JARAYONLAR TADQIQOTI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

M. TO'XTASINOV

JARAYONLAR TADQIQOTI

Tatbiqiy matematika va informatika hamda informatika va axborot texnologiyalari yo'nalishlari talabalari uchun darslik

«Barkamol Fayz media» nashriyoti
Toshkent – 2017

UDK 004.4(075.8)
BBK 22.18ya73
T 98

Mas'ul muharrir

Sh.Q. Formanov *– fizika-matematika fanlari doktori, akademik*

Taqrizchilar

I. I. Isroilov *– fizika-matematika fanlari nomzodi, professor;*
M.Sh. Mamatov *– fizika-matematika fanlari doktori, professor*

To'xtasinov Mo'minjon
T 98 Jarayonlar tadqiqoti [Matn]: darslik/O'zR Oliy va o'rta-maxsus ta'lim vazirligi. – T. «Barkamol Fayz media» nashriyoti, 2017. – 572 b.
ISBN 978-9943-5085-5-2

Darslikda universitetlarning amaliy matematika va informatika yo'nalishi (5130200) talabalari uchun o'tiladigan o'yinlar nazariyasi va jarayonlar tadqiqoti kursining o'quv dasturidagi barcha mavzular batafsil bayon etilgan. Xususan, chiziqli dasturlash, dinamik dasturlash, ommaviy xizmat ko'rsatish, Markov o'yinlari va optimal boshqaruv nazariyalaridir. Nazariy bilimlarni mustahkamlash uchun sonli misol va masalalar yechib ko'rsatilgan hamda nazorat savollari, mustaqil ish uchun variantli misollar va masalalar berilgan.

UDK 004.4(075.8)
BBK 22.18ya73

ISBN 978-9943-5085-5-2

KIRISH

Mamlakatimizda sog'lom va barkamol avlodni tarbiyalash, yoshlarning o'z ijodiy va intellektual salohiyatini oshirish, mamlakatimiz yoshlarini XXI asr talablariga to'liq javob beradigan har tomonlama rivojlangan shaxslar etib voyaga yetkazish uchun, zarur shart-sharoitlar va imkoniyatlar yaratilmoqda. "Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi" va "Ta'lim to'g'risida" gi qonunda belgilangan keng ko'lamli aniq yo'naltirilgan chora-tadbirlarni amalga oshirish keng yo'lga qo'yilgan. Shuningdek. ta'lim hamda ishlab chiqarish muassasalari bilan o'zaro amaliy hamjihatlikni mustahkamlash, ularning yaqin samarali hamkorligini ta'minlash muhim vazifalardan hisoblanadi.

Respublika matematika fani qudratli intellektual salohiyatni yaratgan. U hayotimizning ko'pgina sohalarida amalda qo'llanilmoqda. Vatanimizning milliy davlatchiligi va iqtisodiy mustaqilligini mustahkamlash uchun asos bo'lib xizmat qilmoqda.

Tabiiy zaxiralar chegaralanganligi tufayli korxonalar hamda umuman davlat faoliyatining muvaffaqiyatlari hozir ko'p jihatdan fan-texnika taraqqiyoti yutuqlari, chuqur ilm talab qiladigan texnologiyalar qanchalik keng joriy etilganligi, kadrlarning kasb tayyorgarligi darajasi bilan belgilanadi.

Mamlakatni jadal rivojlantirish borasidagi dasturiy vazifalarni amalga oshirishda fanni va ilmiy infrastrukturani rivojlantirish g'oyat muhim ahamiyatga ega.

Dunyoda ro'y berayotgan ilmiy-texnikaviy rivojlanish boshqaruv sohalarida yangidan-yangi murakkab va ulkan tizimlarni vujudga keltirdi. Bular sirasiga: ishlab chiqarish korxonalari, birlashmalar, tarmoqlar (sohalar), biror davlatning iqtisodiyoti hamda global tizimlar (makrotizimlar) kiradi. Jarayonlar tadqiqoti fani boshqaruv tizimlaridagi muammolarni yechishning kompleks ilmiy usullarini yaratish va tatbiq qilish bilan shug'ullanadi. U ilmiy yo'nalish sifatida XX asrning 40-yillaridan boshlab shakllana boshladi.

Keyinchalik, jarayonlar tadqiqotining tamoyillari va usullari moliyaviy-ishlab chiqarish sohalariga tegishli bo'lgan masalalarni yechishga ham tatbiq qilina boshlandi. Shu sababli jarayonlar tadqiqoti kursi bo'yicha yetuk xodimlarni tayyorlashga ehtiyoj tug'ildi.

Jarayonlar tadqiqoti fanining rivojlanishiga matematik olimlardan X. Taxa, R. Bellman, R. Cherchmen, R. Dansig, G. Ouen, T. Saati, G. Vagner (AQSH), A. Kofman (Fransiya), L. V. Kantorovich, B. V. Gnedenko, N. P. Buslenko, L. S. Pontryagin (Rossiya), S. H. Sirojiddinov, N. Yu. Satimov, T. A. Azlarov (O'zbekiston)lar ulkan hissa qo'shganlar.

Jarayonlar tadqiqoti fani boshqaruv tashkiliy tizimlarining yanada samarali faoliyat ko'rsatishi uchun, usullar yaratish va ularni tatbiq qilish bilan shug'ullanadi. Bu fanning predmeti *bir-biri bilan bog'liq bo'lgan bir nechta bo'linmalarni (ularning maqsadlari qarama-qarshi bo'lishi ham mumkin) boshqarish tizimidir.*

Jamiyat taraqqiyotining barcha bosqichlarida xo'jalik yuritishni mukammal tuzilgan reja asosida olib borishga harakat qilinadi. Bu, ayniqsa, bozor munosabatlari tiklanayotgan hozirgi sharoitda muhim ahamiyat kasb etadi. Samarali iqtisodiy rivojlanish yo'nalishini aniqlash uchun, jarayonlarning miqdoriy modellashtirish usullarini o'zlashtirish zarur. Bu narsa, milliy iqtisodiyot doirasida yaqin kelajak hamda strategik rejalarni ishlab chiqishda, yirik va uzoq muddatli tadbirlarni hisobga olishda, iqtisodiy rivojlanishning turli variantlarini aniqlashda zarur bo'ladi.

Shuningdek, hududiy rivojlanishning dasturini yaratish, ishlanmalar va tadqiqotlarni muvofiqlashtirilgan rejalar bilan ta'minlash, maqsadli dasturiy rejalashtirishda ayrim kompleks ishlarni bajarish uchun, imkoniyatlarni taqsimlash, tashqi bozor muhiti sharoitida korxonaning oqilona faoliyat ko'rsatishini amalga oshirish. Ko'p hollarda, tashkiliy masalalarni tadqiq etish uchun, oxirgi paytda tez sur'atlarda samarali rivojlanib borayotgan tatbiqiy matematikaning yo'nalishi hisoblangan jarayonlar tadqiqoti fani xizmat qilishi mumkin.

Ushbu darslik, jarayonlar tadqiqoti fanining vositalari yordamida iqtisodiyot, jamiyat, fan-texnika, tabiat keltirib chiqarayotgan muammolarning matematik modellarini tuzish va ular yordamida mukammal yechimni aniqlab berishning nazariy va amaliy bilimlarini berishga bag'ishlangan. Bunga, birinchi navbatda matematik dasturlash, tarmoq nazariyasi, zaxirani boshqarish masalasi, o'yinlar, ommaviy xizmat ko'rsatish, optimal boshqaruv nazariyalari va boshqa fanlar yutuqlaridan foydalanish orqali erishiladi.

Jarayonlar tadqiqoti talabalarga, bu fanning matematik ko'rsatkichlari haqida to'la tasavvur berishi hamda aniq misollar orqali jarayonlar tadqiqotining usullari qo'llaniladigan sohalarni ko'rsatib bergan bo'lishi kerak. Agar talaba o'z faoliyatini yechim qabul qilish sohasiga qaratgan bo'lsa, bu ma'lumotlarni o'zlashtirish talabada, odatda, yetishmagan ishonchni hosil qiladi. Talaba jarayonlar tadqiqoti fanining matematik asosi bilimini chuqur egallagandan so'ng, bu sohada erishilgan yutuqlarni o'zlashtirish va haqiqiy muammolarni amaliy tadqiq etish bilan, bu sohada o'zining tayyorgarlik darajasini oshirishi mumkin.

I BOB
CHIZIQLI VA BUTUN SONLI DASTURLASH

Chiziqli dasturlashning masalasi o'zgaruvchilari chiziqli tengsizliklarni qanoatlantiruvchi chiziqli funksiyaning minimumini (yoki maksimumini) topish, ya'ni:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \ \ i = 1, 2, ..., m \tag{0.1}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, ..., n_1 \leq n \tag{0.2}$$

shartlar o'rinli bo'lganda

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{0.3}$$

funksiyaning ekstremumini topishdan iborat, bu yerda x_j – o'zgaruvchilar, a_{ij}, b_i, c_j – berilgan o'zgarmas sonlar. Bunda (0.3) – maqsad funksiya, (0.1) va (0.2) lar *chegaralar* deb ataladi. (0.1) va (0.2) chegaralar chiziqli bo'lganligi sababli, ular orqali aniqlangan soha R^n da qavariq ko'p yoqlidan iborat bo'ladi. Ma'lumki, agar soha chegaralangan bo'lsa (0.3)-chiziqli funksiya ekstremumga ushbu ko'p yoqlining chetlarida (uchlarida) erishadi. Funksiya ekstremumini aniqlashning asosiy usuli hisoblangan differensial hisobni bu yerda qo'llab bo'lmaydi. Shu sababli chiziqli dasturlash masalalarini yechish uchun, boshqa usullar yaratishga ehtiyoj tug'ilgan. Bunday usullar bilan quyida tanishamiz.

Quyidagi ta'kidlarni keltirib o'tamiz.

1. Funksiyaning minimumini topish masalasi, uning teskari ishorasi bilan maksimumini topish masalasiga ekvivalent va aksincha.

2. (0.1)-ko'rinishdagi tengsizliklarni *kuchsiz o'zgaruvchilar* deb ataluvchi $x_{n+i} \geq 0$ lar yordamida tenglik holatga keltirish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \; i = 1, 2, ..., m,$$

xuddi shunga o'xshash

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \; i = 1, 2, ..., m,$$

ko'rinishdagi tengsizliklarni ham kuchsiz $x_{n+i} \geq 0$ o'zgaruvchilar yordamida tenglik holatga keltirish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \; i = 1, 2, ..., m.$$

3. Agar x_j o'zgaruvchiga manfiymaslik sharti berilmagan bo'lsa, uni ikkita manfiymas $x_j', x_j'' \geq 0$ o'zgaruvchilarning ayrimasi: $x_j = x_j' - x_j''$ bilan almashtirish mumkin.

Chiziqli dasturlashga keltirish mumkin bo'lgan quyidagi masalalarni ko'rib chiqamiz.

1-masala. Parhez taom haqidagi masala. Tarkibida ma'lum miqdorda (masalan, n ta) to'yimli masalliqlar (vitaminlar, oqsil, kraxmal va boshqalar) belgilangan miqdordan kam bo'lmagan parhez taom tayyorlash lozim bo'lsin. Masalliqlar xarid qilinishi kerak bo'lgan ma'lum sonda (masalan, m ta) xomashyolar tarkibida turli nisbatda uchraydi. Xomashyolardan qanday hajmda xarid qilish kerakki, natijada so'ralgan taom tayyorlansin va uning tannarxi eng arzon qiymatda bo'lsin.

Bu masalaning matematik modelini tuzish uchun, quyidagi belgilashlarni kiritamiz: x_j – xarid qilinishi lozim bo'lgan j – xomashyoning miqdori, b_i – taom tayyorlashda talab etilayotgan i – masalliqning quyi miqdori, a_{ij} – i – xomashyoning birlik hajmida j – to'yimli moddaning miqdori, c_j – j – xomashyoning birlik hajmi narxi.

Masalaning shartiga ko'ra,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \ \ i = 1, 2, ..., m \tag{0.4}$$

tengsizliklar o'rinli bo'lishi kerak. Mahsulot faqat xarid qilinadi. shu sababli

$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, ..., n \tag{0.5}$$

shartlar o'rinli bo'lganda, umumiy xarajatni ifodalovchi:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{0.6}$$

funksiyaning minimal qiymatini aniqlash kerak bo'ladi.

Shunday qilib, quyidagi chiziqli dasturlash masalasiga kelamiz: (0.4) va (0.5) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi va (0.6)-chiziqli funksiyaga minimal qiymat beruvchi $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarning qiymatlari topilsin.

2-masala. Yarim fabrikat mahsulotlarini ishlab chiqaruvchi firmadan 1-mahsulotdan b_1 birlik, 2-mahsulotdan b_2 birlik va hokazo m-mahsulotdan b_m birlik hajmda ishlab chiqarish talab etiladi. Ushbu mahsulotlar n ta turli xomashyolarni qayta ishlash orqali hosil qilinadi. Bunda j – xomashyoning birlik miqdoridan a_{ij} qismi $i-$ yarim fabrikat mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadi. $j-$ xomashyoning birlik miqdori narxi c_j so'mdan iborat bo'lsin. Xomashyolardan qanday hajmda sotib olinganda umumiy ketgan xarajat eng kam bo'lib, mahsulotlar hajmiga bo'lgan talab to'la ta'minlanadi?

Ushbu masalaning matematik modelini tuzish uchun, quyidagi belgilashni kiritamiz: x_j- sotib olinishi rejalashtirilgan $j-$ xomashyoning hajmini bildirsin. U holda umumiy xarajat:

$$z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{0.7}$$

funksiya orqali ifodalanadi. Masala shartiga asosan

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i=1,2,...,m \tag{0.8}$$

tengliklar o'rinli bo'lishi lozim, shu bilan birga

$$x_j \geq 0,\ \ j=1,2,...,n \tag{0.9}$$

tengsizliklar bajarilishi kerak.

Shunday qilib chiziqli dasturlash masalasiga kelamiz. Ya'ni, (0.8) va (0.9) shartlar ostida (0.7) $-\ z$ funksiyaning minimumini toping.

1–3 tasdiqlardan foydalanib, (0.1)–(0.3)-masalani quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij}(x'_j - x''_j) - x_{n+i} = b_i,\ \ i=1,2,...,m \tag{0.10}$$

$$\begin{gathered} x_j \geq 0,\ \ j=1,2,...,n_1,\ \ x'_k \geq 0,\ \ x''_k \geq 0, \\ k=n_1+1, n_1+2,...,n,\ \ x_{n+i} \geq 0,\ \ i=1,2,...,m \end{gathered} \tag{0.11}$$

shartlar o'rinli bo'lganda

$$z=\sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n} c_j(x'_j - x''_j) \qquad (0.12)$$

funksiyaning ekstremum qiymati topilsin.

1-teorema. Agar $x=(x_1,x_2,...,x_{n_1},x'_{n_1+1},x'_{n_1+2},...,x'_n,x''_{n_1+1},$ $x''_{n_1+2},...,x''_n,\ x_{n+1},...,x_{n+m})$ (0.10)–(0.12) masalaning yechimi bo'lsa, u holda $x = (x_1,x_2,...,x_{n_1},x'_{n_1+1}-x''_{n_1+1},$ $x'_{n_1+2}-x''_{n_1+2},...,x'_n-x''_n)$ (0.1)–(0.3) masalaning yechimi bo'ladi.

Demak, umumiylikka zarar keltirmagan holda (0.10)–(0.12) masala ko'rilyapti deb olishimiz mumkin ekan.

(0.1), (0.2) yoki (0.8), (0.9) shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x=(x_1,\ x_2,...,x_n)$ vektor *reja* deb ataladi.

(0.1), (0.2) yoki (0.8), (0.9) shartlar ostida (0.7) maqsad funksiyaga minimal qiymat beruvchi rejani topish, *masalani yechish,* mos reja *optimal reja* deb ataladi.

Shu yerdan boshlab (0.10)–(0.12) masala o'rniga kompakt ko'rinishda yozilgan (0.7)–(0.9) masalani qaraymiz.

(0.8)-ko'rinishdagi tenglamalar sistemasining yechimini izlash davomida quyidagi holatlarga duch kelish mumkin. Agar (0.8)-tenglamalar sistemasi kamida bitta yechimga ega bo'lsa, u *birgalikda* deb ataladi. Agar (0.8)-tenglamalar sistemasining biror tenglamasini boshqalari orqali chiziqli ifodalash mumkin bo'lsa, u *bog'liq* deb ataladi. Agar $A=(a_{ij})$ jadvalning rangi r bo'lib, $[A,b]$ jadvalning rangi r dan katta bo'lsa (0.8)-tenglamalar sistemasi *birgalikda emas* deyiladi. Agar (0.8)-tenglamalar sistemasi birgalikda va bog'liqsiz bo'lsa, u holda uning rangi $m(m\le n)$ ga teng bo'ladi. Agar $m>n$ bo'lib, (0.8)-tenglamalar sistemasi bog'liqsiz bo'lsa, u holda uning yechimi yo'q.

Bundan keyin biz (0.8)-tenglamalar sistemasini birgalikda va bog'liqsiz deb faraz qilamiz.

1-ta'rif. (0.7)–(0.9) masala rejasining musbat komponentalariga mos kelgan A jadvalning ustun vektorlari a_j chiziqli erkli bo'lishsa, u *tayanch reja* deb ataladi.

2-ta'rif. A jadvalning $x_{s_j} > 0$ larga mos kelgan a_{s_j} vektor ustunlarini o'z ichiga olgan erkli a_{s_j}, $j = 1, 2, ..., m$ vektorlar sistemasi *tayanch rejaning bazisi* deb ataladi.

3-ta'rif. Bazisga mos kelgan barcha komponentalari musbat bo'lgan tayanch reja *xosmas reja* deb ataladi.

4-ta'rif. Barcha tayanch rejalari xosmas bo'lgan masala *xosmas masala* deb ataladi.

$A = [A_I, A_{II}]$ bo'lsin, bu yerda A_I – xosmas $m \times m$ o'lchamli kvadratik jadval, A_{II} – esa $m \times (n-m)$ o'lchamli jadval. $x = [x_I, x_{II}]$ bo'lsin, bu yerda $x_I - m$ komponentali vektor, $x_{II} - n - m$ komponentali vektor. U holda (0.8)-tenglamalar sistemasida $x_{II} = 0$ deb olish bilan $x_I = A_I^{-1}b$, $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$ ni hosil qilamiz. Agar $x_I \geq 0$ bo'lsa, $x = [x_I, x_{II}]$ – reja tayanch bo'ladi. x_I vektorning komponentalari *bazis o'zgaruvchilar*, x_{II} vektorniki *nobazis o'zgaruvchilar* deb ataladi.

Agar chiziqli dasturlash masalasida o'zgaruvchilarning nomanfiylik shartidan tashqari boshqa shartlari tengsizlik ko'rinishda berilgan bo'lsa, bunday masala chiziqli dasturlashning *standart shakldagi masalasi* deb ataladi.

Agar chiziqli dasturlash masalasida o'zgaruvchilarning nomanfiylik shartidan tashqari boshqa shartlari tenglik ko'rinishda berilgan bo'lsa, bunday masala chiziqli dasturlashning *kanonik shakldagi masalasi* deb ataladi.

Ammo biz bilamizki, standart shakldagi masalani har vaqt kanonik shaklga keltirish mumkin.

Agar kanonik shakldagi masalada optimal yechim mavjud bo'lsa, albatta, optimal tayanch reja ham mavjuddir. Shu sababli optimal yechimni aniqlash uchun, barcha tayanch rejalarni topish yetarli bo'ladi. Bu esa o'z navbatida, deyarli $\binom{n}{m}$ ta tenglamalar sistemasini yechib chiqishga olib keladi. Tushunarliki, hatto katta bo'lmagan n lar uchun, bularni aniqlash amaliy jihatdan qiyinchilik tug'diradi.

Butun sonli chiziqli dasturlash (BSCHD) diskret dasturlashning chuqur o'rganilgan bo'limi hisoblanadi. BSCHD masalalarini yechishning bir necha usullari mavjud bo'lib, ular masalani yechishga yondashishi bilan asosan uchta guruhga bo'linadi. Birinchi guruhdagi usullar *kesuvchi tekisliklar usuli* deyiladi. Bunday nom bilan atalishiga sabab, avval masala butunlilik shartisiz biror usul bilan yechiladi, agar reja butunlilik shartini qanoatlantirsa, berilgan masala yechilgan bo'ladi. Aks holda esa shunday yangi chegara qo'shiladiki, natijada masala rejalar to'plamining bir qismi chetda qolib ketadi. Bunda yangi chegara boshlang'ich masalaning birorta ham rejasini yo'qotmaydi va qo'shimcha chegaraga mos kelgan gipertekislik berilgan masala rejalari to'plamining kamida bitta butun koordinatali rejasidan o'tadi. Bu yangi sohada masala butunlilik shartsiz yechiladi. Agar reja butunlilik shartini qanoatlantirsa, berilgan boshlang'ich masala yechilgan bo'ladi, aks holda yangi chegara qo'shilib jarayon qaytariladi.

Jarayonning chekliligini ta'minlash uchun, ayrim hollarda qo'shimcha chegaralar ham qo'shilishi mumkin. Ta'kidlash lozimki, butunlilik shartisiz topilgan optimal rejani butungacha yaxlitlash bilan berilgan masalaning rejasini, umuman olganda, hosil qilib bo'lmaydi. Bu guruhga tegishli bo'lgan, R. Gomori, R.D. Yung tomonlaridan yaratilgan uchta usul: siklik, to'la butun sonli va to'g'ri usullarni ko'rib chiqamiz.

Ikkinchi guruh usullari asosan ketma-ket ko'rib chiqish g'oyasiga asoslangan bo'lib, bunda ko'rib chiqish soni chegaralanganligi va masala kombinator xarakterga egaligi muhim rol o'ynaydi. Bunday usullardan eng ko'p ishlatiladigani tarmoqlar va chegaralar usulidir. Bu usul 1960-yilda Lend va Doyglar tomonidan "sayyor savdogor" masalasini yechish uchun, topilgan bo‘lib, keyinchalik diskret dasturlash masalasini yechishga moslashtirilgan. BSCHD masalalarini yechishda ishlatiladigan ko‘pgina usullarning asosiy g‘oyasi berilgan masalani chiziqli dasturlash masalasiga keltirish va rejalar to‘plamini toraytirib borish hisobiga boshlang‘ich masalani yechishga asoslangan. Bunda, albatta, chiziqli dasturlash masalasining rejalar to‘plami boshlang‘ich masala rejalar to‘plamiga qaraganda kengroq bo‘ladi. BSCHD masalalarini yechishda ko‘p hollarda chiziqli dasturlash usullariga murojaat qilishga to‘g‘ri keladi. Ayniqsa, bu 1-guruh usullariga bevosita taalluqli bo‘lib, bu guruh usullarining asosida chiziqli dasturlashning simpleks va ikkilanma simpleks usullari yotadi.

Xalq xo‘jaligining ko‘p muammoli masalalarini transport masalasiga keltirish orqali hal etish mumkin. Bu esa qo‘yilgan masalani matematik, qolaversa iqtisodiy tomondan to‘la yechishga imkon beradi, ya’ni optimal reja va undan keladigan samaradorlik ko‘rsatib beriladi. Transport masalasi, umuman olganda, chiziqli dasturlash masalasi bo‘lib, uning ayrim xususiyatlari hisobga olingan holda, uni yechish uchun, maxsus qulay usullar topilgan. Potensiallar usuli, differensiallangan renta usuli, delta usuli va boshqalar shular jumlasidandir. Albatta, barcha usullarda ham boshlang‘ich rejani tanlab olish muhim hisoblanadi, chunki agar u optimal rejaga yaqinroq qilib olinadigan bo‘lsa, keyingi hisoblash amallari kamroq bajariladi. Shuning uchun, boshlang‘ich rejani aniqlash ham alohida masala deb qaralishi mumkin. Bu masalani yechish uchun, bir nechta usullar taklif etilgan, bular: shimoliy-g‘arb burchak usuli, minimal baholi usul, ikki hissa afzalroq usul va boshqalar.

1-§. Jarayonlar tadqiqoti. Asosiy masala va bosqichlar

Berilgan masalani yechish davomida kelib chiqadigan muammolarning yechimlarini aniqlash davomida matematik modellar va usullardan samarali foydalanish holati boshqaruv qarorlarini tashkil etishda ilmiy yondashishning haqqoniy ekanligini ko'rsatadi.

Yaratilgan matematik model yordamida olingan yechimni boshlanishdan. to amalga oshirishgacha bo'lgan bosqichlarni muvaffaqiyatli bosib o'tish ko'p hollarda tadqiqotchilarning bilimi, ijodiy qobiliyati va sezgirliklari bilan aniqlanadi. Bulardan kelib chiqqan holda, jarayonlar tadqiqoti fani tartibli boshqarish masalalarini yechish vositasi bo'lishi bilan birga, uni ham fan, ham san'at deyish mumkin bo'ladi. Shu bilan birga matematik modelni qurish, uning adekvatligini ta'minlash va uning yordamida olingan natijalardan foydalanish uchun, ma'lumotlar yig'ish davomida keladigan muvaffaqiyat, albatta, tadqiqotchilarning kerakli ma'lumot olish manbalari hamda qabul qilingan yechimni tatbiq etishning mas'ul xodimlari bilan ishonchli munosabat o'rnatish qobiliyatiga bevosita bog'liqdir.

Ta'kidlash lozimki, tuzilmaning biror masalasini yechish uchun, shakllantirilgan ilmiy guruh formal matematik apparatlardan foydalanishni bilishi va haqiqiy holatni evristik tadqiq qilish qobiliyatiga ega bo'lishi lozim. Butun uyushmaga ma'qul bo'lgan yechim *optimal (mukammal)* deb ataladi. Jarayonlar tadqiqoti fanining muhim jihatlari quyidagilardan iborat:

1. Qo'yilgan muammoga umumiy yondoshish, ya'ni yangi qo'yilgan masala xususiy bo'lishiga qaramasdan, unga bog'liq boshqa masalalar bilan birga qarash;

2. Muammoni tadqiq qilish davomida, qator yangidan-yangi masalalar kelib chiqadiki, binobarin ularni ham yo'l-yo'lakay yechib borishga to'g'ri keladi;

3. Muammoning optimal yechimini aniqlash;

4. Muammoni yechishga umumiy (har tomonlama) yondashish. Buning uchun, operatsion guruh tuziladi: unda muhandis-

lar, matematiklar, iqtisodchilar, sotsiologlar va boshqa tegishli fan vakillari ishtirok etadi.

Xususan, uning alohida jihatlari – tadqiq etilishi lozim bo'lgan jarayonlarning matematik modellari determinik, stoxastik, chiziqli, nochiziqli ko'rinishda bo'lishidir. Tartibli boshqarishda u yoki bu masalalarni tadqiq qilish jarayonining maqsadi turli chegaralar bo'lgan holda eng to'g'ri yechimni topishdan iboratdir. Jarayonlar tadqiqoti fanida matematik modellar va masalani yechish usullari ustivor hisoblanadi.

Tartibli boshqarish masalalarini formallashtirishda eng avval:

1. Masalani yechish jarayonida amalga oshiriladigan maqsad yoki maqsadlarni aniqlash;

2. Tadqiq qilinayotgan obyektning qaysi parametrlari sonli qiy*matlarini o'zgartirish mumkinligini aniqlashtirish zarurdir.*

Maqsad deganda boshqaruv parametrini tanlash va tatbiq etish orqali olinadigan natija tushuniladi. Xo'jalik yuritish doirasida tovar ishlab chiqaruvchi yoki xizmat ko'rsatuvchi subyektning maqsadi ko'p hollarda yoki daromadni maksimumlashtirish. yoki umumiy xarajatni minimumlashtirishdan iborat bo'ladi.

Boshqaruvda yechim qabul qilishning muhim va nozik jihati, bu boshqarilmaydigan parametrlarni, ya'ni boshqaruv subyekti qabul qiladigan yechim qiymatlariga bog'liq bo'lmagan parametrlarni aniqlashtirish hisoblanadi. Masalan, yillik mahsulotni sotishda firma uning hajmiga va tuzilish xususiyatlariga nisbatan qaror qabul qilish jarayonida raqobat tufayli narx-navo o'zgarishi mumkinligini hisobga olgan bo'lishi kerak. Real holatda boshqarilmaydigan parametrlarni e'tiborga olmaslik adekvat bo'lmagan model qurishga va demak, xato yechim qabul qilishga olib kelishi mumkin.

Jarayonlar tadqiqoti fanida asosiy diqqat-e'tibor matematik

modelga qaratiladi. Matematik model qurish uchun, tadqiq qi
nayotgan obyektning faoliyat-maqsadi haqida aniq tasavvurga · boshqariluvchi parametrlarning qiymatlar sohasini aniqlab be ruvchi chegaralar haqida *ma'lumotga ega bo'lish zarur*. Maqsad ham, chegaralar ham boshqariluvchi parametrlarning oshkor yoki oshkormas funksiyalari ko'rinishda taqdim etilgan bo'lishi kerak. Qurilgan modelning to'la tahlili, barcha aniqlangan chegaralar bajarilgan holda, obyektga eng yaxshi boshqaruv ta'sirini aniqlab berishi lozim.

Haqiqiy tadqiq qilinishi lozim bo'lgan obyektning murakkabligi maqsad va chegaralarni analitik ko'rinishda ifodalanishiga salbiy ta'sir ko'rsatadi. Shu sababli yechilishi zarur bo'lgan masalaning mos modelini adekvat qurishni ta'minlagan holda, uning "o'lchamini" kamaytirish nihoyatda muhimdir. Haqiqiy holatni tahlil qilish davomida ko'p sondagi o'zgaruvchilar, parametrlar va chegaralar zarurdek bo'lib ko'rinsa-da, aslida ularning faqat ayrimlari muhim hisoblanadi. Shuning uchun, modelni qurish va obyektning soddalashtirilgan ko'rinishini aniqlashtirish davomida muhim o'zgaruvchilarni, parametrlarni va chegaralarni aniqlashtirish hamda haqiqiy obyektning modellashtirish abstraksiyasini adekvat darajada tanlamoq zarur bo'ladi. Yechilishi zarur bo'lgan muammoning haqiqiy holati tahlil qilinayotganida, shunga alohida e'tibor berish lozimki, korxona faoliyatining asosiy omili, bu daromad, chunki faqat shu orqali u faoliyat ko'rsatadi va rivojlanadi. Ishlab chiqarish, xomashyo, moliyaviy va investitsiya manbalarining chegaralanganlik sharoitida maksimal daromad olish mukammal ishlab chiqarish tizimini qurish va tahlil qilish matematikaning usullaridan keng foydalanishni taqozo etadi.

Bozor islohoti transportni rivojlantirish va undan foydalanish sohasida ham o'z talablarini kuchaytirdi. Endi transport xizmatining sifati nafaqat tashigan yuklari hajmi bilan, balki transport vositalarini yuk bilan ta'minlanganligi, yuk tashish bahosi, transportda xizmat ko'rsatishning kutish vaqtlari bilan belgilanadigan bo'ldi. Bunday omillarning paydo bo'lishi bozor iqtisodiyoti sharoitida, nafaqat an'anaviy chiziqli transport masalasi, balki transport sohasida faoliyat ko'rsatish davomida, yuqorida aytilgan ko'rsatkichlarni e'tiborga olishni ta'minlab beruvchi, ammo murakkabroq bo'lgan, nochiziqli modellardan ham foydalanishni talab etadi.

Qimmatli qog'ozlar, kredit va investitsion manbalarni boshqarish, miqdoriy tahlil qilish usullarini ko'rib chiqish shuni ko'rsatadiki, iqtisodning moliyaviy sohasida jarayonlar tadqiqotining modellari va usullari yanada kengroq joriy etilmoqda. Kapital qurilishga ajratilgan mablag'ning ishlab chiqarish samaradorligini tahlil qilishda, odatda, optimal boshqarishning modeli va graf ustida optimallashtirishning diskret modelidan hamda masalaning ayrim boshlang'ich parametrlarini berishda aniqmaslik bo'lgan holda chiziqli va nochiziqli dasturlashdan foydalaniladi.

Hozirgi vaqtda bunday holatlarni tahlil qilish uchun, yetarlicha usullar mavjud. Bu, birinchi o'rinda, modellarning yuqorida aytib o'tilgan parametrlarga nisbatan o'zgarish sezgirligini tahlil qilish va ko'p variantli hisoblashlarni amalga oshirish.

Mabodo, tasodifiy parametrlarning taqsimot funksiyalari berilgan bo'lsa, unda tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi, dispersiyasi, korrelyatsiya koeffitsiyentlari tadqiq etiladi.

Jarayonlar tadqiqotining amaliy masalalarini yechish davomida yig'ilgan tajribalar va ularni tartibga solish quyidagi tipik masalalar sinfini qo'yilish mohiyati bo'yicha ajratib ko'rishni taqozo etadi: 1) zaxirani boshqarish; 2) zaxiralarni taqsimlash; 3) jihozlarni ta'mirlash va almashtirish; 4) ommaviy xizmat ko'rsatish; 5) tartiblash; 6) tarmoqli rejalashtirish va boshqarish; 7) marshrut tanlash; 8) o'yinlar nazariyasi; 9) Markov jarayonlari; 10) yechim qabul qilish nazariyasi; 11) birgalikda yechiladigan aralash masalalar.

Zaxirani boshqarish masalasi. Ushbu masala jarayonlar tadqiqoti fanida keng tarqalgan va har tomonlama o‘rganilgan hisoblanadi. Zaxirani boshqarish masalasi quyidagi maxsuslikka ega. Zaxira miqdorining ko‘payib borishi bilan ularni saqlab turish xarajatlari ortadi, ammo yetishmaslik orqasidan kelib chiqadigan yo‘qotish kamayadi. Demak, zaxirani boshqarishning masalalaridan biri, shunday zaxira hajmini aniqlash lozimki, natijada saqlash va yetishmaslik orqasidan kelib chiqadigan xarajatlar minimum bo‘lsin.

Zaxiralarni taqsimlash. Bajarilishi lozim bo‘lgan ma’lum sondagi ishlarning har birini to‘la-to‘kis bajarish uchun mavjud zaxiralar hajmi yetishmaydi. Masalaning berilish shartiga ko‘ra, zaxiralarni taqsimlash modeli uch guruhga bo‘linadi:

1. Ham ishlar soni, ham zaxiralar hajmi berilgan. Mavjud zaxiralarni shunday taqsimlash kerakki, natijada yoki foyda maksimal bo‘lsin, yoki xarajat minimal bo‘lsin.

2. Faqat mavjud zaxiralar hajmi berilgan. Ishlarning qanday tarkibi yordamida maksimal foydaga ega bo‘lish mumkin.

3. Faqat ishlar berilgan. Ishlab chiqarishning xarajatini kamaytirish uchun, berilgan ishlarni bajarishda qanday zaxiralar zarur ekanligi aniqlansin.

Jihozlarni ta’mirlash va almashtirish. Bunday masalalar ishlayotgan jihozlarning yemirilishi, eskirishi oqibatida yangisiga almashtirish zarurligidan kelib chiqadi. U holda, bunday jihozlarni yoki ta’mirlash orqali uning texnologik holatini yaxshilash, yoki yangisiga almashtirish zaruriyati paydo bo‘ladi. Bunda mumkin bo‘lgan masalalarning qo‘yilishlari quyidagicha.

Ishlatilishi davomida eskirgan jihozni ta’mirlash yoki yangisiga almashtirish vaqtlarini shunday aniqlash kerakki, natijada ta’mirlash bilan almashtirish xarajatlari minimal bo‘lsin.

Shunday jihozlar bo'lishi mumkinki, ularning uskunalari butunlay ishdan chiqib, tiklab bo'lmaydi, demak, bunday jihozlarni, albatta, almashtirish zarur bo'ladi. Bu holda masalaning qo'yilishi quyidagicha bo'ladi.

Jihozlarni ishdan chiqishini bartaraf etish uchun, oldindan ko'riladigan tadbirlar vaqtlarini shunday aniqlash kerakki, natijada tadbir va tadbirlar orasida jihoz ishdan chiqishi oqibatida ishlamay turish xarajatlari minimal bo'lsin.

Ommaviy xizmat ko'rsatish masalalari. Ommaviy xizmat ko'rsatish talablar va buyurtmalarga xizmat ko'rsatishni tahlil va tadqiq qilish bilan shug'ullanadi. Zero, navbat kutish hodisasi ishlab chiqarish amaliyotida, kundalik turmushda tez-tez uchrab turadi. Bunga yaqqol misollar: qo'nish yoki uchib ketish navbatini kutib turgan samolyotlar, maishiy xizmat ko'rsatish shoxobchalaridagi navbat kutish, avtomat telefon stansiyalaridan shaharlararo so'zlashuv chaqirig'ini kutish va hokazo.

Buyurtmalar va xaridorlar oqimining boshqrib bo'lmasligi va tasodifiy bo'lishligi sababli ham navbat kutish hodisasi kelib chiqadi. Agar jihozlari yetarlicha ko'p bo'lsa, albatta, navbat kutish ro'y bermaydi, ammo bunda jihozlarning ishlamay turib qolishi natijasida qo'shimcha xarajatlar kelib chiqadi. Aksincha, jihozlarning kamligi navbat kutishlar sonini oshirib yuboradi, buning natijasida kutish xarajatlari paydo bo'ladi. Shu sababli ommaviy xizmat ko'rsatishning quyidagi masalasi kelib chiqadi. Xizmat ko'rsatish jihozlari sonini shunday aniqlash kerakki, natijada kutish va o'z vaqtida xizmat ko'rsatilmaganligi sababli kelib chiqadigan xarajatlar minimal bo'lsin.

Tartiblash. Xizmat qilishni kutib turgan talablarning mos ketma-ketligini aniqlash *tartiblash* deb ataladi. Bir yoki bir nechta talabga xizmat ko'rsatuvchi jihozlar bo'lsin. Barcha talabga xizmat ko'rsatishni boshlash va tamomlash vaqtini aniqlash zarur.

Bundan tashqari har bir talabni bajaruvchi jihozni aniqlash, uni qanday ketma-ketlikda ishlatish va har bir operatsiyaning bajarishlik davomiyligini koʻrsatish kerak.

Bunday masalalar koʻp nomdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish jarayonida turli dastgoh va asboblar kombinatsiyasidan foydalanadigan korxonalar ishining kalendar rejasini tuzishda kelib chiqadi. Bunday shartlarda tartiblash masalalari *jadval tuzish* masalalari deb ataladi.

Tarmoqli rejalashtirish va boshqarish. Bunda bir nechta tadqiqotlarlardan tashkil topgan yirik kompleks ishning tamom boʻlishi bilan, uning elementi hisoblangan jarayonlarning boshlanish vaqtlari orasidagi munosabatlar oʻrnatiladi. Bunday masalalar murakkab va qimmat turuvchi loyihalarni ishlab chiqishda dolzarbdir. Masala qat'iy qoʻyilishi uchun, quyidagilar ma'lum boʻlishi kerak: kompleksni toʻla bajarish uchun, zarur boʻlgan barcha tadqiqot ishlari roʻyxati; tadqiqot ishlarining bajarilish ketma-ketligi.

Har bir jarayon uchun zarur boʻlgan zaxira hajmi bilan, uning davomiyligi oʻrtasidagi bogʻlanish boʻlsin.

Bu holda jarayonlar tadqiqotidan iborat boʻlgan kompleksni tarmoq grafi yordamida ifodalash mumkin boʻladi.

Bunda quyidagi masalalar kelib chiqadi.

1. Ishlar kompleksining bajarilish muddati berilgan. Har bir ishning boshlanish muddatlarini shunday aniqlash kerakki, natijada quyidagi kriteriyalarning biri minimal boʻlsin: a) ishlar kompleksini bajarish uchun, ketgan umumiy xarajatlar; b) zaxiralarning tekis sarf qilinmasligi natijasida kelib chiqadigan oʻrtacha ogʻish koʻrsatkichi; c) ishlar kompleksini berilgan muddatda bajarilmaslik ehtimoli; d) mavjud zaxiralar hajmini zarur hajmdan oʻrtacha ogʻish koʻrsatkichi.

2. Umumiy zaxiralar hajmi berilgan boʻlsin. Har bir ishning boshlanish vaqtini shunday aniqlash kerakki, natijada butun kompleksni bajarish uchun, ketgan muddat minimal boʻlsin.

Marshrut tanlash. Marshrut tanlash masalasi transport va aloqa tizimlarida uchraydi. Masalan, ikki shahar orasidagi eng qisqa masofani topish. Bunda marshrutlarga turli chegaralar qo'yilishi mumkin. Har bir shaharda faqat bir marta bo'lish sharti bilan barcha shaharlarni eng qisqa marshrut bo'ylab aylanib chiqish (kommivoyajyor masalasi).

O'yinlar nazariyasi. Tabiat va jamiyatda shunday hodisalar borki, unda ishtirok etayotgan tomonlarning maqsadlari ustma-ust tushmasdan, unga erishish uchun, turli imkoniyatlarga ega bo'lishadi. Bunday hodisalar *ziddiyatlar* deb ataladi, ularni o'rganish o'yinlar nazariyasining predmeti hisoblanadi.

Hodisaning davom etishi, undagi ishtirokchilarning qabul qilgan yechimlariga bog'liq, shuning uchun, har bir ishtirokchi boshqalarning mumkin bo'lgan harakatlarini hisobga olgan holda, o'z yechimini qabul qilishi lozim bo'ladi. O'yinlar nazariyasining masalalari, xususan, iqtisodda, harbiy sohada, sotsiologiyada, texnikada, sportda va inson faoliyatining boshqa ko'rinishlarida namoyon bo'ladi. O'yinlar nazariyasi ziddiyatli holatlarda optimal harakatni aniqlashtiradi.

Markov jarayonlari. Ushbu jarayon chekli holatlardan iborat bo'lgan stoxostik harakatlarni o'rganadi. Bunda bir holatdan boshqa bir holatga o'tish ehtimolliklari berilgan bo'lib, ular Markov zanjirlari orqali ifodalanadi. Har bir o'tishdan keladigan foyda (zarar) aniqlangan bo'ladi.

Bu jarayonning muhim xususiyatlaridan biri ham o'tish ehtimolliklarini, ham foyda (zarar)ni ifodalovchi jadvallar mos holatda qabul qilingan yechimga bog'liq bo'ladi. Masalaning maqsadi: chekli yoki cheksiz qadamdan so'ng kutilgan foyda (zarar)ni maksimum (minimum) qiluvchi strategiyani aniqlashdan iborat.

Yechim qabul qilish nazariyasi. Yechim qabul qilish nazariyasining o'ziga xos masalalari bo'lib, ular quyidagilar:

1) *Ko'p maqsadli bo'lishlik.* Murakkab masalalarni yechish davomida turli ko'rinishdagi bir nechta maqsadlarga erishishga harakat qilinadi. Odatda, bu maqsadlar ziddiyatli holatda bo'lishadi.

2) *Vaqt omilining ta'siri.* Masala yechimining barcha muhim ta'siri keyinchalik namoyon bo'ladi. Masalan, yangi tovar ishlab chiqarish jarayonida bir necha yil davomida katta xarajat bilan tavakkaliga ish yuritishga to'g'ri kelishi mumkin.

3) *Tushunchalarni formallashtirishning iloji yo'qligi.* Masalan, yaxshi niyat, obro', his-hayajon, hazil, intilish, siyosiy harakatlar va hokazo.

4) *Aniqmaslik.* Ko'p hollarda qabul qilingan yechimning oqibati oldindan ma'lum bo'lmaydi.

5) *Yechim qabul qilishning dinamik ko'rinishga ega bo'lishligi.* Berilgan masalani oxiriga yetkazish uchun, yechimlar ketma-ketligini bajarish kerak bo'ladi.

6) *Jamoa bo'lib yechim qabul qilish.* Ko'p hollarda yechim qabul qilish ma'suliyati bir shaxs tomonida emas, balki jamoaga yuklanishi mumkin.

Birgalikda yechiladigan aralash masalalar. Bir xil tur modelli masalalarni bir vaqtning o'zida yechishga to'g'ri keladi. Masalan, ishlab chiqarishni rejalashtirish va boshqarishda quyidagi masalalarni yechish talab etiladi:

1) har bir mahsulotlar turidan qancha miqdorda ishlab chiqarish va ulardan tuzilgan har bir to'daning hajmi aniqlansin (ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi);

2) ishlab chiqarishning optimal rejasi aniqlangandan so'ng, ishlab chiqarish buyurtmalarini jihozlar bo'yicha taqsimlashni amalga oshirish (taqsimlash masalasi);

3) ishlab chiqarish buyurtmalarini qanday ketma-ketlikda va qachon bajarish lozim?(Kalendar rejalashtirish masalasi).

Bu masalalarni bir-biridan ajratgan holda yechish mumkin emas. Shuning uchun, avval, ishlab chiqarishning optimal yechimini topish. Keyin bu optimal yechimdan foydalangan holda, jihozlarni optimal taqsimlash. Oxirida bu taqsimlash asosida, ishlarning optimal bajarish grafigi aniqlanadi.

Ammo bunday ko'rinishda masalalar ketma-ketligini bajarish hamma vaqt ham masalaning optimal yechimini bermaydi. Shu sababli qidirilayotgan yechimga yetarlicha yaqin yechimni aniqlab beruvchi ketma-ket yaqinlashish usuli ishlatiladi.

Jarayonlar tadqiqotining asosiy bosqichlari

Tekshirilishi lozim bo'lgan muammoga (loyihaga) jarayonlar tadqiqotini qo'llash davomida quyidagi *bosqichlar* ketma-ketligi bajariladi:

1. Tekshirish maqsadini aniqlash (maqsad funksiya);
2. Muammoni tavsiflash;
3. Muammoning bajarish rejasini tuzish;
4. Modelni qurish;
5. Hisoblash usulini ishlab chiqish;
6. Dasturlarning texnik jihatlarini ishlab chiqish, dastur tuzish va ularni sozlash;
7. Ma'lumotlar to'plash;
8. Modelning adekvatligini tekshirish;
9. Olingan natijalarni amaliyotga tatbiq etish.

1. Tekshirish maqsadini aniqlash

Ko'rilayotgan loyiha tadqiqoti tugallangandan so'ng, uning natijasini aniqlab beruvchi maqsad tavsiflab berilgan bo'lishi kerak. Bu tavsif bir tomondan juda ham "tor" , ikkinchi tomondan juda ham "keng" bo'lmasligi shart, chunki bunda yechilishi murakkab bo'lgan muammolarga duch kelib qolish mumkin. Shu sababli ham, olinadigan maqsad "o'rtacha" bo'lib, u haqiqiy, real holatni, iloji boricha, to'la aks ettirgan bo'lishi kerak.

Ishlab chiqarish yoki tijorat sohasida, maqsad, olinadigan foydani maksimum qilish bo'lsa, tijorat bo'lmagan sohalarda xizmat ko'rsatish sifatini oshirish vazifasi yotadi.

Lekin qaralayotgan masalalarni tijorat va tijorat bo'lmagan sohalarga bo'lib qarash har vaqt ham to'g'ri bo'lavermaydi. Ular bir-biriga bog'langan bo'lishi mumkin.

1-masala. Xizmat ko'rsatish sohasida keladigan foyda miqdori ko'rsatilgan xizmat sifati bilan aniqlanadi, u esa tabiiy, xarajatga bog'liq bo'ladi. Yoki sog'liqni saqlash sohasini olsak, u yerda ham sifatli xizmat ko'rsatish xarajatni talab etadi.

Shu bilan birga ko'rilayotgan muammoda bir qancha bo'linmalar bo'lib, ularning maqsadlari turlicha bo'lishi mumkin. Bunday holda muammoning umumiy maqsadi ayrim bo'linmalarning manfaati hisobga olingan holda tuzilishi lozim.

2-masala. Ishlab chiqarishda mahsulot ishlab chiqarish va sotish bo'limlarining maqsadlari umumiy daromadni maksimum qilish, lekin ularni ayrim-ayrim olib qaralsa, maqsadlari farq qiladi, hatto qandaydir ma'noda qarama-qarshidir.

Sotish bo'limi xaridor talabini o'z vaqtida qondirish maqsadida ko'proq zaxira mahsulotga ega bo'lishga harakat qiladi; ishlab chiqarish bo'limi esa zaxira mahsulotni saqlash uchun, joy talab etilishi va bunga xarajat bo'lishligi sababli, ortiqcha mahsulot ishlab chiqarishga harakat qilmaydi. Bunday hollarda, umumiy maqsadga erishish ma'nosida, kelishuvga erishiladi.

Demak, tadqiq qilinishi lozim bo'lgan muammoda maqsadni aniqlash ko'p parametrlarga (omillarga) bog'liq bo'lib, bu bog'lanishlar, albatta, hisobga olingan bo'lishi kerak. Chunki, aks holda, muammo to'la hal etilmagan bo'ladi, bu esa o'z navbatida ilmiy yondashuvga ishonchni yo'qotadi.

2. Muammoni tavsiflash

Loyihaning bajarish rejasi tuzilishi bilan uning bosqichlari vaqt ma'nosida tartibga solinadi. Bu esa ishning bir maromda olib borilishini, demak, loyihaning o'z vaqtida yakunlanishini ta'minlaydi. Reja asosida ishni olib borish xodimlarning ijodiy faoliyatini ham namoyon etadi, bu esa ularga biriktirilgan vazifalarni muddatida bajarilishiga yordam berib, loyihani muvaffaqiyatli tamomlashga turtki bo'ladi.

Ish rejasidan chetga chiqish qo'shimcha qiyinchiliklarga olib keladi. Bu esa o'z navbatida, tadqiq qilinayotgan muammoning dolzarbligini yo'qotish bilan birga, buyurtmachi tomonidan qiziqishni susaytirishi, hatto undan voz kechishga ham olib kelishi mumkin.

Shuning uchun, loyihani reja asoschida, iloji boricha qisqa muddatda bajarishga harakat qilinadi.

Ayrim vaziyatlarda shunday holatlar ham uchrashi mumkinki, bunda ko'proq ish bajarish maqsadida, o'ylanmasdan tadqiqot ko'lami kengaytirib yuboriladi, bu esa loyihaning bajarish muddatini kechiktirib, asosiy ish bajarilmasdan qolib ketishiga sabab bo'ladi.

Reja tuzishda ayrim bosqichlar yanada maydaroq (batafsilroq) ko'rinishga keltirilib, topshiriq shaklida yoritiladi. Bu esa loyihaning bajarish vaqtini va imkoniyatlarini baholashda qo'l keladi.

Bundan tashqari, loyiha tadqiqotini ketma-ket bosqichlarga bo'lish moliya manbalarini, ishchilar va vaqtinchalik imkoniyatlarni baholashda eng yaxshi, ishonchli yo'l (yo'sin) hisoblanadi. Loyiha rejasini tuzish jarayonida ish bajaruvchilarga vazifaning tekis taqsimlanishiga katta e'tibor beriladi.

Bu o'z navbatida, topshiriqlarning o'z vaqtida tamomlanishini va ularni qabul qilib olish sharoitini yaratadi. Shu bilan birga loyiha reja asosida olib borilsa, uning bosqichlarini bajarish nazorat ostiga olinib, natijalari asosida yuqori, qabul qiluvchi rahbarlarga hisobot taqdim etish va keyingi bosqichlarni bajarish uchun, ruxsat olish imkonini beradi.

3. Muammoning bajarish rejasini tuzish

Tadqiqlanishi lozim bo'lgan muammoning to'g'ri tavsiflanishi jarayonlar tadqiqotining muhim bosqichlaridan biri hisoblanadi. Chunki bu tavsiflash orqali muammoning muhim jihatlari atroflicha muhokama qilinadi. Shu bilan birga ma'lumotlar yig'ish ham talab qilinadiki, bu bilan muammoning tub mohiyati aniqlanib, uning o'tgan vaqtdagi holati tekshirilib, kelajakda kutilayotgan natijalar oydinlashadi hamda masalaga taalluqli bo'lgan o'zgaruvchilar orasida bo'lgan bog'lanishlar xususiyatlari to'la o'rganib chiqiladi.

Muammoni tavsiflashning muhim jihatlaridan yana biri shundan iboratki, "uni kichikroq muammolarga (masalalarga) ajratib, ularni alohida tadqiq qilish mumkinmi?" degan savolga javob berishdan iborat.

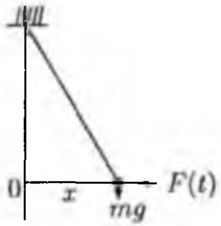
Agar tadqiqlanishi lozim bo'lgan muammo murakkab bo'lib, uni kichikroq masalalarga bo'lib qaralsa, albatta, uni hal qilish osonlashib, umuman submukammal yechimni hosil qilamiz. Bunda, hosil qilingan kichik masalalar o'zaro bog'liq bo'lmasa (kesishmasa), biz mukammal yechimga yaqin bo'lgan yechimni olishimiz mumkin bo'ladi. Shu bilan birga kichik masalalarni bir paytda (parallel) yechib borish imkoni tug'iladi.

Hozirgi zamon iqtisodiyotida texnik ishlab chiqarish, savdo-sotiq kon'yunkturasi va boshqa omillarning o'zaro bog'liqligi murakkab muammolarning vujudga kelishiga sabab bo'ldi. Bundan tashqari, korxona maqsadlari turlicha, hatto qarama-qarshi bo'lgan bo'limlardan iborat bo'lishligi yechim qabul qilishni yanada murakkablashtiradi. Korxonaga bog'liq bo'lmagan tashqi omillar, umuman, aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin. Ammo shu narsa ayonki, boshqaruv masalalarida qo'llanilgan operatsion tadqiqotning afzalligi, uning qo'llanishi orqali kelgan sof foyda orqali o'lchanadi.

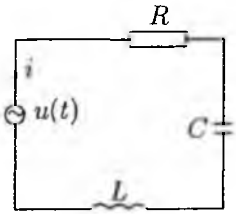
4. Modelni qurish

Modellar uch turga ajratiladi: *tasviriy, o'xshashlik va simvolli.* Tasviriy modelda ko'rilayotgan obyekt kichraytirilib, yoki kattalashtirilib aks ettiriladi. Masalan: globus, xarita yer sharining, qo'g'irchoq odamning modeli bo'lib, bularda obyekt kichiklashtirib tasvirlangan bo'lsa, atomning Bor modelida, aksincha kattalashtirib ko'rsatiladi.

O'xshashlik modelida, biror-bir xususiyat, xossa boshqa bir fizik jarayon xossasini aks ettirish uchun, foydalaniladi. Masalan, xaritadagi gorizontal chiziqlar, haqiqatda, dengiz sathiga nisbatan balandlikni bildiradi. Eng ko'p tarqalgan o'xshashlik modelidan foydalanish, bu elektro-magnit tebranishdir. Buning yordamida, mexanik, transport, gidravlik va iqtisodiy jarayonlarni aks ettirish mumkin.



1.1-rasm



1.2-rasm

Ipga osilgan matematik mayatnikning tebranish qonunini (1.1-rasm), unga o'xshash tebranishga ega bo'lgan tebranuvchi konturdan (1.2-rasm) foydalanib o'rganish mumkin va aksincha. Tebranish konturi induktiv g'altak (L), kondensator (C), qarshilik (R) va manbalardan tuzilgan bo'ladi.

Biror-bir jarayonning boshqariladigan va boshqarilmaydigan o'zgaruvchilarini belgilab olish yordamida, uning simvolli modeli quriladi. Bunda o'zgaruvchilarning o'zaro bog'lanishi tenglamalar, tengsizliklar va funksiyalar orqali berilib, jarayon formallashtiriladi. Bu esa uni tahlil qilish va optimal yechimlarni aniqlashda matematik usullardan foydalanish uchun. keng imkoniyatlar ochib beradi.

Simvolli modellardan foydalanish boshqalarga nisbatan soddaroq bo'lishligi bilan birga, u aniqroq va to'laroq ma'lumot ham beradi, bu esa jarayonni tahlil qilishda muhim rol o'ynaydi.

Bulardan tashqari simvolli modelda stoxostik (ya'ni tasodifiy miqdorlar bo'lgan) jarayonlarni ham tavsiflash imkoniyati bor. Bunda, ko'p hollarda tasodifiy miqdorlarning o'rtacha qiymati hisoblanib olinadi, shundan so'ng hosil bo'lgan determinik model bilan ish olib boriladi.

Simvolli modelning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$f(x, y) \rightarrow extr,$$

$$g_i(x, y) \leq b_i, \ i = 1, 2, ..., m,$$

bu yerda $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – boshqariladigan vektorni, $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$ – boshqarilmaydigan o'zgaruvchilarni aniqlaydi. $f(x, y)$ – x boshqaruvga mos kelgan effektni (foyda, zararni) bildiradi va u *maqsad funksiya* deb ataladi, g_i – i – xomashyoning iste'mol qilish funksiyasi; b_i – i – xomashyoning hajmi (miqdori, zaxirasi) ni bildiradi.

5. Hisoblash usulini ishlab chiqish

Ko'rilayotgan muammoning modelini qurish bilan bir qatorda, uni yechish uchun, sonli usullarni ham tanlab olish kerak bo'ladi. Bunda quyidagi savollarga alohida e'tibor berish zarur:

1) Imitatsion modeldan foydalanish kerakmi yoki biron-bir optimallashtirish usuli yetarlimi?

2) Modelda tasodifiy miqdorlar ishtirok etadimi yoki determinik yondoshuv yetarlimi?

3) Ayrim munosabatlarning nochiziqlik bo'lishligini hisobga olish shartmi yoki chiziqli munosabatlar yetarlimi?

4) Mavjud yechish usullari yetarlimi yoki yangi usul yaratish kerakmi?

Umuman, matematik model yordamida muammoni hal etishda ishlatiladigan sonli usullar amaliyotda foydalanish mumkin bo'ladigan natijaga olib kelishi nuqtayi nazardan tanlab olingan bo'lishi kerak. Bundan tashqari, ayrim test sinovlari orqali tanlab olingan sonli usulni tekshirib ko'rish ham bu bosqichga taalluqli bo'ladi.

Bunda, yana shunga e'tibor berish lozimki, biron-bir hisoblash usulini tanlashdan oldin qo'yilgan muammoning to'la tavsifi berilgan bo'lishi kerak. Shunda ayrim soddalashtirishlarni amalga oshirish mumkin bo'ladi va bunday soddalashtirishlarni bir necha yo'nalishda olib borish imkoniyati tug'iladi, bu esa modelning adekvatligini ta'minlashda muhim bo'lishi mumkin.

Hisoblash usulida quyidagi ikki holat bo'lishi mumkin:

1) soddalashtirilgan masalada optimal yechimni topish;

2) to'la tavsiflangan masalaning o'zida taqribiy optimal yechimni topish.

Amaliyot nuqtayi nazardan qaralsa ikkinchi holat birinchisiga qaraganda afzalroqdir. Chunki soddalashtirilgan modelda muhim o'zgaruvchilar tushirib qoldirilgan bo'lishi mumkin.

Bu holot topilgan mukammal yechim amaliy natijani bermasligiga olib keladi. Bu esa o'z navbatida, buyurtmachilarda modelga nisbatan ishonchsizlik keltirib chiqaradi.

Hozirgi zamon hisoblash texnikalarining rivojlanishi ikkinchi holatni qo'llash, ya'ni ko'p o'zgaruvchilar va ular orasidagi murakkab bog'lanishlarni hisobga olish imkonini beradi. Bu holda optimal yechim topilmasa ham, muhim o'zgaruvchilar (omillar) hisobga olingan bo'ladi.

Demak, topilgan taqribiy optimal yechim amaliy nuqtayi nazardan muhimdir.

6. Dasturning texnik topshiriqlarini ishlab chiqish

Oldingi bosqichda yaratilgan sonli hisoblash usuli uchun dastur tuzish, jarayonlar tadqiqotining ajralmas qismidir. Bunda, dastur tuzishni reja bo‘yicha olib borish texnik topshiriq asosida amalga oshiriladi. Texnik topshiriqni aniq va puxta tuzish orqali dasturni o‘z vaqtida sifatli tugallash va xarajatni nazorat qilish mumkin bo‘ladi.

Bundan tashqari, tuzilgan dasturni sifatli rasmiylashtirish buyurtmachi talabini to‘la qondirish imkonini beradi. Bunda buyurtmachi aniq ishonarli va tushunarli bo‘lgan hujjatlar bilan ta’minlangan bo‘lishi kerak. Eng asosiysi, buyurtmachining talablari birinchi o‘rinda e’tiborga olingan bo‘lib, dastur mohiyati shunga qaratilgan holda tuzilgan bo‘lishi zarur.

Ko‘p hollarda, loyiha uchun, alohida dasturlar tuzishning hojati bo‘lmaydi. kerakli dasturlarni hisoblash markazlari yoki hisoblash texnikasi bilan ta’minlangan maxsus bo‘limlardan topish imkoni bo‘ladi. Agar yangi dastur tuzish zaruriyati tug‘ilsa, bu boshqa bo‘lim zimmasiga yuklatiladi, faqat uni bajarilish muddati va sifatini nazorat qilish kerak bo‘ladi. Bularning barchasi jarayonlar tadqiqoti bo‘yicha mas’ulning rejasi asosida olib borish kerakligini bildiradi.

7. Ma’lumotlarni to‘plash

Bu bosqichda tadqiqot natijalarini amaliyotga tatbiq etish va modelni tekshirish uchun, ma’lumotlarni to‘plash va tahlil qilish amalga oshiriladi. Ta’kidlaymiz, yuqoridagi bosqichlarda ma’lumotlarni to‘plash muammoni tavsiflash va model qurish maqsadida olib borilgan edi. Ma’lumotlarni to‘plash bosqichida keraksiz aniqliklarga e’tibor berish natijasida fursatni boy berib qo‘yish ham mumkin. Bunda, tuzilgan model qaysi o‘zgaruvchilarga nisbatan sezgirligini aniqlab olish muhimdir.

Shundan so‘ng zarurat bo‘lsa, muhim ma’lumotlar aniqligini oshirish mumkin bo‘ladi. Bu esa ma’lumotlar to‘plash vaqtini ham, sarf-xarajatni ham kamaytirishga olib keladi.

8. Modelning adekvatligini tekshirish

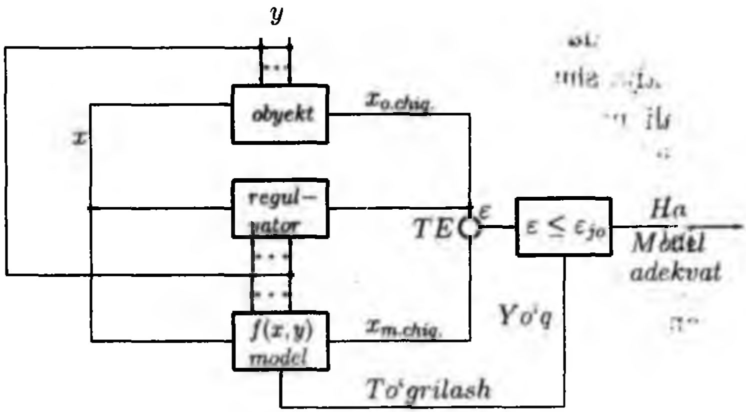
Qurilgan ixtiyoriy model real jarayonni taxminiy aks ettirgani sababli, uni yanada takomillashtirish, yaxshilash vazifasi turadi. Buni amalga oshirish uchun, quyidagi ikkita masalani amalga oshirish zarur:

1) modelni tekshirish usulini aniqlash;
2) bu usulni qo‘llash.

Tajriba usuli yordamida modelning qaram-qarshiliksizligi, turg‘unligi, sezgirligi, amaliyligi va ishlash qobiliyati tekshiriladi. Bularni ro‘yobga chiqarish uchun, oldingi bosqichda to‘plangan ma’lumotlar kerak bo‘ladi. Agar muhim parametrlar (omillar) ekstremal qiymatlariga nisbatan o‘zgartirib ko‘rilganda model natijalari mantiqiy ziddiyatlarga olib kelmasa, ko‘rilgan model qarama-qarshiliksiz bo‘ladi.

Modelning turg‘unligini va sezgirligini tekshirib ko‘rish ham muhim talablardan hisoblanadi. Bunda turg‘unlik va sezgirlik modelda ishtirok etgan o‘zgaruvchilarga nisbatan bo‘lib, ularning qiymatlarini o‘zgartirish orqali model natijalari solishtirib ko‘riladi. Bu bilan modelning har bir o‘zgaruvchiga nisbatan turg‘unlik va sezgirlik darajasi aniqlanadi. Buni yaqqolroq tasavvur qilish uchun, o‘zgaruvchilar va natija orasidagi bog‘lanishni grafik ko‘rinishda tasvirlash ham mumkin.

Modelning amaliyligini aniqlash uchun, haqiqiy jarayon bilan model natijalari orasidagi ayirmani hisoblash talab etiladi. Agar bu ayirma yo‘l qo‘yilgan farqdan kichik bo‘lsa, modeldan foydalanish mumkin, aks holda amaliylik yo‘qolgan bo‘ladi. Bu holda model qaytadan tekshirilib, undagi mavjud kamchiliklar bartaraf etiladi. Buni quyidagi mantiqiy chizma orqali ifodalash mumkin (1.3-rasm).



1.9- n

Natijani olish muddati va uning ... qarab, modelning ishchanlik qobiliyatiga baho berish mumkin. Bundan tashqari, modeldan foydalanish vaqtlari va natijalari yo'l qo'yilgan chegaradan chiqib ketmasligi kerak.

Ayniqsa, loyiha natijalaridan bir marta foydalanish hollarida, modelning xossalarini nazorat ma'lumotlari bilan tekshirish juda ham muhimdir. Modelni tekshirishda zarur jihatlardan biri shundan iboratki, hisoblash tadbirlari tugallanib, natija olingandan so'ng, uni tanqidiy nazoratdan o'tkazish lozim bo'ladi.

Demak, model yordamida natija olingandan so'ng ham, ayrim narsalarni aniqlashtirishga va tekshirishga to'g'ri keladi. Bu ishlar amalga oshirilgandan so'ng, rahbariyatga barcha alternativ variantlarning baholarini hamda xulosa va tavsiyalarni taqdim etish mumkin bo'ladi. Bu esa qo'yilgan muammoning tub mohiyatiga yetib borish, model qurish davomida paydo bo'lgan shubhali holatlarni tarqatish uchun, o'ziga xos yakunlovchi bosqichdir.

9. Olingan natijalarni amaliyotga tatbiq etish

Model yordamida olingan yechimni amaliyotga tatbiq etish bosqichi eng muhim bo'lib, bunda butun olib borilgan ishlarga yakun yasaladi. Lekin shuni unutmaslik kerakki, muammoni hal qilish davomida bu bosqich nazarda tutilgan bo‘ladi. Chunki oqibat-natijani tatbiq etish va olingan natijalarning afzalliklari orqali namoyon bo‘ladi. Muammoni yechishga jarayonlar tadqiqotini qo‘llash muvaffaqiyati, ko‘p jihatdan, olingan natijalar va yuqori boshqaruv rahbariyati orasidagi aloqada qanchalik yaqinlik ta’minlanganligi bilan belgilanadi. Bu jarayonda kelib chiqadigan to‘siq, asosan, tushunmovchilik va o‘zgarishga qarshilik bilan bog‘liqdir. Shunga o‘xshash to‘siqlarni yengib chiqish uchun, buyurtmachilarni fanga ishontira bilish keraklicha vaqt va qat’iyatlik talab qiladi. Yana shuni e’tiborga olish lozimki, agar tadqiqotchilar va rahbariyat o‘rtasida hamjihatlik, yaxshi munosabat bo‘lmasa, umuman ijobiy natijalarga erishib bo‘lmaydi.

Bulardan tashqari tadqiqotchi olingan natijalarni amaliyotga tatbiq qilishdan avval, tekshirishning puxta rejasiga ega bo‘lish, haqiqiy natija bilan tajriba natijalarini taqqoslab beradigan usulga, ro‘y berishi mumkin bo‘lgan qiyinchiliklarni osonlashtiruvchi choralarga ega bo‘lishi va keyinchalik ham, agar zaruriyat tug‘ilsa, amaliy tekshiruvlar o‘tkazishga rahbariyat ruxsatini olish kerak bo‘ladi.

2-§. Chiziqli dasturlash

Chiziqli dasturlash masalalarini yechish uchun, samarali hisoblangan simpleks usul qo‘llaniladi.

Simpleks usul. Agar $a_{i0} \geq 0$, $i = 1, 2, ..., m$ bo‘lsa, jadval *to‘g‘ri joiz*, agar $a_{0j} \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$ bo‘lsa, jadval *ikkilanma joiz* deyiladi. Jadval bir paytda ham to‘g‘ri joiz, ham ikkilanma joiz bo‘lsa, mos reja optimal bo‘ladi, ya’ni maqsad funksiyaga maksimum qiymat beruvchi bo‘ladi.

(2.2), (2.4) sistema $x_0, x_1, ..., x_{n+m}$ noma’lumlarga nisbatan *diagonal* ko‘rinishda deb ataladi.

Agar $a_{i0} \geq 0$, $i = 1, 2, ..., m$ bo'lsa: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, $x_{n+1} = a_{10}, ..., x_{n+m} = a_{m0}$ (2.1)–(2.3) masalaning boshlang'ich tayanch rejasini tashkil qiladi. Bunda $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ – *bazis*, $x_1, x_2, ..., x_n$ – *nobazis* o'zgaruvchilar bo'ladi.

Chiziqli dasturlashning quyidagi kanonik shakldagi masalasi berilgan bo'lsin:

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-x_j) \to \max, \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = a_{i0}, \;\; i = 1, 2, ..., m, \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0, \;\; j = 1, 2, ..., n + m \tag{2.3}$$

(2.2) tenglamalar sistemasidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x_{n+i} = a_{i0} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \;\; i = 1, 2, ..., m \tag{2.4}$$

(2.1)–(2.3) masalani jadval ko'rinishda ifodalash qulay, bunda jadval elementlari tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlari va ozod hadlaridan iborat bo'lib, jadvalning ko'rinishi 2.1- jadvalda keltirilgan.

Endi chiziqli dasturlash masalasini yechishda asosiy hisoblangan simpleks usulning algoritmini ko'rib chiqamiz.

1. Boshlang'ich jadval to'g'ri joiz, ya'ni $a_{i0} \geq 0$, $i = 1, 2, ..., m$ bo'lsin.

2. Agar $a_{0j} \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$ bo'lsa hisob to'xtatiladi, topilgan reja optimal. Aks holda:

$$a_{0s} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{0j}$$

shartni qanoatlantiruvchi a_{0s} element topiladi. Bunda s ustun hal qiluvchi ustun bo'ladi;

2.1-jadval

	1	$-x_1$	$-x_2$	$\dots$	$-x_j$	$\dots$	$-x_n$
$x_0 =$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	$\dots$	a_{0j}	$\dots$	a_{0n}
$x_1 =$	0	-1	0	$\dots$	0	$\dots$	0
$x_2 =$	0	0	-1	$\dots$	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$x_n =$	0	0	0	$\dots$	0	$\dots$	-1
$x_{n+1} =$	a_{10}	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$x_{n+m} =$	a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mn}

3. Quyidagi

$$\frac{a_{r0}}{a_{rs}} = \min_{a_{is}>0} \frac{a_{i0}}{a_{is}}$$

shartdan r – satr aniqlanadi. Bu satr *hal qiluvchi satr*, a_{rs} element esa *hal qiluvchi element* deyiladi.

4. Quyidagi

$$a'_{kj} = a_{kj} - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} a_{ks}, \;\; k \neq r, \;\; j \neq s;$$

$$a'_{ks} = -\frac{a_{ks}}{a_{rs}}; \;\; a'_{rj} = 0, \;\; j \neq s;, \;\; 0 \leq k \leq n+m, \;\; 0 \leq j \leq n$$

formulalar yordamida keyingi jadvalga oʻtiladi. Nobazis oʻzgaruvchi boʻlgan x_s x_r ga almashtiriladi, keyin 2-qadamga oʻtiladi.

Bu jarayon 1-qadamda 0-satr elementlari nomanfiy sonlardan iborat boʻlguncha davom ettiriladi. Shundan soʻng jadvalning chap tarafidagi bazis oʻzgaruvchilarning qiymatlarini a_{i0} ga teng qilib olish bilan optimal reja topiladi. a_{00} o'rnida maqsad funksiyaning mos qiymati hosil bo'ladi.

1-misol. Quyidagi chiziqli dasturlash masalasi berilgan bo'lsin:

$$z = -x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 - 3x_5 \to \max,$$

$$x_1 - x_2 - x_4 - 2x_5 = -1,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., 5.$$

Murakkab bo'lmagan almashtirishlardan so'ng ushbu masala quyidagi ko'rinishga keladi:

$$x_0 = -14 + 10x_3 + 18x_4 \to \max,$$

$$x_1 = 2 - x_3 - x_4 + x_5,$$

$$x_2 = 3 - x_3 - 2x_4 - x_5,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., 5.$$

Oxirgi masalani 2.2-jadval ko'rinishda yozib olamiz. Ushbu jadval ikkilamchi joiz emas, shu sababli mos reja optimal bo'lmaydi. 0-satr elementlaridan 1-ustundan (z=-14) tashqari manfiy bo'lganining eng kichigi tanlab olinadi, u -18 ga teng. Shu element joylashgan $-x_4$ ustun hal qiluvchi ustun hisoblanadi. $\min\left(\frac{2}{1}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ bo'lganligi sababli x_2 – satr hal qiluvchi satr bo'ladi. Shunday qilib 2 soni hal qiluvchi element bo'ladi. Simpleks usulning 4-qadamidagi formulalarga asosan, keyingi, 2.3-jadvalga o'tiladi.

2.3-jadval yana ikkilamchi joiz bo'lmaganligi sababli, topilgan reja optimal emas. Bu jadvalda x_3 – ustun hal qiluvchi ustun bo'lib, $\min\left(\frac{1}{2} : \frac{1}{2}, \frac{3}{2} : \frac{1}{2}\right) = 1$ bo'lganligi sababli x_1 – satr hal qiluvchi satr, bu satrdagi $\frac{1}{2}$ soni hal qiluvchi element sifatida olinadi. Simpleks jadvalning 4-qadamiga asosan, keyingi 4-jadvalga o'tiladi. Bu jadval ham to'g'ri, ham ikkilamchi joiz bo'lganligi sababli, mos reja: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ optimal bo'lib, maqsad funksiya(z) maksimal qiymat 14 ga erishadi.

2.2-jadval

	1	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
$x_0 =$	-14	-10	-18	0
$x_1 =$	2	1	1	-1
$x_2 =$	3	1	2^*	1

2.3-jadval

	1	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
$x_0 =$	13	-1	0	9
$x_1 =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}^*$	0	$-\frac{3}{2}$
$x_4 =$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$

2.4-jadval

	1	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
$x_0 =$	14	0	0	6
$x_3 =$	1	-1	0	-3
$x_4 =$	1	0	-1	2

Simpleks usulning chekli ekanligini ko'rsatamiz. Simpleks usul, bu ketma-ket tayanch rejalarni ko'rib chiqish bo'lib, maqsad funksiyaning qiymatini "yaxshilashdan" iboratdir. Ma'lumki, bunda maqsad funksiyaning (x_0) qator elementlari tayanch rejalar orqali yagona usulda aniqlanadi. Bunda, faqat bir jadvaldan ikkinchisiga o'tilganda maqsad funksiyaning qiymati o'zgarmasdan qolishi mumkin. Tushunarliki, bunday hol ro'y beradi, agar tayanch reja xos bo'lsa, bu bilan $\min \frac{a_{i0}}{a_{is}} = 0$ bo'ladi. Ya'ni, masalan, ma'lum qadamdan so'ng yana avvalgi tayanch rejaga qayta kelish mumkin. Shuning uchun, simpleks usulning chekliligini ko'rsatish avvalgi tayanch rejaga qayta kelmaslik sharti bilan ekvivalentdir. Chunki tayanch rejalar soni chekli bo'lib, ko'pi bilan $\binom{n}{m}$ taga teng bo'ladi.

1-ta'rif. $\alpha_i, \alpha_j \in R^n$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ bo'lsin. α_i vektor α_j vektordan leksikografik ma'noda kichik deyiladi (belgilanadi $\alpha_i \prec \alpha_j$), agar $c = \alpha_i - \alpha_j$ vektorning noldan farqli birinchi elementi manfiy sondan iborat bo'lsa.

Xuddi shunday ma'noda, leksikografik katta (belgilanadi $\alpha_i \succ \alpha_j$), katta emas (belgilanadi $\alpha_i \preceq \alpha_j$), kichik emas (belgilanadi $\alpha_i \succeq \alpha_j$) tushunchalari kiritiladi.

Masalan, $\alpha_i = (1,3,-2,2)$ vektor $\alpha_j = (1,3,1,0)$ vektordan leksikografik ma'noda kichik, chunki ayirima $c = \alpha_i - \alpha_j = (0,0,-3,2)$ vektorning noldan farqli birinchi elementi (-3) manfiy sondan iborat.

2-ta'rif. Noldan farqli $\alpha_i \in R^n$ vektor leksikografik ma'noda musbat (manfiy) deyiladi (belgilanadi $\alpha_i \succ 0(\alpha_i \prec 0)$), agar α_j vektorning noldan farqli birinchi elementi musbat (manfiy) sondan iborat bo'lsa.

Boshlang'ich jadvalda x_0- satrdan boshqa har bir satr elementlaridan tuzilgan vektorlarning barchasi leksikografik ma'noda musbat bo'lsin. Mabodo, bu shart bajarilmasa ustunlarning o'rnilarini va o'zgaruvchilarni almashtirish yoki sun'iy o'zgaruvchilar kiritish yordamida bunday holatni hosil qilish mumkin. Bunda hal qiluvchi elementni tanlash quyidagicha amalga oshiriladi. x_0- satrda ixtiyoriy biror $c_s < 0$ tanlab olinadi va bu ustun hal qiluvchi ustun sifatida ishtirok qiladi. Ushbu x_s- ustundagi barcha $a_{is} > 0$ elementlar uchun, $\left(\frac{a_{i0}}{a_{is}}, \frac{a_{i1}}{a_{is}}, \ldots, \frac{a_{in}}{a_{is}}\right)$ vektorlar tuziladi va bu vektorlar ichidan leksikografik ma'noda minimumi tanlanadi. Keyinchalik ushbu satr hal qiluvchi satr sifatida olinadi.

Shu qoida bilan simpleks usulni qo'llash chekli qadamdan so'ng masala yechilishligini tasdiqlash uchun, quyidagi ikki xossani ko'rsatish yetarli: 1) har bir jadvalda x_0- satrdan boshqa satr $-$ vektorlari musbat aniqlangan; 2) x_0- satr har bir iteratsiyadan so'ng leksikografik ma'noda o'sadi.

Birinchi xossani isbotlash uchun, har bir $a_{is} > 0$ shartni qanoatlantiruvchi i satr vektordan $a_{is}\left(\frac{a_{r0}}{a_{rs}}, \frac{a_{r1}}{a_{rs}}, ..., \frac{a_{rn}}{a_{rs}}\right)$ vektorni ayiramiz. Ammo $\left(\frac{a_{r0}}{a_{rs}}, \frac{a_{r1}}{a_{rs}}, ..., \frac{a_{rn}}{a_{rs}}\right)$ vektordan $\left(\frac{a_{i0}}{a_{is}}, \frac{a_{i1}}{a_{is}}, ..., \frac{a_{in}}{a_{is}}\right)$ vektor leksikografik ma'noda kichik bo'lganligi uchun, hosil bo'lgan ayirima vektor leksikografik ma'noda musbat x_i – satrni tashkil qiladi.

$a_{is} < 0$ satrlar uchun, bu ayirima ikkita leksikografik ma'noda musbat vektorlarning yig'indisidan iborat. Shu sababli biz yana leksikografik ma'noda musbat vektorlarni hosil qilamiz. Shu bilan 1-xossaning to'g'riligi ko'rsatildi.

Endi ikkinchi xossaning to'g'riligini ko'rsatamiz. Iteratsiya davomida x_0 – satrga x_r – satrni $\left|\frac{a_{0s}}{a_{rs}}\right|$ ga ko'paytirish va qo'shish orqali u o'zgartiriladi. x_r – satr vektor leksikografik ma'noda musbat bo'lganligi sababli x_0 – satr leksikografik ma'noda o'sadi. Bu qoida asosida olib borilgan simpleks usul optimal yechimga olib keladi, chunki hech bir tayanch reja ikki marta ishtirok etmaydi.

2-misol. Quyidagi 2.5-jadval ko'rinishdagi misolni qaraylik. Agar hal qiluvchi satr sifatida 4-ustun olinsa, u holda hal qiluvchi element shu ustunning elementi bo'lgan 2 soni (oxirgi satrdagi) bo'ladi, chunki bu satr elementlarini 2 soniga bo'lganda hosil bo'lgan satr vektor boshqa satr elementlarini 4-ustunning mos musbat soniga bo'lgandagi satr vektorlardan leksikografik ma'noda kichik bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash, agar hal qiluvchi satr sifatida 5-ustun olinsa, u holda hal qiluvchi element shu ustunning elementi bo'lgan 3 soni bo'ladi.

Xuddi shunday, agar hal qiluvchi satr sifatida 6-ustun olinsa, u holda hal qiluvchi element shu ustunning elementi bo'lgan 4 soni bo'ladi.

2.5-jadval

0 — *ustun*

0	1	6	0	−5	−3	−5	◄ 0 – *satr*
0	0	1	0	1	1	3	
0	0	1	0	−1	3*	4*	
3	0	0	1	3	0	2	
0	0	2	0	2*	1	−1	

Bu hal qiluvchi elementlarning barchasi 2.5-jadvalda yulduzcha bilan belgilangan.

Ikkilamchi masala. Har bir chiziqli dasturlash masalasiga o‘zaro bir qiymatli moslik orqali boshqa bir chiziqli dasturlash masalasini mos qo‘yish mumkin. Bu masalalar bir-birlari bilan muhim bog‘lanishga ega bo‘lib, biri ikkinchisi haqida to‘la ma’lumot beradi. Shu sababli shartli ravishda birinchi masala *to‘g‘ri masala*, ikkinchisi *ikkilamchi masala* deb ataladi. Quyida ikkala masalalarning bog‘liqliklari haqida ma’lumot berilgan.

Standart ko‘rinishdagi masalalar:

to‘g‘ri masala	ikkilamchi masala
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \; (i = 1, 2, ..., m)$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j \; (j = 1, 2, ..., n)$
$x_j \geq 0 \; (j = 1, 2, ..., n)$	$y_i \geq 0 \; (i = 1, 2, ..., m)$
shartlar ostida	shartlar ostida
$z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$	$w = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i$

z funksiyaning minimumi w funksiyaning maksimumi topilsin.

Kanonik ko'rinishdagi masalalar:

to'gri masala

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \, (i = 1, 2, ..., m)$$

$$x_j \geq 0 \, (j = 1, 2, ..., n)$$

shartlar ostida

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

z funksiyaning maksimumi

ikkilamchi masala

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j \, (j = 1, 2, ..., n)$$

shartlar ostida

$$w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

w funksiyaning minimumi topilsin.

To'g'ri va ikkilamchi masalalar orasidagi bog'lanish quyidagi ikkilamchilikning birinchi teoremasi va undan kelib chiqadigan natijalar orqali ifodalanadi.

1-teorema. Ikkilamchi mos masalalarning birining yechimga ega bo'lishi ikkinchisining ham yechimga ega bo'lishligini ta'minlaydi. Bunda maqsad funksiyalarning qiymatlari mos optimal yechimlarda bir-biriga teng bo'ladi.

1-natija. Ikkilamchi mos masalalarning birini yechimga ega bo'lishi uchun, ularning har biri kamida bitta rejaga ega bo'lishligi zarur va yetarlidir.

2-natija. Ikkilamchi mos masalalarning biri rejaga ega, ikkinchisining rejalar to'plami bo'sh bo'lishligi uchun, birinchi masalaning maqsad funksiyasi rejalar to'plamida chegaralanmagan bo'lishi zarur va yetarlidir.

3-natija. Ikkilamchi mos masalalarning $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ va $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m)$ rejalari optimal bo'lishligi uchun, $\sum_{j=1}^{n} c_j\bar{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i\bar{y}_i$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Ikkilanma simpleks usul algoritm orqali amalga oshiriladi.

1. Boshlang‘ich 2.1-jadvalda $a_{0j} \geq 0, \ j = 1, 2, ..., n$. ya’ni jadval ikkilanma joiz bo‘lsin;

2. Agar $a_{i0} \geq 0, \ i \geq 1$ bo‘lsa, u holda masala yechilgan bo‘ladi. Aks holda $a_{i0} < 0$ shartni qanoatlantiruvchi biror a_{r0} tanlab olinadi, r – satr *hal qiluvchi satr* deyiladi;

3. Quyidagi

$$a'_{kj} = a_{kj} - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} a_{ks}, \ k \neq r, \ j \neq s;$$

$$a'_{ks} = -\frac{a_{ks}}{a_{rs}}; \ a'_{rj} = 0, \ j \neq s;, \ 0 \leq k \leq n+m, \ 0 \leq j \leq n$$

almashtirishlar yordamida keyingi jadvalga o‘tiladi.

Ta’kidlaymiz, hal qiluvchi element har doim manfiydir.

2 va 3 qadamlar a_{i0} larning barchasi manfiymas bo‘lgunga qadar takrorlanadi.

3-§. Butun sonli chiziqli dasturlash

2-paragrafda biz chiziqli dasturlash masalasi haqida ma’lumotga ega bo‘ldik. Agar o‘zgaruvchilarga yana qo‘shimcha shart: barcha o‘zgaruvchilardan yoki ularning ayrimlaridan butunlilik talab qilinsa, mos ravishda to‘la butun sonli yoki qisman butun sonli chiziqli dasturlash masalasiga kelinadi. Shunday qilib BSCHD masalasi quyidagicha bo‘ladi. Ushbu

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq a_{i0}, \ i = 1, 2, ..., m, \\ &x_j \geq 0, \ j = 1, 2, ..., n, \\ &x_j - \text{butun}, \ j = 1, 2, ..., n_1 \leq n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

shartlar ostida

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-x_j) \tag{3.2}$$

funksiyaning ekstremumi topilsin. Biz bundan keyin, aniqlik uchun, (3.2)-funksiyani maksimumga tekshiramiz.

(3.1)-shartlarni qanoatlantiruvchi $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vektorlar *joiz rejalar* deb ataladi. Maqsad funksiyaga maksimum qiymat beruvchi joiz reja *optimal reja* deyiladi.

Yuqorida, 2-§ ga o'xshab, bu yerda ham (3.1)–(3.2) masalani kanonik va diagonal shaklga keltirish mumkin:

$$
\begin{aligned}
&x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-x_j) \to \max,\\
&x_j = -(-x_j),\ j = 1, 2, ..., n,\\
&x_{n+i} = a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-)x_j,\ i = 1, 2, ..., m,\\
&x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n + m,\\
&x_j - \text{butun},\ j = 1, 2, ..., n_1 \leq n + m.
\end{aligned}
$$

Ta'kidlab o'tamizki, bunda masalaning to'la yoki qisman butunlilik sharti o'garmaydi. Endi BSCHDga doir quyidagi masalalarni ko'raylik.

1-masala. Daryo kemachilik boshqarmasi shuni aniqladiki, n ta marshrut bo'yicha mavsum davomida o'rtacha sondagi yo'lovchilar yurar ekan. Transport vositasini ishlatilish samaradorligi har bir marshrut bo'yicha ishlatilish samaradorliklar yig'indisidan iborat bo'lib, ularning har biri o'z navbatida mos marshrutdan keladigan foyda bilan marshrutga ketgan xarajat ayirmasiga teng. Foyda sotilgan biletlar soni bilan, xizmatchilarga ketgan haq va yoqilg'i uchun, ketgan sarflar orqali aniqlanadi. Qaysi marshrutga qanday turdagi kemadan nechtadan ajratilsa, yo'lovchilar to'la tashiladi va keladigan foyda maksimal bo'ladi?

Ma'lumki, o'zgaruvchi faqat ikkita 0 va 1 qiymatlarni qabul qilsa, bunday o'zgaruvchi *bul o'zgaruvchisi* deyiladi. Shunga asosan, bunday o'zgaruvchisi bo'lgan masalalar *bul masalalari* deb yuritiladi. Quyida ko'riladigan 2-masala shunday masalalardan biridir.

Faraz qilaylik, j – marshrut bo'yicha mavsum davomida b_j^1 ta yo'lovchi qatnasin. Bu marshrutda $1, 2, ..., m$ turdagi kemalardan foydalanish mumkin va har bir i – turdagi kema uchun, quyidagi ko'rsatkichlar ma'lum:

1) a_{i1} – yuk ko'tarishlik (o'rinlar soni);

2) a_{i2} – xizmat ko'rsatuvchilar soni;

3) a_{i3} – mavsum davomida sarflanadigan yoqilg'i miqdori;

4) c_{ij} – j – marshrut bo'yicha i turdagi bitta kema ishlatilganda keladigan foyda;

5) mavsum davomida ishlatiladigan yoqilg'i miqdori b_3 dan, xizmat ko'rsatuvchilar soni esa b_2 dan oshmasin.

x_{ij}– j– marshrutdagi i turdagi kemalar sonini bildirsin. U holda, shartga ko'ra chegaralar quyidagicha bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_{ij} \le b_j^1, \; j = 1, 2, ..., n,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_{ij} \le b_2, ,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{i3}x_{ij} \le b_3,$$
$$x_{ij} \ge 0 - \text{butun}, \; i = 1, 2, ..., m, \; j = 1, 2. ..., n.$$

Masalaning qo'yilishiga asosan, berilgan sohada shunday $x = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{mn})$ vektorni topish kerakki, u

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

funksiyaga maksimal qiymat bersin.

2-masala. Faraz qilaylik, n ta turli turdagi samolyotlar bo'lib, ularni n ta yo'nalishga taqsimlash lozim bo'lsin.

Agar i – turdagi samolyot j – yo'nalishga qo'yilsa, bundan keladigan foyda c_{ij} ga teng. Samolyotlarni yo'nalishlarga shunday taqsimlash kerakki, natijaviy foyda maksimal bo'lsin.

Bu masalani yechish uchun, quyidagi o'zgaruvchini kiritamiz:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } i - \text{samolyot } \ j - \text{yo'nalishga xizmat qilsa,} \\ 0, & \text{aks holda.} \end{cases}$$

U holda quyidagi BSCHD masalasiga kelamiz

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \text{ (har bir yo'nalishga bitta samolyot tayinlanadi);}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ (har bir samolyot faqat bitta yo'nalishga tayinlanadi),}$$
$$x_j - \text{butun, } j = 1, 2, ..., n_1$$

shartlar ostida

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

funksiyaning maksimumini toping.

Kesuvchi tekisliklar usuli

Bu bo'limda biz 1-guruhga tegishli bo'lgan siklik, to'la butun sonli va to'g'ri algoritmlarni ko'rib chiqamiz. Bularning birinchi ikkitasi Gomori, uchinchisi Yung usullari deb ham ataladi. Bu algoritmlar asosida simpleks usul yotadi. To'la butun sonli va to'g'ri usullarni siklik usuldan asosiy farqi shundaki, agar ularda boshlang'ich jadval butun elementlardan iborat bo'lsa, keyingi jadvallarda ham butunlilik saqlanib qoladi.

Bu usullarni bayon qilish davomida uchraydigan ayrim belgilashlar, o'zgarishlar va ta'riflarni keltiraylik. Berilgan masala diagonal holga keltirilgan deb faraz qilinadi.

Endi (3.3), (3.4) tengliklar yordamida 3.1-jadval tuziladi. Unda x_0 joylashgan satr 0-satr, 1-ustun, ozod hadlar ustuni deb ataladi. $-x_j (j = 1, 2, ..., n)$ joylashgan ustun elementlaridan tuzilgan vektorni $\alpha_i (i = 1, 2, ..., n)$ bilan belgilaymiz.

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-x_j) \to \max, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &x_j = -(-x_j),\ j = 1, 2, ..., n, \\ &x_{n+i} = a_{i0} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = 1, 2, ..., m, \\ &x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., n + m, \\ &x_j - \text{butun},\ j = 1, 2, ..., n_1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.1-jadval

	1	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_j$	...	$-x_n$
$x_0 =$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	...	a_{0j}	...	a_{0n}
$x_1 =$	0	-1	0	...	0	...	0
$x_2 =$	0	0	-1	...	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
$x_n =$	0	0	0	...	0	...	-1
$x_{n+1} =$	a_{10}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
$x_{n+m} =$	a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

1. Siklik algoritm (Gomorining birinchi usuli)

Bu algoritm to'la butun sonli masalalar uchun, mo'ljallangan bo'lib, bunda asosan, simpleks usuldan foydalaniladi.

Quyidagi BSCHD masalasi berilgan bo'lsin:

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-x_j) \to \max \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} &x_j = -(-x_j),\ j = 1,2,...,n, \\ &x_{n+i} = a_{i0} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,\ i = 1,2,...,m, \\ &x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,n+m, \\ &x_j - \text{butun},\ j = 1,2,...,n+m. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Bu yerda $x_j = -(-x_j)$ ayniyatlarning qo'shilishi masala rejasini aniqlashni osonlashtiradi.

Endi, bevosita, algoritmni bayon qilishga o'tamiz. Buning uchun, (3.5), (3.6) masalaga mos jadvalni tuzamiz. Uning ko'rinishi 3.1-jadvaldan farq qilmaydi. Bu yerda, jadval ikkilanma joiz va uning barcha elementlari butun sonlardan iborat deb faraz qilinadi.

Agar jadval ikkilanma joiz bo'lmasa, u holda, yangi

$$x_{n+m+1} = M - x_1 - x_2 - ... - x_n$$

(bu yerda M – yetarlicha katta son) chegara qo'shilib, shu satr va leksikografik ma'noda minimum bo'lgan ustun yordamida bitta iteratsiya amalga oshiriladi. Shundan keyin jadval ikkilanma joiz bo'lib qoladi. Agar $a_{i0} \geq 0, i = 1,2,....n+m$ va butun bo'lsa, masala yechilgan bo'ladi, aks holda jadval tagiga yangi shunday chegara qo'shiladiki, bu bilan jadval to'g'ri joiz bo'lmay qoladi. Keyin ikkilanma simpleks usul yordamida jadval to'g'ri joiz holatga keltiriladi. Shundan keyin ham a_{i0} $(i = 1,2,...,n+m)$ larning birortasi butun sondan iborat bo'lmasa, yana yangi chegara qo'shiladi va jarayon qaytariladi.

Ehtimoldan holi emaski, yetarlicha chekli chegara qo'shishdan so'ng biz uchlari butun koordinatali nuqtalardan iborat bo'lgan "kichraytirilgan" sohaga ega bo'lamiz. Bu sohada boshlang'ich masalaning optimal rejasini aniqlash qiyinchilik tug'dirmaydi.

Lekin bu yerda yangi chegaralarni topish va algoritmning chekliligini ko'rsatish qiyinchiligi mavjud. Endi yangi chegaralarni topish yo'lini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, x_i larni butunlik sharti hisobga olinmay yechilgan masalada biror o'zgaruvchining qiymati butun sondan iborat bo'lmasin, u holda soddalik uchun, indeksni tashlab yuborsak, mos tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$x = a_0 + \sum_{j \in J} a_j(-x_j). \tag{3.7}$$

Bu yerda J jadvalning yuqori satrida yozilgan o'zgaruvchilarning indekslari to'plami.

Ma'lumki, b sonining butun qismi deb, b dan katta bo'lmagan eng katta butun songa aytiladi va $[b]$ orqali belgilanadi. Masalan: $[2,6] = 2, [-1,3] = -2$. Ushbu $f = b - [b]$ qiymat b sonining kasr qismi deyiladi. (3.7)-tenglikda ishtirok etayotgan ozod had va koeffitsiyentlardan quyidagi kasr qismlarni hosil qilamiz:

$$f_0 = a_0 - [a_0], \ f_j = a_j - [a_j], \ j \in J.$$

1-teorema. Agar $x = (x_1, x_2, ..., x_{n+m})$ (3.5), (3.6) masalaning joiz rejasi bo'lsa, u holda quyidagicha aniqlangan o'zgaruvchi

$$s = -f_0 + \sum_{j \in J} f_j x_j \tag{3.8}$$

manfiy emas, hamda butun bo'ladi.

Isbot. Avval biz uni butunligini isbotlaymiz. (3.7) dan

$$x = [a_0] + f_0 + \sum_{j \in J} \{[a_j] + f_j\}(-x_j)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan, elementar almashtirishlar yordamida, quyidagi tenglikka kelamiz:

$$s = -x + [a_0] + f_0 + \sum_{j \in J} [a_j](-x_j).$$

Butun qismining aniqlanishi va teorema shartiga asosan bu tenglikni o‘ng qismi butun, demak, c ham butun.

Endi c ning manfiy emasligini ko‘rsatamiz. Buning uchun, teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $s < 0$ bo‘lsin. Kasr qismlarning aniqlanishiga asosan $0 \leq f_0,\ f_i < 1$ va $x_i \geq 0$ bo‘lishligini hisobga olsak, unda quyidagi:

$$-1 < f_0 + \sum_{j \in J} f_j x_j < 0$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bundan $-1 < s < 0$, ya’ni s butun emas. Bu yuqoridagi tasdiqqa ziddir, demak, $s \geq 0$. Shu bilan teorema isbot bo‘ldi.

Algoritm davomida (3.8)-tenglamaga mos satr jadval tagiga yoziladi va u hal qiluvchi satr sifatida olinadi, chunki u bazis o‘zgaruvchi bo‘lib, manfiy $-f_0$ qiymatga ega. Keyingi iteratsiyada u nobazis o‘zgaruvchi bo‘lib, hal qiluvchi satr $s = -(-s)$ ayniyatga aylanib qoladi va keyinchalik u tashlab yuboriladi. (3.8) tenglamadagi c *Gomori o‘zgaruvchisi* deb ataladi. Agar joiz rejalar to‘plami chegaralangan sohadan iborat bo‘lsa, algoritm chekli bo‘ladi. Algoritm quyidagi qadamlardan iborat bo‘ladi.

1. Xuddi chiziqli dasturlash masalasi kabi (3.5), (3.6) masala simpleks yoki ikkilanma simpleks usuli bilan yechiladi. Agar $a_{i0} \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n + m;\ a_{0j} \geq 0,\ j = 1, 2..., n$ bo‘lsa, optimal reja topilgan bo‘ladi (oxirgi jadvalda $\alpha_j \succ 0,\ j = 1, 2, ..., n$ bo‘lishligi ham talab qilinadi).

2. Agar $a_{i0}(i = 1, 2, ..., n + m)$ larning barchasi butun bo‘lsa (3.5), (3.6) masala yechilgan bo‘ladi, aks holda, kasr songa mos kelgan satr *hosil qiladigan satr* deb olinib, (3.8)-tenglik tuziladi va u jadval tagiga yozib qo‘yiladi. Bu bilan jadval to‘g‘ri nojoiz bo‘lib, ikkilanma joiz bo‘lib qolaveradi. Keyin, oxirgi satrni hal qiluvchi satr sifatida, ikkilanma simpleks usul bilan bu masala yechiladi. 1, 2-qadamlar ozod hadlar ustunida butun sonlar hosil

bo‘lgunga qadar qaytariladi (agar a_{00} butunmas sondan iborat bo‘lsa, 0-satr ham hosil qiladigan satr sifatida olinishi mumkin).

Endi siklik algoritm yordamida quyidagi misolni yechaylik.

1-misol. Quyidagi butun sonli chiziqli dasturlash masalasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{aligned}
&x_0 = 7x_1 + 9x_2 \longrightarrow \max,\\
&-x_1 + 3x_2 \leq 6,\\
&7x_1 + x_2 \leq 35,\\
&x_1,\ x_2 \geq 0 - \text{butun}.
\end{aligned}$$

Tengsizliklarning chap tomoniga mos ravishda $x_3,\ x_4 \geq 0$ larni qo‘shib, diagonal ko‘rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned}
&x_0 = -7(-x_1) - 9(-x_2),\\
&x_1 = -(-x_1),\\
&x_2 = -(-x_2),\\
&x_3 = 6 - (-x_1) + 3(-x_2),\\
&x_4 = 35 + 7(-x_1) + (-x_2),\\
&x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 - \text{butun}.
\end{aligned}$$

Algoritmga asosan avval $x_1,\ x_2,,\ x_3,\ x_4$ larning butunligini talab qilmasdan simpleks usul bilan yechamiz. Buning uchun, mos 3.2-jadvalni tuzib, unga simpleks usulni qo‘llab 3.4-jadvaldagi $x_1 = 3/2,\ 7/2$ optimal rejaga ega bo‘lamiz.

3.4-jadvalda o‘zgaruvchi $x_1(= 9/2)$ kasr son, shuning uchun, bu satr hosil qiladigan satr deb olinadi va bu satr elementlarini kasr qismi yordamida yangi satr tuziladi. Bu yangi satr hal qiluvchi satr bo‘lib xizmat qiladi. Hal qiluvchi ustun topilib ikkilanma simpleks usul yordamda keyingi, 3.5-jadvalga o‘tiladi. Bunda x_0 joylashgan satrning birinchi elementi kasr sondan iborat bo‘lganligi uchun, bu satr hosil qiladigan satrdir.

3.2-jadval

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_0 =$	0	-7	-9
$x_1 =$	0	-1	0
$x_2 =$	0	0	-1
$x_3 =$	6	-1	3^*
$x_4 =$	35	7	1

3.3-jadval

	1	$-x_1$	$-x_3$
$x_0 =$	18	-10	3
$x_1 =$	0	-1	0
$x_2 =$	2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_3 =$	0	0	-1
$x_4 =$	33	$\frac{22}{3}^*$	$-\frac{1}{3}$

3.4-jadval

	1	$-x_4$	$-x_3$
$x_0 =$	63	$\frac{15}{11}$	$\frac{28}{11}$
$x_1 =$	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{22}$	$-\frac{1}{22}$
$x_2 =$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{22}$
$x_3 =$	0	0	-1
$x_4 =$	0	-1	0
	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{22}$	$-\frac{21}{22}^*$

3.5-jadval

	1	$-x_4$	$-s_1$
$x_0 =$	$\frac{185}{3}$	1	$\frac{8}{3}$
$x_1 =$	$\frac{95}{21}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{21}$
$x_2 =$	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$x_3 =$	$\frac{11}{21}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{21}$
$x_4 =$	0	-1	0
$s_2 =$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}^*$

3.6-jadval

	1	$-s_5$	$-s_3$
$x_0 =$	55	$\frac{5}{2}$	2
$x_1 =$	4	1	-1
$x_2 =$	3	$-\frac{1}{2}$	1
$x_3 =$	1	$\frac{5}{2}$	-4
$x_4 =$	4	$-\frac{13}{2}$	$\frac{26}{5}$

Yana yangi satr qo'shilib, u hal qiluvchi satr bo'lib xizmat qiladi va hokazo. Bu jarayon ozod hadlar ustunida butun sonlar paydo bo'lgunga qadar davom ettiriladi yoki bunday reja yo'qligi ko'rsatiladi. Bu masalada, 3.6-jadvalda $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ optimal rejaga ega bo'lamiz. maqsad funksiyaning qiymati esa $x_0 = 55$ teng bo'ladi.

2. To'la butun sonli algoritm

Bu algoritmning to'la butun sonli deb atalishiga sabab, agar boshlang'ich jadval elementlari butun sonlardan iborat bo'lsa, keyingi iteratsiya jadvali elementlari ham butun sonlardan iborat bo'ladi. Boshlang'ich jadval ikkilanma joiz bo'lsa, keyinchalik ham bu xossa saqlanib qoladi. Agar $a_{i0}(i = 1, 2, ..., n + m)$ larning barchasi nomanfiy bo'lsa, masala yechilgan bo'ladi. Aks holda, hal qiluvchi element -1 bo'lgan yangi hal qiluvchi satr tuziladi va ikkilanma simpleks usul yordamida yangi jadvalga o'tiladi. Bu yerda hosil qiladigan satr sifatida eng kichik indeksli $a_{i0} < 0(i = 1, 2, ..., n + m)$ olinadi.

Bizga (3.5), (3.6) BSCHD masalasi berilgan bo'lsin.

Faraz qilaylik,

$$x = a_0 + \sum_{j\in J} a_j(-x_j) \tag{3.9}$$

biror satrga mos indekssiz yozilgan tenglama bo'lsin (bu yerda J bazismas o'zgaruvchilarning indekslar to'plami).

2-teorema. Faraz qilaylik, λ biror musbat son bo'lib (3.9)-tenglamadagi x, $x_j(j \in J)$ lar nomanfiy, butun bo'lishsin. U holda

$$s = \left[\frac{a_0}{\lambda}\right] + \sum_{j\in J} \left[\frac{a_j}{\lambda}\right](-x_j) \tag{3.10}$$

tenglik bilan aniqlangan s manfiymas va butun bo'ladi.

Isbot. s ning butunligi sonning butun qismini aniqlanishi va $x_j(j \in J)$ larning butunligidan kelib chiqadi. Manfiy emasligini ko'rsatish uchun, teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $s < 0$, u holda s ning butunligidan $s \leq -1$ ekanligi kelib chiqadi.

Shuningdek, (3.9)-tenglamadan ushbuga ega bo'lamiz:

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{a_0}{\lambda} + \sum_{j\in J} \frac{a_j}{\lambda}(-x_j),$$

$$\frac{x}{\lambda} + \sum_{j\in J} f_j x_j = f_0 + s, \tag{3.11}$$

bu yerda

$$f_j = \frac{a_j}{\lambda} - \left[\frac{a_j}{\lambda}\right], \ j \in \{0\} \cup J. \tag{3.12}$$

(3.11) va (3.12)-tengliklardan quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\frac{x}{\lambda} + \sum_{j \in J} f_j x_j \leq f_0 - 1 < 0.$$

Lekin bunday bo'lishi mumkin emas, chunki chap tomondagi birinchi ifoda musbat. Bu ziddiyat teoremani isbotlaydi.

Boshlang'ich jadval ikkilanma joiz bo'lishi kerak, agar bu shart bajarilmasa, yangi

$$x_{n+m+1} = M - x_1 - x_2 - ... - x_n$$

satr qo'shish bilan xuddi siklik algoritmdagi kabi ikkilanma joiz jadvalga o'tishimiz mumkin (bu yerda M – yetarlicha katta son).

Endi algoritmni bevosita bayon qilishga o'tamiz:

1. boshlang'ich jadval elementlari butun sonlardan iborat va ikkilanma joiz jadval bo'lsin;

2. $a_{i0} < 0 (i = 1, 2, ..., n + m)$ shartni qanoatlantiruvchi eng kichik indeksli v – satr tanlab olinsin, bu satr hosil qilinadigan satr bo'ladi, agar $a_{i0} \geq 0 (i = 1, 2, ..., n + m)$ bo'lsa, u holda masala yechilgan bo'ladi;

3. musbat λ soni tanlab olinsin (uni tanlash sharti quyida keltirilgan) va jadval tagiga (3.10)-tenglamaga mos satr yozilsin. Bu satr hal qiluvchi satr bo'lib xizmat qiladi;

4. Iikkilanma simpleks usul bilan keyingi jadvalga o'tilsin, oxirgi qo'shimcha satr o'chirilsin va 2-qadamga qaytib o'tilsin.

Endi λ sonini tanlash shartini keltiramiz:

a) hal qiluvchi element -1 ga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$\left[\frac{a_{v\ell}}{\lambda}\right] = -1;$$

b) a_0 ustun leksikografik ma'noda mumkin qadar kamaysin. Ushbu ustun keyingi o'tilgan jadvalda

$$\alpha_0 + \left[\frac{a_{i0}}{\lambda}\right] \alpha_\ell$$

ga teng bo'lib qoladi (ℓ – hal qiluvchi ustun). Demak, λ qanchalik kichik bo'lsa, bu a_0 ustunning leksikografik ma'noda tez kamayishi ta'minlanadi.

a), b) shartlarni qanoatlantiruvchi λ sonini tanlash qoidasi quyidagicha bo'ladi:

1) Faraz qilaylik, v hosil qiladigan satr bo'lsin;

2) $a_{vj} < 0$ ga mos kelgan α_j vektorlar ichida leksikografik ma'noda minimum bo'lgan vektor α_ℓ bo'lsin ($a_{vj} \geq 0$ barcha j larda bo'lsa, u holda masalaning rejasi yo'q);

3) μ_j soni $a_{vj} < 0$ ga mos $\alpha_j \prec \frac{\alpha_j}{\mu_j}$ shartlarni qanoatlantiruvchi eng katta, butun musbat son bo'lsin;

4) μ_j larga mos λ_j lar quyidagi:

$$\lambda_j = -\frac{a_{vj}}{\mu_j}$$

tenglik bilan aniqlansin;

5) λ soni λ_j larning eng kattasiga teng qilib olinsin, ya'ni

$$\lambda = \max_j \lambda_j.$$

2-misol. Quyidagi BSCHD masalasi qaralayotgan bo'lsin:

$$\begin{gathered} x_0 = -2x_1 - 5x_2 - x_3 \longrightarrow \max, \\ \begin{aligned} &3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5, \\ &7x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 18, \\ &10x_1 + 5x_2 + 12x_3 \geq 26, \\ &x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 - \text{butun}. \end{aligned} \end{gathered} \tag{3.13}$$

(3.13) tengsizliklarning o'ng tomoniga x_4, x_5, $x_6 \geq 0$ larni mos ravishda qo'shib diagonal ko'rinishga keltiramiz:

$$x_0 = 2(-x_1) + 5(-x_2) + (-x_3) \longrightarrow \max,$$

$$
\begin{aligned}
&x_i = -(-x_i),\ i = 1,\ 2,\ 3,\\
&x_4 = -5 - 3(-x_1) - 4(-x_2) - (-x_3),\\
&x_5 = -18 - 7(-x_1) - 2(-x_2) - 5(-x_3),\\
&x_6 = -26 - 10(-x_1) - 5(-x_2) - 12(-x_3),\\
&x_i \geq 0 - \text{butun},\ i = 1, 2, ..., 6.
\end{aligned}
$$

Boshlang‘ich jadval quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi (3.7-jadval).

3.7-jadval

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_0 =$	0	2	5	1
$x_1 =$	0	2	5	1
$x_2 =$	0	0	-1	0
$x_3 =$	0	0	0	-1
$x_4 =$	-5	-3	-4	-1
$x_5 =$	-13	-7	-2	-5
$x_6 =$	-26	-10	-5	-12
$s_1 =$	-2	-1	-2	-1^*

3.8-jadval

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-s_1$
$x_0 =$	-2	1	3	1
$x_1 =$	0	-1	0	0
$x_2 =$	0	0	-1	0
$x_3 =$	2	1	2	-1
$x_4 =$	-3	-2	-2	-1
$x_5 =$	-8	-2	8	-5
$x_6 =$	-2	2	19	-12
$s_2 =$	-2	-1^*	-1	-1

Bu jadval ikkilanma joiz jadval bo‘lib, x_4 joylashgan satr birinchi elementi (x_4 qiymati) manfiy, shuning uchun, u hosil qiladigan satr bo‘ladi. Bu satrning barcha elementlari manfiy sonlardan iborat bo‘lganligi uchun, α_1, α_2, α_3 vektorlarning leksikografik minimumini topamiz, bu α_3 vektordir.

Quyidagi

$$\alpha_3 \prec \frac{\alpha_j}{\mu_j},\ j = 1, 2, 3$$

shartlardan eng katta musbat, butun μ_j sonlarni aniqlaymiz: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 1$. Энди $\lambda_j = -\frac{\alpha_{ij}}{\mu_j}$ tenglik yordamida λ_j lar topiladi: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$, demak, $\lambda = 3$.

Shu $\lambda = 3$ yordamida yangi chegara:

$$s_1 = -2 + x_1 + 2x_2 + x_3$$

hosil qilib jadval tagiga yozib qo'yiladi. Bu yangi satr hal qiluvchi satr bo'lib xizmat qiladi, α_3 ustun esa hal qiluvchi ustun, ularning kesishgan joydagi element -1 hal qiluvchi elementdir. Bu hal qiluvchi element yordamida keyingi 3.8-jadvalga o'tiladi. 3.8-jadvalda ham x_4 satr hosil qiladigan satrdir. Bu satrning barcha elementlari manfiy, shuning uchun, α_1, α_2, α_3 vektorlardan leksikografik ma'noda minimumi topiladi, u α_1 vektordir

$$\alpha_1 \prec \frac{\alpha_j}{\mu_j}, \ j = 1, 2, 3$$

shartdan μ_1, μ_2, μ_3 lar aniqlanadi: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 1$, λ_j lar $\lambda_j = -\frac{a_{4j}}{\mu_j}$ tenglikdan topiladi: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$, $\lambda_3 = 1$ kelib chiqadi, demak, $\lambda = 2$. Бу $\lambda = 2$ yordamida s_2 hal qiluvchi satr tuziladi. Keyingi jadvallarda ham oldingi jarayonni davom ettirib, 6-iteratsiyadan so'ng to'g'ri joiz jadvalga ega bo'linadi. Ya'ni, berilgan masalaning optimal rejasi: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ maqsad funksiyaning qiymati esa $x_0 = -5$ bo'ladi (3.9-jadval).

3.9-jadval

	1	$-s_5$	$-x_2$	$-s_4$
$x_0 =$	-5	1	3	0
$x_1 =$	2	-2	2	1
$x_2 =$	0	0	-1	0
$x_3 =$	1	3	-2	-2
$x_4 =$	2	-3	0	1
$x_5 =$	13	1	2	-3
$x_6 =$	6	16	-9	-14

3. To‘g‘ri algoritm

Bu algoritmning "to‘g‘ri" deyilishiga sabab, biz har bir iteratsiyada to‘g‘ri joiz jadvalga ega bo‘lamiz. Ya’ni, hisoblash davomida har vaqt masalaning taqribiy rejasini olishimiz mumkin bo‘ladi.

To‘la butun sonli algoritmda asosan, ikkilanma simpleks usul ishlatilib, hal qiluvchi element -1 ga teng bo‘lgan bo‘lsa, bu algoritmda simpleks usul ishlatilgach, hal qiluvchi element $+1$ ga teng bo‘ladi. Quyidagi BSCHD masalasini ko‘raylik:

$$\begin{aligned}
&x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-x_j) \to \max,\\
&x_{n+i} = a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-x_j), \;\; i = 1, 2, ..., m,\\
&x_j = -(-x_j), \;\; j = 1, 2, ..., n,\\
&x_j \geq 0, \; j = 1, 2, ..., n + m,\\
&x_j - \text{butun}, \; j = 1, 2, ..., n_1 \leq n + m.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

bu yerda: a_{0j}, a_{ij} a_{i0} lar butun, nomanfiy bo‘lgan sonlardir.

Faraz qilaylik, simpleks jadvalda v hal qiluvchi satr, ℓ hal qiluvchi ustun bo‘lsin, ya’ni

$$\frac{a_{v0}}{a_{v\ell}} \leq \frac{a_{i0}}{a_{i\ell}}$$

tengsizlik barcha musbat a_{ij} lar uchun, o‘rinli. Quyidagi qo‘shimcha:

$$s = \left[\frac{a_{v0}}{a_{v\ell}}\right] + \sum_{j\in J} \left[\frac{a_{vj}}{\lambda}\right] (-x_j)$$

tenglama tuzilsin, agar $\lambda = a_{v\ell}$ deb, undan hal qiluvchi satr sifatida foydalanilsa, hal qiluvchi element $+1$ ga teng bo‘ladi. Bu esa keyingi jadval elementlarining butunliligini saqlab qoladi. Agar $\left[\frac{a_{v0}}{a_{v\ell}}\right] = 0$ bo‘lsa, ravshanki, maqsad funksiyaning qiymati ham, reja ham o‘zgarmaydi.

Ammo bu algoritmning chegaralanganligini ta'minlamasligi mumkin. Bu xuddi chiziqli dasturlashdagi cheksiz qadamli masalalarga olib keladi. Lekin chiziqli dasturlashda o'zgaruvchilar, chegaralar soni chekli ekanligidan foydalanib, cheksiz qadam bo'la olmaslik ko'rsatiladi. BSCHD da esa har safar yangi chegara qo'shilib borilaveradi, shuning uchun, qadamlar soni chegaralanganligini boshqacha yo'l bilan ko'rsatish kerak bo'ladi.

Bir jadvaldan keyingisiga o'tish *o'tish sikli* deb yuritiladi, o'tish sikli ***statsionar sikl*** deb aytiladi, agar $0 \leq a_{v0} < a_{v\ell}$ bo'lsa, ***o'tuvchi sikl*** deb aytiladi, agar $0 \leq a_{v\ell} < a_{v0}$ bo'lsa. Agar sikl o'tuvchi bo'lsa, u holda $a_{0\ell} \leq -1$ bo'lganligi uchun, maqsad funksiyaning qiymati kamida bir birlikka oshadi. Demak, chegaralangan maqsad funksiyada, chekli qadamdan keyin optimal rejaga kelinadi.

Shunday qilib, asosiy muammo statsionar sikllar soni chegaralangan ekanligida bo'lib, buni ko'rsatish uchun, o'tish va statsionar sikllarni farqlamasdan ko'ramiz. Algoritmning chegaralanganligini ta'minlash uchun, quyidagi uch o'zgarishni kiritish kerak bo'ladi:

1) boshlang'ich jadvalga qo'shimcha satr qo'shib yoziladi;

2) hal qiluvchi ustun yangi qoida asosida tanlab olinadi;

3) hosil qiladigan satr ham quyida berilgan qoida bo'yicha olinadi.

Jadvalga qo'shib yoziladigan yangi satr

$$x_L = a_{L0} + \sum_{j=1}^{n}(-x_j) \tag{3.15}$$

ko'rinishda bo'lib, a_{L0} butun son shunday tanlab olinadiki, (3.14) shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy joiz rejaning nobazis x_i ($i = 1, 2, ..., n$) larning qiymatida x_L manfiymas, butun bo'lib qolishi kerak. Bu $L-$ satr hal qiluvchi ustunni tanlashda muhim rol o'ynaydi. $a_{\lambda j}$ (3.15)-tenglamadagi biror iteratsiyadan keyin $j-$

ustunga mos kelgan koeffitsiyentni bildirsin. Har bir α_j vektor uchun, yangi r_j vektor quyidagicha aniqlanadi:

$$r_j = \left(\frac{a_{0j}}{a_{Lj}}, \frac{a_{n+1j}}{a_{Lj}}, \ldots, \frac{a_{n+mj}}{a_{Lj}}\right).$$

Musbat a_{ij} larga mos r_j vektorlarning leksikografik minimumi r_ℓ bo'lsin, unda ℓ hal qiluvchi ustun bo'lib xizmat qiladi.

Endi hosil qiladigan satrni aniqlaymiz. Buning uchun, uni tanlash usulini keltiramiz, u algoritmning chekliligini ta'minlaydi.

Tanlash usuli. Biror satr keltiriladigan satr sifatida olinishi mumkin, agar u tanlangan satr i uchun, biror chekli iteratsiyadan keyin $a_{i\ell} \leq a_{i0}$ tengsizlik bajarilsa (bu tengsizliklarning barchasi bitta jadvalda bajarilishi shart emas).

Bu usulni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy qoida *joiz qoida* deb ataladi. Bunday joiz qoidalar ko'p bo'lib, quyida shulardan bittasi keltirilgan.

Faraz qilaylik, ushbu

$$s = \left[\frac{a_{v0}}{a_{v\ell}}\right] + \sum_{j\in J} \left[\frac{a_{vj}}{a_{v\ell}}\right](-x_j) \tag{3.16}$$

yangi chegara hosil qilingan bo'lsin. Jadvalning to'g'ri joizligini saqlab qolish uchun, hosil qiladigan satr quyidagicha tanlab olinishi kerak:

$$0 \leq \left[\frac{a_{v0}}{a_{v\ell}}\right] \leq \theta_\ell \tag{3.17}$$

bu yerda

$$\theta_\ell = \min_{a_{i\ell}>0} \frac{a_{i0}}{a_{i\ell}}.$$

Biz $V(\ell)$ orqali (3.17) – shartni qanoatlantiradigan satrlar to'plamini belgilaymiz.

Endi $V(\ell)$ dan hosil qiladigan satrni tanlab olishni ko'rib chiqamiz. Aniqki, agar o'tish siklli bo'lsa $\theta_\ell \geq 1$, ya'ni $a_{1\ell} \leq a_{i0}$

barcha i lar uchun, bajariladi. Shuning uchun, statsionar siklni ko'ramiz, unda $\theta_\ell < 1$ bo'ladi.

Quyidagi

$$V(\ell) = \left\{ i : 0 \leq \frac{a_{i0}}{a_{i\ell}} < 1 \right\}.$$

belgilashni kiritamiz.

Algoritmni bevosita keltirishdan avval joiz qoidani keltiraylik.

Qoida. a) Faraz qilaylik, $V_p(\ell)$, $p-$ iteratsiyada hosil bo'lgan to'plamni bildirsin va uni elementlar soni bittadan ortiq bo'lsin:

$$V_p(\ell) = \{v_1, v_2, ..., v_{k+2}\}$$

u holda $v \in V_p(\ell)$ satr hosil qiladigan satr sifatida olinadi, agar $v-$ satr $V_1(\ell), ..., V_p(\ell)$ to'plamlarda bo'lgan v_j elementlarga nisbatan avval paydo bo'lib va keyingi to'plamlarning barchasida ishtirok etib kelgan bo'lsa;

b) avval a) da olingan $v-$ satr, $v \in V(\ell)$ bo'lgunga qadar olinaveradi, agar $v \bar{\in} V(\ell)$ bo'lsa a) ga o'tiladi.

Endi to'g'ri usulning algoritmini keltiramiz.

1. Boshlang'ich jadvalga (3.15) ga mos satr qo'shilsin. Bu yerda a_{L0} butun musbat son shunday tanlab olinadiki, (3.14) ni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy joiz rejaning nobazis $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlarida $x_1 \geq 0-$ butun bo'lishi kerak.

2. Optimallik sharti tekshirilsin: agar $a_{0j} \geq 0$ barcha $j \in J$ lar uchun, o'rinli bo'lsa, masala yechilgan bo'ladi, aks holda 3 ga o'tilsin.

3. $a_{ij} > 0$ ga mos keluvchi r_j vektorlarning leksikografik minimumi r_ℓ topilsin, bu ustun hal qiluvchi ustun bo'ladi.

4. Quyidagi

$$V(\ell) = \left\{ i : 0 \leq \frac{a_{i0}}{a_{i\ell}} \leq \theta_\ell \right\}$$

to'plamdan joiz qoida asosida hal qiluvchi satr tanlab olinsin.

5. (3.16)-tenglamaga mos satr jadval tagiga yozilsin.

6. α_ℓ hal qiluvchi ustun va oxirgi satr hal qiluvchi satr deb olinib, keyingi jadvalga o‘tilsin.

7. Oxirgi satr tashlab yuborilsin va 2 ga o‘tilsin.

Yuqorida aytilganga asosan, boshlang‘ich jadval to‘g‘ri joiz bo‘lishi kerak. Bundan kelib chiqadiki, algoritm samarador ishlashi uchun, mumkin qadar "yaxshi" bazis rejani aniqlash kerak bo‘ladi. Ko‘pgina, tatbiqiy masalalarda bu "yaxshi" reja ma’lum bo‘ladi yoki uni aniqlash mumkin bo‘ladi.

Endi to‘g‘ri algoritm uchun, sonli misol ko‘ramiz.

3-misol. Quyidagi BSCHD masalasi, odatdagidek, diagonal holga keltirilgan bo‘lsin:

$$x_0 = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow \max,$$

$$\begin{aligned}
&x_4 = 22 + 2(-x_1) - (-x_2) + 22(-x_3),\\
&x_5 = 6 + 2(-x_1) - (-x_2) + 6(-x_3),\\
&x_6 = 2 + 2(-x_1) - 5(-x_2) + 2(-x_3),\\
&x_1 = -(-x_1),\\
&x_2 = -(-x_2),\\
&x_3 = -(-x_3),\\
&x_1, x_2, ..., x_7 \geq 0,\\
&x_1, x_2, ..., x_7 \text{ - butun.}
\end{aligned}$$

Qo‘shimcha chegarani quyidagicha kiritamiz:

$$x_L = 10 - x_1 - x_2 - x_3.$$

Boshlang‘ich jadval quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi (3.10-jadval):

3.10-jadval

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_0 =$	0	−1	−1	−1
$x_4 =$	22	2	7	22
$x_5 =$	6	2	−1	6
$x_6 =$	2	2	−5	2
$x_7 =$	1	−4	1	1
$x_1 =$	0	−1	0	0
$x_2 =$	0	0	−1	−1
$x_3 =$	0	0	0	−1
$x_L =$	10	1	1	1
$s_1 =$	1	1*	−3	1

3.11-jadval

	1	$-s_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_0 =$	1	1	−4	0
$x_4 =$	20	−2	13	20
$x_5 =$	4	−2	5	4
$x_6 =$	0	−2	1	0
$x_7 =$	5	4	−11	5
$x_1 =$	1	1	−3	1
$x_2 =$	0	0	−1	0
$x_3 =$	0	0	0	−1
$x_L =$	0	−1	4	0
$s_1 =$	0	−2	1*	0

α_1 vektor leksikografik ma'noda minimum, demak, 1-ustun hal qiluvchi ustun bo'lib xizmat qiladi.

$$\frac{a_{i0}}{a_{i\ell}}\,(a_{i\ell} > 0)$$

nisbatning eng kichigiga x_6 – satrda erishiladi, u hosil qiladigan satr bo'ladi $V_0(1) = \{6\}$ hosil qiladigan satr yordamida (x_6 satr elementlarini 2 soniga bo'lish orqali) hal qiluvchi satrni topamiz. Hal qiluvchi element 1 ga teng, simpleks usul bilan keyingi jadvalga o'tamiz. Bu jalvalda α_2 ustun hal qiluvchi ustun bo'lib, $V_1(2) = \{5, 6\}$. lekin x_6 – satr oldingi $V_0(1)$ da ham ishtirok etganligi uchun, uni yana hosil qiladigan satr sifatida olamiz. Bu joiz qoidadan kelib chiqadi (3.11-jadval).

Bu jarayonni davom ettirsak 3.12-jadvalda quyidagi optimal rejaga ega bo'lamiz: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$

3.12-jadval

	1	$-s_7$	$-s_6$	$-x_3$
$x_0 =$	6	1	0	5
$x_4 =$	0	−7	−37	0
$x_3 =$	0	1	−1	0
$x_6 =$	4	5	−7	4
$x_7 =$	15	−1	5	15
$x_1 =$	4	0	1	4
$x_2 =$	2	16	−1	2
$x_3 =$	0	0	0	−1
$x_L =$	4	−1	0	−5

Kombinatorik usullar

Kombinatorik usullarning asosiy g‘oyasi ko‘p imkoniyatlar (rejalar) to‘plamidan istiqbolli, ya’ni optimal rejani o‘z ichiga olgan to‘plamni ajratib olishdir. Ayrim kombinatorik usullarda chiziqli dasturlashning usullari ishlatilmaydi. Bundan tashqari, ularning chegaralanganligini isbotlash shart emas, bu ko‘p hollarda usulning o‘zidan kelib chiqadi.

Usullardan eng ko‘p ishlatiladigani va muhim ahamiyatga ega bo‘lgani tarmoqlar va chegaralar usulidir. Bu usulni 1960-yilda Lend va Doyglar taklif etgan bo‘lib, keyinchalik uning ko‘pgina maxsus BSCHD masalalarini yechishda modifikatsiyalari topilgan. Xususan, tarmoqlar va chegaralar usuli qisman BSCHD masalasini yechish uchun, ham ishlatilishi mumkin.

Bu guruhga tegishli usullardan yana biri additiv algoritmdir. U bul o‘zgaruvchili masalalarini yechishda ishlatiladi. Bu algoritm ham ketma-ket ko‘rib chiqishlar sonini kamaytirish bilan xarakterlanadi.

Tarmoqlar va chegaralar usuli

Bu algoritm qisman va to‘la butun sonli masalalarni yechishda ishlatiladi. Uning g‘oyasi har safar masalani ikkita chiziqli dasturlash masalasiga keltirish, ya'ni tarmoqlashdir. Shundan keyin har bir tarmoqdagi chiziqli masalani yechish bilan maqsad funksiyaning ekstremum qiymatiga quyi chegara topiladi. Bunday tarmoqlash jarayoni butun sonli optimal reja topilishiga qadar davom ettiriladi. Bizga quyidagi BSCHD masalasi berilgan bo'lsin:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j \to \max,$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j \le b_i,\ i = 1, 2, ..., m, \\ &0 \le x_j \le a_j,\ j = 1, 2, ..., n, \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$x_j \text{ - butun},\ j = 1, 2, ..., n_1. \tag{3.19}$$

Bunday masalani yechish uchun, tarmoqlar va chegaralar usuli quyidagi qadamlardan iborat bo'ladi:

1. Faraz qilaylik, (3.18), (3.19)-shartlar bilan n o'lchovli fazoda chegaralangan, yopiq va qavariq G_0 soha aniqlangan bo'lsin;

2. G_0 sohada $L(x)$ maqsad funksiyaga maksimum qiymat beruvchi x_0 optimal reja topiladi. Agar x_0 (3.19), shartni qanoatlantirsa, berilgan masala yechilgan bo'ladi, aks holda keyingi qadamga o'tilsin;

3. $L(x_0)$ ni $\xi(G_0)$ deb belgilansin va keyingi iteratsiyaga o'tilsin;

Birinchi iteratsiya.

1. Optimal reja x_0 ni butunmas komponenti $x_i = x_{i0}$ aniqlansin. G_0 ni quyidagi usul bilan $G_1^{(1)}$, $G_1^{(2)}$ to'plamlarga ajratilsin:

$$\begin{aligned} G_1^{(1)} &= \{x \in G_0 : x_i \le [x_{i0}]\}, \\ G_1^{(2)} &= \{x \in G_0 : x_i \ge [x_{i0}] + 1\}. \end{aligned}$$

2. $L(x)$ maqsad funksiyaning $G_1^{(1)}$ to'plamda optimal rejasi $x_1^{(1)}$ topilsin. $L(x)$ funksiyaning $G_1^{(2)}$ to'plamda optimal rejasi $x_1^{(2)}$ to-

pilsin. Quyidagi belgilashlar kiritilsin:

$$\xi(G_1^{(1)}) = L(x_1^{(1)}),\ \xi(G_1^{(2)}) = L(x_1^{(2)}).$$

3. Optimallik sharti tekshirilsin: agar $x_1^{(i)}$ (3.19) shartni qanoatlantirib

$$\xi(G_1^{(i)}) = \max(\xi(G_1^{(1)}), \xi(G_1^{(2)}))$$

bo'lsa, u holda masalaning optimal rejasi, aks holda keyingi iteratsiyaga o'tilsin;

k+1-iteratsiya.

Faraz qilaylik, k ta iteratsiya bajarilgan bo'lib, $G_k^{(i)}$, $i = 1, 2, ..., r_k$ to'plamlar hosil qilingan bo'lsin.

Lekin masalaning optimal rejasi topilmagan bo'lsin. U holda, quyidagi usul bilan $\xi(G_k^{(i)})$, $i = 1, 2, ..., r_k$ lar yordamida *istiqbolli to'plam* $G_k^{(v)}$ aniqlanadi.

1. $G_k^{(v)}$ to'plamni tarmoqlash uchun, $x_k^{(v)}$ rejadan butun bo'lmagan komponenta tanlab olinib, quyidagi to'plamlar tuziladi:

$$G_{k,1}^{(v)} = \{x \in G_k^{(v)} : x_s \leq [x_{s0}]\},\ G_{k,2}^{(v)} = \{x \in G_k^{(v)} : x_s \geq [x_{s0}] + 1\}.$$

2. Maqsad funksiya $L(x)$ ning $G_{k,i}^{(v)}$, $i = 1, 2$ to'lamda maksimal qiymati va optimal rejasi topilsin:

$$\xi(G_{k,1}^{(v)}) = L(X_{k,1}^{(v)}),\ \xi(G_{k,2}^{(v)}) = L(X_{k,2}^{(v)}), \qquad X_{k,1}^{(v)}),\ X_{k,2}^{(v)}.$$

3. Optimallik sharti tekshirilsin: agar $X_{k,1}^{(v)}$ (3.19)-shartni qanoatlantirsa, $G_{k,j}^{(v)}$ to'lam keyinchalik tarmoqlanmaydi va u fiksirlab qo'yiladi. Bundan tashqari

$$\xi(G_{k,j}^{(v)}) = \max_i \xi(G_k^{(i)})$$

tenglik barcha oxirgi $G_k^{(i)}$ to'plamlar uchun, bajarilsa, $X_{k,j}^{(v)}$ optimal reja bo'ladi, ya'ni masala yechilgan bo'ladi. Aks holda, tarmoqlash iteratsiyasi davom ettiriladi.

Algoritmning chekliligini (3.19)-shart ta'minlaydi. Shu bilan birga algoritmdan ko'rinib turibdiki, n_1 soni qanchalik kichik bo'lsa, iteratsiyalar soni ham shunchalik kam bo'ladi. Yana, shuni ta'kidlash lozimki $x_i \leq x_{i0}$; yoki $x_i \geq [x_{i0}] + 1$ chegaralar yangi chegaralar bo'lib, sohani "kichraytiradi" va shu bilan birga hosil bo'lgan yangi masalalarni yechish uchun, avvalgi jadvallardan foydalanish mumkin. Buning uchun, yangi chegaraga mos satr jadval oxiriga qo'shib yoziladi.

Tarmoqlar va chegaralar usuli ayniqsa, butun sonli chiziqli dasturlash masalalarini yechishda samarador usullardan hisoblanadi. Chunki bu holda tarmoqlanish soni kam bo'lib, optimal rejaga tezroq kelinadi. (3.19)-ko'rinishdagi chegaralarni quyidagi qo'shimcha masalalarni yechish orqali topish mumkin:

$$x_j \to \max, \tag{3.20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ \ i = 1, 2, ..., m,$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, ..., n.$$

Bunda $d_j = [x_j^0], j = 1, 2, ..., n_1$ bo'ladi, bu yerda $x_j^0, j = 1, 2, ..., n_1$ (3.20) maqsad funksiyasining maksimal qiymatidir.

4-§. Transport masalasi

Transport masalasining umumiy qo'yilishi quyidagicha A_1, $A_2, ..., A_i, ..., A_m$ bir xil turdagi mahsulot bilan savdo qiluvchi ta'minot punktlari bo'lib, A_i – punktdagi mahsulot miqdorining hajmi a_i birlikka teng bo'lsin. Shu mahsulotlarni B_1, $B_2, ..., B_j, ..., B_n$ iste'mol punktlariga tarqatish talab qilinsin. Bunda B_j – iste'mol punktiga olib kelinishi kerak bo'lgan mahsulot miqdori hajmi b_j birlikka teng bo'lsin.

A_i – ta'minotchidan B_j – iste'molchiga birlik mahsulotni olib borish xarajati c_{ij} so'mga teng bo'lsin. Ta'minot punktdagi mahsulotlarni iste'molchilarga eng kam xarajat bilan taqsimlash talab etilsin. Berilgan masalani yechish uchun, x_{ij} bilan A_i – ta'minotchidan B_j – iste'molchiga tashib ketilishi mo'ljallangan mahsulot miqdori belgilanib, masalaning matematik modeli tuziladi, ya'ni:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow \min, \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, 2, ..., m, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, 2, ..., n, \tag{4.3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1, 2, ..., m, \ j = 1, 2, ..., n. \tag{4.4}$$

Bu yerda (4.2) har bir ta'minotchidan olib ketiladigan mahsulot miqdoriga, (4.3) esa har bir iste'molchiga olib kelinadigan mahsulot miqdori hajmiga bo'lgan chegarani bildiradi, (4.1)-maqsad funksiya deb atalib, u mahsulotlarni tashib ketilishining umumiy xarajatini aniqlaydi. Demak, (4.1), shu umumiy xarajatni minimum qilish kerakligini bildiradi.

(4.2), (4.3) va (4.4)-shartlarni qanoatlantiruvchi vektorlar to'plami mos transport masalasining *rejalar to'plami* deb ataladi. Rejalar to'plamiga tegishli bo'lgan har bir x_{ij} vektor mos transport *masalasining rejasi* deb ataladi.

Shunday qilib transport masalasining qo'yilishi quyidagidan iborat: rejalar to'plamidan shunday rejani aniqlash kerakki, u (4.1) maqsad funksiyaga minimal qiymat bersin.

1-ta'rif. Agar $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ tenglik bajarilsa, mos transport masala *yopik transport masalasi,* aks holda *ochiq transport masala* deb ataladi.

1-teorema. Ixtiyoriy yopiq transport masalasi yechimga ega.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Quyidagi belgilashni kiritaylik: $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j = p > 0$. U holda $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{p}$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ reja bo'ladi, haqiqatan, $x_{ij} \geq 0$ tengsizlik ixtiyoriy $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ larda o'rinli bo'lishliligi tushunarli, bundan tashqari

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{p} = \frac{a_i}{p} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{p} = \frac{b_j}{p} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j$$

demak, (4.2), (4.3) va (4.4) shartlarning barchasi bajariladi.

Ko'rsatamizki, rejalar to'plamida

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

maqsad funksiya ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan. Quyidagi belgilashlarni kiritaylik: $c' = \min\limits_{i,j} c_{ij}$, $c'' = \max\limits_{i,j} c_{ij}$, u holda bir tomondan $z = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \leq c'' \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = c'' \sum\limits_{i=1}^{m} a_i = c''p$, ikkinchi tomondan $z = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \geq c' \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = c' \sum\limits_{i=1}^{m} a_i = c'p$, demak, $c'p \leq z \leq c''p$. Shunday qilib, bo'sh bo'lmagan rejalar to'plamida maqsad funksiya chegaralangan ekan, bundan kelib chiqadiki, masala yechimga ega. Teorema isbot bo'ldi.

Ochiq transport masalasida ikkita hol bo'lishi mumkin: a) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ – ta'minot iste'moldan ortiq; b) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ – iste'mol ta'minotdan ortiq. Ikkala holda ham maqsad funksiya ko'rinishi o'zgarmaydi. Birinchi a) holda soxta B_{n+1} – iste'molchi punkt, uning talab mahsulot miqdori-$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$; ikkinchi b) holda soxta A_{m+1} – ta'minotchi punkt kiritilib, uning mavjud mahsulot miqdori-$a_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j$ ga deb olinadi.

4.1-jadval

Ta'minot-chilar	Iste'molchilar						Mavjud mahsulotlar miqdori
	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1j}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2j}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	c_{i1}	c_{i2}	$\cdots$	c_{ij}	$\cdots$	c_{in}	a_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mj}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
Talablar	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Soxta istemolchi B_{n+1} bo'lgan a) holda, barcha ta'minotchilardan bu iste'molchiga mahsulotni olib borish xarajatlari nol deb olinadi, ya'ni: $c_{in+1} = 0,\ i = 1, 2, ..., m$. Aslida, bu yo'nalishlar bo'yicha mahsulot tashilmaydi. Soxta ta'minotchi A_{m+1} bo'lgan b) holda ham, undan barcha istemolchilarga mahsulot tashish xarajati nol deb olinadi, ya'ni: $c_{m+1j} = 0, j = 1, 2, ..., n$. Bu holatlarda optimal rejada eng kam xarajatga ega bo'lgan yechim to'g'ri keladi.

Bu mulohazalardan kelib chiqadiki, har vaqt ochiq transport masalasini yopiq transport masalasiga keltirish mumkin ekan. Shuning uchun, umumiylikka zarar keltirmagan holda, masalaning yechish usullari faqat yopiq (4.1)–(4.4) ko'rinishdagi transport masalasi uchun, berilishi yetarli bo'ladi. (4.1)–(4.4) transport masalasini quyidagi jadval ko'rinishda berish, berilgan masalaning yechish usullarni bayon qilishda qulaylik tug'diradi. Bunda xarajatni bildiruvchi c_{ij} sonlari kataklarning o'ng yuqori burchagiga yoziladi. Oxirgi ustun va satrlarga mos ravishda ta'minot punktlarida mavjud bo'lgan va iste'molchilarga zarur bo'lgan talab – mahsulot miqdorlari yoziladi.

1. Boshlang'ich rejani aniqlash usullari

Shimoliy – g'arb burchak usuli. Bu usul b_1 – iste'molchining talabini A_1 – ta'minotchining mavjud mahsuloti bilan qondirishdan boshlanadi. Agar talab to'la qondirilsa (buning uchun, $a_1 \geq b_1$ bo'lishi kerak), unda A_1 ta'minotchining ortib qolgan mahsuloti bilan B_2 iste'molchining talabi qondirishga o'tiladi va hokazo. Mabodo, A_1 ta'minotchi B_1 iste'molchining talabini to'la qondira olmasa, u holda A_2 ta'minotchining mahsulotidan foydalanishga o'tiladi va uning yordamida B_1 iste'molchining talabi, yoki to'la, yoki qisman qondiriladi. Yopiq transport masalasi qaralayotganligi sababli, bu jarayon ta'minotchilarning barcha mavjud mahsulotlarini iste'molchilarga to'la tarqatib bo'lgunga qadar davom ettiriladi. Bu jarayonning har bir qadamida, yoki mos ta'minotchi mahsuloti to'la tarqatib bo'linadi, yoki mos iste'molchi talabi to'la qondiriladi.

4.2-jadval

Ta'minot-chilar	Iste'molchilar					Mavjud mahsulotlar miqdori
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5 80	6 20	9	8	3	100
A_2	9	4 40	3 110	4 0	5	150
A_3	8	7	9	2 180	5 20	200
A_4	3	4	5	4	8 150	150
Talablar	80	60	110	180	170	600

Mabodo, ikkala hol bir paytda ro'y bersa, ya'ni bir nechta ta'minotchilarning mavjud barcha mahsulotlari to'la taqsimlanib, mos iste'molchilarning talablari to'la qondirilsa, bunda mos o'ng katakka, yoki pastdagi katakka nol soni yozib qo'yiladi. Ayrim kataklarga bunday nollarni yozish bilan xosmas (bu haqda quyida aytilgan) boshlang'ich reja hosil qilinadi. Bu usulni quyidagi misolda bayon etamiz. A_1, A_2. A_3, A_4 ta'minotchilar bo'lib, ularning mahsulot miqdorlari mos ravishda $a_1 = 100, a_2 = 150, a_3 = 200, a_4 = 150$ ra teng bo'lsin. Shu mahsulotlarga ehtiyoji bo'lgan B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 iste'molchilar bo'lib, ularning mahsulotga bo'lgan talablari mos ravishda $b_1 = 80, b_2 = 60, b_3 = 110, b_4 = 180, b_5 = 170$ ga teng bo'lsin. A_i ta'minotchidan B_j – iste'molchiga birlik mahsulot tashish xarajati c_{ij} quyidagi: $c_{11} = 5, c_{12} = 6, c_{13} = 9, c_{14} = 8, c_{15} = 3, c_{21} = 9, c_{22} = 4, c_{23} = 3$ $c_{24} = 4, c_{25} = 5, c_{31} = 8, c_{32} = 7, c_{33} = 9, c_{34} = 2, c_{35} = 5, c_{41} = 3, c_{42} = 4, c_{43} = 5, c_{44} = 4, c_{45} = 8$ sonlar bilan aniqlangan bo'lsin. Bu masalani 4.1-jadval kabi, quyidagi ko'rinishda yozamiz:

A_1 ta'minotchining mavjud mahsuloti 100 ga teng. Bu hajmdagi mahsulot yordamida eng kichik tartib raqamli iste'molchi bo'lgan B_1 ning talabini qondirishdan boshlaymiz: 100 ning 80 birligi B_1 ga ajratiladi, qolgan 100-80=20 birlik mahsulot B_2 iste'molchiga beriladi, undan so'ng bu iste'molchiga yetishmagan 60-20=40 mahsulot miqdori A_2 ta'minotchi mahsuloti bilan to'ldiriladi. A_2 ta'minotchining qolgan 150-40=110 mahsuloti B_3 iste'molchining talabi bo'lgan 110 uchun, yetarli. Shunday qilib, bu qadamda A_1, A_2 ta'minotchilarning mahsulotlari to'la taqsimlanib bo'lindi va B_1, B_2. B_3 iste'molchilarning talablari to'la qondirildi. Shuning uchun, o'ng tarafdagi katakka nol soni yozib qo'yilgan (4.2-jadval).

Endi A_3 ta'minotchining mavjud mahsulot miqdori va B_4 iste'molchining talab mahsulot miqdorlari qaraladi. 4.2-jadvaldan ko'rinib turibdiki, ta'minotchining mavjud mahsulot miqdori (200) iste'molchining talab mahsulot miqdori (180) dan katta, shu sababli A_3 ta'minotchining mahsuloti bilan B_4 iste'molchi talabi to'la qondiriladi. Mos katakka 180 soni yozilgandan so'ng, o'ng katakka o'tiladi, bu bilan A_3 ta'minotchida qolgan 20 birlik mahsulot miqdori B_5 iste'molchiga beriladi. Shundan so'ng A_3 ta'minotchining mahsulot miqdori tugaydi, shu sababli pastki katakka o'tiladi, hamda A_4 ta'minotchining mavjud mahsulot miqdori (150) bilan B_5 iste'molchining qolgan talabi (150) to'la qondiriladi. Bu jarayon asosida boshlang'ich reja taqsimotiga ega bo'lamiz: $x_{11} = 80$, $x_{12} = 20$, $x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 40$, $x_{23} = 110$, $x_{24} = x_{25} = 0$, $x_{31} = x_{32} = x_{33} = 0$, $x_{34} = 180$, $x_{35} = 20$, $x_{41} = x_{42} = x_{43} = x_{44} = 0$, $x_{45} = 150$. Bu boshlang'ich rejaga mos kelgan umumiy xarajatni aniqlash uchun, ikkita son yozilgan kataklardagi sonlarni o'zaro ko'paytirib yig'indisini topish kerak bo'ladi. Ko'rilayotgan misol uchun, topilgan boshlang'ich rejaga mos umumiy xarajat

$5 \cdot 80 + 6 \cdot 20 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 110 + 2 \cdot 180 + 5 \cdot 20 + 8 \cdot 150 = 2670$ birlikka teng bo'ladi.

Minimal baholi usul. Bu usulning mohiyati shundan iboratki, avval eng kichik son yozilgan katak tanlab olinib (agar bunday kataklar soni bittadan ko'p bo'lsa, ularning ixtiyoriy bittasi tanlab olinadi), bu orqali iloji boricha ko'p mahsulot jo'natiladi. Aniqrog'i, shu katakka mos ta'minotchi va iste'molchi mahsulot miqdorlarining eng kichigi yoziladi. Bunda, albatta, yoki iste'molchi talabi to'la qondirilgan bo'ladi, yoki ta'minotchining mahsuloti to'la sarf bo'ladi, yoki ikkalasi ham bajariladi. Shundan so'ng yoki mos ustun, yoki mos satr, yoki mos ustun, satr katak elementlari keyingi hisoblashlarda ishtirok etishmaydi. Bundan keyin, qolgan katak elementlaridan eng kam xarajatli bo'lgani tanlab olinib, shu katakka mos taqsimlanish yuqoridagi kabi amalga oshiriladi. Shundan so'ng oldingi jarayon takrorlanadi va bu jarayon barcha ta'minotchilarning mahsulot miqdorlari to'la taqsimlanib, talablar to'la qondirilguncha davom ettiriladi. Bu usulni yuqorida ko'rilgan misolda bayon qilamiz.

4.3-jadval

Ta'minot-chilar	Iste'molchilar					Mavjud mahsulotlar miqdori
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	6	9	8	3 100	100
A_2	9	4 40	3 110	4	5	150
A_3	8	7	9	2 180	5 20	200
A_4	3 80	4 20	5	4	8 50	150
Talablar	80	60	110	180	170	600

4.3-jadvaldan ko‘rinib turibdiki, eng kam xarajat 2 ga teng bo‘lib, u A_3B_4 katakda joylashgan. Unga mos kelgan talab 180, berish mumkin bo‘lgan mahsulot esa 200 ga teng. Shuning uchun, bu katakka 180 yozilgan. Shundan so‘ng iste’molchi talabi to‘la qondirilgani uchun, keyingi hisoblashlarda B_4 ustun katagida joylashgan xarajat sonlari ishtirok etishmaydi. Qolgan kataklardagi eng kichik element 3 bo‘lib, u A_1B_5, A_2B_3, A_4B_1 kataklarida joylashgan. Shu kataklardan birortasi, masalan, A_1B_5 tanlab olingan bo‘lsin. U katakka mos kelgan talab bilan, mavjud mahsulot miqdorining eng kichigi 100, demak, bu katakka 100 yozilgan bo‘lishi kerak. Shundan so‘ng A_1 ta’minotchining mahsuloti tugaydi. Shu sababli keyingi hisoblashlarda A_1 satr katak elementlari ishtirok etishmaydi. Qolgan katak elementlarining eng kichigi 3 bo‘lib, u A_2B_3, A_4B_1 kataklarda joylashgan. Ulardan birortasi, masalan, A_4B_1 tanlab olingan bo‘lsin. Bu katakka mos kelgan mavjud mahsulot miqdori 150, talab esa 80 ga teng. Shuning uchun, ushbu katakka 80 yozilgan. Shundan so‘ng iste’molchining talabi to‘la qondirilgan bo‘ladi. Bundan keyingi hisoblashlarda B_1 ustun katak elementlari ishtirok etishmaydi. Qolgan kataklar elementlarining eng kichigi 3 bo‘lib, u A_2B_3 katakda joylashgan. Ushbu katakka mos kelgan iste’molchining talabi 110, ta’minotchining mavjud mahsulot miqdori 150. Demak, A_2B_3 katakka 110 soni yoziladi va bu bilan keyingi hisoblashlarda B_3 ustun katak elementlari ishtirok etishmaydi. Qolgan katak elementlarining eng kichigi 4 bo‘lib, u A_2B_2, A_2B_4, A_4B_2 va A_4B_4 kataklarida joylashgan, bunda B_4 ustuniga to‘g‘ri kelgan A_2B_4 va A_4B_4 kataklari hisobga olinmaydi, chunki B_4 iste’molchi talabi to‘la qondirilgan. Shuning uchun, A_2B_2 katakka 40 (chunki A_2 ta’minotchida 40 mahsulot miqdori qolgan edi), A_4B_2 ga 20 sonlari (chunki B_2 iste’molchiga yana 20 mahsulot miqdori kerak edi) yozilgan. Mahsulotlari tugagan ta’minotchilarga va talablari to'la qondirilgan iste'molchilarga mos kelgan satr va **ustunlardagi** kataklar elementlari hisobga olinmagan holda, eng kichik **xara**jatni topamiz, u 5 ga teng. Bu son A_3B_5 katakda joylashgan. Ushbu katakka A_3 ta'minotchida qolgan 20 mahsulot miqdorini yozamiz. Oxirgi A_4B_5 katak qoldi, unga 50 soni yozilish kerak.

Shunday qilib 4.3-jadvalda boshlang'ich taqsimotni hosil qildik, unga asosan: $x_{15} = 100$, $x_{22} = 40$, $x_{23} = 110$, $x_{34} = 180$, $x_{35} = 20$, $x_{41} = 80$, $x_{42} = 20$, $x_{45} = 50$. Bu boshlang'ich rejaga mos kelgan xarajat $3 \cdot 100 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 110 + 2 \cdot 180 + 5 \cdot 20 + 3 \cdot 80 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 50 = 1970$ ga teng bo'ladi.

Demak, ushbu usul yordamida topilgan boshlang'ich rejaga mos xarajat, shimoliy-g'arb usulida topilgan boshlang'ich reja xarajatiga qaraganda kichik, bunga sabab, oxirgi usulda aniqlangan boshlang'ich reja berilgan xarajatlarni hisobga olgan holda tuzildi.

Ikki karra afzalroq usul. Bu usulning mohiyati quyidagicha: avval har bir satrda eng kichik elementli katak (kataklar) tanlab olinib $\surd$ bilan belgilanadi, keyin har bir ustunda eng kichik elementli katak (kataklar) ham $\surd$ bilan belgilanadi. Shundan so'ng ayrim kataklar $\surd\surd$ belgili, ayrim kataklar $\surd$ belgiga ega bo'lishadi. Ikki belgili $\surd\surd$ kataklarning har biriga mos ravishda talab va mavjud mahsulotlarning eng kichigi yoziladi. Agar bu jarayon davomida mavjud mahsulotlar miqdorini iste'molchilarga to'la taqsimlashga erishilsa, unda boshlang'ich reja aniqlangan bo'ladi. Aks holda bir belgili $\surd$ kataklarga o'tiladi va ularning har biri uchun, mos ravishda mavjud mahsulotlar talab asosida taqsimlanib chiqiladi.

Mabodo, bu jarayon davomida barcha mavjud mahsulotlar miqdori iste'molchilarga to'la taqsimlanib chiqilsa, mos boshlang'ich reja aniqlanadi. Aks holda, ortib qolgan mahsulot miqdori ikkinchi – minimal baholi usul yordamida iste'molchilarga to'la taqsimlanadi va mos boshlang'ich reja aniqlanadi.

4.4-jadval

Ta'minot-chilar	Iste'molchilar					Mavjud mahsulotlar miqdori
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	6	9	8	3 100	100
A_2	9	$\surd$ 4 40	$\surd\surd$3 110	4	5	150
A_3	8	7	9	$\surd\surd$2 180	5 20	200
A_4	$\surd\surd$3 80	$\surd$ 4 20	5	4	8 50	150
Talablar	80	60	110	180	170	600

Yuqorida ko'rilgan misolga uchinchi usul – ikki karra afzalroq usulini qo'llaymiz. 4.4-jadvaldan ko'rinib turibdiki, birinchi A_1 satrda eng kichik element 3 ga teng va u beshinchi B_5 ustunda joylashgan, shu sababli bu katakka $\surd$ belgi qo'yiladi. Ikkinchi A_2 satrda eng kichik element 3 ga teng va u uchinchi B_3 ustunda joylashgan, shu sababli bu katakka $\surd$ belgi qo'yiladi. Uchinchi A_3 satrda eng kichik element 2 ga teng va u to'rtinchi B_4 ustunda joylashgan, shu sababli bu katakka $\surd$ belgi qo'yiladi. To'rtinchi A_4 satrda eng kichik element 3 ga teng va u birinchi B_1 ustunda joylashgan, shu sababli bu katakka ham $\surd$ belgi qo'yiladi.

Xuddi shu jarayon ustunlar bo'yicha ham qo'llanilsa, A_1B_5, A_2B_3, A_3B_4, A_4B_1 kataklar $\surd\surd$ belgini oladi, A_2B_2, A_4B_2 kataklari esa bir marta $\surd$ belgini oladi. Avval $\surd\surd$ belgili kataklarning har biriga mos talab va mavjud mahsulot miqdorlarni hisobga olgan holda taqsimotni aniqlaymiz. A_1B_5 katakka mos kelgan talab 170 bo'lgan holda, mavjud mahsulot miqdori 100, shu sababli ushbu katakka ularning eng kichigi bo'lgan 100 soni yoziladi. Endi ikki belgili A_2B_3 katakni qaraymiz, unga mos kelgan talab 110 bo'lib, mavjud mahsulot miqdori 150, demak, ularning eng kichigi bo'lgan 110 soni ushbu katakka yoziladi. Keyingi ikki belgili katak A_3B_4, unga mos kelgan talab 180, mavjud mahsulot miqdori esa 200, shu sababli bu katakka 180 soni yozilgan. Oxirgi ikki belgili katak A_4B_1 bo'lib, unga mos kelgan talab miqdori 80 va mavjud mahsulot 150, demak, ushbu katakka 80 yozilgan. Endi bir belgili kataklarga o'tamiz. Bir belgili A_2B_2 katakka mos kelgan talab 60, ammo A_2 ta'minotchining qolgan mahsulot miqdori 40 ga teng, shu sababli ushbu katakka 40 soni yozilgan. Navbattagi bir belgili katak A_4B_2 bo'lib, unga mos kelgan talab 20 ga teng, A_4 ta'minotchida ham 20 miqdorida mahsulot qolgan, shu sababli ushbu katakka 20 soni yozilgan. Natijada A_3 va A_4 ta'minotchilarda mos ravishda 20 va 50 miqdorida mahsulot miqdorlari qoldi, hamda B_5 iste'molchining talabi qondirilmadi. Shu ikki katakka nisbatan minimal baholi usul qo'llanilsa, A_3B_5 katakka 20 mahsulot miqdori, A_4B_5 katakka 50 mahsulot miqdori yoziladi. Bu bilan barcha ta'minotchilarning mavjud mahsulot miqdorlari iste'molchilarga to'la taqsimlandi. 4.4-jadvalga asosan, boshlang'ich taqsimot hosil qilindi, demak: $x_{15} = 100$, $x_{22} = 40$, $x_{23} = 110$, $x_{34} = 180$, $x_{35} = 20$, $x_{41} = 80$, $x_{42} = 20$, $x_{45} = 50$. Bu boshlang'ich rejaga mos kelgan xarajat $3 \cdot 100 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 110 + 2 \cdot 180 + 5 \cdot 20 + 3 \cdot 80 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 50 = 1970$ ga teng bo'ladi.

Bu yerda ham, avvalgi usuldagidek maqsad funksiyaning qiymati 1970 chiqadi (lekin bu, umuman har vaqt ham teng chiqadi, degani emas). Endi boshlang'ich reja yordamida optimal rejani topish usullaridan bo'lgan potensiallar usulini ko'rib chiqamiz.

2. Potensiallar usuli

Bu usul bilan, avval aniqlangan boshlang'ich reja yordamida, ketma-ket mavjud mahsulotlarni qayta taqsimlash orqali optimal reja topiladi. Bu jarayon xarajat jadvali yordamida amalga oshiriladi. Bunda, eng e'tiborlisi, agar reja buzilmagan bo'lsa, har bir qadamdan so'ng maqsad funksiyaning qiymati kamida bir birlikka kichiklashib boradi. Bu bildiradiki, ushbu usul, chekli iteratsiyadan so'ng, albatta, optimal rejaga olib keladi. Shu bilan birga ma'lum kriteriya yordamida optimal reja topilgani, yoki topilmagani, har bir qadamda, kuzatib boriladi.

Bundan keyin $x = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{mn})$ vektor bilan biror reja belgilanadi. Ya'ni ushbu vektorning komponentalari (4.2)–(4.4) shartlarni qanoatlantiradi.

Demak, ta'rifga asosan:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^*$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = a_i, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* = b_j, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

$$x_{ij}^* \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

bu yerda yig'indining minimumi barcha rejalar bo'yicha olinyapti.

2-ta'rif. (4.1)–(4.4) masalaning yechimini ifodalovchi $x^* = (x_{11}^*, x_{12}^*, ..., x_{mn}^*)$ reja *optimal reja* deb ataladi.

3-ta'rif. Agar $x = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{mn})$ rejaning musbat komponentalari soni $n + m - 1$ dan ko'p bo'lmasa, bunday reja *tayanch reja* deb ataladi.

4-ta'rif. Agar $x = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{mn})$ tayanch rejaning musbat komponentalari soni, aynan $n + m - 1$ ga teng bo'lsa, bunday reja *buzilmagan tayanch reja*, aks holda *buzilgan tayanch reja* deb ataladi.

2-teorema. Biror $x^* = (x^*_{11}, x^*_{12}, ..., x^*_{mn})$ tayanch reja berilgan transport masalasining optimal rejasi bo'lishligi uchun:

$$U^*_i + V^*_j = c_{ij}, \text{ agar } x^*_{ij} > 0,$$

$$U^*_i + V^*_j \leq c_{ij}, \text{ agar } x^*_{ij} = 0,$$

$$i = 1, 2, ..., m, \ j = 1, 2, ..., n$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $n + m$ ta U^*_i, V^*_j, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ sonlarining mavjud bo'lishiligi yetarli va agar $x^* = (x^*_{11}, x^*_{12}, ..., x^*_{mn})$ buzilmagan reja bo'lsa zarur hamdir. Bunda U^*_i ва V^*_j lar mos ravishda *ta'minotchi va iste'molchilarning potensiallari* deb ataladi.

Isbot. Yetarliligi. Chiziqli dasturlash nazariyasida ko'rsatiladiki; to'g'ri va unga ikkilamchi bo'lgan masalalarning maqsad funksiyalarining optimal rejadagi qiymatlari bir-biriga teng bo'ladi. Shu bilan birga quyidagi teorema o'rinli bo'ladi (uning isboti keltirilmaydi).

3-teorema. Agar to'g'ri masalaning $i-$ sharti optimal rejada tengsizlik ko'rinishda bo'lsa, unga mos ikkilamchi masalaning optimal rejasining $i-$ komponentasi nolga teng bo'ladi. Agar ikkilamchi masalaning optimal rejasi $i-$ komponentasi musbat bo'lsa, unga mos to'g'ri masalaning $i-$ chegarasi optimal rejada tenglik holda bo'ladi.

Bu teoremadan kelib chiqadiki: a) mahsulot soni $(x_{ij} > 0)$ yozilgan kataklar uchun, potensiallar yig'indisi shu katakka mos kelgan xarajatga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$U_i + V_j = c_{ij};$$

b) mahsulot soni yozilmagan $(x_{ij} = 0)$ kataklar uchun, potensiallar yig'indisi shu katakka mos kelgan xarajatdan kichik yoki teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$U_i + V_j \leq c_{ij}. \tag{4.5}$$

Endi, bevosita topilgan boshlang'ich rejalarni "yaxshilash", ya'ni optimal rejani aniqlash ko'rib chiqiladi.

Agar biror band bo'lmagan katak uchun, (4.5)-shart o'rinli bo'lmasa, topilgan reja optimal emas, uni "yaxshilash" kerak bo'ladi. Potensiallar usuli bir nechta bosqichdan iborat.

Potensiallarni aniqlash. U_i, V_j potensiallar har bir berilgan reja uchun, tuziladi va bunda

$$U_i + V_j = c_{ij} \tag{4.6}$$

tenglamalar sistemasidan foydalaniladi. Berilgan rejaning band kataklari soni $n+m-1$ ta bo'lganligi sababli, ularga mos ravishda tuzilgan (4.6) – tenglamalar sistemasi ham $n+m-1$ ta, o'zgaruvchilar soni esa $n+m$ ta. O'zgaruvchilar soni tenglamalar sonidan bittaga ko'p bo'lganligi sababli, biror o'zgaruvchiga aniq qiymat beriladi, odatda, buning uchun, band kataklari nisbatan ko'p bo'lgan A_i satr tanlanib, $U_i = 0$ deb olinadi. Shundan keyin, qolgan potensiallarning qiymatlari (4.6)-tenglamalar sistemasidan bir qiymatli aniqlanadi. Masalan, 4.4-jadvalda keltirilgan boshlang'ich rejaga mos potensiallarning qiymatlarini topish kerak bo'lsin. Buning uchun, 4.4-jadvalga shu potensiallar qiymatlarini ko'rsatadigan qo'shimcha ustun va satr kiritiladi. Band kataklar A_1B_5, A_2B_2, A_2B_3, A_3B_4, A_3B_5, A_4B_1, A_4B_2, A_4B_5 bo'lib, ularning soni $n+m-1=8$ ga teng bo'lganligi uchun, berilgan boshlang'ich reja buzilmagan rejadir. Shu band kataklar uchun, mos (4.6)-tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{aligned} &U_1+V_5=3,\ U_2+V_2=4,\ U_2+V_3=3,\ U_3+V_4=2,\\ &U_3+V_5=5,\ U_4+V_1=3,\ U_4+V_2=4,\ U_4+V_5=8. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Bu tenglamalar sistemasi 8 ta tenglamadan va 9 ta noma'lumdan iborat.

A_4 – satrda band kataklar soni ko'p bo'lganligi sababli $U_4=0$ deb olinadi. U holda $U_1=-5$, $U_2=0$, $U_3=-3$, $V_1=3$, $V_2=$

4, $V_3 = 3$, $V_4 = 5$, $V_5 = 8$ qiymatlar (4.7)-tenglamalar sistemasidan topiladi. Ular qo‘shimcha ustun va satr kataklariga mos ravishda yozib qo‘yiladi. Bular boshlang‘ich rejaning potensiallari bo‘lib xizmat qiladi. Band bo‘lmagan kataklar uchun, optimallik sharti – (4.5) tekshiriladi, agar (4.5)-tengsizlik barcha kataklar uchun, o‘rinli bo‘lsa, mos reja optimal bo‘lib, masala yechilgan hisoblanadi, aks holda (4.5)-shart bajarilmagan katakka mos ravishda musbat $U_i + V_j - c_{ij}$ – soni katakning yuqorisiga qavs ichiga plyus belgisi bilan yozib qo‘yiladi.

4.5-jadval

Ta'minotchilar	Iste'molchilar						Mavjud mahsulotlar miqdori
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	u_i \ v_j	3	4	3	5	8	
A_1	−5	5	6	9	8	3 100	100
A_2	0	9	4 40 –	3 110	(+1) 4	(+3) 5 +	150
A_3	−3	8	7	9	2 180	5 20	200
A_4	0	3 80	4 + 20	5	(+1) 4	8 – 50	150
Talablar		80	60	110	180	170	600

Ko‘rilayotgan sonli misolda A_1 – satr kataklari uchun: $-5 + 3 - 5 = -7$, $-5 + 4 - 6 = -7$, $-5 + 3 - 9 = -11$, $-5 + 5 - 8 = -8$, A_2 – satr kataklari uchun: $5 - 2 - 9 = -6$, $5 + 0 - 4 = 1$, $5 + 3 - 5 = 3$. Demak, A_2B_4 ва A_2B_5 kataklarda optimallik sharti buzilar ekan. Shuning uchun, ularga mos ravishda $U_2 + V_2 - c_{ij} = +1$, $U_2 + V_5 - c_{25} = +3$ sonlari yozilgan; A_3 – satr kataklari uchun: $2 - 2 - 8 = -8$, $2 - 1 - 7 = -6$, $2 - 2 - 9 =$

-9; A_4 – satr kataklari uchun: $0+3-5=-2$, $0+5-4=+1$. Demak, A_4B_4 katakda ham optimallik sharti buziladi, shuning uchun, u katakka $U_4+V_4-c_{44}=+1$ soni yozilgan. Shunday qilib, uchta A_2B_4, A_2B_5 ва A_4B_4 kataklarda (4.5)-optimallik sharti bajarilmaydi.

3. Yopiq zanjir tuzish va mahsulotlarni qayta taqsimlash

1-bosqichda qavs ichida plyus sonlari bilan aniqlangan kataklardan eng katta son yozilgan katak ajratib olinadi(mabodo bunday kataklar bir nechta bo‘lsa, ularning ixtiyoriy bittasi tanlab olinadi) va keyinchalik bu katak band katakka aylantiriladi (bu bilan yangi bitta band katak paydo bo‘ladi).

Biz ko‘rayotgan misolda bunday katak $A_2B_5(+3)$ dir. Bir uchi shu katakda, qolgan uchlari boshqa band kataklarda yotgan, tomonlari gorizontal yoki vertikal ko‘rinishda bo‘lgan ko‘pburchak yasaladi. Ko‘rsatiladiki, bunday ko‘pburchak har vaqt yagona aniqlanadi. Bu ko‘pburchakning boshlang‘ich uchi A_2B_5 ni $\ll + \gg$ bilan belgilanib, qolgan uchlarini ketma-ket $\ll - \gg$ va $\ll + \gg$ bilan belgilanadi. Shundan so‘ng $\ll - \gg$ uchlarga mos kelgan mahsulot miqdorlarining eng kichigi aniqlanadi.

Ko‘rilayotgan sonli misolda (4.5-jadval) ko‘pburchak uchlari A_2B_5, A_2B_2, A_4B_2 va A_4B_5 kataklardan iborat bo‘lib, $\ll - \gg$ uchlardagi minimal mahsulot miqdori 40 A_2B_2 katakda joylashgan. Shu minimal mahsulot miqdori ko‘pburchakning $\ll + \gg$ bilan belgilangan boshlang‘ich A_2B_5 uchiga o‘tkaziladi va boshqa $\ll + \gg$ bilan belgilangan uchlardagi mos mahsulot miqdorlariga qo‘shiladi, $\ll - \gg$ bilan belgilangan uchlarga mos mahsulot miqdorlaridan ayiriladi. Bunda minimal mahsulot miqdori joylashgan $\ll - \gg$ uchdagi katakka mahsulot miqdori yozilmaydi. Agar eng kam mahsulotli kataklar soni bir nechta bo‘lib qolsa, u holda bu kataklarda, ayrilgandan keyin hosil bo'lgan nol soni saqlab qolinishi kerak, chunki band kataklar soni $m+n-1$ ta bo'lishi shart.

4.6-jadval

Ta'minot-chilar		Iste'molchilar					Mavjud mahsulotlar miqdori
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	$u_i \backslash v_j$	3	4	6	5	8	
A_1	−5	5	6	9	8	3 100	100
A_2	−3	9	4	3 – 110	4	5 + 40	150
A_3	−3	8	7	9	2 180	5 20	200
A_4	0	3 80	4 60	(+1) 5 +	(+1) 4	8 – 10	150
Talablar		80	60	110	180	170	600

Ko'rilayotgan misolda A_2B_2 katakda eng kam mahsulot miqdori 40 ga tengdir, bu mahsulot miqdori A_2B_5 katakka o'tkaziladi va A_4B_2 katak $\ll + \gg$ belgili bo'lganligi uchun, undagi 20 mahsulot miqdoriga 40 soni qo'shiladi va hosil bo'lgan 60 soni yoziladi, A_4B_5 katak $\ll - \gg$ belgili bo'lgani uchun, undagi mos mahsulot miqdori 50 dan 40 soni ayiriladi va hosil bo'lgan 10 soni yozib qo'yiladi, bu bilan quyidagi 4.6-jadval hosil bo'ladi.

A_2B_5 katak band bo'lib qoldi, shuning uchun, potensiallar qiymatlari ham mos ravishda o'zgarishi kerak. Bu quyidagi potensiallarni o'zgartirish bosqichida amalga oshiriladi.

4. Potensiallarni o'zgartirish

Yuqoridagi jarayon natijasida yangi band katak hosil bo'lib qoladi, demak, bu katak uchun, optimallik sharti (4.6) – tenglik bajarilishi kerak. Bu esa potensiallarning qiymatlarini o'zgartirishga olib keladi. Bunda, shunga harakat qilish kerakki, natijada qiymati o'zgaradigan potensiallar soni iloji boricha eng kam bo'lsin (aslida, bu yerda ikkita yo'l bor, yoki ta'minotchi potensiali qiymatini, yoki iste'molchi potensiali qiymatini o'zgartirish). Ko'rilayotgan misolda, yangi band katak A_2B_5 uchun, $U_2+V_5=c_{25}$ tenglik bajarilgan bo'lishi kerak, demak, yoki U_2 ni, yoki V_5 ni o'zgartirish kerak bo'ladi.

4.6-jadvaldan ko'rinib turibdiki, buning uchun, U_2 ning qiymatini kamaytirish maqsadga muvofiq, chunki bu holda, faqat U_2 ning qiymati o'zgartiriladi. Aksincha agar V_3 ning qiymati kamaytirilsa, unda U_1, U_3, U_4 larning ham qiymatlarini o'zgartirishga to'g'ri kelar edi.

$U_2+V_5=U_2+8=5$, bundan $U_2=-3$ ekanligi, $U_2+V_3=-3+V_3=3$ dan esa, $V_3=6$ ekanligi kelib chiqadi. 4.6-jadvalda, yangi rejaga mos hisoblangan potensiallarning qiymatlari ko'rsatilgan.

Shundan so'ng 2-bosqichga o'tiladi. Band bo'lmagan kataklar uchun, optimallik sharti (4.5) ni faqat potensial qiymatlari o'zgargan satr va ustunlar uchun, olib borish yetarli. Ko'rilayotgan misolda bu A_2 satr va B_3 ustunlardir. Optimallik sharti esa A_4B_3 va A_4B_4 kataklarda buzilgan, ya'ni mos ravishda $0+6>5$ va $0+5>4$. Bu kataklarga mos ravishda qavs ichida $\ll + \gg$ belgisi bilan $U_4+V_3-c_{43}=0+6-5=1$, $U_4+V_4-c_{44}=0+5-4=1$ sonlari yozib qo'yilgan.

Bu sonlar bir-biriga teng bo'lganligi sababli, ulardan birortasi, masalan A_4B_3 tanlab olingan bo'lsin. Bir uchi shu katakda, qolgan uchlari band kataklarda bo'lgan ko'pburchak (xususan to'rtburchak) 4.6-jadvalda ko'rsatilgan. Ko'pburchakning boshlang'ich katakda joylashgan uchini $\ll + \gg$ belgi, qolgan uchlar ketma-ket $\ll - \gg$ va $\ll + \gg$ belgilar bilan belgilab chiqiladi. Shundan so'ng $\ll - \gg$ belgili uchlarga mos kelgan eng kam mahsulot miqdori aniqlanadi. Ko'rilayotgan sonli misolda bu mahsulot miqdori 10 ga teng bo'lib, u A_4B_5 katakda joylashgan. Bu mahsulot miqdori 10 A_4B_5 katakdan A_4B_3 katakka olib o'tiladi. Shundan so'ng 10 soni ko'pburchakning $\ll + \gg$ belgili uchlari joylashgan mos mahsulot miqdorlariga qo'shiladi, $\ll - \gg$ belgili uchlari joylashgan mos mahsulot miqdorlaridan ayriladi. Natijada, yangi mahsulot taqsimotiga ega bo'linadi, u 4.7-jadvalda keltirilgan.

4.7-jadval

Ta'minot-chilar	Iste'molchilar						Mavjud mahsulotlar miqdori
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	u_i \ v_j	4	5	6	5	8	
A_1	−5	5	6	9	8	3 100	100
A_2	−3	9	4	3 100	4	5 50	150
A_3	−3	8	7	9	2 180	5 20	200
A_4	−1	3 80	4 60	5 10	4	8	150
Talablar		80	60	110	180	170	600

Bu yerda, yangi A_4B_3 band katagi hosil bo'ldi, shuning uchun, mos potensiallarning qiymatlarini aniqlash talab etiladi. Buning uchun, U_4 potensialning qiymati o'zgartiriladi $U_4 + V_3 = U_4 + 6 = 5$ bo'lishlik shartidan $U_4 = -1$ kelib chiqadi. Bundan kelib chiqadiki, A_4B_1 va A_4B_2 band kataklari uchun, mos ravishda $U_4 + B_1 = 3$, $U_4 + V_2 = 4$ tengliklari bajarilishligi kerak, bu esa $V_1 = 4$ va $V_2 = 5$ bo'lganda o'rinli bo'ladi. Bu o'zgarishlardan so'ng, potensiallarning yangi qiymatlari uchun, tekshirish mumkinki (4.5)-shart bajariladi. Demak, 4.7-jadval yordamida topilgan $x_{15} = 100$, $x_{23} = 100$, $x_{25} = 50$, $x_{34} = 180$, $x_{35} = 20$, $x_{41} = 80$, $x_{42} = 60$, $x_{43} = 10$ reja optimal reja ekan.

Ushbu rejaga mos kelgan minimal xarajat: $3 \times 100 + 3 \times 100 + 5 \times 50 + 2 \times 180 + 5 \times 20 + 3 \times 80 + 4 \times 60 + 5 \times 10 = 1840$. Shu bilan berilgan sonli misol to‘la yechildi.

Bunda shunga e’tibor berish lozimki, har bir tuzilgan jadvalda satrdagi band kataklarda joylashgan mahsulot miqdorlari yig‘indisi mos zaxira mahsulot miqdoriga teng bo‘ladi.

Xuddi shunday har bir ustundagi band kataklarda joylashgan mahsulot miqdorlari yig‘indisi mos talab miqdoriga teng bo‘ladi. Bu faktni har bir yangi tuzilgan jadvalda tekshirib borish maqsadga muvofiq.

Nazorat uchun savollar

1. Jarayonlar tadqiqotining asosiy masalalarini sanab o‘ting.
2. Zaxirani boshqarish masalasida boshqaruv parametri.
3. Jihozlarni ta’mirlash va almashtirish masalasi haqida.
4. Zaxiralarni taqsimlash modelining mohiyati nima?
5. Ommaviy xizmat ko‘rsatish nima? Misollar keltiring.
6. Marshrut tanlash masalasi uchun amaliy misollar keltiring.
7. O‘yinlar nazariyasi qanday holatlarni o‘rganadi va nimani hal qiladi?
8. Qanday holatlar Markov jarayonini tashkil qiladi?
9. Markov jarayonini tadqiq qilish nima?
10. Yechim qabul qilish nazariyasining qo‘llanish sohalari nimalardan iborat?
11. Jarayonllar tadqiqoti fanining kelib chiqishiga turtki bo‘lgan omillarni ayting.
12. Jarayonlar tadqiqotining muhim tomonlari nima?
13. Masalaning matematik modeli nimani anglatadi?
14. Jarayonlar tadqiqotining asosiy bosqichlari nechta?

15. Jarayonlar tadqiqotining asosiy bosqichlari nimalar? Sanab o'ting.

16. Jarayonlar tadqiqotining asosiy bosqichlari nimadan boshlanadi?

17. Modellarning bir-biriga mos kelishligi qanday kriteriya bilan aniqlanadi?

18. Chiziqli dasturlash masalasida boshlang'ich reja qanday aniqlanadi?

19. Chiziqli dasturlash masalasida rejani optimallika tekshirish kriteriyasi nimadan iborat?

20. Nobazis o'zgaruvchi bilan almashtirilishi lozim bo'lgan o'zgaruvchi qanday aniqlanadi?

21. Qanday element hal qiluvchi bo'ladi?

22. To'g'ri va ikkilanma joiz jadvallar nima?

23. Chiziqli dasturlash masalasining standart va kanonik ko'rinishlari qanday bo'ladi?

24. To'g'ri va ikkilamchi masalalar bir-biri bilan qanday bog'langan?

25. Transport masalasining matematik modeli tuzilsin.

26. Asosiy chegaralar va o'zgaruvchilar soni aniqlansin.

27. Asosiy chegarani aniqlagan jadvalning rangi topilsin.

28. Trasport masalasining rejalar to'plami ta'rifini bering.

29. Ochiq va yopiq transport masalasi orasidagi farq aniqlansin.

30. Ochiq transport masalasi yopiq transport masalasiga keltirilsin.

31. Yopiq transport masalasi doim yechimga ega ekanligi ko'rsatilsin.

32. Yopiq transport masalasining xarajat jadvali tuzilsin.

33. Buzilgan va buzilmagan rejalarga ta'rif berilsin.

34. Boshlang‘ich rejalarni aniqlashning qanday usullari mavjud?

35. Potensial nima?

36. Potensiallar qiymatlarini topish algoritmini tushuntiring.

37. Potensiallar qiymatlarini o‘zgartirish usulini tushuntiring.

38. Optimal reja nima?

39. Optimal rejani aniqlash kriteriyasini (mezonini) keltiring.

40. Qayta taqsimlashda ko‘pburchak tuzishni tushuntiring.

41. Potensialning boshlang‘ich qiymati qanday aniqlanadi?

42. Band kataklar uchun Potensiallar qiymatlari qanday bo‘ladi?

43. Bandmas kataklar uchun Potensiallar qanday bo‘ladi?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1.2. Chiziqli dasturlash mavzusiga doir

1. Quyidagi chiziqli dasturlash misoliga simpleks usulni qo'llash orqali optimal rejani va maqsad funksiyaning mos qiymatini toping:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ &x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ &x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., 5 \end{aligned}$$

shartlar ostida

$$x_0 = 11 - x_3 - x_4 - x_5 \to \min$$

topilsin.

2. Quyidagi chiziqli dasturlash misolini kanonik ko'rinishga keltirib, so'ng simpleks usulni qo'llash orqali optimal rejani va maqsad funksiyaning mos qiymatini toping:

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ &4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2 \\ &3x_1 + x_3 \leq 5x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

shartlar ostida

$$x_0 = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$$

topilsin.

3. Quyidagi chiziqli dasturlash misoliga simpleks usulni qo'llash orqali optimal rejani va maqsad funksiyaning mos qiymatini toping:

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ &-x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1 \\ &x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., 4 \end{aligned}$$

shartlar ostida

$$x_0 = 6x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 + 8x_5 \to \min$$

topilsin. Shunday uchta vektor topilsinki, ular mos ravishda: a) reja yechim; b) tayanch reja; c) optimal reja bo'lsin.

4. Quyidagi chiziqli dasturlash misoliga simpleks usulni qo'llash orqali optimal rejani va maqsad funksiyaning mos qiymatini toping:

$$\begin{aligned}&x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 9,\\ &6x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 9\\ &x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., 5\end{aligned}$$

shartlar ostida

$$x_0 = x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 \to \min$$

topilsin.

5. Quyidagi vektorlarni bir-biri bilan leksikografik ma'noda solishtiring. Ular ichidan leksikografik ma'noda minimum va maksimum bo'lganlarini ajrating

$$\alpha = (2, 1, -2, -1),\ \beta = (2, 1, 2, 0),$$

$$\gamma = (1, -1, 0, 1),\ \delta = (-1, 0, -2, 3).$$

6. Quyidagi chiziqli dasturlash misoli kanonik ko'rinishga keltirilsin:

$$\begin{aligned}&x_1 + x_2 \geq 5,\\ &0 \leq x_3 \leq 4,\\ &x_1 + x_3 \leq 1,\\ &x_1 \geq 0\end{aligned}$$

1.3. Butun sonli chiziqli dasturlash mavzusiga doir

(n, masalan, talabaning ro'yxatdagi tartib raqami bo'lishi mumkin).

1. Siklik algoritm yordamida yeching.

1) $x_0 = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max,$
$3x_1 + 2x_2 \le 10,$
$x_1 + 4x_2 \le 11,$
$3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13,$
$x_1,\ x_2 \ge 0$ – butun.

2) $x_0 = nx_1 + nx_2 + x_3 \to \max,$
$nx_1 + 7x_2 + 22x_3 \le 22 + n,$
$2x_1 - nx_2 + 6x_3 \le 6,$
$2x_1 - 5x_2 + nx_3 \le 8n,$
$-nx_1 + x_2 + x_3 \le 1,$
$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$ – butun.

2. To'la butun sonli algoritm yordamida yeching.

1) $x_0 = x_1 + 2x_2 \to \max,$
$5x_1 + 7x_2 \le 21,$
$-x_1 + 3x_2 \le 8,$
$x_1,\ x_2 \ge 0$ – butun.

2) $x_0 = -2nx_1 - x_2 - nx_3 \to \max,$
$x_1 + nx_2 + 3x_3 \ge 8,$
$-x_1 + nx_2 + nx_3 \le 14n,$
$nx_1 + x_2 + x_3 \ge 15,$
$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$ – butun.

3. To‘g‘ri algoritm yordamida yeching.

1) $x_0 = x_1 + x_2 \to \max,$
$2x_1 + x_2 \le 2,$
$x_1 + 2x_2 \le 2,$
$x_1,\ x_2 \ge 0$ – butun.

2) $x_0 = n + x_1 + nx_2 + 2nx_3 \to \max,$
$-nx_1 + 6x_2 + x_3 \le 6,$
$-3x_1 + (10 + n)x_2 \le 10,$
$-5x_1 - 3x_2 + (7 + n)x_3 \le 7,$
$3x_1 - 6x_2 + x_2 \le 12,$
$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$ – butun.

4. Tarmoqlar va chegaralar algoritmi yordamida yeching.

1) $x_0 = 1 - x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$
$x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2,$
$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$ – butun.

2) $x_0 = x_1 + nx_2 \to \max,$
$-nx_1 + 2x_2 \le 4n,$
$4nx_1 + 3x_2 \le 32n.$
$0 \le x_1 \le 6,$
$0 \le x_2 \le 54,$
$x_1,\ x_2$ – butun.

5. Ikki A va B turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun, uch xil xomashyo ishlatiladi. Maksimal daromad keltiruvchi ishlab

chiqarish rejasini tuzish talab etiladi. Zarur ma'lumotlar quyida berilgan:

Xomashyo xillari	*Xarajat miqdori*		*Xomashyo zaxirasi*
	A	*B*	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	3	12	252
Bitta mahsulotdan kelgan foyda	30	40	

6. $6 \times 13\,m^2$ o'lchamdagi temir-tunukadan kamida 800 ta $4 \times 5\,m^2$ o'lchamli va kamida 2530 ta $2 \times 3\,m^2$ o'lchamli buyumlar yasash kerak bo'lsin. Bunda har bir temir-tunukadan buyumlar olishning 4 ta usuli bor:

Buyumlar	*Har bir temir-tunukadan buyumlar olish usullari*			
	1	2	3	4
4×5	3 *dona*	2 *dona*	1 *dona*	–
2×3	1 *dona*	6 *dona*	9 *dona*	13 *dona*

Chiqindini kamaytirish talab etiladi. Nechta temir-tunuka zarur va ulardan qanday foydalanish kerak.

7. Ilmiy-ishlab chiqarish birlashmasi korxonalar uchun, komplekt buyumlarni tayyorlash bilan shug'ullanadi. *A* va *B* buyumlarni tayyorlashda po'lat va rangli metallardan foydalaniladi. Texnologik jarayon buyumlarga tokar va frezer uskanalarida ishlov berishni ham o'z ichiga oladi. Barcha sonli ma'lumotlar quyida berilgan. Optimal ishlab chiqarish rejasi tuzilsin.

	Xomashyo		dastgoh/soat		Narx, so'mda
	Rangli metall	Po'lat	Tokar ishlari	Frezer ishlari	
A	10	25	41	90	100
B	30	25	90	50	250
Zaxira	4500	6250	14100	1800	

8. Korxona 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Birinchi turdagi mahsulotdan bir birlik ishlab chiqarish uchun, 3 kg xomashyo, 22 soat vaqt birligi, 10 soat-jihoz; ikkinchi turdagi mahsulotga, mos ravishda 5, 14 va 4; uchinchi uchun – 2, 18 va 8; to'rtinchi uchun – 4, 30, 16. Zaxirada 60 kg xomashyo, 400 soat, 130 soat-jihoz mavjud. Birinchi turdagi mahsulotning bir birligidan – 30, ikkinchisidan – 25, uchinchisidan – 56, to'rtinchisidan – 48 foyda tushadi. Agar birinchi turdagi mahsulotdan ko'pi bilan 5 ta, ikkinchisidan kamida 8 ta ishlab chiqarish zarur bo'lsa daromad maksimumlashtirilsin.

9. Mebel ishlab chiqarish korxonasida fanera taxtasidan uch xildagi yarim tayyor mahsulot tayyorlanadi. Ularning soni mos ravishda 24, 31 va 18 dan kam bo'lmasligi kerak. Bunda ikki usul mavjud: 2+5+2 (chiqindi 12 sm) va 6+4+3 (chiqinda 16 sm). Umumiy chiqindi miqdorini minimum qilish uchun, nechta fanera kerak va ulardan qanday foydalanish zarur?

10. Korxona stol va shkaflar ishlab chiqaradi. Har bir stoldan keladigan foyda 6 ga, har bir shkafdan esa 10 ga teng. Bitta stol yasash uchun, $0,2m^2$ birinchi nav, $0,1m^2$ ikkinchi nav yog'ochdan va $1,2$ soat ishchi vaqti sarflanadi; bitta shkaf uchun, mos ravishda $0,1m^2$, $0,3m^2$ va $1,5$ soat. Birinchi nav yog'och zaxirasi $38m^2$, ikkinchi nav yog'och zaxirasi $40m^2$ va ishchi vaqti zaxirasi 55 soatni tashkil etadi. Maksimal foyda olish uchun, nechtadan stol va shkaf ishlab chiqarish kerak?

11. O‘rtacha kunlik ovqatda ikkita A va B ozuqa zarur bo‘lib, birinchisi 200 birlikdan kam bo‘lmasligi kerak. A ning birligi bahosi 2 ga, B niki 4 ga teng. Eng arzon bo‘lgan ozuqa tayyorlash talab etiladi.

To‘yimlilik moddalari	*Minimal me'yor*	*Bir birlikdagi miqdor*	
		A	B
1	120	0,1	0,6
2	160	0,4	0,2

12. Uch turdagi gazlama ishlab chiqarish uchun, ikki xildagi jihozdan foydalaniladi. Bunda yigirilgan ip va bo‘yoqlar ishlatiladi. Gazlamalarning shunday optimal aralashmasi aniqlansinki, natijada daromad maksimal bo‘lsin.

Resurslar turi	*Soni*	*Unumdorlik va xarajat mezoni*		
		1	2	3
1-*jihoz*	30 *j/s*	20 *m/s*	10 *m/s*	25 *m/s*
2-*jihoz*	45	8	20	10
Yigirilgan ip	30	120	180	210
Bo‘yoqlar	100	10	5	8
Baho	—	15	15	20

13. A va B turdagi detallarga ishlov berish ketma-ket uchta dastgohda amalga oshiriladi. Bitta A turdagi detaldan kelgan foyda 10 ga, bitta B dan kelgani 16 ga teng. A detaldan kamida 300 ta, B dan ko‘pi bilan 200 ta ishlab chiqarish zarur. Maksimal daromad keltiruvchi ishlab chiqarish rejasi tuzilsin.

Dastgohlar	*Bittaga ishlov berish vaqti*		*Vaqt zaxirasi*
	A	B	
1	$0,2$	$0,1$	100
2	$0,2$	$0,5$	180
3	$0,1$	$0,2$	100

1.4. Transport masalasi mavzusiga doir

1. To'rtta paxta saqlash punktlarida mos ravishda 200, 250, 100 va 400 tonna paxtalar zaxirasi mavjud bo'lib, ularni uchta paxta tozalash zavodlariga tarqatish kerak. Bunda, har bir punkt barcha zavodlar bilan yo'l orqali bog'langan. Zavodlarning berilgan vaqt oralig'ida ishlash quvvatlari chegaralangan bo'lib, ular mos ravishda 450, 300, 200 tonna paxtani tozalay oladi. Agar c_{ij}, $i-$ punktdan $j-$ zavodga 1 tonna paxtani olib borish xarajatini bildirsin. Xarajat jadvali quyidagicha berilgan bo'lsin:

$$C=\begin{pmatrix}7&4&9\\8&5&2\\1&9&3\\2&8&6\end{pmatrix}$$

Punktlardagi barcha paxtalarni zavodlarga shunday taqsimlash lozimki, natijada ketgan umumiy xarajat eng kam bo'lsin.

2. Paxta tolasini ishlab chiqaruvchi uchta zavodda mos ravishda 150, 180, 220 tonna paxta tolalari bo'lib, ularni paxta tolasidan ip yigiruvchi to'rtta fabrikaga tarqatish kerak. Fabrikalarni ishlab chiqarish quvvatlari mos ravishda 100, 150, 200, 100 tonna bilan chegaralangan. $i-$ zavoddan $j-$ fabrikaga 1 tonna paxta tolasini tashish uchun, $c_{ij}-$ xarajat ketadi deb, ularning sonli qiymati quyidagi jadval ko'rinishda berilgan:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 19 \\ 7 & 15 & 10 & 21 \\ 8 & 20 & 12 & 25 \end{pmatrix}$$

Paxta tolalarini zavodlardan fabrikalarga tarqatishning shunday usuli ko'rsatilsinki, natijada ketgan umumiy xarajat eng kam bo'lsin.

3. Shahar atrofida joylashgan uchta xo'jalik mos ravishda 120, 180, 150 tonna mahsulot miqdori yetishtirishni mo'ljallagan bo'lsin. Bu mahsulotlarni shahar ichida joylashgan beshta sotuv shoxobchasiga tarqatish kerak. Lekin savdo shoxobchalarining mahsulot qabul qilishi (sotish quvvati) mos ravishda 90, 120, 80, 100, 60 tonnaga teng. Xo'jaliklardan sotuv shoxobchalariga 1 tonna mahsulotni olib kelish xarajatlari quyidagicha bo'lsin:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 25 & 40 & 50 & 80 \\ 45 & 10 & 70 & 85 & 30 \\ 60 & 20 & 20 & 45 & 35 \end{pmatrix}$$

Mahsulotlarni savdo shoxobchalariga shunday tarqatish kerakki, natijada ketgan xarajat eng kam bo'lsin.

4. Uchta tegirmonda kuniga mos ravishda 110, 190 va 90 tonna un ishlab chiqariladi. To'rtta non ishlab chiqaruvchi zavodlar kuniga mos ravishda 80, 60, 170 va 80 tonna un ishlatishadi. 1 tonna unni tegirmonlardan non zavodlariga olib borish xarajatlari quyidagi jadval orqali berilgan bo'lsin:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 8 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Tashishning eng kam xarajatli rejasi tuzilsin.

5. To'rtta qurilish inshootiga uchta zavoddan g'isht tashib keltiriladi. Har bir zavod kuniga mos ravishda 100, 150, 50 shartli

dona g'isht ishlab chiqara oladi. O'z navbatida har bir qurilish inshootida kuniga mos ravishda 75, 80, 60 va 85 shartli dona g'isht ishlatiladi. Bir dona g'ishtni zavoddan qurilish inshootiga tashish xarajati quyidagi jadval orqali berilgan:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

G'ishtlarni tashishning shunday rejasi tuzilsinki, natijada umumiy ketgan xarajat eng kam bo'lsin.

6. Tuproqning tarkibiga ko'ra ekish maydonlari uch qismga bo'lingan. Ularning maydonlari mos ravishda 400, 150, 250 ga ni tashkil qiladi. Bu maydonga 5 turdagi mahsulot ekish mo'ljallangan bo'lib, bular aytaylik: qovun, tarvuz, piyoz, sabzi va kartoshka. Tayyorlangan urug'lar miqdori mos ravishda 200, 140, 180, 100 va 180 ga maydonga yetadi. Har bir qismdagi maydondan mahsulotlarni olish hosildorligi turlicha va u quyidagi jadval orqali berilgan bo'lsin:

$$C = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 10 & 15 & 40 \\ 25 & 30 & 35 & 50 & 45 \\ 15 & 25 & 40 & 45 & 60 \end{pmatrix}^T$$

Bo'lingan uchta maydonning har birini mahsulot ekish uchun, shunday ajratish kerakki, natijada umumiy olinadigan mahsulot miqdori eng ko'p bo'lsin.

7. Bir xil gazlama ishlatuvchi to'rtta tikuv fabrikalari mamlakat turli shaharlarida joylashgan bo'lib, ularni bu gazlamaga bo'lgan ehtiyojlari mos ravishda shartli 90, 40, 70 va 140 km dan iborat. Ularni gazlama bilan ta'minlab beruvchi uchta ishlab chiqaruv fabrikalari bo'lib, ularning bir xil km gazlamani tikuv fabrikalariga tashish xarajati quyidagi jadval orqali berilgan:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 7 & 3 \\ 9 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ishlab chiqaruv fabrikalarining quvvati mos ravishda 150, 100 va 90 km dan iborat. Gazlamalar tashishning shunday usuli topilsinki, natijada ketadigan umumiy xarajat eng kam bo'lsin.

8. To'rtta bug'doy yetishtirish bilan shug'ullanuvchi xo'jaliklarning kombaynga bo'lgan ehtiyojlari mos ravishda 15, 10, 20 va 5 ta bo'lib, ularga kombaynlar uchta punktdan jo'natiladi. Bu punktdagi kombaynlar miqdori mos ravishda 8, 14, 28 ga teng. Har bir punktdan bitta kombaynni xo'jalikka borishlik xarajati quyidagi jadval bilan berilgan:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Punktdagi kombaynlarni xo'jaliklarga shunday taqsimlash kerakki, natijada umumiy ketgan xarajat eng kam bo'lsin.

9. Ekish maydoni, kerak bo'lgan mahsulotlar turiga ko'ra, to'rt qismga bo'lingan bo'lib, ularga mos ravishda 15, 7, 10, 8 ta traktor zarur. Traktorlar uchta bazada joylashgan bo'lib. ularning sonlari mos ravishda 16, 10, 14 ga teng. Har bir bazadagi traktorni ekin maydonlarida ishlatish xarajatlari quyidagi jadval bilan berilgan:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Traktorlarni ekin maydon bo'laklariga shunday taqsimlash kerakki, natijada umumiy ketgan xarajat eng kam bo'lsin.

10. Detallarni qayta ishlashda beshta dastgohda beshta operatsiya bajarilishi kerak. Bunda har bir operatsiya faqat bitta dastgohda bajariladi. Har bir operatsiyani dastgohlarda bajarilish vaqti quyidagi jadval ko'rinishda berilgan:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Har bir operatsiya uchun, dastgohni shunday tanlash lozimki, natijada umumiy ketgan vaqt minimal bo'lsin.

II BOB.
O'YINLAR NAZARIYASI

Tabiat va jamiyatda ro'y berayotgan jarayonlarning deyarli barchasida ziddiyatli holatlar mavjuddir. Shu sababli, bunday ziddiyatli jarayonlarning qanday tarzda davom etishi, so'zsiz, ushbu ziddiyat holatlarini aniqlab beruvchi ishtirokchilarning xatti-harakatiga butunlay bog'liq bo'ladi. Ziddiyatli holatlarni boshqarish esa, ko'p hollarda, inson tomonidan amalga oshiriladi. Demak, bu bilan, ziddiyatli jarayonlarning qanday davom etishini o'zgartirish, natijani o'z foydasiga, qandaydir ma'noda, hal etish imkoni paydo bo'ladi. Masalan, mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar faoliyat ko'rsatish jarayonida, turli boshqaruv, ishlab chiqarish, mahsulot sifatini nazorat qilish, moliyaviy – reja, sotish, xizmat ko'rsatish va boshqa bo'limlardan tashkil topgan bo'ladi. Bunda, nafaqat bo'linmalar ichida, balki bo'linmalar orasida ham qarama-qarshilik mavjud bo'lishi mumkin. Reja-moliyaviy bo'lim kam mablag' sarflab ko'p mahsulot ishlab chiqarishga harakat qilsa, ishlab chiqarish bo'limi mahsulot sifatini nazorat qilish, xizmat ko'rsatish bo'limlari, aksincha, zaxirada ko'proq mablag' bo'lishligini talab etishadi. Yoki sotish bo'limi mahsulot zaxirasini va xilma-xilligini (assortimentini) ko'paytirishga harakat qilsa, ishlab chiqarish va reja-moliya bo'limlari uchun, bu ma'qul emas, chunki zaxira mahsulotini saqlash va mahsulot turini ko'paytirish uchun, qo'shimcha xarajatlar va kuchlar talab etiladi.

Shu kabi ziddiyatli holatlarni o'rganish va unda maqbul reja (yechim) qabul qilish korxonaning boshqaruv bo'limi tomonidan amalga oshiriladi. Bundan, tushunarliki, reja qabul qilish ixtiyoriy ravishda emas, balki korxonaning umumiy maqsadini ko'zlagan holda olib borilishi lozim.

Endi tabiat bilan bog'liq bo'lgan misolni keltiraylik. Qishloq xo'jaligida ekin turlarini ekish ob-havoning qanday bo'lishligiga bog'liq. Shu sababli, ekin turini ob-havoga moslashtirib tanlanmasa foyda o'rniga zarar ham ko'rish mumkin. Ammo ob-havoning qanday kelishligini oldindan to'liq aytib berishning iloji bo'lmaganligi sababli, ekin turini aniqlab ekish, umuman olganda, tavakkaliga olib boriladi. Bunda, ziddiyat shundan iboratki, bir tomondan tabiat o'z hukmini o'tkazib ob-havoni o'zgartirishi mumkin, ikkinchi tomondan inson esa ob-havo "injiqliklarini" oldindan hisobga olgan holda, ko'proq foyda olish maqsadida ekin turini aniqlaydi.

Bu misollarda shunga e'tibor beriladiki birinchi korxona misolida, ziddiyat ongli insonlar o'rtasida bo'lsa, ikkinchi misolda tabiat bilan insonlar orasida bo'ladi. Birinchi misolga o'xshash ziddiyatli holatlarni tadqiq qilish bilan o'yinlar nazariyasi, ikkinchi misolga o'xshash ziddiyatli holatlarni tadqiq qilish bilan tabiat bilan o'yin deb ataladigan bo'lim shug'ullanadi.

O'yinlar nazariyasi matematikaning bir bo'limi hisoblanib, ziddiyatli jarayonlarda eng maqbul (optimal) yechim qabul qilishning tahlili va uni aniqlash usullarini yaratish bilan shug'ullanadi. Bu nazariya nisbatan yangi yo'nalish bo'lib, uning asosiy g'oyalari va amaliy tatbiqlari oldingi asrning 70-yillaridan boshlab amalga osha boshladi. Ammo avvalroq matematik Fon Neyman 1928—1935-yillar davomida o'yinlar nazariyasiga doir bir nechta maqolalar chop ettirgan, shundan so'ng fransuz matematigi E. Borel o'yinlar nazariyasiga taalluqli bo'lgan masalalarni tadqiq qila boshlagan. Ziddiyatli jarayonlarda yechim qabul qilishning statistik usullarini yaratish uchun, yangi fundamental g'oyalar bilan asos solgan olimlardan biri A. Vald hisoblanadi.

O'yinlar nazariyasi hozirgi paytda iqtisodiyot, jamiyat va boshqa jarayon modellarini tadqiq etishning samarali nazariy, amaliy manbayi sifatida foydalanib kelinmoqda.

O'yinning matematik nuqtayi nazardan tushunchasi juda keng bo'lib, u nafaqat shaxmat, shashka, karta, domino, go va boshqa o'yinlarni, balki bir-biri bilan raqobatda bo'lgan, masalan: sotuvchi va xaridor, ishlab chiqarish jarayonidagi ishlab chiqarish va sotish bo'limlari, hatto davlatlar orasida gegemonlik uchun, kurash va boshqalarni ham tadqiq etishni o'z ichiga oladi.

O'yinning matematik nuqtayi nazardan qat'iy ta'rifiga murojaat qilmasdan aytish mumkinki, o'yin shunday jarayonki, unda bir yoki bir nechta ishtirokchilar o'zlariga tegishli bo'lgan vositalar yordamida vaziyatni o'zgartirishlari (bunda, albatta, ularning yakuniy oladigan yutuqlari boshqalarning xatti-harakatiga ham bog'liq bo'ladi) va bu bilan o'zlarining yakuniy yutuqlarini ko'paytirishga harakat qiladilar.

O'yinning davom etish jarayonida ayrim yechimlarni qabul qilish tasodifiy bo'lishi ham mumkin. Masalan, kartaning pokyer o'yinida boshlang'ich chiylangan kartalarning ketma-ket joylashishi tasodifiydir.

O'yin oxirida har bir ishtirokchiga tegishli bo'lgan sonli miqdorlar aniqlangan bo'ladi, agar bu son musbat bo'lsa ishtirokchining yutug'ini, manfiy bo'lsa yutqizig'ini ifodalaydi. Albatta, bu sonli miqdor kattaligi ishtirokchilarning qabul qilgan yechimlariga, hamda tasodifiy yechimlarga ham bog'liq bo'ladi. O'yindagi ishtirokchilarning har biri, o'zining yutug'ini kattalashtirishga (maksimumlashtirishga) harakat qiladi.

Ishtirokchilarning yutuqlariga nisbatan ular tomonidan qabul qilingan eng maqbul yechimlar majmuasi *o'yinning yechimi* deb ataladi. O'yinlar nazariyasining asosiy masalasi:

ma'lum qonun-qoidaga amal qiluvchi, ziddiyatni tashkil etuvchi shart-sharoitlar bilan ishtirokchilarning yechimlari orasidagi bog'liqlikni aniqlashdir. Shundan so'ng qo'yiladigan asosiy savollar quyidagilardan iborat: "O'yinning yechimi mavjudmi?", "O'yinning yechimi qanday, uni qaysi usul bilan topish mumkin?" Hozirga qadar ishtirokchilar soni ikkita bo'lgan o'yinlar to'la tadqiq etilgan, ya'ni yechim tushunchasi, optimal yechimni aniqlash usullari hal etilgan. Ishtirokchilar soni ikkitadan ko'p bo'lgan o'yinlar uchun, bir qancha mezonlar (kriteriyalar) taklif etilgan bo'lib, ularga mos optimal yechimlar ham aniqlangan, lekin ularning hech birini o'yinlarga qo'yiladigan talablarni to'la-to'kis qanoatlantiradi, deb ta'kidlash mumkin emas.

O'yinning berilish alomatlariga ko'ra sinflarga ajratish mumkin. Koalitsiyasiz (birlashish mumkin bo'lmagan) o'yinlarda har bir ishtirokchi alohida qatnashadi va ularning birgalashib harakat qilishlariga ruxsat etilmaydi. Demak, bunday o'yinda har bir ishtirokchi faqat yakka holda o'zining maqsadini ko'zlab ish yuritishiga to'g'ri keladi.

Kooperativ o'yinlar nazariyasida ishtirok etuvchilar maksimal yutuqqa erishish va keyinchalik uni bo'lib (taqsimlab) olish maqsadida vaqtincha birlashib harakat qilishadi. Bunday o'yinlarda asosiy muammo, olingan yutuqni adolatli ravishda taqsimlashdir. Bu yo'nalishda ham bir qancha kriteriyalar mavjud bo'lib, ularning hech biri qo'yilgan muammoni to'la-to'kis hal etib bera olmaydi.

Koalitsion o'yinda esa, aksincha, ishtirok etuvchilarning birlashib, koalitsiya tuzib harakat qilishlariga ruxsat etiladi. Bunda bir koalitsiyadagi ishtirokchilar o'zaro ma'lumot almashishlari va bamaslahat (kelishib) yechim qabul qilishlari mumkin. Bunda ham asosiy muammo, koalitsiyalar bir-biri to'g'risida to'la ma'lumotga ega bo'lmaslik va bu esa o'z navbatida yechimni ehtimollik bilan qabul qilishga olib keladi.

O‘yinda ishtirok etuvchilarning oladigan yutuqlariga qarab antagonistik, yoki yutuq yig‘indilari o‘zgaruvchi bo‘lgan o‘yinlarga ajratiladi. Bu ikki o‘yinning farqi shundan iboratki, birinchi o‘yinda ishtirokchilar soni ikkita va ularning oladigan yutuqlari yig‘indisi har vaqt nol bo‘lsa, ikkinchi o‘yinda ularning oladigan yutuqlari yig‘indisi o‘zgaruvchan bo‘ladi.

Ishtirokchilar ega bo‘lishi mumkin ma’lumotlarga ko‘ra, o‘yin to‘la ma’lumotli, yoki to‘lamas ma’lumotli, ishtirokchilarning qabul qilishi mumkin bo‘lgan yechimlari soniga qarab o‘yin chekli, yoki cheksiz bo‘ladi.

Ziddiyatli jarayonlarning ko‘pchiligida yechim qabul qilishning joiz alternativalari mavjud bo‘lib, ular bir nechta, hatto cheksiz ko‘p bo‘lishi ham mumkin, bu esa ular ichidan qaysidir ma’noda eng yaxshisini tanlab olishni talab etadi.

1-§. Tavakkalchilik va aniqmaslik sharoitida yechim qabul qilish

Ixtiyoriy jarayonni tadqiq etish davomida yechim (qaror) qabul qilishga to‘g‘ri keladi. Bunda, yechim qabul qilish qanday vaziyatda: ma’lumotlar to‘la yoki to‘la emas bo‘lishligi muhim bo‘lib, ular ikki qarama-qarshi holatlarni ifodalaydi. Bularning o‘rtasida bo‘lgan yana bir holat borki, u *tavakkalchilik* deb ataladi. Bunda ro‘y berishi mumkin bo‘lgan holatlarning ehtimolligi, yoki ularning taqsimot funksiyalari berilgan bo‘lishi ham mumkin.

Masalan, bozorda biror mahsulotga bo‘lgan narx aniqlik sharoitida o‘zgarmasdan turadi, tavakkalchilik sharoitida esa u tasodifiy miqdor bo‘lib, o‘zgarish qonuni taqsimot funksiya orqali berilgan bo‘ladi, aniqmaslik sharoitida esa u tasodifiy miqdor bo‘lib, uning o‘zgarish qonuniyati yoki berilmagan, yoki umuman aniqlab bo‘lmaydi. Lekin aniqmaslik sharoitida ma’lumot yo‘q degani, bu faqat tasodifiy miqdorning berilish qonuniyatiga nisbatan aytilgan bo‘lib, uning qabul qiladigan qiymatlari (holatlar majmuasi, holatlar to'plami) oldindan ma'lum bo'ladi. Ma'lumotlarning berilish darajasiga qarab, berilgan masala ham turlicha formallashtiriladi. Masalan, yuqoridagi misolda: aniq sharoitda, qabul qilingan yechimning sifatini ketgan xarajat orqali (kriteriya) ifodalash mumkin, tavakkalchilik sharoitida esa narx tasodifiy miqdor bo'lib, uni hisobga olgan holda kriteriya tuzish kerak bo'ladi, aniqmaslik sharoitida esa, narx haqida ma'lumot mutlaqo noma'lum bo'lib, yuqoridagi aniq kriteriyalarni, umuman, qo'llab bo'lmaydi. Bu mulohazalar ko'rsatadiki, ma'lumotlarning aniqmasligi ortib borishi kriteriya tanlashni ham, yechim qabul qilish masalasini ham qiyinlashtirib, umuman, qat'iy ishonchli natijalarga olib kelmaydi. Shunday qilib, aniqlik sharoitida kriteriyani tuzish hech qanday qiyinchilik tug'dirmaydi, ammo tavakkalchilik va aniqmaslik sharoitlarida esa turli kriteriyalar ishlatiladi. Ularning hech biri bekami-ko'st, kamchiliksiz hisoblanmasdan, faqat turli ko'rinishda bo'lgan talablarni qanoatlantirishi bilan cheklanadi.

Ko'rilayotgan masala ikki ishtirokchili o'yinga keltirilgan bo'lib, ikkinchi ishtirokchi "ongsiz" raqib sifatida qabul qilinsa, bunday o'yin *tabiat bilan o'yin* deb ataladi. Bunday o'yinning eng muhim tomoni: tabiat turli holatlarni keltirib chiqarish bilan, u bu holatlarning qaysi biri ro'y berishidan manfaatdor emas. Tabiat bilan o'yin masalasidagi asosiy muammo – maqsadga yo'naltirilgan kriteriyani aniqlash va unga nisbatan optimal yechimni topishdir. Agar ko'rilayotgan masalada ikkinchi ishtirokchi ongli raqib, deb faraz qilinsa, mazkur holat ziddiyatli bo'lib, u bilan o'yinlar nazariyasi shug'ullanadi.

Tabiat bilan o'yin masalasi

Biz bu punktda tabiat bilan o'yin masalasida uchraydigan turli kriteriyalar bilan tanishib chiqamiz. Bular: yutuqning matematik kutilmasi kriteriyasi, Laplas kriteriyasi, Valdning minimaks (maksimin) kriteriyasi, Sevidj kriteriyasi, Gurvits kriteriyasi va Hodja-Leman kriteriyasi. Yechim qabul qilishda qaysi kriteriyaning tanlanishi, ko'proq yechim qabul qiluvchining ixtiyorida bo'lgan ma'lumot va uning xulq-atvoriga bog'liq bo'ladi. Masalan, tavakkalchilikni yoqtirmaydigan (umidsiz)lar uchun, minimaks (jadval elementlari xarajatni bildirsa) va maksimin (jadval elementlari foydani bildirsa) kriteriyalari to'g'ri kelsa, ko'proq tavakkalchilikni yoqtiradiganlar uchun, Laplas va Sevidj kriteriyalari ma'quldir. Gurvits kriteriyasi parametrga bog'liq. Bu parametrga turli qiymatlar berish bilan "pessimist" (umidsiz) bilan "optimist" (nekbinlarning) aralashmasi hosil qilinadi.

Afsuski, bu kriteriyalarning birortasini afzalligini ifodalab beruvchi umumiy qoida yo'q, u yoki bu kriteriyani tanlash yechim qabul qiluvchining o'ziga tamoman bog'liqdir. Bu kriteriyalarni qo'llashda yechim qabul qiluvchiga qarshi "ongli dushman" emas aksincha, tabiat, ya'ni maqsadi yo'q bo'lgan kuch turibdi, deb faraz etiladi. Mabodo, yechim qabul qiluvchiga qarshi "ongli dushman" turgan bo'lib, uning ham o'z maqsadlari bo'lsa, hosil bo'lgan bunday masalalar bilan yuqorida ta'kidlanganidek, o'yinlar nazariyasi shug'ullanadi.

Agar tabiatning holatlari va yechim qabul qiluvchining strategiyalari (yechimlari, qarorlari) chekli sonda bo'lib, ular mos ravishda n va m ta bo'lsa, ularni jadval ko'rinishida ifodalash qulay bo'lib, uning ustunlari tabiat holatlariga, satrlari esa yechim qabul qiluvchining strategiyalariga mos keltiriladi.

Tabiat holatlari $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ bilan, yechim qabul qiluvchining strategiyalari esa $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ bilan belgilansin. Yechim qabul qiluvchi α_i strategiyasini tanlaganda tabiat θ_j holatni vujudga keltirgan bo'lsa, yechim qabul qiluvchining foydasi (zarari) $w(\alpha_i, \theta_j)$ son bilan ifodalansin. Bunda mos jadvalning ko'rinishi quyidagicha: bo'ladi

1.1-jadval

	θ_1	θ_2	$\ldots$	θ_n
α_1	$w(\alpha_1, \theta_1)$	$w(\alpha_1, \theta_2)$	$\ldots$	$w(\alpha_1, \theta_n)$
α_2	$w(\alpha_2, \theta_1)$	$w(\alpha_2, \theta_2)$	$\ldots$	$w(\alpha_2, \theta_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
α_m	$w(\alpha_m, \theta_1)$	$w(\alpha_m, \theta_2)$	$\ldots$	$w(\alpha_m, \theta_n)$

1.2-jadval

	θ_1	θ_2	$\ldots$	θ_n
α_1	w_{11}	w_{12}	$\ldots$	w_{1n}
α_2	w_{21}	w_{22}	$\ldots$	w_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
α_m	w_{m1}	w_{m2}	$\ldots$	w_{mn}

Murakkab yozishlardan qutilish maqsadida $w_{ij} = w(\alpha_i, \theta_j)$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ belgilashni kiritamiz. U holda 1.1-jadval ham mos ravishda o'zgartirib yoziladi (1.2-jadval).

Bundan keyin $W = (w_{ij})$ jadvalning elementlari yechim qabul qiluvchining yutug'ini(foydasini) bildirsin.

Yutuqning matematik kutilmasini maksimumlashtirish usuli

Agar tabiat keltirib chiqaradigan $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ holatlarning ro'y berish ehtimolliklari ma'lum bo'lsa, u holda yutuqni o'rtacha matematik kutilmasini aniqlash imkoni bo'ladi. Tabiat tomonidan θ_j holatni keltirib chiqarish ehtimoli p_j – aniqlangan bo'lsin. U holda

$$\sum_{j=1}^{n} p_j w_{ij} \tag{1.1}$$

soni yechim qabul qiluvchi tomonidan α_i strategiyani qo'llagandagi, uning o'rtacha yutug'ini bildiradi. Ravshanki (1.1) soni, albatta, yechim qabul qiluvchi tomonidan tanlangan α_i strategiyaga bog'liq. Shu sababli, yechim qabul qiluvchi shunday α_i – strategiyani tanlaydiki, natijada (1.1) soni eng katta bo'lsin. Albatta, bunda (1.1) sonini eng kattasini aniqlab beruvchi strategiya yechim qabul qiluvchi tomonidan tanlab olinadi. Bu strategiya yutuqning matematik kutilmasi kriteriyasiga nisbatan optimal hisoblanadi.

Demak, bu kriteriyani qo'llashda $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ holatlarning ro'y berish ehtimolliklari $p_1, p_2, ..., p_n$ larning berilishi muhimdir.

1-masala. Ishlab chiqarish jarayonida mahsulotlarning nuqsonliklari 8, 10, 12 va 14 foiz bo'lib, ularning ro'y berish ehtimolliklari mos ravishda 0,4; 0,3; 0,25 va 0,05 ga teng. Ishlab chiqaruvchi A, B va C iste'molchilar bilan aloqa qilib, shartnomada ko'rsatib o'tilgan nuqsonlar mos ravishda 8, 12 va 14 foizdan oshmasligi shart ekanligi ta'kidlab o'tilgan. Mabodo, nuqsonlar foizi ortib ketsa, har bir foiz uchun, 1 million so'm jarima to'lanadi. Ammo nuqsonlarning foizini 1 birlikka kamaytirish uchun, ishlab chiqaruvchi qo'shimcha 500000 so'm sarflashi zarur. Qaysi iste'molchining boshqalarga nisbatan mahsulot olish imkoniyati katta?

Ushbu masalada uchta turli yechimlar bor: mahsulotlarni A, B va C iste'molchilarga jo'natish, bular mos ravishda $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ yechimlarga mos keladi. Xuddi shunday to'rtta holat bor: $\theta_1 = 8, \theta_2 = 10, \theta_3 = 12$ ва $\theta_4 = 14$ foiz nuqsonli mahsulotlar ishlab chiqarish. Endi xarajat jadvalini tuzamiz.

α_1 yechimni qabul qilish 8 foizli nuqson bilan iste'molchiga mahsulotni jo‘natishni bildiradi. Shu sababli, agar mahsulot nuqsoni ham 8 foizni tashkil etsa (θ_1 holat), unda zarar $(8-8) \times 1000000 = 0$ so‘mga teng. Agar mahsulot nuqsoni 10 foizni tashkil etsa (θ_2 holat), unda zarar $(10-8) \times 1000000 = 2000000$ so‘mga teng. Agar mahsulot nuqsoni 12 foizni tashkil etsa (θ_3 holat), unda zarar $(12-8) \times 1000000 = 4000000$ so‘mga teng. Agar mahsulot nuqsoni 14 foizni tashkil etsa (θ_4 holat), unda zarar $(14-8) \times 1000000 = 6000000$ so‘mga teng.

α_2 yechimni qabul qilish 12 foizli nuqson bilan iste’molchiga mahsulotni jo‘natishni bildiradi. Shu sababli, agar mahsulot nuqsoni 8 foizni tashkil etsa (θ_1 holat), unda zarar $(12-8) \times 500000 = 2000000$ so‘mga teng. Agar mahsulot nuqsoni 10 foizni tashkil etsa (θ_2 holat), unda zarar $(12-10) \times 500000 = 1000000$ so‘mga teng. Agar mahsulot nuqsoni 12 foizni tashkil etsa (θ_3 holat), unda zarar $(12-12) \times 1000000 = 0$ so‘mga teng. Agar mahsulot nuqsoni 14 foizni tashkil etsa (θ_4 holat), unda zarar $(14-12) \times 1000000 = 2000000$ so‘mga teng.

Xuddi shunday α_3 yechimni qabul qilish 14 foizli nuqson bilan iste’molchiga mahsulotni jo‘natishni bildiradi. Shu sababli, agar mahsulot nuqsoni 8 foizni tashkil etsa (θ_1 holat), unda zarar $(14-8) \times 500000 = 3000000$ so‘mga teng. Agar mahsulot nuqsoni 10 foizni tashkil etsa (θ_2 holat), unda zarar $(14-10) \times 500000 = 2000000$ so‘mga teng. Agar mahsulot nuqsoni 12 foizni tashkil etsa (θ_3 holat), unda zarar $(14-12) \times 500000 = 1000000$ so‘mga teng. Agar mahsulot nuqsoni 14 foizni tashkil etsa (θ_4 holat), unda zarar $(14-14) \times 1000000 = 0$ so‘mga teng.

Bu sonlar yordamida quyida xarajat jadvali tuzilgan. Ammo $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ holatlar mos ravishda 0,4; 0,3; 0,25 va 0,05 ehtimolliklar bilan ro‘y berishligi sababli o‘rtacha xarajat $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ yechimlarni qabul qilinishiga qarab mos ravishda $0 \cdot 0,4 + 2000000 \cdot 0,3 + 4000000 \cdot 0,25 + 6000000 \cdot 0,05 = 0 + 600000 + 1000000 + 300000 = 1900000$, $2000000 \cdot 0,4 + 1000000 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,25 +$

$2000000 \cdot 0,05 = 800000 + 300000 + 0 + 100000 = 1200000$, $3000000 \cdot 0,4 + 2000000 \cdot 0,3 + 1000000 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,05 = 120000 + 600000 + 250000 + 0 = 2050000$, sonlariga teng bo'ladi. Demak, eng kam xarajat (1200000) B iste'molchiga mahsulotni jo'natish orqali erishilar ekan.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
α_1	0	2000000	4000000	6000000
α_2	2000000	1000000	0	2000000
α_3	3000000	2000000	1000000	0

Quyida ko'riladigan kriteriyalarda bunday imkoniyat (p_j ehtimolliklarni aniqlash) yo'q deb faraz qilinadi. Bu esa kriteriyalar tuzishdagi aniqlikning yo'qolishiga olib keladi. Shu sababli, bunday vaziyatlar uchun, turli kriteriyalar taklif etilgan bo'lib, ularning qaysi birini qo'llash, butunlay yechim qabul qiluvchining ixtiyorida bo'ladi.

Laplas usuli

Yechim qabul qilish jarayoni aniqmaslik sharoitida ro'y berayotganligi sababli, tabiatning holatlarini bildiruvchi θ tasodifiy miqdor bo'lib, u ro'y berishi mumkin bo'lgan $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ holatlarning qaysi biri ro'y berishi haqida hech qanday ma'lumot yo'q. Xususan, θ tasodifiy miqdor $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ holatlarni qanday ehtimollik bilan ro'y berishi ham butunlay noma'lum.

Demak, θ tasodifiy miqdor $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ holatlarni turlicha ehtimolliklar bilan sodir qiladi degan ma'lumot yo'q. Shu sababli, *to'la asoslanmagan* tamoyilga ko'ra, θ tasodifiy miqdor $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ holatlarni teng ehtimollik bilan sodir qiladi deb faraz etish mumkin. U holda yechim qabul qiluvchining α_i strategiyasi, unga $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}$ o'rtacha yutuqni beradi. Demak, u bu o'rtacha yutuqni maksimum qiluvchi α_k strategiyasini tanlaydi, ya'ni

$$\max_{\alpha_i} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} w_{kj}$$

Bu optimal strategiyani *Laplas kriteriyasi* yordamida tanlash deb ataladi.

2-masala. Firma uch turdagi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mahsulot ishlab chiqarish imkoniyatiga ega bo'lib, ularni sotishdan keladigan foyda, ularga nisbatan bo'lgan talab miqdoriga bog'liq. Talab esa tasodifiy miqdor bo'lib, u $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ holatlardan birida bo'lishi mumkin. Bu holatlarga mos ravishda ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotishdan keladigan foyda quyidagi jadval ko'rinishida berilgan.

1.3-jadval

	θ_1	θ_2	θ_3
α_1	10	5	3
α_2	2	6	1
α_3	4	3	8

U holda Laplas usuliga asosan

$$\max_{\alpha_i} \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} w_{ij} = \max \frac{1}{3}(18, 9, 15) =$$

$$\max(6, 3, 5) = 6.$$

Demak, firma keyinchalik talab qanday bo'lishidan qat'i nazar Laplas kriteriyasiga asosan α_1 mahsulot ishlab chiqarish strategiyasini qo'llashi lozim ekan. Shunda eng katta foyda 6 ga teng bo'ladi. Boshqa strategiyalar – α_2, α_3 da esa foyda mos ravishda 3 va 5 ga teng, ya'ni kam bo'ladi.

Maksimin usuli

Bu o'ta pessimistik kriteriya hisoblanib, juda ham ehtiyotkor (pessimist, umidsiz) shaxslar uchun, mo'ljallangan. Ushbu kriteriyada ro'y berishi mumkin bo'lgan noqulay holatlar ichidan, o'z imkoniyatidan kelib chiqqan holda, eng maqbul bo'lgani tanlanadi. Bu kriteriyaning tub ma'nosini anglash uchun, 1.1-jadvalni ko'raylik.

Yuqorida aytilganlarga asosan, agar yechim qabul qiluvchi α_i strategiyasini qo'llasa va tabiat tomonidan noqulay holat ro'y bersa, uning yutug'i

$$w_i = \min_j w_{ij}$$

ga teng bo'ladi. Demak, u shunday α_i strategiyani qo'llashga harakat qiladiki, natijada minimal yutuqlarning eng kattasi aniqlanadi, ya'ni

$$w_* = \max_i w_i = \max_i \min_j w_{ij} \tag{1.2}$$

(1.2) ning maksimal qiymatini ta'minlovchi α_k yechim qabul qiluvchining *maksimin optimal strategiyasi* deb ataladi.

Yuqorida aytilganlarga asosan α_k strategiyani qo'llash bilan, yechim qabul qiluvchi kamida w_*- kafolatlangan yutuqqa erishadi.

1-misol. Quyidagi

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
α_1	5	9	2	5
α_2	6	8	9	1
α_3	7	4	7	3

jadval elementlari bilan yechim qabul qiluvchining yutug'i berilgan bo'lsin.

Har bir $i = 1, 2, 3$ uchun, $\min_j w_{ij}$ ni aniqlaylik:

$$\min_j w_{1j} = \min(5, 9, 2, 5) = 2, \ \min_j w_{2j} = \min(6, 8, 9, 1) = 1,$$
$$\min_j w_{3j} = \min(7, 4, 7, 3) = 3.$$

Bundan

$$w_k = \max_i \min_j w_{ij} = \max(\min_j w_{1j}, \min_j w_{2j}, \min_j w_{3j}) =$$

$$\max(2, 1, 3) = 3$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, yechim qabul qiluvchining optimal maksimin strategiyasi α_3 bo'lib, uning kafolatlangan yutug'i 3 ga teng ekan.

Izoh. Mabodo, $W = (w_{ij})$ jadvalning elementlari yechim qabul qiluvchining xarajati (ziyoni, mag'lubiyati)ni bildirsa, yuqoridagi mulohazalar yordamida, kafolatlangan xarajat

$$\min_j \max_i w_{ij} = \min(\max_i w_{i1}, \max_i w_{i2}, \max_i w_{i3}) =$$

$$\min(7, 9, 9, 5) = 5$$

ga teng bo'ladi. Bunda ham tanlanishi lozim bo'lgan strategiya α_3 bo'ladi, ammo $\min_j \max_i w_{ij} \neq \max_i \min_j w_{ij}$.

Sevidj usuli

Ma'lumki, $\max_i \min_j w_{ij}$ soni yechim qabul qiluvchining kafolatlangan yutug'i bo'ladi.

Bu kriteriya – mezon yechim qabul qiluvchi uchun, shunchalik pessimistki, u ayrim hollarda mantiqsiz yo'l tutishga olib kelishi mumkin. Bunday holat ro'y berish mumkinligini quyidagi sonli misol orqali ko'rsatamiz:

1.4-jadval

	θ_1	θ_2
α_1	500	10
α_2	12	15

Bu 1.4-jadval bilan berilgan o'ymda, aniqlash mumkinki, maksimin kriteriyasi yordamida yechim qabul qiluvchi α_2 strategiyasini tanlash hisobiga oladigan, kafolatlangan yutug'i 12 ga teng bo'ladi. Bunda, yechim qabul qiluvchi α_1 strategiyasini tanlaganda, tabiat tomonidan θ_1, θ_2 holatlarning tanlanishiga qarab, mos ravishda, yoki 500, yoki 10 yutuqqa ega bo'lar edi. Shu sababli, yechim qabul qiluvchilarning aksariyati ichki sezgi (intuitsiya) orqali α_1 strategiyani ma'qul ko'rishadi. Bunday "mantiqsiz" vaziyatdan chiqishda Sevidj kriteriyasi yordam beradi. Buning uchun, quyidagicha yangi jadval tuziladi:

$$r_{ij} = \max_k w_{kj} - w_{ij},$$

ya'ni $R = (r_{ij})$ jadvalning elementlari mos ravishda $W = (w_{ij})$ jadvalning har bir ustun elementi shu ustundagi eng katta elementdan ayirib tashlashdan hosil qilinadi. Bunda, hosil bo'lgan farq r_{ij}, tabiat tomonidan θ_j holat tanlangandagi eng katta yutuqdan qanchaga kam ekanligini ko'rsatib, yechim qabul qiluvchi uchun, afsuslanishni bildiradi (eng katta yutuqqa olib keluvchi strategiyani tanlamaganiga nisbatan). Shu sababli $R = (r_{ij})$ jadval "afsuslanish" jadvali deb ham ataladi.

Yuqorida keltirilgan sonli 2-misol uchun, "afsuslanish" jadvali R quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

	θ_1	θ_2
α_1	0	5
α_2	488	0

Oxirgi jadvalga minimaks kriteriyasini qo'llab α_1 strategiya optimal strategiya ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Mabodo, W jadval elementlari yechim qabul qiluvchining xarajatini bildirsa "afsuslanish" jadvali R ning elementlari quyidagicha quriladi:

$$r_{ij} = w_{ij} - \min_k w_{kj},$$

ya'ni, ustunning eng kichik elementi shu ustun elementlaridan ayirib tashlanadi. Shundan so'ng "afsuslanish" jadvali $-R$ ga minimaks kriteriyasini qo'llash orqali yechim qabul qiluvchining optimal strategiyasi aniqlanadi.

Bunda, shunga e'tiborni qaratamizki W jadvalning elementlari yutuqni yoki xarajatni bildirishidan qat'i nazar, ularning "afsuslanish" jadvaliga bir xil – minimaks kriteriyasi qo'llaniladi va bu bilan Sevidj kriteriyasi asosida yechim qabul qiluvchining optimal strategiyasi aniqlanadi.

Gurvits usuli

Maksimin va maksimaks kriteriyalari mos ravishda eng pessimistik va eng optimistik kriteriyalar hisoblanadi. Bu ikkala, hamda "oraliq" kriteriyalarni o'zida ifodalagan kriteriya Gurvits kriteriyasidir. Gurvits kriteriyasi quyidagi ko'rinishga ega

$$W_\beta = \max_i \{\beta \max_k w_{ik} + (1-\beta) \min_k w_{ik}\}, \tag{1.3}$$

bunda $0 \leq \beta \leq 1$. Bu kriteriyada ishtirok etayotgan β parametrning qiymati orqali qanday darajada optimist, yoki pessimist bo'lish aniqlanadi.

Demak, (1.3) dan $\beta = 0$ maksimin (pessimist), $\beta = 1$ da maksimaks (optimist) kriteriyalari hosil qilinadi. Yechim qabul qiluvchining qanchalik darajada optimist yoki pessimist bo'lishligiga qarab $\beta\,(0 \leq \beta \leq 1)$ parametrning qiymati hisoblanadi, keyin unga mos optimal strategiya – (1.3) munosabatdan aniqlanadi. Agar, yechim qabul qiluvchining pessimist yoki optimist ekanligini aniqlashning iloji bo‘lmasa, $\beta = \frac{1}{2}$ deb olish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

2-misol.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	min	max
α_1	0	–20	40	50	–20	50
α_2	30	40	20	0	0	40
α_3	–30	50	51	30	–30	51

Bundan kelib chiqadiki, $\max\limits_i \max\limits_j w_{ij} = 51, \quad \max\limits_i \min\limits_j w_{ij} = 0.$

Mabodo, yechim qabul qiluvchining optimistik darajasi 75 foizni tashkil etsa, u holda $\beta = \frac{3}{4}$ deb olish kerak bo‘ladi. Unda Gurvits kriteriyasiga ko‘ra,

$$\max\left\{\frac{3}{4}(50, 40, 51) + \frac{1}{4}(-20, 0, -30)\right\} = \max\left(\frac{130}{4}, 30, \frac{123}{4}\right) = 32\frac{1}{2}$$

bundan yechim qabul qiluvchi α_1 strategiyasini tanlashi kelib chiqadi.

Qaralayotgan misolda yechim qabul qiluvchi optimist bo‘lsa α_3 strategiyani, pessimist bo‘lsa α_2 strategiyani tanlashi kelib chiqadi.

Hodja-Lemann usuli

Biz yuqorida matematik kutilmasi kriteriyasini maksimumlashtirish va maksimin (pessimistik) kriteriyalari bilan tanishib chiqdik. Agar birinchi kriteriyani qurishda ishtirok etgan tabiatning θ_j holatlarini ro‘y berish ehtimolliklari – p_j lar qiymatlarining aniqlik darajasi shubha ostiga olingan bo‘lsa, u holda Hodja-Lemann kriteriyasidan foydalanish tavsiya etiladi.

Bu kriteriyaning tuzilishi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$w_i = \gamma \sum_{j=1}^{n} w_{ij} p_j + (1-\gamma) \min_j w_{ij} \tag{1.4}$$

bu yerda $0 \leq \gamma \leq 1$. Bunda γ soni p_j larning aniqlik darajasini belgilab beruvchi parametr hisoblanadi. Agar p_j larning aniqlik darajasi juda ham past bo'lsa $\gamma = 0$ deb, aks holda (yuqori bo'lsa) $\gamma = 1$ deb olinadi. γ parametrning bu qiymatlari bilan mos ravishda maksimin va matematik kutilmani maksimumlashtirish kriteriyalari kelib chiqadi. Mabodo, p_j ehtimolliklarning aniqlik darajasi 75 foizni tashkil etsa, γ parametrning qiymati $\gamma = 3/4$ deb olinadi.

Shunday mulohazalar yordamida γ parametrning sonli qiymati aniqlangandan so'ng (1.4) kriteriya yordamida optimal strategiya α_k quyidagi

$$\max_i w_i = w_k$$

munosabatdan topiladi.

3-misol. Quyidagi sonli misolni ko'raylik:

1.5-jadval

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
α_1	2	9	12	5
α_2	16	18	9	1
α_3	7	4	7	3

1.5-jadval elementlari yechim qabul qiluvchining yutuqlarini bildirsin. Shu bilan birga $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ holatlarning ro'y berish ehtimolliklari mos ravishda $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{1}{6}$, $p_4 = \frac{1}{4}$ bo'lib, ularning aniqlik darajasi 25 foizni tashkil etsin (ya'ni $\gamma = \frac{1}{4}$). (1.4)-kriteriyaga asosan:

$$w_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{4} + \frac{9}{3} + \frac{12}{6} + \frac{5}{4}\right) + \frac{3}{4}\min(2, 9, 12, 5) = 3\frac{3}{16},$$

$$w_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{16}{4} + \frac{18}{3} + \frac{9}{6} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\min(16, 18, 9, 1) = 4\frac{9}{16},$$
$$w_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{7}{4} + \frac{4}{3} + \frac{7}{6} + \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\min(7, 4, 7, 3) = 3\frac{1}{2}$$
sonli qiymatlar topiladi. Demak, $\max\limits_i w_i = w_2$, ya'ni bunda, Hodja-Lemann kriteriyasiga ko'ra, α_2 strategiya yechim qabul qiluvchi uchun, optimal strategiya bo'lar ekan.

2-§. Jadvalli o'yinlar

Yuqorida biz tavakkalchilik sharoitida yechim qabul qilishning bir nechta usullari (kriteriyalari) bilan tanishib chiqdik. Bunda, asosiy xulosa shundan iborat bo'ldiki, ikkinchi ishtirok etuvchi – tabiat, yechim qabul qiluvchining yutug'iga qasddan qarshilik ko'rsatuvchi "dushman" sifatida emas, balki yutuqlarga befarq qarovchi, shu bilan birga unga "ongsiz" ravishda ta'sir etuvchi deb qaraldi.

Ziddiyatli jarayonga o'yin nuqtayi nazaridan qaraladigan bo'lsa, unda ikkinchi ishtirok etuvchi "ongli" dushman sifatida qaralib, uning ixtiyorida bo'lgan barcha xatti-harakatlari oldindan ma'lum bo'lib, to'laligicha hisobga olinadi. Bunda, o'yinning qonun-qoidasi shuni taqozo etishi mumkinki, ziddiyatda ishtirok etuvchilarning natijaviy yutuqlari yig'indisi har vaqt o'zgarmas songa teng bo'ladi. Bunday o'yinlar *o'zgarmas yig'indili o'yinlar* deb ataladi.

Bundan keyin, ziddiyatda ishtirok etuvchilarni *o'yinchilar* deb atash o'yinlar nazariyasiga mos keladi.

O'zgarmas yig'indili o'yinda biror o'yinchining yutug'ining oshishi, boshqa o'yinchilarning yutug'ining kamayishiga olib keladi. Agar bundan tashqari, o'yinchilarning strategiyalari soni chekli bo'lsa, bunday o'yinlar *antagonistik o'yinlar* deyilib, ularni normal-jadval ko'rinishda ifodalash mumkin.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, antagonistik o'yinlar matematik nuqtayi nazardan to'la yechilgan. Bu degani o'yinchilarning optimal strategiyalari va kafolatlangan yutuq va yutqiziqlari oshkor ko'rinishda ifodalanadi. Bunda to'la yechim aralash strategiyalarga nisbatan amalga oshirilgan bo'lib, u minimaks haqidagi teorema bilan tasdiqlanadi. Bu teorema quyida isboti bilan keltirilgan.

n ishtirokchili o'yinning daraxt ko'rinishda ifodalanishi

Bizning tasavvurimizda o'yin quyidagi uchta asosiy elementni o'z ichiga oladi: 1) o'yinchilar tomonidan shaxsiy yoki ularga bog'liq bo'lmagan tasodifiy bo'lgan yurishlar ketma-ketligining mavjudligi; 2) o'yinchilar ixtiyoriga beriladigan ma'lumotlarning to'laligi; 3) o'yin oxirida o'yinchilarning oladigan yutuqlari.

1-ta'rif. Uchlar deb ataluvchi nuqtalar va ularni birlashtiruvchi yoylar to'plamidan iborat bo'lgan sikllarsiz bog'liq figuraga *topologik daraxt* deb ataladi.

Bu ta'rifdan kelib chiqadiki, topologik daraxtning ixtiyoriy ikkita uchini yoylar va uchlar ketma-ketligidan tuzilgan yagona yo'l bilan tutashtirish mumkin bo'ladi (chunki, aks holda sikl paydo bo'lib qolgan bo'lar edi).

Topologik daraxtning biror uchi A_0 bilan belgilanadi.

2-ta'rif. Topologik daraxt G ning C uchi bilan A_0 uchini birlashtiruvchi yagona yo'l B uch orqali o'tsa, *C uch B uchdan keyin keladi* deyiladi. Mabodo, C uch B uchdan keyin kelib, C bilan B ni birlashtiruvchi yoy bo'lsa, *C uch B uchdan bevosita keyin keladi* deyiladi.

3-ta'rif. G topologik daraxtning keyin keladigan uchlari yo'q uchlari *oxirgi uchlari* deb ataladi.

4-ta'rif. G pozitsion o'yin deb quyidagiga aytiladi:

1. Topologik daraxt G berilgan bo'lsin, uning biror ajratilgan

A_0 uchi mos pozitsion o'yinning *asosi yoki o'yinning boshlang'ich pozitsiyasi* deb ataladi;

2. G topologik daraxtning barcha oxirgi uchlariga o'yinchilarning mos yutuqlarini ifodalovchi $n-$ o'lchovli vektor mos qo'yiladi;

3. G topologik daraxtning oxiri bo'lmagan barcha uchlari $Y_1, Y_2, ..., Y_n, Y_0$ to'plamlarga ajratilgan bo'lib, ular mos ravishda $1, 2, ..., n$ o'yinchilarning *yurish to'plamlari* deb ataladi, $Y_0 -$ boshlang'ich pozitsiya A_0 ni bildirib, agar undan keyingi pozitsiyalarni tanlash tasodifiy bo'lsa, u holda undan chiqqan har bir yoyga mos ehtimolliklar berilgan bo'ladi;

4. Har bir Y_i, $i = 1, 2, ..., n$ yurish to'plamlari mos ravishda o'yinchilarning *axborot to'plamlari* deb ataluvchi Y_i^j to'plamlarga ajratilgan bo'lib, ularning har biri quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

a) har bir Y_i^j ni tashkil etuvchi uchlarning hech qanday ikkitasi bir-biri bilan yoy orqali tutashtirilmagan;

b) har bir Y_i^j ni tashkil etgan uchlardan chiqqan yoylar soni bir xil;

c) har bir Y_i^j ga I_i^j indekslar to'plami mos qo'yilgan. Bunda I_i^j to'plamni tashkil etgan indekslar soni Y_i^j tegishli uchdan chiqqan yoylar soniga teng va ular orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan.

5-ta'rif. Agar G pozitsion o'yinda $i-$ o'yinchining har bir Y_i^j axborot to'plami faqat bitta elementdan iborat bo'lsa, u holda bunday o'yin $i-$ o'yinchi uchun, *to'la axborotli o'yin* deyiladi. Agar G pozitsion o'yin barcha ishtirok etayotgan o'yinchilar uchun, to'la axborotli o'yin bo'lsa, bunday o'yin *to'la axborotli* o'yin deb ataladi. Masalan, shaxmat, shashka, futbol, tennis – to'la axborotli, qimor o'yini hisoblangan bridj, pokyer, ruletka, oshiq tashlash va domino o'yinlari to'la axborotli o'yin emas.

6-ta'rif. Har bir Y_i^j axborot to'plamiga I_i^j indekslar to'plamining biror elementini mos qo'yuvchi ixtiyoriy funksiyaga i – *o'yinchining strategiyasi* deb ataladi.

7-ta'rif. Topologik daraxti chekli sondagi uchlardan iborat bo'lgan o'yin *chekli o'yin* deb ataladi.

Albatta, chekli o'yinda o'yinchilar chekli sondagi strategiyaga ega bo'lishadi.

Ko'rilayotgan o'yinda i – o'yinchining strategiyalar to'plamini S_i bilan, uning elementini (strategiyasini) α_i bilan belgilaymiz.

Demak, i – o'yinchining strategiyasi deganda Y_i^j larning barchasida aniqlangan va qiymati mos ravishda I_i^j larda yotgan funksiyani tushunar ekanmiz. Yoki boshqacha qilib aytganda α_i strategiya bu shunday $f(\cdot)$ funksiyaki, uning argumenti Y_i^j to'plamlardan iborat bo'lib. qiymati I_i^j ning elementidan iborat, ya'ni har bir j da $f(Y_i^j) \in I_i^j$.

O'yinchilarning α_i strategiyalaridan tuzilgan

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

vektor funksiya *o'yinning holati* deb ataladi. Har bir holat o'yin tamom bo'lganligini bildirib, bu bilan o'yinchilarning yutug'ini aniqlash mumkin:

$$w_i(\alpha) = w_i(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n),$$

bu son i – o'yinchining yutug'ini bildiradi.

Biror $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ holatda o'yinchilarning oladigan yutuqlaridan tuzilgan vektor funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$w(\alpha) = (w_1(\alpha), w_2(\alpha), ..., w_n(\alpha)).$$

Shunday qilib, barcha o'yinchilarning strategiyalari ma'lum bo'lsa, bu o'yin tamom bo'ldi, o'yinchilarning yutuqlari aniq bo'ldi degani. Chunki strategiya o'yinchilarning qaysi holatda qanday yechim qabul qilish kerakligini aniqlab beradi. Demak, har bir o'yin holati o'yin boshlangandan to oxirigacha har bir uchragan vaziyat uchun, qanday yo'l tutishlikni aniqlab beradi. O'yinchilar tomonidan, shu ma'lum strategiyalarni qo'llash natijasida, o'yinning oxiriga yetib boriladi va o'yinchilarning yutuq vektori $w(\alpha)$ aniq bo'ladi.

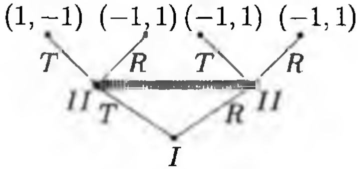
Har bir o'yinda o'yinchilar o'zlarining yutuqlarini kattalashtirishga (maksimumlashtirishga) harakat qilishadi. Bu maksimumlashtirish uchragan vaziyatlarda qabul qilinadigan yechimlardan tashkil topgan strategiyalar hisobiga amalga oshiriladi. Agar, o'yin tasodifiy yurishlar orqali boshlansa, har bir $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ o'yin holati uchun, ehtimolliklar berilgan bo'ladi; demak, $w(\alpha)$ yutuqqa ega bo'lish ehtimolliklari berilgan bo'lib, ularning o'rtacha matematik kutilma qiymatini aniqlash mumkin bo'ladi.

Shunday qilib $w(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) - n-$ o'lchovli vektorlar, α_i lar chekli qiymatlar qabul qilganda n o'lchovli jadval ko'rinishda ifodalanishi mumkin. Bunday ko'rinish *o'yinning normal shakli* deb ataladi.

Masalan, tanga tashlash o'yinida ikki o'yinchi ishtirok etib, ular bir-biriga bildirmagan holda tangani u, yoki bu tomonini yashiradilar. O'yin qoidasiga asosan, agar ikkalasi ham tanganing bir xil tomonini yashirsalar ikkinchi o'yinchi birinchisiga bir birlik, turli tomonini yashirsalar, aksincha, birinchi o'yinchi ikkinchisiga bir birlik beradi. Bu yerda umumiylikka zarar keltirmagan holda, tanga yashirishni birinchi o'yinchi boshlaydi deb qabul qilish mumkin. U holda, bu o'yinni pozitsion o'yin sifatida qaralsa, uning topologik daraxti quyidagi ko'rinishda bo'ladi (2.1-rasm).

Demak, bu o'yinda $Y_0 = Y_1$ bo'lib, u birinchi o'yinchining yurish to'plamini bildiradi. Y_2 esa Y_1 dan chiquvchi yoylarning oxirgi uchlarini bildirib, u ikkinchi o'yinchining yurish to'plamini, shu bilan birga axborot to'plamini ham bildiradi. Ikkinchi o'yinchida ham ikki imkoniyat (tanganing $T-$ tamg'a,

R – raqam tomonini yashirish) bo‘lganligi sababli, uning yurish to‘plami Y_2 ning har bir uchidan ikkita yoy chiqqan.



2.1-rasm

2.1-jadval

	T	R
T	1	−1
R	−1	1

Demak, har bir I_i^j to‘plam ikki elementdan iborat bo‘lib, u tanganing T yoki R tomonlarini aniqlaydi.

Har bir yoyning yoniga o‘yinchilar tomonidan tanganing qaysi tarafi (T, R) yashirgani mos ravishda yozib qo‘yilgan.

Daraxtning oxirgi uchlariga mos keltirilgan vektor komponentalari o‘yinchilarning yutuqlarini ifodalaydi. Bu o‘yinning normal shakli 2.1-jadval ko‘rinishda bo‘ladi.

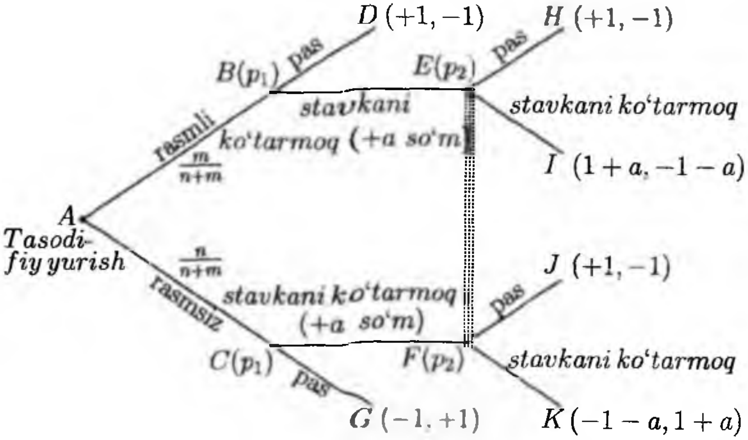
Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, har bir o‘yinchining ikkitadan (T va R) strategiyalari bo‘lib, ularga mos kelgan yutuqlar jadval elementi sifatida berilgan. Jadval elementlari birinchi o‘yinchining yutug‘ini (ikkinchi o‘yinchining yutqizig‘ini) bildiradi.

Ikkinchi misol sifatida karta o‘yinidagi soddalashtirilgan pokyer o‘yinini keltiramiz. Faraz qilaylik, m ta rasmli va n ta rasmsiz karta dastasi bo‘lsin. Ushbu o‘yinda ikki o‘yinchi ishtirok etib, ular karta dastasi haqida ma’lumotga ega bo‘lishgan holda, boshlang‘ich stavka uchun, bir birlikdan "kon" tikishadi. Shundan so‘ng karta dastasi chiylanadi va birinchi o‘yinchiga bitta karta beriladi. Birinchi o‘yinchi berilgan kartani bilgan holda yoki pas deyishi, yoki a birlik qo‘shish orqali stavkani ko‘tarishi mumkin. Oxirgi holda o‘yin davom etadi.

Birinchi (pas) holda, agar o‘yinchida rasmli karta bo‘lgan bo‘lsa tikilgan stavkani yutadi, rasmsiz bo‘lsa uni yutqazadi. Mabodo, birinchi o‘yinchi stavkani a birlikka orttirsa, u holda ikkinchi o‘yinchiga yurish navbati keladi.

Ikkinchi o'yinchida ham ikkita imkoniyat bo'lib yoki pas deyishi, yoki stavkani a birlikka ko'tarishi mumkin. Mabodo, ikkinchi o'yinchi 1-holat pasni qabul qilsa, birinchi o'yinchi bor stavkani yutadi. Ikkinchi holatda birinchi o'yinchidagi karta ko'rsatiladi. Ko'rsatilgan karta rasmli bo'lsa, birinchi o'yinchi, rasmsiz bo'lsa ikkinchi o'yinchi tikilgan umumiy stavkani yutadi.

Bu o'yinning topologik daraxt shakli quyidagi ko'rinishda bo'ladi (2.2-rasm):



2.2-rasm

Bu yerda A – tasodifiy Y_0 holat bo'lib, karta chiylanishini bildiradi. B va C holatlar birinchi o'yinchining yurish to'plami Y_1 bo'lib, u rasmli, yoki rasmsiz kartaga ega bo'lishlikka mos keladi. Demak, bu yurishda birinchi o'yinchining ikkita ma'lumot to'plami: $Y_1^1 = \{B\}$ va $Y_1^2 = \{C\}$ bor ekan. E va F holatlar ikkinchi o'yinchining yurish to'plami Y_2 ni bildirib, uning ma'lumot to'plami $Y_2^1 = \{E, F\}$ dan iborat, chunki ikkinchi o'yinchi birinchi o'yinchida qanday karta borligini bilmaydi, shu sababli o'yin B va C holatlarning qaysi birida ekanligini, u faqat taxmin qilishi mumkin.

Bu holatlarning sodir bo'lish ehtimolliklari mos **ravishda** $m/(n+m)$ va $n/(n+m)$ sonlariga tengdir. Demak, birinchi o'yinchida ikkita holat va har bir holatda ikkitadan yechim qabul qilish (pas va stavkani ko'tarish) bo'lar ekan. Bundan kelib chiqadiki, birinchi o'yinchining to'rtta strategiyasi P – doimo pas, K – doimo stavkani ko'tarish, LK – rasmli stavkani ko'tarish (rasmsiz pas) va SK – rasmsiz stavkani ko'tarish (rasmli pas) bor.

Ikkinchi o'yinchining ma'lumot to'plami E va F holatlaridan iborat bo'lib, har bir holatda ikkitadan yechim qabul qilish mumkin. Shu sababli ikkinchi o'yinchining ikkita strategiyasi (P – pas, K – stavkani ko'tarish) bor.

Agar $p = m/(n+m)$ belgilashni kiritsak. Birinchi o'yinchining P strategiyasi, unga o'rtacha $1 \cdot p + (-1)(1-p) = 2p - 1$ yutuqni beradi (e'tibor beramiz, bunda ikkinchi o'yinchining strategiyasi hech qanday rol o'ynamaydi). Xuddi shunday (K, K) holatda yutuq $p(a+1) + (1-p)(-1-a) = (2p-1)(a+1)$ ga teng bo'ladi. Shunga o'xshash hisoblashlarni bajarib, quyidagi: $(K, P) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 1 = 1$; $(LK, K) = p(1+a) + (1-p)(-1) = 2p - 1 + pa$; $(LK, P) = p \cdot 1 + (1-p)(-1) = 2p - 1$; $(SK, K) = p \cdot 1 + (1-p)(-1-a) = 2p - 1 + (p-1)a$; $(SK, P) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 1 = 1$ yutuqlarga ega bo'linadi. Bu qiymatlar yordamida 2.2-jadval tuzilgan.

2.2-jadval

	K	P
P	$2p-1$	$2p-1$
K	$(2p-1)(a+1)$	1
LK	$2p-1+pa$	$2p-1$
SK	$2p+(p-1)a$	1

2.3-jadval

	K	P
K	$(2p-1)(a+1)$	1
LK	$2p-1+pa$	$2p-1$

Ko'rsatish osonki $2p-1+(p-1)a \leq (2p-1)(a+1)$ va $2p-1 \leq 1$ tengsizliklar o'rinli. Demak, birinchi o'yinchi tomonidan P va SK strategiyalarni tanlash maqsadga muvofiq emas. Shu sababli mos satrlarni tashlab, 2.3-jadval shakldagi o'yinni hosil qilamiz. Bu yerda, yana shuni ta'kidlash lozimki, agar $p < 1$ bo'lsa $(2p-1)(a+1) < 2p - 1 + pa$ bo'ladi. Ya'ni, umuman olganda, bu o'yinda sof strategiyalarga nisbatan muvozanat holat yo'q.

O'yinning muvozanat holati va o'yin bahosi

O'yinlar nazariyasida, o'yinchilarning optimal strategiyalarini aniqlash muhim hisoblanadi. Bu masalani yechishda quyidagi tushuncha alohida ahamiyat kasb etadi.

8-ta'rif. Agar biror G o'yinda

$$w_i(\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_{i-1}^*, \alpha_i, \alpha_{i+1}^*, ..., \alpha_n^*) \leq$$

$$\leq w_i(\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_{i-1}^*, \alpha_i^*, \alpha_{i+1}^*, ..., \alpha_n^*)$$

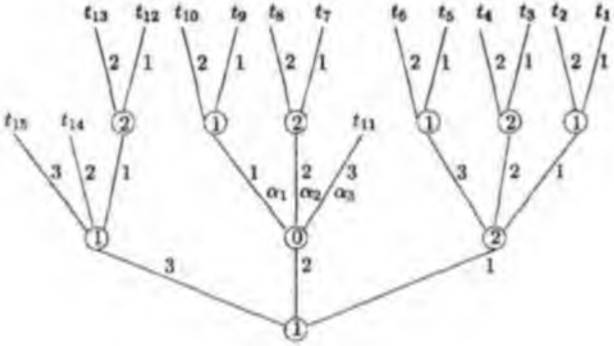
tengsizlik barcha $i = 1, 2, ..., n$ va $\alpha_i \in S_i$ larda o'rinli bo'lsa, $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*)$ holat o'yinning *muvozanat holati* deb ataladi. α_i^* esa $i-$ *o'yinchining optimal strategiyasi* deyiladi.

Demak, har bir o'yinchi muvozanat holatni tashkil etgan strategiyasini tanlashga harakat qiladi, chunki, aks holda u o'zining yutug'ini faqat kamaytirishi mumkin. Muvozanat holatga mos kelgan $w^* = w(\alpha^*)$ vektor *o'yin bahosi* deb ataladi. S bilan S_i larning dekart ko'paytmasini belgilaylik, ya'ni $S = \Pi_{i=1}^n S_i$. U holda $\alpha \in S-$ biror $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ holatni aniqlaydi.

O'yinlar nazariyasida o'yinning muvozanat holatlarini (o'yinchilarning optimal strategiyalarini) va o'yin bahosini aniqlash asosiy masala hisoblanadi.

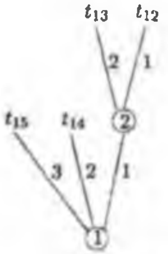
9-ta'rif. G topologik daraxt bilan berilgan pozitsion o'yindan boshlang'ich A_0 pozitsiyani tashlab yuborishdan hosil bo'lgan o'yinlar *qisqartirilgan o'yinlar* deb ataladi.

Quyidagi pozitsion o'yinni ko'raylik:

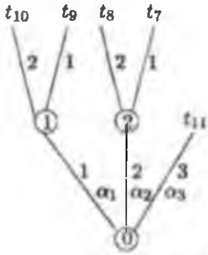


2.3-rasm

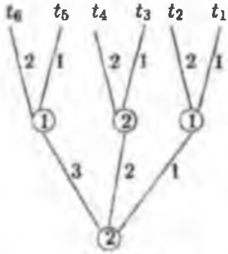
Bu o'yinda boshlang'ich A_0 pozitsiya hisobga olinmasa quyidagi qisqartirilgan uchta pozitsion o'yin hosil bo'ladi:



2.4-rasm



2.5-rasm



2.6-rasm

Bunda har bir qisqartirilgan o'yindagi yutuq vektor boshlang'ich o'yindagi yutuq vektor bilan aniqlanadi. Masalan, 4, 5 va 2.6-rasmlarda ifodalangan qisqartirilgan o'yinlardagi mos yutuq vektorlar 2.3-rasmda ifodalangan o'yindagi yutuq vektorlari bilan aniqlangan. Bundan kelib chiqadiki, qisqartirilgan o'yinlardagi yutuq vektorlari boshlang'ich o'yindagi yutuq vektorlari orqali beriladi.

Agar pozitsion o'yin to'la axborotli o'yin bo'lsa, o'yinchilar tomonidan strategiya tanlash, bu yurish to'plamidagi har bir pozitsiyadan chiqqan yoylardan aniq bittasini tanlash bilan ekvivalent. Shu sababli qisqartirilgan o'yinlardagi har bir strategiyani boshlang'ich o'yindagi strategiya orqali hosil qilish mumkin.

Aksinchasi ham oʻrinli, ya'ni qisqartirilgan oʻyinlardagi strategiyalardan boshlangʻich oʻyinning mos strategiyalarini tuzish mumkin.

Ikki kishili pozitsion oʻyin qaralayotgan boʻlsin. S_1, S_2 mos ravishda P_1- birinchi va P_2- ikkinchi oʻyinchilarning strategiyalari toʻplamini bildirsin. Quyidagi teorema oʻrinli:

1-teorema. Toʻla axborotli chekli oʻyin muvozanat holatga ega boʻladi.

Isbot. Faraz qilaylik, P_1 oʻyinchi $\alpha_1 \in S_1$, P_2 oʻyinchi $\alpha_2 \in S_2$ strategiyalarini qoʻllashgan boʻlsin, u holda ularning mos yutuqlari $w_1(\alpha_1, \alpha_2)$ va $w_2(\alpha_1, \alpha_2)$ boʻladi.

Berilgan pozitsion oʻyinning *uzunligi* deb, mos topologik daraxtning boshlangʻich va oxirgi uchlarini birlashtiruvchi yoylar va uchlar ketma-ketligining har biridagi uchlar sonining eng kattasiga aytiladi. Teorema isboti oʻyinning uzunligiga nisbatan induksiya usuli yordamida keltiriladi. Nol uzunlikdagi oʻyin uchun, teorema isbot talab etmaydi, chunki bunda oʻyinchilar hech qanday harakat qilishmaydi va ularning strategiyalari yagona boʻlib, ular muvozanat holatni tashkil etadi.

Faraz qilaylik, uzunliklari k dan kichik boʻlgan barcha pozitsion oʻyinlar uchun, teorema oʻrinli boʻlsin. G bilan uzunligi k boʻlgan pozitsion oʻyin belgilangan boʻlsin. Boshlangʻich Y_0 pozitsiyadan chiqqan yoylar soni p ta boʻlib, Y_0 boshlangʻich pozitsiyani tashlab yuborishdan hosil boʻlgan qisqartirilgan oʻyinlar mos ravishda $G_1, G_2, ..., G$ lar bilan belgilansin.

$S_1^{(i)}$ va $S_1^{(i)}$ lar bilan mos ravishda birinchi $-P_1$ va ikkinchi $-P_2$ oʻyinchilarning G_i oʻyindagi strategiyalar toʻplami belgilangan boʻlsin.

Qisqartirilgan $G_1, G_2, ..., G$ oʻyinlarning uzunliklari k dan kichik boʻlganligi uchun, induksiya shartiga asosan, ularda muvozanat holat mavjud, ular $(\alpha_1^{(i)*}, \alpha_2^{(i)*})$ bilan belgilangan boʻlsin.

U holda muvozanat holatining ta'rifiga asosan:

$$
\begin{aligned}
w_1^{(i)}(\alpha_1^{(i)*},\alpha_2^{(i)*}) &\geq w_1^{(i)}(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)*}) \\
w_2^{(i)}(\alpha_1^{(i)*},\alpha_2^{(i)*}) &\geq w_2^{(i)}(\alpha_1^{(i)*},\alpha_2^{(i)})
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

bu yerda $\alpha_1^{(i)} \in S_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)} \in S_2^{(i)}$ ixtiyoriy bo'lib, $w_1^{(i)}(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)})$ va $w_2^{(i)}(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)})$ lar G_i o'yinning $(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)})$ muvozanatiga mos kelgan P_1, P_2 o'yinchilarning yutuqlarini bildiradi.

Ko'rilayotgan G o'yinda quyidagi 3 ta hol bo'lishi mumkin: 1) o'yin boshlanishi tasodifiy; 2) o'yin birinchi o'yinchining yurishi bilan boshlanadi; 3) o'yin ikkinchi o'yinchining yurishi bilan boshlanadi.

Birinchi hol bajarilgan bo'lsin. Agar k birorta qisqartirilgan G_i o'yinning uchi bo'lib, unda birinchi o'yinchi P_1 ning yurish navbatiga to'g'ri kelsa,

$$\alpha_1^*(q) = \alpha_1^{(i)*}(q)$$

yoki, agar k birorta qisqartirilgan G_i o'yinning uchi bo'lib, unda ikkinchi o'yinchi P_2 ning yurish navbatiga to'g'ri kelsa,

$$\alpha_2^*(q) = \alpha_2^{(i)*}(q)$$

deb olinadi. O'yinning boshlanishi tasodifiy bo'lib, unda birinchi o'yinchi P_1 ham, ikkinchi o'yinchi P_2 ham ishtirok etishmaydi. Shu sababli o'yinchilarning α_1^* va α_2^* strategiyalari G o'yin uchun, aniqlangan bo'lib $\alpha_1^* \in S_1$ va $\alpha_2^* \in S_2$ bo'ladi. Ko'rsatamizki, (α_1^*,α_2^*) holat G o'yinning muvozanat holatini tashkil qiladi.

Faraz qilaylik, G o'yinning birinchi yurishidagi alternativ yoylarning hosil bo'lish ehtimolliklari mos ravishda $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r (\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_r = 1)$ bo'lsin. Agar $\alpha_1 \in S_1, \alpha_2 \in S_2$ lar mos ravishda P_1 va P_2 o'yinchilarning G o'yindagi ixtiyoriy strategiyalari bo'lib, $\alpha_1^{(i)}$ va $\alpha_2^{(i)}$ ularning G_i o'yindagi qisqartirilgan strategiyalari bo'lsa, u holda:

$$w_1(\alpha_1,\alpha_2)=\sum_{i=1}^{r}\gamma_i w_1^{(i)}(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)}),\ \ w_2(\alpha_1,\alpha_2)=\sum_{i=1}^{r}\gamma_i w_2^{(i)}(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)})$$

bo'ladi. Xususan, agar $\alpha_1^{(1)*},\alpha_1^{(2)*},...,\alpha_1^{()*}$ strategiyalar α_1^* strategiyaning qisqartirilgani $\alpha_2^{(1)*},\alpha_2^{(2)*},...,\alpha_2^{()*}$ strategiyalar α_2^* strategiyaning qisqartirilgani bo'lsa, u holda:

$$\begin{aligned} w_1(\alpha_1,\alpha_2^*) &= \sum_{i=1}^{r}\gamma_i w_1^{(i)}(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)*}),\\ w_2(\alpha_1^*,\alpha_2) &= \sum_{i=1}^{r}\gamma_i w_2^{(i)}(\alpha_1^{(i)*},\alpha_2^{(i)}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} w_1(\alpha_1^*,\alpha_2^*) &= \sum_{i=1}^{r}\gamma_i w_1^{(i)}(\alpha_1^{(i)*},\alpha_2^{(i)*}),\\ w_2(\alpha_1^*,\alpha_2^*) &= \sum_{i=1}^{r}\gamma_i w_2^{(i)}(\alpha_1^{(i)*},\alpha_2^{(i)*}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

bo'ladi.

$\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_r$ sonlarning manfiy emasligidan (2.1)-tengsizliklardan quyidagilarni hosil: qilamiz.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r}\gamma_i w_1^{(i)}(\alpha_1^{(i)*},\alpha_2^{(i)*} &\geq \sum_{i=1}^{r}\gamma_i w_1^{(i)}(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)*}),\\ \sum_{i=1}^{r}\gamma_i w_2^{(i)}(\alpha_1^{(i)*},\alpha_2^{(i)*}) &\geq \sum_{i=1}^{r}\gamma_i w_2^{(i)}(\alpha_1^{(i)*},\alpha_2^{(i)}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.2) va (2.3) larni (2.4) ga qo'yib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$w_1(\alpha_1^*,\alpha_2^*)\geq w_1(\alpha_1,\alpha_2^*),\ \ w_2(\alpha_1^*,\alpha_2^*)\geq w_2(\alpha_1^*,\alpha_2)$$

bulardan kelib chiqadiki (α_1^*,α_2^*) muvozanat G o'yin uchun, muvozanat holat ekan.

Ikkinchi hol bajarilgan bo'lsin. m shunday sonki, uning uchun, quyidagi tenglik bajarilgan bo'lsin:

$$w_1^{(m)}(\alpha_1^{(m)*},\alpha_2^{(m)*}) = \max_i w_1^i(\alpha_1^{(i)*},\alpha_2^{(i)*}). \tag{2.5}$$

Birinchi o'yinchi P_1 ning boshlang'ich pozitsiya Y_0 dagi yechimi sifatida $\alpha_1^*(Y_0) = m$ olinadi. Agar q birorta qisqartirilgan G_i o'yinning uchi bo'lib, unda birinchi o'yinchi P_1 ning yurish navbatiga to'g'ri kelsa,

$$\alpha_1^*(q) = \alpha_1^{(i)*}(q)$$

deb olinadi. Ikkinchi o'yinchi P_2 uchun, ham α_2^* xuddi shunday, ya'ni k birorta qisqartirilgan G_i o'yinning uchi bo'lib, unda ikkinchi o'yinchi P_2 ning yurish navbatiga to'g'ri kelsa,

$$\alpha_2^*(q) = \alpha_2^{(i)*}(q)$$

deb olinadi. Shunday qilib qurilgan α_1^*, α_2^* lar G o'yinda birinchi va ikkinchi o'yinchilarning mos strategiyalarini tashkil etishadi. Ko'rsatamizki, (α_1^*, α_2^*) holat G o'yinda muvozanat holatni tashkil qiladi.

(2.5) dan kelib chiqadiki, agar α_2 ikkinchi o'yinchi P_2 ning G o'yindagi ixtiyoriy strategiyasi bo'lib, $\alpha_2^{(m)}$ bu strategiyaning G_m o'yindagi qisqartirilgani bo'lsa, u holda

$$w_1(\alpha_1^*, \alpha_2) = w_1^{(m)}(\alpha_1^{(m)*}, \alpha_2^{(m)}), \tag{2.6}$$

$$w_2(\alpha_1^*, \alpha_2) = w_2^{(m)}(\alpha_1^{(m)*}, \alpha_2^{(m)}) \tag{2.7}$$

bo'ladi. $\alpha_2^{(m)*}$ strategiya α_2^* strategiyaning G_m o'yindagi qisqartmasi bo'lganligi uchun, (2.6) va (2.7) dan

$$w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = w_1^{(m)}(\alpha_1^{(m)*}, \alpha_2^{(m)*}), \tag{2.8}$$

$$w_2(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = w_2^{(m)}(\alpha_1^{(m)*}, \alpha_2^{(m)*}) \tag{2.9}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, agar ikkinchi o'yinchi P_2 ning G o'yindagi ixtiyoriy strategiyasi α_2 bo'lib, $\alpha_2^{(m)}$ bu strategiyaning G_m o'yindagi qisqartirilgani bo'lsa, u holda (2.9), (2.1) ning ikkinchi tengsizligi va (2.7) dan

$$w_2(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = w_2^{(m)}(\alpha_1^{(m)*}, \alpha_2^{(m)*}) \geq w_2^{(m)}(\alpha_1^{(m)*}, \alpha_2^{(m)}) = w_2(\alpha_1^*, \alpha_2) \tag{2.10}$$

kelib chiqadi. Birinchi o'yinchi P_1 boshlang'ich pozitsiya Y_0 da $i-$ yurishni tanlagan ixtiyoriy strategiyasi α_1 bo'lsin, ya'ni $\alpha_1(Y_0) = i$. Bu strategiyaning G_i qisqartirilgan o'yindagi qisqartmasi $\alpha_1^{(i)}$ bo'lsin, u holda ikkinchi o'yinchi P_2 ning G o'yindagi ixtiyoriy α_2 strategiyasi va uning G_i qisqartirilgan o'yindagi qisqartmasi $\alpha_2^{(i)}$ uchun, quyidagi tenglik o'rinli:

$$w_1(\alpha_1, \alpha_2) = w_1^{(i)}(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)})$$

va xususan,

$$w_1(\alpha_1, \alpha_2^*) = w_1^{(i)}(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)*})$$

(2.5) ifodadan quyidagi hosil bo'ladi:

$$w_1^{(m)}(\alpha_1^{(m)*}, \alpha_2^{(m)*}) \geq w_1^{(i)}(\alpha_1^{(i)*}, \alpha_2^{(i)*}) \tag{2.11}$$

bundan (2.8), (2.1) va (2.11) lardan quyidagi kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = w_1^{(m)}(\alpha_1^{(m)*}, \alpha_2^{(m)*}) \geq w_1^{(i)}(\alpha_1^{(i)*}, \alpha_2^{(i)*}) \geq \\ \geq w_1^{(i)}(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}) = w_1(\alpha_1, \alpha_2^*)) \end{aligned} \tag{2.12}$$

(2.10) va (2.12) lardan $(\alpha_1^{(i)*}, \alpha_2^{(i)*})$ holat G o'yinning muvozanat holati ekanligi kelib chiqadi. Uchinchi hol ham ikkinchi holdagi mulohazalar yordamida isbotlanadi. Teorema isbot bo'ldi.

Bu teoremadan kelib chiqadiki, to'la axborotli nol yig'indili ixtiyoriy pozitsion o'yinning jadval ko'rinishdagi normal shakli muvozanat holatga ega. Bu teorema ixtiyoriy n o'yinchili pozitsion o'yin uchun, o'rinli.

Bundan tashqari ixtiyoriy n o'yinchili pozitsion o'yinda aralash strategiyalarga nisbatan muvozanat holat mavjudligini isbotlash mumkin.

Izoh. Teorema isbotidan berilgan o'yinning muvozanat holatini topishning konstruktiv usuli ham kelib chiqadi.

O'yinni normal shaklga keltirish. Antagonistik o'yin

Biz yuqorida ko'rdikki, agar n ishtirokchili o'yinda $i-$ o'yinchining strategiyalari to'plami S_i bilan belgilangan bo'lsa, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in S_i$ o'yining holatini, $w_i(\alpha)$ soni $i-$ o'yinchining yutug'ini bildiradi.

O'yinchilar soni ikkita bo'lib, ixtiyoriy $\alpha \in S_1 \times S_2$ da $w_1(\alpha) + w_2(\alpha) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi o'yinlar alohida o'rganilib, ular *antagonistik o'yinlar* deb ataladi. Mabodo, S_1, S_2 strategiyalar to'plamining elementlari soni chekli bo'lsa, bunday o'yinlarni jadval ko'rinishida ifodalash qulaylik tug'diradi va bu ko'rinish *o'yinning normal shakli* deb ataladi.

Antagonistik o'yinlarda $w_2(\alpha) = -w_1(\alpha)$ tenglik o'rinli bo'lganligi sababli jadval elementlari sifatida birinchi o'yinchining $w_1(\alpha)$ yutug'ini aniqlash yetarli. Bu bilan ikkinchi o'yinchining yutug'i $w_2(\alpha)$ esa birinchi o'yinchining yutug'i bo'lgan $w_1(\alpha)$ soniga qarama-qarshi ishorali son bilan aniqlanadi.

Muvozanat holat ta'rifini antagonistik o'yinlarga qo'llasak, quyidagi munosabatlarga ega bo'lamiz:

$$w_1(\alpha_1, \alpha_2^*) \leq w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*) \leq w_1(\alpha_1^*, \alpha_2) \qquad (2.13)$$

10-ta'rif. Barcha $\alpha_1 \in S_1$, $\alpha_2 \in S_2$ lar uchun, (2.13) qo'sh tengsizlik o'rinli bo'lsa, (α_1^*, α_2^*) juftlik $w_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 \in S_1$, $\alpha_2 \in S_2$ funksiyaning *egar nuqtasi* deb ataladi.

Yuqoridagi mulohazalardan quyidagi teorema kelib chiqadi:

2-teorema. (α_1^*, α_2^*) juftlik berilgan o'yinning muvozanat holatini tashkil etishligi uchun, u $w_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 \in S_1$, $\alpha_2 \in S_2$ funksiyaning egar nuqtasi bo'lishligi zarur va yetarlidir.

(2.13) qo'sh tengsizligidan kelib chiqadiki, agar (α_1^*, α_2^*) muvozanat holatni tashkil etgan bo'lsa, $w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$ soni jadvalning mos ustunini eng katta, mos satrning eng kichik elementi bo'ladi.

3-teorema. Agar (α_1^*, α_2^*) va $(\alpha_1^{**}, \alpha_2^{**})$ lar o'yinning muvozanat holatlari bo'lsa, u holda:

1) $(\alpha_1^*, \alpha_2^{**})$ va $(\alpha_1^{**}, \alpha_2^*)$ lar ham muvozanat holatlari bo'ladi;

2) $w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = w_1(\alpha_1^{**}, \alpha_2^{**}) = w_1(\alpha_1^{**}, \alpha_2^*) = w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^{**})$ tengliklar o'rinli.

Isboti. Avval 2)-munosabatlarni isbotlaylik. (α_1^*, α_2^*) va (α_1^*, α_2^*) lar $w_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 \in S_1$, $\alpha_2 \in S_2$ funksiyaning egar nuqtalari (1-teorema) bo'lganligi sababli,

$$w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*) \leq w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^{**}) \leq w_1(\alpha_1^{**}, \alpha_2^{**}) \tag{2.14}$$

xuddi shunga o'xshash

$$w_1(\alpha_1^{**}, \alpha_2^{**}) \leq w_1(\alpha_1^{**}, \alpha_2^*) \leq w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*). \tag{2.15}$$

(2.14) va (2.15) tengsizliklardan $w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = w_1(\alpha_1^{**}, \alpha_2^{**}) = w_1(\alpha_1^{**}, \alpha_2^*) = w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^{**})$ tengliklar kelib chiqadi, bundan 2)-munosabatlar isbot bo'ldi. Endi 1)-da'voni isbotlaymiz.

Ixtiyoriy $\alpha_1 \in S_1$ uchun,

$$w_1(\alpha_1, \alpha_2^{**}) \leq w_1(\alpha_1^{**}, \alpha_2^{**}) = w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^{**}), \tag{2.16}$$

munosabatlar va ixtiyoriy $\alpha_2 \in S_2$ uchun,

$$w_1(\alpha_1^*, \alpha_2) \geq w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^{**}). \tag{2.17}$$

munosabatlar o'rinli.

(2.16) va (2.17)-munosabatlardan $w_1(\alpha_1, \alpha_2^{**}) \leq w_1(\alpha_1^*, \alpha_2^{**}) \leq w_1(\alpha_1^*, \alpha_2)$ qo'sh tengsizlik ixtiyoriy $\alpha_1 \in S_1$ va $\alpha_2 \in S_2$ lar uchun, o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Demak, $(\alpha_1^*. \alpha_2^{**})$ holat $w_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 \in S_1$, $\alpha_2 \in S_2$ funksiyaning egar nuqtasi bo'lar ekan, bundan uning muvozanat holat ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shu yo'l bilan ko'rsatish mumkinki, $(\alpha_1^{**}, \alpha_2^*)$ ham o'yinning muvozanat holatini tashkil qiladi. Teorema isbot bo'ldi.

Agar S_1, S_2 to'plamlarning elementlari soni chekli bo'lsa, birinchi o'yinchining strategiyalarini $1, 2, ..., m$ bilan, ikkinchi o‘yinchinikini $1, 2, ..., m$ bilan belgilab chiqish mumkin bo‘ladi. Quyidagi:

$$w_{ij} = w_1(\alpha_i, \alpha_j),\ \alpha_i \in S_1,\ \alpha_j \in S_2$$

belgilash orqali,

2.4-jadval

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{m1} & w_{m2} & \dots & w_{mn} \end{pmatrix}$$

hosil qilinadi. Yuqorida ta’kidlanganidek, bu jadval o‘yinning normal shakli deb ataladi.

Demak, jadvalning satrlari birinchi o‘yinchining, ustunlari ikkinchi o‘yinchining strategiyalarini ifodalaydi. Agar birinchi o‘yinchi $i(\alpha_i)-$ strategiyasini, ikkinchi o‘yinchi $j(\alpha_j)$ strategiyasini qo‘llashsa, birinchi (ikkinchi) o‘yinchining yutug‘i $w_{ij}(-w_{ij})$ soniga teng bo‘ladi.

1-misol. Quyidagi normal shakldagi o‘yin berilgan bo‘lsin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Demak, bu jadvalli o‘yinda birinchi o‘yinchining ikkita, ikkinchi o‘yinchining uchta strategiyalari bor. Jadvalning elementlari mos tanlangan strategiyalarda birinchi o‘yinchining yutug‘ini, ikkinchi o‘yinchining yutqizig‘ini bildiradi.

Masalan, birinchi o‘yinchi ikkinchi strategiyasini, ikkinchi o‘yinchi birinchi strategiyasini qo‘llagan bo‘lishsin, u holda birinchi o‘yinchining yutug‘i 3 birlik bo‘lib, ikkinchi o‘yinchining yutug‘i -3 birlik bo‘ladi.

Mabodo, ikkinchi o‘yinchi ham ikkinchi strategiyasini qo‘llasa, birinchi o‘yinchining yutug‘i -4 (yoki yutqizig‘i 4) birlik bo‘lib, ikkinchi o‘yinchining yutqizig‘i -4 (yutug‘i 4) birlik bo‘ladi.

Umuman, bunday ko'rinishdagi o'yinlar $2 \times n$ deb ataladi va biz keyinchalik ular bilan to'la tanishib chiqamiz.

Yuqoridagi ta'rif va tasdiqlarni $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yinga nisbatan qo'llash mumkin. Faqat bunda α_1, α_2 holatlarni mos ravishda i, j ko'rinishdagi holatlarga almashtirish kerak bo'ladi.

Biror (i^*, j^*) holat uchun,

$$w_{ij^*} \leq w_{i^*j^*} \leq w_{i^*j}$$

tengsizliklar ixtiyoriy $i = 1, 2, ..., m$ va $j = 1, 2, ..., n$ larda o'rinli bo'lsa, (i^*, j^*) holat *muvozanat holat* deyiladi.

11-ta'rif. Agar $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yin uchun, (i^*, j^*) holat muvozanat holatni tashkil etsa $w_{i^*j^*}$ soni *o'yin bahosi* deb ataladi.

Yuqoridagi mulohazalardan kelib chiqadiki, $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yin bahosini va muvozanat holatlarini topish uchun, quyidagi munosabatlardan foydalanish mumkin:

$$\max_i \min_j w_{ij} = \max(\min_j w_{1j}, \min_j w_{2j}, ..., \min_j w_{mj}) =$$

$$= \max(\min(w_{11}, w_{12}, ..., w_{1n}), \min(w_{21}, w_{22}, ..., w_{2n}), ...,$$

$$\min(w_{m1}, w_{m2}, ..., w_{mn})),$$

va $\min_j \max_i w_{ij} = \min(\max_i w_{i1}, \max_i w_{i2}, ..., \max_i w_{in}) =$

$$\min(\max(w_{11}, w_{21}, ..., w_{m1}), \max(w_{12}, w_{22}, ..., w_{m2}), ...,$$

$$\max(w_{1n}, w_{2n}, ..., w_{mn})).$$

Agar $\max\limits_i \min\limits_j w_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i w_{ij}$ tengligi o'rinli bo'lsa,

$$\max_i \min_j w_{ij} = \min_j \max_i w_{ij} = w_{i^*, j^*}$$

bo'lib, (i^*, j^*) – muvozanat holatni tashkil qiladi.

2-misol. Bizga quyidagi jadvalli o'yin berilgan bo'lsin:

$$W = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu o'yinda birinchi o'yinchining 3 ta, ikkinchi o'yinchining 4 ta strategiyasi bor. Yuqoridagi $\max\limits_i \min\limits_j w_{ij}$ va $\min\limits_j \max\limits_i w_{ij}$ larni hisoblaymiz:

$$\max_i \min_j w_{ij} = \max(\min(3, -1, -4, 3),$$

$$\min(4, 5, 3, 4), \min(1, 4, 1, 1)) = \max(-4, 3, 1) = 3$$

va

$$\min_j \max_i w_{ij} = \min(\max(3, 4, 1), \max(-1, 5, 4),$$

$$\max(-4, 3, 1), \max(3, 4, 1)) = \min(4, 5, 3, 4) = 3.$$

Demak, yuqoridagi jadvalli o'yinda $\max\limits_i \min\limits_j w_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i w_{ij} = 3$ bo'ladi.

Hosil bo'lgan 3 soni jadvalning 2-satri va 3-ustuni kesishgan joydagi elementdir. Shu sababli muvozanat holat $-(2, 3)$ ekanligi kelib chiqadi. O'yin bahosi esa $w = 3$ soniga teng bo'ladi.

Aralash strategiya

Birinchi o'yinchining $i = 1, 2, ..., m$ strategiyalari uning *sof strategiyalari* deb ataladi. Xuddi shunday ikkinchi o'yinchining $j = 1, 2, ..., n$ strategiyalari uning *sof strategiyalari* deb ataladi.

Quyidagi:

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

jadvalli o'yinda egar nuqta yo'q. Haqiqatan, $\max\limits_i \min\limits_j w_{ij} = -1$, $\min\limits_j \max\limits_i w_{ij} = 1$, ya'ni $\max\limits_i \min\limits_j w_{ij} \neq \min\limits_j \max\limits_i w_{ij}$.

Shu munosabat bilan quyidagi ta'rifni kiritamiz:

12-ta'rif. $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yin berilgan bo'lsin:

$$w_* = \max_i \min_j w_{ij}$$

soni *quyi yutuq*,

$$w^* = \min_j \max_i w_{ij}$$

soni *yuqori yutuq* deb ataladi. Umuman olganda, $w_* \leq w^*$ bo'ladi. Mabodo, $w_* = w^*$ bo'lsa, o'yin yechilgan hisoblanadi va bunda hech qanday muammo yo'q. $w_* < w^*$ bo'lgan o'yinlarda raqib to'g'risida axborotga ega bo'lish juda ham muhimdir. Chunki, u holda o'yinchi o'zining strategiyasini tanlash hisobiga eng katta yutuqqa ega bo'la oladi. Agar raqib to'g'risida axborotga ega bo'lishning iloji bo'lmasa, u holda tavakkaliga, ammo qaysidir ma'noda matematik nuqtayi nazardan asoslangan holda strategiyalarni ehtimollik bilan qabul qilishga to'g'ri keladi. Shu ma'noda o'yinchilarning strategiyalari to'plami kengaytiriladi. Bunda, albatta, o'yinchilarning oladigan yutuqlari matematik kutilma orqali aniqlanadi.

13-ta'rif. $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yin berilgan bo'lsin. U holda birinchi (ikkinchi) o'yinchining *aralash strategiyasi* deb quyidagi:

$$S_m = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_m)^T \in R^m : x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., m, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$

$$\left(S_n = \left\{ (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n : y_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\} \right)$$

simpleksning elementlariga aytiladi. Bunda $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in S_m$ aralash strategiyaning $x_i -$ komponentasi birinchi o'yinchi tomonidan $i -$ sof strategiyani qabul qilish ehtimolini beradi. Xuddi shunday $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in S_n$ aralash strategiyaning $y_j -$ komponentasi ikkinchi o'yinchi tomonidan $j -$ sof strategiyani qabul qilish ehtimolini beradi. Shu sababli 13-ta'rifdan unga ekvivalent bo'lgan quyidagi ta'rif kelib chiqadi.

14-ta'rif. Sof strategiyalar $(i = 1, 2, ..., m)$ ustida taqsimlangan to'la ehtimollik *aralash strategiya* deb ataladi.

Bunda, o'yinchining sof strategiyasi aralash **strategiyalar** to'plamiga tegishlidir. Masalan, birinchi o'yinchining 2-sof strategiyasi $x = (0, 1, 0, ..., 0)^T \in S_m$ aralash strategiya orqali aniqlanadi. Xuddi shunday, ikkinchi o'yinchining, masalan, 3-strategiyasi $y = (0, 0, 1, 0, ..., 0) \in S_n$ orqali aniqlanadi.

Quyidagi:

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

jadvalli o'yinni qaraylik. Faraz qilaylik, birinchi va ikkinchi o'yinchilar birinchi sof strategiyalarini mos ravishda x_1, y_1 ehtimollik bilan qabul qilsinlar. U holda aniqki, o'yinchilarning ikkinchi sof strategiyalari mos ravishda $x_2 = 1 - x_1, y_2 = 1 - y_1$ ehtimollik bilan tanlanadi.

Demak, bunday holda birinchi o'yinchining o'rtacha (matematik kutilma) yutug'i

$$w(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 5x_1y_2 + 2x_2y_2 \tag{2.18}$$

soniga teng bo'ladi. (2.18) ni soddalashtirib quyidagi

$$w(x, y) = -4\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)\left(y_1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{3}{4}$$

funksiyaga ega bo'lamiz.

Birinchi o'yinchi $x_1 = \frac{1}{4}$ ehtimollikni tanlash hisobiga o'rtacha kafolatlangan $2\frac{3}{4}$ yutuqni oladi. Chunki, u ikkinchi o'yinchi tomonidan y_1 sonini qanday tanlashi haqida axborotga ega bo'lmaganligi sababli, x_1 ning boshqa qiymati, ya'ni $x_1 \neq \frac{1}{4}$ ni tanlash bilan o'zining kafolatlangan yutug'i $2\frac{3}{4}$ ni kamaytirib yuborishi mumkin.

Xuddi shunga o'xshash, ikkinchi o'yinchi ham $y_1 = \frac{3}{4}$ ehtimollikni tanlash bilan o'rtacha kafolatlangan $2\frac{3}{4}$ yutqiziqqa ega bo'ladi. Boshqa ehtimollikni tanlash orqali o'zining o'rtacha yutqizig'i bo'lgan $2\frac{3}{4}$ ni kattalashtirib yuborishi mumkin. Bu mulohazalardan kelib chiqadiki, birinchi o'yinchi uchun, eng maqbul aralash strategiya $x^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, ikkinchi o'yinchi uchun, $y^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ aralash strategiya bo'lib, shunda birinchi o'yinchining kafolatlangan o'rtacha yutug'i va ikkinchi o'yinchining kafolatlangan o'rtacha yutqizig'i $2\frac{3}{4}$ bo'lar ekan.

Agar $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yin berilgan bo'lib, birinchi va ikkinchi o'yinchilar $x \in S_m$, $y \in S_n$ aralash strategiyalarni mos ravishda qo'llasalar, birinchi o'yinchining o'rtacha (matematik kutilma) yutug'i

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_i y_j$$

soniga teng bo'ladi.

15-ta'rif. $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yinda o'yinchilarning mos ravishda biror $x \in S_m$, $y \in S_n$ aralash strategiyalari uchun,

$$w(x, y^*) \leq w(x^*, y^*) \leq w(x^*, y)$$

qo'sh tengsizlik ixtiyoriy $x \in S_m$, $y \in S_n$ vektorlar uchun, o'rinli bo'lsa, u holda (x^*, y^*) juftlik $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yinning *muvozanat holati,* $w(x^*, y^*)$ soni *o'yin bahosi* deb ataladi.

O'yinlar nazariyasida muvozanat holatlarni aniqlash muhim hisoblanib, ularni aniqlash bilan o'yin to'la hal etiladi.

Faraz qilaylik, birinchi o'yinchi $x \in S_m$ aralash strategiyasini, ikkinchi o'yinehi esa j – sof strategiyasini qo'llashgan bo'lsin. U holda, birinchi o'yinchining o'rtacha matematik kutilma yutug'i

$$w(x, j) = \sum_{i=1}^{m} w_{ij} x_i$$

ga teng bo'ladi.

16-ta'rif. Agar $x, x' \in S_m$ strategiyalar uchun,

$$w(x, j) \geq w(x', j) \tag{2.19}$$

tengsizlik barcha $j = 1,2,...,n$ larda bajarilib j ning birorta qiymatida qat'iy bo'lsa, *x strategiya x' strategiyadan afzal* deb ataladi va $x \succ x'$ ko'rinishda yoziladi.

Faraz qilaylik, ikkinchi o'yinchi $y \in S_n$ aralash strategiyasini, birinchi o'yinchi esa $i-$ sof strategiyasini qo'llashgan bo'lsin. U holda, birinchi o'yinchining o'rtacha matematik kutilma yutug'i

$$w(i,y) = \sum_{i=j}^{n} w_{ij} y_j$$

ga teng bo'ladi.

17-ta'rif. Agar $y, y' \in S_n$ strategiyalar uchun,

$$w(i,y) \leq w(i,y')$$

tengsizlik barcha $i = 1,2,...,m$ larda bajarilib, i ning birorta qiymatida qat'iy bo'lsa, *y strategiya y' strategiyadan afzal* deb ataladi va $y \succ y'$ ko'rinishda yoziladi.

Izoh. Agar 16-ta'rifda x birinchi o'yinchining $i-$ sof strategiyasini bildirib, $x' - k-$ sof strategiyasini bildirsa, u holda x strategiya x' strategiyadan afzal degani quyidagiga ekvivalent:

$$w_{ij} \geq w_{kj}$$

tengsizlik barcha $j = 1,2,...,n$ lar uchun, o'rinli bo'lib, j ning biror qiymatida qat'iy bo'lishi kerak.

Xuddi shunga o'xshash, agar y ikkinchi o'yinchining $j-$ sof strategiyasini bildirib, $y' - l-$ sof strategiyasini bildirsa, u holda y strategiya y' strategiyadan afzal degani quyidagiga ekvivalent:

$$w_{ij} \leq w_{il}$$

tengsizlik barcha $i = 1,2,...,m$ lar uchun, o'rinli bo'lib, i ning biror qiymatida qat'iy bo'lishi kerak.

Demak, bu hollarda, ya'ni sof strategiyalarning afzalini aniqlash uchun, bevosita $W = (w_{ij})$ jadvalning satrlari yoki ustunlari elementlarini mos ravishda solishtirish orqali topish mumkin ekan.

Bir strategiyaning ikkinchi strategiyadan afzalligining ma'nosi shuki, o'yinchi afzal strategiyani tanlash bilan o'z yutug'ini kamaytirmaydi, hatto kamida bir holatda qat'iy ko'paytiradi. Quyidagi sonli misolni qaraylik:

$$W = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

bu jadvalli o'yinda birinchi o'yinchining ikkinchi sof strategiyasi birinchi sof strategiyasidan afzal, chunki: $4 > 3$, $1 > -1$, $3 > -4$, $3 \geq 3$. Shu sababli birinchi o'yinchi hech qachon birinchi sof strategiyasini tanlamaydi. Demak, ushbu jadvalli o'yinda birinchi satr hisobga olinmasa ham bo'ladi, bunda quyidagi jadval hosil bo'ladi:

$$W' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oxirgi jadvalda ikkinchi o'yinchining 2-sof strategiyasi birinchi sof strategiyasidan afzal: $2 < 4$, $-1 < 1$, $2 < 3$, $1 < 3$. Demak, quyidagi jadval hosil qilinadi:

$$W'' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yuqoridagi mulohazalarni qaytarish bilan ko'rsatiladiki, ikkinchi o'yinchining 1-sof strategiyasi 3 va 4 – sof strategiyalaridan afzal, bundan

$$W''' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

jadval hosil qilinadi. Endi oxirgi jadvalda birinchi o'yinchining 1-sof strategiyasi 2-sof strategiyasidan afzal. Shu sababli quyidagi bir elementli jadval hosil qilinadi:

$$W^{IV} = (\,1\,)\,.$$

Bu oxirgi jadval bir elementli bo'lganligi uchun, boshlang'ich $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yinning muvozanat holati mavjud bo'lib, u (2,2) dan iborat, chunki boshlang'ich jadvalda $w_{22} = 1$. Bu 1 soni ko'rilayotgan jadvalli o'yinning o'yin bahosini tashkil qiladi.

Endi quyidagi jadvalli o'yinni qaraylik:

$$W = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 \\ 12 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ushbu jadvalli o'yinda birinchi o'yinchining $x = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)^T$ aralash strategiyasi $x' = (1,0,0)^T$ aralash (sof) strategiyasidan afzal. Haqiqatan:

$$1)\, j = 1\,\text{da} \sum_{j=1}^{3} w_{i1}x_i = 3\cdot 0 + 12\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{3}{4} = 3;$$

$$2)\, j = 2\,\text{da} \sum_{j=1}^{3} w_{i2}x_i = -13\cdot 0 + 1\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{3}{4} = 2\frac{1}{2};$$

$$3)\, j = 3\,\text{da} \sum_{j=1}^{3} w_{i3}x_i = -4\cdot 0 + 3\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{4} = 1\frac{1}{4};$$

$$4)\, j = 4\,\text{da} \sum_{j=1}^{3} w_{i4}x_i = 2\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{3}{4} = 3$$

ga ega bo'lamiz. Xuddi shu usul bilan $x' = (1,0,0)^T$ uchun, hisoblansa mos ravishda quyidagi sonlarni hosil qilamiz: $3, -1, -4, 2$, bundan $3 = 3$, $2\frac{1}{2} > -1$, $1\frac{1}{4} > -4$, $3 > 2$, ya'ni (2.19) tengsizliklarning barchasi bajariladi. Shu sababli $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yin o'rniga qisqartirilgan

$$W' = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

jadvalli o'yinni yechish yetarli. Chunki bunda quyidagi tasdiq o'rinli bo'ladi:

4-teorema. Biror $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yinda $i-$ komponentasi noldan iborat bo'lgan aralash $x \in S_m$ strategiya $i-$ komponentasi 1 (demak, qolganlari noldan iborat) bo'lgan x' aralash strategiyadan afzal bo'lsin. U holda $i-$ satri tashlab yuborilgan $W' = (w'_{ij})$ jadvalli o'yinning muvozanat holatidan boshlang'ich $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yinning muvozanat holati quyidagicha hosil qilinadi: birinchi o'yinchining $W' = (w'_{ij})$ o'yindagi optimal strategiyasida $i-$ komponentadan boshlab o'ngga bir birlik suriladi, bo'shab qolgan $i-$ komponentasi o'rniga nol soni yoziladi, ikkinchi o'yinchining optimal strategiyasi o'zgarmasdan qoldiriladi. O'yin bahosi v' ham o'zgarmasdan qoladi.

Quyidagi misolni qaraylik:

$$W = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 \\ 12 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bizga ma'lumki, bunda 1-satr tashlab yuboriladi va quyidagi qisqartirilgan o'yinga kelamiz:

$$W' = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bu oxirgi o'yinda muvozanat holatni $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$ va $y = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$ aralash strategiyalar tashkil qiladi. O'yin bahosi $2\frac{1}{3}$ ga teng. 4-teoremaga asosan boshlang'ich $W = (w_{ij})$ jadvalli o‘yinning muvozanat holati (x^*, y^*) va o‘yin bahosi v^* mos ravishda quyidagiga teng $x^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$, $y^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$ va $v^* = 2\frac{1}{3}$.

Izoh. Ikkinchi o‘yinchiga nisbatan ham 4-teorema tasdig‘iga o‘xshash tasdiqni aytish mumkin.

Shu sababli ayrim jadvalli o‘yinlarga 16 va 17-ta’riflarni qo‘llash orqali ularning o‘lchamini kamaytirish va 4-teorema yordamida boshlang‘ich jadvalli o‘yinning yechimini aniqlash mumkin bo‘ladi.

Bu yerda shuni ta’kidlash lozimki, $W = (w_{ij})$ jadvalli o‘yinlarga 16 va 17-ta’riflarni qo‘llash orqali jadval o‘lchamini kamaytirish ketma-ketligining farqi yo‘q.

Minimaks haqidagi teorema

Quyidagi teorema o‘yinlar nazariyasida muhim teoremalardan biri hisoblanadi.

5-teorema. (Minimaks haqidagi teorema) Quyidagi:

$$w_I = \max_{x\in S_m} \min_{y\in S_n} w(x, y), \quad w_{II} = \min_{y\in S_n} \max_{x\in S_m} w(x, y)$$

sonlari uchun,

$$w_I = w_{II}$$

tenglik o‘rinli.

Bu teorema ko‘p usullar bilan isbot qilingan bo‘lib, biz Fon Neymanga tegishli bo‘lgan isbot usulini keltiramiz. Buning uchun, bizga quyidagi ikkita lemma kerak bo‘ladi.

1-lemma.(Gipertekislik haqidagi teorema). B $m-$ o‘lchamli evklid fazosining qavariq yopiq to‘plam ostisi bo‘lib, unga tegishli bo‘lmagan $z = (z_1, z_2, ..., z_m)$ nuqta berilgan bo‘lsin. U holda, shunday $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_{m+1}$ haqiqiy sonlar mavjudki, ular uchun,

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i z_i = \rho_{m+1} \tag{2.20}$$

tenglik va ixtiyoriy $y \in B$ uchun,

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i y_i > \rho_{m+1} \qquad (2.21)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu lemmaning so'z bilan talqini: B to'plamga tegishli bo'lmagan z nuqtadan shunday gipertekislik o'tadiki, B to'plam to'laligicha gipertekislikning faqat bitta tomonida yotadi.

Isbot. B to'plamning yopiqligiga asosan, uning z ga eng yaqin bo'lgan $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ nuqtasi mavjuddir. B to'plamning qavariq ekanligidan, uning x chegaraviy nuqtasidan o'tuvchi shunday gipertekislik L, ya'ni shunday $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m, \rho$ sonlari mavjudki, ixtiyoriy $y \in L$ uchun,

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i y_i = \rho$$

tenglik o'rinli bo'lib, ixtiyoriy $y \in B$ uchun, esa quyidagi:

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i y_i \geq \rho \qquad (2.22)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

L gipertekislikni antigradiyent $(-(\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m))$ bo'yicha z nuqtadan o'tgunga qadar parallel ko'chiramiz. Bu bilan shunday $\rho_{m+1} < \rho$ soni aniqlanadiki, natijada L gipertekislikka parallel va z nuqtadan o'tuvchi gipertekislik

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i y_i = \rho_{m+1}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i z_i = \rho_{m+1}$$

bu bilan (2.20) tenglik o'rinli. (2.22) va $\rho_{m+1} < \rho$ tengsizliklardan kelib chiqadiki: ixtiyoriy $y \in B$ uchun,

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i y_i > \rho_{m+1}$$

tengsizlik bajariladi, bu bilan (2.21) tengsizlik bajarilishi ham ko'rsatildi. Shu bilan 1-lemma isbot bo'ldi.

2-lemma. Biror $m \times n$ o'lchamli $V = (v_{ij})$ jadval berilgan bo'lsin, u holda, quyidagi tasdiqlardan faqat biri o'rinli bo'ladi: 1) S_m da shunday $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ element borki, uning uchun, $v_{1j}t_1 + v_{2j}t_2 + ... + v_{mj}t_m > 0$ tengsizlik barcha $j = 1, 2, ..., n$ lar uchun, bajariladi; 2) S_n da shunday $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ element borki, uning uchun, $v_{i1}q_1 + v_{i2}q_2 + ... + v_{in}q_n > 0$ tengsizlik barcha $i = 1, 2, ..., m$ lar uchun, bajariladi.

Isbot. $m-$ o'lchamli R^m evklid fazosida quyidagi:

$$\begin{aligned} &v_1 = (v_{11}, ..., v_{m1}), v_2 = (v_{12}, ..., v_{m2}), ..., v_n = (v_{1n}, ..., v_{mn}), \\ &e_1 = (1, 0, ..., 0),\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0),\ e_m = (0, 0, ..., 1) \end{aligned} \tag{2.23}$$

nuqtalarning qavariq qobig'ini C bilan belgilaymiz. Bir paytda bajarilmaydigan ikki holatni ko'ramiz: $0 \in C$ va $0 \bar{\in} C$, bu yerda 0 R^m fazoning nol nuqtasi.

Avval birinchi holni ko'raylik. Unda S_{n+m} dan shunday element $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$ topiladiki, uning uchun,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + ... + \mu_m e_m = 0 \tag{2.24}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. (2.24) tenglikni koordinata bo'yicha yozsak,

$$\lambda_1 v_{i1} + \lambda_2 v_{i2} + ..., + \lambda_n v_{in} + \mu_i = 0 \tag{2.25}$$

tengliklarga ega bo'lamiz, ammo μ_i, $i = 1, 2, ..., m$ lar manfiymas sonlar bo'lganligi uchun, (2.25) dan

$$\lambda_1 v_{i1} + \lambda_2 v_{i2} + ..., + \lambda_n v_{in} + \mu_i \leq 0 \tag{2.26}$$

tengsizliklar sistemasiga ega bo'lamiz. Lekin $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n > 0$, chunki aks holda $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, ... \lambda_n \geq 0$ bo'lganligi uchun, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ va (2.25) dan $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n = 0$ hosil bo'ladi. Bu esa $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_m) \in S_{n+m}$ ekanligiga ziddir. Shuning uchun, $q_j = \lambda_g / \sum_{k=1}^{n} \lambda_k,\ j = 1, 2, ..., n$ deb olish mumkin, u holda $q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in S_n$ va (2.26) larga asosan $v_{i1}q_1 + v_{i2}q_2 + ..., +v_{in}q_n \leq 0$ tengsizlik ixtiyoriy $i = 1, 2, ..., m$ uchun, o'rinli. Bu bilan 2-lemmaning 2)-da'vosi isbotlandi.

Endi faraz etaylik $0 \overline{\in} C$,. U holda, 1-lemmaga ko'ra, shunday $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m, \rho_{m+1}$ sonlari mavjudki, ular uchun,

$$\sum_{i=1}^{m} 0 \cdot \rho_i = \rho_{m+1} \tag{2.27}$$

va ixtiyoriy $y \in C$ uchun,

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i y > \rho_{m+1} \tag{2.28}$$

munosabatlari o'rinli bo'ladi.

(2.27) dan kelib chiqadiki, $\rho_{m+1} = 0$. (2.28)-tengsizlik, xususan, (2.23) dagi nuqtalar uchun, ham bajariladi. Shuning uchun, y o'rniga birin- ketin e_i, $i =, 2, ..., m$ nuqtalarni qo'yib va $\rho_{m+1} = 0$ ekanligini hisobga olsak, $\rho_i > 0$, $i = 1, 2, ..., m$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $t_i = \rho_i / \sum\limits_{k=1}^{m} \rho_k$, $i = 1, 2, ..., m$ va $t \in S_m$. Agar (2.28) da y o'rniga (2.23) dagi v_j, $j = 1, 2, ..., n$ nuqtalarni qo'ysak, quyidagi $\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i v_{ij} > 0$, $j = 1, 2, ..., n$ tengsizliklar sistemasiga kelamiz. Buning ikkala tomonini musbat $\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i$ soniga bo'lish orqali,

$$\sum_{i=1}^{m} v_{ij} t_i > 0,\ j = 1, 2, ..., n$$

tengsizliklar sistemasini hosil qilamiz. Bu esa 2-lemmaning 1)-da'vosini isbotlaydi. Lemma isbot bo'ldi.

Endi 5-teoremani isbotlaymiz. Berilgan $m \times n$ o'lchamli V jadvalli o'yinda 2-lemmaning 1)-da'vosi o'rinli bo'lsin, u holda shunday $t \in S_m$ topiladiki, uning uchun, $v_{1j}t_1 + v_{2j}t_2 + ... + v_{mj}t_m > 0$, $j = 1, 2, ..., n$ tengsizliklar sistemasi o'rinli yoki ixtiyoriy $y \in S_n$ uchun,

$$v(x, y) = \sum_{j=1}^{n}(v_{1j}x_1 + v_{2j}x_2 + ... + v_{mj}x_m)y_j > 0 \qquad (2.29)$$

tengsizlik hosil bo'ladi, bu yerda $x = t$ deb olingan. (2.29)-tengsizlik ixtiyoriy $y \in S_n$ uchun o'rinli bo'lganligi sababli:

$$\min_{y \in S_n} v(x, y) > 0,$$

yoki

$$v_I = \max_{x \in S_m} \min_{y \in S_n} v(x, y) = \max_{x \in S_m} \min_{1 \leq j \leq n} xv_{\cdot j} > 0. \qquad (2.30)$$

Bu yerda $v_{\cdot j}$ belgi V jadvalning j – ustuniga mos kelgan vektorni bildiradi.

Xuddi shunday mulohazalar bilan, agar 2-lemmaning 2-da'vosi bajarilsa,

$$v_{II} = \min_{y \in S_n} \max_{x \in S_m} v(x, y) = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{x \in S_m} v_{i\cdot} \leq 0 \qquad (2.31)$$

tengsizlikka kelamiz, bu yerda $v_{i\cdot}$ belgi V jadvalning i-satriga mos kelgan satr vektorni bildiradi.

Ammo 2-lemmaning da'vosiga asosan, yoki 1)-shart, yoki 2)-shart bajariladi. Demak, (2.30), (2.31) lar bir paytda bajarilmaydi, xuddi shunga o'xshash

$$v_i \leq 0 < v_{II} \qquad (2.32)$$

shartlar ham bajarilmaydi. $x-$ ixtiyoriy haqiqiy son bo‘lsin. Quyidagicha:

$$w_{ij} = v_{ij} - h,\ i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n$$

yangi $m \times n$ o‘lchamli W jadvalni tuzamiz. Ko‘rsatish mumkinki:

$$w(x, y) = v(x, y) - h,$$

bu yerda $v(x, y)$, $w(x, y)$ lar birinchi o‘yinchining V va W jadvalli o‘yinlardagi mos yutuqlarining o‘rtacha matematik kutilmasini bildiradi.

W jadvalga yuqoridagi mulohazalarni qo‘llasak, uning uchun, (2.32) o‘rinli emasligi kelib chiqadi, ya’ni $w_I - h \leq 0 < w_{II} - h$ yoki $w_I \leq h < w_{II}$ tengsizliklar hech bir x sonida bajarilishi mumkin emas. Demak, $w_I \geq w_{II}$, ammo ma’lumki $w_I \leq w_{II}$, bu oxirgi tengsizliklardan $w_I = w_{II}$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Bu teoremadan kelib chiqadiki, ixtiyoriy jadvalli o‘yinda o‘yinchilarning optimal strategiyalari mavjud va o‘yin bahosi aniqlangan.

Jadvalli o‘yinlarga chiziqli dasturlash usulini qo‘llash

6-teorema. w bahoga ega bo‘lgan $W = (w_{ij})$ jadvalli o‘yinda birinchi o‘yinchining $\bar{x}$ aralash strategiyasi optimal bo‘lishligi uchun, ikkinchi o‘yinchining ixtiyoriy y aralash strategiyasida

$$w \leq w(\bar{x},\ y) \tag{2.33}$$

tengsizlikning bajarilishligi zarur va yetarli.

Ikkinchi o‘yinchiga nisbatan ham bu narsa o‘rinli: ikkinchi o‘yinchining $\bar{y}$ aralash strategiyasi optimal bo‘lishligi uchun, birinchi o‘yinchining ixtiyoriy x aralash strategiyasida

$$w \geq w(x,\ \bar{y}) \tag{2.34}$$

tengsizlikning bajarilishligi zarur va yetarli.

Isbot. Teoremaning birinchi qismini isbotlash yetarli. Ikkinchi qismining isboti shunga o'xshash amalga oshiriladi.

Zarurligi. $\bar{x}$ – birinchi o'yinchining optimal aralash strategiyasi bo'lsin. U holda minimaks teoremasiga asosan, ikkinchi o'yinchining shunday aralash strategiyasi $\bar{y}$ mavjudki, quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$w = w(\bar{x}, \bar{y}) \leq w(\bar{x}, y)$$

bu yerda y – ikkinchi o'yinchining ixtiyoriy aralash strategiyasi.

Shu bilan (2.33) zaruriy shart ekanligi isbotlandi.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, $\bar{x}$ (2.33) tengsizlikni ixtiyoriy y da qanoatlantirsin. Minimaks teoremasiga asosan, birinchi va ikkinchi o'yinchilarning mos ravishda shunday x^0, y^0 optimal strategiyalari mavjudki, ixtiyoriy x, y lar uchun, quyidagi tengsizliklar o'rinlidir:

$$w(x, y^0) \leq w(x^0, y^0) \leq w(x^0, y) \tag{2.35}$$

Ammo teorema shartiga asosan o'yin bahosi w bo'lganligi uchun, :

$$w = w(x^0, y^0). \tag{2.36}$$

(2.33) va (2.35) lardan

$$w(x^0, y^0) \leq w(x^0, y) \tag{2.37}$$

kelib chiqadi.

(2.37)-tengsizlikda y ni y^0 ga va (2.34) ning o'ng tarafidagi x ni $\bar{x}$ ga almashtirish orqali (2.34) dan quyidagi:

$$w(\bar{x}, y^0) \leq w(x^0, y^0) \leq w(\bar{x}, y^0)$$

hosil qilinadi, ya'ni

$$w(x^0, y^0) = w(\bar{x}, y^0).$$

(2.35), (2.36) va (2.37) dan $w(x, y)$ funksiyaning egar nuqtasi $(\bar{x}, y^0)$ ekanligi kelib chiqadi, ya'ni birinchi o'yinchining aralash optimal strategiyasi $\bar{x}$ bo'lar ekan. Shu bilan yetarli shart va teoremaning birinchi qismi isbotlandi.

Bu teoremadan bevosita quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Bahosi w bo'lgan $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yinda birinchi o'yinchining aralash strategiyasi $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m)$ optimal bo'lishligi uchun, quyidagi tengsizliklarning:

$$w \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{x}_i, \qquad j = 1, 2, ..., n \tag{2.38}$$

bajarilishligi zarur va yetarli.

Ikkinchi o'yinchiga nisbatan ham bu narsa o'rinli: bahosi w bo'lgan $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yinda ikkinchi o'yinchining aralash strategiyasi $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n)$ optimal bo'lishligi uchun, quyidagi tengsizliklarning:

$$w \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_j, \qquad i = 1, 2, ..., m \tag{2.39}$$

bajarilishligi zarur va yetarli.

Bu tasdiqlardan kelib chiqadiki, $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yinning yechimini aniqlash uchun, (2.38) va (2.39) tengsizliklar sistemasining manfiymas hamda

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ \sum_{j=1}^{n} y_i = 1 \tag{2.40}$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi (x, y) juftlik va w ni aniqlash kerak bo'ladi.

Ushbu xulosadan foydalanib masalani chiziqli dasturlash usuli yordamida yechish mumkin bo'ladi. Umumiylikka zarar keltirmagan holda $w > 0$ deb olish mumkin. Bu narsa quyidagi mulohazadan kelib chiqadi. Ya'ni $W = (w_{ij})$ jadvalli o'yinning har bir elementiga biror o'zgarmas K sonini qo'shish bilan o'yinchilarning optimal strategiyalari o'zgarmaydi. Faqat o'yin bahosi K ga ortadi. Haqiqatan, ko'rsatish osonki ixtiyoriy (x, y) aralash strategiyalar juftligi uchun, $x\bar{W}y^T = xWy^T + K$ ayniyat o'rinlidir, bundan kelib chiqadiki: $\bar{w}_{ij} = w_{ij} + K$.

Quyidagi belgilashlarni

$$x_i = \frac{x_i}{w}, \ y_j = \frac{y_j}{w}$$

kiritish bilan (2.38)–(2.40) lar yordamida chiziqli dasturlashning to'g'ri va ikkilanma masalalariga kelinadi: ikkilanma masala:

$$1 \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i, \ j = 1, 2, ..., n,$$
$$x_i \ge 0, \ i = 1, \ 2, ..., m$$

shartlar ostida

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{w}$$

funksiyaning minimumini toping.

To'g'ri masala:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \le 1, \qquad i = 1, 2, ..., m,$$
$$y_j \ge 0, \ j = 1, \ 2, ..., n$$

shartlar ostida

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{w}$$

funksiyaning maksimumini toping.

Bu o'zaro ikkilanma masalalar yechilgandan so'ng teskari almashtirish yordamida boshlang'ich o'yinning yechimi aniqlanadi.

Biz buni quyidagi sonli misolda ko'rib chiqamiz:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

Ushbu jadvalli o'yinning har bir elementiga, masalan, $K = 3$ sonini qo'shish orqali musbat baholi jadval o'yinga keltirish mumkin. Unda, biz quyidagi jadvalli o'yinga kelamiz:

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

Oxirgi jadvalli o'yinga mos keluvchi to'g'ri va ikkilamchi chiziqli dasturlash masalalarini tuzamiz: ikkilamchi masala,

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow \min, \\
&4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geq 1 \\
&5x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 1 \\
&2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \geq 1 \\
&x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

To'g'ri masala:

$$\begin{aligned}
&y_1 + y_2 + y_3 \longrightarrow \max, \\
&4y_1 + 5y_2 + 2y_3 \leq 1 \\
&3y_1 + 4y_2 + 6y_3 \leq 1 \\
&6y_1 + y_2 + 4y_3 \leq 1 \\
&y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Demak, ikkilamchi masalani yechish bilan birinchi o'yinchining optimal strategiyasi topiladi. Masalani $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ o'zgaruvchilar yordamida kanonik shaklga keltiramiz:

$$
\begin{aligned}
-x_0 &= -x_1 - x_2 - x_3\\
x_4 &= -1 + 4x_1 + 3x_2 + 6x_3\\
x_5 &= -1 + 5x_1 + 4x_2 + x_3\\
x_6 &= -1 + 2x_1 + 6x_2 + 4x_3\\
&x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\\
&x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0.
\end{aligned}
$$

2.5-jadval

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$-x_0 =$	0	1	1	1
$x_4 =$	-1	-4	-3	-6
$x_5 =$	-1	-5^*	-4	-1
$x_6 =$	-1	-2	-6	-4

2.6-jadval

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$-x_0 =$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
$x_4 =$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{26}{5}^*$
$x_1 =$	$\frac{1}{5}$	-1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
$x_6 =$	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{22}{5}$	$-\frac{18}{5}$

2.7-jadval

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$-x_0 =$	$-\frac{3}{13}$	0	$\frac{6}{26}$	0
$x_3 =$	$\frac{1}{26}$	0	$-\frac{1}{26}$	-1
$x_1 =$	$\frac{5}{26}$	-1	$\frac{21}{26}$	0
$x_6 =$	$-\frac{12}{26}$	0	$-\frac{118}{26}^*$	0

2.8-jadval

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$-x_0 =$	$-\frac{15}{59}$	0	0	0
$x_3 =$	$\frac{5}{118}$	0	0	-1
$x_1 =$	$\frac{13}{118}$	-1	0	0
$x_2 =$	$\frac{6}{59}$	0	-1	0

$$
\begin{aligned}
y_0 &= y_1 + y_2 + y_3 \to \max\\
y_4 &= 1 - 4y_1 - 5y_2 - 2y_3\\
y_5 &= 1 - 3y_1 - 4y_2 - 6y_3\\
y_6 &= 1 - 6y_1 - y_2 - 4y_3\\
&y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\\
&y_4 \geq 0,\ y_5 \geq 0,\ y_6 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Ushbu masalani ikkilamchi simpleks usul bilan yechish yuqoridagi (2.5)–(2.8) jadvallar ko'rinishda bo'ladi.

Bundan quyidagilarga ega bo'lamiz: $x_0 = \frac{15}{59}$, $x_1 = \frac{13}{118}$, $x_2 = \frac{6}{59}$, $x_3 = \frac{5}{118}$. Teskari almashtirish: $w = \frac{1}{x_0}$, $\bar{x}_1 = wx_1$, $\bar{x}_2 = wx_2$, $\bar{x}_3 = wx_3$, orqali (2.42) o'yinning o'yin bahosi va birinchi o'yinchining optimal strategiyasini aniqlaymiz. Bunda quyidagilar kelib chiqadi: $w = \frac{59}{15}$, $\bar{x} = \left(\frac{13}{30}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}\right)^T$. Ammo $K = 3$ bo'lganligi sababli boshlang'ich (2.41) o'yinning o'yin bahosi quyidagiga teng bo'ladi: $w^* = w - 3 = \frac{14}{15}$.

Endi to'g'ri (2.43)-masalani yechish orqali ikkinchi o'yinchining optimal strategiyasini topamiz. Buning uchun (2.43)–masalani $y_4 \geq 0$, $y_5 \geq 0$, $y_6 \geq 0$ kuchsiz o'zgaruvchilar yordamida kanonik shaklga keltirib olamiz. Ushbu masalani ikkilamchi simpleks usul bilan yechish quyidagi (2.9)–(2.11) jadvallar ko'rinishda bo'ladi:

Bundan quyidagilarga ega bo'lamiz: $y_0 = \frac{15}{59}$, $y_1 = \frac{7}{59}$, $y_2 = \frac{5}{59}$, $y_3 = \frac{3}{59}$. Teskari almashtirish $w = \frac{1}{y_0}$, $\bar{y}_1 = wy_1$, $\bar{y}_2 = wy_2$, $\bar{y}_3 = wy_3$, orqali (2.42)- o'yinning o'yin bahosi va ikkinchi o'yinchining optimal strategiyasini aniqlaymiz. Bundan quyidagilarga ega bo'lamiz: $w = \frac{59}{15}$, $\bar{y}^* = \left(\frac{7}{15}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)$. Ammo $K = 3$ bo'lganligi sababli boshlang'ich (2.41) o'yinning o'yin bahosi yuqoriga o'xshash quyidagiga teng bo'ladi: $w^* = w - 3 = \frac{14}{15}$.

2.9-jadval

	1	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$
$y_0 =$	0	−1	−1	−1
$y_4 =$	1	4	5*	2
$y_5 =$	1	3	4	6
$y_6 =$	1	6	1	4

2.10-jadval

	1	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$
$y_0 =$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
$y_2 =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	−1	$\frac{2}{5}$
$y_5 =$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{22}{5}$*
$y_6 =$	$\frac{4}{5}$	$\frac{26}{5}$	0	$\frac{18}{5}$

2.11-jadval

	1	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$
$y_0 =$	$\frac{5}{22}$	$-\frac{5}{22}$	0	0
$y_2 =$	$\frac{2}{11}$	$\frac{9}{11}$	-1	0
$y_3 =$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	-1
$y_6 =$	$\frac{7}{11}$	$\frac{59^*}{11}$	0	0

2.12-jadval

	1	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$
$y_0 =$	$\frac{15}{59}$	0	0	0
$y_2 =$	$\frac{5}{59}$	0	-1	0
$y_3 =$	$\frac{3}{59}$	0	0	-1
$y_1 =$	$\frac{7}{59}$	-1	0	0

2×2, $2 \times n$ va $m \times 2$ o'yinlari va ularni yechish usullari

Bizga 2×2 jadvalli o'yin:

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$$

berilgan bo'lsin. Ma'lumki, satrda kichigi, ustunda kattasi bo'lgan element o'yinning egar nuqtasini tashkil etib, bunday jadvalli o'yin to'la yechilgan hisoblanadi. Ya'ni, optimal sof strategiyalar mavjud bo'lib, o'yin bahosi ham aniqlangan bo'ladi. Shu sababli W jadvalli o'yinda o'yinchilarning optimal sof strategiyalari yo'q deb faraz etib, ularning optimal aralash strategiyalarni aniqlaymiz. Demak, $x = (x_1, x_2)^T$ birinchi o'yinchining, $y = (y_1, y_2)$ ikkinchi o'yinchining optimal aralash strategiyalari bo'lsin. Farazga asosan x va y vektorlarning komponentalari musbat sonlardan iborat bo'ladi. Agar b bilan o'yin bahosini belgilasak, u holda

$$v = w_{11}x_1y_1 + w_{12}x_1y_2 + w_{21}x_2y_1 + w_{22}x_2y_2$$

yoki

$$v = (w_{11}y_1 + w_{12}y_2)x_1 + (w_{21}y_1 + w_{22}y_2)x_2 \qquad (2.44)$$

tenglikni hosil qilamiz.

$y = (y_1, y_2)$ – ikkinchi o'yinchi uchun, optimal aralash strategiya bo'lganligi sababli (2.44) dan

$$\begin{aligned} w_{11}y_1 + w_{12}y_2) \le v, \\ w_{21}y_1 + w_{22}y_2) \le v \end{aligned} \tag{2.45}$$

tengsizliklar o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Haqiqatan, faraz etaylik (2.45) dagi ikkala tengsizlik ham o'rinli bo'lmasin, ya'ni

$$\begin{aligned} w_{11}y_1 + w_{12}y_2) > v, \\ w_{21}y_1 + w_{22}y_2) > v \end{aligned} \tag{2.46}$$

bo'lsin. U holda (2.46) dagi birinchi tengsizlikni $x_1 > 0$, ikkinchisini $x_2 > 0$ ga ko'paytirib, hosil bo'lgan tengsizliklarni qo'shsak quyidagi:

$$(w_{11}y_1 + w_{12}y_2)x_1 + (w_{21}y_1 + w_{22}y_2)x_2 > v(x_1 + x_2) \tag{2.47}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

$x_1 + x_2 = 1$ bo'lganligi sababli (2.47) tengsizlik (2.44) tenglikka ziddir.

Endi faraz etaylik (2.46) tengsizliklardan biri qat'iy, ikkinchisi tenglik ko'rinishda bo'lsin. Bu holda ham xuddi yuqoriga o'xshash (2.47) qarama-qarshilikka kelamiz.

Oxirgi, ya'ni

$$\begin{aligned} w_{11}y_1 + w_{12}y_2 > v, \\ w_{21}y_1 + w_{22}y_2 < v \end{aligned}$$

bo'lgan hol qoldi. Bunda, tushunarliki, shunday $0 < \varepsilon < 1$ sonini topish mumkinki, quyidagi tengsizlik

$$w_{11}y_1 + w_{12}y_2 > \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}[v - (w_{21}y_1 + w_{22}y_2)] + v \tag{2.48}$$

o'rinli bo'ladi. $1 - \varepsilon > 0$ bo'lganligi sababli (2.48) dan

$$(1-\varepsilon)(w_{11}y_1 + w_{12}y_2) > \varepsilon v + (1-\varepsilon)v - \varepsilon(w_{21}y_1 + w_{22}y_2) \tag{2.49}$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Yoki $x_1 = 1 - \varepsilon$, $x_2 = \varepsilon$ belgilash orqali (2.49) dan

$$(w_{11}y_1 + w_{12}y_2)x_1 + (w_{21}y_1 + w_{22}y_2)x_2 > v$$

ni hosil qilamiz. Oxirgi tengsizlik $y = (y_1, y_2)$ ni optimal ekanligiga zid bo'lib, natijada bu mulohazalar (2.46) tengsizliklar sistemasining o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

Faraz qilaylik, (2.45) tengsizliklarning kamida bittasi qat'iy bo'lsin. U holda ularni mos ravishda $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$ sonlariga ko'paytirib, keyin qo'shish orqali

$$(w_{11}y_1 + w_{12}y_2)x_1 + (w_{21}y_1 + w_{22}y_2)x_2 < v$$

tengsizlikni hosil qilamiz, bu esa (2.44) tenglikka zid. Demak, optimal $y = (y_1, y_2)$ strategiya uchun,

$$\begin{aligned} w_{11}y_1 + w_{12}y_2 &= v \\ w_{21}y_1 + w_{22}y_2 &= v \end{aligned} \tag{2.50}$$

tengliklar sistemasi o'rinli ekan. (2.50) sistema va $y_1 + y_2 = 1$ tenglikdan y_1, y_2, v larni aniqlaymiz:

$$y_1 = \frac{w_{22} - w_{12}}{w_{11} + w_{22} - w_{12} - w_{21}}, \ y_2 = \\ \frac{w_{11} - w_{21}}{w_{11} + w_{22} - w_{12} - w_{21}}, \ v = \frac{w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}}{w_{11} + w_{22} - w_{12} - w_{21}}. \tag{2.51}$$

Endi, x_1, x_2 larni aniqlash uchun, (2.51) tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$v = (w_{11}x_1 + w_{21}x_2)y_1 + (w_{12}x_1 + w_{22}x_2)y_2.$$

Yuqoridagiga o'xshash mulohazalarni qo'llab, quyidagi tengliklar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$w_{11}x_1 + w_{21}x_2 = v,$$

$$w_{12}x_1 + w_{22}x_2 = v,$$
$$x_1 + x_2 = 1.$$

Bu sistemani yechish orqali x_1, x_2 larni aniqlaymiz:

$$x_1 = \frac{w_{22} - w_{21}}{w_{11} + w_{22} - w_{12} - w_{21}}, \quad x_2 = \frac{w_{11} - w_{12}}{w_{11} + w_{22} - w_{12} - w_{21}}. \qquad (2.52)$$

Shunday qilib 2×2 o'yinida o'yinchilarning optimal aralash strategiyalari va o'yin bahosi (2.51) va (2.52)-formulalar yordamida topilar ekan.

3-misol.

$$W = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

jadvalli o'yin berilgan bo'lsin. Bu o'yinda optimal sof strategiya yo'q bo'lganligi sababli, optimal aralash strategiyalarni va o'yin bahosini (2.51) va (2.52)-formulalar orqali aniqlaymiz:

$$x_1 = \frac{3 - (-1)}{5 + 3 - (-1) - 1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{5 - 1}{5 + 3 - (-1) - 1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$y_1 = \frac{3 - 1}{5 + 3 - (-1) - 1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad y_2 = \frac{5 - (-1)}{5 + 3 - (-1) - 1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

$$v = \frac{5 \cdot 3 - (-1) \cdot 1}{5 + 3 - (-1) - 1} = \frac{16}{8} = 2.$$

Demak, berilgan o'yinda birinchi o'yinchining optimal aralash strategiyasi $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$, ikkinchi o'yinchiniki $-y = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ va o'yin bahosi $b = 2$ ga teng bo'lar ekan.

$2 \times n$ – jadvalli o'yin

Bizga

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \end{pmatrix}$$

jadvalli o'yin berilgan bo'lsin. Ya'ni birinchi o'yinchining 2 ta, ikkinchisining n ta sof strategiyalari bo'lsin (bunda $n \geq 3$). Bunday ko'rinishdagi o'yinlarda o'yinchilarning optimal strategiyalarini va o'yin bahosini topishda grafik usuldan foydalanish qulaylik tug'diradi.

Ma'lumki, o'yinning bahosi

$$v = \max_{x \in S_2} \min_{1 \le j \le n} (w_{1j}x_1 + w_{2j}x_2)$$

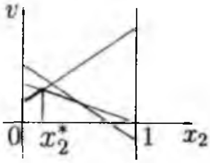
ga teng. Lekin $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ bo'lganligi sababli

$$v = \max_{0 \le x_2 \le 1} \min_{1 \le j \le n} \big(w_{1j} + (w_{2j} - w_{1j})x_2\big).$$

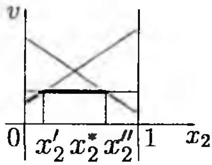
Demak, shunday $x_2 \in [0,1]$ ni topish lozimki, unda funksiya

$$\min_{1 \le j \le n} \big(w_{1j} + (w_{2j} - w_{1j})x_2\big)$$

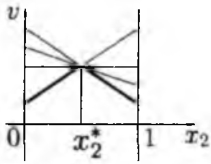
maksimum qiymatga erishsin. Qavs ichidagi ifoda x_2 ga nisbatan chiziqli funksiya bo'lib, uning grafigi to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Shu sababli har bir $j = 1, 2, \dots, n$ da $b = w_{1j} + (w_{2j} - w_{1j})x_2$, $0 \le x_2 \le 1$ funksiyaning grafigini quramiz va ularning eng pastki qismini qalin chiziq bilan ajratamiz. Bunda bir necha hollar bo'lishi mumkin, ular barchasi quyidagi rasmlarda sxematik tasvirlangan (2.7–2.14-rasmlar).



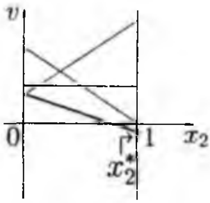
2.7-rasm



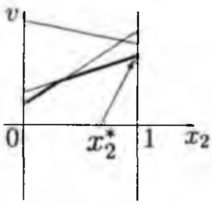
2.8-rasm



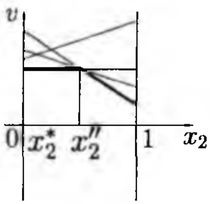
2.9-rasm



2.10-rasm

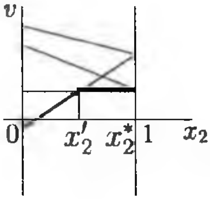


2.11-rasm

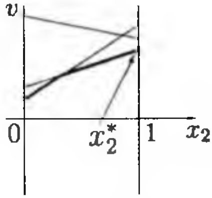


2.12-rasm

Bu yerda shuni ta'kidlash lozimki, bu o'yinda optimal strategiyalarni aniqlashda pastki qismning ko'rinishi muhim rol o'ynaydi. Bular rasmlarda qalin chiziqlar orqali ko'rsatilgan.



2.13-rasm



2.14-rasm

Rasmdagi har bir kesma yuqorida e'tirof etilgan to'g'ri chiziqlarning qismi bo'lib, ularga W jadvalning biror ustunidagi sonlar jufti mos keladi:

1-hol (2.7-rasm). Rasmda ko'rsatilgan kesishish nuqtasiga ega bo'lgan to'g'ri chiziqlar tenglamalari $v = w_{1j_1} + (w_{2j_1} - w_{1j_1})x_2$ va $v = w_{1j_2} + (w_{2j_2} - w_{1j_2})x_2$, $0 \leq x_2 \leq 1$ bo'lsin. Bu tenglamalarni birgalikda yechish yordamida v – o'yin bahosi va $x^* = (1 - x_2^*, x_2^*)^T$ – birinchi o'yinchining optimal strategiyasini aniqlaymiz. Ikkinchi o'yinchining optimal strategiyasini

$$W' = \begin{pmatrix} w_{1j_1} & w_{1j_2} \\ w_{2j_1} & w_{2j_2} \end{pmatrix}$$

2×2 jadval yordamida topamiz. Ya'ni

$$\begin{cases} w_{1j_1}y_1 + w_{1j_2}y_2 = w_{2j_1}y_1 + w_{2j_2}y_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining manfiy bo'lmagan $y_{j_1}^*$, $y_{j_2}^*$ yechimlaridan tuzilgan $y^* = (0, ..., 0, y_{j_1}^*, 0, ..., 0, y_{j_2}^*, 0, ..., 0)$ vektor ikkinchi o'yinchining optimal strategiyasini beradi. Bunda $y_{j_1}^*$, $y_{j_2}^*$ lar y^*

vektorning mos j_1 va j_2 komponentalaridir. Ko‘rsatish mumkinki,

$$y_1^* = \frac{w_{2j_2} - w_{1j_2}}{w_{1j_1} + w_{2j_2} - w_{1j_2} - w_{2j_1}}, \quad y_2^* = \frac{w_{1j_1} - w_{2j_1}}{w_{1j_1} + w_{2j_2} - w_{1j_2} - w_{2j_1}}$$

bo‘ladi;

2-hol (2.8-rasm). Birinchi o‘yinchining optimal strategiyasi $(1-x_2^*, x_2^*)^T$, $x' \leq x_2^* \leq x_2''$ vektorlardan iborat, gorizontal to‘g‘ri chiziqqa W jadvalning j_1 ustunidagi w_{1j_1} va w_{2j_1} sonlari mos kelgan bo‘lsin. U holda $v = w_{1j_1} = w_{2j_1}$ o‘yin bahosi bo‘lib, $y^* = (0, ..., 0, 1, ..., 0)$ ikkinchi o‘yinchining optimal sof strategiyasi bo‘ladi;

3-hol (2.9-rasm). Rasmda ko‘rsatilgan nuqtada kesishgan to‘g‘ri chiziqlarga mos keluvchi W jadvalning ustunlari raqamlari $j_1, j_2, ..., j_p \leq n$ bo‘lsin. U holda, quyidagi

$$\sum_{k=1}^{p} w_{1j_k} y_{j_k} = \sum_{k=1}^{p} w_{2j_k} y_{j_k}, \quad \sum_{k=1}^{p} y_{j_k} = 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $y = (0, ..., 0, y_{j_1}, ..., y_{j_k}, ...)$ vektorlar ikkinchi o‘yinchining optimal strategiyasini beradi;

4-hol (2.10-rasm). Bunda birinchi o‘yinchining optimal strategiyasi sof strategiya bo‘lib $-(1, 0)$ ko‘rinishga ega. Agar chap tarafdagi nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlarga mos keluvchi W jadvalning ustun elementlari (w_{1j_1}, w_{2j_1}), , ..., (w_{1j_p}, w_{2j_p}) bo‘lsa $v = w_{1j_1} = w_{1j_2} = ... = w_{1j_p}$ bo‘lib, ikkinchi o‘yinchining optimal strategiyasi

$$v = \sum_{k=1}^{p} w_{2j_k} y_{j_k}, \quad \sum_{k=1}^{p} y_{j_k} = 1$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi manfiymas $y_{j_1}, y_{j_2}, ..., y_{j_p}$ sonlaridan tuzilgan $y^* = (0, ..., 0, \ y_{j_1}, ..., y_{j_k}, ...)$ vektordan iborat bo‘ladi;

5-hol (2.11-rasm) 4-holga o‘xshash hal etiladi;

6-hol (2.12-rasm). Bunda, birinchi o'yinchining optimal strategiyalari $(1 - x_2^*, x_2^*)^T$, $0 \leq x_2^* \leq x_2''$ ko'rinishdagi vektorlardan iborat. Pastki gorizontal to'g'ri chiziqqa W jadvalning (w_{1j_1}, w_{2j_2}) ustun elementlari mos kelsa, ikkinchi o'yinchi $y^* = (0, ..., 0, 1, ..., 0)$ ko'rinishdagi yagona optimal strategiyaga ega, bunda 1 soni y^* vektorning j_1- komponentasida bo'ladi. O'yin bahosi esa $v = w_{1j_1}$ ga tengdir;

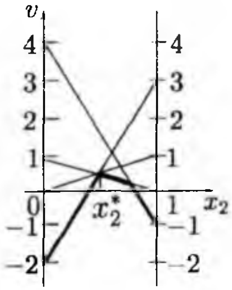
7-hol (2.13-rasm) 6-holga o'xshash hal etiladi;

8-hol (2.14-rasm). Bunda birinchi o'yinchining optimal strategiyasi $x = (x_1, x_2)^T$, $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ko'rinishdagi barcha vektorlardan iborat bo'lib, o'yin bahosi gorizontal chiziqqa mos keluvchi W jadvalning ustun elementidan iborat bo'ladi. Ikkinchi o'yinchining optimal strategiyasi mos ravishda $y^* = (0, ..., 0, 1, ..., 0)$ ko'rinishdagi yagona vektordan iboratdir.

4-misol. Bizga

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

jadvalli o'yin berilgan bo'lsin. Ikki parallel vertikal to'g'ri chiziqlarda mos ravishda jadvalning satrlari va ustunlaridagi sonlarni aniqlab, ularni mos ravishda birlashtirib chiqamiz (2.15-rasm).



2.15-rasm

x_2^* va o'yin bahosi b topish uchun, quyidagi sistemani tuzamiz: $\begin{cases} v = 1 - x_2 \\ v = -2 + 5x_2 \end{cases}$; bu sistemaning yechimi: $x_2^* = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$. Demak, birinchi o‘yinchining optimal strategiyasi $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ o‘yinning bahosi esa $b = \frac{1}{2}$. Ikkinchi o‘yinchining optimal strategiyasini topish uchun, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nuqtadan o‘tuvchi uchta to‘g‘ri chiziqqa mos keluvchi jadvalning $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ustunlari yordamida quyidagi

$$\begin{cases} 1 \cdot y_1 + (-2)y_2 + 0 \cdot y_4 = 0 \cdot y_1 + 3y_2 + 1 \cdot y_4 \\ y_1 + y_2 + y_4 = 1 \end{cases}$$

yoki $\begin{cases} y_1 - 5y - 2 - y_4 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_4 = 1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasining manfiymas yechimlarini aniqlaymiz:

$$y^* = \left(\frac{2}{3}y_4^* + \frac{5}{6}, \frac{1}{6} - \frac{5}{3}y_4^*, 0, y_4^*\right), \ 0 \leq y_4^* \leq \frac{1}{10}.$$

Demak, ikkinchi o‘yinchining optimal strategiyasi cheksiz ko‘p ekan.

$(m \times 2)$ – **jadvalli o‘yin**

Bunday jadvalli o‘yinda birinchi o‘yinchining m ta, ikkinchi o‘yinchining 2 ta sof strategiyalari bo‘lib, o‘yin bahosi

$$v = \min_{y \in S_2} \max_{1 \leq i \leq m} \left(w_{i1}y_1 + w_{i2}y_2\right)$$

yoki

$$v = \min_{0 \leq y_2 \leq 1} \max_{1 \leq i \leq m} \left(w_{i1} + (w_{i2} - w_{i1})y_2\right)$$

tengliklar orqali aniqlanadi. Bu o‘yinda ham, yuqorida $(2 \times n)$ o‘yin uchun, ko‘rilgan hollarni ajratib ko‘rib chiqish lozim. Bunda, faqat qalin chiziq bilan eng yuqori qism olinadi.

3-§. Kooperativ o‘yinlar

Yuqorida ko‘rib o‘tilgan ikki ishtirokchi bo‘lgan o‘yinlar to‘la tahlil qilingan deb hisoblash mumkin. Chunki bunda, o'yinchilarning optimal strategiyalari va o'yin bahosi o'yinning mazmun-mohiyatidan kelib chiqqan holda hal etilgan. Ammo ishtirok etuvchilarning soni ikkitadan ko'p bo'lganda bunday fikrni aytib bo'lmaydi, ya'ni barcha tabiiy talablarni to'la-to'kis o'zida aks ettirgan nazariya yaratilmagan. Bu yo'nalishda, ilk bor, muhim natijalarga erishgan Fon Neyman va Morgenshtern monografiyasidagi tadqiqotlar diqqatga sazovordir. Bu monografiyada keltirilgan nazariyaning asosiy g'oyasi o'yinchilarni ikki guruhga (koalitsiyaga) bo'lish va o'yinni ikki ishtirokchi nol yig'indili o'yinga keltirishdan iborat.

Bunda o'yinchilarning kelishib birlashishlariga (kooperatsiya) ruxsat berilib, bu bilan ular o'z yutuqlari miqdorini oshirish imkoniyatiga egadirlar. Har bir o'yinchining yutug'i, nafaqat u tanlagan strategiyaga, balki boshqa qatnashuvchilar tanlagan strategiyaga ham bog'liqdir. Shu sababli birlashib, kelishgan holda strategiya tanlash, albatta, o'yinchiga kattaroq yutuq olib kelish imkoniyatini tug'diradi (ayrim trivial hollardan tashqari).

Shundan so'ng umumlashgan aralash strategiya kiritish yordamida guruh (koalitsiya) kafolatlangan o'rtacha yutuqlarini aniqlashdan iborat.

Keyinchalik, shu yo'l bilan hosil qilingan guruhlar yutug'i yordamida o'yinchilarga adolatli, haqqoniy yutuqni aniqlab berish kerak bo'ladi.

Ko'p ishtirokchili o'yinda oxirgi yutuqni aniqlab, so'ng o'yinchilarga taqsimlab berish asosiy muammo bo'lib, bunda bir qancha usullar mavjud. Bular, masalan: C – yadro, NM – yechim, n – yadro, Shepli vektori va hokazo.

Ammo bularning har birining o'z kamchilik va afzalliklari bor. C – yadro va NM yechimlar, odatda, ko'p elementli bo'lib, ular ichidan barcha o'yinchilar uchun, yagona maqbul yechimni tanlab olish muammosi kelib chiqadi.

Shepli vektori va n – yadro bitta yechimni aniqlab berishlari bilan bir qatorda, ular ayrim o'yinchilarning koalitsiyalarda ishtirok etishiga nisbatan turg'un emas.

Nol yig'indili $n-$ ishtirokchili o'yin. Xarakteristik funksiyani qurish

Biz yuqorida $n-$ ishtirokchi bo'lgan o'yinning daraxt ko'rinishda ifodalanishini ko'rib chiqqan edik. Endi shu o'yinni boshqa nuqtayi nazardan qarab chiqamiz:

1. O'yinchi qanday yechim (qaror) qabul qilgani boshqalarga noma'lum;

2. O'yin oxirida o'yinchilarning olgan yutuqlari yig'indisi nolga teng;

3. O'yinchilar birlashib (koalitsiya) tuzishlari mumkin. Demak, agar $\delta_i(\in \Delta_i)$, $i-$ o'yinchining strategiyasi (qarori, yechimi) bo'lib $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ holatga mos kelgan yutug'i $v_i(\delta)$ bo'lsa, 2-shartga asosan

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(\delta) = 0$$

bo'ladi.

Endi, faraz etaylik, bir qancha $i_1, i_2, ..., i_k$ o'yinchilar birlashib $S(\subset N)$ koalitsiya tuzgan bo'lsinlar. Δ_S bilan $\Delta_i(i \in S)$ larning Dekart ko'paytmasi belgilangan bo'lsin, ya'ni

$$\Delta_S = \Pi_{i\in S}\Delta_i$$

Demak, $\delta_S = (\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, ..., \delta_{i_k})(\in \Delta_S) - S$ koalitsiyaning holatini, xuddi shunday $\delta_{\bar{S}} - \bar{S}(\bar{S} = N\backslash S)$ koalitsiyaning holatini bildiradi. Bulardan o'yinning $\delta = \delta_S \cup \delta_{\bar{S}}$ holatiga koalitsiyaning

$$v_S(\delta) = \sum_{i\in S} v_i(\delta)$$

yutug'i mos keladi. Ammo o'yin nol yig'indili bo'lganligi sababli

$$\sum_{i\in S} v_i(\delta) = -\sum_{i\in \bar{S}} v_i(\delta), \text{ ya'ni } v_S(\delta) = -v_{\bar{S}}(\delta) \text{ bo'ladi.}$$

Shunday qilib, aytish mumkinki, berilgan o'yin nol yig'indili ikki ishtirokchili o'yinga ajraladi: birinchi o'yinchi sifatida — S koalitsiya, ikkinchi o'yinchi sifatida — $\bar{S} = N \backslash S$ koalitsiya ishtirok etadi.

1-o'yinchining har bir strategiyasi δ_S 2-o'yinchining har bir strategiyasi $\delta_{\bar{S}}$ vektorlar bilan mos ravishda ifodalanadi. Bu δ_S va $\delta_{\bar{S}}$ vektorlar o'yinchilarning sof strategiyalarini tashkil qiladi.

Agar ξ_{δ_S} va $\eta_{\delta_{\bar{S}}}$ lar bilan birinchi va ikkinchi o'yinchilarning mos ravishda δ_S, $\delta_{\bar{S}}$ sof strategiyalarini tanlash ehtimolliklarini belgilasak, ya'ni:

$$\xi_{\delta_S} \geq 0, \quad \sum_{\delta_S \in \Delta_S} \xi_{\delta_S} = 1, \quad \eta_{\delta_{\bar{S}}} \geq 0, \quad \sum_{\delta_{\bar{S}} \in \Delta_{\bar{S}}} \eta_{\delta_{\bar{S}}} = 1.$$

U holda S koalitsiyaning (birinchi o'yinchining) o'rtacha matematik kutilma yutug'i

$$v_S(\xi, \eta) = \sum_{\delta_S \in \Delta_S, \delta_{\bar{S}} \in \bar{S}} v_S(\delta_S \cup \delta_{\bar{S}}) \xi_{\delta_S} \eta_{\delta_{\bar{S}}}$$

ga teng bo'ladi, bu yerda $\xi = (\xi_{\delta_S}), \delta_S \in \Delta_S$ va $\eta = (\eta_{\delta_{\bar{S}}}), \delta_{\bar{S}} \in \Delta_{\bar{S}}$. Xuddi shunday $\bar{S}$ koalitsiyaning yutug'i (ikkinchi o'yinchining yutqizig'i)

$$v_{\bar{S}}(\xi, \eta) = \sum_{\delta_S \in \Delta_S, \delta_{\bar{S}} \in \bar{S}} v_{\bar{S}}(\delta_S \cup \delta_{\bar{S}}) \xi_{\delta_S} \eta_{\delta_{\bar{S}}}$$

ga teng bo'ladi. Ammo o'yin nol yig'indili bo'lganligi sababli

$$v_S(\xi, \eta) = -v_{\bar{S}}(\xi, \eta).$$

Demak, S koalitsiyaning (birinchi o'yinchining) kafolatlangan o'rtacha matematik yutug'i

$$v(S) = \max_{\xi} \min_{\eta} v_S(\xi, \eta)$$

ga teng bo'lar ekan. Bundan kelib chiqadiki, $\bar{S}$(ikkinchi o'yinchining) koalitsiyaning yutug'i

$$v(\bar{S}) = -v(S)$$

ga teng bo'lar ekan. Bu mulohazani boshqa barcha $S\,(\subset N)$ koalitsiyalar uchun, ham qo'llab, argumenti S to'plamdan iborat bo'lgan $v(S)$ funksiyani qurish mumkin. Bu $v(S)$, $S \subseteq N$ berilgan o'yinning *xarakteristik funksiyasi* deb ataladi.

Xarakteristik funksiyaning xossalari. Muhim o'yin

Yuqorida ta'kidlab o'tilgandek, ishtirokchilar soni ikkitadan ko'p bo'lgan o'yinlarda asosiy masala koalitsiyalar tuzish va yutuqni haqqoniy taqsimlab berishdan iboratdir. Shu sababli bunday o'yinlar uchun, koalitsiyalarning kafolatlangan yutuqlarini ifodalovchi – o'yinning xarakteristik funksiyasi kiritildi.

Shu yerda ta'kidlab o'tamizki, $N = \{1, 2, ..., n\}$ to'plamning to'plam ostilari aniqlanish sohasi bo'lgan ixtiyoriy funksiya n ishtirokli o'yinning *xarakteristik funksiyasi* deyiladi. Bundan keyin o'yinni uning berilgan xarakteristik funksiyasi orqali tahlil qilamiz. $v(S)$, $S(\subseteq N)$ xarakteristik funksiyaning quyidagi asosiy xossalari o'rinli:

(1) $v(\emptyset) = 0$

(2) $v(S) = -v(\bar{S})$

(3) $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$

bu yerda $S, T(\subseteq N)$, $S \cap T = \emptyset$. (1) va (2) xossalar trivial ravishda ko'rsatiladi. 3-xossa bildiradiki, koalitsiyalar alohida oladigan yutuqlari yig'indisi, ular birlashib oladigan yutug'idan katta emas.

(3)-xossadan quyidagi natija kelib chiqadi: agar $S_1, S_2, ..., S_k$ o'zaro kesishmaydigan koalitsiyalar ketma-ketligi bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$v(S_1) + v(S_2) + ... + v(S_k) \leq v(S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_k) \qquad (3.1)$$

(1) va (2)-xossalardan kelib chiqadiki, nol yig‘indili o‘yin uchun, $v(N) = 0$ bo‘ladi, ya’ni o‘yinchilar barchasi birlashib nol yutuqqa ega bo‘ladilar. Oxirgi (3.1) da $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}, ..., S_n = \{n\}$ deb olinsa, quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$v(1) + v(2) + ... + v(n) \leq v(N) = 0 \qquad (3.2)$$

bu yerda $v(i) = v(S_i)$ deb olingan.

1-ta’rif. Agar (3.2) tengsizlik qat’iy bo‘lsa, mos o‘yin *muhim*, aks holda, ya’ni tenglik bo‘lsa, o‘yin *nomuhim* deb ataladi.

Ko‘rsatish mumkinki, nomuhim o‘yinda o‘yinchilarning koalitsiya tuzishlarining foydasi yo‘q, bu bilan ular yutuqlarini kattalashtira olishmaydi. O‘yinchilar oladigan yutuqlar mos ravishda $v(i)$, $i \in N$ dan katta bo‘lishi mumkin emas. Shu sababli bunday o‘yinlar hech qanday qiziqish uyg‘otmaydi. Demak, biz faqat muhim o‘yinlarni tahlil qilish bilan shug‘ullanamiz.

Taqsimot. Afzallik tushunchasi. O‘yinning C – yadrosi

O‘yin qay tarzda kechganligidan qat’i nazar, o‘yinchilar o‘zaro kelishgan holda umumiy yutuq $v(N)$ ni qanday taqsimlab olishlari kerak degan masalani ko‘raylik. Bu o‘yinlar nazariyasining eng zarur va muhim masalasidir. Taqsimot biror usul yordamida amalga oshirilgan bo‘lsa, bunda barcha o‘yinchilar rozi bo‘lishlari shart emas, chunki ularning, masalan, ayrimlari boshqalarga nisbatan "kuchliroq" yoki imtiyozga ega bo‘lishi mumkin. Shu sababli haqqoniy, adolatli taqsimotni amalga oshirish lozim bo‘ladi.

2-ta’rif. Quyidagi:

$$v(i) \leq \alpha_i, \ i = 1, 2, ..., n, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ vektor *taqsimot* deb ataladi.

Barcha taqsimotlar to'plamini E bilan belgilaymiz. E to'plam n o'lchovli fazoda simpleksni aniqlashiga e'tiborni qaratamiz: $n = 3$ da E uchburchak; $n = 4$ da tetraedr va hokazo.

Izoh. Mabodo, o'yin nomuhim bo'lsa E yagona $\alpha_i = v(i)$, $i = 1, 2, ..., n$ elementdan iborat bo'ladi.

Demak, asosiy masala, haqqoniy taqsimotni aniqlash, E dan biror elementni ajratish ekan.

3-ta'rif. Agar biror $S \subset N$ uchun,

$$\beta_i < \alpha_i, \; i \in S \tag{3.3}$$

$$\sum_{i \in S} \alpha_i \leq v(S) \tag{3.4}$$

shartlar o'rinli bo'lsa, u holda α *taqsimot* β *taqsimotdan* S *koalitsiya bo'yicha afzal* deb ataladi va $\alpha \succ_S \beta$ ko'rinishda yoziladi.

(3.3)-shart bildiradiki, S koalitsiyani tashkil etgan o'yinchilar α taqsimotda β taqsimotga ko'ra ko'proq yutuqqa ega bo'lishadi;

(3.4)-shart esa S koalitsiya α taqsimotni, haqiqatan ham, amalga oshirishi mumkinligini ko'rsatadi. Chunki bu S koalitsiya $v(S)$ dan ko'p yutuqqa erisha olmasligi mumkin, bunga $\bar{S}$ koalitsiya xalaqit beradi.

Izoh. Bitta elementli yoki butun N elementli koalitsiyalar bo'yicha taqsimotlarning afzalliklarini amalga oshirib bo'lmaydi.

Quyidagi misolni ko'raylik:

$$\begin{aligned}
&v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(2,3) = v(3,4) = v(2,4) = -1 \\
&v(1,2) = v(1,2,3) = v(1,2,4) = 1, \;\; v(1,2,3,4) = 0 \\
&v(1,3) = v(1,3,4) = 1, \;\; v(1,4) = 1, \;\; v(2,3,4) = 1.
\end{aligned}$$

Bu misol uchun, $E = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) : \alpha_i \geq -1, \; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0\}$.

Quyidagi taqsimotlarni ko'raylik:

$$\alpha = \left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right),\ \beta = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right),\ \gamma = (0,0,0,0)$$

$S = \{1,2\}$ koalitsiya bo'yicha $\beta \succ \gamma$, $S = \{1,3\}$ koalitsiya bo'yicha $\alpha \succ \beta$ va $S = \{2,3,4\}$ koalitsiya bo'yicha $\gamma \succ \alpha$. Demak, bu yerda nafaqat tranzitivlik xossasi buziladi, hatto sikl bo'lib qoladi: $\alpha \succ \beta \succ \gamma \succ \alpha$.

4-ta'rif. Afzal taqsimoti yo'q bo'lgan taqsimotlar to'plami o'yinning $C-$ *yadrosi* deb ataladi.

Qiyinchiliksiz isbotlanuvchi quyidagi teoremani keltiramiz:

1-teorema. O'yinning $C-$ yadrosi faqat quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi taqsimotlardan iborat:

$$\sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(S),\ \text{barcha}\ S(\subseteq N)\ \text{koalicialar uchun}.$$

Demak, 1 – teoremaga asosan,

$$C = \left\{\alpha \in E : \sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(S),\ \forall S \subseteq N\right\}.$$

Ammo $C-$ yadroni doim ham yechim sifatida qabul qilib bo'lmaydi, chunki aksariyat o'yinlarning $C-$ yadrosi bo'sh to'plam. Shu sababli boshqa yechim tushunchalari kiritilgan (NM yechim, $n-$ yadro, Shepli vektori).

NM yechim tushunchasi

5-ta'rif. E taqsimotlar to'plamining H to'plam ostiga tegishli bo'lgan hech bir ikki taqsimot bir-biridan afzal bo'lmasa, bunday H to'plam *ichki turg'un* deb ataladi.

6-ta'rif. E taqsimotlar to'plamining H to'plam ostiga tegishli bo'lmagan ixtiyoriy taqsimotdan afzal bo'lgan, H ga tegishli, taqsimot mavjud bo'lsa, bunday H to'plam *tashqi turg'un* deb ataladi.

7-ta'rif. Ham ichki, ham tashqi turg'un bo'lgan H taqsimotlar to'plami o'yinning *NM ma'nosidagi yechimi* deb ataladi.

Demak, NM yechimni tashkil etuvchi taqsimotlar to'plamiga tegishli taqsimotlarning hech birini ikkinchisidan afzal deb biluvchi koalitsiya topilmaydi. Aksincha, bu to'plamga tegishli bo'lmagan taqsimot uchun, shunday koalitsiya borki, u to'plamdagi biror taqsimotni afzal ko'radi.

Biz bilamizki, C – yadroni tashkil etgan taqsimotlarning hech biridan afzal taqsimot yo'q, shu sababli C – yadro NM yechimning ichida to'plam ma'nosida yotadi. Misol sifatida $n = 3$ bo'lgan o'yinni qaraylik. Bunda $v(i) = -1$, $i = 1,2,3$, $v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = 1$, $v(1,2,3) = 0$ bo'lsin.

$H = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ – NM yechimini tashkil qiladi. Uning ichki turg'un ekanligi osongina ko'rsatiladi. Shuning uchun, tashqi turg'unligini ko'rsataylik. $y \bar{\in} H$ taqsimot berilgan bo'lsin.

Albatta, bu vektorning birorta komponentasi $\frac{1}{2}$ dan kichik bo'ladi, aks holda $y_1 \geq \frac{1}{2}$, $y_2 \geq \frac{1}{2}$, $y_3 \geq \frac{1}{2}$ va $y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{3}{2}$ shartga ega bo'lib, u $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ tenglikka ziddir. Shu sababli Faraz qilaylik, $y_1 < \frac{1}{2}$ bo'lsin. U holda $y_2 \geq \frac{1}{2}$, $y_3 \geq \frac{1}{2}$ tengsizliklar sistemasi o'rinli emas. Chunki, agar ularning ikkalasida tenglik bo'lsa $y \in H$ bo'lib qoladi. Agar ularning birortasida tengsizlik qat'iy bo'lsa $y_2 + y_3 > 1$ bo'lib, bundan $y_3 < -1$, ya'ni $y \bar{\in} E$ hosil bo'ladi. Demak, tengsizliklarning kamida bittasi o'rinli emas, masalan, $y_2 < \frac{1}{2}$ bo'lsin, u holda $y = (y_1, y_2, y_3) \prec \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$ bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki N tashqi turg'un, demak, u NM yechimni tashkil etar ekan.

Shunisi qiziqki, $n = 3$ da NM yechim faqat yuqoridagi N dan iborat bo'lmay, yana boshqalari ham mavjud ekan. Shulardan biri $H_{3.c} = \{\alpha \in E : \alpha_3 = c\}$ bo'lib, bunda $c \in \left[-1, \frac{1}{2}\right)$.

Avval $H_{3.c}$ ni ichki turg'unligini ko'rsataylik.

Teskarisini faraz etaylik, ya'ni shunday $x, y \in H_{3,c}$ taqsimotlar borki $x \succ_S y$ bo'lsin. $x_3 = y_3 = c$ bo'lganligi sababli $\{3\} \bar{\in} C$, demak, $S = \{1, 2\}$ bo'ladi, ammo $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 1 - c$ bo'lganligi sababli $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$ tengsizliklar sistemasi birgalikda emas.

Endi $H_{3,c}$ ni tashqi turg'unligini ko'rsataylik. Faraz qilaylik, $y \bar{\in} H_{3,c}$ bo'lsin, bu degani $y_3 \neq c$.

Ikki holni qaraymiz: 1) $y_3 < c$; 2) $y_c > c$. 1)-holda $y_1 + y_2 > -c$ bo'ladi. $H_{3,c}$ ga tegishli va y taqsimotdan afzal bo'lgan x taqsimotni quyidagicha quramiz: $y_1 + y_2 \leq 1$ (chunki $y_3 \geq 1$ va $y_1 + y_2 + y_3 = 0$) bo'lganligi sababli, yoki $y_1 \leq \frac{1}{2}$, yoki $y_2 \leq \frac{1}{2}$ bo'ladi. Faraz qilaylik, $y_1 \leq \frac{1}{2}(y_2 \leq \frac{1}{2}$ xuddi shunga o'xshash ko'rsatiladi) bo'lsin, u holda $x \in H_{3,c}$ sifatida quyidagi taqsimotni olamiz $x = (1 - c, -1, c)$. Tekshirish osonki $y \prec x$, $S = 1, 3$ koalitsiya bo'yicha.

2-holda $y_3 = c + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ bo'lsin, x taqsimotni quyidagicha aniqlaymiz: $x_1 = y_1 + \frac{\varepsilon}{2}$, $x_2 = y_2 + \frac{\varepsilon}{2}$, $x_3 = c$. Demak, $x \in H_{3,c}$ va $y \prec x$, $S = \{1, 2\}$ koalitsiya bo'yicha. Xuddi shu usul bilan ko'rsatish mumkinki $H_{2,c} = \{\alpha \in E : \alpha_2 = c\}$, $H_{1,c} = \{\alpha \in E : \alpha_1 = c\}$, $c \in \left[-1, \frac{1}{2}\right)$ taqsimotlar to'plamining har biri NM yechimni tashkil qiladi. Bu yechimlarda o'yinchilarning bittasi har vaqt o'zgarmas c yutuqqa ega bo'ladi.

Strategik ekvivalent o'yinlar. $(0, 1)$ shakldagi o'yin

8-ta'rif. $v(S)$ va $w(S)$, $S \subseteq N$ xarakteristik funksiyali n ishtirokchili o'yinlar berilgan bo'lsin. Agar shunday $r > 0$ va $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ haqiqiy sonlari mavjud bo'lsaki, ular uchun, ixtiyoriy $S (\subseteq N)$ koalitsiyada

$$w(S) = rv(S) + \sum_{i \in S} \gamma_i$$

tenglik o'rinli bo'lsa, bu o'yinlar *strategik ekvivalent* deb ataladi.

9-ta'rif. $v(S)$, $S \subseteq N-$ xarakteristik funksiyaga ega bo'lgan muhim o'yin uchun,

$$v(i) = 0,\ i = 1, 2, ..., n \tag{3.5}$$

$$v(N) = 1 \tag{3.6}$$

shartlar o'rinli bo'lsa, u $(0, 1)$ *shakldagi o'yin* deb ataladi.

Ko'rsatish mumkinki, strategik ekvivalent bo'lgan o'yinlarda yechimlar tarkibi to'la saqlanib qoladi. Shu sababli, strategik ekvivalent o'yinlardan bitta vakil tanlab, uni tahlil etish yetarlidir. Bunday vakil sifatida $(0, 1)$ shakldagi o'yinni olish qulaylik tug'diradi. Shu sababli quyidagi teoremani isbotlaymiz.

2-teorema. Ixtiyoriy muhim o'yin faqat bitta $(0, 1)$ shakldagi o'yinga strategik ekvivalent bo'ladi.

Isbot. Bizga $n-$ ishtirokli $v(S), S \subseteq N$ xarakteristik funksiyaga ega bo'lgan muhim o'yin berilgan bo'lsin. Biz shunday $r > 0$ va $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ haqiqiy sonlarni topishimiz kerakki, natijada ixtiyoriy $S(\subseteq N)$ da

$$w(S) = rv(S) + \sum_{i \in S} \gamma_i$$

bo'lib $w(i) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$ va $w(N) = 1$ bo'lsin. Buning uchun, $r > 0$ va $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ noma'lumlarga nisbatan quyidagi $n + 1$ ta tenglamalar sistemasini ko'ramiz:

$$rv(N) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 1,\ rv(i) + \gamma_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Bundan r ni topamiz:

$$r = \frac{1}{v(N) - \sum\limits_{i=1}^{n} v(i)},$$

o'yin muhim bo'lganligi sababli $v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(i)$, demak, $r > 0$. Endi γ_i larni topish hech qanday qiyinchilik tug'dirmaydi:

$$\gamma_i = \frac{v(i)}{v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(i)}, \ i = 1, 2, ..., n.$$

Shunday qilib, berilgan $v(S)$, $S \subseteq N$ muhim o'yinga strategik ekvivalent bo'lgan va $(0,1)$-shakldagi $w(S)$, $S \subseteq N$ o'yin qurildi (3.5), (3.6).

10-ta'rif. $(0,1)$-shakldagi o'yin uchun, ixtiyoriy $S \subseteq N$ da, yoki $v(S) = 0$, yoki $v(S) = 1$ bo'lsa, bunday o'yin *sodda o'yin* deb ataladi.

Demak, sodda o'yinlarda ixtiyoriy S koalitsiya, yoki yutadigan ($v(S) = 1$), yoki yutqazadigan ($v(S) = 0$) bo'ladi. Shuning uchun, sodda o'yinlar "ha" yoki "yo'q" javobli masalalarni yechishda qo'l keladi. Masalan, siyosiy masalalarni ovoz berish yo'li bilan hal etishda sodda o'yinlar natijalaridan foydalanish mumkin.

11-ta'rif. $v(S)$, $S \subseteq N$ xarakteristik funksiyali o'yinda $v(S)$ ning qiymati faqat S ning elementlari soniga bog'liq bo'lsa, bunday o'yin *simmetrik o'yin* deb ataladi.

1-misol. Bizga quyidagi uch ishtirokchili simmetrik o'yin berilgan bo'lsin: $v(1) = v(2) = v(3) = -2$, $v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = 2$, $v(1,2,3) = 0$. Agar $r = \frac{1}{6}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{1}{3}$ sonlari olinsa va $(0,1)$-shaklga keltirilsa, u sodda o'yinga aylanib qoladi.

12-ta'rif. Agar ixtiyoriy $S \subseteq N$ koalitsiya uchun, $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$ tenglik bajarilsa, u *o'zgarmas yig'indili o'yin* deb ataladi.

3-teorema. Agar $v(S)$, $S \subseteq N-$ xarakteristik funksiyali muhim o'yin o'zgarmas yig'indili bo'lsa, uning $C-$ yadrosi bo'sh to'plam bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $C \neq \emptyset$ va $x \in C$ bo'lsin. 1-teoremaga asosan ixtiyoriy $i \in N$ uchun,

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \geq v(N \setminus \{i\})$$

bo'ladi. O'yin o'zgarmas yig'indili ekanligidan

$$v(N) - V(i) = v(N \setminus \{i\}) \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j,$$

yoki $\sum_{i=1}^{n} x_i - v(i) \leq \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j$. Bundan $x_i \leq v(i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Bu tengsizliklarni i bo'yicha yig'ib, quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} v(i)$$

yoki $v(N) \leq \sum_{i=1}^{n} v(i)$, bu esa o'yinning muhim ekanligiga ziddir. Teorema isbot bo'ldi.

Shepli vektori

Odatda o'yinning C – yadrosi ham, NM yechimi ham yagona elementdan iborat bo'lmasdan, cheksiz ko'p elementlidir. Ulardan yagona bittasini ajratib olish, umuman aytganda, murakkab masaladir. Neyman Margenshtern ta'biri bilan aytganda, bu C – yadro, NM yechimlar o'yinchilarning xatti-harakati me'yorlarini aniqlab beradi, xolos.

Bundan farqli o'laroq, Shepli vektori yagona taqsimotni ajratib beradi. Bu taqsimotni aniqash uchun, Shepli aksiomatik yo'l bilan borgan, ya'ni avval to'la va qarama-qarshi bo'lmagan aksiomalar qurib, ularni qanoatlantiruvchi taqsimotni ko'rsatib bergan.

Faraz qilaylik, $v(S)$, $S \subseteq N$ – xarakteristik funksiyali o'yin uchun, $v(S) + v(T) \le v(S \cup T)$, $S \cap T = \emptyset$, $S, T \subseteq N$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsin.

Har bir $v(S)$ o‘yinga $\Phi(v) = (\Phi_1(v), \Phi_2(v), ..., \Phi_n(v))$, $n-$ o‘lchovli vektor mos qo‘yiladi.

13-ta’rif. $v(S)$, $S \subseteq N-$ xarakteristik funksiyali o‘yinda $v(T) = v(T \cup \{i\})$ tenglik ixtiyoriy $i \in N$ uchun, bajarilsa, $T(\subseteq N)$ koalitsiya *ahamiyatli koalitsiya* deb ataladi.

Endi Shepli aksiomalarini sanab o‘tamiz:

I. Agar o‘yinchilarning tartib raqamlarini o‘zgartirishda $i-$ raqamli o‘yinchi $\pi(i)-$ raqamga ega bo‘lsa, yangi $v'(S)$, $S \subseteq N$ o‘yinda Shepli vektorining komponentasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\Phi_{\pi(i)}(v') = \Phi_i(v),$$

ya’ni, yangi $v'(S)$, $S \subseteq N$ o‘yinda $i-$ o‘yinchiga mos yutuq o‘zgarmaydi, faqat o‘rni almashadi;

II. Agar T ahamiyatli koalitsiya bo‘lsa, $\sum\limits_{i \in T} \Phi_i(v) = v(T)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi;

III. Agar o‘yinchilarning barchasi birdaniga ikkita $v(S), w(S)$, $S \subseteq N-$ xarakteristik funksiyali o‘yinda ishtirok etishsa,

$$\Phi(v + w) = \Phi(v) + \Phi(w)$$

tenglik bajarilishi kerak.

Har bir $K-$ koalitsiya uchun, quyidagicha $v_K(S)$, $S \subseteq N-$ xarakteristik funksiyali o‘yinni quramiz:

$$v_K(S) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad K \not\subseteq S \\ 1, & \text{agar} \quad K \subseteq S \end{cases}.$$

1-lemma. Agar $k = |K| - K$ koalitsiyaning elementlari soni bo‘lsa, u holda

$$\Phi_i(v_K) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{agar} \quad i \in K \\ 0, & \text{agar} \quad i \overline{\in} K \end{cases}.$$

Isbot. $v_K(S)$, $S \subseteq N$ xarakteristik funksiyali o'yinda K va uni o'z ichiga oluvchi barcha R koalitsiyalar ahamiyatlidir. Shu sababli II aksiomaga ko'ra,

$$\sum_{i \in R} \Phi_i(v_K) = 1,$$

xususan $R = K$ uchun, ham. Demak, $\Phi_i(v_K) = 0, i \bar{\in} K$. Agar π – o'rin almashtirishda $i \in K$ lar uchun, $\pi(i) \in K$ bo'lsa, $w_K = v_K$ bo'ladi, demak, $\Phi_{\pi(i)}(w_K) = \Phi_{\pi(i)}(v_K)$, yoki $\Phi_j(v_K) = \Phi_i(v_K)$ tenglik bajariladi va yuqoridagi tengliklarga asosan:

$$\sum_{i \in K} \Phi_i(v_K) = 1,$$

yoki

$$\Phi_i(v_K) = \frac{1}{k}, \ i \in K.$$

Vektorlarning additivligidan III aksiomaning bajarilishi ham kelib chiqadi.

2-lemma. Ixtiyoriy $v(S)$, $S \subseteq N$ xarakteristik funksiyali o'yin berilgan bo'lsin. U holda haqiqiy, yagona $2^n - 1$ ta $C_R = \sum\limits_{Q \subseteq R} (-1)^{r-k} v(Q)$ sonlari uchun,

$$v(S) = \sum_{R \subseteq N} C_R v_R(S) \tag{3.7}$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda r, q lar mos ravishda R va Q to'plamlarning elementlari soni.

Isbot. $S \subseteq N$ – ixtiyoriy koalitsiya bo'lsin, u holda:

$$\sum_{R \subseteq N} C_R v_R(S) = \sum_{R \subseteq S} C_R =$$

$$= \sum_{R \subseteq S} \Big(\sum_{Q \subseteq R} (-1)^{r-q} v(Q) \Big) = \sum_{Q \subseteq S} \Big(\sum_{Q \subseteq R \subseteq S} (-1)^{r-q} \Big) v(Q)$$

r ta elementga ega bo'lgan va $Q \subseteq R \subseteq S$ shartni qanoatlantiruvchi R to'plamlar soni C_{s-q}^{s-r}(yoki C_{s-q}^{r-q}) ta bo'ladi. Shu sababli

$$\sum_{Q\subseteq R\subseteq S}(-1)^{r-q}=\sum_{r=q}^{s}C_{s-q}^{s-r}(-1)^{r-q}$$

bu esa $s > q$ da $(1-1)^{s-q}$ ning binom yoyilmasiga teng. Shu sababli nolga teng, agar $s > q$; birga teng, agar $s = q(S = R = Q)$ bo'lsa. Shunday qilib,

$$\sum_{Q\subseteq S}\Big(\sum_{\substack{R\subseteq S\\ R\supseteq Q}}(-1)^{r-q}\Big)v(Q)=v(S).$$

Shu bilan (3.7) yoyilma isbotlandi.

Endi (3.7)-tasvirlash yagona ekanligini ko'rsataylik. Teskarisini faraz etaylik, ya'ni shunday C'_R, C''_R sonlari mavjud bo'lsinki, ular uchun, (3.7) tasvir o'rinli bo'lsin. Ularning biridan ikkinchisini ayirish orqali,

$$\sum_{R\subseteq N}(C'_R-C''_R)v_R(S)=0,\ \ S\subseteq N$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Matematik induksiya yordamida koeffitsiyentlarning nolga tengligini ko'rsatamiz:

1. $S = \{i\}$ bo'lsin, u holda

$$0=\sum_{R\subseteq N}(C'_RC''_R)v_R(i)=C'_i-C''_i;$$

2. Faraz qilaylik, biror $S \subseteq N-$ koalitsiya uchun, ixtiyoriy $R \subseteq S$ da $C'_R - C''_R = 0$ bo'lsin.

3. Ko'rsatamizki, $C'_S - C''_S = 0$ bo'ladi. Haqiqatan,

$$\sum_{R\subseteq N}(C'_R-C''_R)v_R(S)=0$$

tenglik o'rinli. Farazga asosan $R \subseteq S$ da $C'_r - C''_R = 0$ va $R \not\subseteq S$ da $v_R(S) = 0$. Demak, faqat $R = S$ qoladi, u holda $C'_R - C''_R = 0$ tenglik kelib chiqadi. Bunday tenglik har bir $S \subseteq N$ uchun, bajarilganligi sababli yoyilmaning yagonaligi isbot bo'ldi.

4-teorema. Ixtiyoriy o'yin uchun, I, II va III aksiomalarni qanoatlantiruvchi yagona $(\Phi_i(v))$ vektor mavjud (u *Shepli vektori* deb ataladi).

Isbot.

$$\sum_{R \subseteq N} C_R v_R = v$$

tenglikdan

$$\Phi(v) = \Phi\Big(\sum_{R \subseteq N} C_R v_R\Big) = \sum_{R \subseteq N} C_R \Phi(v_R)$$

$v(S)$, $S \subseteq N$ xarakteristik funksiyali o'yin uchun, Shepli vektorini hosil qilamiz. $v_R(S)$, $S \subseteq N$ – xarakteristik funksiyali sodda o'yinlar uchun, Shepli vektori yagona va (3.7) yoyilma yagona ekanligidan $\Phi(v)$ ning yagonaligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Endi, berilgan o'yinda Shepli vektorini hisoblash usulini ko'rsatamiz. Bilamizki,

$$v = \sum_{R \subseteq N} C_R v_R.$$

Demak,

$$\Phi_i(v) = \sum_{R \subseteq N} C_R \Phi_i(v_R) = \sum_{\substack{R \subseteq N \\ i \in R}} C_R \cdot \frac{1}{r}.$$

Bunga C_R ning ifodasini qo'yamiz:

$$\Phi_i(v) = \sum_{R \subseteq N i \in R} \frac{1}{r}\Big(\sum_{Q \subseteq R} (-1)^{r-q} v(Q)\Big) =$$

$$\sum_{Q\subseteq R}\Big(\sum_{R\subseteq N Q\cup\{i\}\subseteq R}(-1)^{r-q}\frac{1}{r}v(Q)\Big) \tag{3.8}$$

quyidagi belgilashni kiritaylik:

$$\gamma_i(Q)=\sum_{\substack{R\subseteq N\\ Q\cup\{i\}\subseteq R}}(-1)^{r-q}\frac{1}{r}. \tag{3.9}$$

Agar $i\bar{\in}Q'$ bo'lib $Q=Q'\cup\{i\}$ deb olinsa, faqat $q=q'+1$ dan tashqari hollarda (3.9) tenglikning o'ng tomoni bir xil qo'shiluvchilardan iborat bo'ladi, bundan

$$\gamma_i(Q)=-\gamma_i(Q')$$

ekanligi kelib chiqadi. Endi (3.8)-yig'indidagi qo'shiluvchilarni Q' va $Q=Q'\mathrm{sup}\{i\}$ lar bo'yicha juft-juft qilib ajratilsa,

$$\Phi_i(v)=\sum_{\substack{Q\subseteq N\\ i\in Q}}\Big(\gamma_i(Q)v(Q)+\gamma_i(Q\setminus\{i\})v(Q\setminus\{i\})\Big)=$$

$$=\sum_{\substack{Q\subseteq N\\ i\in Q}}\gamma_i(Q)(v(Q)-v(Q\setminus\{i\}))$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Agar $i\in Q$ bo'lsa,

$$\gamma_i(Q)=\sum_{\substack{R\subseteq N\\ Q\subseteq R}}(-1)^{r-q}\frac{1}{r}$$

yig'indida elementlari soni r ga teng va $Q\subseteq R\subseteq N$ shartni qanoatlantiruvchi R to'plam soni C_{n-q}^{n-r} ga teng bo'ladi. Demak,

$$\gamma_i(Q)=\sum_{r=q}^{n}(-1)^{r-q}C_{n-q}^{n-r}\cdot\frac{1}{r},$$

ammo

$$\sum_{r=q}^{n}(-1)^{r-q}C_{n-q}^{n-r}\cdot\frac{1}{r}=\sum_{r=q}^{n}\int_{0}^{1}x^{r-1}dx(-1)^{r-q}C_{n-q}^{n-r}=$$

$$=\int_{0}^{1}\sum_{r=q}^{n}x^{r-q}(-1)^{r-q}C_{n-q}^{n-r}x^{q-1}dx=\int_{0}^{1}(1-x)^{n-q}x^{q-1}dx.$$

Bu oxirgi integral Eylerning birinchi jins integrali deb ataladi va uning qiymati

$$\frac{(n-q)!(q-1)!}{n!}$$

ga teng. Bundan kelib chiqadiki,

$$\Phi_i(v)=\sum_{\substack{Q\subseteq N\\ i\in Q}}\frac{(n-q)!(q-1)!}{n!}\left(v(Q)-v(Q\backslash\{i\})\right),\ i=1,2,...,n.\quad(3.10)$$

Shepli vektorining kamchiliklaridan biri, uning $C-$ yadroga tegishli emasligidir. Agar (3.10)-formula yordamida ko'rilgan o'yinga mos Shepli vektori hisoblab chiqilsa, u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\Phi(v)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right).$$

Quyidagi Mashler – Peleg nomi bilan ataluvchi misol uchun, xarakteristik funksiyani quraylik. Berilgan ishni bajarish uchun, to'rtta mutaxassis jalb qilingan bo'lib, bunda ularning barchasi ishtirok etishi shart emas. Ammo olinadigan yutuqni mutaxassislarning barchasiga taqsimlab berish kerak. Buni o'yin sifatida qarab, uning xarakteristik funksiyasini quradigan bo'lsak, u quyidagicha bo'ladi: $v(i)=0,\ i=1,2,3,4,\ v(2,3)=v(3,4)=v(2,4)=0,\ v(1,2)=v(1,2,3)=v(1,2,4)=v(1,2,3,4)=1,\ v(1,3)=v(1,3,4)=v(1,4)=v(2,3,4)=1.$

Bu yerda ishni uddalay oladigan koalitsiyalarga mos yutuq 1. aksincha uddalay olmaydiganlarga 0 yutuq mos keltirilgan.

O'yinning $n-$ yadro yechimi

1969-yili belgiyalik matematik D. Shmaydler tomonidan kooperativ o'yinlar uchun, $n-$ yadro yechim tushunchasi kiritilgan. $n-$ yadro yechim shunday $x \in E$ taqsimotki, unda $x(S) = \sum\limits_{i\in S} x_i$ soni mumkin qadar $v(S)$, $S \subseteq N$ soniga yaqin bo'ladi. Bunda $e(S, x) = v(S) - \sum\limits_{i\in S} x_i$ soni *ekscess* deb ataladi.

$n-$ yadroni aniqlash quyidagicha amalga oshirilishi mumkin:

$$\min_{x\in E} \max_{S\subseteq N} e(S, x).$$

Faraz qilaylik, ichki maksimum $S_1, S_2, ..., S_k$ larda, tashqi minimum $E_1 (\subseteq E)$ da erishsin. U holda

$$\min_{x\in E_1} \max_{\substack{S\subseteq N \\ S\neq S_1, S_2, ..., S_k}} e(S, x)$$

hisoblanadi.

Faraz qilaylik, ichki maksimum $S_{k+1}, S_{k+2}, ..., S_\ell$ da, tashqi minimum $E_2(E_1)$ da erishsin. U holda

$$\min_{x\in E_1} \max_{\substack{S\subseteq N \\ S\neq S_1, S_2, ..., S_\ell}} e(S, x)$$

masala ko'riladi va hokazo. Natijada ko'rsatiladiki, bu jarayonning oxirida yagona $x^*(\in E)$ taqsimot aniqlanadi, u $n-$ *yadro* deb ataladi. $n-$ yadro topishni chiziqli dasturlash masalasiga keltirib yechish ham mumkin:

$$x_i \geq v(i),\ i = 1, 2, ..., n \text{ va } \sum_{i\in N} x_i = v(N)$$

shartlar ostida $y \geq v(S) - \sum_{i \in S} x_i$, $S \subseteq N$ tengsizlikda y ning minimum qiymati y_1 bo'lsin. $y_1 = \sum_{i \in S} x_i$ tenglik $S = S_1, S_2, ..., S_k$ larda bajarilsin. U holda ikkkinchi masala yechiladi:

$$y \geq v(S) - \sum_{i \in S} x_i, \; S \subseteq N, \; S \neq S_1, S_2, ..., S_k,$$

$$y_1 = v(S) - \sum_{i \in S} x_i, \; S = S_1, S_2, ..., S_k,$$

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N), \tag{3.11}$$

$$x_i \geq v(i), \; i = 1, 2, ..., n$$

chekli sondagi shunday masalalarni yechish natijasida yagona $x-$ $n-$ yadro taqsimotni aniqlovchi (3.11) ko'rinishdagi tenglamalar sistemasiga kelamiz.

Yuqorida ko'rilgan to'rt mutaxassisdan iborat bo'lgan Mashler – Peleg misolini qaraylik. Bu o'yin uchun, $n-$ yadro $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ taqsimotdan iborat, Shepli vektori esa $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ taqsimotdan iborat edi.

Bunda birinchi taqsimot – n – yadro ikkinchi Shepli vektoriga qaraganda adolatliroq, chunki ikkinchi taqsimotda yutuqning teng yarmi birinchi o'yinchiga berilgan, aslida u uchta mutaxassisni emas, ikkita mutaxassisni almashtira oladi. Shu ma'noda $n-$ yadro yechim, bizning tasavvurimizdagi adolatli taqsimotni ifodalaydi.

4-§. Cheksiz o'yin

Biz shu paytgacha ko'rgan o'yinlar antagonistik bo'lib, o'yinchilarning sof strategiyalari soni chekli edi. Ammo ayrim amaliy masalalarda o'yinchilarning strategiyalari sonini cheksiz ko'p deb faraz etish bilan, matematik analizning ma'lum usullarini qo'llash imkoniyati ochiladi. Bu yerda ikkita holni ajratib ko'rish maqsadga muvofiq: 1) o'yinchilarning strategiyalari sanoqli sonda; 2) strategiyalar to'plami kontinuum bo'lib, ularni biror kesma orqali ifodalash mumkin.

Birinchi holda "odatda" o'yinchilarning yutuqlari yig'indi ko'rinishda ifodalanib, bu qatorning yaqinlashish masalasini hal etish kerak bo'ladi. Shu bilan birga, kafolatlangan yutuqni ta'minlovchi strategiyalarni aniqlash talab etiladi. Ko'rsatish mumkinki, bu oxirgi ikkala masala har vaqt ham ijobiy hal etilmaydi. Ikkinchi holda esa ko'rilayotgan o'yinni yechish ma'nosida katta yutuqlarga erishilgan. Ya'ni, deyarli umumiy talablar ostida o'yinchilarning optimal strategiyalari aniqlangan.

Kvadratda o'yin. Optimal strategiya va o'yin bahosi

Cheksiz o'yinlar ichida, o'yinchilarning sof strategiyalari to'g'ri chiziqdagi biror kesmaning nuqtalaridan iborat bo'lishi alohida ahamiyat kasb etadi. Ammo bilamizki, bir qiymatli akslantirish yordamida ixtiyoriy kesmani $[0,1]$ kesmaga o'tkazib olish mumkin. Shu sababli o'yinchilarning sof strategiyalari to'plami $[0,1]$ kesma nuqtalaridan iborat bo'ladi. U holda (x,y), $x,y \in [0,1]$ juftlik o'yinning holatini aniqlaydi. $[0,1] \times [0,1]$ kvadratda aniqlangan $w(x,y)$ funksiyaning birinchi o'yinchi $x \in [0,1]$, ikkinchi o'yinchi $y \in [0,1]$ sof strategiyalarini tanlagandagi qiymati birinchi o'yinchining yutug'ini ifodalaydi.

Agar antagonistik o'yin ko'rilayotgan bo'lsa, $w(x,y)$ mos ravishda ikkinchi o'yinchining mag'lubiyatini yoki $-w(x,y)$ yutug'ini aniqlaydi. Demak, antagonistik o'yinda har bir $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ holatda o'yinchilar oladigan yutuqlar yig'indisi nolga teng bo'lar ekan.

Shu sababli $w(x,y)$, $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ funksiya qiymatini birinchi o'yinchi $x \in [0,1]$ argument bo'yicha maksimum, ikkinchi o'yinchi esa $y \in [0,1]$ argument bo'yicha minimum qilishga harakat qiladi.

Xuddi jadvalli o'yin kabi, bu yerda ham ikkita son aniqlanadi:

$$w_I = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} w(x,y) \tag{4.1}$$

va

$$w_{II} = \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} w(x,y). \tag{4.2}$$

Bu yerda mos maksimum va minimumlar erishiladi, deb faraz etiladi. Albatta, bu shartlar $w(x,y)$, $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ funksiyaga nisbatan chegaralar qo'yishga olib keladi. Masalan, uzluksizlik, qavariqlik, botiqlik, yarim uzluksizlik va hokazo.

w_I, w_{II} sonlari mos ravishda quyi va yuqori o'yin baholari deb ataladi. Bizga ma'lumki, chekli antagonistik o'yinlar uchun, $w_I = w_{II}$ tenglik aralash strategiyalar tushunchasi kiritilgandan so'ng har vaqt o'rinli bo'lar edi. Xuddi shunga o'xshash cheksiz antagonistik o'yinlar uchun, umuman $w_I \neq w_{II}$. Ammo taqsimot funksiya tushunchasi kiritilgandan so'ng w_I, w_{II} lar uchun, $w_I = w_{II}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Mabodo, shunday $x_0, y_0 \in [0,1]$ sonlari topilsaki, ular uchun,

$$w(x_0, y_0) = w_I = w_{II}$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda x_0, y_0 sonlari birinchi va ikkinchi o'yinchilarning mos ravishda *sof optimal strategiyalari,* $w(x_0, y_0)$ soni *o'yin bahosi* deb ataladi.

1-ta'rif. Agar $x_0, y_0 \in [0,1]$ sonlari uchun,

$$w(x, y_0) \leq w(x_0, y_0) \leq w(x_0, y) \tag{4.3}$$

qo'sh tengsizlik ixtiyoriy $x, y \in [0,1]$ larda o'rinli bo'lsa, (x_0, y_0) $w(x,y)$ funksiyaning *egar nuqtasi* deb ataladi.

1-teorema. $x_0, y_0 \in [0,1]$ sonlari o'yinchilarning mos ravishda sof optimal strategiyalari bo'lishi uchun, (x_0, y_0) juftlik $w(x,y)$ funksiyaning egar nuqtasi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremaning isbotini keltirishdan avval, quyidagi teoremani keltirib o'tamiz.

2-teorema. (minimaks tengsizligi)

$$\max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} w(x,y) \leq \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} w(x,y), \tag{4.4}$$

ya'ni $w_i \leq w_{II}$ tengsizlik o'rinli.

Isbot. Quyidagi tengsizlik:

$$w(x,y) \leq \max_{x\in[0,1]} w(x,y)$$

ixtiyoriy $y \in [0,1]$ da bajariladi. Demak,

$$\min_{y\in[0,1]} w(x,y) \leq \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} w(x,y) \tag{4.5}$$

tengsizlik o'rinli bo'lib, o'ng tarafda o'zgarmas son turibdi. (4.5) tengsizlikning chap tarafida ixtiyoriy $x \in [0,1]$ soni ishtirok etganligi sababli, undan (4.4) kelib chiqadi.

1-teoremaning isboti. *Yetarliligi.* Faraz qilaylik, $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$ juftlik $w(x,y)$, $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ funksiyaning egar nuqtasi bo'lsin. U holda, ko'rsatamizki $w_I = w_{II}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Egar nuqtaning ta'rifiga asosan (4.3) qo'sh tengsizlikning chap tarafidagi tengsizligidan

$$\max_{x\in[0,1]} w(x,y^0) \leq w(x^0,y^0)$$

munosabat kelib chiqadi, yoki

$$\min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} w(x,y) \leq w(x^0,y^0) \tag{4.6}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Xuddi shunday mulohazani (4.3) ning o‘ng tarafiga qo‘llab,

$$w(x^0, y^0) \le \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} w(x,y)w(x,y) \tag{4.7}$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. (4.6), (4.7)-munosabatlardan

$$w_{II} = \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} w(x,y) \le \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} w(x,y) = w_{II} \tag{4.8}$$

tengsizlik kelib chiqadi. (4.4) va (4.8)-tengsizliklar $w_I = w_{II} = w(x^0, y^0)$ ekanligini keltirib chiqaradi.

Zarurligi. Faraz qilaylik, (4.1) va (4.2) da minimum va maksimumlar erishilsin va $w_I = w_{II}$ tenglik o‘rinli bo‘lsin. $w(x,y)$, $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ funksiyaga maksimum va minimum qiymat beruvchi sonlar mos ravishda x^0 va y^0 bo‘lsin, ya’ni

$$w(x^0, y^0) = w_I = w_{II}. \tag{4.9}$$

U holda

$$\max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} w(x,y) = \min_{y\in[0,1]} w(x_0, y) \le w(x_0, y_0).$$

Demak,

$$\max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} w(x,y) \le w(x_0, y_0).$$

Ikkinchi tomondan

$$\min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} w(x,y) = \max_{x\in[0,1]} w(x, y_0) \ge w(x_0, y_0).$$

Demak,

$$\max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} w(x,y) \le w(x_0, y_0) \le \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} w(x,y). \tag{4.10}$$

Ammo (4.9) tengliklardan kelib chiqadiki,

$$\min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} w(x,y) \le w(x_0, y), \tag{4.11}$$

$$\max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} w(x,y) \geq w(x,y_0) \tag{4.12}$$

tengsizliklar ixtiyoriy $x, y \in [0,1]$ lar uchun, o'rinli bo'ladi. (4.10)–(4.12)-munosabatlardan ixtiyoriy $x, y \in [0,1]$ lar uchun,

$$w(x,y_0) \leq w(x_0,y_0) \leq w(x_0,y)$$

qo'sh tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu esa (x_0, y_0) juftlik $w(x,y)$, $x, y \in [0,1]$ funksiya uchun, egar nuqta ekanligini tasdiqlaydi. Teorema isbotlandi.

Quyidagi misollarni ko'raylik:

1-misol. $w(x,y) = 3x^2 - y$, $x, y \in [0,1]$ yutuq funksiyali o'yin ko'rilayotgan bo'lsin.

$$w_I = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} (3x^2 - y) = \max_{x\in[0,1]} (3x^2) + \min_{y\in[0,1]} (-y) = 3 - 1 = 2$$

xuddi shunday yo'l bilan ko'rsatish mumkinki $w_{II} = 2$.

Demak, bu o'yinda o'yinchilarning optimal sof strategiyalari mos ravishda $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ dan iborat bo'lib, o'yin bahosi $w = 2$ ga teng. 1-teoremaga asosan $(1,1)$ juftlik $w(x,y)$, $x, y \in [0,1]$ funksiyaning egar nuqtasini tashkil qiladi.

2-misol. O'yinning yutuq funksiyasi

$$w(x,y) = (x-y)^2, \; x, y \in [0,1]$$

ko'rinishda bo'lsin. w_I, w_{II} larni hisoblaymiz:

$$w_I = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} (x-y)^2, \; y = x$$

deb olish hisobiga

$$w_I = 0, \; w_{II} = \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} (x-y)^2 = \max_{x\in[0,1]} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

kelib chiqadi.

Demak, bu o'yin uchun, $w_I \neq w_{II}$, ya'ni o'yinchilarning sof optimal strategiyalari mavjud emas.

Uzluksiz yadroli o'yin

Yuqorida ko'rdikki (2-misol), berilgan o'yinning yechimi sof strategiyalarga nisbatan doim ham bo'lavermas ekan. Shu sababli, xuddi jadvalli o'yinlardagi kabi o'yinni kengaytirish (to'g'rirog'i strategiyalar to'plamini kengaytirish) zaruriyati tug'iladi. Buning uchun, tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi tushunchasini kiritamiz. Agar ξ bilan tasodifiy miqdorni belgilasak, uning x dan katta qiymat qabul qilmaslik ehtimolini $F(x) = P(\xi \leq x)$ bilan belgilaymiz.

2-ta'rif. Quyidagi: $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ va

$$\begin{cases} F(x') \leq F(x) & \text{agar } x' < x \\ F(x) = F(x+0) & \text{agar } x \neq 1 \end{cases}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $F(x)$ *funksiyaga aralash strategiya* deb ataladi.

Agar birinchi o'yinchi $x \in [0,1]$ sof strategiyasini, ikkinchi o'yinchi $G(y)$, $y \in [0,1]$ aralash strategiyasini qo'llasa, u holda birinchi o'yinchining o'rtacha yutug'i:

$$w(x,G) = \int_0^1 w(x,y)\,dG(y) \tag{4.13}$$

Stiltes integrali qiymatiga teng bo'ladi.

Xuddi shunday, agar birinchi o'yinchi $F(x)$, $x \in [0,1]$ aralash strategiyani, ikkinchi o'yinchi $y \in [0,1]$ sof strategiyani qo'llasa, birinchi o'yinchining o'rtacha yutug'i:

$$w(F,y) = \int_0^1 w(x,y)\,dF(x) \tag{4.14}$$

Stiltes integrali qiymatiga teng bo'ladi. Agar birinchi o'yinchi

$F(x)$, $x \in [0,1]$, ikkinchi o'yinchi $G(y)$, $y \in [0,1]$ aralash strategiyalarni qo'llasalar, birinchi o'yinchining o'rtacha yutug'i:

$$w(F,G) = \int_0^1 \int_0^1 w(x,y)\,dF(x)\,dG(y) \tag{4.15}$$

Stiltes integralining qiymatiga teng bo'ladi. Bu yerda (4.13)–(4.15) integrallarning mavjudligi talab etilgan. Bunda quyidagi savollar kelib chiqadi:

$$w_I = \max_F \min_G w(F,G),\ \ w_{II} = \min_G \max_F w(F,G)$$

lar mavjudmi va ular tengmi?

Agar bu savollarga ijobiy javob berilsa, o'yin to'la yechilgan bo'lib, o'yinchilarning optimal strategiyalari va o'yin bahosini aniqlash lozim bo'ladi.

1-lemma. Agar $w(x,y)$, $x, y \in [0,1]$ ikkala argument bo'yicha uzluksiz funksiya bo'lsa, ixtiyoriy $F(x)$, $x \in [0,1]$($G(y)$, $y \in [0,1]$) taqsimot funksiya uchun,

$$w_1(y) = \int_0^1 w(x,y)\,dF(x),\ y \in [0,1],$$

$$\left(w_2(x) = \int_0^1 w(x,y)\,dG(y),\ x \in [0,1]\right)$$

funksiyalari uzluksizdir.

Isboti. Isbotni $w_1(y)$, $y \in [0,1]$ funksiya uchun, ko'rsatamiz ($w_2(x)$, $x \in [0,1]$ uchun, xuddi shunga o'xshash isbotlanadi).

Uzluksizlik ta'rifiga asosan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun, shunday $\delta > 0$ mavjudki: $|y_1 - y_2| < \delta$ bo'lsa $|w(x,y_1) - w(x,y_2)| < \varepsilon$

kelib chiqadi. Demak,

$$|w(x,y_1)-w(x,y_2)| = \left|\int\limits_0^1 (w(x,y_1)-w(x,y_2))\,dF(x)\right| \le$$

$$\le \int\limits_0^1 |w(x,y_1)-w(x,y_2)|\,dF(x) < \varepsilon \int\limits_0^1 dF(x) = \varepsilon.$$

Lemma isbot bo'ldi.

2-lemma. Faraz qilaylik, $w(x,y)$, $x,y \in [0,1]$ uzluksiz funksiya va $F(x)$, $x \in [0,1]$($G(y)$, $y \in [0,1]$) ixtiyoriy taqsimot funksiya bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\bar{y} \in [0,1]$($\bar{x} \in [0,1]$) sonlari uchun shunday $G_0(y)$, $y \in [0,1]$($F_0(x)$, $x \in [0,1]$) taqsimot funksiya mavjudki, uning uchun quyidagi:

$$w_1(\bar{y}) = \int\limits_0^1 w(x,\bar{y})F(x) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 w(x,y)dF(x)dG_0(y)$$

$$\left(w_2(\bar{x}) = \int\limits_0^1 w(\bar{x},y)dG(y) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 w(x,y)dF_0(x)dG(y)\right) \quad (4.16)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Biz birinchi tenglikning o'rinli ekanligini ko'rsatamiz (ikkinchisi shunga o'xshash ko'rsatiladi). $G_0(y)$, $y \in [0,1]$ taqsimot funksiyani quyidagi ko'rinishda tanlab olamiz:

$$G_0(y) = \begin{cases} 0, & 0 \le y \le \bar{y} \\ 1, & \bar{y} \le y \le 1 \end{cases}$$

Stiltes integraliga mos kelgan yig'indini tuzamiz. Buning uchun, $[0,1]$ oraliqni $0 = y_0 < y_1 < \ldots y_{i-1} < \bar{y} \le y_i < \ldots < y_n = 1$ nuqtalar bilan bo'lib, integral yig'indini tuzamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} w_1(z_k)\left[G_0(y_k) - G_0(y_{k-1})\right]. \quad (4.17)$$

Ammo $G_0(y)$, $y \in [0,1]$ funksiyaning tuzilishiga ko'ra, $G_0(y_k) - G_0(y_{k-1}) = 0$, agar $k \neq i$ va $G_0(y_k) - G_0(y_{k-1}) = 1$ bo'lganligi sababli (4.17) dan

$$\sum_{k=1}^{n} w_1(z_k)\big[G_0(y_k) - G_0(y_{k-1})\big] = w_1(z_i)$$

tenglik kelib chiqadi, bu yerda $z_k \in [y_{k-1}, y_k]$. $w_1(y)$, $y \in [0,1]$ funksiyaning uzluksizligiga asosan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun, shunday $\delta > 0$ topiladiki, $\triangle_k = y_k - y_{k-1} < \delta$, $k = 1, 2, ..., n$ bo'lganda

$$|w_1(z_i) - w_1(\bar{y})| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. (4.15) va (4.16)-munosabatlardan

$$\left|\sum_{k=1}^{n} w_1(z_k)\big[G_0(y_k) - G_0(y_{k-1})\big] - w_1(\bar{y})\right| < \varepsilon$$

tengsizlik, bundan esa

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \triangle\to 0}} \sum_{k=1}^{n} w_1(z_k)\big[G_0(y_k) - G_0(y_{k-1})\big] = w_1(\bar{y}) \tag{4.18}$$

tenglik o'rinli bo'lishligi kelib chiqadi, bu yerda $\triangle = \max\limits_{1\le i\le n} \triangle_i$. Demak, (4.18) dan kelib chiqadiki, har bir berilgan $\bar{y} \in [0,1]$ son va $F(x)$, $x \in [0,1]$ funksiya uchun, shunday $G_0(y)$, $y \in [0,1]$, funksiya mavjud ekanki, uning uchun, (4.7) tenglik o'rinli ekan. Shu bilan 2-lemma isbot bo'ldi.

3-lemma. Agar $w(x,y)$, $x, y \in [0,1]$ uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda

$$w_I = \sup_F \inf_G \int_0^1 \int_0^1 w(x,y)\, dF(x)\, dG(y), \tag{4.19}$$

$$w_{II} = \inf_G \sup_F \int_0^1 \int_0^1 w(x,y)\, dF(x)\, dG(y) \tag{4.20}$$

sonlari mavjud va ularni quyidagicha

$$w_I = \max_F \min_y \int_0^1 w(x,y)\,dF(x),$$

$$w_{II} = \min_G \max_x \int_0^1 w(x,y)\,dG(y)$$

aniqlash mumkin (ya'ni sup, inf larni max va min larga almashtirish mumkin).

Isbot. $w(x,y)$, $x,y \in [0,1]$ uzluksiz funksiya bo'lganligi sababli, shunday A musbat soni mavjudki $|w(x,y)| \le A$ tengsizlik barcha $x,y \in [0,1]$ lar uchun bajariladi. Demak, ixtiyoriy $F(x)$, $x \in [0,1]$, $G(y)$, $y \in [0,1]$ taqsimot funksiyalari uchun,

$$\left|\int_0^1 \int_0^1 w(x,y)\,dF(x)\,dG(y)\right| \le \int_0^1 \int_0^1 \left|w(x,y)\,dF(x)\,dG(y)\right|$$

$$\le A \int_0^1 \int_0^1 dF(x)\,dG(y) = A$$

tengsizlik o'rinli. Bundan (4.19) va (4.20) sonlarining mavjudligi kelib chiqadi.

Avval $w_I(y) = \int_0^1 w(x,y)\,dF(x)$, $x \in [0,1]$ funksiyani ko'raylik. Bu funksiya ixtiyoriy $F(x)$, $x \in [0,1]$ taqsimot funksiya uchun, uzluksizdir. Faraz qilaylik, $w_1(\bar{y}) = \min_{y\in[0,1]} w_I(y)$ bo'lsin. U holda $w_1(\bar{y}) \le \min_{y\in[0,1]} w_I(y)$ tengsizlik ixtiyoriy $y \in [0,1]$ uchun o'rinli bo'ladi. Ixtiyoriy $G(y)$, $y \in [0,1]$ taqsimot funksiya uchun,

$$w_1(\bar{y}) = w_1(\bar{y}) \int_0^1 dG(y) = \int_0^1 w_1(\bar{y}))\,dG(y) \le$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 w(x,y)\, dF(x)\, dG(y).$$

Demak,

$$w_1(\bar{y}) \leq \inf_G \int_0^1 \int_0^1 w(x,y)\, dF(x)\, dG(y). \tag{4.21}$$

Ikkinchi tomondan 2-lemmaga asosan:

$$\begin{aligned} &\inf G \int_0^1 \int_0^1 w(x,y)\, dF(x)\, dG(y) \leq \int_0^1 \int_0^1 w(x,y), \\ &dF(x)\, dG_0(y) = \int_0^1 w(x,\bar{y})\, dF(x) = w_1(\bar{y}), \end{aligned} \tag{4.22}$$

bu yerda $G_0(y)$, $y \in [0,1]$ funksiya yuqorida aniqlangan. (4.21) va (4.22)-munosabatlardan

$$w_1(\bar{y}) = \inf_G \int_0^1 \int_0^1 w(x,y)\, dF(x)\, dG(y)$$

tenglik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi, bundan $G(y) = G_0(y)$, $y \in [0,1]$ bo‘lib, quyidagi

$$\int_0^1 \int_0^1 w(x,y)\, dF(x)\, dG_0(y) = \min_G \int_0^1 \int_0^1 w(x,y)\, dF(x)\, dG(y) =$$

$$= \min_{y\in[0,1]} \int_0^1 w(x,y)\, dF(x)$$

munosabat kelib chiqadi.

$$w_I = \sup_F \min_{y\in[0,1]} \int_0^1 w(x,y)\, dF(x) \tag{4.23}$$

sonni aniqlanishiga ko'ra, yuqori chegaraning ta'rifiga asosan $F_1(x), F_2(x), \ldots x \in [0,1]$ taqsimot funksiyalar ketma-ketligi mavjudki, ular uchun,

$$w_I = \lim_{n\to\infty} \min_{y\in[0,1]} \int_0^1 w(x,y)\, dF_n(x) \tag{4.24}$$

tenglik o'rinli.

Umumiylikka zarar keltirmasdan $\{F_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligidan nuqtalar bo'yicha biror $F^*(x)$, $x \in [0,1]$ taqsimot funksiyaga yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin, buni biz yana $\{F_n(x)\}$ bilan belgilaymiz. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 w(x,y^*)\, dF_n(x) = \int_0^1 w(x,y^*)\, dF^*(x),$$

bu yerda

$$\int_0^1 w(x,y^*)\, dF^*(x) = \min_{y\in[0,1]} \int_0^1 w(x,y)\, dF^*(x), \tag{4.25}$$

$$\int_0^1 w(x,y^*)\, dF_n(x) \geq \min_{y\in[0,1]} \int_0^1 w(x,y)\, dF_n(x)$$

tengsizlikdan kelib chiqadiki,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 w(x,y^*)\, dF_n(x) \geq \lim_{n\to\infty} \min_{y\in[0,1]} \int_0^1 w(x,y)\, dF_n(x) \tag{4.26}$$

(4.25) va (4.26) dan

$$\min_{y\in[0,1]} \int_0^1 w(x,y)\, dF^*(x) \geq \lim_{n\to\infty} \min_{y\in[0,1]} \int_0^1 w(x,y)\, dF_n(x)$$

(4.23), (4.24) larga ko'ra,

$$\min_{y\in[0,1]}\int_0^1 w(x,y)\,dF^*(x) \geq \sup_F \min_{y\in[0,1]}\int_0^1 w(x,y)\,dF(x) \qquad (4.27)$$

ikkinchi tomondan

$$\sup_F \min_{y\in[0,1]}\int_0^1 w(x,y)\,dF(x) \geq \min_{y\in[0,1]}\int_0^1 w(x,y)\,dF^*(x) \qquad (4.28)$$

(4.27) va (4.28) lardan

$$\min_{y\in[0,1]}\int_0^1 w(x,y)\,dF^*(x) = \sup_F \min_{y\in[0,1]}\int_0^1 w(x,y)\,dF(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan kelib chiqadiki,

$$w_I = \max_F \min_{y\in[0,1]}\int_0^1 w(x,y)\,dF(x).$$

Xuddi shu usul bilan w_{II} ham aniqlanadi.

4-lemma. Agar $w(x,y)$, $x,y \in [0,1]$ uzluksiz funksiya bo'lsa

$$w_I = w_{II}$$

bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy n natural soni uchun, $[0,1]$ segment $\frac{i}{n}$, $i = 0,1,...,n$ nuqtalar yordamida n ta oraliqlarga bo'lingan bo'lsin. Quyidagi:

$$w_{ij}^n = w\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right), \;\; i,j = 1,2,...,n$$

belgilashlarni kiritaylik. U holda, ma'lumki (w_{ij}^n) jadvalli o'yin yechimga ega. Shuning uchun, o'yinchilarning optimal strategiyalari $\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, ..., \xi_n^n)$, $\eta^n = (\eta_1^n, \eta_2^n, ..., \eta_n^n)$ va o'yin bahosi w^n mavjud. $w(x,y)$ funksiya $[0,1]\times[0,1]$ kvadratda uzluksiz bo'lganligi sababli, u tekis uzluksiz bo'ladi. Shu sababli ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun, shunday $\delta > 0$ soni topiladiki, agar $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} < \delta$ tengsizlik bajarilsa, undan $|w(x,y) - w(x',y')| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi kelib chiqadi. n soni shunday tanlab olinadiki $\frac{1}{n} < \delta$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Birinchi o'yinchining uzluksiz o'yindagi aralash strategiyasi $F_n(x)$, $0 \le x \le 1$ ni quyidagi ko'rinishda qurib olamiz:

$$F_n(x) = \int_{i=1}^{[nx]} \xi_i^n, \; F_n(x) = 0, \text{ agar } 0 \le x \le \frac{1}{n},$$

bu yerda $[nx]$ nx sonining butun qismi. $y \in [0,1]$ ixtiyoriy son bo'lsin. $j = [ny]$ belgilashni kiritsak:

$$ny - 1 \le j \le ny$$

yoki

$$\left|y - \frac{j}{n}\right| < \delta$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak,

$$\left|w(x,y) - w(x,\frac{j}{n})\right| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lar ekan.

Stiltes integralining ta'rifiga asosan

$$\begin{aligned} w(F_n,y) &= \int_0^1 w(x,y)dF_n(x) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} w(z_i,y)(F_n(x_i) - F_n(x_{i-1}))\right). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Bu yerda $x_{i-1} \le z_i \le x_i$, $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0,1,...,n$. Ammo $F_n(x_i) - F_n(x_{i-1}) = \xi_i^n$, shu sababli (4.29) dan

$$w(F_n,y) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} w(z_i,y)\xi_i^n \tag{4.30}$$

tenglik kelib chiqadi. $w(x,y)$, $x,y \in [0,1]$ ning tekis uzluksizligi va (4.30) tenglikdan kelib chiqadiki, berilgan $\varepsilon > 0$ soni uchun, shunday $\delta > 0$ mavjudki, barcha natural n sonlar uchun,

$$\left| w(F_n, y) - \sum_{i=1}^{n} w(z_i, y)\xi_i^n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.31}$$

va

$$\left| w(z_i, y)\xi_i^n - \sum_{i=1}^{n} w_{ij}^n \xi_i^n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.32}$$

tengsizliklar bajariladi. (4.31), (4.32) tengsizliklardan

$$\left| w(F_n, y) - \sum_{i=1}^{n} w_{ij}^n \xi_i^n \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Demak, ixtiyoriy $y \in [0,1]$ uchun,

$$w(F_n, y) > w^n - \varepsilon \tag{4.33}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. (4.33) dan kelib chiqadiki,

$$w_I > w^n - \varepsilon. \tag{4.34}$$

Xuddi yuqoridagi usul bilan keltirib chiqarish mumkinki,

$$w_{II} < w^n + \varepsilon. \tag{4.35}$$

(4.34) va (4.35) tengsizliklardan

$$w_{II} < w_I + 2\varepsilon$$

kelib chiqadi. Oxirgi munosabatda ε ixtiyoriy bo'lganligi sababli

$$w_{II} \leq w_I \tag{4.36}$$

kelib chiqadi, ammo bilamizki

$$w_{II} \geq w_I \tag{4.37}$$

shuning uchun. (4.36), (4.37) lardan

$$w_{II} = w_I$$

tenglik kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Yuqoridagi teorema isbotidan kelib chiqadiki,

$$\lim_{n\to\infty} w^n = w_I$$

va $F_n(x)$, $0 \le x \le 1$strategiya berilgan uzluksiz o'yinda birinchi o'yinchining optimal aralash strategiyasini yetarlicha aniqlikda approksimatsiya qiladi.

Botiq – qavariq o'yin

Avvalgi punktda ko'rdikki, cheksiz o'yinlar uchun, optimal strategiyalarni topishning umumiy analitik usuli hozircha yo'q. Shu sababli $w(x, y)$, $x, y \in [0, 1]$ funksiyaga ayrim shartlar qo'yish yordamida o'yinning analitik yechimini ko'rsatish mumkin bo'ladi.

Bu yerda shunday shartlardan birini keltirib, o'yinning yechish yo'lini ko'rsatamiz.

3-ta'rif. Bir o'zgaruvchili $f(x)$, $a \le x \le b$ funksiya *qavariq (botiq)* deyiladi, agar ixtiyoriy $x_1, x_2 \in [0, 1]$ va ixtiyoriy $0 \le \lambda \le 1$ soni uchun,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$$\big(f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)\big) \tag{4.38}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa.

Agar (4.38) tengsizlik $0 < \lambda < 1$ soni uchun, qat'iy bo'lsa, $f(x)$, $a \le x \le b$ funksiya qat'iy qavariq (botiq) deyiladi.

4-ta'rif. Ikki o'zgaruvchili $w(x, y)$, $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ funksiya *botiq – qavariq* deyiladi, agar har bir $y \in [c, d]$ uchun, x bo'yicha botiq va har bir $x \in [a, b]$ uchun, y bo'yicha qavariq bo'lsa.

Qat'iy botiq – qavariq deyiladi, agar u mos ravishda x bo'yicha qat'iy botiq, y bo'yicha qat'iy qavariq bo'lsa.

3-teorema. Agar uzluksiz $w(x, y), x, y \in [0, 1]$ funksiya botiq – qavariq bo'lsa, u holda o'yinchilarning sof optimal strategiyalari mavjud.

Isbot. $w(x, y)$, $x, y \in [0, 1]$ funksiya uzluksiz bo'lganligi uchun, teorema 2.1 ga asosan o'yinchilarning optimal aralash strategiyalari mavjud, ular mos ravishda $F_0(x), 0 \leq x \leq 1$, $G_0(y)$, $0 \leq y \leq 1$ bo'lishsin.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$x_0 = \int_0^1 x\, dF_0(x), \;\; y_0 = \int_0^1 y\, dG_0(y).$$

Endi x_0, y_0 o'yinchilarning sof optimal strategiyasini tashkil etishligini ko'rsatamiz.

$w(x, y)$ funksiya x bo'yicha botiq bo'lganligi sababli har bir y uchun, shunday α soni topiladiki,

$$w_y(x) = w(x, y) - \alpha x$$

funksiyasi aynan x_0 da maksimumga erishadi. Demak,

$$w(F_0, y) = \int_0^1 w(x, y)\, dF_0(x) = \int_0^1 (w_y(x) + \alpha x)\, dF_0(x) \leq$$

$$\leq \int_0^1 (w_y(x_0) + \alpha x_0)\, dF_0(x) = w_y(x_0) + \alpha x_0 = w(x_0, y).$$

Bundan $\max\limits_{F} w(F, y) = w(F_0, y) \leq w(x_0, y)$ tengsizlik ixtiyoriy $y \in [0, 1]$ uchun bajarilganligi sababli, x_0 birinchi o'yinchining optimal strategiyasi ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shu usul bilan ko‘rsatish mumkinki, $\min_G w(x, G) = w(x, G_0) \geq w(x, y_0)$ tengsizlik ixtiyoriy $x \in [0,1]$ uchun, bajariladi. Demak, y_0 ikkinchi o‘yinchining sof optimal strategiyasi bo‘lar ekan. 3-teorema isbot bo‘ldi.

3-teorema sof strategiyalarga nisbatan ta’riflangan bo‘lsada, isbotida aralash strategiya ishlatilyapti. Shu ma’noda teorema isboti ancha murakkablashtirilgan.

Shu sababli quyidagi teoremani keltiramiz.

4-teorema. Agar uzluksiz $w(x,y)$, $x, y \in [0,1]$ funksiya qat’iy botiq – qavariq bo‘lsa, u holda o‘yinchilarning sof optimal strategiyalari mavjud.

Isbot. Har bir $y \in [0,1]$ uchun, $w(x,y)$ funksiya x bo‘yicha maksimumga erishadi. Maksimum nuqtasini $\varphi(y)$ bilan belgilaylik. $w(x,y)$ ning uzluksizligidan foydalanib $\varphi(y)$, $0 \leq y \leq 1)$ ham uzluksiz funksiya ekanligini ko‘rsatish mumkin. Demak,

$$\max_x w(x,y) = w(\varphi(y), y),\ 0 \leq y \leq 1$$

uzluksiz funksiya ekan.

Xuddi shu usul bilan shunday uzluksiz $\psi(x)$, $0 \leq x \leq 1)$ funksiya aniqlanadiki, uning uchun,

$$\min_y w(x,y) = w(x, \psi(x)),\ 0 \leq x \leq 1$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Endi $\varphi(y)$, $0 \leq y \leq 1$ va $\psi(x)$, $0 \leq x \leq 1$ funksiyalarining superpozitsiyasi $\varphi(\psi(x))$, $0 \leq x \leq 1$ ni qaraylik. Bu uzluksiz funksiya bo‘lib $[0,1]$ segmentni o‘ziga akslantiradi. Shu sababli Kakutani teoremasigi ko‘ra qo‘zg‘almas x_0 nuqtaga ega, ya’ni

$$x_0 = \varphi(\psi(x_0)).$$

Agar $y_0 = \psi(x_0)$ belgilashni kiritsak, $x_0 = \varphi(y_0)$, $y_0 = \psi(x_0)$ munosabatlarga ega bo‘lamiz. Bu degani (x_0, y_0) juftlik $w(x,y)$, $x, y \in [0,1]$ funksiyaning egar nuqtasi, shu bilan o'yinchilarning sof optimal strategiyalari ekanligini bildiradi. Teorema isbotlandi.

3-misol. Quyidagi

$$w(x,y) = -x^2 + 2y^2 - 4xy + 3x - 2y,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$$

funksiya orqali uzluksiz o'yin berilgan bo'lsin. $w_{xx} = -2$, $w_{yy} = 4$ bo'lganligi sababli, berilgan funksiya qat'iy botiq-qavariq bo'ladi. Endi $\varphi(y)$, $0 \le y \le 1$ funksiyani aniqlaylik: $w_x = -2x - 4y + 3 = 0$, bundan

$$x = \frac{-4y+3}{2},\ \text{demak}\ \varphi(y) = \frac{-4y+3}{2}.$$

Ammo bu funksiyaning qiymati $[0,1]$ oraliqqa har vaqt ham tegishli emas. Shuning uchun, uni quyidagicha qayta aniqlaymiz:

$$\varphi(y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y \le \frac{1}{4} \\ \dfrac{-4y+3}{2}, & \frac{1}{4} \le y \le \frac{3}{4} \\ 0, & \frac{3}{4} \le y \le 1. \end{cases}$$

Xuddi shu usul bilan $\psi(x)$, $0 \le x \le 1$ funksiyani aniqlaymiz:

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{2}, & 0 \le y \le \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le y \le 1 \end{cases}$$

Bu yerdan

$$\begin{cases} w_x(x,y) = 0 \\ w_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish bilan: $x_0 = \frac{1}{6}$, $y_0 = \frac{2}{3}$ birinchi va ikkinchi o'yinchilarning mos ravishda sof optimal strategiyalarini aniqlaymiz. O‘yin bahosi esa

$$w(x_0, y_0) = -\frac{15}{36}$$

ga teng bo‘ladi.

Vaqtni tanlash o‘yini

Bu o‘yinda o‘yinchilar birlik vaqt oraliq davomida bir-biriga bildirmagan holda, biror harakatni faqat bir marta amalga oshirishlari zarur. Bu harakatlarni amalga oshirish tartibi (ketma-ketligi) juda ham muhim bo‘lishi mumkin. Shu bilan birga harakatni iloji boricha kechroq va raqibga qaraganda ertaroq amalga oshirish maqsadga muvofiq. $w(x,y)$, $x, y \in [0,1]$ funksiyaning ko‘rinishi quyidagicha:

$$w(x,y) = \begin{cases} K(x,y), & \text{agar } x < y, \\ \varphi(y), & \text{agar } x = y, \\ L(x,y), & \text{agar } x > y \end{cases}$$

bo‘lsin. Bu yerda $K(x,y)$, $0 \leq x < y \leq 1$, $\varphi(y)$, $0 \leq y \leq 1$, $L(x,y)$, $0 \leq y < x \leq 1$ uzluksiz funksiyalar bo‘lishsin.

Agar $F(x)$, $0 \leq x \leq 1-$ birinchi o‘yinchining aralash strategiyasi bo‘lsa, u holda $y \in [0,1]$ uchun,

$$w(F,y) = \int_0^y K(x,y)\,dF(x) + \varphi(y)\big(F(y) - F(y-0)\big) +$$

$$+ \int_y^1 L(x,y)\,dF(x) \tag{4.39}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Mabodo, $F(x)$, $0 \leq x \leq 1$ uzluksiz funksiya bo'lsa, (4.39) ning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$w(F,y) = \int_0^y K(x,y)\,dF(x) + \int_y^1 L(x,y)\,dF(x).$$

Faraz qilaylik, $F(x)$, $0 \le x \le 1$ va $G(y)$, $0 \le y \le 1$ lar optimal strategiyalar bo'lib $F'(x)$, $0 \le x \le 1$, $G'(y)$, $0 \le y \le 1$ lar uzluksiz funksiyalar bo'lsin. Unda, ma'lumki, agar $y_0 \in [0,1]$ uchun,

$$G'(y_0) > 0 \tag{4.40}$$

bo'lsa,

$$w(F, y_0) = w$$

o'yin bahosi bo'ladi. $G'(y)$, $0 \le y \le 1$ ning uzluksizligidan va (4.40) dan kelib chiqadiki, y_0 nuqtaning biror atrofida ham $G'(y) > 0$ tengsizlik bajariladi. Demak, bu atrofdagi y lar uchun,

$$\frac{\partial w(F,y)}{\partial y} = 0 \tag{4.41}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

(4.41) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\big(L(y,y) - K(y,y)\big)F'(y) = \int_0^y K_y(x,y)F'(x)dx + \int_y^1 L_y(x,y)F'(x)dx.$$

Bu tenglamani $F'(x)$ funksiyaga nisbatan yechib optimal strategiya topiladi.

Faraz qilaylik, $F(x)$, $0 \le x \le 1$, $G(y)$, $0 \le y \le 1$ optimal strategiyalar uzluksiz bo'lib, $F'(x)$, $G'(y)$ lar mos ravishda (a,b), (c,d) oraliqlarda musbat, tashqarisida nol bo'lsin. U holda $F(x)$, $0 \le x \le 1$, $G(y)$, $0 \le y \le 1$ optimal strategiyalarni aniqlash uchun, quyidagi munosabatlarga ega bo'lamiz:

$$0 \le a < b \le 1,\ 0 \le c < d \le 1,$$

$$w(F, y) = w,\ y \in (c, d), \tag{4.42}$$

$$w(F, y) \geq w,\ \forall y, \tag{4.43}$$

$$w(x, G) = w,\ x \in (a, b), \tag{4.44}$$

$$w(x, G) \leq w,\ \forall x \tag{4.45}$$

$$\big(L(y, y) - K(y, y)\big) F'(y) = \int\limits_0^y K_y(x, y) F'(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_y^1 L_y(x, y) F'(x)\, dx,\ \forall y \in (c, d), \tag{4.46}$$

$$\big(K(x, x) - L(x, x)\big) G'(x) = \int\limits_0^x L_x(x, y) G'(y)\, dy +$$

$$+ \int\limits_x^1 K_x(x, y) G'(y)\, dy,\ \forall x \in (a, b). \tag{4.47}$$

Yana bir o‘yin alohida o‘rganiladiki, bunda $w(x, y)$, $x, y \in [0, 1]$ funksiya kososimmetrik, ya’ni

$$L(x, y) = -K(y, x),\ \varphi(x) = 0,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda, o‘yin bahosi nolga teng bo‘lib, o‘yinchilarning strategiyalari ham bir xil bo‘ladi. Shu sababli: $F = G$, $a = c$, $b = d$, $w = 0$. U holda yuqoridagi (4.42)–(4.47)-munosabatlar quyidagicha o‘zgaradi:

$$w(F, y) = 0,\ y \in (c, d), \tag{4.48}$$

$$w(F, y) \geq 0,\ \forall y, \tag{4.49}$$

$$\big(L(y, y) - K(y, y)\big) F'(y) = \int\limits_a^y K_y(x, y) F'(x)\, dx +$$

$$+\int_{y}^{b} L_y(x,y)F'(x)\,dx,\ \forall y \in (c,d), \tag{4.50}$$

Demak, agar oʻyinning yuqoridagi talablarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud boʻlsa, u (4.48)–(4.50)-munosabatlardan aniqlanadi.

Misollar

Biz bu yerda yuqorida koʻrilgan oʻyinga taalluqli boʻlgan misollarni keltiramiz.

4-misol. Quyidagi gipotetik holatni koʻraylik. Ikki duelchi (oʻyinchi) $t = 0$ vaqtdan boshlab bir-biriga oʻzgarmas tezlik bilan yaqinlashib kelmoqda va $t = 1$ vaqtda ular uchrashadi (biror narsa xalaqit bermasa). Oʻyinchilarning har birida qurol boʻlib, ular xohlagan paytlarida raqibga qarshi bir marotabagina oʻq uzishlari mumkin. Oʻyin qoidasiga asosan, agar ularning biri nishonga tegib, ikkinchisi tegmasa, nishonga tekkan oʻyinchi yutgan hisoblanadi. Boshqa vaziyatlarda oʻyin durang bilan tugagan hisoblanadi.

Quyidagi ikki farazni qabul qilamiz.

1. Oʻyinchining t vaqtda nishonga tegish ehtimoli t ga teng;

2. Oʻyin shovqinsiz, ya'ni nishonga tegmagan oʻqning ovozi eshitilmagan hisoblanadi.

Bu oʻyinning $w(x,y)$, $x, y \in [0,1]$ funksiyasini quraylik. Birinchi oʻyinchi otish uchun, x vaqtni tanlasa, ikkinchi oʻyinchi $y > x$ vaqtni tanlasin. U holda birinchi oʻyinchida 1 yutuqni olish ehtimoli x ga va -1 yutuqni olish ehtimoli $y(1-x)$ ga teng. Demak,

$$K(x,y) = x - 1 \cdot y(1-x) = x - y + xy,\ x, y \in [0,1].$$

Oʻyin simmetrik boʻlganligi uchun,

$$L(x,y) = x - y - xy,\ x, y \in [0,1]$$

va

$$\varphi(x) = 0,\ 0 \le x \le 1$$

$$K_y(x, y) = -1 + x,$$

$$L_y(x, y) = -1 - x,$$

$$L(y, y) - K(y, y) = -2y^2$$

munosabatlarga ega bo‘lamiz.

Faraz qilaylik, optimal strategiya $F(x)$, $0 \le x \le 1$ uzluksiz bo‘lib, uning hosilasi (a, b) oraliqda musbat bo‘lsin. U holda (4.50) ga asosan

$$-2y^2 F'(y) = \int_a^y (-1 + x)F'(x)\,dx + \int_y^b (-1 - x)F'(x)\,dx,$$

bu tenglikni y bo‘yicha differensiallab

$$-4yF'(y) - 2y^2 F''(y) = (y - 1)F'(y) + (y + 1)F'(y),\ a \le y \le b \tag{4.51}$$

differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. (4.51) ni ixchamlab quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$yF''(y) = -3F'(y),\ a \le y \le b$$

uning yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$F'(y) = \frac{k}{y^3},\ a \le y \le b.$$

Endi a, b va k larning qiymatlarini aniqlaymiz. Faraz qilaylik, quyidagi tengsizlik: $b < 1$ o‘rinli bo‘lsin, u holda $w(F, y)$ ni y bo‘yicha uzluksizligidan $w(F, b) = 0$ yoki

$$\int^b (x - b + bx)\,dF(x) = 0,\quad \int_a^b (x - 1 + x)\,dF(x) < 0$$

bo'lganligi sababli $w(F,1) < 1$, bu esa (4.49) ga qarama-qarshi. Shu sababli $b = 1$, bundan esa

$$w(F,1) = 1 \tag{4.52}$$

tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi. (4.52) dan kelib chiqadiki $k\int\limits_a^b \frac{2x-1}{x^3}\,dx = 0$, bundan $3a^2 - 4a + 1 = 0$.

Oxirgi tenglamaning ikkita $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{3}$ ildizlari bo'lib $a_1 = 1$ ildiz mumkin emas, demak, $a = \frac{1}{3}$.

$F(x)$, $0 \leq x \leq 1$ strategiya bo'lganligi uchun,

$$\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} kx^{-3}\,dx = 1$$

bundan $k = \frac{1}{4}$ kelib chiqadi. Demak, ikkala o'yinchining optimal strategiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8}(9 - \frac{1}{x^2}), & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ko'rinishida bo'lar ekan.

5-misol. (Shovqinli duel). Bu o'yinda o'q ovozi eshitiladi. Demak, agar birinchi tomon nishonga tegmagan bo'lsa, ikkinchi tomon albatta tegadi, chunki u $t = 1$ vaqtgacha kutib turadi. Shu sababli birinchi o'yinchi mo'ljal uchun, $x < y$ vaqtni tanlagan bo'lsa, u x ehtimollik bilan 1 ni, yoki $1 - x$ ehtimollik bilan -1 ni yutadi. Demak,

$$w(x,y) = 2x - 1,\ L(x,y) = 1 - 2y,\ \varphi(x) = 0,\ 0 \leq x \leq t,\ 0 \leq y \leq 1.$$

Bunga avvalgi hisob-kitoblarni qo'llasa ham bo'ladi. Lekin o'yin sodda bo'lganligi uchun, $x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$ ekanligini topish oson. Natijada, optimal strategiya sof bo'lib, u $\frac{1}{2}$ ga teng.

5-§. Bijadvalli o'yin

Yuqorida ko'rdikki, antagonistik o'yinlarda o'yinchilarning oladigan yutuqlari yig'indisi o'zgarmas bo'lib, uni har vaqt nol yig'indili o'yinga keltirish mumkin. Bunda, demak, biror o'yinchi yutug'i ortsa, boshqa o'yinchiniki, albatta, kamayadi.

Ammo shunday jarayonlar ham borki, bunda o'yinchilarning yutuqlari yig'indisi o'zgaruvchan bo'ladi. Shu bilan birga o'yinchining oladigan yutug'i, nafaqat o'zining, shu bilan birga boshqa tomon (ikkinchi o'yinchi)ning qabul qilgan qaroriga (strategiyasiga) ham bog'liq bo'ladi.

Agar o'yinda ikki ishtirokchi bo'lib, ularning strategiyalari chekli bo'lsa, u holda *bijadvalli o'yin* hosil bo'ladi. Bunda o'yinchilarning oladigan mos yutuqlarini (a_i, b_j) juftlik orqali ifodalash mumkin. Demak,

$$(A,B) = \begin{pmatrix} (a_1,b_1) & \dots & (a_1,b_n) \\ (a_2,b_1) & \dots & (a_2,b_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_m,b_1) & \dots & (a_m,b_n) \end{pmatrix}$$

jadvalning (a_i, b_j) elementi birinchi o'yinchi $i-$ strategiyasini, ikkinchi o'yinchi $j-$ strategiyasini tanlagandagi o'yinchilarning mos yutuqlarini bildiradi.

Bu yerda ham, xuddi antagonistik o'yin kabi aralash strategiya tushunchasini kiritish mumkin.

Aniqki, o'yinchilarning birlashib harakat qilishlari ularning yutuqlarini oshirishga katta yordam beradi, Ammo o'yin qoidasi yoki sharoitga ko'ra birlashib harakat qilishning iloji bo'lmasligi mumkin. Bunda har bir o'yinchi o'z foydasini ko'zlab strategiya tanlaydi.

Biz bu yerda, aynan, shu holatni, ya'ni koalitsiya tuzish mumkin bo'lmagan o'yinlarni tadqiq etamiz.

Afzal strategiyalarga nisbatan muvozanat holat

Bizga A va B jadvallar bilan berilgan (A, B) bijadvalli o'yin berilgan bo'lsin. Bunda A jadvalning elementlari birinchi, B jadvalning elementlari ikkinchi o'yinchining yutuqlarini ifodalaydi. Ya'ni, masalan, birinchi o'yinchi i, ikkinchisi j strategiyalarini qo'llasalar, birinchi va ikkinchi o'yinchining yutuqlari mos ravishda a_i, b_j sonlariga teng bo'ladi.

1-ta'rif. Biror i va k lar uchun,

$$a_{ij} > a_{kj} \tag{5.1}$$

tengsizlik barcha $j = 1, 2, ..., n$ lar uchun, o'rinli bo'lsin. U holda birinchi o'yinchining i strategiyasi k strategiyasidan *qat'iy ustun (afzal)* deb ataladi. Agar (5.1) tengsizlik qat'iy bo'lmasa, birinchi o'yinchi uchun, *i strategiya k strategiyadan qat'iy bo'lmagan ustun (afzal)* deb ataladi.

2-ta'rif. Agar biror i va k lar uchun,

$$a_{ij} \geq a_{kj} \tag{5.2}$$

tengsizliklar barcha $j = 1, 2, ..., n$ lar uchun, o'rinli bo'lsa, birinchi o'yinchining *i strategiyasi k strategiyadan to'la ustun (afzal)* deb ataladi.

Xuddi shunga o'xshash ta'riflarni ikkinchi o'yinchi uchun, ham kiritish mumkin. Bunda, endi B jadvalga nisbatan so'z yuritiladi.

Demak, mabodo, o'yinchining ustun (afzal) strategiyasi mavjud bo'lsa, u har doim shu strategiyani tanlash hisobiga, ikkinchi o'yinchi nima qilishidan qat'i nazar, kam bo'lmagan yutuqqa erishar ekan (qarang (5.2)). Shu ma'noda ustun keluvchi strategiyalarni tanlash maqsadga muvofiq bo'ladi.

Ammo ayrim hollarda, masalan, o'yinni bir necha marta takrorlash imkoni bo'lgan hollarda bunday yo'l tutish hamma vaqt ham to'g'ri bo'lavermaydi. Bunga misol keltiramiz.

O‘yinchilarda ikkitadan strategiya bo‘lgan quyidagi bijadvalli o‘yinni ko‘raylik:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (160, 0) & (10, 10) \\ (150, 120) & (0, 0) \end{pmatrix}$$

Demak, bu o‘yinda

$$A = \begin{pmatrix} 160 & 10 \\ 150 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 120 & 0 \end{pmatrix}$$

bo‘lib, bunda birinchi o‘yinchining 1-strategiyasi 2-strategiyasidan ustundir. Shu sababli ikkinchi o‘yinchi 2-strategiyasini qo‘llashi kerak bo‘ladi. Bunda, o‘yinchilarning har biri 10 yutuqqa ega bo‘lishadi.

Endi faraz qilaylik, o‘yin 10 marta qaytarilib, birinchi o‘yinchi 10 tadan 8 tasida birinchi, 2 tada 2-strategiyasini qo‘llasa, u holda ikkinchi o‘yinchi 1-strategiyani qo‘llashi maqsadga muvofiq bo‘ladi. Chunki, bunda birinchi o‘yinchining yutug‘i $8 \cdot \frac{160}{10} + 2 \cdot \frac{150}{10} 158$ ikkinchisiniki $2 \cdot \frac{120}{10} = 24$ ga teng bo‘ladi.

Ammo o‘yin bir taktli (faqat bir marta o‘ynaladigan) bo‘lsa, yuqoridagi usulni qo‘llab bo‘lmaydi, unda albatta, birinchi o‘yinchi 1-strategiyasini qo‘llashi kerak bo‘ladi.

Xulosa shuki, agar biror o‘yinchining ustun strategiyasi mavjud bo‘lsa, uning harakati ma’lum bo‘lib, ikkinchi o‘yinchi uchun, ma’qul strategiyani aniqlash kerak bo‘ladi. Agar ikkala o‘yinchining ham ustun strategiyalari mavjud bo‘lsa, bu eng ideal holat bo‘lib, o‘yin masalasi to‘la yechilgan deb aytish mumkin.

3-ta’rif. Agar i, j strategiyalar birinchi va ikkinchi o‘yinchilarning mos ravishda ustun(afzal) strategiyalari bo‘lsa, (i, j) afzal strategiyalarga nisbatan *muvozanat holat* deb ataladi.

Agar o‘yinda ustun strategiyalarga nisbatan muvozanat holat bo‘lsa, uni o‘yinning yechimi sifatida qabul qilish mumkin. Ammo quyidagi vaziyatlar ham bo'lib qolishi mumkin:

$$(A,B)=\begin{pmatrix} (100,50) & (20,50) \\ (100,0) & (20,0) \end{pmatrix}$$

Bu yerda afzal strategiyalarga nisbatan muvozanat holatlar bir nechta bo'lib, birinchi o'yinchi uchun, 1-strategiyani tanlaydimi, yoki 2-strategiyanimi farqi yo'q, ammo ikkinchi o'yinchiga buning katta ahamiyati bor.

Shunday vaziyatlar bo'lishi mumkinki, bunda afzal strategiyaga nisbatan aniqlangan muvozanat holat ikkala o'yinchiga ham ma'qul bo'lib, ko'zlangan yutuqni bermasligi mumkin. Quyidagi misolni ko'raylik:

$$(A,B)=\begin{pmatrix} (100,100) & (-30,150) \\ (150,-30) & (10,10) \end{pmatrix}$$

bu yerda $(2,2)$-muvozanat holatni tashkil qiladi. Unda o'yinchilar 10 yutuqqa ega bo'ladilar. Agar o'yinchilar bamaslahat qaror qabul qilishib, 1-strategiyalarini tanlasalar, har biri 100 yutuqqa erishadi.

Demak, o'yinda o'yinchilar ega bo'ladigan ma'lumotlar muhim hisoblanar ekan.

Nesh ma'nosida muvozanat holat

O'yinchi qaror (yechim) qabul qilishidan oldin, ikkinchi o'yinchining qarorini taxmin qilishga majbur, chunki uning yutug'i unga bog'liq bo'ladi. Ammo bu taxmin haqiqatga qanchalik to'g'ri kelishi juda ham muhim hisoblanadi. Shu sababli, birinchi o'yinchi quyidagicha fikr yuritishi mumkin: men α_i yechimni qabul qilaman, chunki bunga qarshi ikkinchi o'yinchi β_j yechimni qabul qiladi, shu sababli α_i β_j ga nisbatan optimal bo'lishi kerak.

4-ta'rif. Agar ixtiyoriy i va j lar uchun,

$$a_{i_0 j_0} \geq a_{i j_0}, \quad b_{i_0 j_0} \geq b_{i_0 j} \tag{5.3}$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, (i_0, j_0) Nesh ma’nosida muvozanat holat deb ataladi.

(5.3) tengsizlikdan ko‘rinib turibdiki, biror o‘yinchi shu strategiyani qo‘llab tursa, boshqa o‘yinchi uchun, ham shu strategiyani qo‘llash maqsadga muvofiq.

Demak, o‘yinchi ikkinchi o‘yinchiga nisbatan hech qanday ma’lumotga ega bo‘lmasa, unda u Nesh ma’nosida muvozanatni saqlovchi strategiyani tanlashi kerak ekan.

Ammo bunda shunday o‘yinlar uchraydiki, ularda bir nechta Nesh ma’nosida muvozanat holatlar mavjud bo‘lishi mumkin. Bunday vaziyatda, ulardan birortasini tanlab olish masalasi turadi.

1-misol.

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (100, 100) & (0, 50) \\ (50, 0) & (60, 60) \end{pmatrix}$$

Bunda Nesh ma’nosida muvozanat holatlar: $(1, 1)$ va $(2, 2)$ bo‘lib birinchi holatda o‘yinchilar 100 birlik, ikkinchi holatda 60 birlik yutuqqa ega bo‘ladilar.

Agar birinchi o‘yinchi 1-strategiya qo‘llasada, ikkinchi o‘yinchi 2-strategiyani qo‘llasa, u holda birinchi 0 yutuqqa ega bo‘ladi. Agar birinchi o‘yinchi 2-strategiyani qo‘llasa, kafolatlangan yutug‘i 50 bo‘ladi. Shu sababli bu yerda ikkinchi o‘yinchining mo‘ljali haqida ma’lumotga ega bo‘lish muhim hisoblanadi.

Hatto, muvozanat holat yagona bo‘lgan holda ham, uni tanlash ikkilanishga olib kelishi mumkin.

2-misol.

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (40, 50) & (50, 90) & (40, -200) \\ (60, -200) & (70, 80) & (40, 150) \end{pmatrix}$$

bunda (2,3) yagona yechim ma’nosida muvozanat holat bo‘lib, unda o‘yinchilar mos ravishda 40 va 150 yutuqqa ega bo‘lishadi.

Mabodo, birinchi o'yinchi 1-strategiyasini qo'llasa, ikkinchi o'yinchi uchun, bu juda ham katta yutuq bo'ladi (200), shu sababli ikkinchi o'yinchi birinchi o'yinchi tomonidan 2-strategiyani tanlashiga to'la ishongan bo'lishi lozim. Aks holda, u (ikkinchi o'yinchi) 2-strategiyani tanlash bilan kamida 80 yutuqqa ega bo'ladi.

Bu misollardan xulosa shuki: 1) muvozanat holat har vaqt ham muvaffaqiyatga olib kelavermaydi; 2) muvozanat holatlar bir nechta bo'lishi mumkin.

Endi berilgan bijadvalli o'yinda Nesh ma'nosida muvozanat holatni topish usullaridan birini ko'rib chiqamiz.

A jadvalning har bir ustunida eng katta qiymatlar joylashgan kataklarni belgilab chiqamiz. A va B jadvallarda ikki marta belgilashga ega bo'lgan qatorlarga mos kelgan holat Nesh ma'nosida muvozanat holatni anglatadi.

3-misol.

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (10, 40) & (-10, 10) & (20, -20) \\ (50, 10) & (20, 30) & (0, 10) \end{pmatrix}$$

bunda

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -10 & \surd 20 \\ \surd 50 & \surd 20 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \surd 40 & 10 & -10 \\ 10 & \surd 30 & 10 \end{pmatrix}$$

ya'ni A va B jadvallarning ikkinchi satri va ikkinchi ustunlari umumiy belgiga ega. Shu sababli bu bijadvalli o'yinda (2,2) Nesh ma'nosida muvozanat holatni tashkil qiladi.

Aralash strategiyada muvozanat holat

Yuqoridagi mulohazalarning barchasi faqat sof strategiyalarga nisbatan olib borildi. Quyidagi 4, 5-misollar ko'rsatadiki, sof strategiyalarga nisbatan har vaqt ham muvozanat holat bo'lavermas ekan. Shu sababli aralash strategiya tushunchasi kiritiladi. Aralash strategiya kiritilib, kengaytirilgan o'yinda esa har vaqt muvozanat holat topiladi.

Kengaytirilgan o'yinda o'yinchilar tomonidan sof strategiyalarni tanlash ehtimollik orqali olib boriladi. Ya'ni har bir sof strategiyalar biror ehtimollik bilan tanlanadi.

5-ta'rif. Sof strategiyalar ustida taqsimlangan to'la ehtimollik aralash strategiya deb ataladi.

Shunga ko'ra birinchi o'yinchining aralash strategiyalari to'plami quyidagi:

$$S_m = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_m) : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \; x_i \geq 0. \; i = 1, 2, ..., m \right\}$$

simpleksdan iborat bo'ladi.

Agar o'yinchilar mos ravishda $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ aralash strategiyalarni tanlagan bo'lsa, ularning o'rtacha yutuqlari mos ravishda quyidagi:

$$w_I = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \quad w_{II} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$$

sonlarga teng bo'ladi.

Demak, birinchi o'yinchi w_I ni $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in S_m$ o'zgaruvchilar bo'yicha, ikkinchi o'yinchi w_{II} ni $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in S_n$ o'zgaruvchilar bo'yicha maksimum qilishga harakat qiladi.

Shunga ko'ra quyidagi ta'rif kelib chiqadi:

6-ta'rif. Agar biror $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$, $y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ holatlar uchun,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^*,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i^* y_j \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i^* y_j^*$$

tengsizliklar barcha $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in S_m$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in S_n$, larda o'rinli bo'lsa, (x^*, y^*) holat *Nesh ma'nosida muvozanat holat* deb ataladi.

Bijadvalli o'yinda Nesh ma'nosida muvozanat holatni topish muhim hisoblanadi.

Shu ma'noda quyidagi teorema diqqatga sazovar:

1-teorema. Ixtiyoriy bijadvalli o'yin aralash strategiyalarga nisbatan Nesh ma'nosida muvozanat holatga ega.

Isbot. (A, B) jadvalli o'yinda $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in S_m$, $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in S_n$, ixtiyoriy aralash strategiyalar bo'lsin. Ular yordamida

$$x_i' = \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_{i=1}^{m} c_i}, \ y_j' = \frac{y_j + d_j}{1 + \sum_{j=1}^{n} d_i} \tag{5.4}$$

aralash strategiyalarni quramiz, bu yerda

$$c_i = \max(A_{i\cdot}y^T - xAy^T, 0), \ i = 1, 2, ..., m \tag{5.5}$$

$$d_j = \max(xB_{\cdot j} - xBy^T, 0), \ j = 1, 2, ..., n,$$

$A_{i\cdot} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, $B_{\cdot j} = (b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{mj})^T$ larni ifodalaydi.

(5.4) ni $(x, y) \to (x', y')$ akslantirish deb qarash mumkin. Uni $(x', y') = T(x, y)$ deb olamiz. Ko'rsatish mumkinki $T(x, y)$, $x \in S_m$, $y \in S_n$ akslantirish uzluksizdir.

Endi $(x, y) = (x', y')$ tenglik bajarilishi uchun, (x, y) ning muvozanat holat bo'lishligi zarur va yetarli ekanini ko'rsatamiz.

Haqiqatan, agar $(x, y)-$ muvozanat holat bo'lsa $A_{i\cdot}y^T \leq xAy^T$, $i = 1, 2, ..., m$ tengsizlik o'rinli bo'lib, bundan $c_i = 0$, $i = 1, 2, ..., m$ kelib chiqadi. Xuddi shunday usul bilan ko'rsatish mumkinki $d_j = 0$, $j = 1, 2, ..., n$. Demak, $x = x'$, $y = y'$.

Endi Faraz qilaylik, (x, y) muvozanat holat bo'lmasin. Ya'ni, yoki shunday $\bar{x} \in S_m$ mavjudki $\bar{x}Ay^T > xAy^T$ bo'ladi, yoki shunday $\bar{y} \in S_n$ mavjudki $xA\bar{y}^T > xAy^T$ bo'ladi. Birinchi hol o'rinli bo'lsin (ikkinchi hol ham xuddi shu yo'l bilan ko'rsatiladi).

xAy^T soni $A_{i\cdot}y^T$, $i = 1, 2, ..., m$ sonlarning qavariq qiymati bo'lganligi sababli, shunday $k \in \{1, 2, ..., m\}$ indeks topiladiki, uning uchun, $A_{k\cdot}y^T > xAy^T$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, (5.5) ga asosan $c_k > 0$. c_i, $i = 1, 2, ..., m$ larning barchasi manfiy bo'lmaganligi sababli, albatta, bitta shunday indeks $s \in \{1, 2, ..., m\}$ topiladiki, uning uchun, $A_{s\cdot}y^T \le xAy^T$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, bundan $c_s = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Oxirgi mulohazalardan

$$x'_s = \frac{x_s}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m} c_i} < x_s$$

va undan $x' \neq x$ ekanligi ma'lum bo'ladi.

Demak, $(x', y') = (x, y)$ bajarilishi uchun, (x, y) ning muvozanat holat bo'lishi zarur va yetarli ekan. $T : S_m \times S_n \to S_m \times S_n$ akslantirish uzluksiz bo'lib, u kompakt va qavariq bo'lgan $S_m \times S_n$ to'plamni o'z-o'ziga akslantiradi. $T(x, y)$ akslantirish uchun, Brauer teoremasining barcha shartlari bajarilganligi sababli, u qo'zg'almas (x, y) nuqtaga ega, ya'ni $(x, y) = T(x, y)$.

Xuddi shu qo'zg'almas (x, y) nuqta yuqorida ko'rsatilganga asosan berilgan bijadvalli o'yinning muvozanat holatini tashkil qiladi. Teorema isbotlandi.

Yuqorida (4-§.)dagi (nol yig'indili o'yinda) muvozanat holatlarining kombinatsiyasi ham muvozanat holat bo'lib, uni bahosi o'zgarmaydi. Ya'ni, agar antagonistik o'yinda (x', y') va (x'', y'') lar muvozanat holatlar bo'lsa, quyidagilarning barchasida (x', y'), (x'', y'') (x'', y'), (x', y'') o'yinchilar oladigan yutuqlar bir xil bo'ladi.

4-misol. Dam olish kuni maroqli o'tishi uchun, oila a'zolari faqat ikki joyga: teatrga yoki futbolga borishga kelishib olishdi. Bunda oila a'zolarining bu maskanlarga borishdan oladigan qoniqishlari turlicha bo'lib, masalan, ayollar teatrni, erkaklar futbolni afzal ko'rishadi. Ammo oila birgalikda bo'lishni ma'qul ko'radi.

Agar ayollarni birinchi, erkaklarni ikkinchi o'yinchi deb olinadigan bo'lsa, u holda ularning maskanga borib oladigan qoniqishlarini sonli miqdorlar bilan ifodalash mumkin bo'ladi. Aynan, oila birgalikda teatrga yoki futbolga borishlari mos ravishda erkaklarga 4, 5, ayollarga 5,4 qoniqish keltirsin. Mabodo, erkaklar futbolga, ayollar teatrga borishsa, ikkala tomon 1 birlikdan qoniqish hosil qilsinlar. Va oxirgi uchinchi holat, ya'ni erkaklar teatrga, ayollar futbolga borsalar, hech bir tomon qoniqish olmasin.

Agar F va T bilan mos ravishda futbol, teatr tanlash strategiyalarini belgilasak; (a_i, b_j) juftlikning birinchi soni erkaklarning, ikkinchi soni ayollarning qoniqish hosil qilish sonlarini anglatsa, u holda quyidagi jadvalga ega bo'lamiz:

5.1-jadval

	F	T
F	$(5,4)$	$(1,1)$
T	$(0,0)$	$(4,5)$

5.1-jadvalning satrlari erkaklarning, ustunlari ayollarning strategiyalarini bildiradi.

Bunda $x = (1,0)$, $y = (1,0)$ va $x' = (0,1)$, $y' = (0,1)$ sof strategiyalar muvozanat holatlarni tashkil etishadi. Shu bilan birga ularning kombinatsiyasini tashkil etgan (x, y'), (x', y) holatlar muvozanat holatni tashkil etishmaydi. Bu ikkita (x, y), (x', y') holatlarda o'yinchilar oladigan yutuqlar turlichadir.

Yana shuni e'tiborga olamizki, $x'' = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $y'' = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ aralash strategiyalardan tuzilgan holat ham muvozanat holatni tashkil qiladi.

Bijadvalli o'yinlarda, hatto muvozanat holat yagona bo'lganda ham ayrim noaniqliklarni hisobga olishga to'g'ri keladi.

5-misol. (Jinoyatchilar haqida o'yin). Ikkita jinoyatchi qo'lga tushgan bo'lib, ular dastlabki so'roqlarni berishlari kerak, ularga nisbatan to'g'ridan-to'g'ri ayb qo'yilmagan, ammo ularning o'zlari sodir etgan jinoyatlariga iqror bo'lishgani aybdor ekanini ochib beradi.

Mabodo, ikkalasi qilgan jinoyatini bo'yniga olishsa, ularga biroz yengillashtirilgan jazo qo'llaniladi, masalan, 8 birlik (ya'ni ular – 8 birlikdan yutadilar), agar ularning har ikkalasi ham jinoyatni bo'ynilariga olmasalar, ularning jinoyat ishlari to'la ochilmaganligi sababli, ularga nisbatan 1 birlik jazo (ya'ni ularning yutuqlari – 1 bo'ladi). Mabodo, ularning biri bo'yniga olib, ikkinchisi olmasa, u holda voqea sodir bo'layotgan mamlakatning qonunlariga asosan, bo'yniga olganga 0 birlik, bo'yniga olmaganga 10 birlik mag'lubiyat e'lon qilinadi.

Demak, bu o'yinda ikkita ishtirokchi bo'lib, ularning har birining ikkitadan strategiyalari (bo'yniga olish va olmaslik) bor ekan. Agar bo'yniga olishni birinchi, olmaslikni ikkinchi strategiya deb olinsa, quyidagi bijadvalli o'yinga kelamiz:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (-8, -8) & (0, -10) \\ (-10, 0) & (-1, -1) \end{pmatrix}.$$

Bu o'yinda birinchi va ikkinchi o'yinchilarning birinchi strategiyalari ikkinchi strategiyalaridan ustun. Demak, (1,1)-Nesh ma'nosida yagona muvozanat holatni tashkil qiladi. Bunda o'yinchilar (jinoyatchilar) -8 dan yutuqqa erishadilar. Lekin ikkalasi ham noto'g'ri, ya'ni ikkinchi strategiyani tanlasalar, yutuqlari -1 bo'ladi, hatto biri ikkinchisini "sotib" qo'ysa ham, u hech narsa yutqazmaydi (0 yutuq). Bundan kelib chiqadiki, Nesh ma'nosida muvozanat holatlarning ham muammolari bor.

Pareto va Sleyter ma'nosida muvozanat holatlar

Bizga (A, B) bijadvalli o'yin berilgan bo'lsin. Yuqorida bijadvalli o'yin uchun, Nesh ma'nosida muvozanat holat tushunchasini ko'rib chiqdik. Bu yerda undan farqli bo'lgan Pareto va Sleyter ma'nosidagi muvozanat holatlarni ko'rib chiqamiz.

7-ta'rif. Agar biror (i_0, j_0) holat uchun,

$$a_{i_0j_0} \leq a_{ij}, \ b_{i_0j_0} \leq b_{ij} \tag{5.6}$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi (i, j) holat mavjud bo'lmasa, (i_0, j_0)–*Pareto ma'nosida muvozanat holat* deb ataladi.

Bunda har bir (i, j) uchun, (5.6) da kamida bitta tengsizlik qat'iy bo'lishi lozim.

8-ta'rif. Agar biror (i_0, j_0) holat uchun,

$$a_{i_0j_0} < a_{ij}, \ b_{i_0j_0} < b_{ij}$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi (i, j) holat mavjud bo'lmasa (i_0, j_0)– *Sleyter ma'nosida muvozanat holat* deb ataladi.

Agar $P(A, B)$ va $S(A, B)$ lar bilan mos ravishda Pareto va Sleyter ma'nosidagi muvozanat holatlar to'plamini belgilasak, ko'rsatish osonki quyidagi:

$$P(A, B) \subseteq S(A, B)$$

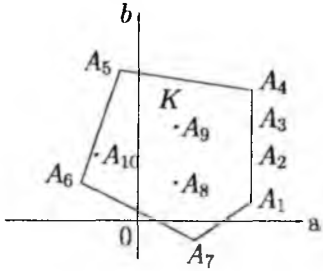
munosabat o'rinli bo'ladi.

6-misol.

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (10, 15) & (4, 15) \\ (11, 10) & (10, 11) \end{pmatrix}.$$

Bu jadvalli o'yinda $(1, 1)$, $(2, 1)$ holatlar Pareto ma'nosida, demak, Sleyter ma'nosida ham muvozanat holatlarni tashkil etar ekan. Berilgan bijadvalli o'yinda Pareto va Sleyter ma'nosida muvozanat holatlarni topishning quyidagi grafik usuli taklif etiladi.

Tekislikda $a, b-$ koordinatalar sistemasini kiritib (a_i, b_j) nuqtalarni aniqlaymiz. Bu nuqtalarning qavariq chiziqli qobig'ini K bilan belgilaylik. Bu figura $A_1A_2...A_7$ qavariq ko'pburchakdan iborat bo'lib, uning o'ng tarafi yoki bitta nuqtadan, yoki kesmadan iborat bo'ladi. Agar u A_1A_4 kesmadan iborat bo'lsa, uning yuqoridagi A_4 uchi Pareto ma'nosida muvozanat holatga mos keladi. Kesmaga tegishli barcha A_1, A_2, A_3, A_4 nuqtalar Sleyter ma'nosida muvozanat holatlarni tashkil qiladi (5.1-rasm).



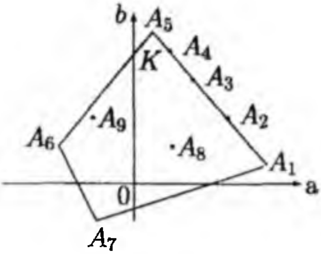
5.1-rasm

Demak, K figuraning o'ng tarafi vertikal kesmadan iborat bo'lsa, Sleyter ma'nosidagi muvozanat holat kamida 2 ta bo'lar ekan. Endi K figuraning o'ng tarafi bitta uchdan iborat bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda o'ng tarafdagi kesmada yotuvchi barcha A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 nuqtalarga mos holatlar ham Pareto, ham Sleyter ma'nosida muvozanat holatlarni tashkil qiladi (5.2-rasm).

7-misol. Quyidagi bijadvalli o'yin berilgan bo'lsin:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (10,8) & (9,6) \\ (10,11) & (8,8) \end{pmatrix}.$$

Bunda (2,1)-Pareto ma'nosida (2,1), (1,1) lar Sleyter ma'nosida muvozanat holatlarni tashkil qiladi.

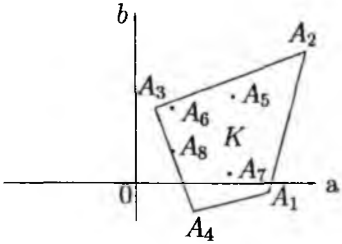


5.2-rasm

8-misol.

$$(A,B)=\begin{pmatrix}(10,8) & (9,6)\\ (9,6) & (8,7)\end{pmatrix},$$

bu bijadvalli o‘yinda (1,1) holat yagona Pareto va Sleyter ma’nosida muvozanat holatlarni tashkil qiladi. Mabodo, K figura 5.3-rasmdagi ko‘rinishda bo‘lsa, u holda o‘ng tarafdagi A_2 nuqtaga mos holat ham Pareto, ham Sleyter ma’nosidagi yagona muvozanat holatni tashkil qiladi.



5.3-rasm

Pareto va Sleyter ma’nosidagi muvozanat holatlarni aniqlashning quyidagi umumiy usulini keltirish mumkin.

1-tasdiq. Bijadvalli o‘yinda biror holat Pareto ma’nosida muvozanat holatni tashkil etishligi uchun, shu holatga mos nuqtaga koordinata sistemasi boshi ko‘chirilganda, uning birinchi choragida (chegaralari bilan birga) boshqa holatlarga mos nuqtalar bo‘lmasligi zarur va yetarli.

2-tasdiq. Bijadvalli o'yinda biror holat Sleyter ma'nosida muvozanat holatni tashkil etishligi uchun, shu holatga mos nuqtaga koordinata sistemasi boshi ko'chirilganda, uning birinchi choragida (chegarasiz) boshqa holatlarga mos nuqtalar bo'lmasligi zarur va yetarli.

Nazorat uchun savollar

1. Tavakkalchilik sharoitida yechim qabul qilishda yagona strategiya aniqlanadimi?
2. Nima uchun tabiat bilan o'yin masalasi deb ataladi?
3. Tabiat bilan o'yin masalalarida kriteriyalarni tanlash qanday aniqlanadi?
4. Qaysi holatda qanday kriteriyani tanlash tavsiya etiladi?
5. Kriteriyalarni muhim yoki ahamiyati bo'yicha tartiblash mumkinmi?
6. Kriteriyalarni tanlab olish orqali haqiqiy yechimni (strategiyani) topish mumkinmi?
7. Tavakkalchilik sharoitida optimal yechimni (strategiyani) topishda kriteriyalarning roli qanday?
8. Tavakkalchilik sharoitida barcha kriteriyalar aniqlanib bergan yechimlar ko'p marta qaytarib qo'llaniladi deb faraz etiladi, to'g'rimi? Sababi nima?
9. Antagonistik o'yin nima?
10. O'yinning quyi va yuqori o'yin bahosi nima?
11. O'yinchilarning sof strategiyalari nima?
12. Sof strategiyaga nisbatan egar nuqta nima u qanday aniqlanadi?
13. Aralash strategiya nima?
14. Minimaks teoremasi nimani tasdiqlaydi?
15. Minimaks teoremasi bilan egar nuqta orasida qanday bog'liqlik bor?

16. O‘yinchilarning optimal strategiyalari va o‘yin bahosi nima?

17. O‘yinchilarning optimal strategiyalari qanoatlantiruvchi chiziqli tengsizliklar sistemasini yozing.

18. Bir strategiya ikkinchisidan ustunlik bo‘lishlik shartini keltiring.

19. Strategiyalarni ustunlik bo‘lishligi bilan nimaga erishiladi?

20. Bir jadvalli o‘yin ikkinchisidan biror ko‘paytuvchi yoki qo‘shiluvchi bilan farq qilsa, ularning yechimlari orasidagi bog‘liqlik qanday bo‘ladi?

21. O‘yinning asosiy elementlari va ularning ma’nosi nima?

22. O‘yinning daraxt ko‘rinishida ifodalanishi nima?

23. O‘yinchilarning axborot to‘plami nima?

24. O‘yinchilar yechim (strategiya) qabul qilishlarida axborot to‘plam qanday rol o‘ynaydi?

25. O‘yinda o‘yinchilar bir-biri bilan qanday bog‘langan?

26. Muvozanat holat nima?

27. To‘la axborotli va chekli o‘yin degani nima?

28. O‘yinning normal shakli nima?

29. Aralash strategiya nima va qaysi paytda ishlatiladi?

30. $2 \times 2-$ o‘yinni to‘la yeching.

31. 2×2 o‘yinida $w_{11}+w_{22}-w_{12}-w_{21}=0$ bo‘lishi mumkinmi? Tenglik bo‘lsa, nima bo‘ladi?

32. $m \times 2-$ o‘yinning grafik usulda yechish yo‘lini ko‘rsating.

33. Kooperativ o‘yinning xarakteristik funksiyasi qanday quriladi?

34. $v(S)+v(T) \le v(S \cup T)$ tengsizlikning ma’nosi nima?

35. Muhim o‘yinning ma’nosi nimadan iborat?

36. Taqsimotlarning afzallik bo‘yicha nega tartiblab bo‘lmaydi? Agar tartiblab bo‘lganda qanday natija olinar edi?

37. Butun $S = N$ koalitsiya, yoki bitta elementli $S = \{i\}$ koalitsiya bo'yicha afzallik bo'lishi mukinmi?

38. NM yechim bilan C – yadro o'rtasida bog'liqlik bormi?

39. Strategik ekvivalent o'yinlarni o'yinchilarning yutug'i nuqtayi nazardan qanday ifodalash mukin?

40. Shepli vektori bilan NM yechim o'rtasida qanday bog'liqlik bor?

41. n – yadro bilan Shepli vektori o'rtasida qanday bog'liqlik bor?

42. n – yadro bilan C – yadro o'rtasida qanday bog'liqlik bor?

43. Mashler – Peleg nomi bilan ataluvchi o'yinda Shepli vektori qurilsin.

44. Cheksiz o'yin nima?

45. Cheksiz o'yinda quyi va yuqori o'yin baholari qanday aniqlanadi va ularning ma'nosi nima?

46. Cheksiz o'yinda sof va aralash strategiyalar qanday aniqlanadi?

47. Botiq – qavariq o'yinning geometrik talqinini bering.

48. Nima uchun vaqtni tanlash o'yini deb ataladi?

49. Nima uchun shovqinli va shovqinsiz o'yin deb ataladi? Ularning umumiylik tomoni nimadan iborat?

50. Bozordagi savdo shaxobchalarini egallash uchun, raqobatda bo'lgan ikki tomon kurashini shovqinsiz va shovqinli duel misolida tavsiflang.

51. 7-masalani yeching.

52. Bijadvalli o'yin bilan jadvalli o'yinning asosiy farqi nimadan iborat?

53. Bijadvalli o'yinni ikkita jadvalli o'yin deb qarash mumkinmi? Nega?

54. Nesh ma'nosidagi muvozanat holat o'yinchilarning yutug'i nuqtayi nazardan nimani anglatadi?

55. Jadvalli o'yinga o'xshash bijadvalli o'yinda raqib haqida ma'lumotlarni bilish qanchalik ahamiyatga ega?

56. Ustun strategiyalarga nisbatan muvozanat holat bilan Nesh muvozanat holati o'rtasida qanday bog'liqlik bor?

57. Aralash strategiyaga nisbatan Nesh ma'nosida muvozanat holat nima?

58. Pareto va Sleyter ma'nolarida muvozanat holatlarni tushuntiring.

59. Pareto va Sleyter ma'nosidagi muvozanat holatlarni topishning geometrik usulini ko'rsating.

60. Nesh, Pareto va Sleyter ma'nosidagi muvozanat holatlar o'rtasida bog'liqlik nimalardan iborat?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

2.1. Tavakkalchilik sharoitida yechim qabul qilish mavzusiga doir 1. Ishlab chiqarish jarayonida mahsulotlarning nuqsonliklari 10, 12, 13 va 15 foiz bo'lib, ularning ro'y berish ehtimolliklari mos ravishda 0,2; 0,3; 0,4 va 0,1 ga teng. Ishlab chiqaruvchi A, B va C iste'molchilar bilan aloqa qilib, shartnomada ko'rsatib o'tilgan nuqsonlar mos ravishda 10, 14 va 15 foizdan oshmasligi shart ekanligi ta'kidlab o'tilgan. Mabodo, nuqsonlar foizi ortib ketsa, har bir foiz uchun 1 million so'm jarima to'lanadi. Ammo nuqsonlarning foizini 1 birlikka kamaytirish uchun, ishlab chiqaruvchi qo'shimcha 600000 so'm sarflashi zarur. Qaysi iste'molchining boshqalarga nisbatan mahsulot olish imkoniyati katta?

2. 2-masaladagi 1.3-jadval quyidagi:

	θ_1	θ_2	θ_3
α_1	13	7	7
α_2	6	9	5
α_3	7	5	10

ko'rinishda bo'lganda yutuqning matematik kutilmasi: Laplas, minimaks (maksimin), Sevidj, Gurvits va Hodja-Lemann ($\gamma = 0.5$) kriteriyalarini qo'llab mos optimal strategiyalarni aniqlang.

2.2. Jadvalli o'yinlar mavzusiga doir

1. Quyidagi jadvalli o'yinlarda quyi va yuqori o'yin baholarini, sof optimal strategiyalarni, egar nuqtani (mavjud bo'lsa), optimal aralash strategiyalarni va o'yin bahosini toping:

$$1.1. \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}; 1.2. \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; 1.3. \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; 1.4. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.5. \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; \ 1.6. \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \ 1.7. \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Berilgan aralash strategiyalar va son

$$x = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)^T, \ y = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right), \ w = 1,4$$

quyidagi jadvalli o'yinning optimal strategiyalari va o'yin bahosi bo'ladimi?

$$\begin{pmatrix} 1,8 & 1 & 1 & 1 \\ 1,4 & 1,6 & 1,6 & 1,4 \\ 1 & 1 & 1 & 1,8 \end{pmatrix}.$$

3. Berilgan aralash strategiyalar va son

$$x = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)^T, \ y = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \ w = 6$$

quyidagi jadvalli o'yinning optimal strategiyalari va o'yin bahosi bo'ladimi?

$$\begin{pmatrix} 16 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 10 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Quyidagi jadvalli o'yinlar uchun, mos chiziqli dasturlash masalasi tuzilsin:

$$4.1. \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad 4.2. \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & -2 & 1 \\ -9 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Quyidagi jadvalli o'yinda ustun va satrlarning ustunligidan(afzalligidan) foydalanib o'yinchilarning optimal strategiyalarini aniqlang:

$$W = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ -4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Quyidagi 2×2 o'yinda

$$W = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

o'yinchilarning optimal strategiyalarini va o'yin bahosini aniqlang.

7. Quyidagi $2 \times n$ va $m \times 2$ o'yinlarni grafik usulda yechib, o'yinchilarning optimal strategiyalarini va o'yin baholarini toping:

$$7.1.\ W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad 7.2.\ W = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 10 \\ 4 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.3. Kooperativ o'yinlar mavzusiga doir

1. Quyidagi o'yinni $(0,1)$-shaklga keltiring:

$$v(1)=1, v(2)=2, v(3)=3, v(ij)=10, \{i,j\}\subset\{1,2,3\}, v(1,2,3)=15.$$

2. Quyidagi o'yinning Shepli vektori va n – yadrosi aniqlansin:

$$v(i)=0,\ i=1,2,3,4,\ v(i,j)=2,\ \{i,j\}\subset\{1,2,3,4\},$$

$$v(i,j,k)=3,\ \{i,j,k\}\subset\{1,2,3,4\},\ v(1,2,3,4)=4.$$

3. 1-da keltirilgan o'yinni $(-1,0)$-shaklga, 2-da keltirilgan o'yinni $(0,1)$-shaklga keltiring.

2.4. Cheksiz o'yin mavzusiga doir

1. $w(x,y)=(x-y)^2$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ – yutuqli funksiya uzluksiz. Ushbu o'yinni to'la yeching.

2. Quyidagi botiq – qavariq o'yinni yeching:

$$w(x,y)=4y^2-x^2-4xy+2x+2y,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$$

3. Vaqtni tanlash o'yinida $w(x,y)$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ funksiya quyidagicha bo'lgan holda yechilsin:

$$w(x,y)=\begin{cases} x-y-3xy, & x<y \\ 0, & x=y \\ x-y+3xy, & x>y \end{cases}$$

2.5. Bijadvalli o'yin mavzusiga doir

1. Quyidagi bijadvalli o'yinda o'yinchilarning afzal strategiyalarini aniqlang:

$$(A,B)=\begin{pmatrix} (8,1) & (7,5) & (0,4) \\ (2,4) & (3,5) & (0,3) \end{pmatrix}.$$

2. 11-misol uchun Nesh, Pareto, Sleyter ma'nosida muvozanat holatlarini toping.

3. Quyidagi bijadvalli o'yinda Pareto, Sleyter ma'nosida muvozanat holatlarini aniqlang:

$$(A,B)=\begin{pmatrix} (8,8) & (5,12) & (6,10) \\ (0,1) & (7,1) & (4,5) \end{pmatrix}.$$

4. Quyidagi bijadvalli o'yinda Pareto, Sleyter ma'nosida muvozanat holatlarini aniqlang:

$$(A,B)=\begin{pmatrix} (7,10) & (5,5) & (7,15) \\ (4,2) & (3,5) & (6,7) \end{pmatrix}.$$

III BOB.
DINAMIK DASTURLASH

"Dinamik dasturlash" so'z birikmasi 1940-yilda Amerikalik olim Robert Bellman tomonidan kiritilgan bo'lib, uning ma'nosi biror masalaning yechimini aniqlash, undan oldin kelgan masalalarni yechish orqali amalga oshirish jarayonini tavsiflashdan iboratdir. Bellmanning ushbu sohadagi xizmati shundan iborat bo'ldiki, u tomonidan yaratilgan "Bellman tenglamasi" dinamik dasturlashning markaziy natijasi bo'lib, u orqali optimallashtirish masalasini yechish rekursiv holatga keltirildi.

Shu o'rinda aytib o'tish lozimki, "Dinamik dasturlash" so'z birikmasidagi "dasturlash" so'zi haqiqiy "an'anaviy" dasturlash (kodni yozish)ga deyarli hech qanday aloqasi yo'q, ammo "optimallash" so'zining sinonimi bo'lgan "matematik dasturlash" da ma'noga ega. Shu sababli berilgan kontekstdagi "dasturlash" so'zining aniqroq ma'nosi-masalaning yechimini aniqlash uchun, harakatning optimal ketma-ketligini ifodalaydi. Masalan, televizor ko'rsatuvlari yoki radio eshitirishlari ketma-ketligi ham dastur deb ataladi. Bu yerda dastur so'zi joiz hodisalar ketma-ketligi ma'nosida tushuniladi.

Optimallik prinsipi 1953-yili R. Bellman tomonidan to'la shakllantirilgan: jarayon biror holatga qanday usul bilan kelishidan qat'i nazar, shu va keyingi holatlarda qabul qilinadigan yechimlar oxirgi holat uchun, aniqlangan optimal strategiyaga mos kelishi kerak.

Bunda optimallik prinsipi o'rinli bo'lishligining talabi, bu jarayonda qayta bog'liqsizlik bo'lishidir, ya'ni har bir holatda qabul qilinadigan yechim oldingi holatlardagi yechimlarga bog'liq bo'lmasligidir.

Demak, optimallik prinsipi tasdiqlaydiki, qayta bog'liqsizlik jarayonlarida biror holatda qabul qilingan optimal yechim, shu holatdan boshlangan jarayonning optimal davom etishini ta'minlaydi. Shu sababli, har bir holat uchun, topilgan optimal yechimlar yordamida berilgan masalaning mukammal yechimini aniqlash imkoni bo'ladi. Agar optimal trayektoriyani, geometrik ravishda, egri chiziq orqali ifodalasak, u holda ushbu egri chiziqning ixtiyoriy qismi, unga mos boshlang'ich va oxirgi holatlariga nisbatan optimal trayektoriya bo'ladi.

Dinamik dastur – ma'lum zaruriy xususiyatlarga ega bo'lgan masalalarda optimal yechimni aniqlab berish usuli hisoblanadi.

Dinamik dasturlashning asosiy g'oyasi juda sodda bo'lib, u berilgan masalani ayrim kichikroq masalalarga ajratish va ularning yechimlarini birlashtirish orqali bosh masalaning umumiy yechimini topishdan iboratdir. Ko'p hollarda, bu ayrim kichikroq masalalar bir xil xususiyatga ega bo'lishadi. Dinamik dasturlashning usuli shundan iboratki, har bir kichik masalani bir marta yechish va shu bilan hisoblashlar sonini kamaytirishdir. Agar qaytariladigan kichik masalalar soni eksponensial ko'rinishda katta bo'lsa, unda bu usuldan foydalanish maqsadga tezroq olib keladi.

Odatda, dinamik dasturlash usuli yordamida yechiladigan masala biror funksiyaning qiymatini hisoblashga olib keladi. U holda, unga mos bo'lgan kichikroq masalalarni yechish degani, berilgan funksiyaning qiymatini argumentlar soni kam bo'lganda topishdan iborat bo'ladi.

U holda savol tug'iladi: dinamik dasturlash usuliga asoslangan hisoblash algoritmi qanday quriladi? Bunda asosiy qadam, funksiyaning qiymatini turli kichikroq masalalarga mos bo'lgan funksiya qiymatlari bilan bog'liqlikni ta'minlab beruvchi rekurrent munosabatni o'rnatishdir. Unda, boshlang'ich – tayanch holatdagi javobni bilgan holda, kichikroq masalalarni yechish orqali, asosiy masalaning yechimini aniqlash mumkin bo'ladi. Masalan, $n!$ ($n > 1$) ni hisoblash talab etilsa, bunda boshlang'ich – tayanch holat $1! = 1$ yoki $0! = 1$ bo'ladi.

Dinamik dasturlash usuli bilan yechiladigan masalalarning asosiy belgisi, ularning additivligidir. Additiv bo'lmagan masalalar boshqa usullar orqali yechiladi.

Dinamik dasturlashning soddalashgan ta'rifidan kelib chiqadiki, uning usuli, albatta, global maksimumga olib keladigan maqsadli yo'naltirilgan ketma-ket variantlarni ko'rib chiqishdan iboratdir.

Dinamik dasturlash usulini qo'llash mumkin bo'lishligi uchun, masala quyidagi xususiyatlarga ega bo'lishi lozim.

1. Masala n – qadamli yechim qabul qilish jarayonini aks ettirishi kerak.

2. Masala ixtiyoriy sondagi qadam uchun, aniqlangan va bu songa bog'liq bo'lmagan tuzilishga ega bo'lishi kerak.

3. k – qadamli masala ko'rilayotganda, jarayonni tavsiflaydigan omillar to'plami berilgan bo'lishi kerak, ular yordamida parametrlarning optimal qiymatlari aniqlanadi. Ammo bu to'plam qadamlar soniga bog'liq bo'lmasligi zarur.

Dinamik dasturlashning klassik masalalari:

1. **Eng uzun umumiy ketma-ketlik ostini topish masalasi:** ikkita ketma-ketlik berilgan, eng uzun umumiy monoton ketma-ketlik osti topilsin;

2. **Eng uzun o'suvchi ketma-ketlik ostini qidirish masalasi:** berilgan ketma-ketlikdan eng uzun o'suvchi ketma-ketlik ajratib olinsin;

3. **Tahrir masalasi haqida (Levenshteyn masofasi):** berilgan ikki satrning biridan ikkinchisini hosil qilishda belgilarni o'chirish, almashtirish va ko'chishlarning eng kam sonini topish;

4. **Fibonachchi sonlarini hisoblash masalasi:** Fibonachchi sonlarini hisoblashning optimal algoritmini aniqlash;

5. **Matritsalarning ko'paytirish tartibini aniqlash masalasi:** $A_1, A_2, ..., A_n$ matritsalarning ko'paytirish jarayonidagi skalyar ko'paytirishlar sonini kamaytiruvchi ketma-ketlikni aniqlang;

6. **Trayektoriyalarni tanlash masalasi:** ikki punktni birlashtiruvchi va oraliq punktlardan o'tgan trayektoriyalar berilgan. Biror kriteriyaga nisbatan optimal bo'lgan trayektoriya aniqlansin;

7. **Ketma-ket yechim qabul qilish masalasi:** ma'lumotlarni kengayishi va aniqlanishiga asosan qabul qilingan yechim qayta ko'rib chiqiladi;

8. **Ishchi kuchidan foydalanish masalasi:** biror loyihani amalga oshirish davomida ishchilar soni ularni ishga yollash yoki ishdan bo'shatish orqali nazorat qilinadi. Ishga yollash ham, ishdan bo'shatish ham ma'lum miqdordagi qo'shimcha xarajatlarga bog'liq bo'lganligi sababli, loyihani bajarish davomida ishchilar sonini qanday yo'l bilan tartibga solish mumkin;

9. **Zaxirani boshqarish masalasi:** reja davri davomida ishlab chiqaruvchi korxona mahsulot ishlab chiqarish rejasini shunday tuzish lozimki, natijada mahsulotga bo'lgan talablar to'la qondirilib, umumiy ketgan xarajatlar minimal bo'lsin;

10. **Yuklash masalasi haqida:** turli qiymat va og'irlikka ega bo'lgan yetarlicha sondagi predmetlar ichidan shunday tanlashni amalga oshirish lozimki, natijada ularning umumiy og'irliklari biror berilgan sonli miqdordan oshib ketmagan holda, umumiy qiymati maksimum bo'lsin;

11. **Floyd – Uorshell algoritmi:** yo'nalishga ega bo'lgan sonli graf tugun nuqtalarini birlashtiruvchi eng qisqa masofa topilsin;

12. **Bellman – Ford algoritmi:** yo'nalishga ega bo'lgan sonli grafning berilgan ikki tugun nuqtalari orasidagi eng qisqa yo'l topilsin;

13. **Daraxt tugun nuqtalarining maksimal bog'liqsiz to'plami:** berilgan daraxtda hech qaysi ikkitasi bir-biri bilan bevosita bog'lanmagan tugun nuqtalaridan iborat bo'lgan maksimal to'plam topilsin;

14. **Jihozlarni almashtirish masalasi:** jihoz qanchalik uzoq ishlatilsa, unga xizmat ko'rsatish xarajatlari yuqori bo'lib, uning unumdorligi past bo'ladi. Shu sababli ma'lum vaqtdan so'ng uni yangisiga almashtirish maqsadga muvofiq bo'ladi. Shunday qilib jihozlarni almashtirish masalasi, ulardan foydalanishning optimal vaqt davrini aniqlashdan iborat bo'lib qoladi.

Ko'p hollarda ketma-ket yechim qabul qilishning optimal strategiyasini tanlash quyidagicha olib boriladi: vaqtga nisbatan, avval oxirgi yechim aniqlab olinadi, so'ng vaqtga teskari yurish bilan boshqa barcha, xususan, boshlang'ich yechimlar topiladi. Bu usulni qo'llashda, oxirgi yechimni tanlash hisobiga kelib chiqadigan barcha bo'lishi mumkin bo'lgan holatlarni aniqlashtirish kerak bo'ladi. Odatda, *"holat"* deb yechim qabul qilish sharoitiga aytiladi. Ko'rilayotgan tizimning kelgusi harakatini, qabul qilinadigan yechimni nazarga olgan holda imkon beruvchi tizimning tavsifiga – *tizimning holati* deb ataladi. Bunda, u yoki bu holat qanday ro'y bergani yoki avval qanday yechimlar qabul qilinganini aniqlashtirish shart emas. Bu esa har bir vaqt mobaynida faqat bitta yechim qabul qilish imkonini beradi. Ammo bu usulni yechim qabul qilish jarayonining barchasiga ham qo'llab bo'lmaydi. Dinamik dasturning usulini qo'llash shartlari: barcha yechimni baholaydigan funksiyaning additivligi va natijalarning o'tgan, avvalgi holatlarga bog'liq emasligidir.

Dinamik dasturlash masalasining matematik modelini qurishdagi asosiy bosqichlari:

1. Masalani qadamlarga (bosqichlarga) ajratish. Bunda ortiqcha hisob-kitoblarni bajarmaslik uchun, qadam juda ham mayda, qadamma-qadam optimallashtirish jarayonini murakkablashtirmaslik uchun, qadam juda ham yirik bo'lmasligi lozim.

2. Har bir qadamdan oldin, matematik modeli tuzilayotgan jarayonning holatini ifodalaydigan s ta o'zgaruvchini tanlash va unga nisbatan qo'yiladigan chegara (shart)larni aniqlashtirish. Bunday o'zgaruvchilar sifatida buyurtmachining maqsadini ifodalaydigan omillarni tanlash kerak, masalan, ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasida, bunday omil sifatida zaxira hajmini olish mumkin.

3. Har qadamda d_i, $i = 1, 2, ..., m$ yechimlar to'plami $D_i(s)$ va ularga qo'yiladigan chegara (shart)lar asosida joiz yechimlar sohasini.

4. Jarayon $i-$ qadamning s holatida turganda joiz d_i yechim qabul qilinganda keladigan naf $R_i(s, d_i)$ ni aniqlash.

5. Jarayon s holatda bo'lib joiz d_i yechim qabul qilinganda, boshqa s' holatga o'tish $s' = T_i(s, d_i)$ ni aniqlash, bu yerda $T_i(s, d_i)-$ o'tish funksiyasi.

6. Jarayon oxirgi $m-$ qadamdagi s holatda bo'lganda shartli optimal nafni aniqlash tenglamasi bo'lgan

$$f_m(s) = \max_{d_m \in D_m(s)} \{R_m(s, d_m)\}$$

ni hisoblash.

7. Dinamik dasturning asosiy funksional tenglamasi bo'lgan, jarayon $i-$ qadamning s holatida bo'lib, $i + 1$ holatdan boshlab

jarayonning oxirigacha optimal naf ma'lum bo'lganda, optimal nafni aniqlaydigan (Bellman tenglamasi)

$$f_i(s)=\max_{d_i\in D_i(s)}\{R_i(s,d_i)+f_{i+1}(T_i(s,d_i))\},\ i=m-1,m-2,...,1 \qquad (0.1)$$

munosabat tuzilsin.

Yuqoridagi (0.1) munosabatda $i+1-$ qadamdan oxirgi qadamgacha optimal nafni ifodalaydigan $f_{i+1}(s)$ funksiyaning argumenti s ning o'rniga $s' = T_i(s,d_i)$ qo'yiladi, chunki jarayon $i-$ qadamda qabul qilingan d_i yechimdan so'ng s' holatga o'tadi.

Dinamik usulni qo'llash modellarida, chiziqli modellarga nisbatan farqli o'laroq d_i o'zgaruvchilar va bu o'zgaruvchilar ta'siri ostida s holatlarning o'zgarishini ifodalaydigan munosabatlar kiritiladi. Shu sababli dinamik modellarning tuzilishi murakkab, bu tabiiy, chunki bu modellarda vaqt omili ham hisobga olingan bo'ladi.

1-§. Zaxirani boshqarish masalasi

Ilmiy-texnikaviy rivojlanish boshqarish sifatini oshirishda hisoblash texnikalaridan, matematik usullardan, boshqaruv nazariyalaridan, boshqarishni avtomatlashtirishdan foydalanish shart-sharoitlarini yaratib bermoqda. Bularning barchasi avtomatik boshqaruv sistemalarida aniq o'z tatbiqini topdi.

Bu yerda boshqaruv degani ma'lumotlar yig'ish, uni qayta ishlash va boshqaruv ma'lumotlarini aniqlash yordamida jarayon harakatini o'zgartirishdan iboratdir.

Boshqaruv sifatini oshirishning asosiy yo'llaridan biri, hisoblash texnikasi yordamida ishlab chiqarishni avtomatlashtirishdir.

Shunday masalalardan biri, biror mahsulot ishlab chiqaruvchi korxona tomonidan, mahsulotga bo'lgan talabni to'la qondirgan holda ishlab chiqarish va mahsulot zaxirasini saqlash xarajatlarini minimumlashtirishni amalga oshiruvchi ishlab chiqarish rejasini aniqlashdan iboratdir. Bu masala *zaxirani boshqarish masalasi* deb ataladi. Zaxirani boshqarish nazariyasi mahsulotga bo'lgan talab asosida zaxira hajmini aniqlab beradi.

Zaxirani boshqarish masalalarini yechishda dinamik dasturlash usuli muhim rol o'ynaydi. Bunda, zaxirani boshqarish modelini qo'llash natijasida quyidagi ikki savolga javob berilishi talab etiladi: 1) Qanday miqdordagi mahsulot ishlab chiqarilishi lozim? 2) Mahsulotni qaysi vaqtda ishlab chiqarish kerak?.

Bu yerda ko'p narsa talablarning xususiyatlariga bog'liq. Qaysiki, ular *determinik* (muqarrar ma'lum) yoki *ehtimollik* (taqsimot ehtimolligi berilgan) holda bo'lishlari mumkin. Bunda determinik talab ***statistik holda***, ya'ni vaqt davomida iste'mol intensivligi o'zgarmaydi yoki ***dinamik holda***, ya'ni talab oldindan ma'lum, ammo vaqtga bog'liq ravishda o'zgarib turadi, bo'lishi mumkin. O'z navbatida ehtimollik talabi statsionar, ya'ni talabning ehtimollik taqsimoti vaqtga bog'liq emas va statsionar bo'lmagan, ya'ni talabning ehtimollik taqsimoti vaqtga bog'liq ravishda o'zgaradi.

Haqiqatda, real holatda determinik statistik bo'lgan talab kam uchraydi va buni eng sodda hol deb hisoblash mumkin. Masalan, biror shaharning nonga bo'lgan talabi kundan kunga o'zgarsa ham, bu o'zgarish sezilarli bo'lmaganligi sababli, nonga bo'lgan talabni determinik statistik deb olish bilan, aslida, deyarli yo'qotish bo'lmaydi.

Zaxirani boshqarish modelining turini aniqlashda talabning qanday ekanligiga bog'liq bo'lsada, yana boshqa faktorlar ham borki, ularni hisobga olish muhim hisoblanadi. Bular, masalan:

1. Talabni o'z vaqtida qondirmaslik;

2. Zaxirani ta'minlash oniy vaqtda yoki ma'lum vaqt davomida olib borilishi mumkin;

3. Tayyorlanishi lozim bo'lgan mahsulotlarning assortimenti turlicha bo'lishligi.

Shu sababli universal bo'lgan modelni yaratish o'ta murakkab masala bo'lib, bunday model qurilgan taqdirda ham, undan analitik ko'rinishdagi yechimni ajratib olish, deyarli bajarib bo'lmaydigan ishdir.

Biz quyida ko'radigan "ishonchli ta'minotchi" nomli modelimiz ayrim zaxirani boshqarish masalalari uchun mos keladi. Ammo real holatdagi shartlarga mos kelishlik ehtimoli kam bo'lib, faqat u konkret zaxirani boshqarish masalalarini yechishning usullarini bayon qilish uchun keltirildi.

Bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonaning reja davri N ta oraliqdan iborat bo'lsin (masalan, reja davr – yil, oraliqlar – oylar). Lekin biror oraliqda ortib qolgan mahsulotdan keyingi oraliqlarda ham foydalanishga ruxsat berilgan bo'lib, faqat ularning saqlash xarajatlarini hisobga olish kerak bo'ladi. Lekin shu bilan birga har bir oraliqda mahsulotga nisbatan talab (ehtiyoj) mavjud bo'lib, ularning hajmi avvaldan ma'lum manfiymas butun sonlar bilan ifodalanadi: $E_1, E_2, ..., E_N$. Har bir oraliqdagi xarajat ikki qismdan iborat: ishlab chiqarish va saqlash xarajatlari.

Shu sababli har bir $t(\in \{1, 2, ..., N\})$ – oraliqda xarajat funksiya $X_t(M_t, z_t) = X_t(M_t) + X_t(z_t)$ ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $M_t - t-$ oraliqda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi, $z_t - t-$ oraliqning oxirida qolgan(keyingi $t+1$ oraliq uchun, zaxira) mahsulot hajmi; $X_t(M_t)$, $X_t(z_t)$ funksiyalari mos ravishda M_t mahsulot miqdorini ishlab chikarish va z_t zaxirani saqlash xarajatlarini bildiradi. U holda tushunarliki, umumiy xarajat miqdori quyidagiga teng bo'ladi.

Maqsad funksiyaning ko'rinishi quyidagicha:

$$\sum_{t=1}^{N} X_t(M_t, z_t),$$

Ushbu masalada quyidagi farazlar qabul qilingan:

1. Ishlab chiqarish hajmi M_t lar butun sonlardan iborat:

$$M_t = 0, 1, ... \ (t = 1, 2, ..., N);$$

2. Reja davrining oxirida zaxira qolmasligi maqsadga muvofiq, ya'ni: $z_N = 0$;

3. Talab (ehtiyoj) o'z vaqtida va to'la qondirilishi shart: (t oraliqning oxiridagi zaxira)=(t oraliqning boshidagi zaxira)+(ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi)–(t oraliqdagi talab). Buni yuqorida kiritilgan belgilashlardan foydalanib quyidagi tenglik ko'rinishda yozish mumkin:

$$z_t = z_{t-1} + M_t - E_t \tag{1.1}$$

yoki

$$z_{t-1} + M_t - z_t = E_t \ (t = 1, 2, ..., N),$$

bu yerda z_0 – reja davrining boshida bo'lgan zaxira miqdori.

Shu yerda shuni ta'kidlab o'tamizki, biror oraliqning boshlanishidagi mahsulot miqdori avvalgi oraliqdan saqlab qolingan zaxira mahsulot miqdoriga tengdir.

Masalaning dinamik qo'yilishi

Ma'lumki, berilgan masalani dinamik usul bilan yechish ikki qadamdan iborat bo'lib, birinchi qadam jarayonning oxiridan boshiga kelish orqali o'zgaruvchilarning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari ichidan maqsad funksiyaga minimum beruvchilari va ularga mos maqsad funksiyaning qiymati aniqlansa, ikkinchi qadamda jarayonning boshidan oxiriga qarab yurish orqali, birinchi qadamda aniqlangan qiymatlar yordamida optimal yechim topiladi.

Shu sababli hisoblarni osonlashtirish maqsadida zaxirani boshqarish masalasida quyidagi, yangi belgilashlarni kiritamiz. n bilan reja davri oraliqlarining teskari raqamlanishini olamiz.

Masalan, $n = 1$ oxirgi oraliqni , $n = N$ esa birinchi oraliqni bildiradi.

e_n – reja davrining oxiridan hisoblaganda n – oraliqdagi talab miqdorini bildirsin;

$x_n(m, j)$ – reja davrining oxiridan hisoblaganda n – oraliqda m miqdordagi mahsulot ishlab chiqarish va shu oraliqning oxiridagi j miqdordagi zaxirani saqlash bilan bog'liq bo'lgan xarajatni bildirsin.

Ushbu belgilashlar va (1.1) tenglik yordamida ixtiyoriy n – oraliq uchun, quyidagi munosabatni hosil qilamiz: $j = z + m - e_n$, bu yerda z, n – oraliqning boshlanishidagi mahsulot miqdorini bildiradi.

Demak, faqat n – oraliqning o'zidagi xarajat $x_n(m, z + m - e_n)$ funksiya qiymati bilan aniqlanar ekan.

Masalaning qo'yilishiga asosan n – oraliqdagi talabni to'la qondirish uchun, mavjud $m + z$ mahsulot miqdori talabdan kichik bo'lmasligi lozim, ya'ni: $m + z \geq e_n$. Shunga o'xshash n – oraliqdagi mavjud mahsulot miqdori $m + z$ qolgan talablar yig'indisidan oshib ketmasligi kerak, ya'ni: $m + z \leq e_1 + ... + e_n$, aks holda $z_N = 0$ sharti bajarilmaydi.

Dinamik dasturlash usuli uchun, muhim bo'lgan quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$f_n(z)$ – n - oraliqning boshlida zaxira miqdori z ga teng bo'lganda, qolgan n ta oraliqdagi umumiy minimal xarajat;

$m_n(z)$ – $f_n(z)$ xarajatga ega bo'lishlik uchun n - oraliqda ishlab chiqarilgan mahsulat miqdori.

Ko'rilayotgan masalada 2-shart ($z_N = 0$) bajarilgan bo'lishi kerak. shu sababli

$$f_0(0) = 0 (n = 0),$$

chunki reja davridan so'ng mahsulot ishlab chiqarilmaydi, demak, hech qanday xarajat qilinmaydi.

Keyin $n = 1$ ga o'tiladi. Oxirgi oraliqning boshida zaxira miqdori z ixtiyoriy manfiymas butun son bo'lib, e_1 dan oshib ketmasligi lozim. (1.1) tenglik yordamida, quyidagini hosil qilamiz:

$$0 = z + m - e_1$$

bundan $m_1(z)$ yagona ravishda aniqlanadi: $m_1(z) = e_1 - z$. Demak, belgilashga asosan:

$$f_1(z) = x_1(e_1 - z, 0) \tag{1.2}$$

bu yerda $z = 0, 1, ..., e_1$ qiymatlarini qabul qiladi (agar boshqa chegara bo'lmasa). Shunday qilib (1.2)-yordamida

$$f_1(0),\ f_2(1), ..., f_1(e_1) \tag{1.3}$$

aniqlanadi.

$n = 2$ ga o'tiladi. Agar boshlang'ich zaxira miqdori z bo'lib, ikkinchi oraliqda m miqdorda mahsulot ishlab chiqarilgan bo'lsa, oxirgi ikki oraliqda ketgan umumiy xarajat quyidagi:

$$x_2(m, z + m - e_2) + f_1(z + m - e_2) \tag{1.4}$$

yig'indiga teng bo'ladi. Bu yerda boshlang'ich zaxira $z = 0, 1, ..., e_1 + e_2$ qiymatlarni qabul qiladi. Ammo e_2 talabni to'la qondirish uchun, ishlab chiqarish lozim bo'lgan m mahsulot miqdori $e_2 - z$ dan kam bo'lmasligi, va $z_N = 0$ bo'lishligi uchun, $e_1 + e_2 - z$ dan oshib ketmasligi kerak, ya'ni:

$$e_2 - z \leq m \leq e_1 + e_2 - z. \tag{1.5}$$

Oxirgi ikki oraliqdagi xarajat – (1.4) ni minimallashtiruvchi ishlab chiqarish mahsulot miqdori m optimal hisoblanadi, demak, u quyidagi munosabatdan aniqlanadi:

$$f_2(z) = \min_m [x_2(m, z + m - e_2) + f_1(z + m - e_2)], \tag{1.6}$$

bu yerda $z = 0, 1, ..., e_1 + e_2$ bo'lib, m (1.5) qo'sh tengsizlikni qanoatlantirishi lozim.

Bundan $f_2(z)$ ning barcha qiymatlarini topish bilan, navbatdagi, $f_3(z)$ uchun, tuzilgan munosabat yordamida, uning qiymatlari aniqlanadi. Ushbu jarayon davom ettirilib, oxiri $f_N(z_0)$ ning qiymati topiladi. Bu hisoblashning umumiy formulasi quyidagi ko'rinishdagi rekurrent formuladir:

$$f_n(z) = \min_m [x_n(m, z+m-e_n) + f_{n-1}(z+m-e_n)], \ n = 1, 2, ..., N, \quad (1.7)$$

bu yerda $z = 0, 1, ..., e_1 + ... + e_n$ bo'lib, kvadrat qavs ichidagi ifodaning minimumini topish $e_n - z \le m \le e_1 + ... + e_n - z$ shartni qanoatlantiruvchi barcha m lar bo'yicha olib boriladi.

Ko'rilayotgan masala uchun, boshlang'ich holat bo'lgan – zaxira hajmi z holatni to'la tavsiflagani sababli (1.7)-rekurrent formulada erkin o'zgaruvchi sifatida m ishtirok qiladi, chunki oraliqning oxirida qoladigan zaxira mahsulot miqdori $z + m - e_n$ ga tengdir.

Yana bir bor ta'kidlab o'tamizki, (1.2), (1.3) va (1.6) yordamida $f_1(0), f_1(1), ..., f_1(e_1)$; $f_2(0), f_2(1), ..., f_2(e_1 + e_2)$ larning barchasini qiymatlari osongina aniqlanadi. Shundan so'ng (1.7)-rekurrent formula yordamida ketma-ket hisoblashlar orqali $f_{N-1}(0)$, $f_{N-1}(1), ...,$ $f_{N-1}(e_1 + ... + e_{N-1})$ lar ning qiymatlari aniqlanadi. Va oxirida $f_N(z_0)$ ning qiymati topiladi.

Shundan so'ng $f_N(z_0)$ qiymatni beruvchi m ning qiymati $-m_N(z_0)$ aniqlanadi, bu birinchi oraliqda ishlab chiqarish zarur bo'lgan mahsulot hajmini beradi. Ikkinchi oraliqning boshida zaxira miqdori $z_1 = z_0 + m_N(z_0) - e_N$ bo'lganligi sababli $f_{N-1}(z_1)$ qiymatni beruvchi $m_{N-1}(z_1)$ ikkinchi oraliqda ishlab chiqarilishi lozim bo'lgan mahsulot hajmini aniqlaydi va hokazo davom ettirilib barcha oraliqlarda ishlab chiqarilishi zarur bo'lgan mahsulot hajmlari aniqlanadi. Shu yo'l bilan hosil qilingan ishlab chiqarish rejasi *optimal rejani* tashkil qiladi va bunda eng kam xarajat

$f_N(z_0)$ ga teng bo'ladi. Bu yerda keltirilgan hisob-kitoblarni quyidagi sonli misolda ko'rib chiqamiz.

Sonli misol

Bir xil turda mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonaning reja davri $N = 4$ ta oraliqdan iborat bo'lsin. Lekin biror oraliqda ishlab chiqarilgan mahsulotni keyingi oraliqlarda ham foydalanish imkoni bor bo'lib, faqat ularni saqlash xarajatlarini hisobga olish kerak bo'ladi. Lekin shu bilan birga har bir oraliqda mahsulotga nisbatan talab $E_1 = 2$, $E_2 = 3$, $E_3 = 2$, $E_4 = 4$ bo'lib, ular avvaldan ma'lum sonlar bo'lsin. Har bir oraliqdagi xarajat ikki qismdan iborat: ishlab chiqarish va saqlash xarajatlari. Uning ko'rinishi har bir oraliq uchun, mos ravishda quyidagicha aniqlangan bo'lsin:

$$
\begin{aligned}
X_1(m_1, z_1) &= X_1(m_1) + z_1, \;\; X_2(m_2, z_2) = X_2(m_2) + 2z_2, \\
X_3(m_3, z_3) &= X_3(m_3) + z_3, \;\; X_4(m_4, z_4) = X_4(m_4) + 2z_4,
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

bu yerda $X_i(m_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$-funksiyaning qiymati i-oraliqda m_i mahsulot miqdorini ishlab chiqarish bilan bog'liq bo'lgan xarajatni bildiradi. Yana shu narsa ma'lumki, korxonaning quvvatidan kelib chiqqan holda 1 va 2-oraliqlarda ko'pi bilan 3 ta, 3-oraliqda ko'pi bilan 2 ta. 4-oraliqda ko'pi bilan 4 ta mahsulot ishlab chiqarish mumkin. Shundan kelib chiqqan holda $X_i(m_i)$ funksiyalarning qiymatlari quyidagicha berilgan bo'lsin:

$$
\begin{aligned}
&X_1(0) = 0, \; X_1(1) = 10, \; X_1(2) = 12, \; X_1(3) = 15, \\
&X_2(0) = 0, \; X_2(1) = 8, \; X_2(2) = 11, \; X_2(3) = 14, \\
&X_3(0) = 0, \; X_3(1) = 12, \; X_3(2) = 14, \\
&X_4(0) = 0, \; X_4(1) = 7, \; X_4(2) = 9, \; X_4(3) = 10, \; X_4(4) = 12.
\end{aligned}
$$

Bundan tashqari, faraz etaylik, 3 tadan ortiq zaxirani saqlash imkoniyati yo'q, ya'ni $0 \leq z \leq 3$.

Bizga ma'lumki, dinamik dasturlash usulining birinchi qadamiga asosan, hisoblash reja davrining oxiridan boshlanadi. Shu sababli e_i larning qiymatlari quyidagicha aniqlanadi: $e_1 = 4$, $e_2 = 2$, $e_3 = 3$, $e_4 = 2$. Ammo, $z_4 = 0$ bo'lganligi uchun $z_4 = z + m - e_1 = 0$ bo'ladi, bu yerda z avvalgi oraliq ($n = 2$) dan qolgan zaxira miqdori, m esa oxirgi

1.1-jadval

z	$m_1(z)$	$f_1(z)$
0	4	12
1	3	10
2	2	9
3	1	7

($n = 1$) oraliqda ishlab chiqarilishi mo'ljallanayotgan mahsulot hajmi, bunga (1.2) va (1.8) tengliklarga asosan $f_1(z) = x_1(m, 0) = x_1(e_1 - z)$, yoki $f_1(z) = x_1(4 - z)$, bu yerda $z = 0, 1, 2, 3$ qiymatlarni qabul qiladi. Demak, oxirgi oraliqda ishlab chiqarish lozim bo'lgan mahsulot hajmi m yagona ravishda aniqlanar ekan: $m_1(z) = 4 - z$, $z = 0, 1, 2, 3$. $f_1(z)$ va $m_1(z)$ larning qiymatlarini 1.1-jadval ko'rinishda beramiz.

Endi $n = 2$, uchinchi oraliqqa o'tamiz. $e_2 = 2$ bo'lganligi sababli $z + m - 2$ uchinchi oraliqning oxirida qolgan mahsulot miqdorini bildiradi. Shartga asosan $0 \leq z + m - 2 \leq 3$ va $0 \leq z + m - 2 \leq 4$ bo'lishi kerak. Bundan ikkalasi uchun, ham umumiy bo'lgan $2 - z \leq m \leq 5 - z$ qo'sh tengsizlikni hosil qilamiz. Ammo uchinchi oraliq uchun, $m = 0, 1, 2$ bo'lganliga sababli

$$2 - z \leq m \leq \min(2, 5 - z) \tag{1.9}$$

bo'ladi.

$f_2(z)$ ni aniqlash formulasi (1.6) ga asosan,

$$f_2(z) = \min_m [x_2(m) + (z + m - 2) + f_1(z + m - 2)]$$

kelib chiqadi.

z ning har bir qiymatida kvadrat qavs ichidagi ifodaning (1.9)-shartni qanoatlantiruvchi m bo'yicha qiymatini hisoblaymiz. Keyin ular asosida $f_2(z)$ va $m_2(z)$ larning qiymatlarini aniqlaymiz. Bularning barchasini quyidagi jadval ko'rinishda berish qulaydir.

1.2-jadval

$z \diagdown m$	0	1	2	$m_2(z)$	$f_3(z)$
0	–	–	$14+0+12^*$	2	26
1	–	$12+0+12^*$	$14+1+10$	1	24
2	$0+0+12^*$	$12+1+10$	$14+2+9$	0	12
3	$0+1+10^*$	$12+2+9$	$14+3+7$	0	11

Endi $n = 3$, ya'ni ikkinchi oraliq ko'riladi. (1.8) va (1.7) ga asosan

$$f_3(z) = \min_m [x_3(m) + 2(z+m-3) + f_2(z+m-3)] \qquad (1.10)$$

bo'ladi, bu yerda $z = 0, 1, 2, 3$, $0 \leq z+m-3 \leq 3$ va $m \leq 3$. Bulardan kelib chiqadiki, (1.10) ga minimum beruvchi m quyidagi qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$3 - z \leq m \leq \min(3, 6-z). \qquad (1.11)$$

$z = 0, 1, 2, 3$ ning har bir qiymatida (1.11) shartni qanoatlantiruvchi m bo'yicha (1.10) dagi kvadrat qavs ichidagi ifoda $x_3(m) + 2(z+m-3) + f_2(z+m-3)$ qiymatini hisoblab, so'ng undan keyin minimumni aniqlaymiz. Bunda quyidagi jadvaldan foydalanamiz.

1.3-jadval

$z \diagdown m$	0	1	2	3	$m_3(z)$	$f_3(z)$
0	–	–	–	$14+0+26^*$	3	40
1	–	–	$11+0+26^*$	$14+2+24$	2	37
2	–	$8+0+26$	$11+2+24$	$14+4+12^*$	3	30
3	$0+0+26^*$	$8+2+24$	$11+4+12$	$14+6+11$	0	26

Endi $n = 4$, ya'ni birinchi oraliq ko'riladi. (1.8) va (1.7) lardan quyidagi munosabatni olamiz:

$$f_4(z) = \min_m [x_4(m) + (z + m - 2) + f_3(z + m - 2)], \qquad (1.12)$$

ammo $0 \leq z + m - 2 \leq 3$ va $m \leq 3$. Bulardan kelib chiqadiki (1.12) ga minimum beruvchi m quyidagi qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$2 - z \leq m \leq \min(3, 5 - z). \qquad (1.13)$$

$z = 0, 1, 2, 3$ ning har bir qiymatida (1.13)-shartni qanoatlantiruvchi m bo'yicha (1.12) dagi kvadrat qavs ichidagi ifoda $x_4(m) + (z + m - 2) + f_3(z + m - 2)$ qiymatini hisoblab, so'ng undan keyin minimumni aniqlaymiz. Bunda quyidagi jadvaldan foydalanamiz.

1.4-jadval

$z \backslash m$	0	1	2	3	$m_4(z)$	$f_4(z)$
0	–	–	$12+0+40^*$	$15+1+37$	2	52
1	–	$10+0+40$	$12+1+37$	$15+2+30^*$	3	47
2	$0+0+40^*$	$10+1+37$	$12+2+30$	$15+3+26$	0	40
3	$0+1+37^*$	$10+2+30$	$12+3+26$	–	0	38

Endi (1.1)–(1.4)-jadvallarning oxirgi ikki ustunidan foydalanib, quyidagi natijaviy jadvalni tuzamiz:

1.5-jadval

z	$n=1$		$n=2$		$n=3$		$n=4$	
	$m_1(z)$	$f_1(z)$	$m_2(z)$	$f_2(z)$	$m_3(z)$	$f_3(z)$	$m_4(z)$	$f_4(z)$
0	4	12	2	26	3	40	2	52
1	3	10	1	24	2	37	3	47
2	2	9	0	12	3	30	0	40
3	1	7	0	11	0	26	0	38

Demak, dinamik dasturlashning birinchi bosqichi ko'rilayotgan jarayonni oxiridan boshiga qarab hisob-kitobni amalga oshirish, maqsad funksiyaning qiymatlarini barcha mumkin holatlar uchun, aniqlab chiqish ekan. Bunda ikki element, albatta, yonma-yon turishi zarur, birinchisi yechim, ikkinchisi esa mos kelgan maqsad funksiyaning qiymatini bildiradi. Ikkinchi bosqichda topilgan juftliklar yordamida optimal reja (yechim) aniqlanadi.

Bizning misolda har bir holat, bu zaxira miqdori, yechim esa shu oraliqda mumkin bo'lgan holatga mos kelgan ishlab chiqarilgan mahsulot miqdoridir.

Oxirgi natijaviy 1.5-jadvalning birinchi ustunida zaxira miqdorlari, boshqa ustunlarda har bir oraliqdagi optimal yechimlar va ularga mos kelgan maqsad funksiyaning qiymatlari berilgan. Yuqori satrda oraliqlarning tartib raqamlari ko'rsatilgan.

Faraz qilaylik, oldingi reja davridan $z_0 = 0$ ta mahsulot qolgan bo'lsin. U holda, $n = 4$ oxirgi ustundan $m_4(0) = 2$ ekanligini aniqlab, $n = 3$ ustunda $0 + 2 - 2 = 0$, yana 0-satrni qaraymiz, u $m_3(0) = 3$ ga teng ekanligini hisobga olib $n = 2$ ustundan $0 + 3 - 3 = 0-$ satrni qarasak $m_2(0) = 2$ ekanligi kelib chiqadi, bundan $0 + 2 - 2 = 0$. Demak, $n = 1$ ustundan 0-satrda $m_1(0) = 4$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib optimal ishlab chiqarish rejasi quyidagicha ekan: 1-oraliqda $m = 2$, 2-oraliqda $m = 3$, 3-oraliqda $m = 2$, 4-oraliqda $m = 4$. Shunda ketadigan eng kam xarajat $f_4(0) = 52$ ga teng, haqiqatan, 1-oraliq xarajati – 12; 2-oraliq xarajati – 14; 3-oraliq xarajati – 14; 4-oraliq xarajati – 12. Shunda, bevosita hisoblash mumkinki, ketgan umumiy xarajat 52 ga teng bo'ladi.

Faraz qilaylik, oldingi reja davridan $z_0 = 3$ ta mahsulot qolgan bo'lsin. U holda, $n = 4$ oxirgi ustundan $m_4(0) = 0$ ekanligini aniqlab, $n = 3$ ustunda $3 + 0 - 2 = 1$, yana 1-satrni qaraymiz, u $m_3(1) = 2$ ga teng ekanligini hisobga olib $n = 2$ ustundan $1 + 2 - 3 = 0$-satrni qarasak $m_2(0) = 2$ ekanligi kelib chiqadi, bundan $0+2-2 = 0$. Demak, $n = 1$ ustundan 0-satrda $m_1(0) = 4$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib optimal ishlab chiqarish rejasi quyidagicha ekan: 1-oraliqda $m = 0$, 2-oraliqda $m = 2$, 3-oraliqda $m = 2$, 4-oraliqda $m = 4$. Shunda ketadigan eng kam xarajat $f_4(3) = 38$ ga teng, haqiqatan, 1-oraliq xarajati – 0; 2-oraliq xarajati – 14; 3-oraliq xarajati – 14; 4-oraliq xarajati – 12. Shunda, bevosita hisoblash mumkinki, ketgan umumiy xarajat 38 ga teng bo'ladi.

z	$n=1$		$n=2$		$n=3$		$n=4$		*min*
	M_1	*talab*	M_2	*talab*	M_3	*talab*	M_4	*talab*	*xaraj.*
0	2	2	3	3	2	2	4	4	52
1	3		3		0		4		47
2	0		3		2		4		40
3	0		2		2		4		38

Bularning barchasini 1.6-jadval orqali ko'rsatish mumkin.

Xarajat funksiyasi qavariq bo'lgandad zaxirani boshqarish masalasi

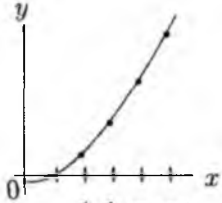
Yuqorida ko'rib o'tdikki, zaxirani boshqarish masalasida xarajat funksiya (maqsad funksiya) quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $X_t(M_t) + X_t(z_t)$, bu yerda $X_t(M_t) \geq 0$, $X_t(0) = 0$; $X_t(z_t) \geq 0$, $X_t(0) = 0$ bo'lib, $X_t(M_t)$ – ishlab chiqarish, $X_t(z_t)$ – zaxirani saqlash xarajatlarini bildiradi.

Bundan tashqari, $z_{t-1} + M_t - z_t = E_t$ muvozanat tenglamasi bajarilib, qo'shimcha $z_0 = 0$ va $E_t \geq 0$ shartlari barcha $t = 1, 2, ...$ larda bajarilishi talab etiladi.

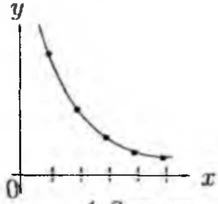
Ma'lum bo'lishicha $X_t(M_t)$, $X_t(z_t)$ lardan qo'shimcha shartlar talab qilish hisobiga, masalaning yechimini topish usulini yengillashtirish mumkin ekan. Bunday shartlardan biri, ularning qavariq bo'lishligidir.

Ta'rif: Aniqlanish sohasi butun sonlardan iborat bo'lgan $g(x)$ funksiya uchun, $g(x+1) - g(x) \geq g(x) - g(x-1)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u *qavariq* deyiladi.

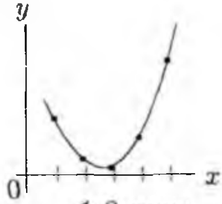
Grafiklari quyidagicha bo'lgan funksiyalar qavariq funksiyalarga misol bo'la oladi:



1.1-rasm



1.2-rasm



1.3-rasm

Faraz qilaylik, $X_t(M_t)$ – ishlab chiqarish va $X_t(z_t)$ – saqlash xarajat funksiyalari qavariq bo'lishsin. U holda quyidagi uchta qadamdan iborat bo'lgan soddaroq algoritm orqali optimal rejani aniqlash mumkin.

1. Talabi qondirilmagan eng kichik raqamli oraliq p bo'lsin. $1, 2, ..., p$ oraliqlarning har birida navbat bilan ishlab chiqarilgan mahsulotlarni bittaga oshirib p ta variant hosil qilamiz.

2. Bu p ta variantlar ichidan eng kam xarajatlisini tanlab olamiz. Mabodo, bunday variantlar bir nechta bo'lsa, u holda aniqlik uchun, ularning eng so'nggisi olinadi.

3. Bu bilan, har bir variantda, p-oraliqdagi talab bittaga qondiriladi. Agar barcha oraliqdagi talablar to'la qondirilsa hisoblash to'xtatiladi va masala yechilgan hisoblanadi, aks holda 1-qadamga o'tiladi.

Bu algoritm, albatta, yuqoridagi dinamik dasturlash usuliga qaraganda sodda usuldir.

2-§. Kuchlanishni taqsimlash modeli

Kuchlanishni taqsimlash modelini o'zida aks ettirgan quyidagi e'tiborli misolni ko'rib chiqamiz. Korxona zaxiradagi (to'planib qolgan) N dona mahsulotini s ta savdo shaxobchasiga taqsimlash kerak bo'lsin. Agar j – savdo shaxobchasiga y_j dona mahsulot jo'natilsa, bundan keladigan foyda $R_j(y_j)$ so'mni tashkil etsin. Yana shu narsa ma'lumki, hamma mahsulotni bitta savdo shaxobchasiga jo'natish maqsadga muvofiq emas. Bu masalaning modelini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\sum_{j=1}^{s} R_j(y_j) \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{s} y_j = N,$$
$$y_j = 0, 1, \ldots - \text{ixtiyoriy } j \text{ da.}$$

Dinamik dasturlash usulini qo'llash uchun, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$g_j(n) - n$ ta mahsulotni $1, 2, \ldots, j$ shaxobchalarga optimal qilib tarqatganda kelgan foydani bildirsin.

$y_j(n) - g_j(n)$ foyda olish uchun, $j-$ savdo shaxobchaga jo'natilgan mahsulot miqdori bo'lsin. U holda dinamik dasturlashning rekurrent formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$g_j(n) = \max_{y_j}[R_j(y_j) + g_{j-1}(n - y_j)], \; j = 1, \ldots, s,$$
$$g_0(n) = 0; \; n = 0, 1, \ldots, N, \; y_j \le n.$$

Misollarda hisoblash jarayoni quyidagicha olib boriladi: avval $g_1(0), g_1(1), \ldots, g_1(N)$ lar hisoblanadi, keyin $g_2(0), g_2(1), \ldots, g_2(N), \ldots$ oxirida $g_s(N)$, so'ng boshidan oxiriga qarab hisoblash olib boriladi va y_j larning qiymatlari aniqlanadi.

Bu ko'rilgan model kuchlanishni taqsimlash modelining xususiy holi bo'lib, umumiysi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^{s} R_j(y_j) \to \max$$
$$\sum_{j=1}^{s} H_j(y_j) = N, \; y_j = 0, 1, \ldots .$$

Bu yerda faraz qilinadiki, $H_j(y_j)$ lar kamaymaydigan funksiyalar va $H_j(0) = 0$. Rekurrent formula quyidagicha bo'ladi:

$$g_j(n) = \max_{y_j}[R_j(y_j) + g_{j-1}(n - H_j(y_j))], \; j = 1, \ldots, s, \; g_0(n) = 0;$$

$$n = 0, 1, ..., N,\ y_j : H_j(y_j) \le n,\ \ y_j - butun\, son.$$

Ikki chegarali kuchlanishni taqsimlash modeli

Avtomobil ishlab chiqaruvchi firma yangi tipdagi mahsulotini reklama qilish maqsadida N so'm pul ajratgan bo'lsin. Reklama qilish mintaqasida s ta radiostansiya joylashgan bo'lib, j – radiostansiyaga y_j so'm jo'natilgan bo'lsa, undan keladigan sof foyda $R_j(y_j)$ so'mni tashkil qiladi. Shu bilan birga umumiy reklamalar soni M dan oshib ketmasligi kerak. Agar j – radiostansiyaga y_j so'm jo'natilgan bo'lsa, reklamalar soni $K_j(y_j)$ ni tashkil qiladi. Demak, modelning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^{s} R_j(y_j) \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{s} y_j \le N,$$
$$\sum_{j=1}^{s} K_j(y_j) \le M,$$

bu yerda faraz qilinadiki, N, M va $K_j(y_j)$ lar manfiy bo'lmagan butun sonlarni qabul qiladi. U holda mos rekurrent formula quyidagicha ko'rinishga keladi:

$$g_j(n, m) = \max_{y_j}[R_j(y_j) + g_{j-1}(n - y_j; m - K_j(y_j))],\ j = 1, ..., s,$$
$$g_0(0, m) = g_0(n, 0) = 0,\ n = 0, 1, ..., N,\ m = 0, 1, ..., M,\ y_j \le n,$$
$$K_j(y_j) \le m.$$

Ulkan qurilish firmasi M miqdordagi kapitalini s ta qurilish obyektlariga sarflamoqchi. j – qurilish obyektiga K_j so'm kerak bo'lib, undan keyinchalik keladigan foyda R_j so'mni tashkil qiladi. Har bir qurilish obyekti muhim hisoblanib, uni qurish yoki qurmaslikni hal etish kerak bo'ladi. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$y_j = \begin{cases} 0, & \text{j - obyekt qurilmasin} \\ 1, & \text{j - obyekt qurilsin.} \end{cases}$$

U holda qo'yilgan masalaning matematik modeli quyidagicha yoziladi:

$$\sum_{j=1}^{s} R_j y_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{s} y_j \leq N,$$

$$\sum_{j=1}^{s} K_j y_j \leq M.$$

Dinamik dasturlashning rekurrent formulasi esa quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$g_j(n, m) = \max_{y_j}[R_j y_j + g_{j-1}(n - y_j; m - K_j y_j)]$$

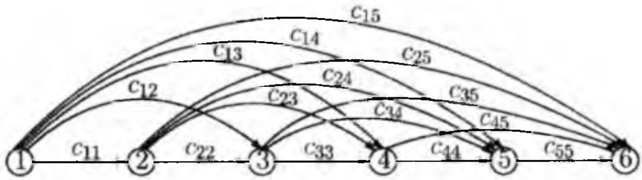
bu yerda $g_j(n, m) - 1, 2, ..., j$ variantlardan n tasi tanlab olingandagi m so'mni sarflashdan kelgan maksimal foyda.

3-§. Jihozni almashtirish va ta'mirlash modeli

Qimmat turuvchi jihozdan foydalanish reja davri $N - 1$ ta oraliqqa bo'lingan bo'lib, jihozni har bir oraliq boshida yangisiga almashtirish yoki ta'mirlash mumkin. Bu ikki yechimning birini tanlash yordamida eng kam xarajatni ta'minlaydigan strategiyani aniqlash talab etiladi. Buning uchun, quyidagi belgilashlarni kiritamiz: c_{ij} – bilan $i, i + 1, ..., j$ oraliqlarda ketgan xarajatlar, masalan: ijara haqqi, ta'mirlash va jihozga xizmat ko'rsatish, f_n – bilan n – oraliqning boshida yangi jihoz olinganda $n, n + 1, ..., N - 1$ oraliqlardagi umumiy minimal xarajat belgilangan bo'lsin. U holda quyidagi rekurrent formulaga ega bo‘lamiz:

$$f_n = \min_{k=n+1,\dots,N} [c_{nk-1} + f_k], \ n = N-1, N-2, \dots, 1, \ f_N = 0.$$

Quyida ushbu masala $N = 6$ da to‘r orqali aks ettirilgan (3.1-rasm). Har bir tugun nuqta oraliqning boshlanishini, yoki oxirini tasvirlaydi, qaysiki jihozni almashtirish imkoni mavjud. To‘rda sikl bo‘lmaganligi sababli, u *atsiklik to‘r* deb ataladi. Atsiklik to‘rlarda qisqa masofani aniqlashning sodda algoritmi ma’lum.



3.1-rasm

Bu masalaga umumiyroq yondashish ham mumkin. p_{tn} bilan $n-$ oraliqning boshida t ta oraliq davomida ishlatilgan jihozni yangisiga almashtirilganda keladigan sof foyda; k_{nt} bilan $n-$ oraliqning oxirida t ta oraliq davomida ishlatilgan jihozni $n-$ oraliqdagi ishlatish xarajati; $f_n(t)$ bilan esa $n-$ oraliqning boshida t ta oraliq davomida ishlatilgan jihoz bo‘lgan holda $n, n+1, \dots, N-1$ oraliqlarda ketadigan minimal xarajat belgilangan bo‘lsin.

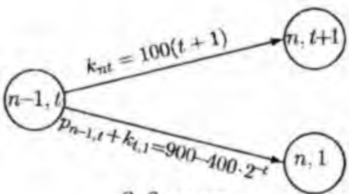
$n-$ oraliqning boshida t ta oraliq davomida ishlatilgan jihoz almashtirilmagan bo‘lsin, u holda $f_n(t) = k_{nt+1} + f_{n+1}(t+1)$ bo‘ladi, almashtirilgan bo‘lsa $f_n(t) = p_{tn} + k_{n1} + f_{n+1}(1)$ bo‘ladi. Demak, $f_n(t)$ ning aniqlanishiga asosan:

$$f_n(t) = \min[k_{nt} + 1 + f_{n+1}(t+1), \, p_{tn} + k_{n1} + f_{n+1}(1)],$$

$$n = N-1, N-2, \dots, 1, \ f_N(t) = 0.$$

Masala. Reja davri 5 yildan iborat bo‘lib, uning oxirida jihoz, albatta sotiladi. Har yilning boshlanishida ikki xil yechim qabul qilish mumkin: jihozni yangisiga almashtirish yoki ta'mirlash bilan undan foydalanishni davom ettirish. Yangi jihozning narxi $p_0 = 800$ shartli birlikka teng bo'lsin. Uni $t\,(1 \leq t \leq 5)$ yil ishlatgandan keyingi sotish bahosi $k(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$ ga teng. Demak, t yil ishlatilgan jihozni yangisiga almashtirish xarajati $p_{tn} = p_0 - k(t) = 800 - 800 \cdot 2^{-t}$ ga teng bo'lar ekan. t yil ishlatilgan jihozni yana bir yil ishlatish uchun, $100(t+1)$ – ta'mirlash xarajati talab etiladi, demak, ixtiyoriy n da: $k_{nt} = 100(t+1)$. Jihozni boshlang'ich sotib olish va reja davri oxirida sotish narxlarini hisobga olgan holda reja davridagi umumiy xarajatni minimumlashtiruvchi optimal strategiya aniqlansin. Boshqacha qilib aytganda umumiy harajatni minimumlashtirish nuqtayi nazardan eski jihozni yangisiga almashtirish lozim bo'lgan yillarni aniqlab berish talab etiladi.

Yechish. $(n-1, t)$ – bilan t yil ishlatilgan jihoz bo'lganda, n – yilning boshlanish holati belgilangan bo'lsin. Bunday holatda ikki yechimdan bittasi qabul qilinadi: yoki $p_{tn} + k_{n0}$ xarajat bilan eski jihozni yangisiga almashtirish, yoki k_{nt} xarajat sarflash bilan eski jihozni ta'mirlab, undan foydalanishni davom ettirish. Bunday vaziyat sxematik ko'rinishda quyidagi 3.2-rasmda ko'rsatilgan.



3.2-rasm

Qo'yilgan masalaning yechimini dinamik dasturlash usulini geometrik ko'rinishda tasvirlash orqali aniqlaymiz. Abssissa o'qi yillarni, ordinata o'qi jihozning ishlatish yilini bildirsin. Dinamik dasturlashning usuliga asosan avval hisoblash vaqtga nisbatan teskaridan olib boriladi. Ya'ni $n = 5$, bunda, shartga asosan

t yil ishlatilgan jihoz, albatta $k(t) = 800 \cdot 2^{-t}$ shartli birlikka sotiladi, ammo bu foydani bildiradi, uni xarajat ko'rinishda ifodalash uchun, teskari "minus" ishora bilan mos aylana ichiga yozib qo'yiladi.

Keyin $n = 4$ ga o'tiladi. Har bir holatda ikkita yechimdan biri tanlanadi, ya'ni jihozni yangisiga almashtirish, bunda xarajat $800 + 100 - 800 \cdot 2^{-t}$ bilan aniqlanadi. Bunga 3.3-rasmda pastga qarab yo'naltirilgan vektorlar mos keladi, mos xarajat vektorlarning ustki qismiga yozib qo'yilgan, ikkinchi yechim ta'mirlash orqali jihozni saqlab qolish, bunda ketgan xarajat $100(t + 1)$ ga teng bo'ladi, mos sonlar yuqoriga yo'nalgan mos vektorlarning ustki qismiga yozib qo'yilgan.

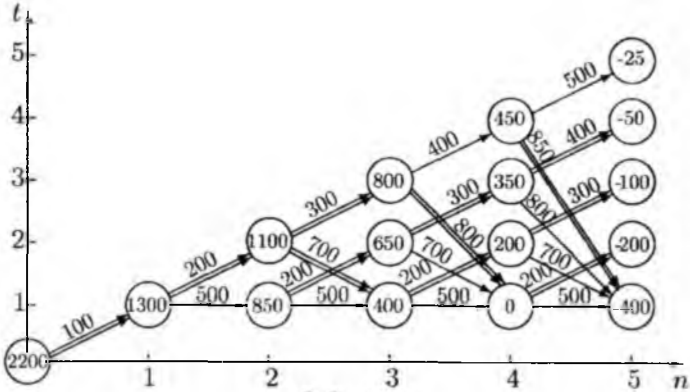
Endi 4-yilning boshidagi har bir holatga mos kelgan minimal umumiy xarajat, qabul qilingan yechimlarga mos xarajatlar bilan reja davrining oxirida sotish narxi ayrimasidan hosil bo'lgan sonlarning eng kichigiga teng bo'ladi. Bu minimal xarajat mos holatni ifodalaydigan aylana ichiga yozib qo'yilgan. Ushbu xarajatni aniqlaydigan yechim qo'sh vektor orqali belgilangan.

3-yilning boshlanishini tashkil etuvchi aylanalar ichiga va ulardan chiqqan vektorlarning ustiga, xuddi avvalgidek hisoblash bilan topilgan sonlar yozib qo'yilgan. Optimal yechimlarga mos kelgan vektorlar qo'sh vektorlar orqali berilgan. Bunda, shunga e'tibor berish lozimki, (2,2) holatda ikkala yechim bir xil minimal xarajatli natijaga olib keladi.

Shundan so'ng 2-yilning boshlanishini ifodalaydigan aylana ichiga minimal xarajat va shu xarajatga olib keluvchi yechimga mos qo'sh vektor ustiga bir yillik xarajat yozib qo'yiladi.

1-yilning boshlanishini ifodalaydigan aylana ichiga yangi jihozni yil davomida ta'mirlashga ketgan xarajat, sotib olish xarajati va 2-yilning boshidan boshlab ketgan minimal xarajatlar yig'indisi yozib qo'yilgan, bu 2200 soniga teng.

Oxirida dinamik dasturlash usulining 2-qadamida – optimal strategiya qo'sh vektorlar ketma-ketligi yordamida aniqlanadi. Ko'rilayotgan masalada 2200 minimal xarajatni ta'minlaydigan ikkita optimal strategiya majud: 1) reja davri boshida sotib olingan jihoz 2 yil ishlatilib yangisiga almashtiriladi, bu jihoz reja davrining oxirigacha almashtirilmaydi; 2) reja davri boshida sotib olingan jihoz 3 yil ishlatilib keyin yangisiga almashtiriladi, bu jihoz reja davrining oxirigacha almashtirilmaydi.



3.3-rasm

4-§. Kommivoyajyor masalasi

1. Kommivoyajyor masalasining qo'yilishi. Kommivoyajyor so'zi daydi sotuvchi ma'nosini bildirib, masalaning qo'yilishi juda ham soddadir. Ya'ni kommivoyajyor n ta shaharning har biriga faqat bir martadan tashrif buyurib, barcha shaharlarni shunday aylanib chqishi kerakki, natijada umumiy ketadigan xarajat (chiqim, vaqt sarfi) minimal bo'lsin. Agar shaharlarning barchasini bir marta to'la aylanib chiqishni *marshrut* deb atasak, aniqki, bunday marshrutlar soni ko'pi bilan (n-1)! ta bo'ladi. Demak, qo'yilgan masala yechimining mavjudligi ravshan. Faqat shu yechimni (optimal marshrutni) aniqlab beruvchi "effektiv" usulni (algoritmni) ko'rsatib berish kerak bo'ladi.

Ko'pgina sohalarga tegishli bo'lgan muommali masalalarni ham kommivoyajyor masalasi kabi ifodalash mumkin. Masalan, n ta turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxona, mahsulot ishlab chiqarish tartibini qanday rejalashtirsa, bir turdagi mahsulot ishlab chiqarishdan ikkinchi turdagi mahsulot ishlab chiqarishga o'tish uchun, qayta jihozlash xarajatlari yig'indisi minimum bo'ladi?

Albatta, kommivoyajyor masalasini yechish uchun, chiziqli dasturlash usullaridan ham foydalanish mumkin. Ammo kommivoyajyor masalasi o'ziga xos ayrim maxsusliklarga ega bo'lganligi sababli, alohida yechish usullari yaratilgan bo'lib, ulardan *tarmoqlar va chegaralar* usuli, o'zining afzal tomonlari bilan ajralib turadi. Bu usul boshqa soha masalalarini, xususan, butun sonli chiziqli dasturlash masalalarini yechishda ham samarali usullardan biri hisoblanadi.

2. Tarmoqlar va chegaralar usuli. Biz tarmoqlar va chegaralar usulini kommivoyajyor masalasini yechish uchun, qo'llanishini ko'ramiz. Faraz qilaylik, c_{ij} – sonlari i – shahardan j – shaharga o'tish uchun, ketadigan xarajatni bildirsin. Agar i – shahardan j – shaharga o'tishning iloji bo'lmasa, c_{ij} ni yetarlicha katta son deb olamiz (buni ∞ deb belgilaymiz), i – shahardan yana i – shaharga o'tildi, deyish ma'nosiz bo'lganligi sababli $c_{ii} = \infty$ deb olinadi. Shundan so'ng $n \times n$ o'lchamli (c_{ij}) jadval (matritsa) hosil bo'ladi, u *xarajat jadvali* deb ataladi. Yana bir bor ta'kidlab o'tamizki, jadvalning i – satri bilan j – ustuni kesishgan joydagi c_{ij} element i – shahardan j – shaharga o'tish uchun, ketgan xarajatni bildiradi.

Endi jadvalni *keltirish* tushunchasini kiritamiz. Buning uchun, avval jadval satrlari keltiriladi, ya'ni jadvalning har bir satr elementlaridan shu satrning kichigi mos ravishda ayirib tashlanadi. Shundan so'ng jadval ustunlariga nisbatan ham xuddi shu amal bajarilib, jadval ustunlari keltiriladi.

Barcha satrlari va ustunlari keltirilgan *jadval keltirilgan* deb ataladi. Demak, ravshanki, keltirilgan jadvalning har bir satri va ustunida kamida bitta nol element ishtirok etgan bo'ladi. Jadval satr va ustunlari eng kichik elementlarining yig'indisi h bilan belgilanib, u *jadvalning keltirish koeffitsiyenti* deyiladi.

Misol sifatida quyidagi xarajat jadvalini ko'raylik. 4.1-jadval satrlarini keltirish uchun, uning o'ng tarafiga mos satrning eng kichik elementini yozib chiqamiz va satr elementlaridan uni ayirib 4.2-jadvalga ega bo'lamiz.

Hosil bo'lgan 4.2-jadvalning ustunlarini keltirish maqsadida jadval ostiga mos ustunning eng kichik elementi yoziladi va u ustun elementlaridan ayirib chiqiladi, natijada quyidagi 4.3-jadval hosil bo'ladi.

Bu 4.3-jadval keltirilgan bo'lib, uning har bir satr va ustunida kamida bittadan nol element bor.

4.1-jadval

gacha

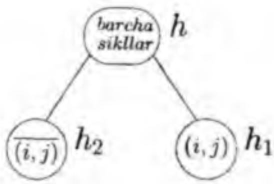
dan	1	2	3	4	5	6	*satr bo'yicha eng kichik element*
1	∞	24	15	4	3	17	3
2	1	∞	3	10	2	9	1
3	16	5	∞	2	10	4	2
4	3	19	8	∞	7	1	1
5	20	11	4	12	∞	18	4
6	9	12	21	4	25	∞	4

4.2-jadval

		gacha					
		1	2	3	4	5	6
dan	1	∞	21	12	1	0	14
	2	0	∞	2	9	1	8
	3	14	3	∞	0	8	2
	4	2	18	7	∞	6	0
	5	16	7	0	8	∞	14
	6	5	8	17	0	21	∞
ustun bo'yicha eng kichik element		0	3	0	0	0	0

4.3-jadval

		gacha					
		1	2	3	4	5	6
dan	1	∞	18	12	1	$0^{(2)}$	14
	2	$0^{(3)}$	∞	2	9	1	8
	3	14	$0^{(4)}$	∞	$0^{(1)}$	8	2
	4	2	15	7	∞	6	$0^{(4)}$
	5	16	4	$0^{(6)}$	8	∞	14
	6	5	5	17	$0^{(5)}$	21	∞



4.1-rasm

Ko'rilayotgan 4.1-jadvalning keltirish koeffitsiyenti h quyidagi songa teng:

$$h = 3 + 1 + 2 + 1 + 4 + 4 + 0 + 3 + 0 + 0 + 0 + 0 = 18.$$

Keltirish koeffitsienti h eng kam xarajatli o'tishlarning umumiy xarajatini bildirib, bu xarajatni beruvchi marshrutni har vaqt ham aniqlab bo'lmaydi. Yuqorida ko'rilgan misolda eng kam xarajatli ($h = 18$) marshrutni aniqlasak, u ikkita bir-biriga bog'lanmagan o'tishlardan (sikllardan) iborat bo'lib qoladi, ya'ni $1 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ va $4 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow$. Bu esa qo'yilgan masalaning yechimini bermaydi. Demak, jadvalni keltirish bilan har vaqt ham qo'yilgan masalaning yechimini olib bo'lmas ekan. Umuman, tarmoqlar va chegaralar usuli ikkita muhim bosqichdan iboratdir: 1) tarmoqlash; 2) chegaralarni aniqlash.

Masalani yechish davomida ikkala bosqich parallel ravishda olib boriladi. Bu bosqichlarni amalga oshirish uchun, quyidagi ishlarni ketma-ket bajarish kerak: A) boshlang'ich jadvalni keltirish; B) keltirish koeffitsyenti h ni aniqlash; C) keltirilgan jadvalning nol elementlari darajasini aniqlash; D) bu darajalar asosida tarmoqlashni amalga oshirish; E) tarmoqlanish natijalarini tashkil etuvchi marshrutlarning quyi chegaralarini aniqlash; F) jadval o'lchamini bittaga kamaytirish; G) to'la bo'lmagan marshrutlar (sikllar) hosil bo'lib qolishdan saqlanish; H) bu jarayonni (2×2)-jadval hosil bo'lgunga qadar davom ettirishi; I) oxirgi tarmoq natijasiga mos marshrutni aniqlash; J) barcha chegara (baholarni) solishtirish; K) zarurat bo'lsa, eng kam chegaraviy natijaga mos jadval tiklanib tarmoqlashni davom ettirish.

Bu usulni qo'llash davomida, barcha hisob-kitoblar berilgan jadval yordamida olib borilib, uning natijalari alohida tuzilgan grafda ko'rsatib boriladi. Bu jarayon oxirida mukammal (eng kam xarajatli) marshrut aniqlanadi.

Bu graf o'zaro birlashtirilgan doirachalardan iborat bo'lib, ularning har biri ma'lum bir xossali marshrutlar to'plamini aniqlaydi. Bu doirachalar yoniga yozilgan chegara – sonlar esa shu doiraga tegishli bo'lgan marshrutlarga mos xarajatlarning quyi chegarasini bildiradi. Grafning boshlang'ich qismi 4.1-rasm ko'rinishida bo'ladi. Bunda birinchi boshlang'ich doiracha barcha marshrutlarni o'z ichiga olgan to'plamni aniqlab, ixtiyoriy marshrut bo'yicha ketadigan xarajat h sonidan kichik bo'lmasligini bildiradi. Yuqorida ko'rgan misolda $h = 18$ edi, demak, xarajati 18 dan kichik bo'lgan marshrut yo'q ekan.

Barcha marshrutlar to'plamini tarmoqlash uchun, keltirilgan 4.3-jadvalning nol elementlari darajalari aniqlanadi. Masalan, 4.3-jadvaldagi nol element bo'lgan 1-satr, 5-ustundagi $c_{15} = 0$ ning darajasini topish uchun, birinchi satrdag i eng kichik element 1 ga, beshinchi ustundagi eng kichik element 1 qo'shiladi va hosil bo'lgan 2 soni shu nolning darajasi sifatida yozib qo'yiladi. Xuddi $c_{32} = 0$ ning darajasini topish uchun, uchinchi satrdagi eng kichik 0 ga ikkinchi ustundagi eng kichik element 4 qo'shiladi va hosil bo'lgan 4 soni $c_{32} = 0$ ning darajasi sifatida yozib qo'yiladi. Shu usul yordamida 4.3-jadvalning barcha nol elementlari darajalari aniqlanadi.

Darajasi eng katta bo'lgan nol joylashgan satr i va ustun j lar topilib, (i, j) bo'yicha tarmoqlanadi. Bunda, o'ng tarafdagi doiracha i – shahardan j – shaharga o'tishni o'z ichiga olgan barcha marshrutlarning to'plamini bildiradi va u (i, j) bilan belgilanadi, chap tarafdagi doiracha esa, aksincha, i – shahardan j – shaharga o'tishni o'z ichiga olmagan marshrutlarning to'plamini bildiradi va u $\overline{(i, j)}$ bilan belgilanadi.

Mabodo, katta darajali nollar bir nechta bo'lsa, ularning ixtiyoriy bittasi tanlab olinadi. Yuqoridagi misolda keltirilgan 4.3-jadvalning nollari darajasini aniqlaymiz.

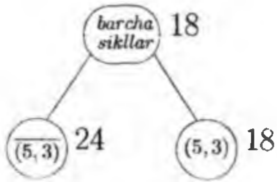
Darajasi eng katta bo'lgan nol element $c_{53} = 0$ dir, demak, tarmoqlanish grafi 4.2-rasm ko'rinishida bo'ladi. Chap doirachaga mos kelgan eng kam xarajat keltirish koeffitsiyenti $h = 18$ nolning eng katta darajasi 6 qo'shib topiladi. (h_2), bizning misolda u 24 ga teng. O'ng tarafdagi doirachaga mos keluvchi xarajatlarning quyi chegarasini aniqlash uchun, 4.3-jadvalning eng katta darajali nol joylashgan satr va ustun olib (o'chirib) tashlanadi.

Demak, jadvalning o'lchami bittaga kamayadi. Bunda, shuni alohida ta'kidlash lozimki, shaharlarning tartib raqamlari albatta saqlanib (yozilib) qolishi shart, aks holda chalkashliklar kelib chiqadi. Shundan so'ng, to'la bo'lmagan sikl $i \to j \to i$ ($i \to j$ belgi $i-$ shahardan $j-$ shaharga o'tishni bildiradi) yo'qotiladi, buning uchun, c_{ji} element ∞ belgisiga almashtirilib yozib qo'yiladi. Ya'ni:

4.4-jadval

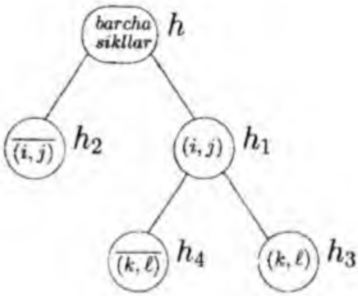
gacha

dan	1	2	4	5	6
1	∞	18	1	$0^{(2)}$	14
2	$0^{(3)}$	∞	9	1	8
3	14	$0^{(5)}$	$0^{(1)}$	∞	2
4	2	15	∞	6	$0^{(4)}$
6	5	5	$0^{(5)}$	21	∞

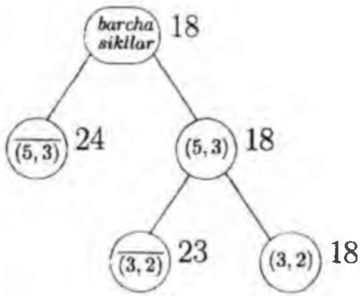


4.2-rasm

Shundan so'ng, hosil bo'lgan yangi jadval keltirilib, uning keltirish koeffitsiyenti, oldingi keltirish koeffitsiyenti bo'lgan h ga qo'shib yoziladi (h_1). Oxirgi 4.4-jadvaldan ko'rinib turibdiki, u keltirilgan jadval ekan, demak, uning keltirish koeffitsiyenti nolga teng. Shuning uchun, 4.2-rasmdagi o'ng doirachaga mos keluvchi chegara o'zgarmagan (18).



4.3-rasm



4.4-rasm

Tarmoqlash uchun, o‘ng doiracha tanlab olinadi (o‘ngga yurish qoidasi bo‘yicha) tarmoqlash juftligini (k, ℓ) aniqlash uchun, oxirgi keltirilgan jadvalning nollari darajalari hisoblanadi va ulardan eng katta darajalisi yordamida (k, ℓ) juftlik ajratilib, tarmoqlash amalga oshiriladi (4.3-rasm.) Bunda $\overline{(k, \ell)}$ belgini olgan chap doirachaga mos chegara (h_4) ning qiymati h_1 ga nolning eng katta darajasi qo‘shib aniqlanadi.

(k, ℓ) belgili o‘ng doirachaga mos kelgan chegarani (h_3) topish uchun, oxirgi jadvaldan k – satr va ℓ – ustun chiqarib (o‘chirib tashlanadi) va to‘la bo‘lmagan marshrutlar ∞ belgisi yordamida taqiqlanadi. Shundan so‘ng, hosil bo‘lgan jadvalning keltirish koeffitsiyenti h ga qo‘shilib o‘ng doiracha yoniga yozib qo‘yiladi. Biz ko‘rayotgan sonli misolda bu jarayon 4.4-jadvalda keltirilgan.

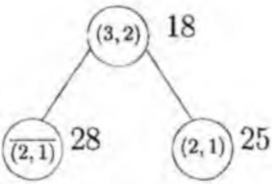
(k, ℓ) juftlik sifatida (3,2) ni yoki (6,4) ni olish mumkin. Aniqlik uchun, (3,2) ni olaylik. U holda quyidagi grafga ega bo‘lamiz (4.4-rasm).

Endi oxirgi jadvalning uchinchi satri, ikkinchi ustunini tashlab yuborib $2 \to 5$ o‘tishni ham taqiqlab qo‘yamiz (∞ belgi orqali). Chunki, oxirgi $(3, 2)$ belgili doirachada $5 \to 3 \to 2$ o‘tishlarni o‘z ichiga olgan marshrutlar to‘plangan bo‘lib, to‘la bo‘lmagan $5 \to 3 \to 2 \to 5$ marshrutni taqiqlash kerak edi. Shu o‘zgarishlardan so‘ng jadvalning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

4.5-jadval

gacha

dan	1	4	5	6
1	∞	1	$0^{(7)}$	14
2	$0^{(10)}$	9	∞	8
4	2	∞	6	$0^{(10)}$
6	5	$0^{(6)}$	21	∞



4.5-rasm

Bu keltirilgan jadval, demak, uning keltirish koeffitsiyenti nol bo'lib $h_3 = 18$ bo'ladi ($h_4 = 18 + 5 = 23$).

Shundan so'ng o'ng tarafdagi doirachani tarmoqlash uchun, yangi juftlikni aniqlash lozim, xuddi avvalgiday oxirgi jadvaldagi nol elementlarning darajalari hisoblanadi, bular 4.5-jadvalda keltirilgan.

Aniqlik uchun, (2.1) juftlikni tanlab olaylik, unda: 4.4-rasmning davomi sifatida quyidagi grafga ega bo'lamiz (4.5-rasm).

4.6-jadval

dan \ gacha	4	5	6	*satr bo'yicha eng kichik element*
1	1	∞	14	1
4	∞	6	0	0
6	0	21	∞	0

4.7-jadval

dan \ gacha	4	5	6
1	0	∞	13
4	∞	6	0
6	0	21	∞
ustun bo'yicha eng kichik element	0	6	0

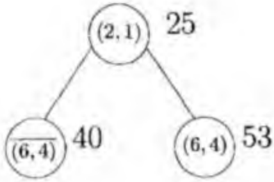
$(2,1)$ belgili doirachada $5 \to 3 \to 2 \to 1$ o'tishlarni o'z ichiga olgan marshrutlar to'plami bo'lib, to'la bo'lmagan $5 \to 3 \to 2 \to 1 \to 5$ siklni yo'qotish maqsadida birinchi satr, beshinchi ustun kesishgan elementni ∞ belgiga almashtiramiz va ikkinchi satr birinchi ustunni o'chirib tashlaymiz. Satr va ustunlarni keltirib 4.6 va 4.7-jadvallarga ega bo'lamiz.

Demak, jadvalning keltirish koeffitsiyenti $1 + 6 = 7$ ga teng, shu sababli o'ng tarafdagi doirachaga mos kelgan chegara $h_5 = 18 + 7 = 25$ bo'ladi.

Endi oxirgi jadval nollarining darajalarini aniqlaymiz (bu 4.8-jadvalda keltirilgan) tarmoqlash uchun, $(6,4)$ juftlikni tanlab olaylik. U holda 4.5-rasmning davomi 4.6-rasm ko'rinishda bo'ladi.

4.8-jadval

dan \ gacha	4	5	6
1	$0^{(13)}$	∞	13
4	∞	$0^{(15)}$	$0^{(13)}$
6	$0^{(15)}$	15	∞



4.6-rasm

4.9-jadval

dan \ gacha	5	6	*satr bo'yicha eng kichik element*
1	∞	13	13
4	0	∞	0

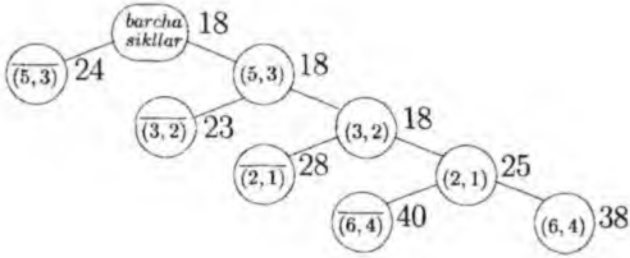
4.10-jadval

dan \ gacha	5	6
1	∞	0
4	0	∞
ustun bo'yicha eng kichik element	0	0

Chap tarafdagi doirachaga ($\overline{(6,4)}$ belgili) mos chegara $h_6 = 25 + 15 = 40$ ga teng bo'ladi. $(6,4)$ belgili doirachaga mos to'plam $5 \to 3 \to 2 \to 1$ va $6 \to 4$ o'tishlarni o'z ichiga olgan marshrutlardan iborat bo'lib, $6 \to 4 \to 6$ to'la bo'lmagan sikllarni yo'qotish uchun, ∞ belgi orqali $4 \to 6$ o'tish taqiqlanadi va oltinchi satr, to'rtinchi ustun o'chirib tashlanadi. U holda, natijaviy jadval quyidagi (4.9-jadval) ko'rinishda bo'ladi. Bu jadvalning satrlari keltiriladi(4.10-jadval).

Demak, o'ng tarafdagi doirachaga mos chegara $h_7 = 25 + 13 + 0 = 38$ bo'lar ekan.

qilib, biz natijaviy grafga ega bo'ldik (4.7-rasm). Bu grafning o'ng tarafidagi doirachalar ketma-ketligi va oxirgi (2×2) – o'lchamli jadval yordamida xarajati 38 ga teng bo'lgan $6 \to 4 \to 5 \to 3 \to 2 \to 1 \to 6$ sikl aniqlanadi.



4.7-rasm

Ammo chap tarafdan $\overline{(3,2)}$ belgiga ega bo'lgan doirachaga mos chegara 23 ga teng, shuning uchun, qidirilayotgan eng kam xarajatli (mukammal) sikl shu to'plamda bo'lishi mumkin. Demak, shu doirachaga mos kelgan jadvalni tiklash kerak bo'ladi. Eslatib o'tamizki, bu doirachaga mos kelgan marshrutlarda $3 \to 2$ o'tish taqiqlangan, $5 \to 3$ o'tish esa majburiy. Shu sababli boshlang'ich jadvalning c_{32} va c_{35} elementlarini ∞ belgisiga almashtiriladi va beshinchi satr, uchinchi ustunlar o'chirib tashlanadi va $g = c_{53} = 4$ deb olinadi (agar bir necha element o'chirilsa g bilan shu elementlarning qiymatlari yig'indisi belgilanadi). Natijada $\overline{(3,2)}$ belgili doirachaga mos kelgan jadval quyidagi 4.11-jadval ko'rinishda bo'ladi. Bu 4.11-jadval keltiriladi va keltirish koeffitsiyenti $h = 19$ aniqlanadi. Natijada 4.12-jadvalga ega bo'lamiz.

Demak, $\overline{(3,2)}$ belgili doirachaga mos kelgan chegara $h + g = 19 + 4 = 23$ ga teng ekan.

Endi, shu doirachani tarmoqlash uchun, (i, j) juftlik aniqlanadi, ya'ni nollarning darajalari hisoblanadi. Demak, $(6, 2)$ juftlik bo'yicha tarmoqlanish amalga oshiriladi (4.8-rasm).

Endi, ma'lum o'zgartirishlar (6-satr, 2-ustun o'chiriladi, $c_{26} = \infty$) kiritilib, so'ng uni keltirish natijasida 4.13-jadval hosil bo'ladi. Bunda, keltirish koeffitsiyenti 0 teng, shuning uchun, $(6, 2)$ belgili doirachaga mos chegara qiymati 23 bo'ladi (4.8 va

4.9-rasmlar). So'ng oxirgi jadvalning nollari darajalari topiladi va $(6,2)$ belgili doirachani tarmoqlash uchun, juftlik aniqlanadi.

4.11-jadval

dan \ gacha	1	2	4	5	6
1	∞	24	4	3	17
2	1	∞	10	2	9
3	16	∞	2	∞	4
4	3	19	∞	7	1
6	9	12	4	25	∞

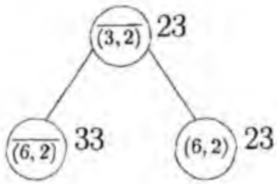
4.12-jadval

dan \ gacha	1	2	4	5	6
1	∞	13	1	$0^{(2)}$	14
2	$0^{(3)}$	∞	9	1	8
3	14	∞	$0^{(2)}$	∞	2
4	2	10	∞	6	$0^{(4)}$
6	5	$0^{(10)}$	$0^{(0)}$	21	∞

Demak, tarmoqlanish juftligi $(4,6)$ ekan (4.9-rasm). Oxirgi jadval ma'lum qoidalar asosida o'zgartiriladi. (4-satr, 6-ustun o'chiriladi, $c_{24} = \infty$ belgini oladi).

4.13-jadval

dan \ gacha	1	4	5	6
1	∞	1	$0^{(2)}$	14
2	$0^{(3)}$	9	1	∞
3	14	$0^{(1)}$	∞	2
4	2	∞	6	$0^{(4)}$

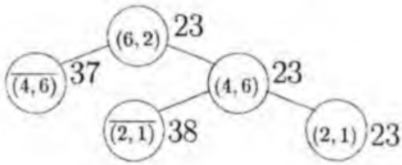


4.8-rasm

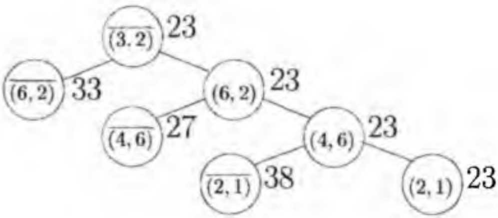
Bu 4.15-jadvalning keltirish koeffitsiyenti nolga teng, shuning uchun, $(4,6)$ belgili doiracha chegarasi 23 teng bo'ladi. Oxirgi jadvalning nollari darajalari aniqlanadi:

4.14-jadval

dan \ gacha	1	4	5
1	∞	1	$0^{(2)}$
2	$0^{(15)}$	∞	1
3	14	$0^{(15)}$	∞



4.9-rasm



4.10-rasm

4.15-jadval

dan \ gacha	4	5
1	∞	0
3	0	∞

Tarmoqlanish $(2,1)$ juftlik orqali amalga oshirilgan bo‘lsin (4.10-rasm.) Bu esa keltirilgan jadval, demak, $(2,1)$ belgili doirachaga mos chegara 23 bo‘lib qoladi. Oxirgi jadval va bu graf yordamida eng kam xarajatli (23) siklni aniqlaymiz: $2 \to 1 \to 5 \to 3 \to 4 \to 6 \to 2$.

Grafdagi (4.10-rasm) hech bir doirachani tarmoqlash orqali 23 dan kam bo‘lgan xarajatli siklni topib bo‘lmaydi. Bu esa, topilgan siklning mukammal (eng kam xarajatli) ekanligini bildiradi. Ma’lum o‘zgartirishlardan (2-satr, 1-ustun o‘chiriladi) keyin, quyidagi so‘nggi (2×2) – o‘lchamli jadval hosil bo‘ladi.

qilib, ko‘rilgan misolda quyidagi yechimni olamiz: eng kam 23 xarajatli sikl $2 \to 1 \to 5 \to 3 \to 4 \to 6 \to 2$ bo‘ladi.

Hali borilmagan eng yaqin shaharni tanlash algoritmi

Eng oddiy tabiiy usullardan biri bu eng yaqin shaharni tanlashdir. Ya’ni, bu berilgan xarajat jadvalidagi satrning eng kichik elementni tanlash demakdir. Avval biror satr tanlanadi, keyin shu satrdagi eng kichik element joylashgan ustun raqamiga mos satrdan avvalgi ustunlar ishtirok etmagani tanlanadi. Bu jarayoning oxiri sikl bilan tugashi zarur. Aynan, shu oxirida majbyran tanlash ro'y beradi. Shuning hisobiga kelib chiqadigan sikl uzunligi ixtiyoriy son bo'lishi mumkin.

Lekin misol ko'rish mumkinki, bu usul har vaqt ham optimal yechimni beravermaydi. Bunga qaramasdan, agar juda ham aniq yechim talab qilinmasa bu usulni qo'llash qulaydir.

Bu usulda boshlang'ich shaharni tanlash muhim ahamiyatga ega. Lekin bu yerda barcha variantlarni ko'rib chiqish orqali, ulardan eng yaxshisini tanlab olish mumkin bo'ladi.

Quyidagi misolni qaraylik:

4.16-jadval

dan \ gacha	1	2	3	4	5
1	∞	31	15	19	38
2	19	∞	22	∞	27
3	25	43	∞	53	∞
4	5	50	49	∞	59
5	24	5	∞	5	∞

4.17-jadval

boshlang'ich shahar, unga mos sikl

1	$1 \to 3 \to 2 \to 5 \to 4 \to 1$ $(15 + 43 + 27 + 5 + 5 = 95)$
2	$2 \to 1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2$ $(19 + 15 + 53 + 59 + 5 = 151)$
3	$3 \to 1 \to 4 \to 2 \to 5 \to 3$ $(25 + 19 + 50 + 27 + \infty = \infty)$
4	$4 \to 1 \to 3 \to 2 \to 5 \to 4$ $(5 + 15 + 43 + 27 + 5 = 95)$
5	$5 \to 2 \to 1 \to 3 \to 4 \to 5$ $(5 + 19 + 15 + 53 + 59 = 151)$
5	$5 \to 4 \to 1 \to 3 \to 2 \to 5$ $(5 + 5 + 15 + 43 + 27 = 95)$

5-§. Ryukzak haqidagi masala

Ryukzak haqidagi masalani qo'yilishi quyidagicha: n – turdagi predmetlar berilgan bo'lib (faraz etiladi, ularning soni yetarlicha ko'p), j – raqamli predmetning bittasini og'irligi a_j va bahosi $c_j \geq 0$ butun sonlardan iborat bo'lsin. b og'irlikdagi yukni ko'taruvchi ryukzak ichiga shu predmetlardan joylashtirish kerakki, natijada olingan predmetlarning umumiy bahosi maksimal bo'lsin.

Ya'ni, bu yerda masala olinishi kerak bo'lgan predmetlarning raqamini va sonini aniqlashga keladi. Bu masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi.

Maqsad funksiya

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{5.1}$$

ning maksimal qiymati

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \tag{5.2}$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, ..., n \tag{5.3}$$

shartlar ostida topilsin. Bu yerda $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$ lar j-raqamli predmetning sonini bildiradi. Bu qo'yilgan (5.1)–(5.3)-masala butun sonli chiziqli dasturlash masalasi bo'lib, uni yechish bilan qo'yilgan masala hal qilinadi.

Endi yuqoridagi masalani umumlashgan, ya'ni (5.2) ga o'xshash chegara bir nechta bo'lgan holni ko'ramiz va shu bilan birga yechish algoritmini keltiramiz. Ushbu masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{5.4}$$

funksiyaning maksimal qiymati

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b, \ i = 1, 2, ..., m, \tag{5.5}$$

shartlar ostida topilsin. Bu yerda x_j – manfiy bo'lmagan butun sonlar va $c_j \geq 0, b_j \geq 0, a_{ij} \geq 0$ lar barcha $i =$

$1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$ larda butun sonlar. Masalani yechishda qulaylik tug'dirish maqsadida quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_m) = \max_{x_1,...,x_k} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \leq y_i, \; i = 1, 2, ..., m, \tag{5.6}$$

$k = 1, 2, ..., n$, $y_i = 1, 2, ..., b_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Endi $k = 1$ bo'lgan holni alohida ko'raylik:

$$\varphi_1(y_1, y_2, ..., y_m) = \max_{x_1} c_1 x_1,$$

$a_{i1} x_1 \leq y_i$, $i = 1, 2, ..., m$, $x_1 \geq 0$ – butun.

Tushunarliki, agar biror $i \in \{1, ..., m\}$ uchun, $a_{i1} = 0$ bo'lsa, u holda shu i indeks uchun, ixtiyoriy $x_1 \geq 0$ da $a_{i1} x_1 \leq y_i$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Shuning uchun, bu holda, musbat a_{i1} koeffitsiyent ishtirok etgan tengsizliklarni e'tiborga olish yetarlidir. Demak, x_1 – o'zgaruvchi

$$x_1 \leq \frac{y_i}{a_{i1}}$$

tengsizlikni musbat a_{i1} larga mos keluvchi i – indekslarda qanoatlantirishi kerak ekan. Agar x_1 ni butun qiymat qabul qilishini e'tiborga olsak, $k = 1$ holdagi masalaning yechimi

$$\bar{x}_1 = \min_{a_{i1} > 0} \left[\frac{y_i}{a_{i1}} \right]$$

ekanligi kelib chiqadi. Ravshanki, maqsad funksiyaning qiymati quyidagicha aniqlanadi:

$$\varphi_1(y_1, y_2, ..., y_m) = c_1 \bar{x}_1 = c_1 \cdot \min_{a_{i1} > 0} \left[\frac{y_i}{a_{i1}} \right].$$

Demak, $k = 1$ da maqsad funksiya $\varphi_1(y_1, y_2, ..., y_m)$ ning barcha qiymatlarini aniqlash mumkin bo'lar ekan. Hisoblashni soddalashtirish maqsadida (tabiiy bo'lgan) quyidagilarni qabul qilamiz: $y_1, y_2, ..., y_m$ argumentlarning barcha qiymatlarida

$\varphi_0(y_1, y_2, ..., y_m) = 0$ va ularning kamida birortasi nolga teng bo'lsa, $\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_m) = 0$ deb olamiz. Agar $y_1, y_2, ..., y_m$ larning kamida bittasi manfiy qiymat qabul qilgan bo'lsa, $\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_m) = -\infty -$ bo'lsin.

Endi $1 < k \leq n$ oraliqda maqsad funksiya $\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_m)$ ning qiymatlarini topish uchun, rekurrent formulani keltirib chiqaraylik. Faraz qilaylik, $\varphi_{k-1}(y_1, y_2, ..., y_m)$ funksiya qiymatlari $(y_1, y_2, ..., y_m)$ argumentning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lsin. U holda, $\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_m)$ qiymatni hosil qilishda $k-$ raqamli predmet kamida bir marta ishtirok etishi yoki umuman ishtirok etmasligi mumkin.

Ikkinchi holda $\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_m) = \varphi_{k-1}(y_1, y_2, ..., y_m)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Birinchi holni qaraylik, bunda k-raqamli predmetning kamida bittasi ishtirok etganligi uchun, uning bittasini alohida olib qaraymiz. Uni alohida ajratib olsak, u ishtirok etgan (5.6) tengsizliklarning o'ng chegaralari $y_1, y_2, ..., y_m$ lar mos ravishda a_{ik} ga kamayadi, ya'ni tengsizlik chegaralari mos ravishda $y_i - a_{ik}$ bo'lib qoladi. Shunda maqsad funksiyaning maksimal qiymati belgilanishga asosan $\varphi_k(y_1 - a_{1k}, y_2 - a_{2k}, ..., y_m - a_{mk})$ ga teng. Endi bu qiymatga olib qo'yilgan bitta k-raqamli predmet bahosi c_k ni qo'shsak $\varphi_k(y_1 - a_{1k}, y_2 - a_{2k}, ..., y_m - a_{mk}) + c_k$ bahoga ega bo'lamiz. Bu yerda e'tibor berish kerakki, k indeks saqlanib qolyapti, chunki $k-$ raqamli predmet bittadan ortiq qatnashgan bo'lishi mumkin.

qilib k-predmet, agar kamida bitta olingan bo'lsa, maqsad funksiyaning maksimal qiymati $\varphi_k(y_1 - a_{1k}, y_2 - a_{2k}, ..., y_m - a_{mk}) + c_k$, umuman olinmagan bo'lsa $\varphi_{k-1}(y_1, y_2, ..., y_m)$ ga teng bo'ladi. Bu ikki variantning qaysi biri afzal ekanligini bilish uchun. $\varphi_{k-1}(y_1, y_2, ..., y_m)$ bilan $\varphi_k(y_1 - a_{1k}, y_2 - a_{2k}, ..., y_m - a_{mk}) + c_k$ larni taqqoslab ko'rish kerak bo'ladi. Agar quyidagi tengsizlik o'rinli bo'lsa, $k-$ predmetdan kamida bitta olish maqsadga muvofiq bo'ladi.

$$\varphi_{k-1}(y_1, y_2, ..., y_m) \leq \varphi_k(y_1 - a_{1k}, y_2 - a_{2k}, ..., y_m - a_{mk}) + c_k$$

Demak, bir-birini inkor etuvchi bu ikki variantga mos keluvchi maqsad funksiyaning eng katta qiymati $\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_m)$ ni beradi, ya'ni

$$\begin{aligned} \varphi_k(y_1, y_2, ..., y_m) = \max(\varphi_{k-1}(y_1, y_2, ..., y_m), \\ \varphi_k(y_1 - a_{1k}, y_2 - a_{2k}, ..., y_m - a_{mk}) + c_k). \end{aligned} \tag{5.7}$$

(5.7)-formula yordamida $\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_m)$, $k = 1, 2, ..., n$, $y_i = 0, 1, ..., b_i$, $i = 1, 2, ..., m$ maqsad funksiyaning faqat qiymatlarini hisoblashimiz mumkin. Qaysi predmetdan nechtadan olinishi kerakligini ko'rsatuvchi $I(k; y_1, y_2, ..., y_m)$, $(k = 1, 2, ..., n$, $y_i = 0, 1, ..., b_i$, $i = 1, 2, ..., n)$ butun argumentli va qiymatli funksiyani tuzamiz. Agar $(k; y_1, y_2, ..., y_m)$ argumentning biror $(\bar{k}; \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m)$ qiymatida $\varphi_{\bar{k}}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m) = j$, $1 \leq j \leq \bar{k}$ bo'lsa, bu $\varphi_{\bar{k}}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m)$ bahoga erishishda j-raqamli predmet kamida bir marta qatnashganligini bildiradi, ya'ni $x_j \geq 1$. $I(k; y_1, y_2, ..., y_m)$ funksiya qiymatlarini $k = 1$ bo'lganda hisoblash hech qanday qiyinchilik tug'dirmaydi, haqiqatan, agar 1-raqamli predmetdan olinmagan bo'lsa, baho $\varphi_1(y_1, y_2, ..., y_m) = 0$, aks holda $\varphi_1(y_1, y_2, ..., y_m) \neq 0$ bo'ladi, shunga asosan

$$I(1; y_1, y_2, ..., y_m) = \begin{cases} 0, \text{ agar } \varphi_1(y_1, y_2, ..., y_m) = 0, \\ 1, \text{ agar } \varphi_1(y_1, y_2, ..., y_m) \neq 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

bu yerda $y_i = 0, 1, ..., b_i$, $i = 1, 2, ..., m$.

Endi $1 < k \leq n$ bo'lgan holda $I(k; y_1, y_2, ..., y_m)$ funksiya qiymatlarini aniqlaydigan formulani keltiramiz. $\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_m)$ funksiyaning qiymatlarini topish usuli (5.7)-formulaga asosan, agar $(y_1, y_2, ..., y_m)$ argumentning biror $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m)$ qiymatida $\varphi_k(y_1 - a_{1k}, y_2 - a_{2k}, ..., y_m - a_{mk}) + c_k < \varphi_{k-1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m)$

tengsizlik o'rinli bo'lsa (bu degani $\varphi_k(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m) = \varphi_{k-1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m)$, ya'ni $\varphi_k(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m)$ bahoga erishish uchun, $k-$ raqamli predmet qatnashmaganligi ma'lum bo'ladi, shuning uchun, $I(k; \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m) = I(k-1; \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m)$ deb olinadi. Agar $\varphi_k(\bar{y}_1 - a_k, \bar{y}_2 - a_k, ..., \bar{y}_m - a_k) + c_k \geq \varphi_{k-1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m)$ tengsizlik bajarilsa, bunda $\varphi_k(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m)$ bahoga erishish uchun, $k-$ raqamli predmet kamida bir marta qatnashganligini bildiradi, demak, $I(k; \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m) = k$ deb olinishi kerak. qilib $I(k; y_1, y_2, ..., y_m)$, $1 < k \leq n$ funksiyaning qiymatlarini aniqlash uchun, quyidagi rekurrent formulaga ega bo'lamiz:

$$I(k; y_1, ..., y_m) = \begin{cases} I(k-1; y_1, ..., y_m), \text{ agar } \varphi_k(y_1 - a_{1k}, \\ \quad ..., y_m - a_{mk}) + c_k < \varphi_{k-1}(y_1, ..., y_m), \\ \\ k, \text{ agar } \varphi_k(y_1 - a_{1k}, ..., y_m - a_{mk}) + \\ \quad + c_k \geq \varphi_{k-1}(y_1, ..., y_m) \end{cases} \tag{5.9}$$

bu yerda $y_i = 0, 1, ..., b_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Demak, (5.8) va (5.9)-formulalar yordamida $I(k; y_1, y_2, ..., y_m)$, $k = 1, 2, ..., n$, $y_i = 0, 1, ..., b_i$, $i = 1, 2, ..., m$ funksiyaning barcha qiymatlari aniqlanadi.

Yuqorida aytilganlardan ko'rinib turibdiki, $\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_m)$ va $I(k; y_1, y_2, ..., y_m)$ funksiyalarning qiymatlari bir paytda (parallel) hisoblab borilishi maqsadga muvofiqdir. Agar k fiksirlangan-da $\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_m)$ va $I(k; y_1, y_2, ..., y_m)$, $y_i = 0, 1, ..., b_i$, $i = 1, 2, ..., m$ funksiyalarning qiymatlarini mos ravishda birinchi va ikkinchi jadvallarning $k-$ qatlamlari deb atasak, u holda tushunarliki ikkala jadval qatlamlarini hisoblash ketma-ket kichigidan kattasiga qarab olib borilar ekan. Bu yerda jadval so'zini ishlatilishiga sabab har bir $\varphi_k(y_1, y_2, ..., y_m)$ va $I(k; y_1, y_2, ..., y_m)$, $k = 1, 2, ..., n$, $y_i = 0, 1, ..., b_i$, $i = 1, 2, ..., m$ funksiyalarning qiymatlarini $n(b_1 + 1)...(b_m + 1)$ o'lchamli ikkita jadval ko'rinishida ifodalash mumkin. Bularning birinchisi *baholar jadvali*, ikkinchisini *predmet sonlarini aniqlash jadvali* deb ataladi. Yana shuni ta'kidlash kerakki, jadvallarning biror k-qatlamini hosil qilishda faqat $k-1$-qatlam elementlari ishtirok etadi ((5.7)–(5.9)), bu esa hisoblash mashinasining xotirasini tejash ma'nosida muhimdir.

Faraz qilaylik, jadvallarning oxirgi n-qatlami, ya'ni $\varphi_n(y_1, y_2, ..., y_m)$ va $I(n; y_1, y_2, ..., y_m)$ funksiyalarning qiymatlari $(y_1, y_2, ..., y_m)$ argumentni barcha mumkin bo'lgan qiymatlarida aniqlangan bo'lsin. U holda qo'yilgan masalaning yechimi quyidagicha topiladi: predmetlarning sonini aniqlash jadvalidan $I(n; b_1, b_2, ..., b_m)$ songa qaraladi. Faraz qilaylik, y j_1 ga teng bo'lsin, bu j_1- raqamli predmet kamida bir marta olinishligini bildiradi. Shuning uchun, $x_{j_1} = 1$ deymiz. Keyin $I(n; b_1 - a_{1j_1}, b_2 - a_{2j_1}, ..., b_m - a_{mj_1}) = I(n; \bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_m)$ ning qiymatiga qaraymiz, agar y j_2 ga teng bo'lsa, xuddi avvalgidek, bu j_2- raqamli predmet kamida bir marta olinishi kerakligini bildiradi. Demak, $x_{j_2} = 1$, agar $j_2 = j_1$ bo'lsa, u holda j_1- raqamli predmet kamida ikki marta ishtirok etganligini bildiradi. Shuning uchun, $x_{j_1} = 2$ deb olinadi. Bunda, birinchi holda ya'ni $I(n; \bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_m) = j_2$ bo'lganda, $I(n; \bar{b}_1 - a_{1j_2}, \bar{b}_2 - a_{2j_2}, ..., \bar{b}_m - a_{mj_2})$ ning qiymatiga qaraladi. Ikkinchi holda, ya'ni $I(n; \bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_m) = j_1$, da $I(n; \bar{b}_1 - a_{1j_1}, \bar{b}_2 - a_{2j_1}, ..., \bar{b}_m - a_{mj_1})$ dan so'ng $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$ sonlari aniqlanib, ular har bir predmetdan nechtadan olinishi kerakligini bildiradi va bundan maqsad funksiya qiymati maksimal bo'lib, birinchi jadvaldan $\varphi_n(b_1, b_2, ..., b_m)$ bilan aniqlanadi. Bunda shu narsa e'tiborga loyiqki, agar jadvallarning barcha qiymatlari saqlanib qolgan bo'lsa, n dan kichik predmet turlari va $b_1, b_2, ..., b_m$ chegaralarni mos ravishda katta bo'lmagan butun sonlarga almashtirishdan hosil bo'lgan masalalarni ham xuddi yuqoridagi usul yordamida (jadvallarning mos qatlamidan) yechimlarini topish mumkin. Yuqoridagi algoritm yordamida quyidagi sonli misolni yechib ko'raylik: $n = 3$, $m = 2$, $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 0$, $b_1 = 3$, $b_2 = 4$ bo'lsin. Ya'ni quyidagi ko'rinishdagi masalaga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max,\\
&2x_1 + x_2 + x_3 \le 3,\\
&x_1 + 2x_2 \le 4,\\
&x_1,\ x_2 \ge 0 - \mathit{butun}.
\end{aligned}$$

$k = 1$ da (5.7)-formula yordamida $\varphi_1(y_1, y_2)$ va (5.8)-formula yordamida $I(1; y_1, y_2)$ funksiyalarning qiymatlarini aniqlaymiz:

$\varphi_1(1,2) = 2\min\left(\left[\frac{1}{2}\right], 2\right) = 0$, $I(1;1,2) = 0$, $\varphi_1(1,3) = 2\min\left(\left[\frac{1}{2}\right], 3\right) = 0$, $I(1;1,3) = 0$, $\varphi_1(1,4) = 2\min\left(\left[\frac{1}{2}\right], 4\right) = 0$, $I(1;1,4) = 0$, $\varphi_1(2,1) = 2\min(1,1) = 2$, $I(1;2,1) = 1$, $\varphi_1(2,2) = 2\min(1,2) = 2$, $I(1;2,2) = 1$, $\varphi_1(2,3) = 2\min(1,3) = 2$, $I(1;2,3) = 1$, $\varphi_1(2,4) = 2\min(1,4) = 2$, $I(1;2,4) = 1$, $\varphi_1(3,1) = 2\min\left(\left[\frac{3}{2}\right], 1\right) = 2$, $I(1;3,1) = 1$

— —

$\varphi_1(3,4) = 2\min\left(\left[\frac{3}{2}\right], 4\right) = 2$, $I(1;1,3,4) = 1$.

$k = 2$ da (5.7) va (5.9) formulalar yordamida mos ravishda $\varphi_2(y_1, y_2)$ va $I(2; y_1, y_2)$ larni aniqlaymiz.

$\varphi_2(1,1) = \max(\varphi_1(1,1),\ \varphi_2(1-1, 1-2)+3) = 0$, $I(2;1,1) = 0$,

$\varphi_2(1,2) = \max(\varphi_1(1,2),\ \varphi_2(1-1, 2-2)+3) = 3$, $I(2;1,1) = 2$,

$\varphi_2(1,3) = \max(\varphi_1(1,3),\ \varphi_2(1-1, 3-2)+3) = 3$, $I(2;1,3) = 2$,

$\varphi_2(1,4) = \max(\varphi_1(1,4),\ \varphi_2(1-1, 4-2)+3) = 3$, $I(2;1,4) = 2$,

$\varphi_2(2,1) = \max(\varphi_1(2,1),\ \varphi_2(2-1, 1-2)+3) = 2$, $I(2;2,1) = 1$,

$\varphi_2(2,2) = \max(\varphi_1(2,2),\ \varphi_2(2-1, 2-2)+3) = 3$, $I(2;2,2) = 2$,

$$\varphi_2(2,3) = \max(\varphi_1(2,3),\ \varphi_2(2-1,3-2)+3) = 3, \quad I(2;2,3) = 2,$$

$$\varphi_2(2,4) = \max(\varphi_1(2,4),\ \varphi_2(2-1,4-2)+3) = 6, \quad I(2;2,4) = 2,$$

$$\varphi_2(3,1) = \max(\varphi_1(3,1),\ \varphi_2(3-1,1-2)+3) = 2, \quad I(2;3,1) = 1,$$

$$\varphi_2(3,2) = \max(\varphi_1(3,2),\ \varphi_2(3-1,2-2)+3) = 3, \quad I(2;3,2) = 2,$$

$$\varphi_2(3,3) = \max(\varphi_1(3,3),\ \varphi_2(3-1,3-2)+3) = 5, \quad I(2;3,3) = 2,$$

$$\varphi_2(3,4) = \max(\varphi_1(3,4),\ \varphi_2(3-1,4-2)+3) = 6, \quad I(2;3,4) = 2$$

Endi $k = 3$ qatlam elementlarining qiymatlarini, ya'ni $\varphi_k(y_1, y_2)$, $I(k; y_1, y_2)$ topamiz:

$$\varphi_3(1,1) = \max(\varphi_2(1,1), \varphi_3(1-1,1)+1) = 1, \quad I(3;1,1) = 3,$$

$$\varphi_3(1,2) = \max(\varphi_2(1,2), \varphi_3(1-1,1)+1) = 3, \quad I(3;1,2) = 3,$$

$$\varphi_3(1,3) = \max(\varphi_2(1,3), \varphi_3(1-1,3)+1) = 3, \quad I(3;1,3) = 2,$$

$$\varphi_3(1,4) = \max(\varphi_2(1,4), \varphi_3(1-1,4)+1) = 3, \quad I(3;1,4) = 2,$$

$$\varphi_3(2,1) = \max(\varphi_2(2,1), \varphi_3(2-1,1)+1) = 2, \quad I(3;2,1) = 3,$$

$$\varphi_3(2,2) = \max(\varphi_2(2,2), \varphi_3(2-1,2)+1) = 3, \quad I(3;2,2) = 2,$$

$$\varphi_3(2,3) = \max(\varphi_2(2,3), \varphi_3(2-1,3)+1) = 3, \quad I(3;2,3) = 2,$$

$$\varphi_3(2,4) = \max(\varphi_2(2,4), \varphi_3(2-1,4)+1) = 6, \quad I(3;2,4) = 2,$$

$$\varphi_3(3,1) = \max(\varphi_2(3,1), \varphi_3(2-1,1)+1) = 3, \quad I(3;3,1) = 3,$$

$$\varphi_3(3,2) = \max(\varphi_2(3,2), \varphi_3(3-1,2)+1) = 3, \quad I(3;3,2) = 3,$$

$$\varphi_3(3,3) = \max(\varphi_2(3,3), \varphi_3(3-1,3)+1) = 5, \quad I(3;3,3) = 2,$$

$$\varphi_3(3,4) = \max(\varphi_2(3,4), \varphi_3(3-1,4)+1) = 7, \quad I(3;3,4) = 3.$$

Predmetlar sonini aniqlaydigan jadvalning oxirgi $k = 3$ qatlami $I(3;3,4) = 3$ bo'lganligi uchun, $\bar{x}_3 = 1$ deb olamiz va $I(3;3-1,4-0) = 2$ bo'lgani uchun, $\bar{x}_2 = 1$ bo'ladi. Xuddi $I(3;2-1,4-2) = 2$, demak, $\bar{x}_2 = 2$; $I(3;1-1,2-2) = I(3;0,0)$ –

element jadvalda yo'qligi uchun, predmetlarning sonini topish jarayonini to'xtatamiz. qilib, $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 2$, $\bar{x}_3 = 1$ yechimga ega bo'lamiz.

Endi baholar jadvalining oxirgi $k = 3$ qatlamidan maqsad funksiyaning maksimal qiymati $\varphi_3(3, 4) = 7$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, qo'yilgan masalaning yechimi quyidagicha bo'lar ekan: birinchi predmetdan olinmaydi, ikkinchi predmetdan ikkita, uchinchi predmetdan bitta, shu holda maqsad funksiya qiymati maksimal yetti qiymatga ega bo'ladi.

Nazorat uchun savollar

1. Zaxirani boshqarish nima?

2. Muvozanat tenglamasini keltirib chiqarishni ko'sating.

3. Zaxirani boshqarish masalasiga dinamik dasturlash usulini qo'llash uchun, belgilar kiritish nimalardan iborat?

4. Zaxirani boshqarish masalasida dinamik dasturlashning rekurrent formulasining ko'rinishi qanday bo'ladi?

5. Zaxirani boshqarish masalasi deyilishiga sabab nima?

6. Zaxirani boshqarish masalasida boshlang'ich miqdor qanday rol o'ynaydi?

7. Xarajat necha qismdan iborat bo'ladi?

8. Qavariq funksiya nima va unga misollar keltiring?

9. Xarajat funksiyasi qavariq bo'lganda reja davrini tahlil qiling.

10. Butun argumentli qavariq funksiya ta'rifini bering.

11. Xarajat funksiya qavariq bo'lganda zaxirani boshqarish masalasini hal qilishdagi afzallik nimadan iborat?

12. Dinamik dasturlashda ko'p qadamlilik bo'lish strukturasi nimani bildiradi?

13. Dinamik dasturlashda axborot va o'zgaruvchilar tushunchalari nimani anglatadi?

14. Ikki chegarali kuchlanishni taqsimlashda hisoblashlar sonining o'sishi qanday bo'ladi.

15. Dinamik dasturlashning rekurrent formulasini keltirib chiqaring.

16. Jihozni almashtirish va ta'mirlash masalasida reja davri qanday aniqlanadi?

17. Jihozni almashtirish va ta'mirlash masalasi uchun, optimal strategiyani aniqlab beruvchi rekurrent formulani keltirib chiqaring.

18. $N = 8$ bo'lganda 5.1-rasm ko'rinishdagi mos atsiklik to'r tuzilsin.

19. 5.1-rasm orqali berilgan to'rda a) 3 va 5; b) 2 va 5; c) 3 va 4; d) faqat 3; e) faqat 4-oraliqlar boshida jihoz almashtirilgandagi harakat va unga mos kelgan xarajat ko'rsatilsin.

20. Kommivoyajyor masalasining qo'yilishi qanday?

21. Jadvalni keltirish nima?

22. Keltirish koeffitsiyenti nima?

23. Xarajatlar jadvali nima?

24. Tarmoqlash juftligi (i, j) qanday usul bilan tanlanadi?

25. Marshrut, sikl nima?

26. To'liq bo'lmagan sikl nima?

27. Sikllar to'plamining quyi chegarasi qanday aniqlanadi?

28. Qaysi paytda masala yechilgan bo'ladi?

29. Optimal sikl qaysi paytda topilgan hisoblanadi?

30. Hali borilmagan eng yaqin shaharga borish algoritmi nima?

31. Hali borilmagan eng yaqin shaharga borish algoritmi optimal siklni aniqlab beradimi?

32. Zaxiralarni taqsimlash masalasida jarayonlar tadqiqoti bosqichlarini qo'llash.

33. Sonli misollarga hali borilmagan shaharga borish usulini qo'llash.

34. Xarajat funksiyasi qavariq bo'lganda zaxirani boshqarish.

35. Kuchlanishni taqsimlash modeli.

36. Chiziqli dasturlash masalalari. Simpleks usul.

37. Chiziqsiz dasturlash masalalari va ularni yechish usullari.

38. Butun sonli chiziqli dasturlash masalalari va ularni yechish usullari.

39. Tarmoqlar va chegaralar usulini butun sonli dasturlash masalalarini yechishda qo'llash.

40. Maksimal oqim masalasini chiziqli dasturlash masalasiga keltirib yechish.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

3.1. Zaxirani boshqarish masalasi mavzusiga doir

1. Quyidagi barcha misollarda oraliqlar soni bir xil bo'lib: $N = 4$ ga teng.

$$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5; z = 0, 1, 2, 3, 4; X(m, j) = X(m) + hj,$$

bu yerda $X(m)$ – ishlab chiqarish xarajati, j – zaxira soni, h – o'lchov birligi. $X(m)$ funksiyaning qiymatlari quyidagicha berilgan: $X(0) = 0$, $X(1) = 15$, $X(2) = 17, X(3) = 19$, $X(4) = 21$, $X(5) = 23$, $h = 1$ yoki 2 qiymatni qabul qiladi. $t = 1, 2, 3, 4$ oraliqlardagi talablar qiymati esa variantga qarab quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{pmatrix},$$

bu yerda E_t lar 1, 2, 3, 4 qiymatlarni qabul qiladi.

3.3. Jihozlarni almashtirish va ta'mirlash masalasi mavzusiga doir

1. Faraz qilaylik, bir, ikki, uch, to'rt va besh ketma-ket oraliqlarda jihozga xizmat ko'rsatish va ta'mirlash xarajatlari

mos ravishda 2, 5, 8, 13 va 16 shartli birlikka teng bo'lsin. Shu bilan birga jihozning ijara davri ketma-ket bir, ikki, uch, to'rt va besh ketma-ket oraliqlardan iborat bo'lsa mos ijara haqqi 2, 4, 9, 12 va 15 shartli birlikka teng bo'lsin. Bu ijara haqlari har bir o'tgan oraliq uchun bir birlikka oshadi.

Masalan, to'rtinchi oraliqning boshida bir, ikki yoki uch ketma-ket oraliqlar uchun, olinadigan jihozning ijara narxi mos ravishda 5, 8 va 11 shartli birlikka teng bo'ladi. Ushbu berilganlar asosida c_{ij} larning qiymatlari topilsin, bunda $N = 6$ deb olinsin.

2. Mahsulotga qimmatbaho jihoz bilan ishlov beriladi. Reja davri 6 yildan iborat bo'lib, har yilning boshida jihozni yangisiga almashtirish yoki eskisi bilan ishlashni davom ettirish mumkin. $i-$ yilning boshida yangi jihozni sotib olish bahosi P_i so'mni tashkil etadi. k yil ishlatilib eskirgan jihozni v_k so'mga sotish mumkin. Yangi jihozni ketma-ket k yil ishlatish uchun, r_k so'm ta'mirlash xarajati talab etiladi: 1) c_{ij} lar hisoblanib mos jadval tuzilsin; 2) mos atsiklik to'r tuzilsin.

3. Reja davri 5 yildan iborat bo'lib, uning oxirida jihoz, albatta sotiladi. Har yilning boshlanishida ikki xil yechim qabul qilish mumkin: jihozni yangisiga almashtirish yoki ta'mirlash bilan undan foydalanishni davom ettirish. Yangi jihozning narxi $_0 = 640$ shartli birlikka teng bo'lsin. Uni $t\,(1 \leq t \leq 5)$ yil ishlatgandan keyingi sotish bahosi $k(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$ ga teng.

Demak, t yil ishlatilgan jihozni yangisiga almashtirish xarajati $p_{tn} = p_0 - k(t) = 640 - 640 \cdot 2^{-t}$ ga teng bo'lar ekan. t yil ishlatilgan jihozni yana bir yil ishlatish uchun, $80(t+1) -$ ta'mirlash xarajati talab etiladi, demak, ixtiyoriy n da: $k_{nt} = 80(t+1)$.

Jihozni boshlang'ich sotib olish va reja davri oxirida sotish narxlarini hisobga olgan holda reja davridagi umumiy xarajatni minimumlashtiruvchi optimal strategiya aniqlansin.

3.4. Kommivoyajyor masalasi mavzusiga doir

Kommivoyajyor masalalarini yeching:

1-variant

	1	2	3	4	5	6
1	∞	16	13	35	41	52
2	19	∞	29	31	26	18
3	57	51	∞	44	51	7
4	5	40	32	∞	14	16
5	33	41	28	3	∞	53
6	19	54	24	10	31	∞

2-variant

	1	2	3	4	5	6
1	∞	39	45	2	51	33
2	30	∞	20	33	40	35
3	54	16	∞	55	22	56
4	19	36	25	∞	18	43
5	29	8	8	12	∞	25
6	16	47	31	14	8	∞

3-variant

	1	2	3	4	5	6
1	∞	31	15	19	8	55
2	19	∞	22	31	7	35
3	25	43	∞	53	57	16
4	5	50	49	∞	39	9
5	24	24	33	5	∞	14
6	34	26	6	3	36	∞

4-variant

	1	2	3	4	5	6
1	∞	19	25	11	2	35
2	37	∞	26	58	21	43
3	10	50	∞	39	22	3
4	38	39	24	∞	38	44
5	27	9	32	9	∞	2
6	33	48	60	53	1	∞

5-variant

	1	2	3	4	5	6
1	∞	14	17	25	54	37
2	57	∞	43	2	13	34
3	7	24	∞	8	9	7
4	13	28	30	∞	56	18
5	26	44	4	52	∞	52
6	18	5	49	14	12	∞

6-variant

	1	2	3	4	5	6
1	∞	41	27	54	46	5
2	42	∞	11	32	58	21
3	36	5	∞	33	22	33
4	46	24	59	∞	49	59
5	48	58	11	44	∞	47
6	26	50	35	19	27	∞

7-variant

	1	2	3	4	5	6
1	∞	6	56	35	48	29
2	34	∞	46	46	55	26
3	29	31	∞	32	13	42
4	26	34	12	∞	17	7
5	38	35	40	13	∞	47
6	60	25	59	36	31	∞

8-variant

	1	2	3	4	5	6
1	∞	4	39	22	10	47
2	58	∞	56	18	4	35
3	34	29	∞	17	57	18
4	52	4	22	∞	15	37
5	41	44	25	11	∞	32
6	11	6	19	2	58	∞

9-variant

	1	2	3	4	5	6
1	∞	21	40	28	60	52
2	58	∞	11	39	22	56
3	22	12	∞	23	14	19
4	25	47	51	∞	20	54
5	47	43	18	42	∞	52
6	44	49	50	52	29	∞

10-variant

	1	2	3	4	5	6
1	∞	44	60	54	29	39
2	53	∞	46	19	42	6
3	36	7	∞	37	44	3
4	21	4	49	∞	14	26
5	15	12	38	46	∞	24
6	19	6	45	57	11	∞

Ko'p tarmoqli korxona 5 xildagi mahsulot ishlab chiqarmoqchi. Bunda i – xil mahsulot ishlab chiqarishdan j – xildagi mahsulot ishlab chiqarishga o'tish xarajati c_{ij} bo'lsin. Ushbu xarajatlarning qiymatlari quyidagi jadval ko'rinishida berilgan bo'lsin. Bunda jadval satri ishlab chiqarilayotgan mahsulot xilini, ustuni esa o'tish mumkin bo'lgan mahsulot xilini bildiradi. Eng kam xarajatli o'tish siklini va mos xarajatni aniqlang.

11-variant

	1	2	3	4	5
1	∞	15	4	20	13
2	10	∞	3	∞	14
3	2	11	∞	2	5
4	25	∞	3	∞	17
5	2	7	18	9	∞

12-variant

	1	2	3	4	5
1	∞	4	33	5	9
2	23	∞	16	9	∞
3	6	17	∞	17	24
4	10	4	∞	∞	12
5	5	22	18	6	∞

Ishlab chiqarilayotgan biror mahsulot xilidan yana shu mahsulot ishlab chiqarishga o‘tishning ma’nosi bo‘lmaganligi sababli jadvalning asosiy diagonaliga nol soni yozildi.

3.5. Ryukzak haqidagi masala mavzusiga doir

Dinamik dasturlash usuli yordamida quyidagi misollar yechilsin:

1. $c = (2,\ 1,\ 4),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ b = (7,5);$

2. $c = (1,\ 1,\ 6),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ b = (7,6);$

3. $c = (1,\ 6,\ 5),\ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ b = (7,7);$

4. $c = (5,\ 3,\ 4),\ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ b = (7,5);$

5. $c = (2,\ 1,\ 1,\ 3),\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ b = (3,3,5);$

6. $c = (3,\ 2,\ 1,\ 3),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ b = (6,7,5);$

7. $c = (4,\ 2,\ 5,\ 6)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b = (5, 7, 8)$;

8. $c = (7,\ 2,\ 3,\ 5)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = (6, 7, 5)$;

9. $c = (7,\ 3,\ 1,\ 5,\ 2)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = (9, 5, 6, 7)$;

10. $c = (6,\ 7,\ 8,\ 3,\ 2)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $b = (8, 7, 6, 7)$.

IV BOB.
OMMAVIY XIZMAT KO'RSATISH. MAKSIMAL OQIM

Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasining yutuqlaridan foydalanishning to'liq bo'lmagan ro'yxati, bular ishlab chiqarish va qishloq xo'jalik korxonalari, xizmat ko'rsatish sohasi (ommaviy ovqatlanish, maishiy xizmat ko'rsatish, suv omborlarida suv satxini bir maromda ushlab turish, suvni tozalash, avtomatik boshqaruv tizimlarini ishlashini tahlil qilish va loyihalash, savdo shaxobchalarida. tibbiyotda tez yordam berish xizmatida, supermarket va bilet sotish kassalarida, bank bo'limlarida, auditorlik firmalarida xizmat ko'rsatish)ni boshqarish va tashkillashtirish. Rasman olib qaralsa, ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi tasodifiy jarayonlar nazariyasining, ommaviy xizmat ko'rsatish tizimiga keluvchi va so'ng uni tark etuvchi xizmat ko'rsatish talablari oqimini tahlil qiluvchi bo'limi hisoblanadi. Bu tahlilning maqsadi xizmat ko'rsatish jarayonini va tizim tarkibini optimal yoki suboptimal tanlab olishdan iboratdir.

Tajribalar shuni ko'rsatadiki, ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasiga taalluqli modellarni amaliyotga qo'llash natijasida: a) aynan bir xil yoki asosiy vazifalari bir xil bo'lgan elementlardan (masalan, avtomatik boshqaruv tizimlari, hisoblash tizimlari va muhitlar, savdo va maishiy xizmat ko'rsatish shaxobchalari tarmog'i) tashkil topgan katta tizimlarni loyihalash va ulardan foydalanish; b) xizmat ko'rsatish jihozlarining(aerovokzallar binolarida ro'yxatdan o'tkazish joylarini, supermarketlarda kassa apparatlarining sonini, ishlab chiqarishda jihozlarning optimal tarkibini izlash) ishlab chiqarish quvvatini va sonini aniqlash.

Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi bo'yicha birinchi bajarilgan ishlar daniyalik olim A. K. Erlang nomi bilan bog'liq. Uning telefon stansiyalarining ishlashini tahlil qilishi va loyihalash bo'yicha yozgan ilmiy ishlari (1908–1922-yillar davomida) telefon tarmoqlarining ishini boshqarish masalalariga katta qiziqish uyg'otdi va keyinchalik ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasining matematik nazariya sifatida shakllanishiga yordam berdi (Erlang formulalalari ma'lum).

Erlang tomonidan olingan natijalarni D. Yul 1924-yili rivojlantirib, evolyutsiya nazariyasining masalasini yechish davomida, sof ko'payish jarayoni tushunchasini ta'rifladi. XX asrning, taxminan 30-yillarida V. Feller *ko'payish va nobud bo'lish* jarayoni tushunchasini kiritdi. Bular bilan bir qatorda A. N. Kolmogorov (Kolmogorov tenglamasi), A. YA. Xinchin (1932) va F. Pollachek (1934, Pollachek–Xinchin formulasi)lar tomonidan ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi bo'yicha fundamental natijalar olindi. 60–70-yillar davomida B. V. Gnedenko, A. A. Borovkov tomonidan ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi bo'yicha asosiy ishlar qilindi va muhim natijalarga erishildi.

Hozirgi vaqtga kelib ommaviy xizmat ko'rsatish, alohida fan sifatida tan olinib, o'zining tadqiqot sohalari bo'lib, kelib chiqadigan muammolarni o'z usullari yordamida yechib kelmoqda.

Afsuski, model tuzishda idrok qilish sodda bo'lmagan matematik apparat ishlatiladi, olingan formulalar murakkab va tasavvur qilish qiyin, zero ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi masalalari tushunarli, hatto ayrim hollarda oddiydir.

Murakkab formulalar bo'lganligi uchun, ko'p modellar og'zaki tavsiflanadi, ayrimlariga grafik usullar ishlatilib, keyin matematik model qo'llaniladi. Bunday noodatiy yondashish, ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasining predmeti navbatta turib kutishdir. Shu sababli Amerika Qo'shma Shtatlarida ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi navbat kutish nazariyasi (Theory of Queues) deb ataladi.

1-§. Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi

Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi usullarini ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlariga qo'llash orqali amaliy jihatdan muhim bo'lgan natijalarga erishish mumkin. Bunda, albatta, ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlari deganda nima tushuniladi, u nimalardan tarkib topgan, uning ishlash qonun-qoidalari haqida ma'lumotga ega bo'lmasdan biror natijaga ega bo'lib bo'lmaydi. Shuning uchun, u haqida asosiy bo'lgan tushunchalarni keltirib o'tamiz.

Ixtiyoriy ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlari, albatta, xizmat ko'rsatish jihozlariga ega bo'lishi kerak, bular, masalan, aloqa tizimlari, kassa, sotuvchi, liftlar, avtomashinalar va boshqalar. Bu jihozlar xizmat *ko'rsatish kanallari* deb ataladi. Shu o'rinda, ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlari bir kanalli yoki ko'p kanalli bo'lishi mumkinligini ta'kidlaymiz.

Har bir ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi tasodifiy vaqtlarda paydo bo'ladigan biror *talablar oqimi* (yoki ehtiyojlar oqimi)ga xizmat ko'rsatishga mo'ljallangan bo'ladi. Tushgan talabga, umuman olganda, xizmat ko'rsatish vaqt oralig'i ham tasodifan bo'lib, xizmat ko'rsatilgandan so'ng talab xizmat ko'rsatish kanalini tark qiladi. Shundan keyin bo'shab qolgan kanal navbatdagi talabni qabul qilib olish imkoniyatiga ega bo'ladi. Talablar oqimining va ularga xizmat ko'rsatish vaqtlarining tasodifiyligi, ayrim paytlarda navbat kutib turish, ayrim paytlarda ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlarida to'la band bo'lmaslik yoki butunlay to'xtab turish hollarini keltirib chiqaradi.

Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlari ishlashi tasodifiy bo'lib, vaqt bo'yicha uzluksiz, sodir bo'layotgan hodisalar (yangi talab kelib tushishi, xizmat ko'rsatishning tugashi, yoki biror talabning navbat kutishni tark etishi)ning ro'y berishi holatlari bo'yicha diskretdir.

Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasining predmeti – ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlarining ishlash shart-sharoitlari (kanallar soni, ularning samaradorligi, ishlash qonun-qoidalari, talablar oqimining xususiyatlari) bilan bizni qiziqtirgan baho – ommaviy xizmat ko'rsatish tizimining effektivligining ko'rsatkichi orasidagi bog'liqlikni ifoda etuvchi matematik modelni qurishdir. Bunday ko'rsatkichlar sifatida (mavjud holatlarga va tadqiqot maqsadiga bog'liq ravishda) turli kattaliklar tatbiq etilishi mumkin, masalan, birlik vaqtda xizmat ko'rsatiladigan talablarning o'rtacha soni, band bo'lgan kanallarning o'rtacha soni, navbatta turgan talablarning o'rtacha soni va ularning o'rtacha kutish vaqtlari, navbatda turgan talablarning soni biror sondan kam bo'lmasligining ehtimoli va boshqalar.

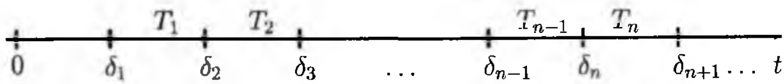
Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlari ayrim alomatlariga qarab turlarga (sinflarga) ajratiladi. Bulardan: xizmat ko'rsatishning *rad etilishi va navbat kutish.* Xizmat ko'rsatishning rad etilishi, bu barcha kanallar band bo'lganda ro'y beradi, bunda xizmat ko'rsatishdan rad etilgan talab tizimni tark qiladi va unga xizmat ko'rsatilmaydi. Bunga misol, telefon kanallarining barchasi band bo'lganda xizmat ko'rsatishga rad javobi beriladi va bu talab xizmat ko'rsatish tizimini tark qiladi. Xizmat ko'rsatishning navbat kutish holatida, agar barcha kanallar band bo'lsa, shu paytda kelib tushgan talab xizmat ko'rsatishni kutib navbatga turadi.

Xizmat ko'rsatishning navbat kutish turida navbat kutish qanday tashkil qilinganiga qarab *navbat chegaralangan yoki chegaralanmagan* bo'lishi mumkin. Bunda chegaralanganlik bevosita chegaralangan navbat uzunligiga, yoki navbat kutish vaqtiga tegishli bo'lishi mumkin. Ommaviy xizmat ko'rsatishni tadqiq qilishda, uning kutish tartibi, ya'ni oldin tushgan talabga birinchi bo'lib xizmat ko'rsatish, yoki xizmat ko'rsatish uchun, tasodifiy tanlab olish qoidalari amal qilishi mumkin. Ammo xizmat ko'rsatish talabning *muhimlik darajasiga* qarab tanlanishi mumkin. Bunda muhimlik darajasi mutlaq (masalan, inson hayoti bilan bog'liq bo'lgan hodisaga birinchi o'rinda xizmat ko'rsatish) yoki nisbatan (bunda, xizmat ko'rsatish boshlangan talab oxiriga yetkaziladi, muhimlik darajasi yuqori bo'lgan talab navbat kutishda hisobga olinadi) bo'lishi mumkin.

Bulardan tashqari ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi ikki sinfga bo'linadi: *ochiq va yopiq*. Ochiq ommaviy xizmat ko'rsatish tizimida talablar oqimi xususiyati xizmat ko'rsatish kanallarining holatiga bog'liq emas. Yopiqda esa bog'liq bo'ladi (masalan, chekli sondagi jihozlarga xizmat ko'rsatish jarayonida, ravshanki, talablarning intensivligi (jadalligi) xizmat ko'rsatish uchun, navbat kutib turgan jihozlar soniga bog'liqdir). Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlarini sinflarga ajratish bu bilan tugamaydi, yana davom ettirish mumkin.

Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlarini optimallashtirish masalasi, ancha murakkab bo'lib, unga qaysi nuqtayi nazardan qaralishiga bog'liq. Masalan, ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlarining rahbarlari barcha kanallarning to'la quvvat bilan ishlashini ma'qul ko'rishsa, xaridorlarga esa navbat kutish bo'lmasligi ma'qul, ammo qo'shimcha kanallar qurish ortiqcha xarajat sarflanishiga olib keladi. Shuning uchun, ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlarini optimallashtirish masalasini yechishga sistemali, to'la, uyg'un va birgalikda yondashib qarash zarur bo'ladi. Matematik modelni qurish bilan, ma'qul va ma'qul bo‘lmagan jihatlarni hisobga olgan holda, kanallar sonini oqilona oraliqda ushlab turishning optimallashtirish masalasini yechish mumkin bo‘ladi. Shu sababli ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimlarining masalalarini yechishda biror aniq kriteriya tanlab olinmasdan, u ko‘p kriteriyali masala kabi qaraladi.

Bunda, asosiy maqsad xizmat ko‘rsatish tizimining tarkibini va xizmat ko‘rsatish jarayonini oqilona tanlashdan iborat. Buning uchun, albatta, effektiv ishlash darajasini aniqlab beruvchi ko‘rsatkich kerak bo‘ladi. Masalan, k ta jihozning bandlik, yoki band bo‘lmaslik ehtimoli, xizmat ko‘rsatishdan ozod yoki band jihozlarning taqsimot ehtimolliklari, berilgan sondagi talablarning navbatda bo‘lishlik ehtimoli, navbat kutish vaqti berilgan sondan katta bo‘lish ehtimoli. Xizmat ko‘rsatish tizimining o‘rtacha effektivlik darajasini aniqlash uchun, olish mumkin: navbatning o‘rtacha soni, navbatda turishga ketadigan o‘rtacha vaqt, band jihozlarning o‘rtacha soni, jihozlarning o‘rtacha turib qolish vaqti, tizimni o‘rtacha yuklanganlik koeffitsiyenti va boshqalar. Aksariyat hollarda, iqtisodiy ko‘rsatkichlar tanlab olinadi. Matematik model tuzish, sonli natijalarga erishish va ko‘rsatkich darajalarini tahlil qilish bilan ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi shug‘ullanadi. Jarayonlar tadqiqoti faniga bag‘ishlangan deyarli barcha adabiyotlarda ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi haqida bo‘limlar mavjuddir.



1.1-rasm

Talablar oqimi. Vaqt o‘qida tasodifiy joylashgan $\delta_1 < \delta_2 < ... < \delta_n$ momentlar, demak, tasodifiy $T_i = (\delta_{i+1} - \delta_i)$, $i \in N$ oraliqlar berilgan bo‘lsin. Ularni xizmat ko‘rsatish tizimiga kelib tushadigan talablar bilan taqqoslash mumkin. Ya'ni, δ_i vaqt momentlarini talablarni ketma-ket kelib tushishi vaqtlari deb faraz etish mumkin. U holda T_i lar talablarning kelib tushish oraliqlarini bildiradi. Tasodifiy miqdor bo'lgan T_i larning taqsimot qonunlariga, ularning birgalikda yoki biralikda bo'lmasligiga, regulyar bo'lishligiga va boshqalarga ko'ra talablar oqimi farqlanadi.

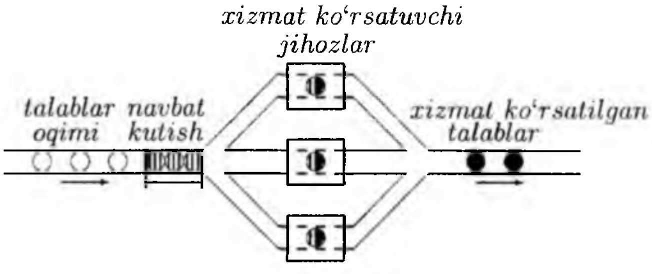
Bular ichidan quyidagi xossalarga ega bo'lgan talablar oqimi ko'proq o'rganilgan:

1) *statsionarlik* – uning barcha ehtimollik xususiyatlari vaqtga bog'liq emas(masalan, jihozlarga, telefon chaqiruvlariga xizmat ko'rsatish holatlari);

2) *keyingi ta'sirning yo'qligi* – vaqt o'qida biror vaqtdan keyin paydo bo'ladigan talablar soni, undan oldingi vaqt davomida kelib tushgan talablar soniga bog'liq emas (masalan, avtomat telefon stansiyalaridagi jihozlarga xizmat ko'rsatish);

3) *o'rtamiyonachilik* – vaqt o'qining yetarlicha kichik oralig'ida faqat bitta talab kelib tushishi mumkin (masalan, avtomat telefon stansiyalaridagi xizmat ko'rsatish).

1.2-rasmda uchta xizmat ko'rsatuvchi jihozdan iborat bo'lgan ommaviy xizmat ko'rsatish tizimining umumiy modeli keltirilgan.



1.2-rasm

Yuqoridagi xossalarni formallashtirish uchun, *jadallik* tushunchasini kiritamiz. $p_i(t, \Delta t)$ bilan $(t, t + \Delta t)$ oraliqda i ta talabning kelib tushish ehtimoli belgilansin. Birgalikda bo'lmagan to‘la ehtimollikni ko‘raylik, aniqlanishiga asosan

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(t, \Delta t) = 1. \tag{1.1}$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz: $p_{>1}(t, \Delta t) = \sum_{i=2}^{\infty} p_i(t, \Delta t)$ Δt vaqt oralig‘ida bittadan ko‘p talab tushish ehtimoli. (1.1)-tenglikka asosan:

$$p_0(t, \Delta t) + p_1(t, \Delta t) + p_{>1}(t, \Delta t) = 1.$$

bo‘ladi. O‘rtamiyonalik xossasiga ko‘ra,

$$p_{>1}(t, \Delta t) = o(\Delta t)$$

ga ega bo‘lamiz, bu yerda $o(\Delta t)$– $p_0(t, \Delta t)$ va $p_1(t, \Delta t)$ ehtimolliklarning eng kichigiga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdordir.

$M(\xi(t, \Delta t))$ bilan Δt oraliqda paydo bo‘ladigan talablar sonining o‘rtacha matematik kutilmasi belgilangan bo‘lsin. U holda ta’rifga asosan

$$M(\xi(t, \Delta t)) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_i(t, \Delta t).$$

O‘rtamiyonalikni hisobga olgan holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$M(\xi(t, \Delta t)) = 0 \cdot p_0(t, \Delta t) + 1 \cdot p_1(t, \Delta t) + \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot o(\Delta t)$$

yoki cheksiz kichikning xossasiga ko‘ra,

$$M(\xi(t, \Delta t)) = p_1(t, \Delta t) + o(\Delta t),$$

ni hosil qilamiz.

Quyidagi belgilashni kiritaylik:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(\xi(t, \Delta t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_1(t, \Delta t)}{\Delta t}. \tag{1.2}$$

1-ta'rif. (1.2)-tenglik bilan aniqlangan t parametrli $\lambda(t)$ funksiya talablar oqimining t momentdagi *jadalligi (zichligi)* deb ataladi.

Bu funksiyaning standart talqini – $(t, t + \Delta t)$ oraliqda birlik vaqtda paydo bo'ladigan talablarning o'rtacha soni.

1-misol. O'rtamiyona talablar oqimi uchun, $(t, t+\tau)$ oraliqda paydo bo'ladigan talablarning o'rtacha soni:

$$M(\xi(t, \tau)) = \int_t^{t+\tau} \lambda(s)\, ds$$

ga teng, agar talablar oqimi statsionar bo'lsa,

$$M(\xi(t, \tau)) = \lambda \cdot \tau$$

bo'ladi.

Keyingi ta'sirning yo'qligi quyidagicha tavsiflanadi. $p_n(t+\tau) = p_n(t, \tau)$ tenglik t momentda nk sondagi talab bo'lgan holda $(t, t + \tau)$ oraliqda k sondagi talabning paydo bo'lish shartli ehtimolini bildirsin. U holda keyingi ta'sirning yo'qligi xossasi quyidagi tenglik bilan ifodalanadi:

$$p_n(t + \tau) = p_{n-k}(t) \cdot p_k(\tau), \;\; k = 0,\, 1, \ldots, n.$$

Xususan, $\tau = \Delta t$ va $k = 1$ da quyidagi hosil bo'ladi:

$$p_n(t + \Delta t) = p_{n-1}(t) \cdot p_1(\Delta t).$$

2-ta'rif. Talablar oqimi *sodda* deb ataladi, agar u quyidagi xossalarga ega bo'lsa:

1) statsionarlik: $\lambda = const$;

2) keyingi ta'sirning yo'qliligi: $p_{n+k}(t+\Delta t) = p_n(t) \cdot p_k(\Delta t)$;

3) o'rtamiyonalik: $p_{>1}(t+\Delta t) = o(\Delta t)$.

Ko'rsatamizki, agar talablar oqimi sodda bo'lsa, qo'shni talablarning paydo bo'lishi oraliqlaridan iborat bo'lgan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi *ko'rsatkichli (eksponensial)* bo'lib, zichlik funksiyasi

$$\rho(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t},\ \lambda > 0,\ t \in [0, \infty) \tag{1.3}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Quyidagilar bevosita sodda oqim ta'rifidan kelib chiqadi:

1) ixtiyoriy $\Delta t > 0$ uchun, talabning paydo bo'lish ehtimoli noldan katta;

2) agar tizim $t = 0$ momentda o'z faoliyatini boshlasa, u holda birinchi talabning paydo bo'lish momenti $t > 0$ bo'ladi.

Quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$f(t) = 1 - \int_0^t \rho(s)\, ds. \tag{1.4}$$

Agar $\rho(t)$ – zichlik bo'lsa, $f(t) = P\{t$ momentdan keyin birinchi talab paydo bo'ldi$\}$.

Keyingi ta'sirning yo'qligi xossasidan

$$f(t+\Delta t) = f(t) \cdot f(\Delta t),\ \forall t \in [0, \infty),\ \Delta t > 0 \tag{1.5}$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu (1.5)-tenglikning ikkala tarafidan $f(t)$ ni ayrib tashlaymiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$f(t+\Delta t) - f(t) = f(t) \cdot (1 - f(\Delta t)).$$

Buning ikkala tarafini Δt ga bo'lib, limitga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = -f(t) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - f(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Agar limit mavjud bo‘lsa, uni

$$\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - f(\Delta t)}{\Delta t} > 0$$

bilan belgilab quyidagilarni hosil qilamiz:

$$f'(t) = -\lambda \cdot f(t), \text{ bu yerda } f(0) = 1.$$

Bu differensial tenglamaning yechimi: $f(t) = e^{-\lambda t}$ bo‘ladi. Uni (1.4) ga olib borib qo‘yish bilan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$e^{-\lambda t} = 1 - \int_0^t \rho(s)\, ds. \tag{1.6}$$

(1.6) ni differensiallash orqali aytilgan da’voning to‘g‘riligiga ishonch hosil qilamiz, ya’ni:

$$\rho(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}.$$

Quyidagi funksiyani aniqlaymiz:

$$V_k(t) \equiv P\{(0,\text{t}) \text{ intervalda k ta talab paydo bo‘ladi}\}.$$

Keyingi ta’sirning yo‘qligi xossasini hisobga olgan holda. svertkadan(o‘ramadan) foydalanishimiz mumkin: $k \in N$

$$V_k(t) = \int_0^t V_{k-1}(t-s) \cdot \rho(s)\, ds = \int_0^t V_{k-1}(s) \cdot \rho(t-s)\, ds. \tag{1.7}$$

(1.3)-formuladan foydalanib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$V_k(t) = \int_0^t V_{k-1}(s) \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (t-s)}\, ds. \tag{1.8}$$

$\rho(t)$ funksiya va (1.7)-formulaga ko‘ra,

$$V_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

tenglik kelib chiqadi.

(1.8) ni t bo'yicha differensiallash bilan quyidagi:

$$\frac{dV_k(t)}{dt} = -\lambda \cdot V_k(t) + \lambda \cdot V_{k-1}(t),\ k \in N \qquad (1.9)$$

differensial tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

(1.9)-rekurrent differensial tenglamalar sistemasi bo'lib, u $V_k(0) = 0$, $k \in N$ boshlang'ich shartlar ostida $k = 1$ dan boshlab yechiladi. Uning yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$V_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t},\ k = 0, 1, \ldots . \qquad (1.10)$$

(1.10)-formula diskret holatli uzluksiz vaqtli Puasson jarayonini aniqlaydi.

Agar biror tizimda bir holatdan boshqa holatga o'tish sodda oqim shartlarini bajarsa, unda u uzluksiz vaqtli *Puasson jarayoni* deb ataladi.

Puasson jarayoni ajoyib xossalarga ega, ulardan foydalangan holda, ommaviy xizmat ko'rsatish sistemalarida qo'llaniladigan (1.9) tenglamalar sistemasini oson hosil qilish mumkin bo'ladi.

Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlari

Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi deb, quyidagi elementlardan tashkil topgan majmuaga aytiladi: a) xizmat ko'rsatishga muhtoj bo'lgan kiruvchi talablar oqimi; b) xizmat ko'rsatish mexanizmi; c) xizmat ko'rsatish tartibi.

Kiruvchi talablar oqimi. Kiruvchi oqimni tavsiflash uchun, xizmat ko'rsatish talablarining kelib tushish momentlarini va kelib tushish sonini (talab bittalab tushadimi yoki guruh bo'lib) aniqlaydigan ehtimollik qonuni berilgan bo'lishi kerak. Bunda xizmat ko'rsatish jihozlarining band yoki band emasligiga bog'liq ravishda tushgan talabga xizmat ko'rsatish o'sha paytdan yoki keyin, navbat bilan bo'lishi mumkin.

Xizmat ko'rsatish tartibi. Bu tavsif ko'rinishda bo'lib, "birinchi kelganga birinchi xizmat" yoki "oxirgi kelganga birinchi xizmat" (muhimlik darajasiga binoan) qoidasi bo'yicha, yoki xizmat ko'rsatish tartibi tasodifan bo'lishi mumkin.

Xizmat ko'rsatish mexanizmi xizmat ko'rsatish davomiyligi va jarayoni bilan bog'liq. Xizmat ko'rsatish "bitta talab – bitta xizmat" tamoyiliga amal qilishi mumkin. Agar tizimda bir nechta jihoz mavjud bo'lsa, u holda parallel bir nechta talablarga xizmat ko'rsatish mumkin. Aksariyat hollarda guruhlab xizmat ko'rsatiladi, ya'ni bir vaqtda bir nechta jihozlar bilan talabga xizmat ko'rsatiladi. Ayrim hollarda xizmat ko'rsatish ketma-ket jihozlar orqali amalga oshiriladi, bu *ko'p fazali* xizmat ko'rsatish deyiladi.

2-misol. Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi n ta parallel kanallardan iborat bo'lib, unga α jadalikka ega bo'lgan tasodifiy talablar oqimi keladi. Qo'shni talablarning paydo bo'lish oraliqlari tasodifiy miqdor ξ bo'lib, Puasson jarayonini tashkil qiladi:

$$V_k(t) = \frac{(\alpha \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\alpha t},$$

bu yerda $V_k(t) - t$ vaqt davomida k ta talab kelib tushish ehtimoli, $\alpha -$ vaqt birligida o'rtacha kelib tushadigan talablar soni.

Mabodo, talab paydo bo'lganda barcha jihozlar band bo'lishsa, u xizmat qilishni kutib navbatga turadi. Jihozlarning xizmat ko'rsatish vaqtlari tasodifiy miqdor η bo'lib, uning taqsimot funksiyasi, eksponensial

$$F(t) = P\{\eta < t\} = 1 - e^{-\beta t}$$

ko'rinishga ega, bu yerda $\beta = 1/t_{\text{o'rt}} -$ talabga xizmat ko'rsatishning o'rtacha vaqti. Har bir jihoz ixtiyoriy $t \in [0, \infty)$ vaqt momentida bittadan ortiq talabga xizmat ko'rsata olmaydi. Xizmat ko'rsatilgan talab tizimni tark qiladi. Mazkur tizimning ishlash afzalligi tahlil qilinsin.

Yechish. $p_k(t)$ bilan tizimda t vaqtda k ta talab bo'lish ehtimolini belgilaymiz. Δt – yetarlicha kichik vaqt oralig'i bo'lsin. Δt vaqt davomida tizimga birorta ham talab kelib tushmaslik ehtimoli:

$$V_0(\Delta t) = e^{-\alpha\cdot\Delta t} = 1 - \alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t).$$

Δt vaqt davomida tizimga bitta talab kelib tushishlik ehtimoli:

$$V_1(\Delta t) = \frac{(\alpha \cdot \Delta t)}{1!} \cdot e^{-\alpha\cdot\Delta t} = \alpha \cdot \Delta t.$$

Δt vaqt davomida tizimga ikkita va undan ortiq talab kelib tushishlik ehtimoli:

$$\sum_{k=2}^{\infty} V_k(\Delta t) = 1 - V_0(\Delta t) - V_1(\Delta t) = (\alpha \cdot \Delta t)^2 + ... = o(\Delta t).$$

Xuddi shunga o'xshash Δt vaqt davomida talabga xizmat ko'rsatish ehtimoli:

$$1 - e^{\beta\cdot\Delta t} = \beta \cdot \Delta t + o(\Delta t).$$

Δt vaqt davomida ikkita va undan ortiq talabga xizmat ko'rsatish ehtimoli:

$$\frac{(\alpha \cdot \Delta t)^2}{2!} + ... = o(\Delta t).$$

Δt vaqt davomida tizimdagi k talablarning bittasiga xizmat ko'rsatish ehtimolini quyidagicha topamiz: $P\{\Delta t$ vaqt davomida talabga xizmat ko'rsatilmaydi$\} = e^{-\beta\cdot\Delta t}$;

$P\{\Delta t$ vaqt davomida k ta talabning hech biriga xizmat ko'rsatilmaydi$\} = \left(e^{-\beta\cdot\Delta t}\right)^k = 1 - k \cdot \beta \cdot \Delta t + o(\Delta t)$;

$P\{\Delta t$ vaqt davomida k ta talabning bittasiga xizmat ko'rsatiladi$\} = 1 - e^{-k\cdot\beta\cdot\Delta t} = k \cdot \beta \cdot \Delta t + o(\Delta t)$.

$P\{\Delta t$ vaqt davomida bittadan ortiq hodisaning (masalan, biror talab tushadi va birortasiga xizmat ko'rsatiladi) ro'y berish ehtimoli$\}$ Δt ga nisbatan cheksiz kichik miqdor.

$0 \leq k \leq n-1$ uchun, ayrimali tenglamaga ega bo'lamiz:

$$p_k(t+\Delta t) = p_k(t)\cdot(1-\alpha\cdot\Delta t+o(\Delta t))\cdot(1-k\cdot\beta\cdot\Delta t+o(\Delta t))+$$

$$p_{k-1}(t)\cdot(\alpha\cdot\Delta t+o(\Delta t))+p_{k+1}(t)\cdot((k+1)\cdot\beta+o(\Delta t)+o(\Delta t). \quad (1.11)$$

Bunda, tenglamani keltirib chiqarishda to'la ehtimollik va Puasson jarayonining xossalaridan foydalanildi.

(1.11)-formulaning so'z talqini quyidagicha: $t+\Delta t$ vaqt momentida tizimda $k(k \leq n-1)$ ta talab bo'lishlik ehtimoli teng t momentda tizimda k ta talab bo'lib, birorta talab kelib tushmadi va birortasiga xizmat ko'rsatilmadi plyus t momentda tizimda $(k-1)$ ta talab bo'lib Δt vaqt davomida bitta talab kelib tushdi plyus t momentda tizimda $(k+1)$ ta talab bo'lib, Δt vaqt davomida $(k+1)$ talablarning bittasiga xizmat ko'rsatildi plyus Δt vaqt davomida bittadan ortiq hodisa ro'y berdi.

(1.11)-tenglamani o'zgartirib, quyidagi holga keltiramiz:

$$p_k(t+\Delta t)-p_k(t) = -(\alpha+k\cdot\beta)\cdot\Delta t\cdot p_k(t)+\alpha\cdot\Delta t\cdot p_{k-1}(t)+$$

$$+(k+1)\cdot\beta\cdot\Delta t\cdot p_{k+1}(t)+o(\Delta t).$$

Uning ikkala tarafini Δt ga bo'lib limitga o'tamiz:

$$p_k'(t) = -(\alpha+k\cdot\beta)\cdot p_k(t)+\alpha\cdot p_{k-1}(t)+(k+1)\cdot\beta\cdot p_{k+1}(t), 1 \leq k \leq n-1.$$

Xizmat ko'rsatuvchi jihozlar n ta bo'lganligi sababli $k \geq n$ uchun, Δt vaqt oralig'i davomida n ta talabdan bittadan ko'p bo'lmaganiga xizmat ko'rsatilishi mumkin.

qilib $k \geq n$ da quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$p_k(t+\Delta t) = p_k(t)\cdot(1-\alpha\cdot\Delta t+o(\Delta t))\cdot(1-k\cdot\beta\cdot\Delta t+o(\Delta t))+$$

$$p_{k-1}(t)\cdot(\alpha\cdot\Delta+o(\Delta t))+p_{k+1}(t)\cdot(n\cdot\beta\cdot\Delta t+o(\Delta t)+o(\Delta t).$$

Ayrim amallarni bajarish orqali quyidagiga ega bo'lamiz:

$$p_k'(t) = -(\alpha+k\cdot\beta)\cdot p_k(t)+\alpha\cdot p_{k-1}(t)+n\cdot\beta\cdot p_{k+1}(t).$$

$k = 0$ da $p_{k-1} = p_{-1} = 0$ bo'ladi. Buni hisobga olgan holda

$$p_0(0) = 1,\ p_k(0) = 0,\ \forall k \geq 1,$$

boshlang'ich shartli quyidagi:

$$p_0'(t) = -\alpha p_0(t) + \beta p_1(t);\ \ p_k'(t) = -(\alpha + k\beta)p_k(t) +$$

$$+\alpha p_{k-1}(t) + (k+1)\beta p_{k+1}(t),\ 1 \leq k \leq n-1;$$

$$p_k'(t) = -(\alpha + n\beta)p_k(t) + \alpha p_{k-1}(t) + n\beta p_{k+1}(t).\ k \geq n, \tag{1.12}$$

differensial tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

Ushbu differensial tenglamalar sistemasi "tug'ilish va nobud bo'lish" ning modeli bo'lib, uning yechimini topish ayrim qiyinchiliklarga olib keladi. Aksariyat real tizimlar tezda statsionar faoliyat holatiga o'tib, algebraik tenglamalar sistemasi bilan tavsiflanadi. Bu esa zarur formulalarni olishni yengillashtiradi va tahlil qilishni osonlashtiradi. Haqiqatan, agar $\alpha/(n\cdot\beta) < 1$ bo'lsa, tizim ergodik bo'ladi, ya'ni

$$\forall k,\ (\lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k > 0)\ \text{va}\ (\lim_{t\to\infty} p_k'(t) = 0).$$

Bu bilan (1.12)-sistema bir jinsli chiziqli algebrayik tenglamalar sistemasiga keladi:

$$\begin{cases} 0 = -\alpha p_0 + \beta p_1; \\ 0 = -(\alpha + k\beta)p_k + \alpha p_{k-1} + (k+1)\beta p_{k+1},\ 1 \leq k \leq n-1; \\ 0 = -(\alpha + n\beta)p_k + \alpha p_{k-1} + n\beta p_{k+1},\ \ k \geq n. \end{cases} \tag{1.13}$$

(1.13)-sistemaning yechimi yagonaligini ta'minlash uchun, tabiiy bo'lgan, normallashtirish shartini kiritish kerak bo'ladi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \tag{1.14}$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{cases} z_k = k \cdot \beta \cdot p_k - \alpha \cdot p_{k-1}, \ k = 1, 2, ..., n; \\ \widetilde{z}_k = n \cdot \beta \cdot p_k - \alpha \cdot p_{k-1}, \ k > n. \end{cases} \tag{1.15}$$

Bu belgilashlardan so'ng (1.13)-sistema quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} z_0 = 0; \\ z_k - z_{k-1} = 0; \\ \widetilde{z}_k - \widetilde{z}_{k-1} = 0. \end{cases}$$

Bundan $\forall k$, $z_k = 0$, $\widetilde{z}_k = 0$ ga ega bo'lamiz. (1.15) belgilashdan quyidagini:

$$\begin{cases} k \cdot \beta \cdot p_k = \alpha \cdot p_{k-1}, \ k = 1, 2, ..., n; \\ n \cdot \beta \cdot p_k = \alpha \cdot p_{k-1}, \ k > n. \end{cases}$$

Endi barcha ehtimolliklarni p_0 orqali ifodalaymiz. $k = 1$ da

$$p_1 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot p_0$$

bo'ladi. $1 < k \leq n$ da

$$p_k = \frac{\alpha}{k \cdot \beta} \cdot p_{k-1} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot k! \cdot p_0,$$

bo'ladi. $k > n$ da

$$p_k = \left(\frac{\alpha}{n \cdot \beta}\right)^{n-k} \cdot p_n, \ \text{yoki} \ p_k = \frac{\alpha^k}{n! \cdot n^{k-n} \cdot \beta^k} \cdot p_0$$

bo'ladi. p_0 ni aniqlash uchun, (1.14) dan foydalanamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot p_0 + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{n! \cdot n^{k-n}} \cdot p_0 = 1.$$

Elementar almashtirishlardan keyin quyidagiga ega bo'lamiz:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{n \cdot \beta}\right)^s \right)^{-1}.$$

$\alpha/(n \cdot \beta) < 1$ ekanligini hisobga olib, yaqinlashuvchi

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{n \cdot \beta}\right)^s = \frac{1}{1 - \alpha/(n \cdot \beta)}$$

qatorni hosil qilamiz

Oxirgi natija:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \frac{1}{n!(1 - \alpha/(n \cdot \beta))} \right)^{-1};$$

$$p_k = \begin{cases} \frac{(\alpha/\beta)^k}{k!} \cdot p_0, \ 1 \le k \le n-1; \\ \\ \frac{(\alpha/\beta)^k}{n! \cdot n^{k-n}} \cdot p_0, \ k \ge n, \ (\alpha/(n \cdot \beta) < 1). \end{cases}$$

Izoh. $\alpha/(n \cdot \beta) < 1$ – tengsizlik kiruvchi oqimning chiquvchi oqimdan kichik ekanligini bildiradi, aks holda qator uzoqlashuvchi bo'lib, tizim yechimga ega bo'lmaydi.

Agar p_k lar ma'lum bo'lsa, u holda ayrim effektivlik ko'rsatkichlarini, sodda oqim va ehtimolliklarning, parametrlarning fizik xossasalaridan foydalangan holda hosil qilish mumkin:

1) $P\{\text{tizimda talab yo'q}\} = p_0$;

2) $P\{\text{ k ta jihoz band} | k < n\} = p_k$;

3) $\Pi = P\{\text{tizimdagi barcha jihozlar band}\}$,

$$\Pi = \sum_{k=n}^{\infty} p_k$$

yoki p_k larning aniqlanishiga asosan:

$$\Pi = \frac{(\alpha/\beta)^n}{(n-1)!(n - \alpha/\beta)} \cdot p_0;$$

4) $P\{\tau > t_0\} = P\{\text{ixtiyoriy talabning kutish vaqti } \tau \text{ berilgan } t_0 | t_0 \in [0, \infty) \text{ sondan katta}\}$.

Sodda oqimlarning parametrlari additiv xossaga ega bo'lganligi uchun, eksponensial ko'rinishdagi statsionar rejimda ishlaydigan tizimlarning jadallik parametri $n \cdot \beta - \alpha$ ga teng bo'lib, u taqsimot funksiyasi eksponensial bo'lgan kutish vaqti τ davomida talabning harakatlanish tezligini bildiradi. Bundan kelib chiqadiki, $e^{-(n \cdot \beta - \alpha)t_0} - t_0$ vaqt davomida birorta ham talabga xizmat ko'rsatilmaslik ehtimolini bildiradi (navbat kutishda siljish ro'y bermadi).

Π – navbatning bor bo'lishlik ehtimoli ekanligini hisobga olgan holda quyidagini:

$$P\{\tau > t_0\} = \Pi \cdot e^{-(n \cdot \beta - \alpha)t_0}$$

hosil qilamiz;

5) t_0 – navbatda turgan ixtiyoriy talabning o'rtacha kutish vaqti.

Tizim statsionar rejimda faoliyat ko'rsatsa, p_k ehtimolliklar tizimning C_0 holatda bo'lishligi uchun, zarur bo'lgan vaqt birligi ulushini bildiradi (bunda vaqt birligi sifatida jadallikning o'lchov birligini olish mumkin). Demak, tizimda navbat paydo bo'lishligining vaqt ulushi Π ga teng bo'ladi. Boshqa tarafdan, $n \cdot \beta - \alpha$ – vaqt birligida navbatda turgan talablarning xizmat qilish jihoziga kelib tushishining o'rtacha soni. Bundan ixtiyoriy talabning $t_{o'rt}$ vaqti uchun, quyidagi:

$$t_{o'rt} = \Pi / (n \cdot \beta - \alpha)$$

tenglikni hosil qilamiz;

6) Agar A – navbatning o'rtacha uzunligi bo'lsa,

$$A = \sum_{k=n+1}^{\infty} (k - n) \cdot p_k = \frac{(\alpha / n \cdot \beta)}{(1 - \alpha / n \cdot \beta)^2} \cdot p_n$$

bu yerda $p_n = \frac{(\alpha/\beta)^n}{n!} \cdot p_0$;

7) Agar B – xizmat ko'rsatilgan talablarning o'rtacha soni bo'lsa,

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot p_k + n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} p_k$$

yoki

$$B = p_0 \cdot \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\alpha/\beta)^k}{(k-1)!} + \frac{(\alpha/\beta)^n}{(n-1)! \cdot (1 - \alpha/n \cdot \beta)} \right];$$

8) Agar R – tizimdagi talablarning o'rtacha soni:

$$R = A + B;$$

9) Agar L – talabning tizimda o'rtacha bo'lishlik vaqti:

$$L = \Pi/(n \cdot \beta - \alpha) + 1/\beta;$$

10) Agar K_3 – tizimning o'rtacha yuklanganlik koeffitsiyenti:

$$K_3 = B/n.$$

Yuqorida keltirilgan effektivlik ko'rsatkichlari tizimning faoliyati haqida yetarlicha to'la tasavvur beradi deb faraz qilamiz.

Agar "dekompozitsiya" usulidan foydalanilsa, statsionar rejim uchun, yechimni tezroq yozish mumkin bo'ladi.

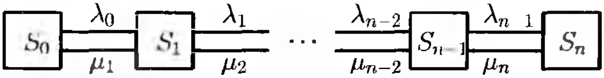
Usulning tub mohiyati. Tizimning faoliyati C_i, $i \in N$ holatlari bilan birga bog'liq graf ko'rinishda ifodalanadi. C_i holatdan C_j holatga o'tish grafik ravishda yo'naltirilgan yoy ko'rinishda amalga oshirilib, λ_{ij} – jadallik o'tishi bilan beriladi. Mabodo, o'tish mumkin bo'lmasa $\lambda_{ij} = 0$ deb olinadi.

Statsionar holatda muvozanat tamoyili amal qiladi: ixtiyoriy holatga kirish bilan chiqish sonlari teng. Bu o'z navbatida har bir holat uchun, muvozanat tenglamasini yozish imkonini beradi (dekompozitsiya tamoyili).

Chekli sonda holatga ega bo'lgan ishonchlilik nazariyasiga taalluqli "tug'ilish va nobud bo'lish" jarayoni misoliga dekompozitsiya usulini qo'llaymiz.

C_k, $k = 0, 1, ..., n$ chekli holatlarga ega bo'lgan bir jinsli Markov jarayoni berilgan bo'lsin. Agar jarayon vaqtning t momentida C_k holatda bo'lsa, u holda cheksiz kichik Δt vaqt davomida u $\lambda_k \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ ehtimollik bilan C_{k+1} holatga o'tadi, $\mu_k \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ ehtimollik bilan C_{k-1} holatga o'tadi va $1 - (\lambda_k + \mu_k) \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ ehtimollik bilan C_k holatda qoladi. Agar jarayon vaqtning t momentida C_0 holatda bo'lsa, u holda cheksiz kichik Δt vaqt davomida yoki C_0 holatda qolishi yoki C_1 holatga o'tishi, agar jarayon vaqtning t momentida C_n holatda bo'lsa, u holda cheksiz kichik Δt vaqt davomida yoki C_n holatda qolishi, yoki C_{n-1} holatga o'tishi mumkin.

$p_k(t)$ bilan jarayon vaqtning t momentida C_k, $k = 0, 1, ..., n$ holatda bo'lishlik ehtimoli belgilangan bo'lsin. Jarayonning grafik sxemasi quyidagicha bo'ladi (1.3-rasm)



1.3-rasm

Jarayon ergodik, demak, $\forall k$, $\lim\limits_{t\to\infty} p_k(t) = p_k > 0$. Statsionar rejim uchun, muvozanatlik sharti bajarilganligi sababli (har bir holat uchun):

$$S_0 : \lambda_0 \cdot p_0 = \mu_1 \cdot p_1,$$

$$\dots$$

$$S_k : \lambda_k \cdot p_k = \mu_{k+1} \cdot p_{k+1}, \text{ bunda } 1 \le k \le n-1.$$

S_n holat uchun, $k = n - 1$ da avvalgi tenglama bilan ustma-ust tushuvchi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$S_n : \lambda_{n-1} \cdot p_{n-1} = \mu_n \cdot p_n.$$

Demak, $n+1$ noma'lumli p_k, $k = 0, 1, ..., n$ bir jinsli $n-$ tartibli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \lambda_0 \cdot p_0 - \mu_1 \cdot p_1 = 0; \\ \lambda_k \cdot p_k - \mu_{k+1} \cdot p_{k+1} = 0, \ 1 \le k \le n-1, \end{cases}$$

bu sistema $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$ shart ostida yagona yechimga ega bo'ladi.

Natijada quyidagi:

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \cdot p_{k-1} = \frac{\lambda_{k-1} \cdot \lambda_{k-2} \cdot \ldots \cdot \lambda_0}{\mu_k \cdot \mu_{k_1} \cdot \ldots \cdot \mu_1} \cdot p_0 = \delta_k \cdot p_0$$

yechimni hosil qilamiz. Yuqoridagi shart sababli:

$$p_k = \frac{\delta_k}{\sum\limits_{i=0}^{n} \delta_i}, \ \delta_0 = 1$$

yechimga ega bo'lamiz.

Izoh. (1.12) ko'rinishdagi tenglamalar sistemasi quyidagi Kolmogorov – Chepmenning differensial – ayrimali tenglamalar sistemasining xususiy holi hisoblanadi (vaqtga nisbatan bir jinsli bo'lgan Markov jarayonida $\Delta t \to \infty$ orqali hosil qilinadi).

$$p_{i,k}(t + \Delta t) = \sum_m p_{i,m}(t) \cdot p_{m.k}(\Delta t), \ \Delta t > 0, \ \forall i, k, \tag{1.16}$$

bu yerda $p_{i.k}(t) = P\{$ tizimda $t = 0$ momentda i ta talab bo'lgan holda, t momentda k ta talab bo'ladi$\}$.

"Tug'ulish va nobud bo'lish" tenglamalar sistemasining (1.16) dan farqi shuki, unda o'tish faqat qo'shni holatlardan mumkin:

$$\begin{aligned} p_{i,k}(t + \Delta t) = p_{i,k-1}(t) \cdot p_{k-1,k}(\Delta t) + p_{i,k}(t) \cdot p_{k,k}(\Delta t) + \\ + p_{i,k+1}(t) \cdot p_{k+1,k}(\Delta t), \ (k \ge 1); \ p_{i,0}(t + \Delta t) = \\ = p_{i,0}(t) \cdot p_{i,0}(\Delta t) + p_{i,1}(t) \cdot p_{1,0}(\Delta t). \end{aligned} \tag{1.17}$$

(1.17)-sistemadan, limitga o‘tish va mos o‘zgarishlarni amalga oshirish orqali (12-sistemani hosil qilish mumkin. (1.12) ning yechimini, masalan, operatsion usul yordamida topish mumkin.

Kiruvchi talablar oqimi. Puasson oqimi. Ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasining aksariyat masalalarida talablarning Puasson oqimi bo‘lgan

$$V_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \ k = 0, 1, ...$$

ko‘riladi, bu yerda $\lambda -$ vaqt birligida tizimga keluvchi talablarning o‘rtacha matematik kutilmasi (yoki oqim zichligi, jadalligi).

Puasson oqimini o‘rganishning afzalliklari: a) boshqa ko‘rinishdagi oqimlarga nisbatan tizimning faoliyat ko‘rsatish sifatini sonli baholashda analitik sodda bog‘lanishlar orqali ifodalanadi; b) effektivlik ko‘rsatkichini hisoblashda olingan natijalar murakkab hollarni ham aks ettiradi (ya’ni, effektivlik ko‘rsatkichi ishonchli qiymatga ega).

Mabodo, Puasson oqimi statsionar bo‘lmasa, ya’ni $\lambda = \lambda(t)$, u holda hisoblashni amalga oshirish uchun, yoki $[0, T)$ vaqt oralig‘i, umuman olganda, teng bo‘lmagan n ta oraliqlarga bo‘linadi va har bir oraliq uchun, $\lambda_i(t) = \lambda_i \cdot t$ topiladi, bu yerda $t \in [t_{i-1}, t_i)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i) = T$, yoki sonli usul qo‘llaniladi. Qo‘yilgan maqsadga ko‘ra analitik yoki sonli usul tanlab olinadi.

Puasson oqimi tiklash jarayonida ham asosiy hisoblanadi. Tiklash jarayonlarini *tiklash nazariyasi* o‘rganadi.

Masalan, yetarlicha ko‘p bir xil texnik uskunalardan tuzilgan agregat ko‘rilayotgan bo‘lsin. Birinchi uskuna $t = t_0$ vaqt momentida ishga tushib, tasodifiy T_1 vaqt davomida ishlaydi. Ishdan chiqqan payt oniy vaqt davomida tiklanadi (yoki boshqasiga almashtiriladi) va yana tasodifiy T_2 vaqt davomida ishlaydi va hokazo.

Funksiyasi $\xi(t)$ ning qiymati $t \in [0, T]$ vaqt davomida xizmat ko'rsatishni rad etishlar soniga teng bo'lgan jarayon *tiklash jarayoni* deb ataladi. Xususan, agar fiksirlangan t vaqt uchun, $\xi(t)$ tasodifiy miqdor eksponensial taqsimot $F(\tau) = 1 - e^{-\lambda \cdot \tau}$, $\tau \in [0, t]$ ga ega bo'lsa, mos tiklash jarayoni *bir jinsli Puasson jarayoni* deb ataladi.

Tiklash nazariyasida, odatda, jarayonlarning quyidagi xususiyatlari ko'riladi:

1) $k-$ rad javobi berishga qadar t_k vaqtning davomiyligi;

2) uskunalarning t vaqt davomida o'rtacha rad javoblari sonini aniqllaydigan $X(t)$ tiklash funksiyasi;

3) tiklash zichligi $\lambda(t) = (H(t))'_t$;

4) uskunaning oqimga bog'liq bo'lmagan t vaqt davomida ishlash muddati;

5) uskunaning birinchi bor rad javobi bergunga qadar ishlash uchun, qolgan vaqti.

Rekurrent oqim

Taqsimot funksiyasi $F_k(t)$, $k = 1, 2, ...$ bo'lgan bog'liqsiz ξ_k tasodifiy miqdorlar orqali hosil qilingan talablarning paydo bo'lish momentlaridan tashkil topgan δ_k ketma-ketlik keyingi ta'siri chegaralangan oqim *rekurrent oqim* deb ataladi.

Agar $F_k(t)$ larning barchasi($F_1(t)$ uchun shart emas) ustma-ust tushsa, ya'ni $\forall k$, $F_k(t) = F(t)$, $F(+0) < 1$, u holda δ_k vaqt momentlari ketma-ketligi *tiklash jarayon*ini tashkil qiladi. Demak, tiklash jarayoni keyingi ta'sirning chegaralanganligi tushunchasidan torroq, ammo sodda oqimdan kengroq ekan.

Aksariyat hollarda keyingi ta'sirning chegaralanganlik oqimi ta'rifi sifatida quyidagi olinadi: qo'shni talablarning paydo bo'lish momentlaridan tuzilgan $T_K = [\delta_k, \delta_{k+1})$ intervallari bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lgan oqim.

Keyingi ta'siri chegaralangan *statsionar* oqim *Palma oqimi* deb ataladi. Oson tushunish mumkinki, bunday oqimlar uchun, barcha tasodifiy T_k intervallar bir xil taqsimot funksiyaga ega bo'lishi kerak.

Sodda oqim Palma oqimi bo'ladi (vaqtga bog'liq bo'lmagan oqim – bu geometrik taqsimotli oqim, uzluksiz vaqtli – bu Puasson oqimi).

Barcha T_k intervallari normal taqsimotga ($t \geq 0$ da) ega bo'lgan tasodifiy statsionar oqim Palma oqimi bo'ladi (ravshanki, bunda keyingi ta'sir bor).

Erlang oqimi

Talablarning paydo bo'lish intervallari Erlang taqsimot funksiyasi:

$$F_k(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!}, \quad \lambda > 0$$

ko'rinishga ega bo'lgan Palma oqimi *k,k=1,2,... – tartibli Erlang oqimi* deb ataladi.

Xususan, birinchi tartibli Erlang oqimi sodda oqim bo'ladi, ya'ni

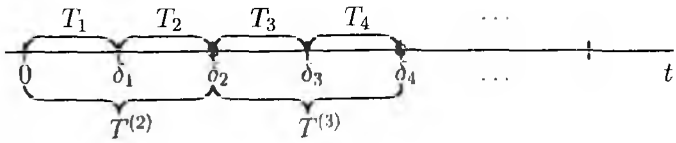
$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Faraz qilaylik, tizimga kelib tushadigan talablar sodda oqimni tashkil etishsin. Sodda oqimning har qaysi k– talabi k tartibli Erlang oqimini qanoatlantiradi. Ya'ni Erlang oqimi "siyraklashgan" sodda oqim hisoblanadi. Masalan, agar sodda oqim qoidasiga ko'ra tizimga kelib tushayotgan talablarning ikkinchisini hisobga olish kerak bo'lsa, u holda taqsimot funksiyasi:

$$F_2(t) = 1 - e^{-\lambda t} - (\lambda t) \cdot e^{-\lambda t}$$

bo'lgan ikkinchi tartibli Erlang oqimiga ega bo'lamiz.

qilib qo'shni talablarning paydo bo'lish oraliqlaridan tuzilgan $T^{(2)}, T^{(3)}, \ldots$ lar tasodifiy bo'lib, ular $T^{(2)} = T_1 + T_2$, $T^{(3)} = T_3 + T_4, \ldots$ tengliklar bilan aniqlanadi va Erlangning ikkinchi tartibli taqsimot funksiyasiga ega. Bular barchasi quyidagi 1.4-rasmda berilgan.



1.4-rasm

Turli keyin ta'sirli Palma oqimini Erlang oqimi yordamida modellashtirish mumkin. Haqiqatan, $k = 1$ da sodda oqimni hosil qilamiz (unda keyingi ta'sir yo'q). k ning $10 \leq k \leq 20$ oraliqdagi qiymatlarida talablarning paydo bo'lish intervallari normal taqsimotga (buni eksperimentlar tasdiqlaydi) ega bo'lgan Palma oqimini hosil qilamiz. $k \to \infty$ da regulyar (ehtimolsiz) oqim hosil bo'ladi.

Keyin ta'sirning chegaralanganligi talab etish ta'sirning yo'qligiga qaraganda kuchsizroq, shuning uchun, u ko'proq amaliy masalalarni qamrab oladi.

Amaliy tahlil qilish ma'nosida real oqimni qaysi ko'rinishga taalluqli ekanligini bilish muhim hisoblanadi. Taqsimot funksiyani, kirish oqimini boshqaruvchi omillarni va uning parametrlarini topish tahlil qilish jarayoniga kiradi. Buning uchun:

1) oqim, amaliy jihatdan, statsionar bo'lgan vaqt intervalini olish;

2) to'la intervalni, paydo bo'ladigan talablar sonini aniqlash mumkin bo'ladigan, yetarlicha sondagi o'zaro kesishmaydigan yarim oraliqlarga bo'lish;

3) gistogrammani qurish va empirik taqsimot funksiyani topish;

4) empirik taqsimotga nazariy o'xshash bo'lgan taxminni taqdim etish;

5) χ^2 (Pirson) yoki Kolmogorov kriteriyasini hisobga olgan holda taqdim etilgan taxminni tanlamaga mos kelishi yoki kelmasligi haqida xulosa chiqarish;

6) natija salbiy bo'lgan taqdirda yoki olingan tanlama tekshiriladi, yoki taxmindan voz kechiladi.

3-misol. Savdo do'koniga xarid qilish imkoniyati yuqori bo'lgan xaridorlar keladi. Talablar oqimi (xaridorlar) Puasson taqsimoti bilan aniqlanishi mumkin degan taxminni tekshirish talab etilgan bo'lsin. Buning uchun, empirik taqsimot funksiyaning parametrlarini topish va uni qurish maqsadida statistik tahlil o'tkazamiz.

Matematik modelni qurishda, xaridorlar deganda xarid qilishi aniq bo'lgan xaridorlarni tushunamiz. T vaqt oralig'ida har bir xaridorning kelish vaqti fiksirlangan bo'lsin.

Xarid qilgan xaridorlar sonini hisobga olgan tanlanmani tuzamiz. Statistik usulni hisobga olgan holda vaqt intervali T ni n ta teng oraliqqa bo'lamiz: $\Delta t = T/n$.

$$\alpha \cdot \Delta t = \left(\sum_{i=1}^{r} i \cdot m_i \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{r} m_i \right),$$

bu yerda r – interval raqamiki, undan keyin boshqa interval yo'q (demak, r dan katta bo'lgan xaridorli interval yo'q).

Δt intervaldagi i sondagi xaridorlarning nisbiy chastotasi W_i ni topamiz:

$$W_i = \frac{m_i}{\sum\limits_{j=1}^{r} m_j}, \quad i = 0, 1, 2, ..., r.$$

Δt vaqt davomida xarid uchun, i ta xaridor kelishligining nazariy ehtimoli p_i ni hisoblaymiz. Puasson jarayoniga asosan:

$$p_i = \frac{(\alpha\Delta t)^i}{i!}e^{-\alpha\Delta t}, \quad i = 0, 1, 2, ..., r.$$

Faraz qilaylik, kuzatish vaqti 300 minutni tashkil etsin. Bu vaqt oralig'ini $n = 100$ ta teng oraliqqa bo'lamiz, demak, $\Delta t = 3$ min.

Savdo do'koniga xaridorlarning kelish qonuni Puasson taqsimoti bo'lishligi haqidagi taxmin tajriba natijalariga qarama-qarshi emas va uni qabul qilib olish mumkin.

Olingan natijalarni quyidagi 1.1-jadval ko'rinishda ifodalaymiz:

1.1-jadval

No	$t = 3$ min *intervaldagi xaridorlar soni*	*i sondagi xaridori bo'lgan interval soni*, m_i	*Puasson taqsimotining ehtimollik qiymati*, p_i	*Nisbiy chastota* W_i
1	0	0	0,010	0
2	1	5	0,043	0,05
3	2	11	0,106	0,11
4	3	13	0,163	0,13
5	4	22	0,187	0,22
6	5	18	0,172	0,18
7	6	14	0,132	0.14
8	7	9	0,087	0,09
9	8	4	0,050	0,04
10	9	2	0,026	0,02
11	10	1	0,012	0,01
12	11	1	0.005	0,01
13	12	0	0,002	0

Izoh. Ko'rilgan misolda kirish oqimining jadalligi $\alpha \cdot \Delta t = 4,6$. Birlik vaqt sifatida $t = 3$ min olingan. Zero, odatda, vaqt birligi sifatida 1 min olinadi, bu yerda $\alpha = 4,6/3 \approx 1,53$ 1/min.

Xizmat ko'rsatish vaqti (talablarning chiqish oqimi)

Xizmat ko'rsatish vaqti $t_{o'rt.}$ muhim statistik xususiyat hisoblanadi, chunki u xizmat ko'rsatish tizimining o'tkazish quvvatini aniqlaydi. Odatda bu tasodifiy miqdor η bo'lib, taqsimot funksiyasi: $F(t) = P\{\eta < t\}$.

Amaliy tatbiqlarda talabning eksponensial xizmat ko'rsatish qonuni:

$$F(t) = 1 - e^{-\beta \cdot t}$$

keng tarqalgan, bu yerda $\beta = 1/t_{o'rt.}$ – jadallik.

Talabga xizmat ko'rsatish vaqti son jihatdan xizmat ko'rsatish vaqtining matematik kutilmasiga teng.

Taqsimotning eksponensial funksiyasi talablarga tezkor xizmat ko'rsatishga ega bo'lgan real tasodifiy jarayonlarni yaxshi aks ettiradi, ammo bunday jarayonlar amalda kam uchraydi.

Faraz qilaylik, ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi n ta turli xildagi uskunalardan tashkil topgan bo'lib, unga tasodifiy ravishda talablar oqimi keladi va uskunalarning ixtiyoriysi ularning har biriga xizmat ko'rsatishi mumkin. Agar k– uskunaning xizmat ko'rsatishi β_k jadallikka ega bo'lgan (demak, $1/\beta_k$ o'rtacha xizmat ko'rsatish vaqti) eksponensial taqsimot qonuni bilan aniqlansa, u qolda tizimning xizmat ko'rsatishi quyidagi:

$$F(t) = 1 - e^{-\beta t}$$

eksponensial taqsimot qonuniga ega bo'ladi, bu yerda $\beta = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k$. Haqiqatan, tizimning xizmat ko'rsatish vaqti t dan katta bo'lishlik ehtimoli quyidagiga:

$$P\{\gamma > t\} = P\{\min(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) > t\} = P\{\gamma_1 > t, \gamma_2 > t, ..., \gamma_n > t\}$$

teng. Bundan, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ lar bir-biriga bog'liq bo'lmaganligi sababli:

$$P\{\gamma_1 > t, \gamma_2 > t, ..., \gamma_n > t\} = \prod_{i=1}^{n} P\{\gamma_i > t\} \qquad (1.18)$$

bo'ladi. Ammo xizmat ko'rsatish vaqti $1/\beta_k (k = 1, 2, ..., n)$ ning taqsimoti ko'rsatkichli, shuning uchun,

$$P\{\gamma_i > t\} = 1 - F_i(t) = e^{-\beta_i \cdot t} (i = 1, 2, ..., n).$$

Oxirgi tenglikni (1.18) ga olib borib qo'yish bilan quyidagiga:

$$P\{\gamma > t\} = \prod_{i=1}^{n} P\{\gamma_i > t\} = e^{-(\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n) \cdot t} = e^{-\beta \cdot t}$$

ega bo'lamiz, bu yerda $\beta = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$.

Xizmat ko'rsatish vaqtining matematik kutilmasi

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n}$$

soniga teng. Ya'ni xizmat ko'rsatuvchi uskunalar soni qanchalik ko'p bo'lsa, bu vaqt shunchalik kam bo'ladi.

Agar xizmat ko'rsatish uskunalari bir xil bo'lib, ularning jadalliklari teng bo'lsa: $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n$. U holda

$$P\{\gamma > t\} = e^{-n\beta_0 t}$$

bo'ladi, xizmat ko'rsatish vaqtining matematik kutilmasi

$$M[\gamma] = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{n \cdot \beta_0}$$

nisbatga teng. Demak, bu holda bitta uskuna bo'lishiga nisbatan o'rtacha xizmat ko'rsatish vaqti n, dispersiyasi n^2 marta kamayadi. Bu xossa faqat eksponensial taqsimot uchun, o'rinlidir.

Agar kiruvchi oqim boshqa bir uskunalar uchun, yana kiruvchi oqim bo'lsa, bu *ko'p fazali xizmat ko'rsatish* deb ataladi. Ya'ni, bunda talabga xizmat ko'rsatish ketma-ket barcha uskunalar orqali amalga oshiriladi. Agar boshlang'ich oqim Puasson qonuniga bo'ysunsa, uskunalardan ketma-ket o'tish davomida oqim o'zgaradi, sekin-asta keyingi ta'sir kuchayib boradi.

Talablar oqimida keyingi ta'sirning mavjudligi xizmat ko'rsatish davomida rad javobini berish (yoki yo'qotish) ehtimoliga ta'siri isbotlangan. Bu teoremalarning ma'nosi shuki, har bir keyingi uskunaga kelayotgan oqim o'zgargan (tavsiflash noqulay) holda bo'ladi. Bundan keyingi uskunalarga birin-ketin, juda tez tushgan talablar kelishi sababli talabni yo'qotish ehtimoli kelib chiqadi va demak, qisqa vaqt davomida bir qancha talablar kelib tushish xossasiga ega bo'lgan oqimlarning borgan sari tartibsizligi orta boradi.

Effektivlik ko'rsatkichlari

Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimining effektiv faoliyati deb, unga biriktirilgan masalaning bajarilganlik darajasini aniqlab beruvchi ko'rsatkichlarning (funksiyalarning) qiymatlariga aytiladi. Ko'pgina ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlarida iqtisodiy ko'rsatkichlar sifatida olinadi:

q_{xiz} – vaqt birligida har bir talabga xizmat ko'rsatish bahosi;

q_{kut} – vaqt birligida talabning navbat kutish bilan bog'liq bo'lgan yo'qotish bahosi;

q_{ket} – vaqt birligida talabning navbatdan chiqib ketish bilan bog'liq bo'lgan yo'qotish bahosi;

q_{xizj} – vaqt birligida har bir jihozning xizmat ko'rsatish bahosi;

q_{tur} – vaqt birligida uskunaning turib qolish bilan bog'liq bo'lgan yo'qotish bahosi.

Ommaviy xizmat ko'rsatish tizimining parametrlarini optimal tanlab olinish hisobiga bu ko'rsatkichlar yetarlicha effektiv bo'lishi mumkin.

Yo'qotish funksiyasi G_{iqt} dan ma'lum T vaqt oralig'i (masalan, oy) davomida foydalanish mumkin:

1) kutish tizimlari uchun:

$$G_{iqt} = (q_{kut} \cdot A + q_{tur} \cdot B_{usk} + q_{xizj} \cdot B_{band}) \cdot T, \qquad (1.19)$$

bu yerda A – navbatning o‘rtacha uzunligi, B_{usk} – o‘rtacha band bo‘lmagan uskunalar soni, B_{band} – band bo‘lgan uskunalar soni;

2) rad javobi beruvchi tizimlar uchun (navbat uzunligiga chegara):

$$G_{iqt} = (q_{ket} \cdot p_n \cdot \alpha + q_{xizj} \cdot B_{band}) \cdot T;$$

3) aralash tizimlar uchun:

$$G_{iqt} = (q_{kut} \cdot A + q_{tur} \cdot B_{usk} + q_{xizj} \cdot B_{band} + q_{ket} \cdot p_n \cdot \alpha) \cdot T.$$

Tizimning iqtisodiy effektivligini ko‘rsatuvchi sifatida qo‘llash mumkin:

$$E = p_{xiz} \cdot \alpha \cdot c \cdot T - G_{iqt}$$

bu yerda c – vaqt birligida har bir talabga xizmat ko‘rsatishdan kelgan iqtisodiy effekt, p_{xiz} – talabga xizmat ko‘rsatish ehtimoli (rad javobini beruvchi tizimlar uchun).

Faoliyatni tahlil qilish va optimal variantni aniqlash uchun, parametr sifatida foydalaniladi:

n – uskunalar soni (xizmat ko‘rsatuvchi jihozlar);

α – kiruvchi oqimning jadalligi;

β – talabga xizmat ko‘rsatish jadalligi;

λ – xizmat ko‘rsatuvchi jihozning rad javobini berish jadalligi;

μ – rad javobini beruvchi jihozning tiklanish jadalligi;

m – tizimda tiklangan jihozlar soni va boshqalar.

Kutishli ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimi

Chegaralanmagan talablar oqimini aks ettiruvchi 1-misoldagi ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimini qaraymiz.

Yo‘qotish funksiyasi G_{iqt} ni inobatga olgan holda ushbu tizimning effektiv ishlashini, ya’ni effektivlik darajasini hisoblash orqali tahlil qilish talab etilsin.

4-misol. Shartli ravishda don zaxirasini hosil qiluvchi omborning nomini "Don" deb ataylik. Don mahsulotlarini qabul qilib oluvchi punktlar soni $n = 5$ ta bo'lib, ular birgalikda sutka davomida tasodifiy vaqtlarda keladigan o'rtacha 16 ta don tashuvchi transport vositalariga xizmat ko'rsatishlari kerak. Transportlarning kelish zichligini tahlil qilish shuni ko'rsatdiki, yuklarni topshirishga kelish oqimi $\alpha = 2/3$ parametrli jadallikka ega bo'lgan Puasson oqimini tashkil qilar ekan. Yukni tushirish vaqti tasodifiy miqdor bo'lib, u o'rtacha $t_{o'rt} = 6$ soat tushirish vaqtiga ega bo'lgan eksponensial qonunga bo'ysunadi: olib kelingan yuklarning sutka davomida kutib turishi $q_{kut} = 100$ shartli birlikni; qabul qiluvchi punktning sutkalik bandsizligi $q_{tur} = 1000$ shartli birlikni; sutka davomida punktning ishlashi $q_{xizj} = 100$ shartli birlikni tashkil qiladi. Sutka davomidagi xarajat hisoblansin. "Don" omborining effektivlik faoliyati tahlil qilinsin.

Yechish. Yechimning mavjud bo'lishlik sharti $\alpha/(n \cdot \beta) = 0,8 < 1$ bajarilgan. $n = 5$, $\alpha = 16\ 1/sutka$, $\beta = 4\ 1/sutka$ ga ega bo'lamiz. Quyidagilar effektivlik ko'rsatkichi bo'ladi:

1) "Don" omborining bandmaslik ehtimoli $p_0 = 0,013$; Bu bildiradiki, ombor sutka davomida 19 min band emas;

2) barcha qabul qilib olish punktlari band bo'lishlik ehtimoli $\Pi \approx 0,556$, ya'ni 13 soat 20 min davomida barcha punktlar band;

3) har bir transport vositasi yukini tushirishining o'rtacha kutish vaqti $q_{kut} \approx 3$ soat;

4) o'rtacha kutish vaqtidan ko'proq kutish ehtimoli $P\{\tau > 3\} \approx 0,33$, ya'ni transportlarning uchdan biri 3 soatdan ortiq vaqt kutadi;

5) navbatning o'rtacha uzunligi $A \approx 2,2$, ya'ni navbat kutish doim bor;

6) band bo'lgan punktlarning o'rtacha soni $B \approx 4$;

7) ombordagi transportlarning o'rtacha soni $= 6,2$;

8) transportlarning omborda o'rtacha bo'lishlik vaqti $L = q_{kut} + t_{o'rt} \approx 9,02$;

9) omborning ish bilan ta'minlanganlik koeffitsiyenti $K_{ish} = 0,80$;

10) bandsizlik koeffitsiyenti $K_{bands} = 0,20$.

Har bir punkt vaqtning o'rtacha 20 % ida band bo'lmaydi.

Band bo'lmaslik vaqtini o'zgartirish uchun, punktlar sonini n = 5, 6, 7, 8 deb olamiz. Bunda hosil bo'ladigan natijalar 1.2-jadvalda keltirilgan.

1.2-jadval

No	Ko'rsatkichlar	Xizmat ko'rsatish punktlarining soni			
		5	6	7	8
1	P_0	0,013	0,017	0,180	0,182
2	П	0,555	0,290	0,136	0,058
3	t_{kut}, soat	3,300	0,870	0,270	0,090
4	A	2,200	1,740	0,420	0,120
5	R	6,200	4,420	3,760	3,760
6	B	3,960	3,000	2,000	1,000
7	K_{bands}	0,200	0,300	0,430	0,480

1.3-jadval

No	Ko'rsatkichlar	Xizmat ko'rsatish punktlarining soni			
		5	6	7	8
1	t_{kut}, soat	3,300	0,870	0,270	0,090
2	$\alpha \cdot t_{kut} \cdot q_{kut}$	5333	1740	540	180
3	K_{bands}	0,200	0,300	0,400	0,480
4	$K_{bands} \cdot n \cdot q_{tur}$	1000	1800	3010	3840
5	$K_{ish} \cdot n \cdot q_{xizj}$	4000	4800	5600	6400
6	G_{iqt}	10240	8340	11150	10420

1.2-jadvaldan kelib chiqadiki, punktlar soni n = 6 bo'lganda yuklarni tushirishdagi kutish vaqti 4 marta, yuklarni tushirish uchun, kutib turgan transportlarning soni 1,74 gacha kamayadi.

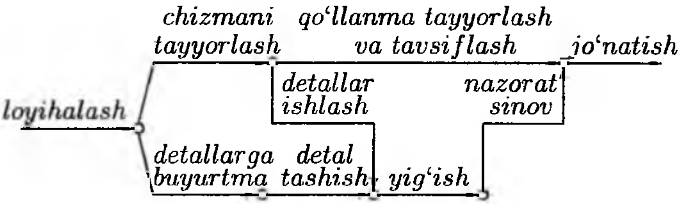
Albatta, xizmat ko'rsatish punktlarining soni oshishi ko'rsatkichlarning qiymatlarini yaxshilaydi. Ammo (1.19)-formula yordamida sutka davomida ketgan xarajatlarni hisoblasak: $G_{iqt} = \alpha \cdot q_{kut} \cdot q_{kut} + K_{bands} \cdot n \cdot q_{tur} + K_{ish} \cdot n \cdot q_{xizj}$. Bu hisoblashlarning natijalari 1.3-jadvalda keltirilgan.

1.3-jadvaldan ko'rinib turibdiki, eng kam xarajatlisi $n = 6$ ta xizmat ko'rsatish punktidan iborat tizimli variant ekan.

Izoh. Iqtisodiy ko'rsatkichlarni qo'llaganda haqiqiy xarajatlarni olish muhimdir, chunki u yil vaqtiga, zaxira hajmiga va boshqa omillarga qarab o'zgarishi mumkin.

2-§. Tarmoqli model. Kalendar grafikni tuzish va zaxiralarni taqsimlash

Bir-biri bilan bog'langan ishlar tashkil etgan butun komplekslarni o'z ichiga olgan yirik ishlanmalarni ratsional rejalashtirishda tarmoq usullari keng qo'llaniladi. Masalan, qurilish obyektlarini barpo etish, yangi texnik sistemalarni va buyumlarni yaratish, yirik ta'mirlash va tiklash, yirik obyektlarni (samolyot, kemalar, kosmik kemalar) va boshqalarni tayyorlash va yig'ish. Tarmoq usullari bajarilishi lozim bo'lgan kompleks ishlarni yo'naltirilgan graf yordamida yaqqol, aniq ko'rinishda ifodalashga asoslangan. Bunda, grafning yoylari bajarilayotgan ishlarni, uchlari esa alohida ishlarning yakunlanishini ifodalaydigan hodisalarni tasvirlaydi.



2.1-rasm

2.1-rasmda biror jihozni yaratishdagi ishlarning tarmoq grafikasi keltirilgan. Tarmoq grafikasi bajarilishi lozim bo'lgan ishlarning ketma-ketligini aniqlab berish bilan birga mavjud mehnat va material zaxiralaridan ratsional foydalanish yo'llarini ham ko'rsatib berishga yordam beradi.

Biror loyihaning tarmoq grafikasini tuzish uchun, uni alohida ishlarga yoki jarayonlarga ajratish talab etiladi. Har bir ishning davomiyligi bor, shu sababli u boshlanish va tamom bo'lish vaqtiga ega. Bunda boshlanish va tamom bo'lish vaqt momentlari to'la aniqlangan bo'lishi lozim. Yana, bajarilishi kerak bo'lgan ishlarning tartibini va muhimlik darajalarini o'rnatish ham talab etiladi.

Natijaviy maqsadga erishish uchun, ma'lum tartibda bajarilishi lozim bo'lgan, bir-biri bilan bog'langan ishlar majmuyi *dasturni* tashkil qiladi. Ishlar mantiqiy ketma-ketlikka egaligi shuni bildiradiki, biror ishni bajarish uchun, avvalgilari, albatta bajarilgan bo'lishi kerak.

Shu yerda ta'kidlab o'tamizki, tarmoq usullari yaratilishidan avval dasturning kalendar rejalari (ya'ni vaqt bo'yicha rejalashtirish) katta bo'lmagan hajmda olib borilgan bo'lishi lozim. Bunday rejalashtirishning ma'lum vositalaridan eng mashhuri Gantning chiziqli grafigidir (2.1-jadval), unda har bir ishning boshlanish va tamom bo'lish momentlari gorizantal vaqt o'qida ko'rsatib berilgan. Uning kamchiligi turli ishlarning bir-biri bilan bog'langanlik darajalarini, demak, dasturning bajarilish sur'atini aniqlashtirish imkonini bermaydi.

Zamonaviy dasturlar murakkabligining ortib borishi, ularning bajarish jarayonini mukammallashtirishda aniqroq va samaradorliroq rejalashtirish usullarini yaratish zarur ekanligini talab qiladi. Bunda samaradorlik deyilganda, butun dasturni, mavjud zaxiralarning iqtisodiy omillarini hisobga olgan holda, bajarish davomiyligini minimallashtirish nazarda tutiladi. Natijada tarkibiy va kalendar rejalashtirishning analitik usullari yaratildi. Ulardan biri *kritik yo'l usuli* deb ataladi va u asosan vaqt omiliga diqqatni qaratadi. Bunda ishlarning davomiyligini determinik yoki tasodifiy miqdorlar sifatida ham qarash mumkin.

Dasturni tarmoqli rejalashtirish va boshqarish uchta bosqichni o'z ichiga oladi: *tarkibiy rejalashtirish, kalendar rejalashtirish va tezkor boshqarish.* Dasturni aniq ishlarga ajratish bilan tarkibiy rejalashtirish bosqichi boshlanadi. Shundan so'ng ishlarning davomiyligi aniqlanib, tarmoq modeli (tarmoq grafigi, yo'naltirilgan diagramma) tuziladi, bunda har bir yoy (yo'nalish) ishni aks ettiradi. Biz determinik bo'lgan holatlarni o'rganamiz:

2.1-jadval

Bosqichlar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Maqsadni aniqlash												
Loyiha rejasini tuzish												
Muammoning tavsifi												
Modelni qurish												
Hisoblash usulini ishlash												
Dasturning texnik topshiriqni ishlash												
Dastur tuzish va sozlash												
Ma'lumotlar to'plash												
Modelni tekshirish												
Natijani amaliyotga tatbiq etish												

Tarmoq modeli birgalikda dasturni tashkil etgan ishlarning bog'liqligini ifodalaydigan grafik ko'rinishdir. Tarmoq modelini qurish, dasturni amaliyotga qo'llashdan avval, barcha ishlarni tahlil qilish va qo'shimcha o'zgarishlarni kiritish imkonini beradi.

Eng muhimi, tarmoq modelidan foydalanish dasturning kalendar rejasini ishlab chiqishda katta ahamiyat kasb etadi.

Ikkinchi bosqich bo'lgan kalendar rejaning yakuniy maqsadi har bir ishning boshlanish va tamom bo'lish vaqtlarini aniqlash, hamda dasturni tashkil etgan ishlarning o'zaro bog'liqlarini belgilashlardan iborat kalendar grafikni tuzishdir. Bundan tashqari, kalendar grafik muhim hisoblangan kritik yo'lni (vaqt nuqtayi nazardan) aniqlash imkonini berishi va bu bilan dasturni belgilangan direktiv muddatda tamomlanishni ta'minlashi lozim. Kalendar reja, kritik yo'lga kirmagan ishlarning zaxira vaqtlarini aniqlash va ulardan kechikishda va zaxiralardan oqilona foydalanishga imkon yaratib beradi.

Yakuniy bosqich dasturni amaliyotga qo'llash jarayonini operativ suratda boshqarishdan iboratdir. Bu bosqich tarmoq modeli va kalendar grafikasidan foydalangan holda dastur bajarilishi haqida davriy hisobotlar berishni o'z ichiga oladi. Shuni alohida ta'kidlash lozimki, tarmoq modeli tahlil qilish va zarur hollarda o'zgartirishlarga, tuzatishlarga moyil bo'ladi.

Dasturning tarmoq tavsifi (tarmoq modeli)

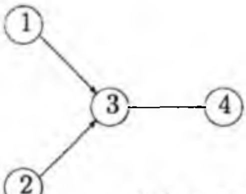
Tarmoq modeli ishlarning o'zaro bog'lanishlarini va ularning bajarilish ketma-ketligini (tartiblanish yoki avval-keyin munosabatlarini) aniqlab beradi. Ish yo'naltirilgan yoy (strelka) orqali ifodalanib, uning yo'nalishi dasturning vaqt bo'yicha bajarilishiga mos keladi. Ishlarning o'zaro munosabatlari hodisalar orqali beriladi. *Hodisa,* bu bir ishning tamom bo'lishi, ikkinchi ishning boshlanishini bildiradi. qilib, ishning boshlanish va tamom bo'lish vaqtlari juft hodisa bilan tavsiflanib, ular mos ravishda *boshlang'ich* va *oxirgi hodisalar* deb ataladi. Biror hodisadan chiqib keluvchi ishning boshlanishi uchun, bu hodisaga kiruvchi barcha ishlar bajarilgan bo'lishi kerak. Demak, har bir ish yo'naltirilgan grafning yoyi orqali, hodisa esa uch (tugun nuqtasi) orqali ifodalanadi. Bunda, yoy uzunligi ishning davomiyligiga proporsional, kesma ko'rinishda bo'lishi shart emas. Quyidagi 2.2-rasmda boshlang'ich i hodisa va oxirgi j hodisalarning ifodalaydigan (i, j) ishning graf ifodasi keltirilgan. 2.3-rasmdan ko'rinib turibdiki, (3,4) ishni boshlash uchun, albatta (1,3) va (2,3) ishlar bajarilgan bo'lishi shart.

1-qoida. *Har bir ish faqat bitta yoy (strelka) bilan ifodalanadi.* Hech bir ish modelda ikki marta ishtirok etmaydi. Biror ish ikkiga ajratilsa, har biri alohida yoy bilan ifodalanishi kerak.

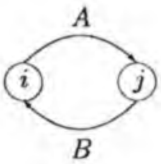
2-qoida. *Hech bir juft ish bir vaqtning o'zida bir xil boshlang'ich, bir xil oxirgi hodisa orqali ifodalanmasligi lozim.* Bunday holat ikki yoki undan ko'p ishlarni bir vaqtda bajarish mumkinligidan kelib chiqadi (2.4-rasm). Bunday holat bo'lmasligi uchun, A ishning oxiri (boshlanish) hodisasi bilan B ishning oxiri (boshlanish) hodisalari fiktiv (yolg'ondakam) ish yordamida birlashtiriladi. 2.5-rasmda fiktiv (D) ishni kiritish variantlari keltirilgan.

Shundan so'ng A va B juft ishlarning yoki boshlang'ich yoki oxirgi hodisalari turlicha bo'ladi. Bunda, shunga e'tibor berish kerakki, fiktiv ish na vaqt, na zaxira talab qiladi. Fiktiv ishni kiritish mantiqiy ketma-ketlikni aks ettirishda yordam beradi. Faraz qilaylik, biror dasturda A va B ishlar C dan oldin, E ish esa faqat B dan keyin bajarilsin. 2.6-rasmda A, B va C ishlarning tartiblanishi to'g'ri bo'lgani bilan, E ishning A va B ishlardan keyin bajarilishi kelib chiqadi. Bu holatning to'g'ri berilishi 2.7-rasmda keltirilgan.

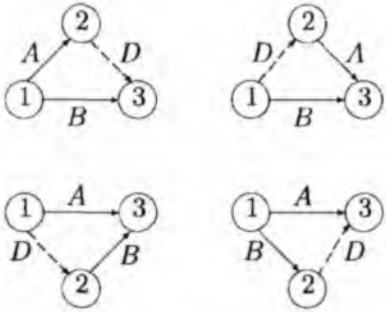
2.2-rasm



2.3-rasm

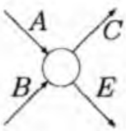


2.4-rasm

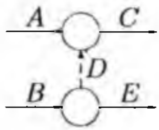


2.5-rasm

Bunda D fiktiv ish bajarilishi uchun, vaqt ham, zaxira ham talab etilmaydi, shu sababli bu holat haqiqiy tartiblashni beradi.



2.6-rasm



2.7-rasm

3-qoida. *Tarmoq modelini to'g'ri tartiblash uchun, yangi ishni kiritishdan avval quyidagi savollarga javob berilgan bo'lishi zarur.*

a) Bu ishni bajarish uchun, avval qaysi ishlar tugallanishi lozim?

b) Bu ish bajarilgandan so'ng qaysi ishlarni boshlash mumkin?

c) Bu ish bilan qanday ishlar parallel olib boriladi?

Ushbu qoidalar yordamida tarmoq grafidagi ishlarning tartiblanishi nazorat qilib boriladi.

1-misol. Quyidagi $A, B, C, D, E, F, G, X, I, J, K, L$ ishlarning berilgan tartiblanishi asosida dasturning grafi tuzilsin.

1. A, B va C – boshlang'ich ishlar bo'lib, ular bir paytda boshlanishi mumkin.

2. A va B ishlar D ishdan avval bajariladi.

3. B ish E, F va X ishlardan avval bajariladi.

4. F va C ishlar G ishdan avval bajariladi.

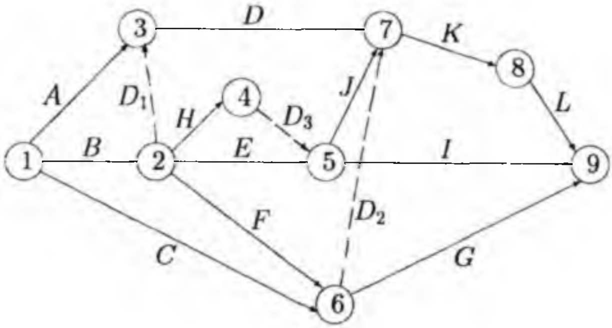
5. E va X ishlar I va J ishlardan avval bajariladi.

6. C, D, F va J ishlar K ishdan avval bajariladi.

7. K ish L ishdan avval bajariladi.

8. I, G va L – dasturning yakunlaydigan ishlari.

Bu ishlarni bajarish dasturini aniqlab beruvchi tarmoq grafi quyidagicha bo'lib, unda ishlarning ketma-ketligini to'g'ri akslantirish uchun, D_1, D_2 va D_3 fiktiv ishlar kiritilgan (2.8-rasm).



2.8-rasm

1-mashq. a) Quyidagi o'zgarishlar tarmoq grafidagi ishlar ketma-ketligiga qanday ta'sir qiladi?

1) $(3, 5)$ fiktiv [*Javob.* A ish I va J ishlardan avval bajariladi].

2) $(3, 4)$ fiktiv [*Javob.* A ish I va J ishlardan avval bajariladi].

3) $(5, 6)$ fiktiv [*Javob.* E va X ishlar G ishdan avval bajariladi].

4) $(3, 6)$ fiktiv ish [*Javob.* A ish G ishdan avval bajariladi].

b) Quyidagi holatlar ro'y berishi uchun, tarmoq grafida qanday o'zgarishlar qilish kerak?

1) A va B ishlar G ishdan avval bajariladi [*Javob.* $(3, 6)$ fiktiv ish kiritiladi].

2) D ish G ishdan avval bajariladi [*Javob.* D ishning oxiri bilan 7-hodisa fiktiv ish bilan birlashtiriladi, keyin D ishning oxiri bilan 6-hodisa fiktiv ish bilan birlashtiriladi].

3) C ish D ishdan avval bajariladi [*Javob.* C ishning oxiri bilan 6-hodisa fiktiv ish bilan birlashtiriladi, keyin C ishning oxiri bilan 3-hodisa fiktiv ish bilan birlashtiriladi].

Tarmoq modelini hisoblash

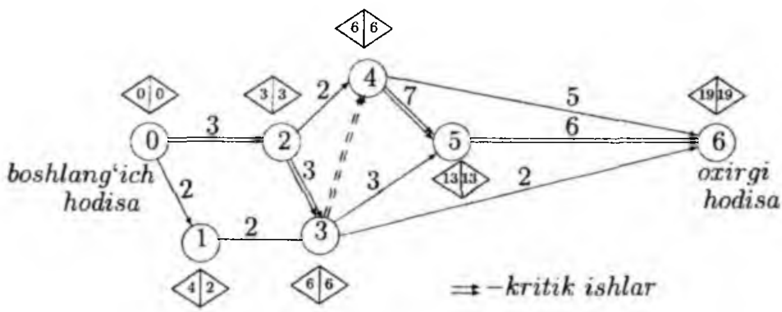
Tarmoq modeliga rejalashtirish va boshqarish usullarini qo'llash orqali dasturdagi har bir ishning boshlanish va tamom bo'lish vaqtlarini ko'rsatib beruvchi kalendar reja aniqlangan bo'lishi kerak. Tarmoq grafi qurish shu maqsadga erishishning birinchi qadami hisoblanadi. Turli ishlar o'rtasida o'zaro bog'liqlik borligi sababli, ularning boshlanishi va yakunlanishi vaqtlarini aniqlab berish uchun, maxsus hisoblash usuli kerak bo'ladi. Buni tarmoq grafikasida oddiy qoidalar orqali olib borish mumkin. Buning natijasida dasturning *kritik* va *kritik bo'lmagan* ishlari aniqlanadi. Agar ishning kechikib boshlanishi butun dasturning bajarilish muddatini oshishiga olib kelsa, bunday ish *kritik ish* deb ataladi. Kritik bo'lmagan ishlarning bajarilish vaqt oraliqlarini, butun dastur muddatiga ta'sir etmagan holda, kattalashtirish mumkin, ya'ni bunday ishlarni bajarish uchun, qo'shimcha – zaxira vaqt bo'ladi.

Biz kritik yo'lni aniqlash usulini ko'rib chiqamiz. Dasturning boshlang'ich va oxirgi hodisalarini birlashtiruvchi kritik ishlarning uzluksiz ketma-ketligi *kritik yo'l* deb ataladi. Kritik yo'lni aniqlashning bir usulini quyidagi sonli misolda keltiramiz.

Har bir ishning bajarilish vaqt oraliqlari mos yoylarning yuqori qismida berilgan.

Kritik yo'lni topish ikki bosqichdan iborat. Birinchi bosqich *to'g'ri o'tish* deb ataladi. Bunda hisoblash boshlang'ich hodisadan boshlanib tarmoq grafining oxirgi hodisasiga yetguncha davom ettiriladi. Har bir hodisa uchun, uning eng erta boshlanish vaqti hisoblanadi. Bu sonlar 2.9-rasmdagi mos qo'sh uchburchak belgilarining o‘ng tarafiga yozib qo‘yilgan. Ikkinchi bosqich *teskari o‘tish* deb ataladi, bunda to‘rning oxirgi hodisasidan boshlanib boshlang‘ich hodisaga yetguncha hisoblash davom ettiriladi. Bunda har bir hodisa uchun, uning eng kech boshlanish vaqti hisoblanib, u qo‘sh uchburchak belgilarining chap tarafiga yozib qo‘yilgan.

Faraz qilaylik, $ES_i - i$ hodisadan chiquvchi barcha ishlarning eng erta boshlanish vaqti bo‘lsin. Shu bilan birga ES_i i – hodisaning eng erta ro‘y berish vaqtini aniqlaydi. To‘g‘ri o‘tishni ko‘rib chiqamiz:



2.9-rasm

Agar $i = 0$, ya’ni boshlang‘ich hodisaning raqami nolga teng bo‘lsa, unda $ES_0 = 0$ bo‘ladi. D_{ij} bilan (i, j) ishning davomiyligi belgilansa, u holda to‘g‘ri o‘tishda hisoblash quyidagi formula orqali amalga oshiriladi:

$$ES_j = \max_i \{ES_i + D_{ij}\}$$

barcha (i, j) ishlar bo‘yicha, bunda $ES_0 = 0$. kilib j hodisaning ES_j sini hisoblash uchun, j hodisaga kiruvchi barcha ishlarning boshlang‘ich hodisalari uchun, mos ES_i larni aniqlash talab etiladi.

Ushbu to‘g‘ri o‘tishni 2.9-rasm tarmoq grafiga qo‘llash quyidagi hisoblashlarga olib keladi. $ES_0 = 0$ bo'lganligi sababli, boshlang'ich 0 hodisaning ustidagi qo'sh uchburchakning o'ng tarafiga nol soni yozilgan. 1-hodisaga faqat bitta $(0,1)$ ish kelganligi va uning davomiyligi $D_{01} = 2$ bo'lganligi sababli

$$ES_1 = ES_0 + D_{01} = 0 + 2 = 2$$

bo'ladi. Bu son mos ravishda 1-hodisaning qo'sh uchburchagini o'ng tarafiga yozib qo'yilgan. Xuddi mulohaza bilan 2-hodisa qaraladi [izoh: 3 hodisani qarab bo'lmaydi, chunki ES_2 soni noma'lum. Demak,

$$ES_2 = ES_0 + D_{02} = 0 + 3 = 3.$$

Ushbu son 2-hodisaga mos qo'sh uchburchakning o'ng tarafiga yozib ko'yilgan. Endi 3-hodisaga o'tiladi. Ushbu hodisaga ikkita $(1,3)$ va $(2,3)$ ishlar kelganligi uchun:

$$ES_3 = \max_{i=1,2}\{ES_i + D_{i3}\} = \max\{2+2, 3+3\} = 6.$$

Bu natija 3-hodisaning mos qo'sh uchburchagini chap tarafiga yozib qo'yilgan.

Shunga o'xshash amallar barcha j larda ES_j lar topilishga qadar davom ettiriladi. Natijada quyidagilarni hosil qilamiz:

$$ES_4 = \max_{i=2,3}\{ES_i + D_{i4}\} = \max\{3+2, 6+0\} = 6$$
$$ES_5 = \max_{i=3,4}\{ES_i + D_{i5}\} = \max\{6+3, 6+7\} = 13$$
$$ES_6 = \max_{i=3,4,5}\{ES_i + D_{i6}\} = \max\{6+2, 6+5, 13+6\} = 19.$$

Aniqlangan sonlar mos ravishda qo'sh uchburchaklarning o'ng tarafiga yozib chiqiladi. Shu bilan to'g'ri o'tish yakunlanadi.

Teskari o'tish tarmoq grafigining oxirgi hodisasidan boshlanadi. Bunda asosiy maqsad i-hodisaga kiruvchi barcha ishlarning eng kech vaqtlari LS_i aniqlashdir. Tarmoq grafining oxirgi hodisasi n bo'lsin va $i = n$ bo'lsa, u holda $LS_n = ES_n$ bo'ladi, ya'ni teskari o'tishning boshlanishi hisoblanadi. Umuman, ixtiyoriy i hodisa uchun:

$$LS_i = \min_j\{LS_j - D_{ij}\}$$

barcha (i,j) lar uchun, bo'ladi.

Har bir hodisaning mos qo'sh uchburchaklarini birinchi uchburchagiga LS sonlari yozib chiqiladi:

$$\begin{aligned}
&LS_6 = ES_6 = 19,\\
&LS_5 = LS_6 - D_{56} = 19 - 6 = 13,\\
&LS_4 = \min_{j=5,6}\{LS_j - D_{4j}\} = \min\{13-7, 19-5\} = 6,\\
&LS_3 = \min_{j=4,5,6}\{LS_j - D_{3j}\} = \min\{6-0, 13-3, 19-2\} = 6,\\
&LS_2 = \min_{j=3,4}\{LS_j - D_{2j}\} = \min\{6-3, 6-2\} = 3,\\
&LS_1 = LS_3 - D_{13} = 6 - 2 = 4,\\
&LS_0 = \min_{j=1,2}\{LS_j - D_{0j}\} = \min\{4-2, 3-3\} = 0.
\end{aligned}$$

Shu bilan teskari o'tish hisoblandi.

Endi to'g'ri va teskari o'tishlardan foydalanib kritik yo'lni aniqlash mumkin. (i,j) ish kritik yo'lga tegishli bo'lishligi uchun, quyidagi uchta tenglik o'rinli bo'lishi kerak:

$$ES_i = LS_i, \tag{2.1}$$

$$ES_j = LS_j, \tag{2.2}$$

$$ES_j - ES_i = LS_j - LS_i = D_{ij}. \tag{2.3}$$

Bu shartlar, aslida shuni bildiradiki, kritik ishning zaxira vaqtlari bo'lmaydi. 2.9-rasmda kritik yo'l $(0,2), (2,3), (3,4), (4,5)$ va $(5,6)$ ishlardan iboratdir. Kritik yo'l butun dasturni eng qisqa davomiyligini ta'minlab beradi. E'tibor beramizki, $(2,4), (3,5), (3,6)$ va $(4,6)$ ishlar (2.1) va (2.2)-tengliklarni qanoatlantiradi, ammo (2.3)-tenglikni qanoatlantirmaydi. Shu sababli ular kritik ishlar emas. Eslatib o'tamiz kritik yo'l boshlang'ich va oxirgi hodisalarni birlashtiruvchi uzluksiz ishlar zanjiridan iboratdir.

2-mashq. 2.9-rasmda keltirilgan tarmoq grafi uchun, quyidagi hollarda kritik yo'l (yo'llar) aniqlansin.

(a) $D_{01} = 4$. [Javob:(0,2,3,4,5,6) va (0,1,3,4,5,6)].

(b) $D_{36} = 15$ [Javob: (0,2,3,6)].

Zaxira vaqtlarini aniqlash. Kritik yo'lni aniqlashda kritik bo'lmagan ishlarning zaxira vaqtlarini bilish muhimdir. Tushunarliki, kritik ishlarning zaxira vaqtlari nolga teng, shuning uchun, ham ular kritik ishlar deb ataladi.

Zaxira vaqtlarni aniqlashdan avval har bir ishga bog'liq bo'lgan ikkita muddat tushunchalarini kiritish lozim. Bular (LS) *kech boshlanish* va (ES) *erta tamomlash* bo'lib, ular har bir (i, j) ish uchun, quyidagi munosabatlar orqali aniqlanadi:

$$LS_{ij} = LS_j - D_{ij}, \ ES_{ij} = ES_i + D_{ij}.$$

Zaxira vaqtlarining asosiy ikkita ko'rinishi farqlanadi: (TF) *to'la zaxira* va (FF) *erkin zaxira.*

(i, j) ishning to'la zaxirasi, bu ishning bajarilishi mumkin bo'lgan maksimal vaqt oralig'i $(LS_j - ES_i)$ bilan uning bajarilish muddati (D_{ij}) orasidagi farq, ya'ni

$$TF_{ij} = LS_j - ES_i - D_{ij} = LS_j - ES_{ij} = LS_{ij} - ES_i.$$

Berilgan dasturda kritik yo'lni va kritik bo'lmagan ishlarning zaxira vaqtlarini aniqlashning qulay usuli bu jadval ko'rinishda ifodalashdir (2.2-jadval). Jadvaldagi sonlar yuqorida berilgan formulalar orqali oson topiladi. Ushbu jadvalda kalendar rejani (grafikani) aniqlash uchun, barcha ma'lumotlar mavjud. Ta'kidlaymizki, faqat kritik ishlar to'la nol zaxira vaqtga ega bo'lishadi. Agar to'la zaxira nolga teng bo'lsa, erkin zaxira ham nolga teng. Ammo aksinchasi to'g'ri emas, chunki kritik bo‘lmagan ishning erkin zaxirasi nol bo‘lishi mumkin. Masalan, 2.2-jadvalda $(0,1)$ kritik bo‘lmagan ishning erkin zaxirasi nolga teng.

Erkin zaxira vaqti, barcha ishlar erta muddatda bajariladi farazi orqali aniqlanadi. Bu holda (i,j) ish uchun, FF_{ij} miqdor ishning bajarilishi mumkin bo‘lgan vaqt $(ES_j - ES_i)$ oralig‘i bilan uning davomiyligi (D_{ij}) orasidagi farq bilan aniqlanadi, ya’ni

$$FF_{ij} = ES_j - ES_i - D_{ij}.$$

2.2-jadval

(i,j) *ishlar*	D_{ij} *davomlik*	*erta*		*kech*		TF_{ij} *to‘la zaxira*	FF_{ij} *erkin zaxira*
		ES_i *bosh*	ES_{ij} *oxiri*	LS_{ij} *bosh*	ES_j *oxiri*		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$(0,1)$	2	0	2	2	4	2	2
$(0,2)$	3	0	3	0	3	0	0
$(1,3)$	2	2	4	4	6	2	2
$(2,3)$	3	3	6	3	6	0	0
$(2,4)$	2	3	5	4	6	1	1
$(3,4)$	0	6	6	6	6	0	0
$(3,5)$	3	6	9	10	13	4	4
$(3,6)$	2	6	8	17	19	11	11
$(4,5)$	7	6	13	6	13	0	0
$(4,6)$	5	6	11	14	19	8	8
$(5,6)$	6	13	19	13	19	0	0

3-mashq. 2.2-jadvalda quyidagi ishlarning to‘la va erkin zaxira vaqtlari to‘g‘ri hisoblanganini tekshiring: (a) $(0,1)$ ish; (b) $(3,4)$ ish; (c) $(4,6)$ ish.

Kalendar rejani tuzish va zaxiralarni taqsimlash

Tarmoq modelida olib borilgan hisoblashlarning yakuniy natijasi kalendar grafigi (reja) bo‘lishi lozim. Bu grafik real vaqt shkalasiga nisbatan dasturni bajarish jarayonlarini amalga oshirish imkonini beradi.

Kalendar grafikni qurishda zaxiralar hajmini hisobga olish zarur, chunki ayrim ishlarni parallel bajarish, ishchi kuchining, uskunalarning yoki boshqa omillarning chegaralanganligi sababli, imkoni bo'lmasligi mumkin. Mana shu ma'noda, kritik bo'lmagan ishlarning to'la zaxira vaqti ahamiyatlidir.

Kritik bo'lmagan ishlarni to'la zaxira vaqti doirasida u yoki bu tomonga siljitish orqali zaxiralardan maksimal foydalanishni kamaytirish mumkin bo'ladi. Ammo zaxiralar hajmiga chegara bo'lmasa ham, to'la zaxira vaqtlari, odatda, butun dasturni bajarish muddati davomida, zaxiralardan foydalanishni mumkin qadar tekkis taqsimlash uchun, xizmat qiladi. Haqiqatda, bu bildiradiki, ishchi kuchiga (boshqa zaxiralarga) nisbatan talab vaqt oraliqlarida keskin farq qilganda dasturni ma'lum sondagi ishchilar tarkibi bilan tamomlash imkonini beradi.

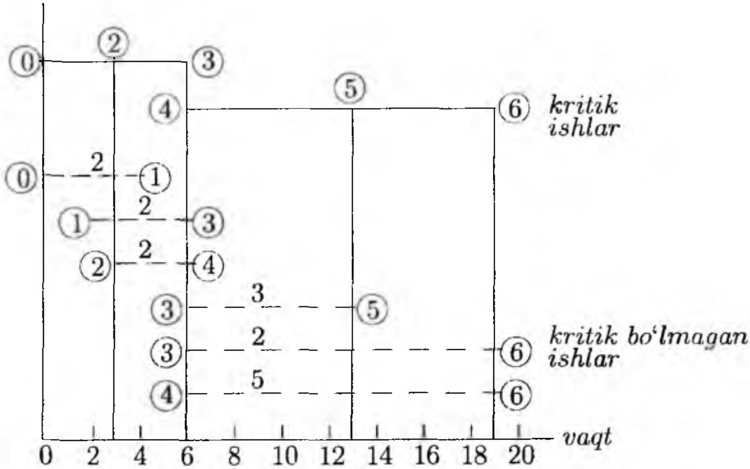
Quyidagi konkret misolda tarmoq grafikni qurish keltirilgan. Keyingi misolda esa dastur uchun, zaxiralardan oqilona foydalanish ko'rsatilgan.

2-misol. 2.9-rasmda keltirilgan dastur uchun, tarmoq grafik qurilsin.

Tarmoq grafikni qurishdagi zarur ma'lumotlar 2.2-jadvalda keltirilgan. Avval kritik ishlarning kalendar muddatlari (bajarilish vaqtlari) aniqlanadi. Keyin kritik bo'lmagan ishlarning erta boshlanish muddatlari ES va oxirgi bajarilish muddatlari LS lar topiladi. Tarmoq grafida kritik ishlar uzluksiz chiziqlar orqali berilgan. Kritik bo'lmagan ishlarning bajarilish muddatlar punktir chiziqlar yordamida berilgan. Ya'ni, ushbu ishlarning kalendar muddatlari punktir chiziq ichida ixtiyoriy ravishda joylashgan bo'lib, faqat ularning ketma-ketligi saqlangan bo'lishi zarur.

2.9 va 2.10-rasmlarda keltirilgan misol uchun, kalendar grafik xizmatini o'taydi. $(3,4)$ ish fiktiv bo'lib, uni bajarish vaqti nolga teng, shuning uchun, u vertikal kesma bilan ifodalangan. Kritik bo'lmagan ishlarning (punktir kesmalar) yuqori qismiga yozilgan sonlar ularning davomiyligiga mos keladi.

Kritik bo'lmagan ishlarning kalendar muddatlarini aniqlashdagi to'la va erkin zaxira vaqtlarining roli quyidagi ikki umumiy qoida bilan izohlanadi.



2.10-rasm

1. Agar to'la va erkin zaxiralar vaqti bir-biriga teng bo'lsa, u holda kritik bo'lmagan ishning kalendar muddatlarini uning erta boshlanish va kech tamomlanish oraliqlaridan ixtiyoriy ravishda olish mumkin (2.10-rasmda punktir kesmalar).

2. Agar erkin zaxira vaqt to'ladan kichik bo'lsa, u holda kritik bo'lmagan ishning boshlanish vaqtini, undan keyin keladigan ishlarning kalendar muddatlariga ta'sir etmagan holda, erta boshlanishga nisbatan erkin vaqt miqdoridan katta bo'lmagan oraliq vaqtigacha surish mumkin.

Ko'rilayotgan misolda 2-qoidani faqat $(0, 1)$ ishga nisbatan qo'llash mumkin, boshqa ishlarning kalendar muddatlari 1-qoida bo'yicha tanlanadi. Bunga sabab, $(0, 1)$ ishning erkin zaxira vaqti nolga teng. qilib, agar $(0,1)$ ishning boshlanishi uning erta boshlanish vaqti ($t = 0$) bo'lsa, u holda undan keyin keladigan $(1,3)$ ishning kalendar muddatini erta boshlanish ($t = 2$) va kech tamomlash ($t = 6$) oralig'idan olish mumkin bo'ladi. Agar $(0,1)$ ishning boshlanish vaqti $t = 0$ ga nisbatan surilgan bo'lsa, $(1,3)$ ishning ham erta boshlanish vaqti kamida shunchaga surilgan bo'lishi zarur. Masalan, $(0,1)$ ish $t = 1$ vaqtda boshlangan bo'lsa, uning tamom bo'lishi $t = 3$ vaqtga to'g'ri keladi, demak, bu holda $(1,3)$ ishning kalendar muddatini aniqlash kerakki, natijada, u $[3,6]$ oraliqda yotsin. Bunday hol boshqa kritik bo'lmagan ishlarga taalluqli emas, chunki ularning to'la va erkin zaxira vaqtlari ustma-ust tushadi. Bu natijani 2.10-rasm orqali oson tushuntirish mumkin.

qilib, ishning erkin zaxira vaqti to'la zaxira vaqtidan kichik bo'lsa, uning kalendar vaqtini aniqlashtirishni undan keyin bajariladigan ishning boshlanish vaqtini hisobga olgan holda amalga oshirish kerak. Bunday muhim ma'lumotni faqat tarmoq modeli orqali olish mumkin.

Dasturni amalga oshiruvchi kalendar reja (grafik) tuzish kerakki, natijada, dasturni bajarish davomida ishchi kuchiga bo'lgan talab mumkin qadar tekis taqsimlangan bo'lsin. 2.11,a-rasmda kritik bo'lmagan ishlarning bajarilish kalendar muddatlarini, ularning erta vaqtlariga teng deb olingandagi ishchi kuchiga bo'lgan ehtiyojlar keltirilgan (bu erta yoki chap kalendar reja deyiladi), 2.11,b-rasmda esa eng kech vaqtlari olingandagi ishchi kuchiga bo'lgan ehtiyoj (bu kech yoki o'ng kalendar reja deyiladi). Punktir chiziqlar bilan kritik ishlarning ehtiyojlari belgilangan bo'lib, u dasturni minimal vaqtda tamomlash uchun, albatta bajarilishi zarur (ta'kidlaymizki, $(0,1)$ va $(1,3)$ ishlarni bajarish uchun, ishchi kuchi talab etilmaydi).

4-mashq. Quyidagi misollarda kritik bo'lmagan ishning to'la va erkin zaxira vaqtlari (TF va FF) hamda uning davomiyligi berilgan. Ishning erta boshlanish vaqtiga nisbatan boshlanishini maksimal kech qolish vaqtini aniqlang. Bunda, keyin bajariladigan ishlarning kalendar muddatlari erta boshlanish va kech tamom bo'lish oralig'ida yotishi mumkin:

(a) $TF = 10, FF = 10, D = 4$[Javob: kechikish = 10];

(b) $TF = 10, FF = 5, D = 4$[Javob: kechikish = 5];

(c) $TF = 10, FF = 0, D = 4$[Javob: kechikish = 0];

(d) $TF = 10, FF = 3, D = 4$[Javob: kechikish = 3].

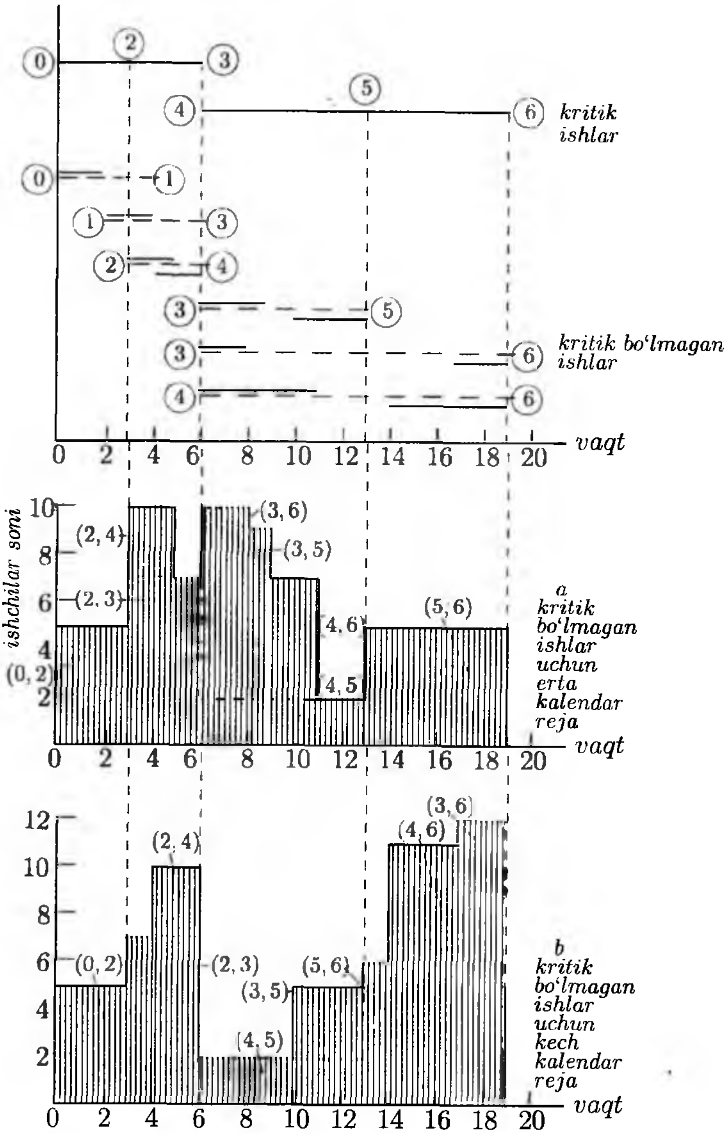
3-misol. Faraz qilaylik, 3-misolda turli ishlarni bajarish uchun, quyidagicha ishchi kuchlari talab etilsin.

2.3-jadval

Ishlar	Ishchilarga talab (soni)	Ishlar	Ishchilarga talab (soni)
$(0,1)$	0	$(3,5)$	2
$(0,2)$	5	$(3,6)$	1
$(1,3)$	0	$(4,5)$	2
$(2,3)$	7	$(4,6)$	5
$(2,4)$	3	$(5,6)$	6

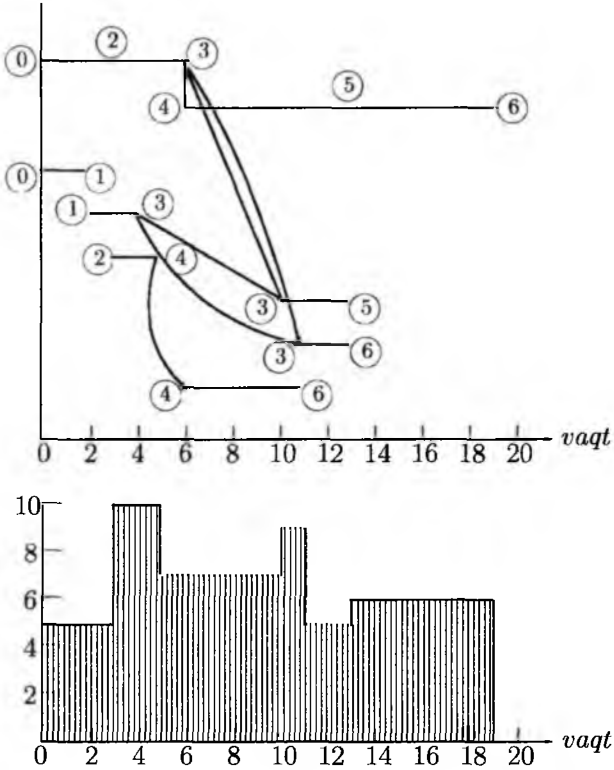
Dasturni amalga oshirish uchun, kritik ishni bajarishda kamida 7 ishchi kuchi talab etiladi. Kritik bo'lmagan ishlarni erta kalendar rejasida maksimal ishchi kuchi soni 10 ta, kech kalendar rejada esa 12 ta. Bu misol yaqqol ko'rsatadiki, zaxiralarga bo'lgan maksimal talab miqdori kritik bo'lmagan ishlarning zaxira vaqtlaridan qanday foydalanishga bog'liq ekan.

2.11-rasmdan ko'rinib turibdiki, kritik bo'lmagan ishlarning zaxira vaqtlari qanday taqsimlanishidan qat'i nazar ishchi kuchiga bo'lgan maksimal talab 10 tadan kichik bo'lmaydi, chunki kritik ishning bajarilish oralig'i bilan kesishadi.


0
2
3
4
5
6
kritik ishlar
0
1
1
3
2
4
3
5
3
6
kritik bo'lmagan ishlar
4
6
vaqt
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
ishchilar soni
10
8
6
4
2
(2, 4)
(2, 3)
(0, 2)
(3, 6)
(3, 5)
(4, 6)
(4, 5)
(5, 6)
a
kritik bo'lmagan ishlar uchun erta kalendar reja
vaqt
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
12
10
8
6
4
2
(2, 4)
(0, 2)
(2, 3)
(5, 6)
(3, 5)
(4, 5)
(4, 6)
(3, 6)
b
kritik bo'lmagan ishlar uchun kech kalendar reja
vaqt
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

2.11-rasm

Erta kalendar rejada ishchi kuchiga bo'lgan talab grafini yaxshilash mumkin, bunga (3, 5) ishning kech kalendar muddatini olib, (3, 6) ishni bevosita (4, 6) ishdan keyin boshlash orqali erishiladi. Bu yangi grafik 2.12-rasmda ko'rsatilgan, unda ishchi kuchiga bo'lgan ehtiyoj ancha tekis taqsimotga egadir.



2.12-rasm

Ayrim dasturlarda maqsad nafaqat zaxiralarni tekis taqsimlash, balki maksimal ehtiyojni ma'lum bir chegarada ushlab turish masalasi qo'yilgan bo'lishi ham mumkin. Agar bu maqsadga kritik bo'lmagan ishlar hisobiga erishishning iloji bo'lmasa, zaxiralarga bo'lgan talabni ayrim kritik ishlarning davomiyligini uzaytirish orqali kamaytirish kerak bo'ladi.

Matematik qiyinchilik sababli, hozircha zaxiralarni tekis taqsimlashning optimal masalasi yechilmagan, ya'ni dasturni bajarish davomida zaxiralarga bo'lgan maksimal ehtiyojni minimallashtirish. Shu sababli yuqoridagiga o'xshash evristik usullardan foydalanishga to'g'ri keladi. Bu usullarning barchasi kritik bo'lmagan ishlarning zaxira vaqtlaridan foydalanish qoidasiga asoslangan.

5-mashq. Faraz qilaylik, 4-misolda $(0,1)$ va $(1,3)$ ishlarni bajarish uchun, mos ravishda 8 va 2 ta ishchilar kerak bo'lsin. Quyidagi hollarning har biri 2.11-rasmda qanday o'zgarish sodir qiladi?

a). Har ikkala ishda ham kalendar muddatining boshlanishi sifatida erta vaqt olinadi. [*Javob.* $0 \leq t \leq 2$ intervalda ishchi kuchiga bo'lgan talab 13 ga teng, $2 \leq t \leq 3$ da – 7, $3 \leq t \leq 4$ da – 12].

b). Har ikkala ishda ham kalendar muddatining boshlanishi sifatida kech vaqt olinadi. [*Javob.* $2 \leq t \leq 3$ intervalda ishchi kuchiga bo'lgan talab 13 ga teng, $3 \leq t \leq 4$ da – 15, $4 \leq t \leq 6$ da – 12].

Dasturlarning kalendar rejasini tuzishda aniqmasliklar va sarflar ham hisobga olinishi mumkin.

Dasturni amalga oshirish jarayonini boshqarish

Ayrim hollarda kalendar reja tuzilgandan so'ng, tarmoq modeli keraksiz bo'lib qoladi deb o'ylaydiganlar topiladi. Ammo bu juda ham noto'g'ri fikrdir. Dasturni bajarish davomida tarmoq modeli katta foyda keltirishi mumkin.

Rejalashtirish bosqichida kalendar reja tuzilgan bo'lsa ham, dasturni bajarish bosqichida bunga amal qilish kamdan-kam uchraydi. Odatda, ayrim ishlar aniq shart-sharoitlarda kalendar rejaga nisbatan tezroq yoki sekinroq bajariladi. Kalendar rejadan bunday chetga chiqishlar dasturning qolgan qismi uchun, yangi kalendar reja tuzishni taqoza etadi. Dasturni bajarilish jarayonini nafaqat kalendar reja, balki tarmoq modelida ham aks ettirish lozim. Kalendar reja ishlarni o'z vaqtida bajarilayotganini nazorat qilishda foydalaniladi.

Biror ishning kech boshlanishi dasturning qolgan qismiga ta'siri tarmoq modelida aniq ifodalanadi.

Faraz qilaylik, dasturni bajarish paytida ayrim ishlarni kech boshlanishi sababli butunlay yangi kalendar reja tuzish talab etiladi. Mavjud tarmoq modelidan foydalangan holda bu yangi rejani qanday aniqlab bo'ladi? Avval tarmoq grafiga tuzatishlar (yangilanish) kiritish kerak, masalan, tamomlangan ishlarning davomiyligini nolga teng deb, qisman bajarilgan ishlarning davomiyligini mos ravishda o'zgartirish zarur.

Bundan tashqari tarmoq grafida tarkibiy o'zgarishlarni ham amalga oshirish kerak, ya'ni qandaydir sabablar bilan keraksiz bo'lib qolgan ishlarni chiqarib tashlash, avval kerak bo'lmagan, ammo kelajakda zarur bo'lib qolgan ishlarni kiritish.

Shundan so'ng odatdagi hisoblashlar yordamida yangi kalendar rejani tuzish va dasturni davom etish vaqtini aniqlash mumkin bo'ladi. Kalendar rejani yangisiga almashtirish vaqti kelguncha bunday ma'lumotlarni bilish katta ahamiyatga ega. Haqiqiy holatda esa kalendar rejani tez-tez almashtirish, odatda, dasturni boshlang'ich bosqichida bajariladi. Shundan so'ng uni bajarish jarayoni turg'un holatga o'tib, kalendar rejani tuzatishlar soni keskin kamayadi.

Tarmoq modelida hisob olib borish soddaligi bilan ajralib turadi, bundan tashqari murakkab dasturlarning kalendar rejasini tuzishda juda muhim ma'lumotlarni beradi. Shu sababli, tarmoq usullari amaliyotda katta mashhurlikka ega. Bu usullarning effektivligini ta'minllaydigan omillar ularning algoritmlari va maxsus tizimlari yaratilgandadur. Ular dasturlar tarmoq modellarini tahlil qilish va to'g'rilash xususiyatiga ega.

3-§. Maksimal oqim

To'rda maksimal oqimni topish chiziqli dasturlash masalasi kabi yechilishi mumkin. Ammo uning maxsusliklarini hisobga olgan holda turli effektiv yechish usullari taklif etilgan. Agar boshlang'ich parametrlarning qiymatlari butun sonlardan iborat bo'lsa, bu usullar yordamida topilgan yechim (oqim, maksimal oqim) ham butun sonlardan tashkil topgan bo'ladi.

Ma'lumki, chiziqli dasturlash masalasining yechimi uchun, bunday xulosa har vaqt ham o'rinli emas. Maksimal oqim haqida ma'lumot berishdan avval, to'r tushunchasini kiritaylik.

1-ta'rif. Tugun nuqtalar (uchlar, doirachalar) va ularni birlashtiruvchi yoylar (kesmalar, chiziqlar, qirralar, bo'g'inlar) to'plamiga *to'r* deb ataladi.

Bu yerda, har bir yoyga manfiymas haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lib, u shu yoyning *o'tkazish quvvati* deyiladi. Bu, masalan, trubaning diametri, ko'ndalang kesimi yuzasining qiymati yoki ushbu kesimdan vaqt birligida o'tadigan maksimal suyuqlik miqdori bo'lishi mumkin.

Yoyga strelka yordamida yo'nalish kiritilgan bo'lsa, bunday yoy *yo'naltirilgan yoy* deb ataladi, aks holda *yo'naltirilmagan* deyiladi.

Ammo yo'naltirilmagan yoyni ikkita yo'naltirilgan yoyga ekvivalent ravishda almashtirish mumkin. Bu quyida sxematik ravishda tasvirlangan (3.1-rasm):

3.1-rasm

Bundan kelib chiqadiki, to'rdagi barcha yoylarni yo'naltirilgan yoylarga keltirish mumkin. Umuman, barcha yoylari yo'nalishga ega bo'lgan to'r *yo'naltirilgan to'r* deb ataladi. To'rning tugun nuqtalari N_i bilan belgilanadi, bu yerda i mos tugun nuqtaning raqamini bildiradi. N_i tugun nuqtadan N_j tugun nuqtaga yo'naltirilgan yoy A_{ij} bilan belgilanadi. Agar to'rning tugun nuqtalari to'plamini ixtiyoriy qilib X va $\overline{X}$ to'plam ostilariga ajratilganda yoki A_{ij}, yoki A_{ji} yoy mavjud bo'lsa, bu yerda $N_i \in X$, $N_j \in \overline{X}$, bunday to'r *bog'langan* deyiladi. To'rda ikkita uch alohida ajratib ko'riladi: ulardan biri N_s bilan belgilanib, u *manba (boshlanish)*, ikkinchisi $-N_t$ *quyilish nuqtasi* deb ataladi. Har bir yoyning quvvati b_{ij} bilan belgilanib, uning qiymati mos A_{ij} yoyning yoniga yoziladi.

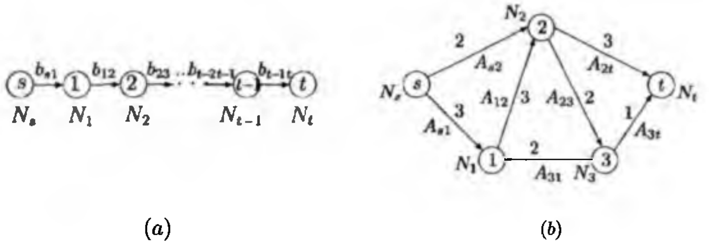
Bu yerda, agar to'rni biror suv oqimi tizimi deb olinsa, u holda, yoylar trubalarni, uchlar trubalarning bir-biriga ulanish joylarini, ularning o'tkazish quvvati, masalan, trubaning ko'ndalang kesimini bildirishi mumkin. Oqim esa truba ichidan o'tayotgan suyuqlik miqdori bo'lishi mumkin. qilib, umumiy masala quyidagicha qo'yiladi: manbadan quyilish nuqtasiga maksimal qancha miqdorda suyuqlik o'tkazish mumkin?

Quyidagi sodda to'rni qaraylik 3.2(a)-rasm. Bunda, tushunarliki, maksimal oqim (suyuqlik miqdori) barcha yoylarning minimal o'tkazish quvvatiga teng, ya'ni $w = \min\limits_{(ij)} b_{ij}$. qilib, to'rning eng tor joyi topilib, uning o'tkazish quvvati maksimal oqim miqdoriga teng bo'lar ekan. Maksimal oqimni topish algoritmlarining barchasi, to'rning shu eng tor joyini va uning o'tkazish quvvatini aniqlash g'oyasiga asoslangan.

X va $\overline{X}$ lar barcha tugun nuqtalar to'plamiga nisbatan o'zaro bir-birini to'ldiruvchi to'plam ostilari bo'lsin, bu yerda $N_s \in X$ va $N_t \in \overline{X}$ shartlar bajarilishi talab etiladi.

2-ta'rif. X bilan $\overline{X}$ ni, yoki aksincha $\overline{X}$ bilan X ni birlashtiruvchi yoylar to'plamiga *X va $\overline{X}$ juftlikka mos keluvchi kesim* deb ataladi va $(X, \overline{X})$ bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan: $(X,\overline{X}) = \{A_{ij} : N_i \in X,\ N_j \in \overline{X}$, yoki $N_i \in \overline{X},\ N_j \in X\}$.



3.2-rasm

3-ta'rif. Quyidagi $\sum\limits_{\substack{N_i \in X \\ N_j \in \overline{X}}} b_{ij}$ songa $(X,\overline{X})$ *kesimning o'tkazish quvvati* deb ataladi va $C(X,\overline{X})$ bilan belgilanadi.

Bevosita kesimning o'tkazish quvvati ta'rifidan kelib chiqadiki, umuman olganda $C(X,\overline{X}) \neq C(\overline{X},X)$. 4.2(b)-rasmda agar $X = \{N_s,\ N_2\}$, $\overline{X} = \{N_1,\ N_3,\ N_t\}$ olinib kesim $(X,\ \overline{X})$ tuzilsa, uning o'tkazish quvvati $C(X,\ \overline{X}) = b_{s1} + b_{23} + b_{2t} = 3 + 3 + 2 = 8$ ga teng bo'ladi. $(\overline{X},\ X)$ kesimniki esa $C(\overline{X},\ X) = b_{12} = 3$ ga teng.

O'tkazish quvvati eng kichik bo'lgan kesim *minimal kesim* deb ataladi. Shu minimal kesim to'rning eng tor joyini aniqlaydi.

Bundan keyin biz faqat yo'naltirilgan va bog'langan to'rlarni qaraymiz. Demak, berilgan to'rda maksimal oqimni topish asosiy masala hisoblanadi. Quyidagi tushunchalar kiritiladi:

$$N_1 A_{12} N_2 A_{23} N_3 \ldots N_{m-1} A_{m-1m} N_m \qquad (3.1)$$

biror to'rdagi uchlar va yoylar ketma-ketligi bo'lsin.

4-ta'rif. Agar barcha A_{ii+1} yoylar yo'naltirilgan yoy bo'lsa, (3.1)-ketma-ketlik *zanjir* deb ataladi.

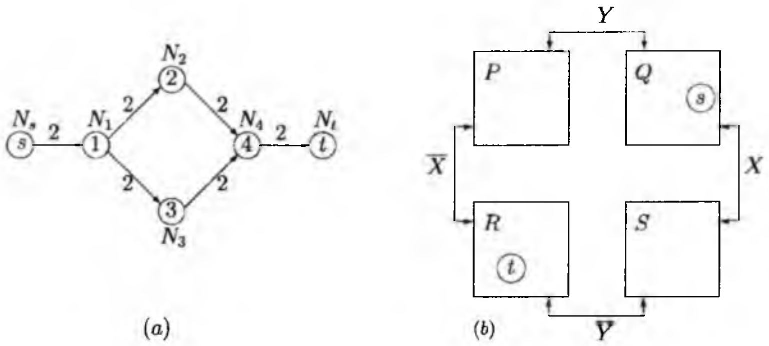
Demak, zanjir bo'yicha harakat, faqat yoylarning yo'nalishi bo'yicha bo'lar ekan.

5-ta'rif. Agar yoki A_{ii+1}, yoki A_{i+1i} yoy yo'naltirilgan bo'lsa, (3.1)-ketma-ketlik *yo'l* deb ataladi.

Demak, yo‘l bo‘yicha harakat yoylarning yo‘nalishiga qarama-qarshi ham bo‘lishi mumkin ekan. Shuni ta’kidlaymizki, zanjir har vaqt yo‘l bo‘ladi, ammo yo‘ldan zanjirni hosil qilish uchun, undagi ayrim yoylarning yo‘nalishini o‘zgartirish kerak bo‘lishi mumkin.

6-ta’rif. Agar (3.1)-zanjirda $N_1 = N_m$ tenglik bajarilsa, u *sikl* deb ataladi.

Demak, siklda biror uchdan chiqib, yoy yo‘nalishi bo‘yicha harakat qilinib yana boshlang‘ich uchga qaytib kelingan bo‘lishi kerak.



3.3-rasm

Bizga 3.2(b)-rasm ko‘rinishda 5 ta uchdan iborat bo‘lgan yo‘naltirilgan to‘r berilgan bo‘lsin. Uning tugun nuqtalari va yoylari yordamida ketma-ketliklarni tuzamiz, bunda: $N_sA_{s1}N_1A_{12}N_2A_{23}N_3$ – zanjirni, $N_2A_{23}N_3A_{13}N_1$ – yo‘lni tashkil qiladi, ammo A_{13} yoy A_{31} yoyga almashtirilsa, yo‘l zanjirga aylanib qoladi; $N_1A_{12}N_2A_{23}N_3A_{31}N_1$ – siklni tashkil qiladi.

Asosiy masala bo‘lgan maksimal oqimni aniqlash uchun, oqim tushunchasini kiritamiz.

7-ta’rif. N_s manbadan N_t quyilish nuqtasiga olib boruvchi *oqim* deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi nomanfiy $\{x_{ij}\}$

haqiqiy sonlar to'plamiga aytiladi:

$$\sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = \begin{cases} -w, & \text{agar } j = s, \\ 0, & \text{agar } j \neq s, t \\ w, & \text{agar } j = t \end{cases} \tag{3.2}$$

bu yerda birinchi yig'indi A_{ij} yoylarni tashkil etuvchi barcha N_i tugun nuqtalar bo'yicha, ikkinchi yig'indi esa A_{jk} yoylarni tashkil etuvchi barcha N_k tugun nuqtalar bo'yicha hisoblanadi. Bundan tashqari, barcha A_{ij} yoylar uchun, $0 \leq x_{ij} \leq b_{ij}$ tengsizlik o'rinli; manfiymas w soni *oqim kattaligi*, x_{ij} – *A_{ij} yoyning oqimi* deyiladi. (3.2)-tenglikning birinchisi (bunda $-\sum_j x_{sj} = -w$) N_s manbadan chiqqan, uchinchisi (bunda $\sum_i x_{it} = w$) N_t quyilish nuqtasiga kelgan oqim miqdorlarini bildiradi, ikkinchi tenglik N_j tugun nuqtaga kelgan oqim miqdori $\sum_i x_{ij}$ bilan ketgan oqim miqdori $-\sum_k x_{jk}$ orasidagi farqni bildiradi (qancha kelgan bo'lsa shuncha ketadi, shu sababli bu farq nolga teng).

Maqsad funksiya esa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$w = \sum_j x_{sj}, \quad \text{yoki} \quad w = \sum_i x_{it}.$$

1-teorema. (Maksimal oqim va minimal kesim haqida). Ixtiyoriy to'rda N_s manbadan N_t quyilish nuqtasiga olib boruvchi maksimal oqim minimal kesimning o'tkazish quvvatiga teng.

Isbot. Isbot yoylarning o'tkazish quvvatlari butun sonlardan iborat bo'lgan holda keltirilgan, zero teorema yoylarning o'tkazish quvvatlari ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lganda ham o'rinlidir. Agar $\{x_{ij}\}$ (3.2)-shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy oqim bo'lib, uning oqim kattaligi biror kesimning o'tkazish quvvatiga teng bo'lsa teorema isbot bo'lgan bo'ladi. Aks holda, quyidagi usul yordamida oqim kattaligi kamida bir birlikka kattalashtirib boriladi va natijada biror kesimning o‘tkazish quvvatiga teng bo‘lib qoladi.

Ixtiyoriy $\{x_{ij}\}$ (bunday oqimning mavjudligi ravshan, masalan, $\{x_{ij} = 0\}$) boshlang‘ich oqimni olish bilan, quyidagi usul yordamida X tugun nuqtalar to‘plamini quramiz:

a) $N_s \in X$;

b) agar $N_i \in X$ va $x_{ij} < b_{ij}$ bo‘lsa, u holda $N_j \in X$;

c) agar $N_i \in X$ va $x_{ji} > 0$ bo‘lsa, u holda $N_j \in X$.

Bu X to‘plamga tegishli bo‘lmagan tugun nuqtalar to‘plamini $\overline{X}$ bilan belgilaymiz. X to‘plamning tuzilishiga ko‘ra, 2 ta hol bo‘lishi mumkin.

1. N_t quyilish nuqtasi $\overline{X}$ ga tegishli bo‘ladi.
2. N_t quyilish nuqtasi X ga tegishli bo‘ladi.

Ikkala holni alohida ko‘rib chiqamiz. Birinchi holda b) ga asosan, X dan $\overline{X}$ ga o‘tuvchi barcha (i, j) yoylar uchun, $x_{ij} = b_{ij}$ tenglik bajariladi. Xuddi , c) ga asosan, $x_{ji} > 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi yoy mavjud emas. Bulardan quyidagi kelib chiqadi:

$$\sum_{\substack{N_i \in X \\ N_j \in \overline{X}}} x_{ij} = \sum_{\substack{N_i \in X \\ N_j \in \overline{X}}} b_{ij} \quad \text{va} \quad \sum_{\substack{N_i \in X \\ N_j \in \overline{X}}} x_{ji} = 0.$$

Demak, $(X, \overline{X})$ kesim va $\{x_{ij}\}$ oqim topildiki, ular uchun, $C(X, \overline{X}) = \sum\limits_{\substack{N_i \in X \\ N_j \in \overline{X}}} x_{ij}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu holda teorema isbot bo‘ldi.

Endi ikkinchi holni qaraymiz. U holda, X ning aniqlanishiga asosan, N_s va N_t ni birlashtiruvchi $N_s ... N_i A_{ii+1} N_{i+1} ... N_t$ yo‘l borki, uning A_{ii+1} yoyi uchun, yoki $x_{ii+1} < b_{ii+1}$, yoki $x_{i+1i} > 0$ shartlardan biri bajariladi.

Bu yo‘l orqali harakat qilinganda, uning ayrim yoylarini yo‘nalish bo‘yicha (bular yo‘lning *to‘g‘ri yoylari* deyiladi), ayrimlarini yo‘nalishga qarama-qarshi bo‘yicha (bular yo‘lning *teskari* *yoylari* deyiladi) o'tiladi. ε_1 bilan to'g'ri yoylarga mos kelgan $b_{ij} - x_{ij}$ ayrimalarning eng kichigi, ε_2 bilan teskari yoylarga mos kelgan x_{ji} larning eng kichigi belgilangan bo'lsin. U holda $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ musbat son bo'ladi.

Boshlang'ich oqim $\{x_{ij}\}$ butun sonlardan (masalan, nollardan) iborat bo'lganligi sababli, ravshanki ε ham butun musbat son bo'ladi. U holda boshlang'ich oqimni ε ga oshirish mumkin. Buning uchun, to'g'ri yoylarning oqimini ε ga oshiramiz, teskari yoylar oqimini ε ga kamaytiramiz. Yangi hosil bo'lgan oqim (3.2)-shartlarni qanoatlantiradi va bu oqim kattaligi ε ga ortadi. Shundan so'ng qaytadan X to'plam quriladi.

Agar N_t quyilish nuqtasi X ga tegishli bo'lsa, yuqoridagi usul bilan oqim kattaligi oshiriladi. Minimal kesimning o'tkazish quvvati chekli son bo'lganligi va oqim kattaligi har safar kamida bittaga oshayotganligi sababli, chekli qadamdan keyin maksimal oqim hosil qilinadi. Shu bilan teorema isbot bo'ldi.

So'zsiz, ixtiyoriy to'rda maksimal oqim kattaligi yagona aniqlanadi. Ammo qiymatlari maksimal oqim kattaligiga teng bo'lgan bir nechta oqimlar bo'lishi mumkin. Shu bilan birga minimal kesimlar ham bir nechta bo'lishi mumkin.

Masalan, yuqoridagi 4.2 (b)-rasm to'rda $X = \{N_s\}$, $\overline{X} = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_t\}$ va $Y = \{N_s, N_1, N_2, N_3, N_4\}$, $\overline{Y} = \{N_t\}$ lar minimal kesimni tashkil etishadi va ular uchun, $C(X, \overline{X}) = C(Y, \overline{Y}) = 2$ tenglik o'rinli. Shu bilan birga eng katta oqim kattaligi ($w = 2$)ni beruvchi maksimal oqim 3 ta: $\{x_{s1} = x_{12} = x_{24} = x_{4t} = 2, x_{13} = x_{34} = 0\}$, $\{x_{s1} = x_{13} = x_{34} = x_{4t} = 2, x_{12} = x_{24} = 0\}$ va $\{x_{s1} = 2, x_{12} = x_{24} = x_{13} = x_{34} = 1, x_{4t} = 2\}$.

2-teorema. Faraz qilaylik, $(X, \overline{X})$ va $(Y, \overline{Y})$ lar minimal kesimlar bo'lishsin, u holda $(X \cup Y, \overline{X \cup Y})$ va $(X \cap Y, \overline{X \cap Y})$ lar ham minimal kesimlar bo'lishadi.

Isbot.

Agar $X \subset Y$ bo'lsa, u holda $X \cup Y = Y, X \cap Y = X$ bo'ladi, bundan kelib chiqadi: $(X \cup Y, \overline{X \cup Y}) = (Y, \overline{Y})$ va $(X \cap Y, \overline{X \cap Y}) = (X, \overline{X})$, shu bilan teorema isbot bo'ldi.

Shuning uchun, faraz qilamiz X va Y lar kesishsin($N_s \in X, Y$ bo'lganligi sababli kesishma bo'sh emas), u holda quyidagi belgilashlarni kiritamiz (4.3(b)-rasm):

$$X \cap Y = Q,\ X \cap \overline{Y} = S,\ \overline{X} \cap Y = P,\ \overline{X} \cap \overline{Y} = R.$$

U holda $N_s \in Q$, $N_t \in R$, $X = Q \cup S$, $\overline{X} = P \cup R$, $Y = P \cup Q$, $\overline{Y} = R \cup S$.

$C(Q, P) = \sum\limits_{\substack{N_i \in Q \\ N_j \in P}} b_{ij}$ bo'lsin. Qolgan $C(Q, R)$, $C(S, P)$ va boshqalarni ham xuddi aniqlaymiz.

$(X, \overline{X})-$ minimal kesim, $(Q, P \cup R \cup S)-$ kesim bo'lganligi sababli $C(X, \overline{X}) \leq C(Q, P \cup R \cup S)$, yoki $C(Q, P) + C(Q, R) + C(S, P) + C(S, R) \leq C(Q, P) + C(Q, R) + C(Q, S)$, bundan quyidagi

$$C(S, P) + C(S, R) \leq C(Q, S) \tag{3.3}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Ammo $C(X, \overline{X}) \leq C(P \cup Q \cup S)$, demak,

$$C(Q, P) + C(Q, R) + C(S, P) + C(S, R) \leq C(P, R) + C(Q, R) + C(S, R)$$

bundan

$$C(Q, P) + C(S, P) \leq C(P, R) \tag{3.4}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Xuddi shunga o'xshash $C(Y, \overline{Y}) \leq C(Q, P \cup R \cup S)$ tengsizlikdan

$$C(P, R) + C(P, S) \leq C(Q, P) \tag{3.5}$$

tengsizlikni va $C(Y, \overline{Y}) \leq C(P \cup Q \cup S, R)$ tengsizlikdan

$$C(P, S) + C(Q, S) \leq C(S, R) \tag{3.6}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. (3.3), (3.4), (3.5) va (3.6) tengsizliklarni qo'shish bilan $2C(S,P)+2C(P,S)\leq 0$ tengsizlik hosil bo'ladi. Lekin $b_{ij}\geq 0$ bo'lganligi uchun:

$$C(S,P)=C(P,S)=0 \tag{3.7}$$

bo'ladi. (3.7) ni (3.3), (3.4), (3.5) va (3.6) larga qo'yish bilan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} C(S,R)&\leq C(Q,S),\\ C(Q,P)&\leq C(P,R),\\ C(P,R)&\leq C(Q,P),\\ C(Q,S)&\leq C(S,R), \end{aligned}$$

bulardan

$$C(S,R)=C(Q,S), \tag{3.8}$$

$$C(Q,P)=C(P,R) \tag{3.9}$$

kelib chiqadi.

(3.7), (3.8) va (3.9) munosabatlardan quyidagi:

$$\begin{aligned} C(X,\overline{X})&=C(Q,P)+C(Q,R)+C(S,R)=\\ &=C(Q,P)+C(Q,R)+C(Q,S)=C(X\cap Y,\overline{X\cap Y}),\\ C(X,\overline{X})&=C(Q,P)+C(Q,R)+C(S,R)=\\ &=C(P,R)+C(Q,R)+C(S,R)=C(X\cup Y,\overline{X\cup Y}) \end{aligned}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Teorema isbot bo'ldi.

Ma'lumki, minimal kesimlar soni bittadan ortiq bo'lishi mumkin. Unda savol tug'iladi, maksimal oqim minimal kesim haqidagi teoremaning isbotidan kelib chiqadigan minimal kesim ularning qay biri bo'ladi? Faraz qilaylik, $(X_i,\overline{X_i})$, $i=1,\,2,\,...,m$ to'rdagi barcha minimal kesimlar bo'lsin. Agar 1-teorema isbotidan kelib chiqadigan minimal kesim $(X,\overline{X})$ bo'lsa, u holda $X=\bigcap\limits_{i=1}^{m}X_i$ bo'ladi.

Bu da'voning isboti quyidagi murakkab bo'lmagan mulohazalardan kelib chiqadi. 2-teorema natijasidan foydalangan holda, matematik induksiyani qo'llab, $(X_1 \cap ... \cap X_m, \overline{X_1 \cap ... \cap X_m})$ ning minimal kesim ekanligini ko'rsatish mumkin.

Agar to'rdagi oqimning kattaligi $C(X, \overline{X})$ ga teng bo'lsa, u holda 1-teorema isboti davomida rekkurent ravishda aniqlangan X da $\overline{X}$ ning tugun nuqtasini belgilab bo'lmaydi. Shu sababli X_i larning hech biri X ning xos to'plam ostisi bo'laolmaydi. Xususan, $\bigcap_{i=1}^{m} X_i$ ham X ning xos to'plam ostisi bo'laolmaydi. Ammo X X_i larning birortasi bo'lishligi majbur ekanligidan $X = \bigcap_{i=1}^{m} X_i$ kelib chiqadi. Da'vo isbotlandi.

Maksimal oqimni topish uchun belgi qo'yish usuli

Biz yuqorida maksimal oqim haqidagi teoremani ko'rib chiqdik, endi maksimal oqimni topish algoritmi bilan tanishib chiqamiz. Ma'lumki, maksimal oqimni topish masalasini chiziqli dasturlash masalasiga keltirib ham yechish mumkin. Ammo bunda har vaqt ham maksimal oqim kattaligi to'g'ri chiqavermaydi. Belgi qo'yish usuli bundan mustasno. Agar yoylarning o'tkazish quvvatlari butun sonlardan iborat bo'lsa, bu usul yordamida aniqlangan maksimal oqim kattaligi ham muqarrar butun son bo'ladi. Belgi qo'yish usuli biror boshlang'ich oqimdan boshlanib, keyin yangi yo'l topish va bu yo'l orqali qo'shimcha oqim jo'natish g'oyasiga asoslangan. Bu "belgi qo'yish" qoidasi bilan amalga oshiriladi. Ya'ni, uchlar maxsus belgilanib, u qaysi yoy oqimini qanchaga kattalashtirish mumkinligini ko'rsatib beradi. Qo'shimcha oqim jo'natish mumkin bo'lgan yo'l topilgandan so'ng, bu oqim miqdori aniqlanadi. Shundan keyin avvalgi oqim kattalashtiriladi va uchlardagi belgilar o'chirib tashlanadi. Yangi hosil bo'lgan to'rda uchlarga yana belgilar qo'yilib chiqiladi va hokazo. Maksimal oqimni topish uchun, belgi qo'yish effektiv usullardan biri hisoblanadi. Bu usulni qo'llash natijasida maksimal oqimning kattaligi va minimal kesim aniqlanadi. Ushbu algoritm ikki qadamdan iborat: 1-qadamda uchlar belgilanib chiqiladi, 2-qadamda oqim miqdori kattalashtiriladi. Maksimal oqim topilgunga qadar bu ikki qadam ketma-ket qaytariladi.

Biror boshlang'ich (masalan, $x_{ij} = 0$) oqim tanlab olingan bo'lsin. Agar bu maksimal oqim bo'lmasa, quyidagi qadamlarni bajarish kerak bo'ladi.

1-qadam (Belgi qo'yish qoidasi).

Ixtiyoriy tugun nuqta quyidagi uchta holatdan birida bo'ladi: a) belgilanmagan; b) belgilangan ko'rib chiqilmagan; c) belgilangan va ko'rib chiqilgan. Qoidani qo'llash arafasida barcha tugun nuqtalar belgilanmagan, ya'ni a) holatda bo'lishadi. Tugun nuqtalarning belgilari ikki qismdan iborat bo'ladi, birinchi belgi qayerdan yoki qayerga, ikkinchi belgi qancha miqdorda oqim jo'natish mumkinligini bildiradi.

Qoida qo'llash boshlanishida N_s manba $[s^+, \infty)$ belgini oladi, bu bildiradiki, N_s dan N_s ga ixtiyoriy miqdorda oqim jo'natish mumkin.

Shundan so'ng N_s belgilangan va ko'rib chiqilmagan, ya'ni b) holatga o'tadi. Umuman, ixtiyoriy belgilangan, lekin hali ko'rib chiqilmagan N_j tugun nuqtani olamiz, uning belgisi $[i^+, \varepsilon(j))$ bo'lsin. N_j ga qo'shni bo'lgan, ammo belgisi yo'q N_k tugun nuqtani olamiz, uning uchun, $x_{jk} < b_{jk}$ bo'lsin, unda N_k ni $[j^+, \varepsilon(k))$, bu yerda $\varepsilon(k) = \min[\varepsilon(j), b_{jk}\text{-}x_{jk}]$ bilan belgilaymiz.

Mabodo, $x_{kj} > 0$ bo'lsa, N_k tugun nuqtani $[j^-, \varepsilon(k))$ bilan belgilaymiz, bu yerda $\varepsilon(k) = \min[\varepsilon(j), x_{kj}]$.

Qoida bilan N_j ning qo'shni tugun nuqtalari bo'lgan barcha N_k lar ko'rib chiqiladi, shundan so'ng N_j belgilangan va ko'rib chiqilgan, ya'ni 3) holatga o'tib qoladi. Bunda, ayrim qo'shni tugun nuqtalar belgi olmasligi ham mumkin. Belgi qo'yish qoidasini qo'llash natijasida quyilish nuqtasi N_t biror belgiga ega bo'ladi yoki belgi olmaydi. Oxirgi holda maksimal oqim topilgan bo'ladi va hisoblash to'xtatiladi. Agar N_t biror belgi olgan bo'lsa, keyingi 2-qadamga o'tiladi.

2-qadam. (Oqim kattaligini oshirish qoidasi). Faraz qilaylik, quyilish nuqtasi $N_t\,[k^+, \varepsilon(t))$ belgiga ega bo'lsin. U holda avvalgi oqim x_{kt} ni $x_{kt} + \varepsilon(t)$ ga almashtiramiz va N_k tugunga nuqtaga o'tamiz. Mabodo, $N_t\;[k^-, \varepsilon(t))$ belgiga ega bo'lsa, u holda avvalgi oqim x_{tk} ni $x_{tk} - \varepsilon(t)$ ga almashtiramiz va bunda ham N_k tugun nuqtaga o'tamiz. Agar N_k tugun nuqta $[j^+, \varepsilon(k))$ belgiga ega bo'lsa, x_{jk} ni $x_{jk} + \varepsilon(t)$ ga almashtiramiz.

Mabodo, u $[j^-, \varepsilon(k))$ belgiga ega bo'lsa, uning avvalgi oqimi $x_{jk} - \varepsilon(t)$ ga almashtiriladi. Shu qoida qo'llanilishi natijasida manba N_s ga yetib kelinadi. Boshqa yoy oqimlari eski holatda – o'zgarmasdan qoldiriladi. Shundan so'ng barcha tugun nuqtalarning belgilari o'chirib tashlanadi va hosil bo'lgan yangi oqim boshlang'ich oqim sifatida olinib 1-qadamga o'tiladi.

1-misol. Misol sifatida 3.4(a)-rasmdagi to'rni qaraymiz. Boshlang'ich oqim $x_{ij} = 0$ bo'lsin. Bu yoy oqimlari mos ravishda yoyning o'tkazish quvvatidan keyingi vergul belgisidan so'ng yozib qo'yilgan. 1-qadam – belgi qo'yish qoidasiga asosan N_s manba $[s^+, \infty)$ bilan belgilanadi. N_s ning ikkita N_1, N_2 qo'shni tugun nuqtalari bo'lib, ular uchun, $b_{s1} = 3 > x_{s1} = 0$, $b_{s2} = 2 > x_{s2} = 0$ tengsizliklar o'rinli, shu sababli N_1 va N_2 tugun nuqtalar $[s^+, 3)$, $[s^+, 2)$ bilan mos ravishda belgilangan. Endi ikkinchi b) holatdagi N_2 tugun nuqtani olamiz. Uning 4 ta qo'shni tugun nuqtasi bor: N_s, N_1, N_3, N_t. Ammo N_s, N_1 tugun nuqtalarning belgilari bor. N_3 tugun nuqta uchun, $b_{23} = 2 > x_{23} = 0$ tengsizlik bajarilganligi sababli u $[2^+, 2)$ belgini oladi. Xuddi N_t quyilish nuqtasi uchun, $b_{2t} = 3 > x_{2t} = 0$ tengsizlik o'rinli bo'lganligi sababli, $[2^+, 2)$

belgini oladi. Bularning barchasi 3.4(a)-rasmda ko'rsatilgan. N_t quyilish nuqtasi $[2^+, 2)$ belgiga ega bo'lganligi uchun, 2-qadam, oqim kattaligini oshirish qoidasiga o'tamiz.

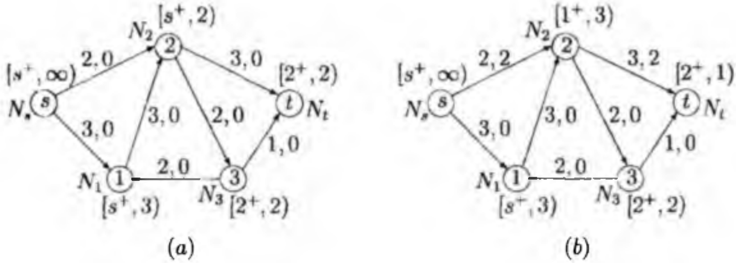
Ushbu qoidaga asosan, $\varepsilon(t) = 2$ bo'lganligi sababli, N_s manbani N_t quyilish nuqtasi bilan birlashtiruvchi yo'l mavjudki (aynan u: $N_s A_{s2} N_2 A_{2t} N_t$), u orqali $\varepsilon(t) = 2$ qo'shimcha oqim jo'natish mumkin. Shunga ko'ra ushbu yo'l yoylarining oqimlari qiymatlari 2 ga oshirilgan. Qolgan yoylarning oqim kattaliklari o'zgartirilmagan. Bu o'zgarishlar 3.4(b)-rasmda aks ettirilgan.

Endi oxirgi hosil bo'lgan oqimni boshlang'ich oqim sifatida olib 1-qadamga o'tamiz.

1-qadam qoidasiga asosan N_s manba $[s^+, \infty)$ belgini oladi. Uning qo'shni tugun nuqtasi N_2 uchun, $b_{s2} = x_{s2} = 2$ bo'lganligi sababli $b_{s2} > x_{s2}$ tengsizlik bajarilmaydi va A_{2s} yoy yo'q. Shuning uchun, N_2 tugun nuqta belgi olmaydi. Ikkinchi qo'shni tugun nuqta N_1 uchun, $b_{s1} = 3 > x_{s1} = 0$ tengsizlik o'rinli, shu sababli u $[s^+, 3)$ belgini oladi. Endi ikkinchi holatdagi N_1 tugun nuqtaning qo'shni tugun nuqtalari bo'lgan N_2, N_3 larni qaraymiz. N_2 tugun nuqta uchun, $b_{12} = 3 > x_{12} = 0$ tengsizlik bajarilganligi uchun, u $[1^+, 3)$ belgini oladi. N_3 tugun nuqta uchun, $x_{31} = 0$ tenglik o'rinli bo'lganligi sababli u belgi olmaydi.

Endi ikkinchi b) holatdagi N_2 tugun nuqtani olamiz, uning qo'shni tugun nuqtalari N_3, N_t lar bo'lib, ular uchun, mos ravishda $b_{23} = 2 > x_{23} = 0$, $b_{2t} = 3 > x_{2t} = 2$ tengsizliklar bajariladi. Shu sababli, ular mos ravishda $[2^+, 2)$ $[2^+, 1)$ belgilarni oladi. Bularning barchasi 3.4(b)-rasmda ko'rsatilgan.

Bu yerda N_t quyilish nuqtasi $[2^+, 1)$ belgiga ega bo'lganligi uchun, N_s manba bilan N_t quyilish nuqtani birlashtiruvchi yo'l mavjudki, (aynan u: $N_s A_{s1} N_1 A_{12}\ N_2\ A_{2t} N_t$), u orqali $\varepsilon(t) = 1$ qo'shimcha oqim jo'natish mumkin. Buni amalga oshirish uchun, 2-qadam, oqim kattaligini oshirish qoidasiga o'tamiz.



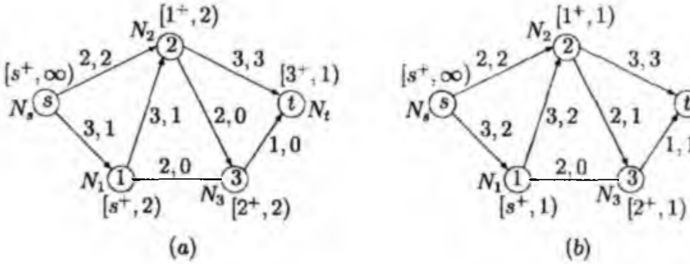
3.4-rasm

Ikkinchi qadam qoidasiga asosan, yuqorida topilgan yo'l orqali qo'shimcha 1 oqimni jo'natamiz. Bu holat 3.5(a)-rasmda ko'rsatilgan.

Yana 1-qadamga o'tib tugun nuqtalarni belgilaymiz. Ushbu qadam qoidasiga asosan N_s manba $[s^+, \infty)$ belgini oladi. Uning qo'shni tugun nuqtasi N_2 uchun, $b_{s2} = x_{s2} = 2$ bo'lganligi sababli $b_{s2} > x_{s2}$ tengsizlik bajarilmaydi va A_{2s} yoy yo'q. Shuning uchun, N_2 tugun nuqta belgi olmaydi. Ikkinchi qo'shni tugun nuqta N_1 uchun, $b_{s1} = 3 > x_{s1} = 1$ tengsizlik o'rinli, shu sababli, u $[s^+, 2)$ belgini oladi. Endi ikkinchi holatdagi N_1 tugun nuqtaning qo'shni tugun nuqtalari bo'lgan N_2, N_3 larni qaraymiz. N_2 tugun nuqta uchun, $b_{12} = 3 > x_{12} = 1$ tengsizlik bajarilganligi uchun, u $[1^+, 2)$ belgini oladi. N_3 tugun nuqta uchun, $x_{31} = 0$ tenglik o'rinli bo'lganligi sababli, u belgi olmaydi. Endi ikkinchi b) holatdagi N_2 tugun nuqtani olamiz, uning qo'shni tugun nuqtalari N_3, N_t lar bo'lib, ular uchun, mos ravishda $b_{23} = 2 > x_{23} = 0$, $b_{2t} = 3 = x_{2t} = 3$ munosabatlar bajariladi. Shu sababli, N_3 tugun nuqta $[2^+, 2)$ belgini oladi. N_3 tugun nuqtaning qo'shni tugun nuqtasi N_t bo'lib $b_{3t} = 1 > x_{3t} = 0$ tengsizlik bajariladi, demak, u $[3^+, 1)$ belgini oladi. Bularning barchasi 3.5(a)-rasmda ko'rsatilgan. Bu yerda N_t quyilish nuqtasi $[3^+, 1)$ belgiga ega bo'lganligi uchun, N_s manba bilan N_t quyilish nuqtani birlashtiruvchi yo'l mavjud (aynan u: $N_s A_{s1} N_1 A_{12} N_2 A_{23} N_3 A_{3t} N_t$) u orqali $\varepsilon(t) = 1$ qo'shimcha oqim jo'natish mumkin. Buni amalga oshirish uchun, 2-qadam, oqim kattaligini oshirish qoidasiga o'tamiz.

2-qadam qoidasiga asosan $N_sA_{s1}N_1A_{12}N_2A_{23}N_3A_{3t}N_t)$ yo'l orqali $\varepsilon(t) = 1$ birlik qo'shimcha oqim jo'natamiz. Bu o'zgarish 3.5(b)-rasmda ko'rsatilgan.

Endi 1-qadamga o'tib, tugun nuqtalarni belgilashni amalga oshiramiz. Ushbu qadam qoidasiga asosan N_s manba $[s^+ . \infty)$ belgini oladi. Uning qo'shni tugun nuqtasi N_2 uchun, $b_{s2} = x_{s2} = 2$ bo'lganligi sababli $b_{s2} > x_{s2}$ tengsizlik bajarilmaydi va A_{2s} yoy yo'q. Shuning uchun, N_2 tugun nuqta belgi olmaydi. Ikkinchi qo'shni tugun nuqta N_1 uchun, $b_{s1} = 3 > x_{s1} = 2$ tengsizlik o'rinli, shu sababli u $[s^+, 1)$ belgini oladi.



3.5-rasm

Endi ikkinchi holatdagi N_1 tugun nuqtaning qo'shni tugun nuqtalari bo'lgan N_2, N_3 larni qaraymiz. N_2 tugun nuqta uchun, $b_{12} = 3 > x_{12} = 2$ tengsizlik bajarilganligi uchun, u $[1^+, 1)$ belgini oladi. N_3 tugun nuqta uchun, $x_{31} = 0$ tenglik o'rinli bo'lganligi sababli, u belgi olmaydi. Endi ikkinchi b) holatdagi N_2 tugun nuqtani olamiz, uning qo'shni tugun nuqtalari N_3, N_t lar bo'lib, ular uchun, mos ravishda $b_{23} = 2 > x_{23} = 1$, $b_{2t} = 3 = x_{2t} = 3$ munosabatlar bajariladi. Shu sababli, N_3 tugun nuqta $[2^+, 1)$ belgini oladi. N_3 ning qo'shni tugun nuqtasi N_t bo'lib $b_{3t} = 1 = x_{3t} = 1$ tenglik bajariladi, demak, u belgilanmaydi. qilib quyilish nuqtasi N_t belgiga ega emas. Bu degani, hisoblash to‘xtatiladi, maksimal oqim kattaligi aniqlandi: $w = 4$. Shu bilan birga minimal kesim ham topildi: $X = \{N_s, N_1, N_2, N_3\}$, $\overline{X} = \{N_t\}$, $(X, \overline{X}) = \{A_{2t}, A_{3t}\}$. Bularning barchasi 3.5(b)-rasmda ko‘rsatilgan. Ta’kidlaymiz: $C(X, \overline{X}) = 4$.

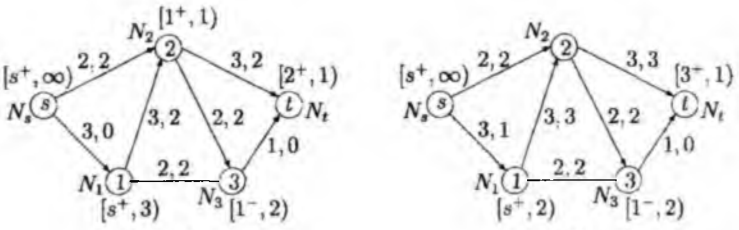
2-misol. Endi, yuqoridagi 1-misol uchun, boshlang‘ich oqim quyidagicha berilgan bo‘lsin: $x_{s1} = 0$, $x_{s2} = 2$, $x_{12} = 2$, $x_{23} = 2$, $x_{2t} = 2$, $x_{31} = 2$, $x_{3t} = 0$, buni 3.6(a)-rasmda berilgan to‘rda ifodalaymiz.

1-qadam – belgi qo‘yish qoidasiga asosan N_s manba $[s^+, \infty)$ bilan belgilanadi. N_s ning ikkita N_1, N_2 qo‘shni tugun nuqtalari bo‘lib, ular uchun, $b_{s1} = 3 > x_{s1} = 0$, $b_{s2} = 2 = x_{s2} = 2$ munosabatlar o‘rinli, shu sababli N_1 tugun nuqta $[s^+, 3)$ bilan belgilangan. N_2 tugun nuqta belgi olmaydi. Endi ikkinchi b) holatdagi N_1 tugun nuqtani olamiz. Uning 2 ta qo‘shni tugun nuqtasi bor: N_2, N_3. N_3 tugun nuqta uchun, $x_{32} = 2 > 0$ tengsizlik bajarilganligi sababli u $[1^-, 2)$ belgini oladi. Xuddi N_2 tugun nuqta uchun, $b_{12} = 3 > x_{12} = 2$ tengsizlik o‘rinli bo‘lganligi sababli, u $[1^+, 1)$ belgini oladi. Ikkinchi b) holatdagi N_2 tugun nuqtaning belgisi yo‘q bo‘lgan N_t ni olamiz. Uning uchun, $b_{2t} = 3 > x_{2t} = 2$ tengsizlik o‘rinli bo‘lganligi sababli, u $[2^+, 1)$ bilan belgilangan. Bularning barchasi 3.6(a)-rasmda ko‘rsatilgan. N_t quyilish nuqtasi $[2^+, 1)$ belgiga ega bo‘lganligi uchun, 2-qadam, oqim kattaligini oshirish qoidasiga o‘tamiz.

2-qadam. Birinchi qadamda qo‘shimcha oqim jo‘natish uchun, $N_sA_{s1}N_1A_{12}N_2A_{2t}N_t$ yo‘l topilgan. Shu yo‘l orqali 1 birlik oqim qo‘shimcha jo‘natiladi. Natijada, yangi 3.6(b)-rasmda ko‘rsatilgan oqim hosil bo‘ladi. Shundan so‘ng 1-qadamga o‘tiladi.

1-qadam qoidasiga asosan N_s manba $[s^+, \infty)$ belgini oladi. Uning qo‘shni tugun nuqtasi N_2 uchun, $b_{s2} = x_{s2} = 2$ bo‘lganligi sababli $b_{s2} > x_{s2}$ tengsizlik bajarilmaydi va A_{2s} yoy yo‘q. Shuning uchun, N_2 tugun nuqta belgi olmaydi. Ikkinchi qo‘shni tugun nuqta N_1 uchun, $b_{s1} = 3 > x_{s1} = 1$ tengsizlik o'rinli, shu sababli u $[s^+, 2)$ belgini oladi.

Endi ikkinchi holatdagi N_1 tugun nuqtaning qo'shni tugun nuqtalari bo'lgan N_2, N_3 larni qaraymiz. N_2 tugun nuqta uchun, $b_{12} = 3 = x_{12} = 3$ tenglik bajarilganligi uchun, u belgi olmaydi. N_3 tugun nuqta uchun, $x_{31} = 2 > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lganligi sababli, u $[1^-, 2)$ belgini oladi. Endi ikkinchi b) holatdagi N_3 tugun nuqtani olamiz, uning qo'shni tugun nuqtalari N_2, N_t lar bo'lib, ular uchun, mos ravishda $b_{23} = 2 = x_{23} = 2$, $b_{3t} = 1 > x_{3t} = 0$ munosabatlar bajariladi. Shu sababli, N_t tugun nuqta $[3^+, 1)$ belgini oladi. qilib quyilish nuqtasi N_t belgiga ega bo'ldi. Bu o'zgarishlar 3.6(b)-rasmda keltirilgan. Shundan so'ng ikkinchi qadamga o'tiladi.

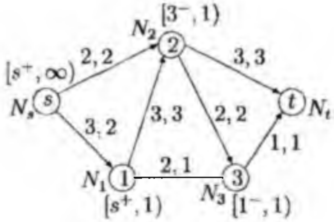


3.6-rasm

Ikkinchi qadamda topilgan yangi yo'l (aynan:$N_s A_{s1} N_1 A_{31}$ N_3 A_{3t} N_t) orqali qo'shimcha $\varepsilon(t) = 1$ oqim jo'natish mumkin. Bunda, shunga e'tibor berish kerakki, teskari yoy bo'lgan A_{31} orqali $x_{31} - 1 = 2 - 1$=1 oqim o'tadi. Shundan so'ng 3.7-rasmda ko'rsatilgan oqimni hosil qilamiz.

Endi 3.7-rasmdagi to'rga 1-qadam qoidasini qo'llaymiz. Ushbu qadam qoidasiga asosan N_s manba $[s^+, \infty)$ belgini oladi. Uning qo'shni tugun nuqtasi N_2 uchun, $b_{s2} = x_{s2} = 2$ bo'lganligi sababli $b_{s2} > x_{s2}$ tengsizlik bajarilmaydi va A_{2s} yoy yo'q. Shuning uchun, N_2 tugun nuqta belgi olmaydi. Ikkinchi qo'shni tugun nuqta N_1

uchun, $b_{s1} = 3 > x_{s1} = 2$ tengsizlik o‘rinli, shu sababli u $[s^+, 1)$ belgini oladi. Endi ikkinchi holatdagi N_1 tugun nuqtaning qo‘shni tugun nuqtalari bo‘lgan N_2, N_3 larni qaraymiz. N_2 tugun nuqta uchun, $b_{12} = 3 = x_{12} = 3$ tenglik bajarilgan shu sababli u belgi olmaydi. N_3 tugun nuqta uchun, $x_{31} = 1$ tenglik o‘rinli bo‘lganligi sababli, u $[1^-, 1)$ belgini oladi.



3.7-rasm

Endi ikkinchi b) holatdagi N_3 tugun nuqtani olamiz, uning qo‘shni tugun nuqtalari N_2, N_t lar bo‘lib, ular uchun, mos ravishda $x_{23} = 2 > 0$, $b_{3t} = 1 = x_{3t}$ munosabatlar bajariladi. Shu sababli N_3 tugun nuqta $[1^-, 1)$ belgini oladi. N_t tugun nuqta belgi olmadi. Ikkinchi b) holatda bo‘lgan N_2 tugun nuqtaning belgisi yo‘q bo‘lgan N_t qo‘shni tugun nuqta belgiga ega bo‘la olmaydi, chunki $b_{2t} = 3 = x_{2t}$. Bu degani hisoblash to‘xtatiladi, maksimal oqim kattaligi aniqlandi: $w = 4$. Shu bilan birga minimal kesim ham topildi: $X = \{N_s, N_1, N_2, N_3\}$, $\overline{X} = \{N_t\}$, $(X, \overline{X}) = \{A_{2t}, A_{3t}\}$. Bularning barchasi 3.7-rasmda ko‘rsatilgan. Ta’kidlaymiz: $C(X, \overline{X}) = 4$.

Nazorat uchun savollar

Quyidagi savollarga "to‘g‘ri"(T) yoki "noto‘g‘ri"(N) deb javob berilsin.

1. Puasson taqsimoti uchun o‘rta qiymat va dispersiya teng bo‘la olmaydi.

2. Agar ommaviy xizmat ko'rsatish jarayonida talablarning kelib tushishi vaqti Puasson taqsimoti bilan aniqlansa, u holda talablarning ketma-ket kelish intervallari eksponensial taqsimlangan bo'ladi.

3. Faraz qilaylik, kiruvchi oqim Puasson taqsimotli bo'lsin, u holda cheksiz kichik vaqt oralig'ida tizimga ikkita talab kelib tushishi mumkin.

4. Tizimga ketma-ket keluvchi talablarning intervallari eksponensial taqsimlangan bo'lsa, u holda har uchinchisi talabning kelish vaqti ham eksponensial taqsimlangan bo'ladi.

5. Agar xizmat ko'rsatishni kutib turgan mijozning sabri yetmasa, u boshqa navbatga o'tishi mumkin.

6. Ko'p kanalli xizmat ko'rsatish tizimida mijozning bir navbatdan boshqasiga o'tishidan maqsad, kutish vaqtini kamaytirishdan iborat.

7. Talabning soniga chegara qo'yilgan tizimda o'rtacha bo'lish vaqti bunday chegara qo'yilmagan tizimdagidan kam bo'ladi.

8. Tasodifiy kirish oqimiga ega bo'lgan xizmat ko'rsatish tizimida bitta talabning o'rtacha kutish vaqti har bir mijoz uchun, xizmat vaqti tayin bo'lgan tizimda ixtiyoriy tanlab olingan talabning o'rtacha kutish vaqtidan kam bo'ladi.

9. Tizimda bo'lgan talabning statsionar ehtimolliklarining qiymatini bilgan holda, mijozlarning kirish vaqt momentlari va chiqib ketishi ixtiyoriy ko'rinishdagi taqsimotga ega bo'lganda ham ommaviy xizmat ko'rsatish tizimining operatsion xususiyatlarini hisoblash mumkin.

10. Navbat uzunligi chegaralangan, yagona xizmat ko'rsatish uskunasiga ega bo'lgan ommaviy xizmat ko'rsatish tizimida vaqt birligida mijozlarning o'rtacha kelishi soni xizmat ko'rsatilgan mijozlarning o'rtacha sonidan kam bo'lsa, statsionar holatga yetarlicha vaqt o'tgandan so'ng erishish mumkin.

11. Yuqori ishlash koeffitsiyentiga ega bo'lgan xizmat ko'rsatish uskunalari birlashishi talablarning o'rtacha kutish vaqtini kamaytirmaydi.

12. Avtomobil haydovchilarining o'zlari yoqilg'i quyish uskunasini ishlatishlari, yoqilg'i quyish shoxobchasini o'z-o'ziga xizmat ko'rsatish tizimi deb atashga imkon beradi.

13. Xizmat ko'rsatish uskunasi sifatida avtomobillar uchun, ajratilgan maxsus joyni olish hisobiga, avtomobillar vaqtincha turadigan joyni ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi deb qarash mumkin bo'ladi.

14. Muhimlik darajasi bilan ishlaydigan tizimga yuqori muhimlikka ega bo'lgan talab kelganda xizmat ko'rsatish to'xtatilmaydi.

15. Tizimda kirish oqimi Puasson taqsimotli bo'lsa, chiqish oqimi ham Puasson taqsimotli bo'ladi.

16. Ixtiyoriy fiktiv ishning davomiyligi nolga teng.

17. Dasturning tarmoq grafida ishlar ketma-ketligi yopiq zanjir hosil qilishi mumkin.

18. Biror hodisadan chiquvchi ish shu hodisaga keluvchi barcha ishlardan keyin bajariladi.

19. Kritik yo'l dasturni to'la bajarish uchun, minimal vaqtni aniqlaydi.

20. Butun dasturning tamom bo'lish vaqtini o'zgartirmasdan kritik ishni tamom bo'lish vaqtini kechiqtirish mumkin.

21. Kritik yo'l boshlang'ich va oxirgi hodisalarni birlashtiruvchi uzluksiz ishlar ketma-ketligi bo'lishi shart emas.

22. Kritik ishlarning to'la va erkin zaxira vaqtlari nolga teng.

23. Tarmoq modeli bittadan ortiq kritik yo'lga ega bo'lishi mumkin.

24. Agar tarmoq modelida bittadan ortiq kritik yo'l bo'lsa, ularning davomiyligi turlicha bo'lishi mumkin.

25. Kritik bo'lmagan ishda nol bo'lgan to'la zaxira vaqti bo'lishi mumkin emas.

26. Kritik bo‘lmagan ishda nol bo‘lgan, hamda nol bo‘lmagani erkin zaxira vaqti bo‘lishi mumkin.

27. Kritik bo‘lmagan ishning kalendar bajarish muddatlarini erta boshlash va kech tamomlash oralig‘idagi ixtiyoriy vaqtini olish mumkin.

28. Kritik bo‘lmagan ishning nol erkin zaxira vaqti borligi, undan keyin kelgan ishlarning boshlanishi uning tamom bo‘lish vaqtiga bog‘liq.

29. Kritik ishning boshlanish va tamom bo‘lish vaqtlarini, butun dasturning davomiyligini ko‘paytirmasdan o‘zgartirib bo‘lmaydi.

30. Zaxira vaqtlari haqidagi ma’lumot zaxiralarni tekis taqsimlash masalasini yechishda muhim rol o‘ynaydi.

[Javoblar: 1-N, 2-T, 3-N, 4-N, 5-T, 6-T, 7-T, 8-T, 9-T, 10-T, 11-N, 12-N, 13-T, 14-N, 15-T, 16-T, 17-N, 18-T, 19-T, 20-N, 21-N, 22-T, 23-T, 24-N, 25-T, 26-T, 27-N, 28-T, 29-T, 30-T].

Quyidagi savollarga javob bering

1. Belgi qo‘yish usulining tub mohiyati nimadan iborat?
2. Belgi qo‘yish usuli necha qadamdan iborat?
3. Maksimal oqim masalasida tenglama shartining mohiyati nimadan iborat?
4. Maksimal oqim masalasiga sonli misol tuzib uning yechimini toping.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

4.1. Ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimi modelini tuzishga doir masalalar

1-masala (kutishi bor tizim).

n ta uskunadan tashkil topgan ommaviy xizmat ko‘rsatish tizimi α jadallikka ega bo‘lgan talablarning Puasson oqimiga xizmat ko‘rsatadi. Har bir talabga xizmat ko‘rsatish jadalligi – β, xizmat ko'rsatish vaqti tasodifiy miqdor bo'lib, uning taqsimot funksiyasi eksponensial ko'rinishga ega.

Biror talabning tizimga kelib tushgan vaqtida barcha xizmat ko'rsatish uskunalari band bo'lishsa, u birorta uskunaning ishdan xoli bo'lishini kutib navbatga turadi. Vaqtning har bir momentida uskuna ko'pi bilan bitta talabga xizmat ko'rsatadi. Shu ommaviy xizmat ko'rsatish tizimini tahlil qiling.

Quyidagilar aniqlansin: Tizimning holatlar grafi, barcha uskunalar band bo'lmaslik ehtimoli $-p_0$, n ta uskunadan k tasi band bo'lishlik ehtimoli $-p_k$, barcha uskunalarning band bo'lishlik ehtimoli $-$ П, barcha uskunalar band va s ta talab navbatda turishlik ehtimoli $-p_{n+s}$, talab kutishining o'rtacha vaqti $-t_{kut}$, kutish vaqti t_{kut} dan katta bo'lishlik ehtimoli $-P\{\tau > t_{kut}\}$, navbatning o'rtacha uzunligi $-A$, tizimda bor bo'lgan talablarning o'rtacha soni $-B$, xizmatdan holi bo'lgan uskunalarning o'rtacha soni $-\aleph_0$, xizmat ko'rsatayotgan uskunalarning o'rtacha soni $-\aleph_{band}$, xizmat ko'rsatilayotgan talablarning o'rtacha soni $-R$, uskunalarning turib qolish koeffitsiyenti $-K_{bands}$, uskunalarning ish bilan ta'minlanganlik koeffitsiyenti $-K_{ish}$, hisobat davri T da umumiy xarajat $-G_{iqt}$.

2-masala (navbat uzunligiga chegara bor tizim).

n ta uskunadan tashkil topgan ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi α jadallikka ega bo'lgan talablarning Puasson oqimiga xizmat ko'rsatadi. Har bir talabga xizmat ko'rsatish jadalligi $-\beta$, xizmat ko'rsatish vaqti tasodifiy miqdor bo'lib, uning taqsimot funksiyasi eksponensial ko'rinishga ega. Yangi talab tizimga kelib tushgan vaqtida barcha xizmat ko'rsatish uskunalari band bo'lsa, u birorta uskunaning ishdan xoli bo'lishini kutib navbatga turishligi uchun, navbatda turganlar soni m dan kam bo'lishi kerak. Vaqtning har bir momentida uskuna ko'pi bilan bitta talabga xizmat ko'rsatadi. Shu ommaviy xizmat ko'rsatish tizimini tahlil qiling.

Quyidagilar aniqlansin: Tizimning holatlar grafi, barcha uskunalar band bo'lmaslik ehtimoli $-p_0$, n ta uskunadan k tasi band bo'lishlik ehtimoli $-p_k$, barcha uskunalar band va s ta talab navbatda turishlik ehtimoli $-p_{n+s}$, talabga xizmat ko'rsatishga rad javobi berilishi ehtimoli $-p_{rad}$, xizmat ko'rsatilayotgan talablarning o'rtacha soni $-B_{band}$, ishdan xoli uskunalar soni $-\aleph_0$, uskunalarning ish bilan ta'minlanganlik koeffitsiyenti $-K_{ish}$, uskunalarning turib qolish koeffitsiyenti $-K_{bands}$, navbatning o'rtacha uzunligi $-A$, hisobat davri T da umumiy xarajat $-G_{iqt}$.

3-masala (kutish vaqtiga chegara bor tizim).

n ta uskunadan tashkil topgan ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi mos ravishda α_1 va α_2 jadalliklarga ega bo'lgan ikki xil ko'rinishdagi talablarning Puasson oqimiga xizmat ko'rsatadi. Birinchi xil ko'rinishdagi talab xizmat ko'rsatilgandan so'ng tizimni tark etsa, ikkinchi xil ko'rinishdagi talab uskunalarning barchasi band bo'lsa tizimni tark etadi. Har bir talabga xizmat ko'rsatish jadalligi $-\beta$, xizmat ko'rsatish vaqti tasodifiy miqdor bo'lib, uning taqsimot funksiyasi eksponensial ko'rinishga ega. Vaqtning har bir momentida uskuna ko'pi bilan bitta talabga xizmat ko'rsatadi. Shu ommaviy xizmat ko'rsatishni tahlil qiling.

Quyidagilar aniqlansin: Tizimning holatlar grafi, barcha uskunalar band bo'lmaslik ehtimoli $-p_0$, n ta uskunadan k, $1 < k \leq n$ tasi band bo'lishlik ehtimoli $-p_k$, $k > n$ ta talabning tizimda bo'lishlik ehtimoli $-p_k$, talabga xizmat ko'rsatishga rad javobi berilishi ehtimoli $-p_{rad}$, birinchi xil ko'rinishdagi talabning kutish vaqti τ_1 berilgan t dan katta bo'lish ehtimoli $-P\{\tau_1 > t\}$, birinchi xil ko'rinishdagi talabning o'rtacha kutish vaqti $-t_{kut}$, band uskunalarning o'rtacha soni $-\aleph_{band}$, ishdan holi uskunalar soni $-\aleph_0$, uskunalarning turib qolish koeffitsiyenti $-K_{bands}$, uskunalarning ish bilan ta'minlanganlik koeffitsiyenti $-K_{ish}$, hisobot davri T da umumiy xarajat $-G_{iqt}$.

4-masala (yopiq tizimlar). n ta uskunadan tashkil topgan ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi bo'lib, har bir uskuna λ jadallik bilan tasodifiy vaqtda ishdan chiqadi.

Ishdan chiqqan uskunaga tezda jadalligi μ bo'lgan m ta jihozlarning biri xizmat qilishga kirishadi. Mabodo, jihozlarning barchasi band bo'lsa, ishdan chiqqan uskuna navbatga turadi.

Vaqtning har bir momentida jihoz ko'pi bilan bitta uskunaga xizmat ko'rsatadi.

Shu ommaviy xizmat ko'rsatish tizimining ishonchligini tahlil qiling va uning effektivligini oshirish bo'yicha taklif kiriting.

Quyidagilar aniqlansin: Tizimning holatlar grafi, tizim band emas (barcha uskunalar ishlayapti) ehtimoli $-p_0$, n ta uskunadan k tasi ishdan chiqqanlik ehtimoli $-p_k$, ishlayotgan uskunalarning o'rtacha soni $-B$, ishlamayotgan uskunalarning soni $-D$, tizimning ishonchlilik koeffitsiyenti $-K_{bands}$, hisobot davri T da umumiy xarajat $-G_{iqt}$.

5-masala (yopiq tizimlar). m ta moduldan tashkil topgan uzluksiz ishlaydigan jihoz bor. Jihozning ishlashi davomida modullar tasodifiy vaqt momentida buzilishi mumkin. Jihozning ishlamay qolishi $\lambda = 1/t_{o'rt}$ ($t_{o'rt}$-jihozning buzilgancha o'rtacha ishlash vaqti) parametrli eksponensial taqsimot funksiyaga ega bo'lgan tasodifiy miqdordir.

Agar modullarning birortasi ishdan chiqsa u zaxirada turgan, agar bor bo'lsa, n tadan birortasiga almashtiriladi, aks holda jihoz ishlashdan to'xtaydi.

Ishdan chiqqan modul r ta ustalar tomonidan ta'mirlanadi va zaxira uchun, jo'natiladi. Ta'mirlash vaqti $\mu = 1/t_{xiz}$ (t_{xiz} – *bitta modulni ta'mirlash o'rtacha vaqti*) jadallikka ega bo'lgan eksponensial taqsimot funksiya bilan aniqlangan tasodifiy miqdordir.

Shu ommaviy xizmat ko'rsatish tizimini tahlil qiling.

Quyidagilar aniqlansin: Tizimning holatlar grafi, barcha band modullar ishchi holatda bo'lishlik ehtimoli – p_0, jihozning ishlamaslik ehtimoli – p_{rad}, jihoz ishlayotgan paytda ta'mirda bo'lgan modullarning o'rtacha soni – $\aleph$, ta'mirlashda ishtirok qiladigan ustalar soni – $\aleph_0$, ustalarning ishlash koeffitsiyenti – K_{bands}, ta'mirlashni kutib turgan modullarning o'rtacha soni – M, zaxiradagi modullar va ustalar sonini iqtisodiy nuqtayi nazardan topish formulasini yozing.

6-masala. Soatiga o'rtacha 20 ta xo'randa Puasson taqsimoti bo'yicha oshxonaga tashrif buyurishadi. Oshxona o'z ishini soat 11.00 da boshlaydi. Topish kerak: a) oshxonada soat 11.07 da 18 ta xo'randa bo'lgan bo'lsa, soat 11.12 da 20 ta bo'lishlik ehtimolini; b) agar avvalgi xo'randa soat 11.25 da tashrif buyurgan bo'lsa, keyingisi 11.28 bilan 11.30 orasida tashrif buyurish ehtimolini.

7-masala. Universitet kutubxonasida buyurtma qilingan kitoblar Puasson taqsimoti bo'yicha kuniga 25 ta keladi. Har bir tokchaga 100 ta kitob joylashtirish mumkin. Quyidagilarni topish kerak: a) har oyda kitoblar bilan band bo'lgan o'rtacha tokchalar soni; b) agar har bir seksiya 5 ta tokchadan iborat bo'lsa, har oyda olib kelingan kitoblarni joylashtirish uchun, 10 tadan ko'p seksiya zarurligi ehtimolini.

8-masala. Poliklinikaga Puasson qonuni bo'yicha soatiga $\lambda = 30$ ta kasal keladi. Kutish xonasi 14 tadan ko'p mijozni sig'dira olmaydi. Vrachning qabul qilish vaqti eksponensial qonunga bo'ysinib, soatiga o'rtacha $\mu = 20$ ta mijozga xizmat ko'rsata oladi. Quyidagilarni topish kerak: a) poliklinikaga keladigan kasallarning effektiv soni; b) kelgan navbatdagi kasal kutmaslik ehtimolini; kelgan navbatdagi kasalning kutish xonasidan bo'sh o'rinni topish ehtimolini; c) kasalning poliklinikada bo'lishlik ehtimolini.

9-masala. Bankning kassasi Puasson taqsimoti bo'yicha ish olib boradi va soatiga $\lambda = 36$ mijozga xizmat ko'rsatadi.

$V_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ funksiyaning qiymatlari (Puasson taqsimoti).

$k \diagdown \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030
5				0,0001	0,0002	0,0004
$k \diagdown \lambda$	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,1353	0,0498
1	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679	0,2707	0,1494
2	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839	0,2707	0,2240
3	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,1804	0,2240
4	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,0902	0,1680
5	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031	0,0361	0,1008
6	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0120	0,0504
7				0,0001	0,0034	0,0216
8					0,0009	0,0081
9					0,0002	0,0027
10						0,0008
11						0,0002
12						0,0001
$k \diagdown \lambda$	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728

Bitta mijozga xizmat ko'rsatish vaqti eksponensial qonunga bo'ysinib, o'rtacha $\mu = 0,035$ soatni tashkil qiladi. Kutish zali 30 ta mijozga mo'ljallangan. Quyidagi shartlarni qanoatlantirish uchun, bankda nechta kassa ishlashi kerak. a) uchta mijozning kutish vaqti ehtimoli 0,2 dan oshmasin; b) kassa oldida turgan mijozlarning o'rtacha soni 3 tadan oshmasin.

10-masala. Bir kanalli xizmat ko'rsatuvchi tizimni ko'ramiz. Ketma-ket talablarning vaqtlari intervali fiksirlangan va 10 min tashkil qiladi. Ushbu tizimning xizmat ko'rsatilgan oqimi Puasson taqsimotli bo'lib, jadalligi 1 soatda 10 ta mijozga xizmat ko'rsatish. Quyidagilarni topish kerak: a) avval kelib tushgan talab 4 ta bo'lgan shart ostida, endi kelib tushayotgan talab paytida 2 ta talabga xizmat ko'rsatilayotgan payt bo'lishlik ehtimolini; b) avval kelib tushgan talab 3 ta bo'lgan shart ostida, endi kelib tushayotgan talab paytida 2 yoki 3 ta talabga xizmat ko'rsatilayotgan payt bo'lishlik ehtimolini; c) ixtiyoriy vaqt momentida tizimda bo'lgan mijozlarning o'rtacha sonini; d) xizmat ko'rsatish tizimida mijozlarning o'rtacha qolib ketishlik vaqtini; e) tizimda birorta ham mijozning bo'lmaslik ehtimolini; f) tizimda kamida 2 ta mijozning bo'lishlik ehtimolini.

4.2. Dasturning tarmoq modelini tuzish

1. Omma fikrini bilish maqsadida o'tkaziladigan so'rov dasturi quyidagilarni o'z ichiga oladi: anketa ishlab chiqish va chop etish; xodimlarni ishga olish va o'qitish; so'rovda ishtirok etuvchilarni aniqlash; ularga anketalarni tarqatish va olingan ma'lumotlarni tahlil etish. Ishlarning mumkin bo'lgan ketma-ketliklarini hisobga olgan holda bu dasturning tarmoq modeli qurilsin.

2. Binoning poydevorini qurish ketma-ket uchta seksiyadan iboratdir. Har bir seksiyada bajarilishi lozim bo'lgan ishlar: kotlovan qazish, metall konstruksiyalarni yig'ish va beton yotqizish. Bir seksiyada kotlovan qazish ishlarini boshlash uchun, avvalgi seksiyaning kotlovani qazilgan bo'lishi zarur. Beton yotqazishga nisbatan ham bu taalluqli. Tarmoq modeli qurilsin.

3. Quyidagi ketma-ketlikni qanoatlantiruvchi $A, B, C, ..., P$ ishlardan tashkil topgan dasturning tarmoq modeli tuzilsin.

1) Bir vaqtda boshlash mumkin bo'lgan boshlang'ich ishlar A, B va C.
2) D, E va F ishlar A ishdan keyin bajariladi.
3) I va G ishlar B, D ishlardan keyin bajariladi.
4) X ish C va G ishlardan keyin bajariladi.
5) K va L ishlar I ishdan keyin bajariladi.
6) J ish E va X ishlardan keyin bajariladi.
7) M va N ishlar F ishdan keyin bajariladi, ammo E va X ishlar bajarilgan bo'lishi kerak.
8) O ish M va L ishlardan keyin bajariladi.
9) P ish J, L va O ishlardan keyin bajariladi.
10) K, N va P dasturning oxirgi ishlari hisoblanadi.

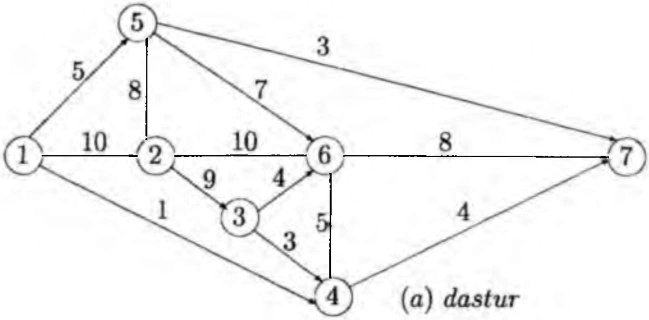
3.1-jadval

Ishlar	*Tasnif*	*Avval bajariladigan ish*	*Davomiylik(kun)*
A	*Sotish basharotini tadqiq qilish*	–	10
B	*Bozor konyunkturasini o'rganish*	–	7
C	*Mahsulotning ishchi tasvirini va ishlab chiqarish texnalogiyasini tayyorlash*	A	5
D	*Ishlab shiqarisning kalendar reja sini tusish*	C	3
E	*Ishlab shiqarisning tannarxi*	D	2
F	*Mahsulot narxini aniqlash*	B, E	1
G	*Moliyaviy rejani tuzish*	E, F	14

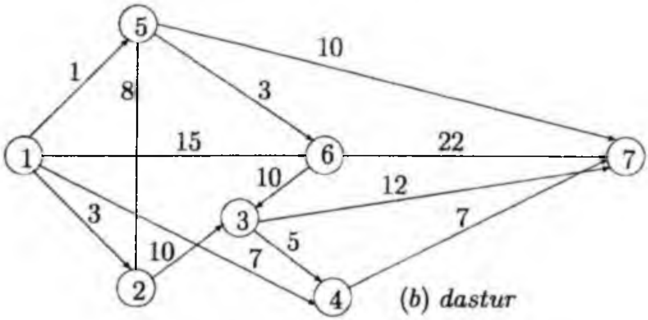
4. Firma kelgusi yilga moliyaviy reja tayyorlamoqchi, buning uchun, sotish, ishlab chiqarish, moliya va buxgalteriya bo‘limlaridan ma’lumotlar kerak. Quyidagi 8-rasm jadvalida mos ishlar va ularning davomiyligi keltirilgan. Mos dasturning tarmoq modeli qurilsin va hisoblash amalga oshirilsin.

5. 3.8-rasmda berilgan (a) va (b) dasturlar uchun, kritik yo‘llar aniqlansin.

6. 5-masala uchun, (a) va (b) dastur ko‘rinishda ishchi kuchi berilgan. Har bir dastur uchun, zarur bo‘lgan ishchi kuchi aniqlansin.



(a) dastur



(b) dastur

3.8-rasm

$(a) - dastur$

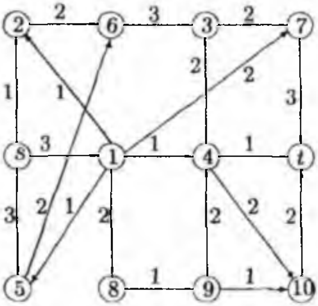
$Ishlar$	$Ishchilarga$ $talab(soni)$	$Ishlar$	$Ishchilarga$ $talab(soni)$
$(1,2)$	5	$(3,6)$	9
$(1,4)$	4	$(4,6)$	1
$(1,5)$	3	$(4,7)$	10
$(2,3)$	1	$(5,6)$	4
$(2,5)$	2	$(5,7)$	5
$(2,6)$	3	$(6,7)$	2
$(3,4)$	7		

$(b) - dastur$

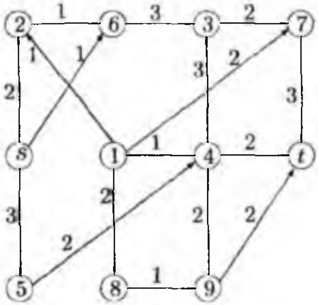
$Ishlar$	$Ishchilarga$ $talab(soni)$	$Ishlar$	$Ishchilarga$ $talab(soni)$
$(1,2)$	1	$(3,7)$	9
$(1,3)$	2	$(4,5)$	8
$(1,4)$	5	$(4,7)$	7
$(1,6)$	3	$(5,6)$	2
$(2,3)$	1	$(5,7)$	5
$(2,5)$	4	$(6,7)$	3
$(3,4)$	10		

4.3. Quyidagi sonli variantli misollarda maksimal oqim, uning qiymati va minimal kesimni aniqlang:

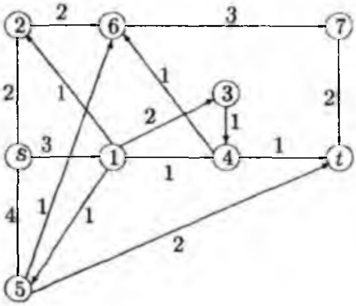
1-variant



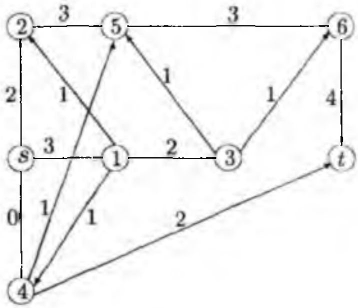
2-variant



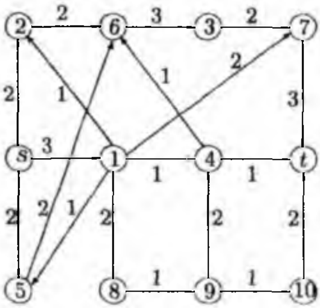
3-variant



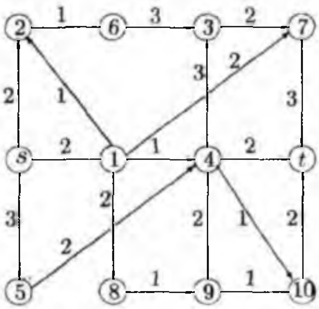
4-variant



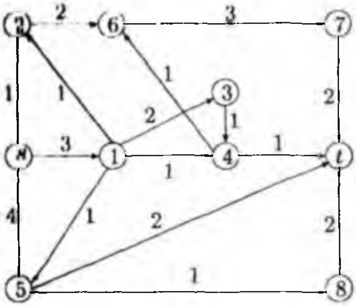
5-variant



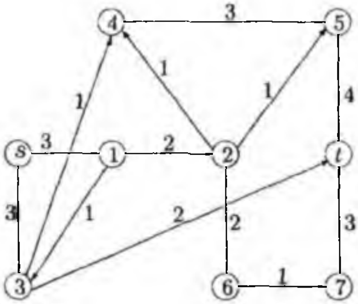
6-variant



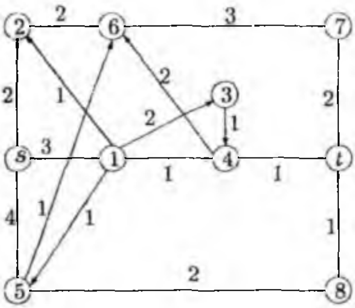
7-variant



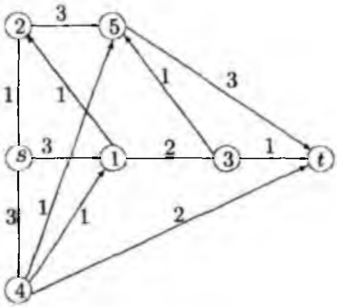
8-variant



9-variant



10-variant



V BOB.
MARKOV O'YINLARI. IMITATSION MODEL

Markov zanjiri orqali tavsiflangan jarayonlarda yechim qabul qilish boshqaruv sistemalarida, jarayonlar tadqiqotida, ishonchlik nazariyasida, boshqaruv nazariyasida va boshqa amaliy sohalarda keng qo'llaniladi. Fan va texnikaning turli sohalariga tegishli bo'lgan jarayonlarni Markov zanjiriga keltirish orqali to'la o'rganish mumkin. Masalan, jamiyatshunoslik sohasida aholining ijtimoiy va kasbiy-hunar tarkibini, migratsiya va boshqa o'zgarish muammolarini tadqiq qilishda Markov zanjirlari nazariyasidan foydalanish mumkin. Biologiyada ayrim hayvonot va o'simlik turlari o'zgarishi xarakterlarini o'rganish Markov zanjirlari yordamida olib boriladi. Fizikada gazlarning diffuziyasini o'rganishda Markov zanjirlari nazariyasining natijalaridan foydalaniladi. Texnikada Markov zanjirlari yordamida ma'lumotlarni uzatish, bir qator texnologik jarayonlarning, murakkab texnik sistemalarda ishlovchanligini nazorat qilish va kamchiliklarini topish jarayonlarini tavsiflash qaraladi.

Murakkab harakatdagi sistemalarni o'rganishda matematik model sifatida Markov jarayonini tatbiq etish ijobiy natijalarga olib keladi. Bunda, Markov zanjirini asosan ikkita tushuncha – holatlar va bir holatdan ikkinchi holatga o'tish ehtimolliklarini ifodalovchi o'tish jadvallari tashkil etsa, Markov jarayonida bulardan tashqari yana ikki element – yechim va yutuq tushunchalari ham ishtirok qiladi. Bunda holatlar chekli yoki cheksiz sonda bo‘lishi mumkin. Bu yerda asosan, holatlar soni chekli hamda o‘tishlar sonini raqamlab chiqish (diskret holga keltirish) mumkin bo‘lgandagi Markov jarayonlari ko‘riladi. Shu bilan birga har bir qadamda olinadigan yutuq miqdorini qayta yoki o‘zgarmas baholash sifatida ko‘rish mumkin. Ko‘rsatiladiki, birinchi holda o‘tishlar soni cheksiz bo‘lganda ham yutuqning miqdorini aniq ko‘rsatish mumkin, ikkinchi holda olinadigan yutuqning qandaydir ma’noda "o‘rtacha"si olinadi.

Imitatsion modellashtirishning maqsadi tadqiq qilinayotgan sistemaning elementlari orasidagi eng muhim bog‘lanishlarni tahlil qilish asosida uning harakatini aks ettirishdan iborat. Imitatsion modelni tadqiq qilish natijasi, odatda, imitatsiya qilinayotgan sistemaning operatsion (funksional) parametrlari qiymatlarini baholashdan iborat bo‘ladi. Masalan, ixtiyoriy ommaviy xizmat ko‘rsatish sistemasi haraktini imitatsion modellashtirishda amaliy tarafdan o‘rtacha xizmat ko‘rsatish vaqti, navbat kutib turganlarning o‘rtacha soni, sistemaning majbur bekor turish vaqti va boshqa parametrlar qiymatlari qiziqish uyg‘otish mumkin. Imitatsion modellashtirishni statistik tajriba deb qarash kerak. Yuqorida ko‘rilgan matematik modellar sistemani vaqtga nisbatan turg‘un ishlashini aks ettirgan bo‘lsa, bundan farq qilgan holda, imitatsion modellar tajribada yo‘l qo‘yilgan xatoliklarni kuzatishdan iborat bo‘ladi. Bu degani modellashtirilayotgan sistemaga tegishli bo‘lgan ixtiyoriy tasdiq mos statistik tekshiruv natijalariga asoslangan bo‘lishi zarur. Imitatsion modellashtirish tajriba sifatida to‘la EHM da amalga oshirilishi bilan, u laboratoriya tajribasidan farq qiladi. Sistemaning tarkibiy qismlarini o‘zaro bog‘liqliklarini matematik munosabatlar yordamida tasnif qilish bilan, tabiiy sharoitdagi tajribaga murojaat qilmasdan (bunda, albatta, hosil qilingan soddalashtirilgan model doirasida), tadqiq qilinayotgan sistema haqida zaruriy ma'lumotlarni olish mumkin. Bunda. shuni ta'kidlash lozimki, murakkab sistemaning ishlashini batafsil tekshirish nuqtayi nazardan imitatsion modellashtirish ancha ko'p moslashuvchanlik xususiyatiga ega ("klassik" matematik modellashtirishga nisbatan). Ammo shuni esdan chiqarmaslik kerakki, imitatsion modellar ortiq darajada moslanuvchan bo'lishi bilan birga, ayniqsa, modellashtirilayotgan sistemaning ishlashini optimallashtirish uchun, ko'p mablag', vaqt talab etiladi.

1-§. Markov zanjiri va dinamik dasturlash

Quyidagi ehtimollik modeliga Markov zanjiri deb ataladi:

1. Model vaqtning istalgan paytida quyidagi n ta holatlarning faqat bittasida bo'ladi:

$$\{S_1, S_2, ..., S_n\},$$

ayrim hollarda ulardan bittasi boshlang'ich holat sifatida tanlab olinadi;

2. Har bir holatlar juftligi S_i va S_j lar uchun, S_i dan S_j ga o'tish ehtimoli p_{ij} aniqlangan bo'lib, ular

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

shartni qanoatlantiradi.

Ayrim p_{ij} larning nolga teng bo'lishligi, mos o'tishning mumkin emasligini bildiradi. Markov zanjirini yo'naltirilgan graf yoki jadval ko'rinishda berish mumkin. Grafning uchlari zanjirning holatlariga mos kelib, ularni soddalik uchun, S_i lar bilan belgilash mumkin. Mabodo, $p_{ij} > 0$ bo'lsa, S_i uchdan S_j uchga yo'naltirilgan yoy o'tkaziladi, mabodo $p_{ij} = 0$ bo'lsa, mos yoy o'tkazilmaydi. Shu qoida bilan qurilgan graf *Markov zanjirining o'tish grafi* deb ataladi. Shu bilan birga Markov zanjirini $n \times n$

o'lchamli jadval ko'rinishda ham ifodalash mumkin, bunda jadvalning i – satri bilan j – ustuni kesishgan joyda p_{ij} soni yozilgan bo'ladi. Bunday jadval *Markov zanjirining o'tish jadvali* deb ataladi.

Markov zanjirining o'tish grafi zanjirdagi harakatlarni aniq tasavvur qilishga qulaylik yaratsa, Markov zanjirining o'tish jadvali esa zanjir bilan bog'liq bo'lgan turli hisoblarni amalga oshirishga qulaylik tug'diradi.

Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, Markov zanjiri ehtimollik ishtirok etgan jarayonlarni modellashtirish bilan, jarayon diskret vaqtlar mobaynida ro'y beradi.

Boshlang'ich paytda ko'rilayotgan obyekt boshlang'ich holatda bo'ladi. Keyingi vaqt mobaynida o'tish jadvali yordamida aniqlangan ehtimollik asosida navbatdagi holatga o'tiladi.

Quyidagi misolni qaraylik. O'yinchi 6 tomonga ega bo'lgan kubikni tavakkaliga tashlasin. Agar kubikning 1, 2 va 3 tomonlari tushsa, o'yinchi kubikni qaytadan tashlaydi. Agar kubikning 4 yoki 5 tomonlari tushsa, u holda o'yinchi yutqazadi. Agar kubikning 6 tomoni tushsa, u holda o'yinchi tanga tashlashga o'tadi. Bunda, agar tanganing tamg'a tomoni tushsa, u holda o'yinchi yutadi, aks holda yana kubik tashlash bilan jarayon qaytadan, yuqoridagi qoida asosida davom etadi. Bu jarayonni Markov zanjiri sifatida ifodalash uchun, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

S_1– kubikni tashlash; S_2– tangani tashlash; S_3– yutqazish; S_4– yutish.

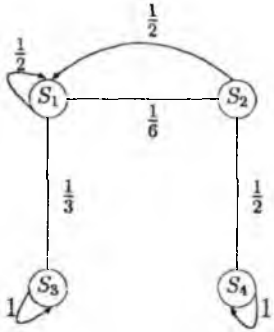
Endi ushbu jarayonga mos Markov zanjirining o'tish grafini keltiramiz. Buning uchun, o'tish ehtimolliklari p_{ij} larning qiymatlarini aniqlaymiz.

S_i holatdan S_j holatga o'tish ehtimolini hisoblaymiz: kubik tashlanganda 1, 2 va 3 tomonlarning birortasini tushish ehtimoli $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ga teng, shu sababli $p_{11} = \frac{1}{2}$ bo'ladi.

Kubik tashlanganda 4 va 5 tomonlarning birortasini tushish ehtimoli $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ga teng, shu sababli $p_{13} = \frac{1}{3}$ bo'ladi.

Xuddi kubik tashlanganda 6 tomonining tushish ehtimoli $\frac{1}{6}$ ga teng, shu sababli $p_{12} = \frac{1}{6}$ bo'ladi.

Kubik tashlash jarayonida o'yinchi yutuqqa ega bo'lmadi, shu sababli S_1 holatdan S_4 holatga o'tish ro'y bermaydi, demak, $p_{14} = 0$ bo'ladi.



1.1-rasm. Markov zanjirining o'tish grafi

Tanga tashlashda uning tamg'a tomonining tushish ehtimoli $\frac{1}{2}$ ga teng, shu sababli $p_{24} = \frac{1}{2}$ bo'ladi.

Tanga tashlashda uning raqam tomonining tushish ehtimoli $\frac{1}{2}$ ga teng, shu sababli $p_{21} = \frac{1}{2}$ bo'ladi. S_2 holatdan S_2 va S_3 holatlarga o'tish mumkin bo'lmaganligi sababli $p_{22} = p_{23} = 0$ bo'ladi.

Mabodo, o'yinchi yutqazsa u holda o'yin tugaydi. Markov zanjiri nuqtayi nazaridan bu S_3 dan S_3 o'tish ehtimoli 1 ga teng degani, ya'ni $p_{33} = 1$ va $p_{31} = p_{32} = p_{34} = 0$ bo'ladi.

Shu ma'noda S_3 holat ***yutish holati*** bo'ladi, ya'ni obyekt S_3 holatga tushgandan so'ng, shu holatda cheksiz vaqt qoladi.

Shunga o'xshash, agar o'yinehi yutsa, u holda S_4 holatdan S_4 holatga o'tish ehtimoli 1 ga teng, ya'ni $p_{44} = 1$ va $p_{41} = p_{42} = p_{43} = 0$ bo'ladi.

Markov zanjirining o'tish grafi 1.1-rasmda keltirilgan.

Markov zanjirining o'tish jadvali esa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

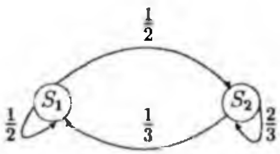
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Markov zanjirining o'tish jadvali xossasi

Obi havoning o'zgarishi bilan bog'liq bo'lgan quyidagi Markov zanjirini qaraylik.

Faraz qilaylik, kuzatishlar va statistik ma'lumotlar asosida quyidagi xulosaga kelingan. Agar bugun havo ochiq bo'lsa, ertaga ham havoning ochiq bo'lishlik ehtimoli $\frac{1}{2}$, yomg'ir yog'ish ehtimoli ham $\frac{1}{2}$ teng. Agar bugun yomg'ir yoqqan bo'lsa, ertaga havoning ochiq kelishlik ehtimoli $\frac{1}{3}$, yomg'ir yog'ishlik ehtimoli $\frac{2}{3}$ ga teng.

S_1 bilan havoning ochiq bo'lishlik, S_2 bilan yomg'irli bo'lishlik holatlarini belgilaylik. U holda mos Markov zanjirining grafi quyidagi ko'rinishda bo'ladi (1.2-rasm):



1.2-rasm. Ob-havo o'zgarishining Markov zanjiri

Ushbu misol uchun, Markov zanjirining o'tish jadvali quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

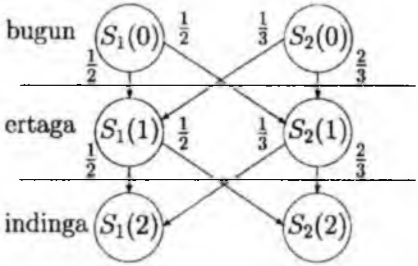
Ushbu Markov zanjiri faqat bir kundan so'ng ro'y beradigan ob-havo holati to'g'risida ma'lumot beradi. Savol tug'iladi, ikki, uch va hokazo kunlardan keyin ro‘y beradigan ob-havo to‘g‘risida ma’lumot olish mumkinmi?

Agar $S_1(n)$ bilan $n-$ kunda havoning ochiq kelish holatini, $S_2(n)$ bilan $n-$ kunda havoning yomg‘irli kelish holatini belgilaylik.

Faraz qilaylik, boshlanishda $S_1(0)$ holatda turgan bo‘laylik. $S_1(2)$ holatga ikki yo‘l bilan o‘tish mumkin.

1. $S_1(0) \to S_1(1) \to S_1(2)$. Bu bildiradiki avval ochiq, ertasiga ham ochiq, indiniga ham ochiq havo bo‘lishligini.

2. $S_1(0) \to S_2(1) \to S_1(2)$. Bu bildiradiki avval ochiq, ertasiga yomg‘ir, indiniga ochiq havo bo‘lganligini. Bularga mos kelgan graf ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi (1.3-rasm.)



1.3-rasm. 2 kunlik Markov zanjiri

Birinchi variantda quyidagi ikkita bog‘liqsiz hodisalar bir vaqtda ro‘y beradi:

1) havo ochiq, kelgusi kun ham ochiq;

2) havo ochiq, kelgusi kun ham ochiq.

Ushbu hodisalarning har birining sodir bo‘lishlik ehtimolliklari $\frac{1}{2}$ ga teng, shu sababli ularning "bir vaqtda" sodir bo‘lish ehtimolliklari $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ga teng.

Ikkinchi variantda quyidagi bog‘liqsiz hodisalar "bir vaqtda" ro‘y beradi:

1) havo ochiq, kelgusi kun yomg'irli; 2) havo yomg'irli, kelgusi kun ochiq.

Birinchi hodisaning ro'y berish ehtimoli $\frac{1}{2}$ ga, ikkinchisiniki $\frac{1}{3}$- teng, shu sababli ikkala hodisaning bir vaqtda ro'y berish ehtimoli $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ga teng.

Ko'rilgan $S_1(0) \to S_1(1) \to S_1(2)$ va $S_1(0) \to S_2(1) \to S_1(2)$ hodisalar birgalikda emas, ya'ni ularning faqat bittasi ro'y berishi mumkin. $S_1(0)$ dan $S_1(2)$ ga o'tishning boshqa variantlari yo'q. shu sababli bu o'tish ehtimoli:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

ga teng bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash quyidagilarni hisoblash mumkin:

1. $S_1(0)$ dan $S_2(2)$ ga o'tish ehtimoli:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{6} = \frac{7}{12};$$

2. $S_2(0)$ dan $S_1(2)$ ga o'tish ehtimoli:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{7}{18};$$

3. $S_2(0)$ dan $S_2(2)$ ga o'tish ehtimoli:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{4}{9} = \frac{11}{18}.$$

Natijada ikki kundan keyin keladigan havo holati ehtimoli to'la aniqlandi. Yuqoridagi hisoblashlardan ko'rish mumkinki, ular o'tish jadvalining kvadratiga teng bo'ladi, Haqiqatan,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \\ \frac{7}{18} & \frac{11}{18} \end{pmatrix}.$$

Xuddi shunga o'xshash ko'rsatish mumkinki $n-$ kuni keladigan havo holati Markov o'tish jadvalining $n-$ darajasiga teng bo'ladi.

2-§. Boshqariladigan Markov zanjirlari uchun rekurrent algoritmlar

Tadqiq qilinayotgan obyektning holatlari chekli bo'lib, ular 1,2,..., bilan raqamlab chiqilgan bo'lsin. Har bir $i-$ holat uchun, chekli E_i yechimlar to'plami berilgan bo'lib, uning elementi k bilan belgilangan bo'lsin. Ya'ni $k \in E_i$ va $k = 1,,2,...,|E_i|$, bu yerda $|E_i| - E_i$ to'plamning quvvati (elementlari soni). Agar obyekt $i-$ holatda bo'lib, $k \in E_i$ yechim qabul qilingan bo'lsa, bundan keladigan yutuq w_i^k ga teng bo'lib, obyektning E_j holatga o'tish ehtimoli p_{ij}^k soni bilan aniqlanadi. Bunda faraz etiladiki, w_i^k sonlari ixtiyoriy $i = 1, 2, ..., N$ va $k \in E_i$ larda chegaralangan, hamda

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k = 1,\ p_{ij}^k \geq 0,\ k \in E_i,\ i,j = 1, 2, ..., N.$$

Biz ushbu jarayonni yutuqni qayta baholash orqali ko'rib chiqamiz, ya'ni bu degani har bir o'tishdan so'ng avvalgi qadamdagi birlik yutuq miqdori $k(0 \leq k < 1)$ ga teng bo'lib qoladi, q soni *qayta baholash koeffitsiyenti* deb ataladi. Bundan kelib chiqadiki, n qadamdan so'ng boshlang'ich birlik yutuq miqdori k^n ga teng bo'ladi.

Boshlang'ich holatlarning taqsimot ehtimolliklari berilgan bo'lsin: $p = (p_1, p_2, ..., p_N)$, $\sum_{i=1}^{N} p_i^k = 1$, $p_i \geq 1$, $i = 1, 2, ..., N$. U holda obyekt harakati *Markovning bir jinsli bo'lmagan yutuqli zanjiri* orqali tavsiflanadi.

Rejalar fazosi deb yechimlar to'plamining Dekart ko'paytmasi bo'lgan $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_N$ ga aytiladi. Rejalar fazosi E

dan olingan $\alpha \in E$ element *reja* deb ataladi. Har bir qadamda reja turlicha qabul qilinishi mumkin.

Butun jarayon davomida qabul qilinishi mumkin bo'lgan rejalar ketma-ketligi *strategiya* deb ataladi va u $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ bilan belgilanadi. Demak, bu yerda $\alpha_n \in E_n$ bo'lib, u $n-$ qadamdagi rejani bildiradi. Bunda asosiy muammo butun jarayon davomida olinadigan yutuqni maksimum qiluvchi strategiyani (optimal) aniqlashdir.

Buning uchun, quyidagi iteratsion algoritmni keltiramiz.

Markov jarayonlarida qayta baholash orqali yechim qabul qilish.

Umuman, Xovardning iteratsion algoritmi chiziqli dasturlash bilan uzviy bog'langan bo'lib, Markov jarayonida optimal strategiyani aniqlab beradi. Yuqorida kiritilgan $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ strategiyada $\alpha_n \in E$ vektor bo'lib, uning $i-$ komponentasi $\alpha_n(i)$ bilan belgilangan va u $n-$ qadamda i holatda qabul qilingan $k = 1, 2, ..., |E_i|$ yechimni ifodalaydi. Agar $\beta \in E$ bilan reja belgilangan bo'lsa, $(\beta, \alpha_1, \alpha_2, ...)$ strategiya (β, α) bilan, $\beta, \beta, \beta, ...$ strategiya β^∞ bilan belgilanadi va u *statsionar strategiya* deb ataladi.

Quyidagi $(\overbrace{\beta, \beta, ..., \beta}^{n}, \alpha_1, \alpha_2, ...)$ ko'rinishdagi strategiya (β^n, α) bilan belgilanadi, bu yerda $\beta \in E$ va $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$. Umuman ixtiyoriy $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ strategiyada ko'rilayotgan jarayon bir jinslimas Markov zanjiri bo'lib, $n-$ qadamga o'tish ehtimol jadvali quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$P_n(\alpha) = P(\alpha_1)P(\alpha_2)\dots P(\alpha_n), \; n = 0, 1, ...,$$

bu yerda $P(\alpha_n) - N \times N$ o'lchamli o'tish jadvali bo'lib, uning (i, j) elementi p_{ij}^k, $k = \alpha_n(i) \in E_i$ bilan aniqlangan. $P_0(\alpha) = I - N \times N$ o'lchamli birlik jadvalni bildiradi. Agar $\beta \in E$ reja tanlangan bo'lsa, u holda $i(1 \leq i \leq N)$ holat uchun, yutuq $w_i^k = \beta(i) \in E_i$ ga teng bo'ladi. Shu sababli $w(\beta)$ ustun vektor yutuqni aniqlash mumkin, bu yerda $w(\beta)$ vektorning $i-$ komponentasi $w_i^k = \beta(i) \in E_i$ ko'rinishda bo'ladi.

qilib quyidagi xulosaga kelindi: jarayon boshlanishida $\alpha_1 \in E$ reja tanlangan bo'linsa, barcha holatlar uchun, olinadigan ustun vektor yutuq $w(\alpha_1)$ bilan ifodalanadi. Ikkinchi qadamda $\alpha_2 \in E$ reja tanlansa, bunda yutuq $w(\alpha_2)$ vektor ustun bilan ifodalanib, obyektning o'tish jadvali $P(\alpha_1)$ ga teng bo'ladi. Ya'ni $w(\alpha_2)$ yutuq $P(\alpha_1)$ ehtimollik bilan qabul qilinadi. Shu sababli birinchi qadamdan so'ng olinadigan o'rtacha vektor ustun yutuq $P(\alpha_1)w(\alpha_2)$ ga teng bo'ladi. Demak, boshlang'ich va bir qadamdan so'ng olinadigan umumiy yutuq $w(\alpha_1)+qP(\alpha_1)w(\alpha_2)$ vektor ustun bilan ifodalanadi.

Xuddi , uchinchi qadamda $\alpha_3 \in E$ reja tanlansa, bundan keladigan yutuq $w(\alpha_3)$ vektor ustun bilan ifodalanib, obyektning o'tish jadvali $P(\alpha_1)P(\alpha_2)$ ga teng bo'ladi. Ya'ni $w(\alpha_1)$ yutuq $P(\alpha_1)P(\alpha_2)$ ehtimollik bilan qabul qilinadi. Shu sababli ikkinchi qadamdan so'ng olinadigan o'rtacha vektor ustun yutuq $P(\alpha_1)P(\alpha_2)w(\alpha_3)$ teng bo'ladi. Demak, boshlang'ich bir qadamdan va ikki qadamdan so'ng olinadigan umumiy yutuq:

$$w(\alpha_1) + qP(\alpha_1)w(\alpha_2) + q^2P(\alpha_1)P(\alpha_2)w(\alpha_3)$$

vektor ustun bilan ifodalanadi.

Yuqoridagi mulohazalarni umumlashtirib aytish mumkinki, cheksiz qadamdan so'ng olinadigan o'rtacha vektor ustun yutuq:

$$w_q(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n P_n(\alpha) w(\alpha_{n+1}) \tag{2.1}$$

ga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan (2.1) vektorning chegaralanganligini ko'rsatish uchun, quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $w_* =$

$\min_{i,k} w_i^k$, $w^* = \max_{i.k} w_i^k$. U holda (2.1) dan hosil qilamizki,

$$w_* \sum_{n=0}^{\infty} q^n P_n(\alpha) I \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n P_n(\alpha) w(\alpha_{n+1}) \leq w^* \sum_{n=0}^{\infty} q^n P_n(\alpha) I, \quad (2.2)$$

bu yerda $I-$ komponentalari 1 sonidan iborat bo'lgan N o'lchamli ustun vektor. Ammo ixtiyoriy n da $P_n(\alpha)I = I$ bo'lganligi sababli (2.2) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$w_* \frac{1}{1-q} I = w_* \sum_{n=0}^{\infty} q^n P_n(\alpha) w(\alpha_{n+1}) \leq w^* \sum_{n=0}^{\infty} q^n I = w^* \frac{1}{1-q} I.$$

Demak, $w_q(\alpha)$ quyidan va yuqoridan chegaralangan vektor ustun ekan, da'vo isbot qilindi.

$w_q(\alpha)$ uchun, quyidagi munosabat o'rinli:

$$w_q(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n P_n(\alpha) w(\alpha_{n+1}) = w(\alpha_1) + \sum_{n=1}^{\infty} q^n P_n(\alpha) w(\alpha_{n+1}) =$$

$$w(\alpha_1) + qP(\alpha_1) \sum_{n=0}^{\infty} q^n P_n(\pi\alpha) w(\alpha_{n+2}) = w(\alpha_1) + qP(\alpha_1) w_q(\pi\alpha),$$

bu yerda $\pi\alpha = (\alpha_2, \alpha_3, ...)$ ni bildiradi. Ixtiyoriy β reja uchun, $R(\beta)$ operatorni quyidagicha kiritamiz:

$$R(\beta)v = w(\beta) + qP(\beta)v.$$

Demak, $R(\beta)v$ ustun vektorning $j-$ komponentasi, boshlang'ich va bir qadamdan keyin j holatdan o'tib olinadigan yutuqlarning o'rtacha qiymati yig'indisiga teng bo'lgan yutuq miqdorini bildiradi. qilib quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$w_q(\beta, \alpha) = R(\beta) w_q(\alpha). \quad (2.3)$$

Vektorlar uchun, katta-kichik tushunchasi quyidagicha kiritiladi: a va $b - N$ o'lchamli vektorlar bo'lsin, $a \geq b$ deb yozamiz, agar

a vektorning har bir komponentasi b vektorning mos komponentasidan kichik bo'lmasa, ya'ni $a_i \geq b_i$, $i = 1, 2, ..., N$. Shunga o'xshash $a > b$ yozamiz, agar $a \geq b$ bo'lib, $a \neq b$ bo'lsa.

1-ta'rif. Agar biror α^* strategiya va $0 \leq k < 1$ soni uchun,

$$w_q(\alpha^*) \geq w_q(\alpha)$$

tengsizlik ixtiyoriy α strategiyada o'rinli bo'lsa, α^* strategiya q *optimal strategiya* deb ataladi.

2-ta'rif. Agar biror β^∞ strategiya va $0 \leq q < 1$ soni uchun,

$$w_q(\beta^\infty) \geq w_q(\gamma^\infty)$$

tengsizlik ixtiyoriy γ^∞ statsionar strategiyada o'rinli bo'lsa, β^∞ strategiya *statsionar optimal strategiya* deb ataladi.

1-lemma. Operator $R(\beta)$ monotondir, ya'ni $v_1 \geq v_2$ bo'lsa

$$R(\beta)v_1 \geq r(\beta)v_2$$

tengsizlik o'rinli.

Isbot. $v_1 \geq v_2$ bo'lsin, u holda $R(\beta)v_1 - R(\beta)v_2 = qR(\beta)(v_1 - v_2) \geq 0$.

1-teorema. Agar ixtiyoriy β reja uchun,

$$w_q(\alpha^*) \geq w_q(\beta, \alpha^*) = R(\beta)w_q(\alpha^*) \tag{2.4}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, α^* strategiya optimal strategiya bo'ladi.

Isbot. Teoremaning (2.4)-shartiga ko'ra ixtiyoriy $\beta \in E$ reja uchun, $R(\beta)w_q(\alpha^*) \leq w_q(\alpha^*)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ ixtiyoriy strategiya bo'lsin. (2.4) da $\beta = \alpha_1$ deb olsak $w_q(\alpha_1, \alpha^*) = R(\alpha_1)w_q(\alpha^*) \leq w_q(\alpha^*)$ munosabatga ega bo'lamiz. (2.4) da $\beta = \alpha_2$ deb olsak $w_q(\alpha_2, \alpha^*) = R(\alpha_2)w_q(\alpha^*) \leq w_q(\alpha^*)$ tengsizlik hosil bo'ladi. Oxirgi munosabatdan, $R(\alpha_1)$ operatorning monotonligidan va (2.4) munosabatdan foydalanib quyidagi hosil qilinadi:

$$w_q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha^*) = R(\alpha_1)w_q(\alpha_2, \alpha^*) \leq R(\alpha_1)w_q(\alpha^*) \leq w_q(\alpha^*).$$

Bu mulohazani ketma-ket qo'llash yordamida quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$w_q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, \alpha^*) = R(\alpha_1)w_q(\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, \alpha^*) \leq w_q(\alpha^*).$$

Oxirgi munosabatda $n \to \infty$ deb olish hisobiga ixtiyoriy α strategiya uchun,

$$w_q(\alpha) \leq w_q(\alpha^*)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa α^* strategiyaning optimal strategiya ekanligini bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

2-teorema. Agar biror α strategiya va β reja uchun,

$$w_q(\alpha) < w_q(\beta, \alpha)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$w_q(\alpha) < w_q(\beta^*)$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. (2.4)-tengsizlikka monoton $R(\beta)$ operatorni qo'llab (2.3) yordamida quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$w_q(\alpha) < w_q(\beta, \alpha) = R(\beta)w_q(\alpha) < R(\beta)w_q(\beta, , \alpha) = w_q(\beta, \beta, \alpha)$$

yoki $w_q(\alpha) < w_q(\beta, \alpha) < w_q(\beta, \beta, \alpha)$. Bu munosabatga yana monoton $R(\beta)$ operatorni qo'llab (2.3) yordamida quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$w_q(\alpha) < w_q(\beta, \alpha) < w_q(\beta, \beta, \beta, \alpha).$$

Ushbu jarayonni n marta qaytarish yordamida quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$w_q(\alpha) < w_q(\beta, \alpha) < w_q(\overbrace{\beta, \beta, ..., \beta}^{n}, \alpha).$$

Demak, $n \to \infty$ bilan oxirgi munosabatdan quyidagi tengsizlikni:

$$w_q(\alpha) < w_q(\beta^{\infty})$$

hosil qilamiz. Teorema isbot bo'ldi.

Quyidagi teorema Markov jarayonida yechim qabul qilish masalasini yechishda muhim hisoblanadi.

3-teorema. Biror $\beta \in E$ reja uchun, $w_q(\beta^\infty)$ aniqlangan bo'lsin. w_i soni $w_q(\beta^\infty)$ vektorning $i-$ komponentasi bo'lsin. Har bir $i(i \leq i \leq N)$ uchun,

$$w_i^k + k\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k w_j > w_i,$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $k \in E_i$ lar to'plamini $f(i, \beta)$ bilan belgilaymiz. U holda: 1) agar $i = 1, 2, ..., N$ lar uchun, $f(i, \beta) = \emptyset$ bo'lsa β^∞ statsionar $q-$ optimal strategiya bo'ladi; 2) agar $f(i, \beta) \neq \emptyset$ birorta $i(i \leq i \leq N)$ uchun, o'rinli bo'lsa, unda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi a) $\gamma(i) \in f(i, \beta)$, agar $f(i, \beta) \neq \emptyset$ va b) $\gamma(i) = \beta(i)$, agar $f(i, \beta) = \emptyset$ ixtiyoriy $\gamma \in E$ reja uchun,

$$w_q(\beta^\infty) < w_q(\gamma^\infty)$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. $w_q(\gamma, \beta^\infty)$ vektorning $i-$ komponentasi $w_i^k + q\sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij}^k w_j$ ga teng, bu yerda $k = \gamma(i)$ deb olingan. $f(i, \beta)$ to'plamning tuzilishiga asosan $w_i^k + q\sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij}^k w_j > w_i$, agar $\gamma(i) \in f(i, \beta)$ va $w_i^k + q\sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij}^k w_j = w_i$, agar $\gamma(i) = \beta(i)$ bo'ladi.

Demak, agar $f(i, \beta) = \emptyset$ barcha $i = 1, 2, ..., N$ bo'lsa, $w_q(\gamma, \beta^\infty) \leq w_q(\beta^\infty)$ tengsizlik ixtiyoriy $\gamma \in E$ reja uchun, bajariladi. U holda 1-teoremaning natijasiga ko'ra $\beta^\infty -$ statsionar q optimal strategiya bo'ladi.

Mabodo, $f(i, \beta) \neq \emptyset$ biror $i(i \leq i \leq N)$ da o'rinli bo'lsa, u holda a), b) shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\gamma \in E$ reja uchun, $w_q(\beta^\infty) < w_q(\gamma, \beta^\infty)$ tengsizlik bajariladi.

Bundan 1-teoremaning natijasiga ko'ra, $w_q(\beta^\infty) < w_q(\gamma^\infty)$ hosil bo'ladi. Shu bilan teorema isbot bo'ldi.

Natija. Markov jarayonida statsionar q optimal strategiya mavjud.

Isbot. 3-teoremaga asosan olingan biror statsionar β^∞ strategiya uchun, $f(i, \beta) = \emptyset$ tenglik barcha $i = 1, 2, ..., N$ larda bajarilsa, bunday strategiya statsionar q optimal strategiya bo'ladi yoki agar biror i da $f(i, \beta) \neq \emptyset$ bo'lsa, u holda β^∞ ni boshqa biror yaxshiroq statsionar strategiya bilan almashtirish mumkin. Ammo statsionar strategiyalar soni chekli bo'lganligi sababli, chekli qadamdagi iteratsiyadan keyin, albatta, statsionar q optimal strategiya hosil bo'ladi. Natija isbot bo'ldi.

Yuqorida isbot qilingan teoremalar statsionar q optimal strategiyalarni aniqlashning Xovard nomi bilan atalgan iteratsion algoritmni keltirib chiqaradi. Bu iteratsion algoritm 2 qadamdan iboratdir: 1-qadam (og'irlik koeffitsiyentini aniqlash). Ixtiyoriy $\beta \in E$ reja tanlab olinib,

$$w_i^k + q\sum_{j=1}^{N} w_j = w_i, \;\; i = 1, 2, ..., N$$

tenglamalar sistemasidan w_i noma'lumning qiymatlari aniqlanadi, bu yerda $k = \beta(i)$ 2-qadam (rejani yaxshilash). Topilgan w_i larning qiymatlari asosida har bir $i(i \leq i \leq N)$ uchun,

$$w_i^k + q\sum_{j=1}^{N} w_j > w_i$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $k \in E_i$ lar to'plamini $f(i, \beta)$ bilan belgilaymiz. Agar barcha $i = 1, 2, ..., N$ lar uchun, $f(i, \beta) = \emptyset$ bo'lsa, β^∞ statsionar q optimal strategiya bo'ladi va $w_q(\beta^\infty) = (w_1, w_2, ..., w_N)^T$ – qayta baholashli o'rtacha yutuq bo'ladi. Aks holda yangi reja $\gamma \in E$ quyidagicha quriladi:

$f(i, \beta) \neq \emptyset$ bo'lsa, $\gamma(i) \in f(i, \beta)$; $f(i, \beta) = \emptyset$ bo'lsa $\gamma(i) = \beta(i)$ deb olinadi. Shundan so'ng yangi γ^{∞} strategiya bilan 1-qadamga o'tiladi.

Izoh. Bunda w_i^k ni maksimum qiluvchi k ni $\beta(i)$ deb olish hisobiga boshlang'ich β rejani va uning yordamida β^{∞} statsionar strategiyani qurish maqsadga muvofiqdir.

Taksi haydovchisi masalasi

Taksi haydovchi uchta A, B va C shaharchadan tashkil topgan hududda faoliyat ko'rsatadi. Agar haydovchi A shaharchada turgan bo'lsa, unda 3 ta imkoniyat bor:

1) tasodifiy yo'lovchini uchratib qolish maqsadida shaharcha ichida bir joydan ikkinchi joyga qatnab turish;

2) eng yaqin taksi to'xtash joyiga borib, navbat kutish;

3) radio naushnikni taqqan holda chaqiruvni kutish.

Mabodo, haydovchi C shaharchada turgan bo'lsa, xuddi yuqoridagidek uchta imkoniyat bor. Ammo B shaharchada radio aloqa yo'lga qo'yilmaganligi sababli, haydovchi oxirgi imkoniyatdan mahrum. Har bir shahar (holat) va imkoniyat (yechim) uchun, keyingi qatnov A, B va C shaharlar bo'lish ehtimoli va bundan mos ravishda keladigan sof foyda (yutuq) berilgan bo'ladi. Masalan, 1 va 2 yechimlarga mos sof foyda hisoblanganda bir joydan ikkinchi joyga, eng yaqin taksi to'xtash joyiga borish xarajatlari hisobga olingan bo'lishi lozim. Bunda o'tish ehtimolliklari va yutuqlar qaysi yechim qabul qilinishiga bog'liq, chunki haydovchi har bir yechim uchun yo'lovchilarning turli zichlik taqsimotiga duch keladi. Bu ma'lumotlarni quyidagi 2.1-jadval ko'rinishda ifodalaymiz:

Faraz qilamiz $q = 0,9$ bo'lsin. Boshlang'ich reja β izohga asosan w_i^k larni maksimum qilish nuqtayi nazardan olingan bo'lsin, ya'ni $\beta = (1, 1, 1)^T$.

2.1-jadval

Holat	*Yechim*	*Ehtimollik*			*Foyda, yutuq*			
		p_{i1}^k	p_{i2}^k	p_{i3}^k	w_{i1}^k	w_{i2}^k	w_{i3}^k	$w_i^k = \sum_{j=1}^{3} p_{i,j}^k w_{ij}^k$
A	1	1/2	1/4	1/4	10	4	8	8
	2	1/16	3/4	3/16	8	2	4	2, 75
	3	1/4	1/8	5/8	4	6	4	4, 25
B	1	1/2	0	1/2	14	0	18	16
	2	1/16	7/8	1/16	8	16	8	15
C	1	1/4	1/4	1/2	10	2	8	7
	2	1/8	3/4	1/8	6	4	2	4
	3	3/4	1/16	3/16	4	0	8	4, 5

Iteratsion algoritmning 1-qadamiga ko‘ra, w_i, $i = 1, 2, 3$ noma’lumlarga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini quramiz:

$$\begin{cases} 8 + 0,9\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{1}{4}w_3\right) = w_1 \\ 16 + 0,9\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_3\right) = w_2 \\ 7 + 0,9\left(\frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{1}{2}w_3\right) = w_3. \end{cases}$$

Bundan $w_1 = 91,26$; $w_2 = 97,55$; $w_3 = 89,97$ ekanligi ma’lum bo‘ladi.

Endi ikkinchi qadamga o‘tish bilan $f(i, k)$ to‘plamlarni aniqlaymiz.

A holat uchun: $k = 2$ bo‘lganda $2,75 + 0,9\left(\frac{1}{16}w_1 + \frac{3}{4}w_2 + \frac{3}{16}w_3\right) = 88,90 < w_1 = 91,26$;

$k = 3$ bo‘lganda $4,25 + 0,9\left(\frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{8}w_2 + \frac{5}{8}w_3\right) = 86,37 < w_1 = 91,26$; bo‘ladi. Demak, $f(1, k) = \emptyset$ bo‘lar ekan.

B holat uchun: $k = 2$ bo‘lganda $15 + 0,9\left(\frac{1}{16}w_1 + \frac{7}{8}w_2 + \frac{1}{16}w_3\right) = 102,01 > w_2 = 97,55$. Demak, $f(2, k) = 2$ bo‘lar ekan.

C holat uchun: $k = 2$ bo‘lganda $4 + 0,9\left(\frac{1}{8}w_1 + \frac{3}{4}w_2 + \frac{1}{8}w_3\right) = 90,23 > w_3 = 89,97$; $k = 3$ bo‘lganda $4,5 + 0,9\left(\frac{3}{4}w_1 + \frac{1}{16}w_2 +\right.$

$\frac{3}{16}w_3\big) = 86,77 < w_3 = 89,97$ bo'ladi. Demak, $f(3,\, k) = 2$ bo'lar ekan.

$f(1,\, k) = \emptyset,\ f(2,\, k) = 2$ va $f(3,\, k) = 2$ bo'lganligi sababli, yangi statsionar reja quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $\gamma = (1,\, 2,\, 2)^T$. Shu reja asosida 1-qadamga o'tiladi va quyidagi tenglamalar sistemasi quriladi:

$$\begin{cases} 8 + 0,9\big(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{1}{4}w_3\big) = w_1 \\ 15 + 0,9\big(\frac{1}{16}w_1 + \frac{7}{8}w_2 + \frac{1}{16}w_3\big) = w_2 \\ 4 + 0,9\big(\frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{1}{2}w_3\big) = w_3. \end{cases}$$

Ushbu sistemaning yechimi: $w_1 = 119,44$; $w_2 = 134,48$; $w_3 = 121,93$. Ikkinchi qadamga o'tish bilan γ^∞ statsionar strategiyani optimallikka tekshiramiz va $f(i,\, k)$ to'plamlarni aniqlaymiz. A holat uchun: $k = 2$ bo'lganda $2,75 + 0,9\big(\frac{1}{16}w_1 + \frac{3}{4}w_2 + \frac{3}{16}w_3\big) = 127,68 > w_1 = 119,44$;

$k = 3$ bo'lganda $4,25{+}0,9\big(\frac{1}{4}w_1{+}\frac{1}{8}w_2{+}\frac{5}{8}w_3\big) = 114,84 < w_1 = 119,44$; bo'ladi. Demak, $f(1,\, k) = 2$ bo'lar ekan. B holat uchun: $k = 1$ bo'lganda $16{+}0,9\big(\frac{1}{2}w_1{+}\frac{1}{3}w_3{+}\big) = 124,62 < w_2 = 134,48$. Demak, $f(2,\, k) = \emptyset$ bo'lar ekan.

C holat uchun: $k = 1$ bo'lganda $7 + 0,9\big(\frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{1}{2}w_3\big) = 119,00 < w_3 = 121,93$; $k = 3$ bo'lganda $4,5 + 0,9\big(\frac{3}{4}w_1 + \frac{1}{16}w_2 + \frac{3}{16}w_3\big) = 113,26 < w_3 = 121,93$ bo'ladi. Demak, $f(3,\, k) = \emptyset$ bo'lar ekan.

$f(1,\, k) = 2,\ f(2,\, k) = \emptyset$ va $f(3,\, k) = \emptyset$ bo'lganligi sababli, yangi statsionar reja quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $\delta = (2,\, 2,\, 2)^T$.

Shu reja asosida 1-qadamga o'tiladi va quyidagi tenglamalar sistemasi quriladi:

$$
\begin{cases}
2,75 + 0,9\left(\frac{1}{16}w_1 + \frac{3}{4}w_2 + \frac{3}{16}w_3\right) = w_1 \\
15 + 0,9\left(\frac{1}{16}w_1 + \frac{7}{8}w_2 + \frac{1}{16}w_3\right) = w_2 \\
4 + 0,9\left(\frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{1}{2}w_3\right) = w_3.
\end{cases}
$$

Bu tenglamalar sistemasining yechimi: $w_1 = 121,66$; $w_2 = 135,31$; $w_3 = 122,84$.

Ikkinchi qadamga o‘tish bilan statsionar δ^∞ strategiyani optimallikka tekshiramiz va $f(i, k)$ to‘plamlarni aniqlaymiz. Bunda oson ko‘rsatiladiki barcha $i = 1, 2, 4$ larda $f(i, k) = \emptyset$ bo‘ladi. Demak, δ^∞ statsionar q optimal strategiya bo‘lar ekan. Bundan kelib chiqadiki, taksi haydovchisi qaysi holatda bo‘lishidan qat’i nazar 2-yechimni, ya’ni eng yaqin taksi to‘xtash joyiga borib, navbat kutishni tanlashi ma’qul ekan. Shunda uning holatlardagi mos o‘rtacha yutug‘i eng katta bo‘lib $w_1 = 121,66$; $w_2 = 135,31$; $w_3 = 122,84$ ga teng bo‘ladi.

3-§. Markov o‘yinlari

Stoxastik o‘yinlar tushunchasi dastavval Shepli tomonidan kiritilgan. Stoxastik o‘yin Markov jarayonlari orqali amalga oshiriladi. Bunda o‘tish jadvali elementlari o‘yinchilar tomonidan tanlangan yechimlarga bog‘liq bo‘ladi.

Obyektning holatlar soni N ta bo‘lsin. Har bir qadamda o‘yin bu N ta holatlarning birortasida bo‘ladi. Agar o‘yin $i(1 \leq i \leq N)$ holatda bo‘lib, I o‘yinchi $k(1 \leq k \leq m_i)$, II o‘yinchi $l(1 \leq l \leq n_i)$ yechimni tanlashgan bo‘lsa, u holda o‘yinning $j(1 \leq j \leq N)$ holatga o‘tish ehtimoli p_{ij}^{kl} soniga teng bo‘ladi. Bundan I o‘yinchining yutug‘i w_i^{kl} bo‘ladi. I o‘yinchi yig‘ilgan yutuqlarning o‘rtachasini maksimum qiluvchi strategiyani tanlaydi. II o‘yinchi bu yutuqni minimum qiluvchi strategiyani tanlashga harakat qiladi. Biror $i(1 \leq i \leq N)$ holatni tanlab olish hisobiga jadvalli G_i o'yinni hosil qilamiz. qilib, stoxastik o'yin $G = G_i$, $i = 1, 2, ..., N$ jadvalli o'yinlar to'plamidan iborat bo'lar ekan.

Shepli tomonidan stoxastik o'yinlar uchun, to'xtash tushunchasi kiritilgan bo'lib, bunda har bir $i(1 \leq i \leq N)$ uchun:

$$1 - \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{kl} = s_i^{kl} > 0$$

tengsizlik bajarilishligi talab etiladi. Bunday o'yinlar *to'xtalishli stoxastik* deb ataladi. Shepli tomonidan to'xtalishli o'yinlar uchun, olingan natijalarni keltiramiz.

To'xtalishli stoxastik o'yinlar quyidagi:

$$P_{ij} = p_{ij}^{kl} : k = 1,\ 2, ..., m_i,\ l = 1, 2, ..., n_i$$

$$W_i = w_i^{kl} : k = 1,\ 2, ..., m_i,\ l = 1, 2, ..., n_i$$

$N^2 + N$ ta jadvallar bilan beriladi, bu yerda P_{ij} ning elementlari

$$p_{ij}^{kl} \geq 0,\ |w_i^{kl}| \leq M,$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{kl} = 1 - s_i^{kl} \leq 1 - s < 1,\ \ i, j = 1, 2, ..., N$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Agar o'yin $i(1 \leq i \leq N)$ holatda turgan bo'lsa $i-$ o'yinchining sof yechimlari $k = 1, 2, ..., m_i$ lardan, II o'yinchiniki $l = 1, 2, ..., n_i$ lardan iborat bo'ladi. $(k, l) - i$ holat uchun, *sof yechim juftligini* tashkil qiladi.

1-ta'rif. $i(1 \leq i \leq N)$ holatda I o'yinchining sof yechimlari $1, 2, ..., m_i$ ustida taqsimlangan to'la ehtimollik *aralash yechim* deb ataladi.

Demak, aralash yechim $x_i = (x_i^1 . x_i^2, ..., x_i^{m_i})$ ko'rinishda bo'lib:

$$\sum_{j=1}^{m_i} x_i^j = 1,\ x_i^j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., m_i,\ \ i = 1, 2, ..., N.$$

2-ta'rif. I o'yinchining statsionar aralash strategiyasi deb $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)$ bu yerda $x_i = (x_i^1, x_i^2, ..., x_i^{m_i})$ ko'rinishdagi vektorga aytiladi.

Xuddi shunga o'xshash tushunchalarni II o'yinchiga nisbatan ham kiritish mumkin.

Agar $x_i^k = 1$, $x_i^j = 0$, $j \neq k$ bo'lsa $x_i -$ sof yechimni beradi.

B jadvalli o'yinda $val[B]$ bilan I o'yinchining minimaks yutug'ini belgilaymiz. $S_I[B]$ va $S_{II}[B]$ bilan I va II o'yinchilarning mos optimal strategiyalari to'plamini belgilaymiz. B va C lar bir xil o'lchovli jadvallar bo'lishsa:

$$|val[B] - val[C]| \leq \max_{k,l} |b^{kl} - c^{kl}| \tag{3.1}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Stoxastik o'yinda $W_i(\alpha)$ jadvalning $(k, l) -$ elementi

$$w_i^{kl} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{kl} \alpha_j$$

bilan aniqlanadi, bu yerda $1 \leq k \leq m_i$ $1 \leq l \leq n_i$ va $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)^T$ vektor ustun. Ixtiyoriy $\alpha^{(0)}$ boshlang'ich vektor olingan bo'lsin. Uning yordamida $\alpha^{(n)}$ vektorlar ketma-ketligini quyidagicha quramiz:

$$\alpha^{(n)} = val[W_i(\alpha^{(n-1)})],$$

bu yerda $n = 1, 2, \ldots$. Ko'rsatamizki, $\alpha^{(n)}$ vektor $n \to \infty$ da limitga ega va u $\alpha^{(0)}$ ga bog'liq emas bo'lib, uning $i -$ elementi G_i o'yinning bahosiga teng.

Quyidagicha U akslantirishni aniqlaymiz:

$$U\alpha = \beta,$$

bu yerda $\beta_i = val[A_i(\alpha)]$. α vektorning normasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$||\alpha|| = \max_i |\alpha_i|.$$

U holda yuqoridagi (3.1) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{gathered}||U\beta - U\alpha|| = \max_i |val[A_i(\beta)] - val[A_i(\alpha)]| \leq \\ \left|\max_{i,k,l} \sum_{j=1}^N p_{ij}^{kl}\beta_j - \sum_{j=1}^N p_{ij}^{kl}\alpha_j\right| \leq \\ \max_{i,k,l} \sum_{j=1}^N p_{ij}^{kl} \max_j ||\beta_j - \alpha_j| = (1-s)||\beta - \alpha||.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Bundan, xususan $||U^2\alpha - U\alpha|| \leq (1-s)||\beta - \alpha||$. Demak, $\alpha^{(0)}, U\alpha^{(0)}, U^2\alpha^{(0)}, \ldots$ ketma-ketlik yaqinlashar ekan va uning limiti bo'lgan α^* vektor U akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi bo'ladi: $U\alpha^* = \alpha^*$. Bu qo'zg'almas nuqta yagona ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, boshqa yana bir α^{**} qo'zg'almas nuqta mavjud bo'lsin. U holda (3.2) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$||\alpha^* - \alpha^{**}|| = ||U\alpha^* - U\alpha^{**}|| \leq (1-s)||\alpha^* - \alpha^{**}||.$$

Bu tengsizlik o'rinli bo'ladi, agar $||\alpha^* - \alpha^{**}|| = 0$ bo'lsa. Demak, α^* yagona qo'zg'almas nuqta bo'lib, u boshlang'ich $\alpha^{(0)}$ ga bog'liq emas. Endi α_i soni G_i o'yinning bahosi ekanligini ko'rsatish uchun, quyidagicha mulohaza yuritamiz: $i-$ o'yinchi birinchi n qadam davomida ro'y beradigan $G_i^{(n)}$ o'yinlarda optimal strategiyasini qo'llab, keyingi o'yinlarda ixtiyoriy strategiyani qo'llasa, u holda uning yutug'i $G_i^{(n)}$ o'yinning bahosidan ko'pi bilan $\varepsilon_n = (1-s)^n/s$ ga farq qiladi. Bu mulohaza II o'yinchiga nisbatan ham o'rinli. $\varepsilon_n \to 0$ va $G_i^{(n)}$ o'yinning bahosi α_i^* ga intilganligi sababli α_i^* G_i o'yinning bahosi bo'ladi. qilib quyidagi teorema isbot qilindi.

1-teorema. G stoxastik o'yinning o'yin bahosi quyidagi:

$$\alpha_i = val[A_i(\alpha)],\ i = 1, 2, ..., N$$

tenglamalar sistemasining yagona yechimidan iborat bo'ladi.

2-teorema. Stoxastik G o'yinda I va II o'yinchilarning statsionar optimal strategiyalari mos ravishda x^* va y^* lardan iborat bo'lib, $x_i^* \in S_I[A_i(\alpha^*)]$ va $y_i^* \in S_{II}[A_i(\alpha^*)]$, ya'ni G ga tegishli $G_i(i = 1, 2, ..., N)$ o'yinda I va II o'yinchilarning optimal strategiyalari bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, G_i o'yin n – qadamda yakunlanib, bundan I o'yinchi α_i^* o'rniga $w_i^{kl} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{kl}\alpha_j^*$ yutuqni olsin. Tushunarliki, bunda I o'yinchi tomonidan statsionar x^* strategiyani qo'llash α_i^* yutuqni ta'minlaydi.

Boshlang'ich G_i o'yinda I o'yinchi tomonidan x^* strategiyani qo'llash natijasida n qadam davomida olgan o'rtacha yutug'i:

$$\alpha_i^* - (1-s)^{n-1} \max_{i,k,l} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{kl}\alpha_j^*$$

sonidan kichik bo'lmaydi. Demak, bu yutuq:

$$\alpha_i^* - (1-s)^n \max_j \alpha_j^*$$

kichik bo'lmaydi. Shu sababli I o'yinchining umumiy yutug'i:

$$\alpha_i^* - (1-s)^n \max_j \alpha_j^* - (1-s)^n/s$$

sonidan katta yoki unga teng bo'ladi.

Bu mulohazalar n ning yetarlicha katta qiymatlari uchun, o'rinli bo'lganligi sababli, bundan kelib chiqadiki, G_i o'yinda x^* strategiya I o'yinchi uchun, optimal. Xuddi y^* strategiya II o'yinchi uchun, optimal. Teorema isbot bo'ldi.

val operatorning nochiziqliligi 1 va 2-teoremalar yordamida aniq yechimni olishni qiyinlashtiradi. Shuning uchun, yutuqlarni statsionar strategiyalar orqali ifodalash maqsadga muvofiq. Buning uchun, quyidagi belgilashni kiritamiz. $\bar{G} = \bar{G}_i$ – sof strategiyalari G o'yin uchun, statsionar bo'lgan o'yinlar to'plami bo'lsin. Ularning to'lov funksiyalari $K_i(x, y)$ quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$K_i(x,y) = x_iA_iy_i + \sum_{j=1}^{N} x_iP_{ij}y_iK_j(x,y),\ i = 1,2,...,N.$$

Bu sistema yagona yechimga ega. Haqiqatan, chiziqli U_{xy} almashtirish uchun: $U_{xy}\alpha = \beta$ bu yerda $\beta_i = x_iA_iy_i + \sum_{j=1}^{N} x_iP_{ij}y_i\alpha_j$, quyidagi munosabat o'rinli:

$$K_i(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} x_1P_{11}y_1 - 1 & x_1P_{12}y_1 & ... - x_1A_1y_1 & ...\ x_1P_{1N}y_1 \\ x_2P_{21}y_2 & x_2P_{22}y_2 - 1 & ... - x_2A_2y_2 & ...\ x_2P_{2N}y_2 \\ .... & .... & .... & .... \\ x_NP_{N1}y_N & x_NP_{N2}y_N & ... - x_NA_Ny_N & ...\ x_NP_{NN}y_N - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1P_{11}y_1 - 1 & x_1P_{12}y_1 & ... - x_1P_{1i}y_1 & ...\ x_1P_{1N}y_1 \\ x_2P_{21}y_2 & x_2P_{22}y_2 - 1 & ... - x_2P_{21}y_2 & ...\ x_2P_{2N}y_2 \\ .... & .... & .... & .... \\ x_NP_{N1}y_N & x_NP_{N2}y_N & ... - x_NP_{Ni}y_N & ...\ x_NP_{NN}y_N - 1 \end{vmatrix}}$$

$$||U_{xy}\beta - U_{xy}\alpha|| = \max_i \left| \sum_{j=1}^{N} x_iP_{ij}y_i(\beta_j - \alpha_j) \right| \le (1-s)||\beta - \alpha||.$$

Kramer qoidasiga asosan yuqoridagi yechimni hosil qildik.

3-teorema. $\bar{G}_i$ o'yinlarning har biri egar nuqtaga ega:

$$\min_y \max_x K_i(x,y) = \max_x \min_y K_i(x,y).$$

Barcha $G_i \in G$ lar uchun, optimal bo'lgan statsionar strategiya $\bar{G}_i \in \bar{G}$ lar uchun, sof optimal strategiya bo'ladi va aksincha, G va $\bar{G}$ larning vektor baholari ustma-ust tushadi.

Isbot. Teorema isboti 2-teoremadan osongina kelib chiqadi. E'tibor beramizki, biror G_i (yoki $\bar{G}_i$) uchun, optimal bo'lgan x strategiya G (yoki $\bar{G}$) ga tegishli boshqa o'yinlar uchun, optimal bo'lmasligi mumkin.

Ko'rsatish mumkinki, G o'yinning barcha statsionar optimal strategiyalari to'plami yopiq qavariq ko'pyoqdan iborat bo'ladi. Ratsional koeffitsiyentli stoxastik o'yin ratsional bahoga ega bo'lishi shart emas. i holatdan j holatga o'tish mumkin bo'lgan qadamlar sonini bildiruvchi n soni to'plamini N_{ij} bilan belgilaymiz. d_i N_{ij} dagi sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi bo'lsin.

i holatdan j holatga n qadamda o'tish ehtimolini $p_{ij}^{(n)}$ bilan belgilaymiz.

3-ta'rif. Agar biror n topilib $p_{ij}^{(n)} > 0$ bo'lsa *j holatga i holatdan o'tish mumkin deyiladi* va $i \to j$ kabi belgilanadi.

4-ta'rif. i va j holatlar *o'zaro aloqada* deyiladi, agar bir holatdan ikkinchi holatga o'tish mumkin bo'lsa, bu $i \leftrightarrow j$ kabi belgilanadi.

5-ta'rif. O'zaro aloqada bo'lishlik ma'nosida *ajralmaydigan ekvivalent sinflarga* bo'linadi.

Isbotsiz quyidagi lemmani keltiramiz.

1-lemma. Bir ajralmaydigan ekvivalent sinfga tegishli i, j lar uchun, $d_i = d_j = d$ bo'ladi va N_{ij} ga tegishli sonlar modul bo'yicha taqqoslamadir.

N_{ij} ning ixtiyoriy elementi bilan d modul bo'yicha taqqoslash mumkin bo'lgan sonni $t_{ij}(0 \leq t_{ij} \leq d)$ bilan belgilaymiz.

6-ta'rif. Ixtiyoriy i va j elementi uchun, $t_{ij} = 0$ bo'lgan sinf *siklik sinf* deb ataladi.

7-ta'rif. Agar Markov zanjiri faqat bitta siklik sinfdan iborat bo'lsa, u *regulyar*, aks holda *siklik* deb ataladi.

Bunda quyidagi teorema o'rinli.

4-teorema. Zanjir regulyar bo'lishligi uchun, biror n da P^n ning barcha elementlari musbat bo'lishligi kerak, ya'ni bunda ixtiyoriy holatdan boshqa bir ixtiyoriy holatga n qadam davomida o'tish mumkin.

8-ta'rif. $s_1, s_2, ...$ sonli ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar $t_n = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} s_i$ ketma-ketlik t soniga yaqinlashsa, u holda yuqoridagi ketma-ketlik t ga Chezaro ma'nosida yaqinlashadi deyiladi.

9-ta'rif. $s_1, s_2, ...$ sonli ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar $u_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} k^{(n-i)}(1-k)^i s_i$, $(0 < k < 1)$ ketma-ketlik t soniga yaqinlashsin. U holda yuqoridagi ketma-ketlik t ga Eyler ma'nosida yaqinlashadi deyiladi.

10-ta'rif. $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j > 0$, $j = 1, 2, ..., N$ dan hosil qilingan $p = (p_1, p_2, ..., p_N)$ taqsimot *ergodik(statsionar) taqsimot* deb ataladi.

Faqat bitta ergodik sinfdan iborat bo'lgan markov zanjiri *ergodik markov zanjiri* deb ataladi.

5-teorema. Ixtiyoriy ergodik zanjir uchun, darajali P^n qator Eyler ma'nosida A limit jadvalga yaqinlashadi. Bu limit jadvalning ko'rinishi quyidagicha $A = \xi p$ bo'ladi. Bu yerda ξ – elementlari birdan iborat bo'lgan vektor ustun, p – musbat ehtimol vektori.

Isbot. Siklik zanjirda bir sikldan boshqasiga o'tish n ning ayrim qiymatlarida amalga oshiriladi va bu o'tishlar davriy qaytarib turiladi. Shu sababli o'tish jadvali P ning hech bir darajasi musbat bo'lmaydi va turli darajalari turli joylarda nol elementga ega bo'ladi. Darajaning ortib borishi bilan bu nol elementlarning joylashuvi davriy qaytarilib turadi. Demak, P^n ketma-ketlik oddiy ma'noda yaqinlashmaydi. Ko'rsatamizki, ushbu ketma-ketlik Eyler ma'nosida yaqinlashadi. $0 < k < 1$ berilgan son bo'lsin, quyidagi $kI + (1-k)P$ jadvalni qaraylik. Ushbu jadval o'tuvchi jadvaldir. Bunda P jadvalning musbat elementlar joylashgan joyda $kI + (1-k)P$ jadvalning ham musbat elementlar joylashgan, demak, u ham ergodik zanjirni ifodalaydi. Shu bilan birga uning diagonal elementlari ham musbatdir. Demak, har bir holatga bir qadamdan so‘ng qaytib kelish mumkin ekan, bu degani $d = 1$. Natijada yangi zanjirning regulyar ekanligi kelib chiqadi.

Regulyar zanjirning ergodik teoremasidan kelib chiqadiki, $(kI + (1-k)P)^n$ ketma-ketlik $A = \xi p$ jadvalga yaqinlashadi, bu yerda $p-$ musbat ehtimollik vektori. Natijada quyidagilar hosil bo‘ldi:

$$A = \lim_{n\to\infty} (kI + (1-k)P)^n$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} k^{(n-i)}(1-k)^i P^i.$$

Oxirgi tenglikdan ko‘rinib turibdiki, P^n ketma-ketlik har bir k da Eyler ma’nosida A ga yaqinlashadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

6-teorema. Agar P ergodik o‘tish jadvali bo‘lib A va P lar 5-teoremadan olingan bo‘lsin, u holda:

a) ixtiyoriy ehtimollik vektori π uchun, πP^n ketma-ketlik Eyler ma’nosida p ga yaqinlashuvchi;

b) p vektor P jadvalning yagona qo‘zg‘almas vektori bo‘ladi;

c) $PA = AP = A$.

Eslatib o‘tamiz $\{X_n\}_{n\geq 0}$ diskret tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi:

$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} : X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\} =$$
$$= P\{X_{n+1} = i_{n+1}; X_n = i_n\}$$

shartni qanoatlantirsa, u *sodda Markov zanjiri* deb ataladi. Demak, sodda Markov zanjirida keyingi o‘tish ehtimoli faqat hozirgi holatga bog‘liq bo‘lib, avvalgilariga bog‘liq emas ekan (bog‘liq bo‘lsa *yuqori tartibli Markov zanjiri* deb ataladi).

$\{X_n\}_{n\geq 0}$ tasodifiy miqdorlarning qiymatlar sohasi *holatlar fazosi* deb ataladi.

$$P_{ij}(n) = P\{X_{n+1} = j : X_n = i\}$$

tengliklar bilan elementlari aniqlangan P_n jadval n qadamda *o'tish ehtimoli jadvali* deb ataladi. Elementlari $p_i = P\{X_0 = i\}$ bilan aniqlangan $p = (p_1, p_2, ..., p_N)$ vektor Markov zanjirining *boshlang'ich taqsimoti* deyiladi.

Markov zanjiri *bir jinsli* deyiladi, agar o'tish jadvallari qadam soniga bog'liq bo'lmasa, ya'ni ixtiyoriy n da

$$P_{ij}(n) = P_{ij}$$

aks holda *bir jinsli emas* deyiladi.

Bundan keyin bir jinsli Markov zanjirlari ko'riladi.

Shartli ehtimollik xossasiga asosan:

$$P\{X_n = i_n : X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\} = p_{i_{n-1}i_n}p_{i_{n-2}i_{n-1}}...p_{i_0i_1}p_{i_0}$$

bundan *Kolmogorov – Chepmen tenglamasi* kelib chiqadi:

$$P\{X_n = i_n : X_0 = i_0\} = (P^n)_{i_0i_n},$$

demak, bir jinsli Markov zanjirida n qadamdagi o'tish ehtimoli jadvali bir qadamda o'tish ehtimoli jadvalining $n-$ darajasiga teng ekan. Bundan quyidagi hosil bo'ladi:

$$P\{X_n = i_n\} = ((P^T)^n p)_{i_n}.$$

Yuqorida diskret Markov zanjiri uchun, kiritilgan tushunchalarni uzluksiz bo'lgan Markov zanjirlari uchun, ham aytish mumkin.

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ diskret tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi:

$$P\{X_{t+h} = x_{t+h} : X_s = x_s, 0 < s \leq t\} =$$

$$P\{X_{t+h} = x_{t+h} : X_t = x_t\}$$

shartni qanoatlantirsa, *uzluksiz vaqtli Markov zanjiri* deb ataladi. Agar uzluksiz vaqtli Markov zanjiri uchun:

$$P\{X_{t+h} = x_{t+h} : X_t = x_t\} = P\{X_h = x_h : X_0 = x_0\}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u *bir jinsli Markov zanjiri* deb ataladi.

Diskret Markov zanjiriga o'xshash uzluksiz holda ham bir jinsli Markov zanjirining chekli taqsimoti boshlang'ich taqsimot

$$p = (p_1, p_2, ...)^T,\ p_i = P\{X_0 = i\},\ i = 1, 2, ...$$

va o'tish jadvali

$$P(h) = (P_{ij}(h)) = P\{X_h = j : X_0 = i\}$$

bilan to'la aniqlangan.

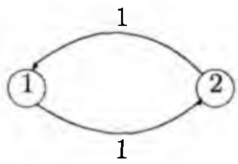
O'tish jadvali quyidagi *Kolmogorov – Chepmen* tenglamasini qanoatlantiradi:

$$P(t+s) = P(t)P(s)$$

yoki

$$P_{ij}(t+s) = \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(s).$$

Misol. Eng sodda siklik zanjir quyidagi ko'rinishga ega:



Uning o'tish jadvali

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi, statsionar taqsimoti esa $p = (0,5; 0,5)$ bo'ladi.

4-§. Imitatsion modellashtirish. Monte-Karlo usuli

Imitatsion modellashtirish asosan ikki toifaga tegishli masalalarni yechishda ishlatiladi.

1. Matematika, fizika va ximiya fanlari sohalaridan olingan nazariy masalalar, xususan:

a) egri chiziq bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblash, hamda karrali integral qiymatini aniqlash;

b) jadvalni teskarilash;

c) $\pi(=3,14159)$ o'zgarmasni hisoblash;

d) xususiy hosilali differensial tenglamani yechish;

e) tekislikda zarrachaning harakat trayektoriyasini topish;

f) turli ko'rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini olish;

Inson faoliyati davomida yuzaga keladigan amaliy boshqaruv masalalari, xususan:

a) texnologik – ishlab chiqarish jarayonlarining imitatsion modellashtirish masalalari (masalan, ximik jarayonlarni tadqiq qilish, zaxirani boshqarish, texnik xizmat ko'rsatish sistemasini loyihalashtirish va boshqalar);

b) iqtisodiy xususiyatga ega bo'lgan sistemaning imitatsion modellashtirish masalalari (loyihalashtirish jarayonlari, iqtisodiy basharotlar hamda aniqroq mazmunga, masalan, investitsion jarayonlar);

c) ijtimoiy va ijtimoiy-psixologik masalalar (masalan, aholining ko'chishi, guruhlar harakatining muammolari va boshqalar);

d) biomedik sistemalarning imitatsion modellashtirish masalalari (masalan, qon aylanish, miyaning faoliyati, qondagi qizil va oq katakchalar (eritrotsit)ning harakatlari);

e) u yoki bu harbiy strategiyani yoki taktikani qo'llash natijasida vujudga keladigan oqibatni tahlil qilish.

Yuqorida keltirilgan masalalarni yechishda ishlatiladigan usul, ma'lum ma'noda, hozirgi zamon imitatsion modellashtirishning usuli bo'lgan Monte – Karloning o'tmishdoshi hisoblanadi. Uning asosiy g'oyasi izlanayotgan bahoni olish uchun, tanlamadan foydalanishdir. Ammo ko'rilayotgan masala mos ravishda ehtimollik taqsimoti bilan tavsiflanishi, bu tanlama olishning shartlarida bo'lib, buning yordamida tanlama amalga oshiriladi. Ayrim hollarda bunday bog'lanishni tiklash qiyinga o'xshaydi, masalan, determinik masala bo'lgan integral hisoblash bilan ehtimollik taqsimoti orasidagi bog'lanish. Buni biz keyinchalik batafsil ko'rib chiqamiz.

O'tgan asrning ikkinchi yarmidan boshlab nazariy masalalarni yechishda Monte – Karlo usulining o'rniga murakkab amaliy masalalarni tahlil qilish uchun, imitatsion modellashtirish nomi bilan yangi usul kirib keldi. Imitatsion modellashtirish Monte – Karlo usuli kabi sistemani ishlash natijasini baholashda tanlamalardan foydalanadi. Shu ma'noda Monte-Karlo usulida o'z aksini topgan ko'pgina g'oyalar imitatsion modellashtirishda ham bevosita tadbig'ini topdi. Bu g'oyalardan biri mos ehtimollik taqsimotidan foydalanib tanlamalarni aniqlash va natijani ishonchli baholash uchun, tanlama sonini kamaytirish usullarini ishlab chiqishdan iborat. Oxirgi paytda murakkab sistemalarni imitatsion modellashtirishdagi muvaffaqiyatlar EHM larni takomillashtirish bilan bevosita bog'liqdir. Hozirgi vaqtda mavjud bo'lgan tezkor EHM larsiz konstruktiv ravishda imitatsion yondashuv usulini tasavvur qilib bo'lmaydi. Shu yerda ta'kidlash lozimki, imitatsion modellashtirishda hisoblash sodda bo'lishi bilan birga, ko'p vaqtni talab qiladi. Shu sababli bu hisoblarni "qo'lda" bajarish amaliy jihatdan mumkin emas.

Tasodifiy sonlarning ahamiyati

Yuqorida ko'rib o'tildiki, imitatsion modellashtirish tanlanmalar yordamida olingan ma'lumotlar asosida sistemaning operatsion xususiyatlarini tahlil qilishga imkon beradi. Biz tanlamalar qay tarzda olinishi bilan tanishib chiqamiz. Bunda shuni nazarda tutishimiz kerakki, zarur hisoblash jarayonlari EHM orqali amalga oshiriladi.

Imitatsion modellarda ixtiyoriy ehtimol taqsimotiga mos tanlamalar $[0,1]$ oraliqdagi tasodifiy sonlar asosida quriladi. Tanlama qay tarzda amalga oshirishini tushuntirishdan avval, $[0,1]$ oraliqqa tegishli tasodifiy sonlar qanoatlantirishi lozim bo'lgan statistik shartlarni keltiramiz.

1. $[0,1]$ oraliqdagi ixtiyoriy son bir xil ehtimollik bilan ro'y beradi.

2. $[0,1]$ oraliqdan tasodifiy ravishda ketma-ket olinadigan sonlar joylashuvi butkul tasodifiy generatsiya qilinadi, ya'ni ular birbiriga bog'liq emas va korrelyatsion bog'liqsiz. $[0,1]$ oraliqdan tasodifiy sonlarni tanlashda, EHM da oson amalga oshiriladigan arifmetik usullar ishlatiladi. Bunda, ko'p hollarda, tasodifiy sonlarni aniqlashda rekursiv formulalar orqali generatsiya qilinadigan *multiplikativ kongruent* usul qo'llaniladi. Mos statistik tekshiruv shuni ko'rsatadiki, bu usul yordamida $[0,1]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy sonlar tanlab olinadi. Bundan tashqari rekursiv ifodaning parametrlarini tanlab olish mumkinki, tasodifiy sonlarning qayta takrorlanishidan avvalgi soni modelning to'la bir marta ishlashi uchun, yetarli bo'lsin. Quyida shu usul yordamida aniqlangan 186 ta tasodifiy sonlar berilgan.

4.1-jadval

058962	352943	586999	345500	790012	630566	673284	364609	128099	487110
769774	234646	479909	767638	284650	811154	287072	422037	948578	893129
821570	891254	953397	699089	613960	391962	826125	230243	902490	342756
934123	519930	712470	595449	160463	603734	178239	635823	210783	542293
356707	259606	347270	747163	357549	420822	306993	054556	544395	895364
292630	697501	551336	030504	220998	051455	319740	455344	854407	028341
480379	627205	439814	994034	005875	088946	455344	854407	028341	480379
627205	439814	994034	005875	088946	480798	084273	178448	312230	267349
940210	357985	001720	788457	715256	195421	735221	452531	298202	916428
814746	640618	510993	300419	203535	517436	272799	979865	424002	725225
353251	684924	291621	585405	887838	058382	359749	633051	560561	665907
950391	709176	701533	826616	645896	435829	801902	888953	116597	699005
144655	576880	159382	744371	151787	031383	822207	650795	504908	172286
489546	386699	914280	005383	803777	774217	411304	499874	297506	286166
039436	661127	611829	720835	818541	423735	175532	239580	857687	989902
220226	412235	491375	238133	006422	895334	314207	827234	135543	368147
988993	620635	822874	351526	703292	056012	006447	534569	149393	085234
166865	234068	902734	309612	733068	611896	073756	935472	949026	274906

Qulaylik uchun, sonlarning chap tarafidagi o'nlik nuqta tushirib qoldirilgan. Quyidagi sodda misolda $[0, 1]$ oraliqdan olingan tasodifiy sonlar tanlanmasidan qanday foydalanish mumkinligini ko'ramiz:

4.2-jadval

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$F(x)$	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1

Hatto statistik testlarni qanoatlantiruvchi arifmetik operatsiyalar yordamida olingan tasodifiy sonlarni haqiqiy tasodifiy emas deb da'vo etish mumkin. Haqiqatan, bu sonlarning barchasi rekursiv ifodalar uchun, boshlang'ich qiymatlar berilgan zahot oldindan "aniqlangan" bo'ladi. Shu sababli bu yo'l bilan olingan sonlarni haqiqiy tasodifiy sonlardan (ularni olish uchun, umuman boshqa usul ishlatiladi) farqlash uchun *psevdo tasodifiy* sonlar deb ataladi. Tasodifiy sonlarni olishda arifmetik usulning asosiy afzalligi shundan iboratki, uning yordamida zarur paytlarda sonlarning bir xil ketma-ketligini olish mumkin bo'ladi.

1-misol. (tanga tashlash o'yini.) Tanga tashlanganda, uning tamg'a (T) tomoni tushsa I o'yinchi II o'yinchiga 10 birlik, aksincha raqam (S) tomoni tushsa II o'yinchi I o'yinchiga 10 birlik yutuq taqdim etsin. Tanga to'g'ri shaklga ega bo'lsa, uning T yoki R tomon bilan tushish ehtimoli 50 foiz bo'ladi. Boshqacha aytganda T yoki R hodisalarining ro'y berish ehtimolliklari $p\{T\} = 0.5$; $p\{P\} = 0.5$.

Ta'rifga asosan barcha tasodifiy sonlar $[0,1]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo'lganligi sababli, yuqoridagi o'yinning natijasini aniqlash uchun, quyidagi qoidani taklif etish mumkin. R bilan generatsiya qilish yo'li bilan aniqlanadigan tasodifiy sonning qiymati belgilangan bo'lsin. U holda, agar $0 \leq R \leq 0,5$ bo'lsa T hodisa, agar $0 < R \leq 1$ bo'lsa S hodisa ro'y bergan bo'lsin. R sonining $[0,1]$ oraliqda bunday taqsimlanishi T va S hodisalarni teng ehtimollik bilan ro'y berishiga ekvivalentdir. Ushbu tanga tashlash bilan bog'liq bo'lgan o'yinning modelini tuzish uchun, faraz etaylik, tanga 10 marta tashlansin. Bu $[0,1]$ oraliqdan tasodifiy 10 sonni aniqlashga ekvivalentdir. Buning uchun, 4.1-jadvalning birinchi ustunidagi 10 ta sondan foydalanamiz, ular tanga tashlanganini bildiradi. Ular $T, S, T, S, S, S, S, T, T$ va S larga mos keladi. Buning natijasida I o'yinchi II o'yinchiga $60 - 40 = 20$ birlik yutqazadi. Tabiiyki, tashlashlar soni ortib borishi bilan durang natijaga kelishni kutish mumkin, ya'ni hech bir o'yinchi yutmaydi.

Masalan, tanga tashlash saqqo tashlash o'yinlari kabi, $[0,1]$ oraliqdagi tasodifiy sonlardan foydalanish barcha natijalarga bir xil ehtimollik beruvchi mos taqsimot bilan tanlashga chegara qo'yilganga o'xshaydi. Aslida unday emas. Quyidagi misollar orqali ko'rsatiladiki, ixtiyoriy ehtimol taqsimotiga bo'ysunuvchi natijani $[0, 1]$ oraliqqa tegishli tasodifiy sonlar bilan generatsiya qilish mumkin.

Ixtiyoriy taqsimotda $[0, 1]$ oraliqdagi tasodifiy sonlardan foydalanishga o'tishdan avval, o'yin saqqosini tashlash o'yinini boshqacha nuqtayi nazardan ko'rib chiqamiz. Buning uchun, x bilan natija (tasodifiy o'zgaruvchini), $p(x)$ va $f(x)$ bilan mos ravishda ehtimollikning zichlik va taqsimot funksiyalarini belgilaymiz. U holda 4.2-jadvaldagi $f(x)$ bilan x orasidagi bog'lanishdan ko'rinib turibdiki, x ning turli qiymatlari bilan $[0, 1]$ ning oraliq ostilari orasidagi bog'lanish quyidagicha bo'lar ekan:

4.3-jadval

$x = 1$	$0 \leq F(x) \leq 1/6$	$x = 4$	$1/2 < F(x) \leq 2/3$
$x = 2$	$1/6 < F(x) \leq 1/3$	$x = 5$	$2/3 < F(x) \leq 5/6$
$x = 3$	$1/3 \leq F(x) \leq 1/2$	$x = 6$	$5/6 < F(x) \leq 1$

$[0, 1]$ oraliqda R tasodifiy sonni generatsiya qilish bilan, uni $f(x)$ ga tenglashtirish orqali natija x ning qiymatini aniqlash mumkin. Masalan, $R = 0,4$ uchun, $f(x) = 0,4$ tenglikdan va 4.3-jadvaldan $x = 3$ ekanligini topamiz. Bu usulni ishlatish $f(x)$ funksiyaning teskarisini topish bilan ekvivalent va u inversiya usulini tatbiq qilishga mos keladi.

$[0, 1]$ oraliqda tekis taqsimlangan $f(x)$ funksiya uchun, ixtiyoriy ehtimol taqsimotiga inversiya usulini qo'llash mumkin. Ushbu natija ixtiyoriy $f(x)$ uchun, oson isbotlanadi. Faraz qilaylik, $y = f(x)$, $0 \leq y \leq 1$. $y = f(x)$ kattalikning taqsimot ehtimolligi $G(x)$ bo'lsin. U holda quyidagini munosabatlarni hosil qilamiz:

$$G(y) = P\{y \leq Y\} = P\{F(x) \leq Y\} = P\{x \leq F^{-1}(Y)\} =$$

$$= F\{F^{-1}(Y)\} = Y, \; 0 \leq Y \leq 1.$$

Bu xossa kattalik uchun, tekis taqsimlangan holda va faqat shu holda o'rinli bo'ladi. Ushbu natija ham diskret, ham uzluksiz taqsimotlar uchun, o'rinlidir.

Diskret taqsimotlar uchun, inversiya usuli, xuddi soqqa tashlashdagi misoldagi mulohazalar kabi olib boriladi. Endi uzluksiz taqsimot bo'lgan holni qaraylik.

2-misol.(eksponensial taqsimotda tanlama.) Faraz qilaylik, qandaydir xizmat ko'rsatish sistemasida xizmat ko'rsatish vaqti t eksponensial qonun bilan taqsimlangan bo'lib, xizmat ko'rsatish tezligi μ bo'lsin. U holda t kattalikning taqsimot ehtimolligi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, \ t > 0$$

Demak,

$$f(t) = \sum_{0}^{t} \mu e^{-\mu x} dx = 1 - \mu e^{-\mu t}.$$

Agar $R\,[0,1]$ oraliqdagi tasodifiy son bo'lsa, $f(t) = R$ deb olish bilan quyidagini hosil qilamiz:

$$R = 1 - \mu e^{-\mu t}$$

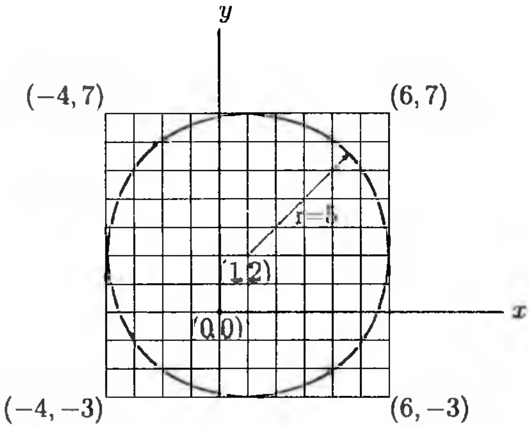
yoki

$$t = -\left(\frac{1}{\mu}\right) ln(1-R) = -\left(\frac{1}{\mu}\right) lnR.$$

Oxirgi tenglikda $1 - R$ ni R ga almashtirilishiga sabab, R va $1 - R$ lar $[0,1]$ oraliqda teng imkoniyatli tasodifiy sonlardir.

Monte-Karlo usuli

Modellashtirishdan foydalanaliyotgan paytda ko'p vaqt mazmunan statistik tajribani ifodalovchi imitatsion modellashtirish, uning natijasi esa statistik testlar asosida izohlash talab etilishi, diqqat-e'tibordan chetta qoladi. Bundan tashqari bunday modellashtirishning o'ziga xos ekanligi, ya'ni uning natijasi faqat tajribani yetarlicha ko'p takrorlash orqali statsionar qiymatiga kelish mumkinligini bilish zarur. Model kelajakda kutish mumkin bo'lgan natija haqida tasavvurni hosil qilishi uchun, modelni tekshirish yetarlicha uzoq vaqt davom etishi zarur, bu bilan statsionarlik sharti ham kafolatlangan bo'ladi. Odatda "yetarlicha uzoq vaqt" tushunchasi juda murakkab bo'lib, u modellashtirilayotgan sistema turiga hamda boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'ladi. Yuqorida keltirilgan mulohazalarni tasdiqlash ma'nosida Monte – Karlo usuli bilan tanishib chiqamiz:



$$(x-1)^2+(y-2)^2=25$$

4.1-rasm.

Yuqorida ko'rilgan misol sodda bo'lishiga qaramasdan namunalidir. Diametri ma'lum bo'lgan doiraning yuzini tasodifiy miqdorning qiymatlari yordamida aniqlangan tanlamalar asosida topish talab etilsin. Doiraning tomonlari diametrga teng bo'lgan kvadrat ichiga joylashtiramiz. Bizning maqsad doira yuzini topishda tanlamalardan foydalanish, chunki modellashtirishda ma'lumotlarni faqat usul bilan olish mumkin. Bularni tushuntirish maqsadida aniq sonli misol ko'ramiz. Markazi $(1, 2)$

da va radiusi $r = 5sm$ bo'lgan doira berilgan. Ushbu doiraning aylanasi:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

tenglamaga ega bo'ladi. Kvadratning uchlari $(-4,-3)$, $(6,-3)$, $(-4,7)$ va $(6,7)$ nuqtalarda joylashgan bo'lib, ular figuraning geometrik xossasidan kelib chiqadi. Kvadrat ichidagi yoki aylanadagi ixtiyoriy (x,y) nuqtalar $-4 \le x \le 6$ va $-3 \le y \le 7$ tengsizliklarni qanoatlantiradi.

Monte-Karlo usulini qo'llashda tanlamalardan foydalanish quyidagiga asoslangan, ya'ni $-4 \le x \le 6$ va $-3 \le y \le 7$ kvadratdan olingan nuqtalarning paydo bo'lishi teng ehtimollikka ega, x va y quyidagi:

$$f(x) = \begin{cases} 1/10, & -4 \le x \le 6, \\ 0, & aks\ holda \end{cases},$$

$$g(y) = \begin{cases} 1/10, & -3 \le y \le 7, \\ 0, & aks\ holda \end{cases}$$

ehtimollik zichligi bilan aniqlangan bo'lib, tekis taqsimlangan. Endi (x,y) nuqtani $f(x)$ va $g(y)$ taqsimotlarga mos ravishda aniqlaymiz. Bu jarayonni davom ettirgan holda doira yoki aylanaga tushgan nuqtalar sonini hisoblaymiz.

Faraz qilaylik, tanlama n kuzatishdan iborat bo'lib, bu n nuqtadan m tasi doira ichiga yoki aylanaga kelib tushgan bo'lsin.

U holda doiraning yuzi bahosi $= m/n$, kvadratning yuzi $= (m/n)(10 \times 10) = 100m/n$. Doiraning yuzini shunga o'xshash usul bilan aniqlashni, quyidagicha asoslash mumkin, ya'ni tanlama tanlash jarayonida ixtiyoriy (x,y) nuqta kvadratning ixtiyoriy joyiga bir xil ehtimollik bilan tushadi. Shu sababli m/n nisbat doiraning yuzini kvadrat yuziga nisbatan baholashni ifodalaydi.

Modellashtirishda statistik xatolikning ta'sirini o'rganish maqsadida masala n ning turli $100, 200, 500, 1000, 2000, 5000$ va

10000 qiymatlarida yechib ko‘rildi. n ning har bir qiymatida 10 tadan turli tasodifiy sonlar olindi, buning har birida tasodifiy sonlarning turli ketma-ketliklari hadlari $[0, 1]$ dan olindi.

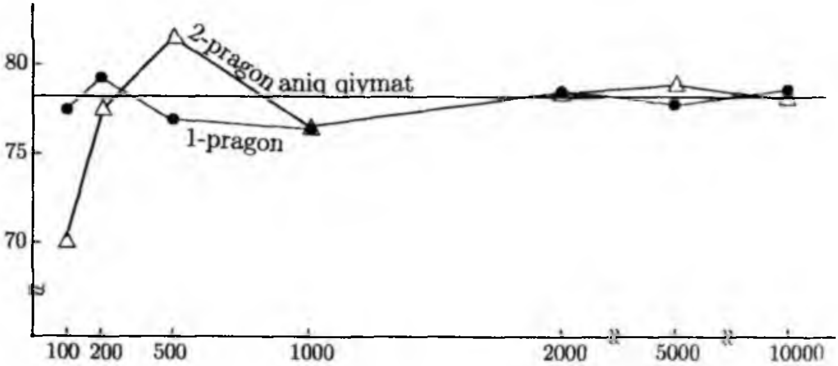
Tasodifiy sonlar olish tartibi	*Tajribalar soni n ning qiymati berilgan doira yuzini baholash*						
	100	200	500	1000	2000	5000	10000
1	78,0	79,5	77,4	76,2	78,8	78,22	78,77
2	70,0	77,0	81,0	76,2	78,7	78,6	78,23
3	81,0	79,5	77,2	79,0	79,15	77,72	78,88
4	70,0	77,0	77,0	79,7	78,7	77,76	78,03
5	79,0	77,0	79,4	77,0	79,45	79,0	78,21
6	81,0	76,0	79,2	78,8	77,65	78,68	78,27
7	77,0	78,0	79,0	77,3	78,4	79,08	79,64
8	78,0	79,5	80,2	80,2	77,05	78,54	78,27
9	82,0	76,5	80,4	79,5	79,75	78,34	78,67
10	75,0	82,0	75,6	79,8	79,0	78,22	78,16
O‘rtacha	77,1	78,2	78,64	78,37	78,56	78,42	78,57
Dispersiya	18,3	3,5	3,1	2,4	0,66	0,23	0,22
	Yuzaning aniq qiymati $= 78,54 sm^2$						

Ushbu jadvalda tajriba natijalari keltirilgan. Ulardan foydalangan holda quyidagilarni keltirish mumkin.

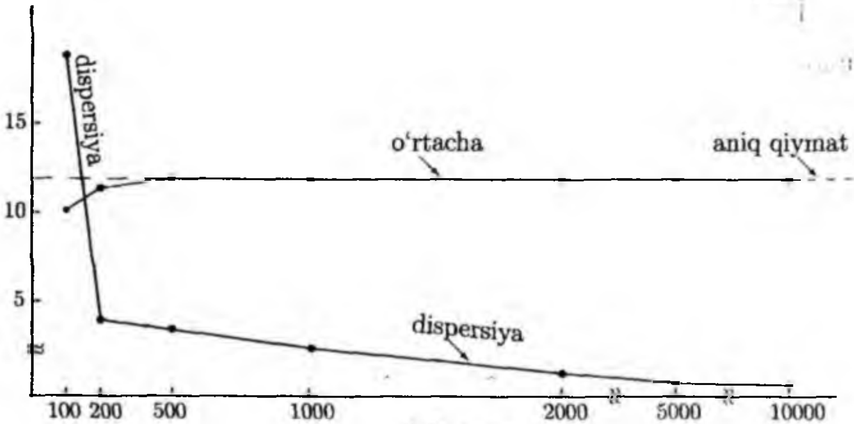
1. Tajribalar soni ortishi bilan doira yuzini baholash aniq qiymatga yaqinlashib boraveradi. 4.2-rasmda n ning turli qiymatlarida 1 va 2 ta hollar ko‘rilgan. Bundan ko‘rinib turibdiki, avval aniq qiymat atrofida tebranib turadi, keyinchalik stabillashadi. Bu hol tajribani yetarlicha ko‘p o‘tkazilgandan so‘ng ro‘y beradi. Odatda, ko‘pchilik imitatsion modellashtirishlarda shu statsionar holatdagi natijalar muhim bo‘ladi.

2. n ning bir xil qiymatida tasodifiy sonlarning qiymatlari bilan farqlanuvchi 10 ta variantning har birida turli baholashlar olingan. Bu variantlarning har birini modellashtirish bilan bog‘liq bo‘lgan tajribadagi kuzatuv deb hisoblash mumkin.

3. Agar baholashni n ning har bir qiymatida o'rtachasi olinadigan bo'lsa, xatolik kamayib boradi. Bu bog'lanish 4.3-rasmda ko'rsatilgan va shu bilan birga statsionar holatga kelinganda n ortishi dispersiyaning kamayishiga olib keladi. n ning qiymati 100 dan 200 ga o'zgarganda dispersiya qiymati 18,3 dan 3,5 ga keskin kamayadi. Bu oraliqdan boshqa oraliqlarda bunday keskin kamayish kuzatilmaydi. Oxirgi natija shuni ko'rsatadiki, chegara borki shundan boshlab natijaning aniqligi, dispersiya bilan ifodalanganda aytarli o'zgarmaydi.



4.2-rasm.



4.3-rasm.

Imitatsion modelning tatbiq qilinish xarajatlari tajribalar o‘tkazish soniga bog‘liq. Shuning uchun, natijani topishdagi katta xarajat bilan katta aniqlik (dispersiya kichik) orasidagi o‘rtacha yo‘lni topish muhimdir.

4. Yuzani baholash tarqoq bo‘lganligi sababli, modellashtirish bilan bog‘liq bo‘lgan tajriba natijalari ishonchli oraliqlar orqali ifodalanishi muhim bo‘lib, u haqiqiy qiymatdan qanchalik farq qilishini ko‘rsatib beradi. Ko‘rilayotgan misolda, agar A maydonning aniq qiymatini ifodalab N kuzatish natijasida $\bar{A}$ va s^2 lar mos ravishda o‘rtacha va dispersiyani aks ettirsa, u holda A uchun, $100(1-\alpha)$ foizli ishonchli interval

$$\bar{A}-(s/\sqrt{N})t_{\alpha/2,N-1} \leq A \leq \bar{A}+(s/\sqrt{N})t_{\alpha/2,N-1}$$

bo‘ladi, bu yerda $t\alpha/2, N-1$ bilan $N-1$ darajali erkinlikka ega bo‘lgan $t-$ taqsimotning $(100\alpha/2)$ foizli nuqtasi belgilangan. Bunda N kuzatuvlar sonini bildirsa, $n-$ modeldagi tajribalar sonini bildiradi.

4.4-jadval

Modeldagi tajribalar soni	$N=10$ *dagi 95 foizli ishonch oralig‘i*
100	$74,04 \leq A \leq 80,16$
200	$76,86 \leq A \leq 79,54$
500	$77,38 \leq A \leq 79,90$
10000	$77,26 \leq A \leq 79,48$
2000	$77,98 \leq A \leq 79,14$
5000	$78,08 \leq A \leq 78,76$
10000	$78,23 \leq A \leq 88,90$

4.4-jadvalda ko‘rilayotgan misolda tajribalar soni turli bo‘lganda ishonch oraliqlari 95 foiz bo‘lgan hollar keltirilgan. Bunda kuzatishlar soni bir xil $N=10$. (Hisoblash qanday borilganligini bilish uchun, 4.4-jadvalni tekshirib ko‘rish taklif etiladi.)

4.4-jadvalda keltirilgan natijalar shuni ko'rsatadiki, barcha ishonch oraliqlari aniq qiymat ($= 78654 sm^2$)ni o'z ichiga oladi. Tajribalar soni ortib, statsionar holga kelganda ishonch oraliqlari kichrayib boradi ($n = 100$ va $n = 10000$). Ixtiyoriy statistik tajribada kuzatishlar soni N kattalashishi bilan ishonch oralig'i kichiklashib borsa ham, modellashtirishga bog'liq bo'lgan tajribaning o'zigi xosligi, ishonch oralig'i modeldagi tajribalar soniga ham bog'liqdir. Shu sababli modeldagi tajribalar soni ortishi bilan natijalarning tarqoqligi kam bo'lib, yanada aniqroq yechim olinadi. Boshqacha aytganda modellashtirishning natijalarini yaxshilash uchun, statsionar holatni ta'minlovchi kuzatishgacha olib borish lozim.

Yuqorida ko'rilgan misolning maqsadi – imitatsion modellashtirish bu modelni yaratish va unga mos dastur yaratish bilan chegaralanmagan holda, modellashtirish statistik tajriba bo'lib, natijalarni shu nuqtayi nazardan qarash talab etiladi. Xususan, modellashtirish uchun, olib borilgan ixtiyoriy tajribada quyidagi savollarga javob berish lozim bo'ladi:

1. Statsionar holatga kelish uchun, tajribalar soni nechta bo'lishi kerak?

2. Qanday qilib statistik bog'liqsiz kuzatishlarni olish mumkin?

3. Xarajatlarni ma'qul darajada saqlab, aniqlikni ham yo'qotmagan holda modellashtirishning natijalarini qanday olish mumkin?

4. Ishonch oralig'ini zaruriy holatga keltirish uchun, nechta kuzatuv talab etiladi?

Bu masalalarni amalga oshirish oddiy emasligi ravshan.

Nazorat savollari

1. $[0, 1]$ oraliqdagi tasodifiy sonni oraliqni 100 ga ko'paytirish bilan $[0, 100]$ oraliqdan olinadigan tasodifiy songa o'tkazish mumkinmi?

2. [0, 1] oraliqdan tasodifiy sondan tashkil topgan sonlar ketma-ketligidan tanlama hosil qilish uchun, olingan taqsimot tekis taqsimlangan bo'lishi shartmi?

3. Imitatsion modellashtirish yordamida olingan natija modelning tajriba soniga bog'liq emasmi?

4. Ixtiyoriy imitatsion model statistik tajribadan iborat bo'lib, natija statistik xatolikdan iboratmi?

5. Imitatsion modelning natijasini aniqroq baholashda kuzatishni o'rtalatish orqali amalga oshirib bo'ladimi?

6. Modellashtirishda o'tish va statsionar holatlar chegarasini har vaqt aniq belgilash mumkinmi?

7. Takrorlashning asosiy afzalligi shundan iboratki, kuzatishlar statistik bog'liq emas, shu to'g'rimi?

8. Imitatsion modeldan foydalanishda unda modellashtirish oralig'ida paydo bo'ladigan barcha hodisalarni avvaldan generatsiya qilish shartmi?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

5.4. Imitatsion modellashtirish. Monte-Karlo usuli mavzusiga doir

1. Oshiq tashlaganda 1 va 6 raqamlari tushsa yutuq, aks holda yutqiziq bo'ladi: a) berilgan holatni ifodalovchi taqsimot aniqlansin; b) ushbu jarayon 10 marta qaytarilsa 1-jadvalning birinchi ustunidan foydalangan holda yutuq yoki yutqiziq bo'lishligi aniqlansin.

2. Mijozlarga xizmat ko'rsatish tizimiga kelish qonuni Puasson taqsimoti bo'lib, jadalligi soatiga 10 ta mijozga xizmat ko'rsatishdan iborat. Ammo tizim barcha mijozlarga xizmat ko'rsata olmasligi sababli har ikkinchi mijozga xizmat ko'rsatishga ruxsat berildi. 4.1-jadvalning birinchi ustunidan foy-

dalangan holda xizmat ko'rsatiladigan birinchi uchta mijozning kelish vaqtlari aniqlansin.

3. Xizmat ko'rsatish tizimida keyingi soatdagi xizmat ko'rsatish tezligi avvalgi soatdagi mijozlar soniga qarab tartibga solinadi. Odatda, mijozlar soni soatiga 5 ta bo'lib, ularning kelishi Puasson taqsimot qoniniga bo'ysunadi. 1-jadvalning 1-ustunidan foydalangan holda mijozlarni 1 va 2-soatlarda kelish soni aniqlansin.

4. 4.1-jadvalning 1-ustunidagi 30 ta sondan foydalanib,

$$\int_{3}^{6} x^2 dx$$

integralning qiymati baholansin.

5. 4.1-jadvalning 1-ustunidagi 30 ta sondan foydalanib tomonlari 2 sm bo'lgan teng tomonli uchburchakning yuzasini baholang. Olingan natijani uchburchak yuzining aniq qiymati bilan solishtiring.

VI BOB.
VARIATSION HISOB MASALASI

Ma'lumki, biz ko'rib kelgan funksiyalar, odatda, bitta yoki bir nechta erkli o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lar edi. Lekin ko'p masalalarda bunday funksiyalar tushunchasi yetarli bo'lmay qoladi: masalan, o'tkazgich bo'ylab elektr toki oqimi o'tganda o'tkazgich atrofida hosil bo'lgan elektromagnit maydonining kuchlanishi o'tkazgich ega bo'lgan egri chiziq shakliga bog'liq. Uchirilayotgan raketalar Yer sun'iy yo'ldoshlari va planetalararo kosmik kemalar sirtlarining shakllari ham katta ahamiyatga ega, ayniqsa yer atmosferasiga kirganda mumkin qadar kamroq qizish, atmosfera qarshiligini mumkin qadar kamroq sezish uchun, albatta, bu kemalarning shakllari katta ahamiyatga egadir. Funksional analiz kursida operatorlar, akslantirishlar, ko'p qiymatli funksiyalar haqidagi tushunchalar atroflicha o'rganib chiqiladi. Variatsion hisob fanida akslantirishlarning xususiy holi bo'lgan integral orqali berilgan funksionalning ekstremum masalasi o'rganiladi.

1-§. Variatsion hisobning sodda masalasi. Eyler tenglamasi

1-ta'rif. *Funksional fazo osti to'plamini haqiqiy sonlar to'plamiga akslantirishga funksional deb ataladi.*

Integral ko'rinishdagi funksional quyidagicha:

$$v[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx \tag{1.1}$$

berilgan bo'ladi. Bu yerda $F(x, y, y')$, $y = y(x)$ lar ma'lum funksiyalar sinfiga tegishli bo'lishadi. Bundan tashqari $y = y(x)$ funksiya quyidagi:

$$y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1 \tag{1.2}$$

chegaraviy shartlarni ham qanoatlantirish lozim.

Berilgan chegaraviy (1.2)-shartlarni qanoatlantiruvchi chiziqlar ichidan chiziqni topish kerakki, natijada (1.1)-funksional ekstremumga erishsin. Bu variatsion hisobning *eng sodda masalasi* deb ataladi.

Misol sifatida, variatsion hisobni shitob bilan rivojlanishiga turtki bergan, I. Bernulli tomonidan birinchi bor e'lon qilingan Braxistoxrona masalasini qaraylik.

Tekislikda, bir paytda vertikal va gorizantal chiziqlarda joylashmagan $A(x_0, y_0)$ va $B(y_0, y_1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi chiziq bo'ylab jism o'z og'irligi ta'sirida yuqoridan pastga qarab harakatlanadi. Savol: chiziq qanday shaklda bo'lganda jismning $B(y_1, y_1)$ nuqtaga kelish uchun, ketgan vaqti eng qisqa bo'ladi?

Berilgan A va B nuqtalar 1.1-rasmda ko'rsatilgan holatda bo'lishsin.

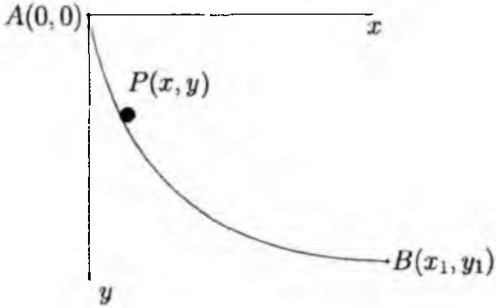
Fizik nuqtayi nazardan izlanayotgan chiziq to'g'ri chiziqning kesmasi bo'la olmaydi, chunki unda jismning tezligi sekin ortadi, bu holda A dan B ga kelish uchun ko'proq vaqt talab etiladi.

Izlanayotgan egri chiziq $y = y(x)$ bilan belgilansin. U holda tushayotgan jismning vertikal bo'yicha y masofa o'tgandagi tezligi $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$ga teng bo'ladi. Biz bilamizki, egri chiziqning elementar yoyi $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$ ga teng, shu sababli $dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$

hosil bo'ladi. Bundan umumiy vaqt T quyidagiga:

$$T[y] = \int_{0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx$$

teng bo'ladi. qilib quyidagi masalaga kelamiz: $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$ shartlarni qanoatlantiruvchi $y = y(x)$ funksiyalar ichidan (1.1)-funksionalga minimum beruvchi funksiyani toping.



1.1-rasm

Ko'rsatiladiki, egri chiziq sikloidadan iborat bo'lib, uning tenglamasi:

$$x = R(t - sint),$$
$$y = R(1 - cost)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda R iladigan aylana radiusidir.

Lemma(Lagranj). $[x_0, x_1]$ oralida uzluksiz bo'lgan $m(x)$ funksiya va shu oraliqda $C^1[x_0, x_1]$ sinfga tegishli $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\eta(x)$ funksiya uchun, ushbu:

$$\int_{x_0}^{x_1} m(x)\eta(x)\, dx = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $m(x) \equiv 0$ bo'ladi.

Isbot. Teskarisidan faraz qilish usulidan foydalanamiz, ya'ni (x_0, x_1) oraliqda ξ nuqta topilsinki, $m(\xi) \neq 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Aniqlik uchun, $m(\xi) > 0$ deb olaylik. U holda $m(x)$ ning uzluksizligidan bu nuqtani o'z ichiga olgan $(\xi_0, \xi_1) \subset [x_0, x_1]$ oraliq topiladiki, unda $m(x) > 0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. $\eta(x)$ funksiyani quyidagicha qurib olamiz: $\eta_0(x) = (x - \xi_0)^2(x - \xi_1)^2$, agar $x \in (\xi_0, \xi_1)$; $\eta_0(x) = 0$, agar $x \overline{\in} (\xi_0, \xi_1)$. Bu $\eta_0(x)$ funksiya lemma shartlarini qanoatlantiradi. Bulardan quyidagini hosil qilamiz:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} m(x)\eta_0(x)\,dx = \int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} m(x)\eta_0(x)\,dx > 0$$

bu esa lemma shartiga zid. Demak, farazimiz noto'g'ri. Bundan kelib chiqadiki $[x_0, x_1]$ oraliqda $m(x) \equiv 0$. Lemma isbot bo'ldi.

Eyler tenglamasi

Integral ko'rinishdagi funksionalning ekstremumini topish uchun, zaruriy shartlarni aniqlash masalasiga o'taylik. Faraz qilaylik, $v[y]$ funksional (1.2)-shartlarni qanoatlantiruvchi $y(x)$ egri chiziq ustida ekstremumga erishsin. Berilgan egri chiziq $y(x)$ va unga ma'lum ma'noda yaqin bo'lgan $\bar{y}(x)$ egri chiziqlar ustidagi funksional qiymatlarini mos ravishda $v[y]$, $v[\bar{y}]$ bilan belgilaymiz. U holda $v[y]$ funksional orttirmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned} \triangle v &= \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}, \bar{y}')\,dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \\ &= \int\limits_{x_0}^{x_1} [F(x, \bar{y}, \bar{y}') - F(x, y, y')]\,dx. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Oxirgi integral belgisi ostidagi ifodaga o'rta qiymat haqidagi teoremani qo'llab quyidagini hosil qilamiz:

$$F(x, \bar{y}, \bar{y}') - f(x, y, y') = F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y' + \delta y') +$$

$$+F(x,y,y'+\delta y')-F(x,y,y')=\frac{\partial F(x,y+\theta\delta y,y'+\delta y')}{\partial y}(\bar{y}-y)+$$

$$+\frac{\partial F(x,y,y'+\theta_1\delta y')}{\partial y'}(\bar{y}'-y')=\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\delta y'+r$$

bu yerda r – qoldiq, $\delta y=\bar{y}-y$, $\delta y'=\bar{y}-y'$ belgilashlar kiritilgan.

Endi buni (1.3) ga olib borib qo'ysak quyidagini hosil qilamiz:

$$\triangle v=\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\Big)\,dx+R,$$

bunda R qo'shiluvchi δy va $\delta y'$ larga nisbatan cheksiz kichik miqdordir. Oxirgi orttirmaning bosh qismi bo'lgan:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\Big)\,dx$$

integral *funksionalning variatsiyasi* deyiladi va u δv bilan belgilanadi. Variatsiyani ifodalovchi integralni bo'laklab integrallash va $\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0$ ni hisobga olgan holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\delta v=\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\Big]\delta y\,dx.$$

Bundan kelib chiqadiki, funksionalning ekstremumi, δy va $\delta y'$ lar kichik miqdorlar bo'lganda, δv variatsiyaning ishorasi bilan aniqlanadi. Ammo δv variatsiya δy va $\delta y'$ lar hisobiga turli ishoraga ega bo'lishi mumkin, shu sababli δv variatsiya, demak, integralning qiymati nolga teng bo'lishi kerak. Ya'ni:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\Big]\delta y\,dx=0$$

tenglik funksionalning ekstremumga erishishining zaruriy sharti bo‘ladi.

Oxirgi tenglikka Lagranj lemmasini qo‘llash orqali quyidagi:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

ikkinchi tartibli differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu differensial tenglama *Eyler tenglamasi* deb ataladi. Uning yechimlari *ekstremallar*, (1.2)-chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi exstremal esa *joiz ekstremal* deb ataladi.

2-§. Lagranj masalasi

Masalaning qo‘yilishi. Variatsion hisobning shartli ekstremum masalasida funksional aniqlangan egri chiziqlar chegaraviy shartlardan tashqari yana boshqa qo‘shimcha shartlarni ham qanoatlantirishi kerak. Bu shartlar turlicha ko‘rinishda bo‘lib, biz ularning tenglamalar ko‘rinishda berilgan holi bilan tanishib chiqamiz. Avval tenglamalarda funksiyalarning hosilalari ishtirok etmagan (golonom bo‘lgan bog‘lanish), keyin hosilalari ishtirok etgan (golonom bo‘lmagan bog‘lanish) hollari ko‘rib chiqiladi.

Quyidagi:

$$\begin{gathered} y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}, \\ y_1(x_1) = y_{11},\ y_2(x_1) = y_{21}, \ldots, y_n(x_1) = y_{n1} \end{gathered} \tag{2.1}$$

chegaraviy shartlar va

$$g_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,\ i = 1, 2, .., k < n \tag{2.2}$$

bog‘lanishlar bo‘lganda:

$$v[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')dx \tag{2.3}$$

funksionalning ekstremumini topish masalasiga *golonom bog'lanishli Lagranj* masalasi deb ataladi.

(2.2)-shartlar bog'liqsiz bo'lishligi uchun, ixtiyoriy $y_1, y_2, ..., y_n$ larda

$$rang \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_n} \end{pmatrix} = k$$

bo'lishlikni talab etish yetarli.

qilib (2.3)-funksional nafaqat (2.1)-chegaraviy shartlarni, shu bilan birga (2.2)-bog'lanishlarni ham qanoatlantiruvchi joiz funksiyalar ustida ko'riladi. Shuning uchun, (2.1)-chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ekstremallar, (2.2)-bog'lanishlar orqali aniqlanadigan, $n-k$ o'lchamli ko'pxillikka tegishli bo'lishi kerak.

(2.1)-chegaraviy shartlar quyidagi:

$$y_{k+1}(x_0) = y_{k+10},\ y_{k+2}(x_0) = y_{k+20}, ..., y_n(x_0) = y_{n0},$$

$$y_{k+1}(x_1) = y_{k+11},\ y_{k+2}(x_1) = y_{k+21}, ..., y_n(x_1) = y_{n1}$$

ko'rinishda ham berilishi mumkin, unda yetishmayotgan chegaraviy shartlar (2.2)-bog'lanishlar yordamida topiladi.

Lagranj masalasi ko'p o'zgaruvchili shartli ekstremum masalasi kabi yechiladi. Buning uchun, yangi:

$$\begin{aligned} v^*[y_1, y_2, ..., y_n] = \int\limits_{x_0}^{x_1} [F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') + \\ + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x) g_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)\Bigg] dx \end{aligned} \tag{2.4}$$

ko'rinishdagi funksional kiritamiz, bu yerda $\lambda_i(x)(i = 1, 2, ..., k)$ – lar aniqlanishi lozim bo'lgan funksiyalardir.

Bu (2.4)-funksionalga nisbatan shartsiz ekstremum masalasi yechiladi, shu bilan birga $y_j(x)(j = 1, 2, ..., n)$ va $\lambda_i(x)(i =$

$1, 2, ..., k)$ funksiyalarni aniqlash kerak bo‘ladi. (2.4)-funksional uchun, Eyler tenglamasi quyidagi:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0, \ j = 1, 2, ..., n, \\ g_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0, \ i = 1, 2, ..., k. \end{cases} \quad (2.5)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

(2.5)-sistema $n + k$ ta tenglamadan iborat bo‘lib, shuncha noma’lumdan tashkil topgan. Differensial tenglamalar sistemasini integrallanganda $2n$ ta o‘zgarmas sonlar bo‘lib, ularning qiymatlari (2.1)-chegaraviy shartlardan aniqlanadi.

Agar (2.4) funksional $y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ egri chiziqda shartsiz ekstremumga erishsa, u holda (2.3) funksional $y(x)$ da shartli ekstremumga erishadi. Haqiqatan, agar $y(x)$ da (2.4) funksional shartsiz ekstremumga erishgan bo‘lsa, unda u (2.5) – Eyler tenglamasini qanoatlantiradi. Demak, $v[y] = v^*[y]$ bo‘ladi. Shu bilan birga, agar $y(x)$ (2.4) funksionalga shartsiz ekstremum bersa, u holda (2.2) bog‘lanish orqali torroq bo‘lgan funksiyalar sinfida (2.3) funksionalga ham ekstremum beradi. Teskari tasdiqni isbotlash murakkabroq bo‘lganligi sababli bu yerda u ko‘rsatilmaydi.

Yuqorida ko‘rsatilgan usul bilan boshlang‘ich masalaning barcha yechimlari olinishi mumkinmi savoliga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. Agar (2.3) funksional (2.2) shart ostida $y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ egri chiziqda ekstremumga erishsa, u holda $\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_k(x)$ ko‘paytuvchilar mavjudki, natijada $y(x)$ (2.5)-Eyler tenglamasini qanoatlantiradi.

Isbot. Avval (2.3)-funksionalning variatsiyasini hisoblaymiz:

$$\delta v[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial F}{\partial y_j'} \delta y_j' \right) dx,$$

bu yerda δy_j y_j funksiyaning variatsiyasi bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\delta y_j(x_0) = \delta y_j(x_1) = 0, \; j = 1, 2, ..., n.$$

Yuqoridagi ifodani chegaraviy shartlarni hisobga olgan holda, bo'laklab integrallash orqali quyidagini hosil qilamiz:

$$\delta v[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} \right) \delta y_j \, dx.$$

y_j funksiyalar bog'lanish tenglamalarini qanoatlantiradi, shu sababli δy_j variyatsiyalar ixtiyoriy emas. Demak, bu yerda variatsion hisobning asosiy lemmasini (Lagranj lemmasi) qo'llab bo'lmaydi. Bu bog'lanishni aniqlash uchun,

$$g_i(x, y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, ..., y_n + \delta y_n) = 0, \; i = 1, 2, ..., k$$

tengliklarning chap tomonini Teylor qatoriga yoyib δy_j larga nisbatan chiziqli qismini olamiz:

$$g_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0, \; i = 1, 2, .., k < n,$$

bog'lanishlarni hisobga olgan holda quyidagiga ega bo'lamiz

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \delta y_j = 0, \; i = 1, 2, ..., k. \qquad (2.6)$$

Bu δy_j larga nisbatan bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasidir. Shartga asosan $\left(\frac{D(g_1, g_2, ..., g_k)}{D(y_1, y_2, ..., y_k)} \right)$ jadvalning rangi k ga teng, shu sababli $\delta y_{k+1}, \delta y_{k+2}, ..., \delta y_n$ larni erkin o'zgaruvchilar deb hisoblash mumkin. (2.6)-sistemaning har bir tenglamasini mos ravishda $\lambda_j(x)$ ga ko'paytirib, $[x_0, x_1]$ oraliqda integrallab, so'ng ularni $\delta v[y]$ ifodaga qo'shib quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x) \frac{\partial g_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} \right) \delta y_j \, dx = 0.$$

Endi $\lambda_j(x)$ ko'paytuvchilarni tanlaymizki, natijada integral ostidagi ifodaning birinchi k ta qo'shiluvchisi nolga aylansin:

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x)\frac{\partial g_i}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_j}=0,\ j=1,2,...,k. \qquad (2.7)$$

Ushbu tenglamalar sistemasi $\lambda_j(x)$ noma'lumlarga nisbatan yagona yechimga ega. Bu inobatga olinsa ekstremumga erishishning zaruriy sharti quyidagicha bo'ladi:

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x)\frac{\partial g_i}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_j}\right)\delta y_j\,dx=0.$$

Bu ifodada δy_j lar ixtiyoriy, demak, variatsion hisobning asosiy lemmasiga asosan,

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x)\frac{\partial g_i}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_j}=0,\ j=k+1,k+2,...,n \qquad (2.8)$$

bo'ladi.

(2.7) va (2.8) tengliklardan kelib chiqadiki, (2.3)-funksionalga shartli ekstremum beruvchi $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar yordamchi $v^*[y]$ funksionalga mos Eyler tenglamasini qanoatlantirar ekan. Teorema isbot bo'ldi.

Endi (2.2)-ko'rinishdagi bog'lanishlar noma'lum funksiyalarning hosilasiga bog'liq (golonom bo'lmagan) bo'lgan holni qaraymiz. Unda masala quyidagicha qo'yiladi: Quyidagi

$$\begin{array}{l} y_1(x_0)=y_{10},\ y_2(x_0)=y_{20},...,y_n(x_0)=y_{n0}, \\ y_1(x_1)=y_{11},\ y_2(x_1)=y_{21},...,y_n(x_1)=y_{n1}, \end{array} \qquad (2.9)$$

chegaraviy shartlar va

$$g_i(x,y_1,y_2,...,y_n,y'_1,y'_2,...,y'_n)=0,\ i=1,2,..,k<n, \qquad (2.10)$$

bog‘lanishlar bo‘lganda:

$$v[y_1, y_2, ..., y_n] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx \qquad (2.11)$$

funksionalning ekstremumi topilsin.

Bunda (2.10)-shartlar bog‘liqsiz, buning uchun, ixtiyoriy $y_1, y_2, ..., y_n$ da:

$$rang \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n'} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_n'} \end{pmatrix} = k$$

bo‘lishlik talab etilishi yetarli.

Xuddi avvalgi masala kabi, bunda ham (2.9)–(2.11)-shartli masala Lagranj ko‘paytuvchilari $\lambda_j(x)$ lar yordamida shartsiz ekstremum masalasiga keltiriladi:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big[F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') + \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x) g_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') \Big] dx, \end{aligned} \qquad (2.12)$$

ko‘rinishdagi funksional kiritamiz, bu yerda $\lambda_i(x)(i = 1, 2, ..., k)$lar aniqlanishi lozim bo‘lgan funksiyalardir.

Bu (2.12)-funksionalga nisbatan shartsiz ekstremum masalasi yechiladi, shu bilan birga $y_j(x)(j = 1, 2, ..., n)$ va $\lambda_i(x)(i = 1, 2, ..., k)$ funksiyalarni aniqlash kerak bo‘ladi. (2.12)-funksional uchun, Eyler tenglamasi quyidagi:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y_j'} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y_j'} \right] = 0, j = 1, 2, ..., n, \\ &g_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \ i = 1, 2, ..., k \end{aligned} \qquad (2.13)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Avvalgiga o‘xshash bu yerda ham $n+k$ ta noma’lum $y_1, y_2, ..., y_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ va shuncha tenglamaga ega bo‘lamiz. Tenglamalarni yechishdan kelib chiqadigan $2n$ ta o‘zgarmaslarni aniqlash uchun, (2.9)- chegaraviy shartlardan foydalaniladi.

Masala. Tebranuvchi jismning harakat dinamikasi quyidagi:

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= y_2, \\ \dot{y_2} &= -ky_1 - \delta y_2 + u \end{aligned}$$

tenglamalar sistemasi orqali tavsiflanadi. Bu yerda y_1 – jism holatini, y_2 – tezligini k – ishqalanish koeffitsiyentini, δ – elastiklik koeffitsiyentini, u – tashqi ta’sir kuchini ifodalaydi.

Chegaraviy shartlarni quyidagicha olamiz:

$$y_1(0) = y_{10},\ y_2(0) = y_{20},\ y_1(\infty) = y_2(\infty) = 0. \qquad (2.14)$$

Ekstremumi aniqlanishi lozim bo‘lgan funksional quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin:

$$v[y_1, y_2] = \int_0^\infty (\alpha y_1^2 + \beta y_2^2 + \gamma u^2) dt,$$

bu yerda $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$ – o‘zgarmas sonlar. Bu Lagranj masalasi bo‘lib yordamchi funksionalni quramiz:

$$v^*[y_1, y_2] = \int_0^\infty [\alpha y_1^2 + \beta y_2^2 + \gamma u^2 + \lambda_1(\dot{y_1} - y_2) + \lambda_2(\dot{y_2} + ky_2 + \delta y_1 - u)] dt.$$

Ushbu funksional uchun, Eyler tenglamasi:

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= y_2, \\ \dot{y_2} &= -ky_1 - \delta y_2 + u, \\ \dot{\lambda_1} &= 2\alpha y_1 + k\lambda_2, \\ \dot{\lambda_2} &= 2\beta y_2 - \lambda_1 + \beta\lambda_2, \\ 2\gamma u &- \lambda_2 = 0 \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Oxirgi tenglikdan quyidagiga:

$$u = \frac{1}{2\gamma}\lambda_2$$

ega bo'lamiz. Buni (2.15) ning ikkinchi tenglamasiga olib borib qo'yish bilan quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= y_2, \\ \dot{y_2} &= -ky_1 - \delta y_2 + \tfrac{1}{2\gamma}\lambda_2, \\ \dot{\lambda_1} &= 2\alpha y_1 + k\lambda_2, \\ \dot{\lambda_2} &= 2\beta y_2 - \lambda_1 + \beta\lambda_2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

(2.16)-sistemaning xarakteristik tenglamasi quyidagi:

$$det(A - \mu E) = \mu^4 + 2\left(k - 2\delta^2 - \frac{\beta}{2\gamma}\right)\mu^2 + \frac{\alpha}{\gamma} + k^2 = 0 \tag{2.17}$$

ko'rinishda bo'ladi.

$$B = k^2\left(1 - \frac{\delta^2}{2k}\right) - \frac{\beta}{2\gamma},\ C = \frac{\alpha}{\gamma} + k^2 > 0$$

belgilashlarni kiritamiz. B va C sonlari o'rtasidagi munosabatga ko'ra quyidagi hollar bo'lishi mumkin

1-hol. $B^2 \geq C$ bo'lsin, u holda agar $B > 0$ bo'lsa (17-xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari mavhum bo'lib optimal bosharuv yo'q, agar $B < 0$ bo'lsa ildizlar quyidagi:

$$\mu_{1,2} = \pm\theta_1;\ \mu_{3,4} = \pm\theta_2$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda

$$\theta_1 = \sqrt{-B + \sqrt{B^2 - C}},\ \theta_1 = \sqrt{-B - \sqrt{B^2 - C}}.$$

(2.16)-tenglamalar sistemasining yechimida:

$$y_1(t) = c_1 e^{\theta_1 t} + c_2 e^{-\theta_1 t} + c_3 e^{\theta_2 t} + c_4 e^{-\theta_2 t}$$

bo'ladi. (2.14)-chegaraviy shartga asosan $c_1 = c_3 = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t)$$

dan foydalanib, quyidagi:

$$y_1(t) = c_2e^{-\theta_1 t} + c_4e^{-\theta_2 t},$$

$$y_2(t) = -c_2\theta_1 e^{-\theta_1 t} + c_4\theta_2 e^{-\theta_2 t}$$

tenglamalar sistemasidan $c_2{}^{-\theta_1 t}$ va $c_2{}^{-\theta_1 t}$ larni aniqlab $\dot{y}_2 = c_2\theta_1^{2-\theta_1 t} + c_4\theta_2^{2-\theta_2 t}$ ga qo'yilsa,

$$\dot{y}_2 = -\theta_1\theta_2 y_1 - (\theta_2 + \theta_1)y_2$$

hosil bo'ladi.

Buni (2.15)-tenglamalar sistemasining ikkinchisiga olib borib qo'yish orqali boshqaruvning sintez ifodasi hosil bo'ladi:

$$u = -(\theta_1\theta_2 - k)y_1 - (\theta_1 + \theta_2 - \delta)y_2.$$

2-hol. $B^2 < C$ bo'lsin. U holda (2.17)-xarakteristik tenglamaning ildizlari

$$\mu_{1,2} = \eta \pm i\xi; \ \mu_{3,4} = -\eta \pm i\xi$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda

$$\eta = \sqrt{\frac{\sqrt{C} - B}{2}}, \ \xi = \sqrt{\frac{\sqrt{C} + B}{2}}.$$

Bu holda (2.16)-tenglamalar sistemasidan

$$y_1(t) = e^{\eta t}(c_1 cos\,\xi t + c_2 sin\,\xi t) + e^{-\eta t}(c_3 cos\,\xi t + c_4 sin\,\xi t)$$

ni hosil qilamiz. (2.14)-chegaraviy shartga asosan, $c_1 = c_2 = 0$ kelib chiqadi.

Yuqoridagiga o‘xshash $\dot{x}_2$ ni x_1, x_2 o‘zgaruvchilar orqali ifodalab, buni (2.15) tenglamalar sistemasining ikkinchisiga olib borib qo‘yish orqali boshqaruvning sintez ifodasi hosil bo‘ladi:

$$u = -(\eta^2 + \xi^2 - k)y_1 - 2(\eta - \frac{\delta}{2})y_2.$$

Izoperimetrik masala. Umumiy holda chegaralari mahkamlangan izoperimetrik masala quyidagicha ta’riflanadi:

Chegaraviy

$$\begin{aligned} &y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}, ..., y_n(x_0) = y_{n0}, \\ &y_1(x_1) = y_{11},\ y_2(x_1) = y_{21}, ..., y_n(x_1) = y_{n1} \end{aligned} \tag{2.18}$$

va izoperimetrik

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx = \ell_i,\ i = 1, 2, .., k \tag{2.19}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalar ichidan,

$$v[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx \tag{2.20}$$

funksionalga ekstremum beruvchilari topilsin.

Izoperimetrik (2.18)–(2.20)-masala shartli ekstremum masalasi bo‘lib, Lagranj ko‘paytuvchilar kiritish orqali uni shartsiz ekstremum masalasiga keltiriladi. Bunda shartsiz ekstremum masalasi quyidagi funksionalga:

$$v^*[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} \Big[F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')\Big] dx$$

nisbatan olib boriladi, bunda $\lambda_i = const$, $i = 1, 2, ..., k$.

Demak, berilgan (2.18)–(2.20)-izoperimetrik masalani yechish uchun, funksionalning Eyler tenglamasini tuzish kerak bo'ladi. Bunda Eyler tenglamasini yechishdan hosil bo'ladigan o'zgarmas sonlar va λ_i lar chegaraviy (2.18) va (2.19)-shartlardan topiladi.

Misol. (x_0, y_0) va (x_1, y_1) nuqtalarni birlashtiruvchi uzunligi ℓ ga teng bo'lgan egri chiziqni topingki, u bilan absissa o'qi orasidagi soha eng katta bo'lsin. Bu yerda faraz etiladiki: $y_0 > 0$, $y_1 > 0$.

Bu izoperimetrik masala bo'lib, u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$$

chegara va

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \ell \tag{2.21}$$

shart ostida

$$v[y] = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx$$

funksionalning maksimumini toping.

Yuqoridagi yechish usuliga asosan yordamchi:

$$v^*[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

funksional quriladi va u shartsiz ekstremum masalasi kabi yechiladi.

Bu funksional uchun, Eyler tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F_1}{\partial y'} = 0,$$

bu yerda $F_1 = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$

Eyler integralining xususiy ko‘rinishlariga asosan, ushbu funksionalning Eyler tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$y+\lambda\sqrt{1+y'^2}-\frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1.$$

Parametr kiritish usuli bilan, bu tenglamaning yechimini topish mumkin:

$$x-c_2=\lambda sin\,t,\ \ y-c_1=-\lambda cos\,t$$

yoki

$$(x-c_2)^2+(y-c_1)^2=\lambda^2.$$

Chegaraviy shartni hisobga olgan holda quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(x-\frac{B^2x_0+By_0+x_0-A+B\sqrt{\lambda^2(B^2+1)-(y_0B-A)^2}}{B^2+1}\right)^2$$

$$+\left(y-\frac{y_0+AB+\sqrt{\lambda^2(B^2+1)-(y_0B-A)^2}}{B^2+1}\right)^2=\lambda^2.$$

λ soni (2.21)-tenglikdan aniqlanadi. Bu yerda

$$A=\frac{1}{2}(x_1-x_0)-\frac{y_1^2-y_0^2}{2(x_1-x_0)},\ \ B=-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}.$$

Demak, berilgan misolning yechimi markazi:

$$\left(\frac{B^2x_0+By_0+x_0-A+B\sqrt{\lambda^2(B^2+1)-(y_0B-A)^2}}{B^2+1},\right.$$

$$\left.\frac{y_0+AB+\sqrt{\lambda^2(B^2+1)-(y_0B-A)^2}}{B^2+1}\right)$$

nuqtada radiusi λ ga teng bo‘lgan aylana yoyidan iborat ekan.

3-§. Bols va Mayer masalalari

Mayer masalasi shartli ekstremum masalasi guruhiga kiradi. Quyidagi:

$$\begin{aligned} &y_0(x_0) = y_{00},\ y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}, ..., y_n(x_0) = y_{n0}, \\ &y_1(x_1) = y_{11},\ y_2(x_1) = y_{21}, ..., y_n(x_1) = y_{n1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

chegaraviy shartlar va

$$g_i(x, y_0, y_1, y_2, ..., y_n, y_0', y_1', y_2', ..., y_n') = 0,\ i = 1, 2, .., k \tag{3.2}$$

bog'lanishlar bo'lganda:

$$y_0(x)$$

ni $x = x_1$ da ekstremumini topish masalasiga *Mayer masalasi* deb ataladi. Mayer masalasini Lagranjning shartli ekstremum masalasiga keltirish mumkin: (3.1)-chegaraviy va (3.2)-bog'lanish shartlarini bajaruvchi funksiyalardan $(y_0, y_1, y_2, ..., y_n)$ ni ajratib olish kerakki, natijada:

$$\int_{x_0}^{x_1} y_0'(x)\, dx$$

funksional ekstremumga erishsin.

Aksincha, Lagranj masalasida, $y_0(x_0) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi, yangi $y_0(x)$ funksiyani quyidagi ko'rinishda:

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} F(t, y_1(t), ..., y_n(t), y_1'(t), ..., y_n'(t))dt,\ y_0(x_0) = 0$$

kiritish bilan Lagranj masalasini Mayer masalasiga keltirish mumkin. Shu ma'noda Mayer va Lagranj masalalari ekvivalent hisoblanadi.

Mayer masalasini yechish uchun, Lagranjning aniqmas koeffitsiyentlar usuli ishlatiladi. Ya'ni Mayerning shartli ekstremum masalasi quyidagicha:

$$v_1[y_0, y_1, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(x) g_j(x, y_0, y_1, ..., y_n, y_0', y_1', ..., y_n') dx$$

shartsiz ekstremum masalasiga keltiriladi.

$n + k + 1$ ta noma'lum bo'lgan $y_0, y_1, y_2, ..., y_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ funksiyalarni topish uchun, $n + 1$ ta

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y_j'} = 0, \ j = 0, 1, ..., n \tag{3.3}$$

Eyler tenglamasi va (3.2) da k ta bog'lanish bor.

(3.2) va (3.3)-tenglamalarni integrallashdan kelib chiqadigan o'zgarmaslar (3.1)-chegaraviy shartlardan aniqlanadi.

Misol. Tushirish apparatini yumshoq qo'ndirish masalasini ko'raylik. Uning harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \ \frac{dy_2}{dt} = \frac{cu}{m} - g, \tag{3.4}$$

bu yerda $F = cu$ – tortish kuchi, m – apparatning massasi, g – og'irilik kuchining tezlanishi. Minimum qilinishi lozim bo'lgan funksional sifatida quyidagi olinadi:

$$v[y_1, y_2, u] = \int_0^T u^2 dt. \tag{3.5}$$

Apparat yumshoq qo'nishi uchun, quyidagi chegaraviy shartlarni olamiz:

$$y_1(0) = y_{10}, \ y_2(0) = y_{20}, \ y_1(T) = 0, \ y_2(T) = 0. \tag{3.6}$$

Boshqaruv uchun, quyidagi ko'rinishda chegara berilgan: $0 \leq u \leq u_0$. Ushbu masalani Mayer masalasiga keltiramiz. Buning uchun, yangi o'zgaruvchi:

$$y_0(t) = \int\limits_0^t u^2 dt$$

kiritamiz. U holda u:

$$y_0(0) = 0 \tag{3.7}$$

chegaraviy va

$$\frac{y_0}{dt} = u^2(t) \tag{3.8}$$

tenglamani qanoatlantiradi. Bundan tashqari $y_0(T) = v[y_1, y_2, u]$ bo'ladi. qilib: (3.6), (3.7)-chegaraviy, (3.4), (3.8)-tenglamalarni qanoatlantiruvchi va $y_0(t)$ koordinatasi $t = T$ da minimumga erishuvchi bo'lakli-silliq $y(t) = (y_0(t), y_1(t), y_2(t))$ vektor funksiyani topish kerak bo'lgan Mayer masalasiga kelamiz.

Mayer masalasini yechish usuliga muvofiq quyidagi:

$$\begin{gathered} v_1[y_0(t), y_1(t), y_2(t), u] = \int\limits_0^T \Big[\lambda_0(\dot{y}_0 - u^2) + \\ +\lambda_1(\dot{y}_1 - y_2)\lambda_2\Big(\dot{y}_2 - \tfrac{cu}{m} + g\Big)\Big] dt. \end{gathered} \tag{3.9}$$

yordamchi funksionalni quramiz.

(3.9)-funksional uchun, Eyler tenglamasi quyidagi:

$$\dot{\lambda}_0 = 0, \;\; \dot{\lambda}_1 = -\lambda_1, \;\; 2\lambda_0 u - \frac{c}{m}\lambda_2 = 0 \tag{3.10}$$

ko'rinishda bo'ladi. (3.10)-sistemaning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{gathered} \lambda_0 = \lambda_{00}, \;\; \lambda_1 = \lambda_{10}, \;\; \lambda_2 = -\lambda_{10}t + \lambda_{20}, \\ u = \frac{c\lambda_2}{2\lambda_0 m} = \frac{c(-\lambda_{10}t + \lambda_{20})}{2\lambda_{00}m}, \;\; \lambda_{00} \neq 0. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Boshqaruvga qo'yilgan shart va (3.11) dan ko'rinib turibdiki, u bo'lakli – chiziqli funksiya bo'lar ekan.

Endi (3.5)-funksionalni minimumlashtiruvchi bo'lakli-o'zgarmas boshqaruv funksiyasini topish bilan shug'ullanamiz. Buning uchun, $u = ku_0$ deb olamiz, bu yerda $1 \leq k \leq 1$. U holda (3.4) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$y_1 - y_{10} = \frac{y_2^2 - y_{20}^2}{2} \left(\frac{cku_0}{m} - g \right).$$

Harakatning oxirida apparatni yumshoq tushirish sharti $y_1(T) = y_2(T) = 0$ bajarilishligi uchun:

$$\frac{cku_0}{m} > g$$

tengsizlikning o'rinli bo'lishligi zarur. Yoki

$$\frac{cku_0}{m} = \omega$$

belgilashni kiritib quyidagi:

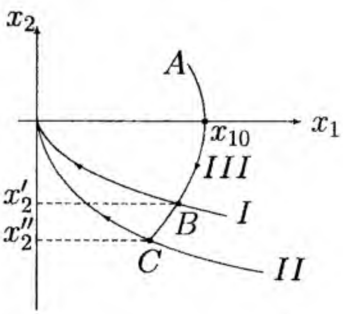
$$\omega > \frac{1}{k} \tag{3.12}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Oxirgi tengsizlik (3.12) dan k ning o'zgarish oralig'ini aniqlaymiz:

$$\frac{1}{\omega} < k \leq 1.$$

3.1-rasmda boshqaruvning turli qiymatlariga mos keluvchi trayektoriyalar keltirilgan.



3.1-rasm

I trayektoriya $u = ku_0$ ga, bunda $1/\omega < k < 1$; II trayektoriya $u = u_0$ boshqaruvga va III trayektoriya $u = 0$ boshqaruvga mos keladi. III trayektoriya bo'yicha harakatda (3.5)-funksionalning qiymati quyidagiga:

$$v[y_1, y_2] = \int_0^{t_1} u^2 dt = 0$$

teng bo'ladi, bu yerda t_1 III trayektoriya bo'yicha harakat vaqti. (3.5)-funksionalni minimallashtirish maqsadida harakatning oxirgi bosqichida k ning qiymatini tanlaymiz.

Faraz qilaylik, harakat $A(y_{10}, 0)$ nuqtadan boshlangan bo'lsin. U holda III trayektoriyaning tenglamasi:

$$y_1 - y_{10} = -\frac{y_2^2}{2g};$$

I trayektoriyaniki:

$$y_1 = \frac{y_2^2}{2\left(\frac{cku_0}{m} - g\right)};$$

va II trayektoriyaniki:

$$y_1 = \frac{y_2^2}{2\left(\frac{cu_0}{m} - g\right)}.$$

III trayektoriyaning I va II trayektoriyalar bilan kesishish nuqtalari B va C larni aniqlaymiz:

$$y_2' = \sqrt{\frac{2y_{10}g\left(\frac{cku_0}{m}-g\right)}{\frac{cku_0}{m}}},$$

$$y_2'' = -\sqrt{\frac{2y_{10}g\left(\frac{cu_0}{m}-g\right)}{\frac{cu_0}{m}}}.$$

I trayektoriya bo'yicha B nuqtadan koordinata boshigacha borish uchun, zarur bo'lgan vaqt:

$$t_2' = -\frac{y_2'}{\frac{cku_0}{m}-g} = \sqrt{\frac{2y_{10}g}{\frac{cku_0}{m}\left(\frac{cku_0}{m}-g\right)}}$$

ga teng bo'ladi.

II trayektoriya bo'yicha C nuqtadan koordinata boshigacha borish uchun, zarur bo'lgan vaqt:

$$t_2'' = -\frac{y_2''}{\frac{cu_0}{m}-g} = \sqrt{\frac{2y_{10}g}{\frac{cu_0}{m}\left(\frac{cu_0}{m}-g\right)}}.$$

ga teng bo'ladi.

ABO trayektoriyada (3.5)-funksionalning qiymati:

$$v' = \int_0^{t_2'} k^2u_0^2 dt = k^2u_0^2\sqrt{\frac{2y_{10}g}{\frac{cku_0}{m}\left(\frac{cku_0}{m}-g\right)}}$$

ga teng bo'ladi.

ACO trayektoriyada (3.5)-funksionalning qiymati:

$$v'' = \int_0^{t_2'} u_0^2 dt = u_0^2\sqrt{\frac{2y_{10}g}{\frac{cu_0}{m}\left(\frac{cu_0}{m}-g\right)}},$$

ga teng bo'ladi.

$$\frac{v''}{v'} = \sqrt{\frac{cku_0 - mg}{k^3(cu_0 - mg)}} = \sqrt{\frac{k\omega - 1}{k^3(\omega - 1)}} \tag{3.13}$$

nisbat maksimum bo‘ladigan k ning qiymatini topamiz.

(3.13) nisbatning k bo‘yicha hosilasi

$$\frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{v''}{v'}\right] = \frac{-2k\omega + 3}{2\sqrt{k^5(\omega - 1)(k\omega - 1)}} = 0$$

ni nolga tenglashtirish bilan, unga nisbatga maksimum beruvchi k ning qiymatini topamiz: $\bar{k} = 3/2\omega$.

$k = \bar{k}$ da (3.13) nisbatning qiymatini hisoblaymiz:

$$\left.\frac{v''}{v'}\right|_{k=\bar{k}} = \frac{2\omega}{3}\sqrt{\frac{\omega}{3(\omega - 1)}}.$$

qilib, (3.5)-funksional bo‘lakli – o‘zgarmas boshqaruv

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & \text{agap} \quad t \in [0, t_1] \\ \bar{k}u_0, & \text{agap} \quad t \in [t_1, T] \end{cases}$$

da minimumga erishadi, bu yerda $\bar{k} = \frac{3}{2\omega}$, $\omega = \frac{cu_0}{mg}$.

Bols masalasi

Masalaning qo‘yilishi. Quyidagi:

$$v[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx + f(y(x_0),\ y(x_1)) \longrightarrow extr, \tag{3.14}$$

ko‘rinishdagi variatsion hisob masalasiga *Bols masalasi* deb ataladi. Bu yerda $F = F(x, y, y')$ – uch o‘zgaruvchili, $f = f(y_0, y_1)$ – esa ikki o‘zgaruvchili funksiyalardir. Berilgan funksional $v[y]$ ning aniqlanish sohasi $C^1([x_0, x_1])$ bo‘lib, $[x_0, x_1]$ oraliq fiksirlangan.

Bols masalasi variatsion hisobning sodda masalasi hisoblanadi.

Bunda F funksiya integrant, f funksiya terminant $v[y]$ funksional esa Bols funksionali deb ataladi.

Eslatib o'tamiz, $y_0(x)$ funksiya (3.14) masalaga lokal kuchsiz minimum (maksimum) beradi deyiladi, agar musbat δ sonini ko'rsatish mumkin bo'lsaki, natijada $\rho_1(y, y_0) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $y \in C^1([x_0, x_1])$ funksiyalarlar uchun, quyidagi tengsizlik:

$$v[y] \geq v[y_0] \, (v[y] \leq v[y_0])$$

o'rinli bo'lsa.

Masalani yechish usuli

1. Berilgan masalani (3.14)-ko'rinishga keltirish.

2. Zaruriy shartlarni yozish:

a) Eyler tenglamasini yozish:

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = 0;$$

b) Transversallik shartlarini aniqlash:

$$F_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = f_{y_0}(y(x_0), y(x_1)),$$

$$F_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = -f_{y_1}(y(x_0), y(x_1)).$$

Bu yerda $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ deb olingan.

3. Joiz ekstremallarni, ya'ni chegarada transversallik shartlarini qanoatlantiruvchi ekstremallarni aniqlash.

4. Biror joiz ekstremal masala yechimi ekanligini, yoki masala yechimga ega emasligini ko'rsatish.

Bols masalasini yechish uchun, keltirilgan shartlar to'la. Ma'lumki, Eyler tenglamasi ikkinchi tartibli differensial tenglama bo'lib, uning yechimi – ekstremallar ikkita o'zgarmas soniga bog'liq bo'ladi. Bu o'zgarmaslar transversallik shartlaridan aniqlanadi.

Ekstremumga erishishlikning zaruriy shartlari

Berilgan (3.14)-Bols masalasi ekstremumga erishishligining zaruriy shartini ta'minlovchi quyidagi teoremani isboti bilan birga keltiramiz.

Teorema. R^3 fazoning ochiq to'plami Q bo'lsin. $F(x, y, y')$ integrant Q da aniqlangan va F_y, $F_{y'}$ xususiy hosilalari bilan birga uzluksiz bo'lsin. R^2 fazoning ochiq to'plami S bo'lsin. $f(y(x_0), y(x_1))$ terminant S da aniqlangan va f_{y_0}, f_{y_1} xususiy hosilalari bilan birga uzluksiz bo'lsin. $y_0(x)$ funksiya $[x_0, x_1]$ oraliqda uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lib,

$$(x,\ y(x),\ y'(x)) \in Q,\ \forall x \in [x_0, x_1] \text{ va } (y(x_0),\ y(x_1)) \in S$$

shartlarni qanoatlantirsin.

Agar $y_0(x)$ (3.14)-Bols masalasiga lokal kuchsiz minimum bersa, u holda $F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \in C^1([x_0,\ x_1])$ bo'ladi va

a) Eyler tenglamasi:

$$F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0(x),\ y_0'(x)) = 0;$$

b) transversallik:

$$F_{y'}(x_0,\ y_0(x_0),\ y_0'(x_0))) = f_{y_0}(y_0(x_0),\ y_0(x_1)),$$

$$F_{y'}(x_1,\ y_0(x_1),\ y_0'(x_1))) = -f_{y_1}(y_0(x_0)),\ y_0(x_1)))$$

shartlari bajariladi.

Isbot. Ikkinchi usul yordamida (3.14)-funksionalning birinchi variatsiyasini aniqlaymiz. Demak, teorema shartiga asosan $y_0(x)$ (3.14)-funksionalga lokal kuchsiz minimum bersin. $h(x) \in C^1([x_0,\ x_1])$ ixtiyoriy funksiya bo'lsin. U holda, quyidagi:

$$\begin{gathered} \varphi(\alpha) = v[y_0 + \alpha h] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_0(x) + \alpha h(x), y_0'(x) + \\ + \alpha h(x))dx + f(y_0(x_0) + \alpha h(x_0),\ y_0(x_1) + \alpha h(x_1)), \end{gathered} \tag{3.15}$$

bir o‘zgaruvchili funksiya $\alpha = 0$ da ekstremumga erishadi. Shu sababli bu funksiya hosilasi $\alpha = 0$ da nolga teng bo‘ladi. (3.15)-ning integral ostidagi funksiyasi va uning α bo‘yicha hosilasi biror $[x_0, x_1] \times [-\alpha_0, \alpha_0]$ oralida uzluksiz, shu sababli hosila bilan integral o‘rnini almashtirish mumkin:

$$\varphi'(0) = \frac{d}{d\alpha}v[y_0 + \alpha h]|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}\Big(\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_0(x) + \alpha h(x), y_0'(x)+$$

$$+\alpha h'(x))dx + f(y_0(x_0) + \alpha h(x_0),\ y_0(x_1) + \alpha h(x_1))\Big)\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\alpha}\Big(F(x, y_0(x) + \alpha h(x), y_0'(x) + \alpha h'(x))\Big)|_{\alpha=0}dx+$$

$$+\frac{d}{d\alpha}\Big(f(y_0(x_0) + \alpha h(x_0),\ y_0(x_1) + \alpha h(x_1))\Big)\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} \Big(F_y(x, y_0(x), y_0'(x))h(x) + F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))h'(x)\Big)dx+$$

$$+f_{y_0}(y_0(x_0),\ y_0(x_1))h(x_0) + f_{y_1}(y_0(x_0),\ y_0(x_1))h(x_1) = 0.$$

Integral ostidagi ifodani bo‘laklab integrallash yordamida quyidagini hosil qilamiz:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big(F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\Big)h(x)dx+$$

$$+F_{y'}(x,\ y_0(x),\ y_0'(x))h(x)\Big|_{x_0}^{x_1} + f_{y(0)}(y_0(x_0),\ y_0(x_1))h(x_0)+$$

$$+f_{y(1)}(y_0(x_0),\ y_0(x_1))h(x_1) = 0$$

yoki

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big(F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\Big)h(x)dx+$$

$$\Big(F_{y'}(x_1,\ y_0(x_1), y_0'(x_1)) + f_{y_1}(y_0(x_0), y_0(x_1))\Big)h(x_1)- \tag{3.16}$$

$$\Big(F_{y'}(x_0,\ y_0(x_0), y_0'(x_0)) - f_{y_0}(y_0(x_0), y_0(x_1))\Big)h(x_0) = 0.$$

Bu tenglik ixtiyoriy $h(x) \in C^1([x_0,\ x_1])$, xususan $h(x_0) = h(x_1) = 0$ uchun ham o‘rinlidir, shuni hisobga olsak (3.16) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_{x_0}^{x_1}\Big(F_y(x,y_0(x),y_0'(x)-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x)\Big)h(x)dx=0$$

Oxirgi tenglikdan, variatsion hisobning asosiy lemmasiga ko'ra, Eyler tenglamasini hosil qilamiz:

$$F_y(x,y_0(x),y_0'(x)-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x)=0$$

(3.16) ga ketma-ket $h(x)=x-x_0$ va $h(x)=x-x_1$ funksiyalarni qo'yish bilan quyidagi transversallik shartlariga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}F_{y'}(x_1,\, y_0(x_1),\, y_0'(x_1))+f_{y_1}(y_0(x_0),\, y_0(x_1))=0\\ -F_{y'}(x_0,\, y_0(x_0),\, y_0'(x_0))+f_{y_0}(y_0(x_0),\, y_0(x_1))=0.\end{aligned}$$

Teorema isbot bo'ldi.

4-§. Yuqori tartibli variatsion masala

Quyidagi ko'rinishdagi variatsion masala berilgan bo'lsin:

$$v[y]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})dx\longrightarrow extr,\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}y(x_1)=y_1,\, y'(x_1)=y_1^{(1)},...,y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)},\\ y(x_2)=y_2,\, y'(x_2)=y_2^{(1)},...,y^{(n-1)}(x_2)=y_2^{(n-1)}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

1-ta'rif. Agar (4.2)-shartlarni qanoatlantiruvchi biror $y_0=y_0(x)\in D_v$ funksiyaning $W^{(1)}(y_0)-$ birinchi tartibli ($W(y_0)-$ nolinchi tartibli) atrofi mavjud bo'lsaki, quyidagi:

$$v[y]\geq v[y_0]$$

tengsizlik ixtiyoriy $y\in W^{(1)}(y_0)\cap D_v(y\in W(y_0)\cap D_v)$ lar uchun, o'rinli bo'lsa, (4.1)-funksional y_0 funksiya ustida *kuchsiz (kuchli) lokal minimum*ga erishadi deyiladi. Bu yerda D_v bilan (4.1)-funksionalning joiz ekstremallari to'plami belgilangan.

2-ta'rif. $\Phi_0(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))$, $\Phi_1(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))$, ..., $\Phi_n(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))$ lar $n+1$ argumentli, birinchi o'zgaruvchisi bo'yicha bo'lakli – uzluksiz funksiyalar bo'lib, $p(x)-$ berilgan bir o'zgaruvchili ko'phad bo'lsin. Agar $y(x)$, $[x_1, x_2]$ oraliqda $n-$ tartibli bo'lakli-uzluksiz hosilaga ega bo'lgan funksiya bo'lib, $y^{(n)}(x)$ aniqlangan barcha x larda quyidagi shartlar bajarilsin:

$$1)\ (x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x \pm 0)) \in Q\ (x \in [x_1, x_2]);$$

$$2)\ \Phi_0(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) - \int_{x_1}^{x} \Phi_1(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n)}(t))dt$$

$$+ ... + (-1)^n \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_{n-1}} ... \int_{x_1}^{t_1} \Phi_n(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n)}(t))dtdt_1...dt_{n-1} = p(x) \tag{4.3}$$

U holda $y(x)$ *funksiya (4.3)-integro-differensial tenglamaning yechimi* deyiladi.

Teorema. Faraz qilaylik, $F_y(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))$, $F_{y'}(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))$, ..., $F_{y^{(n)}}(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))$ funksiyalari Q sohada birinchi argument bo'yicha bo'lakli – uzluksiz bo'lsin. U holda, agar $y_0 = y_0(x)$ joiz funksiya $v[y]$ funksionalga kuchsiz lokal minimum bersa, $n-1$-tartibli $p_{n-1}(x)$ ko'phad mavjudki $y_0(x)$ funksiya quyidagi:

$$F_{y^{(n)}} - \int_{x_1}^{x} F_{y^{(n-1)}}dt + \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_1} F_{y^{(n-2)}}dtdt_1 - ... +$$

$$+(-1)^n \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_{n-1}} ... \int_{x_1}^{t_1} F_y dtdt_1...d_{n-1} = p_{n-1}(x)$$

Eyler — Puasson deb nomlanuvchi integro-differensial tenglamani qanoatlantiradi.

Isbot. $W^{(1)}(y_0)$ bilan quyidagi:

$$v[y] - v[y_0] \geq 0,\ y \in D_v \tag{4.4}$$

shartlarnini qanoatlantiruvchi $y_0(x)$ funksiyaning atrofini tashkil etuvchi joiz $y(x)$ funksiyalar to'plamini belgilaymiz.

Quyidagi:

$$\eta^{(i)}(x_1) = \eta^{(i)}(x_2) = 0,\ (i = 0, 1, ..., n-1) \tag{4.5}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi biror $\eta(x)$ funksiyani olamiz va $y(x, \alpha) = y_0(x) + \alpha\eta(x)$, $x \in [x_1, x_2]$ bir parametrli funksiyalar oilasini qaraymiz. Q to'plam ochiq bo'lganligi uchun, musbat α_0 soni mavjudki, $|\alpha| \leq \alpha_0$ bo'lganda $y(x, \alpha) \in W^{(1)}(y_0)$ va joiz funksiya bo'ladi.

Bu va (4.4) dan kelib chiqadiki $\varphi(\alpha) = v[y(x, \alpha)]$ funksiya $\alpha = 0$ da lokal minimumga erishadi. Qurilgan $\varphi(\alpha)$ funksiya 0 da differensiallanuvchi, differensiallashni integral ostiga kiritish mumkinligidan quyidagini hosil qilamiz:

$$\varphi'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=0}^{n} F_{y^{(i)}}(x, y_0(x), y_0'(x), ..., y^{(n)})\eta^{(i)}(x)dx = 0. \tag{4.6}$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\overline{F}_{y^{(i)}}(x) = F_{y^{(i)}}(x, y_0(x), y_0'(x), ..., y^{(n)}).$$

(4.6)-tenglikda $i = n-$ qo'shiluvchi quyidagicha bo'ladi:

$$\int_{x_1}^{x_2} \overline{F}_{y^{(n)}}(x)\eta^{(n)}(x)dx. \tag{i_n}$$

(4.6)-tenglikda $i = n - 1$ qo'shiluvchini qaraymiz:

$$\int_{x_1}^{x_2} \overline{F}_{y^{(n-1)}}(x)\eta^{(n-1)}(x)dx.$$

Uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta^{(n-1)}(x)\, d\int_{x_1}^{x} \overline{F}_{y^{(n-1)}}(t)dt.$$

Bu ifodada bo'laklab integrallash usulini qo'llash bilan quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta^{(n-1)}(x)\, d\int_{x_1}^{x} \overline{F}_{y^{(n-1)}}(t)dt = \eta^{(n-1)}(x)\int_{x_1}^{x} \overline{F}_{y^{(n-1)}}(t)dt\Big|_{x=x_1}^{x=x_2} -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x} \overline{F}_{y^{(n-1)}}(t)\, dt\, \eta^{(n)}(x)dx.$$

$\eta(x)$ funksiya (4.5)-shartni bajarishligini hisobga olsak, oxirgi tenglikdan hosil bo'ladi:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta^{(n-1)}(x)\, d\int_{x_1}^{x} \overline{F}_{y^{(n-1)}}(t)dt = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x} \overline{F}_{y^{(n-1)}}(t)\, dt\, \eta^{(n)}(x)dx. \qquad (i_{n-1})$$

Endi (4.6)-tenglikda $i = n - 2$ qo'shiluvchini qaraymiz:

$$\int_{x_1}^{x_2} \overline{F}_{y^{(n-2)}}(x)\eta^{(n-2)}(x)dx.$$

Xuddi avvalgidek bo'laklab integrallash usulini qo'llaymiz:

$$\int_{x_1}^{x_2} \overline{F}_{y^{(n-2)}}(x)\eta^{(n-2)}(x)dx = \eta^{(n-2)}(x)\int_{x_1}^{x} \overline{F}_{y^{(n-2)}}(t)dt\Big|_{x=x_1}^{x=x_2} -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x}\overline{F}_{y^{(n-2)}}(t)\,dt\,\eta^{(n-1)}(x)dx.$$

Yana (4.5)-shartni nazarga olsak, oxirgi tenglikni quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\int_{x_1}^{x_2}\overline{F}_{y^{(n-2)}}(x)\eta^{(n-2)}(x)dx = -\int_{x_1}^{x_2}\eta^{(n-1)}(x)\,d\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_1}\overline{F}_{y^{(n-2)}}(t)\,dt\,dt_1.$$

O'ng tarafdagi ifodani bo'laklab integrallash orqali quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_{x_1}^{x_2}\overline{F}_{y^{(n-2)}}(x)\eta^{(n-2)}(x)dx = -\eta^{(n-1)}(x)\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_1}\overline{F}_{y^{(n-2)}}(t)dtdt_1\Big|_{x=x_1}^{x=x_2} +$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_1}\overline{F}_{y^{(n-2)}}(t)\,dt\,dt_1\eta^{(n)}(x)\,dx.$$

(4.5)-shart yordamida oxirgi tenglik quyidagicha bo'ladi:

$$\int_{x_1}^{x_2}\overline{F}_{y^{(n-2)}}(x)\eta^{(n-2)}(x)dx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_1}\overline{F}_{y^{(n-2)}}(t)dtdt_1\eta^{(n)}(x)dx. \tag{i_{n-2}}$$

Shunga o'xshash jarayon davom ettirilib (4.6)-tenglikdan $i = k$ had uchun, quyidagi munosabatni olamiz:

$$\int_{x_1}^{x_2}\overline{F}_{y^{(k)}}(x)\eta^{(k)}(x)dx = (-1)^{n-k}\int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_{n-k-1}}\ldots$$

$$\int_{x_1}^{t_1}\overline{F}_{y^{(k)}}(t)\,dt\,dt_1\,dt_2\ldots dt_{n-k-1}\eta^{(n)}(x)\,dx. \tag{i_k}$$

(4.6)-tenglikdagi $i = 0$ qo'shiluvchiga mos kelgan ifoda (i_k) ga asosan quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\int_{x_1}^{x_2} \overline{F}_y(x)\eta(x)dx = (-1)^n \int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_{n-1}} \ldots \int_{x_1}^{t_1} \overline{F}_y(t)dtdt_1dt_2\ldots dt_{n-1}\eta^{(n)}(x)dx. \tag{i_0}$$

Keltirib chiqarilgan (i_0), (i_1), ..., (i_n) ifodalarni (4.6)-tenglikka mos ravishda olib borib qo'yish bilan quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\varphi'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=0}^{n} F_{y^{(i)}}(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y^{(n)})\eta^{(i)}(x)dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\overline{F}_{y^{(n)}}(x) - \int_{x_1}^{x} \overline{F}_{y^{(n-1)}}(t)\, dt + \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_1} \overline{F}_{y^{(n-2)}}(t)\, dt\, dt_1 + \right. \tag{4.7}$$

$$\left. + \ldots + (-1)^n \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_{n-1}} \ldots \int_{x_1}^{t_1} \overline{F}_y(t)dtdt_1\ldots dt_{n-1} \right] \eta^{(n)}(x)dx = 0.$$

Agar $m(x)$ bilan (4.7)-tenglikning kvadrat qavs ichidagi ifodasini belgilab Dyubua – Reymon lemmasini qo'llasak, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\overline{F}_{y^{(n)}}(x) - \int_{x_1}^{x} \overline{F}_{y^{(n-1)}}(t)\, dt + \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_1} \overline{F}_{y^{(n-2)}}(t)\, dt\, dt_1 + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_{n-1}} \ldots \int_{x_1}^{t_1} \overline{F}_y(t)\, dt\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{n-1} = p_{n-1}(x),$$

bu yerda $p_{n-1}(x)$, $n-1$ – tartibli ko'phad. Oxirgi tenglik teoremani isbotlaydi.

Bu teoremadan qo'shimcha shartlar ostida differensial ko'rinishdagi Eyler – Puasson tenglamasini hosil qilish mumkin.

Eyler – Puasson integro-differensial tenglamasining yechimi (4.1)-funksionalning *statsionar funksiyasi* yoki F funksiyaning *statsionar funksiyasi* deb ataladi.

Tasdiq. $F \in C_{n+1}(Q)$ bo'lib, $2n$ marta uzluksiz differensiallanuvchi joiz $y_0(x)$ funksiya (4.1)-funksionalning statsionar funksiyasi bo'lsin. U holda $y_0(x)$ quyidagi Eyler – Puasson differensial tenglamasini qanoatlantiradi:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - ... + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0. \tag{4.8}$$

Agar (4.8)-tenglama yoyib yozilsa, u $2n$ – tartibli differensial tenglamaga kelinadi.

Isbot. $y_0(x)$ statsionar funksiya bo'lganligi uchun, u Eyler – Puassonning integro-differensial tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\begin{aligned}&\overline{F}_{y^{(n)}}(x) - \int_{x_1}^{x}\overline{F}_{y^{(n-1)}}(t)\,dt + \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_1}\overline{F}_{y^{(n-2)}}(t)\,dt\,dt_1 + ...+\\ &+(-1)^n\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_{n-1}}...\int_{x_1}^{t_1}\overline{F}_y(t)\,dt\,dt_1\,dt_2...dt_{n-1} = p_{n-1}(x).\end{aligned} \tag{4.9}$$

$F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) \in C_{n+1}(Q)$ va $y_0(x) \in C_{2n}[x_1, x_2]$ bo'lib (4.9)-tenglamani qanoatlantirgani uchun, (4.9)-tenglamaning o'ng tarafdagi har bir hadi $[x_1, x_2]$ oraliqda x o'zgaruvchi bo'yicha n marta differensiallanuvchi. Shuning uchun, (4.9) ni x bo'yicha n marta differensiallab quyidagi ayniyatni olamiz:

$$\overline{F}_y - \frac{d}{dx}\overline{F}_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}\overline{F}_{y''} - ... + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\overline{F}_{y^{(n)}} = 0, \ x \in [x_1, x_2].$$

Masala. Ikki cheti mahkamlangan silindrik shakldagi elastik (qayshqoq) sterjen, Gamilton prinsipiga asosan, muvozanat holda minimal potensial energiyaga ega bo'ladi. $y = y(x)$ bilan sterjenning o'q chizig'i tenglamasi berilgan bo'lsin. Bu funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$y(x) \in c_2[-l, l], \; y(-l) = y'(-l) = y(l) = y'(l) = 0.$$

U holda sterjenning elastiklik kuchlari hosil qilgan potensial energiya quyidagicha aniqlanadi:

$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{2}\mu \frac{y''^2(x)}{(1+y'^2(x))^{5/2}}\, dx. \tag{4.10}$$

Og'irlik kuchlari maydoni hosil qilgan potensial energiya quyidagiga teng bo'ladi:

$$\int_{-l}^{l} \rho y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\, dx. \tag{4.11}$$

Bu yerda μ – sterjenning ko'ndalang kesimi inersiya momentiga va elastiklik koeffitsiyentlariga bog'liq bo'lgan, ρ esa sterjenning chiziqli zichligini bildiruvchi o'zgarmas sonlaridir.

(4.10) va (4.11) larda $y'(x)$ hisobga olmasdan to'la potensial energiyani taqribiy qiymatini olsak, u quyidagiga teng bo'ladi:

$$v[y] = \int_{-l}^{l} \left[\frac{1}{2}\mu y''^2(x) + \rho y(x)\right] dx. \tag{4.12}$$

Demak, (4.12) ga asosan

$$F(x, y, y', y'') = \frac{1}{2}\mu y''^2(x) + \rho y(x).$$

Bu masala uchun, Eyler – Puassonning integro-differensial tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\mu y'' + \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_1} \rho\, dt\, dt_1 = c_1 + c_0 x. \tag{4.13}$$

Bundan kelib chiqadiki (4.13) quyidagi ikkinchi tartibli differensial tenglamaga ekvivalent bo‘ladi:

$$y'' = -\frac{\rho}{2\mu}x^2 + \overline{c}_0 x + \overline{c}_1.$$

Bu tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y(x) = -\frac{\rho}{24\mu}x^4 + c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$$

Chegaraviy shartlar yordamida c_0, c_1, c_2, c_3 o‘zgarmaslarni aniqlasak, quyidagi statsionar funksiya hosil bo‘ladi:

$$y(x) = -\frac{\rho}{24\mu}(x^2 - l^2)^2, \ x \in [-l, l].$$

Nazorat savollari va misollari

1. Variatsion hisobning sodda masalasini geometrik ma’nosi nimadan iborat?

2. Ekstremallar va joiz ekstremallar qanday topiladi?

3. Variatsion hisobning asosiy lemmasining funksional fazo nuqtayi nazardan talqini.

4. Eyler tenglamasi qanday tenglamalar tarkibiga kiradi?

5. Eyler tenglamasining xususiy hollarini sanab o‘ting.

6. Lagranj masalasini yechishda qaysi usul ishlatiladi?

7. Mayer va Bols masalalarini bir-biridan farqi nimadan iborat?

1. Quyidagi variatsion hisobning sodda masalalari uchun joiz ekstremallar topilsin:

1. $y(0) = 1, \ y(1) = 0, \ \int\limits_0^1 (y'^2 + y^2 + 4y \cdot chx)dx \to extr;$

2. $y(-1) = -1, \ y(1) = 0, \ \int\limits_{-1}^1 (y'^2 + y^2 + 2y)dx \to extr;$

3. $y(0) = 0, \ y(\pi/2) = 0, \ \int\limits_0^{\pi/2} (y^2 - 16y'^2 + 6y \cdot sinx)dx \to extr;$

4. $y(0) = 0, \ y(\pi) = 1, \ \int\limits_0^{\pi} (y^2 - 4y'^2 + 2y \cdot sin3x)dx \to extr;$

5. $y(0)=-1,\ y(1)=0,\ \int\limits_0^1 (y'^2+y^2+4y\cdot shx)dx \to extr.$

2. Bols masalalari uchun joiz ekstremallar topilsin:

1. $\int\limits_0^{\pi/2} (y'^2-y^2-2y)dx - 2y^2(0) - y^2(\pi/2) \to extr;$

2. $\int\limits_0^2 (x+1)^2 y'^2 dx - 2y(0) + y^2(2) \to extr;$

3. $\int\limits_0^{e-1} (x+1)y'^2 dx + 2y(0)(y(e-1)+1) \to extr;$

4. $\int\limits_1^e (xy'^2+2y)dx + 3y^2(1) - y^2(e) - y(e) \to extr;$

5. $\int\limits_0^1 e^y y'^2 dx + 4ey(0) + 32e^{-y(1)} \to extr.$

3. Izoperimetrik masalalar uchun, joiz ekstremal topilsin:

1. $\int\limits_0^1 ye^x dx = 2,\ y(0)=1,\ y(1)=0,\ \int\limits_0^1 \frac{1}{2}y'^2 dx \to extr;$

2. $\int\limits_0^T ydx = 1,\ y(0)=1,\ y(T)=0,\ \int\limits_0^T \frac{1}{2}y'^2 dx \to extr;$

3. $\int\limits_0^1 ye^{-x} dx = e,\ y(0)=2e+1,\ y(1)=2,\ \int\limits_0^1 \frac{1}{2}y'^2 dx \to extr;$

4. $\int\limits_1^2 ydx = 2,\ y(1)=0,\ y(2)=0,\ \int\limits_1^2 \frac{1}{2}x^2y'^2 dx \to extr;$

5. $\int\limits_0^1 xydx = 0,\ y(0)=-4,\ y(1)=-4,\ \int\limits_0^1 \frac{1}{2}y'^2 dx \to extr.$

4. Yuqori tartibli masalalar uchun, joiz ekstremal topilsin:

1. $y(0)=0,\ y(\pi/2)=1,\ y'(0)=1,\ y'(\pi/2)=0,\ \int\limits_0^{\pi/2} (y''^2 - y^2)dx \to extr;$

2. $y(0) = y(1) = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = cos1$, $\int\limits_0^1 (y''^2 - y^2)dx \to extr$;

3. $y(0) = 1$, $y(1) = 1/2$, $y'(0) = -1$, $y'(1) = 0$, $\int\limits_0^1 (1 + x)^3 y''^2 dx \to extr$;

4. $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = sh2$, $\int\limits_0^\pi (y''^2 - 16y^2)dx \to extr$;

5. $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 4$, $\int\limits_0^1 y''^2 dx \to extr$.

VII BOB.
OPTIMAL BOSHQARUV. KO'P KRITERIYALI MASALA

Jamiyat, iqtisod, fizik, biologik va boshqa jarayonlarni boshqarish orqali erishiladigan yutuqlarning ahamiyati juda ham muhimdir. Matematik usullarga asoslangan boshqaruvning asosiy tamoyillarini va qonunlarini bilish, ishlab chiqarishda, moliyaviy faoliyatda va iqtisodiy bashorat qilishda, kosmik kemalarni boshqarishda va fizik, biologik jarayonlarga ta'sir etishda, gumanitar va tabiiy fanlarni birlashtirishda hamda tabiyat, jamiyat va odamzotni tushunishning yangi qonun-qoidalarini ochishda, effektiv boshqarishni ta'minlaydi.

Texnika, iqtisodiyatning ehtiyojiga bog'liq ravishda matematik dasturlash, optimal boshqaruv nazariyasi, optimallashtirish usullari bo'limlari tez rivojlana boshladi. Optimal boshqaruvning matematik nazariyasi o'tgan asrning 50-yillari o'rtasida yaratildi. Optimal boshqaruv nazariyasida klassik variatsion hisobning va zamonaviy – Pontryaginning maksimum prinsipi va Bellmanning optimallik prinsiplari g'oyalarini bir-biri bilan birlashtirish amalga oshirildi.

Oddiy differensial tenglamalar sistemasi bilan ifodalangan boshqaruv masalalari uchun, zaruriy shartlar muhim hisoblangan tasdiqlar va teoremalar orqali bayon etilgan. Bunda optimal yechimni topishning usuli sifatida Pontryaginning maksimum prinsipi olingan. Maksimum prinsipi turli ko'rinishdagi optimal boshqaruv masalalari uchun, ta'riflangan: o'ng chegarasi o'zgaruvchan, umuman, chegaralari o'zgaruvchan bo'lgan masalalar, harakat trayektoriyasiga turli chegaralar bo'lgan va boshqa hollar.

1-§. Optimal boshqaruv masalasining qo'yilishi

Oddiy differensial tenglamalar sistemasi bilan tavsiflangan optimal boshqaruv masalasining qo'yilishi quyidagicha: berilgan tayin $[t_0, t_1]$ oraliqda aniqlangan $\omega = (x(t), u(t))$ jarayonga bog'liq bo'lgan integral va terminal qo'shiluvchilar bilan berilgan:

$$J(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))\, dt + \Phi(x(t_0), x(t_1)) \tag{1.1}$$

ko'rinishdagi funksionalning minimumini topish talab etiladi. Bunda, $0 < t_0 < t_1$ bo'lib, t_0, t_1 lar fiksirlangan sonlardir. $I = [t_0, t_1]$ belgilashni kiritamiz. $x(t) : I \to R^n$ holatning absolyut uzluksiz vektor funksiyasi, $u(t) : I \to R^n$ boshqaruvning bo'lakli-uzluksiz vektor funksiyasi bo'lib, ular

$$x(t_0) \in X_0 \subset R^n, \tag{1.2}$$

boshlang'ich

$$u(t) \in U(t) \subset R^r, \tag{1.3}$$

boshqaruvga chegara va

$$x(t_1) \in X_1 \subset R^n, \tag{1.4}$$

oxirgi shartlarini hamda

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x(t), u(t)), \ t \in I, \ i = 1, 2, ..., n \tag{1.5}$$

dinamik chegarani qanoatlantiradi.

1-ta'rif. (1.2)–(1.5)-shartlarni qanoatlantiruvchi $x(t)$– absolyut uzluksiz, $u(t)$– bo'lakli-uzluksiz vektor funksiyalardan iborat bo'lgan $\omega = (x(t), u(t)))$ juftlik *joiz jarayon* deb ataladi.

(1.1)–(1.5)-masalaning barcha joiz ω jarayonlari to'plamini Ω bilan belgilaymiz va u bo'sh emas deb faraz qilamiz.

U holda optimal boshqaruv masalasi quyidagicha bo'ladi: joiz jarayon $\bar{\omega} \in \Omega$ topilsinki, unda (1.1)-funksional minimumga erishsin.

2-ta'rif. Agar (1.2)–(1.5)-masalada $\bar{\omega} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ joiz jarayon uchun, $\varepsilon > 0$ soni topilsaki, $||x(t) - \bar{x}(t)||_{C(I)} < \varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi $x(t)$ va ixtiyoriy $u(t) \in \Omega$ uchun, barcha joiz $\omega = (x(t), u(t)) \in \Omega$ jarayonlarda:

$$J(\bar{\omega}) \leq J(\omega)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $\bar{\omega} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ lokal – optimal deyiladi.

(1.1), (1.5)-masalada optimallikning zaruriy shartini ta'minlovchi teoremani birinchi bor L. S. Pontryagin isbotlagan. Optimal boshqaruvning har bir masalasiga ikkita skalyar funksiyani bog'lash mumkin – Pontryagin va Gamilton funksiyalari, ular quyidagicha aniqlanadi:

$$H(t, x, u, p(t), \lambda_0) = -\lambda_0 f_0(t, x, u) + (p(t),\ f(t, x, u)),$$

$$\aleph(t, x, p(t), \lambda_0) = \max_{u \in U} H(t, x, u, p(t), \lambda_0).$$

(1.1)–(1.5)-masala uchun, barcha standart shartlar bajarilgan deb faraz qilamiz, ya'ni

$$f(t, x, u) : I \times R^n \times R^r \to R^n,$$

$$f_0(t, x, u) : I \times R^n \times R^r \to R^n$$

funksiyalar t bo'yicha o'lchovli, x bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi va u bo'yicha uzluksiz, $\Phi(x^0, x^1) : X_0 \times X_1 \to P$ funksiya esa x^0 va x^1 bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi, bu yerda $x(t_0) = x^0,\ x(t_1) = x^1$.

Agar $x(t_0) = x^0$ bo'lsa (1.1)–(1.5)-*masala chap tomoni qo'zg'almas* deb ataladi.

Agar $X_0 = R^n$ bo'lsa (1.1)–(1.5) masala *chap tomoni erkin* deb ataladi. Xuddi shunga o'xshash, o'ng tomoni uchun, ham kiritiladi: o'ng tomon qo'zg'almas $- x(t_1) = x^1$, o'ng tomon erkin $- X_1 = R^n$. X_l, $l = 1, 2$ to'plamlar tenglik va tengsizliklar sistemasi:

$$X_l = \{x \in R^n : g_i^l(x) \le 0,\ i = 1, 2, ..., s;\ g_i^l(x) = 0,$$
$$i = s+1, s+2, ..., m\}$$

orqali berilgan bo'lishi ham mumkin, bu yerda $g_i^l(x)$, $i = 1, 2, ..., m$, $l = 1, 2$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar.

O'ng tomoni erkin, chap tomoni qo'zg'almas masalada optimal boshqaruvni topish uchun, Lagranjning o'zgarmas koeffitsiyentlar *usulini* qo'llaymiz.

O'ng tomoni erkin, chap tomoni qo'zg'almas masalada:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ t \in I \tag{1.6}$$

$$x(t_0) = x^0 \in R^n, \tag{1.7}$$

$$u(t) \in U(t) \subset R^r \tag{1.8}$$

chegaralar ostida

$$J(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))\, dt + \Phi(x(t_1)) \tag{1.9}$$

funksionalni minimallashtirish kerak bo'ladi, bu yerda $x(t) : I \to R^n -$ absolyut uzluksiz funksiya, $u(t) : I \to R^p -$ bo'lakli-uzluksiz funksiya.

Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$\mathfrak{L}(x(t),u(t),p(t),\lambda_0,\nu) = \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))dt+$$
$$\lambda_0\Phi(x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}(p(t),\dot{x}(t)-f(t,x(t),u(t)))dt+(\nu,x(t_0)-x^0). \tag{1.10}$$

bu yerda $p(t) : I \to R^n$ – absolyut uzluksiz vektor funksiya.

Quyidagi funksiyalarni kiritamiz:

$$L(t,x(t),u(t),p(t),\lambda_0) = \lambda_0 f_0(t,x(t),u(t))+ \\ +(p(t),\dot{x}(t) - f(t,x(t),u(t))); \tag{1.11}$$

$$l(x(t_0),x(t_1)) = \lambda_0\Phi(x(t_1)) + (\nu, x(t_0) - x^0). \tag{1.12}$$

U holda (1.10) Lagranj funksiyasi, (1.11), (1.12) dagi belgilashlarni hisobga olgan holda quyidagi:

$$\mathfrak{L}(x(t),u(t),p(t),\lambda_0,\nu)=\int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t),p(t),\lambda_0)\,dt+ \\ +l(x(t_0),x(t_1)) \to \inf \tag{1.13}$$

ko'rinishni oladi.

Faraz qilaylik, $\bar{u}(t)$, $\bar{p}(t)$ funksiyalar, $\bar{\nu}$ – vektor va $\bar{\lambda}_0$ (1.6)-funksionalga minimum qiymat berishsin, u holda shartsiz minimallashtirish (1.13)-masalasi $x(t)$ ga nisbatan Bols masalasiga ekvivalent bo'ladi, bu yerda zaruriy shartni beruvchi Eyler – Lagranj tenglamasi:

$$\bar{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{x}}(t) = 0 \tag{1.14}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $\bar{L}(t) = L(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{p}(t),\lambda_0)$ – optimal jarayon bo'yicha hisoblangan bo'lib, $h_x - n \times n$ o'lchovli jadval elementlari $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}$, $i,j = 1,2,...,n$ funksiyalarning birinchi tartibli hosilalaridan iborat.

$$L_x(t) = \lambda_0 f_{0x}(t,x(t),u(t)) - f_x^T(t,x(t),u(t))p(t), \tag{1.15}$$

$$L_{\dot{x}(t)} = p(t). \tag{1.16}$$

(1.14) Eyler – Lagranj funksiyasi (1.15) ni hisobga olgan holda, quyidagi:

$$\dot{\bar{p}}(t) = \lambda_0 f_{0x}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f_x^T(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\bar{p}(t) \tag{1.17}$$

ko'rinishni oladi. Bu qo'shma $p(t)$ funksiya uchun, tenglama deb ataladi. (1.6)–(1.9)-masalalar uchun Pontryagin funksiyasini yozamiz:

$$H(t, x, u, p(t), \lambda_0) = -\lambda_0 f_0(t, x, u) + (p(t),\ f(t, x, u)).$$

Pontryagin funksiyasining aniqlanishiga asosan (1.17)-tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}_0)}{\partial x}. \tag{1.18}$$

(1.13)-Bols masalasida $L_{\dot{x}}(t) = p(t)$ni hisobga olgan holda transversallik shartini yozamiz:

$$\bar{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \frac{\partial \bar{l}(\xi^0, \xi^1)}{\partial \xi^i},$$

$$\xi_i = x(t_i),\ i = 0, 1,$$

yoki

$$\bar{p}(t_i) = (-1)^i \frac{\partial \bar{l}(\xi^0, \xi^1)}{\partial \xi^i}.$$

l funksiyaning aniqlanishiga ko'ra,

$$\begin{aligned} \bar{p}(t_0) &= \nu, \\ \bar{p}(t_1) &= -\lambda_0 \tfrac{\partial l(\xi^0, \xi^1)}{\partial \xi^1} \end{aligned} \tag{1.19}$$

ga ega bo'lamiz.

(1.13)-masalada noma'lum faqat $u(t)$ vektor – funksiya bo'lsin, unda masala quyidagicha bo'ladi:

$$\mathfrak{L}(x(t), u(t), p(t), \bar{\lambda}_0, \bar{\nu}) \to \inf,$$

$$u(t) \in U(t) \subset R^r, \ t \in I.$$

Bu optimal boshqaruvning sodda masalasi hisoblanadi. Maksimum prinsipiga asosan optimal boshqaruv

$$L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \bar{\lambda}_0) =$$

$$= \lambda_0 f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + (\bar{p}(t), \dot{\bar{x}}(t) - f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) =$$

$$= \min_{u \in U(t)} [\lambda_0 f_0(t, \bar{x}(t), u) + (\bar{p}(t), \dot{\bar{x}}(t) - f(t, \bar{x}(t), u))]$$

shartni qanoatlantiradi. Pontryagin funksiyasiga asosan, bu ifodani qayta o'zgartiramiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$-H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \bar{\lambda}_0) = \min_{u \in U(t)} (-H(t, \bar{x}(t), u, \bar{p}(t), \bar{\lambda}_0)$$

yoki

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \bar{\lambda}_0) = \max_{u \in U(t)} (H(t, \bar{x}(t), u, \bar{p}(t), \bar{\lambda}_0). \quad (1.20)$$

Agar (1.6)–(1.9)-masalada boshlang'ich va oxirgi vaqt momentlari fiksirlanmagan bo'lib, terminal funksiya $\Phi(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1)$ ko'rinishda bo'lsa, u holda Lagranj funksiyasining statsionarlik shartiga t_0, t_1 bo'yicha statsionarlik sharti bo'lgan:

$$\frac{dL}{dt_1} = 0, \ i = 0, 1$$

yoki batafsilroq

$$\bar{L}(t_1) + \frac{\partial \bar{l}}{\partial t_1} + \frac{\partial \bar{l}}{\partial x(t_1)} \dot{x}(t_1) = \bar{L}(t_1) + \frac{\partial \bar{l}}{\partial t_1} - p(t_1) f(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1))$$

tenglamalar qo'shiladi.

Pontryagin funksiyasiga ko'ra,

$$\frac{\partial \bar{l}}{\partial t_1} = \bar{H}(t_1)$$

shunga oʻxshash, chap tomon uchun, ham

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial t_0} = -\bar{H}(t_0)$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Fiksirlanmagan vaqtli optimal boshqaruv masalasi $t(\tau) = t_0 + (t_1 - t_0)\tau$, $t(0) = t_0$, $t(1) = t_1$, bu yerda $t(\tau)$ monoton oʻsuvchi funksiya, almashtirish yordamida $\tau \in [0, 1]$ ga nisbatan fiksirlangan vaqtli jarayonga keltirish mumkin. Quyidagi $y(\tau) = x(t(\tau))$, $w(\tau) = u(t(\tau))$, $\frac{dt}{d\tau} = v$ belgilashlarni kiritish bilan boshlangʻich masalani yechish, fiksirlangan vaqtli boʻlgan

$$J_1(w) = \int_0^1 v f_0(\tau, y(\tau), w(\tau))\, d\tau + \Phi(y(0), y(1), t(0), t(1)) \to \inf$$

$$\frac{dy}{d\tau} = v f(\tau, y(\tau), w(\tau)), \;\; w(\tau) \in U,$$

$$\frac{dt}{d\tau} = v,$$

$$y(0) = x^0, \;\; y(1) = x^1$$

optimal boshqaruv masalasiga keltiriladi.

Pontryaginning maksimum prinsipi

1-teorema Faraz qilaylik, (1.6)–(1.9)-masalada $\bar{\omega} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ joiz jarayon optimal boʻlsin. U holda optimal boshqaruv–$\bar{u}(t)$ (1.20)-maksimum prinsipini qanoatlantiradi, $\bar{p}(t)$ qoʻshma funksiya esa (1.18)–(1.19)-sistemaning yechimi boʻladi.

Boshlangʻich va oxirgi vaqtlari fiksirlangan, oʻng tomoni erkin boʻlgan optimal boshqaruv masalasini koʻramiz:

$$J(w) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u)\, dt \to \inf, \tag{1.21}$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \tag{1.22}$$

$$u \in U \subset R^r, \tag{1.23}$$

$$x(t_0) = x^0 \in R^n. \tag{1.24}$$

Faraz qilaylik, optimal boshqaruv bo'lakli-uzluksiz bo'lsin. U holda maksimum prinsipini isbotlash hech qanday qiyinchilik tug'dirmaydi.

2-teorema Faraz qilaylik, (1.21)–(1.24)-masalada $(\bar{x}(t),\ \bar{u}(t))$ joiz jarayon optimal bo'lsin. U holda bir vaqtda nol bo'lmagan $\lambda_0 > 0$ soni va $p(t)$ vektor funksiya mavjudki, $\bar{u}(t)$ optimal boshqaruv o'zining uzluksiz nuqtalarida ushbu:

$$(p(t), \varphi(t, \bar{x}(t),\ \bar{u}(t))) - \lambda_0 f(t, \bar{x}(t),\ \bar{u}(t)) =$$

$$\max_{u \in U}[(p(t), \varphi(t, \bar{x}(t), u)) - \lambda_0 f(t, \bar{x}(t), u)]$$

maksimum prinsipini qanoatlantiradi, $p(t)$ qo'shma vektor – funksiya $p(t_1) = 0$ chegaraviy shart ostida:

$$\dot{p} = -\varphi_x^*(t, \bar{x}(t),\ \bar{u}(t))p + \lambda_0 f_x(t, \bar{x}(t),\ \bar{u}(t)) \tag{1.25}$$

sistemaning yechimi bo'ladi.

Avval, biz nimani isbotlashimiz kerakligini aniqlashtirib olaylik. Faraz qilaylik, $(\bar{x}(t),\ \bar{u}(t))$ joiz jarayon optimal bo'lsin, bu yerda $\bar{u}(t)$ boshqaruv bo'lakli-uzluksiz. U holda 2-teoremaga asosan, bir vaqtda nol bo'lmagan λ_0 soni va $p(t)$ vektor-funksiya mavjudki, ular uchun:

a) $p(t)$ vektor-funksiya $p(t_1) = 0$ chegaraviy shartni va (1.25)-differensial tenglamani qanoatlantiradi.

b) (1.25) dan $\lambda_0 \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan, agar $\lambda_0 = 0$ bo'lsa, u holda $p(t)$ funksiya

$$\dot{p} = -\varphi_x^*(t, \bar{x}(t),\ \bar{u}(t))p$$

tenglamaning yechimi bo'lishi kerak, unda $p(t_1) = 0$ shartga asosan $p(t)$ aynan nol funksiya bo'ladi. Shuning uchun, $\lambda_0 = 0$

tenglikning bajarilishi mumkin emas, umumiylikka zarar keltirmagan holda $\lambda_0 = 1$ deb olish mumkin. qilib, biz, agar $p(t)$ funksiya $p(t_1) = 0$ shart ostida

$$\dot{p} = -\varphi_x^*(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))p + f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

qo'shma tenglamaning yechimi bo'lsa,

$$\begin{aligned} &(p(t), \varphi(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) - f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \\ &= \max_{u \in U}[(p(t), \varphi(t, \bar{x}(t), u)) - f(t, \bar{x}(t), u)] \end{aligned} \tag{1.26}$$

tenglik $[t_0, t_1]$ oraliqning deyarli barcha nuqtalarida bajarilishligini tekshirishimiz kerak.

Isbot qilamizki (1.26) tenglik $\bar{u}(t)$ boshqaruvning (t_0, t_1) oraliqqa tegishli uzluksiz nuqtalarida bajariladi. Isbot $\bar{u}(t)$ boshqaruvning "ignasimon" variatsiyasini bevosita qo'llashga asoslangan bo'lib, aslida Veyershtrass shartining isbotini o'zgartirilganidan iborat. qilib, τ $\bar{u}(t)$ boshqaruvning uzluksiz nuqtasi bo'lsin. $v \in U$ vektorni fiksirlab, quyidagi:

$$u(t, \tau, \lambda) = \begin{cases} \bar{u}(t), \text{agar } t \notin [\tau - \lambda, \tau], \\ v, \quad \text{agar } t \in [\tau - \lambda, \tau] \end{cases}$$

$\bar{u}(t)$ boshqaruvning ignasimon variatsiyasi deb ataluvchi boshqaruvni qaraymiz. $u_\lambda(t) = u(t, \tau, \lambda)$ boshqaruvga mos keluvchi (1.24) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi (1.22) tenglamaning yechimini $x_\lambda(t) = x(t, \tau, \lambda)$ bilan belgilaymiz. Agar $t_0 \leq t < \tau - \lambda$ bo'lsa $x_\lambda(t) = \bar{x}(t)$ bo'ladi. Bundan tashqari $(\tau, \bar{x}(\tau))$ nuqtaning atrofida

$$\dot{x} = \varphi(t, x, v)$$

Koshi masalasi yechimga ega va $x_\lambda(t)$ vektor – funksiya $[\tau - \lambda, \tau]$ oraliqda aniqlangan, bu yerda λ yetarlicha kichik son.

$\bar{u}(t)$ boshqaruv τ nuqtada uzluksiz ekan, demak, u bu nuqtaning biror atrofida ham uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun, $\dot{\bar{x}}(t)$ hosila bu atrofda uzluksiz, demak,

$$\bar{x}(\tau) = x(\tau - \lambda) + \lambda\dot{\bar{x}}(\tau - \lambda) + o(\lambda) =$$

$$= x(\tau - \lambda) + \lambda\varphi(\tau - \lambda, \bar{x}(\tau - \lambda), \bar{u}(\tau - \lambda)) + o(\lambda).$$

Xuddi

$$x_\lambda(\tau) = \bar{x}(\tau - \lambda) + \lambda\varphi(\tau - \lambda, \bar{x}(\tau - \lambda), v) + o(\lambda)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan kelib chiqadiki,

$$y(\tau) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{x_\lambda(\tau) - \bar{x}(\tau)}{\lambda}$$

limit mavjud va

$$y(\tau) = \varphi(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) \tag{1.27}$$

tenglik o'rinli.

$\bar{x}(t)$, $x_\lambda(t)$ funksiyalar $[\tau, t_1]$ oraliqda

$$\dot{x} = \varphi(t, x, \bar{u}(t))$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Differensial tenglamaning yechimi boshlang'ich parametrlarga nisbatan uzluksiz va differensiallanuvchi ekanligidan, yetarlicha kichik $\lambda > 0$ soni uchun, $[\tau, t_1]$ oraliqda aniqlangan $x_\lambda(t)$ vektor – funksiyalar $\bar{x}(t)$ ga tekis yaqinlashadi va

$$y(\tau) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{x_\lambda(\tau) - \bar{x}(\tau)}{\lambda}$$

limit har bir $t \in [\tau, t_1]$ da mavjud. $t > \tau$ uchun,

$$x_\lambda(t) = x_\lambda(\tau) + \int_\tau^t \varphi(s, x_\lambda(s), \bar{u}(s))\, ds, \tag{1.28}$$

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(\tau) + \int_{\tau}^{t} \varphi(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s))\, ds, \tag{1.29}$$

tengliklarni hosil qilamiz, (1.28) dan (1.29) ni ayrib quyidagiga:

$$\frac{x_\lambda(t) - \bar{x}(t)}{\lambda} = \frac{x_\lambda(\tau) - \bar{x}(\tau)}{\lambda} +$$
$$+ \int_{\tau}^{t} \frac{\varphi(s, x_\lambda(s), \bar{u}(s)) - \varphi(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s))}{\lambda}\, ds$$

ega bo'lamiz. Bundan $\lambda \to 0$ limitga o'tish bilan,

$$y(t) = y(\tau) + \int_{\tau}^{t} \varphi_x(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) y(s)\, ds$$

tenglikni hosil qilamiz. (Integral ostida limitga o'tish mumkin, chunki φ x bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi, $\bar{u}(t)$ chegaralangan vektor-funksiya). qilib $y(t)$ funksiya (1.27) boshlang'ich shartni qanoatlantiradi va $[\tau, t_1]$ oraliqda

$$\dot{y} = \varphi_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) y$$

differensial tenglamaning yechimi bo'ladi. $t \geq \tau$ bo'lganda:

$$\tfrac{d}{dt}(p(t), y(t)) = (\dot{p}(t), y(t)) + (p(t), \dot{y}(t)) =$$

$$= -(\varphi_x^*(t, \bar{x}(t),\ \bar{u}(t)) p(t), y(t)) + (f_x(t, \bar{x}(t),\ \bar{u}(t)), y(t)) +$$

$$+ (p(t), \varphi_x(t, \bar{x}(t),\ \bar{u}(t)) y(t)) = (f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), y(t)).$$

$p(t_1) = 0$ shartdan foydalangan holda, quyidagicha bo1ladi:

$$(p(t), y(t)) = -\int_{t}^{t_1} (f_x(s, \bar{x}(s),\ \bar{u}(s)), y(s))\, ds.$$

Xususan, (1.27) ga ko'ra:

$$(p(\tau), \varphi(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - \varphi(\tau, \bar{x}(\tau), v)) =$$

$$= \int_{\tau}^{t_1} (f_x(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)), y(s))\, ds. \tag{1.30}$$

$(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ optimal jarayon bo'lganligi uchun:

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}[J(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot)) - J(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))] \geq 0$$

tengsizlik o'rinlidir.

Shu limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-1} \int_{\tau-\lambda}^{\tau} [f(s, x_\lambda(s), v) - f(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s))]\, ds +$$

$$+ \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-1} \int_{\tau}^{t_1} [f(s, x_\lambda(s), \bar{u}(s)) - f(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s))]\, ds =$$

$$= f(\tau, \bar{x}(\tau), v) - f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) + \int_{\tau}^{t_1} (f_x(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) y(s))\, ds.$$

Bundan va (1.30) tenglikdan foydalangan holda:

$$(p(\tau), \varphi(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))) - f(\tau, x(\tau), \bar{u}(\tau)) \geq$$

$$(p(\tau), \varphi(\tau, \bar{x}(\tau), v))) - f(\tau, x(\tau), v)$$

tensizlikni hosil qilamiz.

Ammo τ soni $\bar{u}(t)$ boshqaruvning ixtiyoriy uzluksiz nuqtasi va v vektor U ning ixtiyoriy elementi. Bundan kelib chiqadiki, (1.26) munosabat $\bar{u}(t)$ boshqaruvning barcha uzluksiz nuqtalarida o'rinli bo'ladi, shuni isbot qilish talab etilgan edi.

2-§. Maksimum prinsipi va klassik variatsion hisob

1. Ekstremallarni aniqlovchi Eyler tenglamasi va kuchli lokal minimumning Veyershtrass sharti maksimum prinsipining natijasi hisoblanadi.

Quyidagi:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \inf, \quad x(t_0) = x^0$$

klassik variatsion masalani qaraylik. $\dot{x}(t) = u(t)$ belgilashni kiritish bilan, ko'rilayotgan masalani ekvivalent bo'lgan:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf, \tag{2.1}$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \ x(t_0) = x^0, \ U \equiv R^n \tag{2.2}$$

masalaga keltiramiz.

(2.1)–(2.2)-masala uchun

$$H(t, x, u, p(t)) = -\lambda_0 L(t, x, u) + (p(t), u) \tag{2.3}$$

Pontryagin funksiyasini va

$$\dot{p}(t) = \lambda_0 L_x(t, \bar{x}, \bar{u}) \tag{2.4}$$

qo'shma sistemani yozamiz.

$(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \ t \in [t_0, t_1]$ optimal jarayon

$$\begin{aligned} &-\lambda_0 L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + (p(t), \bar{u}(t)) = \\ &= \max_{u \in R^n} [-\lambda_0 L(t, \bar{x}(t), u) + (p(t), u)], \ t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \tag{2.5}$$

maksimum prinsipini qanoatlantiradi. Klassik variatsion masalada $L(t, x, \dot{x})$ funksiya argumentlari bo'yicha ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lganligi sababli (2.5)-shartdan

$$H_u = -\lambda_0 L_u(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + p(t) = 0 \tag{2.6}$$

ayniyat kelib chiqadi.

Bundan ko'rinib turibdiki $\lambda_0 \neq 0$, chunki aks holda, ya'ni $\lambda_0 = 0$ bo'lsa (2.6) dan $p(t) = 0$ kelib chiqadi, bu esa maksimum prinsipi teoremasining shartiga zid. $\lambda_0 = 1$ deb olamiz.

1) (2.6) ni t bo'yicha differensiallab:

$$\frac{d}{dt}[-L_u(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + p(t)] = 0$$

ayniyatga kelamiz, (2.4) dan foydalanib,

$$-\frac{d}{dt}L_u(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$$

ayniyatni hosil qilamiz. Demak, optimal jarayon Eyler tenglamasini qanoatlantirar ekan.

2) O'ng tomoni qo'zg'almas bo'lganligi sababli $p(t_1) = 0$ bo'ladi, yoki $L_{\dot{x}}(t_1, \bar{x}(t_1), \dot{\bar{x}}(t_1)) = 0$ bu esa o'ng tomon uchun, transversallik shartidir.

3) $H(t, \bar{x}(t), u, p(t))$ funksiyaning $u = \bar{u}(t)$ da maksimumga erishishining zaruriy sharti $H_{uu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t))$ matritsaning musbat bo'lmasligidir. Buni hisobga olgan holda (2.3) dan:

$$L_{uu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \geq 0, \;\; t \in [t_0, t_1]$$

$$(L_{uu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\xi, \xi) \geq 0, \;\; \forall \xi \in R^n$$

ya'ni Lejandr sharti hosil bo'ladi.

4) Variatsion hisobning Vershtrass sharti maksimum prinsipining natijasi bo'ladi. Buni ko'rsatish uchun, (2.5) ni quyidagicha:

$$-L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + (p(t), \bar{u}(t)) \geq -L(t, \bar{x}(t), u) + (p(t), u), \;\; \forall t \in [t_0, t_1], \;\; \forall u \in R^n \tag{2.7}$$

ekvivalent ko'rinishda yozib olamiz.

Variatsion hisobning klassik masalasida $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$ va $u(t)$ kamida uzluksiz bo'ladi, shuning uchun, (2.7) tengsizlik ixtiyoriy $u \in R^n$ da o'rinlidir.

$$u=\xi,\ \bar{u}(t)=\dot{\bar{x}}(t),\ p(t)=L_{\dot{x}}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) \tag{2.8}$$

belgilashlarni hisobga olgan holda (2.7) ni quyidagicha:

$$\begin{gathered}L(t,\bar{x}(t),\xi)-L(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))-(L_{\dot{x}}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))(\xi-\dot{\bar{x}}))\geq 0,\\ \forall t\in[t_0,t_1],\ \forall\xi\in R^n\end{gathered} \tag{2.9}$$

yozib olamiz. (2.9) tengsizlik Veyershtrass shartini ifodalaydi.

5) $p(t)$ funksiya absolyut uzluksiz ekanligini hisobga olib, (2.3), (2.5) va (2.8) dan

$$\begin{gathered}\left(L_{\dot{x}}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))\right)_t=0,\\ \left((\dot{\bar{x}}(t),L_{\dot{x}}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)))-L(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))\right)_t=0,\ t\in[t_0,t_1]\end{gathered} \tag{2.10}$$

kelib chiqadi, bu yerda

$$\left(z(t)\right)_t=z(t+0)-z(t-0)$$

belgilash kiritilgan. (2.10) shart $x(t)$, $(t\in[t_0,t_1])$ ning hosilalari uzilishga ega bo'lgan nuqtalarida Erdman – Veyershtrass shartini beradi.

6) Quyidagi izoperimetrik masalani qaraymiz:

$$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt\to\inf,$$

$$K_1=\int_{t_0}^{t_1}G_1(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt,$$

$$x(t_0)=x^0,\ x(t_1)=x^1.$$

$\dot{x}(t) = u(t)$ belgilashni kiritish bilan bu masalaga ekvivalent bo'lgan:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf,$$

$$K_1 = \int_{t_0}^{t_1} G_1(t, x(t), u(t))\, dt,$$

$$\dot{x} = u,$$

$$x(t_0) = x^0, \ x(t_1) = x^1$$

masalani hosil qilamiz.

x vektorga qo'shimcha x^0 komponenta kiritamiz, u

$$\dot{x}^0 = G_1(t, x(t), u(t))\, dt, \ x^0(t_0) = 0$$

tenglamani qanoatlantiradi.

qilib

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \\ \dot{x}^0 = G_1(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

differensial tenglamar sistemasiga ega bo'lamiz, bu yerdan

$$x^0(t) = \int_{t_0}^{t_1} G_1(s, x(s), u(s))\, ds,$$

$$x^0(t_1) = K_1.$$

Pontryagin funksiyasini yozamiz:

$$H(t, x, u, p(t)) = -\lambda_0 L(t, x, u) + (p(t), u) + p^0(t) G_1(t, x, u).$$

Maksimum prinsipiga asosan optimal boshqaruv Pontryagin funksiyasiga maksimum qiymat beradi, $U = R^n$ bo'lganligi uchun, maksimumga erishishning zaruriy sharti – statsionarlik $\bar{H}_u(t) = 0$ bajariladi, ya'ni:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial u}(t) = -\lambda_0 \frac{\partial L(t, \bar{x}, \bar{u})}{\partial u} + p(t) + p^0(t) \frac{\partial G_1(t, \bar{x}, \bar{u})}{\partial u} = 0. \quad (2.11)$$

Qo'shma sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = \lambda_0 \frac{\partial L(t,\bar{x},\bar{u})}{\partial x} - p^0(t) \frac{\partial G_1(t,\bar{x},\bar{u})}{\partial x}, \\ \\ \dot{p}^0(t) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x^0} = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Bundan kelib chiqadiki: $p^0(t) = \lambda = const.$ $u = \dot{x}$ ekanligini hisobga olib (2.11) munosabatni quyidagicha yozib olamiz:

$$-\lambda_0 \frac{\partial L(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})}{\partial \dot{x}} + p(t) + p^0(t) \frac{\partial G_1(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\widetilde{L} = -\lambda_0 L + p^0(t) G_1,$$

u holda oxirgi tenglama quyidagi ko'rinishda

$$p(t) + \frac{\partial \widetilde{L}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.13)$$

bo'ladi. (2.13) ni t bo'yicha differensiallab,

$$\dot{p}(t) + \frac{d}{dt} \frac{\partial \widetilde{L}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.14)$$

tenglikni hosil qilamiz.

(2.12) qo'shma sistemani

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \widetilde{L}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))}{\partial x} \quad (2.15)$$

ko'rinishda yozib olamiz.

(2.14) va (2.15) larni birlashtirib, izoperimetrik masala uchun, quyidagi:

$$\frac{\partial \widetilde{L}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))}{\partial \dot{x}} = 0$$

Eyler – Lagranj tenglamasini hosil qilamiz.

Optimal boshqaruvga doir masalalarni yechish
1-misol.

$$J(u) = \int_0^2 x_1\,dt$$

ko'rinishdagi funksionalning minimumini topish talab etiladi. Bunda

$$x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

boshlang'ich

$$|u| \le 1,$$

boshqaruvga chegara va

$$x_1(2) = x_(2) = 0,$$

chegaraviy shartlar hamda

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u$$

dinamik chegaralar berilgan.

Yechish. Pontryagin funksiyasi quyidagi:

$$H(t,x,u,\lambda_0,p(t)) = -\lambda_0 x_1 + p_1(t)x_2 + p_2(t)u$$

ko'rinishda bo'ladi.

Maksimum prinsipiga asosan optimal boshqaruv

$$H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{\lambda}_0,\bar{p}(t)) = \max_{|u|\le 1}(H(t,\bar{x}(t),u,\lambda_0,p(t))$$

tenglikni qanoatlantiradi. Bundan $p_2(t)\bar{u}(t) = \max\limits_{|u|\le 1} p_2(t)u$ ga ega bo‘lamiz. Maksimum prinsipiga asosan optimal boshqaruv

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & p_2(t) > 0, \\ -1, & p_2(t) < 0, \\ \text{[-1,1]}\ dan\ ixtiyoriy, & p_2(t) = 0, \end{cases}$$

bo‘ladi. Agar $p_2(t) = 0$ chekli vaqt momentlari t da ro‘y bersa, bu nuqtalarda boshqaruvning qiymatlarini ixtiyoriy deb olish mumkin. Mabodo, $p_2(t) = 0$ musbat o‘lchovli to‘plamda o‘rinli bo‘lsa, u holda boshqa optimallik shartlaridan foydalanishga to‘g‘ri keladi:

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda_0, p(t))}{\partial x_1} = \lambda_0,$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda_0, p(t))}{\partial x_2} = -p_1(t)$$

qo‘shma sistemani yozamiz.

O‘ng va chap tomonlar qo‘zg‘almas bo‘lganligi uchun, transversallik sharti natija bermaydi.

Avval regulyar bo‘lmagan yechimlarni tahlil etamiz, ya’ni $\lambda_0 = 0$ bo‘lsin. U holda qo‘shma sistema quyidagi:

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = 0, \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) \end{cases} \tag{2.16}$$

ko‘rishni oladi, buni integrallaymiz:

$$\begin{cases} p_1(t) = c, \\ p_2(t) = -ct + b. \end{cases} \tag{2.17}$$

Ko‘rsatish mumkinki, optimal boshqaruv o‘zgarmas son bo‘la olmaydi, chunki bunda holat uchun, boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bajarilmaydi. (2.16), (2.17) dan kelib chiqadiki, optimal boshqaruv o‘z qiymatini ko‘pi bilan faqat bir marta o‘zgartira oladi, chunki nol bo‘magan chiziqli $p_2(t)$ funksiya o‘z ishorasini ko'pi bilan bir marta almashtirishi mumkin, bu almashtirish momentini τ bilan belgilaymiz. U holda quyidagi ikkita hol bo'lishi mumkin:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,\tau], \\ 1, & t \in [\tau, 2], \end{cases} \qquad \bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,\tau], \\ -1, & t \in [\tau, 2]. \end{cases} \tag{2.18}$$

1. (2.18) ning birinchi holini qaraymiz, ya'ni

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,\tau], \\ 1, & t \in [\tau, 2]. \end{cases} \tag{2.19}$$

$t \in [0,\tau]$ da

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -1 \end{cases}$$

sistemaning umumiy yechimi:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = -\frac{t^2}{2} + At + B, \\ \bar{x}_2(t) = -t + A \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi. Boshlang'ich shartlardan foydalanib A va B larni topamiz:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(0) = B = 0, \\ \bar{x}_2(0) = A = 0. \end{cases}$$

$t \in [\tau, 2]$ da mos sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \frac{t^2}{2} + A_1 t + B_1, \\ \bar{x}_2(t) = t + A_1 \end{cases}$$

bo'lib, chegaraviy shartlardan foydalanamiz:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(2) = 2 + 2A_1 + B_1 = 0 \Rightarrow A_1 = -2, \\ \bar{x}_2(2) = 2 + A_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 2. \end{cases}$$

$\bar{x}_2(t)$ funksiyaning τ nuqtada uzluksiz bo'lishligidan $\bar{x}_2(\tau - 0) = \bar{x}_2(\tau + 0)$ ga yoki $-\tau = \tau - 2$ ga ega bo'lamiz. Buni yechib $\bar{u}(t)$ boshqaruv qiymati o'zgarish momenti $\tau = 1$ ni topamiz. Bundan:

$$\bar{x}_1(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2}, & t \in [0,1], \\ -\frac{t^2}{2} - 2t + 2, & t \in (1,2], \end{cases} \quad \bar{x}_2(t) = \begin{cases} -t, & t \in [0,1], \\ -t - 2, & t \in (1,2]. \end{cases}$$

x_2(t) funksiya $t = \tau = 1$ da uzluksiz emas, demak, (2.19) mumkin emas ekan.

2. Shunga o‘xshash (2.18) ning ikkinchi holini ko‘ramiz: $t \in [0, \tau]$ da

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 1 \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Uning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \frac{t^2}{2} + A_2 t + B_2, \\ \bar{x}_2(t) = t + A_2. \end{cases}$$

Chegaraviy shartlardan foydalanib, quyidagini olamiz:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(0) = B_2 = 0, \\ \bar{x}_2(0) = A_2 = 0. \end{cases}$$

Demak,

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \frac{t^2}{2}, \\ \bar{x}_2(t) = t. \end{cases}$$

Agar $t \in [\tau, 2]$ bo‘lsa

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -1 \end{cases}$$

dinamik sistema

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = -\frac{t^2}{2} + A_3 t + B_3, \\ \bar{x}_2(t) = -t + A_3 \end{cases}$$

umumiy yechimga ega bo‘ladi. Bu yerda ham chegaraviy shartlardan foydalangan holda,

$$\begin{cases} \bar{x}_1(2) = -2 + 2A_3 + B_3 = 0 \Rightarrow A_3 = 2, \\ \bar{x}_2(2) = -2 + A_3 = 0 \Rightarrow B_3 = -2 \end{cases}$$

ga ega bo‘lamiz. Yoki

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t - 2, \\ \bar{x}_2(t) = -t + 2. \end{cases}$$

$x_2(t)$ funksiyaning τ momentda uzluksizligidan $\tau = -\tau + 2$ tenglik hosil bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki, boshqaruvning qiymat almashtirish momenti $\tau = 1$ ga teng bo'lar ekan. Bu nuqtada $x_1(t)$ funksiya uzluksiz emas, demak, bu holda regulyar bo'lmagan yechimlar yo'q ekan.

3. Regulyar holni qaraymiz. $\lambda_0 = 1$ bo'lsin, u holda qo'shma sistemaning yechimi:

$$\begin{cases} p_1(t) = t + c, \\ p_2(t) = -\frac{t^2}{2} - ct + b. \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi.

$p_2(t) = -\frac{t^2}{2} - ct + b$ parabola $[0, 2]$ kesmani ko'pi bilan ikki marta kesib o'tishi mumkin. Regulyar bo'lmagan holda ko'rdikki, boshqaruv o'zgarmas ham, bir marta qiymatini o'zgartirishi ham maqsadga olib kelmaydi. Shu sababli yuqoridagi parabola kesmani ikki marta kesib o'tishi kerak. Parabolaning shoxlari pastga yo'nalgani uchun, boshqaruv qiymati avval minus, keyin plyus va yana minus bo'ladi. Shuning uchun, optimal boshqaruvning ko'rinishi

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau_1], \\ 1, & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ -1, & t \in [\tau_2, 2], \end{cases}$$

bo'ladi:

a) $\bar{u}(t) = -1,\ t \in [0, \tau_1]$ bo'lsin, unda

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -1 \end{cases}$$

sistemaning yechimi

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = -\frac{t^2}{2} + A_1 t + B_1, \\ \bar{x}_2(t) = -t + A_1 \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi. Chegaraviy shartlardan foydalanamiz:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(0) = B_1 = 0, \\ \bar{x}_2(0) = A_1 = 0; \end{cases}$$

b) $\bar{u}(t) = -1,\ t \in [\tau_2, 2]$ bo'lsin, u holda,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -1 \end{cases}$$

sistemaning yechimi

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = -\frac{t^2}{2} + A_2 t + B_2, \\ \bar{x}_2(t) = -t + A_2 \end{cases}$$

bo'ladi.

Chegaraviy shartlardan foydalanib A_2, B_2 larni topamiz:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(2) = -2 + 2A_2 + B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = -2, \\ \bar{x}_2(2) = -2 + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 2; \end{cases}$$

c) $\bar{u}(t) = 1,\ t \in [\tau_1, \tau_2]$ bo'lsin, u holda

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 1 \end{cases}$$

sistema

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \frac{t^2}{2} + A_3 t + B_3, \\ \bar{x}_2(t) = t + A_3 \end{cases}$$

yechimga ega bo'ladi. $x_1(t)$ va $x_2(t)$ funksiyalarning uzluksizligidan

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(\tau_1 - 0) &= \bar{x}_1(\tau_1 + 0), \\ \bar{x}_2(\tau_1 - 0) &= \bar{x}_2(\tau_1 + 0), \\ \bar{x}_1(\tau_2 - 0) &= \bar{x}_1(\tau_2 + 0), \\ \bar{x}_2(\tau_2 - 0) &= \bar{x}_2(\tau_2 + 0) \end{aligned}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bundan

$$A_3 = -1,\ B_3 = \frac{1}{4},\ \tau_1 = \frac{1}{2},\ \tau_2 = \frac{3}{2}$$

kelib chiqadi. U holda optimallikning zaruriy shartiga asosan:

$$\bar{u}_1(t) = \begin{cases} -1, t \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1, \ t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \\ -1, t \in [\frac{3}{2}, 2] \end{cases} \qquad \bar{x}_1(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2}, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{4}, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \\ -\frac{t^2}{2} + 2t - 2, & t \in [\frac{3}{2}, 2]. \end{cases}$$

$$\bar{x}_2(t) = \begin{cases} -t, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ t - 1, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \\ -t + 2, & t \in [\frac{3}{2}, 2]. \end{cases}$$

hosil bo'ladi. Optimal jarayonda funksionalning qiymati

$$L(u) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{t^2}{2}\right) dt + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{4}\right) dt +$$
$$\int\limits_{\frac{3}{2}}^{2} \left(-\frac{t^2}{2} + 2t - 2\right) dt = \frac{1}{4}$$

ga teng.

2-misol. Quyidagi:

$$|\ddot{x}| \le 2, \ x(1) = \dot{x}(1) = 0$$

chegaralar ostida

$$\int\limits_0^1 x \, dt$$

funksionalning minimumi topilsin.

Yechish. $x = x_1$, $\dot{x}_2 = x_2$, $\ddot{x}_2 = u$ belgilashlardan foydalanib, ekvivalent masalaga o'tamiz:

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = u, \ |u| \le 2, \ x_1(1) = x_2(1) = 0$$

chegaralar ostida

$$\int_0^1 x_1\, dt$$

funksionalning minimumini toping. Ushbu masala uchun, Pontryagin funksiyasi quyidagicha:

$$H(t, x, u, \lambda_0, p(t)) = -\lambda_0 x_1 + p_1(t) x_2 + p_2(t) u$$

bo‘ladi. Maksimum prinsipiga asosan $\bar{u}(t)$ optimal boshqaruv

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \lambda_0, p(t)) = \max_{|u|\leq 2}(H(t, \bar{x}(t), u, \lambda_0, p(t)),$$

tenglikni qanoatlantiradi, bu yerdan

$$p_2(t)\bar{u}(t) = \max_{|u|\leq 2} p_2(t) u.$$

Maksimum prinsipidan

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 2, & p_2(t) > 0, \\ -2, & p_2(t) < 0 \end{cases}$$

kelib chiqadi.

Qo‘shma sistemaning ko‘rinishi quyidagicha:

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda_0, p(t))}{\partial x_1} = \lambda_0,$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda_0, p(t))}{\partial x_2} = -p_1(t).$$

Terminal qo‘shiluvchi yo‘qligini hisobga olgan holda, qo‘zg‘aluvchi tomonlardagi transversallik shartini yozamiz:

$$p_1(0) = 0,\ p_2(0) = 0.$$

Avval regulyar bo‘lmagan yechimlarni tahlil qilamiz. $\lambda_0 = 0$ bo‘lsin, u holda qo‘shma sistema

$$\dot{p}_1(t) = 0,$$
$$\dot{p}_2(t) = -p_1(t)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Uning yechimini, quyidagi:

$$\begin{cases} p_1(t) = C_1, \\ p_2(t) = -C_1 t + C_2. \end{cases}$$

funksiyalar tashkil qiladi. Transversallik sharti hisobga olinsa:

$$p_1(0) = C_1 = 0, \ p_2(0) = C_2 = 0$$

kelib chiqadi. qilib, agar $\lambda_0 = 0$ bo‘lsa $p_1(t) = 0, \ p_2(t) = 0$ bo‘lar ekan, ya’ni Lagranj ko‘paytuvchilarining barchasi bir vaqtda nolga teng bo‘ladi, shu sababli regulyar bo‘lmagan yechimlar yo‘q.

Regulyar bo‘lgan holni qaraymiz, ya’ni $\lambda_0 = 1$ bo‘lsin. Bu holda qo‘shma sistema:

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = 1, \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘lib, uning yechimini

$$p_1(t) = t + C_1,$$

$$p_2(t) = -\frac{t^2}{2} - C_1 t + C_2$$

funksiyalar tashkil qiladi.

$$p_1(0) = C_1 = 0, \ p_2(0) = C_2 = 0$$

transversallik shartini hisobga olgan holda $p_1(t) = t, \ p_2(t) = -\frac{t^2}{2}$ ni hosil qilamiz.

$p_2(t) < 0$ bo‘lganligi uchun, ixtiyoriy t da $\bar{u}(t) = -2$ ga ega bo‘lamiz. Buni hisobga olgan holda:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2, \\ \dot{x}_2(t) = -2 \end{cases}$$

sistemani yechish orqali, uning $x_1(t) = -t^2 + C_1 t + C_2, \ x_2(t) = -2t + C_1$ yechimini hosil qilamiz.

Chegaraviy shartlardan foydalangan holda C_1, C_2 larni topamiz:

$$x_1(1) = -1 + C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 2$$
$$x_2(1) = -2 + C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = -1$$

Bundan kelib chiqadiki:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = t^2 + 2t - 1, \\ \bar{x}_2(t) = -2t + 2. \end{cases}$$

qilib optimallikning zaruriy shartini, quyidagi:

$$\bar{u}(t) = -2, \ t \in [0, 1]$$

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = t^2 + 2t - 1, \\ \bar{x}_2(t) = -2t + 2 \end{cases}$$

funksiyalardan tashkil topgan jarayon qanoatlantiradi.

Optimal boshqaruvning bir masalasida yechimning mavjudligi haqidagi teorema

Ekstremal masalalarda yechimning mavjudligi muhim o'rinni tutadi. Umumiy holda nochiziq optimal boshqaruv masalalarida bu muammo to'la hal etilmagan.

Avval, biz oddiy differensial tenglamalar sistemasi bo'lgan $\dot{x} = f(t, x, u)$ da o'lchovli vektor-funksiyalar sinfi $u(t) \in U(t, x) \subset R^p$ uchun, optimal boshqaruvning mavjudligi masalasini ko'raylik. Bu yerda optimallik tezkor o'tish ma'nosida, ya'ni sistemani berilgan $x^0 \in R^n$ nuqtadan berilgan $x^1 \in R^n$ nuqtaga eng qisqa vaqtda olib kelish masalasidir. Bunda $t_0 = 0, \ t_1 = T$ deb olinadi, demak,

$$u(t) \in U(t, x) \subset R^n, \ t \in [0, T], \ x \in R^n,$$

bu yerda $U(t, x)$ har bir (t, x) da R^n ning kompakt to'plam ostisi. $f(t, x, u)$ barcha (t, u) lar bo'yicha uzluksiz, x bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi va

$$(x, f(t,x,u)) \leq c(|x|^2 + 1)$$

shartni qanoatlantiruvchi funksiya deb faraz etiladi.

u $U(t,x)$ dan qiymat qabul qilganda $f(t,x,u)$ vektor funksiyaning qiymatlari $Q(t,x)$ ni tashkil etsin, ya'ni:

$$Q(t,x) = \{\xi : \xi = f(t,x,u),\ u \in U(t,x),\ (t,x) \in [0,T] \times R^n\}$$

bo'lsin.

$$Q(t,x) \subset R^n$$

to'plam *erishuvchanlik to'plami deb ataladi.*

Keyingi o'rinlarda biz quyidagini faraz qilamiz: $U(t,x)$ ni (t,x) bo'yicha yuqoridan yarim uzluksiz, ya'ni $\forall t, x, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, t, x)$, natijada $|t' - t| < \delta, |x' - x| < \delta$ bo'lganda $U(t', x')$ $U(t,x)$ ning ε atrofining ichiga joylashgan bo'lsa: $U(t', x') \subset U(t,x) + \varepsilon S$, bu yerda S, R^n ning markazi nolda bo'lgan birlik radiusli shari.

Agar $U(t,x)$ yarim uzluksiz bo'lsa, $Q(t,x)$ ham yarim uzluksiz bo'ladi.

1-teorema. Yuqorida aytilgan barcha farazlar bajarilgan va $Q(t,x)$ barcha (t,x) larda qavariq soha bo'lsin. Faraz qilaylik, kamida bitta o'lchovli $\widetilde{u}(t) = U(t, \widetilde{x}(t))$ funksiya mavjud bo'lsinki, $\dot{x} = f(t, x, \widetilde{u})$ differensial tenglamalar sistemasining $\widetilde{x}(0) = x^0$ shartni qanoatlantiruvchi $\widetilde{x}(t)$ yechimi biror t^* da x^1 nuqtadan o'tsin: $\widetilde{x}(t^*) = x^1$. U holda o'lchovli $u(t) \in U(t, x(t))$ funksiya mavjudki, unga mos kelgan differensial tenglamalar sistemasi $\dot{x} = f(t, x, u(t))$ ning $x(0) = x^0$ shartni qanoatlantiruvchi $x(t)$ yechimi x^1 nuqtaga eng qisqa payt T da keladi: $x(T) = x^1$.

Albatta, mexanik sistemalarda o'lchovli funksiyalar sinfiga tegishli bo'lgan boshqaruvni tatbiq etib bo'lmaydi.

Ammo o'lchovli funksiyaga uzluksiz funksiyalar bilan ixtiyoriy darajada yaqinlashish mumkinligidan, optimal boshqaruvning mavjudligi haqidagi teorema muhimligi bilan ajralib turadi. Agar $\dot{x} = f(t, x, u(t))$ sistemada o'lchovli $u(t)$ boshqaruv $v(t)$ uzluksiz boshqaruvga almashtirilsa, yechimning boshlang'ich parametrlarga uzluksiz bog'liq bo'lishlik haqidagi teoremaga asosan, $x_v(t)$ trayektoriya oxirgi x^1 nuqtaga aniq kelib tushmasligi mumkin, ammo unga ixtiyoriy darajada yaqin bo'ladi.

2-teorema shartlaridan tashqari, yana quyidagi shartlar ham bajarilgan bo'lsin: $U(t, x)$ qat'iy qavariq va (t, x) larga nisbatan uzluksiz bo'lsin, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ ga ko'ra $\delta > 0$ mavjud bo'lsinki, $|t_1 - t_2| < \delta$ va $|x_1 - x_2| < \delta$ dan $U(t_1, x_1)$, $U(t_2, x_2)$ to'plamlar orasidagi masofa ε dan kichik bo'lishligi kelib chiqsin.

Faraz qilaylik, har bir $v \in Q(t, x)$ uchun, yagona $u \in U(t, x)$ mavjudki, ular uchun, $f(t, x, u) = v$ tenglik o'rinli bo'lsin. U holda Pontryagin funksiyasiga maksimum beruvchi $u(t)$ t ga uzluksiz bog'liq bo'ladi.

Izoh. Agar $U(t, x)$ qavariq bo'lmasa optimal boshqaruv mavjud bo'lmasligi mumkin (buni tasdiqlovchi misollar bor).

3-§. Chiziqli tizimlarni optimal boshqarish masalalari

Masalaning qo'yilishi. Quyida chiziqli o'zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar sistemasi bilan ifodalangan boshqaruv masalasi atroflicha o'rganiladi. Bu yerda chiziqlilik ham $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ham $u = (u_1, u_2, ..., u_p)$ larga nisbatandir. Boshqaruv masalasining umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3.1}$$

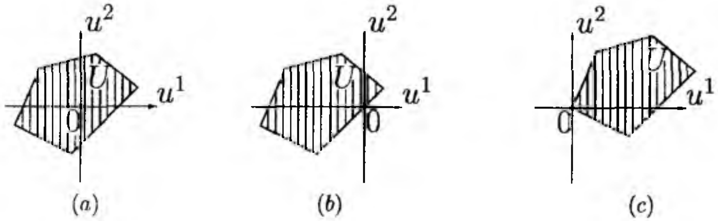
bu yerda $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ lar mos ravishda $(n \times n)$, $(n \times p)$ o'lchamli jadvallar(matritsalar) bo'lib, boshqaruv parametri u ning qabul qiladigan qiymatlar to'plami U R^p fazoda chegaralangan ko'pyoqdan iborat. Biz keyinchalik faqat tezkor masalani ko'ramiz.

Chiziqli optimal boshqaruvning tezkor masalasi deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi masalaga aytiladi:

1) obyektning harakati chiziqli differensial tenglamalar sistemasi orqali berilgan;

2) obyekt oxirida kelishi zarur bo'lgan holat R^n fazoning koordinat boshi, ya'ni: 0=(0, 0,...,0);

3) boshqaruv sohasi U R^p fazoning qavariq ko'pyog'i bo'lib, koordinat boshi U ga tegishli, ammo uning uchi bo'la olmaydi. Bu holatlar quyida ko'rsatilgan:



3.1-rasm

Bunda 3.1-rasmning (a) va (b) holatlari mumkin, (c) holati mumkin emas.

Joiz boshqaruv $u(t)$ sifatida bo'lakli uzluksiz qiymati U da yotgan funksiya olinadi. Demak, chiziqli optimal boshqaruvda tayin berilgan x^0 nuqtadan koordinata boshiga eng tez kelishni ta'minlovchi joiz $u(t)$ boshqaruvni topish masalasi ko'riladi, ya'ni topilgan $u(t)$ ga mos kelgan (3.1) ning trayektoriyasi $x(t)$ $t_0 = 0$ da x^0 dan chiqib eng qisqa vaqt T da 0 ga kelishi kerak: x(T)=0. Shunga o'xshash masalalarning kelib chiqishini quyidagicha asoslash mumkin. Jarayon 0 holatda qoniqarli ishlab turgan edi, qandaydir tasodifiy ta'sir ostida ushbu ma'qul holatdan chiqib ketdi va oldindan ma'lum bo'lmagan x^0 holatga o'tib qoldi, uni shu x^0 holatdan 0 holatga tez vaqtda olib kelish kerak bo'ladi. Shu ma'noda, tezkor o'tkazishni amalga oshiruvchi avtomatik boshqaruv regulyatorni qurish muhim hisoblanadi. Bu esa, o'z navbatida, ushbu o'tkazishni amalga oshiruvchi optimal boshqaruvni aniqlab berish masalasiga kelib taqaladi. Aniqki R^n fazoning koordinata boshi bir jinsli ($\dot{x} = Ax$) (3.1)-sistemaning muvozanat holati hisoblanadi, shu sababli jarayon bu yerga kelgandan keyin qolib ketishligi uchun, $u = 0$ deb olish kerak, shunga ko'ra U boshqaruv sohaga 0 tegishli deb olinadi. Ushbu tezkor chiziqli masala uchun, maksimum prinsipi soddalashgan holda bo'ladi.

Maksimum prinsipi. Tezkor optimal boshqaruv masalasida funksionalning ko'rinishi quyidagicha:

$$J(u) = \int_0^T 1 \cdot dt$$

bo'lganligi sababli, Pontryagin funksiyasi

$$H(t, x, u, p(t), \lambda_0) = -\lambda_0 \cdot 1 + (p(t), Ax) + (p(t), Bu) \qquad (3.2)$$

ko'rinishni oladi. Qo'shma vektor-funksiya $p(t)$ quyidagi:

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H(t, x, p(t), u, \lambda_0)}{\partial x}. \qquad (3.3)$$

differensial tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi. Shunga ko'ra,

$$\dot{p}(t) = -A^* p(t) \qquad (3.4)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda A^* jadval A ning transponirlanganiga teng. Maksimum prinsipiga asosan (3.2) ning $u \in U$ bo'yicha maksimumini topish kerak, ammo birinchi va ikkinchi qo'shiluvchilar u ga bog'liq emas, shu sababli faqat oxirgi qo'shiluvchining maksimumini aniqlash yetarli:

$$(p(t), Bu(t)) = \max_{u \in U}(p(t), Bu). \qquad (3.5)$$

Ushbu tezkor optimal boshqaruv masalasi uchun, soddalashtirilgan maksimum prinsipi quyidagicha bo'ladi: agar $u(t)$ joiz boshqaruv ko'rilayotgan tezkor masala uchun, optimal bo'lsa, u holda qo'shma (3.4)-sistemaning nol bo'lmagan $p(t)$ yechimi mavjudki, (3.5)-tenglik ixtiyoriy $t \in [0, T]$ da o'rinli bo'ladi.

Erishuvchanlik sohasi. Agar $u(t)$ biror joiz boshqaruv bo'lsa, unga mos trayektoriyani (3.1)-sistemaga Koshi formulasini qo'llash orqali topish mumkin:

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\, ds. \tag{3.6}$$

Mabodo, ushbu joiz boshqaruvga mos kelgan $x(t)$ trayektoriya x^0 va 0 nuqtalardan o'tsa, ya'ni: $x(0) = x^0$, $x(t_1) = 0$. U holda (3.6) ga ko'ra,

$$0 = e^{At}x^0 + \int_0^{t_1} e^{A(t-s)} Bu(s)\, ds$$

yoki

$$-x^0 = \int_0^{t_1} e^{-As} Bu(s)\, ds \tag{3.7}$$

bo'ladi. Biror $t_1 = T$ ni fiksirlaymiz va (3.7) dagi $u(t)$ ning o'rniga barcha joiz boshqaruvlarni qo'yib, (3.7) tenglikni qanoatlantiruvchi, ularga mos x^0 nuqtalar to'plamini hosil qilamiz. Hosil bo'lgan bunday to'plam X_T bilan belgilanib, u T vaqtga mos *erishuvchanlik sohasi* deb ataladi. Demak, X_T x^0 nuqtalardan tuzilganki, ularni T vaqt davomida koordinata boshiga olib keluvchi kamida bitta joiz boshqaruv mavjud.

1-lemma. Erishuvchanlik sohasi R^n fazoda qavariq to'plam bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $x^0 \in X_T$ bo'lsin. U holda (yagona bo'lishi shart emas) joiz boshqaruv $u(t) \in U$ topiladiki, mos $x(t)$ trayektoriya uchun, $x(0) = x^0$ va biror $t_1 \leq T$ da $x(t_1) = 0$ tengliklar o'rinli bo'ladi. Agar $t_1 < T$ bo'lsa, $u(t) = 0,\ t_1 \leq t \leq T$ deb olish hisobiga x(T)=0 ni ta'minlash mumkin. qilib ham boshqaruv $u(t)$, ham mos trayektoriya $x(t)$, $[0, T]$ oraliqda aniqlangan va $u(t) \in U$, $0 \leq t \leq T$, $x(T) = 0$ shartlar bajariladi.

x^0 va $\widetilde{x}^0$ lar X_T ning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda, shunday $u(t)$ va $\widetilde{u}(t)$ joiz boshqaruvlar topiladiki, ularning mos trayektoriyalari uchun, $x(0) = x^0$, $\widetilde{x}(0) = \widetilde{x}^0$ va $x(T) = \widetilde{x}(T) = 0$ shartlar bajariladi. x^* esa x^0 va $\widetilde{x}^0$ nuqtalarni birlashtiruvchi kesmaning biror nuqtasi bo'lsin. U holda $0 \leq \lambda \leq 1$ soni borki,

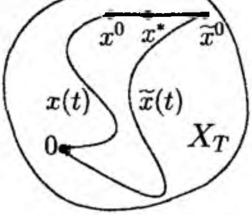
$$x^* = (1 - \lambda)x^0 + \lambda\widetilde{x}^0,$$

tenglik bajariladi. Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

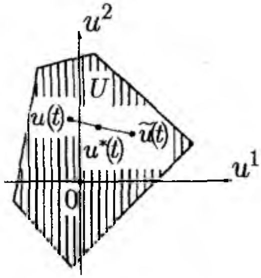
$$u^*(t) = (1 - \lambda)u(t) + \lambda\widetilde{u}(t),\ 0 \leq t \leq T; \qquad (3.8)$$

$$x^*(t) = (1 - \lambda)x(t) + \lambda\widetilde{x}(t),\ 0 \leq t \leq T.$$

U boshqaruv sohasi qavariq ko'p yoqli va $u(t), \widetilde{u}(t) \in U$ bo'lganligi sababli (3.8) orqali aniqlangan $u^*(t)$ uchun, $u^*(t) \in U$ bo'ladi (3.3-rasm). Uning joiz boshqaruv bo'lishligi ravshan.



3.2-rasm



3.3-rasm

Tushunarli, x^* nuqaning erishuvchanlik sohasi X_T ga tegishliligi ko'rsatilsa, bundan lemmaning isboti kelib chiqadi. $x(t)$, $\widetilde{x}(t)$

trayektoriyalar $u(t)$, $\widetilde{u}(t)$ joiz boshqaruvlarga mos kelgan (3.1)-sistemaning yechimlari, shu sababli, quyidagi:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$\dot{\widetilde{x}}(t) = A\widetilde{x}(t) + B\widetilde{u}(t),$$

tengliklar boshqaruvlarning uzluksiz nuqtalarida o'rinli bo'ladi. Bu tenglamalarni mos ravishda $1-\lambda$ va λ ga ko'paytirib qo'shilsa, quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$\dot{x}^*(t) = (1-\lambda)\dot{x}(t) + \lambda\dot{\widetilde{x}}(t) = (1-\lambda)Ax(t) + (1-\lambda)Bu(t)+$$

$$+\lambda A\widetilde{x}(t) + \lambda B\widetilde{u}(t) = A[(1-\lambda)x(t) + \lambda\widetilde{x}(t)]+$$

$$+B[(1-\lambda)u(t) + \lambda\widetilde{u}(t)] = Ax^*(t) + Bu^*(t).$$

Bundan ko'rinib turibdiki, $u^*(t)$ boshqaruvga mos keluvchi trayektoriya $x^*(t)$ ekan. Endi $x^*(t)$ trayektoriyaning boshlang'ich va oxirgi nuqtalarini aniqlaylik:

$$x^*(0) = (1-\lambda)x(0) + \lambda\widetilde{x}(0) = (1-\lambda)x^0 + \lambda\widetilde{x}^0 = x^*,$$

$$x^*(T) = (1-\lambda)x(T) + \lambda\widetilde{x}(T) = (1-\lambda)\cdot 0 + \lambda\cdot 0 = 0.$$

Demak, $u^*(t)$ boshqaruv yordamida x^* nuqtani T vaqt davomida koordinata boshiga olib kelish mumkin ekan, bu degani x^* nuqta X_T ga tegishli. Lemma isbot bo'ldi.

2-lemma. Agar x^0 nuqta erishuvchanlik sohasi X_T ning ichki nuqtasi bo'lsa, u holda bu nuqtadan koordinata boshiga T dan kam vaqtda kelish mumkin.

Isbot. x^0 erishuvchanlik sohasi X_T ning ichki nuqtasi bo'lganligi uchun, bu nuqtani o'z ichiga oluvchi va butunlay X_T da yotuvchi $n-$ o'lchovli S_0 qavariq ko'pyoq mavjud. $y^{(i)}$, $i = 1, 2, ..., k$ orqali S_0 ko'pyoqning uchlarini belgilaymiz (3.4-rasm).

$y^{(i)} \in X_T$ bo'lganligi sababli, $u^{(i)}(t)$, $0 \leq t \leq T$ boshqaruv mavjudki, u T vaqt davomida $y^{(i)}$ nuqtani koordinata boshiga olib keladi. Mos trayektoriya $y^{(i)}(t)$, $0 \leq t \leq T$ bilan belgilangan, demak: $y^{(i)}(T) = 0$, $i = 1, 2, ..., k$. S_ε bilan $y^{(i)}(\varepsilon)$ nuqtalarning qavariq qobig'ini belgilaymiz, bu yerda ε biror musbat son. Yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ da S_ε ko'pyoq x^0 nuqtani o'z ichiga oladi (3.4-rasmda chetlari shtrixlangan ko'pburchak). $y^{(i)}(\varepsilon)$ nuqtadan koordinata boshiga, $y^{(i)}(t)$ trayektoriya bo'ylab, $T - \varepsilon$ vaqtda kelish mumkin.

Demak, $y^{(i)}(\varepsilon)$ nuqtalarning barchasi $X_{T-\varepsilon}$ erishuvchanlik sohasiga tegishli bo'ladi. Bundan, erishuvchanlik sohasi qavariq bo'lganligi uchun, (1-lemma) $y^{(i)}(\varepsilon)$ nuqtalarning qavariq qobig'i bo'lgan S_ε ko'pyoq ham $X_{T-\varepsilon}$ ga tegishli bo'lishligi kelib chiqadi. Demak, x^0 nuqtadan koordinata boshiga $T - \varepsilon$ vaqt davomida kelish mumkin ekan. Lemma isbot bo'ldi.

3-lemma Faraz qilaylik, $u(t)$ $[0, T]$ oraliqda berilgan biror joiz boshqaruv, $x(t)$, $0 \leq t \leq T$ ushbu boshqaruvga mos kelgan va x^0 nuqtadan chiquvchi trayektoriya bo'lsin. Agar $p(t)$ (3.4)-tenglamalar sistemasining ixtiyoriy yechimi bo'lsa, u holda $u(t)$ boshqaruvning uzluksiz nuqtalarida quyidagi:

$$\frac{d}{dt}(p(t)x(t)) = p(t)Bu(t)$$

tenglik bajariladi va bundan

$$p(t_1)x(t_1) - p(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (p(\tau)Bu(\tau))\, d\tau$$

kelib chiqadi.

Isbot. $u(t)$ boshqaruvning uzluksiz nuqtalarida quyidagi munosabatlarga ega bo'lamiz:

$$\frac{d}{dt}(p(t)x(t)) = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i(t)x_i(t)\Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\dot{x}_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i(t)x_i(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{k=1}^{r} b_{ik}u_k(t)\Big)p_i(t) +$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\Big(-\sum_{j=1}^{n} a_{ji}p_j(t)\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}u_j(t)\Big)p_i(t) = p(t)Bu(t).$$

$p(t)x(t)$ ko'paytma uzluksiz va t ning chekli sondagi qiymatlaridan boshqasida uzluksiz bo'lganligi sababli:

$$p(t_1)x(t_1) - p(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\tau}(p(\tau)x(\tau))\, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} (p(\tau)Bu(\tau))\, d\tau$$

tenglik kelib chiqadi. Lemma isbot bo'ldi.

Natija. Agar (3.1)-sistemaning bir jinsli qismining yechimi $x(t)$, (3.4) ning yechimi $p(t)$ bo'lsa, u holda $p(t)x(t)$ ko'paytma o'zgarmas bo'ladi (ya'ni t ga bog'liq bo'lmaydi).

Haqiqatan, $u(t) \equiv 0$ bo'lganligi uchun, 3-lemmadan

$$\frac{d}{dt}(p(t)x(t)) \equiv 0, \text{yani } p(t)x(t) = const$$

ekanligi kelib chiqadi.

Maksimum prinsipining isboti. Faraz qilaylik, $(x(t), u(t))$ berilgan obyektni x^0 nuqtada koordinata boshiga $T = t_1 - t_0$ vaqt davomida olib keluvchi optimal tezkor jarayon bo'lsin. Tushunarliki, x^0 nuqta erishuvchanlik sohasi X_T ga tegishli bo'ladi. Agar x^0 X_T ning ichki nuqtasi bo'lsa, bu nuqtadan koordinata boshiga T vaqtdan tez kelinadi (2-lemma), bu optimallik shartiga zid. Shu sababli, x^0 X_T ning chegara nuqtasi bo'ladi. Bilamizki, X_T qavariq to'plam, shuning uchun, uning chegara nuqtasi x^0 dan G gipertekislik o'tkazish mumkinki, X_T to'plam uning bir tarafida yotadi (3.5-rasm). X_T to'plam yotgan gipertekislikning yarim fazosi F bo'lsin. $\overline{n}$ bilan x^0 nuqtadan chiquvchi, G gipertekislikka normal va F yarim fazoda yotuvchi birlik vektorni belgilaymiz. U holda F yarim fazo

$$\overline{n}(x - x^0) \geq 0 \tag{3.9}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalardan iborat bo'ladi. Xususan, X_T to'plam F yarim fazoda yotganligi uchun, ixtiyoriy $x \in X_T$ da (3.9) tengsizlik bajariladi.

$p(t) = (p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t))$ orqali (3.4) chiziqli sistemaning $p(t_0) = \overline{n}$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini belgilaymiz. Ushbu yechim aynan nol emas va $[t_0, t_1]$ oraliqda aniqlangan. Bu $p(t)$ (3.5) maksimum prinsipi uchun, zarur bo'lgan vektor funksiya, ya'ni $p(t)$, $u(t)$ funksiyalar (3.5) ni $[t_0, t_1]$ oraliqda qanoatlantiradi. Shuni ko'rsatamiz. Buning uchun, teskarisini faraz etaylik, ya'ni biror τ (bunda $\tau \in [t_0, t_1]$) momentda (3.5)-tenglik bajarilmasin. Bu degani $v \in U$ nuqta borki,

$$p(\tau)Bu(\tau) < p(\tau)Bv$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $\tau < t_1$ bo'lsa, u holda $u(t)$ boshqaruvning o'ngdan uzluksizligidan $h > 0$ soni topiladiki, $[\tau, \tau + h]$ oraliqda boshqaruv, demak, $p(t)Bu(t)$ uzluksiz. Bu mulohazadan kelib chiqadiki,

$$p(t)Bu(t) < p(t)Bv \tag{3.10}$$

tengsizlik $[\tau, \tau + h]$ oraliqda o‘rinli. Mabodo, $\tau = t_1$ bo‘lsa, $u(t)$ boshqaruv, demak, $p(t)Bu(t)$ ko‘paytma $\tau = t_1$ nuqtada chapdan uzluksiz. Bundan kelib chiqadiki, $[\tau - h, \tau]$ oraliq mavjudki, bu oraliqda (3.10) tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. qilib, har vaqt $[t_0, t_1]$ kesmada yotuvchi $[\tau_0, \tau_1]$ oraliq topiladiki, unda (3.10) tengsizlik bajariladi. $[t_0, t_1]$ kesmada aniqlangan, quyidagi;

$$u^*(t) = \begin{cases} v, & \text{agar } \tau_0 \le t \le \tau_1 \\ u(t), & \text{agar } t \notin [\tau_0, \tau_1] \end{cases}$$

joiz boshqaruvni quramiz. Bu boshqaruvga mos kelgan va $x^*(t_1) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi trayektoriyani $x^*(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ bilan belgilaymiz. Ushbu trayektoriyaning boshlang‘ich nuqtasi $x^*(t_0) = x^{*0}$ bo‘lsin. qilib $u^*(t)$ boshqaruv yordamida x^{*0} nuqtadan koordinata boshiga $T = t_1 - t_0$ vaqt davomida kelish mumkin. Demak, x^{*0} nuqta X_T ga tegishli bo‘lar ekan, shu sababli

$$\overline{n}(x^{*0} - x^0) \ge 0 \tag{3.11}$$

bo‘ladi.

Endi 3-lemmaning natijasini $p(t)$, $x(t)$, $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ funksiyalariga qo‘llaymiz:

$$p(t_1)x(t_1) - p(t_0)x(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (p(\tau)Bu(\tau))\, d\tau.$$

Xuddi shunga o‘xshash:

$$p(t_1)x^*(t_1) - p(t_0)x^*(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (p(\tau)Bu^*(\tau))\, d\tau.$$

Birinchi tenglikdan ikkinchisini ayiramiz va $x(t_1) = x^*(t_1) = 0$

munosabatni hisobga olgan holda:

$$p(t_0)(x^*(t_0) - x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} [p(\tau)Bu(\tau) - p(\tau)Bu^*(\tau)]\, d\tau$$

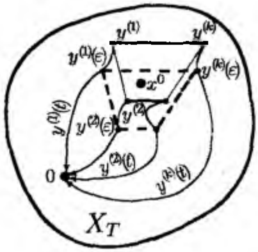
tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglikning chap tarafi $\overline{n}(x^{*0} - x^0)$ ko‘rinishga ega. O‘ng tarafdagi integral $[\tau_0, \tau_1]$ kesma bo‘yicha qoladi, chunki undan tashqarida $u^*(t) \equiv u(t)$ tenglik bajariladi. $u^*(t)$ boshqaruv $[\tau_0, \tau_1]$ kesmada $u^*(t) = v$ bo‘lganligi uchun:

$$\overline{n}(x^{*0} - x^0) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} [p(\tau)Bu(\tau) - p(\tau)Bv]\, d\tau$$

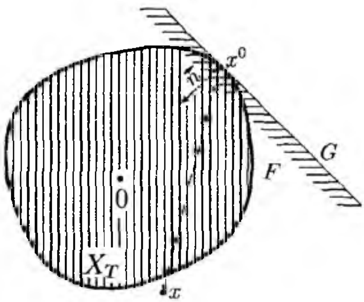
bo‘ladi. Ammo (3.10) ga ko‘ra integral ostidagi ifoda qat’iy manfiy, demak,

$$\overline{n}(x^{*0} - x^0) < 0$$

bu esa (3.11) ga qarama-qarshi. Bu ziddiyat (3.4) maksimum $[t_0, t_1]$ oraliqning har bir t nuqtasida bajarilishligini isbotlaydi. Teorema isbot bo‘ldi:



3.4-rasm



3.5-rasm

Boshqarishning optimalligining yetarli sharti. Chiziqli tizimlarda maksimum prinsipi nafaqat zaruriy, balki yetarli bo‘lishligini ta’minlovchi shartni keltirib chiqaramiz. Buning uchun, invariant fazoostisi tushunchasi kerak bo'ladi. Yuqoridagi A jadval R^n fazoda chiziqli almashtirishni aniqlaydi. Ya'ni, $x \in R^n$ bo'lsa $Ax \in R^n$ va $A(AX) \in R^n$ va hokazo davom etadi. Ko'rsatish mumkinki, $A(A(...(A(Ax))...)) = A^k x$ bo'ladi, bu tenglikning chap tarafida A almashtirish x elementga k marta ketma-ket ta'sir ettirilgan.

1-ta'rif. Berilgan $X \subset R^n$ fazoosti uchun $x \in X$ dan $Ax \in X$ kelib chiqsa, X A almashtirishga nisbatan *invariant fazoostisi* deb ataladi. Agar invariant fazoostisi butun fazo R^n bilan ustma-ust tushmasa, u *xos* deb ataladi.

4-lemma. $x \in R^n$ vektor A almashtirishning xos invariant fazoostiga tegishli bo'lishligi uchun, x, Ax, $A^2x, ..., A^{n-1}x$ vektorlarning chiziqli bog'liq bo'lishligi zarur va yetarli.

Isboti. Zarurligi. Agar x xos invariant fazoostiga tegishli bo'lsa x, Ax, $A^2x, ..., A^{n-1}x$ vektorlarning chiziqli bog'liq ekanligini ko'rsatishimiz kerak. 1-ta'rifga asosan xos invariant fazoostining o'lchami n dan kichik va x, Ax, $A^2x, ..., A^{n-1}x$ vektorlarning barchasi shu fazoostiga tegishli. Ammo biz bilamizki, fazo o'lchamidan ko'p bo'lgan vektorlar, albatta, chiziqli bog'liq bo'ladi. Shuning uchun, x, Ax, $A^2x, ..., A^{n-1}x$ vektorlar chiziqli bog'liq.

Etarliligi. $x \in R^n$ bo'lib, x, Ax, $A^2x, ..., A^{n-1}x$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'lishsin. U holda, tushunarliki, ular R^n ning bazisi bo'laolmaydi. Demak, ular yordamida tuzilgan $X = Lin\{x, Ax, A^2x, ..., A^{n-1}x\}$ ko'phillik R^n ning fazoostisi bo'lib, o'lchami n dan kichik. Xususan, x, $Ax \in X$ bo'lganligi uchun, bu fazoostisi A almashtirishning xos invariant fazoostisi bo'ladi.

5-lemma. $p(t)$ (3.4) sistemaning noldan farqli yechimi, x R^n fazoning noldan farqli vektori bo'lsin. Agar biror (τ_0, τ_1) intervalda $p(t)x \equiv 0$ ayniyat bajarilsa, u holda x vektor A almashtirishning xos invariant fazoostisiga tegishli bo'ladi.

Isbot. X orqali (τ_0, τ_1) oraliqda $p(t)y = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $y \in R^n$ vektorlar to'plamini belgilaymiz. X R^n ning fazoostisi bo'ladi, haqiqatan, agar $y_1, y_2 \in X$ bo'lsa $y_1 + y_2 \in X$ va ixtiyoriy α da $\alpha y_1 \in X$ bo'ladi. Bundan tashqari har bir $t \in (\tau_0, \tau_1)$ da $p(t)$ nol vektor bo'lmaganligi sababli, X R^n bilan ustma-ust tushmaydi. X invariant ekanligini ko'rsatamiz. $y \in X$ bo'lsin, u holda (τ_0, τ_1) intervalning har bir t nuqtasi uchun:

$$0 = \frac{d}{dt}(p(t)y) = \dot{p}(t)y = -(A^* p(t))y = -\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}p_j(t)\Big)y_i =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}y_i\Big) = -p(t)(Ay)$$

ga ega bo'lamiz. Demak, $Ay \in X$, ya'ni X invariant ekan. Natijada x A ning xos invariant fazoosti X ga tegishli bo'lar ekan. Lemma isbot bo'ldi.

Holatning umumiylik sharti: ω vektor U ko'pyoqning biror qirrasiga parallel bo'lgan vektor bo'lsa, $B\omega$ vektor A almashtirishning hech bir invariant fazoostiga tegishli emas.

Yoki 4-lemmadan foydalansak, holatning umumiylik sharti quyidagicha bo'ladi: agar ω U ko'pyoqning biror qirrasiga parallel bo'lgan vektor bo'lsa, $B\omega$, $AB\omega$, $A^2B\omega, \ldots, A^{n-1}B\omega$ vektorlar chiziqli bog'liq emas.

Holatning umumiylik sharti bajarilmadi degani, U ko'pyoqning biror ω qirrasi uchun, $B\omega$, $AB\omega$, $A^2B\omega, \ldots, A^{n-1}B\omega$ vektorlarning chiziqli bog'liqligini yoki bu vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan determinantning qiymati nolga teng ekanligini bildiradi. Ko'pyoqning uchlari, demak, qirralari chekli sonda bo'lganligi uchun, bunday determinantlar ham chekli sonda bo'ladi. qilib holatning umumiylik shartini tekshirish chekli sondagi determinantlarning qiymatlarini hisoblashga olib kelar ekan. Ammo holatning umumiylik sharti unchalik ham og'ir emas, chunki u bajarilmasa yoki A ning biror elementlari qiymatlarini, yoki U ning uchlarini bir oz o'zgartirish hisobiga maqsadga erishish mumkin bo'ladi.

Bundan buyon holatning umumiylik sharti bajarilgan deb faraz etiladi.

1-teorema. Obyektni $[t_0, t_1]$ vaqt davomida x^0 nuqtadan koordinata boshiga olib keluvchi joiz $u(t)$ boshqaruv optimal bo'lishligi uchun, u maksimum prinsipini qanoatlantirishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi yuqorida isbotlangan, shuning uchun, yetarligiga to'xtalamiz. Faraz qilaylik, $u(t)$ $[t_0, t_1]$ oraliqda maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi joiz boshqaruv, $x(t)$ esa unga mos kelgan trayektoriya va $p(t)$ (3.4)-sistemaning nol bo'lmagan yechimi bo'lsin.

$u(t)$ ning optimalligini isbotlash uchun, teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $u(t)$ optimal bo'lmasin. U holda boshqa, joiz $\widetilde{u}(t)$ boshqaruv mavjudki, unga mos trayektoriya – $\widetilde{x}(t)$ bo'ylab koordinata boshiga tezroq kelinadi: $\widetilde{x}(t_0) = x^0$ va $\widetilde{x}(\theta) = 0$, bu yerda $\theta < t_1$. (5-maksimum shartiga asosan $[t_0, \theta]$ kesmaning ixtiyoriy t nuqtasi uchun,

$$p(t)Bu(t) = \max_{u \in U} p(t)Bu \geq p(t)B\widetilde{u}(t)$$

munosabat bajariladi.

Ikkala $x(t)$ va $\widetilde{x}(t)$ trayektoriyalar $t = t_0$ vaqt momentida x^0 nuqtadan chiqqanliklari uchun, $p(t_0)x(t_0) = p(t_0)\widetilde{x}(t_0)$ tenglik bajariladi. Bundan tashqari $p(t_1)x(t_1) = p(\theta)\widetilde{x}(\theta) = 0$ tenglikning o'rinligi tushunarli. qilib 3-lemmaga asosan:

$$p(\theta)x(\theta) = p(\theta)x(\theta) - p(\theta)\widetilde{x}(\theta) = [p(\theta)x(\theta) - p(t_0)x(t_0)] -$$

$$-[p(\theta)\widetilde{x}(\theta) - p(t_0)\widetilde{x}(t_0)] = \int_{t_0}^{\theta}(p(\tau)Bu(\tau))\,d\tau -$$

$$-\int_{t_0}^{\theta}(p(\tau)B\widetilde{u}(\tau))\,d\tau = \int_{t_0}^{\theta}(p(\tau)Bu(\tau) - p(\tau)B\widetilde{u}(\tau))\,d\tau \geq 0$$

bo'ladi. Koordinata boshi U ko'pyoqqa tegishli bo'lganligi uchun, $p(t)Bu(t) = \max\limits_{u\in U} p(t)Bu(t) \geq 0$ munosabat ixtiyoriy $t \in [t_0, t_1]$ da o'rinli. Bundan,

$$p(\theta)x(\theta) = p(\theta)x(\theta) - p(t_1)x(t_1) = -\int_{\theta}^{t_1}(p(\tau)Bu(\tau))\,d\tau \leq 0$$

munosabat kelib chiqadi. qilib $p(\theta)x(\theta) = 0$. Ammo $\int_{\theta}^{t_1}(p(\tau)Bu(\tau))d\tau = 0$ bo'lganligi va $p(t)Bu(t) = \max\limits_{u\in U} p(t)Bu \geq 0$ munosabatdan (θ, t_1) intervalda $p(t)Bu(t) = \max\limits_{u\in U} p(t)Bu \equiv 0$ bo'ladi.

Endi U_1 bilan U ning koordinata boshi yotgan yog'i belgilangan bo'lsin. Bunda U_1 U bilan ustma-ust tushishi, yoki haqiqiy yog'i bo'lishi mumkin. Ammo uning o'lchami birdan kichik emas, chunki koordinata boshi U ko'pyoqning uchi emas. $p(t)Bu$ funksiya U_1 ning ichki nuqtasi 0 da nol qiymatni qabul qiladi va $\max\limits_{u\in U} p(t)Bu = 0$ shuning uchun, barcha $u \in U_1$ larda $p(t)Bu = 0$ bo'ladi, bu yerda $\theta < t < t_1$. Bundan, agar u' va u'' lar U_1 ning biror qirrasi uchlari bo'lsa, $p(t)Bu' = p(t)Bu'' = 0$ bo'ladi. U_1 ning bu qirrasi bo'yicha yo'nalgan $\omega = u'' - u'$ vektori uchun, (θ, t_1) intervalda $p(t)B\omega = p(t)Bu'' - p(t)Bu' \equiv 0$ ga ega bo'lamiz. (3.5)-lemmaga asosan $B\omega$ vektor A almashtirishning xos invariant fazoostiga tegishli bo'ladi. Bu esa holatning umumiylik shartiga zid. Teorema isbot bo'ldi.

Optimal boshqaruv masalasini yechish rejasi. Avvallo shuni ta'kidlaymizki, (3.4)-tenglamalar sistemasi o'zgarmas koeffitsiyentli va x, u larga bog'liq emas, demak, uni alohida ko'rish mumkin. U berilgan boshlang'ich qiymat $p(t_0)$ orqali yagona yechimga ega. Uning bu yagona yechimini topish optimal boshqaruv masalasini yechishdagi birinchi masala hisoblanadi.

1-masala. *Ixtiyoriy boshlang'ich qiymat* $p(t_0)$ *yordamida (3.4) sistemaning* $p(t)$ *yechimi topilsin.*

Maksimum prinsipi zaruriy shart bo'lganligi uchun, ixtiyoriy optimal boshqaruv maksimum sharti – (3.5) ni qanoatlantiradi, shundan kelib chiqqan holda quyidagi 2-masalaga kelamiz.

2-masala. *(3.4)-sistemaning biror nol bo'lmagan yechimini bilgan holda (3.5) maksimum shartini qanoatlantiruvchi* $u(t)$ *joiz boshqaruv topilsin.*

Ko'rsatish mumkinki, berilgan noldan farqli $p(t)$ orqali (3.5) ni qanoatlantiruvchi joiz $u(t)$ boshqaruv yagona ravishda aniqlanadi. Ya'ni 2-masala yagona yechimga ega.

3-masala. *2-masala orqali topilgan* $u(t)$ *boshqaruvga mos va berilgan* x^0 *boshlang'ich nuqtadan chiquvchi, (3.1)-sistemaning yechimi (trektoriyasi) topilsin.*

2-masalada topilgan boshqaruv (3.1)-tenglamadagi u parametr o'rniga qo'yilgandan so'ng, u bir jinslimas chiziqli o'zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar sistemasini ifodalaydi. Ma'lumki, bunday ko'rinishdagi sistemalarning yechimini topishning bir nechta usullari mavjud.

qilib bu 3 ta masalani yechish aytarli qiyinchilik tug'dirmaydi. Demak, oxirgi natija bo'lgan $x(t)$ trayektoriya $p(t)$ ning boshlang'ich qiymati $p(t_0)$ ga bog'liq bo'ladi. Agar biror $p(t_0)$ da boshlang‘ich holatdan chiqqan mos trayektoriya koordinata boshiga kelsa, holatning umumiylik shartiga asosan, u optimal bo‘ladi. Shu munosabat bilan quyidagi masalaga kelamiz.

4-masala. *boshlang‘ich $p(t_0)$ qiymat topilsinki, natijada berilgan boshlang‘ich x^0 holatdan chiqqan mos trayektoriya koordinata boshiga kelsin.*

Umuman aytganda, bunday boshlang‘ich $p(t_0)$ qiymatning mavjudligi ma’lum, ammo uni oshkor ko‘rinishda aniqlashning umumiy usuli yo‘q. Bu yerda bir qancha qulay taqribiy usullar taklif etilgan bo‘lib, ular yetarlicha aniqlikda hisoblab berish imkoniyatiga ega.

Demak, bu yo‘l bilan optimal boshqaruv masalasini yechish har bir boshlang‘ich holat x^0 uchun, optimal trayektoriyani topish, ya’ni 4-masalaga asosan $p(t_0)$ boshlang‘ich qiymatni aniqlash muammosiga kelinadi. Bu yerda, yana bir jihat, optimal boshqaruv vaqtga bog‘liq, ya’ni $u(t)$ ko‘rinishda kelib chiqadi.

Optimal boshqaruvni sintez funksiya shaklda, ya’ni $u = v(x)$, x holatga bog‘liq ko‘rinishda ifodalash juda ham qulaylik tug‘diradi. Mabodo, optimal sintez boshqaruv $u = v(x)$ topilgan bo‘lsa, u holda uni (3.1)-sistemaga olib borib qo‘yish bilan,

$$\dot{x} = Ax + Bv(x)$$

avtonom sistema hosil bo‘ladi. Bu esa oddiy differensial tenglamalar sistemasi bo‘lib, faqat uning $x(t_0) = x^0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini aniqlash zarur bo‘ladi. Bu yechim qidirilayotgan optimal trayektoriyani ifodalaydi. Ammo fazo o‘lchami ikkidan katta bo‘lganda, umuman, optimal sintez funksiyani qurish juda ham murakkabdir. Tekislikda esa, koordinata boshidan chiquvchi optimal trayektoriyalar yordamida, optimal sintez funksiyani, aksariyat hollarda aniqlash imkoni bo‘ladi.

4-§. Ko'p kriteriyali masalada yechim qabul qilish nazariyasi

Insoniyat faoliyatining ko'p sohalarida bir kriteriya emas bir nechta kriteriyalar bo'yicha yechim qabul qilishga zaruriyat bo'ladi. Masalan, xarid qilish va mahsulot sifati, xarajatni minimum qilgan holda foydani maksimumlashtirish, kommivoyajyor masalasida, nafaqat masofani minimallashtirish, balki shu bilan birga yo'l xarajatini, umumiy o'tish vaqtini va yana boshqa xarajatlarni hisobga olishga to'g'ri keladi. Bular va yana boshqa ko'pgina amaliy masalalar matematik nuqtayi nazardan tavsiflanishi, ya'ni bir vaqtning o'zida bir nechta funksiyalarni berilgan sohada maksimumini topishga keltiriladi. Bunday masalalar *optimallashtirishning ko'p kriteriyali masalalari* deb ataladi. Tanlash va yechim qabul qilish nazariyasini tashkil etuvchi tadqiqot predmetining masalalarida u muhim ahamiyatga ega. Yagona optimallik prinsipining yo'qligi, ko'p kriteriyali masalalarni bir kriteriyali masalalardan farqlab turadi. Bu esa o'z navbatida, masalalar yechish uchun, ko'p sondagi usullar yaratilishiga olib keldi.

Bu usullarning har biri vektor baholar to'plamini tartiblash (qisman yoki to'la), hamda bu tartiblashga nisbatan eng yaxshi joiz yechimlarni aniqlashdan iboratdir. Bulardan eng umumiy va yaxshi tadqiq qilingani binar munosabatlar "tilida" berilgan usullardir. Berilgan konkret ko'p kriteriyali masala uchun, bunday munosabatlar afzallik haqidagi ma'lumotlar, yechim qabul qiluvchi, ekspertlar yordamida hamda masalaning matematik modelini tadqiq qilish asosida o'rnatiladi. Ko'p kriteriyali optimizatsiya muammolarini muntazam tadqiq qilish o'tgan asrning 60-yillaridan boshlangan.

Yechim qabul qilishning hozirgi zamon nazariyasida, muhim fundamental tushunchalardan biri, effektivlik yoki Pareto ma'nosida optimallikdir. Oxirgi nomlanish italiyalik iqtisodchisi va sotsiolog V. Pareto nomi bilan bog'langan bo'lib, u o'zining tadqiqot ishlarida ko'p kriteriyali optimizatsiya muammolarini o'rgana boshlagan.

Ko'p kriteriyali optimizatsiya masalasining matematik modeli

Ko'p kriteriyali optimizatsiya nazariyasida, bir vaqtning o'zida, bir nechta kriteriya bo'yicha yechim qabul qilish masalasi ko'riladi. Ko'p kriteriyali masalaning qo'yilishi quyidagicha:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i,\ i = 1, 2, ..., s, \tag{4.1}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi va

$$z_k = f_k(x_1, x_2, ..., x_n),\ k = 1, 2, ..., m \tag{4.2}$$

funksiyalarga maksimum qiymat beruvchi $x_1, x_2, ..., x_n$ sonlarini topish talab etiladi.

(4.1)-tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ nuqtalardan iborat bo'lgan $D \subset R^n$ to'plam *joiz soha*, uning elementlari *joiz yechimlar* deb ataladi. D to'plamda berilgan $f_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalar *maqsad funksiyalar yoki kriteriyalar* deb ataladi. (4.1)–(4.2)-masalada m ta maqsad funksiya ishtirok etib, ular D to'plamni *erishishlik to'plami* deb ataluvchi, $F \subset R^s$ to'plamga aks ettiradi.

Vektor funksiya kiritish yordamida (4.1)–(4.2) ko'p kriteriyali masalaning modelini vektor ko'rinishda yozish mumkin:

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), ..., g_s(x)) \le b,\ \ b = (b_1, b_2, ..., b_s); \tag{4.3}$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \to \max,\ x \in D. \tag{4.4}$$

Ko'p kriteriyali optimizatsiya muammosi dastlab 1904-yili V. Paretoning tovar almashish masalasini matematik tadqiq qilishdan kelib chiqqan. Keyinchalik ko'p kriteriyali optimizatsiya masalasiga, hisoblash texnikasi rivojlanishi sababli, qiziqish yanada ortdi. Uning qo'llanish sohasi yanada kengaydi, masalan, murakkab texnik tizimlarning loyihasini yaratish muommasida.

Bir kriteriyali optimizatsiya masalasidan farqli o'laroq ko'p kriteriyali optimizatsiya masalasi aniqmas maqsadga ega. Chunki bir nechta maqsad funksiyani maksimumlashtiruvchi yechimning mavjudligi kamdan-kam uchraydigan holdir, shu sababli bunda faqat "kelishilgan" holda yechim olinishi mumkin. Masalan, bir paytda ham foydani maksimumlashtiruvchi, ham xarajatni minimumlashtiruvchi korxona rejasini tuzish mumkin emas, chunki xarajat qanchalik ko'p bo'lsa mahsulot shunchalik ko'p ishlab chiqariladi, demak, bu bilan foyda ham oshadi.

Bundan, ko'p kriteriyali optimizatsiya nazariyasida, optimallik tushunchasi turli talqinda bo'lishligi kelib chiqadi, shu sababli nazariyaning o'zi quyidagi uchta asosiy yo'nalishdan iborat bo'ladi:

1. Optimallik konsepsiyasini yaratish.

2. Qabul qilingan ma'noda optimal yechimning mavjudligini aniqlash.

3. Optimal yechimning topish usullarini yaratish.

Pareto ma'nosida optimallik

Agar $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ maqsad funksiyalarining barchasi bitta $x^* \in D$ joiz yechimda maksimumga erishsa, u holda (4.1)–(4.2)-masala *ideal yechimga* ega deyiladi.

Yuqorida aytilganidek, ideal yechimga ega bo'lishlik juda ham kamdan-kam uchraydigan holdir. Shuning uchun, (4.3)–(4.4)-masalani yechishdagi asosiy muammo optimallik prinsipini formallashtirish, ya'ni optimal yechim boshqasidan qanday ma'noda afzal (ustun) ekanligini aniqlashdan iboratdir. (4.3)–(4.4)-masalaning ideal yechimi yo'q bo'lganda, uning "kelishilgan" yechimi qidiriladi.

(4.3)–(4.4)-masalada har bir $x \in D$ joiz yechim uchun, $(f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$ vektor funksiyaning mos qiymati *yechimning vektor bahosi* deyiladi. Yechimning vektor bahosi yechim qabul qiluvchiga to'la ma'lumot beradi. Ya'ni, joiz yechimlarni taqqoslash, ularning vektor baholari orqali amalga oshiriladi.

1-ta'rif. Agar x^1, $x^2 \in D$ joiz yechimlar uchun, $f_k(x^1) \leq f_k(x^2)$, $k = 1, 2, ..., m$ tengsizliklar o'rinli bo'lib, ularning birortasi qat'iy bo'lsa, *x^2 yechim x^1 yechimga nisbatan afzal (ustun)* deyiladi va bu $x^1 \prec x^2$ ko'rinishda yoziladi.

2-ta'rif. (Pareto ma'nosida optimallik.) Ko'p kriteriyali optimizatsiya masalasida $x^* \in D$ joiz yechimdan afzal bo'lgan boshqa $x \in D$ joiz yechim mavjud bo'lmasa, x^*–*Pareto ma'nosida optimal* deb ataladi.

Pareto ma'nosida optimal bo'lgan joiz yechimlar to'plami $D_p \subset D$ bo'lsin. D_p to'plamning muhim xossalaridan biri, u D– joiz yechimlar to'plamidan, shak-shubhasiz, afzal bo'la olmaydigan yechimlar "tashlab" yuborilishidan hosil qilinadi. Odatda, ko'p kriteriyali optimizatsiya masalasini yechish D_p to'plamni aniqlash bilan boshlanadi. D_p to'plamda aniqlangan biror kriteriya qiymatini, faqat boshqa kriteriya qiymati hisobiga yaxshilash mumkin. Shu sababli yechim qabul qiluvchi, boshqa qo'shimcha afzallik tushunchasini kiritilmagan bo'lsa, optimal yechimni, aynan D_p to'plamdan qidirishi kerak bo'ladi.

Aksariyat hollarda ko'p kriteriyali optimizatsiya masalasi, biror usul yordamida bir kriteriyali masalaga keltiriladi. Bunday usullar bir qancha bo'lib, ularning birortasini boshqasidan afzal deb bo'lmaydi. Buni har bir berilgan masala uchun, yechim qabul qiluvchi o'zi hal etishi lozim bo'ladi.

Maqsad funksiyalar, Pareto ma'nosida optimal bo'lgan $D_p \subset D \subset R^m$ to'plamni biror $F_p \subset F \subset R^s$ to'plamga akslantiradi, F_p – *Pareto to'plami* deb ataladi.

1-misol. Quyidagi ikki kriteriyali masala berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 100 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

shartlar ostida

$$\begin{aligned} z_1 &= 2x_1 + x_2 \to \max \\ z_2 &= 2x_1 + 3x_2 \to \max \end{aligned} \tag{4.6}$$

topilsin.

(4.5)–(4.6)-masalada Pareto ma'nosida optimal joiz yechimlar to'plami aniqlansin.

Joiz soha D koordinata tekisligining birinchi choragida joylashgan markazi koordinata boshida, radiusi 10 ga teng bo'lgan doiraning qismidan iborat bo'ladi (4.1-rasm).

z_1 va z_2 kriteriyalar bo'yicha alohida optimal yechimlarni topamiz. Buning uchun, $p_1(2,1)$ va $p_2(2,3)$ yo'nalishdagi vektorlarni hamda ularga perpendikulyar – sath chiziqlarini quramiz. Sath chiziqlarini aylana bilan urinish nuqtalari A va B dan iborat bo'lgan optimal yechimlarni aniqlaymiz.

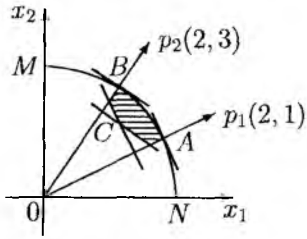
D dagi biror C yechimni Pareto – optimal bo'lishligini tekshiramiz. C nuqta orqali maqsad funksiyalarning sath chiziqlarini o'tkazamiz va ular hosil qilgan yarim tekisliklar kesishmasidan iborat bo'lgan konusni qaraymiz (4.1-rasmda shtrixlangan).

Tushunarliki, C nuqtaga mos kelgan yechimni ikkala kriteriya bo'yicha ham yaxshilash mumkin, shu sababli u effektiv emas. Effektiv D_p (Pareto ma'nosida optimal) yechimlar aylananing AB yoyidan iborat. qilib, effektiv yechimlar har bir kriteriyani alohida masala deb yechilganda topilgan optimal yechimlar orasida yotadi. A nuqtaning koordinatalarini topaylik. Aylananing normal vektori $\vec{n}_1 = (x_1, x_2)$ koordinatalarga ega bo'lsin, birinchi maqsad funksiyaning sath chizig'iga normal vektor $\vec{p}_1 = (2,1)$ bo'ladi. Vektorlarning kollinearlik shartidan kelib chiqadiki, mos koordinatalar proporsional ya'ni: $\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{1}$. Demak, A nuqtaning

(x_1, x_2) koordinatalari quyidagi sistemani qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 100. \end{cases}$$

Ushbu sistemaning yechimi $(4\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$ bo'lib, u A nuqtaning koordinatalarini beradi. Xuddi shunga o'xshash B nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz: $\left(\frac{20}{\sqrt{13}}, \frac{30}{\sqrt{13}}\right)$.



4.1-rasm

2-misol. 1-misolda keltirilgan masala uchun, erishishlik va Pareto to'plamlari aniqlansin.

Maqsad funksiya vektorlariga mos akslantirishning kriteriyalar fazosida Pareto to'plamini quramiz.

Buning uchun, joiz sohaning xarakterli nuqtalari aksini jadval ko'rinishda ifodalaymiz (4.1-jadval).

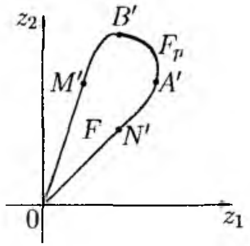
4.2-rasmda F_p to'plam AB yoydan iborat. Ikki kriteriya uchun, bu to'plam erishishlik to'plamining "shimoliy-sharq" chegarasini tashkil qiladi.

Berilgan ikki kriteriya uchun, erishishlik to'plami $F \subset R^2$ va D_p ning aksi bo'lgan Pareto to'plami $F_p \subset F$ 4.2-rasmda keltirilgan. Bu to'plamlar 4.1-jadval asosida hosil qilingan.

qilib, ko'p kriteriyali optimizatsiya masalasining yechimini Pareto ma'nosida optimal bo'lgan D_p to'plam tashkil qiladi. Ammo yakuniy qaror qilish har vaqt yechim qabul qiluvchiga bog'liq bo'lib qoladi.

4.1-jadval

D sohaning nuqtasi	x_1	x_2	*nuqtaning F dagi obrazi*	z_1	z_2
0	0	0	$0'$	0	0
M	0	10	M'	10	30
N	10	0	N'	20	20
A	$4\sqrt{5} \approx 8,9$	$4\sqrt{5} \approx 8,9$	A'	$10\sqrt{5} \approx 22,4$	$14\sqrt{5} \approx 31,3$
B	$\frac{20}{\sqrt{13}} \approx 5,5$	$\frac{20}{\sqrt{13}} \approx 5,5$	B'	$\frac{70}{\sqrt{13}} \approx 19,4$	$\frac{130}{\sqrt{13}} \approx 36,1$



4.2-rasm

Ko'p kriteriyali optimizatsiya masalalarining muammolari va yechish usullarini sinflash

Ko'p kriteriyali optimizatsiya masalalarini yechish davomida maqsadlarning aniqmasligi va o'lchamsiz kriteriyalarga o'tish kabi o'ziga xos savollarni aniqlashtirishga to'g'ri keladi. Ko'p kriteriyali optimizatsiyaning usullarini yaratishda vujudga keladigan asosiy muammolarni sanab o'tamiz.

1. Kriteriyalarni normallashtirish, ya'ni ularni umumiy (o'lchamsiz) masshtab o'lchamiga keltirish muammosi.

2. Optimallik prinsipini tanlash, ya'ni optimal yechim qaysi ma'noda boshqa yechimlardan (afzal) ustun ekanligini aniqlash muammosi.

3. Afzal kriteriyalarni aniqlash, ya'ni fizik, iqtisodiy va boshqa ma'nolardan kelib chiqqan holda, ayrim kriteriyalarning boshqalaridan afzal ekanligi muammosi.

4. Ko'p kriteriyali optimizatsiya masalalarida optimumni hisoblash muammosi.

Bu yerda, aniq xossaga ega bo'lgan masala optimumini hisoblash uchun, chiziqli, nochiziqli, diskret optimizatsiya usullaridan foydalanish muammosi nazarda tutilgan.

Ko'p kriteriyali optimizatsiya masalalarini yechish davomida $f_k(x)$ kriteriyalarni normallashtirish zaruriyati kelib chiqadi, ya'ni barcha kriteriyalarni umumiy masshtab va o'lchamsiz ko'rinishga keltirish kerak bo'ladi. Keyinchalik, barcha kriteriyalar manfiymas, ya'ni $0 \le f_k(x)$, $x \in D$ holga keltiriladi.

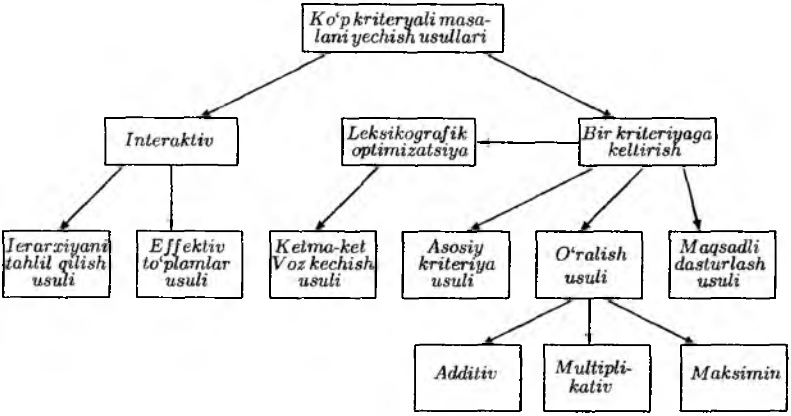
Ko'p hollarda quyidagicha $\lambda_k(x) = \frac{f_k(x)}{f_k^*}$ almashtirish, yordamida o'lchamsiz holga keltiriladi, bu yerda $f_k^* = \max\limits_{x \in D} f_k(x)$. Bunday normallashtirilgan kriteriyalar quyidagi ikki muhim xossaga ega bo'ladi: birinchidan ular o'lchamsiz, ikkinchidan, ixtiyoriy $x \in D$ da $0 \le \lambda_k(x) \le 1$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Bunday holga keltirish kriteriyalarni bir-biri bilan taqqoslash imkonini beradi.

4.3-rasmda ko'p kriteriyali masalalarni yechishda qo'llaniladigan asosiy usullar keltirilgan.

Ushbu usullar quyida batafsil bayon qilingan.

Interaktivlik

Yechim qabul qilishni qo'llab-quvvatlovchi sistema tomonidan taqdim etilgan ma'lumotlar asosida tanlash va yechim qabul qilishni hal qiluvchi "ekspert" ishtirokida ko'p kriteriyali masalani yechish amalga oshiriladi. Bunda bir nechta "ekspertlardan" iborat bo'lgan guruhlar ishtirok etishi mumkin. Yechimni qidirishdagi algoritm va usullarda inson omilining ishtirok etishi *interaktivlik* deyiladi.



4.3-rasm

1. Ierarxiyani tahlil qilish usuli

Ierarxiyani tahlil qilish usuli chiziqli funksiyaning foydaliligini qo'llashga asoslangandir. Ushbu usul siyosiy jarayonlarni (holatlarni, vaziyatlarni, ahvollarni) tahlil qilishga bag'ishlangan bo'lib, amerikalik olim T. Saati tomonidan taklif etilgan.

Soddalik uchun, chekli N ta sondagi yechimlarni xarakterlaydigan m ta f_i kriteriyalar berilgan bo'lsin. Yechimlar ichidan bittasini tanlab olish masalasiga ierarxiyani tahlil qilish usulini qo'llaymiz. Zero, kriteriyalarning yechimlardagi qiymatlarini aniqlash usullari (ayniqsa, siyosiy yoki ijtimoiy muammolarda bu muhim) mavjud bo'lsa ham, soddalik uchun, ular berilgan deb faraz qilamiz. U holda ierarxiyani tahlil qilish usuli yordamida f_i kriteriyalarning vaznlarini aniqlab olish mumkin bo'ladi.

Aniqroq qilib aytganda, yechim qabul qiluvchi yechimlarning afzalligini chiziqli $J(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$ funksiya orqali aniqlaydi, bunda kriteriyalarning vaznlari bo'lgan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ larning qiymatlarini topish masalasi hosil bo'ladi. T. Saatining fikricha, vaznlarning qiymatlarini bevosita topish murakkab bo'lib, ularni aniqlash usulning asosiy masalasi hisoblanadi. Shu jihatdan, yechim qabul qiluvchi vaznlarning aniq qiymatini emas, balki ularning bir-biriga *nisbatan muhimlik ko'rsatkichlari* bo'lgan a_{ij} lar haqida axborot beradi. Bunda, a_{ij} larning qiymatlari ixtiyoriy bo'lmasdan, ular ma'lum biror to'plamdan, masalan, $\{1, 2, ..., 9\}$ dan qiymat qabul qiladi, $a_{ij} = 9$ bo'lishligi $i-$ kriteriyaning $j-$ kriteriyadan ancha muhim ekanligini bildirsa, $a_{ij} = 1$ bo'lishligi i va $j-$ kriteriyalarning muhimlik ko'rsatkichlari taxminan teng ekanligini bildiradi. Bunda tabiiyki, $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$ va $a_{ii} = 1$ deb olinadi. Vazn qiymatlari bo'lgan α_i larning m ta qiymatlari o'rniga $\frac{m(m-1)}{2}$ ta sonni aniqlash kerak bo'ladi. qilib $A = ||a_{ij}||$ jadval tuzishda ortiqcha ma'lumotlar talab etiladi, ular a_{ij} larning tuzishdagi xatolikliklarni va α_i, $i = 1, 2, ..., m$ larning qiymatlarini topishda ishlatiladi.

Yechim qabul qiluvchining absolyut mantiqiy mulohazasidan:

$$a_{ij} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}, \ i, j = 1, 2, ..., m, \tag{4.7}$$

tenglik bajarilishi lozim, bu yerda α_i, $i = 1, 2, ..., m$ lar vaznlarning taxmin qilingan qiymatlari. Agar yechim qabul qiluvchi absolyut to'g'ri mulohaza yuritgan bo'lsa, ya'ni α_i, $i = 1, 2, ..., m$ vazn qiymatlari mavjud bo'lib, ular uchun, a_{ij} lar (4.7)-tengliklarni qanoatlantirsa, u holda kriteriyalarning nisbatan muhimligini bildiruvchi A jadval, u A^0 bilan belgilangan bo'lsin, $A^0\alpha = m\alpha$ tenglikni qanoatlantirgan bo'lar edi. qilib, bunda α A^0 jadvalning xos vektori, $\lambda_1 = m$ xos soni bo'ladi. Osongina payqash mumkinki, A^0 jadvalning satrlari o'zaro proporsional, shuning uchun, uning rangi birga teng. Bu holda $A^0\beta = 0$ tenglama $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$ noma'lumga nisbatan $m-1$ ta chiziqli erkli yechimga ega, demak, A^0 jadvalning boshqa barcha xos sonlarining qiymatlari noldan iborat bo'ladi.

Haqiqatda esa, yechim qabul qiluvchi a_{ij} larning qiymatlarini aniqlashda xatolikka yo'l qo'yishi mumkin, demak, A jadval uchun, (4.7)-tengliklar bajarilmaydi, ya'ni, umuman aytganda, A jadvalning satrlari proporsional bo'lmaydi. Ierarxiyani tahlil qilish usulida A jadval A^0 jadvalning juz'iy o'zgargani sifatida qaraladi, shuning uchun, A jadvalning xos sonlari A^0 jadvalning xos sonlariga juda yaqin deb olinadi.

Qurilishiga ko'ra A musbat jadval bo'lganligi uchun Frobenius-Perron teoremasiga binoan A maksimal musbat xos soni $\lambda_{\max}$ va musbat xos vektori α mavjud. $\lambda_{\max}$ xos son A^0 jadvalning $\lambda_1 = m$ xos sonini juz'iy o'zgargani sifatida olinadi. Shunga bog'liq ravishda A jadvalning $\lambda_{\max}$ xos soniga mos kelgan $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ xos vektori qidirilayotgan vazn deb olinishi mumkin.

$\Delta = \dfrac{\lambda_{\max} - m}{m-1}$ kattalik A jadvalning A^0 jadvaldan chetlanishini aniqlaydi. Agar Δ yetarlicha kichik son bo'lsa, olingan natijalar qoniqarli hisoblanadi va A jadvalning $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ xos vektori izlanayotgan vazn sifatida olinadi.

Chiziqli foyda funksiyasiga asoslangan barcha usullarga taalluqli bo'lgan kamchiliklardan tashqari, ierarxiyani tahlil qilish usuli o'ziga xos bo'lgan kamchilikka ega. Xususan, qo'shimcha effektiv bo'lmagan yechimni kiritish vaznlarning qiymatini o'zgartirib yuborishi mumkinki, natijada masalaning yechimi butunlay o'zgarib ketadi. Shuning uchun, ierarxiyani tahlil qilish usulini evristik usul sifatida qabul qilib, undan ehtiyotkorlik bilan foydalanish kerak bo'ladi.

Bu usul amaliyotga tatbiq etilgan bo'lib, undan ko'p kriteriyali masalalar haqida tasavvurga ega bo'lmaganlar, ekspertlar, hamda intuitsiya bilan ish olib boruvchilar tomonidan foydalanila boshlandi. Ierarxiyani tahlil qilish usulining muhim jihatlaridan biri, u matematik model qurishni talab etmaydi.

Shuni ta'kidlaymizki, keyingi paytlarda ierarxiyani tahlil qilish usulining turli ko'rinishdagi murakkab, o'zgargan shakllari yaratilgan.

2. Effektiv to'plamlar usuli

$f_i(x)$ funksiyaning qiymatlar to'plami Y_i bo'lsin, demak, u f_i kriteriya bo'yicha baholarni bildiradi. Barcha $f_i(x)$ kriteriyalar bo'yicha tartiblangan baholardan tashkil topgan $Y = \prod_{i=1}^{m} Y_i \subseteq R^m$ to'plam *vektorli baholar to'plami* deb ataladi. U holda, Y ning ixtiyoriy $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ elementi vektor ko'rinishda bo'ladi, bunda $y_i \in Y_i$.

Karlin teoremasi. Faraz qilaylik, vektorli baholar to'plami Y qat'iy qabariq, chegaralangan va yopiq bo'lsin. $x^* \in D$ yechim Pareto – optimal bo'lishligi uchun,

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x^*) \geq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x), \ \forall x \in D$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, ..., \alpha_m \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ sonlarining mavjud bo'lishligi zarur va yetarli.

Vektorli baholar to'plamining chegaralanganligi va yopiqligi Pareto – optimal yechimni mavjud bo'lishligi uchun, talab etilgan. $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$ trivial holatdan qutilish uchun, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ shart qo'shilgan.

Isbot. *Zarurligi.* $x^* \in D_p$ bo'lsin. U holda $K(x^*)$ konus bilan Y vektor baholi to'plam kesishmasi bitta $f(x^*)$ elementdan iborat bo'ladi $(K(x^*)\backslash\{f(x^*)\}) \cap Y = \emptyset$ (4.4-rasm). Qabariq to'plamlarning ajratish haqidagi teoremaga asosan R^m fazoda gipertekislik $\Gamma = \{f : \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i = \beta\}$ mavjudki, u $f(x^*)$ nuqtadan o'tadi:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x^*) = \beta. \tag{4.8}$$

Y to'plam esa Γ gipertekislikning bir tarafida yotadi:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i \leq \beta, \ \forall f \in Y, \tag{4.9}$$

$K(x^*)$ konus esa ikkinchi tarafida yotadi:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i k_i \geq \beta, \ \forall k \in K(x^*). \tag{4.10}$$

(4.8) va (4.9) lardan

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x^*) \geq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x), \ \forall f(x) \in Y$$

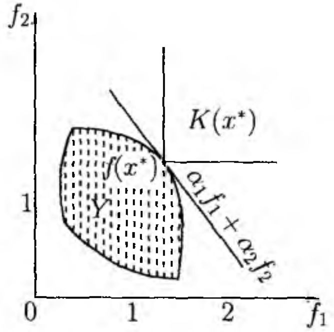
ekanligi kelib chiqadi, ya'ni kriteriyalarning chiziqli kombinatsiyasi $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$ x^* nuqtada maksimumga erishadi.

Endi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ koeffitsiyentlarning manfiy emasligini ko'rsatamiz. (4.8) va (4.10) lardan

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (k_i - f_i(x^*)) \geq 0, \ \forall k \in K(x^*)$$

kelib chiqadi.

Har bir j indeks uchun, $k_i = f_i(x^*)$, $i \neq j$, $k_j = f_j(x^*) + \delta$, bu yerda $\delta > 0$, belgilash kiritib, $\alpha_j \delta \geq 0$ ga ega bo'lamiz. j indeksning ixtiyoriy ekanligidan $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., m$ hosil bo'ladi. Teoremaning zarurligi isbotlandi.



4.4-rasm

Yetarliligi. Faraz qilaylik, teoremaning sharti x^* nuqtada manfiy bo'lmagan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ sonlar uchun, bajarilsin, ammo $x^* \overline{\in} F_p$ bo'lsin. Umumiylikka zarar keltirmagan holda $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = ... = \alpha_{i_k} = 0$, $\alpha_{i_{k+1}} > 0, \alpha_{i_{k+2}} > 0, ..., \alpha_m > 0$ deb olamiz. $x^* \overline{\in} F_p$ bo'lganligi sababli, x' yechim mavjudki, uning uchun, $f_i(x') \geq f_i(x^*)$ tengsizliklar barcha $i = 1, 2, ..., m$ larda o'rinli bo'lib, ularning kamida bittasi qat'iy bo'ladi. Ammo $f_i(x') = f_i(x^*)$ tenglik $i = i_{k+1}, i_{k+2}, ..., i_m$ lar uchun, bajariladi, chunki aks holda $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x') > \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x^*)$ tengsizlik hosil bo'ladi. Bu esa teorema shartiga zid. Demak, $f_i(x') > f_i(x^*)$ tengsizlik faqat $i = i_1, i_2, ..., i_k$ lar uchun, bajarilishi mumkin.

Qiymati $f(x')$ va $f(x^*)$ larni birlashtiruvchi kesmada yotgan $f(x)$ vektor funksiyani olamiz:

$$f(x) = \beta f(x') + (1 - \beta) f(x^*), \; 0 < \beta < 1.$$

Bir tomondan $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = ... = \alpha_{i_k} = 0$ bo'lganligi sababli,

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x') = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x^*)$$

bo'ladi.

Ikkinchi tomondan, vektor baholar to‘plami qat’iy qabariqligidan, kelib chiqadiki, $f(x)$ Y ning ichki qismiga tegishli bo‘ladi. Ammo ma’lumki chiziqli funksiya qabariq to‘plamning ichki nuqtasida maksimumga erishmaydi. Hosil bo‘lgan qarama-qarshilik teorema shartining yetarli ekanligini, shu bilan birga teoremani to‘la isbotlaydi.

Leksikografik optimizatsiya

Agar har bir kriteriyaning keyingi kriteriyalardan muhimligi haqida ma’lumot bo‘lsa, leksikografik optimizatsiya ishlatiladi. Ya’ni yechim qabul qiluvchi avval eng muhim kriteriya bo‘yicha yechimlarni taqqoslaydi, agar bir nechta yechimlarda kriteriyaning optimal qiymatlari teng bo‘lsa, u holda keyingi kriteriya bo‘yicha hosil bo‘lgan yechimlarni taqqoslaydi va hokazo. Ya’ni yechim qabul qiluvchi uchun, kriteriyalarning muhimlik darajasi katta rol o‘ynaydi, chunki u avval faqat eng muhim kriteriya bo‘yicha baholashni amalga oshiradi, keyin muhimlik bo‘yicha ikkinchisini va hokazo.

Bunday ko‘rinishdagi taqqoslash *leksikografik taqqoslash* deb ataladi. Yechimlarning bunday tartiblanishi leksikografik ma’noda tartiblanish bo‘lib, unga, masalan, lug‘atdagi so‘zlarning joylashuvi, sport jamoalarining (masalan, futbol yoki hokkey jamoalari) jadvaldagi tartiblanishi va hokazo. Umumiylikni buzmagan ravishda kriteriyalarning muhimligi bo‘yicha tartiblanishi tartiblanish raqami bilan aniqlangan bo‘lsin: eng muhimi f_1, keyingisi f_2 va hakoza. U holda quyidagi afzallik munosabatini berish mumkin (bu *leksikografik afzallik* deb ataladi):

$$x \succ y \Leftrightarrow (f_1(x) > f_1(y)) \vee [(f_1(x) = f_1(y)) \wedge (f_2(x) > f_2(y))] \vee$$
$$[(f_1(x) = f_1(y)) \wedge \ldots \wedge (f_{n-1}(x) = f_{n-1}(y)) \wedge (f_n(x) > f_n(y))].$$

Ushbu munosabat bog‘langan bo‘lib, kriteriyalarning bir jinsli bo‘lishligini talab etmaydi. Bog‘langanlik xossasi berilgan munosabatga nisbatan optimal yechimlar to'plamini aniqlash imkonini beradi, u *lekikografik optimal* deb ataladi. Bunda barcha leksikografik optimal yechimlar ekvivalent bo'lib, ularning har biri Pareto – optimal bo'ladi.

Leksikografik optimal yechimlarni topish quyidagi optimallashtirish masalasini yechishga keltiriladi:

$$\begin{cases} X_1 : f_1(x) \to \max,\ x \in X; \\ X_2 : f_2(x) \to \max,\ x \in X_1; \\ \dots \\ X_j : f_j(x) \to \max,\ x \in X_{j-1}; \\ \dots \\ X^* : f_n(x) \to \max,\ x \in X_{n-1}. \end{cases} \tag{4.11}$$

(4.11)-sistema masalalari ketma-ket yechib boriladi, agar birorta j da X_j to'plam bitta elementdan iborat bo'lsa, u boshlang'ich masalaning yechimi sifatida olinadi. Mabodo, X^* to'plam birdan ortiq elementdan iborat bo'lsa, leksikografik afzallikka nisbatan ularning barchasi ekvivalent bo'lib, yechim sifatida birortasi tanlab olinadi.

Quyidagi muhimlik bo'yicha tartiblangan ko'p kriteriyal yechim qabul qilish masalasi berilgan bo'lsin. Dengizda turli qutqaruv ishlari rejasining afzalligi bo'yicha tartiblash zarur bo'lsin. Yechimlarni taqqoslash uchun baholash kriteriyalari tanlab olingan:

4.2-jadval

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$
x_1	0,92	15	1
x_2	0,92	8	6
x_3	0,8	4	0
x_4	0,9	5	1
x_5	0,91	6	0

$f_1 \to \max$ – extremal holatda tirik qolish vaqti davomida qutqarib olish ehtimoli;

$f_2 \to \min$ – jalb qilingan maxsus qutqaruv xizmati soni;

$f_3 \to \min$ – jalb qilingan boshqa qutqaruv vositalari soni.

Yechim qabul qiluvchi muhimligi bo'yicha kriteriyalarni leksikografik ma'noda quyidagicha $f_1 \succ f_3 \succ f_2$ tartiblab chiqqan bo'lsin. Demak, birinchi o'rinda xarajat miqdoriga qaramagan holda qutqarib qolish ehtimolini maksimumlashtirish zarur. Agar bunday yechimlar bir nechta bo'lsa, u holda qutqaruv vositalaridan boshqa vositalarni jalb qilmaslikka harakat qilish kerak.

Qutqaruv ishlarini olib borishdagi reja kriteriyalarning baholari 4.2-jadvalda keltirilgan. Birinchi, eng muhim kriteriya f_1 ni maksimumlashtiruvchi yechimlar to'plami $X_1 = \{x_1, x_2\}$ ekanligi ma'lum. Endi, f_3 kriteriya bo'yicha x_1 va x_2 larni solishtirish orqali $x^* = x_1$ ekanligi kelib chiqadi.

Kriteriyalarning muhimligi bo'yicha leksikografik ma'noda tartiblab chiqilishi, masalani yechishdagi o'ralatish usulidagi yumshoq ustuvorlikka qarama-qarshi o'laroq *qat'iy ustuvorlik* deb ataladi. Bunday deyilishiga sabab, muhim kriteriyaning quyi bahosini muhimlik darajasi past bo'lgan kriteriyaning yuqori bahosi orqali qoplash mumkin emasligidir. Yumshoq ustuvorlikda bunday qoplashni amalga oshirish imkoniyati bo'ladi. Yuqorida ko'rilgan misolda, birinchi kriteriyaga maksimum qiymat bermaydigan yechim, boshqa kriteriyalar bahosidan qat'i nazar, optimallikka da'vogar bo'la olmaydi. Masalan, x_3- yechim ikkinchi va uchinchi kriteriyalarga kichik qiymat berishiga qaramasdan, usul boshlanishida tashlab yuborildi.

3. Ketma-ket voz kechish usuli

Boshqa, yana bir usul *ketma-ket voz kechish* usuli deb ataladi. Bu usulda kriteriyalar muhimlilik darajasi bo'yicha tartiblab chiqiladi. Faraz qilaylik, $f_1, f_2, ..., f_m$ muhimlilik darajasi kamayib borishlik ketma-ketligida joylashgan bo'lsin. U holda quyidagi amallar bajariladi.

1-qadam. Birinchi kriteriya bo'yicha bir kriteriyali masala yechiladi:

$$z_1^* = \max_{x \in D} f_1(x).$$

2-qadam. Birinchi qadamda topilgan z_1^* qiymatdan imkoniyat darajasi Δz_1 ga voz kechiladi va ikkinchi kriteriya bo'yicha yangi masala yechiladi:

$$z_2^* = \max_{\substack{x\in D \\ f_1(x)\geq z_1^*-\Delta z_1}} f_2(x).$$

3-qadam. Ikkinchi qadamda topilgan z_2^* qiymatdan imkoniyat darajasi Δz_2 ga voz kechiladi va uchinchi kriteriya bo'yicha yangi masala yechiladi:

$$z_3^* = \max_{\substack{x\in D \\ f_1(x)\geq z_1^*-\Delta z_1 \\ f_2(x)\geq z_2^*-\Delta z_2}} f_3(x).$$

Ushbu har bir kriteriya uchun voz kechish va bir kriteriyali masalani yechish jarayoni $m-$ qadamgacha davom ettiriladi:

$$z_m^* = \max_{\substack{x\in D \\ f_1(x)\geq z_1^*-\Delta z_1 \\ f_2(x)\geq z_2^*-\Delta z_2 \\ \dots \\ f_{m-1}(x)\geq z_{m-1}^*-\Delta z_{m-1}}} f_m(x).$$

Kriteriyaga chegara qo'yish usullarining asosiy kamchiligi ko'rsatkich darajalari va voz kechishni tanlashdagi subyektivlikdir. Ketma-ket voz kechish usulini qo'llashda shuni hisobga olish kerakki, voz kechishlar o'zaro o'lchovdosh bo'lmasliklari mumkin, shuning uchun, avvaldan kriteriyalarni normallashtirib olish kerak bo'ladi. Umuman, ikkinchi qadamdan boshlab, yechim Pareto ma'nosida optimal bo'lmasligi mumkin.

3-misol. Uch kriteriyali optimizatsiya masalasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 1 \leq x_1 \leq 3 \\ 1 \leq x_2 \leq 4 \end{cases} \tag{4.12}$$

shartlar ostida

$$z_1 = -x_1 + 2x_2 \to \max, \tag{4.13}$$

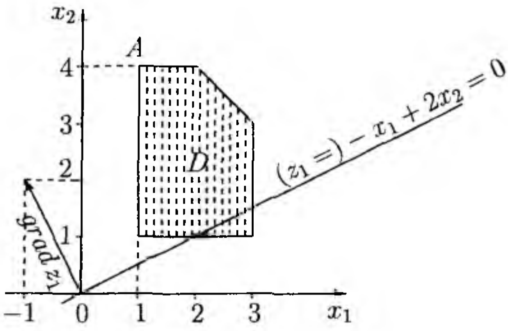
$$z_2 = 2x_1 + x_2 \to \max, \tag{4.14}$$

$$z_3 = x_1 - 3x_2 \to \max, \tag{4.15}$$

topilsin.

Kriteriyalarda o'zgaruvchilar koeffitsiyentlari turli ishorali bo'lganligi sababli, joiz yechimlar sohasi D da barcha kriteriyalarning qiymatlarini kattalashtirib bo'lmaydi. Shuning uchun, kelishuv to'plami (Pareto to'plami) D_p joiz yechimlar to'plami bo'lgan D bilan ustma-ust tushadi. Aniqlik uchun, faraz qilamiz, birinchi ikkita kriteriyalar uchun, mumkin bo'lgan voz kechish $\Delta z_1 = 3$, $\Delta z_2 = \frac{5}{3}$ bo'lsin.

Joiz yechimlar sohasi D da z_1 funksiyani maksimumlashtiramiz, ya'ni bir kriteriyali (4.13), (4.12)-masalani yechamiz. Buning uchun, chiziqli dasturlashning grafik usulidan foydalanamiz (4.5-rasm).



4.5-rasm

z_1 funksiyaning (4.12) shart ostidagi maksimumi D sohaning $(1, 4)$ koordinatali A nuqtasida erishadi, qilib:

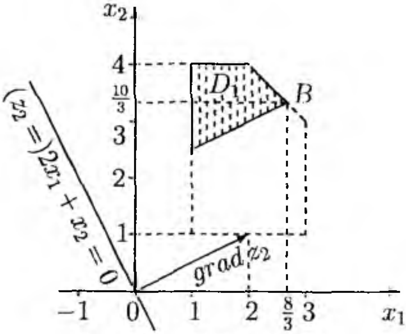
$$x_1^* = 1,\ x_2^* = 4,\ \max z_1 = z_1^* = 7.$$

Endi (4.12) va z_1 uchun, mumkin bo'lgan voz kechish $\Delta z_1 = 3$ ekanligini hisobga olgan holda hosil bo'ladigan qo'shimcha shart ostida z_2 funksiyani maksimumlashtiramiz. Misolda $z_1^* - \Delta z_1 = 4$

bo‘lganligi uchun, qo‘shimcha shart

$$-x_1 + 2x_2 \geq 4 \tag{4.16}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. (4.14), (4.12) va (4.16)-masalani ham grafik usul bilan yechamiz (4.6-rasm)



4.6-rasm

Demak, z_2 funksiyaning (4.12) va (4.16)-shartlar ostida maksimum qiymati D sohaning to‘plam ostisi bo‘lgan D_1 ning B nuqtasida erishar ekan:

$$x_1^{**} = \frac{8}{3}, \; x_2^{**} = \frac{10}{3}, \; \max z_2 = z_2^{*} = \frac{26}{3}.$$

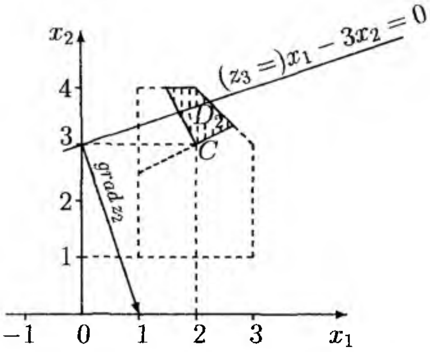
Endi z_2 kriteriya bo‘yicha $\Delta z_2 = \frac{5}{3}$ ga voz kechiladi, ya’ni (4.12)-shartga

$$2x_1 + x_2 \geq 7 \tag{4.17}$$

qo‘shimcha shart qo‘shiladi.

qilib (4.12), (4.16) va (4.17)-shartlar ostida (4.17) bilan aniqlangan z_3 funksiyaning maksimumini topish masalasiga kelamiz. Bu masalaning yechimi 4.7-rasmda keltirilgan.

qilib, uch kriteriyali masalaning optimal yechimini topamiz (4.7-rasmda C nuqta): $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Har bir kriteriyaning qiymatlari: $z_1 = 4$, $z_2 = 7$, $z_3 = -7$ ga teng bo‘ladi.



4.7-rasm

Bitta kriteriyaga keltirish

Bu turkumga kiruvchi usullarning asosiy g'oyasi berilgan ko'p kriteriyali masalaning yechimiga, qaysidir ma'noda, olib keladigan bir kriteriyali masalani (masalalarni) yechishdan iborat.

4. Asosiy kriteriya usuli

Kriteriyalar ichidan asosiysi (muhimi) tanlab olinadi. Faraz qilaylik, bunday kriteriya $f_1(x)$ bo'lsin. Boshqa barcha maqsad funksiyalar quyidagi qoida asosida chegaralangan holga o'tkaziladi. Chiziqli dasturlash talabiga muvofiq kriteriyalar qanoatlantirishi lozim bo'lgan ma'lum chegaralar qo'yiladi. $\tilde{f}_k$ nazorat ko'rsatkichlar sistemasi kiritilib, ularga nisbatan barcha kriteriyalar bo'yicha $\tilde{f}_k$ dan kichik bo'lmagan qiymatga erishtirish masalasi qo'yiladi:

$$f_k(x) \geq \tilde{f}_k, \; k = 1, 2, ..., m.$$

Asosiy kriteriya tanlab olingan va boshqa kriteriyalarga quyi chegara aniqlangandan so'ng, bir kriteriyali optimizatsiya masalasi yechiladi:

$$\begin{cases} f_k(x) \geq \tilde{f}_k, \; k = 1, 2, ..., m \\ x \in D \end{cases}$$

shartlar ostida

$$f_1(x) \to \max$$

topilsin.

Bunday usul injenerlik amaliyotida ko'proq ishlatiladi.

4-misol. Quyidagi ikki kriteriyali masalani qaraymiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

shartlar ostida

$$z_1 = x_1 \to \max,$$
$$z_2 = x_2 \to \max$$

topilsin.

Birinchi kriteriya asosiy bo'lib, qolganlari uchun, nazorat ko'rsatkichlar $\tilde{f}_1 = 0.4$, $\tilde{f}_2 = 0.4$ bo'lsin. U holda bir kriteriyali masalaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_2 \ge 0.4 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

shartlar ostida

$$z_1 = x_1 \to \max$$

topilsin.

4.8(a)-rasmdan ko'rinib turibdiki, optimal yechim $x^* = (1.2, 0.4)$, $z_{\max} = 1.2$ bo'ladi. Ta'kidlaymizki, ushbu usul bilan topilgan yechim effektiv bo'lishi shart emas.

O'ralatish usuli. Ushbu usulda m ta xususiy $f_1, f_2, ..., f_m$ kriteriyalar o'rniga, ularning kombinatsiyalaridan tuzilgan bitta skalyar kriteriya qaraladi. Kriteriyalarni o'ralatishda additiv, multiplikativ va maksimin usullari qaraladi.

5. Kriteriyalarni additiv o'ralatish usuli

Faraz qilaylik, kriteriyalar o'lchovdosh bo'lishsin, masalan, normallashgan va kriteriyaning muhimligini xarakterlaydigan ahamiyatli koeffitsiyentlar vektori $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s)$ aniqlangan bo'lsin. Bu bildiradiki, agar f_i kriteriya f_j kriteriyadan afzal bo'lsa $\alpha_j \leq \alpha_i$ bo'ladi. Bunda

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1, \ \alpha_k \geq 0$$

shartlar o'rinli.

Additiv usul uchun, yangi maqsad funksiya

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k(x)$$

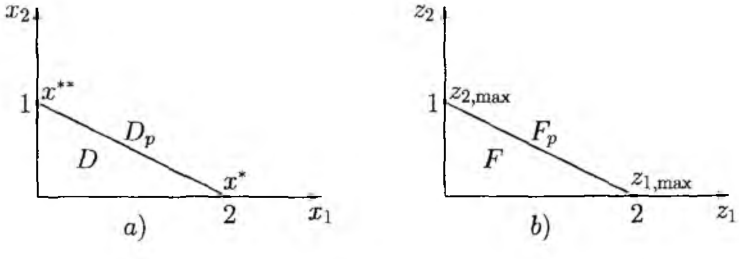
ko'rinishda quriladi va

$$z = f(x) \to \max, \ \ x \in D$$

skalyar kriteriyali optimizatsiya masalasi yechiladi.

5-misol. 4-misol asosiy kriteriya usuli bilan yechilsin.

Har bir kriteriya bo'yicha alohida masalani yechamiz. Grafik usuldan foydalanib birinchi kriteriya bo'yicha optimal yechimni aniqlaymiz: $x^* = (2,0)$, ikkinchi kriteriya bo'yicha optimal yechim esa: $x^{**} = (0,1)$ bo'ladi, 4.8(a)-rasm.



4.8-rasm

4.8(b)-rasmda erishuvchanlik to'plami F va kriteriyalarning qiymatlari keltirilgan: $z_{1,\max} = 2$ va $z_{2,\max} = 1$. Kriteriyalarni o‘ralatishni bajaramiz:

$$z = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \to \max,$$

bu yerda $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$.

Maqsad funksiya chiziqli bo‘lganligi sababli, α_1 va α_2 larning qiymatlariga qarab optimal yechim joiz sohaning yoki x^*, yoki x^{**} burchak nuqtalaridan, yoki $[x^*, x^{**}]$ kesmaning nuqtalaridan iborat bo‘ladi. Masalan, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ bo‘lganda optimal yechim $x^* = (2, 0)$ bo‘ladi.

6. Kriteriyalarni multiplikativ o‘ralatish usuli

Multiplikativ usul uchun, yondashuv yuqoriga o‘xshash, faqat maqsad funksiya quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$f(x) = \prod_{k=1}^{m} f_k^{\alpha_k}, \; \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1, \; \alpha_k \geq 0.$$

Kriteriyalarni o‘ralatish usullarining asosiy va jiddiy kamchiligi, bu α_k koeffitsiyentlarni tanlashdagi subyektivlikdir.

7. Maksimin o‘ralatish usuli. Bu usul, odatda, quyidagi shaklda qo‘llaniladi:

$$J(x) = \min_i f_i(x) \to \max_{x \in D}.$$

Bu yerda additiv o‘ralatish usuliga nisbatan $J(x)$ maqsad funksiyaga faqat, berilgan x nuqtada eng kichik qiymat qabul qiluvchi f_i kriteriya ta’sir qiladi. Additiv o‘ralatish usulida ayrim f_i larning "yomon" qiymatlari boshqa maqsad funksiyalarining "yaxshi" qiymatlari hisobiga bo‘lishi mumkin bo‘lsa, maksimin kriteriyasida eng yomon holat hisobidan kelib chiqiladi va $J(x)$ ning qiymati asosida barcha kriteriyalar uchun, kafolatlangan quyi bahoni aniqlash imkoni bo‘ladi. Ushbu dalil maksimin kriteriyasini additiv o‘ralatish usulidan afzalligini bildiradi.

Zarur hollarda maqsad funksiyalarini normallashtirish orqali ularning o'lchov birliklarini o'zaro bir xil masshtabga keltirish mumkin, buning uchun, maksimin kriteriyasi "o'rtacha vazn" shakliga keltiriladi:

$$J(x) = \min_i \alpha_i f_i(x) \to \max_{x \in D},$$

bu yerda α_i vazn koeffitsiyentlari $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ shartlarni qanoatlantiradi.

α_i larning turli qiymatlarini tanlash hisobiga hamda aprior ma'lumotlardan foydalangan holda optimallashtirish jarayoniga ta'sir etish mumkin bo'ladi. Quyidagi misolni keltiramiz.

Tengsizliklar sistemasini yechish. Sistemalarning parametrlarini optimal tanlash (optimal loyihalash) masalalarida loyihalashtirilayotgan sistemalariga nisbatan bo'lgan texnik, iqtisodiy va boshqa talablar "ishchanlik shartlari" ko'rinishda ifodalanib, ular

$$y_i(x) \leq t_i, \; i = 1, 2, ..., m, \tag{4.18}$$

tengsizliklar shakliga ega bo'ladi. Bu yerda $y_i(x)$ sistemaning harakatlanish sifatini ko'rsatuvchi xususiy ko'rsatkichlarni bildiradi: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – tanlanishi zarur bo'lgan vektor parametr; t_i – berilgan sifat ko'rsatkichning joiz yuqori chegarasi (nazorat ko'rsatkichlari). Teskari bo'lgan $z_k(x) \geq s_k$ tengsizliklar (4.18)-shaklga qiyinchiliksiz keltiriladi. Buning uchun, $y_k = -z_k$, $t_k = -s_k$ belgilashlarni kiritish yetarli.

(4.18)-tengsizliklar sistemasini optimizatsiya nazariyasi usullari yordamida yechish uchun, quyidagicha yo'l tutiladi. (4.18)-tengsizliklarning har birining bajarilish kattaligini belgilovchi f_i *zaxira* belgilash kiritiladi. Zaxiraning eng sodda shakli quyidagicha:

$$f_i(x) = t_i - y_i(x).$$

Shundan so'ng barcha zaxiralarni maksimumlashtirishning ko'p kriteriyali optimizatsiya masalasiga kelamiz:

$$f_i(x) \to \max_{x \in D}, \ i = 1, 2, ..., m.$$

Maksimin usuli (minimal zaxirani maksimumlashtirish) quyidagi bir kriteriyali masalaga olib keladi:

$$J(x) = \min_i (t_i - y_i(x)) \to \max, \ x \in D.$$

Vazn koeffitsiyenti boʻlganda:

$$J(x) = \min_i \alpha_i (t_i - y_i(x)) \to \max_{x \in D} \tag{4.19}$$

masalaga kelinadi.

(4.19)-funksiyadagi α_i vazn koeffitsiyentlari xususiy kriteriyalarning qiymatlarini normallashtirish vazifasini oʻtaydi.

Buni quyidagicha amalga oshirish mumkin. (4.18)-tengsizlikning har biri uchun, f_i kriteriyalar orttirmasining ekvivalentligini (yechim qabul qiluvchining nuqtayi nazaridan) aniqlovchi $\delta_i > 0$ qiymat beriladi. Natijada, (4.19) oʻrniga quyidagi masalaga ega boʻlamiz:

$$J(x) = \min_i \left(\frac{t_i - y_i(x)}{\delta_i} \right) \to \max_{x \in D}. \tag{4.20}$$

qilib, har bir $t_i - y_i$ ayirima $\delta_i > 0$ orqali aniqlangan maxsus oʻlchov birligiga ega boʻladi. Normallashtirish uchun, δ_i sifatida $f_i(x)$ ning berilgan boshlangʻich x^0 nuqtadagi qiymati, $f_i(x)$ ning boshqa biror xarakterli qiymati yoki agar t_i lar nolga teng boʻlmasa, ular olinadi.

Masala shartiga koʻra, faraz etaylik, $y_1(x)$ t_1 dan juda ham kichik boʻlib ketmasin. (4.18)-dagi mos tengsizlik katta boʻlmagan zaxirada oʻrinli boʻlishligi talab etilsin. Bu yerda vazn koeffitsiyentlarining boshqarish xossasidan foydalangan holda (4.20) oʻrniga quyidagi masala hosil boʻladi:

$$J(x) = \min_i \alpha_i' \left(\frac{t_i - y_i(x)}{\delta_i} \right) \to \max_{x \in D}, \tag{4.21}$$

bu yerda α'_1 boshqa α'_i, $i = 2, 3, ..., m$ larga qaraganda ancha katta qilib olinadi.

Vazn koeffitsiyenti α'_1 ni yetarlicha katta qilib olish bir tarafdan:

$$y_1(x) \leq t_1$$

tengsizlikning bajarilmasligi oqibatida $t_1 - y_1(x) < 0$ manfiy soni katta musbat α'_1 songa ko'paytirilgani sababli (4.21)-funksionalning qiymati kichiklashadi, ya'ni absolyut qiymati bo'yicha katta bo'lgan manfiy songa teng bo'lib qoladi:

$$J(x) = \alpha'_1 \frac{t_1 - y_1(x)}{\delta_1}.$$

Ikkinchi tarafdan $f_1(x) = t_1 - y_1(x)$ zaxiraning aytarli katta bo'lmagan musbat qiymatida, uni boshqa sifat ko'rsatkichlarining ishchanlik zaxiralari bilan taqqoslash mumkin bo'ladi.

qilib α'_1 ning kattalashishi barqaror omilga olib keladi. Natijada, bir vaqtning o'zida, optimal nuqtada uncha katta bo'lmagan musbat zaxira mavjudligi bilan mos ishchanlik sharti yuqori ehtimollikda bajariladi.

Natijasi kafolatlangan usullar

Bunda eng kichik kriteriyaning yaxshi natijaga erishishtirish usullari ko'riladi, ya'ni o'zaro kelishuv yechimi quyidagi optimizatsiya masalasini yechish orqali topiladi:

$$z = \min_{k=1,2,\ldots,m} f_k(x) \to \max, \ x \in D.$$

Bu maksimin masalasidir. Ko'p kriteriyali optimizatsiya masalalarini yechishda kriteriyalarni normallashtirilgan holdagi natijasi kafolatlangan usul istiqbolli yo'nalishni tashkil qiladi.

Normallashtirilgan $\lambda_k(x) = \frac{f_k(x)}{f_k^*}$ kriteriyalar uchun, bu yerda $f_k^* = \max\limits_{x \in D} f_k(x)$, maksimin masalasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$z = \min_{k=1,2,...,m} \lambda_k(x) \to \max, \ x \in D. \tag{4.22}$$

Ikki holga to'xtalib o'tamiz: kriteriyalar teng qiymatli bo'lgan va teng qiymatli bo'lmagan (berilgan afzallik asosida).

Teng qiymatli kriteriyalar bo'lgan hol

(4.22)-masala quyidagi masalaga ekvivalent:

$$\begin{cases} \lambda \leq \lambda_k(x), \ k = 1, 2, ..., m \\ x \in D \end{cases} \tag{4.23}$$

shart ostida

$$z = \lambda \to \max \tag{4.24}$$

topilsin.

(4.23), (4.24)-masala $\lambda-$ *masala* deb ataladi. U chiziqli maqsad funksiyaga va umuman $m+n$ ta chegaraga ega. Agar f_k va g_i funksiyalarning barchasi chiziqli bo'lsa, $\lambda-$ masala chiziqli dasturlash masalasi bo'ladi. Bu holda isbotlanganki, $\lambda-$ masalaning optimal x^* yechimi Pareto ma'nosida optimal bo'ladi.

6-misol. 4-misolda berilgan masala natijasi kafolatlangan usul yordamida teng qiymatli kriteriya bilan yechilsin. $\lambda-$ masalani tuzamiz:

$$\begin{cases} \lambda \leq \frac{x_1}{2} \\ \lambda \leq x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

shart ostida

$$z = \lambda \to \max$$

topilsin. Ushbu masalaning optimal yechimi $x^* = (1, \frac{1}{2})$, $\lambda^* = \frac{1}{2}$ bo'ladi.

Teng qiymatli bo'lmagan hol

Qaralayotgan $f_1(x)$ va $f_2(x)$ kriteriyalar uchun, $\lambda_1(x)$ va $\lambda_2(x)$ lar normallashtirilgan mos kriteriyalar bo'lsin. Joiz soha D ni ikkiga bo'lamizki, $D = D_1 \cup D_2$, D_1 da $\lambda_1(x) > \lambda_2(x)$ tengsizlik, D_2 da $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin.

Afzallikni sonli xarakterlash uchun, bog'lovchi koeffitsiyent $p(x)$ kiritiladi: $\lambda_1(x) = p(x)\lambda_2(x)$, ya'ni $p(x)$, $\lambda_2(x)$ bahoga nisbatan $\lambda_1(x)$ baho necha marta katta ekanligini bildiradi. Agar teng qiymatli kriteriyalar uchun, x^* optimal nuqta bo'lsa, u holda $p(x^*) = 1$ bo'ladi.

Agar 1-kriteriyaga nisbatan x_1^* – optimal nuqta bo'lsa, u holda $\lambda_1(x_1^*) = 1$, $\lambda_2(x_1^*) < 1$ bo'ladi, ya'ni $x_1^* \in D_1$, va demak: $p(x_1^*) > 1$. Xuddi shunga o'xshash, agar 2-kriteriya bo'yicha x_2^* optimal nuqta bo'lsa, u holda $\lambda_1(x_2^*) < 1$, $\lambda_2(x_2^*) = 1$, va demak: $p(x_2^*) < 1$.

Faraz qilaylik, birinchi kriteriya ikkinchisiga nisbatan afzallikka ega bo'lsin. U holda $p(x)$ koeffitsiyentni $(1, p(x_1^*))$ oraliqda aniqlash kerak bo'ladi, keyin chegaralar sistemasiga $\lambda_1(x) = p(x)\lambda_2(x)$ tenglik kiritilish bilan λ – masala tuziladi va yechiladi. Shundan so'ng D_1 sohaga tegishli bo'lgan x^* nuqta topiladi.

7-misol. 4-misol, teng qiymatli bo'lmagan, 1-kriteriya 2-kriteriyaga nisbatan afzal bo'lgan shartda, natijasi kafolatlangan usul bilan yechilsin.

$x_1^* = (2, 0)$, u holda $\lambda_1(x_1^*) = 1$, $\lambda_2(x_1^*) = 0$, demak: $p(x_1^*) = \frac{1}{0} = \infty$. $(1, \infty)$ intervalda bog'lanish koeffitsiyenti $p(x) = 2$ bo'lsin. U holda $\lambda_1(x) = 2\lambda_2(x)$ bo'ladi, ya'ni $\frac{x_1}{2} = 2x_2$. λ – masalani tuzamiz:

$$
\begin{cases}
\lambda \le \frac{x_1}{2} \\
\lambda \le x_2 \\
\frac{x_1}{2} = 2x_2 \\
x_1 + 2x_2 \le 2 \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \lambda \ge 0
\end{cases}
$$

shart ostida

$$z = \lambda \to \max$$

topilsin.

Berilgan masalaning yechimi $x^* = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$, $\lambda^* = \frac{1}{3}$ bo'ladi.

Ko'rilgan usulning kamchiligi bog'lanish koeffitsiyenti $p(x)$ ni aniqlashdagi subyektivlikdir.

Berilgan ko'p qiymatli optimizatsiya masalasini natijasi kafolatlangan usul bilan yechish davomida, odatda, quyidagi bosqichlardan o'tiladi:

1) berilgan maqsad va chegaralar asosida matematik modelni ishlab chiqish, bunda ekspertlar fikridan foydalaniladi;

2) har bir kriteriya bo'yicha sistemani oldindan tahlil etish, bunda bir kriteriyali optimizatsiya usullari va dasturiy ta'minotlar ishlatiladi;

3) kriteriyalarni normallashtirish;

4) ko'p kriteriyali optimizatsiya masalasini teng qiymatli kriteriyalar yordamida yechish;

5) kriteriyalar uchun, afzallikni kiritish va aniqlangan afzallik asosida ko'p kriteriyali optimizatsiya masalasini yechish.

8. Maqsadli dasturlash usullari

Ushbu guruhdagi usullarning bunday nomlanishiga sabab, har bir kriteriya uchun, aniq maqsad $f_1^*, f_2^*, ..., f_m^*$ berilgan bo'ladi. Ko'p kriteriyali optimizatsiya masalasi, bu holda og'ishning biror

p darajasi yig'indisini minimumlashtirishga keltiriladi:

$$z = \left(\sum_{k=1}^{m} w_k |f_k(x) - f_k^*|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to \min,\ x \in D, \qquad (4.25)$$

bu yerda w_k – vazn koeffitsiyentlari bo'lib, ular mos kriteriyaning muhimligini ifodalaydi.

p va aniq maqsadlar f_k^* larning qiymatlarini o'zgartirish hisobiga (4.25)-masalani konkretlashtirish mumkin. Xususan, $p = 2$ va $w_k = 1$ da og'ishlarning kvadrati yig'indisini minimallashtirish masalasiga kelinadi:

$$z = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} w_k |f_k(x) - f_k^*|^2} \to \min,\ x \in D,$$

ya'ni, erishuvchanlik to'plami F da "absolyut maksimum" bo'lgan $f^* = (f_1^*, f_2^*, ..., f_k^*)$ gacha bo'lgan evklid masofa minimumlashtiriladi. Bu yerda $f_k^* = \max\limits_{x \in D} f_k(x)$.

$|f_k(x) - f_k^*|$ kattaliklarning o'lchovdosh bo'lmasligidan vujudga keladigan qiyinchiliklarni kriteriyalarni normallashtirish hisobiga bartaraf etish mumkin, unda quyidagi masalaga kelinadi:

$$z = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{|f_k(x) - f_k^*|}{f_k^*}\right)^2} \to \min,\ x \in D, \qquad (4.26)$$

8-misol. 4-misolning ko'p kriteriyali optimizatsiya masalasi maqsad dasturining usuli yordamida yechilsin.

Bu misol shartlari asosida $f_1^* = 2$, $f_2^* = 1$ ga ega bo'lamiz, shuning uchun, (4.26)-masala quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

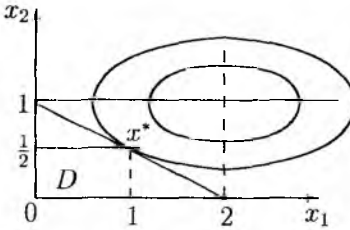
shart ostida

$$z = \sqrt{\frac{(x_1 - 2)^2}{4} + \frac{(x_2 - 1)^2}{1}} \to \min$$

topilsin. z ning o'zgarmas qiymatida maqsad funksiyaning sath chizig'i markazi $M(2,1)$ nuqtada va yarim o'qlari $a = 2z$ a $b = z$ bo'lgan $\frac{(x_1-2)^2}{(2z)^2} + \frac{(x_2-1)^2}{z^2} = 1$ ellipsdan iborat bo'ladi.

z ning minimal qiymati topilsinki, natijada mos ellips D soha bilan umumiy nuqtaga ega bo'lsin. Bu masalaning grafik yechimi 4.9-rasmda keltirilgan.

Bunda, masalaning optimal yechimi $x^* = (1, \frac{1}{2})$ bo'ladi.



4.9-rasm

Mustaqil ishlash uchun misollar

7.2. Maksimum prinsipidan foydalanib quyidagi misollarni yeching.

1. $\int\limits_0^T u^2\,dt \to \inf, \quad \dot{x} = u, \ x(0) = x^0, \ x(T) = x^1.$

2. $\int\limits_0^T u^2\,dt \to \inf, \quad \dot{x} = x + u, \ x(0) = x^0, \ x(T) = x^1.$

3. $\int\limits_0^T u^2\,dt \to \inf, \quad \ddot{x} = u, \ x(0) = x_{10}, \dot{x}(0) = x_{11}, x(T) = x_{20}, \dot{x}(T) = x_{21}.$

4. $\int\limits_0^T u^2\,dt \to \inf, \quad \ddot{x} + x = u, \ x(0) = x_{10}, \dot{x}(0) = x_{11}, x(T) = x_{20}, \dot{x}(T) = x_{21}.$

5. $\int\limits_0^1 (x + \dot{x}^2)\,dt \to \inf, \quad x(0) = x^0.$

6. $\int\limits_0^T \dot{x}^2\,dt \to \inf, \quad x(0) = x^0.$

7. $\int\limits_0^1 (x^2 + \dot{x}^2)\,dt \to \inf, \quad x(0) = x^0.$

8. $\int\limits_1^2 t^2\dot{x}^2\,dt \to \inf, \quad x(1) = x^0.$

9. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \inf, \quad \dot{x} = u,\ |u| \le 1,\ x(0) = x^0,\ x(1) = x^1.$

10. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \inf, \quad \dot{x} + x = u,\ |u| \le 1,\ x(0) = x^0,\ x(1) = x^1.$

7.3 Harakati

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan berilgan obyektning berilgan nuqtadan nolga olib kelish tezkor masalasida optimal vaqt topilsin:

$$1)\begin{cases} -3 \le u \le 2, \\ \qquad T(2,2), \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} -1 \le u \le 4, \\ \quad T(-1,-2), \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} -2 \le u \le 1, \\ \quad T(-2,1), \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} -1 \le u \le 2, \\ \qquad T(1,2). \end{cases}$$

Quyidagi misollarda maksimum prinsipi uchun, yetarli shart bo‘lgan holatning umumiylik shartini bajarilishligi aniqlansin.

$$5)\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2, \\ |u_1| \le 1,\ |u_2| \le 1, \end{cases} \qquad 6)\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u_2, \\ |u_1| \le 1,\ |u_2| \le 1, \end{cases}$$

$$7)\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, \\ |u| \le 1, \end{cases} \qquad 8)\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ |u| \le 1. \end{cases}$$

7.4 Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Ketma-ket voz kechish usuli bilan yechilsin. Birinchi kriteriya bo'yicha voz kechish, uning optimal qiymatining 10 fozini tashkil qiladi. Bunda

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 90, \\ x_1 + x_2 \leq 60, \\ x_2 \leq 50 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

shart ostida

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$f_2(x_1, x_2) = 40x_1 + 10x_2 \to \max$$

topilsin.

2. Sut kombinati, mahalliy bozordagi vaziyatni o'rganish natijasida raqobatdosh bo'la oladigan yangi ko'rinishdagi yogurt mahsulotini ishlab chiqarishga qaror qildi. Buning uchun, mahsulot ishlab chiqarishni tashkil etish rejasini tuzish zarur. Tashkil etishning asosiy xarajatlari: jihozlarni yangilash (x) va ilmiy tadqiqot ishlari (y) hisoblanadi. Tadqiq qilish natijasida ma'lum bo'ldiki, birlik mahsulotning tannarxi va sifati mos ravishda xarajatlarga $F_1(x, y) = 12 + ax + by$, $F_2(x, y) = 6 + cx + dy$ ko'rinishda bog'liq bo'lar ekan. Mahsulotning tannarxini minimumlashtirish bilan sifatini maksimumlashtirish masalasini yechish talab etiladi. Bu ikki kriteriyadan birinchisi – tannarx asosiy hisoblanib, undan 3 birlikka voz kechish mumkin. Shu bilan birga xarajatlarga qo'shimcha shartlar mavjud:

$$\begin{cases} 5x + 4y \leq 40, \\ 2x + y \geq 8, \\ 0 \leq x \leq 6,\ \ y \geq 0. \end{cases}$$

Ushbu masala voz kechish usuli yordamida yechilsin.

3. Korxona to‘rt turdagi: M_1, M_2, M_3, M_4 mahsulot ishlab chiqaradi. Buning uchun, uch xildagi xomashyo zaxiralaridan foydalaniladi. Bir dona mahsulot ishlab chiqarish uchun, sarf bo‘ladigan xomashyolar miqdori va ularning zaxira hajmi quyidagi 4.3-jadvalda keltirilgan:

4.3-jadval

Zaxira	M_1	M_2	M_3	M_4	*Zaxira*
R_1	2	1	1	3	300
R_2	1	–	2	1	170
R_3	1	2	1	–	340

Barcha mahsulotlarga to‘rtta dastgohda ishlov beriladi. Har bir mahsulotga ishlov berish vaqti va dastgohning mumkin bo‘lgan ish hajmi 4.4-jadvalda keltirilgan:

4.4-jadval

Dastgohlar	M_1	M_2	M_3	M_4	*Ish hajmi (soat)*
D_1	2	4	5	3	520
D_2	1	8	6	5	680
D_3	7	4	5	7	440
D_4	4	6	7	2	360

Bitta mos mahsulotlarning bahosi va tannarxi quyidagi 4.5-jadvalda keltirilgan:

4.5-jadval

	M_1	M_2	M_3	M_4
Ulgurji bahosi(pul bir.)	10	14	12	10
Tannarx (pul bir.)	7	8	9	8

Har bir mahsulotning hajmi 10 dan kam emas 50 dan ortiq bo‘lmasligi zarur. Ishlab chiqarishning effektivlik ko‘rsatkichi sifatida quyidagilar olingan:

1. f_1– korxonaning foydasi.

2. f_2– keladigan umumiy daromad.

3. f_3– mahsulotlarning tannarxi.

4. f_4– dastgohlarning ish bilan ta'minganlik darajasi.

Talab qilinadi:

1. Har bir kriteriya bo'yicha voz kechishlik, uning optimal qiymatini 10 foizini tashkil etsa, ketma-ket voz kechish usuli bilan masala yechilsin.

2. Agar vazn koeffitsiyentlari mos ravida 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 bo'lsa, masala kriteriyalarni o'ralatish usuli bilan yechilsin.

3. Korxona besh turdagi: M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 mahsulot ishlab chiqaradi. Buning uchun uch xildagi xomashyo zaxiralaridan foydalaniladi. Bir dona mahsulot ishlab chiqarish uchun, sarf bo'ladigan xomashyolar miqdori va ularning zaxira hajmi quyidagi 4.6-jadvalda keltirilgan:

4.6-jadval

Xomashyo	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	*Zaxira*
R_1	4	5	3	2	3	300
R_2	2	4	4	4	2	4500
R_3	3	1	0	1	1	1500

4.7-jadval

Dastgohlar	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	*Ish hajmi (soat)*
D_1	2	3	5	4	5	5000
D_2	1	2	6	3	2	4000
D_3	3	4	4	1	4	4000
D_4	1	1	2	2	1	2000

4.8-jadval

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
Ulgurji bahosi(pul bir.)	10	9	12	14	9
Tannarx (pul bir.)	7	8	9	12	6

Barcha mahsulotlarga to'rtta dastgohda ishlov beriladi. Bitta mahsulotga ishlov berish vaqti va dastgohning mumkin bo'lgan ish hajmi 4.7-jadvalda keltirilgan. Bitta mahsulotning bahosi va tannarxi 4.8-jadvalda keltirilgan.

4. Korxona besh turdagi: M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 mahsulot ishlab chiqaradi. Buning uchun uch xildagi xomashyo zaxiraladan foydalaniladi. Bir dona mahsulot ishlab chiqarish uchun, sarf bo'ladigan xomashyolar miqdori va ularning zaxira hajmi quyidagi 4.9-jadvalda keltirilgan:

4.9-jadval

Xomashyo	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	*Zaxira*
R_1	6	3	2	1	4	350
R_2	1	2	6	8	7	4000
R_3	4	1	8	4	3	1600

4.10-jadval

Dastgohlar	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	*Ish hajmi (soat)*
D_1	5	7	9	4	4	5500
D_2	7	2	1	3	3	4500
D_3	0	2	4	6	4	4200
D_4	3	0	3	2	5	2200

4.11-jadval

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
Ulgurji bahosi(pul bir.)	11	6	13	16	7
Tannarx (pul bir.)	4	8	9	17	5

Barcha mahsulotlarga to'rtta dastgohda ishlov beriladi. Bitta mahsulotga ishlov berish vaqti va dastgohning mumkin bo'lgan ish hajmi 4.10-jadvalda keltirilgan. Bitta mahsulotning bahosi va tannarxi 4.11-jadvalda keltirilgan.

Har bir mahsulotning hajmi 100 dan kam emas 500 dan ortiq bo'lmasligi zarur. Ishlab chiqarishning effektivlik ko'rsatkichi quyidagilar hisoblanadi:

1. f_1– korxonaning foydasi;

2. f_2 – keladigan umumiy daromad;

3. f_3 – mahsulotlarning tannarxi;

4. f_4– dastgohlarning ish bilan ta'minganlik darajasi.

Talab qilinadi:

1. Har bir kriteriya bo'yicha voz kechishlik, uning optimal qiymatini 10 foizini tashkil etsa, ketma-ket voz kechish usuli bilan masala yechilsin.

2. Agar vazn koeffitsiyentlari mos ravida 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 bo'lsa, masala kriteriyalarni o'ralatish usuli bilan yechilsin.

5. Korxona to'rt turdagi: M_1, M_2, M_3, M_4 mahsulot ishlab chiqaradi. Buning uchun, uch xildagi xomashyo zaxiralaridan foydalaniladi. Bir dona mahsulot ishlab chiqarish uchun, sarf bo'ladigan xomashyolar miqdori va ularning zaxira hajmi quyidagi 4.12-jadvalda keltirilgan:

4.12-jadval

Zaxira	M_1	M_2	M_3	M_4	*Zaxira*
R_1	3	6	2	2	200
R_2	3	4	–	1	200
R_3	3	2	–	2	300

Barcha mahsulotlarga to'rtta dastgohda ishlov beriladi. Har bir mahsulotga ishlov berish vaqti va dastgohning mumkin bo'lgan ish hajmi 4.13-jadvalda keltirilgan:

4.13-jadval

Dastgohlar	M_1	M_2	M_3	M_4	*Ish hajmi (soat)*
D_1	5	4	2	3	500
D_2	3	8	4	5	650
D_3	7	3	5	3	450
D_4	2	6	8	2	350

Bitta mos mahsulotning bahosi va tannarxi quyidagi 4.14-jadvalda keltirilgan:

4.14-jadval

	M_1	M_2	M_3	M_4
Ulgurji bahosi(pul bir.)	15	10	14	15
Tannarx (pul bir.)	2	5	9	4

Har bir mahsulotning hajmi 10 dan kam emas 50 dan ortiq bo'lmasligi zarur. Ishlab chiqarishning effektivlik ko'rsatkichi sifatida quyidagilar olingan:

1. f_1– korxonaning foydasi.
2. f_2– keladigan umumiy daromad.
3. f_3– mahsulotlarning tannarxi.
4. f_4– dastgohlarning ish bilan ta'minganlik darajasi.

Talab qilinadi:

1. Har bir kriteriya bo'yicha voz kechishlik, uning optimal qiymatini 10 foizini tashkil etsa, ketma-ket voz kechish usuli bilan masala yechilsin.

2. Agar vazn koeffitsiyentlari mos ravida 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 bo'lsa, masala kriteriyalarni o'ralatish usuli bilan yechilsin.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN BERILGAN MISOL VA MASALALARNING JAVOBLARI

I bobda berilgan misol va masalalarning javoblari:

1.2. 1). $x_1 = x_2 = x_5 = 0, x_3 = 5, x_4 = 3$, $x_0 = 3$; 2). $x_1 = 1/3$, $x_2 = 11/3$, $x_3 = 4$, $x_0 = -46/3$; 3). a). $(1, 3, 2, 1)$; b).$(0, \frac{15}{2}, \frac{7}{2}, 0)$; c). $(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0)$; 4). $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$, $x_0 = 3$; 5). $\alpha \prec \beta$, $\gamma \prec \alpha$, $\delta \prec \alpha$, $\gamma \prec \beta$, $\delta \prec \beta$, $\gamma \prec \delta$, $\gamma \prec \beta$; 6). $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$, $x_0 = 5$.

1.3. 1). $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_0 = 19$; 2). $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_0 = 5$; 3). $x_1 = 0, x_2 = 1$, $x_0 = 1$; 4). $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_0 = 4$; 5). A turdagi mahsulot$-x_A = 12$, B turdagi mahsulot$-x_B = 18$, $Z_{\max} = 1080$; 6). 3530 ta temir tunuka, undan 3200 tasi 2-usul bilan, 130 tasi 4-usul bilan tayyorlanadi, $z_{\min} = 6400$; 7). A ning soni$-x_A = 54$, B ning soni$-x_B = 132$, $x_{\max} = 38400$.; 8). ikkinchi mahsulot$-x_2 = 8$, uchinchi mahsulot$-x_3 = 10$, $z_{\max} = 760$; 9). 7 ta fanera, undan birinchi usulda$-x_1 = 3$, ikkinchi usulda$-x_2 = 4$, $z_{\min} = 100$; 10). 2 ta stol, 35 ta shkaf, $z_{\max} = 362$; 11). A dan-327 ta, B dan-146 ta, $z_{\min} = 1238$; 12). 1-turdan-60, 2-turdan-45, $z_{\max} = 1575$; 13). A dan-400, B dan-200, $z_{\max} = 7200$.

1.4. 1). $x_{11} = 0$, $x_{12} = 200$, $x_{13} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 100$, $x_{23} = 150$, $x_{31} = 50$, $x_{32} = 0$, $x_{33} = 50$, $x_{41} = 400$, $x_{42} = 0$, $x_{43} = 0$, $z = 2600$; 2). $x_{11} = 0$, $x_{12} = 150$, $x_{13} = 0$, $x_{14} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 80$, $x_{24} = 100$, $x_{31} = 100$, $x_{32} = 0$, $x_{33} = 120$, $x_{34} = 0$, $z = 5890$; 3). $x_{11} = 90$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 0$, $x_{14} = 30$, $x_{15} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 120$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 0$, $x_{25} = 60$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 0$, $x_{33} = 80$, $x_{34} = 70$ $x_{35} = 0$, $z = 10150$; 4). $x_{11} = 0$, $x_{12} = 60$, $x_{13} = 0$, $x_{14} = 50$, $x_{21} = 20$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 170$, $x_{24} = 0$, $x_{31} = 60$, $x_{32} = 0$, $x_{33} = 0$, $x_{34} = 30$, $z = 1280$; 5). $x_{11} = 0$, $x_{12} = 5$, $x_{13} = 60$, $x_{14} = 35$, $x_{21} = 75$, $x_{22} = 75$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 0$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 0$, $x_{33} = 0$, $x_{34} = 50$, $z = 665$; 6). $x_{11} = 0$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 200$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 90$, $x_{23} = 50$, $x_{31} = 180$, $x_{32} = 0$, $x_{33} = 0$, $x_{41} = 100$, $x_{42} = 0$, $x_{43} = 0$, $x_{51} = 120$, $x_{52} = 60$, $x_{53} = 0$, $z = 17750$; 7). $x_{11} = 90$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 0$, $x_{14} = 60$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 40$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 60$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 0$, $x_{33} = 70$, $x_{34} = 20$, $z = 1100$; 8). $x_{11} = 0$, $x_{12} = 1$, $x_{13} = 7$, $x_{14} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 9$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 5$, $x_{31} = 15$, $x_{32} = 0$, $x_{33} = 13$, $x_{34} = 0$, $z = 163$; 9). $x_{11} = 0$, $x_{12} = 7$, $x_{13} = 9$, $x_{14} = 0$, $x_{21} = 1$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 1$, $x_{24} = 8$, $x_{31} = 14$, $x_{32} = 0$, $x_{33} = 0$, $x_{34} = 0$, $z = 51$; 10). $x_{11} = 0$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 0$, $x_{14} = 0$, $x_{15} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 0$, $x_{25} = 0$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 1$, $x_{33} = 0$, $x_{34} = 0$, $x_{35} = 0$, $x_{41} = 0$, $x_{42} = 0$, $x_{43} = 0$, $x_{44} = 1$, $x_{45} = 0$, $x_{51} = 0$, $x_{52} = 0$, $x_{53} = 1$, $x_{54} = 0$, $x_{55} = 0$, $z = 11$.

II bobda berilgan misol va masalalarning javoblari:

2.1. 1).B; 2).α_1, $\alpha_2(\alpha_1)$, α_1, α_1, α_1.

2.2. 1.1). $(1,1)$, $w = 2$; 1.2). $w_* = 0$, $w^* = 3$; 1.3). $w_* = -1$, $w^* = 0$; 1.4). $w_* = 2$, $w^* = 3$; 1.5). $(1,1)$, $w = 0$; 1.6). $w_* = 2$, $w^* = 4$; 1.7). $w_* = -1$, $w^* = 4$; 2). *yo'q*; 3). *bo'ladi*;

4.1.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow \min, \\ &x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 1 \\ &7x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ &3x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ &4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \longrightarrow \max, \\ &y_1 + 7y_2 + 3y_3 + 4y_4 \leq 1 \\ &5y_1 + 6y_2 + 4y_3 + 5y_4 \leq 1 \\ &7y_1 + 2y_2 + 2y_4 \leq 1 \\ &y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0. \end{aligned}$$

4.2.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \min, \\ &7x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 9x_4 \geq 1 \\ &1x_1 - 2x_3 + x_4 \geq 1 \\ &-5x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 1 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &y_1 + y_2 + y_3 \longrightarrow \max, \\ &7y_1 + y_2 - 5y_3 \leq 1 \\ &3y_1 - 3y_3 \leq 1 \\ &-5y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 1 \\ &-9y_1 - 3y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ &y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0. \end{aligned}$$

4.3.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \longrightarrow \min, \\ &x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 39x_4 \geq 1 \\ &-16x_1 - 14x_2 - 21x_3 - 26x_4 \geq 1 \\ &-33x_1 - 34x_2 - 23x_3 - 13x_4 \geq 1 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &y_1 + y_2 + y_3 \longrightarrow \max, \\ &y_1 - 16y_2 - 33y_3 \leq 1 \\ &-y_1 - 14y_3 - 34y_3 \leq 1 \\ &-19y_1 - 21y_2 - 23y_3 \leq 1 \\ &-39y_1 - 26y_2 - 13y_3 \leq 1 \\ &y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

5). $(2,1)$; 6). $x^* = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})^T$, $y^* = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$, $w = 2,6$.

$$7.1.\ x^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T, \qquad y^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad w^* = -\frac{1}{4}.$$

$$7.2.\ x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}^T, \qquad y^* = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \qquad w^* = 4\frac{2}{9}.$$

2.3. 1). $v'(i) = 0$, $i = 1,2,3$, $v'(1,2) = \frac{7}{9}$, $v'(1,3) = \frac{2}{3}$, $v'(2,3) = \frac{5}{9}$, $v'(1,2,3) = 1$; 2). $(1,1,1,1)$; $(1,1,1,1)$; 3). $v'(i) = -1$, $i =$

$1,2,3,\ v'(1,2) = \frac{1}{6},\ v'(1,3) = 0,\ v'(2,3) = -\frac{1}{3};\ v'(i) = 0,\ i = 1,2,3,4,\ v'(1,2) = v'(1,3) = v'(1,4) = v'(2,3) = v'(2,4) = v'(3,4) = \frac{1}{2},\ v'(1,2,3) = v'(1,2,4) = v'(1,3,4) = v'(2,3,4) = \frac{3}{4},\ v'(1,2,3,4) = 1.$

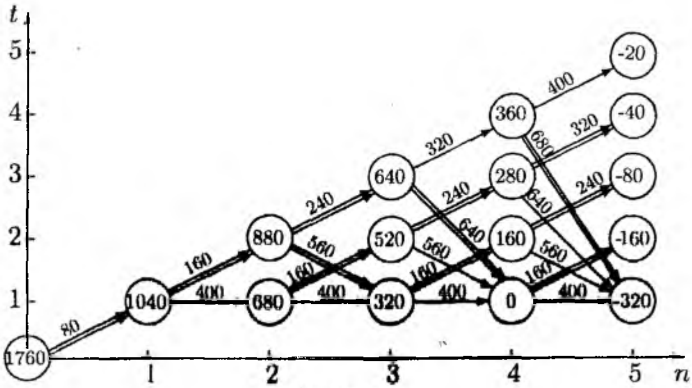
2.4. 1). $F(x) = 0,5I_0(x) + 0,5I_1(x)$, $G(y) = I_{\frac{1}{2}}(y)$, $w = \frac{1}{2}$, бу ерда I_a – pog'onali funksiya: $I_a(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ 1, & x > a; \end{cases}$ 2). $x_0 = \frac{3}{4}$, $y_0 = \frac{1}{8}$, $w = \frac{7}{8}$; 3).

$$F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/3, \\ 1/(4x^3), & x > 1/3; \end{cases}$$

2.5. 1). I o'yinchi uchun, $i = 1$ qat'iy afzal, II o'yinchi uchun, $J = 2$ to'la afzal; 2). $(1,2)$ – Nesh va Pareto, $(1,2)$, $(1,1)$ – Sleyter; 3). $(1,1)$, $(1,2)$ – Pareto, Sleyter; 4). $(1,3)$ – Pareto, $(1,1)$, $(1,3)$ – Sleyter.

III bobda berilgan misol va masalalarning javoblari:

3.3. 1). $c_{11} = 4$, $c_{12} = 9$, $c_{13} = 17$, $c_{14} = 25$, $c_{15} = 31$, $c_{22} = 5$, $c_{23} = 10$, $c_{24} = 18$, $c_{25} = 26$, $c_{33} = 6$, $c_{34} = 11$, $c_{35} = 19$, $c_{44} = 7$, $c_{45} = 12$, $c_{55} = 8$; 2). 2 va 4-oraliqlarning boshida jihozlarni yangisiga almashtirish eng kam umumiy xarajat 26 shartli birlikka olib keladi; 3). Masalaning yechimini geometrik ko'rinish orqali aniqlaymiz. Bu narsa 1-rasmda ifodalangan, undan ko'rinib turibdiki masalada 1760 minimal xarajatni ta'minlovchi ikkita optimal strategiya majud: a) reja davri boshida sotib olingan jihoz 2 yil ishlatilib yangisiga almashtiriladi, bu jihoz reja davrining oxirigacha almashtirilmaydi; b) reja davri boshida sotib olingan jihoz 3 yil ishlatilib keyin yangisiga almashtiriladi, bu jihoz reja davrining oxirigacha almashtirilmaydi.



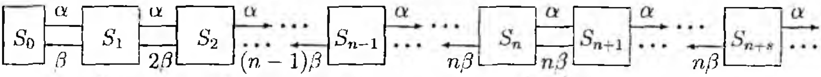
1-rasm

3.4. 1-variant. $1 \to 2 \to 5 \to 3 \to 6 \to 4 \to 1 : 92$; 2-variant. $5 \to 3 \to 2 \to 6 \to 1 \to 4 \to 5 : 95$; 3-variant. $1 \to 3 \to 6 \to 2 \to 5 \to 4 \to 1 : 74$; 4-variant. $2 \to 1 \to 4 \to 3 \to 6 \to 5 \to 2 : 85$; 5-variant. $2 \to 4 \to 6 \to 5 \to 3 \to 1 \to 2 : 57$; 6-variant. $1 \to 6 \to 5 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1 : 126$; 7-variant. $4 \to 3 \to 1 \to 2 \to 6 \to 5 \to 4 : 117$; 8-variant. $1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 3 \to 6 \to 1 : 104$; 9-variant. $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 5 \to 4 \to 1 : 147$; 10-variant. $2 \to 4 \to 1 \to 5 \to 3 \to 6 \to 2 : 116$; 11-variant. $5 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 : 39$; 12-variant. $4 \to 2 \to 3 \to 1 \to 5 \to 4 : 41$.

3.5. 1). $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, \varphi_3(7,5) = 10$; 2). $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, \varphi_3(7,6) = 13$; 3). $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 1, \varphi_3(7,7) = 23$; 4). $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, \varphi_3(7,5) = 9$; 5). $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, \varphi_4(3,3,5) = 4$; 6). $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 3, \varphi_4(6,7,5) = 10$; 7). $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 2, \varphi_4(5,7,8) = 19$; 8). $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, \varphi_4(6,7,5) = 24$; 9). $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, \varphi_5(9,5,6,7) = 9$; 10). $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, \varphi_5(8,7,6,7) = 21$.

IV bobda berilgan misol va masalalarning javoblari:

4.1. 1-masala.



$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \frac{1}{(n-1)!\cdot(n-\alpha/\beta)}\right)^{-1}, (\alpha/(n\cdot\beta) < 1)$,

$p_k = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot p_0,\ k = 1,2,...,n-1;\ \Pi = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \frac{1}{(n-1)!\cdot(n-\alpha/\beta)} \cdot p_0$, $k \geq n$;

$p_{n+s} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+s} \cdot \frac{1}{n!\cdot n^s} \cdot p_0,\ s = 0,1,...;\ t_{kut} = \frac{\Pi}{n\cdot\beta-\alpha};\ P\{\tau > t_{kut}\} = = \Pi \cdot e^{-(n\cdot\beta-\alpha)\cdot t_{kut}}$;

$A = \sum\limits_{s=1}^{\infty} s \cdot p_{n+s}$, yoki $A = \frac{(\alpha/(n\cdot\beta))\cdot p_n}{(1-\alpha/(n\cdot\beta))^2}$; $B = A + \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \cdot p_k + n \cdot \Pi$, yoki

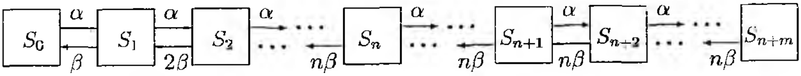
$B = A + \frac{n\cdot p_n}{1-\alpha/(n\cdot\beta)} + p_0 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(\alpha/\beta)^k}{(k-1)!}$; $\aleph_0 = p_0 \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$;

$\aleph_{band} = n - \aleph_0$; $R = \aleph_{band}$; $K_{bands} = \frac{\aleph_0}{n}$; $K_{ish} = \frac{\aleph_{band}}{n}$;

$G_{iqt} = T \cdot (A \cdot q_1 + \aleph_0 \cdot q_2 + \aleph_{band} \cdot q_3)$,

bu yerda q_1– vaqt birligida talablarning kutib qolishligidan kelib chiqqan xarajat, q_2- vaqt birligida uskunalarning bandsizligidan kelib chiqqan xarajat, q_3- vaqt birligida uskunaning xizmat ko'rsatishidan kelib chiqqan xarajat.

2-masala.



$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\alpha/\beta}{n}\right)^k\right)^{-1};$$

$$p_k = \frac{(\alpha/\beta)^k}{k!} \cdot p_0,\ k=1,2,...,n;\ p_{n+s} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+s} \cdot \frac{1}{n! \cdot n^s} \cdot p_0,\ s=0,1,...,m;$$

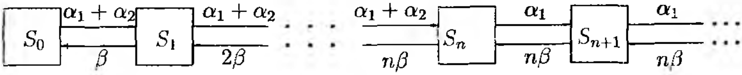
$$p_{rad} = \frac{(\alpha/\beta)^{n+m}}{n! \cdot n^m} \cdot p_0;\ B_{band} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k + n \cdot \sum_{k=1}^{m} p_{n+k};\ \aleph_{bands} = n - B_{band};$$

$$K_{ish} = \frac{B_{band}}{n};\ B_{bands} = \frac{\aleph_{bands}}{n};\ A = \sum_{k=1}^{m} k \cdot p_{n+k};$$

$$G_{iqt} = T \cdot (\alpha \cdot p_{rad} \cdot q_0 + B_{band} \cdot q_{xizj} + \aleph_{bands} \cdot q_{to'xt}),$$

bu yerda q_0—vaqt birligida talabga xizmat ko'rsatishga rad javobi berishligidan kelib chiqqan xarajat, $q_{xizj}-$ vaqt birligida uskunalarning ishlashidan kelib chiqqan xarajat, $q_{to'xt}-$ vaqt birligida uskunaning to'xtab turishidan kelib chiqqan xarajat, $T-$ hisobat davri (odatda oylar bilan beriladi).

3-masala.



Zarur bo'lgan joyda quyidagi belgilashlardan foydalanamiz:

$$\lambda_1 = \alpha_1/\beta,\ \lambda_2 = \alpha_2/\beta,\ D_n(\lambda_1+\lambda_2) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!},$$

$$E_n(\lambda_1+\lambda_2) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{D_n(\lambda_1+\lambda_2) \cdot n!}.$$

$$p_0 = \frac{n-\lambda_1}{(n-\lambda_1+\lambda_1\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2))\cdot D_n(\lambda_1+\lambda_2)};$$

$$p_k = \frac{(n-\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)^k\cdot D_n(\lambda_1+\lambda_2)}{(n-\lambda_1+\lambda_2\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2))\cdot k!},$$

$$0<k\le n;\ p_k = \frac{(n-\lambda_1)\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2)}{n-\lambda_1+\lambda_1\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\left(\frac{\lambda_1}{n}\right)^{k-n},\ k>n;$$

$$p_{rad} = \sum_{k=n}\infty p_k = \frac{n\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2)}{n-\lambda_1+\lambda_1\cdot E_n(\lambda_1+\lambda_2)};$$

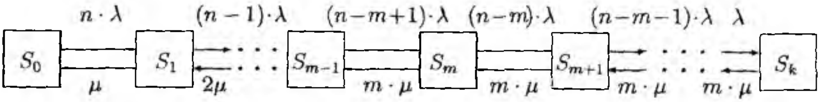
$$P\{\tau_1>t\} = p_{rad}\cdot e^{-(n-\lambda_1\cdot\alpha)\cdot\beta\cdot t};$$

$$t_{kut} = \frac{p_{rad}}{\beta\cdot(n-\lambda_1)};\ \aleph_{band} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot p_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} n\cdot p_k;\ \aleph_0 = \sum_{k=0}^{n}(n-k)\cdot p_k;$$

$$K_{bands} = \frac{\aleph_0}{n};\ K_{ish} = \frac{\aleph_{band}}{n};\ G_{iqt} = T\cdot(\alpha_2\cdot p_{rad}\cdot q_1+\aleph_{band}\cdot q_2+\aleph_0\cdot q_3),$$

bu yerda q_1- vaqt birligida talablarni yo'qotishdan kelib chiqqan xarajat, q_2- vaqt birligida uskunalarning bandsizligidan kelib chiqqan xarajat, q_3- vaqt birligida uskunaning xizmat ko'rsatishidan kelib chiqqan xarajat.

4-masala.



$$p_0 = \left(n!\cdot\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda/\mu)^i}{i\cdot(n-i)!}+\frac{n!}{m!}\cdot\sum_{i=m+1}^{n}\frac{(\lambda/\mu)^i}{(n-i)!\cdot m^{i-m}}\right)^{-1};$$

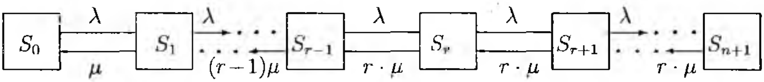
$$p_k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot\delta_m^k}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\cdot p_0,\ \text{bu yerda}\ \delta_m^k = \begin{cases} k!, & k\le m,\\ m!\cdot m^{n-k}, & m<k\le n;\end{cases}$$

$$B = \sum_{k=0}^{n}(n-k)\cdot p_k;\ D = \sum_{k=1}^{n}k\cdot p_k;\ K_{bands} = \frac{M}{n};$$

$$G_{iqt} = T\cdot\left(c_1\cdot\sum_{k=0}^{n-m-1}(n-k)\cdot p_k + c_2\cdot\sum_{k=n-m}^{n}(m+k-n)\cdot p_k\right),$$

bu yerda c_1- vaqt birligidagi tizimning xizmat ko'rsatish bahosi, c_2- vaqt birligida jihozni saqlab turish bahosi.

5-masala.



$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{r}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^r}{r!}\cdot\sum_{k=1}^{n-r+1}\left(\frac{\lambda}{r\cdot\mu}\right)^k\right)^{-1};$$

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\cdot p_0,\ 1\le k<r;$$

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^{k+r}}{r!\cdot r^{k-r}}\cdot p_0,\ r\le k\le n+1;\ p_{rad} = \frac{(\lambda/\mu)^{n+1}}{r!\cdot r^{n-r+1}}\cdot p_0,\ \aleph = \sum_{k=1}^{n} k\cdot p_k;$$

$$\aleph_0 = \sum_{k=1}^{r} k\cdot p_k + r\cdot\sum_{k=r+1}^{n+1} p_k;\ K_{bands} = \frac{\aleph_0}{R};\ M = \sum_{k=r+1}^{n+1}(k-r)\cdot p_k.$$

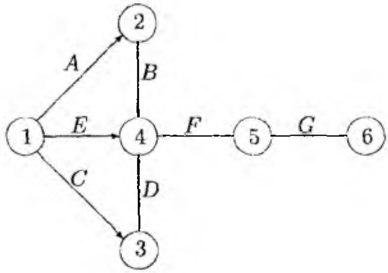
Zaxiradagi modullar va ustalar sonini iqtisodiy nuqtayi nazardan optimallashtirishda quyidagi funksiyadan foydalanish mumkin:

$$G_{iqt} = n\cdot c_{zax} + T_{zax}\cdot(r\cdot c_{usta} + c_{to'xt}\cdot p_{rad}) \to \min$$

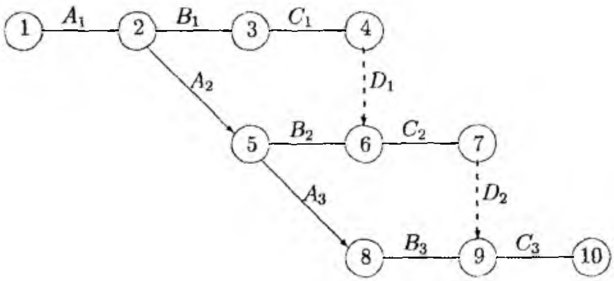
bu yerda $c_{zax}-$ zaxiradagi modullarning bahosi; $c_{usta}-$ birlik vaqtda bitta ustaga ketadigan xarajat; $c_{to'xt}-$ birlik vaqtda jihozning ishlamay turish xarajati; $T_{zax}-$ zaxira modulning o'rtacha ishlash vaqti.

6: (a) 16 mijoz, (b) $P\{n\ge 1|t=1\} = 0,8647$; **7:** (a) $P\{n=20|t=5\text{ min}\} = 0,2623$, $P\{t\le 2\text{ min}\} = 0,4866$; **8:** (a) $\lambda t = 7,5$, (b) $P\{n>5000|t=30\}\approx 0$; **9:** (a) $\lambda_{eff} = 19,98$, (b) $p_0 = 0,000762$, (c) $W_s = 0,652\,coat$; **10:** (a) ikkita kassa, (b) ikkita kassa; **11:** (a) $d_3\approx 0,146$; (b) $d_1+d_2\approx 0,577$; (c) $L_s = 0,51$; (d) $W_s = 0,15$; (e) $p_0 = 0,45$; (f) $P\{n\ge 2\} = 0,144$]

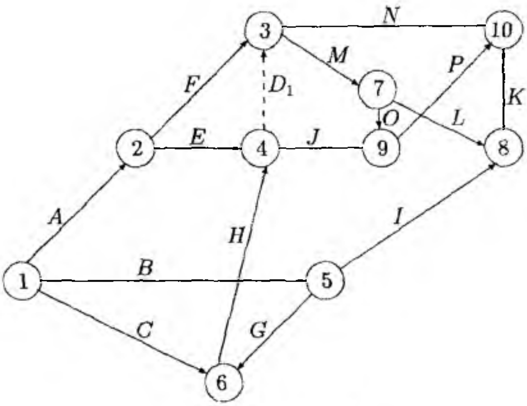
4.2. 1. Quyida $A-$ bilan anketa ishlab chiqish, $B-$ bilan anketalarni chop etish, $C-$ bilan xodimlarni ishga olish, $D-$ bilan xodimlarni o'qitish, $E-$ bilan so'rovda ishtirok etuvchilarni aniqlash, $F-$ bilan so'rovda ishtirok etuvchilarga anketalarni tarqatish va $G-$ bilan olingan ma'lumotlarni tahlil etish ishlari belgilangan:



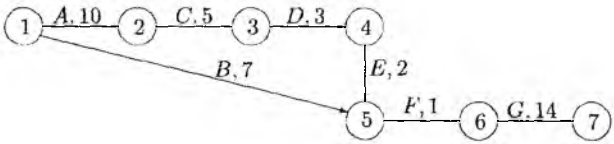
2. Quyida A_i- bilan kotlavan qazish, B_i- bilan metall konstruksiyalarini yigish va C_i- bilan beton yotqazish ishlari belgilangan:



3.



4. Kritik yo'l A, C, D, E, F, G ishlar ketma-ketligidan tashkil topgan va uning davomiyligi 35 kundan iborat.



(i,j) ishlar	D_{ij} davomiylik	Erta		Kech		TF_{ij} to'la zaxira	FF_{ij} erkin zaxira
		ES_i boshlanish	ES_{ij} oxiri	LS_{ij} boshlanish	ES_j oxiri		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(1; 2)	10	0	10	0	10	0	0
(1; 4)	1	0	1	21	22	21	21
(1; 5)	5	0	5	15	18	15	13
(2; 3)	9	10	19	10	19	0	0
(2; 5)	8	10	18	10	18	0	0
(2; 6)	10	10	20	17	27	7	7
(3; 4)	3	19	22	19	22	0	0
(3; 6)	4	19	23	23	27	4	4
(4; 6)	5	22	27	22	27	0	0
(4; 7)	4	22	26	31	26	0	0
(5; 6)	7	18	25	20	25	2	0
(5; 7)	3	18	21	32	21	14	0
(6; 7)	8	27	35	27	35	0	0

(i,j) *ishlar*	D_{ij} *davomiylik*	*Erta*		*Kech*		TF_{ij} *to'la zaxira*	FF_{ij} *erkin zaxira*
		ES_i *boshlanish*	ES_{ij} *oxiri*	LS_{ij} *boshlanish*	ES_j *oxiri*		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$(1,2)$	3	0	3	1	3	1	0
$(1,4)$	7	0	7	23	30	23	23
$(1,5)$	1	0	1	11	11	11	0
$(1,6)$	15	0	15	0	15	0	0
$(2,3)$	10	3	13	15	25	12	12
$(2,5)$	8	3	11	4	11	1	0
$(3,4)$	5	25	30	25	30	0	0
$(3,7)$	12	25	37	25	37	0	0
$(4,7)$	7	30	37	30	37	0	0
$(5,6)$	3	11	14	12	15	1	1
$(5,7)$	10	11	21	27	37	16	16
$(6,3)$	10	15	25	15	25	0	0
$(6,7)$	22	25	37	15	37	0	0

4.3.

1-variant: maksimal oqim $-\{x_{s1} = 1, x_{s2} = 2, x_{s5} = 2, x_{12} = 0, x_{13} = 0, x_{14} = 1, x_{15} = 0, x_{26} = 2, x_{34} = 0, x_{46} = 0, x_{4t} = 1, x_{56} = 0, x_{5t} = 2, x_{67} = 2, x_{7t} = 2\}$, $v = 5$, minimal kesim $-X = \{N_s, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7\}$, $\overline{X} = \{N_t\}$;

2-variant: maksimal oqim $-\{x_{s1} = 13, x_{s2} = 2, x_{s4} = 0, x_{12} = 1, x_{13} = 1, x_{14} = 1, x_{25} = 3, x_{35} = 0, x_{36} = 1, x_{45} = 0, x_{4t} = 1, x_{56} = 3, x_{6t} = 4\}$, $v = 5$, minimal kesim $-X = \{N_s\}$, $\overline{X} = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_t\}$;

3-variant: maksimal oqim $-\{x_{s1} = 3, x_{s2} = 2, x_{s5} = 0, x_{12} = 0, x_{14} = 1, x_{15} = 0, x_{17} = 1, x_{26} = 2, x_{37} = 2, x_{46} = 0, x_{4t} = 1, x_{56} = 0, x_{63} = 2, x_{7t} = 3, x_{89} = 1, x_{94} = 0, x_{910} = 1, x_{10t} = 1\}$, $v = 5$, minimal kesim $-X = \{N_s, N_1, N_2, N_3, N_5, N_6, N_7, N_8\}$, $\overline{X} = \{N_4, N_9, N_{10}, N_t\}$;

4-variant: maksimal oqim $-\{x_{s1} = 2, x_{s2} = 1, x_{s5} = 2, x_{12} = 0, x_{14} = 1, x_{17} = 1, x_{18} = 0, x_{26} = 1, x_{37} = 2, x_{43} = 1, x_{49} = 0, x_{410} = 1, x_{4t} = 1, x_{54} = 2, x_{63} = 1, x_{7t} = 3, x_{89} = 0, x_{910} = 0, x_{910} = 1\}$, $v = 5$, minimal kesim $-X = \{N_s, N_2, N_5\}$, $\overline{X} = \{N_1, N_3, N_4, N_6, N_7, N_8,$
$N_9, N_{10}, N_t\}$;

5-variant: maksimal oqim $-\{x_{s1}=3, x_{s2}=1, x_{s5}=2, x_{12}=1, x_{13}=0, x_{14}=1, x_{15}=1, x_{26}=2, x_{34}=0, x_{46}=0, x_{4t}=1, x_{58}=1, x_{5t}=2, x_{67}=2, x_{7t}=2, x_{8t}=1\}$, $v=6$, minimal kesim $-X=\{N_s, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7\}$, $\overline{X}=\{N_8, N_t\}$;
6-variant: maksimal oqim $-\{x_{s1}=3, x_{s3}=2, x_{s5}=2, x_{12}=2, x_{13}=1, x_{24}=1, x_{25}=1, x_{26}=0, x_{3t}=2, x_{45}=2, x_{5t}=3, x_{67}=0, x_{7t}=0\}$, $v=5$, minimal kesim $-X=\{N_s, N_1, N_3\}$, $\overline{X}=\{N_2, N_4, N_5, N_6, N_7, N_t\}$;
7-variant: maksimal oqim $-\{x_{s1}=2, x_{s2}=2, x_{s5}=0, x_{12}=0, x_{13}=0, x_{14}=1, x_{15}=1, x_{26}=2, x_{34}=0, x_{4t}=1, x_{56}=0, x_{58}=1, x_{67}=2, x_{7t}=2, x_{8t}=1\}$, $v=4$, minimal kesim $-X=\{N_s, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8\}$, $\overline{X}=\{N_t\}$;
8-variant: maksimal oqim $-\{x_{s1}=3, x_{s2}=1, x_{s4}=2, x_{12}=1, x_{13}=2, x_{25}=2, x_{35}=1, x_{3t}=1, x_{41}=0, x_{4t}=2, x_{5t}=3\}$, $v=6$, minimal kesim $-X=\{N_s, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5\}$, $\overline{X}=\{N_t\}$;
9-variant: maksimal oqim $-\{x_{s1}=3, x_{s2}=1, x_{s5}=1, x_{12}=0, x_{14}=1, x_{15}=0, x_{18}=1, x_{26}=1, x_{37}=2, x_{43}=0, x_{410}=0, x_{4t}=1, x_{56}=1, x_{63}=2, x_{7t}=3, x_{89}=1, x_{94}=0, x_{910}=1, x_{10t}=1\}$, $v=5$, minimal kesim $-X=\{N_s, N_2, N_3, N_5, N_6\}$, $\overline{X}=\{N_1, N_4, N_7, N_8,$
$N_9, N_{10}, N_t\}$;
10-variant: maksimal oqim $-\{x_{s2}=1, x_{s5}=0, x_{12}=0, x_{17}=0, x_{18}=0, x_{26}=1, x_{37}=2, x_{41}=0, x_{43}=0, x_{4t}=2, x_{54}=2, x_{63}=2, x_{7t}=2, x_{89}=0, x_{94}=0, x_{9t}=0\}$, $v=4$, minimal kesim $-X=\{N_s, N_2, N_5\}$, $\overline{X}=\{N_1, N_3, N_4, N_6, N_7, N_8, N_9, N_t\}$.

V bobda berilgan misol va masalalarning javoblari:

1. Agar $0 \le R \le 1/3$ bo'lsa yutuq, $1/3 \le R \le 1$ bo'lsa yutqiziq.

2. 1,2 va 3 mijozlar xizmat ko'rsatish tizimiga $t_1=28.3$; $t_2=39,6$; va $t_3=45.01$ vaqt mometlarida kelishadi.

3. Birinchi soatda $n=5$ ta mijoz, ikkinchi soatda haм $n=5$ ta mijoz keladi.

4. Nuqtalarning umumiy soni 8 ta. Yuzaning bahosi $57,6$ ga teng. Yuzaning aniq qiymati 63 ga teng.

5. Ichki nuqtalarning umumiy soni 6 ta. Yuzaning bahosi $1,386$ ga teng. Yuzaning aniq qiymati $1,732$ ga teng.

VI bobda berilgan misol va masalalarning javoblari:

1.1. $y = xshx + chx - \left(\frac{ch1}{sh1} + 1\right)shx$; **1.2.** $y = \frac{sh(x+1)}{sh2} - 1$; **1.3.** $y = -\frac{1}{5sin\frac{\pi}{8}}sin\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}sinx$; **1.4.** $y = sin\frac{1}{2}x + \frac{1}{35}sin3x$; **1.5.** $y = (x-1)chx$;

2.1. $y = cosx - 1$; **2.2.** $y = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{3}$; **2.3.** $y = ln(x+1) - 1$; **2.4.** $y = \frac{1}{2}lnx + x - \frac{1}{2}$; **2.5.** $y = ln(2e^2x - 2e^2 + 8) - 1$.

3.1. $y = \frac{1}{(e-5)(e+1)}\left(e^x + (e^2 - 6e + 13)x + e^2 - 2e - 13\right)$; **3.2.** $y = \frac{3(T-2)}{T^3}x^2 - \frac{2(2T-3)}{T^2}x + 1$; **3.3.** $y = \frac{1}{3e^{-1}-1}\left(3e^{-x} + 2(e-2)x + 3e^{-1} - 2e + 2\right)$; **3.4.** $y = \frac{1}{2ln^2 2 - 1}\left(2lnx + 4ln2 \cdot \frac{1-x}{x}\right)$; **3.5.** $y = -15x(x^2-1) - 4$.

4.1. $y = sinx$; **4.2.** $y = \frac{ch1}{2(1 - ch1cos1)}[(ch1 - cos1)(shx - sinx) + (sin1 - sh1)(chx - cosx)]$; **4.3.** $y = \frac{1}{2(3ln2-2)}\left[-ln(1+x) + \frac{8ln2 - 6}{1+x} + (2ln2 - 1)x + 2(-ln2 + 1)\right]$; **4.4.** $y = \frac{sh2}{4}(sin2x - sh2x) + \frac{sh2sh2\pi}{4(ch2\pi - 1)}(ch2x - cos2x)$; **4.5.** $y = (2x-1)x^2$;

VII bobda berilgan misol va masalalarning javoblari:

Javob: **7.2.** 1). $\bar{u}(t) = \frac{x^1 - x^0}{T}$, $x(t) = \frac{x^1 - x^0}{T}t + x^0$; 2). $\bar{u}(t) = \frac{x^1 - e^T x^0}{shT}e^{-t}$, $x(t) = e^t x^0 + \frac{x^1 - e^t x^0}{shT}sht$; 3). $\bar{u}(t) = \frac{1}{2T^2}\left(-\frac{2A - 3TB}{T}t + A - TB\right)$, $x_1(t) = -\frac{2A-3TB}{12}\left(\frac{t}{T}\right)^3 + \frac{A-TB}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^2 + x_{20}t + x_{10}$, $x_2(t) = -\frac{2A-3TB}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{A-TB}{2}\left(\frac{t}{T}\right) + x_{20}$, $A = 12(x_{11} - x_{10} - x_{20}T)$, $B = 4(x_{21} - x_{20})$; 4). $\bar{u}(t) = 2(Asint + Bcost)$, $x_1(t) = (x_{20} + A + Bt)sint + (x_{20} - At)cost$, $x_2(t) = (-x_{10} + B + At)sint + (x_{20} + Bt)cost$, $A = \frac{-x_{10}(sinTcosT + T) - x_{20}sin^2T + x_{11}(sinT + TcosT) - x_{21}TsinT}{sin^2T - T^2}$, $B = \frac{x_{10}sin^2T + x_{20}(T - sinTcosT) + x_{11}TsinT - x_{21}(sinT - TcosT)}{sin^2T - T^2}$; 5). $\bar{u} = t - 1$, $x(t) = \frac{t^2}{2} - t + x^0$, $0 \le t \le 1$; 6). $\bar{u} = 0$, $x(t) = x^0$, $0 \le t \le T$; 7). $\bar{u} = x^0e^t - \frac{x^0e^T}{chT}cht$, $x(t) = x^0e^t - \frac{x^0e^T}{chT}sht$, $0 \le t \le 1$; 8). $\bar{u} =$

$0, x(t) = x^0, 1 \le t \le 2$; 9). $\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \frac{x^1-x^0+1}{2}, \\ -1, & \frac{x^1-x^0+1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$ $x(t) =$ $\begin{cases} t + x^0, & 0 \le t \le \frac{x^1-x^0+1}{2}, \\ -t + x^1 + 1, & \frac{x^1-x^0+1}{2} \le t \le 1; \end{cases}$; 10). $\bar{u}(t) =$ $\begin{cases} -1, & 0 \le t \le t_1, \\ 1, & t_1 \le t \le 1, \end{cases}$ $x(t) = \begin{cases} x^0e^{-t} - (1 - e^{-t}), & 0 \le t \le t_1, \\ x^0e^{-t} + 1 - e^{-t}, & t_1 \le t \le 1, \end{cases}$ $t_1 =$ $ln\dfrac{1 + e - ex^1 + x^0}{2}$.

7.3. 1). $T(2,2) = \dfrac{10}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}} - \dfrac{2}{3}$; 2). $T(-1,-2) = \sqrt{\dfrac{2}{5}} + \dfrac{1}{2}$; 3). $T(-2,1) = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{10}{3}} - 1$; 4). $T(1,2) = 3$; 5) – *bajarilmagan*; 6) – *bajarilgan*; 7) – *bajarilgan*; 8) – *bajarilgan*.

7.4. 1)-masala: $x^* = (18;42)$, $f_1(x^*) = 144$, $f_2(x^*) = 1440$.

2)-masala: *a, b, c va d oʻzgarmaslarning qiymatlari aniqlangandan soʻng 1)-masala kabi yechiladi.*

3)-masala:

	Ishlab chiqarish				*Sof foyda*	*Umumiy daromad*	*Tan-narx*	*Dastgoh ta'min.*	*Voz kechish*
	M_1	M_2	M_3	M_4					
1-*masala*	10	36	10	17	310	892	582	1447	31
2-*masala*	10	33	10	27	310	948	638	1548	95
3-*masala*	10	38	10	10	308	853	545	1378	55
4-*masala*	33	22	10	10	281	858	577	1346	–

4)-masala:

	Ishlab chiqarish					*Sof foyda*	*Umumiy daromad*	*Tan-narx*	*Dastgoh ta'min.*	*Voz kechish*
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5					
1-*masala*	100	100	277	219	277	2500	10783	8283	11923	250
2-*masala*	100	100	266	500	100	2498	12992	10494	12422	1299
3-*masala*	100	100	100	400	333	2499	11697	9198	11396	920
4-*masala*	255	100	100	439	100	2343	11696	9353	10075	–

"Excel" muhitida voz kechish usuli yordamida misol yechish
Masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 16, \\ x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

shartlar ostida

$$z_1 = 2x_1 + x_2 - 32x_3 \to \max,$$
$$z_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min,$$
$$z_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max$$

topilsin.

Birinchi va ikkinchi kriteriyalar bo'yicha voz kechishlar mos ravishda $\Delta z_1 = 4$, $\Delta = 5$ teng bo'lsin.

"Excel" ning elektron kitobi ochiladi. x_1, x_2, x_3 o'zgaruvchilar uchun, yacheykalar ajratiladi. Buning uchun, $A1$ yacheykaga "Переменные" yozuvi kiritiladi va qo'shni $B1$, $C1$ va $D1$ yacheykalarga o'zgaruvchilarning ixtiyoriy biror qiymatlari tanlab olinadi, masalan, 1 soni, chunki ular keyinchalik o'zgaradi. Ikkinchi qatorga maqsad funksiyalar kiritiladi. $A2$ yacheykaga "Цель" so'zi yozilib, $B2$ da "=2*B1+C1−3*D1" formula yordamida birinchi maqsad funksiya $2x_1 + x_2 - 3x_3$ beriladi.

Xuddi shunga o'xshash $C2$ va $D2$ yacheykalar ham to'ldiriladi: $C2$ yacheykada " =B1+3*C1−2*D1" formula yordamida ikkinchi maqsad funksiya, $D2$ da "=−B1+2*C1+4*D1 formula yordamida uchinchi maqsad funksiya beriladi. Uchinchi satrga chegaralarning chap tarafi kiritiladi. Avval $A3$ yacheykaga "Ограничения" so'zi yoziladi, shundan so'ng $B3$ yacheykaga " =B1+3*C1+2*D1 formula, $C3$ yacheykaga "=2*B1−C1+D1" formula va $D3$ yacheykaga "=B1+2*C1" formula yoziladi.

Dastlabki yozuvlar tugadi. "Servis" menyusidan "Поиск решения" (Solvep Add-in) nadstroykasi chaqiriladi. Mabodo, ushbu menyuda yo'q bo'lsa, "Сервис/Надстройки" chaqirilib, "Поиск решения" (Solvep Add-in) bo'limi qarshisiga bayroqcha qo'yiladi, shundan so'ng "Сервис/Поиск решения" (Servis/Solvep...) punkti paydo bo'ladi.

Birinchi bosqichda birinchi maqsad funksiyasini maksimumlashtiramiz. "Поиск решения" (Solvep Add-in) oynasi ochilgandan keyin "Установить целевую" (Set Tapget Cell) maydoniga kursor olib kelinadi va $B2$ yacheykasiga sichqoncha bilan bosiladi. Oynada $\$B\$2$ yozuv paydo bo'ladi

Maqsad funksiya maksimumi qidirilayotganligi sababli maydonning pastki qismidagi "Равное максимальному значению" (Ekual to...Max...Balue of:) qarshisida bayroqcha turgan bo'lishi kerak. Shundan so'ng kursor "Изменения ячейки" (By Changing Cell) maydoniga keltirilib $B1, C1$ va $D1$ yacheykalar ustidan aylantirib chiqiladi. Shunda maydonda $\$B\$1$: $\$D\$1$ yozuvi paydo bo'ladi. Oynaning pastki qismida "Ограничения" (Subject to the Constraints) maydoni joylashgan. Chegaralarni kiritish uchun, "Добавить" (Add) tugmachasi bosiladi, "Добавление ограничения" (Add Constraints) oynasi ochiladi. "Ссылка на ячейку" (Cell Reference) maydonining chap tarafiga $B3$ yacheykada joylashgan birinchi chegara kiritiladi, markaziy maydonga " $\geq$ " belgi va "Ограничения" (Constraints) ning o'ng tarafigi chegaraning o'ng tarafidagi 1 soni kiritiladi. Shundan so'ng "OK" bosiladi va kiritilayotgan chegara oynada paydo bo'ladi. Yana, "Добавить" (Add) tugmachasi bosiladi, $C3$, $\leq$ va 16 lar kiritiladi. Yana "Добавить" (Add) tugmachasi bosiladi, $D3$, $\leq$ va 24 lar kiritiladi. Qo'shimcha x_1, x_2, $x_3 \geq 0$ chegaralarni kiritish uchun, yana "Добавить" (Add) tugmachasi bosiladi, kursor maydonning chap tarafiga olib kelinadi. $B1, C1$ va $D1$ yacheykalar ustidan aylantirib chiqiladi (natija:$\$B\$1$: $\$D\$1$), o'rta oynaga $\geq$ belgisi qo'yiladi va o'ng tarafga 0 soni yoziladi. Hisoblashni bajarish uchun, "Вычислить" (Solve) tugmachasi bosiladi. Shunda yechim topildi (Solver Found a Solution) degan yozuv paydo bo'ladi. "Сохранить найденное решение" (Keep Solvep Solution) degan yozuv topiladi va "K" tugmachasi bosilgandan so'ng natija olinadi: $B1, C1$ va $D1$ yacheykalarida x_1, x_2, x_3 o'zgaruvchilarning mos optimal yechimlari qiymatlari: $11,2; 6,4$ va 0. $B2$ yacheykada maqsad funksiyaning qiymati $28,8$ soniga teng b'ladi.

Ikkinchi bosqichda ikkinchi maqsad funksiya optimallashtiriladi. Ammo voz kechish usuliga asosan birinchi kriteriyaning optimal qiymatini ko'pi bilan $\Delta_1 = 4$ ga kamaytirish mumkin. Shundan kelib chiqqan holda $B2$ yacheykadagi (bu yerda birinchi maqsad funksiya saqlanadi) qiymat $28,8 - 4 = 24,8$ dan kichik bo'lmasligi lozim. "Сервис/Поиск решения" (Servis/Solvep...) chaqiriladi, bundan ko'rinib turibdiki, avvalgi ma'lumotlar saqlanib qolingan. Endi ikkinchi maqsad funksiyani minimumlashtirish masalasini qaraymiz, shuning uchun, maqsad funksiyani almashtiramiz. Kursorni "Установить целевую" (Set Tapget Cell) maydoniga olib kelib, ikkinchi maqsad funksiya joylashgan $B2$ yacheyka bosiladi. Ushbu maqsad funksiya minimumlashtirilishi kerak, shu sababli bayroqcha "Равное минимальному значениюu" (Equal to...Min...Value of:) qarshisida turadi. Birinchi kriteriya bilan bog'liq bo'lgan voz kechish sharti kiritiladi. Kursorni "Ограничения" (Subject to the Constraints) maydoniga keltirilib, "Добавить" (Add) tugmachasi bosiladi. Hosil bo'lgan "Добавление ограничения" (Add Constraints) oynachaga (chapdan o'ngga) $B2$, $\geq$ va $24,8$ lar kiritiladi. Natijada: x_1, x_2, x_3 o'zgaruvchilarning qiymatlari mos ravishda $10,2; 4,4; 0$ teng. Ikkinchi maqsad funksiyaning qiymati ($B2$ yacheyka) $23,4$ ga teng. Birinchi maqsad funksiya o'zining eng kichik qiymati $24,8$ ga teng ($C2$ yacheyka).

Uchinchi bosqichda ikkinchi kriteriya bo'yicha voz kechishni ta'minlaymiz. Voz kechish kattaligi $\Delta_2 = 5$ ga teng. Ikkinchi kriteriyaning minimumi qidirilayotganligi uchun, uning qiymati $23,4 + 5 = 28,4$ dan katta bo'lmasligi kerak. "Сервис/Поиск решения" (Servis/Solver...) chaqiriladi. Maqsad funksiya o'zgartiriladi. Buning uchun, kursorni "Установить целевую" (Set Tapget Cell) maydoniga olib kelinadi va uchinchi maqsad funksiya joylashgan $C2$ yacheyka bosiladi. Uchinchi maqsad funksiya maksimumlashtirilyapti, shuning uchun, bayroqcha "Равное максимальному значению" (Equal to...Max...Value of:) qarshisiga o'rnatiladi. Ikkinchi kriteriyada voz kechish bilan bog'liq bo'lgan qo'shimcha chegara kiritiladi. Kursorni "Ограничения" (Subject to the Constraints) maydoniga keltirilib, "Добавить" (Add) tugmachasi bosiladi. Hosil bo'lgan "Добавить ограничения" (Add Constraints) oynachaga (chapdan o'ngga) $C2$, $\leq$ va $28,4$ lar kiritiladi. Natijada: x_1, x_2, x_3 o'zgaruvchilarning qiymatlari mos ravishda $10,76; 6,62$ va $1,11$ teng. Maqsad funksiyalarning qiymatlari mos ravishda $24,8; 28,4$ va $6,98$ ga teng. Bular yakuniy natijalar hisoblanadi.

Izohli lug‘at (Glossariy so‘zlari)

S – **ekvivalent o‘yinlar** – $v(S)$ va $w(S)$, $S \subseteq N = \{1, 2, ..., n\}$ xarakteristik funksiyaga ega bo‘lgan n kishili o‘yinlar uchun, $\alpha > 0$, β_i, $i = 1, 2, ..., n$ sonlari mavjudki, quyidagi tengliklar o‘rinli: $v(S) = \alpha w(S) + \sum\limits_{i \in S} \beta_i$ ixtiyoriy $S \subseteq N$ da.

Qavariq qobig‘i – berilgan nuqtalarni o‘z ichiga olgan qavariq to‘plamlar kesishmasi.

Qavariq ko‘pyoqlining uchlari – ko‘pyoqlida yotgan kesmaning ichki nuqtasi bo‘lmagan ko‘pyoqlining ixtiyoriy nuqtasi.

Qavariq to‘plam – ixtiyoriy ikki nuqtasini birlashtiruvchi kesmani to‘la o‘z ichiga olgan to‘plam.

Qisman butun sonli masala – bir nechta komponentalariga butunlilik sharti qo‘yilgan chiziqli dasturlashning ekstremal masalasi.

O‘zgarmas yutuqli n – kishili o‘yin – har bir o‘yin oxirida o‘yinda ishtirok etuvchilarning olgan yutuqlari yig‘indisi o‘zgarmas songa teng.

O‘yin bahosi – antagonistik o‘yinda muvozanat holatda o‘yinchi oladigan yutuq.

O‘yinlar nazariyasining predmeti – ziddiyatli sharoitda berilgan holatda turib oldindan ma’lum strategiyalar to‘plamidan biror strategiyani tanlash hisobiga mos yutuqqa erishish uchun, yechim qabul qilish.

O‘yinni geometrik yechish – koordinat tekislikda masalani geometrik figura ko‘rinishda tasvirlash bilan o‘yinning yechimini aniqlash.

O‘yinning to‘lov jadvali – $m \times n$ – o‘lchovli jadval, uning a_{ij} elementi, birinchi o‘yinchi i – yechimni, ikkinchi o‘yinchi j – yechimni tanlaganda, birinchi o‘yinchining yutug‘ini (ikkinchi o‘yinchining yutqizig‘ini) bildiradi.

O‘yinchining yurishi – o‘yin qoidasi doirasida o‘yinchining harakati.

Antagonistik o‘yin – o‘yinchilarning stretegiyalari chekli bo‘lib, ularning maqsadlari qarama-qarshi, ya’ni biri yutsa ikkinchisi albatta yutqazadi.

Aralash strategiya – yechimlarni ehtimollik bilan tanlash strategiyasi.

Bijadvalli o‘yinlar – o‘yinchilarning oladigan yutuqlari yig‘indisi o‘zgarmas bo‘lmagan o‘yin.

Buzilgan tayanch reja – nol bo‘lmagan komponentalari soni chegaralar sonidan kam bo‘lgan tayanch reja.

Variatsion hisob – maqsad funksiya integral ko‘rinishda berilgan funksionalni ekstremumini topish masalasi.

Gomori usulining algoritmi – butun sonli chiziqli dasturlash masalasini yechishda qo‘shimcha chegaralar qo‘shish yordamida rejalar to‘plamini kichraytirish orqali butun komponentali yechimni aniqlash.

Dinamik dasturlash – funksiyaning global ekstremumni topish uchun, ma'lum algoritm yordamida maxsus tuzilishga ega bo'lgan masalani yechishning sonli usuli.

Diskret dasturlash – matematik dasturlashning bo'limi bo'lib, joiz rejalar to'plamiga diskret sharti qo'yilgan holdagi ekstremal masala.

Jadvalli o'yin – matematik modelini jadval ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lgan o'yinlar.

Jarayonlar tadqiqoti – boshqaruvchili tizimlarda optimal boshqaruv usullarini yaratish va amaliyotga qo'llash bilan shug'ullanuvchi fan.

Jarayonlar tadqiqotining predmeti – har vaqt ham bir-biri bilan murosada bo'lmagan ko'p sondagi birgalikda harakatlanuvchi bo'linmalardan tuzilgan tashkiliy boshqaruv tizimlari.

Zaxirani boshqarish – berilgan reja davrida, minimal xarajat sarflagan holda talablarni to'la va o'z vaqtida qondirish masalasi.

Ikkilamchi simpleks usul algoritmi – o'zgaruvchilarga manfiymaslik sharti bo'lmaganda, chiziqli chegaralar tenglik va tengsizlik ko'rinishda berilganda maqsad funksiyaning minimumini topish uchun, rejani qadamma-qadam yaxshilab borish algoritmi.

Imitatsion modellashtirish – tadqiq qilinayotgan tizimni tashkil etgan elementlarni o'zaro muhim bog'liqliklarini hisobga olgan holda harakatni o'rganish.

Kommivoyajyor masalasi – kommivoyajyor (daydi sotuvchi) shaharlarning har birida faqat bir marta bo'lib, boshlang'ich shaharga qaytib kelishi kerak, bunda uning bosib o'tgan yo'li eng qisqa bo'lsin.

Kooperativ o'yinda NM – yechim – taqsimotlar to'plamining to'plam ostiki, unga tegishli bo'lgan ixtiyoriy ikki taqsimotning hech biri ikkinchisidan afzal bo'la olmaydi, unga tegishli bo'lmagan ixtiyoriy taqsimot uchun, ushbu to'plamga tegishli bo'lgan taqsimot mavjudki, biror koalitsiya uchun, oxirgisi afzal hisoblanadi.

Ko'p kriteriyali masalalar – bir vaqtning o'zida bittadan ko'p kriteriyaga ega bo'lgan masalalar.

Maksimal oqim – to'rni tashkil etgan yoylarning o'tkazish qobiliyati chegarasida, mumkin bo'lgan maksimal oqimni manbadan quyilish nuqtasiga yuborish masalasi.

Maksimin strategiya – minimal yutuqni maksimal qiluvchi strategiya, ya'ni yomon holatlardan yaxshi holatni ajratib olish.

Maksimum prinsipi – boshqariladigan obyektlarni bir holatdan boshqa holatga optimal o'tkazishning zaruriy sharti.

Minimaks strategiya – maksimal yutqiziqni minimal qiluvchi strategiya.

Markov o'yinlari – Markov zanjirlari orqali berilgan o'yinda o'yinchilarning optimal strategiyalarini aniqlash masalasi.

Maqsad funksiya – ekstremumini topish talab etilgan funksiya.

Oilaviy munozara – oila a'zolari faqat ikki joyga teatrga yoki futbolga borishga kelishib olishdi. Bunda oila a'zolarining bu maskanlarga borishdan oladigan qoniqishlari turlicha bo'lib, masalan, ayollar teatrni, erkaklar futbolni afzal ko'rishadi.

Ammo oila birgalikda bo'lishni ma'qul ko'radi. Hosil bo'lgan holatning o'yin nuqtayi nazardan talqini.

Ommaviy xizmat ko'rsatish – xizmat ko'rsatish jihozlariga kelib tushgan talablar va ularga xizmat ko'rsatishni uyushtirish vazifalari va muommalari.

Operatsiyalar tadqiqoti masalalarining sinflari – operatsiyalar tadqiqoti masalalari uchta sinfga bo'linadi: Determinik; Stoxastik; Aniqmaslik.

Optimal boshqaruv masalasi – harakati differensial tenglamalar orqali berilgan obyektni bir holatdan ikkinchi holatga optimal o'tkazish masalasi.

Parhez taom haqidagi masala – to'yimlilik nuqtayi nazardan eng arzon baholi taom tayyorlash masalasi.

Pozitsion o'yin – o'yinning ketma-ket yurishlarini tavsiflash.

Potensiallar usuli – transport masalasining tayanch rejasini optimallikka tekshiruvchi usul.

Ryukzak haqidagi masala – o'z og'irligi va bahosiga ega bo'lgan predmetlardan tanlab olish kerakki, natijada umumiy og'irlik berilgan sondan oshmagan holda bahosi eng katta bo'lsin.

Simpleks usul algoritmi – bir joiz bazis rejadan boshqasiga o'tish yordamida maqsad funksiyaning qiymatini yaxshilab, optimal yechimni chekli qadamda aniqlash algoritmi.

Sof strategiyalar – o'yinchilar ixtiyoridagi mumkin bo'lgan yurishlar.

Stoxastik dasturlash – maqsad funksiyasining ayrim koeffitsiyentlari va chegaralash jadvalining elementlari tasodifiy miqdorlar bo'lgandagi ekstremal masalalar.

To'la asoslanmagan prinsip – tabiat tomonidan sodir etiladigan barcha holatlarning teng imkoniyatli bo'lishligi.

Tabiatga qarshi o'yin – ikkinchi o'yinchi sifatida tabiat ishtirok etib, uning qaysi holatda bo'lishligi noma'lum bo'lgan o'yin.

Tarkibi bo'yicha ommaviy xizmat ko'rsatish tizimlarini sinflash – bir kanalli tizim; ko'p kanalli tizim (bir nechta xizmat ko'rsatish jihozlari).

Tarmoqlar va chegaralar usuli – diskret dasturlash masalasini yechishda rejalar to'plamini ikki qismga ajratish va ular uchun, quyidan chegarani aniqlash orqali optimal yechimni aniqlash.

Transport masalasi uchun, shimoliy-g'arb usul – yopiq transport masalasida boshlang'ich taqsimotni aniqlashning algoritmi.

Funksiyaning egar nuqtasi – $f(x,y)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan (x^0, y^0) nuqtaki $f(x,y^0) \leq f(x^0,y^0) \leq f(x^0,y)$ qo'sh tengsizlik funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan ixtiyoriy (x,y) nuqtalar uchun, o'rinli.

Xarakteristik funksiya – ixtiyoriy mumkin bo'lgan koalitsiyaning yutug'ini aniqlab beruvchi funksiya.

Xizmat ko'rsatishgacha bo'lgan talablarning kutish vaqtlari bo'yicha tizimlarni sinflash – kutish vaqti cheksiz bo'lgan tizimlar; rad qilish tizimlari (barcha jihozlar bandligi sababli tizimdan chiqib ketish); aralash turdagi tizim (kelib tushgan talab navbatga turadi, ammo ma'lum vaqtdan so'ng xizmat ko'rsatishni kutmasdan tizimdan chiqib ketadi).

Chiziqli dasturlash masalasi – maqsad funksiya va joiz rejalar sohasi o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli funksiyalar bilan aniqlangan masala.

Chiziqli dasturlash masalasining standart shakli – o'zgaruvchilar manfiymas shart ostida chegaralari katta yoki teng bo'lgan holda maqsad funksiyaning ekstremumini topish masalasi.

Chiziqli dasturlashning yechimi mavjud bo'lishligi haqidagi teorema – chiziqli dasturlash masalasi yechimga ega bo'lishligi uchun, maqsad funksiya joiz rejalar to'plamida chegaralangan bo'lishligi zarur va yetarli.

Chiziqli dasturlashning ikkilamchi masalasi – boshlang'ich masalani ma'lum qoidalar asosida chiziqli dasturlashning masalasiga keltirish.

Chiziqli dasturlash masalasining kanonik shakli – o'zgaruvchilari manfiymas, chegaralari tenglik ko'rinishda berilgan chiziqli dasturlash masalasi.

Cheksiz o'yin – o'yinchilarning strategiyalari soni cheksiz sonda bo'ladi, ularning sanoqli va sanoqsiz bo'lgan hollari alohida qaraladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. *Karimov I. A.* Yuksak ma'naviyat – yengilmas kuch. – T.: Ma'naviyat, 2008.

2. *Акоф Р., Сасиени М.* Основы исследования операций. – М.: Мир, 1971.

3. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.

4. *Ащепков Л.Т.* Элементы исследования операций. Учебное пособие. Дальневосточный государственный университет. 1999.

5. *Беллман Р.* Динамическое программирование. ИЛ, 1960.

6. *Беллман Р., Гликсберг Н., Гросс О.* Некоторые вопросы математической теории процессов управления. ИЛ., 1962.

7. *Благодатских А.И., Петров Н.Никандр.* Сборник задач и упражнений по теории игр. Учебное пособие. "Лань", 2014.

8. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969.

9. *Вагнер Г.* Основы исследования операций: в 3-х т. – М.: Мир, 1972.

10. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. Учебное пособие. – М.: КНОРУС, 2013.

11. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов и кибернетиков. – М.: Наука, 1985.

12. *Вуколов Э.Д., Ефимов А.В., Земсков В.Н и др. под ред. Ефимова А.В.* Сборник задач по математике для втузов. Методы оптимизации. Уравнение в частных производных. Интегральное уравнение. – М.: Наука, 1980.

13. *Gabasov R., Kirilova F.M.* Optimallashtirish usullari (tarjima: Jumayev X.N., Isroilov I. I). – T.: "O'zbekiston". 1995.

14. *Галеев Э.М., Алексеев В.М., Тихомиров В.М.* Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 2000.

15. *Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* "Оптимизация: теория, примеры, задачи". – М.: "Эдиториал УРСС 2000.

16. *Гельман В.Я.* Решение математических задач средствами Excel. – СПб.: Питер, 2003.

17. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Эдиториал УРСС, 2005.

18. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей: учебник. – М.: Эдиториал УРСС, 2005.

19. *Грешилов А.А.* Математические методы принятия решения. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.

20. *Данилов В.И.* Лекции по теории игр. – М.: РЭШ, 2002.

21. *Дюбин Г.Н., Суздал В.Г.* Введение в прикладную теорию игр. – М.: Наука, 1981.

22. *Jumaev H.N., Otaniyozov B., Yugay L.P., Jalilov A.* Matematik programmalashtirish. Darslik. – T.: "Adabiyot jamg'armasi" nashriyoti, 2005.

23. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций. СНМ Издательский дом "Слово". – Киев. 2003.

24. *Заславский Ю.Л.* Сборник задач по линейному программированию. – М.: Наука, 1969.

25. *Иванов В.А., Фалдин Н.В.* Теория оптимальных систем автоматического управления. – М.: Наука, 1981.

26. *Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.* Теория массового ослуживания. – М.: Высшая школа, 1982.

27. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис-пресс, 2002.

28. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2004.

29. *Катулев А.Н.,Северцев Н.Ф.* Исследование операций:принципы принятия решений и обеспечение безопасности. – М.: Физматлит, 2000.

30. *Конвей Р.В. и др.* Теория расписаний. – М.: Мир, 1975.

31. *Конюховский П.* Математические методы исследования операций в экономике. Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2000.

32. *Коша А.* Вариационное исчисление. – М.: Высшая школа, 1983.

33. *Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И.* Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями. Серия "Вся высшая математика в задачах". – М.: УРСС, 2002.

34. *Крушевский А.В.* Теория игр. – Киев. Виша школа, 1977.

35. *Кузнецов Ю.Н., Кузубов А.И., Воложенко А.Б.* Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1976.

36. *Кулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1981.

37. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений. – М.: Логос, 2002.

38. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы оптимального управления. – М.: Наука, 1972.

39. *Лотов А.В., Поспелова И.И.* Конспект лекций по теории и методам многокритериальной оптимизации. Учебное пособие. – М.: Мир, 2014.

40. *Лотов А.В., Поспелова И.И.* Многокритериальные задачи принятия решений. Учебное пособие. Мир, МАКС Пресс, 2008.

41. *Льюс Р.Д., Райфа Х.* Игры и решения. – М.: ИЛ, 1961.

42. *Мазалов В. В.* Математическая теория игр и приложения. Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2010.

43. *Майн Х., Осаки С.* Марковские процессы принятия решений. – М.: Наука, 1977.

44. *Мак-Кинси Дж.* Введение в теорию игр. – М.: Физмат, 1960.

45. *Mamadaliev N., To'xtasinov M.* Variatsion hisob va optimal boshqaruvning asosiy masalalari. – T.: Universitet, 2013.

46. *Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В.* Исследование операций в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 1986.

47. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики – М.: Мир, 1985.

48. *Насритдинов Г.* Математическое программирование. Учебное пособие. – Т.: UзМУ, 2002

49. *Нейман Дж.фон., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970

50. *Оре О.* Теория графов. – М.: Наука, 1968.

51. *Оуэн Г.* Теория игр. – М.: Мир, 1971.

52. *Партхасаратхи Т., Рагхаван Т.* Некоторые вопросы теории игр двух лиц. – М.: Мир, 1974.

53. *Петров Н.Н.* Теория игр. – Ижевск. 1997.

54. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. – М.: Высш.шк., 1998.

55. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.

56. *Понтрягин Л.С.* Избранные труды. Том 2. – М.: Мир, 1988

57. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983.

58. *Протасов И.Д.* Теория игр и исследования операций. – М.: Гелиос АРВ, 2003.

59. *Satimov N.Y., To'xtasinov M, Mamadaliyev N.O.* Optimallashtirish usullari. (O'quv qo'llanma.) – T.: Universitet, 2006.

60. *Safaeva Q., Beknazarova N.* Operatsiyalarni tekshirishning matematik usullari. I qism, T.: "O'qituvchi". 1984. II qism, – T.: O'qituvchi, 1990.

61. *Соболь И.М.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. – М.: Дрофа, 2006.

62. *Сотсков А.И., Колесник Г.В.* Оптимальное управление в примерах и задачах. Москва. 2002.

63. *Таха Х.* Введение в исследование операций. – М.: Вильямс, 2007.

64. *To'xtasinov M.* Jarayonlar tadqiqotining asosiy masalalari. – T.: Universitet, 2013.

65. *To'xtasinov M.* Matritsali o'yinlar. Metodik ko'rsatma. – T.: Universitet, 1993.

66. *Тухтасинов М.* Решение кооперативной игры n–лиц с дискриминированными игроками. – Т.: Труды ТашГУ, 1985.

67. *To'xtasinov M.* Yechim qabul qilish nazariyasi. Uslubiy qo'llanma. – T.: Universitet, 2009.

68. *To'xtasinov M.* Butun sonli chiziqli programmalash masalalarini yechish metodlari. Uslubiy qo'llanma. – T.: Universitet, 1989.

69. *To'xtasinov M., Mamadaliyev N.* Jarayonlar tadqiqoti. Ma'ruzalar matni. – T.: Universitet, 2001.

70. *Филиппов А.Ф.* Вестник Московского университета (Серия матем. и механика 1959. No 2. С.25-32)

71. *Fozilov A.Z.* Optimal boshqaruv nazariyasi. Ma'ruzalar matni. – T.: Universitet, 2002.

72. *Фомина Т.П.* Элементы исследования операций. Липецкий государственный педагогический институт. 1999.

73. *Ховард Р.* Динамическое программирование и марковские процессы. – М.: Мир, 1964.

74. *Ходжаев Т., Азизов И., Отакулов С.* Исследование операций. Учебное пособие. – Т.: Университет, 2007.

75. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974.

76. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1966.

77. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Книга по Требованию, 2012.

78. *Fudenberg D., Tirole J.* Game theory. – Cambridge. Mass.: MIT Press, 1991.

79. *Kulej.M.* Operations research. – Wroclaw, 2011.

80. *Mas-Colell A., Whinston M., Green J.* Microekonomic Theory. – N.-Y. Oxford Univ. Press, 1995.

81. *Myerson R.B.* Game theory (Analysis of Conflict). Harvard university press. – Cambridge, London, England, 1991.

82. *Hillier.F.S., Lieberman.G.J.* Introduction to operations research. 7 th Edition, 2001.

83. *Owen.G.* Game Theory. – London, UK: Academic Press, 3 nd edition, 1995.

84. *Sottinen.T.* Operations Research. 2009.

85. *Wagner.H.M.* Principles of Operations Research. 2 nd Edition, 2000.

86. *Taha.H.A.* Operations research. 9 th Edition, 2009.

87. *под.ред. Моудера Дж., и др.* Исследование операций. Том 1,2. – М.: Мир, 1981.

88. Теория игр. Учебное пособие. http://www. allmath. ru/appliedmath/operations/operations14/operations. htm

89. http://iasa.org.ua/iso.php?lang=rus

90. http://fmi.asf.ru/vavilov/

91. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/theoretical.htm

92. http://www.ruscommech.ru/

93. http://iccpripu.ru

94. http:// www.a-geometry.narod.ru

MUNDARIJA

Kirish...3

I BOB. CHIZIQLI VA BUTUN SONLI DASTURLASH 6

1-§. Jarayonlar tadqiqoti. Asosiy masala va bosqichlar........................13
2-§. Chiziqli dasturlash..33
3-§. Butun sonli chiziqli dasturlash...42
4-§. Transport masalasi..66

II BOB. O'YINLAR NAZARIYASI..100

1-§. Tavakkalchilik va aniqmaslik sharoitida yechim qabul qilish..........104
2-§. Jadvalli o'yinlar...118
3-§. Kooperativ o'yinlar...165
4-§. Cheksiz o'yin..185
5-§. Bijadvalli o'yin...211

III BOB. DINAMIK DASTURLASH.....................................233

1-§. Zaxirani boshqarish masalasi...239
2-§. Kuchlanishni taqsimlash modeli...252
3-§. Jihozni almashtirish va ta'mirlash modeli..255
4-§. Kommivoyajyor masalasi...259
5-§. Ryukzak haqidagi masala...272

IV BOB. OMMAVIY XIZMAT KO'RSATISH. MAKSIMAL OQIM...289

1-§. Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi..291
2-§. Tarmoqli model. Kalendar grafikni tuzish va zaxiralarni taqsimlash..323
3-§. Maksimal oqim..344

V BOB. MARKOV O'YINLARI. IMITATSION MODEL...........376

1-§. Markov zanjiri va dinamik dasturlash...378
2-§. Boshqariladigan Markov zanjirlari uchun rekurrent algoritmlar...384

3-§. Markov o‘yinlari..395
4-§. Imitatsion modellashtirish. Monte-Karlo usuli...............................406

VI BOB. VARIATSION HISOB MASALASI..............................421

1-§. Variatsion hisobning sodda masalasi. Eyler tenglamasi..................421
2-§. Lagranj masalasi...426
3-§. Bols va Mayer masalalari...438
4-§. Yuqori tartibli variatsion masala...448

VII BOB. OPTIMAL BOSHQARUV.
KO‘P KRITERIYALI MASALA...459

1-§. Optimal boshqaruv masalasining qo‘yilishi...460
2-§. Maksimum prinsipi va klassik variatsion hisob................................472
3-§. Chiziqli tizimlarni optimal boshqarish masalalari............................488
4-§. Ko‘p kriteriyali masalada yechim qabul qilish nazariyasi.............505
Mustaqil yechish uchun berilgan misol va masalalarning javoblari........545
Ilova..558
Izohli lug‘at...561
Foydalanilgan adabiyotlar..565

Mo‘minjon TO‘XTASINOV

JARAYONLAR TADQIQOTI

Darslik

Muharrirlar ***Davron Ulug‘murodov,***
Dilafro‘z Choriyeva
Badiiy muharrir ***Izzat Yuldashev***
Texnik muharrir ***Yelena Tolochko***
Musahhih ***Dilafro‘z Choriyeva***
Matn teruvchi ***Gulchehra Azizova***

Litsenziya raqami AI № 163. 09.11.2009. Bosishga 2017-yil 20-dekabrda ruxsat etildi. Bichimi 60×84 $^{1}/_{16}$. Ofset qog‘ozi. Tayms TAD garniturasi. Shartli bosma tabog‘i 33,25. Nashr tabog‘i 29,68. Shartnoma № 156—2017. Adadi 400 nusxada. Buyurtma № 287.

«Barkamol Fayz media» MCHJ. Litsenziya raqami AI № 284. 12.02.2016.
Manzil: 100060, Toshkent shahri, Mirobod tumani Shahrisabz ko‘chasi 42.

O‘zbekiston Matbuot va axborot agentligining Cho‘lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi tezkor matbaa bo‘limida chop etildi. 100011, Toshkent, Navoiy ko‘chasi, 30.
Telefon: (371) 244-10-45. Faks: (371) 244-58-55.

JARAYONLAR TADQIQOTI

Cho'lpon
NMIU

Cho'lpon
nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi

ISBN 978-9943-5085-5-2