Kósa András

VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS

А. Коша

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

«ВЫСШАЯ ШКОЛА»

Вариационное исчисление

Kósa András

Variációszámítás

Második, javított kiadás

Tankönyvkiadó, Budapest, 1973

А. Коша

Вариационное исчисление

ПЕРЕВОД С ВЕНГЕРСКОГО
Д. ВАЛОВИЧА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ.
Ш. А. АЛИМОВА

Москва
«ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1983

ББК 22.161.8
К76
УДК 519.3

Коша А.

К76 Вариационное исчисление / Пер. с венгер. Д. Валовича; Под ред. Ш. А. Алимова. — М.: Высш. шк., 1983. — 279 с., ил.

Перевод изд.: Kòsa András. Variációszámitás.

В пер. 1 р. 40 к.

Книга охватывает все вопросы вариационного исчисления, входящие в университетские курсы. При изложении материала используются классические методы. Ряд результатов получен на основании общих теорем нелинейного функционального анализа. Дается представление о современных методах теории экстремальных задач. Особенностью книги является практическое приложение важнейших результатов вариационного исчисления в области физики и других наук.

Для математических факультетов и факультетов прикладной математики университетов.

К $\frac{1702050000-493}{001(01)-83}$ 62—83

ББК 22.161.8
517.2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемое вниманию читателей учебное пособие по вариационному исчислению принадлежит известному в Венгрии специалисту по теории оптимизации проф. А. Кòша.

Содержание книги полностью охватывает традиционный курс вариационного исчисления, читаемый студентам математических факультетов университетов, а некоторые вопросы изложены значительно полнее. Это замечание особенно относится к такому технически сложному аспекту теории, как изучение кусочно-гладких решений. Желающим познакомиться с первоначальными понятиями и простейшими результатами вариационного исчисления достаточно прочесть гл. 1 (и даже первые три параграфа этой главы).

Своеобразным является стиль изложения, принятый в данной книге. Взяв за основу так называемую простейшую вариационную задачу, включающую классические задачи о брахистохроне и минимальной поверхности вращения, автор знакомит читателя с различными методами вариационного исчисления, постепенно расширяя круг задач, решаемых с помощью этих методов.

Следует подчеркнуть, что, хотя в пособии не рассматриваются задачи оптимального управления, изложение построено таким образом, чтобы подготовить читателя к изучению теории оптимального управления и принципа максимума Понтрягина, сыгравшего выдающуюся роль в решении задач оптимизации. К достоинствам книги следует отнести изложение метода ломаных Эйлера и описание прямых методов приближенного решения вариационных задач.

Особую роль в книге играют задачи. Подробное решение некоторых из них могло бы составить содержание отдельных параграфов, однако большинство задач служит для иллюстрации и лучшего понимания изложенных результатов.

Приведенный в конце пособия список математической литературы содержит большое число книг, написанных советскими математиками. К этим книгам можно добавить учебное пособие В. М. Алексеева, В. М. Тихомирова, С. В. Фомина «Оптимальное управление» (М., Наука, 1979), предназначенное для более глубокого изучения современных методов оптимизации.

При переводе устранены отдельные опечатки и мелкие неточности оригинала. Часть исправлений была сделана проф. А. Коша специально для русского перевода.

Ш. А. Алимов

Problema novum, ad cuius solutionem mathematici invitantur.

Новая задача, к решению которой приглашаются математики.

Иоганн Бернулли (1696)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга содержит в основном материал лекций, которые начиная с 1955/56 учебного года я регулярно читал студентам Будапештского университета имени Лоранда Этвёша, специализирующимся в области математики и прикладной математики.

Прошло уже почти 300 лет с тех пор, как знаменитая «новая задача» Иоганна Бернулли (задача о брахистохроне) привлекла внимание выдающихся математиков того времени к решению задач, положивших начало вариационному исчислению. Первые общие результаты были получены Эйлером и Лагранжем. С тех пор усилиями многих великих ученых в этой теории были получены результаты, относящиеся к выдающимся достижениям математики. Вариационное исчисление служит исходным началом такого важного раздела современной математики, как теория оптимального управления.

Материал книги содержит основные результаты классического вариационного исчисления. Используя для изложения современный математический язык, я старался изложить эти результаты так, чтобы сохранить для читателя наиболее конструктивные и оригинальные идеи. Некоторые части книги, например § 4, п. 10.2 и 20.1, дают возможность ознакомиться с новыми разделами и методами вариационного исчисления. В четкости изложения я старался придерживаться сложившегося уровня преподавания в университетах других разделов математического анализа.

Область применения вариационного исчисления достаточно обширна — оно имеет приложения в самой математике и играет значительную роль в естественных, технических и экономических науках. При постановке проблем и выборе примеров и задач я стремился показать тесную связь вариационного исчисления с практикой. Наиболее важные выводы сформулированы и в такой форме, в какой они используются в других науках, прежде всего в физике.

Надеюсь, что структура книги позволит быстро ориентироваться в ней. Читателям, которые хотят кратко ознакомиться с проблемами классического вариационного исчисления, достаточно изучить гл. 1 (пропустив § 4 и 6). Для этого требуется лишь знание вводного курса анализа, общепринятого в университетах. Материал некоторых следующих глав опирается на элементы теории дифференциальных уравнений.

В заключение я хотел бы поблагодарить всех, кто помог мне в этой работе. Преподаватели университета, члены-корреспонденты Венгерской Академии наук Андраш Рапчак и Карой Тандори оказали мне помощь, далеко выходящую за рамки лекторских обязанностей, и своими ценными предложениями и полезными советами способствовали повышению научного уровня книги. Я должен поблагодарить также сотрудников кафедры математического анализа Будапештского университета как за оказание помощи при техническом составлении рукописи, так и за замечания по ее содержанию. Редактор издательства «Танкёнив киадо» Дьюла Молдовани приложил много усилий для своевременного выпуска и хорошего оформления книги.

Будапешт, 1969, декабрь

Андраш Коша

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$a \in X$	a является элементом множества X
$a \notin X$	a не является элементом множества X
$\varnothing$	пустое множество
$A \subset B$	множество A содержится в множестве B
$\{a, b, \ldots\}$	множество, состоящее из элементов a, b, ...
$\{x \in A \mid (x)\}$	множество элементов, принадлежащих A и обладающих свойством $\alpha(x)$
$\bigcup$	знак объединения множеств
$\bigcap$	знак пересечения множеств
$A \setminus B$	разность множеств A и B
$A \times B$	прямое (декартово) произведение множеств A и B
$\overset{\mathrm{df}}{=}$	равно по определению
N	множество натуральных чисел
R^n	n-мерное действительное евклидово пространство
$\lvert x \rvert$	евклидова норма вектора $x \in R^n$
$\inf A$	нижняя грань множества $A \subset R^1$
$\sup A$	верхняя грань множества $A \subset R^1$
$[x_1, x_2]$	замкнутый интервал
(x_1, x_2)	открытый интервал
$[x_1, x_2)$	интервал, замкнутый слева
$(x_1, x_2]$	интервал, замкнутый справа
$\langle a, b \rangle$	скалярное произведение векторов $a, b \in R^n$
$\bar{A}$	замыкание множества $A \subset R^n$
$\operatorname{int} A$	множество внутренних точек $A \subset R^n$
$\operatorname{front} A$	множество граничных точек $A \subset R^n$
$\mathrm{pr}_{i_1, \ldots, i_k} Q$	проекция множества $Q \subset R^n$ на подпространство, определенное координатами $i_1, \ldots, i_k$ (см. с. 93)
$k_\varepsilon(a)$ или $k(a)$	окрестность радиуса ε или произвольная окрестность точки $a \in R^n$
$k_\varepsilon(A)$ или $k(A)$	окрестность радиуса ε или произвольная окрестность множества $A \subset R^n$
$\to$	знак соответствия
$\sim$	знак эквивалентности (см. с 209)
f	функция (отображение)
D_f	область определения функции f
R_f	область значений функции f
$f(x)$	значение функции f на элементе $x \in D_f$
$f(A)$	образ множества $A \subset D_f$ при отображении f
I	функционал
$I[y]$	значение функционала I на элементе $y \in D_I$
$I[A]$	образ множества $A \subset D_I$ при отображении I
$\operatorname{graf} f$	график функции f
$f \circ g$	композиция функций f и g
$X \to Y$	класс функций f, для которых $D_f \subset X$, $R_f \subset Y$
f^{-1}	функция, обратная к f
f', $\dot{f}$	производная функции $f \in R^n \to R^m$
$\varphi^{(i)}$	i-я производная функция φ
o	o — малое (см. с 39)

$C(Q)$	класс функций из $R^n \to R^m$, непрерывных на $Q \subset R^n$ (см. с. 20)
$C_k(Q)$	класс функций, имеющих k непрерывных производных на множестве $Q \subset R^n$ (см. с. 18)
$D[x_1, x_2]$	класс кусочно-непрерывных функций из $R^1 \to R^n$, определенных на отрезке $[x_1, x_2]$ (см. с. 27)
$D_k[x_1, x_2]$	класс функций из $R^1 \to R^n$, имеющих k кусочно-непрерывных производных на отрезке $[x_1, x_2]$
$T[x_1, x_2]$	класс абсолютно непрерывных функций на отрезке $[x_1, x_2]$
$C_\infty[x_1, x_2]$	класс бесконечно дифференцируемых функций из $R^1 \to R^1$, определенных на отрезке $[x_1, x_2]$
$A[x_1, x_2]$	класс функций из $R^1 \to R^1$, аналитических на отрезке $[x_1, x_2]$
$D^1(Q)$	класс функций из $R^n \to R^1$, кусочно-непрерывных относительно первой переменной на множестве $Q \subset R^n$ $(n > 1)$ (см. с 93)
$D^{12}(Q)$	класс функций из $R^n \to R^1$, кусочно-непрерывных относительно первых двух переменных на множестве $Q \subset R^n$ $(n > 2)$ (см. с. 195)
$D(Q)$	класс функций из $R^2 \to R^1$, кусочно-непрерывных на множестве $H \subset R^2$ (см. с 196)
$D_1(Q)$	класс функций из $R^2 \to R^1$, имеющих первые частные производные, кусочно-непрерывные на множестве $H \subset R^2$
$y(x-0)$ или $y(x+0)$	левый или правый предел функции $y \in (R^1 \to R^n) \cap D[x_1\ x_2]$ в точке $x \in (x_1, x_2)$
$\int$	знак интеграла Римана
$\lVert x \rVert$	норма элемента x (см. с. 35)
$\lVert y \rVert^0$	норма функции y в классе C (или D) (см. с. 36, 72)
$\lVert y \rVert^k$	норма функции y в классе C_k (или D_k) (см. с. 36, 72)
$\rho(y_0, y_1)$	расстояние между функциями y_0, y_1, (см. с. 72, 189)
$\rho^k(y_0, y_1)$	расстояние порядка k между функциями y_0, y_1 (см. с. 72)
$d\Phi$	дифференциал функции $\Phi \in R^n \to R^1$
δI_y	первая вариация функционала I относительно y
$\delta^2 I_y$	вторая вариация функционала I относительно y
$K_\varepsilon(y)$ или $K(y)$	окрестность функции y радиуса ε или произвольная окрестность функции y (см. с. 72, 189, 200)
$K^n_\varepsilon(y)$ или $K^n(y)$	окрестность функции y порядка n радиуса ε или произвольная окрестность функции y порядка n
$\mathcal{K}_\varepsilon(\gamma)$ или $\mathcal{K}(\gamma)$	окрестность кривой γ радиуса ε или произвольная окрестность кривой γ
$\mathcal{K}^1_\varepsilon(\gamma)$ или $\mathcal{K}^1(\gamma)$	окрестность кривой γ порядка 1 радиуса ε или произвольная окрестность кривой γ порядка 1
у.	уравнение
д.у.	дифференциальное уравнение
с.д.у.	система дифференциальных уравнений
и-д.у.	интегро-дифференциальное уравнение
с.и-д.у.	система интегро-дифференциальных уравнений
Э—Л	Эйлера—Лагранжа
Э—П	Эйлера—Пуассона
Я	Якоби

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДЫ

§ 1. ФУНКЦИОНАЛЫ

1.1. Определение функционалов

В математике, естественных и технических науках, в экономическом планировании и других часто встречаются величины, значения которых определяются какими-либо функциями, кривыми или поверхностями. Это, например, функции, интегрируемые на отрезке $[a, b]$: значение интеграла зависит от выбранной функции. Другие примеры подобного рода: длина дуги кривой, площадь поверхности, потенциальная энергия упругого стержня, сила трения, которая действует на тело, движущееся в газе или жидкости, производственная стоимость определенного продукта и т. д.

Определение 1. *Функционалом, заданным на некотором множестве, называется отображение этого множества в множество действительных чисел.*

Напомним понятие отображения и те символы и термины, связанные с этим понятием, которые часто встречаются в этой книге.

1. Пусть даны множества X и Y (не обязательно различные) и пусть A — некоторое подмножество X. Отображение множества A в множество Y задано, если указано правило, которое каждому элементу x из A ставит в соответствие один элемент $f(x)$ из Y. Множество A называется *областью определения*, а множество $B = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$ — *областью значений* отображения.

2. Символом $X \to Y$ будем обозначать класс всех отображений, областью определения которых является подмножество множества X, а областью значений — подмножество множества Y.

3. Вместо термина «отображение» используют также термин «функция». В этом случае (в обозначениях замечания 1) $f(x)$ называют значением функции на элементе x или подстановкой x в f.

4. Если множества X и Y фиксированы, то для определения некоторой функции $f \in X \to Y$ необходимо задать область определения A и правило соответствия — из этих данных можно найти область значений B. Область определения функции f обозначают символом D_f, область значений — символом R_f.

5. Для обозначения функции используют и другую символику. Например, когда говорят о функции f, часто пишут, что рассматривается функция $x \to f(x)$, или $f(x)$, или $y = f(x)$. Недостаток двух последних обозначений заключается в том, что в них не различаются

функция и ее значение, однако они наглядно выражают способ обозначения «общего вида» элемента из D_f и R_f.

6. Пусть $f \in X \to Y$, A — подмножество D_f и пусть g — следующая функция из $X \to Y$: $D_g \overset{d}{=} A$, и если $x \in D_g$, то $g(x) \overset{d}{=} f(x)$. Функцию g, определенную таким образом, называют *сужением* f на A. Если f — сужение некоторой функции $h \in X \to Y$, то говорят, что h является *расширением* функции f на $B \overset{d}{=} D_h$.

7. Пусть $f \in X \to Y$ и пусть $M \subset D_f$. Символом $f(M)$ обозначают образ множества M, т. е. множество $\{f(x) \in Y | x \in M\}$.

8. Очевидно, функционалы являются обобщениями действительных функций одной или нескольких действительных переменных, изучаемых в классическом анализе. В дальнейшем функционалами будем называть отображения, область определения которых не является подмножеством R^n, а название функции сохраним для отображений из $R^n \to R^m$ $(n, m \in N)$.

9. Обычно под кривыми и поверхностями также подразумевают отображения, при этом разным отображениям могут соответствовать *эквивалентные* кривые или поверхности. Однако, с точки зрения вариационного исчисления, выбор отображения, определяющего одну из эквивалентных кривых или поверхностей, не является существенным (ср. с п. 14.1).

10. Говорят, что отображение $f \in X \to R^1$ ограничено сверху (снизу), если множество R_f ограничено сверху (снизу).

Для обозначения функционалов в дальнейшем используются большие буквы, чаще всего I и J. Значение функционала I на элементе $y \in D_I$ будет обозначаться символом $I[y]$ (вместо традиционного $I(y)$).

1.2. Экстремум функционалов

Проектировщику или исследователю часто приходится решать задачу о нахождении экстремума функционала. Для иллюстрации этого достаточно ограничиться примерами, упомянутыми в предыдущем пункте. Важное значение имеет определение кривой, которая лежит на данной поверхности, соединяет две точки и имеет минимальную длину, или нахождение поверхности, ограниченной данной замкнутой кривой и имеющей минимальную площадь. Упругий стержень находится в положении равновесия, если его потенциальная энергия минимальна. При выборе профиля самолета, ракеты, подводной лодки и т. п. целесообразно минимизировать сопротивление среды. Минимизация расходов производства также представляет собой естественное требование.

Экстремум функционала определяют подобно экстремуму функции.

Определение 2. *Говорят, что функционал I достигает минимума (максимума) на элементе $y \in D_I$, если для любого элемента $\bar{y} \in D_I$ выполняется неравенство*

$$I[\bar{y}] \geqslant I[y] \quad (I[\bar{y}] \leqslant I[y]).$$

Выполнение неравенства в приведенном определении означает, что

$$I[y] = \inf R_I \quad (I[y] = \sup R_I).$$

Число $I[y]$ называют *минимумом (максимумом)* функционала I, а элемент y — *минимальным (максимальным)* элементом. Если не существует элемента, удовлетворяющего определению, то говорят, что у функционала I нет минимума (максимума).

Определенный выше минимум (максимум) называют также *абсолютным минимумом (абсолютным максимумом)*.

Минимум и максимум функционала имеют общее название *экстремум* (крайнее оптимальное значение). Минимальные и максимальные элементы называют *экстремальными элементами* или *экстремалями*.

Из двух типов экстремума, очевидно, достаточно изучить только один, например минимум, так как максимальные элементы функционала I совпадают с минимальными элементами функционала I^*, определенного равенством $I^*[y] \overset{\mathrm{df}}{=} -I(y)$, $y \in D_{I^*} \overset{\mathrm{df}}{=} D_I$.

1.3. Предмет вариационного исчисления

В предыдущем пункте были приведены примеры практических задач об оптимизации величин, зависящих от функций, кривых, поверхностей, т. е. от математических объектов, *которые невозможно охарактеризовать конечным набором числовых данных*. Именно эти исследования, более сложные, чем экстремальные проблемы классического анализа, составляют предмет вариационного исчисления. Более точно: вариационное исчисление изучает общие методы решения экстремальных задач, связанных с функционалами, которые определены на множестве функций, кривых или поверхностей.

Вариационное исчисление, прежде всего по своим методам, является одним из разделов математического анализа. Иногда его считают частью функционального анализа, но эта классификация относится скорее к исследуемым проблемам, а не к используемым методам.

Под функцией, как уже отмечалось, будем понимать отображение из $R^n \to R^m$ (так называемую функцию точки), а под кривой или поверхностью — взятую в обычном смысле кривую или поверхность в n-мерном пространстве[1].

Забегая вперед, отметим, что хотя в вариационном исчислении речь идет о более сложных экстремальных проблемах, чем в дифференциальном исчислении, многие основные идеи вариационного исчисления почерпнуты из классического анализа. Отметим также, что традиционно используется следующая терминология.

Если область определения исследуемого функционала I состоит из функций (кривых, поверхностей), то D_I называют *допустимым классом функций* (кривых, поверхностей), а элементы множества D_I — *допустимыми функциями* (кривыми, поверхностями). В случае кривых и поверхностей будем говорить о *параметрической* вариационной задаче, а в случае функций — о *непараметрической* вариационной задаче, или просто о вариационной задаче.

Задача. Рассмотреть ограниченный сверху функционал I с областью определения

$$D_I \overset{\text{df}}{=} \left\{ y \in R^1 \to R^1 \mid y \in C[0, 1],\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \right\},$$

который действует по правилу

$$I[y] \overset{\text{df}}{=} \int_0^1 \sin y(x)\, dx, \quad y \in D_I,$$

и доказать, что у этого фунционала нет максимального элемента.

§ 2. ПРОСТЕЙШИЙ ТИП ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Познакомимся вначале с двумя простыми, но важными задачами вариационного исчисления. Первая известна как задача о брахистохроне (βράχιστοζ — кратчайший, χρόνοζ — время), предложенная в 1696 г. Иоганном Бернулли и сыгравшая большую роль в развитии вариационного исчисле-

[1]Об основных понятиях, относящихся к кривым, см. п. 14.1 (петит).

ния. Задачи, относящиеся, по современным представлениям, к вариационным, были известны еще древнегреческим математикам [2], однако именно задача, предложенная Бернулли, привела к появлению целого ряда подобных задач и создала основу для их систематизации и развития общих методов исследования. Эти исследования связаны прежде всего с именами Эйлера и Лагранжа, предложившими общие методы, с которыми мы вскоре познакомимся.

Наряду с задачей о брахистохроне будет рассмотрена геометрическая задача о минимизации площади поверхности вращения, а затем описан простейший тип задач вариационного исчисления, включающий обе рассмотренные задачи. Отметим: хотя область применения вариационного исчисления чрезвычайно обширна, приведенные примеры показывают, что наиболее важные задачи носят геометрический или физический характер.

2.1. Задача о брахистохроне

Пусть даны две точки, расположенные на разной высоте и не лежащие на одной вертикальной прямой. Проведем через данные точки вертикальную плоскость и рассмотрим кривые, соединяющие эти точки и расположенные в данной плоскости. Из этих кривых выберем такие, что материальная точка массы m, выходящая из верхней точки P_1 со скоростью $v_1 > 0$, двигаясь только под действием силы тяжести, достигнет нижней точки P_2.

Задача о брахистохроне формулируется следующим образом:

а) существует ли среди этих кривых такая, которую точка пробегает за минимальное время?

б) если такая кривая существует, то как ее найти?

Сформулированная проблема приводит к исследованию экстремума некоторого функционала.

Выберем в вертикальной плоскости, определенной двумя данными точками, прямоугольную систему координат так, чтобы точка P_1 совпала с началом координат, а ось Oy направим вертикально вниз. Пусть точка P_2 имеет координаты (x_2, y_2) (рис. 1). На первом шаге для простоты *предположим что рассматриваются только такие кривые, которые яв-*

[2] Например, изопериметрическая задача: найти замкнутую кривую данной длины, ограничивающую фигуру наибольшей площади.

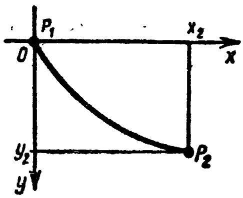

Рис. 1

ляются графиками функций y, *где* $y \in (R^1 \to R^1) \cap C_1\,[0,\ x_2]$[3].

Итак, выберем такую функцию y, которая удовлетворяет граничному условию

(2.1) $\qquad y\,(0) = 0,\ y\,(x_2) = y_2.$

В таком случае время $T = T\,[y]$, необходимое материальной точке для движения вдоль кривой, которая является графиком функции $y = y\,(x)$ $(x \in [0,\ x_2])$, выражается следующей формулой:

$$T\,[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2\,(x)}}{\sqrt{y\,(x) + \alpha}}\,dx \tag{2.2}$$

$(\alpha = v_1^2/(2g)$, g — ускорение свободного падения).

Для получения этой формулы введем следующие обозначения: x — абсцисса движущейся точки $(x \in [\,0,\ x_2])$; t — время, прошедшее с момента начала движения $(t \in [0,\ T])$; s — длина пути, пройденного движущейся точкой $(s \in [0,\ S])$; v — скорость движущейся точки.

Так как точка движется под действием силы тяжести вдоль кривой $y = y\,(x)$ $(x \in [0,\ x_2])$, то каждая из величин x, t, s связана с положением точки взаимно однозначным соответствием. Следовательно, каждая из этих величин является монотонно возрастающей функцией любой из остальных величин. Ясно, что $v = \dfrac{ds}{dt}$. Будем исходить из закона сохранения энергии

$$\frac{1}{2}\,mv_1^2 = \frac{1}{2}\,mv^2\,(t) - mgy\,(x\,(t)) \quad (t \in [0,\ T]),$$

откуда с помощью простых преобразований получаем, что функция $s \in C_1\,[0,\ T]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g}\,\sqrt{y\,(x\,(s)) + \alpha} \quad (\alpha = v_1^2/(2g)) \tag{2.3}$$

с начальным условием $s\,(0) = 0$.

---

[3] При заданных $k \in N$ и $Q \subset R^n$ символом $C_k\,(Q)$ обозначен класс функций из $R^n \to R^m$ $(m \in N)$, определенных на множестве Q и имеющих k непрерывных производных. В случае двойных скобок внешние опускают, например вместо $C_1\,(\,[x_1,\ x_2])$ пишут $C_1\,[x_1,\ x_2]$. Если это не приводит к неясности, знак множества Q будем иногда опускать и говорить просто о функциях из C_k.

Разделяя переменные в (2.3) и интегрируя, получаем равенство

(2.4) $$T=\int_0^T dt=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^S \frac{ds}{\sqrt{y(x(s))+\alpha}}.$$

В интеграле, стоящем в правой части (2.4), применим подстановку: $s(x)=\int_0^x \sqrt{1+\dot{y}(\xi)}d\xi$. В результате для искомого значения времени $T=T[y]$ получим выражение (2.2).

Из сказанного ясно, что задача о брахистохроне сводится к *нахождению минимума функционала, описываемого следующими условиями*:

1) *класс допустимых функций* состоит из тех функций $y \in C_1[0, x_2]$, которые удовлетворяют неравенству $y>-\alpha$ и условию (2.1);

2) формула (2.2) задает *правило*, которое каждой допустимой функции y ставит в соответствие действительное число.

2.2. Задача о минимальной поверхности вращения

Рассмотрим на плоскости прямую l и фиксируем две точки P_1 и P_2, лежащие в данной плоскости по одну сторону от прямой l так, что прямая, проходящая через точки P_1 и P_2, не является перпендикулярной к l. Соединим точки P_1 и и P_2 всевозможными гладкими кривыми, лежащими в данной плоскости. Вращая каждую такую кривую вокруг прямой l, получаем поверхность, называемую поверхностью вращения.

Задача о минимальной поверхности вращения формулируется следующим образом:

а) существует ли среди этих кривых такая, которая при вращении вокруг прямой l образует поверхность минимальной площади?

б) если такая кривая существует, то как ее найти?

Выберем в данной плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы прямая l совпадала с осью Ox, а точки лежали в верхней полуплоскости. Итак, пусть точки P_1 и P_2 имеют координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и пусть $y_1>0$ и $y_2>0$. Рассмотрим гладкие кривые, соединяющие эти две точки, причем ограничимся только теми, которые являются графиками положительных функций, т. е. задаются формулой $y=y(x)$, где $y \in C_1[x_1, x_2]$ и $y(x)>0$ $(x \in [x_1, x_2])$

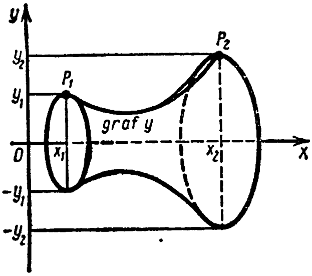

Рис. 2

(рис. 2). Площадь поверхности, получаемой при вращении такой кривой вокруг оси Ox, определяется формулой

(2.5)
$$F[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx.$$

Задача о минимальной поверхности вращения сводится к *определению минимума функционала, задаваемого следующими условиями*:

1) *класс допустимых функций* состоит из тех положительных функций $y \in C_1[x_1, x_2]$[4], которые удовлетворяют граничному условию

(2.6) $y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2;$

2) формула (2.5) задает *правило*, которое каждой допустимой функции ставит в соответствие действительное число.

2.3. Простейшая вариационная задача

Рассмотренные в предыдущих двух пунктах функционалы являются конкретными примерами функционалов, связанных со следующей общей постановкой задачи. *Пусть*:

а) $T \subset R^2$ — *выпуклая область*;

$Q \overset{\mathrm{df}}{=} T \times R^1$ (точки Q обозначаются (x, y, y'));

б) $f \in (R^3 \to R^1) \cap C(Q)$ — *заданная функция, называемая основной*[5];

в) $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ — *две произвольные фиксированные точки T такие, что $x_1 < x_2$.*

Функционал I определим следующим образом.

---

[4]Характер исследуемой проблемы не исключает расширения класса допустимых функций (см. п. 6.2).

[5]Символом $C(Q)$ обозначен класс непрерывных функций из $R^n \to R^m$, определенных на $Q \subset R^n$. В случае двойных скобок внешние опускают, например вместо $C([x_1, x_2])$ пишут $C[x_1, x_2]$. Если это не приводит к неясности, то знак множества Q будем иногда опускать, говоря просто о функциях из C.

1°. *Функцию* $y \in R^1 \to R^1$ *назовем допустимой (обозначение:* $y \in D_I$*), если:*

i) $y \in C_1 [x_1, x_2]$;

ii) $y (x_1) = y_1$, $y (x_2) = y_2$;

iii) $(x, y (x), y' (x)) \in Q$ $(x \in [x_1, x_2])$.

2°. *Каждой функции* $y \in D_I$ *сопоставим действительное число по следующей формуле:*

$$I [y] \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f (x, y (x), y' (x))\, dx. \tag{2.7}$$

Этими условиями на множестве D_I *определен функционал* I.

Замечания: 1. При исследовании экстремума функционала, относящегося к определенному выше типу, будем говорить о *непараметрической вариационной задаче с неподвижными границами первого порядка на плоскости* (в дальнейшем кратко: *простейшая вариационная задача*).

2. Простейшая вариационная задача становится конкретной, когда задаются область T, входящая в определение соответствующего функционала I, основная функция f и точки P_1, P_2. Данные T, f, P_1 и P_2 называют *определяющими данными* простейшей вариационной задачи[6]. Под *общим решением* простейшей вариационной задачи будем понимать исследование всех случаев P_1, $P_2 \in T$, $x_1 < x_2$ при заданных T и f.

3. Задачи, приведенные в предыдущих пунктах, являются примерами простейшей вариационной задачи. В задаче о брахистохроне $T = \{(x, y) \in R^2 \mid y > -\alpha\}$, $f (x, y, y') = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y+\alpha}}$, а в задаче о минимальной поверхности вращения $T = R^2$, $f (x, y, y') = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}$.

4. *Определенный выше функционал* I *можно в зависимости от рассматриваемых теоретических или практических задач сузить или расширить*. Для измененной таким образом задачи сохраним название простейшей вариационной задачи, если эти изменения не затрагивают основных условий, сформулированных при определении функционала I. Именно: изменения должны быть такими, чтобы задача являлась:

непараметрической, т. е. элементы D_I — функции;

на плоскости, т. е. $D_I \subset R^1 \to R^1$;

[6]Определяющие данные, естественно, не являются независимыми ($D_f = T \times R^1$).

первого порядка, т. е. в определение I входит первая производная функции $y \in D_I$ и нет производных более высокого порядка;

с неподвижными границами (или *с закрепленными концами*), т. е. $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

В частности, задача останется простейшей вариационной, если изменить условие *i*) о непрерывности и дифференцируемости допустимых функций. К этому замечанию мы часто (в первую очередь в § 6) будем возвращаться.

Не является существенной для простейшей вариационной задачи и замена специальной пространственной области $Q = T \times R^1$ произвольной областью $Q \subset R^3$ (см. § 8). В дальнейшем будет часто изменяться и условие $f \in C(Q)$. Отметим, что изменение граничного условия *ii*) может привести к существенному изменению вариационной задачи (см. п. 7.3). Условие *iii*) является естественным,так как при его нарушении правая часть в (2.7) теряет смысл.

5. В дальнейшем часто приводятся ссылки на функционал, определенный в § 2, т. е. на функционал того же типа, что и определенный выше, определяющие данные которого имеют вид а) — в), область определения D_I удовлетворяет условиям *i*), *ii*), *iii*), а значение функционала на D_I определяется равенством (2.7).

6. Отметим также, что в литературе, аналогично тому, как это делается при исследовании функций в классическом анализе, функционал I обозначают так же, как и его значение на каком-либо элементе, вычисляемом с помощью равенства (2.7), например, символом

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx,$$

предварительно задав область определения D_I.

Задачи: 1. С какой физической задачей можно связать основную функцию

$$f(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x, y, y')} \quad (0 \notin R_v)?$$

2. Рассмотрим твердое тело, граница которого состоит из поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $y = y(x)$ с граничными условиями $y(0) = y_1$, $y(x_2) = 0$, и из круга радиуса y_1, где y_1 и x_2 — заданные положительные постоянные, $y \in R^1 \to R^1 \cap C_1[0, x_2]$. Следующая задача принадлежит Ньютону: при какой функции y, удовлетворяющей приведенным выше условиям, соответствующее твердое тело, которое движется в на-

правлении оси Ox с постоянной скоростью v, испытывает минимальное сопротивление воздуха?

Постройте основную функцию соответствующей вариационной задачи.

Указание: Сопротивление воздуха в произвольной точке поверхности вращения принять равным — $kn\,[V, n]^2$ (гипотеза Ньютона), где n — единичный вектор внешней нормали к поверхности в данной точке, $V = (v, 0, 0) \in R^3$, $[V, n]$ — векторное произведение векторов V и n, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

3. Обозначим через J функционал, получаемый из I отбрасыванием граничного условия *ii*) [задача со свободными концами]. Функционал J отличается от I более широкой областью определения и является его расширением. Покажите, что если $0 \notin R_{f_y}$, то у J нет экстремального элемента.

§ 3. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе изучается основная задача о нахождении экстремальной функции. Эта задача возникла при зарождении вариационного исчисления в первую очередь. Такая же задача, по существу, явилась первым шагом в решении экстремальных задач, исследуемых в дифференциальном исчислении. Ниже приведены два метода ее решения применительно к простейшей вариационной задаче. Оба метода связаны в определенном смысле с известными приемами, применяемыми в дифференциальном исчислении для нахождения экстремумов функций из $R^n \to R^1$.

3.1. Метод Эйлера. Дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа

Идея метода Эйлера заключается *в сведении вариационной задачи к исследованию экстремума функции, зависящей от конечного числа переменных*. Для этого в качестве допустимых функций берут вначале только те функции, которые можно охарактеризовать конечным числом данных n, а интеграл (2.7), входящий в определение функционала, заменяют конечной суммой. В результате функционал заменяется функцией от n переменных, которую исследуют на экстремум, а затем n устремляют к ∞.

В качестве функций, характеризуемых конечным числом данных, естественно взять кусочно-линейные функции, непрерывные на отрезке (ломаные Эйлера). Разделим отрезок $[x_1, x_2]$ на конечное число равных частей. Пусть число внутренних точек разбиения равно n и пусть $h = (x_2 - x_1)/$

$l/(n+1)$ — длина частичного отрезка. Зададим произвольным образом действительные числа $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ и рассмотрим ломаную, которая выходит из точки (x_1, y_1), проходит последовательно через точки (x_1+h, η_1), $(x_1+2h, \eta_2), \ldots$ $\ldots, (x_1+nh, \eta_n)$ и оканчивается в точке (x_2, y_2) (рис. 3).

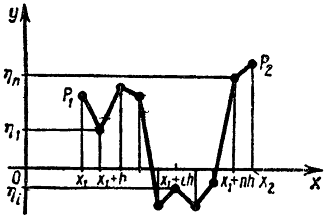

Рис. 3

Эта ломаная является графиком некоторой функции из $R^1 \to R^1$, определенной на отрезке $[x_1, x_2]$. Множество функций, построенных таким образом и однозначно определенных заданием чисел η_i $(i = 1,2,\ldots, n)$, обозначим символом Π_n $(\Pi_n \subset R^1 \to R^1)$. Построим теперь приближение функционала I, определенного в предыдущем параграфе. Для этого:

а) в качестве области T возьмем R^2;

б) D_I заменим на Π_n;

в) интеграл (2.7) заменим интегральной суммой, составленной по приведенному выше разбиению, взяв значения функций в правых концах частичных отрезков.

Очевидно, что построенное приближенное значение функционала I, которое мы обозначим через I_n, зависит только от чисел $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. Простой подсчет показывает, что

$$(3.1)\quad I_n = \sum_{i=1}^{n+1} f\left(x_1+ih, \eta_i, \frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{h}\right)h \quad (\eta_{n+1} \overset{\mathrm{df}}{=} y_2).$$

Если у функции $I_n \in R^n \to R^1$, определенной на R^n, существует экстремальное значение (другими словами, определенное выше приближение функционала достигает экстремума на какой-нибудь ломаной Эйлера), то в соответствующей точке $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ частные производные $\frac{\partial I_n}{\partial \eta_j}$ должны быть равны нулю.

Для вычисления частной производной заметим, что при фиксированном j $(j = 1,2, \ldots, n)$ переменная η_j входит только в два члена суммы (3.1). Введем следующие обозначения [7]:

---

[7] Символами $f_x, f_y, f_{y'}, f_{xy}, \ldots$ обозначены частные производные функции f по аргументам, входящим в нижний индекс.

$$(f_y)_j=f_y\left(x_1+jh,\ \eta_y,\ \frac{\eta_j-\eta_{j-1}}{h}\right),\ (f_{y'})_j=$$
$$=f_{y'}\left(x_1+jh,\ \eta_j,\ \frac{\eta_j-\eta_{j-1}}{h}\right)(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1)$$

и вычислим частную производную:

$$\frac{\partial I_n}{\partial\eta_j}=(f_y)_j\,h+(f_{y'})_j-(f_{y'})_{j+1}\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, уравнения $\frac{\partial I_n}{\partial\eta_j}=0$ имеют следующий вид:

$$(3.2)\qquad (f_y)_j-\frac{(f_{y'})_{j+1}-(f_{y'})_j}{h}=0\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Предположим, что полученная система n уравнений (3.2) с n неизвестными имеет единственное решение, определяющее *стационарную ломаную Эйлера*.. Устремим далее n к ∞ и h к 0. Предположим, что последовательность этих ломаных приближается к графику некоторой дважды непрерывно дифференцируемой функции y, а угловые коэффициенты ломаных стремятся к y', причем так, чтобы оказался возможным предельный переход от разностного отношения в правой части (3.2) к частной производной (для этого дополнительно предположим, что $f\in C_2(Q)$). Тогда функция y, определенная на отрезке $[x_1,x_2]$, будет удовлетворять уравнению

$$(3.3)\qquad f_y(x,\ y,\ y')-\frac{d}{dx}f_{y'}(x,\ y,\ y')=0,$$

полученному из (3.2) описанным выше предельным переходом. Проведя формальное дифференцирование, полученное уравнение можно записать в виде обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$(3.4)\quad f_y(x,\ y,\ y')-f_{xy'}(x,\ y,\ y')-f_{yy'}(x,\ y,\ y')\,y'-$$
$$-f_{y'y'}(x,\ y,\ y')\,y''=0.$$

Возникает правомерный вопрос: действительно ли экстремали исходного функционала I должны удовлетворять дифференциальному уравнению (3.4), которое получено в результате предельных переходов, требующих обоснования? Важность положительного ответа очевидна: решая дифференциальное уравнение (3.4), можно найти экстремальные функции. Полученное дифференциальное уравнение имеет второй порядок, что находится в согласии с п.2.3, где накладываются два граничных условия.

В п. 3.3 будет доказано, что при выполнении соответствующих условий экстремальные функции действительно должны удовлетворять дифференциальному уравнению (3.4). Это уравнение, которое часто записывают в форме (3.3) или, короче, в виде $f_y - \frac{d}{\partial x} f_{y'} = 0$, называют *дифференциальным уравнением Эйлера — Лагранжа* (в дальнейшем д.у. Э — Л), соответствующим простейшей вариационной задаче. Дифференциальное уравнение (3.4) часто называют также д. у. Э — Л, относящимся к основной функции f.

3.2. Замечания к методу Эйлера

1. Применяя описанный выше метод, Эйлер вывел уравнение (3.4), придав своим рассуждениям геометрическую наглядность. Этот вывод считался в свое время удовлетворительным, что становится понятным, если учесть неопределенность основных понятий анализа того времени, в том числе и понятия сходимости. Некоторые решения вариационных задач, полученные ранее частными способами, подтвердили справедливость данного дифференциального уравнения — функции, доставляющие экстремум, действительно ему удовлетворяли. Тем не менее Эйлер не считал свой метод достаточно эффективным, причем не из-за соображений строгости, а потому, что этот метод, основанный на наглядных представлениях, в случае более общих задач стал бы очень сложным и необозримым. (Например, если допустимые функции зависят от многих переменных, а в интеграле, задающем соответствие, имеются частные производные допустимых функций.)

2. Роль Эйлера в развитии вариационного исчисления чрезвычайно важна хотя бы потому, что он впервые вместо частных проблем рассмотрел целые классы задач и получил для них общие результаты. После появления первых работ Эйлера Лагранж ввел новый метод решения экстремальных задач — метод вариации (см. п. 3.3). Этот метод обладает меньшей геометрической наглядностью и представляет собой способ, основанный на типичных приемах анализа, применимых и в тех случаях, когда метод ломаных Эйлера не имеет успеха. Впоследствии сам Эйлер успешно применял метод вариации во многих своих исследованиях.

3. Рассмотрим вновь один из шагов метода Эйлера, представляющийся наименее обоснованным. Мы определили функционал на последовательности классов допустимых функций Π_n, $n \in N$, из каждого класса на основании необходимого условия экстремума выделили функцию и предположили, что последовательность функций, полученная таким образом, стремится к экстремальной функции исходной задачи. На обоснование последнего шага математики долгое время не обращали особого внимания, считая это делом безнадежным. Однако развитие современных методов математики снова вывело гениальную идею Эйлера на передний план, где она составляет основу так называемых *прямых методов вариационного исчисления*.

4. Сделаем два замечания, относящихся к области определения функционала и имеющих противоречивый характер:

а) $\Pi_n \not\subset D_I$ $(n \in N)$. На это соотношение следует обратить внимание потому, что согласно замечанию 3 было бы естественным ожидать, что последовательность допустимых классов функций, о которой идет речь, образована подмножествами исходного класса функций. (Это имело бы место, например, если множество D_I состояло бы из кусочно-непрерывно дифференцируемых функций.) Поэтому возникает вопрос о целесообразности *расширения* функционала I и определении его не только на функциях из $C_1[x_1, x_2]$, но и на функциях из более широкого класса $D[x_1, x_2]$[8]..

б) Д. у. Э — Л имеет второй порядок, следовательно, решая его, можно получить только те экстремальные функции, которые можно дифференцировать хотя бы два раза. Поэтому возникает вопрос о необходимости *сужения* функционала I и определения его не на функциях из $C_1[x_1, x_2]$, а на функциях из более узкого класса $C_2[x_1, x_2]$.

К поставленным вопросам мы вернемся в § 6.

---

[8]Мы говорим, что функция $y \in R^1 \to R^n$ *кусочно-непрерывна* на отрезке $[x_1, x_2]$ (обозначение: $y \in D[x_1, x_2]$), если: 1) $D_y = [x_1, x_2] \setminus A$, где множество $A \subset [x_1, x_2]$ конечно или пусто; 2) функция y непрерывна на D_y; 3) функция y имеет в точках A левое и правое конечные предельные значения.

Функция $y \in R^1 \to R^n$ имеет на отрезке $[x_1, x_2]$ кусочно-непрерывную производную порядка k (обозначение: $y \in D_k[x_1, x_2]$), если: 1) $y \in C_{k-1}[x_1, x_2]$; 2) $y^{(k)} \in D[x_1, x_2]$.

3.3. Метод Лагранжа. Лемма Лагранжа

Изложим упомянутый выше метод Лагранжа, применяя современный математический язык. С помощью этого метода мы сможем строго получить д.у. (3.4) как необходимое условие, которому должна удовлетворять экстремаль. Для этого возьмем *сужение* функционала I, определенного в § 2, получаемое заменой условия i) условием

i') $y \in C_2[x_1, x_2]$.

Целесообразность этого сужения оправдывается тем, что в качестве необходимого условия мы хотим получить д. у. второго порядка (3.4), Для этого же предположим, что

б') $f \in C_2(Q)$.

В этом пункте I означает измененный таким образом функционал.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если функционал I достигает экстремума на допустимой функции y, то функция y должна удовлетворять дифференциальному уравнению Эйлера—Лагранжа* (3.4).

Доказательство. Предположим, что функционал I достигает экстремума на функции $y \in D_I$. Фиксируем произвольную функцию η, удовлетворяющую условиям

(3.5) $$\eta \in (R^1 \to R^1) \cap C_2[x_1, x_2];\ \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0,$$

и рассмотрим однопараметрическое семейство функций

(3.6) $$\omega(x, \varepsilon) \stackrel{\mathrm{df}}{=} y(x) + \varepsilon\eta(x)\ ((x, \varepsilon) \in [x_1, x_2] \times R^1).$$

Из (3.5) и из того, что множество Q открытое, следует, что при любом достаточно малом ε, т. е. принадлежащем некоторой окрестности нуля $k(0)$, функция $\omega(x, \varepsilon)$ принадлежит D_I. Так как $\omega(x, 0) = y(x)$ $(x \in [x_1, x_2])$, то функция

$$\varphi(\varepsilon) \stackrel{\mathrm{df}}{=} I[\omega(x, \varepsilon)] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \\ + \varepsilon\eta'(x))\,dx \quad (\varepsilon \in k(0)),$$

принадлежащая $C_2(k(0))$, достигает во внутренней точке $\varepsilon = 0$ экстремума и, следовательно, по известной теореме о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, должно выполняться равенство

$$\varphi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\{f_y(x, y(x), y'(x))\eta(x)+ \\ +f_{y'}(x, y(x), y'(x)\eta'(x)\}dx=0, \tag{3.7}$$

Второе слагаемое в подынтегральном выражении проинтегрируем по частям. В результате, применив (3.5), получим

$$\int_{x_1}^{x_2} f_{y'}(x, y(x), y'(x))\eta'(x)\,dx=[f_{y'}(x, y(x), y'(x))\eta(x)]_{x_1}^{x_2}- \\ -\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}f_{y'}(x, y(x), y'(x))\,dx= \\ =-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}f_{y'}(x, y(x), y'(x))\,dx.$$

Следовательно, равенство (3.7) можно записать так:

$$\varphi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\left\{f_y(x, y(x), y'(x))- \\ -\frac{d}{dx}f_{y'}(x, y(x), y'(x))\right\}\eta(x)\,dx=0. \tag{3.8}$$

Выражение, заключенное в фигурные скобки, представляет собой непрерывную функцию. Докажем, что эта функция тождественно равна нулю. Сформулируем это утверждение в виде отдельной леммы.

Лемма 1 (лемма Лагранжа). *Пусть* $m \in R^1 \to R^1$ — *непрерывная на отрезке* $[x_1, x_2]$ *функция. Предположим, что для любой функции* η, *удовлетворяющей условиям* (3.5), *выполняется равенство*

$$\int_{x_1}^{x_2} m(x)\eta(x)\,dx=0. \tag{3.9}$$

Тогда для всех $x \in [x_1, x_2]$

$$m(x)=0.$$

Доказательство леммы. Используем метод от противного. Предположим, что на отрезке $[x_1, x_2]$ существует точка, в которой функция m не равна нулю. Тогда в силу непрерывности функция m отлична от нуля и в некоторой внутренней точке x_0 отрезка $[x_1, x_2]$. Пусть, например, $m(x_0) > 0$. Тогда также в силу непрерывности m существует такое число $\delta > 0$, что

(3.10) $m(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (x_1, x_2)$.

Рассмотрим функцию

$$\eta^*(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \tag{3.11}$$

$$= \begin{cases} (x - x_0 + \delta)^3 \; (x_0 + \delta - x)^3, & \text{если } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \\ 0, & \text{если } x \in [x_1, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, x_2]. \end{cases}$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет условиям (3.5). Из ее определения и соотношения (3.10) следует, что

$$\int_{x_1}^{x_2} m(x)\,\eta^*(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} m(x)\,\eta^*(x)\,dx > 0.$$

Полученное неравенство противоречит условию леммы (3.9). Тем самым лемма доказана.

Применяя лемму Лагранжа к функции

$$m(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) =$$

$$= f_y(x, y(x), y'(x)) - f_{xy'}(x, y(x), y'(x)) -$$

$$- f_{yy'}(x, y(x), y'(x))\, y'(x) - f_{y'y'}(x, y(x), y'(x))\, y''(x),$$

непрерывной на отрезке $[x_1, x_2]$, получим, что функция y должна удовлетворять д. у. Э — Л (3.4). Теорема доказана.

Замечание. Метод Лагранжа, использованный при доказательстве, применим также и к более сложным вариационным задачам. Лемма, играющая важную роль в доказательстве теоремы, допускает обобщения, которые также называют леммами Лагранжа. Сформулируем два таких обобщения, которые окажутся полезными в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть n — натуральное число, $m \in R^1 \to R^1$ — непрерывная на $[x_1, x_2]$ функция. Предположим, что*

$$\int_{x_1}^{x_2} m(x)\,\eta(x)\,dx = 0$$

для любой функции $\eta \in R^1 \to R^1$, *удовлетворяющей условиям*

$$\eta \in C_n[x_1, x_2], \quad \eta^{(i)}(x_1) = \eta^{(i)}(x_2) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Тогда

$$m(x) = 0 \quad (x \in [x_1, x_2]).$$

Лемма 3. *Пусть* l *— натуральное число,* $m \in R^n \to R^1$ *— функция, непрерывная на множестве* H, *где* $H \subset R^n$ *— область, измеримая по Жордану. Предположим, что*

$$\int\limits_H m(x)\eta(x)\,dx = 0$$[9]

для любой функции $\eta \in R^n \to R^1$, *удовлетворяющей условиям*

$$\eta \in C_l(\overline{H}), \quad \eta_{x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \operatorname{front} H$$

(α_i *— неотрицательные целые числа,* $\alpha = 0, 1, \ldots, l$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \alpha$). *Тогда*

$$m(x) = 0 \quad (x \in \overline{H}).$$

Доказываются обе леммы аналогично первой. При доказательстве леммы 2 необходимо заменить показатель степени 3, в которую возводятся выражения в скобках в (3.11), на $n + 1$. При доказательстве леммы 3 следует ввести окрестность $k_\rho(a) \subset H$ точки a, в которой $m(x) \neq 0$, и рассмотреть функцию

$$\eta^*(x) = \begin{cases} (\rho^2 - |x-a|^2)^{l+1}, & \text{если } x \in k_\rho(a); \\ 0, & \text{если } x \in \overline{H} \setminus k_\rho(a). \end{cases}$$

Все последующие рассуждения остаются без изменений.

3.4. Классическая трактовка вариации. Первая вариация и ее связь с дифференциальным уравнением Эйлера — Лагранжа.

Метод, использованный при доказательстве теоремы 1, основан на обобщении понятия *производной по направлению*. В самом деле, под производной по направлению $e \in R^n$ ($|e| = 1$) функции $g \in R^n \to R^1$ в точке a, являющейся внутренней точкой области определения g, понимается производная функции

$$\varphi_1(\varepsilon) \overset{\mathrm{df}}{=} g(a + \varepsilon e) \quad (\varphi_1 \in R^1 \to R^1)$$

в точке $\varepsilon = 0$, т. е. число $\varphi_1'(0) = \dfrac{\partial g(a)}{\partial e}$. Если функция g принимает в точке a экстремальное значение, то *производная этой функции по любому направлению должна обратиться в нуль*. Так как $\dfrac{\partial g(a)}{\partial e} = \langle g'(a), e \rangle$, то это условие принимает вид $g'(a) = 0 \in R^n$.

[9]Знак интеграла означает n-кратный интеграл.

В приведенном выше доказательстве теоремы 1 мы рассматривали изменение функционала при изменении аргумента в «направлении» функции η, т. е. рассматривали функцию $\varphi(\varepsilon) \overset{\mathrm{df}}{=} I[y + \varepsilon\eta]$ и ее производную в точке $\varepsilon = 0$. Равенство (3.7), по аналогии с соответствующим равенством для функции из $R^n \to R^1$, означает, что *«производная» функционала по направлению произвольной функции* η, удовлетворяющей условиям (3.5), *равна нулю*.

В определении производной функции $g \in R^n \to R^1$ по направлению e обычно предполагается, что e — единичный вектор. Для полной аналогии можно было бы ограничиться только такими функциями η, «длина» (норма) которых в каком-то смысле равна 1. При дифференцировании это привело бы лишь к появлению постоянного множителя, который для нашего исследования не имеет значения, так как важным является только вопрос о равенстве производной нулю. Лагранж, естественно, применял свой метод, не используя приведенной формализации, которая получила четкость в современной математике. По аналогии с дифференциалом, им была введена так называемая *вариация*, обычно обозначаемая буквой δ. Строгого определения вариаций Лагранж не дал, а привел правила действий над ними.

Формальный подсчет вариаций позволил решить широкий круг задач, связанных с экстремумами функционалов. После работ Лагранжа долгое время основную проблему видели именно в составлении вариации для все более общих типов функционалов, в подсчете вариаций, в «вариационном исчислении». Символику Лагранжа, взяв, для примера, простейшую вариационную задачу, можно формализовать следующим образом.

Пусть $y \in (R^1 \to R^1) \cap C_2[x_1, x_2]$ — данная функция, а $\omega(x, \varepsilon) \in (R^2 \to R^1) \cap C_2([x_1, x_2] \times k(0))$ — однопараметрическое семейство функций, удовлетворяющих условию $\omega(x, 0) = y(x)$ $(x \in [x_1, x_2])$. Под (первой) вариацией некоторой функции $\psi(x, y, y') \in (R^3 \to R^1) \cap C^1$ (в предположении, что имеет смысл сложная функция $\psi(x, \omega(x, \varepsilon), \omega_x(x_1\, \varepsilon))$ $[(x, \varepsilon) \in [x_1, x_2] \times k(0)]$) относительно y понимается функция

$$\delta\psi \overset{\mathrm{df}}{=} \left.\frac{\partial\psi(x, \omega(x, \varepsilon), \omega_x(x, \varepsilon))}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0} \cdot \varepsilon .$$

Таким образом, при фиксированных функциях y и ω, $\delta\psi$ зависит от функции x и ε ($D_{\delta\psi} = [x_1, x_2] \times k$ (0); $\delta\psi \in R^2 \to R^1$).

В частности, если в качестве $\omega(x, \varepsilon)$ взять (3.6), а в качестве ψ — функции y, y' и f[10], то для их вариаций получим следующие представления:

$$\delta y = \varepsilon\eta(x); \tag{3.12}$$

$$\delta y' = \varepsilon\eta'(x)\left[\text{т. е. } (\delta y)' = \delta y'; \ \left(\overset{\text{df}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\right)\right]; \tag{3.13}$$

$$\delta f = f_y(x, y(x), y'(x))\delta y + f_{y'}(x, y(x), y'(x))\delta y'. \tag{3.14}$$

В заключение определим так называемую первую вариацию функционала относительно функции $y \in D_I$ так, чтобы «операции» вариации и интегрирования были перестановочными, т. е. положим

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = \int_{x_1}^{x_2} \{f(x, y(x), y'(x))\,\delta y + f_{y'}(x, y(x), y'(x))\,\delta y'\}\,dx. \tag{3.15}$$

Равенство (3.7) выражает то же самое, что и тождество $\delta I = 0$, которое следует понимать так, что оно выполняется для любых вариаций δy, вычисленных с помощью функций $\omega(x, \varepsilon)$ типа (3.6). Эти вариации также исчерпывают все возможные случаи в том смысле, что *любую допустимую функцию можно представить в виде* $y + \delta y$. Итак, Лагранж рассматривал вариацию δy —как разность исходной и измененной («проварьированной») функции. Установленное им тождество $\delta I = 0$, по существу, выражает то, что при малом изменении функции, на которой достигается экстремум, изменение «главной части» функционала равно нулю.

Напомним, что в рассуждениях предыдущего пункта д. у. Э—Л получено из равенства (3.8) с использованием леммы Лагранжа. А равенство (3.8), как было показано, эквивалентно тождеству $\delta I \equiv 0$. Наоборот, из (3.8) ясно, что если y есть решение д. у. Э—Л, то $\delta I \equiv 0$. Таким об-

[10]Взять в качестве ψ функцию y, где $\psi \in R^3 \to R^1$, а $y \in R^1 \to R^1$, — значит рассмотреть функцию $\psi(x, y, y') = y$. Аналогичное замечание относится к функции $\psi = y'$.

разом, *для того, чтобы первая вариация функционала* I *относительно функции* $y \in D_I$ *тождественно обращалась в нуль* (*т. е. чтобы равенство* $\delta I\,[\eta] = 0$ *выполнялось для любой функции, удовлетворяющей условию* (3.5)), *необходимо и достаточно, чтобы функция* y *являлась решением д. у. Э—Л* (3.4). При использовании языка вариаций некоторые этапы доказательства теоремы 1 могут показаться излишними. Отчасти это верно, однако мы считаем важной историческую ссылку, освещающую происхождение названия «вариационное исчисление». Важно также и то, что в прикладных задачах используют «язык вариации» именно в вышеупомянутом понимании, более близком к первоначальному лагранжеву, а не к современному, освещающему суть дела лучше и являющемуся более общим и простым по форме. Знакомство с этим современным пониманием — предмет следующего параграфа.

Задача. Пусть определяющими данными функционала являются следующие: $T = R^3$, $f(x, y, y') = y'^2 + y^2 + 2xy$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$.

а) Покажите, что из допустимых фукций одна и только одна удовлетворяет дифференциальному уравнению Э—Л, и укажите эту функцию.

б) Покажите, что при $n = 4$ существует одна и только одна стационарная ломаная Эйлера, и постройте ее.

в) Определите погрешность между точным а) и приближенным б) решениями в точках $x = 0{,}2$, $x = 0{,}4$, $x = 0{,}6$ и $x = 0{,}8$ (с точностью до четырех десятичных знаков после запятой).

§ 4. ОБЩИЙ МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В предыдущем параграфе было показано, что при доказательстве теоремы 1, по существу, используется некоторое обобщение понятия производной по направлению. Уточнение этого обобщения, а также необходимость придания четкого смысла утверждению о том, что вариация есть «главная часть» исследуемого функционала, привели в период формирования функционального анализа[11] к исследованию проблемы дифференцируемости функционала. В дальнейшем мы рассмотрим эту проблему для функционалов, определенных на линейном нормированном пространстве. Основой определения служит понятие дифференцируемости функции числового аргумента.

---

[11] Прежде всего в работах Р. Гато и М. Фреше начала XX в. [38]

4.1. Функционал, определенный на линейном нормированном пространстве

В этом пункте мы напомним некоторые используемые в дальнейшем понятия функционального анализа.

Определение 1. (*Абстрактное*) *множество* S *называют линейным пространством над полем действительных чисел* R^1, *если любой паре элементов* x, $y \in S$ *сопоставлен элемент множества* S, *называемый суммой элементов* x *и* y *и обозначаемый* $(x + y)$, *и любой паре элементов* $\alpha \in R^1$, $x \in S$ *сопоставлен элемент множества* S, *обозначаемый* αx, *так, что выполняются нижеприведенные условия*[12]:

1^0. $x + y = y + x$.

2^0. $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3^0. *Существует элемент* 0, *называемый нулевым элементом, такой что для любого* $x \in S$

$$x + 0 = x.$$

4^0. *Для любого элемента* $x \in S$ *существует такой элемент* $(-x) \in S$, *называемый противоположным* x, *что*

$x + (-x) = 0$. 5^0. $1 \cdot x = x$. 6^0. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

7^0. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$. 8^0. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Определение 2. *Линейное пространство* S *называется нормированным, если любому элементу* $x \in S$ *сопоставлено неотрицательное действительное число (называемое нормой* x *и обозначаемое символом* $\|x\|$) *так, что выполняются следующие условия*:

а) $\|x\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$;
б) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$;
в) $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$.

Линейное нормированное пространство S можно превратить в метрическое пространство, если под расстоянием $\rho(x, y)$ от элемента x до элемента $y \in S$ понимать число $\|x - y\|$[13]. Нетрудно убедиться, что при этом выполняются аксиомы метрического пространства, т. е.:

А) $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

Б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

В) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

---

[12] В дальнейшем элементы R^1 будут обозначаться греческими, а элементы S — латинскими буквами.

[13] Под элементом $x - y$ понимается элемент $x + (-y)$.

Примеры линейных нормированных пространств. Если в непараметрической задаче взять область T совпадающей с плоскостью R^2, то множество функций (сыгравшее важную роль в доказательстве теоремы 1 § 3), удовлетворяющих условию (3.5), т. е. множество

$$(4.1)\quad M \overset{\mathrm{df}}{=} \{\eta \in R^1 \to R^1 | \eta \in C_2\,[x_1, x_2],\ \eta\,(x_1) = \eta\,(x_2) = 0\},$$

очевидно, образует линейное пространство. При этом, как обычно, под суммой функций $\eta_1, \eta_2 \in M$ понимается функция $(\eta_1 + \eta_2) \in M$, сопоставляющая каждому $x \in [x_1, x_2]$ число $\eta_1\,(x) + \eta_2\,(x)$, а под произведением функции $\eta \in M$ на действительное число α — функция $\alpha\eta \in M$, сопоставляющая x число $\alpha\eta\,(x)$.

Определенное выше линейное пространство M в зависимости от выбора нормы можно разными способами превратить в нормированное: 1) с помощью нормы bC

$$\|\eta\|^0 \overset{\mathrm{df}}{=} \max_{x \in [x_1\, x_2]} |\eta\,(x)|;$$

2) с помощью нормы bC_1

$$\|\eta\|^1 \overset{\mathrm{df}}{=} \max_{x \in [x_1,\, x_2]} |\eta\,(x)| + \max_{x \in [x_1,\, x_2]} |\eta'\,(x)| \text{ и т. п.}$$

Можно легко убедиться, что как $\|\eta\|^0$, так и $\|\eta\|^1$ удовлетворяет условиям а), б) и в).

Если определить класс функции D_I (с оговоренным ранее условием $Q = R^3$) так, как в п. 3.3 [т. е. с условиями *i'*), *ii*); тогда в силу $T = R^2$ условие *iii*) выполняется автоматически], и зафиксировать какую-нибудь функцию $\bar{y} \in D_I$, то любую допустимую функцию можно представить как сумму $\bar{y}$ и некоторой функции из M, т. е.

$$D_I = \{y \in R^1 \to R^1 | y = \bar{y} + \eta,\ \eta \in M\}.$$

Это означает, что *в качестве области определения исследуемого функционала можно взять линейное пространство M.*

Напомним понятие непрерывности и линейности функционала, определенного на линейном нормированном пространстве.

Определение 3. *Функционал J, определенный на линейном нормированном пространстве S, называется непрерывным по норме в точке $x_0 \in S$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если $x \in S$ и $\|x - x_0\| < \delta$, то $|J\,[x] - J\,[x_0]| < \varepsilon$.*

Легко привести пример функционала, определенного на линейном нормированном пространстве, который не является непрерывным. Для этого линейное пространство M, приведенное выше [см. (4.1)], превратим введением нормы $||\eta||^0$ в нормированное и определим функционал на M следующим образом: каждой функции $\eta \in M$ сопоставим длину дуги кривой $y = \eta(x)$ $(x \in [x_1, x_2])$. Иначе говоря, рассмотрим непараметрическую вариационную задачу на плоскости, где

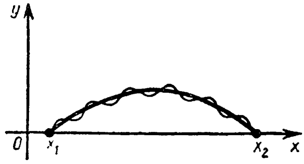

Рис. 4

$$T = R^2,\ f(x, \eta, \eta') \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{1+\eta'^2},\ P_1 = (x_1, 0),\ P_2 = (x_2, 0).$$

Функционал, определенный таким образом, не является непрерывным по норме $||\eta||^0$: ясно, что в случае произвольно «близких» функций различие между длинами соответствующих кривых может быть сколь угодно большим (рис. 4).

Определение 4. *Функционал, определенный на линейном нормированном пространстве S, называется линейным, если он непрерывен и если для любых элементов x, $y \in S$ выполняется равенство*

$$L[x+y] = L[x] + L[y]. \tag{4.2}$$

Заметим, что для любых элементов α, $\beta \in R^1$, x, $y \in S$ выполняется также равенство

$$L[\alpha x + \beta y] = \alpha L[x] + \beta L[y].$$

Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно, учитывая (4.2), доказать равенство $L[\alpha x] = \alpha L[x]$. Пусть сначала α — рациональное: $\alpha = r/q$. Так как область определения L — линейное пространство, то, используя (4.2), получаем $L[x] = L\left[q\frac{x}{q}\right] = qL\left[\frac{x}{q}\right]$, т. е. $L\left[\frac{1}{q}x\right] = \frac{1}{q}L[x]$. Из (4.2) также получаем $L\left[p\frac{1}{q}x\right] = pL\left[\frac{1}{q}x\right] = \frac{p}{q}L[x]$; следовательно, доказываемое равенство верно для рациональных α. Пусть теперь $\alpha \in R^1$ — произвольное, а α^n $(n \in N)$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α. Тогда на основании 4° и б) $||\alpha_n x - \alpha x|| = |\alpha_n - \alpha|\,||x|| \to 0$, если $n \to \infty$; стало быть, $L[\alpha x] = \lim\limits_{n\to\infty} L[\alpha_n x]$ в силу непрерывности L. С другой стороны, применяя (4.2), получаем, что

$|\alpha L[x] - L[\alpha_n x]| = |\alpha - \alpha_n||L[x]| \to 0$, если $n \to \infty$; следовательно, $\alpha L[x] = \lim\limits_{n\to\infty} L[\alpha_n x]$, т. е. по приведенному выше предельному соотношению $\alpha L[x] = L[\alpha x]$, а именно это и надо было доказать.

Приведем пример линейного функционала. Рассмотрим определенную в (3.4) ($\varepsilon \overset{\text{df}}{=} 1$) первую вариацию δI функционала I относительно фиксированной функции $y \in D_I$, т. е. в соответствии с обозначениями этого пункта) функционал

$$\delta I[\eta] \overset{\text{df}}{=} \int_{x_1}^{x_2} \{f_y(x, y(x), y'(x))\,\eta(x) + \\ + f_{y'}(x, y(x), y'(x))\,\eta'(x)\}\,dx,$$

определенный на линейном пространстве M. Превратим M в линейное нормированное пространство с помощью нормы $||\eta||^1$ из C_1. Тогда функционал линеен (относительно нормы $||\eta||^1$).

Для функционала δI, очевидно, выполняется условие $\delta I[\eta_1 + \eta_2] = \delta I(\eta_1) + \delta I[\eta_2]$ ($\eta_1, \eta_2 \in M$), соответствующее (4.1). Покажем, что δI непрерывен. Введя обозначение $A \overset{\text{df}}{=} \max\limits_{x\in[x_1,\, x_2]} \{|f_y(x, y(x), y'(x))|, |f_{y'}(x, y(x), y'(x))|\}$ для любых $\eta_1, \eta_2 \in M$, получаем неравенство

$$|\delta I[\eta_1] - \delta I[\eta_2]| \leqq A|x_2 - x_1|\,||\eta_1 - \eta_2||^1,$$

из которого сразу следует непрерывность. Значит, функционал δI ($D_{\delta I} = M$ с нормой $||\eta||^1$) является линейным.

4.2. Производная Фреше. Современное понятие вариации

Понятие дифференцируемости функционала соответствует понятию дифференцируемости функции из $R^n \to R^1$ и вводится следующим образом.

О п р е д е л е н и е 5. *Говорят, что функционал J, определенный на линейном нормированном пространстве, является дифференцируемым в точке $x \in S$, если существует такой линейный функционал L_x, что приращение функционала J можно записать в следующем виде:*

(4.3) $J[x + h] - J[x] = L_x[h] + o(h)$ $[(x + h) \in S]$.

Прежде всего отметим, что если функционал J является дифференцируемым в точке x, то линейный функционал L_x определяется однозначно. Действительно, допустим, что приращение J можно записать также и в следующем виде[14]:

$$J[x+h]-J[x]=L_x^1[h]+o(h). \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) получаем равенство

$$L_x[h]-L_x^1[h]=o(h). \tag{4.5}$$

Левая часть (4.5), как разность двух линейных функционалов, представляет собой линейный функционал. Обозначим его через L_x^*. Докажем, что L_x^* тождественно равен 0 и, следовательно, функционалы L_x и L_x^1 совпадают. Предположим противное: пусть существует элемент h_0 такой $(x+h_0\in S)$, для которого $L_x^*[h_0]=l\neq 0$. На основании свойства б) нормы очевидно, что последовательность $h_n = h_0/n$ $(n\in N)$ сходится к нулю, т. е. $\|h_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому из (4.5) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_x^*[h_n]}{\|h_n\|}=0. \tag{4.6}$$

Но, с другой стороны, в силу линейности

$$\frac{L_x^*[h_n]}{\|h_n\|}=\frac{\frac{1}{n}L_x^*[h_0]}{\frac{1}{n}\|h_0\|}=\frac{l}{\|h_0\|}\neq 0\ (n\in N). \tag{4.7}$$

Противоречивость (4.6) и (4.7) означает, что L_x^* — тождественный 0.

Из приведенного выше определения следует, что *если функционал J дифференцируем в точке x, то он и непрерывен в ней*, так как в правой части (4.3) стоит сумма линейного (и, следовательно, непрерывного) функционала и функции o-малое, которая, очевидно, стремится к нулю, если $\|h\|\to 0$.

Определение 6. *Если функционал J дифференцируем в точке $x\in S$, то линейный функционал L_x, стоящий в правой части* (4.3), *называется дифференциалом или ва-*

[14]Под o мы понимаем такую функцию из $S\to R^1$, для которой $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x)}{\|x\|}=0$ (функция o-малое).

риацией в точке x функционала J и обозначается δJ_x. Следовательно, (4.2) можно записать так:

(4.8) $J[x+h] - J[x] = \delta J_x[h] + o(h)\ [(x+h) \in S]$.

В тех случаях, когда элемент $x \in S$ фиксирован и в ходе исследования не меняется, вместо δI_x будем просто писать δI. Итак, вариация определена как главная часть функционала на линейном нормированном пространстве. В первую очередь, как и в случае дифференциала функции из $R^n \to R^1$, возникает вопрос о том, является ли вариация, относящаяся к экстремальным элементам, тождественным нулем. Следующий вопрос: совпадает ли данное определение с приведенным ранее (в случае простейшей вариационной задачи; п. 3.4)? Далее на оба эти вопроса будут получены положительные ответы.

Теорема 1. *Если функционал J, определенный на линейном нормированном пространстве S, является дифференцируемым в точке $x \in S$ и принимает там экстремальное значение, то вариация в этой точке является тождественным нулем.*

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует такая точка $h_0 \in S$, для которой $\delta J[h_0] = \lambda \neq 0$, и рассмотрим элементы $h_n = h_0/n$ $(n \in N)$, также принадлежащие S. Тогда, записав равенство (4.8), получим

$$J[x \pm h_n] - J[x] = \delta J[\pm h_n] + o(h_n) = \frac{1}{n}\{\pm\lambda + \\ + no(h_n)\}.$$

Из этого равенства, а также из того, что при достаточно больших n $(>n_0)$ выполняется неравенство $|no(h_n)| < |\lambda|$, следует, что приращения функционала J на элементе $x+h_n$ и элементе $x-h_n$ $(n > n_0)$ имеют *противоположные знаки*; стало быть, элемент x не может доставлять экстремум. Таким образом, утверждение доказано.

4.3. Применение общей теории к простейшей вариационной задаче.

В п. 4.1 было показано, что если зафиксировать некоторую функцию $y \in D_I$, относящуюся к функционалу I, определенному в § 2, то в качестве области определения нового функционала можно взять линейное пространство M.

В этом случае каждому элементу η из нового допустимого класса функций сопоставляется действительное число

$$\bar{I}[\eta] \overset{\mathrm{df}}{=} I[y+\eta].$$

Будем рассматривать пространство M как линейное нормированное пространство, снабженное нормой $\|\eta\|^1$ из C_1. То, что функционал I принимает экстремальное значение на функции $y \in D_I$, означает, что функционал $\bar{I}$ принимает экстремальное значение на функции $\eta(x) \equiv 0$ $(x \in [x_1, x_2])$, принадлежащей $D_{\bar{I}} = M$. *Функционал I, область определения которого, вообще говоря, не является линейным нормированным пространством, назовем дифференцируемым на функции $y \in D_I$, если функционал $\bar{I}$, определенный на линейном нормированном пространстве, является дифференцируемым на элементе, представляющем собой тождественный нуль. Аналогично определяем и вариацию I:*

$$\delta I_y \overset{\mathrm{df}}{=} \delta \bar{I}_0 \quad (0 \in M = D_{\bar{I}}).$$

Пусть $T = R^2$, $f \in C_2(R^3)$, и пусть I, как и ранее в этом пункте, означает соответствующий функционал, определенный в п. 3.3 (т. е. сужение функционала, определенного в § 2, с условием i'): $y \in C_2[x_1, x_2]$). Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Функционал I является дифференцируемым на любой функции $y \in D_I$, и определенная в этой точке вариация совпадает (с точностью до постоянного множителя) с вариацией, взятой в классическом смысле* (см. п. 3.4).

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $y \in D_I$ и запишем приращение функционала I при переходе от функции y к функции $y+\eta$, где $\eta \in M$ [см. (4.1)]. Это приращение, очевидно, равно приращению функционала $\bar{I}$, соответствующего фиксированной функции y, при переходе от функции 0 к функции η:

$$\Delta I[\eta] \overset{\mathrm{df}}{=} I[y+\eta] - I[y] = \bar{I}[\eta] - \bar{I}[0] =$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \{f(x, y(x)+\eta(x), y'(x)+\eta'(x)) - f(x, y(x), y'(x))\}\, dx.$$

Если в интеграле воспользоваться формулой Тейлора, оканчивающейся второй производной, то для ΔI получим следующее представление:

(4.9) $$\Delta I[\eta] = l[\eta] + r[\eta],$$

где

$$l[\eta]=\int_{x_1}^{x_2}\{f_y(x, y(x), y'(x))\,\eta(x)+$$
$$+f_{y'}(x, y(x), y'(x))\,\eta'(x)\}\,dx$$

и

$$(4.10)\qquad r[\eta]=\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\{\tilde{f}_{yy}\eta^2(x)+2\tilde{f}_{yy'}\,\eta(x)\,\eta'(x)+$$
$$+\tilde{f}_{y'y'}\,\eta'^2(x)\}\,dx.$$

В последней формуле символ $\sim$ означает, что значения функции берутся в точке $(x, y(x)+\nu(x)\eta(x),\ y'(x)+ +\nu(x)\eta'(x))$, где $0<\nu(x)<1$ $(x\in[x_1, x_2])$.

Функционал l совпадает с функционалом δI, линейность которого выше доказана.

Докажем, что $r[\eta]=o(||\eta||^1)$. Для этого достаточно ограничиться функциями $\eta\in M$, для которых $||\eta||^1<1$. Если обозначим через B верхнюю грань функций $|f_{yy}|$, $|f_{yy'}|$, $|f_{y'y'}|$ на множестве $\bigcup\limits_{x\in[x_1, x_2]} k_1((x, y(x), y'(x)))\subset R^3$ и примем во внимание неравенства $|\eta(x)|$, $|\eta'(x)|\leqslant||\eta||^1$ $(x\in[x_1, x_2])$, вытекающие из определения нормы $||\eta||^1$ (см. п. 4.1), то получим

$$|r[\eta]|\leqq 2B|x_2-x_1|\,(||\eta||^1)^2.$$

Отсюда сразу следует, что $r[\eta]=o(||\eta||^1)$.

Таким образом, приращение фунционала I (или, что то же самое, приращение фунционала $\bar{I}$, определенного на линейном нормированном пространстве M) представимо в виде суммы двух функционалов: линейного и бесконечно малого относительно нормы $||\eta||^1$. Это означает, что I является дифференцируемым на функции $y\in D_I$:

$$\Delta I=\delta I+o(||\eta||^1),$$

где

$$\delta I[\eta]=\int_{x_1}^{x_2}\{f_y(x, y(x), y'(x))\,\eta(x)+$$
$$+f_{y'}(x, y(x), y'(x))\,\eta'(x)\}\,dx.$$

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 1 следует полученный ранее в п. 3.4 результат: *если функционал I принимает экстремальное значение на функции $y \in D_I$, то вариация δI относительно функции y должна быть тождественным нулем.*

4.4. Замечания к методу Фреше

1. В случае применения производной Фреше к простейшей проблеме было отмечено следующее: то обстоятельство, что область определения функционала не является линейным пространством, а понятие дифференцируемости введено для функционалов, определенных на линейном нормированном пространстве, не вызвало существенных трудностей. Кроме изложенного выше метода часто используют следующий: рассматривается некоторое подмножество S в D_J, образующее подходящее линейное нормированное пространство. Допустим, что функционал достигает экстремума в точке $x_0 \in S \subset D_J$, т. е., например, в случае минимума для любого $x \in D_J$ выполняется неравенство $J[x] \geqq J[x_0]$. Тогда это неравенство, очевидно, выполняется и для точек S и можно, взяв уже в качестве области определения только S, поставить вопрос о дифференцируемости суженного таким образом функционала. В этом случае совокупность всех необходимых условий, относящихся к экстремуму на S, несомненно является также необходимым условием и для экстремума исходного функционала.

2. Если область T не совпадает со всей плоскостью R^2, то область определения D_I функционала I, определенного в п. 3.3, является собственным подмножеством класса, состоящего из функций вида $y + \eta$ ($\eta \in M$), где y — произвольная фиксированная функция из D_I. Это означает, что в данном случае мы также должны сузить область определения соответствующего функционала $\bar{I}$, рассмотренного в п. 4.3, на собственное подмножество линейного нормированного пространства. Однако изложенные выше определения и теоремы можно с соответствующими изменениями сформулировать и доказать и в этом случае, так как в доказательстве не использовались все элементы данного линейного пространства S. В приведенных выше доказательствах из линейности S было использовано только то, что S не пустое, и если какой-то элемент $y + h$ принадлежит S, то элементы $y + h/k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) также принадлежат S. Это условие будет выполнено, если вместо линейного нормированного пространства S взять его подходящее

подмножество, например произвольную ε-окрестность некоторой точки $x_0 \in S$, т. е. множество $\{x \in S \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\} \subset S$. Если следовать этим рассуждениям в случае исследуемого конкретного функционала I, то приведенные результаты окажутся справедливыми и для произвольной области $T \subset R^2$.

Вновь обратим внимание на аналогию с действительными функциями многих переменных. При определении дифференцируемости функции многих переменных в какой-либо точке нет необходимости определять функцию на всем линейном нормированном пространстве (в данном случае это пространство R^n), достаточно потребовать, чтобы функция была определена в некоторой окрестности исследуемой точки, т. е. в некотором подходящем подмножестве линейного нормированного пространства. При доказательстве утверждения (аналогичного теореме 1) о том, что в случае экстремума дифференциал в данной точке должен обращаться в нуль, достаточно определить функцию только на подходящем подмножестве некоторой окрестности данной точки.

3. Введение понятия производной Фреше и применение ее к вариационной задаче очень важно со многих точек зрения прежде всего в силу своей общности. Однако необходимо отметить, что в случае конкретных вариационных задач, как это было показано при исследовании непараметрической задачи на плоскости, некоторые результаты (например, необходимое условие экстремума $\delta I \equiv 0$) классическим путем получить легче (см. § 3).

Задачи. 1. Пусть I — функционал, определенный на линейном нормированном пространстве, а f — функция из $R^1 \to R^1$, для которой $R_I \subset D_f$. Введем сложный функционал $J = f \cdot I$, определенный на $D_J \overset{\mathrm{df}}{=} D_I$ равенством $J[x] \overset{\mathrm{df}}{=} f(I[x])$ $(x \in D_J)$. Покажите, что если в некоторой точке $x \in D_J$ функционал I, а в соответствующей точке $I[x] \in D_f$ функция f дифференцируемы, то функционал J также дифференцируем в точке x, и найдите представление для δJ_x.

2. Приведите пример недифференцируемого функционала.

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА — ЛАГРАНЖА

В § 3 было показано, что в случае функционала I, относящегося к простейшей вариационной задаче (при дополнительных условиях $f \in C_2(Q)$ и $y \in C_2[x_1, x_2]$), следующие два условия эквивалентны:

а) первая вариация функционала I относительно y является тождественным нулем ($\delta I \equiv 0$);

б) y является решением д. у. Э—Л

$$(5.1)\qquad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = f_y(x, y, y') - f_{xy'}(x, y, y') - \\ - f_{yy'}(x, y, y')\, y' - f_{y'y'}(x, y, y')\, y'' = 0.$$

Ранее мы убедились также, что любая экстремальная функция должна удовлетворять д. у. Э—Л (5.1).

Часто в силу традиции любое решение д. у. Э—Л называют экстремалью независимо от того, принимает на нем данный функционал экстремальное значение или нет. Вместо этого термина для решения д. у. Э—Л в дальнейшем будем использовать термин *стационарная функция*.

В § 3 также отмечалось, что условие $\delta I \equiv 0$ аналогично условию $d\Phi \equiv 0$, относящемуся к функции Φ из $R^n \to R^1$: оба условия являются необходимыми условиями существования экстремума и позволяют определить функции или точки, доставляющие экстремум; условие $\delta I \equiv 0$ эквивалентно дифференциальному уравнению, которому должна удовлетворять экстремальная функция, а условие $d\Phi \equiv 0$ — такой системе обычных уравнений, которой должны удовлетворять координаты точки, дающей экстремум.

Итак, для определения экстремали непараметрической задачи на плоскости, соответствующей функционалу I с определяющими данными T, f, P_1, P_2, на первом этапе следует решить краевую задачу (к.з.) для уравнения второго порядка:

$$(5.2)\qquad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \qquad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2.$$

Напомним, что исследование простейшей вариационной задачи включает рассмотрение всевозможных пар точек P_1, $P_2 \in T$ ($x_1 < x_2$). В соответствии с этим для общего исследования необходимо получить все такие решения к. з. (5.2), для которых (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in T$ и $x_1 < x_2$.

Для проведения общего исследования можно применять разные методы. Часто используемый способ заключается в попытке получить общее решение д. у. Э—Л и, если это удалось, определить те граничные условия, для которых можно решить данную к. з. Для остальных пар точек соответствующая экстремальная задача на данном классе допустимых функций не имеет решения.

Отметим, что структура дифференциальных уравнений Эйлера—Лагранжа[15] сложна, обычно это неявные д. у. или системы д. у. второго или высшего порядка, поэтому общий метод их решения не известен, применение же известных приближенных методов обычно связано с трудностями при вычислениях. Хотя во многих конкретных случаях решения д. у. Э—Л можно получить в квадратурах, данные уравнения имеют прежде всего теоретическое значение.

5.1. Понижение порядка дифференциального уравнения Эйлера—Лагранжа

Прежде всего исследуем, в каких конкретных случаях можно понизить порядок д. у. Э—Л. Из вида уравнения (5.1) непосредственно следует, что д. у. Э—Л имеет первый порядок тогда и только тогда, когда $f_{y'y'}(x, y, y') = 0$ на всем множестве Q. Это означает, что f — многочлен первого порядка по y'[16]:

$$f(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y' \; [(x, y, x') \in Q].$$

Для этой специальной основной функции д. у. Э—Л (5.1) имеет вид

$$M_y(x, y) - N_x(x, y) = 0. \tag{5.3}$$

Рассмотрим следующие два случая.

а) Равенство (5.3) является тождеством, т. е. $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ для всех $(x, y) \in T$. Из этого следует, что для пары функций M, N существует на T первообразная функция, точнее, такая функция $F \in (R^2 \to R^1) \cap C_1(T)$, для которой $F_x = M$, $F_y = N$. Пусть теперь y — произвольная допустимая функция. Вычислим значение функционала I на элементе y:

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} \{M(x, y(x)) + N(x, y(x))\, y'(x)\}\, dx =$$

---

[15]Использование множественного числа оправдывается тем, что, как будет показано в дальнейшем, более сложные вариационные задачи также имеют соответствующие д. у., которые называют д. у. Э—Л или д. у. Эйлера—Пуассона.

[16]Из условия $f \in C_2(Q)$, очевидно, следует, что $M, N \in C_1^{-}(T) \cap \cap R^2 \to R^1$.

$$= \int\limits_{x_2}^{x_2} \{F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))\, y'(x)\}\, dx =$$

$$= \int\limits_{x_2}^{x_2} \frac{d}{dx} F(x, y(x))\, dx = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1).$$

Итак, функционал I на любой допустимой функции принимает одно и то же значение, т. е. исследование соответствующей экстремальной проблемы не имеет смысла.

б) Равенство (5.3) не является тождеством. Следовательно, данная вариационная задача может иметь решение только в том специальном случае, когда уравнение (5.3) определяет неявную функцию, имеющую непрерывные производные второго порядка, и обе крайние точки P_1 и P_2 лежат на графике этой функции.

Из приведенных рассуждений следует, что при общем исследовании вариационной задачи *порядок д. у. Э—Л понизить практически невозможно.*

5.2. Неполные основные функции

Интегрирование д. у. Э—Л значительно упрощается, если основная функция f является *неполной*. Под этим понимается какой-либо из случаев $f_x = 0$ или $f_y = 0$. В случае $f_{y'} = 0$, когда основная функция также является «неполной», д. у. Э—Л сводится к уравнению для неявной функции $f_y(x, y) = 0$, т. е. к случаю, рассмотренному в п. 5.1.

а) Предположим, что основная функция не зависит от y: $f = f(x, y')$ $[(x, y, y') \in Q]$. Тогда соответствующее д. у. Э—Л также будет «неполным». Вместо применения общих методов интегрирования неполных дифференциальных уравнений второго порядка целесообразно исходить сразу из д. у. Э—Л, являющегося специальным д. у. второго порядка. Так как $f_y = 0$, то для любого решения y уравнения (5.1) выполняется тождество

$$\frac{d}{dx} f_{y'}(x, y'(x)) = 0 \qquad (x \in D_y).$$

Следовательно, существует такая константа c, для которой функция y удовлетворяет д. у. первого порядка:

$$f_{y'}(x, y') = c. \tag{5.4}$$

Верно обратное: любое два раза непрерывно дифференцируемое решение д. у. (5.4) [здесь c — произвольная константа из области значений функции $f_{y'} \in C_1(Q)$] является одновременно решением д. у. Э—Л. Итак, верно следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если f_y является тождественным нулем на множестве Q, то любое решение д. у. Э—Л* (5.1) *удовлетворяет д. у. первого порядка* (5.4) (*с некоторой константой* c) *и, наоборот, любое два раза непрерывно дифференцируемое решение уравнения* (5.4) *удовлетворяет д. у. Э—Л* (5.1).

б) Предположим, что основная функция не зависит от x: $f = f(y, y')$ [$(x, y, y') \in Q$], и пусть y — какое-то решение д. у. Э—Л. Тогда

$$(5.5)\qquad \frac{d}{dx}[f(y(x), y'(x)) - y'(x) f_{y'}(y(x), y'(x))] =$$

$$= f_y(y(x), y'(x))\, y'(x) + f_{y'}(y(x), y'(x))\, y''(x) -$$

$$- y''(x) f_{y'}(y(x), y'(x)) - y'(x) \frac{d}{dx} f_{y'}(y(x), y'(x)) =$$

$$= y'(x)\left\{f_y(y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(y(x), y'(x))\right\} = 0 \quad (x \in D_y);$$

иначе говоря, существует такая константа c, для которой функция y удовлетворяет д. у. первого порядка

$$(5.6)\qquad f(y, y') - y' f_{y'}(y, y') = c.$$

Наоборот, если y — такое два раза непрерывно дифференцируемое решение д. у. (5.6), для которого всюду, кроме не более чем конечного числа точек, выполняется неравенство $y'(x) \neq 0$, то выражение в фигурных скобках в (5.5) должно обратиться в нуль в любой точке D_y, т. е. функция y удовлетворяет д. у. (5.1). Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если f_x является тождественным нулем на множестве Q, то любое решение соответствующего д. у. Э—Л удовлетворяет* (*с некоторой константой* c) *д. у. первого порядка* (5.6) *и, наоборот, любое два раза непрерывно дифференцируемое решение д. у.* (5.6), *производная которого обращается в нуль не более чем в конечном числе точек, удовлетворяет д. у. Э—Л* (5.1).

5.3. Решение дифференциального уравнения Эйлера — Лагранжа в двух конкретных случаях

В этом пункте будет найдено общее решение д. у. Э—Л для двух конкретных, ранее исследованных основных функций.

а) В задаче о минимальной поверхности вращения (см. п. 2.2) основная функция (с точностью до множителя 2π) следующая:

$$f(x, y, y') = y\sqrt{1+y'^2} \quad (Q = R^3).$$

Так как f не зависит от x, то в силу предыдущего пункта любое решение д. у. Э—Л удовлетворяет д. у. первого порядка

$$f - y' f_{y'} = y\sqrt{1+y'^2} - y' y \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha.$$

Полученное д. у. можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$y - \alpha\sqrt{1-y'^2} = 0. \tag{5.7}$$

Так как $\sqrt{1+y'^2} > 0$, у д. у. (5.7) нет такой интегральной кривой, которая из полуплоскости $y \geqslant 0$ перешла бы в полуплоскость $y < 0$ и наоборот. Поэтому, не ограничивая общности, α можно выбрать неотрицательным: если y — решение (5.7) при $\alpha > 0$, то функция $-y$ удовлетворяет уравнению, полученному из (5.7) заменой α на $-\alpha$, и наоборот.

1°. Постоянная функция $y = \alpha$ ($\alpha \geqq 0$) является решением д. у. (5.7), но не удовлетворяет соответствующему д. у. Э—Л:

$$\left\{f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right\}_{y=\alpha} = \left\{\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx}\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right\}_{y=\alpha} =$$
$$= 1 - 0 \neq 0 \quad (x \in D_y).$$

Следовательно, в дальнейшем можно не принимать во внимание такие решения д. у. (5.7), которые являются постоянными на некотором интервале.

2°. Итак, пусть y — такое решение д. у. (5.7), которое ни на каком отрезке не является постоянным. Покажем, что в этом случае y *может обратиться в нуль не более чем в од-*

ной точке. Предположим противное, т. е. что существуют такие числа a и b, $a < b$ (a, $b \in D_y$), для которых $y'(a) = y'(b) = 0$ и $y'(x) \neq 0$, если $x \in (a, b)$. Тогда из (5.7) следуют равенства $y(a) = y(b) = \alpha$ и по теореме Ролля отсюда y' обращается в нуль в некоторой точке интервала (a, b). Полученное противоречие доказывает утверждение.

3°. Предположим, что y — такое решение д. у. (5.7), для которого $y'(x) \neq 0$ ($x \in D_y$). Тогда из (5.7) следует, что $y(x) > \alpha$ ($x \in D_y$). Исследуем уравнение

$$F(x, z) \overset{\text{df}}{=} y(x) - \alpha\sqrt{1+z^2} = 0 \quad \left(D_F \overset{\text{df}}{=} D_y \times R^1\right). \tag{5.8}$$

В результате простых вычислений получаем, что для любого значения $x \in D_y$ уравнение (5.8) имеет два решения — положительное и отрицательное:

$$z_1(x) = \sqrt{\left(\frac{y(x)}{\alpha}\right)^2 - 1}\,; \quad z_2(x) = -\sqrt{\left(\frac{y(x)}{\alpha}\right)^2 - 1}. \tag{5.9}$$

Функции z_1 и z_2, определенные равенствами (5.9), очевидно, принадлежат классу $C_1(D_y)$. Так как $z_1(x) > 0$, $z_2(x) < 0$ ($x \in D_y$), то уравнение (5.8) не имеет других непрерывных решений, кроме z_1 и z_2. Согласно предположению, уравнению (5.8) удовлетворяет функция $z = y' \in C(D_y)$, поэтому для всех x должно выполняться одно из равенств $y'(x) = z_1(x)$ или $y'(x) = z_2(x)$ ($x \in D_y$). Итак, функция y удовлетворяет одному из следующих д. у.:

А) $y' = \sqrt{(y/\alpha)^2 - 1}$ $\quad (y > 0,\ \alpha > 0)$;

Б) $y' = -\sqrt{(y/\alpha)^2 - 1}$ $\quad (y > 0,\ \alpha > 0)$.

Общие решения д. у. А) и Б) имеют вид

$$y = \alpha \operatorname{ch} \frac{x-\beta}{\alpha} \quad (x \in (\beta, +\infty));$$

$$y = \alpha \operatorname{ch} \frac{x-\beta}{\alpha} \quad (x \in (-\infty, \beta)).$$

Обратно: с помощью подстановки легко убедиться, что функция $y = \alpha \operatorname{ch} \frac{x-\beta}{\alpha}$ ($x \in R'$) удовлетворяет, в том числе и при $x = \beta$, неявному д. у. (5.7). Таким образом, с учетом утверждения § 2 показано следующее. Общее решение д. у. Э—Л, связанного с основной функцией $f(x, y, y') =$

$= y\sqrt{1+y'^2}$ $(D_f = Q = R^3)$, записывается в виде двухпараметрического семейства функций Φ:

(5.10) $\Phi(x, \alpha, \beta) = \alpha \operatorname{ch} \dfrac{x-\beta}{\alpha}$ $(\alpha \in R^1 \setminus \{0\};\ \beta \in R^1;\ x \in R^1)$.

Возвращаясь к исходной геометрической задаче, можно заключить, что *если задача о минимальной поверхности вращения, сформулированная в п. 2.2, имеет два раза непрерывно дифференцируемое решение, то это решение есть «цепная линия», принадлежащая семейству* (5.10).

б) В случае задачи о брахистохроне (см. п. 2.1) основная функция (с точностью до постоянного множителя $1/\sqrt{2g}$) следующая:

$$f(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y+\alpha}} \quad (\alpha > 0,\ Q = \{(x, y, y') \in R^3 \mid y > -\alpha\}.$$

Так как и в этом случае f не зависит от x, то в силу предыдущего пункта любое решение соответствующего д. у. Э—Л удовлетворяет д. у. первого порядка

$$f - y' f_{y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y+\alpha}} - y' \frac{y'}{\sqrt{y+\alpha}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{y+\alpha}\sqrt{1+y'^2}} = \text{const},$$

которое, если обозначить через $1/\sqrt{2b}$ постоянную, являющуюся, очевидно, положительной, эквивалентно уравнению $\sqrt{y+\alpha}\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{2b}$, или (после возведения в квадрат и деления) д. у.

(5.11) $$y + \alpha = \frac{2b}{1+y'^2}.$$

1°. Постоянные функции $y = k$ $(k > -\alpha)$ являются решениями д. у. (5.11), но они не удовлетворяют соответствующему д. у. Э—Л:

$$\left\{f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right\}_{y=k} = \left\{-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{(\sqrt{y+\alpha})^3} - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{y+\alpha}\sqrt{1+y'^2}}\right)\right\}_{y=k} = -\frac{1}{2(\sqrt{k+\alpha})^3} \neq 0.$$

Таким образом, в дальнейшем можно не обращать вн и мания на те решения д. у. (5.11), которые постоянны на некотором интервале.

2°. Покажем, что если y — такое непрерывно дифференцируемое решение д. у. (5.11), которое ни на каком отрезке не является постоянным, то функция y' принимает значение 0 не более чем в одной точке. В противном случае существовали бы такие числа a и b, $a < b$ $(a, b \in D_y)$, для которых $y'(a) = y'(b) = 0$ и $y'(x) \neq 0$, если $x \in (a, b)$. Тогда согласно (5.11) $y(a) = y(b)$ и отсюда по теореме Ролля следовало бы, что y' также обращается в нуль в некоторой внутренней точке интервала (a, b). Полученное противоречие показывает, что функция y' принимает значение 0 не более чем в одной точке.

3°. Если y — два раза непрерывно дифференцируемое и не содержащее интервалов постоянства решение д. у. (5.11), то (учитывая, что y' обращается в нуль не более чем в одной точке) после дифференцирования (5.11) получим

$$y''(x) = -\frac{1}{4b}(1 + y'^2(x))^2 \quad (x \in D_y).$$

Так как ось Oy мы направили вниз и $y'(x)$ — строго монотонно убывающая функция, то кривая $y = y(x)$ выпукла вниз.

«Параметризуем» кривую $y = y(x)$ $(x \in D_y)$, для чего выразим $y'(x)$ через параметр с помощью подходящим образом выбранной функции φ. Из предыдущего следует, что можно взять любую строго монотонную, непрерывно дифференцируемую функцию φ, которая имеет достаточно большую область значений $(R_{y'} \subset R_\varphi)$. Пусть, например, $\varphi(t) = \operatorname{ctg}(t/2)$, т. е.

$$y'(x) = \operatorname{ctg}(t/2) \quad (t \in \Delta \subset (0, 2\pi)), \tag{5.12}$$

где интервал Δ выберем так, чтобы при изменении t на Δ множество значений функции $\operatorname{ctg}(t/2)$ совпало с $R_{y'}$. Из (5.11) и (5.12) имеем

(5.13)
$$y + \alpha = \frac{2b}{1 + \operatorname{ctg}^2(t/2)} = 2b \sin^2\frac{t}{2} = b(1 - \cos t) \quad (t \in \Delta).$$

С помощью (5.12) производную функции $x = x(t)$ можно выразить следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\,\frac{dy}{dt} = b \operatorname{tg}\frac{t}{2}\sin t \quad (t \in \Delta \setminus \{\pi\}),$$

т. е.

$$\frac{dx}{dt} = 2b\sin^2\frac{t}{2} = b(1-\cos t) \quad (t \in \Delta).$$

Отсюда

$$x + \beta = b(t - \sin t) \ (t \in \Delta),$$

где β — произвольная постоянная.

На основании только что проведенных рассуждений, учитывая утверждение § 2, можно сделать следующий вывод. Общее решение д. у. Э—Л в параметрической форме, относящееся к основной функции $f(x, y, y') = \sqrt{1+y'^2}/\sqrt{y+\alpha}$ $(\alpha > 0;$ $D_f = Q = \{(x, y, y') \in R^3 | y > -\alpha\})$, определяется двухпараметрическим семейством функций

$$(5.14) \quad \begin{aligned} x+\beta &= b(t-\sin t), \\ y+\alpha &= b(1-\cos t), \end{aligned} \quad (t \in (0,2\pi);\ b > 0,\ \beta \in R^1).$$

Итак, получено хорошо известное параметрическое представление циклоиды: данная кривая является траекторией точки, лежащей на окружности радиуса b, которая катится по прямой, определяемой уравнением $y = -\alpha$. Таким образом, доказано, что *если задача о брахистохроне, сформулированная в п.* 2.1, *имеет два раза непрерывно дифференцируемое решение, то это циклоида, принадлежащая семейству* (5.14).

Замечание. Для задач, исследованных в этом пункте, с практической точки зрения важен ответ на вопрос о том, при каких граничных условиях разрешима соответствующая краевая задача (5.2). В случае задачи о минимальной поверхности вращения этот вопрос, очевидно, эквивалентен вопросу о том, разрешима ли при данных (и, естественно, удовлетворяющих условиям $x_1 < x_2$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$) точках (x_1, y_1), (x_2, y_2) система уравнений

$$(5.15) \qquad \alpha\,\mathrm{ch}\frac{x_1-\beta}{\alpha} = y_1, \quad \alpha\,\mathrm{ch}\frac{x_2-\beta}{2} = y_2$$

относительно неизвестных α и β. В случае задачи о брахистохроне для соответствующих (в силу параметрического представления, четырех) неизвестных b, β, t_1, t_2 система уравнений имеет вид

$$(5.16) \quad \begin{aligned} x_1 + \beta = b(t_1 - \sin t_1),\ y_1 + \alpha = b(1 - \cos t_1), \\ x_2 + \beta = b(t_2 - \sin t_2),\ y_2 + \alpha = b(1 - \cos t_2) \end{aligned}$$

(где, очевидно, $x_1 < x_2$; $y_1, y_2 > -\alpha$).

Исследованне разрешимости приведенных систем уравнений требует сложных вычислений, поэтому мы на этом останавливаться не будем. Отметим, что система уравнений (5.16) при любых граничных условиях имеет однозначное решение, однако система (5.15) разрешима не при любых возможных граничных условиях и даже в случае разрешимости решение не всегда однозначно (см., например, [2, 5]).

Задачи: 1. Найдите все решения соответствующего д. у. Э—Л для следующих основных функций.

(*Замечание.* Здесь $D_f = T \times R^2$; если множество $T \subset R^2$ не указывается, то под T всегда понимается то наибольшее открытое и выпуклое подмножество R^2, на котором данное соответствие имеет смысл; основную функцию задаем своим значением на произвольном элементе области определения и (для краткости и в силу традиции) вместо $f(x, y, y')$ пишем просто f.)

$$\text{а) } f=\sqrt{1+y'^2};\quad \text{б) } f=\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^2}\ (y>0);$$

$$\text{в) } f=\sqrt{1+y'^2}/x\ (x>0);\quad \text{г) } f=x^2y'^2;\quad \text{д) } f=3x^2y^2+2x^3yy';$$

$$\text{е) } f=xy'^2+12y^2;\quad \text{ж) } f=y'(1+x^2y');\quad \text{з) } f=y'^2+2yy'-16y^2;$$

$$\text{и) } f=xy'+y'^2;\quad \text{к) } f=y^2+2y'^2-2y\sin x;\quad \text{л) } f=y'^4-6y'^2;$$

$$\text{м) } f=yy'^3/(1+y'^2).$$

2. Определите для приведенных ниже основных функций множество тех упорядоченных точек $(P_1, P_2) \in R^2 \times R^2$ $(P_1 = (x_1, y_1),$ $P_2 = (x_2, y_2),$ $x_1 < x_2)$, для которых краевая задача

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0,\quad y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2 \text{ разрешима:}$$

$$\text{а) } f=y^2+x^2y';\quad \text{б) } f=y+xy',\quad \text{в) } f=x-3y^3;\quad \text{г) } f=x^2+y'^2.$$

3. Докажите, что для основной функции $f = y^2 + \sqrt{1+y'^2}$ краевая задача $f_y - \dfrac{d}{dx} f_{y'} = 0$, $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$ **разрешима** не при произвольных граничных условиях.

4. Покажите, что для основной функции $f = y^m g(y')$ $(m \in N,$ $g \in C_2(R^1))$ общее решение д. у. Э—Л представимо с помощью ее частного решения φ $(D_\varphi = R^1)$ следующим образом:

$$y(x;\alpha,\beta)=\alpha\varphi\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\ (x \in R^1;\ \alpha \in R^1\setminus\{0\},\ \beta \in R^1).$$

§ 6. ВЫБОР КЛАССА ДОПУСТИМЫХ ФУНКЦИЙ (ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ)

Данные (T, f, P_1, P_2) вариационной задачи на плоскости обычно однозначно определяются конкретным содержанием задач. Для примера достаточно упомянуть две задачи, исследованные в § 2. Сделанное в п. 2.3 предположение о принадлежности основной функции f классу $C(Q)$ во многих местах мы уже заменяли более сильным условием $f \in C_2(Q)$. С практической точки зрения это изменение не имеет значения, так как основные функции, встречающиеся в приложениях, как правило, являются аналитическими. После фиксирования T, f, P_1, P_2 единственное существенное ограничение при определении функционала заключается в условии i) непрерывной дифференцируемости допустимых функций. Ранее уже были приведены аргументы в пользу расширения или сужения класса функций $C_1[x_1, x_2]$ в условии i) (см. § 3). Отметим, что нельзя говорить о естественности условия i) или необходимости замены его некоторым другим (при сохранении всех остальных условий), так как различные «естественные» условия дифференцируемости и непрерывности допустимых функций зависят от поставленной цели. В задаче о минимальной поверхности вращения, говоря языком геометрии, естественно допущение кусочно-гладких кривых, в то время как в задаче о брахистохроне, очевидно, следует ограничиться гладкими кривыми. Если же целью является определение экстремальных функций из д. у., то, как это было показано в § 3, естественно выбирать допустимые функции из класса $C_2[x_1, x_2]$.

В данном параграфе подробно рассмотрена проблема выбора класса допустимых функций.

В дальнейшем будем предполагать выполненными все условия, приведенные в п. 2.3 *при определении функционала* I, *кроме условия* i), *которое заменим одним из приведенных ниже условий*:

$$i_1)\ y \in T[x_1, x_2];\quad i_2)\ y \in D_1[x_1, x_2];\quad i_3)\ y \in C_1[x_1, x_2];$$

$$i_4)\ y \in C_2[x_1, x_2];\quad i_5)\ y \in A[x_1, x_2].$$

Эти условия определяют пять различных функционалов, которые мы обозначим через I_j ($j = 1, \ldots, 5$). Из определения следует, что если $1 \leqslant j < k \leqslant 5$, то D_{I_k} является собственной частью D_{I_j}, т. е. функционал I_j есть расширение функционала I_k. При вычислении значений только что определенных фунционалов можно не указывать нижнего индекса, так как если $y \in D_{I_j}$ ($j \neq 1$), то $I_j[y] = I_{j-1}[y] = \ldots = I_1[y]$ $(= I[y])$.

Прежде всего рассмотрим условия i_2), i_3) и i_4). Подробное исследование важного с теоретической точки зрения условия i_1), когда интеграл (2.7) понимается в смысле Лебега, не входит в программу этой книги. Условие i_5) играет важную роль в сравнительно небольшом количестве задач.

6.1. Существование экстремума

а) С теоретической и практической точки зрения в одинаковой мере важен вопрос о том, всегда ли для непараметрической задачи на плоскости хотя бы для одного из функционалов $I_1, \ldots, I_5$ существует экстремальная функция. В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный.

Пример: Пусть $T = R^2$, $f = x^2y'^2$, $P_1 = (-1, -1)$, $P_2 = (1, 1)$. Тогда нижняя граница области значений функционала I_5, принимающего только неотрицательные значения $\left(I\,[y] = \int_{-1}^{1} x^2y'^2\,(x)dx,\ y \in D_{I_5}\right)$, равна 0. Для доказательства этого рассмотрим, например, семейство функций

$$y_\alpha(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\operatorname{arctg}\,(x/\alpha)}{\operatorname{arctg}\,(1/\alpha)}\quad (y_\alpha \in D_{I_5},\ \alpha > 0).$$

В этом случае

$$0 \leq I\,[y_\alpha] = \int_{-1}^{1} x^2\,y_\alpha'^2\,(x)\,dx < \int_{-1}^{1} (x^2+\alpha^2)y_\alpha'^2\,(x)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha^2}{\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{\alpha}}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\alpha^2+x^2} = \frac{2\alpha}{\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{\alpha}},\ \text{т. е.}$$

$$\lim_{\alpha\to+0} I\,[y_\alpha] = 0,$$

откуда в силу $R_{I_5} \subset [0, +\infty]$ следует, что $\inf R_{I_5} = 0$.

Так как функция f неотрицательна и I_5 — сужение всех остальных функционалов, то $\inf R_{I_j} = 0$ $(j = 1, \ldots 5)$. Однако ясно, что ни в одном классе D_{I_j} $(j = 1, \ldots, 5)$ нет такой функции, на которой функционал принимал бы значение 0. Интеграл $\int_{-1}^{1} x^2y'^2\,(x)dx$, рассматриваемый в классе непрерывных функций $(D_{I_j} \subset C\,[x_1, x_2],\ j = 1, \ldots, 5)$, принимает значение 0 только на постоянных функциях, а среди них нет такой, которая удовлетворяла бы граничным условиям: $y\,(-1) = -1$, $y\,(1) = 1$.

б) При исследовании экстремумов функций из $R^n \to R^1$ с теоретической, а также с практической точек зрения важную роль играет теорема Вейерштрасса о существовании экстремумов непрерывных функций, определенных на ограниченном и замкнутом множестве. Во многом аналогичная теорема[17] известна и для функционалов, но, в то время как теорема Вейерштрасса легко применима для доказательства существования экстремумов многих конкретных функций из $R^n \to R^1$, удовлетворяющих естественным с практической точки зрения условиям, подобное утверждение не справедливо в случае применения упомянутой теоремы к функционалам, связанным с вариационными задачами. С одной стороны, причина этого заключается в том, что классы допустимых функций в наиболее часто встречающихся вариационных задачах не являются «замкнутыми»[18], а с другой стороны, для применения данной теоремы требуется выполнение специальных условий типа i_1).

в) То обстоятельство, что нет легко применяемого критерия, с помощью которого можно установить существование экстремума в случае вариационных задач, подчеркивает разницу между функциями и функционалами в вопросе о достаточных условиях существования экстремумов. Если заранее известно, что функция или функционал имеют экстремум, и если показать, что некоторому необходимому условию существования экстремума удовлетворяет только один элемент, то этот элемент обязательно будет экстремалью и необходимость в дальнейшем исследовании отпадает. Если же о существовании экстремума заранее ничего не известно, то в экстремальности элемента можно убедиться только лишь проверив, выполняется ли для него какой-либо достаточный критерий существования экстремума. Из этого следует, что роль достаточных условий экстремума для функционалов является более важной, чем для действительных функций нескольких переменных.

---

[17]Для тех, кому известны используемые ниже понятия, приведем эту теорему (ее также называют основной теоремой вариационного исчисления или теоремой Фреше—Тонелли): *если функционал, определенный на компактном подмножестве топологического пространства, полунепрерывен снизу, то у него существует минимум* [см., например, [44]).

[18]Например, в случае функционала, определенного в п. 2.3, ясно, что предел последовательности допустимых функций, сходящейся в норме C_1, не всегда является допустимой функцией.

6.2. Классы функций $C_1[x_1, x_2]$ и $D_1[x_1, x_2]$. Скругление углов

а) Задачи механики обычно требуют, чтобы допустимые функции принадлежали классу $C_1[x_1, x_2]$ или классу функций «лучше» этого. Соответствующее условие i_3) является естественным и с другой точки зрения: в этом случае интеграл $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))dx$ непрерывно зависит от y. В других, также практических, задачах (в частности, в уже упоминавшейся задаче о наименьшей площади поверхности вращения) можно рассматривать функции из более широкого класса $D_1[x_1, x_2]$ [условие i_2)]. Функции, соответствующие ломаным Эйлера, также принадлежат этому классу. Использование кусочно-непрерывно дифференцируемых функций является выгодным и с другой точки зрения: многие доказательства упрощаются, если, говоря геометрическим языком, при склеивании различных кривых не надо следить за совпадением касательных, т. е. получаемые кривые могут иметь так называемые *угловые точки* или *точки излома*.

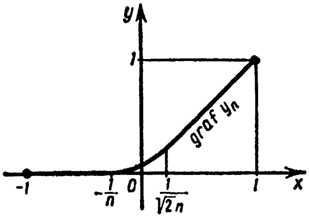

Рис. 5

Определение 1. *Пусть* $y \in D_1[x_1, x_2]$. *Говорят, что точка* $(\xi, y(\xi))$ $[\xi \in (x_1, x_2)]$ *кривой* $y = y(x)$ $(x \in$ $\in [x_1, x_2])$ *есть угловая точка, если* $y'(\xi - 0) \neq y'(\xi + 0)$.

Далее будем предполагать, что допустимые функции принадлежат $D_1[x_1, x_2]$. Такой выбор класса допустимых функций, кроме уже сказанного, оправдывается также приведенными ниже рассуждениями.

б) Задача. Пусть $T = R^2$, $f = y^2(1 - y')^2$, $P_1 =$ $= (-1, 0)$, $P_2 = (1, 1)$. Рассмотрим соответствующий функционал

$$I[y] = \int_{-1}^{1} y^2(x)\left(1 - y'(x)\right)^2 dx \; (y \in D_{I_2})$$

и докажем, что $\inf R_{I_2} = 0$.

Для этого рассмотрим последовательность функций $y_n \in D_{I_2}$ $(n \in N)$, приведенную на рис. 5, которую определим так, чтобы график ее на отрезке $[-1, -1/n]$ лежал на оси Ox, на отрезке $[1/(\sqrt{2n}), 1]$ лежал на прямой $y = x$, а на отрезке $[-1/n, 1/(\sqrt{2}n)]$ совпадал с дугой окружности, соединяющей два отрезка так, чтобы вся кривая имела непрерывную касательную.

Для функции y_n на отрезке $[-1, 1]$ и, в частности, на отрезке $[-1/n, 1/(\sqrt{2}n)]$ выполняются неравенства $|y_n(x)| \leqslant 1$, $|y_n'(x)| \leqslant 1$ $(n \in N)$.

Ясно, что

$$0 \leqq I[y_n] = \int\limits_{-1/n}^{1/(\sqrt{2}n)} y_n^2(x)\left(1 - y_n'(x)\right)^2 dx < \frac{2}{n}, \text{ т. е.}$$

$$\lim_{n\to\infty} I[y_n] = 0,$$

откуда в силу $R_{I_3} \subset [0, +\infty]$ следует, что $\inf R_{I_3} = 0$.

Легко доказать, что нет такой допустимой функции, на которой функционал I_3 принимал бы значение 0, так как I_3 принимает нулевое значение только на такой функции, график которой состоит из отрезков, лежащих на оси Ox, или параллельных прямой $y = x$. Никакой такой отрезок не может соединить точки P_1 и P_2. Кривая должна представлять собой ломаную, которая содержит не менее чем по одному отрезку каждого типа. Но в точках примыкания этих отрезков касательная претерпевает разрыв, т. е. соответствующая функция не является непрерывно дифференцируемой.

Однако если класс допустимых функций расширить, заменив условие i_3) условием i_2), то соответствующий функционал I_2 уже будет иметь экстремальное значение. Действительно, так как основная функция f неотрицательна и $D_{I_3} \subset D_{I_2}$, то $\inf R_{I_2} = 0$ и I_2 на функции

$$\bar{y}(x) \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} 0, \text{ если } x \in [-1, 0], \\ x, \text{ если } x \in [0, 1], \end{cases}$$

из D_{I_2}, очевидно, принимает значение 0.

в) К взаимному расположению областей значений функционалов I_2 и I_3 относится следующее утверждение.

Утверждение 1. *Справедливы равенства*

$$\inf R_{I_2} = \inf R_{I_3}, \ \sup R_{I_2} = \sup R_{I_3}.$$

Из этого утверждения следует, что при переходе от D_{I_3} к значительно более широкой области определения D_{I_2} область значений функционала может расшириться не более чем на два элемента — нижнюю и верхнюю точные грани. Утверждение легко доказывается, если использовать следующую лемму.

Лемма 1 (о скруглении углов). *Для любой функции* $y_0 \in D_{l_2}$ *и для любых чисел* $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ *можно найти такую функцию* $y \in D_{l_3}$, *для которой*

$$(6.1)\quad \rho^0(y, y_0) \overset{\mathrm{df}}{=} \max_{x \in [x_1, x_2]} |y(x) - y_0(x)| < \delta \text{ и}$$

$$(6.2)\quad |I[y] - I[y_0]| < \varepsilon.$$

Забегая вперед, покажем, что утверждение 1 действительно следует из леммы 1. Будем рассуждать от противного, т. е. предположим, например, для случая нижней грани, что $\inf R_{l_3} - \inf R_{l_2} = \omega > 0$. Отсюда следует, что существует такая функция $y_0 \in D_{l_2}$, для которой $I[y_0] < \inf R_{l_2} + \omega/2$. Согласно лемме, в которой следует положить $\varepsilon = \omega/2$, найдется такая функция $y \in D_{l_3}$, что $|I[y] - I[y_0]| < \omega/2$. Но это приводит к противоречию, так как отсюда следует, что $I_3[y] < \inf R_{l_3}$. Аналогично можно поступить и в случае верхней грани.

Доказательство леммы. Достаточно ограничиться случаем, когда у кривой $y = y_0(x)$ $(x \in [x_1, x_2])$ имеется одна угловая точка. При отсутствии угловых точек можно положить $y(x) = y_0(x)$, а в случае нескольких угловых точек применить приведенный ниже метод для каждой угловой точки в отдельности. Абсциссу угловой точки кривой $y = y_0(x)$ обозначим через ξ и предположим, например, что $d' - c' > 0$, где $d' = y_0'(\xi - 0)$, $c' = y_0'(\xi + 0)$. Функцию y, о которой говорится в лемме, построим так, чтобы она отличалась от y_0 только в малой окрестности точки ξ.

Рассмотрим в R^3 множество A, которое состоит из точек $(x, y_0(x), y_0'(x))$ $(x \in [x_1, x_2] \setminus \{\xi\})$ и из точек отрезка, соединяющего точки $(\xi, y_0(\xi), c')$ и $(\xi, y_0(\xi), d')$. Этот отрезок, очевидно, лежит на прямой, перпендикулярной плоскости первых двух координат и проходящей через точку $(\xi, y_0(\xi), 0)$. Итак, пусть

$$A \overset{\mathrm{df}}{=} \{(x, y, y') \in R^3 | x \in [x_1, x_2] \setminus \{\xi\}, y =$$
$$= y_0(x), y' = y_0'(x)\} \cup \{(\xi, y_0(\xi), \alpha) \in R^3 | \alpha \in [c', d']\}.$$

Пусть $\delta_1 \leqq \delta$ — такое положительное число, для которого $k \overset{\mathrm{df}}{=} \overline{k_{\delta_1}(A)} \subset Q$. Обозначим верхнюю грань $|f|$ на множестве k через m. Пусть, далее, η — такое положительное число, для которого выполняются соотношения

(6.3) $$\eta < \varepsilon/(4m);$$

$$[\xi - \eta,\ \xi + \eta] \subset (x_1, x_2).$$

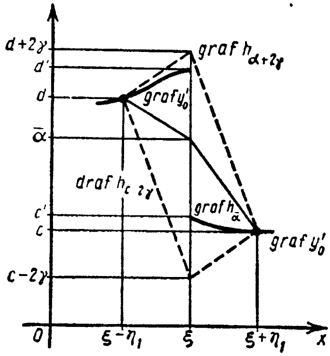

Рис. 6

Выберем теперь такую функцию y из $C_1[x_1, x_2]$, которая удовлетворяет условиям

(6.4) $$y(x) = y_0(x)$$

$$(x \in [x_1, \xi - \eta] \cup [\xi + \eta, x_2]),$$

(6.5) $$(x, y(x), y'(x)) \in$$

$$\in k_{\delta_1}(A) \quad (x \in [x_1, x_2]).$$

Очевидно, что существует бесконечно много функций, удовлетворяющих (6.4) и (6.5). Такую функцию можно построить, например, методом, приведенным в п. б): для этого заменим достаточно малую часть кривой, содержащую угловую точку, специальной кривой, состоящей из дуги окружности и, быть может, отрезка, так, чтобы получившаяся кривая имела непрерывную касательную.

Приведем другую схему сглаживания производной, имеющей разрыв первого рода в точке ξ. Основная идея здесь также имеет очень простое наглядное объяснение (рис. 6). Пусть γ — такое положительное число, для которого

(6.6) $$3\gamma < \min\{\delta_1/2,\ d' - c'\}.$$

Выберем положительное число $\eta_1 \leqq \eta$, удовлетворяющее неравенству

(6.7) $$\eta_1 < \min\left\{\frac{\delta_1}{8(d' - c' + 5\gamma)},\ \frac{\delta_1}{4}\right\},$$

таким малым, что если $x', x'' \in [\xi - \eta_1, \xi)$ или $x', x'' \in (\xi, \xi + \eta_1]$, то выполняются неравенства

(6.8) $$|y_0'(x') - y_0'(x'')| < \gamma \text{ и}$$

(6.9) $$|y_0(x') - y_0(x'')| < \delta_1/4.$$

Введем обозначения: $c = y_0'(\xi + \eta_1)$, $d = y_0'(\xi - \eta_1)$. Из (6.6,) и (6.8) следует, что

(6.10) $$d - c > \gamma.$$

Далее заметим, что, используя (6.8) для интеграла от y_0', можно получить следующие оценки:

$$(6.11)\qquad (c+d-2\gamma)\,\eta_1 \leqq \int\limits_{\xi-\eta_1}^{\xi+\eta_1} y_0'(x)\,dx \leqq (c+d+2\gamma)\,\eta_1.$$

Определим теперь для любого $\alpha \in [c-2\gamma,\ d+2\gamma]$ непрерывную функцию h_α, линейную на каждом из интервалов $(\xi-\eta_1,\ \xi)$ и $(\xi,\ \xi+\eta_1)$ и удовлетворяющую условиям

$$(6.12)\qquad h_\alpha(\xi-\eta_1)=d,\quad h_\alpha(\xi)=\alpha,\quad h_\alpha(\xi+\eta_1)=c.$$

Интеграл от функции h_α обозначим через $t(\alpha)$:

$$t(\alpha)=\int\limits_{\xi-\eta_1}^{\xi+\eta_1} h_\alpha(x)\,dx=\left(\frac{c+d}{2}+\alpha\right)\eta_1\quad (\alpha \in [c-2\gamma,\ d+2\gamma]).$$

Отсюда ясно, что функция $t(\alpha)$ непрерывна по $\alpha \in [c-2\gamma,\ d+2\gamma]$ т. е. $t \in C[c-2\gamma,\ d+2\gamma]$. Используя неравенство (6.10), для значений функции t, принимаемых ею в крайних точках области определения, получаем следующие оценки:

$$t(c-2\gamma)=\left(\frac{c+d}{2}+c-2\gamma\right)\eta_1<(c+d-2\gamma)\,\eta_1,$$

$$t(d+2\gamma)=\left(\frac{c+d}{2}+d+2\gamma\right)\eta_1>(c+d+2\gamma)\,\eta_1.$$

Сопоставляя эти неравенства с (6.11), получаем

$$t(c-2\gamma)<\int\limits_{\xi-\eta_1}^{\xi+\eta_1} y_0'(x)\,dx<t(d+2\gamma),$$

откуда в силу непрерывности t следует, что существует такое $\overline{\alpha} \in (c-2\gamma,\ d+2\gamma)$, для которого

$$(6.13)\qquad t(\overline{\alpha})=\int\limits_{\xi-\eta_1}^{\xi+\eta_1} h_{\overline{\alpha}}(x)\,dx=\int\limits_{\xi-\eta_1}^{\xi+\eta_1} y_0'(x)\,dx.$$

Определим теперь y' следующим образом:

$$(6.14)\qquad y'(x)=\begin{cases} y_0'(x), & \text{если } x \in [x_1,\ \xi-\eta_1] \cup [\xi+\eta_1,\ x_2],\\ h_{\overline{\alpha}}(x), & \text{если } x \in (\xi-\eta_1,\ \xi+\eta_1).\end{cases}$$

Это равенство определяет функцию y с точностью до произвольной постоянной, которую выберем так, чтобы выполнялось равенство $y(x_1)=y_1$, т. е.

$$y(x)=y_1+\int\limits_{x_1}^{x} y'(t)\,dt\quad (x \in [x_1,\ x_2]).$$

Из определения функции y' и из (6.12) следует, что $y' \in C[x_1,\ x_2]$; следовательно, $y \in C_1[x_1,\ x_2]$.

Покажем теперь, что функция y удовлетворяет условию (6.4). На отрезке $[x_1, \xi - \eta_1]$ равенство (6.4), очевидно, выполняется Заметим теперь, что так как $y(\xi - \eta_1) = y_0(\xi - \eta_1)$, то на основании равенства (6.13) $y(\xi + \eta_1) = y_0(\xi + \eta_1)$. Отсюда, учитывая, что производные на отрезке $[\xi + \eta_1, x_2]$ совпадают, имеем $y(x) = y_0(x)$ $(x \in [\xi + \eta_1, x_2])$.

Осталось показать, что функция y удовлетворяет условию (6.5). Для этого в силу (6.4) достаточно ограничиться отрезком $[\xi - \eta_1, \xi + \eta_1]$. Из определения функции h_α, а также из (6.8) и (6.14) следует, что для любого значения $x \in [\xi - \eta_1, \xi + \eta_1] \setminus \{\xi\}$ выполняется неравенство

$$(6.15) \qquad |y'(x) + y_0'(x)| < d - c + 3\gamma < d' - c' + 5\gamma,$$

из которого с учетом (6.7) получаем неравенство

$$(6.16) \qquad |y(x) - y_0(x)| = \left| \int_{\xi - \eta_1}^{x} (y'(t) - y_0'(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq 2\eta_1 (d' - c' + 5\gamma) < \delta_1/4 \quad (x \in [\xi - \eta_1, \xi + \eta_1]).$$

Фиксируем теперь произвольную точку x отрезка $[\xi - \eta_1, \xi + \eta_1]$ и полагаем

$$\beta(x) = \begin{cases} y'(x), & \text{если } y'(x) \in (c', d'), \\ c', & \text{если } y'(x) \leq c', \\ d', & \text{если } y'(x) \geq d'. \end{cases}$$

Из определения функции y' и из (6.6) следует, что во всех трех случаях выполняется неравенство

$$|y'(x) - \beta(x)| < \gamma < \delta_1/4 \qquad (x \in [\xi - \eta_1, \xi + \eta_1]).$$

На основании этого неравенства и (6.16) имеем

$$|(x, y(x), y'(x)) - (x, y_0(x), \beta(x))| < \delta_1/2.$$

С другой стороны, из (6.7) и (6.9) получаем, что на отрезке

$[\xi - \eta_1, \xi + \eta_1]$

$$|(x, y_0(x), \beta(x)) - (\xi, y_0(\xi), \beta(x))| \leq |x - \xi| +$$
$$+ |y_0(x) - y_0(\xi)| < \delta_1/4 + \delta_1/4 = \delta_1/2.$$

Так как $(\xi, y_0(\xi), \beta(x)) \in A$, то последнее неравенство означает, что $(x, y(x)\ y'(x)) \in k_{\delta_1}(A)$ $(x \in [\xi - \eta_1, \xi + \eta_1])$. Таким образом, выполнение условия (6.5) доказано.

В силу условий (6.4) и (6.5), $y \in D_{l_3}$ и так как и $\delta_1 \leq \delta$, то условие (6.5) влечет за собой выполнение неравенства (6.1). Таким образом, осталось проверить только выполнение неравенства (6.2.) Из (6.3) и (6.5), из определения m и из неравенства $\eta_1 \leqq \eta$ следует, что

$$|I[y]-I[y_0]|=\left|\int_{\xi-\eta_1}^{\xi+\eta_1}\{f(x, y(x), y^{\bullet}(x)-f(x, y_0(x),\right.$$

$$\left. y_0^{\bullet}(x))\}dx\right| < 2m \cdot 2\eta_1 < \varepsilon.$$

Тем самым лемма 1 доказана.

Замечания. 1. Различие между областями значений функционалов, приведенных в примере п. б), заключается лишь в том, что область значений I_2 содержит свою точную нижнюю грань, а область значения I_3 — нет: $0 \notin R_{I_3}$, $0 \in R_{I_2}$; именно это обеспечивает существование экстремального элемента в D_{I_2}.

2. Применение леммы 1 позволяет упростить доказательство равенства $\inf R_{I_3} = 0$ в задаче п. б), так как оно следует из равенства $I[\bar{y}] = 0$, справедливого для функции y, и из того, что f неотрицательна.

3. Обозначим через η скачок производной функции $y_0 \in D_{I_2} \setminus D_{I_3}$ в какой-нибудь точке $\xi: |y_0^{\bullet}(\xi+0) - y_0^{\bullet}(\xi-0)| = \eta > 0$. Пусть теперь $\varepsilon < \eta/2$ — произвольное положительное число. Из определения нормы C_1 следует (см. п. 4.1), что нет такой функции $y \in D_{I_3}$, для которой выполнялась бы оценка $\|y - y_0\|^1 < \varepsilon$. Это обстоятельство принято выражать так: D_{I_3} не является плотным в D_{I_2} относительно нормы C_1. В соответствии с этой терминологией неравенство (6.1) из леммы 1 выражает то, что D_{I_3} всюду плотно в D_{I_2} относительно нормы C, так как для любого $\delta > 0$ и для любой функции $y_0 \in D_{I_2}$ существует такой элемент $y \in D_{I_3}$, для которого

$$\rho^0(y, y_0) = \|y - y_0\|^0 = \max_{x \in [x_1, x_2]} |y(x) - y_0(x)| < \delta.$$

6.3. Классы $C_2[x_1, x_2]$ и $A[x_1, x_2]$

Условие i_4): $y \in C_2[x_1, x_2]$ приобретает особое значение, так как известный способ нахождения экстремальных функций применим только тогда, когда эти функции ~~два~~ раза непрерывно дифференцируемы. Но в интеграле $\{I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)dx\}$, участвующем в определении функционалов, имеются только первые производные допустимых функций, поэтому могут показаться необоснованными дополнительные требования гладкости, накладываемые условием i_4) или каким-либо более сильным условием, например i_5).

Для функционалов, определенных на этих более узких классах допустимых функций, справедливо следующее, ради общности сразу сформулированное для D_{I_5}, утверждение, которое аналогично утверждению 1.

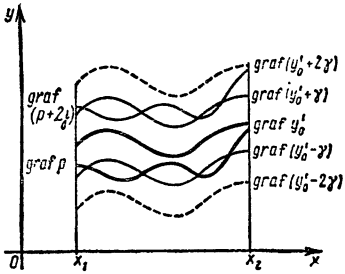

Рис. 7

Утверждение 2. *Справедливы равенства*

$$\inf R_{I_3} = \inf R_{I_5},$$
$$\sup R_{I_3} = \sup R_{I_5}.$$

Вначале докажем две леммы.

Лемма 2. *Класс функций D_{I_5} является всюду плотным в D_{I_3} относительно нормы C_1, т. е. для любой функции $y_0 \in D_{I_3}$ и для любого числа $\delta > 0$ можно найти такую функцию $y \in D_{I_5}$, для которой*

$$(6.17) \qquad \|y - y_0\|^1 < \delta.$$

Доказательство. Выберем положительное число $\delta_1 \leqslant \delta$ настолько малым, чтобы выполнялось соотношение

$$\bigcup_{x \in [x_1, x_2]} k_{\delta_1}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right) \subset Q,$$

и положим $\gamma = \min\left\{\frac{\delta_1}{4}, \frac{\delta_1}{4(x_2 - x_1)}\right\}$. По первой теореме Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций многочленами для функции $(y_0' - \gamma) \in C[x_1, x_2]$ существует (рис. 7) такой полином p ($p \in A[x_1, x_2]$), что

$$(6.18) \qquad |y_0'(x) - \gamma - p(x)| < \gamma \quad (x \in [x_1, x_2]).$$

Определим теперь следующее однопараметрическое семейство полиномов p_ω:

$$p_\omega(x) \overset{\mathrm{df}}{=} p(x) + \omega \quad (\omega \in [0, 2\gamma];\ x \in [x_1\ x_2]).$$

Пусть t — интеграл от функций, принадлежащих этому семейству:

$$t(\omega) = \int_{x_1}^{x_2} p_\omega(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx + \omega(x_2 - x_1) \quad (\omega \in [0, 2\gamma]).$$

Из неравенства (6.18) и из определения t имеем:

$$(6.19_1)\qquad t(0)=\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx<\int_{x_1}^{x_2} y_0'(x)\,dx,$$

$$(6.19_2)\qquad t(2\gamma)=\int_{x_1}^{x_2}\{p(x)+2\gamma\}\,dx>\int_{x_1}^{x_2} y_0'(x)\,dx.$$

Так как $t\in C[0,2\gamma]$, то из неравенств (6.19) по теореме Больцано следует, что существует такое число $\overline{\omega}\in(0,2\gamma)$, для которого

$$(6.20)\qquad t(\overline{\omega})=\int_{x_1}^{x_2}\{p(x)+\overline{\omega}\}\,dx=\int_{x_1}^{x_2} y_0'(x)\,dx.$$

Определим теперь полином y следующим равенством:

$$y(x)=y_1+\int_{x_1}^{x}[p(\xi)+\overline{\omega}]\,d\xi.$$

Очевидно, $y'=p+\overline{\omega}$ принадлежит классу $A[x_1, x_2]$ и, так как $\overline{\omega}\in(0,2\gamma)$, из (6.18) имеем

$$(6.21)\qquad |y'(x)-y_0'(x)|<2\gamma<\delta_1/2,\ x\in[x_1, x_2].$$

Далее, используя равенство (6.20), получаем

$$(6.22)\qquad y(x_2)=y_1+\int_{x_1}^{x_2} y'(x)\,dx=y_1+\int_{x_1}^{x_2} y_0'(x)\,dx=y_2.$$

Из определения γ и из (6.21) следует, что для всех x из отрезка $[x_1, x_2]$ выполняется неравенство

$$|y(x)-y_0(x)|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\{y'(t)-y_0'(t)\}\,dt\right|\leqq 2\gamma(x_2-x_1)<\frac{\delta_1}{2}.$$

Из этого неравенства и из (6.21) получаем

$$\|y-y_0\|^1=\max_{x\in[x_1, x_2]}|y(x)-y_0(x)|+\max_{x\in[x_1, x_2]}|y'(x)-$$
$$-y_0'(x)|<\delta_1\leqslant\delta.$$

Таким образом, y принадлежит $A[x_1, x_2]$, удовлетворяет в силу (6.22) краевым условиям $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$ и лежит в δ_1-окрестности элемента y_0. Поэтому $y\in D_{I_0}$ и удовлетворяет всем условиям леммы. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Функционал I_3 является непрерывным относительно нормы C_1 в каждой точке области определения, т. е. для произвольной фиксированной функции $y_0 \in D_{I_3}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $y \in D_{I_3}$ и $\|y - y_0\|^1 < \delta$, то $|I[y] - I[y_0]| < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть ρ — положительное число и пусть

$$k \overset{\mathrm{df}}{=} \bigcup_{x \in [x_1, x_2]} k_\rho\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right).$$

Выберем ρ настолько малым, чтобы замыкание $\bar{k}$ множества k входило в Q: $\bar{k} \subset Q$.

Основная функция f равномерно непрерывна на ограниченном и замкнутом множестве $\bar{k}$; иначе говоря, для положительного числа $\varepsilon/(x_2 - x_1)$ можно найти такое положительное число δ ($\leq \rho$), что если $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}')$,

$$\left(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}'\right) \in \bar{k} \text{ и } \left|(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') - \left(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}'\right)\right| < \delta, \text{ то}$$

$$(6.23) \qquad \left|f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') - f\left(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}'\right)\right| < \frac{\varepsilon}{x_2 - x_1}.$$

Пусть теперь $y \in D_{I_3}$ — произвольная функция, удовлетворяющая неравенству $\|y - y_0\|^1 < \delta$. Тогда, по определению нормы C_1, $|(x, y(x), y'(x)) - (x, y_0(x), y_0'(x))| < \delta$ и поэтому в силу (6.23)

$$|I[y] - I[y_0]| = \left|\int_{x_1}^{x_2} \{f(x, y(x), y'(x)) - \right.$$

$$\left. - f(x, y_0(x), y_0'(x))\}\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = \varepsilon.$$

Таким образом, лемма 3 доказана.

Вернемся теперь к доказательству утверждения 2, которое можно провести аналогично доказательству утверждения 1. Очевидно, достаточно ограничиться, например, нижними гранями. Доказательство снова проведем от противного, т. е. предположим, что $\inf R_{I_3} - \inf R_{I_2} = \omega > 0$. Тогда существует такая функция $y_0 \in D_{I_3}$, для которой $I[y_0] < \inf R_{I_3} + \omega/2$. На основании лемм 2 и 3 (в лемме 3 следует взять $\varepsilon = \omega/2$) существует такая функция $y \in D_{I_2}$, что $|I[y] - I[y_0]| < \omega/2$. Полученное неравенство приводит к противоречию, так как в этом случае выполнялось бы неравенство $I[y] < \inf R_{I_5}$. Следовательно, утверждение 2 доказано.

Следствия: 1. Из утверждений 1 и 2 и из определений функционалов $I_2, \ldots, I_5$ следует, что

$$(6.24)\quad \inf R_{I_j} = \inf R_{I_l};\ \sup R_{I_j} = \sup R_{I_l}\ (2 \leqslant j < l \leqslant 5).$$

2. Из леммы 2 в силу включения $D_{I_5} \subset D_{I_4}$ следует, что D_{I_4} всюду плотно в D_{I_3} относительно нормы C_1.

3. Из леммы 3 в силу включения $D_{I_4} \subset D_{I_3}$, $D_{I_5} \subset D_{I_3}$ следует, что функционалы I_4 и I_5 являются непрерывными относительно нормы C_1 в каждой точке области определения.

4. Приведенные результаты можно сформулировать для произвольного функционала I^*, который является расширением I_5 и сужением I_2. Пусть, например, $m > 2$ — натуральное число. Если вместо условия i), имеющего место в определении функционала I, поставить условие $y \in C_m[x_1, x_2]$, то область значений функционала I^*, определенного таким образом, будет содержаться в R_{I_4} и содержать R_{I_5}.

Замечания: 1. Если $y \in D_{I_j}$ ($j = 2, 3, 4, 5$) — экстремальная функция функционала I_j и $y \in C_{j+k}[x_1, x_2]$, то y является экстремалью и функционала I_{j+k} (здесь $1 < j + k \leqq 5$). Наоборот, если y — экстремаль функционала I_j, то по (6.24) y также экстремаль и для I_{j-l} (здесь $5 \geqq j - l > 1$).

Таким образом, какие бы две из исследуемых областей определения D_{I_j} ($j = 2, \ldots, 5$) мы ни взяли, любая экстремальная функция из более узкого допустимого класса будет экстремальной функцией и в более широком классе. Отсюда следует, что все два раза непрерывно дифференцируемые экстремали функционалов I_2, I_3, I_4 совпадают, т. е. если наша цель—отыскание два раза непрерывно дифференцируемых экстремалей, то не имеет значения, какие из условий i_3), i_4) или i_5) использовать: в любом случае мы придем к одним и тем же экстремальным функциям. Эти функции должны также удовлетворять, если дополнительно выполняется и условие $f \in C_2(Q)$, д. у. Э—Л.

2. Из сказанного следует, что любая дуга какой-нибудь экстремальной кривой также является экстремалью. Точнее, предположим, что функционал I достигает, например, минимума на допустимой функции y_0 [через I обозначим функционал, удовлетворяющий какому-либо одному из

условий $i_2)$—$i_5)$]. Пусть $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in (x_1, x_2)$, $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$. Рассмотрим функционал $\bar{I}$, который отличается от предыдущего тем, что вместо x_1 и x_2 взяты $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$. Тогда функция $\bar{y}_0$, определенная на отрезке $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ и совпадающая на этом отрезке с функцией y_0, является экстремалью функционала $\bar{I}$, определяющие данные которого равны $(T, f, \bar{P}_1 \overset{\text{df}}{=} (\bar{x}_1, y_0(\bar{x}_1))$, $P_2 \overset{\text{df}}{=} (\bar{x}_2, y_0(\bar{x}_2)))$. Действительно, предположим, что существует такая функция $y^* \in D_{\bar{I}}$, для которой выполнялось бы неравенство $\bar{I}[y^*] < \bar{I}[\bar{y}_0]$. Из этого следует, что для функции

$$(6.25) \qquad y(x) = \begin{cases} y_0(x), & \text{если } x \in [x_1, \bar{x}_1] \cup [\bar{x}_2, x_2], \\ y^*(x), & \text{если } x \in [\bar{x}_1, \bar{x}_2], \end{cases}$$

из D_{I_2} выполнялось бы неравенство

$$I_2[y_0] - I_2[y] = \bar{I}[\bar{y}_0] - \bar{I}[y^*] > 0,$$

т. е. $I_2[y] < \inf R_{I_2}$ $(= \inf R_{I_j}, \; j = 3, 4, 5)$, которое находится в противоречии с определением области значений функционала.

Проведенные рассуждения говорят о том, что экстремальность допустимой функции является не только глобальным (относящимся ко всей кривой), но и локальным (относящимся к произвольной дуге кривой) свойством.

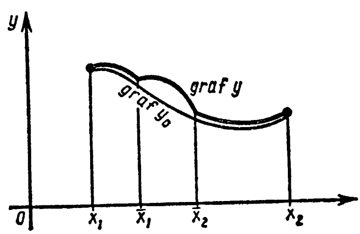

Рис. 8

Обратим внимание на то, что в приведенном простом рассуждении использовалась кусочно-непрерывная дифференцируемость допустимых функций из D_{I_2}, так как у графика функции (6.25) точки $(\bar{x}_1, y(\bar{x}_1))$, $(\bar{x}_2, y(\bar{x}_2))$ могут быть угловыми (рис. 8). Итак, необходимые условия экстремума можно рассматривать как условия локального характера. Для того чтобы было легче их использовать, можно ввести понятие «вариации в точке» (см. [11, 16]).

3. В п. 4.3 было показано, что при условии $f \in C_2(Q)$ функционал I_3 дифференцируем и, стало быть, является непрерывным; т. е. при данном условии утверждение 2 сле-

дует из результатов этого пункта. При доказательстве утверждения 2 мы воспользовались только непрерывностью основной функции f.

Заключение

Подведем итог сказанному: в случае простейшей вариационной задачи при выборе класса допустимых функции мы руководствуемся не просто формальным требованием существования экстремума, а прежде всего физической или геометрической природой наиболее важных практических задач. Тот факт, что определяющие данные T, f, P_1, P_2 берутся из тех же соображений, не позволяет делать больших предположений о дифференцируемости и непрерывности допустимых функций. Для дальнейших исследований выберем класс функций D_{I_2}, удовлетворяющих условию i_2): $y \in D_1[x_1, x_2]$, так как:

а) из классов допустимых функций, о которых шла речь, он является самым широким (см. также пример п. 2);

б) экстремальные функции, принадлежащие любому другому классу допустимых функций D_{I^*}, заключенному между D_{I_2} и D_{I_5} $(D_{I_2} \subset D_{I^*} \subset D_{I_5})$, являются также экстремалями и в классе функции D_{I_2};

в) из данных классов допустимых функций удобнее всего оперировать функциями из класса D_{I_2}[19].

З а д а ч а. Пусть I — функционал, определяющие данные которого следующие: $T = R^2$, $f = p^2(x)y'^2$, $P_1 = (x_1, y_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2)$, где $p \in C_2(R^1)$ и $0 \notin R_p$.

а) Докажите, что $\inf R_I = \dfrac{(y_2 - y_1)^2}{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{p^2(x)}}$.

б) Покажите, что при произвольных $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ $(x_1 < x_2)$ краевая задача

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0, \; y(x_1) = y_1, \; y(x_2) = y_2$$

решается однозначно и решение является минимальной функцией соответствующего функционала I.

---

[19] Под этим понимаем то, что многие доказательства упрощаются, если предположить, что функции принадлежат $D_1[x_1, x_2]$, а не какому-то более узкому из данных классов допустимых функций.

в) Исследуйте вариационную проблему в том случае, когда условие $p \in C_2(R^1)$ заменяется условием $p \in C(R^1)$.

Указание. При доказательстве равенства п. а) используйте неравенство Коши—Буняковского для интегралов.

§ 7. НЕКОТОРЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В этом параграфе, заключающем вводную часть, перечислим важнейшие проблемы классического вариационного исчисления. Вначале рассмотрим понятие локального экстремума, играющего важную роль в классической теории, а затем обсудим характер необходимых и достаточных условий. После этого, не претендуя на полноту изложения, мы рассмотрим важнейшие типы проблем, связывая многие из них с вариационными принципами физики. Наконец, приведем краткий обзор методов, использованных в оставшейся части книги.

7.1. Сильный и слабый локальный экстремум

В проведенных исследованиях под экстремумом мы до сих пор понимали абсолютный экстремум. Однако для простейшей вариационной задачи условие $\delta I \equiv 0$, которому должны удовлетворять экстремальные функции, можно получить (как это было отмечено в § 4) и в том случае, когда функционал рассматривается не на всем классе допустимых функции, а только лишь в некоторой произвольно выбранной окрестности экстремальной функции. Далее напомним, что определение экстремумов функций из $R^n \to R^1$ основано на понятии *локального экстремума.* Такую же важную роль локальные экстремумы играют и в вариационном исчислении.

Определение локального экстремума для функционалов аналогично определению локального экстремума для функций из $R^n \to R^1$: рассматриваются только те элементы из области определения, которые находятся достаточно близко к какому-то данному элементу, или, другими словами, попадают в какую-то окрестность данного элемента. Область определения исследуемых функционалов можно по-разному превратить в метрическое пространство и соответственно этому локальный экстремум также можно определить по-разному.

Определение 1. *Для произвольного* $n \in N \cup \{0\}$ *под расстоянием порядка* n *между функциями* $y_0, y_1 \in (R^1 \to R^1) \cap D_n[x_1, x_2]$ *мы понимаем число*[20]

$$\rho^n(y_0, y_1) \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=0}^{n} \sup_{x \in D_{y_0^{(i)}} \cap D_{y_1^{(i)}}} |y_0^{(i)}(x) - y_1^{(i)}(x)|. \tag{7.1}$$

Такое определение расстояния, очевидно, эквивалентно следующему: под нормой в D_n функции $y \in D_n[x_1, x_2]$ мы понимаем число $||y||^n \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=0}^{n} \sup_{x \in D_{y^{(i)}}} |y^{(i)}(x)|$, а под расстоянием порядка n между функциями $y_0, y_1 \in D_n[x_1, x_2]$ — число $||y - y_0||^n$. Расстояния, определенные в § 4, согласуются с данным определением.

С помощью простых вычислений можно убедиться, что $D_n[x_1, x_2]$ образует метрическое пространство относительно расстояния порядка n.

В дальнейшем расстояние 0-го порядка будем называть просто расстоянием и обозначать его $\rho(y_0, y_1)$. Из (7.1) ясно, что

$$\rho^n(y_0, y_1) = \rho(y_0, y_1) + \rho(y_0', y_1') + \ldots + \rho(y_0^{(n)}, y_1^{(n)}). \tag{7.2}$$

После введения понятия расстояния окрестность функции определяется обычным образом.

Определение 2. *Для произвольного* $n \in N \cup \{0\}$ *и* $\rho > 0$ *под окрестностью функции* $y_0 \in (R^1 \to R^1) \cap D_n[x_1, x_2]$ *радиуса* ρ *порядка* n *понимаем класс функций*

$$K_\rho^n(y_0) \overset{\text{df}}{=} \{y \in R^1 \to R^1 \cap D_n[x_1, x_2] \mid \rho^n(y, y_0) < \rho\}.$$

И в этом случае окрестность порядка 0 часто будем называть просто окрестностью и обозначать $K_\rho(y_0)$. Очевидно, что

$$K_\rho^0(y_0) \supset K_\rho^1(y_0) \supset \ldots \supset K_\rho^n(y_0). \tag{7.3}$$

В случае когда радиус данной окрестности не имеет существенного значения (например, если важно только существование окрестности с каким-то свойством), обозначение радиуса будем опускать и писать $K^n(y_0)$.

---

[20] В случае $i = 0, \ldots, n - 1$, очевидно, $D_{y^{(i)}} = [x_1, x_2]$; тогда вместо точной верхней грани можно взять максимум ($y^{(0)} \overset{\text{df}}{=} y$)

В простейшей вариационной задаче особую роль играют окрестности нулевого и первого порядка, так как значение интеграла $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))dx$ определяется функциями y и y'.

В приводимых ниже определениях будет дано понятие локального экстремума, соответствующего этим двум типам окрестностей, для функционала $I = I_2$, определенного в § 6. Напомним, что I_2 есть такое расширение функционала, определенного в § 2, у которого условие $i)$ $y \in C_1[x_1, x_2]$ заменено условием $i_2)$ $y \in D_1[x_1, x_2]$.

Определение 3. *Говорят, что функционал I достигает сильного локального минимума на функции $y_0 \in D_I$, если у y_0 существует такая окрестность $K(y_0)$, что для любой функции $y \in K(y_0) \cap D_I$ выполняется неравенство*

$$I[y] \geqq I[y_0].$$

Определение 4. *Говорят, что функционал I достигает слабого локального минимума на функции $y_0 \in D_I$, если у y_0 существует такая окрестность первого порядка $K^1(y_0)$, что для любой функции $y \in K^1(y_0) \cap D_I$ выполняется неравенство*

$$I[y] \geqq I[y_0].$$

Сильный локальный и слабый локальный максимумы определяются обратными неравенствами.

В случае когда функционал I достигает на функции y_0 сильного (слабого) локального минимума, говорят также, что *функция y_0 доставляет функционалу I сильный (слабый) локальный минимум.*

Из приведенных определений ясно, что абсолютная экстремаль является локальной сильной, а локальная сильная экстремаль в то же время является и локальной слабой экстремалью. Обратное, вообще говоря, неверно, что иллюстрируют приведенные ниже примеры.

Пример 1. Рассмотрим функционал I, определенный следующими данными: $T = R^2$, $f(x, y, y') = y'^2(1 - y^2)$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$.

а) Здесь $\inf R_I = -\infty$. Это означает, что *функционал I не имеет точки абсолютного минимума.* Для доказательства равенства $\inf R_I = -\infty$ рассмотрим значения I, принимаемые на функциях

$$(7.4)\quad y_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}\,x, & \text{если } x \in [0, 1/2], \\ -\sqrt{n}\,(x-1), & \text{если } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Эти значения соответственно равны

$$I[y_n] = \int_0^1 y_n'^2(x)\left(1 - y_n^2(x)\right)dx = 2n\int_0^{1/2} 1 - nx^2)\,dx = -$$

$$-\frac{1}{12}n^2 + n;$$

следовательно, $I[y_n] \to -\infty$ при $n \to \infty$.

б) *Функционал I достигает на функции $y_0 \in D_I$, тождественно равной нулю ($y_0(x) = 0$, $x \in [0, 1]$), сильного локального минимума.* Действительно, пусть $0 < \rho \leqq 1$. Тогда, учитывая, что $I[y_0] = 0$, для любой функции $y \in D_I \cap$ $\cap K_\rho(y_0)$ получаем неравенство

$$I[y] - I[y_0] = I[y] = \int_0^1 y'^2(x)\left(1 - y^2(x)\right)dx \geqq 0.$$

Пример 2. Рассмотрим функционал I, определенный следующими данными: $T = R^2$, $f(x, y, y') = y^2(1 - y'^2)$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1,0)$.

а) *Функционал I достигает на функции $y_0 \in D_I$, тождественно равной нулю ($y_0(x) = 0$, $x \in [0, 1]$), слабого локального минимума.* Зафиксируем число ρ из интервала $0 < \rho < 1$ и возьмем произвольную функцию $y \in D_I \cap$ $\cap K_\rho^1(y_0)$. Учитывая, что $I[y_0] = 0$, для этой функции получаем неравенство

$$I[y] - I[y_0] = \quad [y] = \int_0^1 y^2(x)\left(1 - y'^2(x)\right)dx \geqq 0,$$

которое и означает именно то, что y_0 доставляет слабый локальный минимум.

б) *Функционал I на y_0 не достигает сильного локального минимума.* Предположив противное, мы получили бы, что существует такое $\bar{\rho} > 0$, что неравенство

$$(7.5)\qquad I[y] \geqq 0$$

выполняется для любой функции $y \in D_I \cap K_\rho(y_0)$. Однако это предположение приводит к противоречию. Действительно, пусть $0 < h < \min\{\bar{\rho}, 1\}$ и пусть функция $\bar{y} \in D_I \cap K_{\bar{\rho}}(y_0)$ определена следующим образом:

$$
(7.6) \qquad \bar{y}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} 2x, & \text{если } x \in [0, h/2], \\ -2(x-h), & \text{если } x \in [h/2, h], \\ 0, & \text{если } x \in [h, 1]. \end{cases}
$$

Тогда

$$
(7.7) \quad I[\bar{y}] = \int_0^1 \bar{y}^2(x)\left(1-\bar{y}'^2(x)\right)dx = -3\int_0^h \bar{y}^2(x)\,dx < 0.
$$

Противоречивость неравенств (7.5) и (7.7) означает, что y_0 не доставляет сильного локального минимума функционалу I.

В обозначениях § 6 приведенные примеры относятся к функционалу I_2; графики функций (7.4) и (7.6) действительно имеют угловые точки. Однако это не является существенным, так как из результатов, полученных в § 6, следует, что все сказанное в примерах 1 и 2 для функционала I_2 остается справедливым и для функционалов I_3, I_4, I_5. Именно: справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *В обозначениях* § 6 *для произвольных* $\rho > 0$ *и* $y_0 \in D_{I_5}$ *выполняются следующие соотношения*:

$$
(7.8) \qquad \inf I[K_\rho(y_0) \cap D_{I_5}] = \inf I[K_\rho(y_0) \cap D_{I_2}],
$$

$$
7.9) \qquad \inf I[K^1_{3\rho}(y_0) \cap D_{I_5}] \leqq \inf I[K^1_\rho(y_0) \cap D_{I_2}].
$$

Доказательство. а) Сначала докажем равенство (7.8). Так как $D_{I_5} \subset D_{I_2}$, получаем

$$
\omega \overset{\mathrm{df}}{=} \inf I[K_\rho(y_0) \cap D_{I_5}] - \inf I[K_\rho(y_0) \cap D_{I_2}] \geqq 0.
$$

Требуется доказать, что $\omega = 0$. Допустим, что $\omega > 0$ и положим $\varepsilon = \omega/3$. В силу сделанного допущения сущест вует такая функция $y_1 \in K_\rho(y_0) \cap D_{I_2}$, для которой

$$
(7.10) \qquad I[y_1] < \inf I[K_\rho(y_0) \cap D_{I_5}] - 2\varepsilon.
$$

Выберем теперь положительное число δ так, чтобы выполнялось неравенство $2\delta < \rho < \rho(y_1, y_0)$. По лемме 1 § 6 существует такой элемент $y_2 \in K_\delta(y_1) \cap D_{I_3}$, для которого

$$
(7.11) \qquad |I[y_1] - I[y_2]| < \varepsilon,
$$

а лемма 3 § 6 обеспечивает существование такой функции $y \in K_\delta(y_2) \cap D_{I_s}$, для которой

(7.12) $$|I[y_2] - I[y]| < \varepsilon.$$

Так как $\rho(y, y_0) \leq \rho(y, y_2) + \rho(y_2, y_1) + \rho(y_1, y_0) < < \delta + \delta + \rho(y_1, y_0) < \rho$, то $y \in K_\rho(y_0) \cap D_{I_s}$. Заметим теперь, что из неравенств (7.10)—(7.12) следует неравенство

$$I[y] < \inf I[K_\rho(y_0) \cap D_{I_s}],$$

которое, очевидно, противоречит условию $y \in K_\rho(y_0) \cap \cap D_{I_s}$. Справедливость равенства (7.8) доказана.

б) Доказательство неравенства (7.9) проведем также от противного. Предположим, что

$$\omega \overset{\mathrm{df}}{=} \inf I[K^1_{3\rho}(y_0) \cap D_{I_s}] - \inf I[K^1_\rho(y_0) \cap D_{I_s}] > 0,$$

и обозначим $\varepsilon = \omega/3$. В силу последнего неравенства существует такая функция $y_1 \in K^1_\rho(y_0) \cap D_{I_s}$, для которой

(7.13) $$I[y_1] < \inf I[K^1_{3\rho}(y_0) \cap D_{I_s}] - 2\varepsilon.$$

Так как $y_1 \in K^1_\rho(y_0)$, то очевидно, что

$$0 \leq \max_{x \in (x_1, x_2)} |y_1'(x-0) - y_1'(x+0)| \overset{\mathrm{df}}{=} \rho_1 < 2\rho.$$

Выберем теперь положительное число δ так, чтобы выполнялось неравенство $3\delta < 2\rho - \rho_1$. Тогда по лемме 1 § 6 существует такая функция $y_2 \in K_\delta(y_1) \cap D_{I_s}$, для которой

(7.14) $$|I[y_1] - I[y_2]| < \varepsilon.$$

Но из неравенства (6.15) [если применить его к функциям $y = y_2$, $y_0 = y_1$ и при этом учесть, что $|d' - c'| \leq \rho_1$ и что постоянную γ из неравенств (6.15), очевидно, можно выбрать удовлетворяющей условию $5\gamma < \delta$] следует, что $y_2' \in \in K_{\rho_1+\delta}(y_1')$ и поэтому $y_2 \in K_{\rho_1+2\delta}(y_1)$.

Применим теперь лемму 3 § 6. Согласно этой лемме, существует такая функция $y_3 \in K^1_\delta(y_2) \cap D_{I_s}$, для которой

(7.15) $$|I[y_2] - I[y_3]| < \varepsilon.$$

Так как $\rho^1(y_3, y_0) \leq \rho^1(y_3, y_2) + \rho^1(y_2, y_1) + \rho^1(y_1, y_0) < < \delta + (\rho_1 + 2\delta) + \rho < 3\rho$, то $y_3 \in K^1_{3\rho}(y_0) \cap D_{I_s}$. Заметим теперь, что из неравенств (7.13)—(7.15) следует неравенство

$$I[y_3] < \inf I[K^1_{3\rho}(y_0) \cap D_{I_s}],$$

которое, очевидно, противоречит условию $y \in K^1_{3\rho}(y_0) \cap \cap D_{I_6}$. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 непосредственно вытекает следующий результат.

Утверждение. *Предположим, сохраняя обозначения § 6, что на функции $y \in D_{I_6}$ функционал I_5 достигает сильного (слабого) локального минимума. Тогда y доставляет сильный (слабый) локальный минимум и функционалу I_2.*

Замечания: 1. Соотношения (7.8) и (7.9) (а значит, и утверждение 1, которое следует из них) остаются в силе при замене D_{I_6} любым промежуточным классом функций D_{I^*} (т. е. таким классом D_{I^*}, для которого $D_{I_6} \subset D_{I^*} \subset \subset D_{I_2}$).

2. Вернемся к примеру 2. Функция y_0, тождественно равная нулю ($y_0(x) = 0$, $x \in [0, 1)$), принадлежит к классу D_{I_6}. Так как в $K^1_\rho(y_0) \cap D_{I_6}$ существует функция, удовлетворяющая условию (7.7), то согласно (7.9) в окрестности $K^1(y_0) \cap D_{I_6}$ (а значит, в соответствии с замечанием 2, и во всех «промежуточных» окрестностях $K^1_{3\rho}(y_0) \cap D_{I^*}$) существует такая функция, на которой функционал I принимает отрицательное значение (аналогичное замечание относится и к примеру 1).

3. На основании утверждения 1 и замечания 1 можно заключить, что все сказанное в связи с абсолютным экстремумом о выборе класса допустимых функций с точки зрения непрерывности и дифференцируемости остается верным как в случае локального сильного, так и в случае локального слабого экстремума.

4. Рассмотрим функционал I, определенный в п. 3.3 ($f \in C_2(Q)$, i') $y \in C_2[x_1, x_2]$). Пусть $K^1(y)$ — произвольно выбранная окрестность первого порядка функции $y \in D_I$. Для функций, использованных при доказательстве теоремы 1 § 3, выполняется неравенство

$$\rho^1(y, y+\varepsilon\eta) \leq |\varepsilon| \{ \max_{x \in [x_1, x_2]} |\eta(x)| + \max_{x \in [x_1, x_2]} |\eta'(x)| \}.$$

Иначе говоря, если число ε достаточно мало, то $(y + \varepsilon\eta) \in \in K^1(y)$. Это означает, что окончательный результат данной теоремы справедлив и в случае локального слабого экстремума, т. е. *если функционал I достигает на функции $y \in D_I$ локального слабого экстремума, то эта функция должна удовлетворять д. у. Э—Л $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$.*

7.2. Необходимые и достаточные условия

Как уже было упомянуто, мы не рассматриваем условий, заранее накладываемых на область определения функционала для обеспечения существования абсолютного экстремума, а исходим из того, что функционалы должны быть определены на возможно более широком классе функций, соответствующем природе рассматриваемых практических задач.

Если полученное выше необходимое условие существования экстремума $\delta I \equiv 0$ сопоставить с аналогичным условием в дифференциальном исчислении, станет очевидным сходство с тождеством $d\Phi \equiv 0$ $(\Phi \in R^n \to R^1)$. Стационарная функция, удовлетворяющая условию $\delta I \equiv 0$, вообще говоря, не является экстремалью, однако верно обратное: экстремальные функции (если они существуют) являются стационарными. Так же как и в дифференциальном исчислении, будем уточнять необходимые условия, с одной стороны, с целью постепенного исключения из рассмотрения не экстремальных стационарных функций, с другой — чтобы путем этого постепенного уточнения прийти к достаточным условиям, близким к необходимым [21]. Конечно, идеальным было бы условие, которое одновременно является необходимым и достаточным. Такое условие, очевидно, эквивалентно определению экстремума, но его практическая ценность, как правило, невелика, так как это условие не дает непосредственного метода отыскания экстремальных элементов.

Итак, говоря о необходимых и достаточных условиях, мы имеем в виду следующие условия:

а) прежде всего такое необходимое условие, применяя которое с помощью известных математических методов можно описать множество всех экстремальных элементов, или такое, «не слишком широкое» множество, которое содержит все экстремальные элементы;

б) такие дальнейшие необходимые условия, которые следует проверять только для элементов, которые удовлетворяют условию а), с целью дальнейшего сужения класса функций, содержащего все экстремали;

---

[21] Такими близкими условиями являются, например, хорошо известные необходимые $\psi'(a) = 0$, $\psi''(a) \geqslant 0$ и достаточные $\psi'(a) = 0$, $\psi''(a) > 0$ условия локального минимума два раза дифференцируемых функций ψ из $R^1 \to R^1$.

в) такие допускающие проверку с помощью вычислений достаточные условия, которые, с одной стороны, являются близкими к необходимым условиям, описанным в п. а) и б), а с другой — позволяют найти решения многих конкретных задач.

Как уже ранее отмечалось, условие $\delta I \equiv 0$ соответствует требованию а). В следующей главе подробно рассмотрены условия, соответствующие требованиям б) и в). Появление этих условий связано с именами таких великих математиков, как (кроме многократно упоминавшихся Эйлера и Лагранжа) Лежандр, Якоби, Вейерштрасс, Гильберт и др.

Необходимые и достаточные условия будем задавать для слабых и сильных локальных экстремалей: ясно, что абсолютные экстремальные элементы также находятся среди них. Отметим, что каждое необходимое условие локального слабого экстремума является необходимым условием и локального сильного экстремума, а необходимое условие, относящееся к последнему, в свою очередь, является необходимым условием и абсолютного экстремума, так как для классов функций, входящих в определения локального экстремума, выполняется соотношение $K^1_\rho(y) \cap D_I \subset \subset K_\rho(y) \cap D_I$.

Для достаточных условий, очевидно, верен обратный порядок.

Обратим еще раз внимание на особую роль достаточных условий в задачах вариационного исчисления, отмеченную в п. 6.1.

7.3. Некоторые обобщения простейшей вариационной задачи

А) Одномерные задачи. К ним относятся задачи об экстремуме функционалов I, для которых $D_I \subset \subset R^1 \to R^n$ $(n \in N)$. Если $n = 1$ (как у функционалов, исследованных выше), то говорят о вариационной задаче *на плоскости* , а в случае $n > 1$ — о *пространственной* вариационной задаче.

Пример. Сопоставить каждой кривой, соединяющей две точки среды с изменяющимся коэффициентом преломления, время, за которое луч света проходит данную кривую.

Если ограничиться специальными кривыми, которые в некоторой системе прямоугольных координат $Oxyz$ можно представить уравнениями $x = x$, $y = y(x)$, $z = z(x)$, где y и z — функции из $R^1 \to R^1$, то для соответствующего функционала получим $n = 2$.

Б) Многомерные задачи. В этих задачах $D_J \subset R^m \to R^n$ $(m, n \in N, m > 1)$.

Пример. Каждой поверхности, стягиваемой данной замкнутой пространственной кривой, поставить в соответствие ее площадь.

Если ограничиться специальными пространственными кривыми и поверхностями, которые в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ задаются числовыми функциями от переменных x и y, то для соответствующего функционала $m = 2$, $n = 1$.

В) Задачи первого порядка [для случаев А)—Б)]. К ним относятся задачи об экстремуме функционалов, в определении которых участвуют только первые производные допустимых функций. Такими являются все рассмотренные выше задачи.

Г) Задачи высшего порядка [для случаев А)—Б)]. В случае задачи k-го порядка $(k \in N, k > 1)$ самый высокий порядок производных допустимых функций, встречающихся в определении функционала, равен k.

Пример. Любому положению закрепленного с двух концов упругого стержня поставить в соответствие его потенциальную энергию.

Так как потенциальная энергия стержня зависит от его кривизны, т. е. и от второй производной, то задача о минимизации соответствующего функционала относится к задачам второго порядка на плоскости.

Д) Изопериметрическая задача [для случаев А)—Г)]. Рассмотрим $(n + 1)$ функционал $(n \in N)$ $J^*, J_1, \ldots, J_n$. Предположим, что они:

1^0. Относятся к одному и тому же классу задач типа А)—Г).

2^0. Имеют общую область определения $[D_{J^*} = D_{J_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)]$.

Зададим n действительных чисел l_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и определим J как сужение J^* с областью определения

$$D_J \overset{\text{df}}{=} \{y \in D_{J^*} \mid J_i[y] = l_i \ (i = 1, \ldots n)\}.$$

Задачу об экстремуме функционала J назовем *изопериметрической вариационной задачей*, а равенства $J_i[y] = l_i$ — *изопериметрическими дополнительными условиями*.

Пример (случай функционала простейшего типа с одним дополнительным условием). Найти максимальную площадь фигуры, ограниченной данным отрезком, и кривой заданной длины, соединяющей концы этого отрезка.

Пусть данный отрезок расположен на оси $Ox : [x_1, x_2]$ и пусть кривая, соединяющая точки x_1 и x_2, задается уравнением $y = y(x)$, где $y \in (R^1 \to R^1) \cap D_1 [x_1, x_2]$. Тогда у функционалов J^* и J_1 три определяющих данных $[T = R^2, P_1 = (x_1, 0), P_2 = (x_2, 0)]$ совпадают, основная функция функционала J^* равна $f^* (x, y, y') = y$, а функционала J_1 равна $f_1 (x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$.

Е) Задача Больца—Майера—Лагранжа [для случаев А)—Г) с дополнительными условиями при $m > 2$]. Пусть I^*—функционал любого из рассмотренных выше типов и пусть даны $l < m$ дифференциальных уравнений $g_\alpha = 0$ [обыкновенных или в частных производных в зависимости от случая В) или Г)], порядок которых не превышает порядка задачи. Определим I как сужение I^* с областью определения

$$D_I = \{y \in D_{I^*} \mid g_\alpha (y) = 0 \ (\alpha = 1, \ldots, l)\}.$$

Задачу отыскания экстремума функционала I назовем *вариационной задачей Лагранжа*, а равенства $g_\alpha = 0$ — *дополнительными условиями* (*условиями Лагранжа*).

Задачи Больца и Майера аналогичны задаче Лагранжа (см. гл. 3). Задачи изопериметрического типа и типа задачи Лагранжа будем называть условными экстремальными задачами вариационного исчисления.

Примеры (вариационные задачи типа задачи Лагранжа).

1. Рассмотрим задачу о брахистохроне в пространственной среде с сопротивлением. В этой задаче [в случае кривых, задаваемых уравнением $x = x$, $y = y(x)$, $z = z(x)$] $D_I \subset R^1 \to R^3$, так как кроме функций y и z неизвестна еще скорость v. Значение функционала задается равенством

$$I[y, z, v] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}}{v(x)} \, dx,$$

а дополнительное условие, выражающее закон сохранения энергии, записывается в виде дифференциального уравнения $vv' = gz' - R(v)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$, где g — ускорение свободного падения, а $R(v)$ — заданная функция.

2. Какая из кривых, лежащих на некоторой поверхности $g(x, y, z) = 0$ и соединяющих две данные ее точки, имеет минимальную длину? Если ограничиться кривыми приведенного выше типа, то $D_I \subset R^1 \to R^2$. Кроме того, в задаче есть дополнительное условие $g = 0$ — так называемое *фазовое ограничение* или *голономная связь*.

Ж) Задачи с неподвижными границами [для случаев А)—Е)]. Это такие задачи, в которых:

1.° Все допустимые функции определены на одном и том же множестве.

2°. На границе этой области определения все допустимые функции и все их производные до порядка $k-1$ включительно (если рассматривается задача k-го порядка) принимают заданные значения.

Все задачи, о которых до сих пор шла речь, относятся к этому типу.

З) Задачи с подвижными границами [для случаев А)—Е)]. К ним относятся такие задачи, в которых хотя бы одно из условий 1° и 2° предыдущего пункта не выполняется.

Пример. Задачу о брахистохроне, сформулированную в п. 2.1, модифицируем следующим образом: вместо точки P_2 зададим вертикальную прямую l, не содержащую точки P_1; будем искать среди кривых, которые соединяют точку P_1 с прямой l, ту, которую материальная точка, выходящая из P_1 со скоростью $v_1 > 0$, проходит за минимальное время. Здесь, очевидно, условие 1° выполняется, а 2° — нет.

И) Непараметрические задачи. К ним относятся все исследованные или упомянутые до сих пор задачи: область определения функционала в них представляет собой некоторое множество *функций*.

Уже в п. 1 § 2 было отмечено, что рассмотрение функционалов, аргументами которых являются функции, часто представляет собой ограничение, которое не соответствует природе многих конкретных задач. Это верно также и для задач, рассмотренных в приведенных примерах. Возьмем одну из них, например изопериметрическую задачу, упомянутую в Д). У этой задачи всегда существует решение: подходящая дуга окружности, соединяющая концевые точки данного отрезка прямой. Если длина данного отрезка достаточно мала по сравнению с заданной длиной кривой, то не существует такой прямоугольной системы координат, в которой можно было бы выразить с помощью однозначной функции кривую, являющуюся решением.

К) Параметрические задачи [для случаев А)—З)]. Всякой непараметрической задаче можно поставить в соответствие параметрическую задачу. Для этого достаточно соответствующие функции заменить кривыми или поверхностями подходящей размерности.

Пример. Задача о минимальной площади поверхности вращения, рассмотренная в п. 2.2, в параметрической форме может быть сформулирована следующим образом.

1°. Некоторая кривая G, задаваемая уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t \in [t_1, t_2])$, является допустимой ($G \in D$), если:

$$i)\ x, y \in C_1[t_1, t_2]^{22};$$

$$ii)\ x(t_1) = x_1,\ y(t_1) = y_1;\ x(t_2) = x_2,\ y(t_2) = y_2;$$

$$iii)\ (x(t), y(t)) \in T\ \ (t \in [t_1, t_2]).$$

2°. Каждой кривой $G \in D_J$ ставится в соответствие действительное число

$$J[G] \overset{\mathrm{df}}{=} 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$$

В задаче о минимальной площади поверхности вращения требуется определить минимум функционала J.

Рассмотрим теперь такое подмножество M класса кривых D_J, которое состоит из специальных кривых вида

$$\left.\begin{array}{r} x = x, \\ y = y(x), \end{array}\right\} (x \in [x_1, x_2]),$$

где $y \in (R^1 \to R^1) \cap C_1[x_1, x_2]$. Так как в случае $G \in M$ выполняется равенство $J[G] = I[y]$, где I — функционал, задающий площадь поверхности, которая получается при вращении соответствующей кривой непараметрического представления, определенный в п. 2.2, то $R_I \subset R_J$. Иначе говоря, функционал J соответствует действительно более общей постановке данной геометрической проблемы.

Последнее утверждение справедливо и в общем случае: при исследовании конкретных (прежде всего физических и геометрических) проблем параметрическая задача является более общей. Обратим внимание на то, что математическое исследование этих параллельных типов задач представляет собой две разные проблемы, ни одна из которых не является более общей, чем другая (см. п. 14.2).

7.4. О вариационных принципах физики. Другие вариационные задачи

В этом пункте будет рассмотрен один из многочисленных вариационных принципов физики — принцип Гамильтона. Изучение этого принципа приводит к некоторым новым типам задач вариационного исчисления.

---

[22] Конечно, условие i) здесь также можно варьировать: $x, y \in D_1[t_1, t_2]$, $x, y \in C_2[t_1, t_2]$ и т. д.

а) Рассмотрим вертикальное движение материальной точки массы m в поле тяготения Земли. Обозначим через y расстояние, измеряемое от начальной точки, а через x — время от начала движения. Тогда из второго закона Ньютона следует, что функция $y(x)$, описывающая зависимость движения от времени, должна удовлетворять уравнению движения Ньютона

$$y'' + g = 0 \tag{7.16}$$

(полученному после деления на массу m), где g — ускорение свободного падения. Возникает вопрос о том, существует ли такая основная функция, для которой (7.16) является д. у. Э—Л. Заметим, что поле тяготения во времени не меняется. Так как искомую основную функцию, которую в силу традиции вместо f обозначают L, желательно связать с физическими величинами поля тяготения, то можно считать, что основная функция не зависит от времени, т. е. удовлетворяет условию $L_x = 0$.

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (7.16) является д. у. Э—Л, соответствующим основной функции L, если L принадлежит семейству функций

$$c\,(y'^2/2 - gy) + y'\varphi(y) + k, \tag{7.17}$$

зависящему от параметров $c \neq 0$, k и от произвольной дифференцируемой функции $\varphi(y)$.

Действительно, для того чтобы уравнение (7.16) было д. у. Э—Л какой-либо «неполной» основной функции L, необходимо и достаточно, чтобы функция L удовлетворяла (с точностью до постоянного множителя) тождеству

$$\begin{gathered} y'' L_{y'y'}(y, y') + y' L_{yy'}(y, y') - L_y(y, y') = \\ = y'' + g, \quad (y, y', y'') \in R^3. \end{gathered} \tag{7.18}$$

Из этого тождества непосредственно следует, что $L(y, y') = (1/2)y'^2 + y'\varphi(y) + \psi(y)$ $(y, y' \in R^1)$; где функция ψ должна удовлетворять равенству $-\psi'(y) = g$ $(y \in R^1)$. Отсюда $\psi(y) = -gy + k'$, т. е. функция L принадлежит семейству (7.17).

Суммы $y'\varphi(y) + k$, очевидно, нет в соответствующем д. у. Э—Л, и она не оказывает влияния на экстремум функционала, определенного с помощью основной функции L, так как множество экстремальных и даже стационарных функций от этой суммы не зависит (см. п. 5.1). Поэтому, не ограничивая общности, можно положить $k = 0$, $\varphi \equiv 0$.

В качестве c возьмем m[23], поскольку в этом случае основная функция L равна разности кинетической $T(y') = (1/2)\,my'^2$ и потенциальной $V(y) = mgy$ энергий силового поля тяготения Земли:

$$L(y,\ y') = T(y') - V(y) = \frac{1}{2}my'^2 - mgy\ (y, y' \in R^1). \tag{7.19}$$

Итак, функции, описывающие закон движения материальной точки в поле тяготения, и стационарные функции, относящиеся к основной функции $L = T - V$ (так называемой *функции действия*), совпадают. Другими словами, это означает (см. п. 3.4), что для функции $y(x)$, выражающей зависимость от времени x пути y, пройденного материальной точкой в поле тяготения, выполняется равенство

$$\delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} L(y(x),\ y'(x))\,dx \equiv 0, \tag{7.20}$$

т. е. для исследуемого движения условие, что функция y удовлетворяет основному уравнению динамики, эквивалентно тому, что вариация функционала $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} L(y(x),\ y'(x))\,dx$ относительно функции y тождественно равна нулю. Эта эквивалентность является основой метода, в котором следующее утверждение принимается как «физический принцип»[24]: *в силовом поле тяготения материальная точка массы m, находящаяся в момент времени x_1 в положении y_1, попадает в момент времени x_2 ($> x_1$) в положение y_2, двигаясь так, что для функции $y \in C_2[x_1,\ x_2]$, описывающей закон движения, первая вариация функционала I* $[T = R^2$, $f(x, y, y') = L(y, y') = \frac{1}{2}my'^2 - mgy = (T - V)$; $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)]$ *обращается в тождественный нуль*: $\delta I \equiv 0$ (или, другими словами, y — решение соответствующего д. у. Э—Л, т. е. y является стационарной функцией функционала I). В соответствии с этим принципом из тождества $\delta I \equiv 0$ получаем, что функция y должна удовлетворять соответствующему д. у. Э—Л

$$L_y - \frac{d}{dx}L_{y'} = -(g + y'') = 0,$$

совпадающему с уравнением движения (7.16).

---

[23]Для решения д. у. Э—Л выбор постоянной $c \neq 0$ не имеет значения: д. у. Э—Л функций f и cf эквивалентны.

[24]Т. е. как аксиома.

Применяя этот принцип, можно получить и другие физические соотношения, например закон сохранения энергии. Так как основная функция — «неполная»: $L_x \equiv 0$, то согласно утверждению 2 из § 5 для каждого решения y д. у. Э—Л $L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} = 0$ существует такая константа c, что

$$L(y(x), y'(x)) - y'(x) L_{y'}(y(x), y'(x)) = \tag{7.21}$$
$$= \frac{1}{2} my'^2(x) - mgy(x) - my'^2(x) =$$
$$= -\left(\frac{1}{2} my'^2(x) + mgy(x)\right) = c \quad (x \in D_y),$$

т. е. *у точки, движущейся в силовом поле тяготения, сумма кинетической и потенциальной энергий в процессе движения постоянна.*

В физике имеется много так называемых вариационных принципов подобного типа, имеющих важное значение почти во всех ее разделах. Например, рассмотренный выше принцип является частным случаем *принципа Гамильтона* (или *принципа наименьшего действия*), общепринятого в механике. В дальнейшем, после знакомства с понятиями, связанными с соответствующими функционалами, мы сформулируем несколько важных вариационных принципов (среди них и принцип Гамильтона), однако исследованный выше специальный случай позволяет уже сейчас наметить некоторые математические проблемы, связанные с вариационными принципами физики.

Л) Обратные задачи вариационного исчисления [для случаев А)—К)]. Для некоторых дифференциальных уравнений или систем (например, для д. у. вида $\varphi(x, y, y') + \psi(x, y, y') y'' = 0$) можно поставить следующую задачу: существует ли такая основная функция, что относящееся к ней д. у. (с. д. у.) Э—Л совпадает с исходным д. у. (с. д. у.), и если да, то как можно эту основную функцию найти? Другая задача подобного типа: для подходящего семейства функций (кривых, поверхностей) найти такую основную функцию , что общее решение связанного с ней д. у. (с. д.у.) Э—Л совпадает с исходным семейством функций (кривых, поверхностей). Приведенные задачи называют обратными задачами вариационного исчисления.

Важность обратных задач вариационного исчисления объясняется прежде всего их физическими и геометрическими приложениями. В начале этого пункта, опираясь на решение одной простейшей обратной задачи, мы пришли к вариационному принципу, относящемуся к исследованному закону движения и к выражающему его тождеству (7.20). В связи с этим возникает следующий вопрос: какова важность того, что, исходя из некоторого известного д. у. физики, мы решим обратную вариационную задачу? Отсюда, конечно, можно снова получить исходное д. у. и вывести из него известные физические теоремы, как это уже было сделано для рассмотренной выше простой задачи (получен закон сохранения энергии). Такой способ исследования, кажущийся на первый взгляд математической игрой, тем не менее относится к одним из самых важных методов физики. О значении этого метода будет сказано при рассмотрении круга проблем М); сейчас ограничимся замечанием о том, что вариационные принципы, с одной стороны, сделали возможным вывод большой группы физических законов из одного общего принципа, с другой — привели к формулировке в виде вариационных принципов различных законов в других областях.

М) Инвариантность уравнений вариационного исчисления [для случаев А)—К)]. Как уже было отмечено, экстремальные элементы всех функционалов типов А)—К) [при некоторых условиях дифференцируемости и непрерывности] должны удовлетворять в качестве необходимого условия некоторому уравнению. Решения этих уравнений называют также *стационарными* функциями (кривыми, поверхностями) данного функционала. (В случае простейшей вариационной задачи, если основная функция f принадлежит C_2, упомянутое уравнение есть д. у. Э—Л). Фиксируем какой-нибудь функционал и рассмотрим такое преобразование координат (например, в случае простейшей вариационной задачи — это отображение из $R^2 \rightarrow R^2$), которое допустимые функции переводит в функции подобного типа в новых координатах, причем соответствующее отображение является взаимно однозначным. На классе преобразованных функций определим функционал так, чтобы исходный функционал и новый на соответствующих друг другу при данном преобразовании функциях принимали одинаковые значения. После этого можно поставить следующий вопрос: *перейдут ли при данном преобразовании стационарные функции исходного функционала в стационарные функции нового функционала*? При достаточно общих условиях ответ на этот вопрос оказывается положительным. В этом случае говорят, что данная задача вариационного исчисления *инвариантна* относительно введенного преобразования координат.

На основании изложенного становится понятной особая важность вариационных принципов физики. Роль преобразований координат в физике общеизвестна: например, для описания движения, которое происходит на некоторой поверхности, наиболее подходящими являются координаты, определяемые геометрией поверхности (для сферической поверхности — сферические координаты, для цилиндрической — цилиндрические). Предположим, что описание какого-то физического процесса получено применением некоторого вариационного принципа; иначе говоря, процесс описывает стационарная функция некоторого функционала. Если интеграл в формулировке вариационного принципа представляет собой значение физической величины, которая не зависит от выбора системы координат (как, например, в рассмотренной задаче кинетическая и потенциальная энергии и их разность) и соответствующее вариационное уравнение инвариантно относительно какого-то класса преобразований координат, то после любого такого преобразования записать уравнение стационарных функций можно без особого труда. Это подчеркивает особое значение вариационных принципов среди других принципов физики.

В заключение обратим внимание на то, что не все вариационные принципы физики действительно относятся к экстремуму, т. е. утверждают, что функция, описывающая исследуемое явление, представляет собой экстремаль какого-то функционала. Многие из них относятся только к стационарным значениям, т. е. утверждают, что функция, описывающая физический процесс, является стационарной функцией некоторого функционала [25]. Этим объясняется то, что в физике на передний план выступает не изучение экстремума, а исследование стационарных функций (или, другими словами, исследование условий обращения первой вариации в тождественный нуль).

Н) П р я м ы е   м е т о д ы   в а р и а ц и о н н о г о   и с ч и с л е н и я [для случаев А)—К)]. Основную идею этих

---

[25] К ним относится и упомянутый принцип Гамильтона; другое его название «принцип наименьшего действия» и часто используемое обозначение $\int\limits_{x_1}^{x_2} L dx = \min$ не отражает точного содержания данного принципа, так как речь в нем идет, вообще говоря, не о минимуме, а о стационарном значении.

методов можно проиллюстрировать на примере процесса Эйлера, описанного в § 3: берется некоторая последовательность Φ_k допустимых функций и на n-м шаге ($n \in N$) рассматривается задача об экстремуме на множестве функций вида $\sum_0^k a_i\Phi_i$. Таким образом, на каждом шаге получается одна экстремальная функция, затем (в случае сходимости) исследуется вопрос об экстремальности предельной функции этой последовательности.

При обосновании этого метода сложной является проблема сходимости. О значимости этого метода можно сделать следующие два замечания.

1°. Метод можно использовать для приближенного решения вариационных задач.

2°. Если предельная функция является экстремальной, то она должна удовлетворять соответствующему д. у. Э—Л. Это означает, что для решения д. у., сводящегося к вариационным задачам, можно применять описанный выше приближенный метод.

Наконец, отметим, что наличие среди принципов физики экстремальных принципов было одной из причин развития прямых методов.

7.5. Предварительные замечания о дальнейших исследованиях

Уже перечисление наиболее важных проблем А)—Н) свидетельствует о разнообразии вариационных задач. В рамках этой книги мы не имеем возможности подробно исследовать выдвинутые проблемы во всех случаях. Сравнительно полно будет рассмотрена лишь одномерная проблема на плоскости, в остальных случаях мы ограничимся только ознакомлением с простейшими характерными результатами. Заметим, что результаты, относящиеся к одномерным задачам, имеют, как правило, аналоги и в многомерных задачах, но применяемые методы и получаемые результаты в этих двух случаях наряду со многими совпадающими чертами могут иметь существенные различия.

В каждой вариационной задаче существенным является выбор допустимого класса функций с точки зрения дифференцируемости и непрерывности. Этот вопрос подробно исследован в случае простейшей вариационной задачи. Полученные результаты можно без особого труда распространить на значительную часть вариационных задач.

Наконец, кратко коснемся методов, используемых в дальнейшем. Метод Эйлера является специальным и сложным, но его основная идея, как уже упоминалось, будет использована при изучении прямых методов. Мы не стремились к тому, чтобы получить как можно больше результатов применением общих теорем функционального анализа, так как это редко приводит к упрощению. Для многих проблем, как, например, для изучения локального сильного минимума, общий подход даже и непригоден: рассмотренный выше функционал относительно расстояния нулевого порядка, входящего в определение локального сильного минимума, вообще говоря, не является даже непрерывным. Тем не менее содержание § 4 дает представление о методах функционального анализа, позволяющих рассматривать вариационные проблемы общего характера.

В дальнейшем, как правило, мы будем использовать методы классического вариационного исчисления, так как к необходимым результатам они приводят обычно самым простым способом.

Задачи: 1. Рассмотрите следующую (непараметрическую, первого порядка, на плоскости, с естественным граничным условием) вариационную задачу. Пусть $T = \{(x, y) \in R^2 | x \in \Delta\}$, где $\Delta \subset R^1$ — данный открытый интервал; $f \in (R^3 \to R^1) \cap C_2 (T \times R^1)$; $[x_1, x_2] \subset \Delta$ — любой фиксированный отрезок; $D_I = (R^1 \to R^1) \cap C_2 [x_1, x_2]$; если $y \in D_I$, то $I[y] \overset{\text{df}}{=} \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))dx$.

а) Найдите представление для первой вариации функционала I, определенного таким образом, относительно функции $y \in D_I$.

б) Какое условие получается из тождества $\delta I_y \equiv 0$ для значений функции y в точках x_1 и x_2?

Замечание. Класс D_I, снабженный, например, нормой C_1, очевидно, является линейным нормированным пространством.

2. Исследуйте следующую (непараметрическую, *второго порядка*, на плоскости, с неподвижными границами) вариационную задачу. Пусть $T \subset R^2$ — данная выпуклая область, $f \in (R^4 \to R^1) \cap C_3 (Q)$, где $Q = T \times R^2$ [точки Q обозначим через (x, y, y', y'')]; (x_1, y_1), (x_2, y_2) — две такие произвольно фиксированные точки T, для которых $x_1 < x_2$; y_1', y_2' — произвольно зафиксированные действительные числа; $y \in D_I$, если:

i) $y \in R^1 \to R^1 \cap C_4 [x_1 \ x_2]$,

ii) $y(x_1) = y, \ y(x_2) = y_2 \quad y'(x_1) = y_1', \ y'(x_2) = y_2'$,

iii) $(x, y(x)) \in T$, если $x \in [x_1, x_2]$;

если $y \in D_I$, то

$$I[y] \overset{\text{df}}{=} \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x), y''(x))\, dx,$$

Докажите, что если функция $y \in D_l$ является локальной слабой экстремалью функционала I, то она должна удовлетворять д. у. Эйлера — Пуассона (обыкновенному, четвертого порядка)

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0.$$

Замечания: 1) Приведенная символическая запись есть сокращенное обозначение (уже привычного характера, как, например, д. у. Э—Л) д. у. Эйлера—Пуассона; для получения из него дифференциального уравнения четвертого порядка необходимо провести формальное дифференцирование так, как если бы переменные y, y', y'', являющиеся аргументами f, были функциями из $R^1 \to R^1$.

2) В определении слабого локального минимума в данном случае следует использовать окрестность второго порядка.

Указание. В качестве первого шага (применяя метод Лагранжа или метод Фреше) покажите, что если y является локальной слабой экстремалью I, то в случае такой произвольной функции $\eta \in (R^1 \to R^1) \cap C_4 [x_1, x_2]$, которая обращается в нуль вместе со своей производной как в точке x_1, так и в точке x_2, первая вариация

$$\delta I [\eta] \overset{\text{df}}{=} \int_{x_1}^{x_2} \{\overline{f}_y \eta(x) + \overline{f}_{y'} \eta'(x) + \overline{f}_{y''} \eta''(x)\}\, dx$$

тождественно равна нулю [черта над функцией означает, что ее аргументы имеют вид x, $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$]. После этого второе слагаемое под интегралом проинтегрируйте по частям один раз, а третье — два раза и примените лемму Лагранжа (лемма 2 § 3).

3. Выведите д. у. Эйлера—Пуассона, приведенное в примере 2, эвристическим методом Эйлера.

4. По образцу проблемы второго порядка определите непараметрическую проблему n-го порядка на плоскости с закрепленными концами ($n \in N$, $n > 2$) и выведите (в качестве необходимого условия соответствующего слабого локального экстремума) д. у. (обыкновенное, порядка $2n$) Эйлера—Пуассона

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0.$$

5. Найдите общее решение д. у. Эйлера—Пуассона для приведенных ниже основных функций f (в случае проблемы порядка n аргументы f обозначены символами x, y, y', ..., $y^{(n)}$):

а) $f = y''^2$ $(n=2)$; б) $f = y'''^2$ $(n=3)$; в) $f = y'' - y^2 + x^2$ $(n=2)$;

г) $f = y'''^2 + 2xy$ $(n=3)$; д) $f = y'''^2 + y^2 - 2yx^3$ $(n=3)$.

6. Исследуйте следующую (непараметрическую, первого порядка, двумерную, с закрепленными концами) вариационную задачу. Пусть $H \subset R^2$ — данная область; $f \in (R^5 \to R^1) \cap C_2 (Q)$, где $Q \overset{\text{df}}{=} H \times R^3$ [точки Q обозначим через (x, y, z, p, q)]; T — такая произвольная область, для которой $\overline{T} \subset H$ и множество front T представимо кусочно-гладкими, простыми и замкнутыми кривыми

на плоскости; $\psi \in R \to R^3$ — такая фиксированная функция, для которой $D_\psi = \text{front } T$; $z \in D_I$, если:

$i)$ $z \in (R^2 \to R^1) \cap C_2(\overline{T})$;

$ii)$ ψ есть сужение z на границу D_I;

если $z \in D_I$, то

$$I[z] \overset{\text{df}}{=} \iint_T f(x, y)\, z(x, y),\ z_x(x, y),\ z_y(x, y))\, dxdy.$$

Докажите, что если функция $z \in D_I$ является локальной слабой экстремалью функционала I то она должна удовлетворять д. у. (называемому также д. у. Э—Л второго порядка в частных производных)

$$f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_p - \frac{\partial}{\partial y} f_q = 0.$$

Примечание. Приведенная выше символическая запись представляет собой сокращенное обозначение д. у.

$$f_z(x, y, z, z_x, z_y) - f_{xp}(x, y, z, z_x, z_y) - f_{zp}(x, y, z, z_x, z_y)\, z_x -$$
$$- f_{pp}(x, y, z, z_x, z_y)\, z_{xx} - f_{pq}(x, y, z, z_x, z_y)\, z_{xy} -$$
$$- f_{yq}(x, y, z, z_x, z_y) - f_{zq}(x, y, z, z_x, z_y)\, z_y -$$
$$- f_{pq}(x, y, z, z_x, z_y)\, z_{xy} - f_{qq}(x, y, z, z_x, z_y)\, z_{yy} = 0.$$

Под расстоянием между функциями $u, v \in (R^2 \to R^1) \cap C_1(\overline{T})$ мы понимаем число $\rho(u, v) \overset{\text{df}}{=} \max\limits_{(x, y) \in \overline{T}} |u(x, y) - v(x, y)|$, а под расстоянием первого порядка — число $\rho^1(u, v) \overset{\text{df}}{=} \rho(u, v) + \rho(u_x, v_x) + \rho(u_y, v_y)$. С помощью этого расстояния нетрудно дать определение локального слабого экстремума по образцу простейшей вариационной задачи.

Указание. В качестве первого шага (применяя метод Лагранжа или метод Фреше) покажите, что если z является локальной слабой экстремалью I, то для такой произвольной функции $\zeta \in (R^2 \to R^1) \cap C_2(\overline{T})$, которая на границе $\overline{T}$ равна нулю, первая вариация

$$\delta I[\zeta] \overset{\text{df}}{=} \iint_T \{\bar{f}_z\, \zeta(x, y) + \bar{f}_p\, \zeta_x(x, y) + \bar{f}_q\, \zeta_y(x, y)\}\, dxdy$$

будет тождественным нулем.

[Черта над функцией означает, что ее аргументы имеют вид $x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)$.] После этого, используя формулу Грина, приведите первую вариацию к виду

$$\delta I[\zeta] = \iint_T \left\{\bar{f}_z - \frac{\partial}{\partial x}\bar{f}_p - \frac{\partial}{\partial y}\bar{f}_q\right\} \zeta(x, y)\, dxdy$$

и примените лемму Лагранжа (лемма 3 § 3).

ГЛАВА 2
НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ПРОСТЕЙШЕЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

§ 8. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СЛАБОГО ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА

Основная идея методов, использованных в этом параграфе, была, по существу, раскрыта в § 3 при изложении метода Лагранжа.

8.1. Формулировка проблемы. Лемма Дюбуа—Реймона

Принимая во внимание результаты § 6, исследование простейшей вариационной задачи (на плоскости, непараметрической, первого порядка, с неподвижными границами) в дальнейшем будем вести в следующей формулировке.

Пусть:

а) $Q \subset R^3$ — *заданная область* [точки Q обозначим через (x, y, y')]; $T \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{pr}_{12}\, Q$[1];

б) $f \in (R^3 \to R^1) \cap D^1(Q)$ — *заданная функция*[2];

в) $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ — *две такие (произвольно фиксированные) точки* T, *для которых* $x_1 < x_2$.

Определим функционал I *следующим образом.*

1°. *Функцию* $y \in R^1 \to R^1$ *назовем допустимой функцией (обозначение* $y \in D_I$*), если*:

i) $y \in D_1[x_1, x_2]$;

ii) $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$;

iii) $(x, y(x), y'(x)) \in Q$ $(x \in [x_1, x_2])$.

---

[1]Проекцией некоторого множества $Q \subset R^n$ $(n > 1)$ на подпространство, порожденное координатами $i_1, \ldots, i_k$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_k;$ $k < n)$, мы называем множество $\mathrm{pr}_{i_1 \ldots i_k} Q \overset{\mathrm{df}}{=} \{(y_1, \ldots, y_k) \in R^k \mid (\ldots, y_1^{i_1}, \ldots, y_k^{i_k}, \ldots) \in Q\}$.

[2]Класс $D^1(Q)$ функций из $R^n \to R^1$ кусочно-непрерывных по первой переменной на множестве $Q \subset R^n$ $(n > 1)$ определим следующим образом: $f \in D^1(Q)$, если:

1) $D_f = Q \setminus A$, где множество A пусто, либо является конечным объединением множеств типа $A_i = \{(x_1, \ldots) \in Q \mid x_1 = c_i;\ c_i \in R^1$ постоянная$\}$;

2) функция f непрерывна;

3) для любого открытого множества $B \subset D_f$ сужение функции f на B имеет конечный предел в любой точке $\overline{B}$.

2^0. *Каждой функции* $y \in D_I$ *поставим в соответствие действительное число*

(8.1) $$I[y] \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\,dx.$$

Замечания: **1.** Если T не выпукло, то в случае специального выбора P_1 и P_2 может оказаться, что $D_I = \varnothing$. *В дальнейших исследованиях всегда будем предполагать, что этот вырожденный случай исключается, т. е.* $D_I \neq \varnothing$.

Если $D_I \neq \varnothing$, то из открытости Q следует, что имеется бесконечно много допустимых функций.

2. Определяющими данными функционала I будем называть бласть Q, основную функцию f и граничные точки P_1, P

3. кционал, относящийся к простейшей вариационной задаче, был определен в п. 3.3. Различия заключаются в следующем: вместо множества Q специального вида $Q = T \times R^1$, где $T \subset R^2$ выпукло, предполагается, что Q ($\subset R^3$) произвольно; вместо условия $f \in C(Q)$ предполагается, что $f \in D^1(Q)$; вместо условия $y \in C_1[x_1, x_2]$ предполагается, что $y \in D_1[x_1, x_2]$; вместо произвольных фиксированных точек $P_1, P_2 \in T$ рассматриваются такие точки, что $D_I \neq \varnothing$.

4. В § 8, 9 и 10 под I будем понимать только что определенный функционал. Однако условия, наложенные на определяющие данные, будут поочередно меняться, что каждый раз будет отдельно указываться.

5. Постановку вариационной задачи, состоящей в нахождении функции, доставляющей только что определенному функционалу I, слабый локальный минимум, часто выражают символом

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx \to \text{лок. сл. мин.}$$

В дальнейшем важную роль будет играть следующая лемма.

8.2)

---

[3]Здесь и в дальнейшем выполнение данного свойства внутри замкнутого интервала $[x_1, x_2]$ для некоторой функции $\varphi \in D[x_1, x_2]$ в случае $A = [x_1, x_2] \setminus D_\varphi \neq \varnothing$ означает, что в точках A данное свойство имеет место для каждого из односторонних пределов φ.

Лемма 1 (лемма Дюбуа—Реймона). *Пусть* $m \in (R^1 \to R^1) \cap D[x_1, x_2]$, *и пусть равенство*

$$\int_{x_1}^{x_2} m(x)\,\eta'(x)\,dx = 0$$

выполняется для любой функции η, *удовлетворяющей условию*

(8.3) $\quad \eta \in (R^1 \to R^1) \cap D_1[x_1, x_2]; \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$

Тогда функция m *постоянна, т. е. существует такое число* c, *что выполняется равенство*

$$m(x) = c \quad (x \in D_m).$$

Доказательство. Для произвольного $c \in R^1$ из (8.3) получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} (m(x) - c)\,\eta'(x)\,dx = 0. \tag{8.4}$$

Обозначим через η_0 функцию, определенную на $[x_1, x_2]$ равенством

$$\eta_0(x) = \int_{x_1}^{x} (m(t) - c_0)\,dt, \quad \text{где} \quad c_0 = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} m(x)\,dx.$$

Очевидно, что $\eta_0 \in (R^1 \to R^1) \cap D_1[x_1, x_2]$ и, кроме того, $\eta_0(x_1) = \eta_0(x_2) = 0$, т. е. η_0 удовлетворяет условию (8.3). Так как $\eta_0'(x) = m(x) - c_0$ ($x \in D_m = [x_1, x_2] \setminus A$, где A конечно или пусто), то при $\eta = \eta_0$, $c = c_0$ равенство (8.4) принимает вид

$$\int_{x_1}^{x_2} (m(x) - c_0)^2\,dx = 0.$$

Из этого равенства (учитывая, что подынтегральная функция неотрицательна и принадлежит $D[x_1, x_2]$) получаем, что в любой точке области определения функции m выполняется равенство $m(x) - c_0 = 0$. Лемма 1 доказана.

Замечание. Лемму Лагранжа часто называют первой, а лемму Дюбуа—Реймона — второй основной теоремой вариационного исчисления.

8.2. Первая вариация. Интегро-дифференциальное уравнение Эйлера—Лагранжа

Прежде всего напомним определение слабого локального минимума (см. п. 7.1): говорят, что функционал I достигает на функции $y \in D_I$ слабого локального минимума (или y доставляет слабый локальный минимум функционалу I), если у функции y существует такая окрестность первого порядка $K^1(y)$, что для любых функций $\bar{y} \in K^1(y) \cap D_1$ выполняется неравенство $I[\bar{y}] \geqslant I[y]$.

Предположим, что функция $y \in D_I$ доставляет слабый локальный минимум функционалу I, и обозначим через $K^1(y)$ такую окрестность первого порядка функции y, в которой выполняется неравенство

$$(8.5) \qquad I[\bar{y}] - I[y] \geqslant 0 \quad [\bar{y} \in D_I \cap K^1(y)].$$

Пусть теперь η — произвольная функция, удовлетворяющая условиям

$$(8.6) \quad \eta \in (R^1 \to R^1) \cap D_1[x_1, x_2], \ \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

(т. е. условиям леммы 1). Рассмотрим однопараметрическое семейство функций $y + \varepsilon\eta$ ($(y + \varepsilon\eta) \in R^2 \to R^1$, $D_{y+\varepsilon\eta} = [x_1, x_2] \times R^1$). Из открытости Q и из (8.6) следует, что если ε достаточно мало, скажем $\varepsilon \in k(0)$, где $k(0)$ — достаточно малая окрестность нуля, то

$$(y + \varepsilon\eta) \in K^1(y) \cap D_I.$$

Отсюда и из неравенства (8.5) следует, что функция φ определенная равенством $\varphi(\varepsilon) = I[y + \varepsilon\eta]$ $[\varepsilon \in k(0)]$, в точке $0 \in R^1$ достигает локального минимума.

Предположив, что $f_y, f_{y'} \in D^1(Q)$[4], легко показать, что φ в точке $0 \in R^1$ дифференцируема, причем дифференцировать можно под знаком интеграла, т. е.

$$(8.7) \qquad \varphi'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \{f_y(x, y(x), y'(x))\eta(x) + f_{y'}(x, y(x), y'(x))\eta'(x)\}\,dx = 0.$$

Действительно, обозначим для некоторого фиксированного $\varepsilon \in k(0) \setminus \{0\}$ множество $[x_1, x_2] \setminus D_{y'+\varepsilon\eta'}$ через A, а множества $Q \setminus D_{f_y}$, и $Q \setminus D_{f_{y'}}$ — соответственно через A_1 и A_2 ($A_1, A_2 \subset R^3$). Ясно, что A не зависит от выбора ε и множество $(A \cup \mathrm{pr}_1 A_1 \cup \mathrm{pr}_1 A_2) \cap [x_1, x_2]$ ($\subset R^1$) пусто или конечно. В последнем случае обозначим через n число элементов данного множества, а сами элементы, упорядоченные по величине, — через ξ_i ($i = 1, \ldots, n$):

$$\xi_0 \overset{\mathrm{df}}{=} x_1 < \xi_1 < \ldots < \xi_n < x_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \xi_{n+1}.$$

[4] Символами $f_x, f_y, f_{xy}, f_{y'}, \ldots$ обозначены частные производные основной функции f по переменным, входящим в нижний индекс.

После этого произвольно выберем положительное число ε_0, принадлежащее окрестности $k(0)$, и определим функции $\psi_i \in R^2 \to R^1$, $D_{\psi_i} = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ $(i = 0,1 \ldots, n)$ следующим образом: пусть внутри D_{ψ_i}

$$\psi_i(x, \varepsilon) = f(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)).$$

Продолжим определенную этим равенством функцию на границу D_{ψ_i} так, чтобы сама функция ψ_i и ее частная производная по ε были непрерывными в D_{ψ_i}. Очевидно, что в силу условий $f, f_y, f_{y'} \in D^1(Q)$, а также согласно определениям ξ_i и ε_0 это можно сделать. В таком случае

$$\psi_i, (\psi_i)_\varepsilon \in C([\xi_i, \xi_{i+1}] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]),$$

и поэтому согласно известной классической теореме о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, функция

$$\varphi_i(\varepsilon) \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \psi_i(x, \varepsilon)\, dx$$

непрерывно дифференцируема и дифференцирование можно производить под знаком интеграла. То же самое, очевидно, верно и для функции $\varphi = \sum\limits_{i=0}^{n} \varphi_i$, и после дифференцирования каждой из функций φ_i под знаком интеграла получается требуемое равенство (8.7).

В равенстве (8.7) фигурирует значение некоторого линейного функционала, принимаемое на функции η. Определим этот функционал.

Определение 1. *Пусть $f_y, f_{y'} \in D^1(Q)$, а $y \in D_l$ — произвольная фиксированная функция. Тогда первой вариацией функционала I (относительно функции y), обозначаемой через δI_y, называется функционал, определяющие данные которого (Q^1, f^1, P_1^1, P_2^1) имеют следующий вид*:

а) $Q^1 \overset{\mathrm{df}}{=} [x_1, x_2] \times R^2$ [точки Q^1 обозначим через (x, η, η')][5];

[5]Множество Q^1 не является открытым. Но это не вызывает усложнений, так как при определении функционала не использовалось то, что область определения основной функции является открытой в «направлении первой координаты»; не будет этот факт использован и при доказательстве теоремы 1. Заметим, что это затруднение можно обойти и по-другому, взяв вместо Q^1 открытое множество $Q_*^1 \overset{\mathrm{df}}{=} (a, b) \times R^2$ $\{[x_1, x_2] \subset (a, b)\}$, а вместо функции f^1 — какое-нибудь ее продолжение на $D^1(Q_*^1)$.

б) $f^1 \overset{\mathrm{df}}{=} \Lambda$, где $\Lambda\ (x, \eta, \eta') = f_y(x, y(x), y'(x))\eta +$
$+ f_{y'}(x, y(x), y'(x))\eta'$;

в) $P_1^1 \overset{\mathrm{df}}{=} (x_1, 0)$, $P_2^1 \overset{\mathrm{df}}{=} (x_2, 0)$.

Замечания. **1.** Из условий $f_y, f_{y'} \in D^1(Q)$ следует, что $\Lambda \in D^1(Q^1)$.

2. Если это не приведет к неясности, вместо δI_y будем писать δI. Из приведенного определения ясно, что $D_{\delta I}$ — класс функций, удовлетворяющих условию (8.6) [независимо от выбора функции $y \in D_I$][6].

3. На элементе $\eta \in D_{\delta I}$ функционал δI принимает следующее значение:

$$(8.8) \qquad \delta I[\eta] = \int_{x_1}^{x_2} \Lambda(x, \eta(x), \eta'(x))\, dx = \\ = \int_{x_1}^{x_2} \{f_y(x, y(x), y'(x))\eta(x) + \\ + f_{y'}(x, y(x), y'(x))\eta'(x)\}\, dx \quad (\eta \in D_{\delta I}).$$

Основная функция функционала δI есть линейная функция по переменным η, η'.

4. Если функция y доставляет слабый локальный экстремум функционалу I, то соотношение (8.7) означает, что для любой функции $\eta \in D_{\delta I}$ выполняется равенство $\delta I[\eta] = 0$, т. е., другими словами, первая вариация тождественно обращается в нуль [7].

Утверждение о том, что равенство (8.7) является необходимым условием слабого локального экстремума, может быть в терминах первой вариации сформулировано следующим образом.

Утверждение 1. *Если $f_y, f_{y'} \in D^1(Q)$ и функционал I на функции $y \in D_I$ достигает слабого локального минимума, то первая вариация функционала I относительно y тождественно равна нулю ($R_{\delta I_y} = \{0\}$).*

---

[6] Элементы $D_{\delta I}$ часто обозначают через δy (сравните с п. 3.4).

[7] Под первой вариацией функционала I часто понимают только что определенный функционал, умноженный на ε, где ε — действительный параметр (сравните с п. 3.4). С точки зрения наших исследований постоянный множитель ε не имеет значения, так как на минимальной функции δI есть тождественный нуль.

В следующей формулировке необходимого условия экстремума участвует так называемое интегро-дифференциальное уравнение (и-д. у.).

О р е д е л е н и е 2. *Пусть* $F, \Phi \in (R^3 \to R^1) \cap \cap D^1(Q)$ *— две данные функции, а* $c \in R^1$ *— данная постоянная. Будем говорить, что некоторая функция* $y \in R^1 \to R^1$ *есть решение интегро-дифференциального уравнения*

$$F(x, y, y') = \int_{x_1}^{x} \Phi(x, y, y')\,dx + c, \tag{8.9}$$

если:

α) $y \in D_1[x_1, x_2]$;

β) $(x, y(x), y'(x \pm 0)) \in Q \; (x \in [x_1, x_2])$[8];

γ) для любых значений $x \in D_{y'} \cap \mathrm{pr}_1 D_F$

$$F(x, y(x), y'(x)) = \int_{x_1}^{x} \Phi(t, y(t), y'(t))\,dt + c.$$

И-д. у. (8.9) часто символически записывают так: $F = \int_{x_1}^{x} \Phi dx + c$.

Основой для дальнейших исследований является следующая теорема.

Теорема 1. *Если функционал* I *достигает на функции* $y \in D_I$ *слабого локального минимума и если* $f_y, f_{y'} \in D^1(Q)$, *то существует такая константа* $c \in R^1$, *что функция* y *удовлетворяет уравнению*

$$f_{y'}(x, y, y') = \int_{x_1}^{x} f_y(x, y, y')\,dx + c, \tag{8.10}$$

называемому интегро-дифференциальным уравнением Эйлера—Лагранжа (и-д.у. Э—Л).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция y доставляет слабый локальный минимум, то согласно утверждению 1 для любой функции $\eta \in D_{\delta I_y}$ [т. е. для любой η, удовлетворяющей условиям (8.6)] должно выполняться равенство (8.7).

---

[8] Разумеется, в точке x_1 речь может идти только о правостороннем, а в x_2 — только о левостороннем пределе.

Для краткости дальнейшего изложения введем следующие обозначения:

$$\overline{f}_y(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_y(x, y(x), y'(x)) \quad [x \in D_{y'} \cap \mathrm{pr}_1 D_{f_y}],$$

$$\overline{f}_{y'}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) \quad [x \in D_{y'} \cap \mathrm{pr}_1 D_{f_{y'}}].$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое в подынтегральном выражении в (8.7). Используя (8.6), получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} \overline{f}_y(x)\,\eta(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} \left\{\int_{x_1}^{x} \overline{f}_y(t)\,dt\right\} \eta'(x)\,dx.$$

Подставляя полученное выражение в (8.7), приходим к следующему равенству:

$$(8.11) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \left\{\overline{f}_{y'}(x) - \int_{x_1}^{x} \overline{f}_y(t)\,dt\right\} \eta'(x)\,dx = 0.$$

Если теперь применить к функции $m \overset{\mathrm{df}}{=} \{..\}$, очевидно принадлежащей $(R^1 \to R^1) \cap D\,[x_1, x_2]$, лемму Дюбуа—Реймона, то получим тождество

$$\overline{f}_{y'}(x) = \int_{x_1}^{x} \overline{f}_y(t)\,dt + c \quad [x \in D_{y'} \cap \mathrm{pr}_1 D_{f_{y'}}],$$

где c — постоянная. Но это (по определению 2, $F = f_{y'}$, $\Phi = f_y$) означает именно то, что удовлетворяется и-д. у. Э—Л (8.10). Тем самым теорема 1 доказана.

Замечания. **1.** Уравнение (8.10) называют также и-д. у. Дюбуа—Реймона.

2. Решения и-д. у. (8.10) называют *стационарными функциями* функционала I. Будем называть эти решения *стационарными функциями, соответствующими основной функции* f; если же дополнительно известно, что эти решения принадлежат D_I, то в этом случае будем называть их *стационарными функциями функционала* I.

3. При доказательстве теоремы 1 было показано, что если δI является тождественным нулем, то y удовлетворяет и-д. у. Э—Л. Из равенства (8.11) ясно, что верно и обратное, т. е. верно следующее утверждение.

Утверждение 2. *Для того чтобы первая вариация функционала относительно функции $y \in D_I$ была тождественным нулем, необходимо и достаточно, чтобы функция y была* *решением и-д. у. Э—Л* (8.10) (*или, другими словами, стационарной функцией функционала* I).

Примечание. Как и утверждение 1, теорема 1 есть необходимое условие слабого локального минимума и согласно утверждению 2 эти необходимые условия эквивалентны.

Различие в названиях (теорема и утверждение) объясняется тем, что обычно на практике при использовании данного необходимого условия проверяют, удовлетворяет ли допустимая функция и-д. у. Э—Л. Поэтому, ввиду большой практической важности, утверждения, в которых фигурирует и-д. у. Э—Л, мы называем теоремами.

Использование слов «теорема» и «утверждение» в дальнейшем имеет аналогичный характер.

8.3. Некоторые следствия из интегро-дифференциального уравнения Эйлера—Лагранжа

Вначале исследуем вопрос о том, насколько можно упростить и-д. у. Э—Л, если наложить дополнительные требования дифференцируемости и непрерывности основной и стационарных функций. Предварительно дадим следующее определение.

Определение 3. *Пусть* $F, \Phi \in (R^3 \to R^1) \cap \cap C(Q)$ — *две данные функции. Будем говорить, что функция* $y \in R^1 \to R^1$ *есть решение уравнения*

$$(8.12) \qquad F(x, y, y') - \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y') = 0,$$

если:

α) $y \in C_1[x_1, x_2]$;

β) $(x, y(x), y'(x)) \in Q \quad (x \in [x_1, x_2])$;

γ) $\overline{\Phi} \in C_1[x_1, x_2]$, где $\overline{\Phi}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(x, y(x), y'(x))$;

δ) $\overline{F}(x) - \frac{d}{dx}\overline{\Phi}(x) = 0 \quad (x \in [x_1, x_2])$,

где $\overline{F}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} F(x, y(x), y'(x))$.

Уравнение (8.12) часто будем записывать в краткой форме: $F - \frac{d}{dx}\overline{\Phi} = 0$.

Утверждение 3. *Предположим, что* $f_y, f_{y'} \in C(Q)$ *и что* $y \in D_I$ — *непрерывно дифференцируемая* *стационарная функция функционала I. Тогда y удовлетворяет уравнению Эйлера—Лагранжа*

$$f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') = 0. \tag{8.13}$$

Доказательство. Так как функция $y \in C_1[x_1, x_2]$ — стационарная, то с некоторой постоянной $c \in R^1$ должно выполняться тождество

$$f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = \int_{x_1}^{x} f_y(t, y(t), y'(t))\, dt + c \tag{8.14}$$

$$(x \in [x_1, x_2]).$$

В раде, стоящем в правой части, подынтегральная функция в силу условия $f_y \in C(Q)$ и $y \in C_1[x_1, x_2]$ непрерыв- едовательно, в правой части (8.14), а значит, и в левой находится непрерывно дифференцируемая функция. Поэтому части (8.14) можно продифференцировать; в результате получаем тождество

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0 \tag{8.15}$$

$$(x \in [x_1, x_2]).$$

А это по определению 3 (в котором следует положить $F = f_y$ и $\Phi = f_{y'}$) и означает, что функция y удовлетворяет уравнению Э—Л 13).

Утверждение 4. *Если $f \in C_2(Q)$ и $y \in D_1$ — дважды непрерывно дифференцируемая стационарная функция функционала I, то удовлетворяет д. у. Э—Л*

$$f_y(x, y, y') - f_{xy'}(x, y, y') - \tag{8.16}$$
$$- f_{yy'}(x, y, y')\, y' - f_{y'y'}(x, y, y')\, y'' = 0.$$

Доказател во. Условие утверждения 4 содержит условие утверждения 3; следовательно, выполняется тождество (8.15). Второе слагаемое в левой части тождества (8.15) в силу условий, наложенных на частные производные функции f, и условия $y \in C_2[x_1, x_2]$ можно продифференцировать по правилу дифференцирования сложной функции. После таког дифференцирования получим, что y удовлетворяет д. у (8.16)

З а я: 1. Как и уравнение Э—Л (8.13), д. у. Э—Л (8.16) асто обозначают символом $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$

Употребление этого обозначения для двух разных уравнений следует сопровождать указанием, о каком уравнении идет речь — об уравнении Э—Л, соответствующем утверждению 3, или о д. у. Э—Л, удовлетворяющем условиям утверждения 4.

2. В дальнейшем часто встречается функция $F \in R^4 \to R^1$ ($D_F = Q \times R^1$), стоящая в левой части (8.16):

$$F(x, y, y', y'') \overset{\mathrm{df}}{=} f_y(x, y, y') - f_{xy'}(x, y, y') -$$
$$- f_{yy'}(x, y, y')\, y' - f_{y'y'}(x, y, y')\, y''$$

[здесь точки D_F обозначены через (x, y, y', y'')]. Вместо этой функции F обычно используют символ $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}$.

3. Д. у. Э—Л (8.16) уже встречалось в § 5. В связи с этим обратим внимание на следующее: если $Q^* \subset Q$ — такая область, в которой $f_{y'y'}$ не обращается в нуль, то в этой области д. у. Э—Л — обыкновенное д. у. второго порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$y'' = \frac{1}{f_{y'y'}(x, y, y')} \{f_y(x, y, y') - f_{xy'}(x, y, y') -$$
$$- f_{yy'}(x, y, y')\, y'\};$$

оно эквивалентно системе двух дифференцильных уравнений первого порядка

$$y' = y_1, \tag{8.17}$$

$$y_1' = \frac{1}{f_{y'y'}(x, y, y_1)} \{f_y(x, y, y_1) - f_{xy'}(x, y, y_1) -$$
$$- f_{yy'}(x, y, y_1)\, y_1\}.$$

Приведем теперь одно важное соотношение, относящееся к «точкам разрыва» производной стационарной функции.

Утверждение 5. *Если $f_y, f_{y'} \in C(Q)$ и если y — стационарная функция функционала I, то в любой точке интервала (x_1, x_2) выполняется равенство*

$$f_{y'}(x, y(x), y'(x - 0)) = f_{y'}(x, y(x), y'(x + 0)). \tag{8.18}$$

Доказательство. Равенство (8.18) является прямым следствием и-д. у. Э—Л. Действительно, на множестве $D_{y'}$ ($= [x_1, x_2] \setminus A$, где A либо пусто, либо конечно) выполняется равенство

$$f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = \int_{x_1}^{x} f_y(t, y(t), y'(t))\, dt + c.$$

Но на всем замкнутом интервале $[x_1, x_2]$ функция $x \to \int_{x_1}^{x} f_y(t, y(t), y'(t))\, dt + c$ (являющаяся суммой интеграла и постоянной функции) непрерывна, поэтому и функция, стоящая в левой части последнего равенства, также является сужением некоторой функции из $C[x_1, x_2]$ на множество $[x_1, x_2] \setminus A$. Отсюда очевидным образом следует равенство (8.18). Утверждение 5 доказано.

Замечания: 1. Если $x \in D_{y'}$, то в обеих частях равенства (8.18) стоит одно и то же число. Стало быть, утверждение 5 содержательно только тогда, когда $x \in [x_1, x_2] \setminus D_{y'}$, т. е. когда точка $(x, y(x))$ является угловой точкой графика функции y (или, что то же самое, когда x — точка излома функции y).

2. Равенство (8.18) часто записывают сокращенно $f_{y'}|_- = f_{y'}|_+$ и (вместе с другими условиями подобного характера) называют *условием Вейерштрасса—Эрдмана* (в точке излома y).

Приведем важное следствие из равенства (8.18).

Лемма 2. *Пусть $f \in C_1(Q)$, $(\xi, y(\xi))$ — угловая точка графика функции $y \in D_{y'}$ и предположим, что функция ψ ($\in R^1 \to R^1$, $D_\psi = \{u \in R^1 \mid (\xi, y(\xi), u) \in Q\}$), определенная равенством*

$$\psi(u) = f_{y'}(\xi, y(\xi), u),$$

строго монотонна. Тогда y не является стационарной функцией функционала I.

Доказательство. Точка $(\xi, y(\xi))$ — угловая точка, т. е. $y'(\xi - 0) \neq y'(\xi + 0)$, поэтому в силу строгой монотонности $\psi(y'(\xi - 0)) \neq \psi(y'(\xi + 0))$. Это, по определению ψ, означает, что в точке $\xi \in (x_1, x_2)$ не выполняется условие Вейерштрасса—Эрдмана (8.18) и, согласно утверждению 5, y не может быть стационарной функцией функционала I.

8.4. Вторая вариация

Полученные выше необходимые условия экстремума основывались на том, что первая вариация функционала относительно экстремальной функции является тождественным нулем. Для вывода дальнейших необходимых условий введем понятие *второй вариации*. Если проводить аналогию с действительными функциями многих переменных, то это понятие соответствует второму дифференциалу. Дадим определение второй вариации с помощью второй производной функции φ, введенной в п. 8.2.

Предположим, что $f \in C_2(Q)$ и что функция $y \in D_I$ доставляет слабый локальный минимум функционалу I. Рассмотрим соответствующую функцию $\varphi \in R^1 \to R^1$, определенную равенством $\varphi(\varepsilon) \overset{\mathrm{df}}{=} I[y + \varepsilon\eta]$, где η — произвольная функция, удовлетворяющая условию (8.6). Тогда функция φ по известной теореме о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, в некоторой окрестности $k(0)$ будет два раза непрерывно дифференцируемой. Вычислим $\varphi''(0)$, введя функции $p, q, r \in R^1 \to R^1 \cap D[x_1, x_2]$ следующим образом:

$$(8.19_1) \qquad p(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{yy}(x, y(x), y'(x));$$

$$(8.19_2) \qquad q(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{yy'}(x, y(x), y'(x));$$

$$(8.19_3) \qquad r(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)).$$

Тогда, учитывая определение φ и I и то, что функция φ в точке $0 \in R^1$ достигает локального минимума, два раза дифференцируя $\varphi(\varepsilon)$, получаем

$$(8.20) \qquad \varphi''(0) = \int_{x_1}^{x_2} \{p(x)\eta^2(x) + 2q(x)\eta(x)\eta'(x) + r(x)\eta'^2(x)\}\, dx \geqq 0.$$

Равенством (8.20) определяется значение некоторого функционала на функции η.

Определение 4. *Пусть $f \in C_2(Q)$, а $y \in D_I$ — произвольная фиксированная функция. Второй вариацией $\delta^2 I_y$ функционала I относительно функции y называется функционал, имеющий следующие определяющие данные:*

а) $Q^2 \overset{\mathrm{df}}{=} [x_1, x_2]\times R^2$ [точки Q^2 обозначаются через (x, η, η')][9].

б) $f^2 \overset{\mathrm{df}}{=} 2\Omega$, где $2\Omega(x, \eta, \eta') \overset{\mathrm{df}}{=} p(x)\eta^2 +$
$$+ 2q(x)\eta\eta' + r(x)\eta'^2.$$

в) $P_1^2 \overset{\mathrm{df}}{=} (x_1, 0)$, $P_2^2 \overset{\mathrm{df}}{=} (x_2, 0)$.

Замечания: **1.** Из условий $f \in C_2(Q)$ и $y \in D_I$ следует, что $\Omega \in D^1(Q)$.

2. Значение функционала $\delta^2 I_y$ на элементе η определяется следующим образом:

$$(8.21) \qquad \delta^2 I_y[\eta] = \int_{x_1}^{x_2} \{p(x)\eta^2(x) + 2q(x)\eta(x)\eta'(x) + r(x)\eta'^2(x)\}\,dx$$[10].

Следовательно, соотношения (8.20) можно записать так: $\varphi''(0) = \delta^2 I_y[\eta] \geqq 0$.

Основная функция функционала $\delta^2 I$ есть *квадратичная функция* по переменным η, η'.

3. Легко убедиться в том, что если условие $f \in C_2(Q)$ заменить менее ограничительным условием $f_y, f_{y'}, f_{yy}, f_{yy'}, f_{y'y'} \in D^1(Q^2)$, то и в этом случае $\Omega \in D^1(Q)$ и выполняется равенство $\psi''(0) = \delta^2 I_y[\eta]$.

4. В тех случаях, когда это не приводит к неточности, вместо $\delta^2 I_y$ будем писать $\delta^2 I$.

5. Определяющие данные первой вариации δI и второй вариации $\delta^2 I$ функционала I, введенные определениями 1 и 4, связаны следующими соотношениями: $Q^1 = Q^2$, $P_1^1 = P_1^2$, $P_2^1 = P_2^2$; $D_{\delta I} = D_{\delta^2 I}$.

6. Предположим теперь, что функция y доставляет слабый локальный минимум функционалу I. Это означает, что функция φ в точке $0 \in R^1$ достигает локального минимума и поэтому должно выполняться неравенство $\varphi''(0) \geqq 0$.

---

[9] Множество Q в определении функционала $\delta^2 I$ является открытым. Но это, как и в случае первой вариации, не приводит к каким-либо усложнениям (ср. со сноской 5 на с. 97).

[10] Под второй вариацией функционала I часто понимают только что определенный функционал, умноженный на ε^2, где ε — действительный параметр. Для наших исследований неотрицательный постоянный множитель не имеет значения, так как на минимальной функции согласно (8.20) $\delta^2 I$ не может менять знак.

Прежде чем сформулировать это условие с помощью второй вариации, введем следующие общепринятые обозначения и терминологию. Мы говорим, что $\delta^2 I_y$ — *строго положительно определенный функционал* (обозначение: $\delta^2 I_y > 0$), если $\delta^2 I_y [\eta] \geqslant 0$, $\eta \in D_{\delta^2 I_y}$ и равенство $\delta^2 I_y [\eta] = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\eta(x) \equiv 0$ $(x \in [x_1, x_2])$.

Если $\delta^2 I_y [\eta] \geqslant 0$, $\eta \in D_{\delta^2 I_y}$, причем функционал $\delta^2 I_y$ может обращаться в нуль не только на нулевом элементе, то будем говорить, что функционал $\delta^2 I_y$ является *положительно определенным* (обозначение: $\delta^2 I_y \geqq 0$).

Функционал $\delta^2 I_y$ называют *строго отрицательно определенным* (*отрицательно определенным*) тогда и только тогда, когда — $\delta^2 I_y$ строго положительно определен (положительно определен).

Если $\delta^2 I_y$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то $\delta^2 I_y$ называют *знакопеременным*.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 6. *Если $f \in C_2(Q)$ и если функционал I достигает на функции $y \in D_I$ слабого локального минимума, то функциона   положительно определен.*

З   е ч а н   я. 1. Основой для дальнейших необходимых условий экстремума служит утверждение 6.

2. Получение необходимого условия слабого локального минимума, эквивалентного условию $\delta^2 I_y \geqq 0$ и удобного для практически   применений, представляет собой задачу гораздо более сложную, чем в случае первой вариации. В теоремах, приведенных в п. 8.5   8.7 будут сформулированы *необходимые* условия того, чтобы функционал $\delta^2 I_y$ был положительно определенным, а в § 9 — и *достаточное* условие этого.

8.5. Условие Лежандра

О п р е д е л е н и е 5. *Пусть $f_{y'y'} \in C(Q)$. Будем говорить, что функция $y \in D_I$ удовлетворяет условию Лежандра, если выполняется неравенство*

$$(8.22) \qquad r(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geqq 0 \quad (x \in [x_1, x_2])^{11}.$$

Если соотношение (8.22) выполняется со знаком строгого неравенства, то будем говорить, что y удовлетворяет сильному условию Лежандра.

---

[11]См. сноску на с. 93.

Теорема 2. *Предположим, что $f \in C_2(Q)$ и что функционал I достигает на функции $y \in D_I$ слабого локального минимума. Тогда функция y удовлетворяет условию Лежандра.*

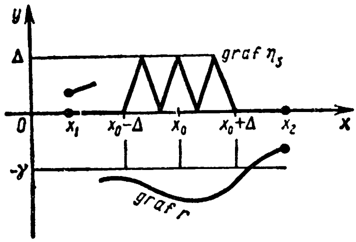

Рис. 9

Приведем два доказательства этой теоремы.

I доказательство. Так как $y \in D_1[x_1, x_2]$, то при доказательстве достаточно ограничиться точками открытого множества $(x_1, x_2) \cap D_{y'}$. Будем рассуждать от противного: предположим, что имеется такая точка $x_0 \in (x_1, x_2) \cap D_{y'}$, для которой $r(x_0) < 0$. Так как $r \in D[x_1, x_2]$, то существуют такие положительные числа Δ и γ $(0 < \Delta < 1)$, что $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta] \subset D_{y'}$ и

(8.23) $$r(x) < -\gamma, \text{ если } x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta].$$

Определим теперь последовательность, состоящую из функций η_k $(k \in N)$, принадлежащих $D_{\delta_2 I}$ [т. е. удовлетворяющих условию (8.6)], следующим образом (рис. 9):

(8.2.4)
$$\eta_k(x) = \begin{cases} k(x - x_0 + \Delta), \\ \qquad \text{если } x \in [x_0 - \Delta, x_0 - \Delta + \Delta/k], \\ -k(x - x_0 + \Delta - 2\Delta/k), \\ \text{если } x \in [x_0 - \Delta + \Delta/k, x_0 - \Delta + 2\Delta/k], \\ \text{периодическая с периодом } 2\Delta/k, \\ \qquad \text{если } x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta], \\ 0, \text{ если } x \in [x_1, x_0 - \Delta] \cup [x_0 + \Delta, x_2]. \end{cases}$$

Из определения ясно, что в случае любого $k \in N$

(8.25) $$|\eta_k(x)| < 1,$$
(8.26) $$|\eta_k'(x \pm 0)| = k \qquad (x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]).$$

Рассмотрим теперь значения, принимаемые функционалом $\delta^2 I_y$ на функциях η_k. Обозначив через α и β верхние грани функций $|p|$, $2|q|$ на замкнутом интервале $[x_1, x_2]$, на основании (8.24) — (8.26) и (8.23) получим

$$\delta^2 I_y[\eta_k] = \int\limits_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} \{p(x)\eta_k^2(x) + 2q(x)\eta_k(x)\eta_k'(x) + r(x)\eta_k'^2(x)\}\, dx \leqq 2\Delta(\alpha + \beta k - \gamma k^2).$$

Так как $\gamma > 0$, то величина в правой части последнего неравенства стремится к $-\infty$ при $k \to \infty$ и поэтому при достаточно больших k $\delta^2 I[\eta_k] < 0$, что противоречит утверждению 6. Тем самым теорема 2 доказана.

II доказательство. Пусть $w \in (R^1 \to R^1) \cap C_1[x_1, x_2]$ — пока произвольная функция. Тогда для любой функции $\eta \in D_{\delta^2 I_y}$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \{2\eta(x)\eta'(x)w(x) + \eta^2(x)w'(x)\}\, dx = 0, \tag{8.27}$$

справедливость которого сразу следует из тождества

$$(\eta^2(x)w(x))' = 2\eta(x)\eta'(x)w(x) + \eta^2(x)w'(x),$$

выполняющегося на множестве $D_{\eta'}$, и из условия $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Следовательно, неравенство (8.20), учитывая (8.27), можно записать так:

$$\delta^2 I_y[\eta] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \{(p(x) + w'(x))\eta^2(x) + 2(q(x) + w(x))\eta(x)\eta'(x) + r(x)\eta'^2(x)\}\, dx \geqq 0. \tag{8.28}$$

Справедливость неравенства (8.22) снова докажем, рассуждая от противного. Из отрицания неравенства (8.22) следует существование такого интервала $(\xi_1, \xi_2) \subset D_{y'}$, что

$$r(x) < 0, \text{ если } x \in (\xi_1, \xi_2). \tag{8.29}$$

Подынтегральную функцию в (8.28) на интервале (ξ_1, ξ_2) в силу (8.29) можно записать так:

$$r\left\{\frac{p+w'}{r}\eta^2 + 2\frac{q+w}{r}\eta\eta' + \eta'^2\right\}.$$

Если дискриминант квадратного трехчлена относительно η', заключенного в скобки, равен нулю, т. е. если

$$(q(x) + w(x))^2 - r(x)(p(x) + w'(x)) = 0 \quad [x \in (\xi_1, \xi_2)], \tag{8.30}$$

то данную подынтегральную функцию можно записать в виде

$$(8.31)\qquad r(x)\left\{\eta'(x)+\frac{q(x)+w(x)}{r(x)}\eta(x)\right\}^2\quad [x\in[\xi_1,\xi_2)].$$

Но тождество (8.30) может иметь место только тогда, когда на интервале (ξ_1, ξ_2) функция w удовлетворяет обыкновенному д. у. первого порядка

$$(8.32)\qquad w'=-p(x)+\frac{(q(x)+w)^2}{r(x)},$$

называемому д. у. Риккати.

Так как в интервале (ξ_1, ξ_2) функция r (как и функции p и q) непрерывна, то функция переменных x и w, стоящая в правой части д. у. (8.32), и ее частная производная по w в области $(\xi_1, \xi_2)\times R^1$ непрерывны. Тогда по теореме Пикара—Линделефа в некотором интервале $(c, d)\subset(\xi_1, \xi_2)$ существует решение д. у. (8.32).

Обозначим символом $\bar{w}\in(R^1\to R^1)\cap C_1[x_1, x_2]$ такую функцию, которая в интервале (c, d) удовлетворяет д. у. (8.32), и возьмем следующую функцию $\bar{\eta}\in D_{\delta^2 I}$:

$$\bar{\eta}(x)\overset{\mathrm{df}}{=}\begin{cases}(x-c)^2(x-d)^2, & \text{если } x\in[c, d],\\ 0, & \text{если } x\in[x_1, c]\cup[d, x_2].\end{cases}$$

Если в неравенство (8.28) подставить функции $\bar{w}$, $\bar{\eta}$, выбранные указанным образом, то оно примет следующий вид:

$$\delta^2 I_y[\eta]=\int_c^d r(x)\left\{\bar{\eta}'(x)+\frac{q(x)+\bar{w}(x)}{r(x)}\bar{\eta}(x)\right\}^2 dx\geqq 0$$

Поскольку функция r в (c, d) отрицательна, из последнего неравенства сразу получим противоречие, если покажем, что функция, заключенная в фигурные скобки, на интервале (c, d) не есть тождественный нуль: в этом случае значение интеграла отрицательно.

Функция, заключенная в фигурные скобки, действительно не является тождественным нулем, так как, например,

$$\lim_{x\to c+0}\frac{\{\cdot\ \cdot\}}{(x-c)(x-d)}=\lim_{x\to c+0}\frac{\eta'(x)+\dfrac{g(x)+\bar{w}(x)}{r(x)}\bar{\eta}(x)}{(x-c)(x-d)}=2(c-d)\neq 0.$$

Второе доказательство завершено

Замечания: 1. Из обоих доказательств видно, что условие Лежандра можно вывести из условия $\delta^2 I_y \geqq 0$. В п. 8.7 будет показано, что обратное не верно: в общем случае даже из сильного условия Лежандра не следует, что $\delta^2 I_y \geqq 0$.

2. Проверка выполнения условий Лежандра требует исследования знака функции $r \in R^1 \to R^1$. С точки зрения вариационной задачи, разумеется, достаточно ограничиться стационарными функциями.

8.6. Теорема Гильберта о дифференцируемости. Регулярный функционал

Следующее утверждение касается двукратной дифференцируемости стационарной функции, имеющей непрерывную производную.

Утверждение 7 (теорема Гильберта о дифференцируемости). *Пусть $f \in C_2(Q)$ и пусть y является стационарной функцией функционала I. Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in [x_1, x_2]$ функция y имеет производную и*

$$r(x_0) = f_{y'y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) \neq 0.$$

Тогда существует такая окрестность $k(x_0)$ точки x_0, что функция y два раза непрерывно дифференцируема на множестве $k(x_0) \cap [x_1, x_2]$.

Приведем два доказательства теоремы Гильберта.

I доказательство. Так как $y \in D_1[x_1, x_2]$, то у точки x_0 существует такая окрестность $k(x_0) \subset D_{y'}^{1}$[2], в которой $r(x) \neq 0$. В этой окрестности функция y должна удовлетворять тождеству

$$(8.33)\quad f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

получающемуся дифференцированием и-д. у. Э—Л (см. доказательство утверждения 3).

Зафиксируем произвольную точку $x \in k(x_0)$ и определим функции $\Delta f_{y'}$, $\Delta y'$, Δy $(\in R^1 \to R^1)$ следующим образом $[(x + \Delta x) \in k(x_0)]$:

$$(8.34)\quad \Delta f_{y'}(\Delta x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{y'}(x + \Delta x, y(x + \Delta x), y'(x + \Delta x)) - f_{y'}(x, y(x), y'(x)),$$

[12]Если точка x_0 совпадает с x_2 или x_1, то под $k(x_0)$ понимается односторонняя окрестность.

$$\Delta y(\Delta x) \overset{\text{df}}{=} y(x+\Delta x) - y'(x),$$

$$\Delta y(\Delta x) \overset{\text{df}}{=} y(x+\Delta x) - y(x).$$

Из определения функции $\Delta f_{y'}$ и из (8.33) следует, что

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f_{y'}(\Delta x)}{\Delta x} = f_y(x, y(x), y'(x)). \tag{8.35}$$

С другой стороны, используя теорему Лагранжа о среднем, из (8.34) получаем равенство

$$\Delta f_{y'}(\Delta x) = \tilde{f}_{xy'}\,\Delta x + \tilde{f}_{yy'}\,\Delta y(\Delta x) + \tag{8.36}$$
$$+ \tilde{f}_{y'y'}\,\Delta y'(\Delta x)\,[(x+\Delta x) \in k(x_0)],$$

в котором знак $\sim$ означает, что функции $f_{xy'}, \ldots$ имеют следующие аргументы: $x + \nu_1\Delta x$, $y(x + \nu_2\Delta x)$, $y'(x + \nu_3\Delta x)$, где ν_i — некоторое число между 0 и 1.

Так как $r(x) = f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0$, если $x \in k(x_0)$, то равенство (8.36) после деления на $\tilde{f}_{y'y'}\,\Delta x$ можно записать в виде

$$\frac{\Delta y'(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{1}{\tilde{f}_{y'y'}} \left\{ \frac{\Delta f_{y'}(\Delta x)}{\Delta x} - \tilde{f}_{xy'} - \right. \tag{8.37}$$
$$\left. - \tilde{f}_{yy'}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} \right\}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то у функции, стоящей в правой части последнего равенства, в силу (8.35) и условий $f \in C_2(Q)$, $k(x_0) \subset D_{y'}$ и $f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0$ существует предел. Так как в левой части (8.37) стоит разностное отношение y' в точке x, то существует $y''(x)$ и выполняется равенство

$$y''(x) = \frac{1}{f_{y'y'}} \{f_y - f_{xy'} - f_{yy'}\,y'(x)\}, \tag{8.38}$$

где аргументы частных производных f равны $(x, y(x), y'(x))$. Поскольку, опять-таки в силу условий $f \in C_2(Q)$ и $k(x_0) \subset D_{y'}$, функция, стоящая в правой части (8.38), непрерывна в $k(x_0)$, функция y два раза непрерывно дифференцируема в $k(x_0)$. Утверждение 7 доказано.

II доказательство. Снова обозначим через $k(x_0)$ такую окрестность x_0, что $k(x_0) \subset D_{y'}$ и $r(x) \neq 0$.

Так как y — решение и-д. у. Э—Л, то существует такое $C \in R^1$, что

(8.39) $$f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = \int_{x_1}^{x} f_y(t, y(t), y'(t))\,dt + c$$
$$(x \in [x_1, x_2]).$$

Если взять окрестность $k^*(u_0)$ точки $u_0 \overset{\text{df}}{=} y'(x_0)$ достаточно малого радиуса, то в силу открытости Q для любой пары $(x, u) \in k(x_0) \times k^*(u_0)$ будет иметь место включение $(x, y(x), u) \in Q$. Определим на множестве $k(x_0) \times k^*(u_0)$ функцию $F \in R^2 \to R^1$ следующим образом:

$$F(x, u) \overset{\text{df}}{=} f_{y'}(x, y(x), u) - \int_{x_1}^{x} f_y(t, y(t), y'(t))\,dt - c.$$

Из предположения $f \in C_2(Q)$ и $k(x_0) \subset D_{y'}$ следует, что $F \in C_1(k(x_0) \times k^*(u_0))$.

Рассмотрим теперь неявную функцию

(8.40) $$F(x, u) = 0.$$

Согласно (8.39), для произвольной фиксированной точки $\bar{x}_1$ окрестности $k(x_0)$ выполняются соотношения

$$F(\bar{x}_1\, y'(\bar{x}_1)) = 0,\ F_u(\bar{x}_1, y'(\bar{x}_1)) = r(\bar{x}_1) \neq 0.$$

Отсюда по известной теореме о неявной функции следует, что существует такая окрестность $k^{**}(\bar{x}_1) \subset k(x_0)$, в которой при начальном условии $u(\bar{x}_1) = y'(\bar{x}_1)$ уравнение (8.40) однозначно разрешимо в классе непрерывных функций и, если это решение обозначить через u, $u \in C_1(k^{**}(\bar{x}_1))$. Но, с другой стороны, сужение функции y' на $k^{**}(\bar{x}_1)$ есть непрерывно дифференцируемое решение уравнения (8.40), удовлетворяющее начальному условию $u(\bar{x}_1) = y'(\bar{x}_1)$. Поэтому в $k^{**}(\bar{x}_1)$ выполняется равенство $u(x) = y'(x)$ и, следовательно, в $k^{**}(\bar{x}_1)$ функция y' непрерывно дифференцируема.

Так как $\bar{x}_1$ — произвольная точка $k(x_0)$, функция y два раза непрерывно дифференцируема в $k(x_0)$. Второе доказательство теоремы Гильберта завершено.

Замечание. Ни в одном из приведенных доказательств не было полностью использовано условие $f \in C_2(Q)$. Второе доказательство можно провести даже при условии, что $f_y, f_{y'}, f_{y'x}, f_{y'y}, f_{y'y'} \in C(Q)$.

Прежде чем перейти к определению важного класса функционалов, так называемых регулярных функционалов, отметим особую роль второй частной производной основной функции f по y':

а) если $f_{y'y'}$ нигде не обращается в нуль, то д. у. Э—Л является д. у., разрешенным относительно старшей производной;

б) на минимальной функции вторая производная $f_{y'y'}$ неотрицательна (условие Лежандра);

в) условие $f_{y'y'} \neq 0$ в некоторых случаях обеспечивает выполнение условий леммы 2, и тогда стационарные функции непрерывно дифференцируемы;

г) если $f_{y'y'} \neq 0$, то любую один раз непрерывно дифференцируемую стационарную функцию можно дифференцировать и два раза (теорема Гильберта).

Определение 6. *Функционал I будем называть регулярным, если $f_{y'y'} \in C(Q)$ и*

$$f_{y'y'}(x, y, y') \neq 0 \ [(x, y, y') \in Q]. \tag{8.41}$$

Если в (8.41) можно поставить знак $>$, то I назовем положительно, а если знак $<$, то отрицательно регулярным функционалом.

Если $f \in C_2(Q)$, то положительно регулярный функционал (по условию Лежандра) из экстремальных значений может достигать только *минимума*. Кроме того, в случае положительно регулярного функционала *любая функция $y \in D_I$ удовлетворяет сильному условию Лежандра.*

Утверждение 8. *Предположим, что $Q = T \times R^1$, f_y, $f_{y'}, f_{y'x}, f_{y'y}, f_{y'y'} \in C(Q)$, I— регулярный функционал, а y— произвольная стационарная функция I. Тогда*

$$y \in C_2[x_1, \ x_2].$$

Доказательство. Так как $Q = T \times R^1$ и выполняется условие (8.41), то выполнены все условия леммы 2 и поэтому $y \in C_1[x_1, x_2]$. Но тогда из теоремы Гильберта (с учетом замечания, сделанного после ее доказательства) следует, что $y \in C_2[x_1, \ x_2]$.

Замечания: 1. Очевидно, что в условии $Q = T \times R^1$ вместо R^1 можно брать произвольный интервал.

2. Из определяющих данных (Q, f, P_1, P_2) функционала I условия утверждения 8 накладывают требования только на Q и f, и поэтому при изменении (допустимом) P_1 и P_2 и сохранении Q и f все стационарные функции будут два раза непрерывно дифференцируемыми.

3. Если функционал I регулярен и $f \in C_2(Q)$, то из утверждений 2 и 4 следует, что *для функции* $y \in D_I$ *первая вариация* δI_y *является тождественным нулем тогда и только тогда, когда* y *есть решение д. у. Э—Л, разрешенного относительно старшей производной.*

Примеры регулярных функционалов. 1. Пусть $Q = T \times R^1$, а основная функция f определяется следующим образом:

$$f(x, y, y') = n(x, y)\sqrt{1 + y'^2},$$

где функция $n \in C(T)$ удовлетворяет неравенству

$$n(x, y) > 0 \quad ((x, y) \in T). \tag{8.42}$$

Очевидно,

$$f_{y'y'}(x, y, y') = n(x, y)\frac{1}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

и поэтому любой функционал I, определенный с помощью основной функции f, является *положительно регулярным.*

Основные функции специальных функционалов, исследованных в § 2, являются частными случаями приведенного: в задаче о брахистохроне [см. (2.2)] $n(x, y) = 1/\sqrt{y + \alpha}$ ($T = \{(x, y) \in R^2 \mid y > -\alpha\}$), а в задаче о минимальной площади поверхности вращения [см. (2.7)] $n(x, y) = y$ ($T = R^2$).

Условие (8.42) в задаче о брахистохроне выполняется, а в задаче о минимальной площади поверхности вращения для его выполнения необходимо вместо области T взять область $T_1 = \{(x, y) \in R^2 \mid y > 0\}$; в дальнейшем мы ограничимся этим случаем (см. задачу 1).

В обеих приведенных задачах $f \in C_2(Q)$, поэтому соответствующие стационарные функции два раза непрерывно дифференцируемы, и удовлетворяют д. у. Э—Л. Это в сочетании с результатами п. 5.3 означает, что *решением задачи о брахистохроне может быть только циклоида, принадлежащая семейству* (5.14), *а решением задачи о минимальной площади поверхности вращения — только цепная кривая, относящаяся к семейству* (5.10).

2. Пусть $f \in C_2(Q)$ и пусть для любой непрерывно дифференцируемой функции $y \in D_I$ в каждой точке $x \in [x_1, x_2]$ выполняется условие $r(x) = f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0$ (сильное условие Лежандра). Тогда функционал $\delta^2 I_y$ — положительно регулярный.

Действительно, основную функцию $\delta^2 I_y$, обозначенную через 2Ω, мы определили равенством

$$2\Omega(x, \eta, \eta') = p(x)\eta^2 + 2q(x)\eta\eta' + r(x)\eta'^2, \ (x, \eta, \eta') \in Q^2,$$

из которого следует, что

$$\Omega_{\eta'\eta'}(x, \eta, \eta') = r(x) > 0, \ (x, \eta, \eta') \in Q^2,$$

а это и означает, что $\delta^2 I_y$ — положительно регулярный функционал.

Условие $r(x) > 0$ $(x \in [x_1, x_2])$, очевидно, выполняется для любого положительно регулярного функционала. Стало быть, если I — положительно регулярный и $f \in C_2$, то в случае любой непрерывно дифференцируемой функции $y \in D_I$ функционал $\delta^2 I_y$ также положительно регулярный.

8.7. Условие Якоби

В п. 8.5 было показано, что условие $\delta^2 I \geqq 0$ влечет за собой выполнение условия Лежандра. В этом пункте мы покажем, что в общем случае, как уже упоминалось, обратное не верно: *условие Лежандра (даже в сильной форме) не всегда обеспечивает выполнение неравенства* $\delta^2 I \geqq 0$. Это заключение можно сделать основываясь на следующем простом наблюдении.

Утверждение 9. *Пусть* $f \in C_2(Q)$ *и пусть функция* $y \in D_I$ *удовлетворяет сильному условию Лежандра.*

Предположим, что существует функция $\bar{\eta} \in D_{\delta^2 I_y}$, *не являющаяся стационарной функцией функционала* $\delta^2 I_y$, *для которой* $\delta^2 I_y[\bar{\eta}] = 0$. *Тогда функционал* $\delta^2 I_y$ *является знакопеременным.*

Утверждение 9 имеет совершенно очевидный смысл: если функция $\bar{\eta}$, на которой $\delta^2 I_y$ обращается в нуль, не является стационарной функцией функционала $\delta^2 I_y$, то на ней $\delta^2 I_y$ не может достигать ни максимума, ни минимума. Это означает, что $\delta^2 I_y$ принимает и положительные, и отрицательные значения, т. е. является знакопеременным.

Для построения функции $\bar{\eta}$ из утверждения G может оказаться полезным следующее утверждение.

Утверждение 10. *Пусть* $f \in C_2(Q)$, $y \in D_I$ *и предположим, что у основной функции функционала* $\delta^2 I_y$ *существует такая, не равная тождественно нулю стационарная функция* η, *которая обращается в нуль в точке* x_1 *и в какой-то точке*

$\bar{x} \in (x_1, x_2)$. *Далее, пусть* $\bar{\eta} \in D_{\delta^2 I_y}$ *— следующая функция* (рис. 10):

$$\eta(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} \eta(x), & \text{если } x \in [x_1, \bar{x}], \\ 0 & \text{если } x \in [\bar{x}, x_2]. \end{cases}$$

Тогда

$$\delta^2 I_y [\bar{\eta}] = 0.$$

Доказательство. Основная функция 2Ω функционала $\delta^2 I_y$ является однородной функцией второго порядка по переменным η, η , поэтому, по теореме Эйлера об однородных функциях,

$$2\Omega(x, \eta, \eta') = \eta\Omega_\eta(x, \eta, \eta') + \eta'\Omega_{\eta'}(x, \eta, \eta')$$
$$[(x, \eta, \eta') \in D_\Omega].$$

Учитывая это тождество и принимая во внимание определение $\bar{\eta}$, получаем

$$\delta^2 I_y [\bar{\eta}] = \int_{x_1}^{\bar{x}} \{\bar{\eta}(x)\,\Omega_\eta(x, \bar{\eta}(x), \eta'(x)) + \tag{8.43}$$
$$+ \bar{\eta}'(x)\,\Omega_{\eta'}(x, \bar{\eta}(x), \bar{\eta}'(x))\}\,dx.$$

Рассмотрим теперь функционал I^*, отличающийся от функционала $\delta^2 I_y$ только тем, что вместо основной функции 2Ω берется Ω, а вместо точки $(x_2, 0)$ — точка $(\bar{x}, 0)$. Пусть η^* — сужение функции η на интервале $[x_1, \bar{x}]$. Тогда равенство (8.43) можно записать так: $\delta^2 I_y [\bar{\eta}] = \delta I^*_{\eta^*}[\eta^*]$. Функция η является стационарной функцией, соответствующей основной функции функционала $\delta^2 I$ и $(\bar{x}, 0) \in \mathrm{graf}\,\eta$. Отсюда и из определения I^* и η^* следует, что функция η^* есть стационарная функция функционала I^*, т. е. $\delta I^*_{\eta^*}[\eta^*] = 0$, поэтому и $\delta^2 I_y [\bar{\eta}] = 0$. Утверждение 10 доказано.

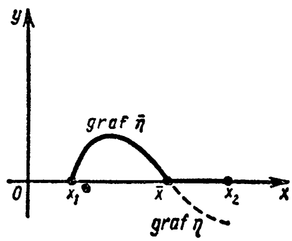

Рис. 10

Замечания: 1. Исследования, связанные с выдвинутой проблемой, целесообразно продолжить в следующем направлении: верно ли, что при выполнении условия Лежандра функцию η в утверждении 10 можно выбрать так, чтобы $\bar{\eta}$ не являлась стационарной функцией второй вариации?

2. Утверждения 9 и 10 выдвигают на первый план исследование стационарных функций, соответствующих основной функции функционала $\delta^2 I_y$. Для упрощения дальнейших рассуждений ограничимся случаем, когда все стационарные функции, соответствующие основной функции функционала $\delta^2 I$, удовлетворяют д. у. Э—Л. Это можно обеспечить наложением подходящих требований на основную функцию, если предположить, что все функции $y \in D_I$ принадлежат $C_1 [x_1, x_2]$ и что стационарная функция y удовлетворяет сильному условию Лежандра. В этом случае, как это было показано в примере 2 предыдущего пункта, $\delta^2 I_y$ — положительно регулярный функционал

3. С точки зрения вариационной задачи нет необходимости в исследовании таких функций $y \in D_I$, которые не являются стационарными функциями функционала I. Поэтому, хотя многие результаты верны и в случае произвольных функций $y \in D_I \cap C_1 [x_1, x_2]$, мы ограничимся изучением стационарных функций функционала I, принадлежащих $C_1 [x_1, x_2]$. Заметим, что в соответствии со сделанным в предыдущем пункте замечанием мы предполагаем выполнение сильного условия Лежандра, поэтому в силу теоремы Гильберта указанные стационарные функции можно непрерывно дифференцировать и два раза.

Следующие определения и результаты относятся к только что упомянутым исследованиям.

Определение 7. *Предположим, что*:

А) $f \in C_3 (Q)$;

Б) $\in C_2 [x_1, x_2]$ — *стационарная функция функционала* I;

В) $r (x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{y'y'} (x, y (x), y' (x)) > 0 \quad (x \in [x_1, x_2])$.

Тогда д. у. Э—Л, связанное с функционалом $\delta^2 I_y$, *назовем дифференциальным уравнением Якоби, связанным с функционалом* I *и функцией* y (*в дальнейшем д. у. Я*).

Используя обозначения (8.19), д. у. Я, связанное с функционалом I и с функцией y, можно записать следующим образом:

$$(8.44)\quad \Omega_\eta - \frac{d}{dx}\Omega_{\eta'} = p\eta + q\eta' - \frac{d}{dx}(q\eta + r\eta') =$$

$$= (p (x) - q' (x))\eta - r' (x)\eta' - r (x)\eta'' = 0.$$

Так как по условию В) $r(x) \neq 0$ $(x \in [x_1, x_2])$, то (8.44) есть однородное обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно старшей производной.

Д. у. Я можем получить и другим способом. Пусть $F \in (R^4 \to R^1) \cap C_1(Q^*)$, где Q^* — некоторая область пространства R^4; точки Q^* обозначим через (x, y, y', y''). Предположим, что функции y, $(y+\eta) \in (R^1 \to R^1) \cap C_2[a, b]$ являются решениями д. у. $F(x, y, y', y'') = 0$:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$$

$$(x \in [a, b]).$$

$$F(x, y(x) + \eta(x), y'(x) + \eta'(x), y''(x) + \eta''(x)) = 0$$

Если число $\|\eta\|^2$ (норма η берется в D_2) достаточно мало, то из приведенных тождеств, используя формулу Тейлора, получаем

$$\sum_{i=0}^{2} F_y^{(i)}(x, y(x), y'(x), y''(x))\, \eta^{(i)}(x) + o_x(\|\eta\|^2) = 0,$$

причем $\lim\limits_{\|\eta\| \to 0} \dfrac{o_x(\|\eta\|^2)}{\|\eta\|^2} = 0$, для

любой точки $x \in [a, b]$. Другими словами, это означает, что разность двух решений исходного дифференциального уравнения является приближенным (по норме D_2) решением д. у.

$$\sum_{i=0}^{2} F_y^{(i)}(x, y(x), y'(x), y''(x))\, \eta^{(i)} = 0.$$

Эти соображения служат основой для следующего определения.

Определение 8. *Дифференциальным уравнением в вариациях, связанным с обыкновенным д. у. второго порядка*

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

и с некоторым его решением y, назовем однородное обыкновенное линейное д. у. второго порядка

$$\overline{F}_y \eta + \overline{F}_{y'} \eta' + \overline{F}_{y''} \eta'' = 0,$$

где черта над частными производными F означает, что аргументы равны $(x, y(x), y'(x), y''(x))$ $(x \in [a, b])$.

Аналогичное определение можно сформулировать для д. у. произвольного порядка n $(n \in N)$.

Резюмируя кратко приведенные выше рассуждения, обычно говорят, что разность двух бесконечно близки шений одного д. у. удовлетворяет соответствующему уравнен в вариациях.

Пусть теперь $F = f_y - \dfrac{d}{dx} f_{y'}$ (см. замечание после утверждения 4), $Q^* = Q \times R^1$, $x_1 = a$, $x_2 = b$. Тогда непосредственным вычислением можно убедиться в том, что уравнение в вариациях, связанное с д. у. Э—Л для функционала I и с функцией y, есть д. у. Я (8.44).

Отметим, что вывод уравнения в вариациях, по существу, указывает и способ его интегрирования (см. утверждение 12).

Определение 9. *Предположим, что выполняются условия А), Б) и В) определения 7. Будем говорить, что функция y удовлетворяет условию Якоби, если*

$$\Delta_y(x) \neq 0 \; [x \in (x_1, x_2)], \tag{8.45}$$

где через Δ_y обозначено решение д. у. Я (8.44), удовлетворяющее начальным условиям $\Delta_y(x_1) = 0$, $\Delta_y'(x_1) = 1$. Если кроме (8.45) выполняется еще и неравенство $\Delta_y(x_2) \neq 0$, то будем говорить о *сильном условии Якоби.*

Замечания: 1. Если это не приведет к неточности, вместо Δ_y будем писать просто Δ.

2. В литературе по вариационному исчислению имеется много эквивалентных формулировок условия Якоби. К ним относится приводимая ниже лемма 3.

Прежде чем ее формулировать, введем понятие сопряженных точек точки $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2 \in R^1$ $(\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2)$ назовем парой сопряженны точек относительно некоторого однородного обыкновенного линейног второго порядка, если существует такое нетривиальное решение этого уравнения, которое в $\bar{\ }$ обращается в нуль.

Лемма *Для того чтобы функция y удовлетворяла условию Якоби, необходимо достаточно выполнение любого из следующих словий*:

а) *любое решение д. у.* (8.44), *отличающееся от тривиального и равное нулю точке x_1 внутри интервала (x_1, x_2) нигде не обращается нуль,*

б) *никакие две точки промежутка $[x_1, x_2)$ не могут являться парой сопряженных точек относительно д у. Я* (8.44)

Д азательство. Пусть — произвольное нетривиальное решение д. у. Я (8.44), довлетворяющее условию $\eta(x_1) = 0$. Тогда по известной теореме об однородных линейных обыкновенных д. у. второго порядка нетривиальные решения Δ_y и η линейно зависимы, из чего следует, что множества их нулей совпадают. Тем самым часть а) леммы доказана.

Достаточность условия б) тривиальна, докажем его необходимость. Предположим, то функция y удовлетворяет условию Якоби, т. е. $\Delta_y(x) \neq 0 \; [x \in (x_1 \;\; x_2)]$. Пусть η —

произвольное решение уравнения (8.44), отличающееся от тривиального. Если η и Δ_y линейно зависимы, то множества нулей η и Δ_y совпадают, т. е. функция η не может привести к появлению пары сопряженных точек в $[x_1, x_2)$. Предположим теперь, что η и Δ_y линейно независимы и $\eta(\bar{x}_1) = \eta(\bar{x}_2) = 0$, где $x_1 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < x_2$. Тогда по осцилляционной теореме Штурма [13] существовала бы такая точка $\bar{x} \in (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, в оторой $\Delta_y(\bar{x}) = 0$. Но тогда вопреки исходному условию точки x_1, $\bar{x}$ образовали бы пару сопряженных точек, расположенных в $[x_1, x_2)$. Лемма 3 доказана полностью.

Утверждение 11. *Сохраняя условия А), Б) и В) определения 7, предположим, что y не удовлетворяет условию Якоби. Тогда функционал $\delta^2 I_y$ является знакопеременным.*

Доказательство. Так как условие Якоби (8.45) не выполняется, то существует такая точка $\bar{x} \in (x_1, x_2)$, в которой $\Delta_y(\bar{x}) = 0$. Тог для функции

$$\bar{\eta}(x) = \begin{cases} \Delta_y(x), & \text{если } x \in [x_1, \bar{x}] \\ 0, & \text{если } x \in [\bar{x}, x_2], \end{cases}$$

согласно утверждению 10 выполняется равенство $\delta^2 I_y[\bar{\eta}] = 0$.

Так как Δ_y — нетривиальное решение д. у. Я (8.44), справедливы соотношения

$$\bar{\eta}'(\bar{x} - 0) \neq 0 = \bar{\eta}'(x + 0). \tag{8.46}$$

Используя условие Вейерштрасса—Эрдмана (8.18) в точке излома $\bar{x}$, покажем, что функция $\bar{\eta} \in D_{\delta^2 I_y}$ не являетс стационарной функцией функционала $\delta^2 I_y$. Поскольку в обозначениях 8.4

$$\Omega_{\eta'}(x, \eta, \eta') = q(x)\eta + (x)\eta' \ [(x, \eta, \eta') \in Q^2],$$

из соотношений (8.46) условия В) и равенства $\bar{\eta}(\bar{x}) = 0$ получаем

$$\Omega_{\eta'}(\bar{x}, \bar{\eta}(\bar{x}), \bar{\eta}'(\bar{x}-0)) = r(\bar{x})\bar{\eta}'(\bar{x}-0) \neq 0,$$
$$\Omega_{\eta'}(\bar{x}, \bar{\eta}(\bar{x}), \bar{\eta}'(\bar{x}+0)) = r(\bar{x})\bar{\eta}'(\bar{x}+0) = 0,$$

---

[13] Осцилляционная теорема Штурма утверждает, что нули двух линейно независимых решений однородного обыкновенного линейного д. у. второго порядка разделяют друг друга, т. е. между соседними нулями одного решения находится ровно один нуль другого.

т. е. для функции $\bar{\eta}$ в точке излома $x \in (x_1, x_2)$ не выполняется условие (8.18), связанное с функционалом $\delta^2 I_y$. Поэтому $\bar{\eta}$ не является стационарной функцией; тогда из уже доказанного равенства $\delta^2 I_y [\bar{\eta}] = 0$ согласно утверждению 9 следует, что функционал $\delta^2 I_y$ — знакопеременный. Утверждение 11 доказано.

Замечания: 1 Если $\Delta_y(x) \neq 0$ $[x \in (x_1, x_2)]$, но $\Delta_y(x_2) = 0$ (иначе говоря, y удовлетворяет условию Якоби, но не удовлетворяет сильному условию Якоби), то, положив в доказательстве утверждения 10 $\bar{\eta} = \Delta_y$, получим, что $\delta^2 I_y [\Delta_y] = 0$. Так как Δ_y не есть тождественный нуль, то последнее равенство означает, что функционал $\delta^2 I_y$ не является строго положительно определенным.

2. Условие $\delta^2 I_y \geqq 0$ необходимо для того (см. утверждение 6), чтобы функция доставляла слабый локальный минимум функционалу I, поэтому из утверждения 11 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Предположим, что*:

а) $f \in C_3(Q)$;

б) $y \in C_2[x_1, x_2]$ *доставляет слабый локальный минимум функционалу* I;

в) $$r(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0 \quad (x \in [x_1, x_2]).$$

Тогда функция y удовлетворяет условию Якоби.

Замечания: 1. Теоремы 1, 2 и 3 устанавливают необходимые услови слабого локального минимума. Если в теоремах 1 и 2 мы предполагали только, что функция y доставляет слабый локальный минимум, то в формулировке теоремы 3 имеются два дополнительных условия слабого локального минимума: условие $y \in C_2[x_1, x_2]$ (см. пример п. 6.2) и условие в) (см. пример 2 настоящего параграфа).

Заметим, однако, что если I — положительно регулярный функционал, то любая его слабая локально экстремальная функция является два раза непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет сильному условию Лежандра.

2. Так как Δ_y — нетривиальное решение однородного обыкновенного линейного д. у. второго порядка, удовлетворяющее условиям $\Delta_y(x_1) = 0$, $\Delta_y'(x_1) = 1$, то существует такое число $d > x_1$, что $\Delta_y(x) \neq 0$ $[x \in (x_1, d) \subset (x_1, x_2)]$. Пусть теперь J — функционал, отличающийся от I только одним из определяющих данных: вместо точки $P_2 = (x_2,$

y_2) взята такая точка (x_2^*, y_2^*), что $x_2^* \in (x_1, d)$; $(x_2^*, y_2^*) \in$ $\in \operatorname{graf} y$ (рис. 11). Тогда, обозначая через y^* сужение y на интервал $[x_1, x_2^*]$, получаем, что в $[x_1, x_2^*]$ выполняется равенство $\Delta_y(x) = \Delta_{y^*}(x)$, т. е. y^* удовлетворяет соответствующему условию Якоби.

Учитывая это обстоятельство, обычно говорят, что условие Якоби локально всегда выполняется.

Обратное, разумеется, не верно: из локального выполнения условия Якоби в приведенном смысле не следует, что функция y удовлетворяет условию Якоби. Иначе говоря, необходимое условие Якоби имеет глобальный характер.

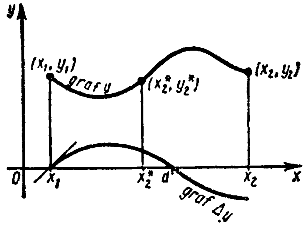

Рис. 11

Пример. Пусть $Q = R^3$, $f(x, y, y') = (y'^2 - y^2)/2$, $P_1 =$ $= (0, 0)$, $P_2 = (2\pi, 0)$.

Так как $f_{y'y'}(x, y, y') = 1$, то соответствующий функционал — положительно регулярный. Поэтому стационарные функции (если они существуют) два раза непрерывно дифференцируемы (утверждение 8) и удовлетворяют соответствующему д. у. Э—Л (утверждение 3), которое в данном случае имеет вид

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = -y - y'' = 0.$$

Общее решение этого уравнения

(8.47) $\quad \varphi(x, a, b) = \quad \sin x + b \cos x \quad (x, a, b \in R^1)$

образует двупараметрическое семейство функции. Очевидно, что данным краевым условиям удовлетворяет любая функция, принадлежащая однопараметрическому семейству

(8.48) $\quad \varphi(x, a, 0) = a \sin x \quad (x \in [0, 2\pi];\ a \in R^1).$

Пусть y — произвольная функция, принадлежащая семейству (8.48). Из определения основной функции f сразу следует, что независимо от y выполняются равенства $p(x) = -1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$ $(x \in [0, 2\pi)]$. Это означает, что независимо от выбора y основная функция функционала $\delta^2 I_y$ равна

$$2\Omega(x, \eta, \eta') = -\eta^2 + \eta'^2 \quad ((x, \eta, \eta') \in [0, 2\pi] \times R^2).$$

Таким образом, функция Ω представляет собой сужение f на множество $[0, 2\pi] \times R^2$. Отсюда следует, что на множестве $[0, 2\pi] \times R^2$ д. у. Э—Л и д. у. Я для функционала I совпадают, т. е. общее решение д. у. Я записывается в виде двупараметрического семейства функций

$$\psi(x, a, b) = a \sin x + b \cos x \ (x \in [0, 2\pi];\ a, b \in R^1).$$

Если положим $a = 1$ и $b = 0$, то получим соответствующую функцию Δ. Так как $\Delta(\pi) = 0$, то необходимое условие Якоби не выполняется и поэтому *функционал I не имеет слабого локального минимума.*

Замечание. Рассмотренная задача дает конкретный пример того, что положительная определенность $\delta^2 I_y$, вообще говоря, не следует из выполнения следующих условий:

1^0. y — стационарная функция.

2^0. Выполняется сильное условие Лежандра.

8.8. Дополнения к условию Якоби

Для проверки выполнения условия Якоби необходимо знать функцию Δ_y, т. е. надо интегрировать д. у. (8.44). Сложную проблему интегрирования однородного линейного д. у. второго порядка в некоторых случаях можно обойти. Если, например, найдено двупараметрическое семейство решений д. у. Э—Л, соответствующего функционалу I, то интегрирование д. у. Я, связанного с какой-нибудь стационарной функцией y, или воспроизведение функции Δ_y может быть осуществлено следующим образом.

Утверждение 12. *Пусть выполняются следующие условия:*

α) $f \in C_3(Q)$;

β) $y \in C_2[x_1, x_2]$ — *стационарная функция функционала* I;

γ) $$r(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0 \ (x \in [x_1, x_2]).$$

Пусть, далее, $\varphi \in R^2 \to R^1$ $(D_\varphi = [x_1, x_2] \times [a_1, a_2])$ — *такая функция, для которой*

δ) $\varphi \in C_3([x_1, x_2] \times [a_1, a_2])$;

ε) *для любого фиксированного* $a \in [a_1, a_2]$ *функция* $\varphi(x, a) \in R^1 \to R^1$ *является стационарной функцией функционала* I;

ζ) *существует такое* $a_0 \in (a_1, a_2)$, *для которого* $\varphi(x, a_0) = y(x)$ $(x \in [x_1, x_2])$.

Тогда функция $\varphi_a(x, a_0)$ *есть решение д. у. Я, связанное с функционалом I и с функцией y.*

Доказательство. Так как φ (при фиксированном a) есть решение соответствующего д. у. Э.—Л, то

$$f_y(x, \varphi(x, a), \varphi_x(x, a)) - \frac{\partial}{\partial x} f_{y'}(x, \varphi(x, a), \varphi_x(x, a)) = 0$$

$$((x, a) \in [x_1, x_2] \times [a_1, a_2]).$$

Продифференцируем обе части данного тождества по a. Тогда, применяя обычные обозначения $p(x) = f_{yy}(x, y(x), y'(x)), \ldots (x \in [x_1, x_2])$ и учитывая условие ζ, при $a = a_0$ получаем тождество

$$p(x)\varphi_a(x, a_0) + q(x)\varphi_{ax}(x, a_0) - \frac{d}{dx}\{q(x)\varphi_a(x, a_0) +$$

$$+ r(x)\varphi_{ax}(x, a_0)\} = 0 \ (x \in [x_1, x_2]).$$

Это тождество [см. (8.44)] и означает, что $\varphi_a(x, a_0)$ есть решение д. у. Я, связанного с функционалом I и с функцией y.

Замечания: 1. Из доказательства утверждения 12 видно, что условие δ) можно заменить, например, следующим, более слабым условием:

δ^*) $\quad \varphi_a, \varphi_{ax}, \varphi_{xa}, \varphi_{axx}, \varphi_{xxa} \in C([x_1, x_2] \times (a_1, a_2))$ и

$$\varphi_{axx}(x, a) = \varphi_{xxa}(x, a) \ ((x, a) \in [x_1, x_2] \times (a_1, a_2)).$$

2. Условие ε) иногда формулируют так: φ есть однопараметрическое семейство стационарных функций; условие ζ): y принадлежит однопараметрическому семейству φ. В дальнейшем мы будем использовать и понятие двупараметрического семейства стационарных функций.

3. Если найдено такое двупараметрическое семейство решений д. у. Э—Л, что при каждом фиксированном значении одного параметра однопараметрическое семейство по другому параметру удовлетворяет условиям α)—ζ), то, дифференцируя по каждому из параметров, можно получить два решения д. у. Я. Если они линейно независимы, то соответствующую функцию Δ_y можно найти в виде их линейной комбинации.

Для применения теоремы 3 согласно лемме 3 функцию Δ достаточно построить с точностью до произвольного ненулевого постоянного множителя.

4. Пусть $f \in C_4(Q)$ и пусть выполняются условия β) и γ) утверждения 12. Обозначим через φ ($\varphi \in R^2 \to R^1$, $D_\varphi = [x_1, x_2] \times [a_1, a_2]$) однопараметрическое семейство решений д. у. Э—Л, в котором параметр a равен тангенсу угла наклона в точке (x_1, y_1) интегральных кривых, проходящих через эту точку. Это означает, что для любого a $[(x_1, a) \in D_\varphi]$ выполняются тождества

$$(8.49) \qquad \varphi(x_1, a) = y_1, \ \varphi_x(x_1, a) = a.$$

Легко можно убедиться в том, что существует такой интервал $[a_1, a_2]$, в котором соответствующая функция φ удовлетворяет остальным условиям утверждения 12.

Действительно, условия $f \in C_n(Q)$, β), и γ) обеспечивают существование такой области $Q^{**} \subset Q$, для которой:

1) $(x, y(x), y'(x)) \in Q^{**} \quad (x \in [x_1, x_2])$;

2) $f_{y'y'}(x, y, y') > 0 \quad [(x, y, y') \in Q^{**}]$

Положим $Q^* \overset{\mathrm{df}}{=} Q^{**} \cap [x_1, x_2] \times R^2$.

Д. у. Э—Л эквивалентно [см. (8.17)] системе д. у. первого порядка, разрешенных относительно производных

$$(8.50) \quad \begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = \dfrac{1}{f_{y'y'}(x, y, y_1)} \{f_y(x, y, y_1) - f_{xy'}(x, y, y_1) - \\ \qquad - f_{yy'}(x, y, y_1)\, y_1\}. \end{cases}$$

Функции, стоящие в правой части, очевидно, принадлежат $C_2(Q^*)$.

Пусть характеристическая функция (из $R^4 \to R^2$), с. д. у. (8.50) имеет компоненты ψ и ψ_1 (из $R^4 \to R^1$). По определению характеристической функции [14],

$$D_\psi = D_{\psi_1} = \bigcup_{(\xi, \eta, \eta_1) \in Q^*} I_{(\xi, \eta, \eta_1)} \times \{(\xi, \eta, \eta_1)\},$$

где $I_{(\xi, \eta, \eta_1)} \subset R^1$ означает (в случае данной с. д. у.) область определения полного решения, удовлетворяющего начальным условиям $y(\xi) = \eta$, $y_1(\xi) = \eta_1$.

Пусть $a_0 = y'(x_1)$ и пусть $[a_1, a_2]$ — промежуток, содержащий внутри себя точку a_0, и настолько малый, что если $a \in [a_1, a_2]$, то $(x_1, y_1, a) \in Q$ и любое полное решение с. д. у. (8.50), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_1) = y_1$, $y_1(x_1) = a$, определено на $[x_1, x_2]$.

Определим теперь функцию $\varphi \in R^2 \to R^1$ $(D_\varphi = [x_1, x_2] \times \times (a_1, a_2))$ следующим образом: $\varphi(x, a) = \psi(x, x_1, y_1, a)$. По из-

[14]Предположим, что задача с начальными данными (з. н. д.) $\dot{y} = Y(x, y)$, $y(\xi) = \eta$ $(x, \xi \in R^1;\ y, \eta \in R^n;\ Y \in R^{n+1} \to R^n)$ однозначно разрешима для произвольных $(\xi, \eta) \in D_Y$; обозначим через $I_{(\xi,\eta)}$ область определения полного (не продолжаемого) решения. Тогда под характеристической функцией с. д. у. $\dot{y} = Y(x, y)$ мы понимаем следующую функцию $\varphi \in R_{(n+2)} \to R^n$:

1) $D_\varphi \overset{\mathrm{df}}{=} \bigcup_{(\xi, \eta) \in D_Y} I_{(\xi, \eta)} \times \{(\xi, \eta)\}$.

2) Значение $\varphi(x, \xi, \eta)$ равно значению решения з. н. д. $y' = Y(x, y)$, $y(\xi) = \eta$ в точке x.

вестной теореме о дифференцировании характеристической функции из $f \in C_4(Q)$ следует, что $\psi, \psi_1 \in C_2(Q^*)$. Так как по формулам (8.50) $\psi_x = \psi_1$, то $\varphi_x \in C_2([x_1, x_2] \times k(a_0))$, т. е. выполняется условие δ^*).

Условие ε), очевидно, следует из определения φ. И, наконец, выполняется и условие ζ), так как с. д. у. (8.50) при данных начальных условиях $[y(x_1) = y_1,\ y'(x_1) = y_1(x_1) = a_0]$ однозначно разрешима.

Из (8.49) дифференцированием получаем

$$\varphi_a(x_1, a_0) = 0, \ \varphi_{xa}(x_1, a_0) = 1,$$

т. е. $\Delta_y = \varphi_a$.

5. Утверждение 12 дает один из способов отыскания некоторых пар сопряженных точек. Сохраним все обозначения и условия этого утверждения и предположим, что

$$\varphi_a(x_1, a_0) = 0, \ \varphi_{ax}(x_1, a_0) \neq 0, \tag{8.51}$$

т. е. на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняется равенство $\varphi_a(x, a_0) = c\Delta(x)$, где $c \neq 0$. Обозначим через H и h ($H, h \in R^1 \to R^1$, $D_H = D_h = [x_1, x_2]$) соответственно верхнюю и нижнюю огибающие функции семейства стационарных функций φ:

$$H(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \max_{a \in [a_1, a_2]} \{\varphi(x, a)\}, \ h(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \min_{a \in [a_1, a_2]} \{\varphi(x, a)\}.$$

Можно легко убедиться в том, что если в какой-то точке $\bar{x} \in (x_1, x_2]$ выполняется хотя бы одно из равенств $y(\bar{x}) = H(\bar{x})$, $y(\bar{x}) = h(\bar{x})$, то x_1 и $\bar{x}$ являются сопряженными точками д. у. Я, связанного с функционалом I и с функцией y.

Действительно, предположим, что, например, $\varphi(\bar{x}_1, a_0) = y(\bar{x}) = H(\bar{x})$, т. е. функция $\varphi(\bar{x}, a) \in (R^1 \to R^1) \cap C_1[a_1, a_2]$ во внутренней точке a_0 достигает максимума. Тогда $\varphi_a(\bar{x}, a_0) = 0$, что и требовалось доказать.

6. Покажем, что условие, имеющее место в предыдущем замечании, не является необходимым для существования пары сопряженных точек.

Исследуем задачу, рассмотренную в п. 8.7: $[Q = R^3$, $f(x, y, y') = (y'^2 - y^2)/2$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2\pi, 0)]$. Пусть y — стационарная функция, тождественно равная нулю на отрезке $[0, 2\pi]$. Определим функцию φ (для произвольно выбранного интервала $[a_1, a_2]$, содержащего внутри себя точку 0) следующим образом:

$$(8.52)\qquad \varphi(x, a) = a \sin x + a^3 \cos x \; \{(x, a) \in [0, 2\pi] \times \times [a_1, a_2]\}.$$

Ясно, что:

α_0) $f \in C_\infty (R^3)$,

β_0) $y \in C_\infty [0, 2\pi]$,

γ_0) $r(x) = 1 > 0 \quad (x \in [0, 2\pi])$,

δ_0) $\varphi \in C_\infty ([x_1, x_2] \times [a_1, a_2])$,

ε_0) φ — семейство стационарных функций,

ζ_0) $\varphi(x, 0) = 0 = y(x) \quad (x \in 0, 2\pi])$

и, кроме того,

$$(8.53)\qquad \varphi_a(0, 0) = 0, \quad \varphi_{ax}(0, 0) = 1.$$

Таким образом, выполняются все условия утверждения 12, а также условие (8.51).

В п. 8.7 было показано, что точки 0 и π являются парой сопряженных точек д. у. Я, относящегося к любой стационарной функции функционала I.

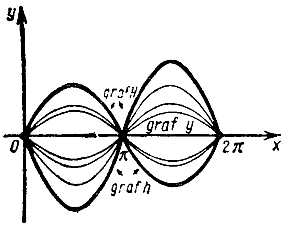

Рис. 12

Так как $H(\pi) = -a_1^3 > 0$, $h(\pi) = -a_2^3 < 0$, $y(\pi) = 0$, то $y(\pi)$ не равно значению ни верхней, ни нижней огибающей функции в точке π.

7. Ограничимся теперь, говоря геометрическим языком, только теми кривыми из семейства (8.52), которые выходят из точки (0,0), т. е. пусть $\varphi_1(x, a) = a \sin x \; \{(x, a) \in [0, 2\pi] \times [a_1, a_2]\}$. Разумеется, что для семейства φ_1 также выполняются соответствующие условия α—ζ) и условие (8.53). Здесь $h(\pi) = H(\pi) = y(\pi) = 0$ (рис. 12).

8. Замечание 5 иногда приводит к тому, что условие Якоби связывают с огибающей некоторого однопараметрического семейства стационарных функций. Однако результаты, приведенные в замечаниях 6 и 7, предостерегают от возможного смешения этих двух неэквивалентных условий.

Задачи: 1. Пусть функционал I имеет следующие определяющие данные: $Q = R^3$, $f(x, y, y') = |y|\sqrt{1 + y'^2}$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ $[y_1 > 0, y_2 > 0]$ (задача о минимальной площади поверхности вращения). Пусть I_1 и I_2 — сужения функционала I, которые отличаются от I тем, что в качестве области определения основной функции в них берутся следующие подмножества Q:

$$\text{в случае } I_1 : Q_1 = \{(x, y) \in R^2 \mid y \geqq 0\} \times R^1,$$

$$\text{в случае } I_2 : Q_2 = \{(x, y) \in R^2 \mid y > 0\} \times R^1.$$

Докажите, что $R_I = R_{I_1} = R_{I_2}$.

Замечание. В случае замкнутого множества Q_1 функционал можно определить так же, как это было сделано в п. 8.1 в случае открытого множества.

Указания: а) Если $y \in D_I$, то $|y| \in D_{I_1}$ и $I[y] = I_1[|y|]$. б) Покажите, что если $y \in D_{I_1}$ и y — минимальная функция, то y нигде не обращается в нуль.

2. Приведите пример функционала I, у которого минимальная функция y не удовлетворяет сильному условию Лежандра.

3. Приведите пример такой пары функционалов I и I^*,

что $Q = Q^*$, $f \neq f^*$, $P_1 = P_1^*$, $P_2 = P_2^*$ и $I[y] = I^*[y]$ для всех $y \in D_I = D_{I^*}$.

Замечание. Таким образом, основная функция однозначно по функционалу не определяется.

Указание. Рассмотрите, например, для основной функции из C_3 вторую вариацию относительно какой-нибудь допустимой функции из C_2.

4. Пусть $f(x, y, y') = f(y')$ $[(x, y, y') \in Q]$. Докажите, что все два раза непрерывно дифференцируемые стационарные функции, соответствующие основной функции f, удовлетворяют сильному условию Якоби.

5. Пусть $y \in (R^1 \to R^1) \cap C_3[x_1, x_2]$, $y(x) \neq 0$ $(x \in [x_1, x_2])$. Предположим, что двухпараметрическое семейство стационарных функций I можно представить в виде $\alpha\Phi\left(\dfrac{x-\beta}{\alpha}\right)$ (сравните с задачей 4 § 5). Докажите, что:

а) если $y''(x) < 0$ $(x \in [x_1, x_2])$, то y удовлетворяет сильному условию Якоби;

б) если $y''(x) > 0$ $(x \in [x_1, x_2])$, то точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in [x_1, x_2]$ образуют пару сопряженных точек, тогда и только тогда, когда касательные, проведенные к кривой $y = y(x)$ $(x \in [x_1, x_2])$ в точках $(\bar{x}_1, y(\bar{x}_1))$ и $(\bar{x}_2, y(\bar{x}_2))$, пересекаются на оси Ox.

6. У каких приведенных ниже функционалов существует не непрерывно дифференцируемая стационарная функция:

а) $Q = R^3$, $f(x, y, y') = y'^2 + y'^4$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$;

б) $Q = R^3$, $f(x, y, y') = y'^2(1 - y')^2$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 1)$;

в) $Q = R^3$, $f(x, y, y') = y^2(1 - y'^2)$, $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (1, 1)$;

г) $Q = R^3$, $f(x, y, y') = y'^4 - 6y'^2$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 1)$.

7. Докажите лемму Дюбуа—Реймона (лемма 1), используя только такие функции, производная которых кусочно постоянна.

8. Докажите следующий вариант леммы Дюбуа—Реймона: пусть $m \in R^1 \to R^1$ — функция, ограниченная и интегрируемая по Лебегу на интервале $[x_1, x_2]$; предположим, что равенство $\int\limits_{x_1}^{x_2} m(x)\eta'(x)dx = 0$ выполняется для любой функции η, удовлетворяющей условию

$$\eta \in (R^1 \to R^1) \cap T[x_1, x_2]; \ \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Тогда существует такое $c \in R^1$, что почти всюду в интервале $[x_1, x_2]$ выполняется равенство $m(x) = c$.

9. Пусть I^* — такое расширение функционала I, в котором условие $y \in D_1[x_1, x_2]$ заменено условием $y \in T[x_1, x_2]$ [см. п. 8.1, i)]. Опираясь на решение задачи 7, докажите следующее: если $f \in C_1(Q)$ и y является экстремальной функцией функционала I^*, то существует такое $c \in R^1$, что y почти всюду в интервале $[x_1, x_2]$ удовлетворяет и-д. у. Э—Л $f_{y'} = \int\limits_{x_1}^{x} f_y\,dt + c$.

10. Докажите, что если функционал J, определенный на линейном нормированном пространстве S, дифференцируем два раза в точке $x \in S$ и достигает в этой точке локального минимума, то его вторая вариация в точке x положительно определена.

Замечание. Функционал от двух аргументов $M^*(x, y)$, определенный на декартовом произведении $S \times S$, называется билинейным, если он при любом фиксированном значении одного аргумента, является линейным фунционалом относительно другого. Если M^* — билинейный функционал ($D_{M^*} = S \times S$), то функционал M ($D_M = S$), определенный равенством $M(x) = M^*(x, x)$ ($x \in S$), называется квадратичным функционалом. Функционал J, определенный на линейном нормированном пространстве S, называется два раза дифференцируемым в точке $x \in S$, если

$$J[x+h] - J[x] = L_x[h] + M_x[h] + o\{(||h||^2)\} \ ((x+h) \in S),$$

где L_x — линейный, а M_x — квадратичный функционал; M_x называют также второй вариацией (вторым дифференциалом) в точке x и обозначают символом $\delta^2 J_x$. Говорят, что J в точке $x \in S$ достигает локального минимума, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для всех $\bar{x} \in S$, удовлетворяющих условию $||\bar{x} - x|| < \varepsilon$, выполняется неравенство $J[\bar{x}] \geqslant J[x]$.

11. Пусть I — функционал, определенный в п. 8.1, и предположим, что $f \in C_2(Q)$; фиксируем $y \in D_I$ и рассмотрим функционал $\bar{I}$, определенный на линейном нормированном пространстве (8.6) (с нормой D_1) равенством $\bar{I}[\eta] \overset{\mathrm{df}}{=} I[y + \eta]$. Докажите, что в смысле определения из задачи 10 функционал $\bar{I}$ на функции $\eta(x) \equiv 0$ ($x \in [x_1, x_2]$) два раза дифференцируем и его вторая вариация с точностью до постоянного множителя совпадает с функционалом $\delta^2 I_y$ (определенным в п. 8.4).

§ 9. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СЛАБОГО ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА

Всюду в этом параграфе I — функционал, определенный в п. 8.1.

9.1. Предварительные замечания и леммы

α) В п. 6.2 были сформулированы требования, которым должны удовлетворять достаточные условия. *Такие достаточные условия, как это будет далее показано, естественным образом основываются на условии Якоби.*

В данном параграфе особую роль будут играть следующие условия:

А) $f \in C_3(Q)$;

Б) $y \in C_2[x_1, x_2]$ — стационарная функция функционала I;

В) $r(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0 \; (x \in [x_1, x_2])$;

Г) $\Delta_y(x) \neq 0 \quad (x \in ([x_1, x_2])$.

Замечания: 1. Условие А) не представляет собой существенного ограничения: основные функции, встречающиеся на практике, обычно дифференцируемы сколь угодно много раз.

2. Условие Б) означает действительное ограничение, которое, говоря геометрическим языком, требует исключения из рассмотрения стационарных кривых, имеющих угловые точки. Причина этого заключается с одной стороны, в том, что из-за ограниченности объема данной книги нет возможности исследовать достаточные условия более сложного характера, относящиеся к стационарным кривым, имеющим угловые точки; с другой стороны, любая допустимая кривая, имеющая угловую точку, состоит из гладких дуг, поэтому исследование таких кривых можно на первом шаге свести к исследованию гладких кривых.

В связи с условием Б) обратим внимание на то, что если выполнено условие В), то в силу теоремы Гильберта нет такой стационарной функции, которая принадлежала бы к классу функций $C_1[x_1, x_2] \diagdown C_2[x_1, x_2]$.

3. О важности условий В) и Г) см. замечание 1 к лемме 1.

β) Для удобства приведем формулы, на которые в дальнейшем будем часто ссылаться: формулу для значений второй вариации

$$(9.1) \qquad \delta^2 I_y[\eta] = \int_{x_1}^{x_2} \{p(x)\eta^2(x) + 2q(x)\eta(x)\eta'(x) + r(x)\eta'^2(x)\}\,dx$$

и дифференциальное уравнение Якоби (д. у. Я)

$$9.2) \qquad (p(x) - q'(x))\eta - r'(x)\eta' - r(x)\eta'' = 0,$$

связанное с функцией y [см. (8.21) и (8.44)], где функция r определена в условии В), а функции $p, q \in (R^1 \to R^1) \cap \cap C_1[x_1, x_2]$ определяются так же, как и раньше [см. (8.19)]:

$$p(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{yy}(x, y(x), y'(x)), \ q(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{yy'}(x, y(x), y'(x))$$
$$x \in [x_1, x_2]).$$

Замечания: 1. Подынтегральную функцию в правой части равенства (9.1) интегрированием второго члена по частям можно было бы привести к более простому виду. Однако в дальнейших исследованиях это не привело бы к какому-либо упрощению.

2. Для сокращения д. у. (9.2) часто записывают символически так:

$$(p - q')\eta - (r\eta')' = 0.$$

γ) В дальнейшем часто будет применяться следующая лемма.

Лемма 1. *Предположим, что выполняются условия А), Б) и В). Тогда существует такой функционал I^* и такое продолжение y^* функции y, что:*

а) *определяющие данные функционала I^* следующие: Q, f,*

$$P_1^* = (x_1^*, y_1^*), \ P_2^* = (x_2^*, y_2^*), \text{ где } x_1^* < x_1, \ x_2^* > x_2;$$

б) *$y^* \in C_2[x_1^*, x_2^*]$ — стационарная функция функционала I^*;*

в) $r^*(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{y'y'}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)) > 0 \ (x \in [x_1^*, x_2^*])$.

Если дополнительно предположить, что выполняется и условие Г), то I^* и y^* можно выбрать так, что кроме приведенных условий выполняется еще и неравенство

г) $\Delta_{y^*}(x) \neq 0 \ (x \in (x_1^*, x_2^*])$,

где Δ_{y^*} — решение д. у. Я, связанного с функционалом I^* и с функцией y^* (удовлетворяющее обычным начальным условиям $\Delta_{y^*}(x_1^*) = 0$, $\Delta'_{y^*}(x_1^*) = 1$).

Доказательство. Пусть

$$\Gamma = \{(x, y, y') \in R^3 \mid x \in [x_1, x_2], \ y = y(x), \ y' = y'(x)\}.$$

В силу условия В) непрерывная функция $f_{y'y'}$ ($\in R^3 \to R^1$) положительна на Г, поэтому у кривой Г существует такая окрестность, которую мы обозначим через Q^* ($Q^* \subset Q$), на которой

$$(9.3) \qquad f_{y'y'}(x, y, y') > 0 \ [(x, y, y') \in Q^*].$$

На множестве Q^* д. у. Э—Л, отвечающее функционалу I (как это отмечено в п. 8.3), эквивалентно следующей с. д. у

$$(9.4) \quad \begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = \dfrac{1}{f_{y'y'}(x, y, y_1)} \{f_y(x, y, y_1) - f_{xy'}(x, y, y_1) - \\ \quad - f_{yy'}(x, y, y_1)\, y_1\}. \end{cases}$$

Функции, стоящие в правой части с. д. у. (9.4), по условию А) на Q^* непрерывно дифференцируемы, поэтому любая задача с начальными данными однозначно разрешима и интегральная кривая (полного) решения проходит от границы до границы Q^*.

Обозначим через Y и Y_1 компоненты полного решения с. д. у. (9.4) при начальных условиях $y(x_1) = y_1$, $y_1(x_1) = y'(x_1)$.

Пусть (α, β) — наибольший интервал, на котором существует решение. В силу однозначности решения стационарная функция y есть сужение Y. Полное решение проходит от границы до границы Q^* и $(x_1, y_1, y'(x_1))$, $(x_2, y_2, y'(x_2)) \in Q^*$, поэтому $[x_1, x_2] \subset D_Y \overset{\mathrm{df}}{=} (\alpha, \beta)$.

Ясно, что Y является решением д. у. Э—Л. и $(x, Y(x), Y'(x)) \in Q^*$ при $x \in (\alpha, \beta)$. Таким образом, в силу неравенства (9.3)

$$(9.5) \qquad f_{y'y'}(x, Y(x), Y'(x)) > 0 \ [x \in (\alpha, \beta)].$$

Фиксируем теперь произвольные точки (x_1^*, y_1^*) и (x_2^2, y_2^*), удовлетворяющие соотношениям (x_1^*, y_1^*), $(x_2^*, y_2^*) \in \operatorname{graf} Y$ $(x_1^* < x_1, x_2^* > x_2)$, и обозначим через y^* сужение Y на промежуток $[x_1^*, x_2^*]$. Из определения Y и из (9.5) следует, что функция y^* удовлетворяет условиям а), б) и в).

Осталось доказать, что выполнение условия Г) влечет за собой условие г). Для этого с помощью функции Y продолжим коэффициенты дифференциального уравнения (9.2) на интервал (α, β):

$$(9.6) \quad \left\{f_{yy}(x, Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{yy'}(x, Y(x), Y'(x))\right\} \eta -$$
$$- \frac{d}{dx} f_{y'y'}(x, Y(x), Y'(x))\, \eta' - f_{y'y'}(x, Y(x), Y'(x))\, \eta'' = 0.$$

В силу (9.5) однородное обыкновенное линейное д. у. (9.6) можно разрешить относительно второй производной. Обозначим через η решение д. у. (9.6), удовлетворяющее начальным условиям $\eta(x_2) = 0$, $\eta'(x_2) = 1$ $[D_\eta = (\alpha, \beta)]$. Из условия Г), очевидно, следует, что Δ_y и η линейно независимы. Так как по теореме Штурма нули решений η и Δ_y «разделяют друг друга», то существует такое число $\xi_1 \in (\alpha, x_1)$, что $\eta(x) \neq 0$ $[x \in [\xi_1, x_2)]$.

Пусть теперь η_1 — такое решение д. у. (9.6), для которого $\eta_1(\xi_1) = 0$, $\eta_1'(\xi_1) = 1$. Так как и η и η_1 линейно независимы, рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что существует такое $\xi_2 \in (x_2, \beta)$, что

(9.7) $\quad \eta_1(x) \neq 0 \quad (x \in (\xi_1, \xi_2]).$

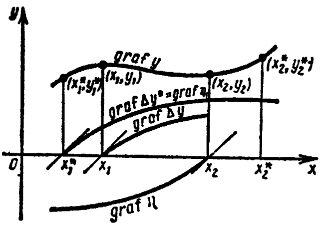

Рис. 13

В первой части доказательства $x_1^* \in (\alpha, x_1)$ и $x_2^* \in (x_2, \beta)$ могли быть произвольными. Положим теперь $x_1^* = \xi_1$ и $x_2^* = \xi_2$; тогда $\Delta_{y^*} = \eta_1$ (где через y^* по-прежнему обозначено сужение Y на интервал $[x_1^*, x_2^*] = [\xi_1, \xi_2]$) (рис. 13). В таком случае соотношение (9.7) и означает, что выполняется условие г). Тем самым лемма 1 полностью доказана.

Замечания: 1. Лемма 1 утверждает, что при достаточно малом расширении стационарной функции (переход от функции y к функции y^*) сильное условие Лежандра и сильное условие Якоби сохраняются. Подобное замечание об условиях Якоби и Лежандра, не являющихся сильными очевидно, сделать нельзя. Этим объясняется то, что во многих исследованиях вместо обычных условий Лежандра и Якоби на первый план выдвигается их сильная форма.

2. Важное следствие леммы 1 сформулируем отдельно. Заметим, что сужение на интервал $[x_1, x_2]$ функции Δ_{y^*} из леммы 1 нигде не обращается в нуль. Поэтому верна следующая лемма.

Лемма 2. *Предположим, что выполняются условия А)—Г). Тогда у д. у. Я, связанного с функционалом I и с функцией y, существует такое решение, которое в интервале $[x_1, x_2]$ нигде не обращается в нуль.*

б) Отправной точкой исследований, относящихся к отысканию достаточных условий, может служить постановка следующей проблемы. Предположим, что выполняются условия А), Б) и В). Напомним, что во втором доказательстве теоремы 2 из § 8 о необходимости условия Лежандра фигурировало д. у. Риккати

$$w' = -p(x) + \frac{(q(x)+w)^2}{r(x)} \tag{9.8}$$

[см. (8.31)]. Из этого доказательства ясно, что если на каком-либо интервале, расположенном внутри отрезка $[x_1, x_2]$, уравнение (9.8) имеет решение, то в интеграле, задающем значения функционала $\delta^2 I$, подынтегральную функцию на данном интервале можно записать в виде $r(x)\{\dots\}^2$ [см. (8.31)]. Поэтому если у д. у. (9.8) существовало бы решение, определенное на всем интервале $[x_1, x_2]$, то упомянутое преобразование подынтегральной функции можно было бы сделать на всем промежутке $[x_1, x_2]$, из чего в силу В) следовало бы, что функционал $\delta^2 I_y$ является положительно определенным. Однако такое решение в общем случае не существует (см. необходимость условия Якоби, § 8, теорема 3), поэтому, учитывая известную связь уравнения Риккати с однородным линейным д. у. второго порядка, естественно поставить проблему о том, как связаны между собой условие Риккати (9.8) и д. у. Я (9.2). К этому кругу вопросов относится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия А), Б) и В). Предположим, что у д. у. Я* (9.2) *существует решение u, удовлетворяющее условию*

$$u(x) \neq 0 \quad (x \in [x_1, x_2]).$$

Тогда функция $w \in (R^1 \to R^1) \cap C_1[x_1, x_2]$, определенна равенством

$$w = -q - r\frac{u'}{u}, \tag{9.9}$$

есть решение д. у. Риккати (9.8).

Доказательство. Найдем производную w'. В результате простых преобразований получаем

$$w' = -q' - r'\frac{u'}{u} - r\frac{u''u - u'^2}{u^2} = \frac{1}{u}[(p-q')u -$$

$$-r'u' - ru''] - p + r\frac{u'^2}{u^2}$$

Так как u — решение д. у. Я (9.2), то выражение, заключенное в квадратные скобки, тождественно равно нулю. Учитывая это, из написанного равенства и из определения (9.9) получаем равенство

$$w' = -p + (q + w)^2/r,$$

т. е. w есть решение д. у. (9.8). Лемма 3 доказана.

Отметим, что если выполняются условия А)—Г), то согласно лемме 2 выполняются и условия леммы 3, т. е. в этом случае преобразование, примененное в уже упоминавшемся втором доказательстве теоремы 2 из § 8, можно сделать на всем интервале $[x_1, x_2]$. Применив это преобразование, получим

$$\delta^2 I_y [\eta] = \int_{x_1}^{x_2} r(x) \left\{ \eta'(x) + \frac{q(x) + w(x)}{r(x)} \eta(x) \right\}^2 dx \ (\eta \in D_{\delta^2 I_y}),$$

откуда следует, что $\delta^2 I_y$ является строго положительным функционалом.

Действительно, в силу условия $r(x) > 0$ функционал $\delta^2 I_y$ может обратиться в нуль только на такой функции, которая является решением однородного линейного, д. у. $\eta' = -\frac{q(x) + w(x)}{r(x)} \eta$. Согласно известной теореме единственности, решением этого уравнения, удовлетворяющим начальному условию $\eta(x_1) = 0$, является только лишь функция, тождественно равная нулю на $[x_1, x_2]$.

9.2. Достаточные условия

Теорема 1. *Предположим, что для функции y выполняются условия А)—Г) предыдущего пункта. Тогда функционал I на функции y достигает слабого локального минимума.*

Доказательство проведем в несколько шагов.

а) По леммам 2 и 3 у д. у. (9.8) существует решение, определенное в интервале $[x_1, x_2]$. Тогда по известной теореме о зависимости решения обыкновенного д. у. от параметра (стоящего в правой части д. у.) при любом достаточно малом $\alpha > 0$ у д. у. (Риккати)

$$w' = -p(x) + \frac{(q(x) + w)^2}{r(x)} + \alpha \tag{9.10}$$

существует решение, определенное на всем промежутке $[x_1, x_2]$. Зафиксируем такое число α и предположим, что w — решение соответствующего д. у. (9.10) ($D_w = [x_1, x_2]$).

б) На следующем шаге будем действовать так же, как и при доказательстве теоремы 2 из § 8. Пусть η — произвольная функция из $D_{\delta^2 I}$. Так как для любого x из области определения η' выполняется равенство $\frac{d}{dx}(w(x)\,\eta^2(x)) = w'(x)\,\eta^2(x) + 2w(x)\,\eta(x)\,\eta'(x)$, то, принимая во внимание условия $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} \{w'(x)\,\eta^2(x) + 2w(x)\,\eta(x)\,\eta'(x)\}\,dx = 0.$$

Добавим этот равный нулю интеграл к правой части (9.1)

$$\delta^2 I_y[\eta] = \int_{x_1}^{x_2} \{(p(x) + w'(x))\,\eta^2(x) + 2(q(x) + w(x))\,\eta(x)\,\eta'(x) + r(x)\,\eta'^2(x)\}\,dx.$$

Так как w — решение д. у. (9.10), то из этого равенства в результате простых вычислений получаем, что для любой функции

$$\eta \in D_{\delta^2 I_y}$$

$$\text{(9.11)} \qquad \delta^2 I_y[\eta] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{\alpha\eta^2(x) + r(x)\left[\eta'(x) + \frac{q(x) + w(x)}{r(x)}\,\eta(x)\right]^2\right\}dx.$$

в) Рассмотрим теперь окрестность $k_{2\varepsilon^*}(\Gamma)$ множества

$$\Gamma = \{(x, y, y') \in R^3 \mid x \in [x_1, x_2],\ y = y(x),\ y' = y'(x)\}$$

настолько малого радиуса $2\varepsilon^* > 0$, что $k_{2\varepsilon^*}(\Gamma) \subset Q$. Фиксируем произвольную функцию $\bar{y} \in K^1_{\varepsilon^*}(y) \cap D_I$ и найдем значение разности $I[\bar{y}] - I[y]$. Так как $f \in C_3(Q)$, то можно применить формулу Тейлора с остаточным членом третьего порядка. Согласно этой формуле, существует такая функция Θ, удовлетворяющая неравенству $0 < \Theta(x) < 1$ $(x \in [x_1, x_2])$, что выполняется равенство

$$\text{(9.12)} \qquad I[\bar{y}] - I[y] = \delta I_y[\bar{\eta}] + \frac{1}{2}\,\delta^2 I_y[\bar{\eta}] + \frac{1}{6}\int_{x_1}^{x_2} d^3 \tilde{f}(x)\,dx,$$

где $\bar{\eta} = \bar{y} - y$,

$$(9.13)\qquad d^3\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \frac{\partial^3 \tilde{f}}{\partial y^{3-i}\, \partial y'^{i}} \bar{\eta}^{3-i}(x)\, \bar{\eta}'^{i}(x),$$

а знак $\sim$ указывает, что аргументы частных производных f равны $[x,\ y(x) + \Theta(x)\bar{\eta}(x),\ y'(x) + \Theta(x)\eta'(x)]$ $(x \in \in D_{\bar{y}'})$.

Так как y — стационарная функция I, то $\delta I_y[\eta] = 0$. Заметим далее, что значения $\delta^2 I_y[\bar{\eta}]$ вычисляются с помощью интеграла, стоящего в правой части (9.11). Поэтому для доказательства данной теоремы достаточно показать следующее: существует такое число $\varepsilon > 0$, что если только $\|\bar{\eta}\|^1 < \varepsilon$, то подынтегральная функция в интеграле (9.11) для любого значения $x \in D_{\bar{y}'}$ больше $(1/3)\, d^3\tilde{f}(x)$. Отсюда следует, что правая часть (9.12) неотрицательна.

г) Для упрощения дальнейших вычислений введем следующие обозначения:

$$(9.14_1)\qquad \beta = \inf R_r \quad (\beta > 0),$$

$$(9.14_2)\qquad a(x) = \frac{q(x) + w(x)}{r(x)} \quad (x \in [x_1, x_2]),$$

$$9.14_3)\qquad a_i(x) = \frac{1}{3}\binom{3}{i}\frac{\partial^3 \tilde{f}}{\partial y^{3-i}\,\partial y'^{i}} \quad (i = 0, \ldots, 3;\ x \in D_{\bar{y}'}).$$

Докажем теперь, что существует такое число $\varepsilon > 0$, что если $x \in D_{\bar{y}'}$ и $(\sigma_1, \sigma_2) \in k_\varepsilon(0, 0)$ $(\subset R^2)$, то

$$(9.15)\qquad \alpha\sigma_1^2 + \beta\sigma_3^2 \geqq \sum_{i=0}^{3} a_i(x)\, \sigma_1^{3-i}\sigma_2^{i},$$

где $\sigma_3 \overset{\mathrm{df}}{=} \sigma_2 + a(x)\,\sigma_1$.

В правой части неравенства (9.15) (при любом фиксированном x) стоит однородный многочлен h третьего порядка по переменным σ_1 и σ_2. Перейдя в этом многочлене к переменным σ_1 и σ_3 и проделав алгебраические преобразования, получим функцию h^* $(\in R^3 \to R^1,\ D_{h^*} = D_{\bar{y}'} \times R^2)$:

$$(9.16)\qquad h^*(x, \sigma_1, \sigma_3) \overset{\mathrm{df}}{=} h(x, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{i=0}^{3} b_i(x)\, \sigma_1^{3-i}\sigma_3^{i}.$$

Так как функции a_i ограничены, то функции b_i также являются ограниченными: $|b_i(x)| < \gamma$ $(i = 0, \ldots, 3;\ x \in \in D_{\bar{y}'})$.

Выберем теперь число $\varepsilon > 0$ так, чтобы для всех $(\sigma_1, \sigma_2) \in k_\varepsilon(0, 0)$ выполнялось неравенство

$$(9.17) \qquad \gamma(|\sigma_1| + |\sigma_2|) < \min\{\alpha, \beta\}.$$

Тогда из равенства (9.16), из неравенств $|b_i(x)| < \gamma$ и (9.17) получаем следующую оценку:

$$\alpha\sigma_1^2 + \beta\sigma_2^2 - \sum_{i=0}^{3} a_i(x)\sigma_1^{3-i}\sigma_2^i = \alpha\sigma_1^2 + \beta\sigma_2^2 -$$

$$- \sum_{i=0}^{3} b_i(x)\sigma_1^{3-i}\sigma_2^i =$$

$$= \sigma_1^2(\alpha - b_0(x)\sigma_1 - b_1(x)\sigma_2) + \sigma_2^2(\beta - b_2(x)\sigma_1 - b_3(x)\sigma_2) >$$

$$> \sigma_1^2\{\alpha - \gamma(|\sigma_1| + |\sigma_2|)\} + \sigma_2^2\{\beta - \gamma(|\sigma_1| + |\sigma_2|\} \geqslant 0.$$

Тем самым справедливость неравенства (9.15) доказана.

д) Выберем теперь положительное число ε, определенное в п. г), удовлетворяющим условию $\varepsilon \leqq \varepsilon^*$. Пусть $\bar{y} \in K_\varepsilon^1(y) \cap D_l$ — произвольная функция и $\bar{\eta} = \bar{y} - y$. Тогда для любого $x \in D_{\bar{y}'}$ справедливо включение $(\bar{\eta}(x), \bar{\eta}'(x)) \in k_\varepsilon(0, 0)$, т. е. при $\sigma_1 = \bar{\eta}(x)$, $\sigma_2 = \bar{\eta}'(x)$ выполняется неравенство (9.15). Это неравенство с учетом обозначений (9.14) и (9.13) означает, что в любой точке $x \in D_{\bar{\eta}'}$ $(= D_{\bar{y}'})$ верна оценка

$$\frac{1}{2}\left\{\alpha\bar{\eta}^2(x) + r(x)\left[\bar{\eta}'(x) + \frac{q(x) + w(x)}{r(x)}\bar{\eta}(x)\right]^2\right\} \geqq \frac{1}{6}d^3\bar{f}(x).$$

Из полученной оценки, равенства $\delta I_y[\bar{\eta}] = 0$ и равенств (9.11) и (9.12) следует, что если $\bar{y} \in K_\varepsilon^1(y) \cap D_l$, то $I[\bar{y}] \geqq I[y]$. Теорема 1 доказана.

Замечания: 1. В доказательстве теоремы 1 основную роль играло то, что $\delta^2 I_y$ можно представить в форме (9.11). Наличие члена $\alpha\eta^2(x)$ в подынтегральном выражении обеспечило несколько больше, чем положительную определенность $\delta^2 I_y$ (см. задачу 5).

2. В конце XVIII в. Лежандр предполагал, что если $y \in D_l$ — стационарная функция, удовлетворяющая сильному условию Лежандра, то y является и слабой локальной экстремалью. Свое доказательство он основывал на использованном нами преобразовании второй вариации, считая само собой разумеющимся, что у д. у. (9.8), служащего основой преобразования, всегда имеется решение, которое определено на всем интервале $[x_1, x_2]$. На недостатки данного

доказательства обращал внимание еще Лагранж, однако нахождение условий, обеспечивающих возможность преобразования, является заслугой Якоби (1837).

Возникновению ошибочного предположения способствовала следующая аналогия: пусть $\varphi \in R^1 \to R^1$; тогда в предположении достаточной гладкости φ условия

(9.18) $$\varphi'(a) = 0, \ \varphi''(a) \geqq 0$$

необходимы, а условия

(9.19) $$\varphi'(a) = 0, \ \varphi''(a) > 0$$

достаточны для локального минимума. В случае функционала I, по аналогии с (9.18), условия

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0, \ r(x) \geqq 0$$

являются необходимыми для (слабого) локального минимума, в то время как их усиление

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0, \ r(x) > 0$$

[формально соответствующее (9.19)] не представляет собой достаточного условия локального минимума.

3. Однако предположение Лежандра становится верным, если в определяющих данных I точки P_1 и P_2 выбрать достаточно близко друг к другу. Именно: справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Предположим, что выполняются условия А), Б) и В). Тогда для любой точки $x_0 \in (x_1, x_2)$ можно найти такой содержащий точку x_0 интервал $(x_1^*, x_2^*) \subset (x_1, x_2)$, что функционал I^*, определенный данными Q, f, $P_1 = (x_1^*, y(x_1^*))$, $P_2^* = (x_2^*, y(x_2^*))$, достигает слабого локального минимума на функции y^*, являющейся сужением y на промежуток $[x_1^*, x_2^*]$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in (x_1, x_2)$ — произвольная точка, а η_0 — решение д. у. Я, связанного с y и удовлетворяющее условию $\eta(x_0) \neq 0$. Тогда существует такой содержащий внутри себя точку x_0 отрезок $[x_1^*, x_2^*] \subset [x_1, x_2]$, что

(9.20) $$\eta_0(x) \neq 0 \ (x \in [x_1^*, x_2^*]).$$

Пусть теперь I^* — функционал, соответствующий выбранному отрезку $[x_1^*, x_2^*]$, y^* — сужение y на отрезок $[x_1^*, x_2^*]$, а Δ_{y^*} (в соответствии с обычным обозначением) —

решение д. у. Я, которое связано с I^* и с y^* и удовлетворяет начальным условиям $\Delta_{y^*}(x_1^*)=0$, $\Delta_{y^*}(x_1^*)=1$. На основании первого из этих начальных условий и условия (9.20) очевидно, что η_0 и Δ_{y^*} — линейно независимые решения одного и того же однородного линейного д. у. второго порядка. Тогда, по осцилляционной теореме Штурма, $\Delta_{y^*}(x)\neq 0\,(x\in(x_1^*, x_2^*])$, т. е. для функционала I^* выполняется соответствующее условие Г). В таком случае наше утверждение очевидным образом следует из теоремы 1.

Замечания: 1. Утверждение 1 остается справедливым и в случае, когда $x_0=x_1$ или $x_0=x_2$. Для доказательства этого достаточно применить только лемму 1.

2. Утверждение 1 (сформулированное на языке геометрии) устанавливает, что если выполняется сильное условие Лежандра, то соответствующая стационарная кривая является и локально (слабой) минимальной кривой, т. е. для любой точки стационарной кривой можно задать такую ее дугу, которая будет локально (слабой) минимальной кривой функционала с той же основной функцией и двумя концевыми точками данной дуги.

Пример. Исследуем подробно вариационную задачу в случае, когда $Q=R^3$, $f(x, y, y')=y'^2-4yy'^3+2xy'^4$, $P_1=(0, 0)$, $P_2=(1, 0)$.

1. Соответствующее д. у. Э—Л следующее:

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=-4y'^3-\frac{d}{dx}\left(2y'-12yy'^2+8xy'^3\right)=$$

$$=y''(24yy'-24xy'^2-2)=0.$$

Введем дифференциальные операторы $L_1(y)\overset{\mathrm{df}}{=}y''$ и $L_2(y)\overset{\mathrm{df}}{=}24yy'-24xy'^2-2$. Легко можно показать, что краевая задача

(9.21) $$L(y)\overset{\mathrm{df}}{=}L_1(y)\cdot L_2(y)=0,\ y(0)=0,\ y(1)=0$$

имеет ровно одно решение — функцию, тождественно равную нулю.

Из определения $L_2(y)$ следует, что если φ — решение д. у. $L(y)=0$, удовлетворяющее в некоторой точке $\xi\in D_\varphi$ условию $\varphi(\xi)=0$, то у точки ξ существует окрестность $k(\xi)$, в которой

(9.22) $$L_1(\varphi(x))=\varphi''(x)=0,\ L_2(\varphi(x))\neq 0,\ x\in k(\xi).$$

Пусть φ ($D_\varphi=[0, 1]$) — решение краевой задачи (9.21). Так как $\varphi'(0)=\varphi(1)=0$, то существует такая точка $\xi\in(0, 1)$, в которой $\varphi'(\xi)=0$. Обозначим через (α, β) максимальный интервал, содержащий ξ и содержащийся в $[0, 1]$, в котором $L_2(\varphi(x)) \neq 0$; в силу (9.22) такой интервал (α, β) существует. Поскольку φ — решение уравнения (9.21), $L_1(\varphi(x)) = \varphi''(x) = 0$, т. е. $\varphi'(x)$ постоянна на интервале (α, β), и так как $\varphi'(\xi) = 0$, то

(9.23) $$\varphi''(x) = 0, \ \varphi'(x) = 0 \ (x \in [\alpha, \beta]).$$

Легко доказать, что $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Предположим, например, что $\beta < 1$ (аналогично доказывается, что $\alpha = 0$). Тогда, учитывая (9.22) и (9.23), получаем, что $L_2(\varphi(\beta)) \neq 0$, откуда следует, что в достаточно малой окрестности точки β функция $L_2(\varphi(x))$ нигде не обращается в нуль, а это противоречит определению (α, β).

Так как $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(\xi) = 0$, $\varphi''(x) = 0$ $(x \in [0, 1])$, то $\varphi(x) \equiv$ $\equiv 0$ $(x \in [0, 1])$. Тем самым показана однозначная разрешимость краевой задачи (9.21). *Доказанное означает, что у функционала I имеется ровно одна стационарная функция из $C_2[0, 1]$, а именно функция y, определенная равенством*

(9.24) $$y(x) \equiv 0 \quad (x \in [0,1]).$$

2. Из приведенного выше определения функции η с помощью простых вычислений получаем

$$r(x) = f_{y'y'}(x, 0, \dot{0}) = 2 > 0 \quad (x \in [0, 1]),$$

т. е. *стационарная функция y удовлетворяет сильному условию Лежандра.*

3. Так как $L(y) = L_1(y) L_2(y)$, то решения д. у. $L_1(y) = 0$ удовлетворяют и д. у. $L(y) = 0$. В качестве однопараметрического семейства решений д. у. $L_1(y) \equiv y'' =$ $= 0$ можно взять, например, функции $\varphi(x, a) = ax$. Согласно утверждению 12 § 8, функция $\varphi_a(x, 0) = x$ $(x \in$ $\in [x_1, x_2])$ есть решение д. у. Я, связанного с функционалом J и с функцией y, и очевидно, что $\Delta_y(x) = x$ $(x \in [0, 1])$, т. е. y удовлетворяет сильному условию Якоби.

Таким образом, в силу теоремы 1 *функция y, определенная равенством* (9.24), *доставляет функционалу I слабый локальный минимум*: $I[y] = 0$.

4. Ниже будет доказано, что приведенная стационарная функция *y не доставляет сильного локального минимума функционалу I.*

Доказательство этого утверждения приведем от противного: предположим, что существует такое число $\varepsilon > 0$, что

$$\inf I[K_\varepsilon(y) \cap D_l] = 0 \ (= I[y]).$$

Выберем произвольное число $k \in (0, \varepsilon)$ и определим последовательность функции y_n $(n = 2, 3, \ldots)$ таким образом:

$$y_n(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} knx, & \text{если } x \in [0, 1/n], \\ -kn\dfrac{x-1}{n-1}, & \text{если } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, что $y_n \in K_\varepsilon(y) \cap D_I$ и что $-2\varepsilon < y_n'(x) < 0$ ($n = 2, 3, \ldots$; $x \in [1/n, 1]$). Из определения основной функции f и из приведенных неравенств сразу следует существование такой постоянной $c > 0$, что

$$0 < f(x, y_n(x), y_n'(x)) < c \left(n = 2, 3, \ldots, x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]\right).$$

Следовательно,

$$I[y_n] = \int_0^1 f(x, y_n(x), y_n'(x))\,dx < \int_0^{1/n} f(x, y_n(x), y_n'(x))\,dx + c =$$

$$= \int_0^{1/n} \{k^2 n^2 - 4k^4 n^4 x + 2k^4 n^4 x\}\,dx + c =$$

$$= [k^2 n^2 x - k^4 n^4 x^2]_0^{1/n} + c =$$

$$= k^2 n - k^2 n^2 + c \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Итак, если $n \to \infty$, то $I[y_n] \to -\infty$, поэтому вопреки нашему предположению $\inf I[K_\varepsilon(y) \cap D_I] = -\infty$ ($\neq I[y]$). Таким образом, функционал I не достигает на функции y сильного локального минимума.

Задачи: 1. Докажите, что функционал I, определенный нижеприведенными данными, на функции $y(x) \equiv 0$ ($x \in [0, 1]$) достигает слабого локального минимума, но не достигает сильного локального минимума: $Q = R^3$, $f(x, y, y') = y'^2 + y'^3$, $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1, 0)$.

2. Приведите пример функционала I, для которого соответствующее д. у. Риккати (9.10) не имеет решения, определенного на всем интервале $[x_1, x_2]$.

Указание. Пусть $Q = R^3$, $f(x, y, y') = (y'^2 - y^2)/2$,

$$x_2 - x_1 \geqslant \pi/\sqrt{1+\alpha}.$$

3. Докажите, что если выполняются условия А)—Г), то y доставляет функционалу I слабый локальный минимум *в строгом смысле*.

Замечание. Мы говорим, что $y \in D_I$ доставляет функционалу I слабый локальный минимум в строгом смысле, если существует такая окрестность $K^1(y)$, что для любой функции $\bar{y} \in K^1(y) \cap D_I \setminus \{y\}$ выполняется неравенство $I[\bar{y}] > I[y]$.

4. Рассмотрим следующую вариационную задачу. Пусть: $I = \Delta \times R^1$, где $\Delta \subset R^1$ — данный интервал; $f \in (R^2 \to R^1) \cap C_2(T)$, $[x_1, x_2] \subset \Delta$ — произвольный фиксированный интервал; $D_J = (R^1 \to R^1) \cap C[x_1, x_2]$; если $y \in D_J$, то $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x))dx$.

Будем говорить, что $y \in D_J$ доставляет функционалу J сильный локальный минимум, если существует такая окрестность $K(y)$, что для любой функции $\bar{y} \in K(y) \cap C[x_1, x_2]$ выполняется неравенство $J[\bar{y}] \geqq J[y]$. Докажите, что:

а) если $y \in D_J$ доставляет функционалу J сильный локальный минимум, то $f_y(x, y(x)) = 0$, $f_{yy}(x, y(x)) \geqq 0$ $(x \in [x_1, x_2])$;

б) если для какой-нибудь функции $y \in D_J$ выполняются соотношения $f_y(x, y(x)) = 0$, $f_{yy}(x, y(x)) > 0$ $(x \in [x, x_2])$, то y доставляет функционалу J сильный локальный минимум.

Проверьте выполнение этих условий для следующих функций

$$\alpha)\ f(x, y) = (6ax - y^2)y$$

$$\beta)\ f(x, y) = (6ax - 3x^2 - y^2)\left(2ax - x^2 - \frac{4}{3}xy + y^2\right),$$

где a — действительный параметр, $[x_1, x_2]$ — произвольно выбранный интервал.

5. Докажите, что если функционал J, определенный на линейном нормированном пространстве S, дифференцируем два раза в точке $x \in S$ и первая вариация в точке x является тождественным нулем, а вторая вариация *сильно положительно определена*, то x является точкой локального минимума функционала J.

Замечание. Мы говорим, что квадратичный функционал, определенный на линейном нормированном пространстве S, сильно положителен, если существует такое число $k > 0$, что для любого элемента $x \in S$ выполняется неравенство $M(x) \geqq k\|x\|^2$. Об остальных понятиях см. задачу 10 § 8.

§ 10. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СИЛЬНОГО ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА

В этом параграфе символом I обозначим функционал, определенный в п. 8.1, и дополнительно предположим, что $Q = T \times R^1$ ($T \subset R^2$ — данная область).

Напомним определение сильного локального минимума (см. п. 7.1): мы говорим, что функционал I на функции $y \in D_I$ достигает сильного локального минимума (другими словами, функция y доставляет функционалу I сильный локальный минимум), если у y существует такая окрестность $K(y)$, что для любой функции $\bar{y} \in K(y) \cap D_I$ выполняется неравенство $I[\bar{y}] \geqq I[y]$.

Если $y \in D_I$ доставляет функционалу I сильный локальный минимум, то она одновременно доставляет и слабый локальный минимум и поэтому для функции y должны выполняться необходимые условия слабого локального минимума (см. теоремы 1, 2 и 3 § 8).

В примере, рассмотренном в п. 9.2, было показано, что достаточные условия слабого локального минимума, найденные в теореме 1 § 9, вообще говоря, не обеспечивают того, чтобы на функции, удовлетворяющей им, функционал I достигал сильного локального минимума. Объясняется это прежде всего тем, что данные достаточные условия «очень близки» к необходимым условиям слабого локального минимума, а для вывода последних достаточно было ограничиться произвольной окрестностью минимальной функции первого порядка.

В дальнейшем приведем новое условие, которому должны удовлетворять только функции, доставляющие сильный локальный минимум. С помощью подходящего усиления этого условия будут получены достаточные условия, обеспечивающие сильный локальный минимум (и удовлетворяющие требованиям, намеченным в п. 7.2).

10.1. Необходимое условие Вейерштрасса

Определение 1. *Пусть* $f \in C_1(Q)$ $(Q = T \times R^1)$. *Функцией Вейерштрасса* E $(\in R^4 \to R^1,\ D_E \underset{=}{\mathrm{df}} Q \times R^1)$ *основной функции* f *называют функцию, заданную равенством*

$$E(x, y, y', u) = f(x, y, u) - f(x, y, y') - (u - y') f_{y'}(x, y, y') \quad [(x, y, y', u) \in Q \times R^1]. \tag{10.1}$$

Формула (10.1) запоминается легко, так как в ее правой части стоит разность основной функции и ее первых двух членов ряда Тейлора по третьей переменной.

Определение 2. *Пусть* $f \in C_1(Q)$ $(Q = T \times R^1)$. *Будем говорить, что функция* $y \in D_I$ *удовлетворяет условию Вейерштрасса, если для любой пары точек* $(x, u) \in [x_1, x_2] \times R^1$ *выполняется неравенство*[15]

$$E(x, y(x), y'(x), u) \geqq 0. \tag{10.2}$$

Если в (10.2) *при произвольном* $x \in [x_1, x_2]$ *равенство выполняется только в случае* $u = y'(x \pm 0)$, *то будем говорить, что* y *удовлетворяет сильному условию Вейерштрасса.*

С помощью условия Вейерштрасса легко сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Если* $f \in C_1(Q)$ $(Q = T \times R^1)$ *и функционал* I *на функции* $y \in D_I$ *достигает сильного локального минимума, то* y *удовлетворяет условию Вейерштрасса.*

Доказательство. Так как y доставляет сильный локальный минимум, то существует такое число $\varepsilon > 0$,

---

[15] См. сноску 3 на с. 93.

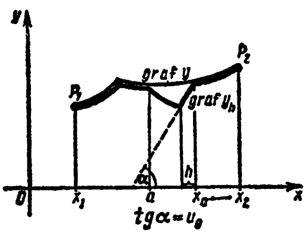

Рис. 14

что для любой функции $\bar{y} \in K_\varepsilon(y) \cap D_l$ выполняется неравенство

(10.3) $$I[\bar{y}] \geqq I[y].$$

Так как $E \in C(Q \times R^1)$ и $y \in D_1[x_1, x_2]$, то неравенство (10.2) достаточно доказать для таких точек (x_1, x_2), которые принадлежат $D_{y'}$.

Доказательство теоремы проведем от противного: предположим, что существуют такая точка $x_0 \in D_{y'} \cap (x_1, x_2)$ и такое число $u_0 \in R^1$, что

(10.4) $$E(x_0;\ y(x_0),\ y'(x_0),\ u_0) < 0.$$

Предположим, что $u_0 \geqq 0$ (аналогично можно рассуждать и в случае $u_0 < 0$). Выберем число a из интервала (x_1, x_2) настолько близким к x_0, что $[a, x_0] \subset D_{y'}$, и рассмотрим семейство функций из $R^1 \to R^1$, зависящих от параметра $h \in [0, x_0 - a]$:

$$y_h(x) = \begin{cases} y(x), \text{ если } x \in [x_1, a] \cup [x_0, x_2], \\ u_0(x - x_0) + y(x_0), \text{ если } x \in [x_0 - h, x_0], \\ y(x) + k(h)(x - a), \text{ если } x \in [a, x_0 - h], \end{cases}$$

где функция $k \in R^1 \to R^1 \cap C_1[0, x_0 - a]$ определена равенством

$$y(x_0 - h) + k(h)(x_0 - h - a) = -hu_0 + y(x_0)$$
$$(h \in [0, x_0 - a]).$$

Из этого равенства следует, что для любого фиксированного $h \in [0, x_0 - a]$ функция y_h непрерывна на $[x_1, x_2]$, в том числе и в точке $x_0 - h$ (рис. 14).

Непосредственно из определения $k(h)$ получаем

10.5) $$k(0) = 0,\ k'(0)(x_0 - a) = -u_0 + y'(x_0).$$

Для любого фиксированного h выполняются условия $y_h \in D_1[x_1, x_2]$, $y_h(x_1) = y_1$, $y_h(x_2) = y_2$, а при $h = 0$ — равенство $y_0 = y$. Оценим расстояние между функциями y и y_h. Из определения функций y_h и из теоремы Лагранжа о среднем следует существование такой функции Θ, $0 < \Theta(h) < 1$, что при любом значении $h \in [0, x_0 - a]$

$$\rho(y_h, y) \leqq \max\{|k(h)|(x_0 - a),\ |u_0 - y'(x_0 + \Theta(h)h)|h\}.$$

Из этой оценки, учитывая первое равенство (10.5), получаем

(10.6) $$\lim_{h\to+0} \rho(y_h, y) = 0.$$

Отсюда вытекает, что если h достаточно мало, скажем,
$$h \in [0, h_0] \subset [0, x_0 - a], \text{ то } y_h \in K_\varepsilon(y) \cap D_l.$$

Определим теперь функцию $\psi \in R^1 \to R^1$ следующим образом:
$$\psi(h) \overset{\mathrm{df}}{=} I[y_h] - I[y] \quad (h \in [0, h_0]).$$

Очевидно, что $\psi \in C_1[0, h_0]$, $\psi(0) = 0$, а так как в силу (10.3) $\psi(h) \geqq 0$ $(h \in [0, h_0])$, то

(10.7) $$\psi'(+0) \geqq 0.$$

Запишем подробно $\psi(h)$ и найдем ее производную:
$$\psi(h) = \int_a^{x_0-h} f(x, y(x) + k(h)(x-a), y'(x) + k(h))\,dx +$$
$$+ \int_{x_0-h}^{x_0} f(x, y(x_0) + u_0(x - x_0), u_0)\,dx - \int_a^{x_0} f(x, y(x), y'(x))\,dx.$$

Отсюда
$$\psi'(h) =$$
$$-f(x_0 - h, y(x_0 - h) + k(h)(x_0 - h - a),\ y'(x_0 - h) + k(h)) +$$
$$+ \int_a^{x_0-h} \{f_y(x, y(x) + k(h)(x-a), y'(x) + k(h)(x-a)k'(h) +$$
$$+ f_{y'}(x, y(x) + k(h)(x-a), y'(x) + k(h))\cdot k'(h)\}\,dx +$$
$$+ f(x_0 - h, y(x_0) - u_0 h, u_0) \quad (h \in [0, h_0]).$$

Из этого тождества при $h \to +0$ получим

(10.8) $$\psi'(+0) = f(x_0, y(x_0), u_0) - f(x_0, y(x_0), y'(x_0)) +$$
$$+ k'(0) \int_a^{x_0} \{f_y(x, y(x), y'(x))(x - a) + f_{y'}(x, y(x), y'(x))\}\,dx.$$

Так как y доставляет сильный локальный минимум и является непрерывно дифференцируемой на $[a, x_0]$, то на этом промежутке функция y должна удовлетворять д. у. Э—Л
$$f_y(x, y(x), y'(x)) = \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) \quad (x \in [a, x_0]).$$

Учитывая это тождество и второе из равенств (10.5), третий член в правой части (10.8) можно преобразовать так:

$$k'(0)\int_a^{x_0}\{f_y(x, y(x), y'(x))(x-a)+f_{y'}(x, y(x), y'(x))\}\,dx=$$

$$=k'(0)\int_a^{x_0}\left\{\frac{d}{dx}f_{y'}(x, y(x), y'(x))\cdot(x-a)+\right.$$

$$\left.+f_{y'}(x, y(x), y'(x))\right\}dx=k'(0)\int_a^{x_0}\frac{d}{dx}\{f_{y'}(x, y(x), y'(x))\times$$

$$\times(x-a)\}\,dx=k'(0)\,[f_{y'}(x, y(x), y'(x))\cdot(x-a)]_a^{x_0}=$$

$$=-(u_0-y'(x_0))\,f_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)).$$

Подставляя найденное выражение в равенство (10.8), получаем

$$\psi'(0)=f(x_0,\ y(x_0),\ u_0)-f(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0))-$$
$$-(u_0-y'(x_0))\,f_{y'}(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0))=$$
$$=E(x_0, y(x_0), y'(x_0),\ u_0). \tag{10.9}$$

Заметим теперь, что из (10.7) следует неравенство $E(x_0, y(x_0), y'(x_0), u_0)\geqslant 0$, что противоречит предположению (10.4).

Тем самым теорема 1 доказана.

Замечание. Функцию E можно получить непосредственно, рассматривая задачу о необходимом условии сильного локального минимума в некотором семействе допустимых функций, имеющих в произвольно выбранной точке x_0 производную, равную u_0. Функции y_h образуют наиболее простое однопараметрическое семейство таких функций. Исследование задачи о минимуме в этом семействе и приведет к функции E [см. (10.9)].

Перейдем к некоторым важным следствиям теоремы 1, точнее к следствиям условия Вейерштрасса и к его эквивалентным формулировкам.

Утверждение 1. *Если $f\in C_1(Q)$ $(Q=T\times R^1)$ и $y\in D_1$ доставляет функционалу I сильный локальный минимум, то в любой точке интервала $(x_1,\ x_2)$ выполняется равенство*

$$f(x, y(x),\ y'(x-0))-y'(x-0)\,f_{y'}(x,\ y(x),$$
$$y'(x-0))=$$
$$=f(x, y(x), y'(x+0))-y'(x+0)\,f_{y'}(x, y(x), y'(x+0)). \tag{10.10}$$

Доказательство. Так как y доставляет сильный локальный экстремум, то этот экстремум является и слабым локальным, а поэтому в силу утверждения 5 § 8 должно выполняться равенство

$$(10.11)\quad f_{y'}(x, y(x), y'(x-0)) = f_{y'}(x, y(x), y'(x+0))$$
$$[x \in (x_1,\ x_2)]$$

(условие в точке излома). С другой стороны, из теоремы 1, в частности, следует

$$E(x,\ y(x),\ y'(x \mp 0),\ y'(x \pm 0)) \geqq 0\quad [x \in (x_1,\ x_2)].$$

Если это неравенство записать подробно в соответствии с определением функции E (10.1) и использовать (10.11), то получим тождество (10.10).

Замечания: 1. Если $x \in D_{y'}$, то слева и справа в (10.10) стоит одно и то же число. Поэтому утверждение 1 имеет значение только в случае $x \in [x_1, x_2] \setminus D_{y'}$.

2. Равенство (10.10) часто записывают сокращенно $f - y'f_{y'}|_{-0} = f - y'f_{y'}|_{+0}$ и вместе с тождеством $f_{y'}|_{-0} = f_{y'}|_{+0}$ называют условием Вейерштрасса—Эрдмана в точке излома (ср. с замечанием 2 после утверждения 5 § 8).

Используя условие минимума, выраженное равенством (10.2), легко доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть $f \in C_2(Q)$ $(Q = T \times R^1)$. Предположим, что функция $y \in D_l$ удовлетворяет условию Вейерштрасса. Тогда y удовлетворяет и условию Лежандра.*

Доказательство. Так же как и при доказательстве теоремы 2 § 8, достаточно ограничиться точками $(x_1, x_2) \cap D_{y'}$. Пусть x — такая произвольно выбранная точка. Определим функцию $w \in (R^1 \to R^1) \cap C_2(R^1)$ следующим образом: $w(u) = E(x, y(x), y'(x), u)$ $(u \in R^1)$. Из определения функции E следует, что w в точке $y'(x) \in R^1$ достигает абсолютного минимума, поэтому $w''(y'(x)) \geqq 0$. Из этого неравенства с учетом (10.1) получаем

$$w''(y'(x)) = f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geqq 0.$$

Утверждение 2 доказано.

Замечания: 1. Для функции w, участвующей в доказательстве утверждения 2, очевидно, выполняется и равенство $w'(y'(x)) = 0$. Но отсюда нельзя получить никакого условия экстремума, так как с помощью простых вычислений можно убедиться в том, что тождество $w'(y'(x)) = 0$ $(x \in [x_1, x_2])$ выполняется в случае, когда y — произвольная функция из D_l.

2. Если сравнить утверждение 2 с теоремой 2 из § 8, то можно отметить, что предположения теоремы 2 менее ограничительны —

в ней требуется лишь чтобы на функции y достигался слабый локальный минимум.

3. Подобно доказательству теоремы 1 можно доказать и теорему 2 § 8, необходимо только следить за тем, чтобы число u_0, в определении функции y_h мало отличалось от $y'(x_0)$. В этом случае легко убедиться, что (в обозначениях теоремы 1)

$$\rho(y_h', y') < \max\{|y'(x_0)-u_0|+|\delta(h)|, |k(h)|\},$$

где $\lim\limits_{h\to+0}\delta(h)=0$. Из этого неравенства и из (10.6) следует, что расстояние $\rho^1(y_h, y)$ можно сделать сколь угодно малым, если $|y'(x_0)-u_0|$ и h достаточно малы. Поэтому неравенство (10.2) должно выполняться для функции y, доставляющей слабый локальный минимум, и для любого значения u, достаточно близкого к $y'(x\pm 0)$. Отсюда следует, что y удовлетворяет условию Лежандра. Доказывается это так же, как и утверждение 2, с учетом того, что $y'(x_0)$ является точкой только локального минимума функции w.

Выполнение условия Вейерштрасса в случае регулярного функционала можно не проверять, так как верно следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть $f\in C_2(Q)$ $(Q=T\times R^1)$ и предположим, что функционал I положительно регулярен. Тогда любая функция $y\in D_I$ удовлетворяет сильному условию Вейерштрасса.*

Доказательство. Так как $Q=T\times R^1$, то для любой точки $(x, y, y', u)\in D_E$ можно найти такое число $\Theta\in(0, 1)$, что

$$E(x,y,y',u)=f(x,y,u)-f(x,y,y')-(u-y')f_{y'}(x,y,y')=$$
$$=\frac{1}{2}(u-y')^2 f_{y'y'}(x,y,y'+\Theta(u-y')).$$

Так как функционал I — положительно регулярный, то вторая производная $f_{y'y'}$ положительна. Поэтому если y — произвольная функция из D_I и если в любой фиксированной точке $x\in(x_1, x_2)$ $u\neq y'(x\pm 0)$, то $E(x, y(x), y'(x\pm\pm 0), u)>0$. Утверждение 3 доказано.

Замечание. Функционал I назовем положительно полурегулярным, если $f_{y'y'}\in C(Q)$ и $f_{y'y'}(x, y, y')\geqq\geqq 0$ $[(x, y, y')\in Q]$. Если в условии утверждения 3 положительную регулярность заменить положительной полурегулярностью, то функция y будет удовлетворять условию Вейерштрасса. Доказательство аналогично приведенному выше.

Наглядный смысл условий Вейерштрасса поясняет следующее определение.

Определение 3. *Пусть $f\in C_1(Q)$ $(Q=T\times R^1)$, а (x, y) — произвольная фиксированная точка T. Сечением графика основной функции f, определяемым точкой (x, y),* *назовем график функции* $v_{(x,y)} \in (R^1 \to R^1) \cap C_1(R^1)$, *которая определена равенством*

$$v_{(x,y)}(u) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x, y, u) \quad (u \in R^1).$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть* $f \in C_1(Q)$ $(Q = T \times R^1)$. *Функция* $y \in D_l$ *удовлетворяет условию Вейерштрасса [сильному условию Вейерштрасса] тогда и только тогда, когда для произвольного* $x \in [x_1, x_2]$ *сечение графика, определяемое точкой* $(x, y(x))$, *расположено выше [строго выше] касательных, проведенных к этому сечению в точках с абсциссами* $y'(x \pm 0)$.

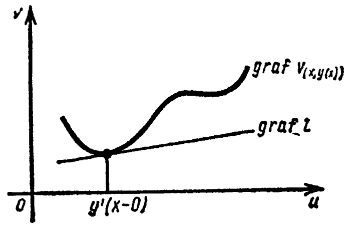

Рис. 15

Доказательство. Фиксируем точку $(x, y(x))$ и рассмотрим касательную к сечению, проведенному в точке с абсциссой $y'(x-0)$ (случай $y'(x+0)$ рассматривается аналогично, а если y' не прерывна в точке x, то касательные в этих двух случаях совпадают). Уравнение касательной $v = l(u)$ (рис. 15), где

$$(u) = f(x, y(x), y'(x-0)) + (u - y'(x-0)) f_{y'}(x, y(x), y'(x-0)) \quad (u \in R^1).$$

С помощью простых вычислений получаем

$$v_{(x,y(x))}(u) - l(u) = E(x, y(x), y'(x-0), u) \quad (u \in R^1),$$

откуда очевидно, что сечение, определяемое точкой $(x, y(x))$, располагается выше [строго выше] графика функции l, т. е. данной касательной, тогда и только тогда, когда для любого $u \in R^1$ $u \in R^1 \setminus \{y'(x-0)\}$] выполняется неравенство

$$E(x, y(x), y'(x-0), u) \geq 0, \ [E(x, y(x), y'(x-0), u) > 0.$$

Так как x — произвольная точка $(x_1, x_2]$, утверждение 4 доказано.

Приведем очевидное следствие утверждения 4.

Утверждение 5. *Пусть* $f \in C_1(Q)$ $(Q = T \times R^1)$, а $y \in D_l$ — *стационарная функция функционала* I, *удовлетворяющая условию Вейерштрасса. Если точка с абсциссой* $x \in (x_1, x_2)$ *является угловой точкой кривой* $y = y(x)$

($x \in [x_1, x_2]$), *то касательные к сечению графика f, определяемому точкой $(x, y(x))$, которые проведены в точках с абсциссами $y'(x-0)$ и $y'(x+0)$, совпадают* (рис. 16).

Доказательство. Тангенсы углов наклона данных касательных следующие: $f_{y'}(x, y(x), y'(x-0))$, $f_{y'}(x, y(x), y'(x+0))$; так как y — стационарная функция функционала I, то согласно утверждению 5 § 8 эти два числа совпадают, поэтому касательные параллельны. Если бы они не совпадали, то у сечения нашлась бы точка, расположенная ниже одной из этих двух касательных, а это противоречит утверждению 4.

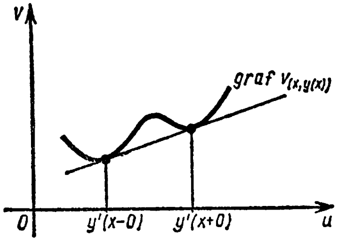

Рис. 16

Замечания: 1. С помощью сечений многие полученные ранее результаты получают наглядное объяснение:

а) если I — положительно регулярный функционал, то для произвольной точки $(x, y) \in T$ выполняется неравенство $v''_{(x,y)}(u) = f_{y'y'}(x, y, u) > 0$ $(u \in R^1)$, поэтому любое сечение графика f есть кривая, выпуклая снизу. Это означает, что любое сечение находится строго выше любой касательной, т. е. по утверждению 4 любая функция $y \in D_I$ удовлетворяет сильному условию Вейерштрасса (ср. с утверждением 3);

б) если $(x, y(x))$ — угловая точка стационарной кривой функционала I с уравнением $y = y(x)$ $(x \in [x_1, x_2])$, то по утверждению 5 касательные, проведенные в точках $y'(x-0)$ и $y'(x+0)$, совпадают. Это означает (по поводу обозначений см. замечание 2 после утверждения 1), что

$$f_{y'}|_- = f_{y'}|_+ = \frac{f|_+ - f|_-}{y'(x+0) - y'(x-0)};$$

отсюда получается условие для точки излома $f - y'f_{y'}|_- = f - y'f_{y'}|_+$ (ср. с утверждением 1).

2. Для выполнения условия Вейерштрасса [сильного условия Вейерштрасса] необходимо, чтобы любое сечение было выпуклым [строго выпуклым] снизу, и достаточно, чтобы любое сечение в точках $y'(x \pm 0)$ было локально выпуклым [локально строго выпуклым]. В этом смысле условие Вейерштрасса часто называют условием выпуклости.

Пример. Рассмотрим снова пример п. 9.2 [$Q = R^3$, $f(x, y, y') = y'^2 - 4yy'^3 + 2xy'^4$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1,0)$]. В п. 9.2 было показано, что функция

$$y(x) \equiv 0 \quad (x \in [0, 1]) \tag{10.12}$$

доставляет функционалу I слабый локальный, но не сильный локальный минимум. Проверим, удовлетворяет ли функция (10.12) условию Вейерштрасса.

а) По определению функции Вейерштрасса,

$$E(x, y, y', u) = u^2 - 4yu^3 + 2xu^4 - (y'^2 - 4yy'^3 + 2xy'^4) - (u - y')(2y' - 12yy'^2 + 8xy'^3)\ [(x, y, y', u) \in R^4]$$

Отсюда, учитывая (10.12), получаем

$$E(x, y(x), y'(x), u) = E(x, 0, 0, u) = u^2 + 2xu^4 > 0$$
$$[(x, u) \in [0, 1] \times (R^1 \setminus \{0\})],$$

т. е. функция y, определенная равенством (10.12), *удовлетворяет сильному условию Вейерштрасса.*

б) К этому же результату, разумеется, придем, рассматривая сечения графика f. Пусть $x \in [0, 1]$ — произвольное фиксированное число; рассмотрим соответствующую функцию $v_{(x,0)}$:

$$v_{(x,0)}(u) = u^2 + 2xu^4 \quad (u \in R^1).$$

Так как

$$v''_{(x,0)}(u) = 2 + 24xu^2 > 0 \quad (u \in R^1),$$

то сечение, определяемое точкой $(x, 0)$, является строго выпуклой снизу кривой. Так как это верно для любого сечения, определяемого произвольной точкой $(x, 0)$ $(x \in [0, 1])$, то отсюда следует, что y удовлетворяет сильному условию Вейерштрасса.

Таким образом, в случае приведенного выше функционала I *стационарная функция* $y \in C_2[0, 1]$ *удовлетворяет сильному условию Лежандра, сильному условию Якоби* (см. п. 9.2) *и сильному условию Вейерштрасса, но не доставляет сильного локального минимума функционалу* I. Поэтому отыскание достаточных условий сильного локального минимума требует усиления необходимых условий (прежде всего условия Вейерштрасса) в другом направлении.

10.2. Принцип минимума. Еще одно интегро-дифференциальное уравнение

В предыдущих пунктах было показано, что если функция $y \in D_I$ доставляет сильный локальный минимум функционалу I, то она должна удовлетворять и-д. у. Э—Л, а также условиям Лежандра и Вейерштрасса (см. теоремы 1, 2 § 8 и теорему 1 § 10). Если функция $y \in D_I$ удовлетворяет условию Вейерштрасса, то она удовлетворяет и условию Лежандра (утверждение 2). Далее, очевидно, что обратное, вообще говоря, не верно, т. е. условие Вейерштрасса сильнее, чем условие Лежандра. Что же касается другого необходимого условия — и-д. у. Э—Л, то между ним и условием Вейерштрасса подобной связи нет.

Например, в случае функционала, определенного данными $Q = R^2$, $f(x, y, y') = y'^2 \sin x$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2\pi, 0)$, функция $y(x) \equiv 0$ ($x \in [0, 2\pi]$) является стационарной функцией, для которой $f_{y'y'}(x, 0, 0) = 2 \sin x$ ($x \in [0, 2\pi]$). Следовательно, y удовлетворяет и-д. у. Э—Л, но не удовлетворяет условию Лежандра, а значит, и условию Вейерштрасса.

Наоборот, в случае положительно регулярного функционала любая допустимая функция удовлетворяет условию Вейерштрасса (утверждение 3), но, вообще говоря, не удовлетворяет и-д. у. Э—Л.

Ниже вместо условия минимума (10.2) будет приведено такое условие минимума, которое устанавливает связь между условием Вейерштрасса и и-д. у. Э—Л.

Пусть $f \in C_1(Q)$ $(Q = T \times R^1)$, $y \in D_I$. Определим функцию $F \in R^2 \to R^1$ следующим образом:

$$(10.13)\quad F(x, u) = f(x, y(x), u) - u\left\{\int_{x_1}^{x} f_y(t, y(t), y'(t))\,dt + f_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1))\right\}$$

$$((x, u) \in [x_1, x_2] \times R^1.$$

Определение функции F, разумеется, зависит от выбора $y \in D_I$, поэтому целесообразно было бы использовать обозначение, указывающее на эту зависимость. В дальнейшем функция F будет рассматриваться при фиксированном $y \in D_I$ и поэтому применение обозначения, не указывающего на y, не может привести к неясности. С функцией F связано следующее определение.

Определение 4. *Будем говорить, что функция $y \in D_I$ удовлетворяет «принципу минимума», если для любого $x \in (x_1, x_2) \cap D_{y'}$ выполняется равенство*

$$(10.14)\quad \min_{u \in R^1} F(x, u) = F(x, y'(x)) \quad x \in (x_1, x_2) \cap D_{y'}.$$

Справедливо следующее положение.

Утверждение 6. *Предположим, что $f \in C_1(Q)$ $(Q = T \times \times R^1)$. Функция $y \in D_I$ удовлетворяет принципу минимума тогда и только тогда, когда она удовлетворяет и-д. у. Э—Л и условию Вейерштрасса.*

Доказательство. Предположим, что $y \in D_I$ удовлетворяет принципу минимума. Пусть $x \in (x_1, x_2)$ — произвольно выбранная точка из $D_{y'}$. В силу равенства (10.14) для любого фиксированного x функция $F(x, u) \in \in (R^1 \to R)^1 \cap C_1(R^1)$ в точке $y'(x)$ достигает абсолютного минимума и поэтому должно выполняться равенство

$$(10.15)\qquad F_u(x, y'(x)) = f_{y'}(x, y(x), y'(x)) - \\ - \int_{x_1}^{x} f_y(t, y(t), y'(t))\, dt - f_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = 0.$$

Так как x — любая точка из $(x_1, x_2) \cap D_{y'}$, то это равенство и означает, что y удовлетворяет и-д. у. Э—Л.

Функцию F, используя (10.15), можно записать так:

$$(10.16)\qquad F(x, u) = f(x, y(x), u) - uf_{y'}(x, y(x), y'(x)),$$

т. е., по определению функции E,

$$(10.17)\quad F(x, u) - F(x, y'(x)) = E(x, y(x), y'(x), u) \\ ((x, u) \in [x_1, x_2] \times R^1).$$

Из этого равенства, учитывая (10.14), получим, что y удовлетворяет условию Вейерштрасса.

Обратно: если $y \in D_I$ удовлетворяет и-д. у.Э—Л, то функцию F можно записать в виде (10.16) и, следовательно, выполняется тождество (10.17). Если функция y удовлетворяет, кроме того, и условию Вейерштрасса, то из (10.17) непосредственно следует, что она удовлетворяет принципу минимума. Утверждение 6 доказано полностью.

Замечания: 1. Многие из современных результатов вариационного исчисления могут быть сформулированы в форме некоторого принципа минимума, подобно равенству (10.14). Если вместо F взять функцию $-F$, то принцип минимума станет, естественно, принципом максимума: для формулировки подобных результатов вариационного исчисления часто используют именно эту форму (например, «принцип максимума Понтрягина», см. [30, 31, 36]).

2. Из принципа минимума (10.14) можно вывести все утверждения, которые были получены из и-д. у. Э—Л и условия Вейерштрасса. Но из принципа минимума можно получить и новый результат, основой которого служит следующее утверждение.

Утверждение 7. *Если функция* $y \in D_I$ *удовлетворяет принципу минимума, то существует такая постоянная* $C \in R^1$, *что* y *есть решение и-д. у.*

$$F(x, y') = \int_{x_1}^{x} F_x(x, y')\,dx + C \tag{10.18}$$

(*см. определение* 2 § 8).

Доказательство. Для произвольной точки $x \in (x_1, x_2) \cap D_{y'}$ функция $F(x, u)$ достигает абсолютного минимума при $u = y'(x)$, т. е. выполняется неравенство $F(x, u) \geqslant F(x, y'(x))$. Из этого неравенства и из непрерывности функции F вытекает справедливость для любой точки $x \in (x_1, x_2)$ неравенств $F(x, u) \geqslant F(x, y''(x \pm 0))$. Отсюда, положив $u = y'(x \pm 0)$, получим

$$F(x, y'(x-0)) = F(x, y'(x+0)) \; [x \in (x_1, x_2)]. \tag{10.19}$$

Пусть $x \in (x_1, x_2) \cap D_{y'}$ — произвольно выбранная точка. Тогда существует такая окрестность $k_\varepsilon(x)$, что $k_\varepsilon(x) \subset D_{y'}$. Определим теперь функцию $\Phi \in (R^1 \to R^1) \cap C_1(k_\varepsilon(0))$ следующим образом:

$$\Phi(h) = F(x+h, y'(x+h)) - F(x, y'(x)) \; [h \in k_\varepsilon(0)].$$

На основании принципа минимума (10.14)

$$F(x+h, y'(x+h)) - F(x, y'(x+h)) \leqq \Phi(h) \leqq$$
$$\leqq F(x+h, y'(x)) - F(x, y'(x))$$
$$(h \in k_\varepsilon(0)).$$

По теореме Лагранжа о среднем это неравенство можно записать так:

$$F_x(x + \Theta_1(h)h, y'(x+h)) \leqq \frac{\Phi(h)}{h} \leqq F_x(x+\Theta_2(h)h, y'(x))$$
$$(h \in k_\varepsilon(0) \text{ и } h > 0),$$

$$\text{или } F_x(x+\Theta_1(h)h, y'(x+h)) \geqq \frac{\Phi(h)}{h} \geqq$$

$$\geqq F_x(x+\Theta_2(h)h, y'(x)) \quad (h \in k_\varepsilon(0) \text{ и } h<0),$$

где $0 < \Theta_i(h) < 1$ ($i = 1, 2$; $h \in k_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$). Из этих неравенств предельным переходом при $h \to 0$ получаем

$$\frac{d}{dx} F(x, y'(x)) = F_x(x, y'(x)). \tag{10.20}$$

Данное равенство выполняется в любой точке $x \in D_{y'}$, поэтому, интегрируя его и учитывая (10.19), получаем

$$F(x, y'(x \pm 0)) = \int_{x_1}^{x} F_x(t, y'(t))\,dt + F(x_1, y'(x_1))$$

$$(x \in [x_1, x_2]).$$

Утверждение 7 доказано; из него непосредственно вытекает следующее утверждение.

Утверждение 8. *Если $f \in C_1(Q)$ ($Q = T \times R^1$) и на функции $y \in D_I$ функционал I достигает сильного локального минимума, то существует такая постоянная $C \in R^1$, что y удовлетворяет и-д. у.*

$$f(x, y, y') - y' f_{y'}(x, y, y') = \int_{x_1}^{x} f_x(x, y, y')\,dx + C. \tag{10.21}$$

Доказательство. Так как функция y доставляет сильный локальный минимум, то она удовлетворяет и-д. у. Э—Л и условию Вейерштрасса, а значит, в силу утверждения 6 — и принципу минимума, относящемуся к соответствующей функции F. На основании равенства (10.13) в любой точке $x \in D_{y'}$

$$F_x(x, u) = f_x(x, y(x), u) + f_y(x, y(x), u)\, y'(x) -$$

$$- u f_y(x, y(x), y'(x)),$$

откуда следует, что

$$F_x(x, y'(x \pm 0)) = f_x(x, y(x), y'(x \pm 0)) \; [x \in (x_1, x_2)].$$

Так как согласно (10.16) в интервале (x_1, x_2) выполняется равенство

$$F(x, y'(x \pm 0)) = f(x, y(x), y'(x \pm 0)) - y'(x \pm 0) \times$$

$$\times f_{y'}(x, y(x), y'(x \pm 0)),$$

то и-д.у. (10.18) в данном случае совпадает с и-д. у. (10.21). Утверждение 8 доказано.

Замечание. Из выполнения и-д. у. (10.21) можно сделать выводы, аналогичные тем, которые были сделаны из и-д. у. Э—Л в теореме 1 § 8 (см. утверждения 3, 4 и 5 § 8). Утверждению 5 § 8, очевидно, соответствует (уже много раз доказанное) условие непрерывности в точке излома $f - y' f_{y'} |_{-0} = f - y' f_{y'} |_{+0}$. Сформулируем аналоги утверждений 3 и 4 § 8.

Утверждение 9. *Предположим, что* $f \in C_1(Q)$ $(Q = T \times R^1)$ *и что функционал* I *на непрерывно дифференцируемой функции* $y \in D_I$ *достигает сильного локального минимума. Тогда* y *удовлетворяет уравнению*

$$f_x(x, y, y') - \frac{d}{dx}\{f(x, y, y') - y' f_{y'}(x, y, y')\} = 0$$

(*см. определение* 3 § 8).

Утверждение 10. *Предположим что* $f \in C_2(Q)$ $(Q = T \times R^1)$ *и что функционал* I *на два раза непрерывно дифференцируемой функции* $y \in D_I$ *достигает сильного локального минимума. Тогда* y *удовлетворяет д. у. Э—Л*

$$f_y(x, y, y') - f_{xy'}(x, y, y') - f_{yy'}(x, y, y')\, y' - \\ - f_{y'y'}(x, y, y')\, y'' = 0.$$

Замечания: 1. Доказательства утверждений 9 и 10, полностью аналогичные доказательствам утверждений 3 и 4 § 8, предоставляем читателю.

2. Каждое из утверждений 8, 9 и 10 есть следствие утверждения 7, поэтому, принимая во внимание утверждение 6, условие «функционал I на функции $y \in D_I$ достигает сильного локального минимума» можно заменить в них следующим, более слабым условием «$y \in D_I$ удовлетворяет д. у. Э—Л и условию Вейерштрасса».

3. Из утверждения 10 следует, что для функций из $C_2[x_1, x_2] \cap D_I$ в случае выполнения условия $f \in C_2(T \times R^1)$ и-д. у. Э—Л и и-д. у. (10.21) эквивалентны в следующем смысле: оба переходят в д. у. Э—Л.

10.3. Достаточные условия сильного локального минимума

В этом пункте мы конструктивным способом придем к одному достаточному условию сильного локального минимума. Для тех, кто интересуется только данным достаточным условием, предлагаем следующий порядок изучения этого пункта: определение 5, определение 7, определение 8, теорема 2.

А) Более простой формулировке результатов дальнейших исследований способствует следующее определение.

Определение 5. *Пусть $\varepsilon > 0$. Будем называть ε =полосой, окаймляющей график функции $y \in (R^1 \to R^1) \cap C[a, b]$, множество точек*

$$S_\varepsilon(\mathrm{graf}\, y) \overset{\mathrm{df}}{=} \{(x, y) \in R^2 \mid x \in [a, b], \ |y - y(x)| < \varepsilon\}.$$

В тех случаях, когда ширина данной полосы ε не играет существенной роли, а важно только существование полосы с некоторым заданным свойством, будем обозначать полосу просто $S(\mathrm{graf}\, y)$.

Б) Рассмотрим некоторую функцию $y \in D_I$. Отметим вначале следующее очевидное достаточное условие.

Если существует такая полоса $S_\varepsilon(\mathrm{graf}\, y) \subset T$, что

$$\psi(x, y, y') \overset{\mathrm{df}}{=} f(x, y, y') - f(x, y(x), y'(x)) \geqq 0 \tag{10.22}$$

$$((x, y, y') \in S_\varepsilon(\mathrm{graf}\, y) \times R^1),$$

то y доставляет сильный локальный минимум функционалу I.

Действительно, если выполняется (10.22), то для любой функции $\bar{y} \in K_\varepsilon(y) \cap D_I$

$$I[\bar{y}] - I[y] = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\, dx \geqq 0. \tag{10.23}$$

Проверка выполнения приведенного достаточного условия требует определения знака функции $\psi \in R^3 \to R^1$: к аналогичной задаче приводит проверка выполнения условий Лежандра и Вейерштрасса (относительно функции из $R^1 \to R^1$ и из $R^2 \to R^1$).

Отметим в связи с этим следующее.

1. На первый взгляд требование неотрицательности подынтегральной функции, накладываемое для обеспечения неотрицательности интеграла, может показаться слишком грубым. Обратим, однако, внимание на то, что в случае слабого локального минимума достаточные условия, близкие к необходимым, обеспечивали именно такое неравенство [ср. с доказательством теоремы 1 § 9, формула (9.11)]. Поэтому в дальнейших исследованиях будем учитывать возможность

того, что справедливость неравенства $I[\bar{y}] - I[y] \geqq 0$ может быть обеспечена представлением левой части в виде интеграла с неотрицательной подынтегральной функцией.

2. Условие (10.22) может выполняться только в очень частном случае. Действительно, если выполняется (10.22) и $f \in C_1(Q)$, то функция y, очевидно, должна удовлетворять системе д. у.

$$(10.24) \qquad f_y(x, \ y, \ y') = 0, \quad f_{y'}(x, \ y, \ y') = 0.$$

Это условие является, вообще говоря, значительно более жестким, чем соответствующее необходимое условие; в этом случае равенство $f_{y'} = \int\limits_{x_1}^{x} f_y dx + c$ выполняется тривиально: функция в левой части и подынтегральная функция в правой части тождественно равны нулю, и постоянная c также равна нулю. Все это связано с тем, что неравенство (10.22) не отражает природы исследуемой вариационной задачи в следующем смысле: если выполняется (10.22), то y доставляет локальный минимум не только функционалу I, но и функционалам, определенным на гораздо более широких классах функций.

В качестве примера возьмем следующее расширение J функционала I: сохраним все условия в определении функционала I, кроме двух: исключим граничное условие ii), а условие i) $y \in D_1[x_1, x_2]$ расширим, потребовав, чтобы функции y были кусочно-непрерывными и «на отрезках непрерывности» непрерывно дифференцируемыми. Очевидно, что при том же определении сильного локального минимума функционал J также достигает сильного локального минимума на функции $y \in D_I \subset D_J$.

3. Сделанное выше замечание означает, что условие (10.22) нельзя рассматривать как достаточное условие, соответствующее природе исследуемой вариационной задачи. Но основную идею получения такого условия «можно спасти», если поставить вопрос об изменении функционала I модификацией основной функции так, чтобы:

α) множество экстремальных функций (или хотя бы его некоторое подходящее подмножество) осталось неизменным;

β) неравенство (10.22), которое относится к модифицированной основной функции, не означало бы слишком сильного, не соответствующего характеру исследования, требования, накладываемого на экстремальную функцию $y \in D_I$.

В дальнейшем покажем, что на поставленный вопрос можно дать положительный ответ.

В) С требованием α) связано следующее определение.

Определение 6. *Пусть $T^* \subset R^2$ — данная область, $Q^* = T^* \times R^1$; $f^* \in (R^3 \to R^1) \cap D^1(Q^*)$ — данная функция. Будем говорить, что f^* — инвариантная основная функция, если область значений функционала I^*, определенного данными Q^*, f^* и произвольными фиксированными точками $P_1^*, P_2^* \in T^*$, содержит один элемент.*

Замечания: 1. Функционал, образованный инвариантной основной функцией, называют постоянным или инвариантным функционалом, а также инвариантным интегралом.

2. Если I^* — инвариантный функционал, то для произвольных функций y_1, $y_2 \in D_{I^*}$ выполняется равенство $I^*[y_1] = I^*[y_2]$.

3. Фиксируем точку $P_1^* \in T^*$. Тогда на множестве $T^{**} \overset{\text{df}}{=} T^* \cap \{(x_1^*, +\infty) \times R^1\}$ можно определить функцию $i \in R^2 \to R^1$ следующим образом: если $(\xi, \eta) \in T^{**}$, то $i(\xi, \eta) \overset{\text{df}}{=} I^*_{(\xi,\eta)}[y]$, где $I^*_{(\xi,\eta)}$ — функционал, определенный данными Q^*, f^*, P_1^*, $P_2^* = (\xi, \eta)$, а y — произвольная фиксированная функция из $D_{I^*(\xi,\eta)}$.

4. В дальнейшем в качестве T^* будем обычно брать множество типа S (graf y). Это множество не открыто (точнее не открыто «в направлении x»), но данные исследования останутся в силе и в случае такого множества.

Очевидный факт устанавливает следующее утверждение.

Утверждение 11. *Пусть $y \in D_I$ доставляет сильный локальный минимум функционалу I, а I^* — произвольный функционал, определенный данными $Q^* = T^* \times R^1$, f^*, P_1, P_2, для которого выполняются условия:*

а) *существует такая ε-полоса S_ε (graf y), что S_ε (graf y) $\subset T^*$;*

б) *f^* — инвариантная основная функция.*

Тогда на функции y функционал $J = I + I^*$[16] *также достигает сильного локального минимума.*

Доказательство. Так как y доставляет сильный локальный минимум функционалу I, то существует такое положительное число ε_1 ($\leq \varepsilon$), что если $\bar{y} \in K_{\varepsilon_1}(y) \cap D_I$,

---

[16]Функционал $I + I^*$, как обычно, определяется так: $D_{I+I^*} \overset{\text{df}}{=} D_I \cap D_{I^*}$; если $y \in D_{I+I^*}$, то $(I + I^*)[y] \overset{\text{df}}{=} I[y] + I^*[y]$.

то $I[\bar{y}] - I[y] \geqq 0$. Так как f^* — инвариантная основная функция, то выполняется равенство $I^*[\bar{y}] = I^*[y]$, поэтому для любой функции $\bar{y} \in K_{\varepsilon_1}(y) \cap D_I = K_{\varepsilon_1}(y) \cap D_J$

$$J[\bar{y}] - J[y] = I[\bar{y}] + I^*[\bar{y}] - (I[y] + I^*[y]) = I[\bar{y}] - I[y] \geqq 0.$$

Утверждение 11 доказано.

Г) Метод получения инвариантных основных функций основывается на следующем утверждении.

Утверждение 12. *Сохраним обозначения определения 6 и предположим, что область T^* односвязна и $f^* \in C_2(Q^*)$. Функция f^* является инвариантной основной функцией тогда и только тогда, когда*

$$(10.25) \quad f^*(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y' \; [(x, y, y') \in Q^*]$$

где функции M, $N \in C_1(T^*)$ связаны равенством

$$(10.26) \quad M_y(x, y) = N_x(x, y) \; [(x, y) \in T^*].$$

Доказательство. Тот факт, что из условия (10.26) следует, что функция f^*, определенная равенством (10.25), является инвариантной основной функцией, уже доказан в п. 5.1, а). Остается доказать, что если f^* — инвариантная основная функция, то она имеет вид (10.25), и выполняется тождество (10.26).

Пусть $(\xi, \eta, \eta', \eta'')$ — произвольная фиксированная точка $T \times R^2$. Выберем произвольную функцию $y \in (R^1 \to R^1) \cap C_2[x_1^*, x_2^*]$, для которой выполняются следующие условия:

1°. $\xi \in (x_1^*, x_2^*)$.

2°. $(x, y(x)) \in T^*$ $(x \in [x_1^*, x_2^*])$.

3°. $y(\xi) = \eta$, $y'(\xi) = \eta'$, $y''(\xi) = \eta''$.

Из соотношения 2° следует, что точки $P_1^* \overset{\mathrm{df}}{=} (x_1^*, y(x_1^*))$, $P_2^* \overset{\mathrm{df}}{=} (x_2^*, y(x_2^*))$ принадлежат T^*.

Так как f^* — инвариантная основная функция, то функционал, определенный данными Q^*, f^* и точками P_1^*, P_2^*, на любой допустимой функции, в том числе и на y, достигает (абсолютного) минимума, поэтому функция y должна удовлетворять соответствующему д. у. Э—Л. В точке $\xi \in (x_1^*, x_2^*)$ это уравнение, учитывая условие 3°, можно записать так:

$$(10.27) \quad f_y^*(\xi, \eta, \eta') - f_{xy'}^*(\xi, \eta, \eta') - f_{yy'}^*(\xi, \eta, \eta')\eta' - f_{y'y'}^*(\xi, \eta, \eta')\eta'' = 0.$$

Поскольку это тождество (10.27) выполняется для произвольной точки $(\xi, \eta, \eta', \eta'') \in T^* \times R^2$, переходя к переменным $x, y, \ldots$, получаем, что $f^*_{y'y'}(x, y, y') = 0$ $[(x, y, y') \in Q^*]$, т. е. существуют такие функции M, $N \in C_1(Q^*)$, что

$$f^*(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)\, y' \quad [(x, y, y') \in Q^*].$$

Если теперь подставим f^* в тождество

$$f^*_y(x, y, y') - f^*_{xy'}(x, y, y') - f^*_{yy'}(x, y, y')\, y' = 0 \quad [(x, y, y') \in Q^*],$$

вытекающее из (10.27), то получим требуемое равенство (10.26). Утверждение 12 доказано.

Д) Используя утверждение 11, можно прийти к достаточному условию следующим путем: *если* (в обозначениях утверждения 11) *существует такая инвариантная основная функция* f^* *и такое* $\varepsilon > 0$, *что*

$$(10.28)\qquad f(x, y, y') + f^*(x, y, y') - \{f(x, y(x), y'(x)) + f^*(x, y(x), y'(x))\} \geqq 0$$
$$[(x, y, y') \in S_\varepsilon(\operatorname{graf} y) \times R^1],$$

то функционал I *на функции* y *достигает сильного локального минимума.*

Замечания: 1. Следующий шаг заключается в исследовании условий, при которых существует инвариантная основная функция f^*, удовлетворяющая неравенству (10.28). Для этого, очевидно, надо связать f^* с f и с функцией $y \in D_I$. Вначале целесообразно постараться отыскать такую связь, которая упрощает равенство (10.28). Действительно, если f^* такова, что на функции y выполняется равенство

$$(10.29)\qquad f(x, y(x), y'(x)) = -f^*(x, y(x), y'(x)) \quad (x \in [x_1, x_2]),$$

то (10.28) можно записать так:

$$(10.30)\qquad f(x, y, y') + f^*(x, y, y') \geqq 0 \quad [(x, y, y') \in S_\varepsilon(\operatorname{graf} y) \times R^1].$$

В соответствии с утверждением 12 неравенству (10.30) можно придать такую форму:

$$(10.31)\qquad f(x, y, y') + M(x, y) + N(x, y)\, y' \geqq 0 \quad [(x, y, y') \in S_\varepsilon(\operatorname{graf} y) \times R^1].$$

2. Неравенство (10.31) подсказывает, в каком виде следует искать функцию $f^* = M + Ny'$. Действительно, функцию, стоящую в левой части (10.31), очевидно, целесообразно было бы связать с функцией Вейерштрасса, так как на основании теоремы 1 с помощью функции E можно сформулировать достаточное условие сильного локального минимума. В соответствии с этим (учитывая, что $E \in R^4 \to R^1$, а в правой части (10.31) стоит функция из $R^3 \to R^1$) поступим следующим образом: пусть $p \in (R^2 \to R^1) \cap C_1 (S_\varepsilon (\operatorname{graf} y))$ — пока произвольная функция; определим функции $M, N \in (R^2 \to R^1) \cap C_1 (S_\varepsilon (\operatorname{graf} y))$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &(10.32_1) \quad M(x, y) = -f(x, y, p(x, y)) + \\ &\qquad\qquad + p(x, y) f_{y'}(x, y, p(x, y)) \\ &(10.32_2) \quad N(x, y) = -f_{y'}(x, y, p(x, y)) \end{aligned}\right\} [(x, y) \in S_\varepsilon (\operatorname{graf} y)].$$

Функция f^*, соответствующая этим функциям, примет следующий вид:

$$(10.33) \quad \begin{aligned} f^*(x, y, y') = &-f(x, y, p(x, y)) - \\ &-(y' - p(x, y)) f_{y'}(x, y, p(x, y)), \end{aligned}$$

а неравенство (10.31) преобразуется так:

$$(10.34) \quad \begin{gathered} f(x, y, y') - f(x, y, p(x, y) - (y' - p(x, y)) \times \\ \times f_{y'}(x, y, p(x, y)) = E(x, y, p(x, y), y') \geqq 0 \\ [(x, y, y') \in S_\varepsilon (\operatorname{graf} y) \times R^1]. \end{gathered}$$

E) Если вместо неравенства (10.22) мы хотим использовать (10.34), то необходимо ответить на следующие вопросы:

γ) при каком выборе p функция (10.33) будет инвариантной основной функцией?

δ) выполнимо ли условие (10.29)?

1. Начнем с исследования условия γ). Так как множество $S_\varepsilon (\operatorname{graf} y)$ односвязно, то функцию p можно выбрать так, чтобы для функций (10.32) выполнялось равенство $M_y = N_x$. Исходя из этого равенства, в результате простых вычислений получаем, что функция f^*, определенная равенством (10.33), является инвариантной основной функцией тогда и только тогда, когда p удовлетворяет д. у. первого порядка в частных производных

$$(10.35) \quad \begin{aligned} f_{y'y'}(x, y, p) \{p_x + p p_y\} + f_{yy'}(x, y, p) p + \\ + f_{xy'}(x, y, p) - f_y(x, y, p) = 0. \end{aligned}$$

Для интегрирования д. у. в частных производных (10.35) сравним его с д. у. Э—Л:

$$(10.36)\quad f_{y'y'}(x, y, y')\,y'' + f_{yy'}(x, y, y')\,y' + f_{xy'}(x, y, y') - f_y(x, y, y') = 0.$$

Из сравнения видно, что если каждое решение д. у. первого порядка

$$(10.37)\qquad y' = p(x, y)$$

есть два раза непрерывно дифференцируемая стационарная функция, соответствующая основной функции f, то p удовлетворяет д. у. в частных производных (10.35). Действительно, фиксируем любую точку $(x, y) \in S_\varepsilon(\mathrm{graf}\, y)$ и обозначим через φ решение уравнения (10.37), удовлетворяющее начальному условию $y(x) = y$. Предположим, что φ удовлетворяет д. у. Э—Л (10.36). Так как $\varphi'(x) = p(x, y)$, $\varphi''(x) = p_x(x, y) + p(x, y)p_y(x, y)$ и точка $(x, y) \in S_\varepsilon(\mathrm{graf}\, y)$ — произвольная, то функция p определена в $S_\varepsilon(\mathrm{graf}\, y)$ и удовлетворяет д. у. в частных производных (10.35).

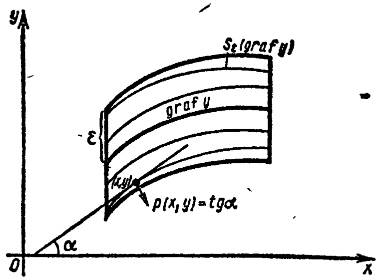

Рис. 17

Конструирование функции $p(x, y)$, удовлетворяющей д. у. (10.35), наглядно можно произвести следующим образом: возьмем такое однопараметрическое достаточное число раз дифференцируемое семейство стационарных кривых, которое «однолистно покрывает» $S_\varepsilon(\mathrm{graf}\, y)$, и любой точке (x, y) сопоставим тангенс угла наклона касательной к стационарной кривой из данного семейства, проходящей через эту точку (рис. 17).

2. Если и сама исходная функция $y \in D_I$, участвующая в третьем и четвертом слагаемых в равенстве (10.28), также удовлетворяет д. у. (10.37), то из представления f^* в виде (10.33) сразу следует, что выполняется тождество (10.29), т. е. ответ на вопрос δ) положителен.

3. Если функция $y \in D_I$ удовлетворяет условию Вейерштрасса и д. у. (10.37), то на множестве $\mathrm{graf}\, y \times R^1$ выполняется неравенство для функции Вейерштрасса (10.34). В этом случае различие между условием Вейерштрасса и

неравенством (10.34) заключается в том, что в последнем вместо множества graf y участвует полоса S_ε (graf y).

Отметим, что если p удовлетворяет д. у. (10.35), то основную функцию (10.33) называют *инвариантной основной функцией Гильберта*, а функционал, образованный ею, — *интегралом Гильберта*.

4. Если $y \in D_I$ удовлетворяет д. у. (10.37), то из (10.34) следует, что функция E в левой части неравенства для любого значения $x \in [x_1, x_2]$ в точках $y = y(x)$, $y' = y'(x)$ достигает абсолютного минимума. В результате простых вычислений получаем

$$\frac{\partial}{\partial y} E(x, y, p(x, y), y')\Big|_{\substack{y=y(x)\\ y'=y'(x)}} = 0,$$

$$(x \in [x_1, x_2]),$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} E(x, y, p(x, y), y')\Big|_{\substack{y=y(x)\\ y'=y'(x)}} = 0,$$

т. е. неравенство (10.34) не накладывает такого нового ограничения на функцию $y \in D_I$, как неравенство (10.22) [см. (10.24)].

Ж) Мы уже вплотную подошли к одному («близкому» к необходимым условиям) достаточному условию сильного локального минимума. В следующем пункте сформулируем это условие и приведем общепринятое название функции p, удовлетворяющей д. у. (10.34). Кроме того, дадим также достаточное условие построения функции p способом, указанным в замечании 1 и п. Д); это условие затем будет связано с условием Якоби.

10.4. Понятие поля экстремалей. Достаточные условия.

Определение 7. *Пусть $f \in C_2(Q)$ $(Q = T \times R^1)$, а $p \in R^2 \to R^1$ — непрерывно дифференцируемая функция, для которой $D_p \subset T$ и которая удовлетворяет д. у. первого порядка в частных производных.*

$$(10.38)\qquad f_{y'y'}(x, y, p)\{p_x + p_y p\} + f_{yy'}(x, y, p)\,p + f_{xy'}(x, y, p) - f_y(x, y, p) = 0.$$

Класс функций $M_{\{p\}}$, состоящий из решений д. у.

$$(10.39)\qquad y' = p(x, y),$$

назовем стационарным полем (связанным с функцией f).

Замечания: 1. В математической литературе применяется также следующая терминология: вместо *стационарного поля* говорят о *поле экстремалей*; D_p называют *об-*

ластью определения поля; p — функцией наклона поля; элементы M — *траекториями поля.*

2. Пусть y — траектория поля $M_{\{p\}}$. Из тождеств

$$y'(x)=p(x,\ y(x)) \text{ и } y''(x)=p_x(x,\ y(x))+$$

$$+p_y(x,\ y(x))p(x,\ y(x))\ (x\in D_y) \text{ и из сравнения д. у.}$$

(10.38) с д. у. Э—Л сразу вытекает, что y удовлетворяет д. у. Э—Л.

Определение 8. *Пусть* $y\in(R^1\to R^1)\cap C_2[a,b]$. *Будем говорить, что y включается в стационарное поле (связанное с f), если существует такое поле $M_{\{p\}}$ и такая полоса* S (graf y), *что:*

а) $y\in M_{\{p\}}$:

б) S (graf y) $\subset D_p$.

Замечание. Из замечания 2 к определению 7 следует, что задачу включения в поле можно ставить только для два раза непрерывно дифференцируемой стационарной функции.

Достаточное условие сильного локального минимума устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $f\in C_2(Q)$ $(Q=T\times R^1)$, $y\in D_I$ *и предположим, что:* а) *y включается в стационарное поле;* б) *существует такая полоса* S_ε (graf y), *для которой*

$$E\ (x,\ y,\ p\ (x,\ y),\ u)\geqq 0 \tag{10.40}$$

$$[\ (x,\ y,\ u)\in\ S_\varepsilon(\text{graf } y)\times R^1],$$

где p — функция наклона стационарного поля из условия а).

Тогда функционал I на функции y достигает сильного локального минимума.

Доказательство. В условии (10.40) подразумевается, что S_ε (graf y) $\subset D_p$. Функция p удовлетворяет д. у. (10.38):

$$[f_{y'y'}]\{p_x(x,y)+p_y(x,y)\,p\,(x,y)\}+ \tag{10.41}$$

$$+[f_{yy'}]\,p\,(x,y)+[f_{xy'}]-[f_y]=0$$

$$((x,y)\in D_p).$$

где квадратные скобки означают, что аргументы функций, заключенных в эти скобки, равны x, y, $p(x, y)$. Уравнение (10.41) можно записать и так:

$$[f_{xy'}]+[f_{y'y'}]\,p_x(x, y)=[f_y]-\{[f_{yy'}]+$$
$$+[f_{y'y'}]\,p_y(x, y)\}\,p(x, y), \text{ т.е.}$$

$$(10.42)\quad \frac{\partial}{\partial x}[f_{y'}]=\frac{\partial}{\partial y}\{[f]-p(x, y)[f_{y'}]\}\quad ((x, y)\in D_p).$$

Полученное тождество (ср. с п. 5.1) означает, что функционал I^*, определенный данными $Q^* \overset{\mathrm{df}}{=} T^*\times R^1$

$$(S_\varepsilon(\operatorname{graf} y)\subset T^*\subset D_p),\ f^*(x, y, y')\overset{\mathrm{df}}{=}[f]-p(x, y)[f_{y'}]+$$
$$+[f_{y'}]y',\ P_1^*\overset{\mathrm{df}}{=}P_1,\ P_2^*\overset{\mathrm{df}}{=}P_2,$$

на любой функции $y\in D_{I^*}$ принимает одно и то же значение. Очевидно, что $y\in D_I\cap D_{I^*}$. Найдем значение $I^*[y]$. Учитывая, что $y\in M_{\{p\}}$, т. е. что $y'(x)=p(x,\ y(x))$ $(x\in[x_1, x_2])$, получаем

$$(10.43)\qquad I^*[y]=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x, y(x), p(x, y(x)))-$$
$$-p(x, y(x))\,f_{y'}(x, y(x), p(x, y(x)))+$$
$$+f_{y'}(x, y(x), p(x, y(x)))\,y'(x)\}\,dx=$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}f(x, y(x), y'(x))=I[y]$$

т. е. *I^* на любой функции, принадлежащей D_{I^*}, принимает значение $I[y]$.*

Пусть теперь $\bar y\in \dot D_I\cap K_\varepsilon^1(y)$ — произвольная фиксированная функция. В силу определения T^* $\bar y\in D_{I^*}$. Из сказанного о функционале I^* и из определения функции E для разности $I[\bar y]-I[y]$ получаем следующее представление:

$$(10.44)\quad I[\bar y]-I[y]=I[\bar y]-I^*[y]=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x, \bar y(x), \bar y'(x))-$$
$$-f(x, \bar y(x), p(x, \bar y(x)))-[\bar y'(x)-p(x, \bar y(x))]\,f_{y'}(x, \bar y(x),$$
$$p(x, \bar y(x))\}\,dx=\int_{x_1}^{x_2}E(x, \bar y(x), p(x, \bar y(x))\ y'(x))\,dx.$$

Так как для любого значения $x \in [x_1, x_2] (x, y(x), p(x, \bar{y}(x))) \in S_\varepsilon (\text{graf}\ y)$, то из (10.40) следует, что подынтегральная функция в последнем интеграле неотрицательна, т. е. $I[\bar{y}] - I[y] \geqq 0$. Теорема 2 доказана.

Замечания: 1. Функцию наклона p стационарного поля обычно определяют не с помощью д. у. (10.38), а следующим образом: предполагают, что любой функционал I^*, определенный основной функцией $f^*(x, y, y') = f(x, y, p(x, y)) + (y' - p(x, y)) f_{y'}(x, y, p(x, y))$, на любой функции из D_{I^*} принимает одно и то же значение.

В этом случае обратными рассуждениями [от (10.43) к (10.41)] можно доказать, что p удовлетворяет д. у. (10.44) [ср. с Е) в п. 10.3].

2. Утверждение, выраженное равенством (10.44) (при указанных выше условиях), называют также *основной теоремой Вейерштрасса.*

3. Если I — положительно регулярный или полурегулярный функционал, то выполняется неравенство (10.40) (см. утверждение 3 и замечание, следующее за ним).

4. Метод, использованный при доказательстве теоремы 2, в некоторых специальных случаях дает возможность установить условия абсолютного минимума. Сохраняя обозначения и условия теоремы 2, предположим, что:

α) $T = R^2$,

β) $[x_1, x_2] \times R^1 \subset D_p$,

γ) $E(x, y, p(x, y), u) \geqq 0 \quad ((x, y, u) \in [x_1, x_2] \times R^2)$.

Тогда согласно равенству (10.44) для любой функции $\bar{y} \in D_I$ выполняется неравенство $I[\bar{y}] \geqq I[y]$, т. е. в этом случае y доставляет абсолютный минимум функционалу I.

Обратим внимание на то, что условие β) выполняется, например, в случае $y'(x) = c\ (x \in [x_1, x_2])$ с функцией наклона $p(x, y) = c\ [(x, y) \in R^2]$, а условие γ) — в случае положительно полурегулярного функционала.

5. Осталось найти достаточные условия включения функции $y \in D_I$ в стационарное поле. Следующее утверждение устанавливает, что, по существу, это достаточные условия слабого локального минимума.

Утверждение 13. *Пусть*:

А) $f \in C_4(T \times R^1)$,

Б) $y \in C_2[x_1, x_2]$ — *стационарная функция функционала* I, В) $r(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0 \quad (x \in [x_1, x_2])$,

Г) $\Delta_y(x) \neq 0 \quad (x \in (x_1, x_2])$.

Тогда y включается в стационарное поле (связанное с f).

Доказательство проведем в несколько шагов.

α) По лемме 1 § 9 у стационарной функции y существует такое расширение y^* ($D_{y^*} = [x_1^*, x_2^*]$, где $x_1^* < x_1 < x_2 < x_2^*$), которое также удовлетворяет (сильному) условию Якоби

(10.45) $$\Delta_{y^*}(x) \neq 0 \quad (x \in (x_1^*, x_2]).$$

В § 8 было доказано (см. замечание 4 к утверждению 12 из § 8, в котором вместо интервала $[x_1, x_2]$ следует взять интервал $[x_1^*, x_2^*]$) существование функции $\varphi^* \in R^2 \to R^1$ $D_{\varphi^*} = [x_1^*, x_2^*] \times [a_1^*, a_2^*]$, удовлетворяющей следующим, условиям:

1^0. $\varphi^* \in C_3([x_1^*, x_2^*] \times [a_1^*, a_2^*])$.

2^0. $a_0 \overset{\mathrm{df}}{=} y^{*\prime}(x_1^*) \in (a_1^*, a_2^*)$;

3^0. Для произвольного фиксированного $a \in [a_1^*, a_2^*]$ функция $\varphi^*(x, a) \in R^1 \to R^1$ есть решение д. у. Э—Л, удовлетворяющее условиям $\varphi^*(x_1^*, a) = y^*(x_1^*)$, $\varphi^{*\prime}(x_1^*, a) = a$. Отметим, что из этих условий следует равенство $\varphi^*(x, a_0) = y^*(x)$, $x \in [x_1^*, x_2^*]$.

Для функции φ^* выполняются условия утверждения 12 § 8, из которого (см. также замечание 4 к указанному утверждению) следует, что $\varphi_a^*(x, a_0) = \Delta_{y^*}(x)$ $(x \in [x_1^*, x_2^*])$.

В силу этого равенства, соотношения (10.45) и непрерывности φ_a^* существует такой, содержащий внутри себя точку a_0, интервал $[a_1, a_2] \subset [a_1^*, a_2']$, что $\varphi_a^*(x, a) \neq 0$ $((x, a) \in [x_1, x_2] \times [a_1, a_2])$.

Далее обозначим через φ сужение функции φ^* на множество $[x_1, x_2] \times [a_1, a_2]$ (рис. 18, a). В частности, $\varphi(x, a_0) = y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$.

Итак, для функции φ выполняются следующие соотношения:

(10.46) $$f_{y'y'}(x, \varphi(x, a), \varphi_x(x, a))\, \varphi_{xx}(x, a) + f_{yy'}(x, \varphi(x, a), \varphi_x(x, a))\, \varphi_x(x, a) + f_{xy'}(x, \varphi(x, a), \varphi_x(x, a)) - f_y(x, \varphi(x, a), \varphi_x(x, a)) = 0 \quad ((x, a) \in [x_1, x_2] + [a_1, a_2] = D_\varphi,$$

(10.47) $$\varphi_a(x, a) \neq 0 \quad [(x, a) \in D_\varphi].$$

β) Рассмотрим теперь отображение $\Phi \in R^2 \to R^2$, определенное на множестве $[x_1, x_2] \times [a_1, a_2]$ следующими равенствами:

$$x = x, \quad y = \varphi(x, a) \tag{10.48}$$

(см. рис. 18).

Очевидно, что $D_\Phi = D_\varphi$ и в силу условия 1^0 $\Phi \in C_3(D_\varphi)$.

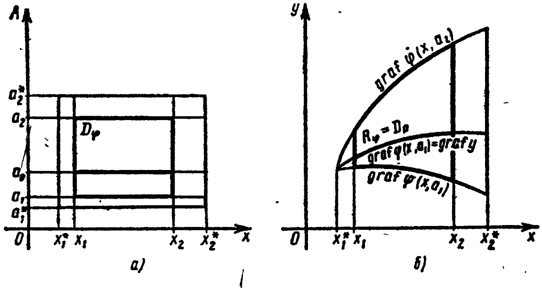

Рис. 18

Легко можно убедиться в том, что отображение Φ взаимно однозначно, и в том, что R_Φ — нормальная область, определенная кривыми (рис. 18, *б*), уравнения которых

$$y = \varphi(x, a_1), \; y = \varphi(x, a_2) \quad (x \in [x_1, x_2]). \tag{10.49}$$

Предположим, что $\varphi(x_1, a_1) < \varphi(x_1, a_2)$ [аналогично можно рассуждать также и в случае $\varphi(x_1, a_1) > \varphi(x_1, a_2)$]. Тогда по формуле (10.47)

$$\varphi_a(x, a) > 0 \; ((x, a) \in [x_1, x_2] \times [a_1, a_2]). \tag{10.50}$$

Рассмотрим теперь нормальную область

$$H \overset{\mathrm{df}}{=} \{(x, y) \in R^2 | x_1 \leqslant x \leqslant x_2; \; \varphi(x, a_1) \leqslant y \leqslant \varphi(x, a_2)\},$$

определенную кривыми (10.49). Так как для произвольного фиксированного $x \in [x_1, x_2]$ функция $\varphi(x, a) \in R^1 \to R^1$ непрерывна и в силу (10.50) строго монотонна по a, то множество R_Φ не имеет точек, расположенных вне H, и для произвольной точки $(x, y) \in H$ существует ровно одно значение $a \in [a_1, a_2]$, такое что $\Phi(x, a) = (x, y)$. А это и означает, что $H = R_\Phi$ и что Φ взаимно однозначно отображает D_Φ на R_Φ.

Итак, существует обратное отображение $\Phi^{-1} \in R^2 \to R^2 \cap C_3(R_\Phi)$:

$$x = x, \; a = a(x, y) \; [(x, y) \in R_\Phi], \tag{10.51}$$

удовлетворяющее тождеству $(\Phi \circ \Phi^{-1})(x, y) = (x, y)$ $[(x, y) \in R_\Phi]$. В частности,

(10.52) $$y = \varphi(x, a(x, y)) \; [(x, y) \in R_\Phi].$$

Применяя преобразование Φ и учитывая (10.51) и (10.52), тождество (10.46) можно записать так:

(10.53) $$f_{y'y'}(x, y, \varphi_x(x, a(x, y)))\varphi_{xx}(x, a(x, y)) + \\ + f_{yy'}(x, y, \varphi_x(x, a(x, y)))\varphi_x(x, a(x, y)) + \\ + f_{xy}(x, y, \varphi_x(x, a(x, y))) - \\ - f_y(x, y, \varphi_x(x, a(x, y))) = 0 \; ((x, y) \in R_\Phi).$$

γ) На данном шаге покажем, что функция $p \in (R^2 \to R^1) \cap C_2(R_\Phi)$, определенная равенством

(10.54) $$p(x, y) = \varphi_x(x, a(x, y)) \; [(x, y) \in R_\Phi = D_p],$$

есть функция наклона некоторого стационарного поля (связанного с f). Для этого вычислим частные производные функций a и p. Применяя тождества (10.52) и (10.54), получаем, что для любого $(x, y) \in R_\Phi$

$$a_x(x, y) = -\frac{\varphi_x(x, a(x, y))}{\varphi_a(x, a(x, y))}, \quad a_y(x, y) = \frac{1}{\varphi_a(x, a(x, y))},$$

$$p_x(x, y) = \varphi_{xx}(x, a(x, y)) - \frac{\varphi_{xa}(x, a(x, y))\varphi_x(x, a(x, y))}{\varphi_a(x, a(x, y))},$$

$$p_y(x, y) = \frac{\varphi_{xa}(x, a(x, y))}{\varphi_a(x, a(x, y))}.$$

Из этих тождеств с учетом (10.54) получаем следующее тождество:

$$p_x(x, y) + p_y(x, y)p(x, y) = \varphi_{xx}(x, a(x, y)) \; [(x, y) \in \\ \in R_\Phi = D_p].$$

Выражая из этого тождества φ_{xx}, а из равенства (10.54) φ_x через функцию p и ее частные производные и подставляя в (10.53), получаем, что p есть решение д. у. (10.38). Таким образом, функция p действительно является функцией наклона некоторого стационарного поля $M_{\{p\}}$.

δ) Осталось доказать, что y включается в построенное стационарное поле.

Как уже выше отмечалось, $y(x) = \varphi(x, a_0)$, поэтому $a_0 = a(x, y(x))$ $(x \in [x_1, x_2])$. Отсюда и из (10.54) получаем

$$y'(x) = \varphi_x(x, a(x, y(x))) = p(x, y(x)) \; (x \in [x_1, x_2]),$$

т. е. $y \in M_{\{p\}}$.

Пусть теперь $\varepsilon=\min\{\rho(y(x), \varphi(x, a_1))\rho,(y(x), \varphi(x, a_2))\}$. Так как графики данных непрерывных функций попарно не пересекаются [см. β)], то $\varepsilon > 0$. Тогда из определения множества $R_\Phi = D_p$ следует, что S_ε (graf y) $\subset D_p$.

Тем самым полностью доказано, что функция y включается в стационарное поле (связанное с f).

Замечания: 1. Схему доказательства наглядно иллюстрирует рис. 18.

2. Многие авторы поле экстремалей определяют, исходя из некоторого (достаточно много раз дифференцируемого) однопараметрического семейства стационарных функций φ, удовлетворяющих условию (10.47). После этого функцию наклона p определяют, как и выше, равенством (10.54). Ясно, что таким способом трудно получить все функции наклона p, но преимущество специального определения заключается в том, что связь между условием Якоби и включением в поле (т. е. утверждение 13) можно сделать обратной: если выполняется условие (10.47), то функция φ_a (x,a_0) удовлетворяет соответствующему условию Якоби.

3. В силу утверждения 13 условие а) теоремы 2 можно заменить условиями А)—Г) утверждения 13.

4. Так как условие б) теоремы 2 в случае положительно регулярной задачи выполняется (утверждение 3), то теорема 2 и утверждение 13 настоящего параграфа и теорема 3 из § 8 приводят к следующему замечанию, заслуживающему внимания: для положительно регулярного функционала в предположении, что $f \in C_4$ (Q) $(Q = T \times R^1)$, различие между достаточными условиями сильного локального минимума и необходимыми условиями слабого локального минимума заключается только в том, что в первом вместо условия Якоби участвует его сильная форма.

5. Если $f \in C_4$ $(T \times R^1)$ и I — положительно регулярный функционал, то условия А)—Г), участвующие в утверждении 13 (говоря геометрическим языком), выполняются для любой достаточно малой дуги произвольной непрерывно дифференцируемой стационарной кривой. Это означает, что любая стационарная кривая без угловых точек «локально» доставляет функционалу сильный локальный минимум (ср. с замечанием 2 после утверждения 1).

6. Изучая условия экстремума, мы до сих пор имели дело только с минимумом. Однако полученные результаты очевидно, сразу можно переформулировать и для максимума: при этом условия, заданные равенствами, останутся неизменными, а в условиях, выраженных неравенствами,

изменятся лишь знаки неравенств. Как уже выше упоминалось, это следует из того, что функции, доставляющие (в каком-то смысле) минимум функционалу I, доставляют (в том же смысле) максимум функционалу $I^* = -I$.

Пример. Рассмотрим семейство функционалов $I_{(\alpha,\beta)}$, определенных данными $Q = R^3$, $f(x, y, y') = y'^4 - 6y'^2$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (\alpha, \beta)$ $[\alpha > 0]$; положим $m = \beta/\alpha$.

1. Д. у. Э—Л приводится к следующему виду:

$$f_{y'}(x, y, y') = 4y'^3 - 12y' = c. \tag{10.55}$$

У этого д. у. имеется ровно одно удовлетворяющее граничным условиям $y(0) = 0$, $y(\alpha) = \beta$ решение:

$$y(x) = mx \quad (x \in [0, \alpha]). \tag{10.56}$$

2. Так как $f_{y'y'}(x, y, y') = 12(y'^2 - 1)$ $[(x, y, y') \in R^3]$, то функция y, определенная равенством (10.56), удовлетворяет сильному условию Лежандра, относящемуся в случае $m^2 > 1$ к минимуму, а в случае $m^2 < 1$ — к максимуму. Если $m^2 = 1$, то y удовлетворяет условию Лежандра, относящемуся и к максимуму и к минимуму, но не удовлетворяет сильному условию Лежандра; следовательно, полученные выше достаточные условия слабого локального экстремума в этом случае неприменимы.

3. С помощью простых рассуждений [например, непосредственно интегрируя д. у. Я, либо применяя утверждение 12 из § 8, либо используя решение задачи 4 из § 8] получаем, что независимо от значения m $(m^2 \neq 1)$

$$\Delta_y(x) = x \neq 0 \quad (x \in (0, \alpha)]).$$

Это означает, что все функции, определенные равенством (10.56), при $m^2 \neq 1$ удовлетворяют сильному условию Якоби. Следовательно, *функционал $I_{(\alpha,\beta)}$ на функции* (10.56) *в случае $m^2 > 1$ достигает слабого локального минимума, а в случае $m^2 < 1$ — слабого локального максимума.*

4. Д. у. в частных производных (10.38) имеет вид

$$12(p^2 - 1)\{p_x + p_y p\} = 0.$$

Очевидно, что для произвольного $m \in R^1$ функция, определенная на R^2 равенством $p(x, y) = m$, есть решение этого уравнения. Отсюда следует, что функция (10.56) включается в стационарное поле с функцией наклона

$$p(x, y) = m \quad [(x, y) \in D_p = R^2]. \tag{10.57}$$

5. Найдем функцию Вейерштрасса. В результате простых вычислений получим

$$E(x, y, y', u) = (u - y')^2 \{u^2 + 2uy' + (3y'^2 - 6) \times \times \{[(x, y, y', u) \in R^4]. \tag{10.58}$$

При фиксированном y' многочлен второго порядка, заключенный в фигурные скобки, меняет знак тогда и только тогда, когда $y'^2 < 3$. Это означает, что функция $y(x) = mx$ $(x \in [0, \alpha])$ удовлетворяет условию Вейерштрасса (относящемуся к минимуму) тогда и только тогда, когда $m^2 \geqq 3$. Из равенства (10.58) непосредственно видно, что при любом выборе y' функция E обязательно принимает и положительные значения, поэтому ни одна функция вида (10.56) не удовлетворяет условию Вейерштрасса, относящемуся к максимуму. Из сказанного следует, что в *случае* $m^2 < 1$ *функция* (10.56) *доставляет слабый, но не сильный локальный максимум, а в случае* $1 < m^2 < 3$ *— слабый, но не сильный локальный минимум.*

6. Пусть $m^2 \geqq 3$, а y — функция, определенная равенством (10.56). Тогда, учитывая (10.57), получаем

$$E(x, y, p(x, y), u) = E(x, y, m, u) = \{u - m\}^2 \{u^2 + 2um + (3u^2 - 6)\} \geqq 0$$
$$((x, y, u) \in [x_1, x_2] \times R^2).$$

Это означает, что $I_{(\alpha, \beta)}$ *на данной функции достигает абсолютного минимума* (см. замечание 5 после теоремы 2). Рис. 19 иллюстрирует полученные результаты.

7. Так как основная функция f зависит только от y', то сечение графика функции f, определяемое произвольной точкой $(x, y) \in R^2$, не зависит от этой точки. Данное сечение есть график функции $v(u) = u^4 - 6u^2$ $(u \in R^1)$ (рис. 20). Простые вычисления показывают, что касательные, проведенные в точках с абсциссами $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$, совпадают. Отсюда следует, что исследуемый функционал может достигать сильных локальных экстремумов только на таких функциях y из $D_1[0, \alpha] \setminus C_1[0, \alpha]$, у которых в точках излома $y'(x - 0) = \sqrt{3}$, $y'(x + 0) = -\sqrt{3}$ или $y'(x - 0) = -\sqrt{3}$, $y'(x + 0) = \sqrt{3}$.

Достаточное условие, полученное выше, очевидно, в данном случае неприменимо, но можно убедиться, что (используя геометрический язык) на любой непрерывной ломаной с тангенсом угла наклона касательной, равным $\sqrt{3}$

или $-\sqrt{3}$, соответствующий функционал достигает абсолютного минимума.

Действительно, пусть $y \in D_{I_{(\alpha,\beta)}}$ — произвольная функция, график которой есть ломаная, обладающая сформулированным свойством, а $\bar{y} = y + \eta$ — произвольная функция из $D_{I_{(\alpha\,\beta)}}$. Тогда

$$(10.59)\qquad I_{\alpha,\beta}[\bar{y}] - I_{\alpha,\beta}[y] = \int\limits_0^\alpha \{(y'(x)+\eta'(x))^4 -$$

$$-6(y'(x)+\eta'(x))^2 - [y'^4(x) - 6y'^2(x)]\}\,dx.$$

Нетрудно проверить, что на любом подынтервале $0, \alpha]$, на котором $y'(x) = \sqrt{3}$, подынтегральную функцию в правой части (10.59) можно записать так: $\eta'^2(x)$ $(\eta'(x) + 2\sqrt{3})^2$; аналогично, на подынтервале, где $y'(x) = -\sqrt{3}$, данную подынтегральную функцию можно привести к виду $\eta'^2(x)(\eta'(x) - 2\sqrt{3})^2$. Из этого следу-

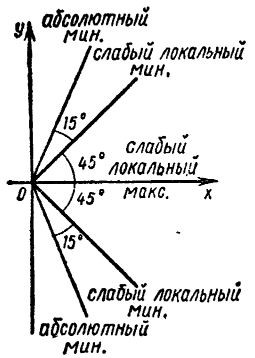

Рис. 19

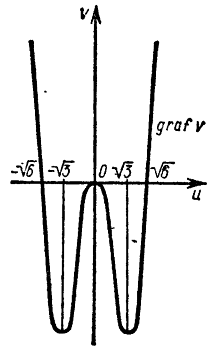

Рис. 20

ет, что для любой функции $\bar{y} \in D_{I_{(\alpha,\beta)}}$ выполняется неравенство $I_{(\alpha,\beta)}[\bar{y}] \geqq I_{(\alpha,\beta)}[y]$. Это и означает, что y *доставляет абсолютный минимум функционалу* $I_{(\alpha,\beta)}$.

Обратим внимание на то, что если $m^2 < 3$, то две точки $(0, 0)$ и $(\alpha, \beta) \in R^2$ $(\alpha > 0)$ можно соединить бесконечно многими ломаными описанного выше типа, поэтому *при* $m^2 < 3$ *имеется бесконечно много функций, доставляющих абсолютный минимум*, а *при* $m^2 \geqq 3$ — *только одна такая функция.*

8. Из специального вида основной функции (зависящей только от y') следует, что приведенные результаты останутся в силе, если в качестве точки P_1 выбирается не начало координат, а произвольная точка из R^2.

На рис. 21 приведено несколько случаев: свойство, указанное рядом с графиком экстремальной функции, является характерным для данного случая.

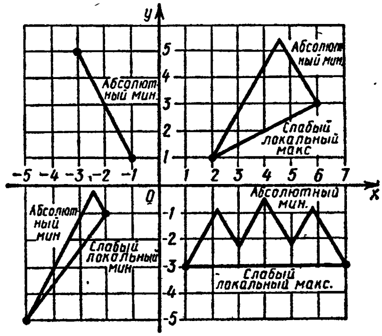

Рис. 21

Задачи: 1. Докажите теорему 1 § 9 по образцу теоремы 2 § 10, предполагая, что $f \in C_4(Q)$.

Указание. После использования утверждения 13 покажите, что из сильного условия Лежандра следует, что подынтегральная функция в последнем члене цепочки равенств (10.44) для любой функции $\bar{y} \in D_I$, попадающей в окрестность первого порядка y достаточно малого радиуса, неотрицательна.

2. Докажите, что если равенство (10.40) выполняется только в тривиальном случае $u = p(x, y)$, то y доставляет функционалу I сильный локальный минимум в строгом смысле.

Замечание. Ср. с задачей 3 § 9.

3. Исследуйте для приведенных ниже основных функций, какие стационарные функции из C_2 включаются в стационарное поле:

а) $f(x, y, y') = \sqrt{1+y'^2}/y \quad (T = \{(x, y) \in R^2 \mid y > 0\})$,

б) $f(x, y, y') = xy'^3 - 3yy'^2 \ (T = R^2)$,

в) $f(x, y, y') = (y'^2 - y^2)/2 \quad (T = R^2)$,

г) $f(x, y, y') = ay^2 + 2byy' + cy'^2 \ (T = R^2;\ a, b, c \in R^1$ — постоянные).

4. Достигает ли функционал, определенный данными $Q = R^3$ $f(x, y, y') = (1 - y')^2 (1 + y')^2$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (4, 2)$, сильного локального минимума на функции, производная которой имеет скачок в единственной точке?

5. Достигает ли функционал, определенный данными $Q = R^3$, $f(x, y, y') = y'^2 + y'^3$, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (4, 2)$, сильного локального минимума?

6. Пусть:

а) $Q = \{(x, y) \in R^2 \mid y > 0\} \times R^1$, $f(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}/y$;

б) $Q = R^3$, $f(x, y, y') = (1/2)\, my'^2 - mgy \ (m)$

(m — положительная постоянная, g — ускорение свободного падения).

Докажите, что в обоих случаях функционал I, образованный основной функцией f, на любой стационарной функции достигает абсолютного минимума.

Замечание. Отсюда следует, что для основной функции б) вариационный принцип, сформулированный в п. 7.4, действительно есть принцип минимума.

7. Пусть $v \in R^1 \to R^1 \cap C[x_1, x_2]$ — функция, принимающая положительные значения; a, b и c — положительные числа; $\varphi \in (R^1 \to R^1) \cap C_2(0, +\infty)$ — заданная функция, у которой вторая производная нигде не обращается в нуль. Докажите, что функционал, определенный данными

$$Q \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{(x, y) \in R^2 \mid x \in [x_1, x_2],\ y > \int_{x_1}^{x} v(s)\,ds - a\right\} \times (0, +\infty),$$

$$f(x, y, y') \overset{\mathrm{df}}{=} \varphi(y') + c\left[y - \int_{x_1}^{x} v(s)\,ds + a\right],$$

$$P_1 \overset{\mathrm{df}}{=} (x_1, y_1),\ P_2 \overset{\mathrm{df}}{=} (x_2, y_2)$$

на любой стационарный функции достигает сильного локального минимума.

Замечание. Рассмотрим производство некоторой продукции в заданном периоде $[x_1, x_2]$. Зададим количество начального и конечного продуктов a и b, функцию реализации v и функцию производственных затрат φ. Обозначим через $y(x)$ количество продукции, изготовленной к моменту времени $x \in [x_1, x_2]$, и предположим, что выполняются следующие условия:

α) $y \in C_1[x_1, x_2]$, $y'(x) > 0$ $(x \in [x_1, x_2])$;

β) $y(x) > \int_{x_1}^{x} v(s)\,ds - a$ $(x \in [x_1, x_2])$;

γ) издержки производства за малый временной интервал $[x, x + \Delta x]$ равны $\varphi(y'(x))\Delta x$;

δ) издержки хранения за малый временной интервал $[x, x + \Delta x]$ пропорциональны (с коэффициентом c) времени Δx и количеству продукции, находящейся на складе.

Тогда полную сумму расходов производства (зависящую от функции y) можно выразить интегралом

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{\varphi(y'(x)) + c\left[y(x) - \int_{x_1}^{x} v(s)\,ds + a\right]\right\} dx.$$

Таким образом, минимизация суммы расходов производства приводит к исследованию минимума построенного функционала

краевыми условиями $y_1 = 0$, $y_2 = \int_{x_1}^{x_2} v(x)dx + b - a$.

ГЛАВА 3

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В БОЛЕЕ ОБЩИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

В этой главе будут рассмотрены некоторые из затронутых в § 7 вариационных задач более сложного типа. При исследовании этих задач мы, как правило, ограничимся знакомством с простейшими (соответствующими теореме 1 из § 8) условиями. В ходе изложения мы опустим замечания, аналогичные тем, которые были сделаны в связи с простейшей вариационной задачей. Отметим, что между необходимыми и достаточными условиями для простейших задач и для тех, которые будут изложены, имеется большое сходство, о котором уже упоминалось, однако в некоторых вопросах имеются и существенные различия. Часть этих вопросов будет разобрана в задачах, относительно остальных ограничимся указанием литературы.

§ 11. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ БОЛЕЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА (ОДНОМЕРНЫЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ С НЕПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ)

11.1. Формулировка проблемы. Лемма Дюбуа — Реймона

Пусть:

а) n *— данное натуральное число*;

б) $Q \subset R^{n+2}$ *— данная область* [точки Q обозначим через $(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$], $T \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{pr}_{12\ldots(n+1)}Q$;

в) $f \in (R^{2n+2} \to R^1) \cap D^1(Q)$ *— данная функция*;

г) $P_1 = (x_1, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)})$, $P_2 = (x_2, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)})$ *— две произвольные фиксированные точки* T, *для которых* $x_1 < x_2$.

Определим функционал I *следующим образом*:

1°. *Функцию* $y \in R^1 \to R^1$ *назовем допустимой функцией* (*обозначение*: $y \in D_I$), *если*:

$i)$ $y \in D_n\,[x_1, x_2]$,

$ii)$ $y^{(i)}(x_1) = y_1^i$, $y^{(i)}(x_2) = y_2^i$ $(i = 0, \ldots, n-1)$,

$iii)$ $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in Q$ $(x \in [x_1, x_2])$.

2^0. *Предполагая, что D_I не пусто, каждой функции $y \in D_I$ поставим в соответствие действительное число*

$$(11.1) \qquad I[y] \overset{\text{df}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))\,dx.$$

Замечания: **1.** Если $n = 1$, то I совпадает с функционалом, определенным в п. 8.1. Поэтому дальнейшие результаты будут новыми только в случае $n \geqq 2$.

2. В дальнейшем, если речь идет о вариационной задаче высокого порядка, всегда подразумевается некоторый функционал, относящийся к только что определенному типу в случае $n \geqq 2$.

Лемма 1 (*лемма Дюбуа—Реймона*). *Пусть $n \in N$, $m \in (R^1 \to R^1) \cap D[x_1, x_2]$. Предположим, что равенство*

$$(11.2) \qquad \int_{x_1}^{x_2} m(x)\,\eta^{(n)}(x)\,dx = 0$$

выполняется для любой функции η, удовлетворяющей условиям

$$(11.3) \qquad \eta \in (R^1 \to R^1) \cap D_n[x_1, x_2];\ \eta^{(i)}(x_1) = \eta^{(i)}(x_2) = 0 \quad (i = 0, \ldots, n-1).$$

Тогда существует такой многочлен $p_{n-1} \in R^1 \to R^1$ порядка не выше $(n-1)$, что в любой точке множества D_m выполняется равенство $m(x) = p_{n-1}(x)$.

Доказательство. Для любого многочлена p_{n-1} с произвольными коэффициентами $c_i \in R^1$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ из равенства (11.2) и условий (11.3) последовательным интегрированием по частям получаем равенство

$$(11.4) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \{m(x) - (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1})\}\,\eta^{(n)}(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \{m(x) - p_{n-1}(x)\}\,\eta^{(n)}(x)\,dx = 0.$$

Пусть теперь $p_{2n-1} \in R^1 \to R^1$ — такой многочлен порядка не выше $(2n-1)$, который удовлетворяет условиям

$$(11.5) \qquad p_{2n-1}^{(i)}(x_1) = 0,\ p_{2n-1}^{(i)}(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{t_{n-i-1}} \ldots \int_{x_1}^{t_1} m(t_0)\,dt_0\,dt_1 \ldots dt_{n-i-1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Из известной интерполяционной теоремы Эрмита следует, что существует (ровно один) такой многочлен.

Рассмотрим теперь функцию $\bar{\eta} \in R^1 \to R^1$, определенную в интервале $[x_1, x_2]$ следующим образом:

$$\bar{\eta}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{x_1}^{x} \int_{x_1}^{t_{n-1}} \ldots \int_{x_1}^{t_1} m(t_0)\, dt_0\, dt_1 \ldots dt_1 \ldots dt_{n-1} - p_{2n-1}(x).$$

Из этого определения и из (11.5) следует, что $\bar{\eta}$ удовлетворяет условиям (11.3).

Обозначим n-ю производную многочлена p_{2n-1} символом $\bar{p}_{n-1}$. Тогда непосредственно из определения $\bar{\eta}$ следует, что в каждой точке $x \in D_m$ выполняется равенство

$$\bar{\eta}^{(n)}(x) = m(x) - \bar{p}_{n-1}(x). \tag{11.6}$$

Если положить в (11.4) $p_{n-1} = \bar{p}_{n-1}$ и $\eta = \bar{\eta}$, то с учетом (11.6) равенство (11.4) можно преобразовать так:

$$\int_{x_1}^{x_2} [m(x) - \bar{p}_{n-1}(x)]^2\, dx = 0.$$

В этом равенстве подынтегральная функция неотрицательна и принадлежит $D[x_1, x_2]$, поэтому в любой точке $x \in D_m$ она обращается в нуль, т. е. выполняется равенство $m(x) = \bar{p}_{n-1}(x)$. Лемма 1 доказана.

11.2. Интегро-дифференциальное уравнение Эйлера—Пуассона

Определение 1. *Будем говорить, что функционал I на функции $y \in D_I$ достигает слабого [сильного] локального минимума (другими словами: y доставляет слабый [сильный] локальный минимум функционалу I), если у функции y существует такая окрестность $K^{(n)}(y)$ порядка n [окрестность $K(y)$ нулевого порядка], что для любой функции $\bar{y} \in K^{(n)}(y) \cap D_I$ [$\bar{y} \in K(y) \cap D_I$] выполняется неравенство $I[\bar{y}] \geqq I[y]$.*

Определение 2. *Пусть $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n \in (R^{n+2} \to R^1) \cap D^1(Q)$ — данные функции, а $p \in R^1 \to R^1$ данный многочлен. Будем говорить, что функция $y \in R^1 \to$*

$\to R^1$ *есть решение интегро-дифференциального уравнения* (и-д. у.)

$$(11.7)\qquad \Phi_0(x, y, y', \dots, y^{(n)}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_{i-1}} \dots$$

$$\dots \int_{x_1}^{t_1} \Phi_i(x, y, y', \dots, y^{(n)})\, dt dt_1 \dots dt_{i-1} = p(x).$$

если:

α) $y \in D_n[x_1, x_2]$;

β) $(x, y(x), y'(x), \dots y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x \pm 0) \in Q\ (x \in [x_1, x_2])$;

γ) $\Phi_0(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) - \int_{x_1}^{x} \Phi_1(t, y(t), y'(t),$

$$\dots, y^{(n)}(t))\, dt + \dots + (-1)^n \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_{n-1}} \dots \int_{x_1}^{t_1} \Phi_n(t, y(t), y'(t),$$

$$\dots, y^{(n)}(t))\, dt dt_1 \dots dt_{n-1} = p(x)$$

для любого значения $x \in D_{y^{(n)}} \cap \mathrm{pr}_1 D_{\Phi_0}$.

И-д. у. (11.7) часто записывают в сокращенной форме, предварительно введя для любой функции $f \in (R^1 \to R^1) \cap$ $\cap\ C[x_1, x_2]$ обозначение

$$M[f] = \int_{x_1}^{x} f(t)\, dt,\ M^i[f] = M[M^{i-1}[f]],\ i = 2, 3, \dots .$$

Тогда, считая, что $\overline{\Phi}_i(x) = \overline{\Phi}_i(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x))$, и-д. у. (11.7) можно записать так:

$$\overline{\Phi}_0 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i M^i[\overline{\Phi}_i] = p.$$

Теорема 1. *Если функционал I на функции $y \in D_I$ достигает слабого локального минимума и если $f_y, f_{y'}, \dots f_{y^{(n)}} \in$ $\in D^1(Q)$, то существует такой многочлен $p_{n-1} \in R^1 \to R^1$ порядка не выше $(n-1)$, что y удовлетворяет и-д. у.*

$$(11.8)\qquad f_{y^{(n)}} - \int_{x_1}^{x} f_{y^{(n-1)}}\, dt + \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_1} f_{y^{(n-2)}}\, dt dt_1 - \dots +$$

$$+ (-1)^n \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_{n-1}} \dots \int_{x_1}^{t_1} f_y\, dt dt_1 \dots dt_{n-1} = p_{n-1},$$

называемому интегро-дифференциальным уравнением Эйлера—Пуассона (в дальнейшем и-д. у. Э—П).

Доказательство. Обозначим через $K^n(y)$ такую окрестность функции y порядка n, в которой

$$(11.9)\qquad I[\bar{y}]-I[y]\geqq 0\ (\bar{y}\in K^n(y)\cap D_I).$$

Фиксируем произвольную функцию, удовлетворяющую условиям (11.3), и рассмотрим однопараметрическое семейство функций $y+\varepsilon\eta$ [$(y+\varepsilon\eta)\in R^2\to R^1$, $D_{y+\varepsilon\eta}=[x_1, x_2]\times R^1$]. Из открытости Q и из (11.3) следует, что если ε фиксировано и достаточно мало, т. е. принадлежит достаточно малой окрестности нуля $k(0)$, то

$$(y+\varepsilon\eta)\in K^n(y)\cap D_I.$$

Из этого включения и из неравенства (11.9) очевидно, что функция $\varphi\in R^1\to R^1$, определенная равенством $\varphi(\varepsilon)=I[y+\varepsilon\eta]$ [$\varepsilon\in k(0)$], в точке $0\in R^1$ достигает локального минимума. Так как φ дифференцируема в точке 0 и дифференцирование можно произвести под знаком интеграла [см. замечание после формулы (8.7)], то

$$(11.10)\qquad \varphi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\sum_{i=0}^{n} f_{y^{(i)}}(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))\,\eta^{(i)}(x)\,dx=0.$$

Проинтегрируем слагаемое с номером i в подынтегральном выражении $(n-i)$ раз по частям. Тогда, введя обозначение

$$\bar{f}_y^{(i)}(x)\overset{\mathrm{df}}{=}f_y^{(i)}(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))$$

$$[x\in D_{y^{(n)}}\cap \mathrm{pr}_1 D_{f_{y^{(i)}}}]$$

и использовав условия (11.3), получим

$$\varphi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\Bigg\{(-1)^n\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_{n-1}}\ldots\int_{x_1}^{t_1}\bar{f}_y(t)\,dt\,dt_1\ldots dt_{n-1}+\ldots$$

$$\ldots+\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_1}\bar{f}_{y^{(n-2)}}(t)\,dt\,dt_1-\int_{x_1}^{x}\bar{f}_{y^{(n-1)}}(t)\,dt+\bar{f}_{y^{(n)}}(x)\Bigg\}\times$$

$$\times\,\eta^{(n)}(x)\,dx=0.$$

Обозначим через m функцию, заключенную в фигурные скобки, и заметим, что $m \in (R^1 \to R^1) \cap D\text{-}[x_1, x_2]$. Тогда, применив к функции m лемму 1, получим тождество

$$(11.11) \qquad \bar{f}_{y^{(n)}}(x) - \int_{x_1}^{x} \bar{f}_{y^{(n-1)}}(t)\,dt + \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t} \bar{f}_{y^{(n-2)}}(t)\,dt\,dt_1 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_{n-1}}\ldots\int_{x_1}^{t_1} \bar{f}_y(t)\,dt\,dt_1\ldots dt_n = p_{n-1}(x)$$

$$[x \in D_{y^{(n)}} \cap \mathrm{pr}_1 D_{f_{y^{(n)}}}],$$

где p^{n-1} — многочлен порядка не выше $(n-1)$. А это означает, что y удовлетворяет д. у. Э—П (11.8). Теорема 1 доказана.

Решения и-д. у. (11.8) называют *стационарными функциями функционала* I (или *стационарными функциями, соответствующими основной функции* f).

Из многочисленных следствий и-д. у. Э—П (11.8) (подобных приведенным в п. 8.3) сформулируем и докажем только то, которое говорит о возможности замены и-д. у. (11.8) обыкновенным дифференциальным уравнением.

Утверждение 1. *Если $f \in C_{n+1}(Q)$ и если $y \in D_I$ — стационарная функция функционала I, непрерывно дифференцируемая $2n$ раз, то y удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$(11.12) \qquad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0,$$

называемому д. у. Эйлера—Пуассона (в дальнейшем д. у. Э—П).

Замечание. Левую часть (11.12) в соответствии с установившейся традицией понимают следующим образом (ср. с замечанием 2 после утверждения 4 § 8).

Фиксируем произвольную $2n$ раз непрерывно дифференцируемую функцию y и договоримся считать, что аргументы функции f и ее частных производных имеют соответственно вид x, $y(x)$, $y'(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$, т. е. функция f и ее частные производные являются сложными функциями x. Произведя формально дифференцирование в левой части (11.12), получим выражение, содержащее x, y, y', ..., $y^{(2n)}$. Приравнивая это выражение к нулю, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2n$ для определения неизвестной функции y.

Доказательство. Если $f \in C_{n+1}(Q)$, $y \in C_{2n} \times$ $\times [x_1, x_2]$ и удовлетворяет и-д. у. Э—П (11.8), то каждое слагаемое в сумме, расположенной в левой части (11.11), является функцией из $C_n [x_1, x_2]$. Дифференцируя обе части равенства (11.11) n раз, получаем тождество

$$\bar{f}_y(x) - \frac{d}{dx}\bar{f}_{y'}(x) + \frac{d^2}{dx^2}\bar{f}_{y''}(x) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\bar{f}_{y^{(n)}}(x) = 0 \quad (x \in [x_1, x_2]),$$

которое и означает, что y есть решение д. у. (11.12). Утверждение 1 доказано. О прямом доказательстве утверждения 1 см. задачи 2 и 4 из § 7. Отметим, что порядок $2n$ д. у. (11.12) находится в соответствии с числом условий в *ii*).

Пример. Пусть $n = 2$, а I — функционал, определенный данными $Q \overset{\mathrm{df}}{=} R^4$, $f(x, y, y', y'') \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2}\mu y''^2 + \rho y$ [μ, ρ — положительные постоянные], $p_1 \overset{\mathrm{df}}{=} (-l, 0, 0)$, $p_2 \overset{\mathrm{df}}{=}$ $\overset{\mathrm{df}}{=} (l, 0, 0)$ [l — положительная константа]. Найдем стационарные функции I.

И-д. у. Э—П (11.8) имеет следующий вид:

$$\mu y'' + \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t_1} \rho\, dt\, dt_1 = c_1 + c_0 x. \tag{11.13}$$

Отсюда следует, что уравнение (11.13) эквивалентно д. у. второго порядка (зависящему от параметров $c_1, c_0 \in$ $\in R^1$)

$$y'' = -\frac{\rho}{2\mu}x^2 + \bar{c}_0 x + \bar{c}_1.$$

Запишем общее решение этого уравнения:

$$y(x, c_0, c_1, c_2, c_3) = -\frac{\rho}{24\mu}x^4 + c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x +$$

$$+ c_3 \quad (x, c_0, c_1, c_2, c_3 \in R^1).$$

В результате простых вычислений получаем, что имеется ровно одна удовлетворяющая данным граничным условиям стационарная функция

$$y(x) = \frac{\rho}{24\mu}(-x^4 + 2l^2x^2 - l^4) =$$

$$= -\frac{\rho}{24\mu}(x^2 - l^2)^2 \quad (x \in [-l, l]).$$

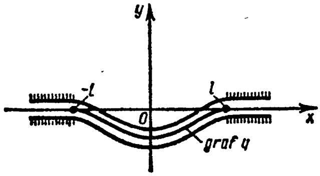

Рис. 22

Замечание. К исследованию минимума рассмотренного функционала приводит задача о нахождении положения равновесия закрепленного с двух сторон упругого стержня цилиндрической формы (рис. 22).

Согласно принципу Гамильтона, относящемуся к упругим телам, в положении равновесия полная потенциальная энергия рассматриваемого стержня минимальна. Если $y = y(x)$ — уравнение осевой линии стержня

$$[y \in (R^1 \to R^1) \cap C_2[-l, l],\ y(-l) = y'(-l) = y(l) = \\ = y'(l) = 0],$$

то полная потенциальная энергия стержня равна

$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{2} \mu \frac{y''^2(x)}{(1+y'^2(x))^{5/2}} dx + \int_{-l}^{l} \rho y(x) \sqrt{1+y'^2(x)}\, dx.$$

Первый интеграл есть потенциальная энергия, определяемая упругими силами; второй—потенциальная энергия, созданная полем силы тяжести; μ — постоянная, зависящая лишь от коэффициента упругости и момента инерции поперечного сечения; ρ — линейная плотность стержня.

Если вместо полной потенциальной энергии взять ее приближенное значение, полученное обычным пренебрежением величиной $y'(x)$ $(x \in [x_1, x_2])$, то для полной потенциальной энергии получим представление

$$I[y] = \int_{-l}^{l} \left\{ \frac{1}{2} \mu y''^2(x) + \rho y(x) \right\} dx.$$

Задачи: 1. Докажите следующий вариант леммы 1. Пусть функции $m, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in R^1 \to R^1$ ограничены и интегрируемы по Лебегу на $[x_1, x_2]$. Предположим, что равенство

$$\int_{x_1}^{x_2} \zeta(x)\, m(x)\, dx = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

выполняется для любой ограниченной и интегрируемой по Лебегу на $[x_1, x_2]$ функции $\zeta(x)$, удовлетворяющей условиям

$$\int_{x_1}^{x_2} \zeta(x)\, \varphi_i(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда существуют такие постоянные $c_1, \ldots, c_n \in R^1$, что почти всюду на $[x_1, x_2]$ выполняется равенство $m(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$.

2. Пусть $f \in C_1(\dot{Q})$, а $y \in D_{\bar{I}}$ — произвольная фиксированная функция. Определим функционал $\bar{I}$ следующим образом: $\eta \in D_{\bar{I}}$ тогда и только тогда, когда $(y+\eta) \in D_I$; если $\eta \in D_{\bar{I}}$, то положим $\bar{I}[\eta] = I[y+\eta]$. Докажите, что $\bar{I}$ на функции 0 [т. е. на функции, которая в любой точке $[x_1, x_2]$ равна нулю] дифференцируема по Фреше (ср. с п. 4.2) и

$$\delta I_y[\eta] \overset{\mathrm{df}}{=} \delta\bar{I}_0[\eta] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \sum_{i=0}^{n} f_{y_i}(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))\, \eta^{(i)}(x) \right\} dx.$$

3. Предположим, что $f \in C_2(Q)$, и пусть функция $y \in D_I$ доставляет слабый локальный минимум функционалу I. Докажите, что в любой точке множества $Q_{y^{(n)}}$ выполняется неравенство

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \geqslant 0$$

(условие Лежандра).

Указание. Найдите вторую вариацию I и, так же как и при доказательстве теоремы 8.2, воспользуйтесь методом от противного.

4. Докажите, что если y — стационарная функция регулярного функционала I, то $y \in C_{n+1}$.

Замечание. Говорят, что функционал I — регулярный, если $f \in C_2(Q)$ и выполняется неравенство

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \neq 0 \; [(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \in Q].$$

Указание. Докажите вначале, что выполняется условие Вейерштрасса—Эрдмана для точки излома (утверждение 5 § 8) и что справедлива теорема Гильберта о дифференцируемости (утверждение 7 § 8).

5. Обобщите условие Якоби и докажите теорему, соответствующую теореме 3 § 8 в случае вариационной задачи высокого порядка.

6. Исследуйте то расширение функционала в примере п. 11.2, которое получается отбрасыванием граничного условия $y'(-l) = y'(l) = 0$.

7. Найдите стационарные функции из $C_4[x_1, x_2]$ функционала определенного данными

$$Q \overset{\mathrm{df}}{=} R^3 \times \{y'' \in R \mid y'' > 0\},$$

$$f(x, y, y', y'') \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2}\frac{(1+y'^2)^2}{y''}, \; P_1 \overset{\mathrm{df}}{=} (x_1, y_1, y_1'), \; P_2 \overset{\mathrm{df}}{=} (x_2, y_2, y_2')$$

Замечание. К исследованию данного функционала приводит следующая задача. Пусть даны направленные прямые l_1 и l_2, проходящие соответственно через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Требуется среди плоских кривых, соединяющих точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и имеющих в этих точках нормали, направленные вдоль l_1 и l_2, найти ту, для которой площадь фигуры, образованной данной кривой, ее эволютой и отрезками данных прямых, минимальна.

Исследуйте и тот случай, когда направление нормали в концевых точках не указано.

§ 12. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ (ОДНОМЕРНЫЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ, С НЕПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ)

Пусть:

а) n — *данное натуральное число*;

б) $Q \subset R^{2n+1}$ — *данная область* [точки Q обозначим через $(x, y, y') = (x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$; $x \in R_1$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $y' = (y_1', \ldots, y_n') \in R^n$] $T \overset{\text{df}}{=} \text{pr}_{12\ldots(n+1)}\, Q$;

в) $f \in R^{2n+1} \to R^1 \cap D^1(Q)$ — *данная функция*;

г) $P_1 = (x_1, y_{11}, \ldots, y_{1n}) = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_{21}, \ldots, y_{2n}) = (x_2, y_2)$ — *две такие (произвольно фиксированные) точки* T, *для которых* $x_1 < x_2$.

Определим функционал I следующим образом.

1^0. *Функцию* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^1 \to R^n$ *назовем допустимой (обозначение*: $y \in D_I$), *если*:

i) $y \in D_1[x_1, x_2]$;

ii) $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$;

iii) $(x, y(x), y'(x)) \in Q$ $(x \in [x_1, x_2])$.

2^0. *Предполагая, что D_I не пусто, каждой функции $y \in D_I$ поставим в соответствие действительное число*

$$I[y] \overset{\text{df}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

Замечания: 1. Если $n = 1$, то I совпадает с функционалом, определенным в п. 8.1. Поэтому дальнейшие результаты будут новыми только в случае $n \geqq 2$.

2. В дальнейшем, если речь идет о пространственной вариационной задаче, всегда подразумевается некоторый функционал, относящийся к только что определенному типу в случае $n \geqq 2$.

Определение 1. *Для произвольных целых* $l \geqslant 0$ *и* $n \geqslant 1$ *расстоянием порядка* l *между функциями* $y, z \in (R^1 \to R^n) \cap D_l[x_1, x_2]$ *назовем число*

$$\rho^l(y, z) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{l} \sup_{x \in D_{y^{(k)}} \cap D_{z^{(k)}}} |y^{(k)}(x) - z^{(k)}(x)|,$$

где $|y^{(k)}(x) - z^{(k)}(x)| = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i^{(k)}(x) - z_i^{(k)}(x)|^2\right)^{1/2}$.

Определение 2. *Для произвольных целых* $l \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *окрестностью порядка* l *радиуса* ε *функции* $y \in (R^1 \to R^n) \cap D_l[x_1, x_2]$ *назовем множество функций*

$$K_\varepsilon^l(y) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{z \in (R^1 \to R^n) \cap D_l[x_1, x_2] \mid \rho^l(y, z) < \varepsilon\}.$$

В этом случае также положим $K_\varepsilon(y) \stackrel{\mathrm{df}}{=} K_\varepsilon^0(y)$, и если радиус окрестности значения не имеет, а важно только лишь существование окрестности с заданными свойствами, то величину радиуса указывать не будем (ср. с п. 7.1).

Определение 3. *Будем говорить, что функционал* I *на функции* $y \in D_I$ *достигает слабого [сильного] локального минимума, если у функции* y *существует такая окрестность первого порядка* $K^1(y)$ *[нулевого порядка* $K(y)$*], что для любой функции* $\bar{y} \in K^1(y) \cap D_I$ $[\bar{y} \in K(y) \cap D_I]$ *выполняется неравенство* $I[\bar{y}] \geqq I[y]$.

Определение 4. *Пусть* $F, \Phi \in (R^{2n+1} \to R^n) \cap D^1(Q)$ *— две данные функции, а* $c \in R^n$ *— данная постоянная. Будем говорить, что некоторая функция* $y \in R^1 \to R^n$ *есть решение системы и-д. у.*

$$F(x, y, y') = \int_{x_1}^{x} \Phi(x, y, y')\,dx + c,$$

если:

α) $y \in D_1[x_1, x_2]$;

β) $(x, y(x), y'(x)) \in Q$ $(x \in [x_1, x_2])$;

γ) $F(x, y(x), y'(x)) = \int_{x_1}^{x} \Phi(t, y(t), y'(t))\,dt + c$

для любого значения $x \in D_{y'} \cap \mathrm{pr}_1 D_F$.

Замечание. Применяя обычные обозначения координат векторов F и Φ, тождество, фигурирующее в γ), можно записать в следующей форме:

$$F_i(x, y(x), y'(x)) = \int_{x_1}^{x} \Phi_{.}(t, y(t), y'(t))\,dt + c_i$$

$$(x \in D_{y'} \cap \mathrm{pr}_1 D_F;\quad i = 1, \ldots, n).$$

Теорема 1. *Если функционал I на функции $y \in D_I$ достигает слабого локального минимума и если $f_y, f_{y'} \in D^1(Q)$*[1]*, то существует такая постоянная $c \in R^n$, что y удовлетворяет системе уравнений*

$$(12.1)\qquad f_{y'}(x, y, y') = \int_{x_1}^{x} f_y(x, y, y')\,dx + c,$$

называемой системой интегро-дифференциальных уравнений Эйлера—Лагранжа (в дальнейшем с. и-д. у. Э—Л).

Доказательство. Для любого j ($j = 1, \ldots, n$) обозначим символом I_j функционал того же типа, что и введенный в п. 8.1 , со следующими определяющими данными:

$$Q^j \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{pr}_{1j(j+1)}Q,$$

$$f^j(x, y, y') = f(x, \ldots, y_{j-1}(x), y, y_{j+1}(x), \ldots, y'_{j-1}(x),$$

$$y', y'_{j+n}(x), \ldots),\ P_1^j \overset{\mathrm{df}}{=} (x_1, y_{1j}),\ P_2^j \overset{\mathrm{df}}{=} (x_2, y_{2j}).$$

Каждый функционал I_j на функции $y_j \in D_j$ достигает слабого локального минимума, где y_j — j-я координата вектор-функции y. В силу условий теоремы I для каждого функционала I_j выполняются все условия теоремы 1 § 8, поэтому для каждого j ($j = 1, 2, \ldots, n$) существует такое число c_j, что выполняется соответствующее и-д. у. Э—Л (8.10):

$$f^j_{y'}(x, y_j(x), y'_j(x)) = \int_{x_1}^{x} f^j_y(t, y_j(t), y'_j(t))\,dt + c_j$$

$$(j = 1, \ldots, n;\quad x \in D_{y'} \cap \mathrm{pr}_1 D_{f_{y'}}).$$

---

[1] Символами f_y и $f_{y'}$ обозначены частные производные функции $f \in R^{2n+1} \to R^1$ по векторам y и y' ($f_y, f_{y'} \in R^{2n+1} \to R^n$, $f_y = (f_{y_1}, f_{y_2}, \ldots, f_{y_n})$, $f_{(y')} = f_{y'_1}, f_{y'_2}, \ldots, f_{y'_n}$)).

Это уравнение, учитывая определение f^j, можно записать так:

$$f_{y'_j}(x, y(x), y'(x)) = \int_{x_1}^{x} f_{y_j}(t, y(t), y'(t))\,dt + c_i$$

$$(j = 1, \ldots, n; \quad x \in D_{y'} \cap \operatorname{pr} D_{f_{y'}}).$$

А это (согласно замечанию после определения 4) означает, что y удовлетворяет с. и-д. у. (12.1). Теорема 1 доказана.

Замечания. 1. Приведенный метод доказательства теоремы 1 характерен для экстремальных проблем, связанных с векторнозначными функциями: все компоненты вектора, кроме одной, фиксируются, и задача сводится к экстремальной задаче для «одной переменной».

2. Теорема 2 легко доказывается и непосредственно. Обычными приемами [см. п. 3.1, 8.2, 11.1] нетрудно показать, что если y доставляет слабый локальный минимум функционалу I, то для любой функции η, удовлетворяющей условиям

$$\eta \in (R^1 \to R^n) \cap D_1[x_1, x_2], \ \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \ (\in R^n),$$

должно выполняться равенство

$$\int_{x_1}^{x_2} \{\langle f_y(x, y(x), y'(x)), \eta(x)\rangle + \langle f_{y'}(x, y(x), y'(x)), \eta'(x)\rangle\}\,dx = 0. \tag{12.2}$$

Отсюда, интегрируя по частям и применяя обобщенную лемму Дюбуа—Реймона (лемма 1 § 8), получаем, что y удовлетворяет с. и-д. у. (12.1).

3. С. и-д. у. (12.1) часто записывают в сокращенной форме: $f_{y'} = \int_{x_1}^{x} f_y\,dx + c$ [или в координатах: $f_{y'_i} = \int_{x_1}^{x} f_{y_i}\,dx + c_i$ $(i = 1, \ldots, n)$].

4. Решение с. и-д. у. (12.1) называют *стационарными функциями функционала I* (*или стационарными функциями, соответствующими основной функции f*).

Из многочисленных следствий и-д. у. Э—Л (12.1) (ср. с п. 8.3) приведем только одно.

Утверждение 1. *Если $f \in C_2(Q)$ и если $y \in D_I$ — два раза непрерывно дифференцируемая стационарная функция функционала I, то y удовлетворяет системе уравнений*

$$(12.3)\quad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = f_y(x, y, y') - f_{xy'}(x, y, y') - \\ - f_{yy'}(x, y, y')\, y' - f_{y'y'}(x, y, y')\, y'' = 0 \quad (\in R^n),$$

называемой с. д. у. Эйлера—Лагранжа (в дальнейшем с. д. у. Э—Л)[2].

Доказательство. Так как y — стационарная функция I, то она удовлетворяет с. и-д. у. Э—Л.

$$f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = \int_{x_1}^{x} f_y(t, y(t), y'(t))\, dt + c$$

$$(c \in R^n;\ x \in [x_1, x_2]).$$

Так как $f \in C_2(Q)$ и $y \in C_2[x_1, x_2]$, то обе части приведенного тождества — непрерывно дифференцируемые функции. Дифференцируя это тождество и применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем, что y есть решение с. д. у. (12.3).

Замечания: 1. Тот факт, что *если $f \in C_2(Q)$ и I на функции $y \in D_I \cap C_2[x_1, x_2]$ достигает слабого локального минимума, то y должна удовлетворять с. д. у.* (12.3), легко доказать непосредственно. Один из таких методов доказательства заключается в следующем: задача сводится способом, примененным при доказательстве теоремы 1, к плоской проблеме, а затем доказательство завершается также, как и в п. 3.1.

2. Систему обыкновенных д. у. (12.3), содержащую n неизвестных функций (из $R^1 \to R^1$), часто записывают в форме $f_{y_i} - \frac{d}{dx} f_{y_i'} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Пример. Пусть $n = 2$. Найдем стационарные функции функционала, определенного данными $Q \overset{\mathrm{df}}{=} R^5$,

---

[2] Символом f_{xy} обозначена вторая частная производная ($f_{xy} \in \in R^{2n+1} \to R^n$) функции $f \in R^{2n+1} \to R^1$ по скаляру x и по вектору y; $f_{yy'}, f_{y'y'}$ — вторые частные производные функции f по векторам, указанным в нижнем индексе ($f_{yy'}, f_{y'y'} \in R^{2n+1} \to M^n$, где через M^n обозначено множество действительных матриц порядка $n \times n$).

$f(x, y_1, y_2, y_1', y_2') \overset{\text{df}}{=} \frac{m}{2}(y_1'^2 + y_2'^2) - mgy_2$ $[m > 0,\ g$ — ускорение свободного падения$]$, $P_1 \overset{\text{df}}{=} (0, 0, 0)$, $P_2 \overset{\text{df}}{=} (d, l, 0)$ $[d, l > 0]$.

Соответствующая с. и-д. у. Э—Л (в координатной форме) имеет следующий вид:

$$f_{y_1'} - \int_0^x f_{y_1}\,dx - c_1 = my_1' - c_1 = 0,$$

$$f_{y_2'} - \int_0^x f_{y_2}\,dx - c_2 = my_2' - mg\int_{x_1}^x dx - c_2 = my_2' - mgx - c_2 = 0.$$

С помощью элементарных вычислений получаем, что эта с. и.-д. у. (сведенная к с. д. у.) имеет ровно одно удовлетворяющее требуемым граничным условиям решение, а именно $y = (y_1, y_2) \in R^1 \to R^2$, где

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = lx/d, \\ y_2(x) = g(x^2 - xd)/2 \end{array}\right\} (x \in [0, d]_2).$$

Замечание. Рассмотрим движение консервативной системы, состоящей из m материальных точек, в потенциальном силовом поле. Пусть n $(n \leqslant 3m)$ — степень свободы системы. Это означает, что каждое возможное положение системы характеризуется определенной точкой $(t, q) = (t, q_1, \ldots, q_n)$ некоторой области $H \subset R^{n+1}$ (t — время; $q_1, \ldots, q_n$ — обобщенные координаты).

Функцией Лагранжа или *лагранжианом* рассматриваемой системы называют функцию $L = (T - V) \in R^{2n+1} \overset{\text{df}}{\to} R^1$, где T — кинетическая, а V — потенциальная энергия $[D_L \overset{\text{df}}{=} H \times R^n = Q$; точки Q обозначим следующим образом: $(t, q, \dot q) = (t, q_1, \ldots, q_n, \dot q_1, \ldots, \dot q_n)]$. В дальнейшем будем предполагать, что $L \in C_2(Q)$. В силу сделанных предположений кинетическая энергия T не зависит от q и является квадратичной формой от $\dot q$:

$$T(t, q, \dot q) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t)\dot q_i \dot q_j\ [(t, q, \dot q) \in Q],$$

а потенциальная энергия не зависит от $\dot q$:

$$V(t, q, \dot q) = V(t, q_1, \ldots, q_n)\ [(t, q, \dot q) \in Q].$$

Принцип Гамильтона для рассматриваемой системы точек имеет следующий вид. *Функция, описывающая движение системы точек из состояния* $(t_1, q_1) \in H$ *в состояние* $(t_2, q_2) \in H$, *есть стационарная функция* $q \in (R^1 \to R^n) \cap C_2[t_1, t_2]$ *функционала, определенного данными* Q, L, $P_1 = (t_1, q_1)$, $P_2 = (t_2, q_2)$.

Из определения обобщенных координат и сделанных предположений следует, что если отсутствуют условия связи, то $n = 3m$ и производная L_t тождественно равна нулю. Это последнее свойство справедливо и в случае не зависящих от времени условий связи.

Сформулированный принцип Гамильтона часто выражают символом $\int\limits_{t_1}^{t_2} L dt = \text{extr}$ или $\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt = 0$ (ср. с п. 7.4).

Значение рассматриваемого функционала, т. е. число $\int\limits_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), \dot{q}(t))dt$, называют *действием*, а принцип Гамильтона — *принципом наименьшего действия*, хотя такое употребление слов не совсем точное, так как оно не различает минимальных и стационарных функций (см. задачу 7).

Из сравнения принципа Гамильтона и утверждения 1 следует, что функция q, описывающая исследуемое движение, должна удовлетворять с. д. у.

$$L_{q_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{12.4}$$

которые в механике называют *уравнениями Лагранжа*.

В качестве примера рассмотрим движение материальной точки массы m, брошенной под некоторым углом к горизонту. При этом движении нет условий связи, и если не учитывать сопротивления среды, то силовое поле потенциальное. Выберем прямоугольную систему координат Oxy в плоскости движения так, чтобы ось Oy была направлена вверх. Тогда всевозможные состояния рассматриваемой точки однозначно определяются тройкой чисел (t, x, y). Лагранжиан L имеет следующий вид:

$$L(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \; [(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in R^5].$$

Поэтому стационарная функция, найденная в приведенном выше конкретном примере, т. е. $x(t) = \frac{l}{d} t$, $y(t) = \frac{gt}{2}(t - d)$, $0 \leqslant t \leqslant d$, описывает движение материальной точки массы m, брошенной в начальный момент времени под некоторым углом к горизонту, которая через время d попадает в точку, находящуюся на расстоянии l.

Задачи: 1. Пусть $f \in C_1(Q)$, а $y \in D_I$ — произвольная фиксированная функция. Определим функционал $\bar{I}$ следующим образом: $\eta \in D_{\bar{I}}$ тогда и только тогда, когда $(y + \eta) \in D_{\bar{I}}$; если $\eta \in \bar{D}_I$, то положим $\bar{I}[\eta] \overset{\text{df}}{=} I[y + \eta]$. Докажите, что функционал $\bar{I}$ на функции 0 (т. е. на функции, значение которой в любой точке $[x_1, x_2]$ есть $0 \in R^n$) дифференцируем по Фреше (ср. с п. 4.2) и

$$\delta I_y[\eta] \overset{\text{df}}{=} \delta \bar{I}_0[\eta] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \{\langle f_y(x, y(x), y'(x)), \eta(x)\rangle +$$
$$+ \langle f_{y'}(x, y(x), y'(x)), \eta'(x)\rangle\} \, dx.$$

2. Пусть $f \in C_2(Q)$ и пусть $y \in D_I$ доставляет слабый локальный минимум функционалу I. Докажите, что в любой точке интервала

$[x_1, x_2]$ квадратичная форма $\langle \sigma, f_{y'y'}(x, y(x), y'(x))\sigma \rangle$ $(\sigma \in R^n)$ положительно определена.

3. Обобщите условия Якоби и Вейерштрасса и докажите соответствующие теоремы 3 § 8 и 1 § 9 для пространственной задачи.

4. Найдите первые интегралы с. д. у. Э—Л (12.3) для неполных основных функций:

а) $f_x(x, y, y') = 0 \quad [\in R^1; (x, y, y') \in Q]$;

б) $f_y(x, y, y') = 0 \quad [\in R^n; (x, y, y') \in Q]$.

5. Пусть α — положительное число, $n = 2$,

$$Q \overset{\mathrm{df}}{=} \{(x, y, z) \in R^3 \mid y > -\alpha\} \times R^2, \; f(x, y, z, y', z') \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} / \sqrt{y + \alpha}.$$

Найдите стационарные функции, соответствующие f.

Замечание. К функционалу с данной основной функцией f приводит пространственная задача о брахистохроне (ср. с п. 2.1).

6. Пусть в некотором потенциальном силовом поле функция Лагранжа не зависит от времени. Докажите, что для системы точек, движущихся в данном силовом поле, выполняется закон сохранения энергии $(T + V = \mathrm{const})$.

Указание. Примените принцип Гамильтона и используйте то, что основная функция L неполная [см. также (7.23)].

7. Приведите пример того, что принцип наименьшего действия является, вообще говоря, не условием минимума, а условием стационарности.

Указание. Пусть $n = 1$, $L = (1/2)m\dot{q}^2 - kq^2$. Исследуйте движение в достаточно большом интервале времени.

Замечание. Приведенный лагранжиан соответствует колебательному движению под действием силы упругости.

§ 13. МНОГОМЕРНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

13.1. Двумерная вариационная задача. Лемма Хаара

Пусть:

а) $T \subset R^3$ — *данная область*, $Q \overset{\mathrm{df}}{=} T \times R^2$ [точки Q обозначим через (x, y, z, z_x, z_y)];

б) $f \in (R^5 \to R^1) \cap D^{12}(Q)$[3];

---

[3] Класс функций $D^{12}(Q)$ из $R^n \to R^1$, кусочно-непрерывных по первым двум переменным на множестве $Q \subset R^n$, определим следующим образом: $f \in D^{12}(Q)$, если:

1) $D_f = Q \setminus A$, где A либо пусто, либо есть конечное объединение множеств типа

$$\{(x, y, z, z_x, z_y) \in Q \mid x = a_1 + t(b_1 - a_1), \; y = a_2 + t(b_2 - a_2);$$
$$\text{точки } (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in R^2 \text{ фиксированы}, \; t \in [0, 1]\};$$

2) функция f непрерывна;

3) сужение функции f на любую выпуклую область $B \subset D_f$ имеет конечный предел в любой точке $\bar{B}$.

в) γ — произвольная кусочно-гладкая простая замкнутая кривая на плоскости ($\gamma \in R^1 \to R^2$), для которой $\Gamma \overset{\text{df}}{=} R_\gamma \subset \subset \mathrm{pr}_{12} T$;

г) $H \subset R^2$ — замкнутое ограниченное множество с границей Γ;

д) $\psi \in R^2 \to R^1$ — данная функция, для которой $D_\psi = \Gamma$ и $\mathrm{graf}\,\psi \subset T$.

Определим функционал I следующим образом.

1⁰. *Функцию $z \in R^2 \to R^1$ назовем допустимой (обозначение: $z \in D_I$), если:*

i) $z \in D_1(H)$[4];

ii) сужение z на Γ есть ψ;

iii) $(x, y, z(x, y)) \in T$ $[(x, y) \in H]$.

2⁰. *Предполагая, что D_I не пусто, каждой функции $z \in D_I$ поставим в соответствие действительное число*

$$I[z] \overset{\text{df}}{=} \iint\limits_H f(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y))\,dxdy. \tag{13.1}$$

Замечания: **1.** Задача об экстремуме только что определенного функционала представляет собой такое обобщение простейшей вариационной задачи, при котором вместо допустимых функций одной переменной берутся функции двух переменных. Графики допустимых функций представляют собой кусочно-гладкие поверхности, натянутые на данный контур (на $\mathrm{graf}\,\psi$).

2. В дальнейшем под двумерной вариационной задачей всегда будет пониматься задача об исследовании на экстремум некоторого функционала, относящегося к только что

---

[4]Пусть $H \subset R^2$ — замкнутое множество, ограниченное некоторой кусочно-гладкой простой замкнутой кривой на плоскости. Класс $D(H)$ кусочно-непрерывных на H функций из $R^2 \to R^1$ определим следующим образом: $z \in D(H)$, если:

1) $D_z = H \setminus A$, где A либо пусто, либо есть конечное число прямых отрезков, т. е. конечное объединение множеств вида $\overline{ab} \overset{\text{df}}{=} \overset{\text{df}}{=} \{(x, y) \in R^2 \mid x = a_1 + t(b_1 - a_1),\ y = a_2 + t(b_2 - a_2);$ точки $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in R^2$ фиксированы, $t \in [0, 1]\}$;

2) функция z непрерывна в каждой точке D_z;

3) сужение функции z на любую выпуклую область $B \subset D_z$ имеет конечный предел в любой точке $\overline{B}$. Будем говорить, что функция $z \in R^2 \to R^1$ кусочно-непрерывно дифференцируема на множестве H [обозначение: $z \in D_1(H)$], если:

1) функция $z \in C(H)$;

2) $z_x, z_y \in D(H)$, где z_x и z_y — частные производные функции z по первой и второй переменным.

определенному типу; Q, f, Γ, φ — определяющие данные функционала.

Приводимая ниже лемма играет ту же роль в двумерных вариационных задачах, что и лемма Дюбуа — Реймона в простейшей вариационной задаче.

Лемма 1 (лемма Хаара). *Пусть* u, $v \in (R^2 \to R^1) \cap \cap D(H)$. *Предположим, что равенство*

$$(13.2)\quad \iint_H \{u(x, y)\,\zeta_x(x, y) + v(x, y)\,\zeta_y(x, y)\}\,dxdy = 0$$

выполняется для любой функции ζ, *удовлетворяющей условиям*

$$(13.3)\quad \zeta \in (R^2 \to R^1) \cap D_1(H);\ \zeta(x, y) = 0 \quad [(x, y) \in \Gamma = = \mathrm{front}\, H],$$

Тогда справедливо равенство

$$(13.4)\qquad \int_\pi (u(x, y)\,dy - v(x, y)\,dx) = 0,$$

в левой части которого стоит криволинейный интеграл по любому простому замкнутому многоугольнику π, *расположенному внутри* H.

З а м е ч а н и е. Формулировка леммы требует уточнения в случае, когда у многоугольника π существует отрезок $\overline{ab}$ ($\in R^2$), содержащийся в множестве $H \setminus D_u$ или $H \setminus D_v$. Условимся в этом случае считать, что в подынтегральном выражении в (13.4) берется предельное значение функции u или v с внутренней стороны π. Точнее, предположим, что $\overline{ab} \subset H \setminus D_u$. Так как $u \in D(H)$, то все точки отрезка $\overline{ab}$, за исключением, может быть, некоторого конечного множества M, обладают следующим свойством: если $(x, y) \in \in \overline{ab} \setminus M$, то существует такая окрестность $k((x, y))$ точки (x, y), что $k((x, y)) \setminus \overline{ab} \in D_u$.

Положим $B = k(x, y) \cap \mathrm{int}\, G$, где $\mathrm{int}\, G$ — внутренняя часть множества G, ограниченного многоугольником π. По определению класса $D(H)$ сужение u на B имеет предельные значения на $\overline{B}$. Следовательно, в каждой точке $x, y) \in \overline{ab} \setminus M$ существует предел $u(\xi, \eta)$ при стремлении

(ξ, η) к (x, y) изнутри π. Определим теперь следующее расширение $\bar{u}$ функции u на множество $D_u \cup \overline{ab} \setminus M$:

$$\bar{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & \text{если } (x, y) \in D_u, \\ \lim\limits_{(\xi, \eta) \to (x, y),\ (\xi, \eta) \in G} u(\xi, \eta), & \text{если } (x, y) \in \overline{ab} \setminus M. \end{cases}$$

Криволинейный интеграл (13.4) от функции u на участке $\overline{ab}$ понимается как интеграл от функции $\bar{u}$. Аналогичный смысл имеет интеграл и в случае, если $\overline{ab} \in H \setminus D_v$.

Доказательство леммы. Достаточно ограничиться случаем, когда π — прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям; после этого можно перейти к произвольному замкнутому многоугольнику, у которого стороны параллельны координатным осям, а затем (способом, используемым при изучении криволинейных интегралов) к произвольному замкнутому многоугольнику.

Пусть $\Delta \overset{\text{df}}{=} [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset \operatorname{int} H$ — произвольно выбранный прямоугольник. Рассмотрим функции ζ следующего вида:

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} \xi(x)\,\eta(y), & \text{если } (x, y) \in \Delta, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in H \setminus \Delta, \end{cases}$$

где $\xi \in (R^1 \to R^1) \cap D_1[x_1, x_2]$ и $\eta \in (R^1 \to R^1) \cap D_1[y_1, y_2]$ — произвольные функции, удовлетворяющие условиям $\xi(x_1) = \xi(x_2) = 0$, $\eta(y_1) = \eta(y_2) = 0$. Очевидно, что определенные таким образом функции ζ удовлетворяют условиям (13.3).

Равенство (13.2) принимает следующий вид:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \{u(x, y)\,\xi'(x)\,\eta(y) + v(x, y)\,\xi(x)\,\eta'(y)\}\,dx\,dy = 0.$$

Преобразуем это равенство интегрированием по частям по x:

$$(13.5)\quad \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \left[u(x, y)\,\eta(y) - \eta'(y) \int_{x_1}^{x} v(t, y)\,dt \right] dy \right\} \xi'(x)\,dx = 0.$$

Функция, заключенная в квадратные скобки, как это следует из замечания перед доказательством, принадлежит $(R^1 \to R^1) \cap D[x_1, x_2]$. Применяя лемму Дюбуа—Реймона (лемма 1 § 8), из (13.5) получаем, что существует постоянная $c \in R^1$, для которой

$$(13.6)\qquad \int_{y_1}^{y_2}\left[u(x, y)\eta(y)-\eta'(y)\int_{x_1}^{x} v(t, y)\,dt\right]dy=c$$

($x \in [x_1, x_2] \setminus B$; $B \subset (x_1, x_2)$ пусто или конечно).
Отсюда постоянную c находим подстановкой $x = x_1 : c = \int_{y_1}^{y_2} u(x_1, y)\eta(y)dy$. Поэтому тождество (13.6) можно записать так:

$$\int_{y_1}^{y_2}\left[(u(x_1, y)-u(x, y))\eta(y)+\eta'(y)\int_{x_1}^{x} v(t, y)\,dt\right]dy=0.$$

Преобразуем теперь полученное равенство, интегрируя по частям по y:

$$\int_{y_1}^{y_2}\left[\int_{x_1}^{x} v(t, y)\,dt+\int_{y_1}^{y}(u(x, \tau)-u(x_1, \tau))\,d\tau\right]\eta'(y)\,dy=0.$$

Для любого фиксированного $x \in [x_1, x_2]$ функция, заключенная в квадратные скобки, очевидно, принадлежит классу $(R^1 \to R^1) \cap D[y_1, y_2]$.
Снова применяя лемму Дюбуа—Реймона, получаем, что для любого $x \in [x_1, x_2] \setminus B$ существует число $c(x) \in R^1$, для которого

$$(13.7)\qquad \int_{x_1}^{x} v(t, y)\,dt+\int_{y_1}^{y}(u(x, \tau)-u(x_1, \tau))\,d\tau=c(x)$$

($y \in [y_1, y_2] \setminus C$; $C \subset (y_1, y_2)$ пусто или конечно).

Если в этом равенстве возьмем y равным y_1, то $c(x) = \int_{x_1}^{x} v(t, y_1)dt$ ($x \in [x_1, x_2] \setminus B$). Используя это равенство, из (13.7), взяв $(x, y) = (x_2, y_2)$, получаем

$$\int_{y_1}^{y_2} u(x_2, \tau)\,d\tau-\int_{x_2}^{x_1} v(t, y_2)\,dt+\int_{y_2}^{y_1} u(x_1, \tau)\,d\tau-\int_{x_1}^{x_2} v(t, y_1)\,dt=0.$$

Это означает справедливость равенства (13.4) в случае, когда π — граница рассматриваемого прямоугольника. Отсюда, как уже было выше отмечено, следует справедливость леммы 1.

13.2. Необходимое условие Хаара

Определение 1. *Расстоянием нулевого порядка между функциями* z_0, $z_1 \in (R^2 \to R^1) \cap D(H)$ *назовем число*

$$\rho(z_0, z_1) = \sup_{(x, y) \in D_{z_0} \cap D_{z_1}} |z_0(x, y) - z_1(x, y)|,$$

а расстоянием первого порядка при дополнительном предположении, что $z_0, z_1 \in D_1(H)$ — *число*

$$\rho^1(z_0, z_1) = \rho(z_0, z_1) + \rho(z_{0x}, z_{1x}) + \rho(z_{0y}, z_{1y}).$$

Определение 2. *Окрестностью нулевого порядка радиуса* $\rho > 0$ *функции* $z_0 \in (R^2 \to R^1) \cap D(H)$ *назовем множество функций*

$$K_\rho(z_0) \stackrel{\text{df}}{=} \{z \in (R^2 \to R^1) \cap D(H) \mid \rho(z, z_0) < \rho\},$$

а окрестностью первого порядка радиуса $\rho > 0$ [*в случае* $z_0 \in D_1(H)$] — *множество*

$$K_\rho^1(z_0) \stackrel{\text{df}}{=} \{z \in (R^2 \to R^1) \cap D_1(H) \mid \rho^1(z, z_0) < \rho\}.$$

Как обычно, если важно только существование какой-либо окрестности, то радиус ее не указывается (ср. с п. 7.1).

Определение 3. *Будем говорить, что функционал* I *на функции* $z \in D_I$ *достигает слабого* [*сильного*] *локального минимума, если у функции* z *существует такая окрестность первого порядка* $K^1(z)$ [*нулевого порядка* $K(z)$], *что для любой функции* $\bar{z} \in K^1(z) \cap D_I$ [$\bar{z} \in K(z) \cap D_I$] *выполняется неравенство* $I[\bar{z}] \geqq I[z]$.

Определение 4. *Предположим, что* $f \in C_1(Q)$, *и пусть* $z \in D_I$ — *произвольная фиксированная функция. Функционал* δI_z, *определенный данными*

$$Q^* \stackrel{\text{df}}{=} H \times R^3,\ f^*(x, y, \zeta, \zeta_x, \zeta_y) \stackrel{\text{df}}{=} \bar{f}_z(x, y)\zeta +$$

$$+ \bar{f}_{z_x}(x, y)\zeta_x + \bar{f}_{z_y}(x, y)\zeta_y,\ \Gamma^* \stackrel{\text{df}}{=} \Gamma,\ \psi^*(x, y) \stackrel{\text{df}}{=} 0\ [(x, y) \in \Gamma],$$

назовем первой вариацией функционала I в точке z (ср. с определением 1 § 8). В приведенном выше равенстве

$$\bar{f}_z(x, y) = f_z(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)),$$

$$(13.8) \quad \bar{f}_{z_x}(x, y) = f_{z_x}(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y,)),$$

$$\bar{f}_{z_y}(x, y) = f_{z_y}(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)),$$

$$[(x, y) \in D_{z_x} \cap D_{z_y}].$$

Замечания: 1. Функции из $D_{\delta I_z}$ (независимо от выбора $z \in D_I$) удовлетворяют условию (13.3).

2. Значение первой вариации на элементе $\zeta \in D_{\delta I_z}$ равно

$$(13.9) \quad \delta I_z[\zeta] = \iint_H \{\bar{f}_z(x, y)\,\zeta(x, y) + \bar{f}_{z_x}(x, y)\,\zeta_x(x, y) + \bar{f}_{z_y}(x, y)\,\zeta_y(x, y)\}\,dxdy.$$

Утверждение 1. *Пусть $f \in C_1(Q)$ и z доставляет слабый локальный минимум функционалу I. Тогда δI_z тождественно равен нулю*:

$$\delta I_z[\zeta] = 0 \quad (\zeta \in D_{\delta I_z}).$$

Доказательство. Обозначим через $K^1(z)$ такую окрестность первого порядка z, для которой

$$(13.10) \qquad I[\bar{z}] \geqq I[z] \quad [\bar{z} \in K^1(z) \cap D_I].$$

Пусть ζ — произвольная функция, удовлетворяющая условию (13.3) (т. е. из $D_{\delta I_z}$). Рассмотрим однопараметрическое семейство функций $z + \varepsilon\zeta$ $[(z + \varepsilon\zeta) \in (R^3 \to R^1)$, $D_{z+\varepsilon\zeta} = H \times R^1]$. Из открытости Q и из (13.3) ясно, что если ε достаточно мало, т. е. принадлежит достаточно малой окрестности нуля $k(0)$, то

$$(z + \varepsilon\zeta) \in K^1(z) \cap D_I.$$

Отсюда и из неравенства (13.10) следует, что функция $\varphi \in R^1 \to R^1$, определенная равенством $\varphi(\varepsilon) \overset{\mathrm{df}}{=} I[z + \varepsilon\zeta]$ $[\varepsilon \in k(0)]$, в точке $0 \in R^1$ достигает локального минимума. Нетрудно убедиться (см. п. 8.2) в том, что φ дифференцируема в точке $0 \in R^1$, поэтому $\varphi'(0) = 0$. Воспользовавшись равенством (13.1) после элементарных вычислений получим $\varphi'(0) = \delta I_z[\zeta] = 0$. Утверждение 1 доказано.

Замечание. Если первая вариация δI_z тождественно равна нулю, то функцию z называют *стационарной функцией функционала* I (или *стационарной функцией, соответствующей основной функции* f).

Теорема 1 (теорема Хаара). *Пусть* $f \in C_1(Q)$; z — *стационарная функция функционала* I; $\Omega \in R^2 \to R^1 \cap D_1(H)$ *в обозначениях* (13.8) — *некоторая функция, удовлетворяющая тождеству*

$$(13.11)\qquad 2\Omega_{xy}(x, y) = \overline{f}_z(x, y) \quad [(x, y) \in D_{z_x} \cap D_{z_y}].$$

Тогда справедливо равенство

$$(13.12)\qquad \int_\pi \{[\overline{f}_{z_x}(x, y) - \Omega_y(x, y)]\, dy - [\overline{f}_{z_y}(x, y) - \Omega_x(x, y)]\}\, dx = 0,$$

где криволинейный интеграл берется по любому простому замкнутому многоугольнику π, *который находится внутри* H[5].

Доказательство. Прежде всего заметим, что существует функция, удовлетворяющая тождеству (13.11). Действительно, пусть F — расширение функции $\overline{f}_z$ на R^2, которое в любой точке $R^2 \setminus H$ принимает значение $0 \in R^1$. Тогда, например, функция Ω, определенная равенством

$$2\Omega(x, y) = \int_0^x \int_0^y F(s, t)\, ds dt \quad [(x, y) \in H],$$

принадлежит классу функций $(R^2 \to R^1) \cap D_1(H)$ и удовлетворяет тождеству (13.11).

Пусть ζ — произвольная функция из $D_{\delta I_z}$. Применяя равенство (13.11) и интегрируя по частям по x, а затем по y, получаем следующую цепочку равенств:

$$(13.13)\qquad \iint_H \overline{f}_z(x, y)\,\zeta(x, y)\, dxdy =$$

$$= 2\iint_H \Omega_{xy}(x, y)\,\zeta(x, y)\, dxdy = -2\iint_H \Omega_y(x, y) \times$$

$$\times\, \zeta_x(x, y)\, dxdy = -2\iint_H \Omega_x(x, y)\,\zeta_y(x, y)\, dxdy.$$

[5] См. замечание после леммы 1.

По условию, z — стационарная функция; следовательно, δI_z есть тождественный нуль. Это с учетом (13.9) и (13.13) означает, что для любой функции $\zeta \in D_{\delta I_z}$ выполняется равенство

$$\delta I_z[\zeta] = \iint_H \{[\bar{f}_{z_x}(x, y) - \Omega_y(x, y)]\,\zeta_x(x, y) + \\ + [\bar{f}_{z_y}(x, y) - \Omega_x(x, y)]\,\zeta_y(x, y)\}\,dxdy = 0.$$

Из этого равенства, применяя лемму Хаара, получаем требуемое равенство (13.12). Теорема 1 доказана. Приведем некоторые важные следствия этой теоремы.

Утверждение 2. *Пусть $f \in C_1(Q)$, а z — непрерывно дифференцируемая стационарная функция функционала I. Тогда существуют такие функции $\Omega, \omega \in R^2 \to R^1$ ($D_\Omega = D_\omega = H$), что тройка функций Ω, ω, z есть решение системы*

$$(13.14)\qquad \begin{cases} f_{z_x}(x, y, z, z_x, z_y) = \omega_y + \Omega_y, \\ f_{z_y}(x, y, z, z_x, z_y) = -\omega_x + \Omega_x, \\ f_z(x, y, z, z_x, z_y) = 2\Omega_{xy}, \end{cases}$$

называемой с. д. у. в частных производных Хаара (в дальнейшем с. д. у. Х).

Замечание. С. д. у. (13.14) является системой уравнений второго порядка, но в нее входят частные производные функций ω и z только первого порядка.

Доказательство утверждения 2. Если $z \in C_1(H)$, то вторая частная производная Ω_{xy} функции Ω из теоремы 1 непрерывна: $\Omega_{xy} \in C(H)$. Подынтегральные функции в криволинейном интеграле (13.12) также непрерывны на H. Тогда из условия обращения в нуль интеграла (13.12) следует, что (в обозначениях (13.8)), у пары функций $(\bar{f}_{z_x} - \Omega_y, -\bar{f}_{z_y} + \Omega_x)$ существует первообразная ω на H. Это означает, что $\omega \in (R^2 \to R^1) \cap C_1(H)$ удовлетворяет равенствам

$$(13.15)\qquad \omega_x = -\bar{f}_{z_y} + \Omega, \quad \omega_y = \bar{f}_{z_x} - \Omega_y.$$

Из этих равенств и из (13.11) следует, что функции Ω, ω, z удовлетворяют с. д. у. Х (13.14). Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Пусть $f \in C_2(Q)$, z — два раза непрерывно дифференцируемая стационарная функция функционала I. Тогда z удовлетворяет уравнению*

$$f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{z_y} = 0, \tag{13.16}$$

называемому д. у. Эйлера—Лагранжа в частных производных второго порядка (в дальнейшем д. у. Э—Л).

Замечание. Символическую запись в левой части (13.16) следует понимать в смысле, общепринятом в вариационном исчислении (см. прежде всего задачу 6 § 7).

Доказательство утверждения 3. Тройка функций Ω, ω, z удовлетворяет с. д. у. Х (13.14). Поэтому из условия утверждения 3 следует, что $\Omega, \omega \in C_2(Q)$. Продифференцируем первое уравнение системы (13.14) по x, а второе — по y, а затем вычтем оба полученных равенства из третьего уравнения. В результате, поскольку $\omega_{xy} = \omega_{yx}$, получим равенства

$$\bar{f}_z(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \bar{f}_{z_x}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \bar{f}_{z_y}(x, y) = 0 \; [(x, y) \in H],$$

т. е. z удовлетворяет д. у. в частных производных второго порядка (13.16). Утверждение 3 доказано.

Замечания: 1. О непосредственном доказательстве утверждения 3 см. задачу 6 § 7.

2. В случае двумерной задачи можно построить такой функционал I [см. задачу 5], у которого первая вариация относительно некоторой функции $z \in D_I$ тождественно равна нулю и $z \in C_1(H) \setminus C_2(H)$. Отметим также и то, что для многомерных вариационных задач неверна даже теорема, соответствующая утверждению 8 из § 8. Это говорит о том, что в многомерных вариационных задачах проблема отыскания стационарных функций из $D_1(H)$ и $C_1(H)$ имеет более важное значение, чем в случае одномерных вариационных задач.

На эту проблему обратил внимание Адамар. В 1907 г. он привел пример такого двумерного (регулярного) функционала I, у которого есть стационарная функция из $C_1(H) \setminus C_2(H)$. Необходимое условие в классе C_1 было найдено в 1916 г. венгерским математиком Альфредом Хааром. Система д. у. Хаара (13.14) представляет собой такое необходимое условие, которому должны удовлетворять и стационарные функции, непрерывно дифференцируемые только один раз.

3. Из многомерных вариационных задач выше была рассмотрена самая простая. Разумеется, и в этом случае важными являются более общие задачи с допустимыми функциями из $R^n \to R^m$ ($n \geqq 2, m \geqq 1$; $n+m>3$). Для этих задач также применим метод Хаара, однако исследования в этом случае достаточно сложны. Более легким является вывод соответствующего д. у. Э—Л или с. д. у. Э—Л. Рассмотрим, например, случай $n=2, m=2$. Ясно, как определить соответствующий функционал, поэтому ограничимся только тем, что приведем значение функционала

$$(13.17)\qquad I[z]=\iint_H f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy})\,dxdy.$$

Если $z \in C_4^1(H)$ — стационарная функция, соответствующая основной функции f (в обычном понимании), то из равенства нулю первой вариации после простых преобразований получим (ср. с задачей 6 § 7), что z удовлетворяет уравнению

$$(13.18)\qquad f_z-\frac{\partial}{\partial x}f_{z_x}-\frac{\partial}{\partial y}f_{z_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_{z_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f_{z_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f_{z_{yy}}=0,$$

называемому д. у. в частных производных (четвертого порядка) Эйлера—Пуассона; левая часть д. у. (13.18) понимается как обычно (ср. с задачей 6 § 7 и учтите замечание после утверждения 1 § 11).

Пример. Пусть $Q=R^5$, $f(x, y, z, z_x, z_y)=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$. Выберем Γ и ψ так, чтобы множество D_l не было пустым. Выясним, какими свойствами обладают стационарные функции определенного таким образом функционала.

а) Так как $f_z \equiv 0$, то функция Ω из теоремы 1 тождественно равна нулю. Если z — стационарная функция из $D_1(H)$ функционала I, то по теореме 1, введя обычные обозначения $p=z_x$, $q=z_y$, получаем равенство

$$(13.19)\qquad \int_\pi \frac{p(x, y)\,dy-q(x, y)\,dx}{\sqrt{1+p^2(x, y)+q^2(x, y)}}=0,$$

в котором криволинейный интеграл берется по любому находящемуся внутри H простому замкнутому многоугольнику π.

б) Если $z \in C_1(H)$, то из (13.19) или из с. д. у. (13.14) сразу следует, что

$$\frac{p(x, y)\,dy - q(x, y)\,dx}{\sqrt{1+p^2(x, y)+q^2(x, y)}} \quad [(x, y) \in H] \tag{13.20}$$

есть полный дифференциал.

в) Если $z \in C_2(H)$, то соответствующее д. у. Э—Л (13.16) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0.$$

Отсюда, вводя обычные обозначения $z_{xx} = r$, $z_{xy} = s$, $z_{yy} = t$, в результате простых вычислений получаем д. у.

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0. \tag{13.21}$$

Замечание. К рассмотренному функционалу приводит задача о минимальной площади поверхности, натянутой на данный контур. Тот факт, что в случае минимальной площади поверхности (13.20) есть полный дифференциал, заметил еще Лагранж. Д. у. (13.21), как известно из теории поверхностей, выражает то, что в любой точке исследуемой поверхности средняя кривизна равна нулю.

Задачи: 1. Пусть $f \in C_1(Q)$, а $z \in D_I$ — произвольная фиксированная функция. Определим функционал $\bar{I}$ следующим образом: $\zeta \in D_{\bar{I}}$ тогда и только тогда, когда $(z + \zeta) \in D_I$; если $\zeta \in D_{\bar{I}}$, то положим $\bar{I}[\zeta] = I[z + \zeta]$. Докажите, что $\bar{I}$ на функции 0 [т. е. на той функции из $R^2 \to R^1$, значение которой в любой точке есть $0 \in R^1$] дифференцируем по Фреше (ср. с п. 4.2) и $\delta\bar{I}_0 = \delta I_z$.

2. Пусть $f \in C_2(Q)$, а z доставляет слабый локальный минимум функционалу I. Докажите, что

$$\bar{f}_{z_x z_x} \geqslant 0, \quad \bar{f}_{z_x z_x}\bar{f}_{z_y z_y} - \bar{f}^2_{z_x z_y} \geqq 0,$$

где черта над частными производными означает, что аргументы имеют следующий вид: $x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)$ [условие Лежандра].

Указание. Покажите вначале, что вторая вариация
df
$\delta^2 I_z = \delta^2\bar{I}_0$ (см. задачу 1) положительно определена, а затем, рассуждая от противного, докажите, что выполняется условие Лежандра (рассмотрите фунцию ζ, которая во внешней части подходящего прямоугольника равна нулю, а внутри него линейна).

Примечание. Функционал I назовем положительно регулярным, если $f \in C_2(Q)$ и если функция $f_{z_x z_x} f_{z_y z_y} - f^2_{z_x z_y}$ принимает только положительные значения.

3. Докажите лемму Хаара, рассматривая только такие функции ζ, частные производные которых кусочно-постоянны.

Указание. Пусть N_ε и N — два таких прямоугольника, стороны которых параллельны осям координат, $N_\varepsilon \subset N$, и расстояние между соответствующими сторонами равно ε (>0). Рассмотрите функцию ζ, которая на $H \setminus N$ равна 0, а в точках множества N_ε равна 1, и устремите ε к $+0$.

4. Докажите утверждение, обратное теореме 1: пусть $f \in C_1(Q)$, $z \in D_1(H)$, $\Omega \in D_1(H)$, $\Omega_{xy} \in D(H)$ и функции z и Ω удовлетворяют условиям (13.11) и (13.12). Тогда δI_z есть тождественный нуль.

Указание. Проследите (в обратном порядке) за каждым шагом доказательства теоремы 1. Отметим, что доказательство законности этих шагов (при сделанных предположениях) требует относительно сложных рассуждений.

5. Приведите пример такого функционала, у которого первая вариация является тождественным нулем относительно некоторой допустимой функции $z \in C_1(H) \setminus C_2(H)$.

Указание. а) Решите задачу 4; б) исследуйте функционал, определенный дан ми $Q \stackrel{df}{=} R^5$, $f(x, y, z, z_x, z_y) = z_x^2 - z_y^2$, Γ, ψ, где Γ и ψ пока оизвольны. Пусть, далее, α, $\beta \in (R^1 \to R^1) \cap \cap \{C_1(R^1) \setminus C_2($ — две произвольные фиксированные функции. Выберите Γ ψ так, чтобы функция z, определенная равенством $z(x, y) \stackrel{df}{=} \alpha(x+y) + \beta(x-y)$ [$(x, y) \in H$], была допустимой функцией функционала I.

6. Сформулируйте обобщение вариационной задачи, определенной в п. 13.1, на случай, когда допустимые функции принадлежат $R^n \to R^1$ ($n > 2$); выведите соответствующее д. у. Э—Л как необходимое условие минимума, достигаемого на два раза непрерывно дифференцируемой функции.

7. Запишите д. у. Э—Л в случае основной функции:

$$f \stackrel{df}{=} z_x^2 + z_y^2 + 2\varphi(x, y) z \quad \left[Q \stackrel{df}{=} R^5,\ \varphi \in (R^2 \to R^1) \cap C_2\right].$$

Докажите, что любой порожденный этой основной функцией функционал достигает абсолютного минимума на функции, являющейся решением соответствующего д. у. Э—Л.

Указание. Исследуйте полное изменение функционала.

Примечание. С помощью приведенного выше функционала можно выразить потенциальную энергию колеблющейся мембраны: по принципу Гамильтона потенциальная энергия мембраны, находящейся в положении равновесия, минимальна (ср. с примером п. 11.2).

§ 14. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Выше уже отмечалось (см. п. 7.3, К), что у любой рассмотренной вариационной задачи имеется параметрическое видоизменение. В этом пункте будет исследована в параметрической постановке пространственная задача, рассмотренная в § 12, т. е. так называемая одномерная пространственная параметрическая задача с неподвижными границами (в дальнейшем пространственная параметрическая задача)

Изложенный ниже метод без особых трудностей можно перенести и на многомерные вариационные проблемы (первого порядка).

14.1. Условие однородности

Напомним основные понятия и результаты теории кривых, которые в дальнейшем будут использованы.

1. Пусть $n \geqq 2$ — произвольное натуральное число и пусть отображение $\gamma \in R^1 \to R^n$ удовлетворяет следующим условиям:

1^0. $D_\gamma = [a, b]$.

2^0. γ — взаимно однозначное отображение.

3^0. $\gamma \in C_1 [a, b]$.

4^0. $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0$ $(t \in [a, b])$.

Тогда отображение γ назовем *гладкой элементарной кривой в n-мерном пространстве.*

У гладкой элементарной кривой γ в любой точке $t \in [a, b]$ существует касательная; направляющий вектор касательной равен $\dot{\gamma}(t)$.

Точку $\gamma(a)$ называют *начальной*, $\gamma(b)$ — *конечной* точкой кривой. (Если n фиксировано, то вместо кривой в n-мерном пространстве говорят о пространственной кривой или просто о кривой.)

2. Две кривые (гладкие элементарные в n-мерном пространстве) γ_1 и γ_2 назовем *эквивалентными* (обозначение: $\gamma_1 \sim \gamma_2$), если:

1^0. Их начальные и конечные точки совпадают.

2^0. $R_{\gamma_1} = R_{\gamma_2}$.

3. Пусть γ — гладкая элементарная кривая в n-мерном пространстве. В геометрии под данной кривой обычно понимают не отображение, а множество $R_\gamma \subset R^n$ (или множество R_γ, упорядоченное в соответствии с возрастанием параметра t); тем самым между эквивалентными (гладкими элементарными) кривыми не делается различия.

В геометрии употребляется также следующая терминология: соотношение $\gamma = \dot{\gamma}(t)$ $(t \in D_\gamma = [a, b])$ называют уравнением кривой; если $\gamma_1 \neq \gamma_2$, но $\gamma_1 \sim \gamma_2$, то говорят о разных параметрических представлениях (*параметризациях*) одной и той же кривой.

4. Отображение $\gamma \in (R^1 \to R^n) \cap D_1 [t_1, t_2]$ назовем *кусочно-гладкой кривой в n-мерном пространстве*, если эту кривую можно разбить на конечное число гладких элементарных кривых, т. е. если отрезок $[t_1, t_2]$ можно разбить на конечное число отрезков (без общих внутренних точек) так, что сужение γ на любом из этих отрезков представляет собой гладкую элементарную кривую.

Пусть γ — кусочно-гладкая кривая. Тогда сужение γ на любой интервал $[a, b] \subset [t_1, t_2] = D_\gamma$ назовем дугой кривой γ. Очевидно, что любая дуга кривой γ также кусочно-гладкая кривая.

Для кусочно-гладкой кривой точку $\gamma(t_1)$ также называют начальной, а $\gamma(t_2)$ — конечной точкой кривой; если $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, то кривую называют *замкнутой*, в противном случае — *незамкнутой*. Если для какой-нибудь точки $t \in (t_1, t_2)$ выполняется условие $\dot{\gamma}(t - 0) \neq \dot{\gamma}(t + 0)$, то точку $\gamma(t)$ будем называть точкой излома или угловой точкой кривой γ. Кусочно-гладкую замкнутую кривую γ ($D_\gamma = [t_1, t_2]$) будем называть *простой*, если сужение γ на $[t_1, t_2]$ осуществляет взаимно-однозначное отображение.

5. Кусочно-гладкие кривые γ_1 и γ_2 назовем *эквивалентными* ($\gamma_1 \sim \gamma_2$), если γ_1 и γ_2 можно разбить на конечное число гладких элементарных дуг так, чтобы соответствующие дуги, расположенные в порядке точек деления, были эквивалентны.

6. Пусть $n = 2$, $y \in (R^1 \to R^1) \cap D_1[x_1, x_2]$, $\gamma : x \to (x, y(x))$ — кривая на плоскости ($x \in [x_1, x_2]$). Ясно, что graf $y = R_\gamma$. Этот пример наглядно объясняет причину того, что часто не делают различия между функцией y и кривой с уравнением $x = x$, $y = y(x)$. Аналогично обстоит дело и в случае $n > 2$.

Пусть:

а) $n \geqq 2$ — *данное натуральное число*;

б) $T \subset R^n$ — *данная область*;

$Q \overset{\text{df}}{=} T \times (R^n \setminus \{0\})$ [точки Q обозначим через $(x, \dot{x})$; $0, x, \dot{x} \in R^n$];

в) $f \in (R^{2n} \to R^1) \cap C(Q)$ — данная функция (называемая основной функцией).

Определим функционал J, соответствующий задаче с подвижными границами, следующим образом.

1^0. *Кривую γ назовем допустимой (обозначение $\gamma \in D_J$)*, если:

i_1) γ — *кусочно-гладкая кривая в n-мерном пространстве*;

iii_1) $R_\gamma \subset T$.

2^0. *Каждой кривой $\gamma \in D_J$ поставим в соответствие действительное число*

$$J[\gamma] \overset{\text{df}}{=} \int_{t_1}^{t_2} f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\,dt \quad ([t_1, t_2] = D_\gamma). \tag{14.1}$$

Пример. Пусть $n = 2$, γ_1 и γ_2 — кривые на плоскости, заданные уравнениями $\gamma_1(t) = (t, t)$ $(t \in [1/2, 1])$ и $\gamma_2(\tau) = (\tau^2, \tau^2)$ $(\tau \in [1/\sqrt{2}, 1])$; J — функционал, определенный выше в случае $T = R^2$; $f(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \overset{\text{df}}{=} \dot{x}_1^2$. Ясно, что $\gamma_1 \sim \gamma_2$ (рис. 23) и что $\gamma_1, \gamma_2 \in D_J$. С помощью элементарных вычислений получим, что $J[\gamma_1] = \frac{1}{2}$, $J[\gamma_2] = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, т. е. $J[\gamma_1] \neq J[\gamma_2]$. Это означает то, что *функционал J на эквивалентных кривых не обязан принимать одинаковые значения.*

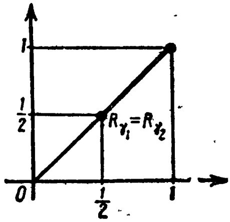

Рис. 23

Замечание. Этот простой пример выдвигает следующую проблему, относящуюся к постановке параметрических задач. Ясно, что в геометрических задачах выбор параметрического представления кривой не имеет значения [ср. с задачей Г) в п. 7.3]. Так как исследование параметрических проблем прежде всего связано с решением геометрических задач, то возникает проблема поиска такого условия, которое обеспечивает независимость значения функционала от параметризации допустимых кривых.

Определение 1. *Будем говорить, что функционал J не зависит от параметризации допустимых кривых, если для любых кривых $\gamma, \bar{\gamma} \in D_J$ из условия $\gamma \sim \bar{\gamma}$ следует равенство $J[\gamma] = J[\bar{\gamma}]$.*

Лемма 1. *Функционал J не зависит от параметризации допустимой кривой тогда и только тогда, когда для любого положительного числа k выполняется тождество*

$$f(x, k\dot{x}) = kf(x, \dot{x}) \quad [(x, \dot{x}) \in Q], \; k > 0. \tag{14.2}$$

Замечание. Функцию f, удовлетворяющую тождеству (14.2), называют *положительно однородной функцией первой степени по переменной $\dot{x}$, а само* тождество — *условием однородности.*

Доказательство леммы 1. α) Пусть $(x_0, \dot{x}_0)$ — произвольная фиксированная точка Q, а k (также произвольное фиксированное) — положительное число. Возьмем такую гладкую элементарную кривую γ в n-мерном пространстве, для которой

$$\gamma(t_0) = x_0, \; \dot{\gamma}(t_0) = \dot{x}_0, \tag{14.3}$$

где t_0 — внутренняя точка интервала $D_\gamma \overset{\mathrm{df}}{=} [t_1, t_2]$. Обозначим через γ_α ($\alpha \in [t_1, t_2]$) сужение кривой γ на интервал $[t_1, \alpha]$. Пусть, далее, $t \in R^1 \to R^1$ — функция, определенная равенством $t(\tau) = k\tau$ ($\tau \in [t_1/k, t_2/k]$), а t_α — сужение t на интервал $[t_1/k, \alpha/k]$ ($\alpha \in [t_1, t_2]$).

Определим теперь семейство кривых $\bar{\gamma}_\alpha$ следующим образом: $\bar{\gamma}_\alpha \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma_\alpha \circ t_\alpha$ ($\alpha \in [t_1, t_2]$). Очевидно, что $\gamma_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha \in D_J$ и что $\gamma_\alpha \sim \bar{\gamma}_\alpha$. Если J не зависит от параметризации допустимых кривых, то для любого $\alpha \in (t_1, t_2)$

$$J[\gamma_\alpha] = \int_{t_1}^{\alpha} f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt = J[\bar{\gamma}_\alpha] = \tag{14.4}$$

$$= \int_{t_1/k}^{\alpha/k} f\left(\gamma(k\tau), \frac{d}{d\tau}\gamma(k\tau)\right) d\tau.$$

Применяя во втором интеграле подстановку $\tau = t/k$, после простых вычислений получаем из (14.4) тождество

$$\int_{t_1}^{\alpha} f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\,dt = \int_{t_1}^{\alpha} f(\gamma(t), k\dot{\gamma}(t))\frac{1}{k}\,dt \qquad (\alpha \in [t_1, t_2]).$$

Если обе части продифференцировать по α, то при $\alpha = t_0$ в силу (14.3) получим равенство

$$f(x_0, k\dot{x}_0) = kf(x_0, \dot{x}_0).$$

Так как точка $(x_0, \dot{x}_0) \in Q$ выбрана произвольно, то необходимость условия однородности (14.2) доказана.

β) Возьмем теперь две произвольные эквивалентные допустимые кривые γ и $\bar{\gamma}$. Докажем, что если выполняется условие (14.2), то $J[\gamma] = J[\bar{\gamma}]$.

Так как $\gamma \sim \bar{\gamma}$, то кривую γ можно разбить на гладкие элементарные дуги $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, а кривую $\bar{\gamma}$ — на $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_k$ так, что $\gamma_i \sim \bar{\gamma}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. *Из определения функционала* J *ясно, что если* $J[\gamma_i] = J[\bar{\gamma}_i]$ $(i = 1, \ldots, k)$, то $J[\gamma] = J[\bar{\gamma}]$.

Фиксируем произвольный номер i $(i = 1, \ldots, k)$ и рассмотрим кривые $\gamma_i = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\bar{\gamma}_i = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ $(D_{\gamma_i} = [a, b], D_{\bar{\gamma}_i} = [\bar{a}, \bar{b}])$. Так как $|\dot{\gamma}_i(t)| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \dot{x}_\nu^2(t)} \neq 0$ $(t \in [a, b])$, то существует такое конечное разбиение $[a, b]$ $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_l = b$, что для любого интервала $[s_{j-1}, s_j)$ хотя бы одна компонента $\dot{x}_\nu$ производной $\dot{\gamma}_i$ ни в одной точке этого интервала не обращается в нуль $(j = 1, \ldots, l)$. Поскольку как отображение γ_i, так и $\bar{\gamma}_i$ — взаимно однозначные, можно определить числа $\bar{s}_j$ следующим образом: $\bar{s}_j = \bar{\gamma}_{\bar{\nu}}(\gamma_i(s_j))$ $[j = 1, \ldots, l]$. Очевидно, что $\bar{a} = \bar{s}_0 < \bar{s}_1 < \ldots \bar{s}_l = \bar{b}$.

Обозначим через γ_{ij} и $\bar{\gamma}_{ij}$ сужения кривых γ_i и $\bar{\gamma}_i$ на интервалы $[s_{j-1}, s_j)$ и $[\bar{s}_{j-1}, \bar{s}_j]$ соответственно $(\gamma_{ij} = \gamma_{ij};$ $j = 1, \ldots, l)$. *Из определения функционала* J *ясно, что если* $J[\gamma_{ij}] = J[\bar{\gamma}_{ij}]$ $(j = 1, \ldots, l)$, *то* $J[\gamma_i] = J[\bar{\gamma}_i]$. Фиксируем произвольный номер j $(j = 1, \ldots, l)$. В силу вышесказанного для доказательства леммы достаточно показать, что $J[\gamma_{ij}] = J[\bar{\gamma}_{ij}]$. Для удобства изложения введем следующие обозначения: $\gamma_{ij} = \Gamma = (X_1, \ldots, X_n)$, $\bar{\gamma}_{ij} = \bar{\Gamma} =$

$= (\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n)$, $D_\Gamma = [c, d]$, $D_{\overline{\Gamma}} = [\overline{c}, \overline{d}]$; далее, пусть $\nu\ (= 1, \ldots, n)$ — такое число, для которого $\dot{x}_\nu(t) \neq 0 \in$ $\in (t \in [c, d])$. Так как $\dot{X}_\nu(t) \neq 0$ $(t \in [c, d])$, то существует функция X_ν^{-1}, также непрерывно дифференцируемая. Определим теперь функцию $t \in R^1 \to R^1$ на интервале $[\overline{c}, \overline{d}]$ следующим образом: $t = X_\nu^{-1} \circ \overline{X}_\nu$, т. е.

$$t(\tau) = X_\nu^{-1}\left(\overline{X}_\nu(\tau)\right) \quad (\tau \in [\overline{c}, \overline{d}]).$$

Функции в этом определении непрерывно дифференцируемы, поэтому $t \in C_1[\overline{c}, \overline{d}]$. Непосредственно из определения t следует, что $\overline{\Gamma} = \Gamma \circ t$. Поскольку $\dot{\overline{\Gamma}} = (\dot{\Gamma} \circ t) \cdot t'$ и $\dot{\overline{\Gamma}}(\tau) \neq 0$ $(\in R^n;\ \tau \in [\overline{c}, \overline{d}])$, производная функция t' не обращается в нуль ни в одной точке интервала $[c, d]$.

По условию однородности в интервале $[\overline{c}, \overline{d}]$,

$$f\left(X(t(\tau)), \frac{\dot{\overline{X}}(\tau)}{t'(\tau)}\right) t'(\tau) = f\left(\overline{X}(\tau), \dot{\overline{X}}(\tau)\right).$$

Если обе части этого равенства проинтегрировать по $[\overline{c}, \overline{d}]$ и в левом интеграле сделать замену $t = t(\tau)$, то получится равенство

$$\int_c^d f\left(X(t), \dot{X}(t)\right) dt = \int_{\overline{c}}^{\overline{d}} f\left(\overline{X}(\tau), \dot{\overline{X}}(\tau)\right) d\tau,$$

которое и означает, что $J[\Gamma] = J[\overline{\Gamma}]$. Тем самым лемма 1 полностью доказана.

14.2. Пространственная параметрическая вариационная задача с неподвижными границами

Пусть:

а) $n \geq 2$ — *данное натуральное число* [*условие* а) п. 14.1];

б) $T \subset R^n$ — *данная область*; $Q \overset{\text{df}}{=} T \times (R^n \setminus \{0\})$ [*условие* б) п. 14.1];

в) P_1, P_2 — *две произвольные фиксированные точки*;

г) $f \in (R^{2n} \to R^1) \cap C(Q)$ — *данная основная функция, удовлетворяющая условию однородности* (14.2).

Определим функционал I следующим образом:

1°. *Кривую γ назовем допустимой* (*обозначение*: $\gamma \in D_I$), *если*:

i) γ — *кусочно-гладкая кривая в n-мерном пространстве* [*условие* i_1) п. 14.1];

ii) $\gamma(t_1) = P_1$, $\gamma(t_2) = P_2$ ($[t_1, t_2] \in D_\gamma$);

iii) $R_\gamma \subset T$ [*условие* iii_1) п. 14.1].

2°. *Каждой кривой $\gamma \in D_I$ поставим в соответствие действительное число*

$$I[\gamma] \overset{\text{df}}{=} \int_{t_1}^{t_2} f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\,dt. \tag{14.5}$$

З а м е ч а н и е. Из леммы 1 и из определения I следует, что если γ, $\bar{\gamma} \in D$ и $\gamma \sim \bar{\gamma}$, то $I[\gamma] = I[\bar{\gamma}]$.

О п р е д е л е н и е 2. *Пусть $n \in N$, $n \geqq 2$, $\varepsilon > 0$ — произвольное, а γ и γ_0 — две кусочно-гладкие кривые в n-мерном пространстве. Будем говорить, что γ принадлежит окрестности γ_0 радиуса ε* [*обозначение*: $\gamma \in \mathcal{K}_\varepsilon(\gamma_0)$], *если существуют такие кривые $\bar{\gamma} \sim \gamma$ и $\bar{\gamma}_0 \sim \gamma_0$, для которых $D_{\bar{\gamma}} = D_{\bar{\gamma}_0}$ и $\bar{\gamma} \in K_\varepsilon(\bar{\gamma}_0)$.*

О п р е д е л е н и е 3. *Пусть $n \in N$, $n \geqq 2$, $\varepsilon > 0$ — произвольное, а γ и γ_0 — две кусочно-гладкие кривые в n-мерном пространстве. Будем говорить, что γ принадлежит окрестности γ_0 первого порядка радиуса ε* [*обозначение*: $\gamma \in \mathcal{K}^1_\varepsilon(\gamma_0)$], *если существуют такие кривые $\bar{\gamma} \sim \gamma$ и $\bar{\gamma}_0 \sim \gamma_0$, что $D_{\bar{\gamma}} = D_{\gamma_0}$, $\bar{\gamma} \in K_\varepsilon(\bar{\gamma}_0)$ и для всех $t \in D_{\bar{\gamma}}$ выполняется неравенство*

$$\arccos \frac{\langle \dot{\bar{\gamma}}(t), \dot{\bar{\gamma}}_0(t)\rangle}{|\dot{\bar{\gamma}}(t)|\,|\dot{\bar{\gamma}}_0(t)|} < \varepsilon.$$

З а м е ч а н и е. Таким образом, соотношение $\gamma \in \mathcal{K}'_\varepsilon(\gamma_0)$ означает, что существует такое взаимное однозначное соответствие между R_γ и R_{γ_0}, что расстояние между соответствующими точками меньше ε и угол между касательными, проведенными в соответствующих точках, также меньше ε. И в этом случае, если важно только существование окрестности какого-нибудь радиуса, радиус окрестности не указывается (ср. с п. 7.1).

О п р е д е л е н и е 4. *Будем говорить, что функционал I на кривой $\gamma \in D_I$ достигает сильного* [*слабого*] *локального минимума* (γ *доставляет сильный* [*слабый*] *локальный* *минимум функционалу I), если у γ существует такая окрестность $\mathcal{K}(\gamma)$ [окрестность первого порядка $\mathcal{K}^1(\gamma)$], что для любой кривой $\bar{\gamma} \in \mathcal{K}(\gamma) \cap D_I$ [$\bar{\gamma} \in \mathcal{K}^1(\gamma) \cap D_I$] выполняется неравенство $I[\bar{\gamma}] \geqq I[\gamma]$.*

Теорема 1. *Если $f \in C_1(Q)$ и если функционал I на кривой $\gamma \in D_I$ ($D_\gamma = [t_1, t_2]$) достигает слабого локального минимума, то существует такой постоянный вектор $c \in R^n$, что γ удовлетворяет системе уравнений*

$$f_{\dot{x}}(x, \dot{x}) = \int_{t_1}^{t} f_x(\dot{x}, x)\, dt + c, \tag{14.6}$$

называемой с. и-д. у. Эйлера—Лагранжа [ср. с (12.1)].

Доказательство. Так как кривая γ доставляет слабый локальный минимум, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что если $\bar{\gamma} \in \mathcal{K}^1_\varepsilon(\gamma) \cap D_I$, то

$$I[\bar{\gamma}] \geqq I[\gamma]. \tag{14.7}$$

Рассмотрим теперь непараметрический функционал I^*, определенный данными

$$Q^* \overset{\mathrm{df}}{=} R^1 \times Q,\ f^*(t, x, \dot{x}) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x, \dot{x})\ [(t, x, \dot{x}) \in Q],$$

$$P_1^* \overset{\mathrm{df}}{=} (t_1, P_1),\ P_2^* \overset{\mathrm{df}}{=} (t_2, P_2) \text{ [см. п.11.2].}$$

Непосредственно из определения 3 следует, что если положительное число ε_0 ($<\varepsilon$) достаточно мало, то $K^1_{\varepsilon_0}(\gamma_0) \cap \cap D_{I^*} \subset \mathcal{K}^1_\varepsilon(\gamma_0) \cap D_I$, поэтому согласно (14.7) функция γ доставляет слабый локальный минимум функционалу I^*. В таком случае функция γ по теореме 1 § 12 должна удовлетворять соответствующей системе и-д. у. Э—Л (12.1). Записывая эту систему, мы и получим с. и-д. у. (14.6). Теорема 1 доказана.

Замечания: 1. Теорему 1 можно доказать и непосредственно (ср. с замечанием 2 после теоремы 1 § 12).

2. Решения с.и-д.у. (14.6) называют *стационарными кривыми функционала I* (или *стационарными кривыми, соответствующими основной функции f*).

Утверждение 1. *Если $f \in C_2(Q)$ и если $\gamma \in D_I$—два раза непрерывно дифференцируемая стационарная кривая функционала I, то функция γ удовлетворяет системе уравнений*

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} = f_x(x, \dot{x}) - f_{x\dot{x}}(x, \dot{x})\,\dot{x} - \tag{14.8}$$
$$- f_{\dot{x}\dot{x}}(x, \dot{x})\,\ddot{x} = 0 \quad (\in R^n),$$

называемой с. д. у. Эйлера—Лагранжа (*в дальнейшем с. д. у. Э—Л*)[6].

Замечания. 1. Систему и-д. у. (14.6) и систему д. у. (14.8) часто записывают в следующей сокращенной форме:

$$f_{x_i}=\int_{t_1}^{t_2} f_{x_i}\,dt+c_i,\quad \text{или}\quad f_{\dot x_i}-\frac{d}{dt}f_{\dot x_i}=0\quad (i=1,\ldots,n).$$

2. Пусть γ — решение с. д. у. (14.8). Тогда по теореме 1 и утверждению 1 любая два раза непрерывно дифференцируемая кривая, эквивалентная γ, также удовлетворяет системе (14.8). Так как таких кривых бесконечно много, то можно предположить, что уравнения с. д. у. (14.8) не являются независимыми.

Действительно, для однородной основной функции первой степени по $\dot x$ выполняется тождество $f(x, \dot x) = \langle\dot x, f_{\dot x}(x, \dot x)\rangle$ $[(x, \dot x) \in Q]$. Дифференцируя обе его части по x и по $\dot x$, получаем два тождества:

$$f_x(x, \dot x) = f_{x\dot x}(x, \dot x)\,\dot x,\quad f_{\dot x\dot x}(x, \dot x)\dot x = 0\ (\in R^n),\quad [(x, \dot x) \in Q]. \tag{14.9}$$

Дальнейшие рассуждения для облегчения изложения продолжим в случае $n = 2$ и применим координатный метод записи. Тогда второе из тождеств (14.9) можно записать так:

$$\dot x_1 f_{\dot x_1\dot x_1}(x_1, x_2, \dot x_1, \dot x_2)+\dot x_2 f_{\dot x_1\dot x_2}(x_1, x_2, \dot x_1, \dot x_2)=0,$$

$$\dot x_1 f_{\dot x_1\dot x_2}(x_1, x_2, \dot x_1, \dot x_2)+\dot x_2 f_{\dot x_2\dot x_2}(x_1, x_2, \dot x_1, \dot x_2)=0,$$

$$[(x_1, x_2, \dot x_1, \dot x_2)\in Q].$$

Эти тождества с учетом того, что $\dot x_1^2 + \dot x_2^2 \neq 0$, означают, что существует такая функция $f_1 \in (R^4 \to R^1) \cap C(Q)$, для которой на Q выполняются равенства

$$f_{\dot x_1\dot x_1}=\dot x_2^2 f_1,\quad f_{\dot x_1\dot x_2}=-\dot x_1\dot x_2 f_1,\quad f_{\dot x_2\dot x_2}=\dot x_1^2 f_1; \tag{14.10}$$

здесь и в дальнейшем для краткости через $f_{\dot x_1\dot x}$, ... и f_1 обозначены значения функций в точке $(x_1, x_2, \dot x_1, \dot x_2) \in Q$. Запишем

---

[6] См. сноску на с. 192.

с. д. у. (14.8) в координатах в случае $n = 2$. Применяя тождества (14.10), получаем

$$(14.11)\qquad \begin{cases} \dot{x}_1 [f_{x_1 \dot{x}_2} - f_{x_2 \dot{x}_1} + (\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2) f_1] = 0, \\ \dot{x}_2 [f_{x_1 \dot{x}_2} - f_{x_2 \dot{x}_1} + (\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2) f_1] = 0. \end{cases}$$

Так как $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ одновременно не обращаются в нуль, то функция $\gamma = (x_1, x_2)$ из $R^1 \to R^2$, удовлетворяющая с. д. у. (14.11), является решением д. у.

$$(14.12)\qquad f_{x_1 \dot{x}_2}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) - f_{x_2 \dot{x}_1}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) + \\ + f(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)(\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2) = 0.$$

Обратно: если $\gamma = (x_1, x_2)$ — решение д. у. (14.12), то, очевидно, γ удовлетворяет с. д. у. (14.11). Таким образом мы доказали, что в случае $n = 2$ с. д. у. Э—Л (14.8) эквивалентна д. у. (14.12).

Координатные функции x_1 и x_2 функции γ, вообще говоря, не определяются однозначно из одного д. у. (14.12). Обычный прием, применяемый для однозначного определения γ, заключается в выборе параметризации и присоединении соответствующего уравнения к д. у. (14.12). Если в качестве примера выбрать, например, длину дуги γ, то тогда присоединяется д. у. $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = 1$; иногда целесообразно одну из координатных функций выбрать линейной и т. д.

Так же как и выше, можно показать, что и в случае произвольного $n \geqq 2$ с. д. у. Э—Л (14.12) эквивалентна с. д. у., состоящей из $n - 1$ уравнений.

3. Функция f_1, введенная в замечании 2, в простейшей параметрической задаче, по существу, играет ту же роль, что и функция $f_{y'y'}$ в простейшей непараметрической задаче (в условии Лежандра, в определении регулярного функционала и т. д.).

4. Д. у. (14.12) можно интерпретировать следующим образом Пусть $\gamma = (x_1, x_2) \in R^1 \to R^2$ — два раза непрерывно дифференцируемая стационарная кривая функционала I; предположим, что $f_1(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \neq 0$ $(t \in [t_1, t_2] \overset{\mathrm{df}}{=} D_\gamma)$. Обозначим через ρ кривизну кривой γ. Тогда, используя известную формулу для кривизны, получаем

$$(14.13)\qquad \rho(t) = \frac{f_{\dot{x}_1 x_2}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - f_{x_2 \dot{x}_1}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{f_1(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle^{3/2}} \quad (t \in [t_1, t_2]).$$

5. Сравним простейшую вариационную задачу (см. п. 8.1) с простейшей ($n = 2$) параметрической задачей. В последней вместо букв x_1, x_2 в этом замечании целесообразнее использовать буквы x, y.

а) Пусть дан функционал I, определенный в начале этого пункта в случае $n = 2$; предположим, что его определяющие данные имеют вид $Q = T\times(R^2\setminus\{0, 0\})$, f, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, причем $x_1 < x_2$. Определим функционал I^* типа введенного в п. 8.1 следующими данными: $Q^* \overset{\mathrm{df}}{=} T \times R^1$, $f^*(x, y, y') \overset{\mathrm{df}}{=} f(x, y, 1, y')$, $P_1^* \overset{\mathrm{df}}{=} P_1$, $P_2^* \overset{\mathrm{df}}{=} P_2$. Очевидно, что I^* — сужение функционала I[7]. Отсюда следует, что если кривая γ, определенная равенством $\gamma(x) = (x, y(x))$ $(x \in [x_1, x_2])$, доставляет минимум (в каком-либо смысле функционалу I и $y \in D_{I^*}$, то функция y доставляет минимум (в том же смысле) функционалу I^*. Обратное, разумеется, не верно: если функция y доставляет минимум функционалу I^*, то кривая $\gamma \in D_I$, определенная равенством $\gamma(x) = (x, y(x))$ $[x \in [x_1, x_2])$, может и не доставлять минимума функционалу I.

б) Пусть теперь задан функционал I^*, определенный в п. 8.1: $Q^* = T \times R^1$, f^*, P_1^*, P_2^*. Для того чтобы можно было провести рассуждения п. а) в обратном порядке и определить параметрический функционал, необходимо, чтобы функцию φ (положительно однородную первой степени по переменным $\dot{x}$, $\dot{y}$), определенную равенством

$$\varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \overset{\mathrm{df}}{=} f^*\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\dot{x}$$

$$[(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in T \times \{(\dot{x}, \dot{y}) \in R^2 \mid \dot{x} \neq 0\}],$$

можно было продолжить до функции f, непрерывной на множестве $Q = T\times(R^2\setminus\{0, 0\})$. Например, в случае $f^*(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ это продолжение можно осуществить: $f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, а в случае $f^*(x, y, y') = y'^2$ — нельзя [здесь $\varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{y}^2/\dot{x}$ $((x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in R^2 \times \{(\dot{x}, \dot{y}) \in R^2 \mid \dot{x} \neq 0\}$. Если данное продолжение можно осуществить, то параметрический функционал I, определенный данными $[Q, f, P_1, P_2]$, где $P_1 = P_1^*$, $P_2 = P_2^*$, является расширением функционала I^*.

---

[7] См. петит в 14.1 (п. 6).

Итак, параметрические и непараметрические задачи представляют собой, вообще говоря, две различные, но в одинаковой мере важные проблемы. В то же время в изложенных специальных случаях функционал, исследованный в параметрической проблеме, есть расширение функционала в соответствующей непараметрической проблеме.

6. Обратим внимание на то, что параметрический вариант вариационной задачи, как это было показано, требует рассмотрения новых проблем, однако со многих точек зрения его исследовать легче, поскольку вместо допустимой кривой можно брать любую эквивалентную кривую. Кроме того, многие результаты, относящиеся к параметрической задаче, имеют симметричную форму.

7. Отметим, что параметрическую задачу иногда называют *однородной*, а непараметрическую — *неоднородной* вариационной задачей.

Пример. Рассмотрим задачу о минимальной площади поверхности вращения в параметрическом варианте, т. е. пусть $n = 2$,

$$T = \{(x, y) \in R^2 \mid y > 0\},\ f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

$$P_1 \text{ и } P_2 —$$

фиксированные точки (ср. п. 2.2, 5.3, 8.3 и задачи 1 и 5 § 8). Определенный этими данными функционал I на основании замечания 5 есть расширение функционала, исследованного в случае соответствующей непараметрической задачи.

Система и-д. у. Э—Л (14.6), записанная в координатах, имеет следующий вид:

$$\frac{\dot{x}y}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \alpha, \tag{14.14$_1$}$$

$$\frac{y\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \int_{t_1}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt + \alpha_1. \tag{14.14$_2$}$$

а) Если $\alpha = 0$, то решениями первого уравнения являются все кусочно-гладкие кривые $\gamma = (x, y)$ на плоскости, для которых $\dot{x}y$ есть тождественный нуль. Заметим, что функция y не может обратиться в нуль ни на одном подынтервале Δ интервала D_γ: в противном случае $\dot{y} = 0$ на Δ, тогда

x не обращается в нуль ни в одной точке интервала Δ, поэтому из второго уравнения получается тождество

$$0=\int_{t_1}^{t} |\dot{x}(t)|\,dt+\alpha_1 \quad (t\in\Delta),$$

которое, очевидно, противоречит условию $\dot{x}\neq 0$. Итак, при $\alpha=0$ первая координатная функция x должна быть постоянной.

Непосредственной подстановкой легко можно убедиться в том, что каждая прямая из семейства прямых, задаваемых уравнением

(14.15) $\gamma(y)=(c, y)$ $(y\in D_\gamma,\ c\in R^1$ — постоянная$)$,

удовлетворяет уравнениям (14.14_1) и (14.14_2). Поэтому при $\alpha=0$ стационарными кривыми являются прямые (14.15).

б) Пусть $\alpha>0$. Тогда (см. определение T) для любой стационарной кривой $\gamma=(x, y)$ функция $\dot{x}$ принимает только положительные значения, поэтому при задании любой стационарной кривой в качестве параметра можно выбрать x, т. е. данную кривую можно задать в виде $\gamma(x)=(x, y(x))$ $(x\in D_\gamma)$, где $y\in D_1(D_\gamma)$. В этом случае вторая координатная функция должна удовлетворять д. у. первого порядка

$$y=\alpha\sqrt{1+y'^2}\quad(\alpha>0), \tag{14.16}$$

получающемуся из (14.14_1). Общее решение этого д. у. в классе два раза непрерывно дифференцируемых функций уже было найдено в п. 5.3; с учетом того, что теперь T есть верхняя полуплоскость, оно имеет следующий вид [см. (5.10)]:

$$\varphi(x, \alpha, \beta)=\alpha\,\mathrm{ch}\frac{x-\beta}{\alpha}\quad(\alpha>0;\ \beta\in R^1;\ x\in R^1). \tag{14.17}$$

Если $\alpha<0$, то в результате аналогичных рассуждений приходим к д. у. $y=|\alpha|\sqrt{1+y'^2}$, т. е. снова получаем двупараметрическое семейство кривых (14.17).

Подстановкой легко можно убедиться в том, что функции семейства (14.17) удовлетворяют и-д. у.

$$\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}=\int_{x_1}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx+\alpha_1, \tag{14.18}$$

получающемуся из (14.14_2).

в) Любое решение с. и-д. у. (14.14) два раза непрерывно дифференцируемо. В случае $\alpha = 0$ это очевидно; если $\alpha \neq 0$, то в этом можно убедиться, например, следующим образом. Рассмотрим соответствующую непараметрическую задачу с основной функцией $f^*(x, y, y') = y'\sqrt{1 + y'^2}$ $[(x, y, y') \in \{(x, y) \in R^2 \mid y > 0\} \times R^1]$. Функционалы, образованные этой основной функцией, положительно регулярны (см. пример 1 п. 8.6); стационарные функции, которые соответствуют f^*, удовлетворяют и-д. у. (8.10), совпадающему с (14.16). Так как стационарные функции регулярных функционалов два раза непрерывно дифференцируемы (ср. с утверждением 8 § 8), то они удовлетворяют соответствующему д. у. Э—Л, а это и есть д. у. (14.16). Таким образом, любое решение $y \in D_1[a, b]$ д. у. (14.16) принадлежит к классу функций $C_2[a, b]$.

г) Итак, стационарные кривые, соответствующие исследуемой основной функции f, представляют собой прямые (14.15) и цепные линии (14.17). Следовательно, параметрический метод позволил расширить класс стационарных кривых (добавлены прямые, перпендикулярные оси Ox).

Задачи: **1.** Пусть $f \in C_1(Q)$ и пусть функция $E \in R^{3n} \to R^1$ $[D_E \overset{\mathrm{df}}{=} Q \times (R^n \setminus \{0\});\ 0 \in R^n]$ определены следующим образом: $E(x, \dot{x}, u) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x, u) - f(x, \dot{x}) - \langle f_{\dot{x}}(x, \dot{x}),\ u - \dot{x}\rangle$. Докажите, что если кривая γ $(D_\gamma = [t_1, t_2])$ доставляет сильный локальный минимум функционалу I, то для любых $u \in R^n \setminus \{0\}$, $t \in [t_1, t_2]$ должно выполняться неравенство $E(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), u) \geqslant 0$ (необходимое условие Вейерштрасса).

Указание. Основная идея доказательства может совпадать с доказательством теоремы 1 § 10.

2. Пусть γ $(D_\gamma = [t_1, t_2])$ — стационарная функция функционала I и $f \in C_1(Q)$. Докажите, что $f_{\dot{x}}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t - 0)) = f_{\dot{x}}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t + 0))$ $(t \in (t_1, t_2))$ (условие Вейерштрасса—Эрдмана в точке излома).

3. Предполагая, что $\gamma, \gamma_0 \in D_I$, $D_\gamma = D_{\gamma_0} = [t_1, t_2]$, докажите, что если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$|\gamma(t) - \gamma_0(t)| < \varepsilon \text{ и } |\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}_0(t)| \leqq \varepsilon\sqrt{|\dot{\gamma}(t)|\,|\dot{\gamma}_0(t)|}$$
$$\left(t \in D_{\dot{\gamma}} \cap D_{\dot{\gamma}_0}\right), \text{ то } \gamma \in \mathscr{K}^1_{2\varepsilon}(\gamma_0).$$

4. Пусть $n = 2$, $f \in C_2(Q)$, а кривая $\gamma = (x_1, x_2)$ доставляет слабый локальный минимум функционалу I. Докажите, что $f_1(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) \geqslant 0$ в интервале $[t_1, t_2] = D_\gamma$, где f_1 — функция из соотношений (14.10) (условие Лежандра).

Указание. Докажите вначале необходимость условия Вейерштрасса слабого локального минимума (ср. с задачей 1 и замечанием 3 после утверждения 2 § 10), а затем переформулируйте его с помощью функции $\mathscr{E} \in R^4 \to R^1$, где $\mathscr{E}(x_1, x_2, \varphi, \psi) \overset{\text{df}}{=} \overset{\text{df}}{=} E(x_1, x_2, \cos\varphi, \sin\varphi, \cos\psi, \sin\varphi)$. После этого, используя условие однородности, докажите равенство

$$f_1(x_1, x_2, \cos\varphi, \sin\varphi) = \lim_{\psi\to\varphi} \frac{\mathscr{E}(x, y, \varphi, \psi)}{1-\cos(\psi-\varphi)}.$$

5. Пусть $n = 2$, $f \in C_2(Q)$. Предполагая, что функционал I — регулярный, докажите, что в этом случае любая стационарная кривая I два раза непрерывно дифференцируема.

Замечание. Функционал I называют регулярным, если $0 \notin R_{f_1}$.

Указание. Вначале обобщите теорему Гильберта (см. утверждение 7 § 8), а затем с помощью условия Вейерштрасса—Эрдмана в точке излома проведите доказательство по образцу доказательства утверждения 8 § 8.

6. Пусть $n=2$. Найдите два раза непрерывно дифференцируемые стационарные кривые, соответствующие следующим основным функциям:

а) $f = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$ $(T = R^2)$;

б) $f = \dfrac{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}}{\sqrt{x_2+\alpha}}$ $(\alpha > 0;\ T = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_2 > -\alpha\})$;

в) $f = (x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2)/2 - a\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}$ $(a > 0;\ T = R^2)$.

7. Исследуйте задачу о минимальной площади поверхности вращения для таких точек $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ $(y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0)$, расстояние между которыми больше $y_1 + y_2$.

Указание. Обозначив через I соответствующий функционал, покажите, что $\inf I = (y_1^2 + y_2^2)\pi$.

8. Охарактеризуйте геодезические линии, соединяющие две данные точки элементарной поверхности $r \in R^2 \to R^3$.

Замечания. а) Определим элементарную поверхность по образцу элементарной кривой: б) пусть $\gamma \in R^1 \to R^2$ — такая кривая на плоскости, для которой $R_\gamma \subset D_r$; тогда пространственную кривую $r \bigcirc \gamma \in R^1 \to R^3$ назовем поверхностной кривой; в) пусть D_I — класс тех кусочно-гладких кривых $\gamma \in R^1 \to R^2$, для которых поверхностные кривые $r \bigcirc \gamma$ соединяют две данные точки поверхности, а $I[\gamma]$ — длина кривой $r \bigcirc \gamma$; г) если γ — два раза непрерывно дифференцируемая стационарная кривая функционала I, то кривую $r \bigcirc \gamma$ назовем геодезической линией.

Указание. а) Воспользовавшись д. у. (14.12), докажите, что в любой точке геодезической линии геодезическая кривизна равна нулю; б) выберите в качестве параметра длину дуги и покажите, что главная нормаль геодезической линии в любой точке перпендикулярна поверхности.

9. Найдите геодезические линии (см. задачу 7), если данная поверхность: а) сфера; б) параболоид вращения; в) эллипсоид вращения.

10. Напишите д. у. геодезических линий в римановом пространстве.

Замечания. а) Римановым пространством назовем такое пространство, в котором квадрат «элемента дуги» можно записать следующим образом: $ds^2 = \langle G(x)dx, dx\rangle$, где $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$ — симметричная матрица ($g_{ij} \in R^n \to R^1 \cap C_2(T)$, $i, j = 1, \ldots, n$), квадратичная форма ds^2 строго положительна; б) геодезическими линиями назовем два раза непрерывно дифференцируемые стационарные функции, соответствующие основной функции $f(x, \dot{x}) \overset{\text{df}}{=} (\langle G(x)\dot{x}, \dot{x}\rangle)^{1/2}$.

Указание. Выберите в качестве параметра длину дуги и запишите в координатах с. д. у. Э—Л с помощью символов $\begin{bmatrix} i & k \\ j & \end{bmatrix} \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\right)$, называемых символами Кристоффеля ($i, j, k = 1, \ldots, n$).

§ 15. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые, часто встречающиеся в приложениях вариационные задачи с подвижными границами. Важным является то, что каждый функционал, связанный с такой задачей, есть расширение некоторого ранее изученного функционала с неподвижными границами; поэтому полученные выше необходимые условия экстремума должны выполняться и в случае подвижных границ. Мы подробно рассмотрим случай, когда подвижна одна из границ, а другая закреплена; затем кратко опишем другие случаи.

15.1. Условия трансверсальности для параметрической вариационной задачи

В этом пункте под I будем понимать следующее расширение функционала типа определенного в п. 14.2; сохраним все введенные там условия и обозначения, кроме тех, которые относятся к концевым точкам допустимых кривых. Вместо этого фиксируем гладкую элементарную кривую $\Gamma \in R^1 \to R^n$ и точку $P_1 \in T$ так, что $P_1 \notin R_\Gamma$ и $R_\Gamma \subset T$. Кроме того, в определении допустимых кривых условие *ii*) заменим следующим условием:

ii*) γ соединяет точку P_1 и кривую Γ, т. е. $\gamma(t_1) = P_1$, $\gamma(t_2) \in R_\Gamma$ $([t_1, t_2] \overset{\mathrm{df}}{=} D_\gamma)$.

Замечания: 1. Определяющие данные только что определенного функционала I таковы: Q, f, P_1, Γ.

2. Функционал I есть расширение любого определенного данными Q, f, P_1, $P_2 \in \Gamma$ функционала из п. 14.2 (одномерного параметрического с неподвижными границами).

3. Сильный и слабый локальные минимумы определим точно так же, как и в п. 4.12 (ср. с определением 4 § 14).

Теорема 1. *Пусть $f \in C_1(Q)$ и предположим, что функционал I достигает слабого локального минимума на кривой $\gamma \in D_I$ $(D_\gamma \overset{\mathrm{df}}{=} [t_1, t_2])$. Пусть далее, $\gamma(t_2) = \Gamma(a)$, где a — внутренняя точка интервала $[a_1, a_2] = D_\Gamma$. Тогда справедливо равенство*

$$\langle f_{\dot{x}}(\gamma(t_2), \dot{\gamma}(t_2)), \dot{\Gamma}(a)\rangle = 0, \tag{15.1}$$

называемое условием трансверсальности.

Доказательство. α) Предположим вначале, что кривая γ — гладкая, т. е. не имеет угловых точек. Пусть $u \in (R^1 \to R^1) \cap C_1[t_1, t_2]$ — произвольная функция, для которой

$$u(t_1) = 0, \quad u(t_2) = 1. \tag{15.2}$$

Определим для любого параметра $\varepsilon \in R^1$, для которого $(a + \varepsilon) \in D_\Gamma$, кривую $\xi \in R^1 \to R^n$ следующим образом:

$$\xi(t, \varepsilon) \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma(t) + [\Gamma(a + \varepsilon) - \Gamma(a)]\, u(t) \quad (t \in [t_1, t_2]). \tag{15.3}$$

Из равенства $\gamma(t_2) = \Gamma(a)$, а также из (15.2) и (15.3) следует, что при любом фиксированном ε гладкая кривая $\xi(t, \varepsilon)$ соединяет точку P_1 с Γ и что $\xi(t, 0) = \gamma(t)$ $(t \in [t_1, t_2])$. Из непрерывности функции Γ, из (15.3) и из открытости Q вытекает, что для произвольной фиксированной окрестности первого порядка кривой γ при любом достаточно малом фиксированном ε кривая $\xi(t, \varepsilon)$ является допустимой и принадлежит данной окрестности. На кривой γ функционал I достигает слабого локального минимума, поэтому функция $\varphi \in R^1 \to R^1$, определенная равенством $\varphi(\varepsilon) \overset{\mathrm{df}}{=} I[\xi(t, \varepsilon)]$ $[(\varepsilon + a) \in D_\Gamma]$, достигает локального минимума в точке $0 \in R^1$. Так как точка a — внутренняя точка то 0 — внутренняя точка D_φ.

Функция φ, очевидно, дифференцируема в точке 0, поэтому $\varphi'(0) = 0$. Используя формулу (14.5), запишем следующее представление для $\varphi'(0)$:

$$(15.4) \qquad \varphi'(0) = \int_{t_1}^{t_2} \{\langle (f_x)\gamma(t), \dot\gamma(t)), \xi_\varepsilon(t, 0)\rangle + \\ + \langle f_{\dot x}(\gamma(t), \dot\gamma(t)), \dot\xi_\varepsilon(t, 0)\rangle\}\, dt = 0.$$

Так как γ — стационарная функция не только функционала I, но и соответствующего функционала с закрепленным концом $P_2 = \gamma(t_2) = \Gamma(a)$ [см. замечание 2], то функция γ должна с некоторой подходящей константой $c \in R^n$ удовлетворять с. и-д. у. Э—Л (14.16):

$$f_{\dot x}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) = \int_{t_1}^{t} f_x(\gamma(s), \dot\gamma(s))\, ds + c \quad (t \in [t_1, t_2]).$$

По предположению, $\gamma \in C_1[t_1, t_2]$; следовательно, функция в правой части полученного тождества, а значит, и функция в левой части, дифференцируема и

$$(15.5) \qquad \frac{d}{dt} f_{\dot x}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) = f_x(\gamma(t), \dot\gamma(t)) \quad (t \in [t_1, t_2]).$$

Учитывая тождество (15.5), равенство (15.4) можно записать так:

$$(15.6) \qquad \varphi'(0) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \langle f_{\dot x}(\gamma(t), \dot\gamma(t)), \xi_\varepsilon(t, 0)\rangle\, dt = \\ = [\langle f_{\dot x}(\gamma(t), \dot\gamma(t)), \xi_\varepsilon(t, 0)\rangle]_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Из равенства (15.2) и (15.3) следует, что $\xi_\varepsilon(t_1, 0) = \dot\Gamma(a) \times \times u(t_1) = 0 \ (\in R^n)$, $\xi_\varepsilon(t_2, 0) = \dot\Gamma(a)\, u(t_2) = \dot\Gamma(a)$. Подставляя полученные векторы в (15.6), получаем

$$\langle f_{\dot x}(\gamma(t_2), \dot\gamma(t_2)), \dot\Gamma(a)\rangle = 0.$$

Равенство (15.1) доказано в том случае, когда γ — гладкая кривая.

β) Переходя к общему случаю, обозначим через t_1^* наибольшее значение параметра, соответствующее угловой точке кривой γ; тогда дуга γ^* кривой, отвечающая промежутку $[t_1^*, t_2]$, есть гладкая кривая. Рассмотрим функционал I^*, определенный данными $Q^* \overset{\text{df}}{=} Q$, $f^* \overset{\text{df}}{=} f$, $P_1^* \overset{\text{df}}{=} (t_1^*,$

$\gamma(t_1^*))$, $\Gamma^* \overset{\mathrm{df}}{=} \Gamma$. Кривая γ доставляет слабый локальный минимум функционалу I, поэтому очевидно, что I^* достигает слабого локального минимума на γ^*. Но тогда согласно α) должно иметь место условие трансверсальности

$$\langle f_{\dot{x}}^* (\gamma^*(t_2), \dot{\gamma}^*(t_2)), \dot{\Gamma}^*(a)\rangle = 0.$$

С учетом определения f^*, γ^* и Γ^* остается заметить, что это равенство очевидным образом совпадает с условием (15.1). Теорема 1 доказана полностью.

Замечания: 1. Исследуем теперь более общую проблему, когда начальная точка также не фиксирована и может скользить вдоль некоторой кривой; в этом случае определяющие данные функционала следующие: Q, f, Γ_1, Γ_2, где Γ_1, $\Gamma_2 \in R^1 \to R^2$ — данные кривые (R_{Γ_1}, $R_{\Gamma_2} \subset T$). Допустимые кривые предполагаем удовлетворяющими условиями $\gamma(t_1) \in \Gamma_1$, $\gamma(t_2) \in \Gamma_2$. ($[t_1, t_2] = D_\gamma$). Тогда и в начальной и конечной точках должно выполняться соответствующее условие трансверсальности $< f_{\dot{x}} (\gamma(t_i), \dot{\gamma}(t_i)), \dot{\Gamma}_i(a_i) > > 0$ [$i = 1, 2$; $\gamma(t_1) = \Gamma_1(a_1)$, $\gamma(t_2) = \Gamma_2(a_2)$]. Это сразу следует из теоремы 1 (точнее, из соответствующего ее аналога, относящегося к случаю, когда начальная точка подвижна, а конечная — фиксирована), так как всякая кривая, доставляющая минимум рассматриваемому функционалу, доставляет минимум и его сужению, при котором одна граничная точка фиксирована, а другая подвижна.

2. Применяя теорему 1, легко сформулировать условие трансверсальности и в том случае, когда концевые точки движутся не вдоль кривых, а по некоторым поверхностям: в этом случае условие трансверсальности должно иметь место для любых проходящих через концевые точки поверхностных кривых (см. задачу 1).

Пример. Пусть $f(x, \dot{x}) = \psi(x)\sqrt{<\dot{x}, \dot{x}>}$ [$(x, \dot{x}) \in Q$], где $\psi \in (R^n \to R^1) \cap C_1(T)$. Предположим далее, что $\psi(x) \neq 0$ $(x \in T)$. Так как

$$f_{\dot{x}}(x, \dot{x}) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle}}\,\dot{x} \quad [(x, \dot{x}) \in Q]$$

и $\psi(x) \neq 0$, то условие трансверсальности (15.1) выполняется тогда и только тогда, когда $<\dot{\gamma}(t_2), \dot{\Gamma}(a)> = 0$, т. е. в этом случае условие трансверсальности означает, что *экстремальные кривые должны быть перпендикулярны кривой* Γ.

Отметим, что к основной функции указанного типа приводят следующие задачи:

а) задача о минимальной длине кривой, соединяющей две кривые $(\psi(x) \equiv 1)$;

б) задача о минимальной площади поверхности вращения, образующая которой соединяет две кривые $[n = 2;\ \psi(x_1, x_2) = x_2,\ T = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_2 > 0\}]$;

в) задача о брахистохроне, если дана точка, лежащая выше, а точка, лежащая ниже, может двигаться вдоль данной кривой $[n = 2;\ \psi(x_1, x_2) = 1/\sqrt{x_2 + \alpha};\ \alpha > 0;\ T = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_2 > -\alpha\}]$.

15.2. Условие трансверсальности для непараметрической вариационной задачи

Рассмотрим отдельно простейший случай непараметрической вариационной задачи с подвижной границей. В этой задаче трудность вызывает то, что область определения допустимых функций не является одним и тем же интервалом.

В этом пункте под I будем понимать расширение функционала типа определенного в п. 8.1. Сохраним все условия и обозначения п. 8.1, кроме тех, которые связаны с точкой P_2. Вместо этого зададим такую непрерывно дифференцируемую функцию $g \in R^1 \to R^1$ $[D_g \overset{\text{df}}{=} (\alpha, \beta)]$, для которой $P_1 \notin \notin \operatorname{graf} g$ и $\operatorname{graf} g \subset T$. В определении допустимых функций условие *ii*) заменим следующим условием:

$$ii^*) \qquad (x_2,\ y(x_2)) \in \operatorname{graf} g \quad (D_y \overset{\text{df}}{=} [x_1,\ x_2)],$$

т. е. $y(x_2) = g(x_2)$.

Предполагая, что класс допустимых функций не пуст, каждой функции $y \in D_I$ сопоставим действительное число

$$(15.7) \qquad I[y] \overset{\text{df}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\, dx \qquad ([x_1, x_2] = D_y).$$

Замечания: 1. Определяющие данные только что определенного функционала I следующие: Q, f, P_1, g.

2. Функционал I есть расширение любого функционала из п. 8.1, определенного данными Q, f, P_1, $P_2 \in \operatorname{graf} g$.

Определение 1. *Расстоянием первого порядка между функциями* y, $\bar{y}$ ($D_{\bar{y}} \overset{\text{df}}{=} [x_1, \bar{x}_2]$, $D_y \overset{\text{df}}{=} [x_1, x_2]$) *назовем число*

$$\rho^1(y, \bar{y}) \overset{\text{df}}{=} \max_{x \in D_{\bar{y}} \cap D_y} |\bar{y}(x) - y(x)| +$$

$$+ \sup_{x \in D_{\bar{y}'} \cap D_{y'}} |\bar{y}'(x) - y'(x)| + |\bar{x}_2 - x_2| + |\bar{y}, (\bar{x}_2) - y(x_2)|.$$

Замечания: 1. Если $\bar{x}_2 = x_2$ и $\bar{y}(\bar{x}_2) = y(x_2)$, то тогда только что определенное расстояние первого порядка совпадает с обычным (ср. с п. 7.1).

2. С помощью расстояния первого порядка обычным образом вводится понятие слабого локального минимума (ср. с п. 8.1).

Теорема 2. *Пусть $f \in C_1(Q)$ и предположим, что функционал I достигает слабого локального минимума на функции $y \in D_I$. Тогда выполняется равенство*

$$(15.8)\ f(x_2, y(x_2), y'(x_2)) +$$
$$+ (g'(x_2) - y'(x_2)) f_{y'}(x_2, y(x_2), y'(x_2)) = 0,$$

называемое условием трансверсальности.

Доказательство. Точно так же как и при доказательстве теоремы 1, достаточно ограничиться случаем, когда $y \in C_1[x_1, x_2]$ (ср. с п. β) доказательства теоремы 1].

Функционал I на функции y достигает слабого локального минимума, поэтому существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что если

$$y \in D_I \text{ и } \rho^1(\bar{y}, y) < \varepsilon_0, \text{ то}$$

$$(15.9) \qquad I[\bar{y}] \geqq I[y].$$

Не ограничивая общности, число ε_0 можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения $\varepsilon_0 < x_2 - x_1$ и k_{ε_0} (graf y) $\subset T$.

Пусть Y_{ε_0} — непрерывно дифференцируемое продолжение функции y на отрезок $[x_1, x_2 + \varepsilon_0]$. Для любого $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ обозначим через Y_ε сужение Y_{ε_0} на интервал $[x_1, x_2 + \varepsilon]$. Пусть, далее, $\eta \in R^1 \to R^1$ — фиксированная функция, удовлетворяющая условиям

$$(15.10)\ \eta \in C_1[x_1, x_2 + \varepsilon_0];\ \eta(x_1) = 0,\ \eta(x_2) \neq 0$$

Из условия $\eta(x_2) \neq 0$ следует, что $\eta(x) \neq 0$ в некоторой окрестности $k_{\varepsilon_1}(x_2)$ точки x_2 ($\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_0$). Определим теперь функцию $\omega \in (R^1 \to R^1) \cap C_1(k_{\varepsilon_1}(0))$ следующим образом:

$$\omega(\varepsilon) = \frac{g(x_2+\varepsilon) - Y_\varepsilon(x_2+\varepsilon)}{\eta(x_2+\varepsilon)}. \tag{15.11}$$

Из этого определения функции ω и из (15.10) следует, что для любого фиксированного $\varepsilon \in k_{\varepsilon_1}(0)$ функция

$$\psi(x, \varepsilon) \overset{\mathrm{df}}{=} Y_\varepsilon(x) + \omega(\varepsilon)\eta(x) \qquad (x \in [x_1, x_2+\varepsilon])$$

принадлежит D_l.

Так как $\psi(x, 0) = y(x)$ ($x \in [x_1, x_2]$), то из (15.9), учитывая неравенства $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, получаем, что функция φ, определенная равенством $\varphi(\varepsilon) = I[\psi(x, \varepsilon)]$ [$\varepsilon \in k_{\varepsilon_1}(0)$] (и, очевидно, дифференцируемая), в точке $0 \in R^1$ достигает локального минимума; следовательно, должно выполняться равенство $\varphi'(0) = 0$. Из тождества

$$\varphi(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2+\varepsilon} f\Big(x, Y_\varepsilon(x) + \omega(\varepsilon)\eta(x), Y'_\varepsilon(x) + \\ + \omega(\varepsilon)\eta'(x)\Big)\,dx \quad [\varepsilon \in k_{\varepsilon_1}(0)]$$

и из (15.11) после элементарных вычислений получим

$$\varphi'(0) = f\big(x_2, y(x_2), y'(x_2)\big) + \omega'(0)\int_{x_1}^{x_2} \{f_y\big(x, y(x), y'(x)\big) \times \\ \times \eta(x) + f_{y'}\big(x, y(x), y'(x)\big)\eta'(x)\}\,dx = 0. \tag{15.12}$$

Так как y доставляет локальный минимум не только функционалу I, но и соответствующему функционалу с закрепленным концом [см. замечание 2 после определения I; $P_2 \overset{\mathrm{df}}{=} (x_2, y_2(x))$], то функция y должна удовлетворять соответствующему д. у. Э—Л:

$$f_y\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx} f_{y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0 \\ (x \in [x_1, x_2]). \tag{15.13}$$

С другой стороны, из (15.11) дифференцированием получаем

$$\omega'(0) = \frac{g'(x_2) - y'(x_2)}{\eta(x_2)}. \tag{15.14}$$

Равенство (15.12) с учетом (15.13), (15.14) и (15.10) можно преобразовать так:

$$\varphi'(0)=f\left(x_2, y(x_2), y'(x_2)\right)+\omega'(0)\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\times$$

$$\times\left\{f_{y'}\left(x, y(x), y'(x)\right)\eta(x)\right\}dx=f\left(x_2, y(x_2), y'(x_2)\right)+$$

$$+\left(g'(x_2)-y'(x_2)\right)\right)f_{y'}\left(x_2, y(x_2), y'(x_2)\right)=0.$$

Тем самым теорема 2 доказана.

Замечание. Изложенный метод применим и в случае более сложных непараметрических задач с подвижными границами: может двигаться и левая граничная точка, можно исследовать соответствующую пространственную задачу и т. д.

Задачи: 1. Рассмотрите пространственную вариационную задачу ($n=3$), в которой начальная точка допустимой кривой может перемещаться по гладкой элементарной поверхности S_1, а конечная точка — по гладкой элементарной поверхности S_2. Для основной функции вида $f(x, \dot{x}) = \alpha(x)\sqrt{\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle}$ $[\alpha(x) \neq 0,\ x \in D_\alpha]$ докажите, что минимальные кривые (если они существуют) перпендикулярны обеим поверхностям.

2. Пусть T является частью области определения некоторого поля $M_{\{p\}}$ (ср. с п. 10.4), $Q = T \times R^1$, $f \in (R^3 \to R^1) \cap C_2(Q)$ — заданная функция, определяющая функцию наклона поля p [см. определение 7 в п. 10.4)]; определим функционал I (соответствующий задаче со свободной конечной точкой) следующим образом: $y \in D_I$, если $y \in D_1(D_y)$ и $(x, y(x), y'(x)) \in Q$ $(x \in [x_1, x_2] = D_y)$; если $y \in D_I$, то положим $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))dx$. Пусть, далее, g_1 и g_2 — две кривые, *трансверсальные к траекториям поля* $M_{\{p\}}$, а y и $\bar{y}$ — две такие траектории поля ($D_y \overset{\text{df}}{=} [x_1, x_2], D_{\bar{y}} \overset{\text{df}}{=} [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$), для которых $(x_1, y(x_1)), (\bar{x}_1, \bar{y}(\bar{x}_1)) \in \operatorname{graf} g_1$, $(x_2, y(x_2)), (\bar{x}_2, \bar{y}(\bar{x}_2)) \in$ $\in \operatorname{graf} g_2$. Докажите, что в этом случае $I[y] = I[\bar{y}]$.

Замечания: 1. Кривой, трансверсальной к траекториям поля, назовем любую непрерывно дифференцируемую функцию g из $R^1 \to R^1$, график которой в любой точке трансверсально пересекает траекторию поля, проходящую через данную точку.

2. Функционал I есть расширение любого определенного данными Q, f, $P_1 \in T$, $P_2 \in T$ функционала с закрепленными концами.

3. Для рассмотрения вариационных задач геометрического характера часто вводят следующую метрику: длину кривой $y \in D_I$ считают равной $I[y]$; при таком определении (непрерывно дифференцируемые) стационарные функции, связанные с f, являются геодезическими линиями; тогда утверждение задачи 2 означает, что кривые, трансверсальные к траекториям поля $M_{\{p\}}$ $(T \subset D_p)$, соеди-

няются траекториями одинаковой длины, а вариационная задача заключается в отыскании кривых минимальной длины.

Указание. Исследуйте функционал I со «свободным концом», у которого основная функция следующая: $f^*(x, y, y') = (x, y, p(x, y)) + (y' - p(x, y))f_{y'}(x, y, p(x, y'))$ [ср. с формулой (10.33)].

§ 16. ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

16.1. Простейшая задача изопериметрического типа

Простейшая изопериметрическая вариационная задача [ср. с п. 7.3, Д)] представляет собой исследование экстремального значения функционала следующего типа. *Пусть*:

а) I_1 и I_2 — *функционалы типа определенного в* п. 8.1 *со следующими определяющими данными*: Q, f_1, P_1, P_2 и Q, f_2, P_1, P_2;

б) l_2 — *заданное число.*

Предполагая, что $l_2 \in R_{I_2}$, *определим функционал* I *следующим образом*:

1_0. $D_I = \{y \in D_{I_1} \mid I_2[y] = l_2\}$.

2^0. *Каждой функции* $y \in D_I$ *поставим в соответствие число*

$$(16.1) \qquad I[y] \overset{\text{df}}{=} I_1[y] = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

Замечания: 1. Из определения D_I следует, что выполняется условие

$$(16.2) \qquad I_2[y] = \int_{x_1}^{x_2} f_2(x, y(x), y'(x))\, dx = l_2 \quad (y \in D_I).$$

2. Определяющие данные функционала I таковы: Q, f_1, f_2, l_2, P_1, P_2. Если поменять местами f_1 и f_2, т. е. если для некоторого $l_1 \in D_I$ рассмотреть функционал J, определенный данными Q, f_2, f_1, l_1, P_1, P_2 ($D_J \overset{\text{df}}{=} \{y \in D_{I_2} \mid I_1[y] = l_1\}$), то полученную вариационную задачу называют *взаимной* к исходной (связанной с функционалом I).

3. Локальный экстремум функционала I определяется так же, как и для простейшей вариационной задачи (ср. с п. 8.1), и называется *условным экстремумом* функционала I_1 при условии (16.2).

Теорема 1. *Пусть $f_1, f_2 \in C_1(Q)$ и предположим, что функционал I на функции $y \in D_I$ достигает слабого локального минимума. Тогда функционалы δI_{1y} и δI_{2y} линейно зависимы.*

Замечания: 1. Линейная зависимость первых вариаций δI_{1y} и δI_{2y} (в соответствии с обычным определением линейной зависимости) означает следующее: существуют такие действительные числа λ_1 и λ_2 $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0)$, что для всех $\eta \in D_{\delta I_1} = D_{\delta I_2}$ выполняется тождество

$$(16.3) \quad \lambda_1 \delta I_{1y}[\eta] + \lambda_2 \delta I_{2y}]\eta] = 0 \quad (\eta \in D_{\delta I_1} = D_{\delta I_2}).$$

2. Обозначим через I^* функционал, определенный данными Q, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, P_1, P_2 и принадлежащий к простейшему типу (см. п. 8.1). Очевидно, что $D_{\delta I^*} = D_{\delta I}$, и из линейности первых вариаций следует, что тождество (16.3) эквивалентно тождеству

$$(16.4) \qquad \delta I^*[\eta] = 0 \qquad (\eta \in D_{\delta I^*}).$$

3. Из утверждения 2 § 8 следует, что тождество (16.3) выполняется тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $c \in R^1$, для которой y есть решение и-д. Э—Л

$$(16.5) \qquad (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)_{y'} = \int_{x_1}^{x} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)_y \, dx = c.$$

4. На основе предыдущих замечаний можно сделать вывод, что функционалы δI_{1y} и δI_{2y} линейно зависимы тогда и только тогда, когда существуют такие $c_1, c_2 \in R^1$, что функции F_1 и F_2, определенные равенствами

$$F_i(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_{iy'}\left(x, y(x), y'(x)\right) - \int_{x_1}^{x} f_{iy}\left(t, y(t), y'(t)\right) dt - c_i$$

$$(i = 1, 2;\ x \in D_{y'} \cap \mathrm{pr}_1 D_{f_{1y'}} \cap \mathrm{pr}_1 D_{f_{2y'}},$$

линейно зависимы.

Доказательство теоремы 1. Достаточно ограничиться случаем, когда y не является стационарной функцией функционала I_2. Действительно, если y — стационарная функция функционала I_2, то δI_{2y} есть тождественный нуль, т. е. при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1 \neq 0)$ выполняется равенство $\lambda_1 \delta_I[\eta] + \lambda_2 \delta I_{2y}[\eta] - \delta I_{2y}[\eta] = 0$ $(\eta \in D_{\delta I_2})$. Итак, предположим, что y не является стационарной функцией функционала I_2. Пусть η_1 и η_2 — две пока произвольные фиксированные функции, удовлетворяющие условиям

(16.6) $\eta_i \in (R^1 \to R^1) \cap D_1 [x_1, x_2]; \quad \eta_i (x_1) = \eta_i (x_2) = 0$
$$(i = 1,\ 2).$$

Рассмотрим двупараметрическое семейство функций

$$\omega^* (x;\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2) \overset{\mathrm{df}}{=} y (x) + \varepsilon_1\ \eta_1 (x) + \varepsilon_2\ \eta_2 (x)$$
$$\big((x;\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2) \in [x_1\ x_2] \times R^2\big).$$

Из определения семейства функций ω^* следует, что если ε_1 и ε_2 — достаточно малые фиксированные числа, т. е. принадлежат некоторой достаточной малой окрестности нуля:

$$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) \in k_\delta\ (0,\ 0), \text{ то } \omega^*\ (x;\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2) \in D_l.$$

Исследуем теперь неявную функцию

(16.7) $F\ (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) \overset{\mathrm{df}}{=} I_2\ [\omega^*\ (x;\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2)] = l_2 \quad [(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) \in k_\delta\ (0,\ 0)].$

Нетрудно убедиться (ср. с доказательством утверждения 1 § 8) в том, что $F \in C_1\ (k_\delta\ (0,0))$. Так как $\omega^*\ (x;\ 0,\ 0) = y\ (x)\ \ (x \in [x_1,\ x_2])$, то $F\ (0,\ 0) = I_2\ [y] = l_2$. Для того чтобы можно было применить известную теорему о разрешимости неявной функции, найдем $F_{\varepsilon_2}\ (0,\ 0)$. Из определения первой вариации получаем

$$F_{\varepsilon_2}\ (0,\ 0) = \delta I_{2y}\ [\eta_2].$$

При этом мы учли, что $D_{\delta I_2}$ состоит из функций, удовлетворяющих условиям (16.6).

Функция y не является стационарной функцией функционала I_2, поэтому функцию η_2 можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

(16.8) $$F_{\varepsilon_2}\ (0,\ 0) = \delta I_{2y}\ [\eta_2] \neq 0;$$

в дальнейшем будем считать, что η_2 — некоторая фиксированная функция, удовлетворяющая условию (16.8).

Из (16.8) и перечисленных свойств функции F следует, что уравнение (16.7) для функции $\varepsilon_2 = \varepsilon_2\ (\varepsilon_1)$ при начальном условии $\varepsilon_2\ (0) = 0$ в классе непрерывно дифференцируемых функций локально однозначно разрешимо. При этом ясно, что $\varepsilon_2 \in (R^1 \to R^1) \cap C_1\ (k\ (0))$, где $k\ (0) \subset \mathrm{pr}\ k_\delta\ (0, 0)$.

Далее заметим, что равенство $\varepsilon_2'(0) = -F_{\varepsilon_1}(0,0)/F_{\varepsilon_2}(0,0)$ по определению первой вариации можно записать так

$$\varepsilon_2'(0) = -\frac{\delta I_{2y}[\eta_1]}{\delta I_{2y}[\eta_2]}. \tag{16.9}$$

Функция ε_2 выбрана так, что выполняется равенство $F(\varepsilon_1, \ \varepsilon_2(\varepsilon_1)) = l_2 \ [\varepsilon_1 \in k(0)]$, поэтому однопараметрическое семейство функций

$$\omega(x_1, \ \varepsilon_1) \overset{\mathrm{df}}{=} y(x) + \varepsilon_1\eta_1(x) + \varepsilon_2(\varepsilon_1)\,\eta_2(x) \tag{16.10}$$
$$((x_1\varepsilon_1) \in [x_1, \ x_2] \times k(0))$$

при любом фиксированном ε_1 удовлетворяет условию 1^0,б) определения I и принадлежит классу функций D_I ($\subset D_{I_1}$). В силу равенства $\varepsilon_2(0) = 0$ выполняется равенство $\omega(x, 0) = y(x)$ ($x \in [x_1, \ x_2]$). Из (16.10) и из непрерывности ε_2 следует, что для любой фиксированной окрестности первого порядка функции y при любом достаточно малом ε_1 функции $\omega(x, \ \varepsilon_1)$ принадлежат данной окрестности. Отсюда и из условия теоремы получаем, что функция $\varphi \in (R^1 \to R^1) \cap C_1(k(0))$, определенная равенством $\varphi(\varepsilon_1) \overset{\mathrm{df}}{=} I[\omega(x_1\varepsilon_1)]$ ($\varepsilon_1 \in k(0)$), в точке $\varepsilon_1 = 0$ достигает локального минимума и поэтому $\varphi'(0) = 0$. Из соотношений (16.9), (16.10) и из определения первой вариации следует, что

$$\varphi'(0) = \delta I_{1y}[\eta_1] + \varepsilon_2'(0)\,\delta I_{1y}[\eta_2] = \delta I_{1y}[\eta_1] - \tag{16.11}$$
$$-\frac{\delta I_{2y}[\eta_1]}{\delta I_{2y}[\eta_2]}\,\delta I_{1y}[\eta_2] = 0.$$

Введем обозначение

$$\lambda = -\frac{\delta I_{1y}[\eta_2]}{\delta I_{2y}[\eta_1]} \tag{16.12}$$

и рассмотрим функционал I^*, определенный данными Q, $f^* = f + \lambda g$, P_1, P_2 [и относящийся (см. п. 8.1) к простейшему типу]. Очевидно, что и $D_{\delta I^*}$ состоит из тех функций, которые удовлетворяют условию (16.6). Учитывая это, из (16.11) получаем

$$\delta I_y^*[\eta_1] = \delta I_{1y}[\eta_1] + \lambda\delta I_{2y}[\eta_1] = 0 \quad (\eta_1 \in D_{\delta I}).$$

Это тождество и означает, что функционалы δI_{1y} и δI_{2y} линейно зависимы. Теорема 1 доказана.

Замечания: 1. Число λ, определенное равенством (16.12), не зависит от выбора η_2: если $\overline{\eta}_2 \in D_{\delta I_2} \; (= D_{\delta I_1})$ — произвольная функция, для которой $\delta I_{2y}[\overline{\eta}_2] \neq 0$, то из (16.11) при $\eta_1 = \overline{\eta}_2$ следует, что

$$\frac{\delta I_{1y}[\overline{\eta}_2]}{\delta I_{2y}[\overline{\eta}_2]} = \frac{\delta I_{1y}[\eta_2]}{\delta I_{2y}[\eta_2]} \; (= -\lambda).$$

2. Для произвольных λ_1, λ_2 $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0)$ и $c \in R^1$ решения и-д. у. (16.5), удовлетворяющие граничным условиям $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, называют *стационарными функциями функционала* I. Обратим внимание на то, что это определение стационарных функций отличается от обычного и тем, что функция y может быть стационарной функцией функционала I и вместе с тем не принадлежать D_I. Целесообразность данного определения объясняется тем, что экстремальные функции функционала I находятся среди стационарных функций.

3. Рассмотрим теперь соответствующую взаимную задачу. Из симметрии и-д. у. (16.5) относительно f_1 и f_2 и из определения, данного в предыдущем замечании, следует, что *стационарные функции функционала* J, *связанного с взаимной задачей* (см. замечание 2 после определения функционала I), *и стационарные функции функционала* I *совпадают*. Этот факт часто называют *принципом взаимности*.

4. Достаточно найти решения и-д. у. (16.5) в тех случаях, когда числа λ_1 и λ_2, удовлетворяют следующим условиям:

α) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$;

β) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda \in R^1$.

В самом деле, так как умножение чисел λ_1 и λ_2 на одну и ту же отличную от нуля постоянную не приводит к новому решению уравнения (16.5), то для получения всех решений (16.5) $(\lambda_1^2 + \lambda^2 \neq 0)$ достаточно ограничиться значениями λ_1 и λ_2, указанными в α) и β).

5. Согласно замечаниям 1 и 4, заключение теоремы 1 можно сформулировать и так: либо y есть стационарная функция для основной функции f_2, либо существует однозначно определенное число $\lambda \in R^1$ такое, что y — стационарная функция для основной функции $f_1 + \lambda f_2$.

6. Теорема 1 аналогична известной теореме об условном экстремуме функций из $R^n \to R^1$. В обоих случаях приведенный способ называют методом *множителей Лагранжа*.

7. При практическом применении теоремы 1 необходимо среди стационарных функций функционала I найти функцию, удовлетворяющую условию (16.2). Стационарные функции зависят от параметров λ_1 и λ_2 и, как это отмечалось в замечании 4, среди возможных случаев анализа требует только случай β): соответствующее значение λ определяется из (16.2).

8. Результат, полученный в теореме 1, можно распространить на достаточно широкий класс изопериметрических задач. Можно исходить из более сложных функционалов (пространственного, многомерного и т. д.) и исследовать как параметрическую, так и непараметрическую задачи. Существует другая возможность для обобщения: рассмотреть задачу не с одним, а с произвольным числом изопериметрических дополнительных условий (см. задачу 1).

П р и м е р. Пусть $Q = R^3, f_1(x, y, y') = y, f_2(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$, $P_1 = (x_1, 0)$, $P_2 = (x_2, 0)$. Найдем стационарные функции, относящиеся к соответствующим изопериметрическим задачам (т.е. стационарные функции функционала I, определенного в начале п. 1, и функционала J взаимной задачи). В этом случае необходимо для произвольных λ_1, $_2 \in R^1$ $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0)$ решить соответствующее (16.5) и-д. у.
λЭ—Л

$$\lambda_2 \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \lambda_1 \int_{x_1}^{x} dt + c = \lambda_1 (x - x_1) + c, \tag{16.13}$$

образованное основной функцией $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Прежде всего заметим, что уравнение (16.13) при $\lambda_2 = 0$ не имеет решений, так как иначе оно принимает вид $0 = \lambda_1 (x - x_1) + c$, что противоречит условию $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$. И-д. у. (16.3), введя обозначение $\lambda_1/\lambda_2 = \nu$, можно записать так:

$$y'/\sqrt{1+y'^2} = \nu (x - x_1) + c/\lambda_2. \tag{16.14}$$

Любой функционал, образованный основной функцией $f_1 + \lambda f_2$ $(\lambda \neq 0)$, регулярен (ср. с задачей 1 п. 8.6), поэтому любое решение уравнения (16.14) два раза непрерывно дифференцируемо. Используя это, из (16.14) дифференцированием получаем, что любое решение (16.14) удовлетворяет д. у.

$$y''/(1 + y'^2)^{3/2} = \nu,$$

которое означает, что кривизна кривых, служащих решениями, постоянна: в случае $\nu = 0$ кривая, являющаяся решением, есть прямой отрезок, а в случае $\nu \neq 0$ — дуга окружности радиуса $1/|\nu|$. Из геометрической интерпретации следует, что у (16.13) существует решение, удовлетворяющее граничным условиям $y(x_1) = y(x_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $|\nu| < 2/(x_2 - x_1)$. Если $\nu = 0$, то функция, тождественно в $[x_1, x_2]$ равная нулю, является единственным решением, если $\nu \neq 0$, то существует ровно два решения: одно из них — функция y, определенная равенством

$$y(x) = -\sqrt{\lambda^2 - d^2} + \sqrt{\lambda^2 - (x - x_1 - d)^2},$$

где $\lambda = 1/\nu$ и $d = (x_2 - x_1)/2$, а другое — функция $-y$.

Замечание. Исследуем следующие две геометрические задачи.

а) Пусть даны две точки x_1, x_2 оси Ox $(x_1 < x_2)$ и число l_2 $(l_2 > x_2 - x_1)$. Среди кусочно-гладких кривых на плоскости, имеющих длину l_2 и соединяющих концевые точки отрезка $[x_1, x_2]$, найти ту, которая вместе с данным отрезком ограничивает максимальную площадь;

б) даны две точки x_1, x_2 оси Ox $(x_1 < x_2)$ и число l_1 $(l_1 > 0)$. Среди кусочно-гладких кривых на плоскости, соединяющих концевые точки отрезка $[x_1, x_2]$ и ограничивающих с ним область площади l_1, найти ту, длина которой минимальна.

Если в обоих случаях ограничиться кривыми на плоскости с уравнением $x = x$, $y = y(x)$ $(x \in [x_1, x_2])$, то в обозначениях рассмотренного выше примера задача а) заключается в решении изопериметрической задачи, определенной данными R^3, f_1, f_2, l_2, $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$; а задача б) — данными R^3, f_2, f_1, l_1, $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$; исследуемые задачи являются *взаимными*.

Если считать, что кривые расположены в верхней полуплоскости, то при условии $l_2 < d\pi$ и $l_1 < d^2\pi/2$ каждая из задач (как это следует из рассмотренного выше примера) имеет ровно одну удовлетворяющую изопериметрическому условию ($I_2[y] = l_2$ или $I_1[y] = l_1$) стационарную функцию.

16.2. Простейшая задача типа Лагранжа с неголономными условиями

Пусть:

а) $Q \subset R^5$ — *данная область* [точки Q обозначим следующим образом: $(x, y, y') \overset{\mathrm{df}}{=} (x, y_1, y_2, y_1', y_2')$]; $T = \mathrm{pr}_{123}\, Q$;

б) f, $g \in (R^5 \to R^1) \cap D^1(Q)$ — *данные функции*;

в) $(x_1, y_{11}, y_{12}) \in T$, $(x_2, y_{21}) \in \mathrm{pr}_{12} T$ — *две произвольно фиксированные точки, для которых* $x_1 < x_2$.

Определим теперь функционал I *следующим образом.*

1^0. *Некоторую функцию* $y = (y_1, y_2) \in R^1 \to R^2$ *назовем допустимой* (*обозначение*: $(y_1, y_2) \in D_I$), *если*:

$i)$ $(y_1, y_2) \in D_1 [x_1, x_2]$;

$ii)$ $y_1(x_1) = y_{11}$, $y_2(x_1) = y_{12}$; $y_1(x_2) = y_{21}$;

$iii)$ $(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)) \in Q \quad (x \in [x_1, x_2)]$;

$iv)$ (y_1, y_2) есть решение *д. у.*

$$g(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0^8. \tag{16.15}$$

2^0. *Предполагая, что* D_I *не пусто, каждой функции* $(y_1, y_2) \in D_I$ *поставим в соответствие действительное число*

$$I[(y_1, y_2)] \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{x_1}^{x_2} f\left(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)\right) dx.$$

Замечания: 1. Между функционалом I и функционалом, определенным в § 12 (в случае $n = 2$) имеются два отличия:

а) значение $y_2(x_2)$ не фиксировано и может быть равно любому числу, для которого $(x_2, y_2(x_2)) \in \mathrm{pr}_{13} T$;

б) функция (y_1, y_2) должна удовлетворять д. у. (16.15), которое называют *неголономным дополнительным условием* (*неголономной связью*).

2. Если при определении функционала I фиксировать и $y_2(x_2)$, то (даже в самых простых случаях) множество D_I было бы пустым. Пусть, например, $Q = R^5$; $f, x_1, x_2, y_{11}, y_{21}$ произвольны; $g(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = y_2' + y_1^2 + y_2^2$; $y_{12} = 0$, $y_{22} > 0$. Тогда, в силу того что для любого решения (y_1, y_2) дифференциального уравнения $y_2' = -(y_1^2 + y_2^2)$ функция y_2 монотонно убывает, выполняется неравенство $y_2(x_2) \leqq 0$, которое противоречит условию $y_2(x_2) = y_{22} > 0$; следовательно, в этом случае допустимых функций нет.

3. Локальный экстремум фукнционала I определяется так же, как и в случае пространственной проблемы (ср. с определением 3 § 12; $n = 2$), разумеется, с учетом отличия классов допустимых функций.

---

[8] Будем говорить, что функция $y = (y_1, y_2) \in (R^1 \to R^2) \cap D_1 [x_1, x_2]$ удовлетворяет д. у. (16.5), если:

1) $(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x \pm 0), y_2'(x \pm 0)) \in Q [x \in (x_1, x_2)]$;

2) $g(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x \pm 0), y_2'(x \pm 0)) = 0$
$$[x \in (x_1, x_2) \cap \mathrm{pr}_1 D_g].$$

Теорема 2. *Пусть $f, g \in C_1(Q)$; предположим, что функционал I на функции $(y_1, y_2) \in D_I$ достигает слабого локального минимума, и*

$$(16.16)\quad g_{y_2'}\left(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x \pm 0), y_2'(x \pm 0)\right) \neq 0$$

$$(x \in [x_1, x_2]).$$

Тогда существует такая функция $\lambda \in (R^1 \to R^1) \cap D[x_1, x_2]$, что (y_1, y_2) — стационарная функция, соответствующая основной функции $f + \lambda g$, и кроме этого выполняется равенство

$$(16.17)\qquad f_{y_2'}\left(x_2, y_1(x_2), y_2(x_2), y_1'(x_2), y_2'(x_2)\right) +$$
$$+ \lambda(x_2)\, g_{y_2'}\left(x_2, y_1(x_2), y_2(x_2), y_1'(x_2), y_2'(x_2)\right) = 0,$$

называемое условием трансверсальности.

Замечания: 1. То, что (y_1, y_2) — стационарная функция для основной функции $f + \lambda g$, означает следующее (ср. с теоремой 1 § 12 и с замечанием после нее): существуют такие $c_1, c_2 \in R^1$, что (y_1, y_2) является решением системы и-д. у. Э—Л

$$(16.18)\qquad \begin{cases} (f+\lambda g)_{y_1'} = \int\limits_{x_1}^{x} (f+\lambda g)_{y_1}\, dx + c_1, \\ (f+\lambda g)_{y_2'} = \int\limits_{x_1}^{x} (f+\lambda g)_{y_2}\, dx + c_2 \end{cases}$$

(записанной в координатной форме).

2. Метод нахождения экстремалей, указанный в теореме 2, называют также методом множителей Лагранжа.

3. Для определения трех неизвестных функций y_1, y_2, $\lambda \in R^1 \to R^1$ имеются три уравнения: д. у. (16.15) и два и-д. у., входящих в систему (16.18).

Доказательство теоремы 2. Проведем это доказательство в несколько шагов.

а) Пусть η — произвольная фиксированная функция, удовлетворяющая условиям

$$(16.19)\quad \eta \in (R^1 \to R^1) \cap D_1[x_1, x_2]; \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Рассмотрим д. у. первого порядка для функции y_2

$$(16.20)\quad G(x, \varepsilon, y_2, y_2') \overset{\mathrm{df}}{=} g\left(x, y_1(x) + \varepsilon\eta(x), y_2\, y_1'(x) +\right.$$
$$\left. + \varepsilon\eta'(x), y_2'\right) = 0,$$

зависящее от параметра ε. Можно убедиться в следующем: существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in k_{\varepsilon_0}(0)$ существует решение $\varphi(x, \varepsilon)$ уравнения (16.20) ($\varphi \in R^2 \to R^1$, $D_\varphi = [x_1, x_2] \times k_{\varepsilon_0}(0)$), удовлетворяющее следующим требованиям:

$$(16.21) \qquad \varphi, \varphi_\varepsilon \in C(D_\varphi); \; \varphi_{x\varepsilon} = \varphi_{\varepsilon x} \in D^1(D_\varphi),$$

$$(16.22) \qquad \varphi(x, 0) = y_2(x) \quad (x \in [x_1, x_2]),$$

$$(16.23) \qquad \varphi(x_1, \varepsilon) = y_{12} \quad \left(\varepsilon \in k_{\varepsilon_0}(0)\right).$$

Для доказательства этого утверждения упорядочим по возрастанию элементы множества $[x_1, x_2] \setminus (D_{y'_1} \cap D_{\eta'}) \subset R^1 : x_1 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = x_2$ (если исследуемое множество пусто, то $\xi_1 = \xi_n = x_2$).

Введем теперь для любого i ($i = 1, \ldots, n$) следующие обозначения:

$\overline{y}_j^i$ — сужение функции y_j, а $\overline{\eta}^i$ — сужение функции η на интервал $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ ($j = 1, 2$);

$\overline{\overline{y}}_j^i$ — некоторое непрерывно дифференцируемое расширение функции $\overline{y}_j^i$ (например, расширение, при котором график исходной функции продолжается по касательной), η^i — аналогичное расширение функции η^i на интервал $[\xi_{i-1} - \delta, \xi_i + \delta]$, где δ — произвольное фиксированное положительное число;

$$A_i \overset{\text{df}}{=} \{(x, 0, y_2, y'_2) \in R^4 \mid x \in [\xi_{i-1}, \xi_i], \; y_2 = y_2(x), \; y'_2 = y'_2(x)\} \quad B_i \overset{\text{df}}{=} \mathrm{pr}_{123} A_i;$$

$$G_i(x, \varepsilon, y_2, y'_2) \overset{\text{df}}{=} g\left(x, \overline{\overline{y}}_1^i(x) + \varepsilon\eta^i(x), y_2, \overline{\overline{y}}_2^{i\prime}(x) + \varepsilon\eta^{i\prime}(x), y'_2\right),$$

где D_{G_i} — такая окрестность достаточно малого радиуса δ_i ($\leqq \delta$) множества A_i, для которой имеет смысл правая часть в определении функции G_i. Из определения функции G_i следует, что G_i, $G_{i\varepsilon}$, $G_{iy'_2} \in C(k_{\delta_i}(A_i))$.

Начнем с исследования неявной функции

$$(16.24) \qquad G_1(x, \varepsilon, y_2, y'_2) = 0.$$

Из определения G_1 и A_1, а также из (16.15) и (16.16) следует, что на множестве A_1 функция G_1 тождественно равна нулю, а $G_{1y'_2}$ в нуль не обращается. Отсюда по известной теореме о неявной функции получаем, что в окрестности множества B_1 достаточно малого радиуса δ_1^* можно однозначно определить такую функцию $\psi_1 \in R^3 \to R^1$, для которой выполняется тождество

$$G_1(x, \varepsilon, y_2, \psi_1(x, \varepsilon, y_2)) = 0 \qquad [(x, \varepsilon, y_2) \in k_{\delta_1^*}(B_1)]$$

и, кроме этого,

$$(16.25) \qquad \psi_1, \; \psi_{1\varepsilon}, \; \psi_{1y_2} \in C\left(k_{\delta_1^*}(B_1)\right).$$

Рассмотрим теперь при достаточно малом ε задачу с начальным условием

$$(16.26)\qquad \varphi' = \psi_1(x, \varepsilon, \varphi),\ \varphi(\xi_0, \varepsilon) = y_{12}.$$

Функция в правой части дифференциального уравнения непрерывно диференцируема по параметру ε. Из определений множества A_1, функций ψ_1 и $\overline{y}_2^1$ следует, что функция $\overline{y}_2^1$ является решением задачи с начальным условием (16.26) при $\varepsilon = 0$. Область определения функции $\overline{y}_2^1$ есть промежуток $[\xi_0, \xi_1]$, поэтому, учитывая соотношения (16.25), из известной теоремы о разрешимости д. у., зависящего от параметра, получаем:

1) для любого достаточно малого фиксированного ε ($\varepsilon \in k_{\varepsilon_1}(0)$) задача с начальным условием (16.26) однозначно разрешима и область определения полного решения, которое обозначим через $\varphi_1(x, \varepsilon)$, содержит отрезок $[\xi_0, \xi_1]$;

2) $\varphi_1 \in C_1([\xi_0, \xi_1] \times k_{\varepsilon_1}(0))$, $\varphi_{1x\varepsilon} = \varphi_{1\varepsilon x} \in C[\xi_0, \xi_1] \times k_{\varepsilon_1}(0))$.

Из определения функции ψ_1 следует, что любое решение задачи (16.26) удовлетворяет равенству (16.24), если это равенство рассматривать как неявное д. у. первого порядка (зависящее от параметра ε). Задача с начальным условием (16.26) при любом фиксированном $\varepsilon \in k_{\varepsilon_1}(0)$ разрешима однозначно, поэтому $\varphi_1(x, 0) = y_2(x)$ ($x \in [\xi_0, \xi_1]$). Из начального условия, входящего в (16.26), следует, что $\varphi_1(x_1, \varepsilon) = y_{12}$ ($\varepsilon \in k_{\varepsilon_1}(0)$).

Итак, принимая во внимание все сказанное, можно заключить, что φ_1 *обладает всеми теми свойствами* (16.21)—(16.23), *которые мы потребовали от сужения* φ *на множество* $[\xi_0, \xi_1] \times k_{\varepsilon_0}(0)$.

Переходя (в случае $n > 1$) к следующему интервалу $[\xi_1, \xi_2]$, снова используем примененный выше метод, подробно изложенный для первого интервала, взяв вместо задачи (16.26) задачу

$$(16.27)\qquad \varphi' = \psi_2(x, \varepsilon, \varphi),\ \varphi(\xi_1, \varepsilon) = \varphi_1(\xi_1, \varepsilon).$$

В результате приходим к функции φ_2 ($D_{\varphi_2} = [\xi_1, \xi_2] \times k_{\varepsilon_2}(0)$, $\varepsilon_2 \geqq \varepsilon_1$). Это построение продолжим до тех пор, пока не пройдем через все интервалы $[\xi_{i-1}, \xi_i]$. Подобно случаю $i = 1$, *все функции* φ_i, *полученные таким образом, обладают всеми свойствами, которые мы потребовали от сужений* φ *на множества* $[\xi_{i-1}, \xi_i] \times k_{\varepsilon_i}(0)$ ($i = 1, \ldots, n$).

Пусть $\varepsilon = \varepsilon_n$; определим функцию $\varphi \in R^2 \to R^1$ на множестве $[x_1, x_2] \times k_{\varepsilon_0}(0)$ следующим образом: для каждого $x \in [x_1, x_2]$ возьмем интервал $[\xi_{i-1}, \xi_i]$, содержащий точку x [таких интервалов не более чем два (далее будет показано, что выбор одного из этих двух интервалов не имеет значения)], и положим $\varphi(x, \varepsilon) = \varphi_i(x, \varepsilon)$. Функции φ_i непрерывно дифференцируемы, поэтому из начальных условий в задачах (16.26), (16.27) и в остальных аналогичных задачах следует, что $\varphi, \varphi_\varepsilon \in C(D_\varphi)$; кроме того, в силу соотношений $\varphi_{ix\varepsilon} = \varphi_{i\varepsilon x} \in C(D_{\varphi_i})$ ($i = 1, \ldots, n$) справедливо включение $\varphi_{x\varepsilon} = \varphi_{\varepsilon x} \in D^1(D_\varphi)$. Следовательно, функция φ обладает всеми требуемыми свойствами (16.21)—(16.23).

б) Функция $\varphi(x, \varepsilon)$ при любом фиксированном $\varepsilon \in \in k_{\varepsilon_0}(0)$ удовлетворяет д. у. (16.20), т. е.

(16.28) $$g(x, y_1(x) + \varepsilon\eta(x), \varphi(x, \varepsilon), y_1'(x) + \varepsilon\eta'(x),$$
$$\varphi_x(x, \varepsilon)) = 0 \quad ((x, \varepsilon) \in [x_1, x_2] \times k_{\varepsilon_0}(0)).$$

Это тождество с учетом условий (16.5), (16.19) и (16.23) означает, что функция y, определенная на множестве $[x_1, x_2] \times \times k_{\varepsilon_0}(0)$ равенством

(16.29) $$y(x, \varepsilon) = (y_1(x, \varepsilon), y_2(x, \varepsilon)) = (y_1(x) + \varepsilon\eta(x),$$
$$\varphi(x, \varepsilon)),$$

при любом фиксированном ε принадлежит D_I. Из условия (16.22) следует, что $y(x, 0) = (y_1(x), y_2(x))$ $(x \in [x_1, x_2])$, т. е. *мы построили однопараметрическое семейство допустимых функций, включающее при* $\varepsilon = 0$ *функцию* (y_1, y_2), *доставляющую локальный минимум*. Из соотношений (16.21) и (16.22) следует также, что если фиксировать произвольную окрестность первого порядка функции (y_1, y_2), то функции $y(x, \varepsilon)$, определенные равенством (16.29), для любого достаточно малого ε принадлежат данной окрестности. Функция (y_1, y_2) доставляет слабый локальный минимум функционалу I, поэтому функция $\omega \in R^1 \to R^1$, определенная равенством $\omega(\varepsilon) \overset{\mathrm{df}}{=} I[y(x, \varepsilon)]$ $[\varepsilon \in k_{\varepsilon_0}(0)]$, в точке 0 достигает локального минимума. Далее, функция ω в точке 0 дифференцируема [ср. с доказательством равенства (8.7)], поэтому должно выполняться равенство $\omega'(0) = 0$.

в) Найдем $\omega'(0)$. Из определения функционала I и соотношений (16.21), (16.22) и (16.29) получаем следующее равенство:

(16.30) $$\omega'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \{\bar{f}_{y_1}(x)\,\eta(x) + \bar{f}_{y_2}(x)\,\varphi_\varepsilon(x, 0) +$$
$$+ \bar{f}_{y_1'}(x)\,\eta'(x) + \bar{f}_{y_2'}(x)\,\varphi_{x\varepsilon}(x, 0)\}\,dx = 0,$$

где $\bar{f}_{y_1}(x), \ldots,$ — значения частных производных в точке $(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x))$ (черта и в дальнейшем используется в аналогичном смысле).

Продифференцируем обе части равенства (16.28) по ε. Положив $\varepsilon = 0$, получим, что всюду в интервале $[x_1, x_2]$

(за исключением, быть может, конечного числа точек) выполняется тождество

(16.31)

$$\bar g_{y_1}(x)\,\eta(x)+\bar g_{y_2}(x)\,\varphi_\varepsilon(x,0)+\bar g_{y_1'}(x)\eta'(x)+g_{y_2'}\,\varphi_{x\varepsilon}(x,0)=0.$$

Умножим обе части равенства (16.31) на какую-нибудь (пока произвольную) функцию, а затем проинтегрируем его от x_1 до x_2. Полученный интеграл, равный нулю, прибавим к интегралу в равенстве (16.30). После перегруппировки равенство принимает следующий вид:

$$\int_{x_1}^{x^2}\left\{\left(\bar f_{y_1}(x)+\lambda(x)\,\bar g_{y_1}(x)\right)\eta(x)+\left(\bar f_{y_1'}(x)+\lambda(x)\,\bar g_{y_1'}(x)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\,\eta'(x)\right\}dx+\int_{x_1}^{x^2}\left\{\left(\bar f_{y_2}(x)+\lambda(x)\,\bar g_{y_2}(x)\,\varphi_\varepsilon(x,0)+\right.\right.$$
$$\left.+\left(\bar f_{y_2'}(x)+\lambda(x)\,\bar g_{y_2'}(x)\,\varphi_{x\varepsilon}(x,0)\right\}dx=0.$$

В каждом из двух интегралов первый член проинтегрируем по частям. Тогда, учитывая (16.19) и равенство $\varphi_\varepsilon(x_1, 0)=0$, вытекающее из (16.23), получаем

(16.32)

$$\int_{x_1}^{x^2}\left\{-\int_{x_1}^{x}\left(\bar f_{y_1}(t)+\lambda(t)\,\bar g_{y_1}(t)\right)dt+\bar f_{y_1'}(x)+\right.$$
$$\left.+\lambda(x)\,g_{y_1'}(x)\right\}\eta'(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}\left\{-\int_{x_1}^{x}\left(\bar f_{y_2}(t)+\lambda(t)\,\bar g_{y_2}(t)\right)dt-\right.$$
$$\left.-c+\bar f_{y_2'}(x)+\lambda(x)\,\bar g_{y_2'}(x)\right\}\varphi_{x\varepsilon}(x,0)\,dx+$$
$$+\left\{\int_{x_1}^{x_2}\left(\bar f_{y_2}(x)+\lambda(x)\,\bar g_{y_2}(x)\right)dx+c\right\}\varphi_\varepsilon(x_2,0)=0,$$

где $c\in R^1$ — произвольная постоянная.

г) Рассмотрим задачу с начальным условием для неизвестной функции v:

(16.33)

$$v'=\frac{\bar g_{y_2}(x)}{\bar g_{y_2'}(x)}\,v+\bar f_{y_2}(x)-\frac{\bar f_{y_2'}(x)}{\bar g_{y_2'}(x)}\,\bar g_{y_2}(x),\quad v(x_2)=0.$$

Коэффициенты линейного д. у. (16.33) кусочно-непрерывны на интервале $[x_1, x_2]$. Отсюда следует, что задача (16.33) однозначно разрешима и для полного решения, обозначенного через v, справедливо включение $v \in D_1 [x_1, x_2]$.

Определим теперь функцию $\lambda \in (R^1 \to R^1) \cap D [x_1, x_2]$ так, чтобы выполнялось тождество [это можно сделать в силу условия (16.16)]

$$(16.34) \qquad v(x) = \bar{f}_{y_2'}(x) + \lambda(x)\, \bar{g}_{y_2'}(x) \quad (x \in D_v);$$

далее под λ всегда будем понимать определенную таким образом функцию. Из тождества (16.34) и из уравнния (16.33) после элементарных вычислений получаем, что всюду в $[x_1, x_2]$, кроме не более чем конечного числа точек, выполняется равенство

$$(16.35)\ \bar{f}_{y_2'}(x) + \lambda(x)\, \bar{g}_{y_2'}(x) = \int_{x_1}^{x} \left(\bar{f}_{y_2}(t) + \lambda(t)\, \bar{g}_{y_2}(t)\right) dt + c_2,$$

где $c_2 = v(x_1)$. Из этого равенства, из определения λ и из начального условия $v(x_2) = 0$ следует, что

$$(16.36) \qquad \bar{f}_{y_2'}(x_2) + \lambda(x_2)\, \bar{g}_{y_2'}(x) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\bar{f}_{y_2}(x) + \right.$$
$$\left. + \lambda(x)\, \bar{g}_{y_2}(x)\right) dx + c_2 = 0.$$

Подставим теперь определенную выше функцию λ в равенство (16.32) и положим в этом равенстве $c = c_2$. Из тождества (16.35) и из равенства (16.34) следует, что в этом случае последние два члена в (16.32) обратятся в нуль, т. е. равенство (16.32) принимает вид

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ -\int_{x_1}^{x} (f_{y_1}(t) + \lambda(t)\, \bar{g}_{y_1}(t)\, dt + \bar{f}_{y_1'}(x) + \right.$$
$$\left. + \lambda(x)\, \bar{g}_{y_1'}(x) \right\} \eta'(x)\, dx = 0.$$

Функция, заключенная в фигурные скобки, очевидно, принадлежит классу $D [x_1, x_2]$, а так как η — произвольная функция, удовлетворяющая условию (16.19), то можно применить лемму Дюбуа — Реймона (лемма 1 § 8). По этой лемме существует такая постоянная $c \in R^1$, что всюду в $[x_1, x_2]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, выполняется тождество

$$(16.37)\qquad f_{y_1'}(x)+\lambda\bar{g}_{y_1'}(x)=\int_{x_1}^{x}\{\bar{f}_{y_1}(t)+\lambda(t)\,\bar{g}_{y_1}(t)\}\,dt+c_1.$$

Выполнение соотношений (16.35)—(16.37) означает, что теорема 2 доказана.

16.3. Замечания к вариационным задачам на условный экстремум

1. Задача, рассмотренная в предыдущем пункте, относится к простейшему типу задачи Лагранжа [ср. с п. 7.3, Е)]: область определения функционала образована функциями из $R^1 \to R^2$, которые удовлетворяют дополнительному условию в виде д. у. (16.5). Важным вопросом, требующим дальнейшего разъяснения, является выбор граничного условия *ii*): этим условием у допустимой функции значения первой компоненты фиксировались в обеих концевых точках, а значения второй компоненты — только в одной. С определенной точки зрения такое условие является естественным: если выбрать функцию y_1, то условие (16.15) можно рассматривать как д. у. первого порядка, которому должна удовлетворять функция y_2, а к. д. у. первого порядка можно, вообще говоря, присоединить только одно начальное условие, например в точке x_1. Это же замечание относится к семейству функций $\varphi(x, \varepsilon)$, полученному при доказательстве теоремы 2: значения $\varphi(x_1, \varepsilon)$ для любых возможных значений ε одни и те же, в то время как значения $\varphi(x_2, \varepsilon)$, вообще говоря, различны. Если бы обе граничные точки были полностью фиксированы, т. е. если задавалось бы и значение $y_2(x_2)$, то даже в предположении, что класс допустимых функций не пуст (сравните с замечанием 2 в начале предыдущего пункта), метод, использованный при доказательстве теоремы 2, очень простой и естественный, не был бы применим [из-за отмеченного свойства $\varphi(x_2, \varepsilon)$].

2. Тем не менее многие важные задачи приводят к случаю полностью фиксированных концевых точек. Обозначим через J функционал, определенный в § 11 в случае $n = 2$. Значения функционала J определяются равенством

$$J\,[y]=\int_{x_1}^{x_2} f\left(x,\, y(x),\, y'(x),\, y''(x)\right)dx$$

[см. (11.1)], а функции $y \in D_J$ удовлетворяют граничным условиям $y(x_1) = y_1^0$, $y'(x_1) = y_1^1$, $y(x_2) = y_2^0$, $y'(x_2) = y_2^1$.

Пусть $y \in D_J$; введем следующие обозначения: $y = y_1$, $y' = y_2$. Тогда функции y_1 и y_2 удовлетворяют д. у.

$$y_1' - y_2 = 0 \tag{16.38}$$

с граничными условиями

$$y_1(x_1) = y_1^0,\ y_2(x_1) = y_1^1,\ y_1(x_2) = y_2^0,\ y_2(x_2) = y_2^1, \tag{16.39}$$

а значение функционала $J[y]$ можно записать следующим образом:

$$I[(y_1, y_2)] \overset{\text{df}}{=} J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1(x), y_2(x), y_2'(x))\, dx.$$

Таким образом, исследуемая вариационная задача второго порядка эквивалентна одной задаче Лагранжа: функционал I, фигурирующий в ней, представляет собой сужение функционала того же типа, что и определенный в предыдущем пункте, для которого значения любой допустимой функции фиксированы как в x_1, так и в x_2 [см. (16.39)]; дополнительное условие выражено д. у. (16.38).

Таким образом, рассматриваемый функционал I является примером задачи Лагранжа с полностью закрепленными граничными точками, в которой множество D_I не пусто, причем, как это было показано в § 11, можно легко построить однопараметрическое семейство допустимых функций, содержащее мнимальную функцию.

3. Нетрудно убедиться в том, что задаче Лагранжа подобного типа эквивалентна и изопериметрическая задача, исследованная в § 18.

Действительно, пусть I — функционал, определенный в 16.1; для любой функции $y \in D_I$ введем обозначения $y_1 = y$ и

$$y_2(x) \overset{\text{df}}{=} \int_{x_1}^{x} f_2(t, y(t), y'(t))\, dt \qquad (x \in [x_1, x_2]).$$

Тогда, очевидно, функция (y_1, y_2) удовлетворяет д. у.

$$y_2' - f_2(x, y_1, y_1') = 0 \tag{16.40}$$

с граничными условиями $y_2(x_1) = 0$, $y_2(x_2) = l_2$. Следовательно, проблема минимизации функционала I эквивалентна одной задаче Лагранжа с полностью фиксированными граничными точками значения соответствующего функционала, обозначенного через I^*, определяются равенством

$$I^*[(y_1, y_2)] \stackrel{\mathrm{df}}{=} I[y[= \int_{x_1}^{x_2} f_1(x, y_1(x), y_1'(x))\, dx;$$

дополнительное условие выражено д. у. (16.40), а граничные условия имеют следующий вид: $y_1(x_1) = y_1$, $y_2(x_1) = 0$, $y_1(x_2) = y_2$, $y_2(x_2) = l_2$.

4. Методом, отмеченным в замечании 2, *любая задача более высокого порядка приводится к задаче Лагранжа.* Этот метод, используемый также в теории д. у., заключается в том, что входящие в данные задачи производные рассматривают как новые неизвестные функции. Д. у. ($y_1' - y_2 = 0$, $y_2^1 - y_3 = 0, \ldots$), служащие определением этих новых функций, являются соответствующими (неголономными) дополнительными условиями.

5. Исходя из предыдущих замечаний, можно заключить, что *любая одномерная вариационная задача, в которой имеются производные высокого порядка, дополнительные условия в форме дифференциальных уравнений и изопериметрические дополнительные условия, сводится к задаче Лагранжа, в которой есть только производные первого порядка и дополнительные условия в форме дифференциальных уравнений.* Это в одинаковой мере относится как к параметрическим, так и к непараметрическим задачам.

6. Объем этой книги не позволяет в дополнение к рассмотренным задачам Лагранжа, исследованным при достаточно общих предположениях, изучить и другие. Ограничимся ссылкой на соответствующую литературу (см. прежде всего [8 и 18]) и следующим общим замечанием о характере простейшего необходимого условия: для задач Лагранжа справедливы утверждения, аналогичные методу множителей Лагранжа и условию трансверсальности из теоремы 2[9].

7. В заключение отметим выдающийся результат современного анализа, известный как принцип максимума Понтрягина. Этот принцип дает возможность рассматривать задачи Лагранжа и в тех случаях, когда классические методы не применимы. До сих пор мы предполагали, как это обычно делается при любом классическом вариационном ис-

---

[9] Обратим внимание на то, что в литературе задачу Лагранжа часто называют задачей Больца или задачей Майера: по существу они являются эквивалентными переформулировками задачи Лагранжа (см. задачу 9).

следовании, что минимум достигает во внутренней точке области определения функционала. Для принципа максимума Понтрягина это условие (на практике часто не выполняющееся) не является необходимым. По своей идее данный принцип напоминает, как это отмечалось, принцип минимума, рассмотренный в п. 10.2, поэтому из него (по крайней мере для случая, когда экстремум достигается во внутренней точке) выводятся результаты, аналогичные с. и-д. у. Э—Л, условиям Лежандра и Вейерштрасса для задачи Лагранжа (см. [36]).

Задачи: 1. Пусть $I, \ldots, I_k$ $(k \geqq 2)$ — функционалы типа определенного в § 12 со следующими определяющими данными: Q, f_i, P_1, P_2 $(i = 1, \ldots, k)$. Выберем из чисел $1, \ldots, k$ произвольный номер j и зададим $k - 1$ действительных чисел l_i $(i = 1, \ldots, k;$ $i \neq j)$. Определим теперь следующую изопериметрическую задачу: пусть

$$D_I = \{y \in D_{I_j} \mid I_i[y] = l_i\,(i = 1, \ldots k;\ i \neq j)\},\ \text{и если}$$

$$y \in D_I,\ \text{то}\ I[y] = I_j[y].$$

Докажите следующее утверждение.

Предположим, что $f_i \in C_1(Q)$ $(i = 1, \ldots, k)$; пусть функция y доставляет слабый локальный минимум функционалу I. Тогда существуют такие $c_i \in R^n$ $(i = 1, \ldots, k)$, что функции F_i $(\in (R^1 \to R^n) \cap D\,[x_1, x_2];\ i = 1, \ldots, k)$, определенные равенством

$$F_i(x) = f_{iy'}(x, y(x), y'(x)) - \int_{x_1}^{x} f_{iy}(t, y(t), y'(t))\,dt - c_i$$

$$(i = 1, \ldots, k),$$

линейно зависимы.

Замечание. Сформулированное утверждение, очевидно, есть обобщение теоремы 1.

Указания: 1) Пусть $y(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \int_{x_1}^{x} F_i(t)\,dt\ [(x, \varepsilon) = (x, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in [x_1, x_2] \in R^k]$, причем постоянные c_i в определении F_i, выбраны так, что $\int_{x_1}^{x_2} F_i(x)\,dx = 0\,(i = 1, \ldots, k)$; далее пусть $\varphi_i(\varepsilon) = I_i[y(x, \varepsilon)]$ $(\varepsilon \in R^k, i = 1, \ldots, k)$. 2) Покажите, что функция φ_j $(\in R^k \to R^1)$ при дополнительных условиях $\varphi_i(\varepsilon) = l_i$ $(i = 1, \ldots, k;\ i \neq j)$ в точке $\varepsilon = 0$ $(\in R^n)$ достигает локального минимума, откуда, применяя метод множителей Лагранжа к функциям из $R^k \to R^1$, выведите, что $\det\,(\varphi_{\alpha\varepsilon_\beta}(0))_{\alpha,\beta=1}^{k} = 0$. 3) Покажите, что определитель Грама системы функции F_i

(обращение которого в нуль есть необходимое и достаточное условие линейной зависимости функций F_i) совпадает с $\det(\varphi_{\alpha,\,\varepsilon_\beta}(0))^k_{\alpha,\,\beta=1}$.

2. Сформулируйте и докажите соответствующую теорему 1 и изучите задачу 1 в случае параметрической проблемы.

3. Пусть I_1 и I_2 — функционалы, определенные в параметрической задаче (§ 14) при $n = 2$ следующими определяющими данными: $Q = R^4 \setminus \{0 \in R^4\}$, $f_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}y - x\dot{y})$, $f_2 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, точки P_1 и P_2 — общие. Найдите два раза непрерывно дифференцируемые стационарные кривые изопериметрических задач, определенных с помощью этих функционалов.

Замечание. Геометрический смысл I_1 и I_2: площадь области (со знаком «+», если она расположена в верхней полуплоскости, и со знаком «—», если в нижней), ограниченной допустимой кривой и отрезком $\overline{P_1, P_2}$, и длина дуги допустимой кривой (ср. с примером п. 16.1).

Указание. Решите задачу 2 и исследуйте кривизну стационарных функций.

4. Определите положение равновесия однородной цепи (тяжелой, упругой, нерастяжимой нити), закрепленной в обоих концах.

Указания: 1) Примените принцип Гамильтона: в положении равновесия потенциальная энергия нити минимальна. 2) В случае параметрической постановки первую координатную функцию выберите в качестве многочлена первого порядка от параметра.

5. Пусть $Q \subset R^5$ (Q—область), $f \in (R^5 \to R^1) \cap C_1(Q)$,

$$g \in (R^3 \to R^1) \cap C_1(\mathrm{pr}_{123}Q);\ P_1 = (x_1, y_{11}),\ P_2 = (x_2, y_{21}) \in \mathrm{pr}_{12}Q = (x_1 < x_2);$$

определим функционал I следующим образом:

1°. $(y_1, y_2) \in D_I$, если:

i) $(y_1, y_2) \in (R^1 \to R^2)) \cap C_1[x_1, x_2]$,

ii) $y_1(x_1) = y_{11}$, $y_1(x_2) = y_{21}$,

iii) $(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)) \in Q\ (x \in [x_1, x_2])$;

iv) $g(x, y_1(x), y_2(x)) = 0 \quad (x \in [x_1, x_2])$.

2°. Предполагая, что множество D_I не пусто, для любого $(y_1, y_2) \in D_I$ положим

$$I[(y_1, y_2)] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x))\,dx.$$

Докажите следующее утверждение.

Если функционал I на функции (y_1, y_2) достигает слабого локального минимума и $g_{y_2}(x, y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ $x \in [x_1, x_2]$, то существует такая функция $\lambda \in (R^1 \to R^1) \cap C[x_1, x_2]$, что (y_1, y_2) удовлетворяет с. у. Э—Л

$$f_{y_i} + \lambda g_{y_i} - \frac{d}{dx} f_{y_i'} = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Замечание. Условие iv) называют голономным дополнительным условием (голономной связью).

Указание. Для получения однопараметрического семейства (с обычными свойствами) допустимых функций разрешите относительно y_2 уравнение для неявной функции $g(x, y_1(x) + \varepsilon\eta(x), y_2) = 0$, где η — произвольная фиксированная функция, удовлетворяющая условиям $\eta \in (R^1 \to R^1) \cap C_1[x_1, x_2]$, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

6. После решения предыдущей задачи охарактеризуйте два раза непрерывно дифференцируемые геодезические линии поверхности $\varphi(x, y_1, y_2) = 0$ $[\varphi \in C_2(D_\varphi)]$.

Указание. Ограничьтесь кривыми вида $x = x$, $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ $(x \in [x_1, x_2])$.

7. Обобщите задачу, изложенную в п. 5, на случай произвольного числа неизвестных функций.

8. Какой задаче Лагранжа (содержащей только производные первого порядка и дополнительные условия в виде д. у.) эквивалентна следующая задача:

$$I[(y_1, y_2)] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'')\,dx \to \min;$$

$$y_1(x_1),\ y_1(x_2),\ y_2(x_1),\ y_2(x_2) \text{—заданы;}$$

$$g(x, y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', y_2'') = 0;$$

$$J[(y_1, y_2)] = \int_{x_1}^{x_2} h(x, y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', y_2'')\,dx = l \text{ (постоянная).}$$

Замечание. Для того чтобы избежать длинной формулировки, мы указали только наиболее существенные детали определения I.

Указание. См. замечание 5 п. 16.3.

9. Пусть $f, g \in (R^5 \to R^1) \cap D^1(Q)$, где Q — данная область; пусть, далее, $(x_1, y_{11}, y_{12}) \in \mathrm{pr}_{123}Q$, $(x_2, y_{21}) \in \mathrm{pr}_{12}Q$ $(x_1 < x_2)$; рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $g(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0$, $y_3' - f(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0$ относительно вектор-функции $(y_1, y_2, y_3) \in (R^1 \to R^3)$ с граничными условиями $y_1(x_1) = y_{11}$, $y_2(x_1) = y_{12}$, $y_3(x_1) = 0$; $y_1(x_2) = y_{21}$. Рассмотрите следующую задачу, называемую задачей Майера: *предполагая, что приведенная выше краевая задача разрешима, определите решение, для которого значение $y_3(x_2)$ минимально.*

Докажите, что *сформулированная задача эквивалентна вариационной задаче Лагранжа, сформулированной в* п. 16.2.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В дальнейшем будут рассмотрены четыре проблемы, частично уже затронутые ранее (см. п. 7.3). Эти проблемы с точки зрения как практики, так и теории имеют важное значение; причина, по которой изложение трех последних параграфов является сжатым, заключается в том, что эти проблемы и методы их решения образуют важную часть других разделов математического анализа (дифференциальных уравнений, функционального анализа, численного анализа, дифференциальной геометрии) и подробно излагаются в соответствующих курсах.

§ 17. ИНВАРИАНТНОСТЬ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ И СТАЦИОНАРНЫХ ФУНКЦИЙ

А) Постановка проблемы. Ограничимся простейшим случаем: рассмотрим функционал, относящийся к вариационной задаче (параметрической или непараметрической) на плоскости, и введем новые координаты (например, «повернем» плоскость или от прямоугольных координат перейдем к полярным и т. д.), иначе говоря, применим некоторое преобразование $F \in R^2 \to R^2$. Очевидно, что если F имеет «хорошие свойства», то преобразование F переводит кусочно-гладкую кривую в кусочно-гладкую кривую: при этом под преобразованной кривой $\gamma \in R^1 \to R^2$ понимается кривая $F \circ \gamma \in R^1 \to R^2$. Однако для функций аналогичное утверждение не верно: если, например, повернуть систему координат вокруг начала на достаточно большой угол, то график функции y из $R^1 \to R^1$ перейдет в множество, которое, вообще говоря, не будет уже графиком никакой функции из $R^1 \to R^1$. Исследуя непараметрическую задачу, мы предположим, что F допустимую функцию переведет в функцию, и (при подходящих условиях) покажем, что для преобразованных функционалов (т. е. для тех, которые на преобразованной функции принимают то же самое значение, что и данный функционал на исходной) экстремальные и стационарные функции получаются преобразованием экстремальных и стационарных функций данного функционала. Заранее подчеркнем локальный характер этих исследований.

Б) П р е о б р а з о в а н и е ф у н к ц и й и ф у н к ц и о н а л о в. О п р е д е л е н и е 1. *Пусть* $F \in R^2 \to R^2$ *— данное преобразование, а* $\omega \in R^1 \to R^1$ *— такая функция, для которой* $\operatorname{graf} \omega \subset D_F$. *Будем говорить, что* F *переводит* ω *в функцию, если существует такая функция* $\varphi \in R^1 \to R^1$, *для которой*

$$F(\operatorname{graf} \omega) = \operatorname{graf} \varphi.$$

В этом случае φ *назовем образом функции* ω (*обозначение*: $\omega \xrightarrow{F} \varphi$).

О п р е д е л е н и е 2. *Пусть* J *и* I *— функционалы* (*определенные в* п. 8.1), ω_0 *— некоторая допустимая функция* J, *а* $F \in R^2 \to R^2$ *— данное преобразование. Будем говорить, что* F *локально преобразует функционал* J *в функционал* I (*относительно* ω_0), *если*:

α) *существует такая окрестность* $K^1(\omega_0)$, *что* F *любую функцию* $\omega \in K^1(\omega_0) \cap D_J$ *переводит в функцию*;

β) *из условий* $\omega \in K^1(\omega_0) \cap D_J$ *и* $\omega \xrightarrow{F} \varphi$ *следует, что* $\varphi \in D_I$ *и* $I[\varphi] = J[\omega]$. Для краткости будем использовать символическую запись

$$J \xrightarrow{F} I \, (\omega_0 \xrightarrow{F} \varphi_0).$$

О п р е д е л е н и е 3. *Пусть* J *и* I *— функционалы* (*определенные в* п. 8.1), $F \in R^2 \to R^2$, *а* $\omega_0 \in D_J$ *и* $\varphi_0 \in D_I$ *— такие функции, для которых* $\omega_0 \xrightarrow{F} \varphi_0$; *предположим, что* F *осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами* $H \subset D_F$ *и* $G \subset R_F$, *где* $\operatorname{graf} \omega_0 \subset \operatorname{int} H$, $\operatorname{graf} \varphi_0 \subset \operatorname{int} G$. *Если одновременно выполняются соотношения* $I \xrightarrow{F} J \, (\omega_0 \xrightarrow{F} \varphi_0)$ *и* $J \xrightarrow{F^{-1}} I \, (\varphi_0 \xrightarrow{F^{-1}} \omega_0)$, *то будем говорить, что* F *локально преобразует* J *и* I *друг в друга* (*относительно пары функций* ω_0, φ_0). *Для краткости далее используется символическая запись*

$$J \overset{F}{\rightleftarrows} I \, (\omega_0 \overset{F}{\rightleftarrows} \varphi_0).$$

В) Л е м м ы. В дальнейшем часто будет использоваться координатное представление какого-либо преобразования $F \in R^2 \to R^2$; обозначим точки D_F через (u, v), точки R_F — через (x, y), а связь между преобразованными точками зададим системой уравнений

$$x = \lambda(u, v), \quad (17.1_1)$$
$$y = \nu(u, v) \quad (17.2)$$
$$(\lambda, \nu \in R^2 \to R^1; \ D_\lambda = D_\nu = D_F).$$

Основное значение имеет следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть отображение* $F \in (R^2 \to R^2) \cap C_1(D_F)$ *взаимно однозначное и пусть для графиков функций* $\omega_0 \in \in (R^1 \to R^1) \cap C_1[u_1, u_2]$ *и* $\varphi_0 \in (R^1 \to R^1) \cap C_1[x_1, x_2]$ *выполняются включения*

$$\operatorname{graf}\omega_0 \subset \operatorname{int} D_F, \ \operatorname{graf}\varphi_0 \subset \operatorname{int} R_F; \ \omega_0 \xrightarrow{F} \varphi_0.$$

Пусть, далее,

$$\left.\frac{\partial(\lambda, \nu)}{\partial(u, v)}\right|_{(u, v) \in \operatorname{graf}\omega_0} \neq 0. \tag{17.2}$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\delta > 0$, *что если* $\omega \in K_\delta^1(\omega_0) \cap C_1[u_1, u_2]$, $\omega(u_1) = \omega_0(u_1)$ *и* $\omega(u_2) = \omega_0(u_2)$, *то* $\omega \xrightarrow{F} \varphi$ *и* $\varphi \in K_\varepsilon^1(\varphi_0) \cap C_1[x_1, x_2]$.

Замечание. Отображение F — взаимно однозначное, поэтому для F^{-1} также выполняется неравенство, аналогичное (17.2), и, следовательно, функции φ_0 и ω_0 можно поменять ролями.

Доказательство леммы 1 проведем в несколько шагов.

а) Определитель $\dfrac{\partial(\lambda, \nu)}{\partial(u, v)}$ $(\in R^2 \to R^1)$ является непрерывной функцией, поэтому согласно (17.2) существует такая окрестность $k(\operatorname{graf}\omega_0) \subset D_F$, что

$$\left.\frac{\partial(\lambda, \nu)}{\partial(u, v)}\right|_{(u, v) \in k(\operatorname{graf}\omega_0)} \neq 0. \tag{17.3}$$

Пусть $\omega \in C_1[u_1, u_2]$ — пока произвольная функция, для которой $\operatorname{graf}\omega \subset k(\operatorname{graf}\omega_0)$; введем функции x_0, y_0, λ, $y \in C_1[u_1, u_2]$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&(17.4_1) && x_0(u) = \lambda(u, \omega_0(u)),\\
&(17.4_2) && y_0(u) = \nu(u, \omega_0(u)),\\
&(17.5_1) && x(u) = \lambda(u, \omega(u)),\\
&(17.5_2) && y(u) = \nu(u, \omega(u)).
\end{aligned}\right\} \quad (u \in [u_1, u_2]).$$

Прежде всего покажем следующее: *для того чтобы преобразование F перевело функцию ω в функцию, необходимо и достаточно, чтобы*

$$x'(u) \neq 0 \quad (u \in [u_1, u_2]). \tag{17.6}$$

Необходимость условия (17.6) докажем, рассуждая от противного. Предположим, что F переводит ω в функцию: $\omega \xrightarrow{F} \varphi$, и пусть в некоторой точке $u^* \in [u_1, u_2]$ выполняется равенство $x'(u^*) = 0$. Тогда из (17.5) получаем равенство

(17.7) $\lambda_u(u^*, \omega(u^*)) + \lambda_v(u^*, \omega(u^*))\,\omega'(u^*) = 0.$

Найдем теперь $y'(u^*)$. По определению функции φ имеет место равенство $y = \varphi \circ x$, поэтому $y'(u^*) = \varphi'(x(u^*)) \times \times x'(u^*) = 0$ и из (17.5$_2$) получаем

$$(17.8) \qquad \nu_u(u^*, \omega(u^*)) + \nu_v(u^*, \omega(u^*))\,\omega'(u^*) = 0.$$

Определитель однородной линейной системы уравнений, состоящей из уравнений (17.7) и (17.8), равен $\frac{\partial(\lambda, \nu)}{\partial(u, v)}$ в точке $(u^*, \omega(u^*))$. Этот определитель в силу (17.3) не равен нулю, что противоречит тому, что у данной системы уравнений имеется нетривиальное решение $[1, \omega'(u^*)]$. Необходимость условия (17.6) доказана.

Докажем *достаточность* условия (17.6). Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$, $(x, y) \in F$ (graf ω) — две различные точки. Тогда, так как по условию (17.6) функция x строго монотонна, $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$. А это и означает, что существует такая функция $\varphi \in R^1 \to \to R^1$, для которой graf $\varphi = F$ (graf ω). Достаточность условия (17.6) доказана.

Из условий, наложенных на функцию F, следует, что $\varphi \in C_1[x_1, x_2]$. *Так как* $\omega_0 \xrightarrow{F} \varphi_0$, *то условие* (17.6) *должно выполняться и для функции* x_0:

$$(17.9) \qquad x_0'(u) \neq 0 \quad (u \in [u_1, u_2]).$$

б) Докажем, что $|x'(u) - x_0'(u)|$ на всем интервале $[u_1, u_2]$ будет меньше произвольного заданного положительного числа, если $\rho^1(\omega, \omega_0)$ выбрать достаточно малым; тогда отсюда и из (17.9) будет следовать, что выполняется условие (17.6), т. е. на основании результата предыдущего пункта F переводит функцию ω в функцию.

Запишем разность производных функций x и x_0. На основании (17.4) и (17.5) получим, что в $[u_1, u_2]$

$$(17.10) \quad |x'(u) - x_0'(u)| = |\lambda_u(u, \omega(u)) + \lambda_v(u, \omega(u)) \times \times \omega'(u) - \{\lambda_u(u, \omega_0(u)) + \lambda_v(u, \omega_0(u))\,\omega_0'(u)\}|.$$

Приведенную разность на всем интервале $[u_1, u_2]$ можно сделать сколь угодно малой, если $\rho^1(\omega, \omega_0)$ выбрать достаточно малым.

Разность (17.10) можно понимать, например, как разность значений функции $\Phi \in R^3 \to R^1$, определенной равенством $\Phi(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 + \xi_2\xi_3$ ($\xi \in R^3$), взятых в соответствующих точках кривых с уравнениями $\gamma = \gamma(u)$ и $\gamma = \gamma_0(u)$, где

$$\gamma(u) \overset{\mathrm{df}}{=} (\lambda_u(u, \omega(u)), \lambda_v(u, \omega(u)), \qquad \omega'(u)), \ (u \in [u_1, u_2]).$$

(17.11) $$\gamma_0(u) \overset{\mathrm{df}}{=} (\lambda_u(u, \omega_0(u)), \lambda_v(u, \omega_0(u)), \omega_0'(u))$$

Пусть $\Omega_0 \subset D_F$ означает замыкание graf ω_0, а Ξ_0 — замыкание какой-нибудь окрестности множества R_{γ_0} ($\subset R^3$). Из равномерной непрерывности функций λ_u, λ_v на Ω_0 и из определений (17.11) следует, что $|\gamma(u) - \gamma_0(u)|$ на всем интервале $[u_1, u_2]$ будет меньше произвольного заданного положительного числа, если расстояние $\rho^1(\omega, \omega_0)$ достаточно мало. Отсюда и из равномерной непрерывности функции Φ на множестве Ξ_0 следует, что и разность $x'(u) - x_0'(u) = \Phi(\gamma(u)) - \Phi(\gamma_0(u))$ по абсолютной величине на всем интервале $[u_1, u_2]$ можно сделать сколь угодно малой.

Итак, доказано, что *если расстояние первого порядка между функциями ω и ω_0 достаточно мало, скажем $\rho^1(\omega, \omega_0) < \rho$, то преобразование F переведет функцию ω в некоторую непрерывно дифференцируемую функцию φ.*

в) Фиксируем теперь любую удовлетворяющую условиям предыдущего пункта пару функций $\omega \xrightarrow{F} \varphi$, т. е. предположим, что $\omega \in K_\rho^1(\omega_0)$. Для вычисления значений функций φ_0, $\varphi \in C_1[x_1, x_2]$ выразим из (17.4_1) и (17.5_1) u_0 и u как функции от x_0 и x и полученные значения подставим в (17.4_2) и (17.5_2). При этом следует обратить внимание на то, что *одно и то же значение x функция $x(u)$ и функция $x_0(u)$ принимают, вообще говоря, в различных точках*:

(17.12) $$x(u) = x_0(\bar{u}) \in [x_1, x_2], \text{ т.е.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (17.13_1) & \varphi_0(x) = \nu(\bar{u}, \omega_0(\bar{u})). \\ (17.13_2) & \varphi(x) = \nu(u, \omega(u)) \end{array}\right\} \quad x(u) = x_0(\bar{u}) = x \in [x_1, x_2].$$

Оценим теперь максимальное отклонение значений u и $\bar{u}$, для которых выполняется равенство (17.12). Из равенства (17.9) следует, что

$$c \overset{\mathrm{df}}{=} \min_{u \in [u_1, u_2]} |x_0'(u)| > 0.$$

Применим теорему Лагранжа о среднем к функции x_0. Тогда для произвольных значений u, $\bar{u} \in [u_1, u_2]$ получим

(17.14) $$|x_0(u) - x_0(\bar{u})| \geqq c|u - \bar{u}|.$$

Если u и $\bar{u}$ удовлетворяют равенству (17.12), то

$$x_0(u) - x(u) = x_0(u) - x_0(\bar{u}),$$

т. е. неравенство (17.14) принимает вид

$$|x_0(u) - x(u)| \geqq c\,|u - \bar{u}|,$$

откуда, учитывая (17.4_1) и (17.5_1), получаем

$$|u - \bar{u}| \leqq \frac{|x_0(u) - x(u)|}{c} = \frac{1}{c}\,|\lambda(u, \omega(u)) - \lambda(u, \omega_0(u))|$$

$$(x(u) = x_0(\bar{u}) \in [x_1, x_2]).$$

Из этой оценки и из равномерной непрерывности функции λ на множестве Ω_0, определенном в предыдущем пункте, следует, что значение модуля разности $u - \bar{u}$ меньше произвольно заданного положительного числа, если расстояние $\rho^1(\omega, \omega_0)$ достаточно мало.

Введем теперь функцию $\bar{u}\ (D_{\bar{u}} \overset{\mathrm{df}}{=} [u_1, u_2])$ следующим образом: каждому числу $u \in [u_1, u_2]$ поставим в соответствие число $\bar{u}(u)$, для которого выполняется равенство (17.12), т. е. для которого $x_0 = x \circ \bar{u}$. Очевидно, что $\bar{u} \in C_1[u_1, u_2]$.

С помощью функции $\bar{u}$ результат, полученный выше, можно сформулировать так: *модуль разности $u - \bar{u}(u)$ на всем интервале $[u_1, u_2]$ можно сделать меньше произвольно данного положительного числа, если расстояние $\rho^1(\omega, \omega_0)$ взять достаточно малым.*

г) Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно заданное положительное число. Осталось доказать существование положительного числа $\delta\ (\leqq \rho)$ такого, что для любой функции $\omega \underset{F}{\in}$ $\in K^1_\delta(\omega_0)$ выполняется включение $\varphi \in K^1_\varepsilon(\varphi_0)$ $(\omega \to \varphi)$.

Будем считать, что значения функций φ и φ_0 вычисляются так же, как и в предыдущем пункте; оценим расстояние $\rho^1(\varphi, \varphi_0)$ между функциями φ и φ_0. Используя функцию $\bar{u}$, введенную в предыдущем пункте, получаем следующие равенства:

$$(17.15)\quad \varphi(x) - \varphi_0(x) = y(u) - y_0(\bar{u}(u)) = \nu(u, \omega(u)) - \\ - \nu(\bar{u}(u), \omega_0(\bar{u}(u))),$$

$$(17.16)\qquad \varphi'(x)-\varphi_0'(x)=\frac{y'(u)}{x'(u)}-\frac{y_0'(\bar u(u))}{x_0'(\bar u(u))}=$$

$$=\frac{\nu_u(u,\omega(u))+\nu_v(u,\omega(u))\,\omega'(u)}{\lambda_u(u,\omega(u))+\lambda_v(u,\omega(u))\,\omega'(u)}-$$

$$-\frac{\nu_u(\bar u(u),\omega_0(\bar u(u))+\nu_v(\bar u(u),\omega_0(\bar u(u)))\,\omega_0'(\bar u(u))}{\lambda_u(\bar u(u),\omega_0(\bar u(u))+\lambda_v(\bar u(u),\omega_0(\bar u(u)))\,\omega_0'(\bar u(u))}$$

$$(x(u)=x_0(\bar u(u))=x\in[x_1,x_2]).$$

Разность (17.15) и (17.16) можно оценить аналогично неравенству (17.10). Принимая во внимание, что все функции в приведенных выше равенствах непрерывны, получаем, что если расстояние $\rho^1(\omega,\omega_0)$ достаточно мало [скажем, $\rho^1(\omega,\omega_0)<\delta\ (\leqslant\rho)$], то разности в (17.15) и (17.16) на всем интервале $[x_1, x_2]$ по абсолютной величине будут меньше $\varepsilon/2$. Лемма 1 доказана полностью.

Лемма 2. *Пусть I — заданный функционал [определенный в п. 8.1], $\varphi_0\in D_I$; предположим, что выполняются условия леммы 1. Тогда существует такой функционал J, что*

$$J\overset{F}{\rightleftarrows}I\quad(\omega_0\overset{F}{\rightleftarrows}\varphi_0).$$

Доказательство. Пусть функционал I определяют данные Q, f, P_1, P_2; обозначим точки Q через (x, y, y') Определим функционал J следующими определяющими данными: Q^*, f^*, P_1^*, P_2^*; тогда:

а) Q^* есть некоторая окрестность достаточно малого радиуса множества $\{(u, v, v')\in R^3\mid u\in[u_1, u_2],\ v=\omega_0(x),\ v'=\omega_0'(x)\}$; точки Q^* обозначим через (u, v, v');

б) $$f^*(u,v,v')\overset{\mathrm{df}}{=}f\left(\lambda(u,v),\nu(u,v),\frac{\nu_u(u,v)+\nu_v(u,v)\,v'}{\lambda_u(u,v)+\lambda_v(u,v)\,v'}\right)\times$$
$$\times\{\lambda_u(u,v)+\lambda_v(u,v)\,v'\}\quad[(u,v,v')\in Q^*];$$

в) $P_1^*\overset{\mathrm{df}}{=}F^{-1}(P_1)$, $P_2^*=F^{-1}(P_2)$ [см. замечание после леммы 1].

Выполнение условия α) в определении 2 обеспечивает лемма 1. Выполняется и условие β), в чем (используя определение f^*) можно убедиться с помощью простых вычислений, сводящихся к замене переменных в интеграле. По только что упомянутому замечанию I и J можно поменять ролями. Отсюда на основании определения 2 следует, что лемма 2 доказана.

Г) Теоремы об инвариантности. **Теорема 1.** *Пусть* $J \overset{F}{\rightleftarrows} I$ $(\omega_0 \overset{F}{\rightleftarrows} \varphi_0)$ *и предположим, что выполняются (с теми же обозначениями) условия леммы* 1. *Тогда функция* ω_0 *доставляет слабый локальный минимум функционалу* J *в том и только в том случае, когда* φ_0 *доставляет слабый локальный минимум функционалу* I.

Доказательство. Докажем *достаточность*. Пусть φ_0 доставляет слабый локальный минимум функционалу I: это означает, что существует такое число $\varepsilon > 0$, что если $\varphi \in K^1_\varepsilon(\varphi_0) \cap D_I$, то

$$I[\varphi] \geqq I[\varphi_0]. \tag{17.17}$$

Преобразование F функционал J переводит локально в I (относительно ω_0), поэтому, применяя лемму 1, число $\delta > 0$ можно выбрать так, что если $\omega \in K^1_\delta(\omega_0) \cap D_I$, то F переводит функцию ω в функцию $\varphi \in D_I$, удовлетворяющую условиям $\varphi \in K_\varepsilon(\varphi_0) \cap D_I$ и $I[\varphi] = J[\omega]$, т. е. согласно (17.17) $J[\omega] \geqq J[\omega_0]$. Достаточность тем самым доказана.

Для доказательства *необходимости* следует поменять функционалы I и J ролями. Теорема 1 доказана полностью.

Теорема 2. *Пусть* $J \overset{F}{\rightleftarrows} I$ $(\omega_0 \overset{F}{\rightleftarrows} \varphi_0)$ *и пусть* F, ω_0, φ_0 *и основные функции обоих функционалов два раза непрерывно дифференцируемы; предположим, что выполняются (с теми же обозначениями) условия леммы* 1. *Тогда* ω_0 *является стационарной функцией функционала* J *в том и только в том случае, когда* φ_0 *есть стационарная функция функционала* I.

Доказательство. Докажем сначала достаточность. Пусть η — произвольная фиксированная функция, удовлетворяющая условиям

$$\eta \in (R^1 \to R^1) \cap C_2[u_1, u_2], \quad \eta(u_1) = \eta(u_2) = 0; \tag{17.18}$$

рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$$\omega_0(u) + \varepsilon\eta(u) \quad (u \in [u_1, u_2]; \quad \varepsilon \in R^1), \tag{18.17}$$

зависящих от параметра ε.

Из равенства $\rho^1(\omega_0, \omega_0+\varepsilon\eta)=|\varepsilon|\cdot||\eta||^1$ следует, что если ε — достаточно малое фиксированное число, скажем $\varepsilon \in k(0)$, то преобразование F функцию $\omega_0+\varepsilon\eta$ переведет в функцию, которую обозначим через $\psi(x, \varepsilon)$:

$$(17.20) \qquad (\omega_0(u)+\varepsilon\eta(u)) \xrightarrow{F} \psi(x, \varepsilon)\ [\varepsilon \in k(0)].$$

Функцию ψ можно определить и так: неявная функция $\Lambda(x, u, \varepsilon) \overset{\mathrm{df}}{=} x-\lambda(u, \omega_0(u)+\varepsilon\eta(u))=0$ однозначно разрешима относительно u на множестве $[x_1, x_2]\times k(0)$; решение обозначим через $\alpha(x, \varepsilon)$. Из определения функции Λ и из условий, наложенных на функции F, ω_0, η, следует, что $\alpha \in C_2([x_1, x_2]\times k(0))$. Так как

$$\psi(x, \varepsilon)=\nu(\alpha(x, \varepsilon), \omega_0(\alpha(x, \varepsilon))+\varepsilon\eta(\alpha(x, \varepsilon))$$
$$(x(\varepsilon) \in [x_1, x_2]\times k(0)),$$

то $\psi \in C_2([x_1, x_2]\times k(0))$. Далее очевидно, что

$$(17.21) \quad \psi(x, 0)=\varphi_0(x),\ \psi_x(x, 0)=\varphi_0'(x)\ (x \in [x_1, x_2]);$$
$$\psi_\varepsilon(x_1, 0)=\psi_\varepsilon(x_2, 0)=0.$$

Из леммы 1 следует, что если радиус $k(0)$ выбрать достаточно малым, то при фиксированном $\varepsilon \in k(0)$ функция $\omega_0(u)+\varepsilon\eta(u)$ является допустимой функцией J, а функция $\psi(x, \varepsilon)$ — допустимой функцией I, и если выполняется (17.20), то

$$(17.22) \quad J[\omega_0(u)+\varepsilon\eta(u)]=I[\psi(x, \varepsilon)] \quad [\varepsilon \in k(0)].$$

Определим теперь функцию $\beta \in R^1 \to R^1$ следующим образом: $\beta(\varepsilon) \overset{\mathrm{df}}{=} J[\omega_0(u)+\varepsilon\eta(u)]$ $[\varepsilon \in k(0)]$. Функция β дифференцируема; найдем $\beta'(0)$. Если основную функцию функционала J обозначить через $f^*(u, v, v')$, а функционала I — через $f(x, y, y')$, то тогда, используя (17.18), (17.20) и (17.22) и проводя элементарные вычисления, получаем

$$(17.23) \quad \beta'(0)=\int_{u_1}^{u_2}\left\{\overline{f}^*_v-\frac{d}{du}\overline{f}^*_{v'}\right\}\eta(u)\,du=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\overline{f}_y-\frac{d}{dx}\overline{f}_{y'}\right\}\times$$
$$\times\,\psi_\varepsilon(x, 0)\,dx,$$

где черта над частными производными f^* и f означает, что их надо брать в точках $(u, \omega_0(u), \omega_0'(u))$ и $(x, \varphi_0(x), \varphi_0'(x))$ соответственно. Так как φ_0 — стационарная функция функционала I, то в интеграле, находящемся в правой части

(17.23), выражение в фигурных скобках является в $[x_1, x_2]$ тождественным нулем; поэтому для любой удовлетворяющей условию (17.23) функции η

$$\int_{u_1}^{u_2} \left\{ \bar{f}_v^* - \frac{d}{du} \bar{f}_{v'}^* \right\} \eta(u)\, du = 0.$$

Отсюда на основании леммы Лагранжа (см. лемму 1 п. 3.3) получаем, что в интервале $[u_1, u_2]$ выполняется равенство $f_v^* - \frac{d}{du} f_{v'}^* = 0$, т. е. ω_0 удовлетворяет д. у. Э—Л (соответствующему f^*), или, другими словами, ω_0 есть стационарная функция функционала J.

Таким образом, достаточность доказана. Доказательство необходимости можно получить, поменяв ролями функционалы J и I.

Замечание. Данные определения и использованные методы легко распространить на случай более общих вариационных проблем.

Задачи: 1. Пусть $Q = \{ (x, y, y') \in R^3 | y > 0\}$, $f(x, y, y') = \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + y'^2}$ $[(x, y, y') \in Q]$. Найдите стационарные функции, соответствующие основной функции f.

Указание. Введите полярные координаты.

2. Исследуйте инвариантность экстремальных и стационарных функций в случае (как непараметрической, так и параметрической) пространственной задачи.

§ 18. ПРОСТЕЙШАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

В этом параграфе будет изучена обратная задача, связанная с простейшей вариационной задачей [ср. с п. 7.4, Л)]. Для этого рассмотрим какое-нибудь д. у. (обыкновенное, второго порядка)

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{18.1}$$

где $Q \overset{\mathrm{df}}{=} D_F$ — некоторая область R^3. Некоторое ограничение общности состоит в том, что мы рассматриваем только д. у., разрешенные относительно старшей производной (д. у. Э—Л часто таким не является).

К обратной задаче, связанной с д. у. (18.1), относится следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что F, $F_{y'} \in C_1(Q)$. Тогда для каждой точки $(x, y, y') \in Q$ существует такая содержащая ее область $Q^* \subset Q$ и бесконечно много таких основных* *функций, что д. у. Э—Л, соответствующие этим основным функциям, являются сужениями д. у.* (18.1) *на* Q^*.

Доказательство. Д. у. Э—Л, соответствующее основной функции f, имеет следующий вид:

$$(18.2)\qquad f_y - f_{y'x} - f_{yy'}\cdot y' - f_{y'y'}\cdot y'' = 0$$

(частные производные f берутся в точках $(x, y, y') \in Q$; далее, если это не приводит к неясности, это обстоятельство не указывается).

Д. у. (18.1) и (18.2), очевидно, эквивалентны на некотором подмножестве Q тогда и только тогда, когда $f_{y'y'}$ не обращается в нуль ни в одной точке Q^* и выполняется тождество

$$(18.3)\qquad f_y - f_{y'x} - f_{y'y}\cdot y' - f_{y'y'}\cdot F = 0.$$

Функцию, стоящую в левой части (18.3), обозначим через $-L\{f\}$ $(L\{f\} \in R^3 \to R^1,\ D_{L\{f\}} = Q)$. Предположим, что $f \in C_3(Q)$; тогда из (18.3), дифференцируя по y', получаем тождество

$$L\{f\}_{y'} = f_{y'y'x} + f_{y'y'y}\cdot y' + f_{y'y'y'}F + f_{y'y'}F_{y'} = 0,$$

т. е. функция $f_{y'y'} \in (R^3 \to R^1) \cap C_1(Q)$ удовлетворяет однородному линейному д. у. первого порядка в частных производных

$$(18.4)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + y'\frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y, y')\frac{\partial u}{\partial y'} + F_{y'}(x, y, y')\,u = 0.$$

Из соответствующей теоремы существования и единственности следует, что у (18.4) существует (бесконечно много) решений, определенных на Q.

Зафиксируем какую-нибудь точку $(x, y, y') \in Q$ и выберем область $Q^* \subset Q$, содержащую эту точку, так, чтобы у д. у. (18.4) существовало решение, не равное нулю ни в одной точке Q^*. Пусть u — такое решение $(D_u \overset{df}{=} Q^*)$, а $\bar{f} \in R^3 \to R^1$ — функция, для которой $\bar{f}_{y'y'} = u$. Тогда из д. у. (18.4) следует, что на множестве Q выполняется равенство $L\{\bar{f}\}_{y'} = 0$, поэтому существует такая функция $\gamma \in$ $\in (R^2 \to R^1) \cap C_1(\mathrm{pr}_{12}\, Q^*)$, для которой

$$(18.5)\qquad L\{\bar{f}\}(x, y, y') = \gamma(x, y)\quad [(x, y) \in \mathrm{pr}_{12}\, Q^*].$$

Пусть $\alpha, \beta \in (R^2 \to R^1) \cap C_2(\mathrm{pr}_{12} Q^*)$ — пока произвольные функции; определим функцию f следующим образом:

$$(18.6)\quad f(x, y, y') = \alpha(x, y) + \beta(x, y)\, y' + \bar f(x, y, y') \quad [(x, y, y') \in Q^*].$$

В результате простых вычислений из (18.5) и (18.6) получим

$$(18.7)\qquad L\{f\} = \alpha_y - \beta_x + L\{\bar f\}.$$

Следовательно, если функции α и β выбрать так, чтобы выполнялось тождество

$$\beta_x(x, y) - \alpha_y(x, y) = \gamma(x, y) \quad [(x, y) \in \mathrm{pr}_{12} Q^*]$$

(такой выбор можно осуществить бесконечно многими способами), то (18.7), используя равенство (18.5), можно записать в следующем виде:

$$L\{f\} = f_y - f_{y'x} - f_{y'y}\, y' - f_{y'y'} F = 0 \quad [(x, y, y') \in Q^*].$$

Итак, получено равенство (18.3), которое, как уже отмечалось, необходимо и достаточно для того, чтобы д. у. Э—Л, образованное основной функцией f, совпадало с сужением д. у. (18.1) на Q^*. Теорема 1 доказана.

Замечания: 1. Таким образом, основные функции f можно получить, решая линейное д. у. первого порядка в частных производных и применяя квадратуры.

2. Обратные задачи часто ставятся следующим образом: для данного (двупараметрического) семейства функций требуется определить основную функцию f такую, что соответствующие ей стационарные функции дают исходное семейство функций. В этом случае в качестве первого шага целесообразно найти д. у., которому удовлетворяют функции из данного семейства (см. задачу 1).

Задачи: 1. Найдите все основные функции из C_3 такие, что соответствующими им стационарными функциями являются функции из приведенного ниже двупараметрического семейства:

α) $y(x, a, b) = ax + b\ (x, a, b \in R^1)$;

β) $y(x, a, b) = ax^2 + bx\ (x > 0;\ a, b \in R^1)$;

γ) $y(x, a, b) = \sqrt{b^2 - (x - a^2)}\quad (a, b \in R^1;\ |x - a| < |b|)$.

2. Найдите такие основные функции, что соответствующие им д. у. Э—Л имеют следующий вид:

α) $y'' + p(x)y' + g(x)y = r(x)$ (непараметрическая задача на плоскости);

β) $z - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x, y)\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) - \left(b(x, y)\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = c(x, y)$ (двумерная задача).

§ 19. ФУНКЦИЯ ГАМИЛЬТОНА

19.1. Канонический вид дифференциального уравнения Эйлера—Лагранжа

В п. 8.3 было показано, что если в некоторой области $Q^* \subset Q\ (= D_F)$ вторая производная $f_{y'y'}$ нигде не обращается в нуль, то д. у. Э—Л

$$(19.1)\quad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = f_y - f_{xy'} - f_{y'y} y' - f_{y'y'} y'' = 0$$

эквивалентно (на Q^*) с. д. у.

$$(19.2)\quad \begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = \dfrac{1}{f_{y'y'}(x, y, y_1)} [f_y(x, y, y_1) - f_{xy'}(x, y, y_1) - \\ \qquad\qquad - f_{yy'}(x, y, y_1) y_1]. \end{cases}$$

Возникает вопрос: можно ли ввести такое подходящее преобразование (из $R^3 \to R^3$), которое переведет д. у. (19.1) в систему с симметричной правой частью? Исходя из сокращенной записи д. у. (19.1), кажется естественным введение новой «переменной» $v = f_{y'}$. Именно: *пусть* $f \in (R^3 \to R^1) \cap C_2(Q)$ — *такая функция, для которой в некоторой области* $Q^* \subset Q$ *вторая производная* $f_{y'y'}$ *нигде не обращается в нуль; рассмотрим преобразование* $F \in R^3 \to R^3$ $(D_F = Q^*)$, *которое точку* (x, y, y') *области* Q^* *переводит в точку* $(x, y, v) \in R^3$, *определенную системой уравнений*

$$(19.3)\quad x = x,\ y = y,\ v = f_{y'}(x, y, y')\quad [(x, y, y') \in Q^*].$$

Наряду с этим предположим, что F *осуществляет взаимно однозначное соответствие между* $Q^* = D_F$ *и* R_F. *Третью координатную функцию обратного преобразования обозначим через* φ, *т. е. пусть*

$$(19.4)\quad x = x,\ y = y,\ y' = \varphi(x, y, v)\quad [(x, y, v) = R_F].$$

Замечания: 1. В дальнейшем под F всегда будем понимать преобразование, удовлетворяющее приведенным выше условиям.

2. Преобразование F можно определить и тогда, когда условие $f_{y'y'} \neq 0$ не выполняется. С помощью простых вычислений можно показать, что определитель преобразования F равен $f_{y'y'}$. Если он в какой-нибудь точке Q не равен нулю, то возьмем некоторую окрестность Q^* этой точки достаточно малого радиуса, тогда по известной теореме о раз-

решимости системы уравнений для обратных функций условие обратимости, наложенное выше на F, будет автоматически выполняться.

Определение 1. *На множестве R_F (сохраняя обозначения и условия, приведенные выше) функцию, определенную равенством*

(19.5) $H_{Q^*}(x, y, v) = f(x, y, \varphi(x, y, v)) - \varphi(x, y, v) v,$

будем называть функцией Гамильтона, связанной с основной функцией f (относительно Q^*).

Замечания: 1. Если это не приведет к неясности, будем пренебрегать указанием множества Q^* и писать просто H.

2. $H \in (R^3 \to R^1) \cap C_1 (D_H = F(Q^*))$.

3. Выразим H как функцию от (x, y, y'):

$$(H \circ F)(x, y, y') = f(x, y, y') - y' f_{y'}(x, y, y') \; [(x, y, y') \in Q].$$

Эта функция уже встречалась во многих важных исследованиях [ср. формулы (5.6), (7.21), (10.10), (10.32), (10.42) и (15.8)].

4. Найдем частные производные H по y и по v. Из тождества (19.5) получаем:

(19.6) $H_y(x, y, v) = f_y(x, y, \varphi(x, y, v)),$

(19.7) $H_v(x, y, v) = -\varphi(x, y, v)$ $\quad ((x, y, v) \in D_H).$

Пусть теперь y есть решение д. у. Э—Л (19.1); предположим, что для функции $(y, y') \in R^1 \to R^2$ (где y' — производная y) выполняется условие graf $(y, y') \subset Q^*$. Из специального вида преобразования F следует, что преобразование F функцию (y, y') переведет в функцию $(y, v) \in R^1 \to R^2$ (относительно терминологии см. обобщение определения 1 § 17, относящееся к функциям из $R^3 \to R^3$), где

(19.8) $\quad v(x) = f_{y'}(x, y(x), y'(x)) \quad (x \in D_y).$

Из (19.4) и (19.7) следует, что

(19.9) $y'(x) = \varphi(x, y(x), v(x)) = -H_v(x, y(x), v(x))$
$$(x \in D_y).$$

Функция y является решением д. у. Э—Л (19.1). Отсюда, учитывая (19.8) и (19.6), получаем тождество

(19.10) $v'(x) = f_y(x, y(x), y'(x)) = f_y(x, y(x), \varphi(x, y(x),$
$v(x))) = H_y(x, y(x), v(x)) \quad (x \in D = D_y).$

Тождества (19.9) и (19.10) означают, что функция $(y, v) \in R^1 \to R^2$ удовлетворяет с. д. у.

(19.11) $$y' = -H_v(x, y, v),\ v' = H_y(x, y, v).$$

Обратно: предположим, что функция $(y, v) \in R^1 \to R^2$ есть решение с. д. у. (19.11). Тогда F^{-1} функцию (y, v) переводит в функцию $(y, y_1) \in R^1 \to R^2$. Рассуждая аналогично [используя уравнения преобразования и тождества (19.6), (19.7)], можно показать, что y_1 явяется производной функции y и y удовлетворяет д. у. Э—Л (19.1).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть:*

α) *F-преобразование, определенное в начале этого пункта;*

β) *y — два раза непрерывно дифференцируемая функция из $R^1 \to R^1$, y' — производная функции y;*

γ) $\mathrm{graf}\,(y, y') \subset D_F$;

δ) $(y, v) \in R^1 \to R^2$ — *функция, в которую F переводит (y, y'). Тогда y есть решение д. у. Э—Л* (19.1) *в том и только в том случае, когда (y, v) есть решение с. д. у.* (19.11).

Замечания: 1. К функции Гамильтона мы пришли, по существу, неконструктивным путем: для исследования формальной возможности модификации (сокращения и симметризации) с д. у. Э—Л было естественным введение преобразования F и композиция его с функцией, которая уже встречалась во многих результатах (см. замечание 3 после определения 1). Отметим, что как к преобразованию F, так и к функции H можно прийти и с помощью геометрических и физических рассуждений (см., например, [16, 18, 28, 34]).

2. Функция H играет важную роль в вариационном исчислении. В соответствии с этим на основании теоремы 1 с. д. у. (19.11) называют каноническим видом д. у. Э—Л (19.1).

19.2. Дифференциальное уравнение в частных производных Гамильтона—Якоби

В этом пункте с помощью функции H будет получено д. у. в частных производных, которое играет важную роль как в вариационном исчислении, так и в теории д. у. в частных производных.

Пусть f, Q^*, F означают то же, что и в предыдущем пункте (сохраним условия, наложенные на них). Пусть, да-

ле, $M_{\{p\}}$ *— стационарное поле, для которого выполняются следующие условия:*

а) $D_p \subset \mathrm{pr}_{12}\, Q^*$, *область* D_p *односвязна;*

б) *если* $(x, y) \in D_p$, *то* $(x, y, p(x, y)) \in Q^*$.

Зафиксируем какую-нибудь точку (x_0, y_0) из D_p и определим функцию $W \in R^2 \to R^1$ $(D_W = D_p)$ следующим образом:

$$(19.12) \qquad W(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \{f(x, y, p(x, y)) - $$
$$- p(x, y) f_{y'}(x, y, p(x, y))\} dx + f_{y'}(x, y, p(x, y))\, dy$$
$$[(x, y) \in D_p],$$

где интеграл берется по произвольной кусочно-гладкой кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y). Так как подынтегральная функция является полным дифференциалом [ср. с (10.42)], то значение интеграла не зависит от пути. Очевидно, что $W \in C_1(D_p)$. Функцию W часто называют интегралом Гильберта.

Найдем частные производные W. Из тождества (19.12) получаем

$$(19.13_1) \qquad W_x(x, y) = f(x, y, p(x, y)) -$$
$$- p(x, y) f_{y'}(x, y, p(x, y)),$$

$$(19.13_2) \quad W_y(x, y) = f_{y'}(x, y, p(x, y)) \quad [(x, y) \in D_W].$$

Из тождества (19.13_2), учитывая (19.3) и (19.4), имеем

$$p(x, y) = \varphi(x, y, W_y(x, y)) \quad [(x, y) \in D_W].$$

Если это соотношение подставить в правую часть (19.13_1), то по определению функции Гамильтона получим следующее тождество:

$$W_x(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y, W_y(x, y))) - \varphi(x, y, W_y(x, y))\, W_y(x, y) = H(x, y, W_y(x, y)) \quad [(x, y) \in D_W].$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Предположим, что выполняются все условия, упомянутые в начале пункта. Тогда интеграл Гильберта, определенный равенством* (19.12), *удовлетворяет уравнению*

$$(19.14) \qquad W_x = H(x, y, W_y),$$

называемому д. у. (первого порядка, в частных производных) Гамильтона—Якоби.

Замечания: **1.** Решение д. у. первого порядка в частных производных можно свести к решению системы обыкновенных д. у. Для интегрирования д. у. (19.14), вытекающего из приведенной выше вариационной задачи, нет необходимости применять общую теорему: легко показать, что интегрирование д. у. (19.14) (при некоторых естественных ограничениях) эквивалентно интегрированию с. д. у. (19.11) или в силу теоремы 1 д. у. Э—Л (19.1). Действительно, если решить (19.1) и с помощью подходящего однопараметрического семейства решений построить стационарное поле $M_{\{p\}}$, то интеграл Гильберта W, определенный с помощью функции наклона этого поля, удовлетворяет д. у. Гамильтона—Якоби. По поводу обращения утверждения см. задачу 3.

2. Круг вопросов, отмеченных выше и связанных с изучением вариационной задачи с помощью д. у. (19.14), называют теорией Гамильтона—Якоби.

Задачи: **1.** Пусть f, Q^*, F означают то же, что и в п. 19.1; предположим, что функция W, определенная в области $T^* \subset \mathrm{pr}_{12}\, Q^*$, есть решение д. у. Гамильтона—Якоби. Докажите, что тогда существует такое поле $M_{\{p\}}$, областью которого является T^*

Указание. Функцию наклона поля определите следующим образом:

$$p(x, y) = -H_v(x, y, W_y(x, y)) \quad [\,(x, y) \in T^*].$$

2. Докажите теорему, соответствующую теореме 1, для пространственной вариационной задачи (см. § 12).

3. Пусть:

а) $W(x, y, \beta)$ в некоторой окрестности $k^*(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) при любом фиксированном $\beta \in k^{**}(\beta_0)$ есть решение д. у. (19.14);

$$\text{б)}\quad W_y,\ W_\beta \in C_1(k(x_0, y_0, \beta_0)),$$

$$\text{где } k(x_0, y_0, \beta_0) = k^*(x_0, y_0) \times k^{**}(\beta_0);$$

в) $W_{y\beta}$ нигде на $k(x_0, y_0, \beta_0)$ не обращается в нуль.

Докажите, что при сформулированных условиях система уравнений для неявной функции

$$W_y(x, y, \beta) = v, \quad W_\beta(x, y, \beta) = \alpha$$

однозначно разрешима в некоторой окрестности точки x_0, и получающееся при этом двупараметрическое семейство функций $(y(x, \alpha, \beta), v(x, \alpha, \beta))$ есть общее решение с. д. у. (19.11) в данной окрестности точки x_0.

Замечание. Приведенное (независимое от результатов вариационного исчисления и легко доказываемое) утверждение сформулируйте и докажите для д. у. типа (19.14) в случае более чем двух переменных.

4. Пусть $Q=\{(x, y, y')\in R^3 \mid y>0\}$,

$f(x, y, y')=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}$.

Найдите стационарные функции, соответствующие основной функции f (ср. с задачей 1 § 18).

Указание. а) Решите соответствующую с. д. у. (19.11); б) решите, отыскивая решение в виде многочлена, соответствующее д. у. (19.14) и примените утверждение, сформулированное в задаче 3.

§ 20. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

20.1. Основная идея прямых методов

В п. 3.2 было отмечено, что основную идею метода Эйлера можно обосновать. В п. 7.5 говорилось и о значении основанных на нем прямых методов, играющих важную роль как при решении вариационных задач, так и при численном решении д. у. В этом параграфе мы дадим краткий обзор проблем, связанных с прямыми методами вариационного исчисления.

Определение 1. *Пусть I — произвольный, ограниченный снизу функционал. Последовательность y_n $(n\in N)$, состоящую из элементов D_I, назовем минимизирующей последовательностью, если*

$$\lim_{n\to\infty} I[y_n]=\inf R_I.$$

Замечание. Из определения нижней грани множества чисел следует, что у любого ограниченного функционала имеется минимизирующая последовательность.

Приводимая ниже теорема позволяет выяснить условия, при которых с помощью минимизирующей последовательности можно найти минимальный элемент.

Теорема 1. *Пусть область определения функционала I, ограниченного снизу, есть метрическое пространство, расстояние в котором обозначим через ρ, и пусть минимизирующая последовательность y_n $(n\in N)$ функционала I сходится к элементу $y\in D_I$:*

$$\rho(y, y_n)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Предположим далее, что функционал I на элементе y полунепрерывен снизу, т. е. для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что если $\bar{y}\in D_I$ и $\rho(y, \bar{y})<\delta$, то

$$I[\bar{y}]>I[y]-\varepsilon.$$

Тогда y доставляет минимум функционалу I.

Доказательство. Последовательность y_n ($n \in N$) — минимизирующая, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} I[y_n] = \inf R_I. \tag{20.1}$$

Далее, так как функционал I на элементе y полунепрерывен снизу, то для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших $n \in N$ выполняется неравенство

$$I[y_n] > I[y] - \varepsilon. \tag{20.2}$$

Поэтому если $n\to\infty$, то в силу (20.1) и (20.2) $I[y] \leq \inf R_I + \varepsilon$. Устремляя $\varepsilon > 0$ к нулю, получаем $I[y] \leq \inf R_I$, а это и означает, что $I[y] = \inf R_I$. Теорема 1 доказана.

Замечания: 1. В некоторых простых случаях может оказаться, что минимизирующая последовательность в рассматриваемой метрике не сходится. Например, для задачи, исследованной в п. 6.1 (в которой следует положить $\alpha = 1/n$), последовательность

$$y_n(x) \overset{\text{df}}{=} \frac{\operatorname{arctg} nx}{\operatorname{arctg} n} \quad (x \in [-1, 1];\ n \in N) \tag{20.3}$$

есть минимизирующая последовательность соответствующего функционала I, а последовательность y_n (по норме C_1) не сходится ни к одной функции.

2. Исследованные конкретные функционалы первого порядка по норме C_1 непрерывны, поэтому они и полунепрерывны снизу. Однако в норме C эти функционалы, вообще говоря, не являются непрерывными (ср., например, с мелким шрифтом после определения 3 п. 4.1).

3. Подводя итог сказанному, можно заключить, что применение прямых методов требует изучения следующих вопросов:

а) выбора подходящей минимизирующей последовательности;

б) доказательства сходимости минимизирующей последовательности;

в) в случае сходимости доказательства полунепрерывности снизу функционала на предельном элементе минимизирующей последовательности.

Одно из объяснений большого разнообразия прямых методов заключается в широких возможностях выбора минимизирующей последовательности. Один из наиболее важных способов выбора такой последовательности приведен в следующем пункте; более полное изложение этого и других вопросов данной теории можно найти в следующих книгах: [4, 12, 17, 24, 25, 32, 37, 40].

20.2. Метод Ритца

Определение 2. *Пусть S — линейное нормированное пространство. Будем говорить, что последовательность $\varphi_n (n \in N)$, состоящая из элементов S, полная в S, если для каждого элемента $\varphi \in S$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая линейная комбинация $\alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n$ $(\alpha_i \in R^1;\ i = 1, \ldots, n)$, расстояние от которой до φ меньше ε.*

Определение 3. *Пусть I — данный функционал и пусть элементы данной последовательности $\varphi_n (n \in N)$ принадлежат D_I. Будем говорить, что функционал I минимизируется на линейной оболочке последовательности $\varphi_n (n \in N)$, если выполняются следующие условия:*

а) *существует такое линейное нормированное пространство S, что $D_I \in S$ и последовательность $\varphi_n (n \in N)$ полна в S;*

б) *любая конечная линейная комбинация элементов последовательности $\varphi^n (n \in N)$ принадлежит D_I;*

в) *для любого $n \in N$ существует минимальный элемент у сужения функционала I, обозначенного через I_n, где*

$$D_{I_n} \overset{\text{df}}{=} \{\varphi \in D_I = \sum_1^n \alpha_i\varphi_i;\quad \alpha_i \in R^1,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

З а м е ч а н и е. Линейные комбинации первых $n+1$ функций содержат любую линейную комбинацию первых n функций, поэтому $D_{I_n} \subset D_{I_{n+1}}$. Отсюда очевидно, что

$$\inf R_{I_n} \geq \inf R_{I_{n+1}} \quad (n \in N).$$

Теорема 2. *Предположим, что функционал I минимизируется на линейной оболочке некоторой последовательности $\varphi_n \in D_I$ $(n \in N)$, полной в нормированном пространстве S, и что у функционала I существует минимальный элемент. Пусть, далее, I непрерывен по норме S. Тогда последовательность y_n $(n \in N)$, состоящая из минимальных функций функционалов I_n* (см. определение 3), *является минимизирующей последовательностью функционала I.*

Доказательство. Пусть y_0 — минимальный элемент I и пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$. Функционал I непрерывен, поэтому существует такое число $\delta > 0$, что если $y \in D_I$ и $\|y - y_0\| < \varepsilon$, то $I[y] - I[y_0] < \varepsilon$. Из полноты последовательности φ_n $(n \in N)$ следует, что существует такая линейная комбинация $\bar{y}_{n_0} = \bar{\alpha}_1 \varphi_1 + \ldots + \bar{\alpha}_{n_0}\varphi_{n_0}$, для которой $\|\bar{y}_{n_0} - y_0\| < \delta$ и, следовательно, $I[\bar{y}_{n_0}] - I[y_0] < \varepsilon$. По определению функции y_{n_0} выполняется неравенство $I[y_{n_0}] \leq I[\bar{y}_{n_0}]$, т. е. $I[y_{n_0}] - I[y_0] < \varepsilon$. Учитывая, что последовательность $I[y_n]$ монотонно убывает, из последнего неравенства получаем, что при $n \geqslant n_0$

$$I[y_n] - I[y_0] < \varepsilon;$$

иначе говоря, $I[y_n] \to I[y_0] = \inf R_I$, если $n \to \infty$. Теорема 2 доказана.

Замечания: 1. Построение минимизирующей последовательности y_n предполагает разрешимость вариационной задачи, связанной с функционалом I_n $(n \in N)$. Эта задача гораздо проще исходной, так как сводится к исследованию на экстремум функции из $R^n \to R^1$.

2. Значения $I[y_n]$ можно рассматривать как приближенные значения минимума функционала I. Скорость сходимости зависит от выбора последовательности функций φ_n $(n \in N)$.

3. Если функция y доставляет минимум и удовлетворяет некоторому д. у. и если y_n стремится к y_0 (в метрике $D_I \subset S$), то y_n можно рассматривать как приближенное решение данного д. у. Применяемые методы Ритца в большинстве случаев имеют такой характер.

Задача. Рассмотрите функционал I (относящийся к простейшему типу), определенный следующими данными:

$$Q \overset{\text{df}}{=} R^3,\ f(x, y, y') \overset{\text{df}}{=} y'^2 + y^2 + 2xy,\ P_1 \overset{\text{df}}{=} (0, 0),\ P_2 \overset{\text{df}}{=} (1, 0).$$

Пусть (в обозначениях теоремы 2) $\varphi_n(x) = x^{n+1} - x^n$ $(x \in [0, 1]$, $n \in N)$. Оцените отклонение функции, доставляющей (асболютный) минимум функционалу I, от фунции y_n, доставляющей (абсолютный) минимум функционалу I_n при $n = 2$ в точках 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 (с точностью до четвертого знака после запятой). Сравните полученный результат с результатом, найденным с помощью метода Эйлера (см. задачу § 3).

ЛИТЕРАТУРА

Книги по общей теории вариационного исчисления

1. *Kneser A.* Lehrbuch der Variationsrechnung, Vieweg, Braunschweig, 1900.

2. *Bolza O.* Vorlesungen über Variationsrechnung, Koehler und Amelang, Leipzig, 1909.

3. *Hadamard J.* Leçons sur le calcul des variations, Hermann et fils, Paris, 1910.

4. *Tonelli L.* Fondamenti di calcolo delle variazioni, Vol. I—II, Zanichelli, Bologna, 1921—23.

5. *Bliss G. A.* Calculus of Variations, Paquin Printers, Chicago, Illinois, USA, 1925.

6. *Caratheodory C.* Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Teubner, Leipzig, Berlin, 1935.

7. *Гюнтер Н. М.* Курс вариационного исчисления. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1941.

8. *Bliss G. A.* Lectures on the Calculus of Variations, Chicago, Illinois, 1946; русский перевод: *Блисс Дж.* Лекции по вариационному исчислению. — М.: ИЛ, 1950.

9. *Picone M.* Introduzione al calcolo delle variazioni, Libreria Veschi, Roma, 1951.

10. *Weinstock R.* Calculus of Variations, McGraw—Hill B. Comp., New York — Toronto—London, 1952.

11. *Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.* Курс вариационного исчисления. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950.

12. *Ахиезер Н. И.* Лекции по вариационному исчислению. — М.: ГИТТЛ, 1955.

13. *Grüss G.* Variationsrechnung, Quelle und Meyer, Heidelberg, 1955.

14. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. — М.—Л.: Физматгиз, 1958. Т. IV.

15. *Miller M.* Variationsrechnung, Teubner, Leipzig, 1959.

16. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.

17. *Courant R.* Calculus of Variations, New York Univ. Courant Inst. 1962.

18. *Funk P.* Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik, Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1962.

19. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1965.

20. *Цлаф Л. Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1966.

21. *Tatarkiewicz K.* Rachunek wariacyjny, Wydow. naukowo—techniczne, Warszava, 1969.

Книги по специальным разделам вариационного исчисления

22. *Morse M.* The Calculus of Variations in the Large, Amer. math, soc. publ. Vol., 18., New York, 1934.

23. *Seifert H., Threlfall W.* Variationsrechnung im Grossen, Teubner, Leipzig —Berlin, 1938.

24. *Gould S. H.* Variational Methods for Eigenvalue Problems, Univ. of Toronto Press, Canada, 1957.

25. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Гостехиздат, 1957.

26. Calculus of Variations and its Applications (Procledings of Symp. in Appl. Mat), McGraw—Hill B. Comrp, New York—Toronto—London, 1958.

27. *Полак Л. С.* Вариационные принципы механики, их развитие и применения в физике. — М.: ГИТТЛ, 1960.

28. *Lanczos C.* The Variational Principles of Mechanics, Sec. Ed., Univ. of Toronto Press, Canada, 1962.

29. *Вайнберг М. М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. — М.: Физматгиз, 1956.

30. *Болтянский В. Г.* Математическое методы оптимального управления. — М.: Наука, 1966.

31. *Hestenes M. R.* Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Wiley and Sons, New York—London—Sudney, 1966.

32. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. — М.: Наука, 1966.

33. *Morrey C. B.*, Jr. Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer, Rerlin—Heidelberg—New York, 1966.

34. *Rund H.* The Hamilton—Jacobi Theory in the Calculus of Variations, D. Van Nostrand Comp. LTD, London, 1966.

35. *Никольский В. В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. — М.: Наука, 1967.

36. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов — М.: Физматгиз, 1961.

Книги, содержащие важные разделы вариационного исчисления

37. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике: — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.

38. *Lévy P.* Problémes concrets d'analyse fonctionelle, 2. ed., Paris, 1951; русский перевод: *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. — М.: Наука, 1967.

39. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics, Vol. I., Interscience Publishers, New York, 1953; русский перевод: *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. — М.— Л.: Гостехиздат, 1951. Т. 1, 2.

40. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. — М.: Физматгиз, 1962.

41. *Bellman R.* Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1957; русский перевод: *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960.

42. *Шилов Г. Е.* Математический анализ (специальный курс). — М.: ГИТТЛ, 1961.

43. *Bellman R., Dreyfus S.* Applied Dinamic Programming, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1962.

44. *Fichera G.* Lezioni sulle transformazioni lineari, Vol. 1., Libreria Veschi, Roma, 1962.

45. *Фельдбаум А. А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. — М.: Физматгиз, 1963.

46. *Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д.* Элементы прикладной математики. — М.: Наука, 1965.

47. *Budó Á.* Mechanika, Negyedik kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

48. *Lange O.* Optimális döntések, Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1966.

49. *Frank Ph., v. Mises R.* A mechanika és fizika differenciál — és integrálegyenletei, I., Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966.

50. *Макаров И. П.* Дополнительные главы математического анализа. — М.: Просвещение, 1968.

Книги, содержащие используемые математические сведения

51. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964.

52. *Szász P.* A differenciál — és integrálszámitás elemei, I—II. Második kiadás, Közoktatásügyi Kiadó, Budapest, 1951.

53. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. —М.: Физматгиз, 1959.

54. Coddington A. — Levinson N. Theory of Ordinary Differential Eguations, McGraw—Hill B. Comp., New York—Toronto—Nondon, 1955; русский перевод: *Коддингтон Э., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.

55. *Dieudonné J.* Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York—London, 1960; русский перевод: *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.

56. *Sansone G.* Equazioni differenziali nel campo reale, I—II., 3. ed., Zanichelli, Bologna, 1963; русский перевод: Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1953, 1954, Т. 1, 2.

57. *Rudin W.* Principles of Mathematical Analysis, 2. ed., McGraw—Hill B. Comp., New York—San Francisco—Toronto—London, 1964; русский перевод: *Рудин У.* Основы математического анализа. — М.: Мир, 1976.

58. *Szőkefalvi—Nagy B.* Valos függvènyek és függvénysorok, 3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

59. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1965.

60. Garsoux J. Analyse Mathematique, Dunod, Paris, 1968.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Андраш Коша

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Заведующий редакцией Е. С. Гридасова. Редактор Ж. И. Яковлева. Младшие редакторы С. А. Доровских, Н. П. Майкова. Художник В. Н. Хомяков. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 4114

Изд. № ФМ-748 Сдано в набор 31.03.83. Подп. в печать 16.11.83.
Формат $84\times108^{1}/_{32}$. Бум. тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая
Объем 14,7 усл. печ. л. Усл. кр.-отт. 14,7. Уч.-изд. л. 13,72
Тираж 9000 экз. Зак. № 1558 Цена 1 р. 40 к.
Издательство «Высшая школа»,
101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
129041, Москва, Б. Переяславская ул., д. 46

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

С.94. Строки 11-ю — 13-ю сверху следует читать так:
зывать область Q, основную функцию f и граничные точки P_1, P_2.

3. Функционал, относящийся к простейшей вариацион-

С. 102, начиная с 9-й строки сверху до конца страницы следует читать так:
В интеграле, стоящем в правой части, подынтегральная функция в силу условия $f_y \in C(Q)$ и $y \in C_1[x_1, x_2]$ непрерывна; следовательно, в правой части (8.14), а значит, и в левой находится непрерывно дифференцируемая функция. Поэтому обе части (8.14) можно продифференцировать; в результате получаем тождество

$$f_y(x, y(x), \ y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0 \qquad (x \in [x, \ x_2]). \tag{8.15}$$

А это по определению 3 (в котором следует положить $F = f_y$ и $\Phi = f_{y'}$) и означает, что функция y удовлетворяет уравнению Э — Л (8.13).

Утверждение 4. *Если $f \in C_2(Q)$ и $y \in D_I$ — дважды непрерывно дифференцируемая стационарная функция функционала I, то y удовлетворяет д. у. Э — Л*

$$f_y(x, y, y') - f_{xy'}(x, y, y') - \\ - f_{yy'}(x, y, y')\, y' - f_{y'y'}(x, y, y')\, y'' = 0. \tag{8.16}$$

Доказательство. Условие утверждения 4 содержит условие утверждения 3; следовательно, выполняется тождество (8.15). Второе слагаемое в левой части тождества (8.15) в силу условий, наложенных на частные производные функции f, и условия $y \in C_2[x_1, x_2]$ можно продифференцировать по правилу дифференцирования сложной функции. После такого дифференцирования получим, что y удовлетворяет д. у. (8.16).

Замечания: 1. Как и уравнение Э — Л (8.13), д у. Э — Л (8.16) часто обозначают символом $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$.

С.107. Строки 21-ю — 22-ю сверху следует читать так:
то функционал $\delta^2 I_y$ положительно определен.

Замечания: 1. Основой для дальнейших необхо-

С.118. Строку 11-ю снизу следует читать так:
Б) $y \in C_2[x_1, x_2]$ — *стационарная функция функциона-*

С.120, начиная со строки 22-й до конца страницы следует читать так:
обыкновенного линейного д. у. второго порядка, если существует такое нетривиальное решение этого уравнения, которое в $\bar{x}_1$ и в $\bar{x}_2$ обращается в нуль.

Лемма 3. *Для того чтобы функция y удовлетворяла условию Якоби, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих условий:*

а) любое решение д. у. Я (8.44), *отличающееся от тривиального и равное нулю в точке x_1, внутри интервала (x_1, x_2) нигде не обращается в нуль;*

б) никакие две точки промежутка $[x_1, x_2)$ не могут являться парой сопряженных точек относительно д. у. Ф (8.44).

Доказательство. Пусть η — произвольное нетривиальное решение д. у. Я (8.44), удовлетворяющее условию $\eta(x_1) = 0$. Тогда по известной теореме об однородных линейных обыкновенных д. у. второго порядка нетривиальные решения Δ_y и η линейно зависимы, из чего следует, что множества их нулей совпадают. Тем самым часть а) леммы доказана.

Достаточность условия б) тривиальна, докажем его необходимость. Предположим, что функция y удовлетворяет условию Якоби, т. е. $\Delta_y(x) \neq 0$ $[x \in (x_1, x_2)]$. Пусть η —

С.121. Строку 17-ю сверху следует читать так:
в которой $\Delta_y(x) = 0$. Тогда для функции

Там же. Строку 10-ю снизу следует читать так:
обозначениях п. 8.4

С.207. Строки 17-ю — 20-ю сверху следует читать так:
определенный данными $Q = R^5$, $f(x, y, z, z_x, z_y) \overset{\text{df}}{=} z_x^2 - z_y^2$, Г, ψ, где Г и ψ пока произвольны. Пусть, далее, $\alpha, \beta \in (R^1 \to R^1) \cap \cap \{(C_1(R^1) \setminus C_2(R^1)\}$ — две произвольные фиксированные функции. Выберите Г и ψ так, чтобы функция z, определенная равенст-

С.235. Строки 22-ю — 23-ю сверху следует читать так:
$\lambda_2 \in R^1$ $(\lambda_2^1 + \lambda_2^2 \neq 0)$ решить соответствующее (16.5) и-д.у. Э—Л

1р.40к.