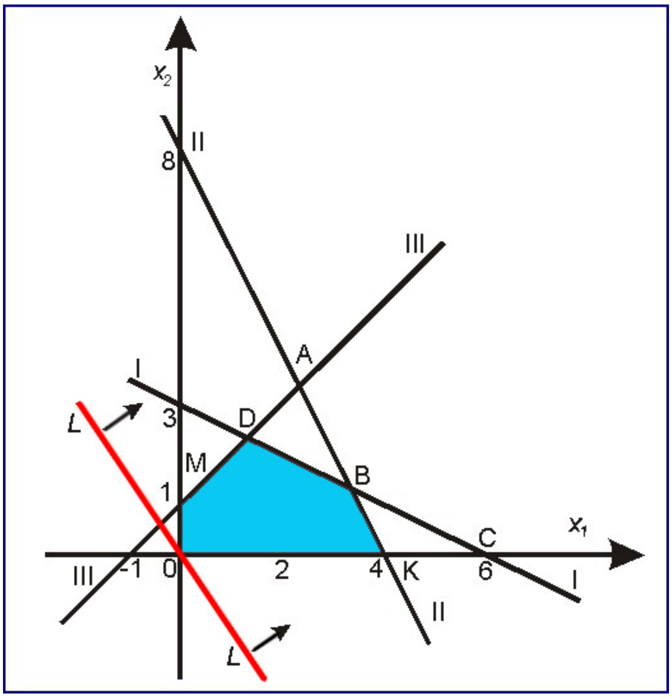
1.1. Joiz sohani topish. Joiz soha, ya'ni ruxsat etilgan yechimlar maydonini - OMDBK ko'pburchagini quramiz (132- rasm).

1.2. Optimal yechimni aniqlash. Optimal yechim B nuqtada joylashgan bo'lib, uning (x_1^*, x_2^*) koordinatalari (I) va (II) to'g'ri chiziqlarining kesishish nuqtasi sifatida topamiz. Buning tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3\frac{1}{3} \\ x_2 = 1\frac{1}{3} \end{cases}$$

Maqsad funksiyasining B nuqtadagi qiymatini topamiz:

$$L = 3 \cdot 3\frac{1}{3} + 2 \cdot 1\frac{1}{3} = 12\frac{2}{3}.$$



Rasm 132: Joiz soha

Masalaning yechimi: optimal yechim (x_1^*, x_2^*) va funksiyaning optimal, ya'ni maksimal qiymati L^* ga teng bo'lar ekan:

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right), \qquad L^* = 12\frac{2}{3} = \frac{38}{3}.$$

1.3. Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari uchun turg'unlik oralig'ini topish. Maqsad funksiyasining c_i koeffitsiyentlarining optimal yechim o'zgarishsiz qoladigan o'zgartirish chegaralarini aniqlaymiz. Optimal yechim -B nuqtasi (I) va (II) to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasidir.

(I) tog'ri chiziq tengmamasi $\rightarrow \quad x_1 + 2x_2 = 6 \rightarrow \quad x_1 = 6 - 2x_2$, burchak koeffitsiyenti $k = -2$; (II) tog'ri chiziq tengmamasi $\rightarrow \quad 2x_1 + x_2 = 8 \rightarrow \quad x_1 = 4 - \frac{1}{2}x_2$, burchak koeffitsiyenti $k = -\frac{1}{2}$; Maqsad funksiyasi: $\rightarrow$ tenglama $c_1x_1 + c_2x_2 = 38/2 \rightarrow \quad x_1 = \frac{38}{2c_1} - \frac{c_2}{c_1}x_2$, burchak koeffitsiyenti $k = -\frac{c_2}{c_1}$.

$$-2 \leq -\frac{c_2}{c_1} \leq -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{c_2}{c_1} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{c_1}{2} \leq c_2 \leq 2c_1$$

Agar maqsad funksiyaning koeffitsiyentlari $\frac{c_1}{2} \leq c_2 \leq 2c_1$ shartni qondirsa, optimal yechim o'zgarmaydi.

♦ Koeffitsientning o'zgarmas $c_1 = 3$ qiymatida c_2 koeffitsiyent

$$\frac{c_1}{2} \leq c_2 \leq 2c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} \leq c_2 \leq 6$$

chegaralar ichida o'zgaradi. Shu bilan birga, maqsad funksiyaning qiymati $L_1 \leq L^* \leq L_2$

o'zgaradi, bu yerda

$$L_1 = 3x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 3 \cdot \frac{10}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 12, \quad L_2 = 3x_1 + 6x_2 = 3 \cdot \frac{10}{3} + 6 \cdot \frac{4}{3} = 18,$$

ya'ni $12 \leq L^* \leq 18$.

♦ Koeffitsientning o'zgarmas $c_2 = 2$ qiymatida c_1 koeffitsiyent

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_2}{c_1} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{2}{c_1} \leq 2 \quad \Rightarrow 1 \leq c_1 \leq 4$$

chegaralar ichida o'zgaradi. Shu bilan birga, maqsad funksiyaning qiymati $L_3 \leq L^* \leq L_4$ o'zgaradi, bu yerda

$$L_3 = 1x_1 + 2x_2 = 1 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 6, \quad L_4 = 4x_1 + 2x_2 = 4 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 16,$$

ya'ni $6 \leq L^* \leq 16$.

1.4. Shartlarning o'ng tomonlari uchun turg'unlik intervallarini topish. I va II cheklovlariga mos keladigan resurslar kamyob, III chisiga mos kelgani kamyob emas. Optimal bazis saqlanib qoladigan holda cheklovlarning b_i o'ng qismidagi o'zgarishlar chegaralarini aniqlaymiz.

Cheklanish I. Birinchi resurs (b_1 koeffitsiyent) ortishi bilan (I) to'gri chiziq parallel ravishda (II) va (III) to'g'ri chiziqlar kesishmasi A nuqtaga ko'chadi. A nuqtaning koordinatalarini quyidagi tenglama sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2\frac{1}{3} \\ x_2 = 3\frac{1}{3} \end{cases}$$

Birinchi resurs zaxirasi b_1^+ qiymatga oshirilishi mumkin:

$$b_1^+ = x_1 + 2x_2 = 2\frac{1}{3} + 2 \cdot 3\frac{1}{3} = 9.$$

Birinchi resurs (b_1 koeffitsiyent) kamaytirilganda, (I) chiziq parallel ravishda (II) chiziq va OX o'qining kesishish nuqtasi K gacha ko'chadi . K nuqtaning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Birinchi resurs zaxirasi b_1^- qiymatiga kamaytirilishi mumkin:

$$b_1^- = x_1 + 2x_2 = 4 + 2 \cdot 0 = 4.$$

Shunday qilib, (I) chegaraning o'ng tomoni o'zgarish chegaralari $4 \leq b_1 \leq 9$, maksimal orttirma $\Delta b_1 = 9 - 6 = 3$ ga teng bo'lib, bunda maqsad funksiyasining optimal qiymati $L = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 2\frac{1}{3} + 2 \cdot 3\frac{1}{3} = 13\frac{2}{3}$ gacha oshadi, maqsad funksiyasining maksimal orttirmasi $\Delta L = 13\frac{2}{3} - 12\frac{2}{3} = 1$ ga teng bo'lar ekan.

Cheklanish II. Ikkinchi resurs (b_2 koeffitsiyent) ortishi bilan (II) to'gri chiziq parallel ravishda (I) to'g'ri chiziq va OX o'qi kesishmasi C nuqtaga ko'chadi. C nuqtaning koordinatalarini quyidagi tenglama sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Ikkinchi resurs zaxirasi b_2^+ qiymatga oshirilishi mumkin:

$$b_2^+ = 2x_1 + x_2 = 2 \cdot 6 + 0 = 12.$$

Ikkinchi resurs (b_2 koeffitsiyent) kamaytirilganda, (II) chiziq parallel ravishda pastga (I) va (III) chiziqlarning kesishishi nuqtasi D gacha ko'chadi. D nuqtaning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini yechib aniqlanadi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1\dfrac{1}{3} \\ x_2 = 2\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Ikkinchi resurs zaxirasi b_2^- qiymatiga kamaytirilishi mumkin:

$$b_2^- = 2x_1 + x_2 = 2 \cdot 1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} = 5.$$

Shunday qilib, (II) chegaraning o'ng tomoni o'zgarish chegaralari $5 \leq b_2 \leq 12$, maksimal orttirma $\Delta b_2 = 12 - 8 = 4$ ga teng bo'lib, bunda maqsad funksiyasining optimal qiymati $L = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18$ gacha oshadi, maqsad funksiyasining maksimal orttirmasi $\Delta L = 18 - 12\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$ ga teng bo'lar ekan.

Cheklanish III. Uchinchi kamyob bo'lmagan resurs (b_3 koeffitsiyent) ortishi bilan (III) to'gri chiziq parallel ravishda tepaga ko'chadi. Uchinchi resursning qiymati cheksiz oshgan taqdirda ham optimal yechim o'zgarmaydi: $b_3^+ = +\infty$.

Uchinchi resurs (b_3 koeffitsiyent) kamaytirilganda, (III) chiziq parallel ravishda pastga B nuqtagacha ko'chadi. Shundan so'ng to'gri chiziq optimal nuqtani aniqlaydi. Ushbu nuqtaning koordinatalari $(x_1^*, x_2^*) = \left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$. Uchinchi resurs zaxirasi b_3^- qiymatiga kamaytirilishi mumkin:

$$b_2^- = -x_1 + x_2 = -3 \cdot 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = -2.$$

Shunday qilib, (III) chegaraning o'ng tomoni o'zgarish chegaralari $-2 \leq b_3 \leq \infty$, maksimal orttirma $\Delta b_3 = -2 - 1 = -3$ ga teng bo'lib, bunda maqsad funksiyasining optimal qiymati o'zgarmaydi, maqsad funksiyasining maksimal orttirmasi $\Delta L = 0$ ga teng bo'lar ekan.

1.5. Ikkiyoqlama qiymatlar. b_i resursning ikkiyoqlama qiymati quyidagi nisbat kabi aniqlanadi:

$$\Delta_i = \frac{\text{maqsad} \quad \text{funksiyasining} \quad \text{maksimal} \quad \text{orttirmasi } \Delta L}{i - \text{resursning} \quad \text{maksimal} \quad \text{orttirmasi } \Delta b_i}$$

Resurslarning ikkiyoqlama qiymatlari quyidagilarga teng:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta L}{\Delta b_1} = \frac{1}{3}, \quad \Delta_2 = \frac{\Delta L}{\Delta b_2} = \frac{5\frac{1}{3}}{4} = 1\frac{1}{3}, \quad \Delta_3 = \frac{\Delta L}{\Delta b_3} = \frac{0}{-3} = 0.$$

1.6. Natijalar jadvalini shakllantirish. Barcha natijalarni quyidagi jadvalga jamlaymiz:

Resurs	**Resurs turi**	**Turg'unlik oralig'i**	**Ikkiyoqlama qiymatlar**
I	kamyob	$4 \le b_1 \le 9$	$\Delta_1 = 1/3$
II	kamyob	$5 \le b_2 \le 12$	$\Delta_2 = 4/3$
III	kamyob emas	$-2 \le b_3 < \infty$	$\Delta_3 = 0$

Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarini o'zgartirish chegaralari
$1 \le c_1 \le 4, \quad 3/2 \le c_2 \le 6$

2. Masalani simpleks usulda yechish.

2.1. Masalani kanonik ko'rinishga keltiring.

Masalaning umumiy ko'rinishi: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

$$L = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

Kanonik ko'rinish: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 8 \\ -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ s_1 \ge 0, \ s_2 \ge 0, \ s_3 \ge 0 \end{cases}$

$$L = 3x_1 + 2x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 \to \max$$

2.2. Simpleks jadvallarni to'ldirish.

Boshlang'ich simpleks jadval:

B	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	b_i/a_{ij}
		3	2	0	0	0		
s_1	0	**1**	2	1	0	0	6	6
s_2	**0**	**2**	**1**	**0**	**1**	**0**	**8**	**4**
s_3	0	**-1**	1	0	0	1	1	-1
Z_i		**0**	0	0	0	0	**0**	
$C_i - Z_i$		**3**	2	0	0	0		

Bu qadamda s_2 o'rniga x_1 bazisni kiritamiz, maqsad funksiyasining qiymati 0. Hal qiluvchi elementi 2.

Ikkinchi jadval:

B	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	b_i/a_{ij}
		3	**2**	0	0	0		
s_1	**0**	**0**	**3/2**	**1**	**-1/2**	**0**	**2**	**4/3**
x_1	3	1	**1/2**	0	1/2	1	4	8
s_3	0	0	**3/2**	0	1/2	0	5	10/3
Z_i		3	**3/2**	0	3/2	0	**12**	
$C_i - Z_i$		0	**1/2**	0	-3/2	0		

Bu qadamda s_1 o'rniga x_2 bazisni kiritamiz, maqsad funksiyasining qiymati 12. Hal qiluvchi elementi 3/2.

Uchinchi jadval:

B	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
		3	2	0	0	0	
x_2	2	0	1	2/3	-1/3	0	**4/3**
x_1	3	1	0	-1/3	2/3	0	**10/3**
s_3	0	0	0	-1	1	1	3
Z_i		3	2	1/3	4/3	0	**38/3**
$C_i - Z_i$		0	0	-1/3	-4/3	0	

Jadval oxirgisi bolib, optimal yechim topildi. Chunki jadvalning oxirgi satrida musbat qiymatlar yoq.

2.3. Oxirgi simpleks jadvali asosida optimal reja va funksiyaning optimal qiymatini topish.

Optimal yechim qiymatini topish uchun bazis o'zgaruvchilarga mos satrlarning oxirgi ustuniga murojaat qilamiz: $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Maqsad funksiyasining optimal qiymati jadvalning Z_i satrinig oxirgi katagida joylashgan bo'lib, uning qiymati $L^* = \frac{38}{3}$ ga teng.

2.4. Ikkiyoqlama qiymatlarini aniqlash.

Ikkiyoqlama qiymatlar oxirgi simpleks jadvalning Z_i satrinig «qoshimcha» s_1, s_2, s_3 o'zgaruvchilarga mos ustunlarida joylashgan bo'lib, ularning qiymatlari quyidagicha:

$$\Delta_1 = \frac{1}{3}, \quad \Delta_2 = \frac{4}{3}, \quad \Delta_3 = 0.$$

2.5. Maqsad funksiyasi c_i koeffitsiyentlari uchun turg'unlik intervallarini toping.

• c_1 koeffitsiyent uchun turg'unlik oralig'i. Oxirgi simpleks jadvalda 3 qiymatni c_1 ga almashtirib, jadvalni qayta hisoblaymiz:

B	C_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
		c_1	2	0	0	0	
x_2	2	0	1	2/3	-1/3	0	4/3
x_1	c_1	1	0	-1/3	2/3	0	10/3
s_3	0	0	0	-1	1	1	3
Z_i		c_1	2	$4/3 - c_1/3$	$-2/3 + 2c_1/3$	0	
$C_i - Z_i$		0	0	$-4/3 + c_1/3$	$2/3 - 2c_1/3$		

Jadval oxirgi bo'lishi uchun (ya'ni optimal reja avvalgiday qolishi uchun), oxirgi satrdagi barcha qiymatlar manfiy yoki nolga teng bo'lishi kerak. Shu shart asosida quyidagi tengsizliklar sistemasini tuzib olamiz va yechamiz:

$$\begin{cases} -4/3 + c_1/3 \le 0 \\ 2/3 - 2c_1/3 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \le 4 \\ 1 \le c_1 \end{cases} \Rightarrow \quad 1 \le c_1 \le 4.$$

c_1 koeffitsiyent uchun turg'unlik oralig'i: $1 \le c_1 \le 4$.

• c_2 koeffitsiyent uchun turg'unlik oralig'i. Ohirgi simpleks jadvalda 2 qiymatni c_2 ga almashtirib, jadvalni qayta hisoblaymiz:

B	C_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
		3	c_2	0	0	0	
x_2	c_2	0	1	2/3	-1/3	0	4/3
x_1	3	1	0	-1/3	2/3	0	10/3
s_3	0	0	0	-1	1	1	3
Z_i		3	c_2	$2c_2/3-1$	$-c_2/3+2$	0	
$C_i - Z_i$		0	0	$1-2c_2/3$	$c_2/3-2$		

Jadval oxirgi bo'lishi uchun (ya'ni optimal reja avvalgiligicha qolishi uchun), oxirgi satrdagi barcha qiymatlar manfiy yoki nolga teng bo'lishi kerak. Shu shart asosida quyidagi tengsizliklar sistemasini tuzib olamiz va yechamiz:

$$\begin{cases} 1-2c_2/3 \le 0 \\ c_2/3-2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 \ge 3/2 \\ c_2 \le 6 \end{cases} \Rightarrow \quad 3/2 \le c_2 \le 6.$$

c_2 koeffitsiyent uchun turg'unlik oralig'i: $3/2 \le c_2 \le 6$.

2.6. Shartlarning o'ng tomon koeffitsiyentlari b_i uchun turg'unlik intervallarini topish.

• b_1 koeffitsiyentlari uchun turg'unlik intervallarini topish uchun oxirgi simpleks jadvalni ko'raylik:

B	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
		3	2	0	0	0	
x_2	2	0	1	2/3	-1/3	0	4/3
x_1	3	1	0	-1/3	2/3	0	10/3
s_3	0	0	0	-1	1	1	3
Z_i		3	2	1/3	4/3	0	38/3
$C_i - Z_i$		0	0	-1/3	-4/3	0	

Birinchi cheklovning qo'shimcha o'zgaruvchisiga mos kelgan s_1 ustunidagi ajratib ko'rsatilgan qiymatlar d_1 ga ko'paytiriladi va oxirgi ustunning mos qiymatlari qo'shiladi:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}d_1 + \frac{4}{3} \ge 0 \\ -\frac{1}{3}d_1 + \frac{10}{3} \ge 0 \\ -d_1 + 3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \ge -2 \\ d_1 \le 10 \\ d_1 \le 3 \end{cases} \Rightarrow \quad -2 \le d_1 \le 3.$$

$b_1 = 6 + d_1$ va $-2 \le d_1 \le 3$ ekanligidan $6-2 \le 6+d_1 \le 6+3$. Natijada birinchi shartning b_1 o'ng tomon koeffitsiyenti uchun turg'unlik intervalini topdik: $4 \le b_1 \le 9$.

• b_2 koeffitsiyentlari uchun turg'unlik intervallarini topish uchun yana oxirgi simpleks jadvalga murojaat qilamiz:

B	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
		3	2	0	0	0	
x_2	2	0	1	2/3	-1/3	0	4/3
x_1	3	1	0	-1/3	2/3	0	10/3
s_3	0	0	0	-1	1	1	3
Z_i		3	2	1/3	4/3	0	38/3
$C_i - Z_i$		0	0	-1/3	-4/3	0	

Ikkinchi cheklovning qo'shimcha o'zgaruvchisiga mos kelgan s_2 ustunidagi ajratib ko'rsatilgan qiymatlar d_2 ga ko'paytiriladi va oxirgi ustunning mos qiymatlari qo'shiladi:

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}d_2+\frac{4}{3}\geq 0 \\ \frac{2}{3}d_2+\frac{10}{3}\geq 0 \\ d_2+3\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2\leq 4 \\ d_2\geq -5 \\ d_2\geq -3 \end{cases} \Rightarrow \quad -3\leq d_2\leq 4.$$

$b_2=8+d_2$ va $-3\leq d_2\leq 4$ ekanligidan $8-3\leq 8+d_2\leq 8+4$. Natijada ikkinchi shartning b_2 o'ng tomon koeffitsiyenti uchun turg'unlik intervalini topdik: $5\leq b_2\leq 12$.

• b_3 koeffitsiyentlari uchun turg'unlik intervallarini topish uchun yana avvalgidek ish tutamiz:

B	C_b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
		3	2	0	0	0	
x_2	2	0	1	2/3	-1/3	0	4/3
x_1	3	1	0	-1/3	2/3	0	10/3
s_3	0	0	0	-1	1	1	3
Z_i		3	2	1/3	4/3	0	38/3
C_i-Z_i		0	0	-1/3	-4/3	0	

Uchinchi cheklovning qo'shimcha o'zgaruvchisiga mos kelgan s_3 ustunidagi ajratib ko'rsatilgan qiymatlar d_3 ga ko'paytiriladi va oxirgi ustunning mos qiymatlari qo'shiladi:

$$\begin{cases} 0\cdot d_3+\frac{4}{3}\geq 0 \\ 0\cdot d_3+\frac{10}{3}\geq 0 \\ d_3+3\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}\geq 0 \\ \frac{10}{3}\geq 0 \\ d_3\geq -3 \end{cases} \Rightarrow \quad -3\leq d_3\leq \infty.$$

$b_3=1+d_3$ va $-3\leq d_3<\infty$ ekanligidan $1-3\leq 1+d_3<1+\infty$. Natijada uchinchi shartning b_3 o'ng tomon koeffitsiyenti uchun turg'unlik intervalini topdik: $-2\leq b_3<\infty$.

3. Ikkiyoqlama masalani tuzish.

Dastlabki masala:

$$\begin{cases} x_1+2x_2\leq 6 \quad (I) \\ 2x_1+x_2\leq 8 \quad (II) \\ -x_1+x_2\leq 1 \quad (III) \\ x_1\geq 0, \quad x_2\geq 0 \end{cases}$$
$$L=3x_1+2x_2\to \max$$

Ikkiyoqlama masala tuzish qoidalarini esga olaylik.

- Dastlabki masala maksimallashtirish masalasi bo'lgani uchun ikkinchi, ya'ni unga ikkiyoqlama masala minilallashtirish masalasi bo'ladi.
- Birinchi - maksimallashtirish masalasida shartlarni «$\leq$» tengsizlik ko'rinishiga keltirib yozib olish kerak. Shunda ikkinchi masalada shartlarni «$\geq$» tengsizlik ko'rinishiga keltirib yozib olamiz.
- Birinchi masalada no'malumlar $(x_1;x_2)$ soni 2 ta bo'lgani uchun ikkinchi masalada shartlar soni 2 ta bo'ladi.

- Birinchi masalaning maqsad funksiyasi koeffitsiyentlari $(c_1; c_2) = (3; 2)$ ikkinchi masala shartlarining o'ng tomoni koeffitsiyentlari bo'ladi.
- Birinchi masalada shartlar soni 3 ta bo'lgani uchun ikkinchi masalada noma'lumlar $(y_1; y_2; y_3)$ soni 3 ta bo'ladi.
- Birinchi masala shartlarining o'ng tomoni koeffitsiyentlari $(b_1; b_2; b_3) = (6; 8; 1)$ ikkinchi masalaning maqsaq funksiyasi koeffisiyentlari bo'ladi.
- Va nihoyat, birinchi va ikkinchi masala shartlarini aniqlaydigan tengsizliklar koeffitsiyentlaridan iborat matritsalar o'zaro transponirlangan bo'ladi.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Barcha talablasrni e'tiborga olgan holda ikkiyoqlama masalani yozib olamiz:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$F = 6y_1 + 8y_2 + y_3 \to \min$$

11.3 Chiziqli dasturlash masalasini to'liq tahlil etishga oid masalalar to'plami

Topshiriq shartlari:

1. Masalani grafik usulda yechish.

1.1. Joiz soha qurish (imkoniyatlar sohasi)
1.2. Optimal yechimni va funksiyaning optimal qiymatini toping.
1.3. Maqsad funksiyasi c_i koeffitsiyentlari uchun turg'unlik intervallarini toping.
1.4. Shartlarning b_i o'ng tomon koeffitsiyentlari uchun turg'unlik intervallarini toping.
1.5. Ikkiyoqlama qiymatlar (resurslarning qadriyatlari) ni aniqlang.
1.6. Natijalar jadvalini shakllantiring.

2. Masalani simpleks usulda yechish.

2.1. Masalani kanonik ko'rinishga keltiring.
2.2. Simpleks jadvallarni to'ldiring.
2.3. Oxirgi simpleks jadvalida optimal reja va funksiyaning optimal qiymatini toping.
2.4. Ikkiyoqlama qiymatlar jadvalini tuzing.
2.5. Maqsad funksiyasi c_i koeffitsiyentlari uchun turg'unlik intervallarini toping.
2.6. Shartlarning b_i o'ng tomon koeffitsiyentlari uchun turg'unlik intervallarini toping.

3. Ikkiyoqlama masalani tuzing.

Ushbu bo'limda keltirilgan masalalarni yuqoridagi namunadek to'liq tahlil qilib chiqish lozim.

1. $F = x_1 - 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 8; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

2. $F = 2x_1 - x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

3. $F = x_1 - 3x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ 3x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 4; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

4. $F = 2x_1 - x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 - x_2 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

5. $F = x_1 - x_2 \to \max$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 5; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

6. $F = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 \leq 3; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

7. $F = 3x_1 + x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_2 \leq 4; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

8. $F = x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 2; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

9. $F = x_1 - x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_2 \leq 4; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

10. $F = 3x_1 - 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 \leq 3; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

11. $F = x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_2 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + x_2 \leq 21; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

12. $F = 2x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 21, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 21, \\ x_1 \leq 5; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

13. $F = x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 18, \\ x_2 \le 6; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

14. $F = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 26, \\ x_1 \le 6; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

15. $F = x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 21, \\ 3x_1 + x_2 \le 18; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

16. $F = 3x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 21, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

17. $F = x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 21, \\ 3x_1 + x_2 \le 21, \\ x_2 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

18. $F = 4x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \le 6; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

19. $F = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_2 \le 6, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 26, \\ 2x_1 + x_2 \le 12; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

20. $F = 2x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 21, \\ x_1 \le 6; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

21. $F = x_1 - 3x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 8; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

22. $F = 2x_1 - x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 10; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

23. $F = x_1 - 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge 4; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

24. $F = 2x_1 - x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 10; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

25. $F = x_1 - x_2 \to \min$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + x_2 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

26. $F = x_1 + x_2 \to \min$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \le 3; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

27. $F = 3x_1 + x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_2 \le 4; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

28. $F = x_1 + 3x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_2 \le 2; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

29. $F = x_1 - x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ x_2 \le 4; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

30. $F = 3x_1 - 4x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 \le 3; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

31. $F = x_1 + 3x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_2 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 \le 21; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

32. $F = 2x_1 + x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 21, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 21, \\ x_1 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

33. $F = x_1 + 4x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 18, \\ x_2 \le 6; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

34. $F = x_1 + x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 26, \\ x_1 \le 6; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

35. $F = x_1 + 2x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 21, \\ 3x_1 + x_2 \le 18; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

36. $F = 3x_1 + x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 21, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

37. $F = x_1 + 2x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 21, \\ 3x_1 + x_2 \le 21, \\ x_2 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

38. $F = 4x_1 + x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \le 6; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

39. $F = x_1 + x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_2 \le 6, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 26, \\ 2x_1 + x_2 \le 12; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

40. $F = 2x_1 + x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 21, \\ x_1 \le 6; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

11.4 Butun sonli chiziqli dasturlash mavzusiga oid masalalar

Quyida keltirigam masalalarda berilgan cheklanishlar doirasida maqsad funksiyasi maksimal qiymatini va unga erishihsh nutqasini aniqlang. Barcha masalalarda $x_i \ge 0$ va x_i - butun qiymatlar qabul qiladi $(i = 1, 2)$. Masalani Gomori hamda tarmoqlar va chegaralar usullari yordamida yeching. Olingan natijalarni solishtiring. Yechimning grafik talqinini bering.

1.	$L(x) = 2x_1 + 7x_2;$ $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \le 8. \end{cases}$	2.	$L(x) = x_1 + 4x_2;$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6. \end{cases}$	3.	$L(x) = x_1 + x_2;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 10. \end{cases}$
4.	$L(x) = 2x_1;$ $\begin{cases} 13x_1 + 9x_2 \le 38, \\ 2x_2 \le 7, \\ -x_1 + 9x_2 \ge 5. \end{cases}$	5.	$L(x) = x_1 + 2x_2;$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 18, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5. \end{cases}$	6.	$L(x) = 2x_1 + x_2;$ $\begin{cases} -x_1 + 13x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ 7x_1 - 8x_2 \le 28. \end{cases}$
7.	$L(x) = 7x_1 - x_2;$ $\begin{cases} 5x_1 + x_2 \le 8, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 6. \end{cases}$	8.	$L(x) = 6x_1 + 8x_2;$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 4. \end{cases}$	9.	$L(x) = 3x_1 + 4x_2;$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 4x_2 \le 10. \end{cases}$
10.	$L(x) = 2x_1 + 3x_2;$ $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 6. \end{cases}$	11.	$L(x) = 5x_1 - 3x_2;$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 6. \end{cases}$	12.	$L(x) = 2x_1;$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 5x_1 - x_2 \le 9. \end{cases}$

13. $L(x) = 5x_1 - 2x_2;$ $\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ x_1 + 4x_2 \le 8. \end{cases}$

14. $L(x) = 7x_1 + 2x_2;$ $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \le 8, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10. \end{cases}$

15. $L(x) = 2x_1 + x_2;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ 5x_1 + x_2 \le 9. \end{cases}$

16. $L(x) = x_1 + 2x_2;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 16. \end{cases}$

17. $L(x) = 4x_1 + x_2;$ $\begin{cases} 15x_1 - 7x_2 \le 40, \\ 3x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 13x_2 \ge 7. \end{cases}$

18. $L(x) = 3x_1 + 3x_2;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36, \\ x_2 \le 13. \end{cases}$

19. $L(x) = x_1 + 3x_2;$ $\begin{cases} 2x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 2. \end{cases}$

20. $L(x) = x_1 + x_2;$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 + x_2 \le 4. \end{cases}$

21. $L(x) = 3x_1 + x_2;$ $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 26, \\ 7x_1 + x_2 \le 15. \end{cases}$

22 $L(x) = x_1 + x_2;$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 2. \end{cases}$

23. $L(x) = x_1;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 - 8x_2 \le 24. \end{cases}$

24. $L(x) = x_1 + x_2;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3_2 \le 9. \end{cases}$

25. $L(x) = 3x_1 + x_2;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9, \\ -4x_1 + x_2 \le 4, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 6. \end{cases}$

26. $L(x) = x_1 + x_2;$ $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 12. \end{cases}$

27. $L(x) = x_1 + x_2;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10. \end{cases}$

28. $L(x) = x_1 + x_2;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 4. \end{cases}$

29. $L(x) = 8x_1 + 6x_2;$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 8. \end{cases}$

30. $L(x) = 5x_1 + 3x_2;$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10. \end{cases}$

31. $L(x) = 2x_1 + x_2;$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3. \end{cases}$

32. $L(x) = 2x_1 - x_2;$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 2. \end{cases}$

33. $L(x) = x_1 + 2x_2;$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 1. \end{cases}$

34. $L(x) = x_1 + x_2;$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0. \end{cases}$

35. $L(x) = x_1 + 2x_2;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0. \end{cases}$

36. $L(x) = 3x_1 + x_2;$ $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 26, \\ 7x_1 + x_2 \le 15. \end{cases}$

Kalit iboralar

- Dasturlash;
- chiziqli dasturlash;
- matematik model;
- chiziqli dasturlash masalasining kanonik va standart shakllari;
- chegraviy shartlar;
- maqsad funksiyasi; joiz soha; bazis yechim;
- optimal yechim;
- kamyob xomashyo;
- kamyob bo'lmagan xomashyo;
- ortiqcha shart;
- maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unligi;
- shartlar o'ng tomonining turg'unligi;
- ikkiyoqlama qiymat;
- resurs statusi;
- bazis o'zgaruvchilar;
- simpleks usul;
- simpleks jadval;
- optimallik mezoni;
- M-usul;
- simpleks jadvaldan ikki yoqlama qiymatni aniqlash;
- simpleks jadvaldan maqsad funksiyasi turg'unligini aniqlash;
- ikkiyoqlama masalalar;
- ikkiyoqlama baholar;
- ikkiyoqlama masalalarga oid teoremalar;
- maxsus kompyuter dasturlari.

Takrorlash uchun savollar

- Aniqlik sharoiti deganda, nima tushuniladi?
- Chiziqli dasturlash masalasi deb qanday masalaga aytiladi?
- Chiziqli dasturlash masalasini birinchi bor kimlar ko‘rib chiqqan?
- Chiziqli dasturlashning umumiy modeli haqida nimalar bilasiz?
- Masalaning matematik modeli nima uchun kerak?
- Chiziqli dasturlash masalalarining qanday ko'rinishlarini bilasiz?
- Maqsad funksiyasi deganda, nima tushuniladi?

- Masala doirasida cheklanishlar qanday aniqlanadi?
- Nomanfiylik shartlarining mohiyatini tushuntirib bering.
- Ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi mohiyatini tushuntirib bering.
- Ratsion va qorishma masalalari mohiyatini tushuntirib bering.
- Ishlab chiqarishni optimallashtirirshda maqsad funksiyasi qanday ma'noni anglatadi?
- Chiziqli dasturlash masalasidagi joiz soha nimani anglatadi?
- Qanday hollarda chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish mumkin ?
- Maqsad funksiyasining sath chizig'i nima ma'noni anglatadi?
- Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish jarayonida cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi, yechim mavjud bo'lmasligi va maqsad funksiyasining chegaralanmaganligi qanday aniqlanadi?
- Chiziqli dasturlash masalasini garafik usulda yechishda resurs statusi qanday aniqlanadi?
- Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechishda ikkiyoqlama qiymat nimani aniqlaydi?
- Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechishda maqsad funksiyasining turg'unligi nimani anglatadi?
- Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechishda shartlarning o'ng tomoning turg'unligi shartlari nimani aniqlaydi?
- Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechishda hal qiluvchi satr, hal qiluvchi ustun va hal qiluvchi element qanday aniqlanadi?
- Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechishda optimallik mezoni qanday aniqlanadi?
- Simpleks jadvaldan resurs statuslari qanday aniqlanadi?
- Simpleks jadvaldan resurs samaradorligi qanday aniqlanadi?
- Simpleks jadvaldan maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining turg'unligi qanday aniqlanadi?
- Simpleks jadvaldan shartlarning o'ng tomon turg'unligi qanday topiladi?
- Chiziqli dasturlashning qanday masalalarida sun'iy usul (M usul) ishlatiladi?
- Ikki yoqlama masalalarining iqtisodiy ma'nosi qanday?
- Boshlang'ich masalaga ikkiyoqlama masala qanday quriladi?
- Biror boshlang'ich masalaning yechimi yordamida ikkiyoqlama masalaning yechimi qanday aniqlanadi?
- Chiziqli dasturlash masalasi «QM for Windows» dasturining qaysi moduli yordamida yechiladi?

Tavsiya etiladigan adabiyotlar ro'yxati

1. Baqoev M, Raimova G., Axmedov O. Tizimli tahlil va boshqaruv qarorlarini qabul qilish. Darslik. ISBN 978-9943-14-674-7, Toshkent, "Turon-Iqbol 2020, 488 b.
2. Rasulov A., Dalabayev U. Iqtisodiyotda miqdoriy usullar. O'quv qo'llanma. Toshkent, "IQTISOD-MOLIYA"nashriyoti, 2010, 304 b.
3. Dalaboev U. Iqtisodda miqdoriy usullar kursi bo'yicha mashqlar to'plami. Toshkent, JIDU nashriyoti, 2008, 104 b.
4. Safaeva Q.S., Shomansurova F. Iqtisodiyotda matematika. -Toshkent: «Iqtisod-Moliya», 2010, 243 b.(VII bob).
5. Raisov M.P. Matematik programmalash. -Toshkent: «Voris», 2009, 175 b. (I,II bob).
6. Safaeva Q.S. Matematik dasturlash. -Toshkent: «Moliya», 2007, 308 b. (I,II,III bob).
7. Atamirzaev M.va boshqalar. Yangi axborot texnologiyalari yutuqlarini iqtisodiy masalalar yechishga qo'llash.-Toshkent: 2009, 54 b. (§1-§3).
8. Karimova V., Zaynutdinova M., Nazirova E., Sadikova Sh. Tizimli tahlil asoslari.-Toshkent: 2014, 188b. (5 bob).
9. Машунин Ю.К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономике.-Москва: ЛОГОС, 2013, 444с. (глава III).
10. Алексеева Е.Б. Построение математичеких моделей целочисленного линейного программирования. -Новосибирск: 2012, 132с. (1-3 главы).
11. Терри Уотшем, Кейт Паррамоу. Количественные методы в финансах. -Москва: «Юнити», 1999 г. 531 с. (глава 9).
12. Латипова А.Т. Применение ЛП в исследовании социально-экономических процессов. -Челябинск: ЮУрГУ, 2010, 123 с. (1-3 главы).
13. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. -Москва: Финансы и статистика, 2006. 432 с. (7 глава).
14. Косоруков О.А. Методы количественного анализа в бизнесе. -Москва: ИЭФ «Синергия», 2006, 487 с. (9 глава).
15. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. -СПб.: 2005, 528 с.(глава 2).
16. Варюхин С.Е., Зайцев М.Г. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы. -Москва: «Дело», 2008, 664с. (часть 1, §1).

17. Юкаева Н.А. Количественные методы в менеджменте.- Владивосток: 2010, 139 с.(часть 1).

18. Howard J. Weiss. POM - QM FOR WINDOWS , Software for Decision Sciences: Quantitative Methods, Production and Operations Management. 2010, 225 p. (chapter 6).

19. B.Render, R.M. Stair, JR.M. Hanna, Quantitative Analysis for Management. Pearson, 2015, 668 p.(chapter 7-8).

JAHON IQTISODIYOTI VA DIPLOMATIYA UNIVERSITETI

G.Raimova, U.Dalaboev

OPTIMAL QARORLAR QABUL QILISH USULLARI.

Chiziqli dasturlash

Nashrga tayyorlangan materiallarning sifati, keltirilgan faktlar, atoqli otlar va boshqa ma'lumotlarning aniqligi, shuningdek, ochiq nashr etish man qilingan ma'lumotlarni ommalashtirgani uchun qo'llanma mualliflari javobgardir.

Formati 84x108 1/32. Hajmi 14,9 b.t.
Adadi 100 ta. Kelishilgan narxda.

JIDU ning nusha ko'paytirish bo'limida chop etildi.
100192, Toshkent sh., Buyuk ipak yo'li shox ko'chasti, 54.