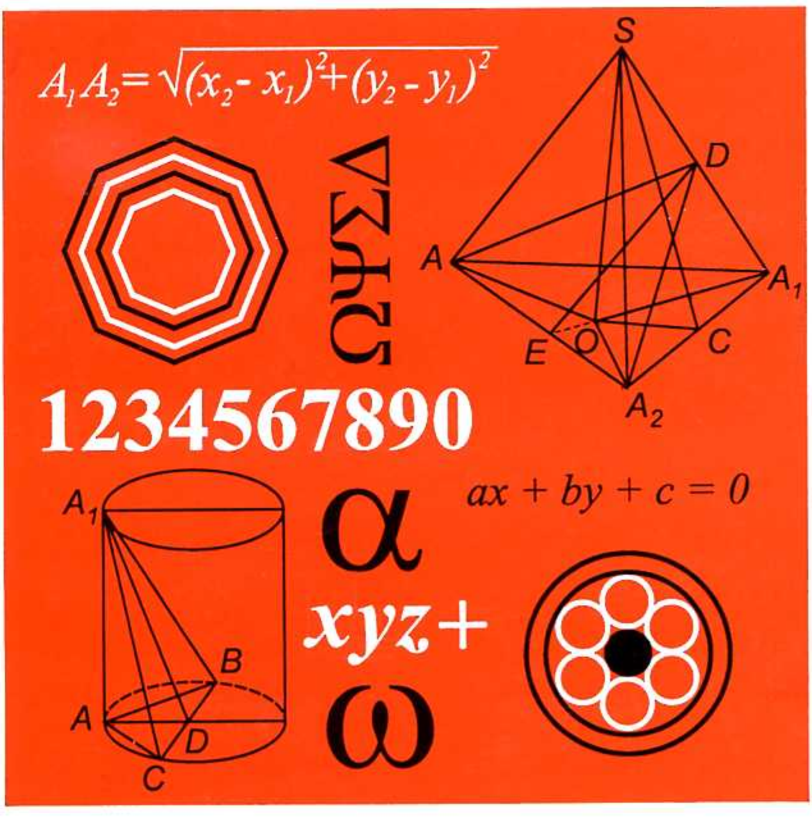
СБОРНИК ЗАДАЧ

ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ ВО ВТУЗЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

М.И. СКАНАВИ



СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ ВО ВТУЗЫ

Под редакцией
М. И. СКАНАВИ

6-е издание

Москва
Мир и Образование
ОНИКС-ЛИТ

УДК 51(076.1)
ББК 22.1
С23

Авторы

*В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский, Т. Н. Маслова,
И. Ф. Орловская, Р. И. Позойский, Г. С. Ряховская,
М. И. Сканави, А. М. Суходский, Н. М. Федорова*

Научное редактирование книги и подготовка ее к изданию
выполнены *А. М. Суходским*

Сборник задач по математике для поступающих во втузы /
С23 В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский и др.; Под ред. М. И. Сканави. — 6-е изд. — М.: ООО «Издательство «Мир и Образование»: ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ», 2013. — 608 с.: ил.

ISBN 978-5-94666-573-5 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 978-5-4451-0047-8 (ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ»)

Сборник составлен в соответствии с программой по математике для поступающих во втузы. Он состоит из двух частей: «Арифметика, алгебра, геометрия» (часть I); «Алгебра, геометрия (дополнительные задачи). Начала анализа. Координаты и векторы» (часть II). Все задачи части I разбиты на три группы по уровню сложности. В каждой главе приведены сведения справочного характера и примеры решения задач. Ко всем задачам даны ответы.

Пособие адресовано учащимся старших классов, абитуриентам и учителям математики.

УДК 51(076.1)
ББК 22.1

ISBN 978-5-94666-573-5
(ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 978-5-4451-0047-8
(ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ»)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой повторение шестого издания «Сборника задач по математике для поступающих во втузы» (М.: Высшая школа, 1992; Столетие, 1997–1999) с дополнительной корректировкой условий всех задач и ответов к ним, а также с исправлением замеченных неточностей. Кроме того, существенно расширен справочный материал в гл. 5, 9 и 13. При этом, учитывая, что данное издание «Сборника» используется учащимися и преподавателями в течение многих лет, авторы практически полностью сохранили весь массив его задач и их нумерацию.

«Сборник» написан в соответствии с программой по математике для поступающих во втузы. В каждой главе приведены теоретические сведения справочного характера и примеры решения задач с объяснением применяемых методов. При этом начало и конец решения примера отмечаются соответственно знаками □ и ■.

«Сборник» состоит из двух частей: «Арифметика, алгебра, геометрия» (часть I); «Алгебра, геометрия (дополнительные задачи). Начала анализа. Координаты и векторы» (часть II).

Задачи части I разделены на три группы (А, Б, В) по их нарастающей сложности. Хотя такое деление имеет более или менее условный характер, авторы полагают, что умение решать задачи из группы А должно определять минимально необходимый уровень подготовки учащихся к вступительным экзаменам в вузы. Успешное решение задач из группы Б определяет более высокое качество усвоения школьной программы. К группе В отнесены задачи повышенной трудности. Однако практика решения таких задач полезна для развития и укрепления способности к самостоятельному логическому мышлению, для обогащения математической культуры и может быть использована в школе и на факультативных занятиях.

В части II помещены не разделенные на группы по степени трудности дополнительные задачи по алгебре и геометрии, задачи по началам математического анализа, задачи на применение координат и векторов, а также задачи по теме «Комплексные числа» (гл. 18). Эта тема не входит в ныне действующую программу для поступающих во втузы, но является весьма полезной для учащихся школ, лицеев и гимназий, изучающих математику по расширенной программе и готовящихся к вступительным экзаменам во втузы. По этим же соображениям к части II следовало бы отнести и тему «Комбинаторика и бином Ньютона», однако ее пришлось оставить в части I (гл. 5), чтобы сохранить нумерацию всех глав и задач «Сборника» для удобства тех, кто использует в своей работе именно шестое его издание.

Вместе с тем в интересах учащихся и преподавателей, использующих в своей работе как шестое, так и десятое издание «Сборника», в конце книги указаны номера всех задач настоящего издания, для которых эти же задачи (под другими номерами) решены в десятом издании.

В соответствии со школьной программой обучения математике всюду (за исключением гл. 18) рассматриваются только области действительных чисел: действительные корни функций, уравнений, систем уравнений.

Начиная с третьего издания работа над «Сборником» выполнялась коллективом авторов без участия самого активного соавтора и научного редактора его первого и второго изданий М. И. Сканави, умершего в 1972 г. Специальное редактирование третьего и последующих изданий осуществлял Б. А. Кордемский. Он проделал большую работу и в процессе подготовки настоящего издания, но, к сожалению, книга вышла в свет уже без него. Мы сохраним светлую память о нем и о других наших коллегах, ушедших из жизни за последние годы, — И. Ф. Орловской, Р. И. Позойском, В. К. Егереве, В. В. Зайцеве.

Авторы сердечно благодарят учащихся и преподавателей школ, подготовительных курсов и факультетов вузов, рецензентов «Сборника», высказавших критические замечания и добрые советы, предложивших поправки. В особенности авторы признательны Р. И. Борковскому (г. Челябинск), приславшему наибольшее количество пожеланий и замечаний, учтенных при работе над книгой.

Авторы

ЧАСТЬ I

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА 1

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Пример. Вычислить

$$\left(\frac{928\cdot10^{-2}}{0,8}-0,6\right):\left(\frac{\left(42\cdot3\frac{5}{6}+3,3:0,03\right):\frac{1}{15}}{\left(3\frac{3}{4}:0,625-0,84:0,8\right):0,03}\right)^{-1}.$$

□ Обозначим выражение в первых скобках через A, а выражение во вторых скобках — через B. Последовательно находим:

1) $A=\frac{928}{80}-0,6=11,6-0,6=11;$

2) числитель дроби B:

а) $42\cdot3\frac{5}{6}=42\cdot3+\frac{42\cdot5}{6}=161;$

б) $3,3:0,03=110;$

в) $(161+110)\cdot15=271\cdot15;$

3) знаменатель дроби B:

а) $\frac{15}{4}:\frac{5}{8}=6;$

б) $\frac{84}{80}=\frac{21}{20};$

в) $\left(6-\frac{21}{20}\right)\cdot\frac{100}{3}=200-35=165;$

4) $B=271\cdot\frac{15}{165}=\frac{271}{11}.$

Окончательно получим $A:B^{-1}=AB=11\cdot\frac{271}{11}=271.$ ■

В задачах этой главы надо выполнить указанные действия, не пользуясь микрокалькулятором, не делая округлений и приближенных вычислений, так как предполагается, что все заданные числа являются точными.

Вычислить (1.001–1.040):

1.001. $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\dfrac{5}{16}\right):\dfrac{169}{24}}$.

1.002. $\left(\left(\dfrac{7}{9}-\dfrac{47}{72}\right):1{,}25+\dfrac{7}{40}\right):(0{,}358-0{,}108)\cdot 1{,}6-\dfrac{19}{25}$.

1.003. $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}$.

1.004. $\left(\dfrac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\dfrac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\dfrac{3}{70}}+0{,}125\right):2\dfrac{1}{2}+0{,}43$.

1.005. $\dfrac{2\dfrac{3}{4}:1{,}1+3\dfrac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\dfrac{1}{3}}:\dfrac{5}{7}-\dfrac{\left(2\dfrac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\dfrac{1}{2}}$.

1.006. $\dfrac{\left(13{,}75+9\dfrac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{5}{9}}+\dfrac{\left(6{,}8-3\dfrac{3}{5}\right)\cdot 5\dfrac{5}{6}}{\left(3\dfrac{2}{3}-3\dfrac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\dfrac{1}{6}$.

1.007. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{6}+0{,}1+\dfrac{1}{15}\right):\left(\dfrac{1}{6}+0{,}1-\dfrac{1}{15}\right)\cdot 2{,}52}{\left(0{,}5-\dfrac{1}{3}+0{,}25-\dfrac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\dfrac{1}{6}\right)\cdot\dfrac{7}{13}}$.

1.008. $\left(\dfrac{3\dfrac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\dfrac{1}{3}}\cdot\dfrac{4{,}6-2\dfrac{1}{3}}{4{,}6+2\dfrac{1}{3}}\cdot 5{,}2\right):\left(\dfrac{0{,}05}{\dfrac{1}{7}-0{,}125}+5{,}7\right)$.

1.009. $\dfrac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\dfrac{5}{8}\right)-5:2\dfrac{1}{2}}{\left(1\dfrac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\dfrac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\dfrac{2}{5}}\cdot 90$.

1.010. $$\frac{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{6}\right):5\frac{8}{15}}{\left(4\frac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\frac{9}{13}}\cdot 34\frac{2}{7}+\frac{0{,}3:0{,}01}{70}+\frac{2}{7}.$$

1.011. $$\frac{\left(\frac{3}{5}+0{,}425-0{,}005\right):0{,}1}{30{,}5+\frac{1}{6}+3\frac{1}{3}}+\frac{6\frac{3}{4}+5\frac{1}{2}}{26:3\frac{5}{7}}-0{,}05.$$

1.012. $$\frac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0{,}16}:\frac{3{,}5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0{,}5\left(1\frac{1}{20}+4{,}1\right)}.$$

1.013. $$\frac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right)\cdot 1{,}7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\frac{4{,}75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0{,}25.$$

1.014. $$\frac{\left(4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}-6{,}75\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(3\frac{1}{3}\cdot 0{,}3+5\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right):2\frac{2}{3}}+\frac{1\frac{4}{11}\cdot 0{,}22:0{,}3-0{,}96}{\left(0{,}2-\frac{3}{40}\right)\cdot 1{,}6}.$$

1.015. $$\frac{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{0{,}625-\frac{13}{18}:\frac{26}{9}}+\frac{\left(\frac{0{,}216}{0{,}15}+0{,}56\right):0{,}5}{\left(7{,}7:24\frac{3}{4}+\frac{2}{15}\right)\cdot 4{,}5}.$$

1.016. $$\left(16\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+2{,}2\left(\frac{8}{33}-\frac{1}{11}\right)+\frac{2}{11}.$$

1.017. $$\frac{0{,}128:3{,}2+0{,}86}{\frac{5}{6}\cdot 1{,}2+0{,}8}\cdot\frac{\left(1\frac{32}{63}-\frac{13}{21}\right)\cdot 3{,}6}{0{,}505\cdot\frac{2}{5}-0{,}002}.$$

1.018. $$\frac{3\frac{1}{3}:10+0{,}175:0{,}35}{1{,}75-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}-\frac{\left(\frac{11}{18}-\frac{1}{15}\right):1{,}4}{\left(0{,}5-\frac{1}{9}\right)\cdot 3}.$$

1.019. $$\frac{0{,}125:0{,}25+1\frac{9}{16}:2{,}5}{(10-22:2{,}3)\cdot 0{,}46+1{,}6}+\left(\frac{17}{20}+1{,}9\right)\cdot 0{,}5.$$

1.020. $\left(\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}-\left(0{,}6:3\frac{3}{4}\right)2\frac{1}{2}+3{,}75:1\frac{1}{2}\right):2{,}2.$

1.021. $\left(2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}+\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}\right)\cdot\frac{1}{3}.$

1.022. $\dfrac{0{,}5+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+0{,}125}{\frac{1}{3}+0{,}4+\frac{14}{15}}+\dfrac{(3{,}75-0{,}625)\cdot\frac{48}{125}}{12{,}8\cdot 0{,}25}.$

1.023. $\left(26\frac{2}{3}:6{,}4\right)\cdot\left(19{,}2:3\frac{5}{9}\right)-\dfrac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0{,}5:18\frac{2}{3}\cdot 11}-\dfrac{1}{18}.$

1.024. $\dfrac{0{,}725+0{,}6+\frac{7}{40}+\frac{11}{20}}{0{,}128\cdot 6\frac{1}{4}-0{,}0345:\frac{3}{25}}\cdot 0{,}25.$

1.025. $\left((520\cdot 0{,}43):0{,}26-217+2\frac{3}{7}\right)-\left(31{,}5:12\frac{3}{5}+114\cdot 2\frac{1}{3}+61\frac{1}{2}\right).$

1.026. $\dfrac{(3{,}4-1{,}275)\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\cdot\left(1\frac{7}{85}+6\frac{2}{17}\right)}+0{,}5\cdot\left(2+\dfrac{12{,}5}{5{,}75+\frac{1}{2}}\right).$

1.027. $\left(\dfrac{3{,}75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1{,}875}-\dfrac{2\frac{3}{4}+1{,}5}{2{,}75-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\dfrac{10}{11}.$

1.028. $((21{,}85:43{,}7+8{,}5:3{,}4):4{,}5):1\frac{2}{5}+1\frac{11}{21}.$

1.029. $\left(1\frac{2}{5}+3{,}5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3{,}4:2\frac{1}{8}-0{,}35.$

1.030. $\dfrac{\left(0{,}3275-\left(2\frac{15}{88}+\frac{4}{33}\right):12\frac{2}{9}\right):0{,}07}{(13-0{,}416):6{,}05+1{,}92}.$

1.031. $\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{21}{45}}{1\frac{5}{6}}\cdot\dfrac{1{,}125+1\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{0{,}59}.$

1.032. $$\frac{\left(3^{-1}-\sqrt{1\frac{7}{9}}\right)^{-2}:0{,}25}{\frac{37}{300}:0{,}0925}+12{,}5\cdot 0{,}64.$$

1.033. $$\frac{\left(\frac{5}{8}+2\frac{17}{24}\right):2{,}5}{\left(1{,}3+\frac{23}{30}+\frac{4}{11}\right)\cdot\frac{110}{401}}\cdot 0{,}5.$$

1.034. $$\frac{((7-6{,}35):6{,}5+9{,}9)\cdot\frac{1}{12{,}8}}{\left(1{,}2:36+1\frac{1}{5}:0{,}25-1\frac{5}{6}\right)\cdot 1\frac{1}{4}}:0{,}125.$$

1.035. $$\frac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot\frac{26}{99}}{\left(18\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot 0{,}5.$$

1.036. $$\frac{3{,}75:1\frac{1}{2}+\left(1{,}5:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}.$$

1.037. $$\frac{\left(\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):\frac{9}{4}+2{,}5:1{,}25:6{,}75\right):1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}.$$

1.038. $$\frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}.$$

1.039. $$\left(\frac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{20}+1{,}364:0{,}124.$$

1.040. $$5\frac{4}{7}:\left(8{,}4\cdot\frac{6}{7}\cdot\left(6-\frac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{8\cdot 0{,}0125+6{,}9}\right)-20{,}384:1{,}3\right).$$

Найти X из пропорции (1.041–1.045):

1.041. $\dfrac{\left(4-3{,}5\cdot\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0{,}16}{X}=\dfrac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}.$

1.042. $\dfrac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0{,}8}=\dfrac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{X}.$

1.043. $\dfrac{0{,}125X}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}=\dfrac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}.$

1.044. $\dfrac{X}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\dfrac{9\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}.$

1.045. $\dfrac{15{,}2\cdot 0{,}25-48{,}51:14{,}7}{X}=\dfrac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{3{,}2+0{,}8\left(5\frac{1}{2}-3{,}25\right)}.$

Вычислить наиболее рациональным способом (1.046–1.048):

1.046. $\dfrac{\sqrt{6{,}3\cdot 1{,}7}\left(\sqrt{\frac{6{,}3}{1{,}7}}-\sqrt{\frac{1{,}7}{6{,}3}}\right)}{\sqrt{(6{,}3+1{,}7)^2-4\cdot 6{,}3\cdot 1{,}7}}.$

1.047. $\left(\dfrac{\sqrt{561^2-459^2}}{4\frac{2}{7}\cdot 0{,}15+4\frac{2}{7}:\frac{20}{3}}+4\sqrt{10}\right):\dfrac{1}{3}\sqrt{40}.$

1.048. $\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2.$

Вычислить (1.049–1.050):

1.049. $\dfrac{2^{-2}+5^0}{(0{,}5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4{,}75.$

1.050. $\dfrac{(0{,}6)^0-(0{,}1)^{-1}}{(3:2^3)^{-1}\cdot(1{,}5)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}.$

ГЛАВА 2

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Свойства степеней

Для любых x и y и любых положительных a и b верны следующие равенства:

$$a^0 = 1; \tag{2.1}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \tag{2.2}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \tag{2.3}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \tag{2.4}$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \tag{2.6}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{2.7}$$

Формулы преобразования многочленов

Для любых a, b и c верны следующие равенства:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \tag{2.8}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \tag{2.9}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \tag{2.10}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{или } (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b); \tag{2.11}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{или } (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b); \tag{2.12}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \tag{2.13}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \tag{2.14}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{2.15}$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных n и k, больших 1, и любых неотрицательных a и b верны следующие равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \tag{2.16}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b \neq 0); \tag{2.17}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \tag{2.18}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}; \tag{2.19}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \tag{2.20}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \ (a \geq 0); \tag{2.21}$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } 0 \leq a < b; \tag{2.22}$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geq 0, \\ -a \text{ при } a < 0; \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \tag{2.24}$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \ (a \geq 0). \tag{2.25}$$

Пример 1. Упростить выражение

$$\frac{x^4 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + \sqrt{3x} + 1} + 2\left(\sqrt[6]{27x^3} - \frac{1}{2}\right).$$

□ Обозначим дробь через A, а выражение в скобках – через B; тогда заданное выражение примет вид $A + 2B$. Заметим, что для $\sqrt{3x}$ и $\sqrt[6]{27x^3}$ допустимыми являются только значения $x \geq 0$, при которых знаменатель дроби A не равен нулю. Поэтому и для заданного выражения допустимыми являются только значения $x \geq 0$.

Используя формулу (2.9), выделяем в числителе дроби A полный квадрат:

$$x^4 + 2x^2 + 1 - 3x = (x^2 + 1)^2 - 3x.$$

Так как $x \geq 0$, то в силу равенства (2.21) имеем $3x = (\sqrt{3x})^2$. Тогда полученное выражение с помощью формулы (2.8) можно разложить на множители как разность квадратов:

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3x})^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{3x})(x^2 + 1 + \sqrt{3x}).$$

Следовательно,

$$A=\frac{(x^2-\sqrt{3x}+1)(x^2+\sqrt{3x}+1)}{x^2+\sqrt{3x}+1}=x^2-\sqrt{3x}+1.$$

Далее на основании формулы (2.20) имеем $\sqrt[6]{27x^3}=\sqrt[6]{(3x)^3}=\sqrt{3x}$, откуда $B=\sqrt{3x}-\frac{1}{2}$. Итак, $A+2B=x^2-\sqrt{3x}+1+2\sqrt{3x}-1=x^2+\sqrt{3x}$. ■

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b},\ 0<a<2b.$$

□ Имеем $\sqrt{a^2-4ab+4b^2}=\sqrt{(a-2b)^2}=|a-2b|=2b-a$, аналогично, $\sqrt{a^2+4ab+4b^2}=|a+2b|=a+2b$; здесь были использованы формулы (2.9), (2.10) и (2.23). Следовательно, $\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}=\frac{2b-a}{2b+a}$. Теперь находим

$$\frac{2b-a}{2b+a}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b}=\frac{(2b-a)\,(a-2b)-8ab+2b(a+2b)}{a^2-4b^2}=\frac{a}{2b-a}.\ ■$$

Пример 3. Упростить выражение

$$f(x)=\frac{x^2+4x-5+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{x^2-4x-5+(x+5)\sqrt{x^2-1}},\ x>1.$$

□ Используя формулу (2.15), разложим на множители квадратные трехлены в числителе и знаменателе дроби:

$$f(x)=\frac{(x+5)(x-1)+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{(x-5)(x+1)+(x+5)\sqrt{x^2-1}}.$$

Так как $x>1$, то в силу соотношения (2.21) имеем $x-1=\sqrt{(x-1)^2}$ и $x+1=\sqrt{(x+1)^2}$. Значит,

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}\,((x+5)\sqrt{x-1}+(x-5)\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}\,((x-5)\sqrt{x+1}+(x+5)\sqrt{x-1})},$$

откуда после сокращения получим $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. ■

Пример 4. Не прибегая к приближенным вычислениям, упростить числовое выражение

$$A=(4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}-\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}})\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}.$$

□ Используя формулы (2.16), (2.8), (2.20) и (2.10), находим:

1) $4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}=4\sqrt[3]{\frac{12-1}{11}}=4;$

2) $\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}}\sqrt[6]{\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{11}\right)^2}=\sqrt[6]{(13+4\sqrt{3})\frac{12-4\sqrt{3}+1}{11^2}}=$

$=\sqrt[6]{\frac{(13+4\sqrt{3})(13-4\sqrt{3})}{11^2}}=\sqrt[6]{\frac{169-48}{11^2}}=1.$

Окончательно получим $A = 4 - 1 = 3$. ■

Пример 5. Проверить справедливость равенства

$$\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=4.$$

□ Положим $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=x$. Возведем в куб обе части этого равенства. Используя формулу (2.11), получаем

$$38+\sqrt{1445}+38-\sqrt{1445}+3\sqrt[3]{(38+\sqrt{1445})(38-\sqrt{1445})}\;x=x^3,$$

или $x^3 + 3x - 76 = 0$. Подстановкой $x = 4$ убеждаемся в том, что $x = 4$ является одним из корней полученного кубического уравнения: $64 + 12 - 76 = 0$.

Преобразуем это кубическое уравнение:

$x^3 - 64 = 3(4 - x)$; $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 3(x - 4) = 0$; $(x - 4)(x^2 + 4x + 19) = 0$.

Но множитель $x^2 + 4x + 19$ не имеет действительных корней. Значит, 4 — единственное возможное действительное значение для x, чем и доказано требуемое равенство (поскольку очевидно, что $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}$ — действительное число). ■

Пример 6. Проверить справедливость равенства

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2.$$

□ Рассмотрим равенство

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Очевидно, что если оно верно, то верно и заданное равенство. Пусть $a=\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}$, $b=2+\sqrt{3}$. Легко установить, что $a>0$ и $b>0$. Если при этом выполняется равенство $a^2=b^2$, то $a=b$. Находим

$$a^2=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})^2}=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{19-8\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3};$$

$$b^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}.$$

Так как $a^2=b^2$, то $a=b$, т.е. заданное равенство справедливо.

Этот пример можно решить быстрее, если догадаться, что оба подкоренных выражения в условии являются квадратами положительных чисел, а именно: $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ и $19-8\sqrt{3}=(4-\sqrt{3})^2$. Тогда левая часть заданного равенства есть $\frac{(2+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$ и $2=2$. ■

Пример 7. Чему равна сумма выражений $\sqrt{24-t^2}$ и $\sqrt{8-t^2}$, если известно, что их разность равна 2 (значение переменной t находить не нужно)?

□ Согласно условию, $\sqrt{24-t^2}-\sqrt{8-t^2}=2$. Используя формулу $a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}$, получим $\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}=\frac{24-8}{2}=8$. ■

Группа А

Упростить выражения и вычислить их, если даны числовые значения параметров (2.001–2.124):

2.001. $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$

2.002. $\left((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-2}\right):\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}.$

2.003. $\frac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\sqrt{a^3b}}:\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right);\ a>b>0.$

2.004. $\left(\dfrac{(a+b)^{-n/4}c^{1/2}}{a^{2-n}b^{-3/4}}\right)^{4/3}:\left(\dfrac{b^3c^4}{(a+b)^{2n}a^{16-8n}}\right)^{1/6}$; $b=0{,}04$.

2.005. $\dfrac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\dfrac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$.

2.006. $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\dfrac{1}{b}}+3\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)}:\dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}$.

2.007. $\dfrac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}$.

2.008. $\left(\left(\dfrac{2^{3/2}+27y^{3/5}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2}-2\right)3^{-2}\right)^5$.

2.009. $\dfrac{2\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)}$.

2.010. $t\cdot\dfrac{1+\dfrac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\sqrt{t+4}+\dfrac{4}{\sqrt{t+4}}$.

2.011. $\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

2.012. $\dfrac{x-1}{x+x^{0,5}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$.

2.013. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}\right)$.

2.014. $\dfrac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}}\cdot\dfrac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/4}y^{-1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}}$.

2.015. $\sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}} : \sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}$.

2.016. $\left(\dfrac{(z^{2/p}+z^{2/q})^2-4z^{2/p+2/q}}{(z^{1/p}-z^{1/q})^2+4z^{1/p+1/q}}\right)^{1/2}$.

2.017. $\dfrac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1$.

2.018. $\left(\dfrac{1+x+x^2}{2x+x^2}+2-\dfrac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1}(5-2x^2)$; $x=\sqrt{3{,}92}$.

2.019. $\dfrac{(x^2-y^2)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$; $x=64$.

2.020. $\sqrt{\dfrac{2a}{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4+\frac{8}{a}+\frac{4}{a^2}}{\sqrt{2}}}$.

2.021. $\dfrac{4x(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})^4-1}$.

2.022. $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-2:\sqrt{x}}$.

2.023. $\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

2.024. $\sqrt[6]{4x(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

2.025. $\dfrac{a^3-a-2b-b^2a^{-1}}{\left(1-\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}}\right)(a+\sqrt{a+b})}:\left(\dfrac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a-b}\right)$; $a=23$, $b=22$.

2.026. $\dfrac{\left(\sqrt[5]{a^{4/3}}\right)^{3/2}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^6}$.

2.027. $\dfrac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

2.028. $\dfrac{x(x^2-a^2)^{-1/2}+1}{a(x-a)^{-1/2}+(x-a)^{1/2}}:\dfrac{a^2\sqrt{x+a}}{x-(x^2-a^2)^{1/2}}+\dfrac{1}{x^2-ax}.$

2.029. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{(r^2+4)\sqrt{1+\frac{4}{r^2}}}-\sqrt[3]{(r^2-4)\sqrt{1-\frac{4}{r^2}}}\right)^2}{r^2-\sqrt{r^4-16}}.$

2.030. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{a}+\dfrac{a}{\sqrt{2}}+2}-\dfrac{a^2\sqrt[4]{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}.$

2.031. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{1/2}\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)(a-\sqrt{a^3})^{-1}.$

2.032. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{abc+4}{a}+4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}+2};\ a=0{,}04.$

2.033. $\dfrac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}.$

2.034. $1-\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\dfrac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}.$

2.035. $\left(\dfrac{a+2}{\sqrt{2a}}-\dfrac{a}{\sqrt{2a}+2}+\dfrac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}.$

2.036. $\left(\sqrt[4]{36mn^2p}+m\sqrt{\dfrac{3n}{m}}+\sqrt{3np}\right)\left(\sqrt[4]{36mn^2p}-\sqrt{3mn}-p\sqrt{\dfrac{3n}{p}}\right).$

2.037. $\dfrac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}-\dfrac{2}{x^{3/2}}+\dfrac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}.$

2.038. $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right).$

2.039. $$\frac{9b^{4/3}-\dfrac{a^{3/2}}{b^2}}{\sqrt{a^{3/2}b^{-2}+6a^{3/4}b^{-1/3}+9b^{4/3}}}\cdot\frac{b^2}{a^{3/4}-3b^{5/3}};\ b=4.$$

2.040. $$\frac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{a-b-c}{abc};\ a=0{,}02,\ b=-11{,}05,\ c=1{,}07.$$

2.041. $$\frac{1}{2(1+\sqrt{a})}+\frac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\frac{a^2+2}{1-a^3}.$$

2.042. $$\frac{\sqrt{2}(x-a)}{2x-a}-\left(\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)^{1/2};\ a=0{,}32,\ x=0{,}08.$$

2.043. $$\frac{\left(m^2-\dfrac{1}{n^2}\right)^m\left(n+\dfrac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\dfrac{1}{m^2}\right)^n\left(m-\dfrac{1}{n}\right)^{m-n}}.$$

2.044. $$\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1};\ x>a>0.$$

2.045. $$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2+\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}.$$

2.046. $$\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right).$$

2.047. $$\frac{\dfrac{a-b}{2a-b}-\dfrac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{(4b^4+4ab^2+a^2):(2b^2+a)}(b^2+b+ab+a).$$

2.048. $$\frac{(2p-q)^2+2q^2-3pq}{2p^{-1}+q^2}:\frac{4p^2-3pq}{2+pq^2};\ p=0{,}78,\ q=\frac{7}{25}.$$

2.049. $$\left(\frac{pq^3}{(p+q)^{5/2}}-\frac{2pq^2}{(p+q)^{3/2}}+\frac{pq}{\sqrt{p+q}}\right):\left(\frac{p^2}{(p+q)^{5/2}}-\frac{p^2q}{(p+q)^{7/2}}\right).$$

2.050. $\dfrac{2(x^4+4x^2-12)+x^4+11x^2+30}{x^2+6}$.

2.051. $\dfrac{(a^2-b^2)(a^2+\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{b}}{a\sqrt[3]{b}+a\sqrt{a}-b\sqrt[3]{b}-\sqrt{ab^2}}:\dfrac{a^3-b}{a\sqrt[3]{b}-\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt{a}}$;

$a=4{,}91,\ b=0{,}09.$

2.052. $\left((1-x^2)^{-1/2}+1+\dfrac{1}{(1-x^2)^{-1/2}-1}\right)^{-2}:(2-x^2-2\sqrt{1-x^2})$.

2.053. $((1-p^2)^{-1/2}-(1+p^2)^{-1/2})^2+2(1-p^4)^{-1/2}$.

2.054. $\dfrac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\dfrac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$.

2.055. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}}+\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}}-2\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-y}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+y}}\right)$.

2.056. $\left(\dfrac{4}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}:\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}-\dfrac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}$.

2.057. $\left(\left(\dfrac{x}{y-x}\right)^{-2}-\dfrac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2\dfrac{x^4}{x^2y^2-y^4}$.

2.058. $\left(\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$;

$a=1\dfrac{33}{40},\ b=0{,}625,\ c=3{,}2.$

2.059. $\left(\left(\dfrac{x^2}{y^3}+\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)\right):\dfrac{(x-y)^2+4xy}{1+yx^{-1}}$.

2.060. $\left(\dfrac{3}{2x-y}-\dfrac{2}{2x+y}-\dfrac{1}{2x-5y}\right):\dfrac{y^2}{4x^2-y^2}$.

2.061. $\left(x^2+2x-\frac{11x-2}{3x+1}\right):\left(x+1-\frac{2x^2+x+2}{3x+1}\right);\ x=7,(3).$

2.062. $\left(6a^2+5a-1+\frac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\frac{3}{a+1}\right).$

2.063. $\frac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\frac{x^2}{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}.$

2.064. $\frac{2b+a-\frac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}.$

2.065. $\frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}).$

2.066. $\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}}.$

2.067. $\frac{a^{1/2}+ab^{-1}}{a^{-1/3}-a^{-1/6}b^{-1/3}+b^{-2/3}}-\frac{a}{\sqrt[3]{b}}.$

2.068. $\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}};\ a=7{,}4,\ b=\frac{5}{37}.$

2.069. $\frac{a^{7/3}-2a^{5/3}b^{2/3}+ab^{4/3}}{a^{5/3}-a^{4/3}b^{1/3}-ab^{2/3}+a^{2/3}b}:a^{1/3}.$

2.070. $\frac{(a^2-b^2)(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}.$

2.071. $\frac{(m-1)\sqrt{m}-(n-1)\sqrt{n}}{\sqrt{m^3n}+mn+m^2-m}.$

2.072. $\frac{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})+\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^3b}}\cdot\sqrt[3]{a^2}.$

2.073. $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}$.

2.074. $\dfrac{(a^{1/m}-a^{1/n})^2 4a^{(m+n)/(mn)}}{(a^{2/m}-a^{2/n})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}$.

2.075. $\dfrac{(x^{2/m}-9x^{2/n})\left(\sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}}\right)}{(x^{1/m}+3x^{1/n})^2-12x^{(m+n)/(mn)}}$.

2.076. $\dfrac{3\sqrt{12}}{\sqrt{45-4\sqrt{3}}}+5\sqrt{2{,}4}\,(\sqrt{15}+3)$.

2.077. $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}$; $a=1-\sqrt{2},\, b=1+\sqrt{2}$.

2.078. $\left(\dfrac{1}{t^2+3t+2}+\dfrac{2t}{t^2+4t+3}+\dfrac{1}{t^2+5t+6}\right)^2\dfrac{(t-3)^2+12t}{2}$.

2.079. $\left(\sqrt{\sqrt{m}-\sqrt{\dfrac{m^2-9}{m}}}+\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{\dfrac{m^2-9}{m}}}\right)^2\sqrt[4]{\dfrac{m^2}{4}}$.

2.080. $\dfrac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\dfrac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a^3-b^3)}$.

2.081. $\left(\dfrac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}-\dfrac{2\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+2}}-\dfrac{4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{1/2}:\sqrt[4]{t^2-4}$.

2.082. $\dfrac{1}{b(abc+a+c)}-\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}:\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}$.

2.083. $\left(2-x+4x^2+\dfrac{5x^2-6x+3}{x-1}\right):\left(2x+1+\dfrac{2x}{x-1}\right)$.

2.084. $\left(\dfrac{2-b}{b-1}+2\dfrac{a-1}{a-2}\right):\left(b\cdot\dfrac{a-1}{b-1}+a\cdot\dfrac{2-b}{a-2}\right)$; $a=\sqrt{2}+0{,}8,\; b=\sqrt{2}-0{,}2$.

2.085. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$

2.086. $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\dfrac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}.$

2.087. $\dfrac{\sqrt{3}(a-b^2)+\sqrt{3}b\cdot\sqrt[3]{8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\dfrac{3}{a}}-\sqrt{\dfrac{3}{c}}}.$

2.088. $(\sqrt{1-x^2}+1):\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right).$

2.089. $\dfrac{8-n}{2+\sqrt[3]{n}}:\left(2+\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt[3]{n}}\right)-\left(\sqrt[3]{n}+\dfrac{2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}-2}\right)\dfrac{4-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}+2\sqrt[3]{n}}.$

2.090. $\dfrac{(a-b)^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3(\sqrt{ab}-b)}{a-b}.$

2.091. $\dfrac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{1/2}+x^{1/3}y^{1/6}}\cdot\dfrac{(x^{1/3}+y^{1/3})^2-4\sqrt[3]{xy}}{x^{5/6}y^{1/3}-x^{1/2}y^{2/3}}+2x^{-2/3}y^{-1/6}.$

2.092. $\left(x\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{(x+1)^2}}+\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)^{-3/5}:(x^2-1)^{4/5}.$

2.093. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{t}}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{t}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}+2\right).$

2.094. $\dfrac{m^{4/3}-27m^{1/3}\cdot n}{m^{2/3}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{2/3}}:\left(1-3\sqrt[3]{\dfrac{n}{m}}\right)-\sqrt[3]{m^2}.$

2.095. $z^{\frac{p-3}{p^2+3p}}:z^{\frac{12}{9-p^2}}\cdot z^{\frac{3}{3p-p^2}}.$

2.096. $\sqrt{\dfrac{x}{x-a^2}}:\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right).$

2.097. $\dfrac{(\sqrt{x}+2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-1\right)-(\sqrt{x}-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}+1\right)-\dfrac{8}{\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x+2}):\left(\sqrt{\dfrac{2}{x}+1}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)}$.

2.098. $\dfrac{1-\sqrt{2t}}{\dfrac{1-\sqrt[4]{8t^3}}{1-\sqrt[4]{2t}}-\sqrt{2t}}\left(\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{1}{2t}}+\sqrt[4]{4t^2}}{1+\sqrt[4]{\dfrac{1}{2t}}}-\sqrt{2t}\right)^{-1}$.

2.099. $\dfrac{(x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{2/3})}{(\sqrt[3]{x^4}-8y\sqrt[3]{x}):\sqrt[3]{xy}}\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\right)$.

2.100. $\dfrac{(z-z\sqrt{z}+2-2\sqrt{z})^2(1+\sqrt{z})^2}{z-2+\dfrac{1}{z}}-z\sqrt{z}\sqrt{\dfrac{4}{z}+4+z}$.

2.101. $\left(\dfrac{1}{a+\sqrt{2}}-\dfrac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{a}\right)^{-1}$.

2.102. $\left(\dfrac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right)\dfrac{1+a(a-2)}{a^2-a+1}\sqrt{\dfrac{1}{(a+1)^2}}$.

2.103. $(\sqrt{ab}-ab(a+\sqrt{ab})^{-1}):(2((ab)^{1/2}-b)(a-b)^{-1})$.

2.104. $\left(\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{b-\dfrac{4a^6}{b^3}}-a^2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a^6}-\dfrac{4}{b^3}}+\dfrac{2}{ab}\sqrt[3]{a^3b^4-4a^9}\right):\dfrac{\sqrt[3]{b^2-2a^3}}{b^2}$.

2.105. $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\cdot\dfrac{x^2-1}{2}+\sqrt{1-x^2}$.

2.106. $\dfrac{4a^2-b^2}{a^6-8b^6}\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}\ \dfrac{a^4+2a^2b^2+4b^4}{4a^2+4ab+b^2}\sqrt{a^2+2b\sqrt{a^2-b^2}}$;

$a=\dfrac{4}{3},\ b=0{,}25.$

2.107. $\dfrac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\dfrac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right);\ x=\dfrac{1}{a-1}$.

2.108. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\left(\frac{a+b}{2a}-\frac{b}{a+b}\right):\left(\left(a+2b+\frac{b^2}{a}\right)\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\right);$

$a=0{,}75,\ b=\frac{4}{3}.$

2.109. $\left(-4a\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ax}}{a^2}}\right)^3+\left(-10a\sqrt{x}\cdot\sqrt{(ax)^{-1}}\right)^2+\left(-2\left(\sqrt[3]{a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}}\right)^2\right)^3;$

$a=3\frac{4}{7},\ x=0{,}28.$

2.110. $\frac{\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}}\left(\sqrt{\frac{c-d}{c+d}}+\sqrt{\frac{c^2+cd}{c^2-cd}}\right);\ c=2,\ d=\frac{1}{4}.$

2.111. $\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}.$

2.112. $\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-t^3}+\sqrt[3]{\frac{t^5+2t^4+4t^3}{4-4t+t^2}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{2}}\right).$

2.113. $\frac{x^{3/p}-x^{3/q}}{(x^{1/p}+x^{1/q})^2-2x^{1/q}(x^{1/q}+x^{1/p})}+\frac{x^{1/p}}{x^{(q-p)/pq}+1}.$

2.114. $\left(\frac{9-4a^{-2}}{3a^{-1/2}+2a^{-3/2}}-\frac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-1/2}+3a^{-3/2}}\right)^4.$

2.115. $4ab+\frac{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\right)a^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}-\frac{\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}}.$

2.116. $\left(\left(\sqrt{mn}-\frac{mn}{m+\sqrt{mn}}\right):\frac{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}{m-n}-m\sqrt{n}\right)^2:\sqrt[3]{mn\sqrt{mn}}-\left(\frac{m}{\sqrt{m^4-1}}\right)^{-2}.$

2.117. $\left((a^{1/2}-b^{1/2})^{-1}(a^{3/2}-b^{3/2})-\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-2}}\right):\sqrt[3]{ab\sqrt{ab}}+$

$+\frac{1}{1+(a(1-a^2)^{-1/2})^2}.$

2.118. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}$.

2.119. $\frac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}$.

2.120. $\frac{15\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+21\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}$.

2.121. $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$.

2.122. $5\sqrt{48\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}+\sqrt{32\sqrt[3]{\frac{9}{4}}}-11\sqrt[3]{12\sqrt{8}}$.

2.123. $2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2\sqrt[4]{75}-4\sqrt{15\sqrt{27}}$.

2.124. $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$.

Проверить справедливость равенств (2.125–2.134):

2.125. $4:\left(0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)=10\sqrt[4]{1{,}5}:(0{,}25\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}})$.

2.126. $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$.

2.127. $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8$.

2.128. $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=-\sqrt[3]{3}$.

2.129. $\frac{25\sqrt[4]{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{250}+5\sqrt[4]{8}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{5}{\sqrt{2}}+2}=-1$.

2.130. $\frac{\sqrt{\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}}=\sqrt{2}$.

2.131. $\left(\frac{4}{3-\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{6-5\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}\right)^2=2\sqrt{61+24\sqrt{5}}$.

2.132. $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

2.133. $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

2.134. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}$.

Сделать указанную подстановку и результат упростить (2.135–2.145):

2.135. $\dfrac{x^3-a^{-2/3}b^{-1}(a^2+b^2)x+b^{1/2}}{b^{3/2}x^2}$; $x=a^{2/3}\,b^{-1/2}$.

2.136. $\dfrac{1-b}{\sqrt{b}}x^2-2x+\sqrt{b}$; $x=\dfrac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}$.

2.137. $\left(\dfrac{x+2b}{x-2b}+\dfrac{x+2a}{x-2a}\right):\dfrac{x}{2}$; $x=\dfrac{4ab}{a+b}$.

2.138. $(x+1)(x+2)\,(x+3)(x+4)$; $x=\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}$.

2.139. $\dfrac{(z-1)(z+2)(z-3)(z+4)}{23}$; $z=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

2.140. $\dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)\,(x+4)}$; $x=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$.

2.141. $\dfrac{(1-y)(y+2)}{y^2\,(y+1)^2}$; $y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

2.142. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}}$; $x=\sqrt{6}$.

2.143. $\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$; $a>b>0$.

2.144. $\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$; $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$; $a>0,\,b>0$.

2.145. $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}$; $x=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}$; $0<\dfrac{b}{2}<a<b$.

Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби (2.146–2.151):

2.146. $\dfrac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}}$.

2.147. $\dfrac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$.

2.148. $\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

2.149. $\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

2.150. $\dfrac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

2.151. $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}$.

2.152. Показать, что если

$$z=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a},$$

то $z^3+3bz-2a=0$.

2.153. Если $\sqrt{8-a}+\sqrt{5+a}=5$, то чему равен $\sqrt{(8-a)(5+a)}$?

2.154. Чему равна сумма $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$, если известно, что разность $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$ (величину x находить не нужно)?

2.155. Преобразовать $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ так, чтобы получилось $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

2.156. Вычислить сумму кубов двух чисел, если их сумма и произведение соответственно равны 11 и 21.

2.157. Вычислить значение выражения:

а) $\dfrac{z^3}{3}-z$; $z=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

б) x^3+3x; $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

Группа Б

Упростить выражения и вычислить их, если даны значения параметров (2.158–2.284):

2.158. $\sqrt[4]{(1-2a+a^2)(a^2-1)(a-1)}:\dfrac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}}$.

2.159. $\left(\left(\dfrac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt{a^3}}\right)^{3/2}+\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^3}}\right)^2\right):(a^{1/4}+b^{1/4})$.

2.160. $\dfrac{(a^2b\sqrt{b}-6a^{5/3}b^{5/4}+12ab\sqrt[3]{a}-8ab^{3/4})^{2/3}}{ab\sqrt[3]{a}-4ab^{3/4}+4a^{2/3}\sqrt{b}}$.

2.161. $\dfrac{a^3-3a^2+4+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}}{a^3+3a^2-4+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}}$; $a>1,\ a\neq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

2.162. $\dfrac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-4}{2}\right)^2+4}}$.

2.163. $\left(\dfrac{(x+\sqrt[3]{2ax^2})\,(2a+\sqrt[3]{4a^2x})^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-(2a)^{-1/3}\right)^{-6}$.

2.164. $\dfrac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}$; $x>3$.

2.165. $\dfrac{t^2-t-6-(t+3)\sqrt{t^2-4}}{t^2+t-6-(t-3)\sqrt{t^2-4}}$; $t>2$.

2.166. $\dfrac{\dfrac{|b-1|}{b}+b|b-1|+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}$.

2.167. $\dfrac{m^5+m^4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4m^9}}{|m^3-1|-1}$.

2.168. $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}\cdot|x-3|$.

2.169. $(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2)\dfrac{\sqrt[3]{m^4}-n^3+n^2\sqrt[3]{m}-mn}{mn^{-1}+n-n^4m^{-1}-n^2}$.

2.170. $\dfrac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$.

2.171. $\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}$.

2.172. $\left(2-\dfrac{1}{4a^{-1}}-\dfrac{4}{a}\right)\left((a-4)\sqrt[3]{(a+4)^{-3}}-\dfrac{(a+4)^{3/2}}{\sqrt{(a^2-16)\,(a-4)}}\right)$.

2.173. $\dfrac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}$.

2.174. $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{(x^3-4x^2+3x)\,|x-2|}$.

2.175. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}$.

2.176. $\dfrac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2a^2-5a-6}$.

2.177. $\dfrac{2x-x|x-1|+x|x|+3}{|x|+x^2}$.

2.178. $\dfrac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$.

2.179. $\dfrac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$.

2.180. $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}$.

2.181. $\dfrac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\left(\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2\right)^{1/3}}$.

2.182. $\dfrac{(ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2))\,((ax+by)^2-4abxy)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$.

2.183. $\dfrac{x\,|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$.

2.184. $\dfrac{2\,|a+5|-a+\dfrac{25}{a}}{3a^2+10a-25}$.

2.185. $\dfrac{x^2-1+|x+1|}{|x|\,(x-2)}$.

2.186. $\dfrac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\dfrac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}$.

2.187. $\dfrac{1+2a^{1/4}-a^{1/2}}{1-a+4a^{3/4}-4a^{1/2}}+\dfrac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}$.

2.188. $\dfrac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x}\,|2x^2-x-1|}$.

2.189. $\dfrac{|r-1|\,|r|}{r^2-r+1-|r|}$.

2.190. $\left(\dfrac{z-2}{6z+(z-2)^2}+\dfrac{(z+4)^2-12}{z^3-8}-\dfrac{1}{z-2}\right):\dfrac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}$.

2.191. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}+a}.$

2.192. $\dfrac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{1}{a}+a}.$

2.193. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\sqrt{x}(x+27)-9x-27}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}}.$

2.194. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{8+2\sqrt{15}}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\cdot\sqrt[6]{8-2\sqrt{15}}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}.$

2.195. $\dfrac{a^4-a^2-2a-1}{a^3-2a^2+1}:\dfrac{a^4+2a^3-a-2}{1+\dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{a^2}}.$

2.196. $\dfrac{\left|x^2-1\right|+x^2}{2x^2-1}-\dfrac{|x-1|}{x-1}.$

2.197. $\dfrac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}.$

2.198. $\dfrac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\cdot\sqrt{\dfrac{b+2}{b-2}};\ b>2.$

2.199. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}-2\sqrt[3]{n}+\dfrac{m-n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}\right):(\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}).$

2.200. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[12]{x^3y^4}\right)^{-1/2}\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+y}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right).$

2.201. $\sqrt{\dfrac{p^2-q\sqrt{p}}{\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}}+p\sqrt[3]{q}}\cdot(p+\sqrt[6]{p^3q^2})^{-1/2}.$

2.202. $\dfrac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\dfrac{m-4\sqrt{m-4}}{2}.$

2.203. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-2}\cdot\left(2x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}}$.

2.204. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

2.205. $\left(\dfrac{bx+4+\dfrac{4}{bx}}{2b+(b^2-4)x-2bx^2}+\dfrac{(4x^2-b^2)\dfrac{1}{b}}{(b+2x)^2-8bx}\right)\dfrac{bx}{2}$.

2.206. $\dfrac{\sqrt[3]{x^9-x^6y^3}-y^2\sqrt[3]{\dfrac{8x^6}{y^3}-8x^3}+xy\sqrt[3]{y^3-\dfrac{y^6}{x^3}}}{\sqrt[3]{x^8}(x^2-2y^2)+\sqrt[3]{x^2y^{12}}}:\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}{x+y}$.

2.207. $\dfrac{(x^2-3x+2)^{-1/2}-(x^2+3x+2)^{-1/2}}{(x^2-3x+2)^{-1/2}+(x^2+3x+2)^{-1/2}}-1+\dfrac{(x^4-5x^2+4)^{1/2}}{3x}$.

2.208. $\dfrac{((\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2-(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2)^2-(16m+4n)}{4m-n}+\dfrac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt{m}}$.

2.209. $\left(\dfrac{x-9}{x+3x^{0,5}+9}:\dfrac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5}-x^{0,5}$.

2.210. $\dfrac{2\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}}{2\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)}$.

2.211. $(z^2-z+1):\left(\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2+2\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2-3\right)^{1/2}$.

2.212. $(x^4-7x^2+1)^{-2}\left(\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-14\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+77\right);\ x=\dfrac{\sqrt[4]{125}}{5}$.

2.213. $\dfrac{\sqrt{1+\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)^2}}{(x^2+1)\cdot\dfrac{1}{x}}$.

2.214. $\dfrac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2}}$.

2.215. $\left((z-3)(z+3)^{-1}-\dfrac{(z+3)^{3/2}}{\sqrt{(z^2-9)(z-3)}}\right)\cdot\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{z}{18}-\dfrac{1}{2z}}{(z+3)^{-1}}$.

2.216. $\left(\sqrt{\dfrac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\dfrac{m-2}{m+2}}\right):\left(\sqrt{\dfrac{m+2}{m-2}}-\sqrt{\dfrac{m-2}{m+2}}\right)$.

2.217. $\dfrac{b^{-1/6}\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{b^2}}{(2a^2-b^2-ab)\sqrt[6]{a^9b^4}}:\left(\dfrac{3a^3}{2a^2-ab-b^2}-\dfrac{ab}{a-b}\right)$.

2.218. $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$.

2.219. $\left(\dfrac{9}{a+8}-\dfrac{a^{1/3}+2}{a^{2/3}-2a^{1/3}+4}\right)\dfrac{a^{4/3}+8a^{1/3}}{1-a^{2/3}}+\dfrac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}$.

2.220. $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}}$.

2.221. $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2+\sqrt{1-x^2}}$.

2.222. $\left(\dfrac{2-n}{n-1}+4\dfrac{m-1}{m-2}\right):\left(n^2\cdot\dfrac{m-1}{n-1}+m^2\cdot\dfrac{2-n}{m-2}\right)$; $m=\sqrt[4]{400}$, $n=\sqrt{5}$.

2.223. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}+\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}-\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}$.

2.224. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}}+|x-2|$.

2.225. $\left(x^2-6x+1+\left(\dfrac{\dfrac{x-3}{1+3x}-\dfrac{x-5}{1+5x}}{1+\dfrac{(x-5)(x-3)}{(1+5x)(1+3x)}}\right)^{-1}\right)^{1/2}$.

2.226. $\left(\frac{1}{(x+3)^2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{9}\right)+\frac{2}{(x+3)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)\right)^{-1/2}.$

2.227. $\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}}.$

2.228. $\sqrt{\left(y^2+\frac{4}{y^2}\right)-8\left(y+\frac{2}{y}\right)^2+48}.$

2.229. $\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}+\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}};\ x=2.$

2.230. $\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}};\ x=3.$

2.231. $\frac{1+z}{1+\sqrt{1+z}}-\frac{1-z}{1-\sqrt{1-z}};\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2.232. $\frac{a^2-3}{\sqrt{\left(\frac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}.$

2.233. $\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}-(1-a^2).$

2.234. $\frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1}+\frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1};\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2.235. $\frac{(x+1)^{-1/2}}{(x-1)^{-1/2}-(x+1)^{-1/2}};\ x=\frac{a^2+1}{2a}.$

2.236. $\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}-z};\ z=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right).$

2.237. $\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-2\right)^{1/2};\ x=\frac{a^3+1}{a^3-1}.$

2.238. $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2-\sqrt{2x}}{x^2+x-\sqrt{2x}+2}.$

2.239. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{4}\right):\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{128}\right)^{1/2}.$

2.240. $\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}}.$

2.241. $\left(\dfrac{4-2x+x^2}{4-2x}+\dfrac{6x^2+8+12x}{4-x^2}-\dfrac{x^2+2x+4}{2x+4}\right)^{-1/3}(x+2).$

2.242. $\left(\dfrac{\sqrt{(z+2)^2-8z}}{z+2}+\dfrac{(z-1)^2+3}{z^3+8}\right):\dfrac{z^2-3z+2}{z^3-2z^2-4z+8}.$

2.243. $\left(\dfrac{x^4+5x^3+15x-9}{x^6+3x^4}+\dfrac{9}{x^4}\right):\dfrac{x^3-4x+3x^2-12}{x^5}.$

2.244. $\dfrac{a(a-2)-b(b+2)+\sqrt{ab}\,(b-a+2)}{a+b-\sqrt{ab}}:\left(1+2\dfrac{a^2+b^2+ab}{b^3-a^3}\right).$

2.245. $\dfrac{((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2})^{-1}+((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2})^{-1}}{((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2})^{-1}-((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2})^{-1}}.$

2.246. $\dfrac{(x\sqrt[4]{x}-\sqrt{xy}\,(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})-y\sqrt[4]{y})\,(x+y+\sqrt{xy})}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})\,((\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2+\sqrt[4]{xy})}.$

2.247. $\dfrac{ab^{2/3}-\sqrt[3]{b^2}-a+1}{(1-\sqrt[3]{a})((\sqrt[3]{a}+1)^2-\sqrt[3]{a})(b^{1/3}+1)}+\sqrt[3]{ab}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}+b^{-1/3}\right).$

2.248. $\dfrac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}.$

2.249. $\sqrt[4]{\dfrac{x}{32}}\cdot\dfrac{(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{2})^2+(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{2})^2}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{2x}}:\dfrac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[8]{2x})\,(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{2x})}{2-\sqrt[4]{2x^3}}.$

2.250. $\left(\dfrac{2(a+1)+2\sqrt{a^2+2a}}{3a+1-2\sqrt{2a^2+a}}\right)^{1/2}-(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a})^{-1}\sqrt{a+2}.$

2.251. $\dfrac{(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y})^2+(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{y})^2}{x-\sqrt{xy}}:\dfrac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y})\,(\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt[4]{x^3y}-y}.$

2.252. $\dfrac{\sqrt{a^2-b+\sqrt{c}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b+\sqrt{c}}}\cdot\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}}{\sqrt{\dfrac{a^3}{b}-2a+\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{ab}}}$; $a=4{,}8$; $b=1{,}2$.

2.253. $(4x-1)\left(\dfrac{1}{8x}(\,(\sqrt{8x-1}+4x)^{-1}-(\sqrt{8x-1}-4x)^{-1})\,)\right)^{1/2}.$

2.254. $\left(\dfrac{x+2y}{8y^3(x^2+2xy+2y^2)}-\dfrac{(x-2y):8y^3}{x^2-2xy+2y^2}\right)+$

$+\left(\dfrac{y^{-2}}{4x^2-8y^2}-\dfrac{1}{4x^2y^2+8y^4}\right)$; $x=\sqrt[4]{6}$, $y=\sqrt[8]{2}$.

2.255. $\dfrac{2(a+(a+1)+(a+2)+\ldots+2a)}{a^2+3a+2}+$

$+\dfrac{6(a^{1/2}+b^{1/2})}{(a-b)^{0,6}(a+2)}:((a^{1/2}-b^{1/2})\,(a-b)^{-2/5})^{-1}.$

2.256. $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{ax}+x+x\sqrt{x})^2\,(1-\sqrt{x})^2}{(x+x^{-1}-2)a^{-1/4}}-\dfrac{(x\sqrt{a})^{3/2}}{(ax^{-1}+4\sqrt{a}+4x)^{-1/2}}.$

2.257. $((a-3\sqrt[6]{a^5}+9\sqrt[3]{a^2})\,(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}+3\sqrt[12]{a^5})^{-1}+3\sqrt[12]{a^5})^{-1}.$

2.258. $\dfrac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[8]{ab})\,(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab})}{\sqrt[4]{a^3b}-b}:\dfrac{(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b})^2+(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})b^{-1/4}}.$

2.259. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{8z^3+24z^2+18z}{2z-3}}-\sqrt[3]{\dfrac{8z^3-24z^2+18z}{2z+3}}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{2z}{27}-\dfrac{1}{6z}}\right)^{-1}.$

2.260. $\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{p^4+q^4}{p^4-p^2q^2}+\dfrac{2q^2}{p^2-q^2}\right)(p^3-pq^2)}-2q\sqrt{p}}{\sqrt{\dfrac{p}{p-q}-\dfrac{q}{p+q}-\dfrac{2pq}{p^2-q^2}}\cdot(p-q)}.$

2.261. $\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{9+18x+9x^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{(1+x)\sqrt[3]{1-x}}{x}}\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}}}$.

2.262. $\dfrac{4-\sqrt[3]{a^2}}{(2+\sqrt[3]{ab})^2-(\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{b})^2}$; $a=\sqrt[7]{3}$, $b=\sqrt{0{,}008}$.

2.263. $\dfrac{x^4+x^2+x\sqrt{2}+2}{x^2-x\sqrt{2}+2}-x\sqrt{2}$.

2.264. $\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+x^2-5x+3}$.

2.265. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}}}{\sqrt{\left(1+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2-4\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\dfrac{\sqrt{b}}{a}}}$; $a=1{,}21$.

2.266. $\dfrac{\sqrt{\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{4b+1}{a}}(\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}})^{-1/2}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}}}$; $a=2{,}25$.

2.267. $\dfrac{\sqrt{x^2y^{-2}-xy^{-1}+\dfrac{1}{4}}\cdot(xy^{-2}+y^{-3/2})}{2x^2-y^{3/2}-xy+2xy^{1/2}}$.

2.268. $\dfrac{x+\sqrt{x}-\sqrt[4]{12x}+3+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12x}}-(\sqrt{3}+\sqrt[4]{12x})$.

2.269. $\dfrac{a^{3/2}+a^{3/4}-(\sqrt{a^3+2a^2}+\sqrt[4]{a(a+2)^2})}{\sqrt{2(a+1-\sqrt{a^2+2a})}\cdot(a^2-a^{5/4}+a^{1/2})^{-1}}$.

2.270. $\dfrac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}$.

2.271. $\left(\dfrac{3^{3/2}+\dfrac{1}{8}z^{3/5}}{3+\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}+\dfrac{1}{4}\sqrt[5]{z^2}}+\dfrac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}}\right)^{-1}:\ \dfrac{1}{2\sqrt{12}+\sqrt[5]{32z}}$.

2.272. $\dfrac{(\sqrt{q^3}:\sqrt{p}+p)^{1/4}:\sqrt[8]{(p-q)^3}}{\left(\dfrac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\sqrt{\dfrac{q}{p}}+1\right)^{1/4}}.$

2.273. $\dfrac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}.$

2.274. $\dfrac{8-m}{\sqrt[3]{m}+2}:\left(2+\dfrac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m}+2}\right)+\left(\sqrt[3]{m}+\dfrac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-2}\right)\dfrac{\sqrt[3]{m^2}-4}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{m}}.$

2.275. $x\sqrt[3]{2x\sqrt{xy}-x\sqrt{3xy}}\cdot\sqrt[6]{x^3y(7+4\sqrt{3})}.$

2.276. $\left(\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{1/2}-\sqrt{a-1}(\sqrt{a}+1)^{-1}\right)^{-2}\cdot\dfrac{1}{a^{2/3}+a^{1/3}+1}.$

2.277. $\left(\dfrac{a+a^{3/4}b^{1/2}+a^{1/4}b^{3/2}+b^2}{a^{1/2}+2a^{1/4}b^{1/2}+b}(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})+\dfrac{3\sqrt{b}(a^{1/2}-b)}{a^{-1/4}(a^{1/4}-\sqrt{b})}\right)^{-1/3}:$

$:(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})^{-1}.$

2.278. $\left(\sqrt{\dfrac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3n^2}{4-8n+4n^2}}\right)^{-1}:\sqrt[3]{\left(\dfrac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}}\right)^{-1}}.$

2.279. $\dfrac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}\left(\dfrac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2-1}}+\right.$

$\left.+\dfrac{4ab\sqrt{a}+9ab\sqrt{b}-9b^2\sqrt{a}}{\dfrac{3}{2}\sqrt{b}-2\sqrt{a}}\right);\ a>b>0.$

2.280. $\dfrac{2a(a+2b+\sqrt{a^2+4ab})}{(a+\sqrt{a^2+4ab})(a+4b+\sqrt{a^2+4ab})}.$

2.281. $\left(\dfrac{(1+a^{-1/2})^{1/6}}{(a^{1/2}+1)^{-1/3}}-\dfrac{(a^{-1/2}-1)^{1/3}}{(1-a^{-1/2})^{-1/6}}\right)^{-2}\cdot\dfrac{\frac{1}{3}a^{1/12}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}.$

2.282. $\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}-\dfrac{1}{x}\right)$; $0<x<1$.

2.283. $\dfrac{(pq^{-1}+1)^2}{pq^{-1}-p^{-1}q}\cdot\dfrac{p^3q^{-3}-1}{p^2q^{-2}+pq^{-1}+1}:\dfrac{p^3q^{-3}+1}{pq^{-1}+p^{-1}q-1}$.

2.284. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{(a-y)(y-b)}+\sqrt{(a+y)(y+b)}}{\sqrt{(a+y)(y+b)}-\sqrt{(a-y)(y-b)}}}$; $y=\sqrt{ab}$.

2.285. Упростить выражение $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, а затем построить график функции y для $1\le x<\infty$.

2.286. При каком значении k многочлен $x^2+2(k-9)x+(k^2+3k+4)$ можно представить в виде полного квадрата?

2.287. При каких значениях a и b трехчлен $16x^2+144x+(a+b)$ представляет собой полный квадрат, если известно, что $b-a=-7$?

2.288. Проверить, что число $x=\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$ является корнем уравнения $x^3+12x-8=0$.

2.289. Многочлен x^8-16 представить в виде произведения многочленов второй степени.

2.290. Исключив u и v из равенств $u-v=a$, $u^2-v^2=b$, $u^3-v^3=c$, найти соотношение между a, b и c.

Проверить справедливость равенств (2.291–2.304):

2.291. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

2.292. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{20-4\sqrt{5}}$.

2.293. $\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{25}}+\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\dfrac{10}{\sqrt[3]{25}}\right):(\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5})+\sqrt[6]{5}=\sqrt{2}$.

2.294. $\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=2\sqrt{3m-n}$.

2.295. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2.296. $\dfrac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}+1)^{-1/3}}+\dfrac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}-1)^{-1/3}}=2\sqrt{a-1}$.

2.297. $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})=1$.

2.298. $\dfrac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2.$

2.299. $\dfrac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}.$

2.300. $\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}.$

2.301. $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\,(5+2\sqrt{6})\,(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=1.$

2.302. $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}-\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$

2.303. $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}=3-\sqrt{2}.$

2.304. $\sqrt{10p+2\sqrt{25p^2-q^2}}-\sqrt{10p-2\sqrt{25p^2-q^2}}=2\sqrt{5p-q}.$

2.305. Преобразованием левой части проверить, что:

а) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2;$

б) $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1.$

2.306. Число 19 представить в виде разности кубов натуральных чисел. Показать, что такое представление единственно.

2.307. Преобразовать сумму $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$ к наиболее простому виду.

2.308. Показать, что $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\ldots+\dfrac{1}{n^2+3n+2}=\dfrac{n}{2n+4}.$

2.309. Доказать, что если $a+b=1$, то $\dfrac{a}{b^3-1}-\dfrac{b}{a^3-1}=\dfrac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$

2.310. Определить A, B и C так, чтобы для всех допустимых значений x имело место равенство $\dfrac{x^2+5}{x^3-3x+2}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-1}.$

2.311. Доказать, что: а) сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9; б) число p^5-p делится на 5 при любом натуральном значении p; в) число k^3+5k делится на 3 при $k\in N$.

Группа В

Упростить выражения. Найти области допустимых значений параметров, если они не указаны (2.312–2.356):

2.312. $\left(\dfrac{\dfrac{x^3-1}{x+1}\cdot\dfrac{x}{x^3+1}}{\dfrac{(x+1)^2-x}{(x-1)^2+x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}\right)^{-1/2}.$

2.313. $\dfrac{\left|x^3-1\right|+\left|x+1\right|}{x^3+x}.$

2.314. $\left|x^2-1\right|+x\left|x+1\right|.$

2.315. $\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2}.$

2.316. $\left(x+2\sqrt{2x-4}\right)^{-1/2}+\left(x-2\sqrt{2x-4}\right)^{-1/2}.$

2.317. $\left(\dfrac{4m^2n^2}{4mn-m^2-4n^2}-\dfrac{2+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}}{\dfrac{4}{mn}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{4}{m^2}}\right)^{1/2}:\dfrac{\sqrt{mn}}{m-2n}.$

2.318. $\left(\sqrt{x^4-a^4}-\dfrac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}}\right)\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}.$

2.319. $\left(\dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot x^2-2x\cdot\dfrac{|x+1|}{x+1}+2x-4\right):|x-2|.$

2.320. $\sqrt{\dfrac{(x^2-3)^2+12x^2}{x^2}}+\sqrt{(x+2)^2-8x}.$

2.321. $\left(\dfrac{(a^{3/2}-\sqrt{8})(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}.$

2.322. $\sqrt{y^2-6y+9}-|y-9|+2.$

2.323. $\sqrt{\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4x^{-1}}-2}+\sqrt{\dfrac{1}{4x^{-1}}+\dfrac{2^{-2}}{x}+\dfrac{1}{2}}.$

2.324. $\sqrt{\dfrac{x}{2+x+x^{-1}}}+\left|x-1\right|.$

2.325. $\dfrac{n^4-2n^3+4n^2+2n-5}{n^4-3n^3+7n^2-5n}.$

2.326. $\dfrac{\sqrt{a+2\sqrt{b}+\dfrac{b}{a}}\cdot\sqrt{2a-10\sqrt[6]{8a^3b^2}+25\sqrt[3]{b^2}}}{a\sqrt{2a}+\sqrt{2ab}-5a\sqrt[3]{b}-5\sqrt[6]{b^5}}.$

2.327. $\dfrac{(x-1)\sqrt{(x-1)^2+4x}}{x^2+1+2|x|}.$

2.328. $\sqrt{\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2+4}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{x}}.$

2.329. $\dfrac{\big||x|-1\big|\cdot|x|}{x^2-1}.$

2.330. $\dfrac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|}.$

2.331. $\dfrac{\sqrt{3}x^{3/2}-5x^{1/3}+5x^{4/3}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+10\sqrt{3}x^{5/6}+25x^{2/3}}\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}}.$

2.332. $\left(1-\dfrac{2}{x}-\left(\dfrac{2x+x^2}{4+2x+x^2}+\dfrac{2x-x^2}{4-2x+x^2}\right):\left(\dfrac{16-8x}{4-2x+x^2}-\dfrac{16+8x}{4+2x+x^2}\right)\right)^{1/2}.$

2.333. $\left(\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2-4\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+12\right)^{1/4}:\ (z-1).$

2.334. $\sqrt{a^3-b^3+\sqrt{a}}\cdot\dfrac{\sqrt{a^{3/2}+\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a^{3/2}-\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}}{\sqrt{(a^3+b^3)^2-a(4a^2b^3+1)}}.$

2.335. $\dfrac{\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}};\ z=\dfrac{2a}{a^2+1}.$

2.336. $\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2y}+\sqrt{x^4+2yx^3}-(x^{3/2}+x^2)}{\sqrt{2(x+y-\sqrt{x^2+2xy})}\cdot(x^{2/3}-x^{5/6}+x)}.$

2.337. $\dfrac{\sqrt[3]{a-3+3(\sqrt[3]{9a}-\sqrt[3]{3a^2})}}{\sqrt{2^{-2}-\dfrac{3}{2}a^{-1}+\left(\dfrac{3}{2a}\right)^2}:(\sqrt[3]{9}+a^{2/3}+\sqrt[3]{3a})}.$

2.338. $\dfrac{\sqrt[3]{8x-y-6(2\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2})}\cdot(4x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+y^{2/3})}{8x\sqrt[3]{y}-y^{4/3}}.$

2.339. $\left(\dfrac{a}{3(a^2+1)^{0,5}}-(2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3})^{0,5}(2a^2+3+a\sqrt{4a^2+3})^{-0,5}\right)^2.$

2.340. $\dfrac{\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}.$

2.341. $\dfrac{\sqrt{16z^2+z^{-2}-8}}{(2z-1)(4z^3-2z^2+z)^{-1}}-(z^3-1).$

2.342. $\dfrac{(2x+5+4\sqrt{2x+1})^{-1/2}+(2x+5-4\sqrt{2x+1})^{-1/2}}{(2x+5+4\sqrt{2x+1})^{-1/2}-(2x+5-4\sqrt{2x+1})^{-1/2}}.$

2.343. $\dfrac{\sqrt{4(x-\sqrt{y})+yx^{-1}}\cdot\sqrt{9x^2+6\sqrt[3]{2yx^3}+\sqrt[3]{4y^2}}}{6x^2+2\sqrt[3]{2yx^3}-3\sqrt{yx^2}-\sqrt[6]{4y^5}}.$

2.344. $\sqrt{\dfrac{1}{6}((3t+\sqrt{6t-1})^{-1}+(3t-\sqrt{6t-1})^{-1})}\cdot|t-1|\cdot t^{-1/2}.$

2.345. $\sqrt[4]{(x^2+4x^{-2})^2-8(x+2x^{-1})^2+48}\cdot(x^2-2)^{-1}.$

2.346. $\left(\dfrac{x^2+x-2\sqrt{x}+6}{x+2\sqrt{x}+3}-1\right)^{1/2}.$

2.347. $\sqrt{x(x^{-1}+4x-4)^{-1}}-\dfrac{2x^2}{|2x-1|};\ x>0.$

2.348. $\left|\dfrac{|x-2|+4}{x-2}\right|(x^2-4).$

2.349. $\left(\dfrac{x^8+x^4-x^2\sqrt{2}+2}{x^4-x^2\sqrt{2}+1}+x^2\sqrt{2}\right)^{1/2}.$

2.350. $\dfrac{|2x-3|+6}{2x-3}\sqrt{\dfrac{1}{x}(9x^{-1}+4x-12)}.$

2.351. $\dfrac{x^8+x^4-2x^2+6}{x^4+2x^2+3}+2x^2-2.$

2.352. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x+3}+4}}{x^{1/2}-(x-3)^{1/2}-\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{x^2-9}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}.$

2.353. $(3a+\sqrt{6a-1})^{-1/2}+(3a-\sqrt{6a-1})^{-1/2}.$

2.354. $\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}+\dfrac{1-2p}{\sqrt{1-4p^2}+2p-1}}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{4p^2}-1}-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}}.$

2.355. $\sqrt{\dfrac{a-8\sqrt[6]{a^3b^2}+4\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}+2\sqrt[12]{a^3b^2}}+3\sqrt[3]{b}}.$

2.356. $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{16}{x^2}}}.$

2.357. Доказать, что если для чисел x, y, z, m, n, p выполняются равенства $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{p}=1$, $\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}+\dfrac{p}{z}=0$, то для них выполняется также и равенство

$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}+\dfrac{z^2}{p^2}=1.$

2.358. Разложить на множители $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

2.359. Разложить на множители $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$.

2.360. Среднее арифметическое двух положительных чисел a и b ($a>b$) в m раз больше их среднего геометрического. Доказать, что $\dfrac{a}{b}=\dfrac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}}$.

ГЛАВА 3

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

(здесь и в дальнейшем запись $n \in Z$ означает, что n — любое целое число)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \tag{3.1}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z; \tag{3.2}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq \pi n,\ n \in Z; \tag{3.3}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1,\ x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in Z; \tag{3.4}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z; \tag{3.5}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n,\ n \in Z. \tag{3.6}$$

Формулы сложения

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \tag{3.7}$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y; \tag{3.8}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \tag{3.9}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y; \tag{3.10}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},\ x, y, x+y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z; \tag{3.11}$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},\ x, y, x-y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z. \tag{3.12}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x; \tag{3.13}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x; \tag{3.14}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ \ k \in \mathbf{Z},\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}. \tag{3.15}$$

Формулы половинного аргумента

(для синуса и косинуса — формулы понижения степени)

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}; \tag{3.16}$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}; \tag{3.17}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x},\ x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x},\ x \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{3.18}$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \tag{3.19}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}; \tag{3.20}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \tag{3.21}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}; \tag{3.22}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}, x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \tag{3.23}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}, x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{3.24}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)); \tag{3.25}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y)); \qquad (3.26)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)). \qquad (3.27)$$

Соотношения между $\sin x$, $\cos x$ *и* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \; x \neq (2n+1)\pi, \; n \in Z; \qquad (3.28)$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \; x \neq (2n+1)\pi, \; n \in Z. \qquad (3.29)$$

Формулы приведения

	Название функции не изменяется			Название функции изменяется на сходное			
	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
	$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z$			$\alpha \neq \pi n, \; n \in Z$			
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
	$\alpha \neq \pi n, \; n \in Z$			$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \; n \in Z$			

Пример 1. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}6\alpha+\operatorname{ctg}6\alpha=\frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 12\alpha}.$$

☐ Применяя последовательно к левой части равенства формулы (3.2), (3.3), (3.1) и (3.13), находим

$$A=\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}6\alpha+\operatorname{ctg}6\alpha=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha}+\frac{\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}+\frac{\sin^2 6\alpha+\cos^2 6\alpha}{\sin 6\alpha\cos 6\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}+\frac{1}{\sin 6\alpha\cos 6\alpha}=$$

$$=\frac{2}{\sin 4\alpha}+\frac{2}{\sin 12\alpha}=\frac{2(\sin 12\alpha+\sin 4\alpha)}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}.$$

Преобразуя сумму синусов по формуле (3.19), получаем $A=\dfrac{4\sin 8\alpha\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}$.

Так как $\sin 8\alpha=2\sin 4\alpha\cos 4\alpha$, то $A=\dfrac{8\sin 4\alpha\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}=\dfrac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 12\alpha}$. ■

Пример 2. Упростить выражение

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\frac{\alpha}{4}.$$

□ К произведению первых двух сомножителей применим формулу (3.27). Тогда получим

$$A=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}.$$

Снова используя формулу (3.27), находим

$$A=\frac{1}{4}\left(-\sin\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{3\alpha}{4}\right)+\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{4}.\ ■$$

Пример 3. Представить в виде произведения $A=2\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}\sin 6\alpha-1$.

□ Согласно формуле (3.14), имеем $2\cos^2 3\alpha-1=\cos 6\alpha$. Следовательно,

$$A=\cos 6\alpha+\sqrt{3}\sin 6\alpha=2\left(\frac{1}{2}\cos 6\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 6\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin 6\alpha\right).$$

Так как выражение в скобках — развернутая формула (3.10) для косинуса разности, то $A=2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-6\alpha\right)$. ■

Пример 4. Проверить, что $\operatorname{tg}20^\circ+4\sin 20^\circ=\sqrt{3}$.

□ Применив формулы (3.2), (3.13) и (3.19), получим

$$A=\operatorname{tg}20^\circ+4\sin 20^\circ=\frac{\sin 20^\circ+4\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ+2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=$$

$$=\frac{(\sin 20^\circ+\sin 40^\circ)+\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{2\sin 30^\circ\cos 10^\circ+\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{\cos 10^\circ+\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}.$$

Заменив по формуле приведения $\cos 10^\circ$ на $\sin 80^\circ$ и снова используя формулу (3.19), находим

$$A=\frac{\sin 80^\circ+\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{2\sin 60^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}. \blacksquare$$

Пример 5. Найти значение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если известно, что $\sin x-\cos x=1{,}4$.

□ Удобно воспользоваться формулами (3.28) и (3.29), учитывая, что они верны только при $x\neq\pi(2n+1)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. Однако в данном случае x не может принимать эти значения. Действительно, если бы $x=\pi(2n+1)$, то $\sin(\pi(2n+1))-$ $-\cos(\pi(2n+1))=0-(-1)\neq 1{,}4$. Выразив $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, перепишем данное равенство в виде

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=1{,}4.$$

Полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$, получаем уравнение $z^2-5z+6=0$, откуда $z_1=2$, $z_2=3$.

Итак, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=3$. ■

Пример 6. Упростить выражение

$$A=\frac{1}{2}\sin^2\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)-2(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)+2(\cos^6\alpha+\sin^6\alpha).$$

□ По формуле приведения имеем $\sin^2\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\cos^2 2\alpha$. Преобразуем $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha$ как сумму кубов по формуле (2.13):

$$\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=(\cos^2\alpha)^3+(\sin^2\alpha)^3=$$

$$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha),$$

откуда, учитывая формулы (3.1) и (3.13), находим $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\cos^4\alpha+$

$+\sin^4\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$. Используя полученные результаты, перепишем заданное выражение в виде

$$A=\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha-2(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)+2\left(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right).$$

После приведения подобных членов получим $A=\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=$ $=\frac{1}{2}\cos 4\alpha$ [на основании тождества (3.14)]. Итак, $A=\frac{1}{2}\cos 4\alpha$. ■

Пример 7. Упростив выражение

$$A=\frac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha+\cos 12\alpha},$$

найти его значение, если $\operatorname{tg}5\alpha=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$.

□ Перегруппируем слагаемые в числителе и знаменателе и воспользуемся формулами (3.19) и (3.21). Тогда получим

$$A=\frac{(\sin 8\alpha+\sin 12\alpha)+(\sin 9\alpha+\sin 11\alpha)+\sin 10\alpha}{(\cos 8\alpha+\cos 12\alpha)+(\cos 9\alpha+\cos 11\alpha)+\cos 10\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin 10\alpha\cos 2\alpha+2\sin 10\alpha\cos\alpha+\sin 10\alpha}{2\cos 10\alpha\cos 2\alpha+2\cos 10\alpha\cos\alpha+\cos 10\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 10\alpha(2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+1)}{\cos 10\alpha\ (2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+1)}=\operatorname{tg}10\alpha=\frac{2\operatorname{tg}5\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 5\alpha}$$

[применена формула (3.15)] Теперь правую часть заданного равенства $\operatorname{tg}5\alpha=$ $=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ умножим и разделим на $\sin 20^\circ$; трижды применив формулу (3.13), находим

$$\operatorname{tg}5\alpha=\frac{(\sin 20^\circ\cos 20^\circ)\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{(\sin 40^\circ\cos 40^\circ)\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ}=\frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin(180^\circ-20^\circ)}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}.$$

Следовательно, $A=\dfrac{2\operatorname{tg}5\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 5\alpha}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{64}}=\dfrac{16}{63}$. ■

Пример 8. Доказать, что для любого числа k слагаемых и любого $\alpha \neq 2\pi n$ ($n \in Z$) справедливы равенства

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos k\alpha = \frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}; \qquad (*)$$

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin k\alpha = \frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (**)$$

Эти формулы удобно использовать для преобразования суммы косинусов или синусов при большом количестве слагаемых.

☐ Пусть $S_k(\alpha) = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos k\alpha$. Умножив обе части этого равенства на $2\sin\frac{\alpha}{2}$, получим

$$2S_k(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 3\alpha + \ldots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha.$$

Применяя формулу (3.27), имеем

$$2S_k(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} = \left(\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2}\right) +$$

$$+\left(\sin\frac{7\alpha}{2} - \sin\frac{5\alpha}{2}\right) + \ldots + \left(\sin\frac{\alpha(2k+1)}{2} - \sin\frac{\alpha(2k-1)}{2}\right).$$

Замечаем, что первое слагаемое в каждой скобке взаимно уничтожается со вторым слагаемым в следующей скобке. Таким образом, правая часть последнего равенства есть разность $\sin\frac{\alpha(2k+1)}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$. Преобразовав ее по формуле (3.20), получим $2S_k(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{k\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}$, откуда следует равенство для $S_k(\alpha)$, т. е. формула (*).

Аналогично доказывается справедливость равенства (**).■

Замечания. 1. Вместо приведенного способа решения можно применить метод математической индукции.

2. Запоминать полученные формулы нет необходимости, однако показанный здесь прием преобразования тригонометрических выражений может оказаться эффективным в практике решения аналогичных задач.

Группа А

Доказать тождества (3.001–3.062):

3.001. $\left(1+\dfrac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{tg} 2\alpha\right)\left(1-\dfrac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{tg} 2\alpha\right)=2\operatorname{tg} 2\alpha.$

3.002. $\left(\cos^{-1} 2\alpha+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{4}-\alpha\right)=1.$

3.003. $\dfrac{\cos(3\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4}+\alpha\right)}=\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{4}\right).$

3.004. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha+\operatorname{ctg} 3\beta}{\operatorname{ctg} 2\alpha+\operatorname{tg} 3\beta}=\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 3\beta}.$

3.005. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$

3.006. $\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\dfrac{21\alpha}{2}.$

3.007. $\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha=-4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\dfrac{7\alpha}{2}.$

3.008. $\sin 4\alpha-\sin 5\alpha-\sin 6\alpha+\sin 7\alpha=-4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\dfrac{11\alpha}{2}.$

3.009. $\cos\alpha+\sin\alpha+\cos 3\alpha+\sin 3\alpha=2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right).$

3.010. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg} 3\alpha+\operatorname{ctg} 3\alpha=\dfrac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}.$

3.011. $\sin^{-1}\alpha+\operatorname{tg}^{-1}\alpha=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}.$

3.012. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+3\alpha\right)}{1-\sin(3\alpha-\pi)}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{3\alpha}{2}\right).$

3.013. $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha.$

3.014. $2\sin^2(3\pi-2\alpha)\cos^2(5\pi+2\alpha)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-8\alpha\right).$

3.015. $\sin 2\alpha(1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha)+\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right).$

3.016. $1-\sin 4\alpha+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{4}-2\alpha\right)\cos 4\alpha=0.$

3.017. $\sin^6\dfrac{\alpha}{2}-\cos^6\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha.$

3.018. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha.$

3.019. $\dfrac{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-6\alpha\right)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}=\operatorname{tg}\alpha.$

3.020. $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha.$

3.021. $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\dfrac{14\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha-\dfrac{8\pi}{3}\right)=0.$

3.022. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

3.023. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

3.024. $\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha)(\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}{(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha)}=1.$

3.025. $\dfrac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right).$

3.026. $\cos^2(\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(\alpha-270^\circ)=\dfrac{1}{\sin^2(\alpha+90^\circ)}-\cos^2(\alpha+180^\circ).$

3.027. $\dfrac{1-\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}{1+\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)}=\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+1}{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)-1}.$

3.028. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cos^{-1}2\beta-\operatorname{tg}2\beta\cos^{-1}2\alpha}{\cos^{-1}2\alpha+\cos^{-1}2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta).$

3.029. $2\left(\frac{1}{\sin 4\alpha}-\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+4\alpha\right)\right)+\operatorname{tg}(5\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.$

3.030. $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{17\pi}{8}-2\alpha\right)=-\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$

3.031. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2=-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta).$

3.032. $\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}-2\alpha\right)=\frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}.$

3.033. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg} 2\alpha=\cos 2\alpha-2\cos^2\alpha.$

3.034. $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}}.$

3.035. $\cos 4\alpha\operatorname{tg} 2\alpha-\sin 4\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$

3.036. $\sin^2 2\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}.$

3.037. $\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}.$

3.038. $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\frac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg} 3\alpha}=1.$

3.039. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg} 2\alpha=-1.$

3.040. $\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2} 2\alpha-1}+\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2} 2\alpha-1}=2.$

3.041. $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha.$

3.042. $\cos^2(45^\circ-\alpha)-\cos^2(60^\circ+\alpha)-\cos 75^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)=\sin 2\alpha$

3.043. $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$

3.044. $\frac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha.$

3.045. $\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha}-\cos 8\alpha\operatorname{ctg} 4\alpha=\sin 8\alpha.$

3.046. $\frac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}\sin 4\alpha.$

3.047. $\operatorname{ctg}(45^\circ + 2\alpha) = \dfrac{\cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha}$.

3.048. $\dfrac{(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + 1)(\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha + 1)}{(\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 1)(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 1)} = 1$.

3.049. $\left(\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sin\alpha + \cos\alpha}\right)^2 = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$.

3.050. $\sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ - \alpha) - \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

3.051. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.

3.052. $\dfrac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

3.053. $\sin\alpha\sin(x - \alpha) + \sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \alpha\right) = \sin^2\dfrac{x}{2}$.

3.054. $\cos^2\alpha - \sin^2 2\alpha = \cos^2\alpha\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

3.055. $\dfrac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha} - 2(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha) - 1 = 0$.

3.056. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\ \sin(\alpha - \beta)$.

3.057. $\cos^4 x + \sin^2 y + 0{,}25\sin^2 2x - 1 = \sin(y + x)\sin(y - x)$.

3.058. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}(2\pi - 2\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) - \operatorname{tg}\alpha} - 2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

3.059. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi + 2\alpha)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$.

3.060. $\operatorname{tg} 4\alpha + \dfrac{1}{\cos 4\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$.

3.061. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} + 2\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{2}{\cos^2\alpha}$.

3.062. $1 - \dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha + \cos 2\alpha = \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$.

Упростить выражения (3.063–3.113):

3.063. $1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

3.064. $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)}+\cos^2\alpha$.

3.065. $\frac{\cos^2\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\alpha}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)\right)}{\sin^{-1}\left(\frac{9\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\alpha}{4}-\frac{7\pi}{2}\right)\right)}$.

3.066. $\frac{\sin\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\cos\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}+\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)}$.

3.067. $\cos\alpha(1+\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(1-\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)$.

3.068. $\sin^2\alpha(1+\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$.

3.069. $\frac{1-\cos(8\alpha-3\pi)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha}$.

3.070. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}$.

3.071. $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)$.

3.072. $\frac{\cos^{-1}2x+\sin 2x\operatorname{tg}2x}{1+\cos 4x}+\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$.

3.073. $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$.

3.074. $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$.

3.075. $(\cos\alpha-\cos 2\beta)^2+(\sin\alpha+\sin 2\beta)^2$.

3.076. $\frac{(1-\cos 2\alpha)\cos(45^\circ+2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha-\sin 4\alpha}$.

3.077. $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{11\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)$.

3.078. $\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(135^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

3.079. $\frac{1+\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

3.080. $\frac{\cos m\alpha-\cos n\alpha}{\sin n\alpha-\sin m\alpha}$.

3.081. $\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^{-2}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

3.082. $1-\frac{1}{1-\sin^{-1}\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$.

3.083. $\frac{\cos^{-1}\alpha+\cos^{-1}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\beta+\operatorname{tg}\beta\cos^{-1}\alpha}$.

3.084. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^3\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

3.085. $1-\frac{1}{1-\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

3.086. $\frac{1-\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha}$.

3.087. $\frac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$.

3.088. $\frac{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)}$.

3.089. $\frac{\cos^2(\alpha-270^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha+90^\circ)-1}+\frac{\sin^2(\alpha+270^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha-90^\circ)-1}$.

3.090. $\dfrac{(1+\operatorname{tg}^2(\alpha-90^\circ))(\sin^{-2}(\alpha-270^\circ)-1)}{(1+\operatorname{ctg}^2(\alpha+270^\circ))\cos^{-2}(\alpha+90^\circ)}.$

3.091. $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}.$

3.092. $\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right):\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right).$

3.093. $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$

3.094. $\dfrac{\cos^2(2\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(90^\circ+2\alpha)+1}{\sin^2(2\alpha-270^\circ)+\operatorname{tg}^2(270^\circ+2\alpha)+1}.$

3.095. $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}.$

3.096. $\dfrac{1}{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}+\dfrac{1-\cos(4\alpha-\pi)}{\sin^3 2\alpha}-$

$$-\frac{1}{2\operatorname{ctg}\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)\sin^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}.$$

3.097. $\dfrac{\cos^2\alpha+2\sin^2(\alpha-\pi)}{\cos^3(\alpha-4\pi)}+\dfrac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2(\alpha+\pi)}{\cos\alpha\,(4\sin\alpha+1)}.$

3.098. $\sin\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(2\alpha-\dfrac{8\pi}{3}\right)+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\alpha\right).$

3.099. $\dfrac{4\sin^2(\alpha-5\pi)-\sin^2(2\alpha+\pi)}{\cos^2\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)-4+4\sin^2\alpha}.$

3.100. $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{17\pi}{8}-\alpha\right).$

3.101. $\operatorname{ctg}(4\alpha-\pi)\left(\cos^4\left(\frac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{9\pi}{4}-2\alpha\right)\right).$

3.102. $\dfrac{\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}-2\alpha\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)\sin\alpha}.$

3.103. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)(1+\sin 2\alpha)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}.$

3.104. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}.$

3.105. $\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}.$

3.106. $\dfrac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos\left(4\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}.$

3.107. $\dfrac{\sin(2\alpha+2\pi)+2\sin(4\alpha-\pi)+\sin(6\alpha+4\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(4\alpha-\pi)+\cos(6\alpha-4\pi)}.$

3.108. $\dfrac{4\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$

3.109. $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin(2\alpha-\beta)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\alpha-\beta)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}.$

3.110. $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}.$

3.111. $\dfrac{\cos^2\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)+4\cos^2\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)-4}{1+\cos(4\alpha-\pi)-8\sin^2(5\pi-\alpha)}.$

3.112. $\dfrac{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\dfrac{\pi-\alpha}{4}\left(2\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2}+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)}.$

3.113. $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}.$

Преобразовать в произведение (3.114–3.147):

3.114. $\sin 4\alpha-2\cos^2 2\alpha+1.$

3.115. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+2.$

3.116. $\cos^{-4}\alpha-\sin^{-4}\alpha.$

3.117. $\dfrac{\operatorname{tg}^4\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha}{\operatorname{ctg}^4\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}.$

3.118. $1-3\operatorname{tg}^2(\alpha+270^\circ).$

3.119. $1-3\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ).$

3.120. $\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right).$

3.121. $3\sin^2(\alpha-270^\circ)-\cos^2(\alpha+270^\circ).$

3.122. $\sin^2(\alpha+90^\circ)-3\cos^2(\alpha-90^\circ).$

3.123. $\sin^2\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right).$

3.124. $3-4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right).$

3.125. $3-4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right).$

3.126. $1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+3\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-3\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2}+3\alpha\right).$

3.127. $1+\cos(2\alpha+270^\circ)+\sin(2\alpha+450^\circ).$

3.128. $1-\cos(2\alpha-270^\circ)+\sin(2\alpha+270^\circ).$

3.129. $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)-1.$

3.130. $1-\cos(2\alpha-\pi)-\cos(4\alpha+\pi)+\cos(6\alpha-2\pi).$

3.131. $1+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-4\alpha\right)+\sin^{-1}\left(\frac{5\pi}{2}+4\alpha\right)$.

3.132. $\frac{\sin\alpha-2\cos3\alpha-\sin5\alpha}{\cos\alpha-2\sin3\alpha-\cos5\alpha}$.

3.133. $2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)-1$.

3.134. $\frac{\sin4\alpha+\sin5\alpha+\sin6\alpha}{\cos4\alpha+\cos5\alpha+\cos6\alpha}$.

3.135. $-\cos5\alpha\cos4\alpha-\cos4\alpha\cos3\alpha+2\cos^2 2\alpha\cos\alpha$.

3.136. $\sin10\alpha\sin8\alpha+\sin8\alpha\sin6\alpha-\sin4\alpha\sin2\alpha$.

3.137. $\frac{\cos7\alpha-\cos8\alpha-\cos9\alpha+\cos10\alpha}{\sin7\alpha-\sin8\alpha-\sin9\alpha+\sin10\alpha}$.

3.138. $\sin5\alpha-\sin6\alpha-\sin7\alpha+\sin8\alpha$.

3.139. $\cos3\alpha-\cos4\alpha-\cos5\alpha+\cos6\alpha$.

3.140. $\frac{\sin13\alpha+\sin14\alpha+\sin15\alpha+\sin16\alpha}{\cos13\alpha+\cos14\alpha+\cos15\alpha+\cos16\alpha}$.

3.141. $\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha$.

3.142. $\sin5\alpha+\sin6\alpha+\sin7\alpha+\sin8\alpha$.

3.143. $\cos5\alpha+\cos8\alpha+\cos9\alpha+\cos12\alpha$.

3.144. $3+4\cos4\alpha+\cos8\alpha$.

3.145. $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

3.146. $1+\sin2\alpha-\cos2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha$.

3.147. $\sin2\alpha+\sin4\alpha-\sin6\alpha$.

Доказать справедливость равенств (3.148–3.152):

3.148. $(\sin160^\circ+\sin40^\circ)(\sin140^\circ+\sin20^\circ)+$

$$+(\sin50^\circ-\sin70^\circ)(\sin130^\circ-\sin110^\circ)=1.$$

3.149. $\cos^{-1}34^\circ+\operatorname{tg}^{-1}56^\circ=\operatorname{ctg}28^\circ$.

3.150. $\frac{\cos28^\circ\cos56^\circ}{\sin2^\circ}+\frac{\cos2^\circ\cos4^\circ}{\sin28^\circ}=\frac{\sqrt{3}\sin38^\circ}{4\sin2^\circ\sin28^\circ}$.

3.151. $1-2\sin 50^\circ = 0{,}5\cos^{-1} 160^\circ$.

3.152. $(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 310^\circ + \cos 290^\circ) +$

$$+(\cos 40^\circ + \cos 160^\circ)(\cos 320^\circ - \cos 380^\circ) = 1.$$

Вычислить (3.153–3.166):

3.153. $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$.

3.154. $\operatorname{tg} 435^\circ + \operatorname{tg} 375^\circ$.

3.155. $\operatorname{tg} 255^\circ - \operatorname{tg} 195^\circ$.

3.156. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$.

3.157. $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{12} - \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

3.158. $\sin\left(2\alpha + \frac{5\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.

3.159. $\cos\left(2\alpha + \frac{7\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$.

3.160. $\frac{5}{6+7\sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$.

3.161. $\frac{2}{3+4\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$.

3.162. $\sin 2\alpha$, если $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = 1{,}4$.

3.163. $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = p$.

3.164. $2 - 13\cos 2\alpha + \frac{1}{\sin 2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{5}$.

3.165. $1 + 5\sin 2\alpha - \frac{3}{\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

3.166. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + 2\alpha\right) = \frac{9}{11}$.

3.167. Найти число $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, если известно, что $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{12}{5}$.

3.168. Доказать, что если A и B — острые углы некоторого прямоугольного треугольника, то $\sin 2A + \sin 2B = 4 \sin A \sin B$.

3.169. Найти число β $\left(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$, если известно, что $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{9}{19}$ и $\operatorname{tg} \alpha = -4$.

3.170. Найти $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, если известно, что $\sin \alpha - \cos \alpha = 0{,}5$.

3.171. Дано: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{7}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найти $\alpha + \beta$.

3.172. Найти $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если известно, что $\sin(\alpha - 90^\circ) = -\frac{2}{3}$ и $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

3.173. Доказать, что если α и β удовлетворяют неравенствам $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ и $\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{50}}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$, то $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$.

3.174. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$, если известно, что $\cos(\alpha - 90^\circ) = 0{,}2$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

3.175. Доказать, что если α и β удовлетворяют неравенствам $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} \alpha = 5$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{2}{3}$, то $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.

3.176. Дано: $\operatorname{ctg} \alpha = 4$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{5}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найти $\alpha + \beta$.

3.177. Вычислить $(1 + \operatorname{ctg} \alpha)(1 + \operatorname{ctg} \beta)$, если $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.

3.178. Вычислить $(1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{tg} \beta)$, если $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

3.179. Доказать, что если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{21}}{14}$ и α, β — острые углы, то $\alpha + \beta = 60^\circ$.

3.180. Показать, что выражение $\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$ неотрицательно в области определения.

3.181. Исключить α из равенств $x=\operatorname{tg}^2\alpha$, $y=\sin^2\alpha$.

3.182. Доказать, что $\cos 2-\cos 8<0$.

3.183. Величины α, β, γ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию. Доказать, что $\dfrac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\beta$.

3.184. Дана дробь $\dfrac{5}{1+\sqrt[3]{32\cos^4 15^\circ-10-8\sqrt{3}}}$. Преобразовать подкоренное выражение к более простому виду, после чего дробь сократить.

3.185. Выразить $\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha$ через m, где $m=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$.

Группа Б

Доказать тождества (3.186–3.239):

3.186. $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\dfrac{2}{3}$.

3.187. $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

3.188. $\dfrac{1}{\sin 2\alpha\sin(60^\circ-2\alpha)\sin(60^\circ+2\alpha)}=\dfrac{4}{\sin 6\alpha}$.

3.189. $\dfrac{\cos 6\alpha-\cos 7\alpha-\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}{\sin 6\alpha-\sin 7\alpha-\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}=\operatorname{ctg}\dfrac{15\alpha}{2}$.

3.190. $\dfrac{\sin^2(3\pi-4\alpha)+4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)-4}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-4\alpha\right)-4\cos^2\left(2\alpha-\dfrac{5\pi}{2}\right)}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha$.

3.191. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\alpha}{4}-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\cos^2\dfrac{\alpha}{4}}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\alpha}{4}-\dfrac{7\pi}{2}\right)}=\dfrac{1}{8}$.

3.192. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(1-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)\cos^{-1}\alpha-2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)(1+\sin(4\pi+\alpha))\cos^{-1}\alpha+2\cos 2\alpha}=$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

3.193. $\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{9\pi}{2}-2\alpha\right)+2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\sqrt{3}}.$

3.194. $\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha-1=\dfrac{\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}.$

3.195. $1+\operatorname{ctg}\alpha+\sin^{-1}\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}.$

3.196. $\dfrac{(1+\sin\alpha)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}=-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right).$

3.197. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2(2\alpha-\pi)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}-3\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{2}-2\alpha\right)=4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+2\alpha\right).$

3.198. $\dfrac{4\cos^2(\alpha-\pi)-4\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)+3\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\dfrac{7\pi}{2}-\alpha\right)}=\operatorname{tg}^4\dfrac{\alpha}{2}.$

3.199. $1-\cos(2\alpha-\pi)+\cos(4\alpha-2\pi)=4\cos 2\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right).$

3.200. $\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)(\operatorname{tg}^2\alpha-1)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{4}\right)\sin^{-2}\left(\dfrac{5\pi}{4}+\alpha\right)=2.$

3.201. $\dfrac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)-1}=-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha.$

3.202. $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)(1-\sin 2\alpha)=\cos 2\alpha$.

3.203. $\frac{\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha+\sin 4\alpha}=-\operatorname{tg}^2 2\alpha$.

3.204. $\operatorname{ctg}\left(4\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{1}{\cos(4\alpha-3\pi)}=\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

3.205. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

3.206. $\frac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=\frac{\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}$.

3.207. $3-4\cos(4\alpha-3\pi)-\cos(5\pi+8\alpha)=8\cos^4 2\alpha$.

3.208. $\frac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}=\operatorname{ctg}\alpha$.

3.209. $\frac{3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}{3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha$.

3.210. $3+4\sin\left(4\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(8\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)=8\sin^4 2\alpha$.

3.211. $\cos^{-6}\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha=3\operatorname{tg}^2\alpha\cos^{-2}\alpha+1$.

3.212. $\frac{1-2\sin^2 2\alpha}{1-\sin 4\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg} 2\alpha}$.

3.213. $\frac{\sin^2(135^\circ-\alpha)-\sin^2(210^\circ-\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-2\alpha)}{\cos^2(225^\circ+\alpha)-\cos^2(210^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)}=-1$.

3.214. $\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

3.215. $\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta-\frac{2\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}+2=\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

3.216. $\sin 2\alpha(2\cos 4\alpha+1)\operatorname{ctg}(30^\circ-2\alpha)\operatorname{ctg}(30^\circ+2\alpha)=\sin 6\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{tg} 6\alpha$.

3.217. $\sin(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$.

3.218. $\frac{\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}=\operatorname{tg}\frac{15\alpha}{2}$.

3.219. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}$.

3.220. $\frac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\pi-2\alpha)+2\cos^2(2\alpha+\pi)-1}=2\cos 2\alpha$.

3.221. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha$.

3.222. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha=4\operatorname{ctg}4\alpha$.

3.223. $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)-2\cos^2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi=\cos 2\alpha$.

3.224. $\sin^2\varphi-\cos^2(\alpha-\varphi)+2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\cos^2\alpha$.

3.225. $\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha-\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\sin^2\alpha$.

3.226. $\operatorname{tg}6\beta-\operatorname{tg}4\beta-\operatorname{tg}2\beta=\operatorname{tg}6\beta\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta$.

3.227. $\frac{\cos\left(4\alpha-\frac{9\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right)\left(1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4\alpha\right)\right)}=\operatorname{tg}4\alpha$.

3.228. $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)}=\operatorname{ctg}2\alpha$.

3.229. $\frac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}=-1$.

3.230. $\operatorname{tg}4\alpha-\cos^{-1}4\alpha=\frac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}$.

3.231. $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\dfrac{5+3\cos4\alpha}{8}$.

3.232. $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\dfrac{\cos2\alpha(3+\cos4\alpha)}{4}$.

3.233. $\operatorname{ctg}(30^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(150^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha$.

3.234. $4\sin\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+2\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)=\cos6\alpha$.

3.235. $\dfrac{1-2\cos^2 2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)}=1$.

3.236. $16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha=\sin5\alpha$.

3.237. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

3.238. $1+\sin\left(3\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\cos2\alpha+2\sin3\alpha\cos(3\pi-\alpha)\sin(\alpha-\pi)=2\sin^2\dfrac{5\alpha}{2}$.

3.239. $(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$.

Упростить выражения (3.240–3.284):

3.240. $\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1\right)}$.

3.241. $\sqrt{\dfrac{\cos2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}}$; $90^\circ<\alpha<135^\circ$.

3.242. $\sqrt{(1-\sin\alpha\sin\beta)^2-\cos^2\alpha\cos^2\beta}$.

3.243. $(\cos8\alpha\operatorname{tg}4\alpha-\sin8\alpha)(\cos8\alpha\operatorname{ctg}4\alpha+\sin8\alpha)$.

3.244. $\sin^2 2\alpha+\sin^2\beta+\cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta)$.

3.245. $\dfrac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}+2\alpha\right)}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)}$.

3.246. $\dfrac{\cos2\alpha-\cos6\alpha+\cos10\alpha-\cos14\alpha}{\sin2\alpha+\sin6\alpha+\sin10\alpha+\sin14\alpha}$.

3.247. $\left(1-\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)\right)\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}-2\alpha\right)+\cos\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3.248. $\dfrac{4\sin(\pi-2x)\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}{1+\cos 8x}+\dfrac{\sin 3x\cos x+3\sin x\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 4x}$.

3.249. $\dfrac{4\sin\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}^2\left(2\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)}-1$.

3.250. $\dfrac{(1+\operatorname{tg}2\alpha)^2-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1$.

3.251. $\dfrac{\sin(80^\circ+4\alpha)}{4\sin(20^\circ+\alpha)\sin(70^\circ-\alpha)}$.

3.252. $\dfrac{\cos^2(4\alpha-3\pi)-4\cos^2(2\alpha-\pi)+3}{\cos^2(4\alpha+3\pi)+4\cos^2(2\alpha+\pi)-1}$.

3.253. $\dfrac{\cos\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)}$.

3.254. $4\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin^3\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-4\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)\cos^3\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

3.255. $\cos^4 2\alpha-6\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha$.

3.256. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\dfrac{5\pi}{4}\right)+1}$.

3.257. $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{2}\right)-4+4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

3.258. $\cos^{-2}4\alpha-\operatorname{tg}^2(3\pi+4\alpha)-2\cos^2\alpha-\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)$.

3.259. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}-4\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4}+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}$.

3.260. $\dfrac{4\sin^4\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^4\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)+\cos^4\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)-1}$.

3.261. $\dfrac{\sin\left(4\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(4\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}$.

3.262. $(\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}555^\circ)(\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}195^\circ)$.

3.263. $\dfrac{\operatorname{tg}615^\circ-\operatorname{tg}555^\circ}{\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}735^\circ}$.

3.264. $\dfrac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)-\cos(2x-5\pi)\cos\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)\cos4x+\sin x\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4x\right)}$.

3.265. $\sin(2x-\pi)\cos(x-3\pi)+\sin\left(2x-\frac{9\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

3.266. $\sin(x+2\pi)\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin\left(2x-\frac{5\pi}{2}\right)$.

3.267. $\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos^{-2}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$.

3.268. $\sqrt[3]{\dfrac{\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}}$.

3.269. $\dfrac{3\cos^2(\alpha+270^\circ)-\sin^2(\alpha-270^\circ)}{3\sin^2(\alpha-90^\circ)-\cos^2(\alpha+90^\circ)}$.

3.270. $\dfrac{\sin2\alpha+\cos2\alpha-\cos6\alpha-\sin6\alpha}{\sin4\alpha+2\sin^2 2\alpha-1}$.

3.271. $\sqrt{(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)(\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1)}$.

3.272. $\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ и $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$.

3.273. $\cos^6\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin^6\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)-\dfrac{3}{4}\left(\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)^2$.

3.274. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}+\dfrac{\sin^2\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.

3.275. $\sqrt{\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}}$, если : а) $0<\alpha<\pi$; б) $\pi<\alpha<2\pi$.

3.276. $\cos^2(45^\circ+\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)$.

3.277. $\sin^2(135^\circ-2\alpha)-\sin^2(210^\circ-2\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-4\alpha)$.

3.278. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, если : а) $90^\circ<\alpha<180^\circ$; б) $270^\circ<\alpha<360^\circ$.

3.279. $\left(1+\cos\dfrac{\alpha-3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\pi-\alpha}{4}$.

3.280. $\dfrac{\sin^2 4\alpha+4\sin^4 2\alpha-4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{4-\sin^2 4\alpha-4\sin^2 2\alpha}$.

3.281. $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+4\alpha\right)-\sin^6\left(\dfrac{5\pi}{2}+2\alpha\right)+\cos^6\left(\dfrac{7\pi}{2}-2\alpha\right)$.

3.282. $\dfrac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}\times$

$$\times\frac{\cos 8\alpha-\cos 9\alpha-\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}{\sin 8\alpha-\sin 9\alpha-\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}.$$

3.283. $\cos(270^\circ-2\alpha)\operatorname{ctg}(30^\circ-2\alpha)\operatorname{tg}(240^\circ-2\alpha)(2\cos 4\alpha-1)$.

3.284. $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\right)\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$.

Преобразовать в произведение (3.285–3.331):

3.285. $\sin 6\alpha-2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}$.

3.286. $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha + 1 - 2\cos^2 2\alpha.$

3.287. $3 - 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha - 8\cos^4 2\alpha.$

3.288. $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 3.$

3.289. $\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 3.$

3.290. $6\sin^2 2\alpha - 1 - \cos 4\alpha.$

3.291. $\sqrt{1 + \sin\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}$, если $0^\circ < \alpha \le 180^\circ$.

3.292. $2\cos^2 2\alpha + 3\cos 4\alpha - 3.$

3.293. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha - \beta).$

3.294. $\frac{\sin(2\alpha - \beta)}{\cos 4\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos 2\alpha}.$

3.295. $\frac{\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta) - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$

3.296. $\sin^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2\alpha - \cos^2 2\beta.$

3.297. $\sin^2(2\alpha - \beta) - \sin^2 2\alpha - \sin^2\beta.$

3.298. $2 + \operatorname{ctg}\frac{5\pi + \alpha}{4}\left(1 + \cos\frac{\alpha - \pi}{2}\right)\cos^{-1}\left(\frac{\alpha}{2} - 2\pi\right) - 4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right).$

3.299. $2 - \frac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha}.$

3.300. $2 - \operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha.$

3.301. $\frac{2\cos^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)\sin^2\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right)} - \operatorname{tg} 2\alpha + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha.$

3.302. $\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}.$

3.303. $1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha - \beta).$

3.304. $1 + \cos\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right).$

3.305. $4\cos^2\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(2\alpha-\pi)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-6\alpha\right).$

3.306. $\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}$, если : а) $0^\circ<\alpha<90^\circ$; б) $90^\circ<\alpha<180^\circ$.

3.307. $2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-\frac{4\operatorname{tg}2\alpha(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\sin 8\alpha(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha)^2}.$

3.308. $\cos^2(\alpha-2\beta)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2(2\beta-\pi).$

3.309. $1-\cos(\pi-8\alpha)-\cos(\pi+4\alpha).$

3.310. $\cos 2\alpha-\sin 4\alpha-\cos 6\alpha.$

3.311. $\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right).$

3.312. $2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1.$

3.313. $\frac{\sin\left(\frac{9\pi}{2}-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)-1}{1+\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(6\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}.$

3.314. $\frac{\cos 2\alpha-\sin 4\alpha-\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha+\sin 4\alpha-\cos 6\alpha}.$

3.315. $\cos 2\alpha+\sin 4\alpha-\cos 6\alpha.$

3.316. $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right).$

3.317. $\frac{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^{-1}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}.$

3.318. $\frac{3\operatorname{tg}^2(\alpha+3\pi)-1}{1-3\operatorname{tg}^2\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)}.$

3.319. $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha.$

3.320. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}-\operatorname{tg}\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$

3.321. $\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}+\alpha\right).$

3.322. $\dfrac{2\cos^2\left(\frac{9\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}\cdot\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right).$

3.323. $\sin\alpha\sin^2(\alpha-270^\circ)(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+\cos\alpha\cos^2(\alpha+270^\circ)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha$

3.324. $\sin 2\alpha+\cos 4\alpha-\sin 6\alpha.$

3.325. $\cos^2 2\alpha-3\sin^2 2\alpha.$

3.326. $\cos^2\frac{n\alpha}{2}-\sin^2\frac{m\alpha}{2}.$

3.327. $1+\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^{-1}\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right).$

3.328. $\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)+2\cos\left(\frac{11\pi}{6}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}.$

3.329. $\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right).$

3.330. $\sin\alpha-\left(\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2.$

3.331. $\operatorname{tg}210^\circ+\operatorname{ctg}210^\circ+\operatorname{tg}220^\circ+\operatorname{ctg}220^\circ.$

Доказать справедливость равенств (3.332–3.354):

3.332. $\dfrac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ-\sin 39^\circ\cos 21^\circ}=-1.$

3.333. $\dfrac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \sin 159^\circ \cos 99^\circ} = 1.$

3.334. $\dfrac{\cos 63^\circ \cos 3^\circ - \cos 87^\circ \cos 27^\circ}{\cos 132^\circ \cos 72^\circ - \cos 42^\circ \cos 18^\circ} = -\operatorname{tg} 24^\circ.$

3.335. $\dfrac{\cos 64^\circ \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cos 19^\circ} = -1.$

3.336. $\dfrac{\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cos 25^\circ} = 1.$

3.337. $\sin^2 70^\circ \sin^2 50^\circ \sin^2 10^\circ = \dfrac{1}{64}.$

3.338. а) $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; б) $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$

3.339. а) $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{4}$; б) $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}.$

3.340. $\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ.$

3.341. $\dfrac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ} = 3.$

3.342. $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \dfrac{1}{16}.$

3.343. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \dfrac{3}{16}.$

3.344. $\sin\dfrac{3\pi}{10} - \sin\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{1}{2}.$

3.345. $\cos\dfrac{\pi}{5} + \cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} + \cos\dfrac{6\pi}{5} = -\dfrac{1}{2}.$

3.346. $\operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ = \dfrac{8}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ.$

3.347. $8\cos\dfrac{4\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{\pi}{9} = 1.$

3.348. $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 8.$

3.349. $\dfrac{\sin\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(\alpha - \dfrac{5\pi}{2}\right)} = 1.$

3.350. $\cos 70^\circ + 8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2\cos^2 35^\circ$.

3.351. $1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3\alpha\right) - \sin^2\frac{3\alpha}{2} + \cos^2\frac{3\alpha}{2} = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\sin\left(\frac{3\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

3.352. $\dfrac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi - 4\alpha) - \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 6\alpha\right)}{4\sin(5\pi - 3\alpha)\cos(\alpha - 2\pi)} = \cos 2\alpha$.

3.353. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$.

3.354. $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \sin 30^\circ$.

Вычислить (3.355-3.367):

3.355. $\sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$.

3.356. $\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ$.

3.357. $\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}$.

3.358. $\dfrac{\cos 68^\circ \cos 8^\circ - \cos 82^\circ \cos 22^\circ}{\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 67^\circ \cos 37^\circ}$.

3.359. $\dfrac{\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ}{\cos 69^\circ \cos 9^\circ + \cos 81^\circ \cos 21^\circ}$.

3.360. $\dfrac{\cos 67^\circ \cos 7^\circ - \cos 83^\circ \cos 23^\circ}{\cos 128^\circ \cos 68^\circ - \cos 38^\circ \cos 22^\circ} - \operatorname{tg} 164^\circ$.

3.361. $\dfrac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ}$.

3.362. $\dfrac{6\sin\alpha - 7\cos\alpha + 1}{8\sin\alpha + 9\cos\alpha - 1}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 4$.

3.363. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - x\right)$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{3}{4}$.

3.364. $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, если $\sin\alpha + \sin\beta = -\frac{21}{65}$; $\cos\alpha + \cos\beta = -\frac{27}{65}$;

$\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$ и $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

3.365. $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, если $\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{27}{65}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{7}{9}$, $\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$ и $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$.

3.366. $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=n$.

3.367. $\frac{2\sin2\alpha-3\cos2\alpha}{4\sin2\alpha+5\cos2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

Зная, что A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника, доказать справедливость равенств (3.368–3.374):

3.368. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

3.369. $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A+\sin B-\sin C}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$.

3.370. $\sin2A+\sin2B+\sin2C=4\sin A\sin B\sin C$.

3.371. $\frac{\sin C}{\cos A\cos B}=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B$.

3.372. $\sin3A+\sin3B+\sin3C=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$.

3.373. $\sin4A+\sin4B+\sin4C=-4\sin2A\sin2B\sin2C$.

3.374. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$.

3.375. Найти $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если известно, что $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$.

3.376. Зная, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=m$, найти $\frac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$.

3.377. Найти значение выражения $\frac{1+\cos2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, если известно, что $\sin\alpha+\cos\alpha=m$.

3.378. Дано: $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{p}{q}$. Считая α, p и q известными, найти $\operatorname{ctg}\beta$.

3.379. Зная, что $\sin\alpha+\cos\alpha=m$, найти $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

3.380. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{q}$. Найти $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$.

3.381. Найти $\cos 2\alpha$, если известно, что $2\operatorname{ctg}^2\alpha + 7\operatorname{ctg}\alpha + 3 = 0$ и число α удовлетворяет неравенствам: а) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$; б) $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$.

3.382. Найти $\sin 2\alpha$, если известно, что $2\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0$ и число α удовлетворяет неравенствам: а) $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$; б) $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

3.383. Дано: $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{p}{q}$. Считая α, p и q известными, найти $\operatorname{tg}\beta$.

3.384. Доказать, что выражение $\dfrac{1 - 2\sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)}$

не зависит от α, где $\alpha \neq \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{12}$.

3.385. Доказать, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, если $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$.

3.386. Доказать, что выражение $\operatorname{tg}\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(4\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(4\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)$

не зависит от α, если $\alpha \neq \frac{\pi}{8}(4n+3)$.

3.387. Доказать, что выражение $\dfrac{1 - \cos^4\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) - \sin^4\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1}$ не зависит от α, если $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$.

3.388. Доказать, что выражение $\sin(250^\circ + \alpha)\cos(200^\circ - \alpha) - \cos 240^\circ \times$ $\times \cos(220^\circ - 2\alpha)$ не зависит от α.

3.389. Доказать, что выражение $\cos^2\alpha + \cos^2\varphi + \cos^2(\alpha+\varphi) - 2\cos\alpha \times$ $\times \cos\varphi\cos(\alpha+\varphi)$ не зависит ни от α, ни от φ.

3.390. Вывести формулу $\cos(n+1)\alpha = 2\cos\alpha\cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha$, где n — любое действительное число, и с ее помощью представить $\cos 3\alpha$ и $\cos 4\alpha$ в виде многочленов от $\cos\alpha$.

3.391. Доказать, что $4\sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\cos\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

3.392. Дано: $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$; $\alpha+\beta\neq 2\pi n$ $(n\in Z)$. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

3.393. Показать, что если p постоянно, то функция $f(\alpha)=\frac{p\cos^3\alpha-\cos3\alpha}{\cos\alpha}+$ $+\frac{p\sin^3\alpha+\sin3\alpha}{\sin\alpha}$ также является постоянной.

3.394. Дана функция $f(x)=\cos^4x+\sin^4x$. Найти $f(\alpha)$, если известно, что $\sin2\alpha=\frac{2}{3}$.

3.395. Доказать, что если $\alpha+\beta=60°$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$, то $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\leq\frac{1}{3}$.

Группа В

Доказать тождества (3.396–3.409):

3.396. $\frac{3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha}{3+4\cos2\alpha+\cos4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

3.397. $\operatorname{ctg}(270°-2\alpha)+\operatorname{ctg}(210°-2\alpha)+\operatorname{ctg}(150°-2\alpha)=3\operatorname{tg}6\alpha$.

3.398. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos^{-1}2\alpha+2\cos(4\alpha-2\pi)=\frac{\sin6\alpha}{\sin2\alpha}$.

3.399. $8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1=-2\sin\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

3.400. $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=$

$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

3.401. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-6\alpha\right)\sin^3(\pi-2\alpha)-\cos(6\alpha-\pi)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos^3 4\alpha$.

3.402. $8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1=2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

3.403. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)$.

3.404. $\frac{8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1}{8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1}=-\operatorname{tg}\frac{7\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

3.405. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$.

3.406. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha-\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha$, n — любое натуральное число или 0.

3.407. $\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\ldots+\cos(2n-1)\alpha=\dfrac{\sin2n\alpha}{2\sin\alpha}$, n — число слагаемых.

3.408. $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\ldots+\cos^2 n\alpha=\dfrac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{2\sin\alpha}+\dfrac{n}{2}$, n — число слагаемых.

3.409. $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\ldots+\sin^2 n\alpha=\dfrac{n}{2}-\dfrac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{2\sin\alpha}$, n — число слагаемых.

Упростить выражения (3.410–3.412):

3.410. $\sin^3 2\alpha\cos6\alpha+\cos^3 2\alpha\sin6\alpha$.

3.411. $3\sin\alpha\cos3\alpha+9\sin\alpha\cos\alpha-\sin3\alpha\cos3\alpha-3\sin3\alpha\cos\alpha$.

3.412. $4(\sin^4 x+\cos^4 x)-4(\sin^6 x+\cos^6 x)-1$.

Преобразовать в произведение (3.413–3.415):

3.413. $\sin^3\alpha\cos3\alpha+\cos^3\alpha\sin3\alpha$.

3.414. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\cos2\alpha}{\cos^{-2}\alpha-1}+\dfrac{1+\cos2\alpha}{\sin^{-2}\alpha-1}\right)+\operatorname{ctg}2\alpha+\cos2\alpha+\sin2\alpha$.

3.415. $\cos22\alpha+3\cos18\alpha+3\cos14\alpha+\cos10\alpha$.

Доказать справедливость равенств (3.416–3.440):

3.416. $\cos\dfrac{\pi}{33}\cos\dfrac{2\pi}{33}\cos\dfrac{4\pi}{33}\cos\dfrac{8\pi}{33}\cos\dfrac{16\pi}{33}=\dfrac{1}{32}$.

3.417. $3\sin\dfrac{2\pi}{17}+\sin\dfrac{4\pi}{17}-\sin\dfrac{6\pi}{17}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{8\pi}{17}=8\sin^3\dfrac{2\pi}{17}\cos^2\dfrac{\pi}{17}$.

3.418. $\cos\dfrac{2\pi}{31}\cos\dfrac{4\pi}{31}\cos\dfrac{8\pi}{31}\cos\dfrac{16\pi}{31}\cos\dfrac{32\pi}{31}=\dfrac{1}{32}$.

3.419. $\operatorname{tg}20^\circ\cos^{-1}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\cos^{-1}40^\circ\operatorname{tg}60^\circ\cos^{-1}60^\circ\operatorname{tg}80^\circ\cos^{-1}80^\circ=48$.

3.420. $\sin10^\circ\sin20^\circ\sin30^\circ\sin40^\circ\sin50^\circ\sin60^\circ\sin70^\circ\sin80^\circ=\dfrac{3}{256}$.

3.421. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\ldots\cos\frac{12\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}=-\frac{1}{2^{14}}$.

3.422. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}$.

3.423. $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 30^\circ+\sin 40^\circ+\sin 50^\circ=0{,}5\sin 25^\circ\sin^{-1}5^\circ$.

3.424. $\operatorname{ctg}80^\circ\operatorname{ctg}70^\circ+\operatorname{ctg}70^\circ\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ\operatorname{ctg}80^\circ=1$.

3.425. $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos 70^\circ=\sqrt{3}$.

3.426. $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ=\operatorname{tg}15^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ$.

3.427. $\cos 50^\circ+8\cos 200^\circ\cos 220^\circ\cos 80^\circ=2\sin^2 65^\circ$.

3.428. $\sin 18^\circ\sin 54^\circ=0{,}25$.

3.429. $\sin^2\left(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}$.

3.430. $\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}$.

3.431. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{7}{5}$.

3.432. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{1}{5}$.

3.433. $\cos(2\operatorname{arctg}2)-\sin(4\operatorname{arctg}3)=0{,}36$.

3.434. $\arccos\frac{36}{85}-\arccos\frac{15}{17}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}$.

3.435. $\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{36}{85}=\arccos\frac{15}{17}+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

3.436. $\cos(2\operatorname{arcctg}7)=\sin(4\operatorname{arcctg}3)$.

3.437. $\cos\frac{11\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

3.438. $\sin 84^\circ\sin 24^\circ\sin 48^\circ\sin 12^\circ=\frac{1}{16}$.

3.439. $\operatorname{tg}830^\circ+\operatorname{tg}770^\circ+\operatorname{tg}740^\circ=\operatorname{tg}470^\circ\operatorname{tg}410^\circ\operatorname{tg}380^\circ$.

3.440. $\operatorname{tg}12^\circ \operatorname{tg}24^\circ + \operatorname{tg}24^\circ \operatorname{tg}54^\circ + \operatorname{tg}54^\circ \operatorname{tg}12^\circ = 1.$

Вычислить (3.441–3.462):

3.441. $\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{4} + \frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right).$

3.442. $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right).$

3.443. $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} - 2\sin^2\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right).$

3.444. $\cos^6\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right) - \cos^6\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right).$

3.445. $\frac{1}{4} - \cos^4\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right).$

3.446. $\frac{1}{4} - \cos^4\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right).$

3.447. $\arccos(\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1))).$

3.448. $\arcsin(\cos(2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1))).$

3.449. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$, где $a < 0$.

3.450. $\cos^6\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right) + \cos^6\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right).$

3.451. $\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ.$

3.452. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right).$

3.453. $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right).$

3.454. $\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right).$

3.455. $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin\frac{12}{13}\right).$

3.456. $\sin^2(0{,}5\arcsin 0{,}8 - 2\operatorname{arctg}(-2)).$

3.457. $\mathrm{ctg}(0{,}5\arccos 0{,}6 - 2\,\mathrm{arcctg}(-0{,}5))$.

3.458. $\mathrm{tg}\,(0{,}5\arccos 0{,}6 - 3\,\mathrm{arcctg}\,(-2))$.

3.459. $\cos(0{,}5\arcsin 0{,}8 - 2\,\mathrm{arcctg}(-0{,}5))$.

3.460. $\cos(0{,}5\arccos 0{,}6 - 2\,\mathrm{arctg}\,(-2))$.

3.461. $\mathrm{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)$.

3.462. $\mathrm{tg}(0{,}5\arccos 0{,}6 - 2\,\mathrm{arctg}(-2))$.

3.463. Найти $\mathrm{ctg}\frac{x}{2}$, если известно, что $\sin x - \cos x = \frac{1+2\sqrt{2}}{3}$.

3.464. Доказать, что если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{3\sqrt{11}}$, $\sin\gamma = \frac{3}{\sqrt{11}}$ (α, β и γ — острые положительные углы), то $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

3.465. Зная, что $\mathrm{tg}\,\alpha = m$, найти значение выражения $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \cos\frac{5\pi}{12}\sin\left(\frac{5\pi}{12} - 2\alpha\right)$.

3.466. Известно, что $\cos 2\alpha = m$. Найти $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

3.467. Найти $\cos^8\alpha - \sin^8\alpha$, если известно, что $\cos 2\alpha = m$.

3.468. Найти значение выражения $\frac{\sin 4\alpha + \sin 10\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + 1 - 2\sin^2 4\alpha}$, если известно, что $\sin\alpha - \cos\alpha = m$.

3.469. Зная, что $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{4}{5}$ и что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, найти $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$.

3.470. Пусть A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника. Доказать, что $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A\cos B\cos C = 2$.

3.471. Доказать, что если $\cos 2\alpha = \cos 2\beta\cos 2\gamma$, то

$$1 + \mathrm{ctg}(\alpha+\beta)\,\mathrm{ctg}(\alpha-\beta) = \sin^{-2}\gamma.$$

3.472. Пусть A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника. Доказать, что

$$\sin(2n+1)A + \sin(2n+1)B + \sin(2n+1)C =$$

$$= (-1)^n\, 4\cos\frac{2n+1}{2}A\cdot\cos\frac{2n+1}{2}B\cdot\cos\frac{2n+1}{2}C,$$

где n — целое число.

3.473. Пусть A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника. Доказать, что

$$\sin 2nA + \sin 2nB + \sin 2nC = (-1)^{n+1} 4 \sin nA \sin nB \sin nC,$$

где n — целое число.

3.474. Доказать, что равенство $(\sin\varphi)^x + (\cos\varphi)^x = 1$ выполняется для всех $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ в том и только в том случае, если $x = 2$.

3.475. Доказать, что выражение $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha - \varphi) + 2\sin^2(\alpha - \varphi) - \cos 2\varphi$ не зависит от φ.

3.476. Найти наибольшее значение выражения

$$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 4\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17\pi}{8} - 4\alpha\right) \text{ при } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{8}.$$

3.477. Найти наименьшее значение выражения

$$\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 8\alpha\right)} \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{8}.$$

3.478. Доказать следующее утверждение: для того чтобы в треугольнике ABC один из углов был равен 60°, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$.

3.479. Доказать следующее утверждение: для того чтобы в треугольнике ABC один из углов был равен 36° или 108°, достаточно, чтобы выполнялось равенство $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0$.

3.480. Доказать следующее утверждение: для того чтобы в треугольнике ABC один из углов был равен 36° или 108°, необходимо, чтобы выполнялось равенство $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0$.

3.481. Найти наименьшее значение выражения $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \cos 4\alpha}$ при $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$.

3.482. Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ при $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

3.483. Доказать, что если $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$, то $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ и $\cos 2\alpha = -\cos 2\beta$.

3.484. Зная, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{4}{3}$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$, найти $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$.

3.485. Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha}$ при $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$.

3.486. Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{1}{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}$ при $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$.

3.487. Зная, что $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\frac{3}{5}$, найти $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}$.

3.488. Доказать, что если для некоторых чисел α, β и γ выполняется равенство $(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)=(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1+\sin\gamma)$, то каждая из частей этого равенства равна $|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|$.

3.489. Доказать, что для чисел φ, удовлетворяющих неравенствам $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$, выполняется равенство $1-\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^3\varphi+\ldots=\dfrac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}$.

3.490. Найти наименьшее значение выражения $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ при $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

3.491. Найти наименьшее значение выражения $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ при $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

3.492. Показать, что если α постоянно, то функция $f(x)=\cos^2 x+\cos^2(\alpha+x)-2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha+x)$ также является постоянной.

3.493. Найти сумму $1+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha+\ldots+\cos 4n\alpha$.

3.494. Показать, что если $x=\operatorname{tg}5^\circ$, $y=\operatorname{tg}20^\circ$ и $z=\operatorname{tg}65^\circ$, то $xy+yz+zx=1$.

3.495. Доказать, что $\operatorname{tg}142^\circ30'+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ есть целое число.

3.496. Пусть A, B, C — углы треугольника. Доказать, что

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le 1.$$

3.497. Показать, что если $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}z=\pi$, то $x+y+z=xyz$.

3.498. Показать, что если $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}z=\frac{\pi}{2}$, то $xy+yz+zx=1$.

3.499. Пусть A, B, C — углы треугольника. Доказать, что

$$8\cos A\cos B\cos C\le 1.$$

3.500. Пусть A, B, C — углы треугольника. Используя неравенство $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$, доказать, что $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}$.

ГЛАВА 4

ПРОГРЕССИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1°. ***Арифметическая прогрессия*** (a_1 — первый член; d — разность; n — число членов; a_n — n-й член; S_n — сумма n первых членов):

$$a_n = a_1 + d(n-1); \tag{4.1}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \tag{4.2}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n; \tag{4.3}$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2},\ k = 2, 3, \ldots, n-1; \tag{4.4}$$

$$a_k + a_m = a_p + a_q, \text{ где } k + m = p + q. \tag{4.5}$$

2°. ***Геометрическая прогрессия*** (b_1 — первый член; q — знаменатель ($q \neq 0$); n — число членов; b_n — n-й член ($b_n \neq 0$); S_n — сумма n первых членов):

$$b_n = b_1 q^{n-1}; \tag{4.6}$$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1); \tag{4.7}$$

$$S_n = nb_1 \quad (q = 1); \tag{4.8}$$

$$b_k^2 = b_{k-1} b_{k+1},\ k = 2, 3, \ldots, n-1; \tag{4.9}$$

$$b_k b_m = b_p b_q, \text{ где } k + m = p + q. \tag{4.10}$$

Если $|q| < 1$, то при неограниченном увеличении n ($n \to \infty$) сумма S_n стремится к числу $\frac{b_1}{1-q}$, которое называют *суммой* бесконечной геометрической прогрессии и обозначают буквой S:

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \tag{4.11}$$

Пример 1. Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии равна 21. Если от первых двух членов этой прогрессии отнять по 1, а к третьему прибавить 2, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найти сумму восьми первых членов геометрической прогрессии.

□ Пусть a_1 — первый член арифметической прогрессии, а d — ее разность. Тогда согласно формуле (4.3) имеем $S_3 = \frac{2a_1 + 2d}{2} \cdot 3 = 21$, или $a_1 + d = 7$. По условию, $a_1 - 1$, $a_1 + d - 1$, $a_1 + 2d + 2$ — три последовательных члена геометрической прогрессии. Используя формулу (4.9), получаем

$$(a_1 + d - 1)^2 = (a_1 + 2d + 2)(a_1 - 1),$$

откуда после замены $a_1 = 7 - d$ и раскрытия скобок приходим к квадратному уравнению $d^2 + 3d - 18 = 0$, т.е. $d_1 = 3$, $d_2 = -6$. Условию удовлетворяет только $d_1 = 3$; тогда $a_1 = 4$. Далее находим $b_1 = a_1 - 1 = 3$, $b_2 = a_1 + d - 1 = 6$ и, следовательно, $q = 2$. Наконец, по формуле (4.7) получим

$$S_8 = \frac{b_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1} = 765. \blacksquare$$

Пример 2. Найти сумму шести первых членов арифметической прогрессии, у которой сумма любого числа членов равна учетверенному квадрату этого числа.

□ Используя условие и формулу (4.3), имеем

$$\frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n = 4n^2, \text{ или } 2a_1 - d = (8 - d)n.$$

Последнее равенство должно выполняться при определенных a_1, d и при любых значениях n, а это возможно только тогда, когда $d = 8$. Значит, $a_1 = 4$, откуда находим $S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 144.$ ■

Пример 3. Известно, что при любом n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности $\{u_n\}$ выражается формулой $S_n = n^2 + 2n$. Найти девятый член этой последовательности и доказать, что $\{u_n\}$ является арифметической прогрессией.

□ Обозначим n-й член последовательности через u_n. Тогда $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$; $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$, или $u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$. Следовательно, $u_9 = S_9 - S_8 = 9^2 + 18 - 8^2 - 16 = 19$. Далее рассмотрим разность двух любых соседних членов последовательности:

$$u_{n+1} - u_n = (S_{n+1} - S_n) - (S_n - S_{n-1}) =$$

$$= (n + 1)^2 + 2(n + 1) - 2n^2 - 4n + (n - 1)^2 + 2(n - 1) = 2.$$

Это означает, что $\{u_n\}$ является арифметической прогрессией с разностью $d = 2$. ■

Пример 4. Решить уравнение $1+2x+4x^2+\ldots+(2x)^n+\ldots=3{,}4-1{,}2x$, если известно, что $|x|<0{,}5$.

□ Левая часть уравнения есть сумма бесконечной геометрической прогрессии, причем $b_1=1$ и $|q|=|2x|<1$, так как $|x|<0{,}5$. Согласно формуле (4.11), имеем

$$1+2x+4x^2+\ldots=\frac{1}{1-2x};\ \frac{1}{1-2x}=3{,}4-1{,}2x;\ (3{,}4-1{,}2x)(1-2x)=1;$$

$$2{,}4x^2-8x+2{,}4=0;\ 3x^2-10x+3=0,$$

откуда $x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$. Условию удовлетворяет только корень $x=\frac{1}{3}$. ■

Группа А

4.001. За установку самого нижнего железобетонного кольца колодца заплатили 2600 р., а за каждое следующее кольцо платили на 200 р. меньше, чем за предыдущее. Кроме того, по окончании работы было уплачено еще 4000 р. Средняя стоимость установки одного кольца оказалась равной $2244\frac{4}{9}$ р. Сколько колец было установлено?

4.002. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна $\frac{5}{3}$, а произведение третьего и четвертого ее членов равно $\frac{65}{72}$. Найти сумму 17 первых членов прогрессии.

4.003. В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах — одно штрафное очко, а за каждый последующий — на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

4.004. Найти три первых члена a_1, a_2, a_3 арифметической прогрессии, если известно, что $a_1+a_3+a_5=-12$ и $a_1a_3a_5=80$.

4.005. Найти число членов арифметической прогрессии, у которой сумма всех членов равна 112, произведение второго члена на разность прогрессии равно 30, а сумма третьего и пятого членов равна 32. Написать три первых члена прогрессии.

4.006. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 м?

4.007. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй член в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена на шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найти первый член и разность прогрессии.

4.008. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой сумма крайних членов равна -49, а сумма средних членов равна 14.

4.009. Найти третий член бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$, сумма которой равна 1,6, а второй член равен $-0{,}5$.

4.010. Найти три первых члена бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$, сумма которой равна 6, а сумма пяти первых членов равна $\frac{93}{16}$.

4.011. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна $\frac{14}{9}$. Найти эти числа.

4.012. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму 11 первых членов прогрессии.

4.013. Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15. Если от первых двух членов этой прогрессии отнять по 1, а к третьему прибавить 1, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найти сумму 10 первых членов арифметической прогрессии.

4.014. Известно, что при любом n сумма S_n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n = 4n^2 - 3n$. Найти три первых члена прогрессии.

4.015. Вычислить

$$(1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + \ldots + 199^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 + \ldots + 200^2).$$

4.016. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

4.017. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

4.018. Знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{1}{3}$, четвертый член этой прогрессии равен $\frac{1}{54}$, а сумма всех ее членов равна $\frac{121}{162}$. Найти число членов прогрессии.

4.019. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что $b_4 - b_2 = -\frac{45}{32}$ и $b_6 - b_4 = -\frac{45}{512}$.

4.020. Найти первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что ее знаменатель равен 3, а сумма шести первых членов равна 1820.

4.021. Арифметическая прогрессия обладает следующим свойством: при любом n сумма ее n первых членов равна $5n^2$. Найти разность прогрессии и три первых ее члена.

4.022. Произведение трех первых членов геометрической прогрессии равно 1728, а их сумма равна 63. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

4.023. Решить уравнения:

а) $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots=\frac{13}{6}$, где $|x|<1$;

б) $\frac{1}{x}+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{7}{2}$, где $|x|<1$.

4.024. Первый член арифметической прогрессии равен 429, разность ее равна -22. Сколько членов этой прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

4.025. Сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q|<1$ равна 16, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна 153,6. Найти четвертый член и знаменатель прогрессии.

4.026. Найти натуральные числа, образующие арифметическую прогрессию, если произведения трех и четырех первых ее членов равны соответственно 6 и 24.

4.027. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 6, а их произведение равно $\frac{135}{16}$. Найти сумму 15 первых членов прогрессии.

4.028. Найти число членов конечной геометрической прогрессии, у которой первый, второй и последний члены соответственно равны 3, 12 и 3072.

4.029. Найти сумму всех положительных четных двузначных чисел, делящихся на 3 нацело.

4.030. Найти знаменатель q бесконечной геометрической прогрессии ($|q|<1$), у которой каждый член в 4 раза больше суммы всех ее последующих членов.

4.031. Известно, что внутренние углы некоторого выпуклого многоугольника, наименьший угол которого равен 120°, образуют арифметическую прогрессию с разностью 5°. Определить число сторон этого многоугольника.

4.032. Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии равно 406. При делении девятого члена этой прогрессии на ее четвертый член в частном получается 2, а в остатке 6. Найти первый член и разность прогрессии.

4.033. В бесконечной геометрической прогрессии с положительными членами и со знаменателем $|q|<1$ сумма трех первых членов равна 10,5, а сумма прогрессии равна 12. Найти прогрессию.

4.034. Найти три первых члена арифметической прогрессии, у которой сумма любого числа членов равна утроенному квадрату этого числа.

4.035. При делении тринадцатого члена арифметической прогрессии на третий член в частном получается 3, а при делении восемнадцатого члена на седьмой член в частном получается 2 и в остатке 8. Определить разность и первый член прогрессии.

Группа Б

4.036. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов равна 189. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

4.037. Доказать, что любой член арифметической прогрессии начиная со второго есть среднее арифметическое между любыми двумя членами, равноудаленными от него.

4.038. Известно, что в некоторую арифметическую прогрессию входят члены a_{2n} и a_{2m} такие, что $\frac{a_{2n}}{a_{2m}} = -1$. Имеется ли член этой прогрессии, равный нулю? Если да, то каков номер этого члена?

4.039. Даны две арифметические прогрессии. Первый и пятый члены первой прогрессии равны соответственно 7 и -5. У второй прогрессии первый член равен нулю, а последний равен 3,5. Найти сумму членов второй прогрессии, если известно, что третьи члены обеих прогрессий равны между собой.

4.040. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если от третьего отнять 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по 1, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

4.041. Найти целое положительное число n из уравнения

$$(3+6+9+\ldots+3(n-1))+\left(4+5{,}5+7+\ldots+\frac{8+3n}{2}\right)=137.$$

4.042. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

4.043. Сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q|<1$ равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

4.044. Найти четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних равна 18.

4.045. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим числам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующих арифметическую прогрессию. Найти седьмой член геометрической прогрессии.

4.046. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

4.047. Найти три числа, образующих геометрическую прогрессию, если известно, что их произведение равно 64, а их среднее арифметическое равно $\frac{14}{3}$.

4.048. Доказать, что любой член знакоположительной геометрической прогрессии начиная со второго равен среднему пропорциональному между любыми членами, равноудаленными от него.

4.049. Найти сумму семи первых членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$, если ее второй член равен 4, а отношение суммы квадратов членов к сумме членов равно $\frac{16}{3}$.

4.050. Найти сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 7.

4.051. Найти сумму

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2.$$

4.052. Даны две бесконечные геометрические прогрессии со знаменателем $|q| < 1$, различающиеся только знаками их знаменателей. Их суммы соответственно равны S_1 и S_2. Найти сумму S бесконечной геометрической прогрессии, составленной из квадратов членов любой из данных прогрессий. Установить связь между S_1, S_2 и S.

4.053. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — последовательные члены геометрической прогрессии, S_n — сумма ее n первых членов. Доказать, что

$$S_n = b_1 b_n\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\right).$$

4.054. Доказать, что если числа a, b и c составляют арифметическую прогрессию, то числа a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2 и b^2+bc+c^2 в указанном порядке также составляют арифметическую прогрессию.

4.055. Первый член некоторой бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$ равен 1, а ее сумма равна S. Из квадратов членов этой прогрессии составлена новая бесконечная геометрическая прогрессия. Найти ее сумму.

4.056. Найти пятый член возрастающей геометрической прогрессии, зная, что ее первый член равен $7-3\sqrt{5}$ и что каждый ее член начиная со второго равен разности двух соседних с ним членов.

4.057. В арифметической прогрессии сумма ее m первых членов равна сумме n первых членов ($m \neq n$). Доказать, что в этом случае сумма ее первых $m + n$ членов равна нулю.

4.058. Известно, что L, M, N — соответственно l-й, m-й, n-й члены геометрической прогрессии. Показать, что $L^{m-n}M^{n-l}N^{l-m}=1$.

4.059. Числа a, b, c, одно из которых кратно 7, составляют арифметическую прогрессию с разностью 7. Показать, что число abc делится на 294.

4.060. Показать, что для всякой арифметической прогрессии при любом n выполняется равенство $S_{2n} = S_n + \frac{1}{3}S_{3n}$ (S_k — сумма k первых членов прогрессии).

4.061. Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3,$$

где x — целое положительное число.

4.062. Число 180 представить в виде суммы четырех слагаемых так, чтобы они составляли геометрическую прогрессию, у которой третий член был бы больше первого на 36.

4.063. Даны две геометрические прогрессии, состоящие из одинакового числа членов. Первый член и знаменатель первой прогрессии равны соответственно 20 и 0,75, а первый член и знаменатель второй прогрессии равны соответственно 4 и $\frac{2}{3}$. Если перемножить члены этих прогрессий с одинаковыми номерами, то сумма всех таких произведений составит 158,75. Найти число членов этих прогрессий.

4.064. Три числа, из которых третье равно 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

4.065. В конечной геометрической прогрессии известны ее первый член a, последний член b и сумма S всех ее членов. Найти сумму квадратов всех членов этой прогрессии.

4.066. В некоторой геометрической прогрессии, содержащей $2n$ положительных членов, произведение первого члена на последний равно 1000. Найти сумму десятичных логарифмов всех членов прогрессии.

4.067. Сумма трех чисел равна $\frac{11}{18}$, а сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Найти эти числа.

4.068. Разность арифметической прогрессии отлична от нуля. Числа, равные произведениям первого члена этой прогрессии на второй, второго члена на третий и третьего на первый, в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

Группа В

4.069. Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Если из этого числа вычесть 792, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если же из цифры, выражающей число сотен, вычесть 4, а остальные цифры искомого числа оставить без изменения, то получится число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

4.070. Известно, что при любом n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности выражается формулой $S_n = 2n^2 + 3n$. Найти десятый член этой последовательности и доказать, что она является арифметической прогрессией.

4.071. Найти сумму 19 первых членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если известно, что $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

4.072. Длины сторон треугольника представляют собой три последовательных члена возрастающей геометрической прогрессии. Сравнить знаменатель этой прогрессии с числом 2.

4.073. Найти сумму четырех первых членов геометрической прогрессии, обладающей тем свойством, что ее три первых члена, сумма которых равна $\frac{148}{9}$, являются одновременно первым, четвертым и восьмым членами некоторой арифметической прогрессии.

4.074. Числа $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

4.075. Последовательность чисел 1, 8, 22, 43, ... обладает тем свойством, что разности двух соседних членов (последующего и предыдущего) образуют арифметическую прогрессию: 7, 14, 21, ... Найти номер члена последовательности, равного 35 351.

4.076. Доказать следующее утверждение: для того чтобы три числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ и $\frac{1}{b+a}$ составляли арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы числа a^2, b^2 и c^2 также составляли арифметическую прогрессию.

4.077. Сумма четырех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна –40, а сумма их квадратов равна 3280. Найти эту прогрессию.

4.078. Даны две прогрессии: геометрическая с положительными членами b_n (знаменатель равен q, где $q \neq 1$) и возрастающая арифметическая с членами a_n (разность равна d). Найти x из условия $\log_x b_n - a_n = \log_x b_1 - a_1$.

4.079. Найти сумму $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + ... + n(2^n - 1)$.

4.080. Найти сумму $1 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 5 \cdot 27 + ... + (2n - 1) \cdot 3^n$.

4.081. Найти произведение n первых членов геометрической прогрессии, если известны их сумма S и сумма σ их обратных величин.

4.082. Корни уравнения $x^4 - 10x^2 + a = 0$ составляют арифметическую прогрессию. Найти a.

4.083. Доказать следующее утверждение: для того чтобы три числа x, y и z в указанном порядке составляли геометрическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) = (xy + yz)^2$.

4.084. В соревнованиях по волейболу участвовало n команд. Каждая команда играла со всеми остальными по одному разу. За каждую игру выигравшей команде засчитывалось одно очко, за проигрыш очки не начислялись; ничьих в волейболе нет. По окончании соревнований выяснилось, что набранные командами очки образуют арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

4.085. Числа x, y, z, t являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $xt = 24$, $y^3 + z^3 = 288$. Найти $x + t$.

ГЛАВА 5

КОМБИНАТОРИКА И БИНОМ НЬЮТОНА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

Размещения — это комбинации, формируемые из n различимых элементов по m элементов в каждой и отличающиеся одна от другой либо составом, либо порядком следования элементов, расположенных в форме последовательностей.

Существуют два вида размещений:

а) *без повторений* – каждый элемент, входящий в комбинацию, представлен единственным экземпляром (например, размещения без повторений из $n = 3$ элементов a, b, c по $m = 2$ элемента таковы: ab, ba, ac, ca, bc, cb);

б) *с повторениями* — каждый элемент, входящий в комбинацию, может быть представлен более чем одним экземпляром (например, размещения с повторениями из $n = 3$ элементов a, b, c по $m = 2$ элемента таковы: $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$; размещения с повторениями из $n = 2$ элементов a, b по $m = 3$ элемента таковы: $aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$).

Число возможных размещений из n различимых элементов по m находят по формулам:

без повторений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)...(n-m+1), \text{ где } m \le n; \tag{5.1}$$

с повторениями

$$\tilde{A}_n^m = n^m. \tag{5.2}$$

Перестановки – это последовательности, каждая из которых состоит из n различимых элементов и отличается от другой только порядком расположения элементов, т. е. это размещения без повторений из n элементов по n (например, перестановки из трех элементов a, b, c таковы: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$).

Число возможных перестановок из n различимых элементов находят по формуле

$$P_n = n!. \tag{5.3}$$

Сочетания — это комбинации, формируемые из n различимых элементов по m элементов в каждой и отличающиеся одна от другой только составом элементов.

Существуют два вида сочетаний:

а) *без повторений* – каждый элемент, входящий в комбинацию, представлен единственным экземпляром (например, сочетания без повторений из $n = 4$ элементов a, b, c, d по $m = 2$ элемента таковы: ab, ac, ad, bc, bd, cd.

б) *с повторениями* – каждый элемент, входящий в комбинацию, может быть представлен более чем одним экземпляром (например, сочетания с повторениями из $n = 4$ элементов a, b, c, d по $m = 2$ элемента таковы: aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd; сочетания с повторениями из $n = 2$ элементов a, b по $m = 4$ элемента таковы: $aaaa$, $aaab$, $abab$, $abbb$, $bbbb$).

Число возможных сочетаний из n различимых элементов по m находят по формулам:

без повторений

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}, \quad \text{где } m \le n;\ C_n^0 = 1; \tag{5.4}$$

с повторениями

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \tag{5.5}$$

Справедливы следующие свойства числа сочетаний без повторений:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \tag{5.6}$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}. \tag{5.7}$$

Формула бинома Ньютона имеет вид

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \tag{5.8}$$

или

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k + \ldots + b^n,$$

где n — натуральное число и

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \tag{5.9}$$

есть $(k+1)$-й член в разложении бинома ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{5.10}$$

Пример 1. Команда некоторой ЭВМ записывается в виде набора из восьми цифровых знаков — нулей и единиц. Каково максимальное количество различных команд?

☐ Так как для каждого элемента набора возможны два значения (0 или 1), то максимальное количество различных команд есть $\underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{8 \text{ раз}} = 256$. Можно рассуждать иначе: а) рассмотреть все двоичные числа от 00000000 до $11111111_2 = 255_{10}$; б) воспользоваться тем, что здесь имеют место размещения двух цифр ($n = 2$) с их повторениями в команду из восьми цифр ($m = 8$); тогда, применяя формулу (5.2), находим $\tilde{A}_2^8 = 2^8 = 256$. ■

Пример 2. В разложении $(1+x)^n$ четвертый член равен 0,96. Найти значения x и n, если сумма биномиальных коэффициентов равна 1024.

□ Так как сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n, а $1024 = 2^{10}$, то $n = 10$. Используя формулу (5.9), запишем четвертый член разложения; имеем $T_4 = C_{10}^3 x^3 = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 = 120x^3$. Согласно условию, $120x^3 = 0{,}96$, откуда $x^3 = 0{,}008$, т. е. $x = 0{,}2$. ■

Пример 3. При каких значениях x и y возможно равенство $C_y^x : C_{y+2}^x : A_y^x = 1:3:24$?

□ Применяя формулы (5.4) и (5.3), получим

$$\frac{y!}{x!(y-x)!} : \frac{(y+2)!}{x!(y-x+2)!} = \frac{1}{3};\quad C_y^x : (x!\cdot C_y^x) = 1:24.$$

Из второго уравнения имеем $x! = 24$, т. е. $x = 4$ (поскольку $24 = 1\cdot2\cdot3\cdot4$), а из первого уравнения находим

$$\frac{(y-x+1)(y-x+2)}{(y+1)(y+2)} = \frac{1}{3}.$$

Так как $x = 4$, то $y^2 - 9y + 8 = 0$, откуда $y = 1$ и $y = 8$; $y = 1$ не удовлетворяет условию (должно быть $y > x = 4$). Итак, $x = 4$, $y = 8$. ■

Группа А

Решить уравнения (5.001–5.005):

5.001. а) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$; б) $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$.

5.002. а) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$; б) $\dfrac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \dfrac{24}{23}$.

5.003. а) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$; б) $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$.

5.004. а) $\dfrac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$; б) $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$.

5.005. а) $\dfrac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4}P_3} = 210$; б) $A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1} = \dfrac{30}{7}P_x$.

5.006. Показать, что при любом k сумма $C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2$ есть точный квадрат.

5.007. Доказать тождества:

а) $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$; б) $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$.

5.008. Сумма биномиальных коэффициентов разложения $\left(2nx+\frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ равна 64. Определить слагаемое, не содержащее x.

5.009. Сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами в разложении $(ax+x^{-1/4})^n$ равна 512. Найти слагаемое, не содержащее x.

5.010. При каких значениях x четвертое слагаемое разложения $(5+2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?

5.011. Каков наибольший коэффициент разложения $(a+b)^n$, если сумма всех коэффициентов равна 4096?

5.012. Известно, что в разложении $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt[10]{\frac{a^7}{b^3}}\right)^n$ имеется член, содержащий ab. Найти этот член.

5.013. Сумма коэффициентов второго и третьего слагаемых разложения $\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ равна 25,5. Написать член, не содержащий x.

5.014. При каком значении x четвертое слагаемое разложения $\left(\sqrt{2^{x-1}}+\sqrt[3]{2^{-x}}\right)^m$ в 20 раз больше m, если биномиальный коэффициент четвертого слагаемого относится к биномиальному коэффициенту второго слагаемого как 5:1?

5.015. Определить A_n^2, если пятое слагаемое разложения $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ не зависит от x.

5.016. В какую натуральную степень следует возвести бином $\frac{1}{\sqrt{2}}+3$, чтобы отношение четвертого слагаемого разложения к третьему было равно $3\sqrt{2}$?

5.017. Расписание одного дня содержит 5 уроков по разным предметам. Определить количество таких расписаний при выборе из 11 предметов.

5.018. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности председателя и заместителя?

5.019. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?

5.020. Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трех до десяти звуков?

5.021. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы пять гвоздик одного цвета?

5.022. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

5.023. Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга (т. е. каждая команда дважды встречается с любой другой). Определить, какое количество встреч следует провести.

5.024. Замок открывается только в том случае, если набран определенный трехзначный номер. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры из заданных пяти. Угадать номер удалось только на последней из всех возможных попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?

5.025. Из группы в 15 человек выбирают четырех участников эстафеты 800 + + 400 + 200 + 100. Сколькими способами можно распределить спортсменов по этапам эстафеты?

5.026. Команда из пяти человек выступает на соревнованиях по плаванию, в которых участвуют еще 20 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые членами этой команды?

5.027. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи так, чтобы одна не могла взять другую? (Одна ладья может взять другую, если она находится с ней на одной горизонтали или на одной вертикали шахматной доски.)

5.028. Две ладьи различного цвета расположены на шахматной доске так, что каждая может взять другую. Сколько существует таких расположений?

5.029. Участники шахматного турнира играют в зале, где имеются 8 столиков. Сколькими способами можно расположить шахматистов, если известны участники всех партий?

Группа Б

Решить уравнения (5.030–5.032):

5.030. $A_{x+1}^{y+1} P_{x-y} : P_{x-1} = 72.$

5.031. $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \ldots + C_x^{x-8} + C_x^{x-9} + C_x^{x-10} = 1023.$

5.032. $\dfrac{P_{x+3}}{A_x^5 \cdot P_{x-5}} = 720.$

5.033. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} A_y^x : P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126, \\ P_{x+1} = 720; \end{cases}$ б) $\begin{cases} A_y^x + 3C_x^y = 90, \\ A_x^y - 2C_x^y = 40. \end{cases}$

5.034. Найти x и y, если:

а) $C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6:5:2;$

б) $C_x^{y-1} : (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1}) : C_x^{y+1} = 3:5:5.$

5.035. Найти x и y, если:

а) $(A_{x-1}^{y}+yA_{x-1}^{y-1}):A_x^{y-1}:C_x^{y-1}=10:2:1$;

б) $A_x^{y-1}:A_{x-1}^{y}:(C_{x-2}^{y}+C_{x-2}^{y-1})=21:60:10$.

5.036. Доказать тождества:

а) $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$;

б) $C_n^k+3C_n^{k-1}+3C_n^{k-2}+C_n^{k-3}=C_{n+3}^k$;

в) $A_{n-1}^m=A_n^m-mA_{n-1}^{m-1}$.

5.037. Разность между третьими биномиальными коэффициентами разложений $(a+b)^{n+1}$ и $(a+b)^n$ равна 225. Найти число рациональных членов разложения $(\sqrt[5]{x}+\sqrt[9]{y})^n$.

5.038. Найти k-й член разложения $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^m$, если известно, что $T_{k+2}:T_{k+1}:T_k=28:8\sqrt{6}:9$.

5.039. Разность между некоторыми членами T_{k+1} и T_k разложения $(\sqrt[6]{x}+\sqrt{x^{-1}})^{12}$ равна 30. Определить, при каких значениях x это возможно, если член T_{k+1} содержит x в степени, вдвое меньшей, чем член T_k.

5.040. Найти наибольший биномиальный коэффициент разложения $\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n$, если произведение четвертого от начала и четвертого от конца слагаемых равно 14 400.

5.041. При любом допустимом значении z слагаемое U_{k+1} разложения $(\sqrt[3]{z}+\sqrt{z})^m$ в 2 раза меньше слагаемого V_{k+2} разложения $\left(\sqrt[6]{z^5}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{z}}\right)^{m+1}$. Найти эти слагаемые.

5.042. Сумма третьего от начала и третьего от конца биномиальных коэффициентов разложения $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4})^n$ равна 9900. Сколько рациональных членов содержится в этом разложении?

5.043. Третье слагаемое разложения $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^m$ не содержит x. При каких значениях x это слагаемое равно второму слагаемому разложения $(1+x^3)^{30}$?

5.044. Тридцать человек разбиты на три группы I, II и III по 10 человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

5.045. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

5.046. Сколько различных светящихся колец можно сделать, расположив по окружности 10 разноцветных лампочек (кольца считаются одинаковыми при одинаковом порядке следования цветов)?

5.047. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?

5.048. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?

5.049. Из группы в 12 человек ежедневно в течение 6 дней выбирают двух дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит один раз.

5.050. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?

5.051. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы 1 и 2 находились бы в соседних аудиториях?

5.052. В турнире участвуют 16 шахматистов. Определить количество различных расписаний первого тура (расписания считаются различными, если отличаются участниками хотя бы одной партии; цвет фигур и номер доски не учитываются).

5.053. Шесть ящиков различных материалов доставляются на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на пятый этаж будет доставлен какой-либо один материал?

5.054. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

5.055. В поезд метро на начальной остановке вошли 100 пассажиров. Сколькими способами могут выйти все пассажиры на последующих 16 остановках поезда?

5.056. Сколько трехзначных чисел, делящихся на 3, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

5.057. Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трех членов ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

5.058. Из 10 теннисисток и 6 теннисистов составляют 4 смешанные пары. Сколькими способами это можно сделать?

5.059. Три автомашины 1, 2, 3 должны доставить товар в шесть магазинов. Сколькими способами можно использовать машины, если грузоподъемность каждой из них позволяет взять товар сразу для всех магазинов и если две машины в один и тот же магазин не направляются? Сколько вариантов маршрута возможно, если решено использовать только машину 1?

5.060. Четверо юношей и две девушки выбирают спортивную секцию. В секции хоккея и бокса принимают только юношей, в секцию художественной гимнастики — только девушек, а в лыжную и конькобежную секции — и юношей, и девушек. Сколькими способами могут распределиться между секциями эти шесть человек?

5.061. Из лаборатории, в которой работают 20 человек, 5 сотрудников должны уехать в командировку. Сколько может быть различных составов этой группы, если начальник лаборатории, его заместитель и главный инженер одновременно уезжать не должны?

5.062. В фортепьянном кружке занимаются 10 человек, в кружке художественного слова — 15, в вокальном кружке — 12, в фотокружке — 20 человек. Сколькими способами можно составить бригаду из четырех чтецов, трех пианистов, пяти певцов и одного фотографа?

5.063. Двадцать восемь костей домино распределены между четырьмя игроками. Сколько возможно различных вариантов распределений?

5.064. Из группы в 15 человек должны быть выделены бригадир и 4 члена бригады. Сколькими способами это можно сделать?

5.065. Сколькими способами можно распределить 5 учеников по трем параллельным классам?

5.066. Лифт останавливается на десяти этажах. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 8 пассажиров, находящихся в кабине лифта?

5.067. Восемь авторов должны написать книгу из шестнадцати глав. Сколькими способами возможно распределение материала между авторами, если два человека напишут по три главы, четыре — по две, два — по одной главе книги?

5.068. В шахматном турнире участвуют 8 шахматистов третьего разряда, 6 — второго и 2 перворазрядника. Определить количество таких вариантов состава первого тура, чтобы шахматисты одной категории встречались между собой (цвет фигур не учитывается).

5.069. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляют всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых есть цифры 2, 4 и 5 одновременно.

5.070. Семь яблок и три апельсина надо положить в два пакета так, чтобы в каждом пакете был хотя бы один апельсин и чтобы количество фруктов в них было одинаковым. Сколькими способами это можно сделать?

5.071. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

5.072. Номер автомобильного прицепа состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

5.073. Садовник должен в течение трех дней посадить 10 деревьев. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет сажать не менее одного дерева в день?

5.074. Из вазы, где стоят 10 красных и 4 розовые гвоздики, выбирают один красный и два розовых цветка. Сколькими способами это можно сделать?

Группа В

5.075. Доказать, что $\frac{C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n}{n} = 2^{n-1}$.

5.076. Доказать тождество $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Пользуясь этим тождеством, показать, что $C_n^m + C_{n-1}^m + \ldots + C_{n-10}^m = C_{n+1}^{m+1} - C_{n-10}^{m+1}$.

5.077. Упростить выражение $P_1+2P_2+...+nP_n$, где P_k — число перестановок из k элементов.

5.078. Доказать, что $C_{2n+x}^{n} \cdot C_{2n-x}^{n} \le (C_{2n}^{n})^2$.

5.079. Найти наибольшее значение суммы $S=(1+x)^{36}+(1-x)^{36}$ при $|x|\le 1$.

5.080. Найти наибольшее слагаемое разложения $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^{20}$.

5.081. При каких значениях x наибольшим слагаемым разложения $(5+3x)^{10}$ является четвертое?

5.082. Если раскрыть все скобки в выражении $(1+x)^9+(1+x)^{10}+...+(1+x)^{14}$ и привести подобные члены, то получится некоторый многочлен. Определить коэффициент при x^9 в этом многочлене, не раскрывая скобок.

5.083. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить учеников в два ряда по 6 человек, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

5.084. Каждый из десяти радистов пункта A старается установить связь с каждым из двадцати радистов пункта B. Сколько возможно вариантов такой связи?

5.085. Шесть ящиков различных материалов доставляют на восемь этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких из них на восьмой этаж будет доставлено не менее двух материалов?

5.086. Сколькими способами можно построить в одну шеренгу игроков двух футбольных команд, чтобы при этом два футболиста одной команды не стояли рядом?

5.087. На книжной полке находятся книги по математике и по логике — всего 20 книг. Показать, что наибольшее количество вариантов комплекта, содержащего 5 книг по математике и 5 книг по логике, возможно в том случае, когда число книг на полке по каждому предмету равно 10.

5.088. Лифт, в котором находятся 9 пассажиров, может останавливаться на десяти этажах. Пассажиры выходят группами по два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?

5.089. «Ранним утром на рыбалку улыбающийся Игорь мчался босиком». Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядка их следования?

5.090. В шахматной встрече двух команд по 8 человек участники партий и цвет фигур каждого участника определяются жеребьевкой. Каково число различных исходов жеребьевки?

ГЛАВА 6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1°. *Уравнением с одной переменной* называется равенство, содержащее эту переменную (ее иногда называют неизвестным).

Значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство, называется *корнем* (или *решением*) уравнения.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

2°. Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются *равносильными*. В процессе решения заданное уравнение заменяют более простым; при этом используют следующие правила преобразования уравнения в равносильное ему:

а) какое-нибудь слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком;

б) обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число;

в) уравнение вида $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ можно заменить равносильной системой

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

или решить уравнение $f(x) = 0$, а затем отбросить те из найденных корней, которые обращают в нуль знаменатель $g(x)$.

3°. Пусть в результате преобразования уравнения

$$f_1(x) = g_1(x) \tag{6.1}$$

получено уравнение

$$f_2(x) = g_2(x). \tag{6.2}$$

Если каждый корень уравнения (6.1) является корнем уравнения (6.2), то уравнение (6.2) называют *следствием* уравнения (6.1).

Корни уравнения (6.2), не удовлетворяющие уравнению (6.1), называются *посторонними* корнями уравнения (6.1) и не считаются решениями этого уравнения.

К появлению посторонних корней могут, например, привести (но не обязательно приводят) такие преобразования: возведение в квадрат (или в другую четную степень) обеих частей уравнения, умножение обеих частей уравнения на алгебраическое выражение, содержащее переменную, и т.п.

4°. Чтобы выяснить, имеются ли среди корней уравнения-следствия посторонние корни исходного уравнения, необходимо проверить каждый из найденных корней подстановкой его в исходное уравнение.

Можно поступить иначе: на каждом этапе решения уравнения определять промежутки, в которых могут находиться корни уравнения. Все корни, не принадлежащие этим промежуткам, являются посторонними и должны быть отброшены. Однако остальные корни все равно необходимо проверить подстановкой в исходное уравнение.

5°. Если уравнение имеет вид

$$f(x)\,h(x) = g(x)\,h(x),$$

то деление обеих его частей на $h(x)$, как правило, недопустимо, поскольку может привести к потере корней; в этом случае могут быть потеряны корни уравнения $h(x) = 0$, если они существуют.

Уравнение не считается решенным как в случае, когда ответ содержит посторонние корни, так и в случае, когда в процессе решения был потерян хотя бы один корень.

Пример 1. Решить уравнение $\dfrac{2}{3-x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{x(3-x)}$.

□ Перенесем все члены уравнения в левую часть и преобразуем полученное выражение к виду $\dfrac{x^2-7x+12}{2x(3-x)}=0$. Из уравнения $x^2 - 7x + 12 = 0$ находим $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. При $x = 3$ знаменатель обращается в нуль; значит, 3 не является корнем. Итак, получаем ответ: $x = 4$. ■

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-2}=x-4$.

□ Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(\sqrt{x-2})^2=(x-4)^2,\ x-2=x^2-8x+16;\ x^2-9x+18=0,\ x_1=3,\ x_2=6.$$

Проверим найденные корни, подставив их в исходное уравнение. Если $x = 3$, то получаем $1 = -1$ — неверное равенство; если $x = 6$, то получаем $2 = 2$ — верное равенство. Значит, заданное уравнение имеет единственный корень $x = 6$.

Отметим, что можно было сначала найти область определения данного уравнения. Для этого решим систему неравенств $\begin{cases} x-2\ge 0,\\ x-4\ge 0,\end{cases}$ откуда $x\ge 4$. Тогда сразу видно, что $x = 3$ — посторонний корень исходного уравнения. Проверкой убеждаемся, что $x = 6$ удовлетворяет заданному уравнению. Итак, $x = 6$. ■

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x+1)^2-8x}$.

□ Преобразуя правую часть уравнения, получаем:

$$\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{4x^2-4x+1};$$

$$\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x-1)^2};\ \sqrt{1-4x}+2=|2x-1|.$$

Это уравнение имеет решение лишь при условии $1-4x \geq 0$, т. е. $x \leq \frac{1}{4}$. Тогда $|2x-1| = 1-2x$ (а не $2x-1$, так как это верно только при $x \geq \frac{1}{2}$, что противоречит условию $x \leq \frac{1}{4}$). Значит, $\sqrt{1-4x}+2 = 1-2x$, откуда

$$\sqrt{1-4x} = -1-2x. \qquad (*)$$

Область возможных значений x определяется системой неравенств $\begin{cases} 1-4x \geq 0, \\ -1-2x \geq 0, \end{cases}$

т. е. $x \leq -\frac{1}{2}$. Возведя обе части уравнения (*) в квадрат, получим

$$1-4x = 1+4x+4x^2;\ 4x^2+8x=0,\ x_1=0,\ x_2=-2.$$

Корень $x_1 = 0$ не удовлетворяет неравенству $x \leq -\frac{1}{2}$ и поэтому является посторонним; корень $x_2 = -2$ удовлетворяет неравенству $x \leq -\frac{1}{2}$, но его следует проверить. Подставив $x = -2$ в исходное уравнение, получим верное равенство: $3+2=5$. Итак, заданное уравнение имеет единственный корень $x=-2$. ■

Пример 4. Решить уравнение $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2$.

□ Раскрыв скобки и приведя подобные члены, имеем $2x^3+3x^2+3x+2=0$. Разложим левую часть уравнения на множители. Сначала группируя члены уравнения, а затем используя формулу (2.13), получаем

$$2(x^3+1)+3x(x+1)=0;\ 2(x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)=0;$$

$$(x+1)(2x^2+x+2)=0.$$

Последнее равенство верно при условии, что по крайней мере один из сомножителей равен нулю: $x+1=0$, откуда $x=-1$, или $2x^2+x+2=0$. Однако дискриминант последнего уравнения отрицателен, следовательно, оно не имеет корней. Итак, $x=-1$. ■

Пример 5. Решить уравнение $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$.

□ Введем переменную z, полагая $x+\frac{1}{x}=z$. Тогда $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=z^2$, откуда по формуле (2.9) находим $x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2$.

Заменив в данном уравнении выражение в первой скобке на z, а во второй — на z^2-2, получим

$$7z-2(z^2-2)=9;\ 2z^2-7z+5=0;\ z_1=\frac{5}{2},\ z_2=1.$$

Для отыскания x следует решить два квадратных уравнения:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},\ 2x^2-5x+2=0;\ x_1=2;\ x_2=\frac{1}{2};$$

$$x+\frac{1}{x}=1,\ x^2-x+1=0;\ \mathrm{D}<0\ \text{— корней нет.}$$

Итак, получаем ответ: $x_1=2;\ x_2=\frac{1}{2}$. ■

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

□ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x+1+4x+13+2\sqrt{(x+1)(4x+13)}=3x+12;$$

$$\sqrt{(x+1)(4x+13)}=-(x+1).$$

Еще одно возведение в квадрат привело бы к уничтожению иррациональности, однако здесь нет необходимости в этом преобразовании. Замечаем, что полученное уравнение-следствие может иметь решение только при условии $x+1\le 0$. Вместе с тем одним из условий существования решения исходного уравнения является требование $x+1\ge 0$. Оба условия совместны в единственном случае, если $x+1=0$, откуда $x=-1$. Это значение x, как легко проверить, удовлетворяет исходному уравнению. Так как уравнение-следствие других корней не имеет, то других корней не имеет и исходное уравнение. Итак, $x=-1$. ■

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{25-x^2}$.

□ Так как $x=5$ не является корнем уравнения, то обе части уравнения можно разделить на $\sqrt[3]{(5-x)^2}$, причем потери корней не произойдет. Получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{5+x}{5-x}\right)^2}+4=5\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}.$$

Полагая $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=z$, приходим к квадратному уравнению $z^2-5z+4=0$, откуда $z_1=1$, $z_2=4$. Для отыскания x имеем два уравнения: $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=1$ и

$\sqrt[3]{\dfrac{5+x}{5-x}}=4$. Возведя в куб обе части каждого из них, получим $\dfrac{5+x}{5-x}=1$, откуда $x=0$, и $\dfrac{5+x}{5-x}=64$, откуда $x=\dfrac{63}{13}$. Итак, $x_1=0$; $x_2=\dfrac{63}{13}$. ■

Пример 8. Решить уравнение

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+3.$$

□ Запишем уравнение в следующем виде:

$$(2x^2-3x+2)-2\sqrt{2x^2-3x+2}+1=0.$$

Положим $\sqrt{2x^2-3x+2}=z$; отметим, что пригодными могут быть только значения $z\geq 0$. Произведя указанную замену, получим уравнение $z^2-2z+1=0$, откуда $z=1$ — это пригодное значение z и поэтому уравнение $\sqrt{2x^2-3x+2}=1$, или $2x^2-3x+1=0$ равносильно заданному. Корни $x_1=\dfrac{1}{2}$; $x_2=1$ этого квадратного уравнения являются корнями исходного уравнения. ■

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

□ Положим $\sqrt{x-1}=z$ и заметим, что $z\geq 0$, $x\geq 1$, $x=z^2+1$. Тогда на основании формулы (2.23) получим $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=\sqrt{z^2-4z+4}=|z-2|$; $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=\sqrt{z^2-6z+9}=|z-3|$. Исходное уравнение примет вид

$$|z-2|+|z-3|=1. \tag{*}$$

Используя определение модуля, рассмотрим следующие случаи:

1) если $z<2$, то $2-z+3-z=1$, откуда $z=2$;

2) если $2\leq z<3$, то $z-2+3-z=1$, откуда $1=1$, т.е. все значения z, принадлежащие промежутку $[2, 3)$, удовлетворяют уравнению;

3) если $z\geq 3$, то $z-2+z-3=1$, откуда $z=3$.

Объединяя эти решения, заключаем, что уравнению (*) удовлетворяют все значения z, для которых $2\leq z\leq 3$.

Так как $z=\sqrt{x-1}$, то $2\leq\sqrt{x-1}\leq 3$; значит, $4\leq x-1\leq 9$, откуда $5\leq x\leq 10$. ■

Пример 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2x+y+z=7,\\ x+2y+z=8,\\ x+y+2z=9.\end{cases}$$

☐ Эту систему линейных уравнений можно решать методом последовательного исключения (методом Гаусса), однако проще поступить так: сложив уравнения, получим $4(x+y+z)=24$, откуда $x+y+z=6$. Последовательно вычитая это уравнение из каждого уравнения системы, находим $x=1$, $y=2$, $z=3$. ■

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$$

☐ Возведем в квадрат обе части первого уравнения:

$$x^2y+y^2x+2xy\sqrt{xy}=36.$$

Вычитая из этого уравнения второе уравнение системы, получаем $xy\sqrt{xy}=8$, или $(xy)^3=64$, т.е. $xy=4$. Это уравнение и второе уравнение заданной системы образуют систему

$$\begin{cases} xy=4, \\ xy(x+y)=20, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} xy=4, \\ x+y=5. \end{cases}$$

Отсюда находим две пары решений: $x_1=4$, $y_1=1$ и $x_2=1$, $y_2=4$. Проверкой убеждаемся, что обе пары удовлетворяют исходной системе уравнений. ■

Группа А

Решить уравнения* (6.001–6.066):

6.001. $\dfrac{x^2+1}{x-4}-\dfrac{x^2-1}{x+3}=23.$

6.002. $\dfrac{b}{x-a}+\dfrac{a}{x-b}=2.$

6.003. $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0$ (подстановка $\dfrac{x^2+x-5}{x}=z$).

6.004. $x^4-\dfrac{50}{2x^4-7}=14$ (подстановка $2x^4-7=z$).

6.005. $\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{12}$ (подстановка $x^2+2x=z$).

6.006. $x+\dfrac{1}{x}=2\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}.$

6.007. $\dfrac{x^2}{a^3}+\dfrac{b^3}{x^2}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}.$

6.008. $\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x+6}{x+2}+\dfrac{x-6}{x-2}.$

---

* Величины a, b, c, p, q, m, n, как правило, считаются постоянными, а x, y, z, u, v, w — переменными.

6.009. $\frac{5a}{y+a}+\frac{4a}{y+2a}+\frac{3a}{y+3a}=8.$

6.010. $\frac{1}{x^3+2}-\frac{1}{x^3+3}=\frac{1}{12}.$

6.011. $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3}-\frac{28}{15}.$

6.012. $(x-1)(x^2-3)+(2x-1)(x^2+2)=3.$

6.013. $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0.$

6.014. $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2.$

6.015. $\frac{7(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)}=-2.$

6.016. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$ (подстановка $\frac{x^2+1}{x}=u$).

6.017. $\frac{x+n}{m+n}-\frac{m-n}{x-n}=\frac{x+p}{m+p}-\frac{m-p}{x-p}.$

6.018. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4$ (подстановка $x+x^{-1}=z$).

6.019. $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$ (подстановка $x^2-4x+10=y$).

6.020. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=2{,}5.$

6.021. $8x^4+x^3+64x+8=0.$

6.022. $(x+3)^3-(x+1)^3=56.$

6.023. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+6}{x+3}+\frac{x+10}{x+5}=6.$

6.024. $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47.$

6.025. $(x-a)^3-(x-b)^3=b^3-a^3.$

6.026. $\frac{ax^2}{x-1}=(a+1)^2.$

6.027. $\frac{(x-a)^2+x(x-a)+x^2}{(x-a)^2-x(x-a)+x^2}=\frac{19}{7}.$

6.028. $\frac{x}{a+b}+\frac{2a-x}{a-b}-\frac{a+b}{x}=1.$

6.029. $\frac{a^2-1}{ax-1}+\frac{a-x}{a}=1.$

6.030. $\left(\dfrac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\dfrac{5x}{4-x^2}\right)^2.$

6.031. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}.$

6.032. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$

6.033. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$

6.034. $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x.$

6.035. $\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b;\ a>b.$

6.036. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2.$

6.037. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2.$

6.038. $2\sqrt{7-x}:0{,}6\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}=10\sqrt[4]{1{,}5}:\dfrac{1}{4}\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}.$

6.039. $\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{1/2}+4\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^{1/2}=4.$

6.040. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1.$

6.041. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1.$

6.042. $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0.$

6.043. $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3.$

6.044. $\sqrt[5]{(5x+2)^3}-\dfrac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}}=6.$

6.045. $x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+4=0.$

6.046. $3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^{-1}}=2x^{-1}.$

6.047. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22.$

6.048. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2.$

6.049. $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6.$

6.050. $\dfrac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2.$

6.051. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}.$

6.052. $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{3}.$

6.053. $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4.$

6.054. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}.$

6.055. $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56.$

6.056. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2.$

6.057. $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}=5.$

6.058. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2$ $\left(\text{подстановка } \sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}=z\right)$.

6.059. $\sqrt[5]{\dfrac{16z}{z-1}}+\sqrt[5]{\dfrac{z-1}{16z}}=2{,}5.$

6.060. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1.$

6.061. $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-18=0.$

6.062. $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}.$

6.063. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3.$

6.064. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+8}=\sqrt{2x+6}.$

6.065. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}.$

6.066. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$ (подстановка $x^2-4x-6=u$).

Решить системы уравнений (6.067–6.119):

6.067. $\begin{cases}(x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1,\\ x+y=0{,}9.\end{cases}$

6.068. $\begin{cases}x^3+y^3=7,\\ x^3y^3=-8.\end{cases}$

6.069. $\begin{cases}x^{-1}+y^{-1}=5,\\ x^{-2}+y^{-2}=13.\end{cases}$

6.070. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6},\\ x+y=5.\end{cases}$

6.071. $\begin{cases}x-y=1,\\ x^3-y^3=7.\end{cases}$

6.072. $\begin{cases}\dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x},\\ y^2-x-5=0.\end{cases}$

6.073. $\begin{cases}y^2-xy=-12,\\ x^2-xy=28.\end{cases}$

6.074. $\begin{cases}x+y+\dfrac{x}{y}=9,\\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20.\end{cases}$

6.075. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6, \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$

6.076. $\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4. \end{cases}$

6.077. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82, \\ xy = 3. \end{cases}$

6.078. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$

6.079. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ xy = 2. \end{cases}$

6.080. $\begin{cases} u^2 + uv = 15, \\ v^2 + uv = 10. \end{cases}$

6.081. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$

6.082. $\begin{cases} x^2 + y^4 = 5, \\ xy^2 = 2. \end{cases}$

6.083. $\begin{cases} 12(x+y)^2 + x = 2{,}5 - y, \\ 6(x-y)^2 + x = 0{,}125 + y. \end{cases}$

6.084. $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{y}{3} = 3. \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

6.085. $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x + y} = \dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

6.086. $\begin{cases} (x-y)(x^2 - y^2) = 45, \\ x + y = 5. \end{cases}$

6.087. $\begin{cases} x^4 - y^4 = 15, \\ x^3y - xy^3 = 6. \end{cases}$

6.088. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$

6.089. $\begin{cases} u^3 + v^3 + 1 = m, \\ u^3v^3 = -m. \end{cases}$

6.090. $\begin{cases} ax + \dfrac{b}{y} = 2, \\ \dfrac{b}{x} + ay = 2ab. \end{cases}$

6.091. $\begin{cases} (x-y)xy = 30, \\ (x+y)xy = 120. \end{cases}$

6.092. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0, \\ x + y + 8 = 0. \end{cases}$

6.093. $\begin{cases} v - u = 1, \\ w - v = 1, \\ (u-1)^3 + (v-2)^3 + (w-3)^3 = 3. \end{cases}$

6.094. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{13}{6},\\ xy=5.\end{cases}$

6.095. $\begin{cases}3x+2y+2z=13,\\ 2x+3y+2z=14,\\ 2x+2y+3z=15.\end{cases}$

6.096. $\begin{cases}x^2y^3=16,\\ x^3y^2=2.\end{cases}$

6.097. $\begin{cases}x+2y+3z=3,\\ 3x+y+2z=7,\\ 2x+3y+z=2.\end{cases}$

6.098. $\begin{cases}x^3+y^3=7,\\ xy(x+y)=-2.\end{cases}$

6.099. $\begin{cases}x^2+xy+y^2=91,\\ x+\sqrt{xy}+y=13.\end{cases}$

6.100. $\begin{cases}\sqrt[4]{u+v}-\sqrt[4]{u-v}=2,\\ \sqrt{u+v}-\sqrt{u-v}=8.\end{cases}$

6.101. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8\end{cases}$ (подстановка $\sqrt{x+y}=u$, $\sqrt[3]{x-y}=v$).

6.102. $\begin{cases}\sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3,\\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3.\end{cases}$

6.103. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1,\\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4\end{cases}$ $\left(\text{подстановка } \sqrt{\dfrac{x}{y}}=z\right)$.

6.104. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}\sqrt{x}=12,\\ xy=64.\end{cases}$

6.105. $\begin{cases}\sqrt{(x+y)^2}=3,\\ \sqrt{(x-y)^2}=1.\end{cases}$

6.106. $\begin{cases}u^2+v^2=uv+13,\\ u+v=\sqrt{uv}+3.\end{cases}$

6.107. $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3},\\ xy=9.\end{cases}$

6.108. $\begin{cases}3(2-\sqrt{x-y})^{-1}+10(2+\sqrt{x+y})^{-1}=5,\\ 4(2-\sqrt{x-y})^{-1}-5(2+\sqrt{x+y})^{-1}=3.\end{cases}$

6.109. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28.\end{cases}$

6.110. $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4,\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8.\end{cases}$

6.111. $\begin{cases} 2(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{xy}, \\ x+y=5. \end{cases}$

6.112. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=10, \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4. \end{cases}$

6.113. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+a}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+a}}=2, \\ x+y=xy+a. \end{cases}$

6.114. $\begin{cases} y\sqrt{2x}-x\sqrt{2y}=6, \\ xy^2-x^2y=30. \end{cases}$

6.115. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3. \end{cases}$

6.116. $\begin{cases} \sqrt[4]{u}-\sqrt[4]{v}=1, \\ \sqrt{u}+\sqrt{v}=5. \end{cases}$

6.117. $\begin{cases} x-y=8a^2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4a. \end{cases}$

6.118. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=14, \\ \sqrt{\dfrac{x+y}{8}}-\sqrt{\dfrac{x-y}{12}}=3. \end{cases}$

6.119. $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=0{,}5\sqrt{xy}, \\ x+y=5. \end{cases}$

6.120. Не решая уравнение $ax^2+bx+c=0$, найти $x_1^{-2}+x_2^{-2}$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

6.121. Составить квадратное уравнение с корнями $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

6.122. Составить уравнение второй степени, один из корней которого равен сумме, а другой — произведению корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

6.123. Составить уравнение второй степени, корни которого были бы на единицу больше корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

6.124. Определить коэффициенты квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ так, чтобы его корни были равны p и q.

6.125. Найти коэффициенты A и B уравнения $x^2+Ax+B=0$, если известно, что числа A и B являются и его корнями.

6.126. При каком целом значении k один из корней уравнения $4x^2-(3k+2)x+(k^2-1)=0$ втрое меньше другого?

6.127. При каком целом значении p уравнения $3x^2-4x+p-2=0$ и $x^2-2px+5=0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

6.128. Найти все значения a, при которых сумма корней уравнения $x^2-2a(x-1)-1=0$ равна сумме квадратов корней.

6.129. При каком значении a уравнения $x^2+ax+8=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют общий корень?

6.130. В уравнении $x^2-2x+c=0$ определить то значение c, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $7x_2-4x_1=47$.

6.131. Не решая уравнение $x^2-(2a+1)x+a^2+2=0$, найти, при каком значении a один из корней в 2 раза больше другого.

6.132. При каком значении p отношение корней уравнения $x^2+px-16=0$ равно -4?

6.133. Не решая уравнение $3x^2-5x-2=0$, найти сумму кубов его корней.

6.134. При каком целом значении b уравнения $2x^2+(3b-1)x-3=0$ и $6x^2-(2b-3)x-1=0$ имеют общий корень?

6.135. При каком положительном значении c один корень уравнения $8x^2-6x+9c^2=0$ равен квадрату другого?

Группа Б

Решить уравнения (6.136–6.182):

6.136. $\dfrac{x^2+1}{x+1}+\dfrac{x^2+2}{x-2}=-2.$

6.137. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{25}{6}.$

6.138. $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81.$

6.139. $(x+1)^5+(x-1)^5=32x.$

6.140. $\dfrac{z^2-z}{z^2-z+1}-\dfrac{z^2-z+2}{z^2-z-2}=1.$

6.141. $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-3}=2.$

6.142. $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0.$

6.143. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{10}{9}.$

6.144. $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55.$

6.145. $(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12.$

6.146. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=1.$

6.147. $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1.$

6.148. $3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=4.$

6.149. $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=-2{,}5.$

6.150. $\dfrac{u^2}{2-u^2}+\dfrac{u}{2-u}=2.$

6.151. $\dfrac{x-m}{x-1}+\dfrac{x+m}{x+1}=\dfrac{x-2m}{x-2}+\dfrac{x+2m}{x+2}-\dfrac{6(m-1)}{5}.$

6.152. $\dfrac{z+4}{z-1}+\dfrac{z-4}{z+1}=\dfrac{z+8}{z-2}+\dfrac{z-8}{z+2}+6.$

6.153. $(2x+a)^5-(2x-a)^5=242a^5.$

6.154. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{7}{6}.$

6.155. $ax^4-x^3+a^2x-a=0.$

6.156. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0.$

6.157. $2(x-1)^2-5(x-1)(x-a)+2(x-a)^2=0.$

6.158. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$

6.159. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0.$

6.160. $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=\sqrt{6}.$

6.161. $(x-1)x(x+1)+x(x+1)(x+2)=3x^2+x+18x\sqrt{x}-16.$

6.162. $\sqrt[7]{(ax-b)^3}-\sqrt[7]{(b-ax)^{-3}}=\dfrac{65}{8};\ a\neq 0.$

6.163. $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}-22\sqrt[15]{x^7}=0.$

6.164. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4.$

6.165. $\sqrt{\dfrac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}+\sqrt{\dfrac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}}=\dfrac{13}{6}.$

6.166. $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6.$

6.167. $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}.$

6.168. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$

6.169. $\sqrt{x}+\dfrac{2x+1}{x+2}=2.$

6.170. $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6.$

6.171. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}.$

6.172. $(x+\sqrt{x^2-1})^5(x-\sqrt{x^2-1})^3=1.$

6.173. $2\sqrt{5\sqrt[4]{x+1}+4}-\sqrt{2\sqrt[4]{x+1}-1}=\sqrt{20\sqrt[4]{x+1}+5}.$

6.174. $\dfrac{z}{z+1}-2\sqrt{\dfrac{z+1}{z}}=3.$

6.175. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0.$

6.176. $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^3+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2=2.$

6.177. $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0.$

6.178. $\dfrac{\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}=\dfrac{7}{3}.$

6.179. $|x|+|x-1|=1.$

6.180. $(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\ldots+(x^2+20x+39)=4500.$

6.181. $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+a+1}+\sqrt[3]{x+a+2}=0.$

6.182. $|x|^3+|x-1|^3=9.$

Решить системы уравнений (6.183–6.243):

6.183. $\begin{cases}xy(x+1)(y+1)=72,\\(x-1)(y-1)=2.\end{cases}$

6.184. $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=3,\\x^2+2xy-2y^2=6.\end{cases}$

6.185. $\begin{cases} x^2+2y^2=17, \\ x^2-2xy=-3. \end{cases}$

6.186. $\begin{cases} ax+by+cz=k, \\ a^2x+b^2y+c^2z=k^2, \\ a^3x+b^3y+c^3z=k^3; \quad a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a. \end{cases}$

6.187. $\begin{cases} (x+1)(y+1)=10, \\ (x+y)(xy+1)=25. \end{cases}$

6.188. $\begin{cases} x-ay+a^2z=a^3, \\ x-by+b^2z=b^3, \\ x-cy+c^2z=c^3; \quad a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a. \end{cases}$

6.189. $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=5, \\ (x+y)(x^2-y^2)=9. \end{cases}$

6.190. $\begin{cases} xy=a, \\ yz=b, \\ zx=c; \quad abc>0. \end{cases}$

6.191. $\begin{cases} x^2+y=y^2+x, \\ y^2+x=6. \end{cases}$

6.192. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=3, \\ (x+y)^2+(x-y)^2=20. \end{cases}$

6.193. $\begin{cases} x+yz=2, \\ y+zx=2, \\ z+xy=2. \end{cases}$

6.194. $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2-xy}+\dfrac{4}{y^2-xy}=-\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{7}{x^2-xy}-\dfrac{3}{y^2-xy}=\dfrac{6}{5}. \end{cases}$

6.195. $\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y-9=0, \\ 2x^2+2y^2+x-5y-1=0. \end{cases}$

6.196. $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x+y+xy=23. \end{cases}$

6.197. $\begin{cases} x^2+y^4=20, \\ x^4+y^2=20. \end{cases}$

6.198. $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{ab+1}{b}, \\ x-y+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{ab+1}{a}. \end{cases}$

6.199. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4}, \\ 2x+3y-5z+19=0. \end{cases}$

6.200. $\begin{cases} (x+y)^2+2x=35-2y, \\ (x-y)^2-2y=3-2x. \end{cases}$

6.201. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}+\dfrac{5}{2}=0, \\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}+\dfrac{7}{5}=0. \end{cases}$

6.202. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3, \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=3, \\ \dfrac{1}{xyz}=1. \end{cases}$

6.203. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ cx+ay+bz=0, \\ (x+b)^2+(y+c)^2+(z+a)^2=a^2+b^2+c^2; \quad a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a. \end{cases}$

6.204. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x^2}{y^2}=7, \\ \dfrac{(x+y)x^2}{y^2}=12. \end{cases}$

6.205. $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1, \\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22. \end{cases}$

6.206. $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$

6.207. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ x(y+z)=5, \\ y(x+z)=8. \end{cases}$

6.208. $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=3a^3, \\ (x+y)(x^2+y^2)=15a^3; \quad a \neq 0. \end{cases}$

6.209. $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ x^2y+xy^2=-6. \end{cases}$

6.210. $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

6.211. $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3}, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

6.212. $\begin{cases} \dfrac{3}{uv}+\dfrac{15}{vw}=2, \\ \dfrac{15}{vw}+\dfrac{5}{wu}=2, \\ \dfrac{5}{wu}+\dfrac{3}{uv}=2. \end{cases}$

6.213. $\begin{cases} x^6+y^6=65, \\ x^4-x^2y^2+y^4=13. \end{cases}$

6.214. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x+3y+z=0, \\ (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14. \end{cases}$

6.215. $\begin{cases} x^3+3xy^2=158, \\ 3x^2y+y^3=-185. \end{cases}$

6.216. $\begin{cases} x^2+y-20=0, \\ x+y^2-20=0. \end{cases}$

6.217. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$

6.218. $\begin{cases} x^3+y^3=9a^3, \\ x^2y+xy^2=6a^3;\ a\neq 0. \end{cases}$

6.219. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y-z=2, \\ x+yz+zx=3. \end{cases}$

6.220. $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=40, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10. \end{cases}$

6.221. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x+3y+z=1, \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9. \end{cases}$

6.222. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}}=2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}-\sqrt{\dfrac{y+2}{x+1}}=1{,}5. \end{cases}$

6.223. $\begin{cases} x^2+2y+\sqrt{x^2+2y+1}=1, \\ 2x+y=2. \end{cases}$

6.224. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3, \\ \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5, \\ \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4. \end{cases}$

6.225. $\begin{cases} \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3, \\ x+y=17. \end{cases}$

6.226. $\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{y+\dfrac{1}{x}}=2\sqrt{2}, \\ (x^2+1)y+(y^2+1)x=4xy. \end{cases}$

6.227. $\begin{cases} \sqrt[3]{u+v}+\sqrt[3]{v+w}=3, \\ \sqrt[3]{v+w}+\sqrt[3]{w+u}=1, \\ \sqrt[3]{w+u}+\sqrt[3]{u+v}=0. \end{cases}$

6.228. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30, \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35. \end{cases}$

6.229. $\begin{cases} x+\sqrt{y}-56=0, \\ \sqrt{x}+y-56=0. \end{cases}$

6.230. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

6.231. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7, \\ 3x+2y=23. \end{cases}$

6.232. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}. \end{cases}$

6.233. $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1, \\ 3x+2y=4. \end{cases}$

6.234. $\begin{cases} u^{-1/2}\sqrt[3]{u}+v^{-1/2}\sqrt[3]{v}=1{,}5, \\ uv=64. \end{cases}$

6.235. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}}-2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}}=1, \\ \sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5. \end{cases}$

6.236. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=6, \\ xy^2=6\sqrt{10}. \end{cases}$

6.237. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}=5. \end{cases}$

6.238. $\begin{cases} \sqrt{\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-1\right)^2}=1{,}6, \\ xy=2. \end{cases}$

6.239. $\begin{cases} |2x+3y|=5, \\ |2x-3y|=1. \end{cases}$

6.240. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}+2+\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2}, \\ |x+y|=5. \end{cases}$

6.241. $\begin{cases} u-v+\sqrt{\dfrac{u-v}{u+v}}=\dfrac{12}{u+v}, \\ u^2+v^2=41. \end{cases}$

6.242. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2, \\ x^2-18=2y(4y-9). \end{cases}$

6.243. $\begin{cases} 5\sqrt{x^2-3y-88}+\sqrt{x+6y}=19, \\ 3\sqrt{x^2-3y-88}=1+2\sqrt{x+6y}. \end{cases}$

6.244. Решить уравнение

$$x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+\ldots+(x+9)(x+10)=$$
$$=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+9\cdot 10.$$

6.245. Найти коэффициенты m и n квадратного трехчлена x^2+mx+n, если известно, что его остатки при делении на двучлены $x-m$ и $x-n$ соответственно равны m и n.

6.246. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня. Составить новое квадратное уравнение, у которого один из корней на единицу меньше большего корня, а другой — на единицу больше меньшего корня данного уравнения.

6.247. Определить, при каких значениях m один из корней уравнения $z^3-(m^2-m+7)z-(3m^2-3m-6)=0$ равен -1. Найти два остальных корня уравнения при этих значениях m.

6.248. Показать, что если коэффициенты a, b, c уравнения $ax^2+bx+c=0$ связаны условием $2b^2-9ac=0$, то отношение корней уравнения равно 2.

6.249. Показать, что если a и b — корни уравнения $x^2+px+1=0$, а b и c — корни уравнения $x^2+qx+2=0$, то $(b-a)(b-c)=pq-6$.

6.250. При каких значениях a уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют общий корень?

6.251. При каком положительном значении p корни уравнения $5x^2-4(p+3)x+4=p^2$ противоположны по знаку? Найти эти корни.

6.252. Найти коэффициенты уравнения $x^2+px+q=0$ при условии, что разность корней уравнения равна 5, а разность их кубов равна 35.

6.253. Составить квадратное уравнение с корнями $(a+b)^2$ и $(a-b)^2$, если a и b — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

6.254. Пусть α и β — корни уравнения $3x^2+7x+4=0$. Не решая данного уравнения, составить новое квадратное уравнение с числовыми коэффициентами, корни которого равны $\dfrac{\alpha}{\beta-1}$ и $\dfrac{\beta}{\alpha-1}$.

6.255. Показать, что среди корней уравнения $x^4+5x^3+15x-9=0$ есть только один положительный и только один отрицательный (сами корни находить не обязательно).

Группа В

Решить уравнения (6.256–6.302):

6.256. $(x+3)^4+(x+5)^4=16.$

6.257. $u^3-(2a+1)u^2+(a^2+2a-b^2)u+(b^2-a^2)=0.$

6.258. $x^3-2x^2-(a^2-a-1)x+(a^2-a)=0.$

6.259. $x^3-(3a-1)x^2+(2a^2-3a)x+2a^2=0.$

6.260. $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1).$

6.261. $x^3-(2a+1)x^2+(a^2+a)x-(a^2-a)=0.$

6.262. $(x^3+x^{-3})+(x^2+x^{-2})+(x+x^{-1})=6.$

6.263. $(x-2)^6+(x-4)^6=64.$

6.264. $x^3-x^2-\dfrac{8}{x^3-x^2}=2.$

6.265. $x^3-(2a+1)x^2+(a^2+2a-m)x-(a^2-m)=0.$

6.266. $x^3-3ax^2+(3a^2-b)x-(a^3-ab)=0;\ b\geq 0.$

6.267. $x^3-(p^2-p+7)x-3(p^2-p-2)=0.$

6.268. $z^3+(2p+1)z^2+(p^2+2p-q)z+(p^2-q)=0.$

6.269. $x^3-2ax^2+(a^2+2\sqrt{3}a-9)x-(2a^2\sqrt{3}-12a+6\sqrt{3})=0.$

6.270. $10x^3-3x^2-2x+1=0.$

6.271. $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1).$

6.272. $27x^3+9x^2-48x+20=0.$

6.273. $4x^4-16x^3+3x^2+4x-1=0.$

6.274. $x^2+\dfrac{81x^2}{(9+x)^2}=40.$

6.275. $\dfrac{2+x}{2-x}+\sqrt{x}=1+x.$

6.276. $\dfrac{20}{\sqrt{x}}+x\sqrt{x}+x=22.$

6.277. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x.$

6.278. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16.$

6.279. $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2.$

6.280. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0.$

6.281. $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}.$

6.282. $\sqrt{u^2-u-1}+\sqrt{u^2+u+3}=\sqrt{2u^2+8}$

(ограничиться отысканием положительных корней).

6.283. $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16.$

6.284. $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4.$

6.285. $\dfrac{x^2}{\sqrt{5x+4}}+\sqrt{5x+4}=\dfrac{4}{3}x+2.$

6.286. $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3.$

6.287. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}.$

6.288. $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x.$

6.289. $x^{4/5}-7x^{-2/5}+6x^{-1}=0.$

6.290. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1.$

6.291. $8{,}4\sqrt[12]{x^{-7}}-0{,}2\sqrt[4]{x^{-1}\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[12]{x^{11}}.$

6.292. $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2.$

6.293. $\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\dfrac{x}{2}\sqrt[7]{\dfrac{x^3}{x+\sqrt{2}}}.$

6.294. $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3.$

6.295. $5\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}+3\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}=8.$

6.296. $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30.$

6.297. $\sqrt{x^2-19x+204}-\sqrt{x^2-25x-150}=3\sqrt{\dfrac{x+5}{x-30}}$

(ограничиться отысканием положительных корней).

6.298. $\dfrac{(\sqrt[3]{(15-x)^2}+\sqrt[3]{(15-x)(x-6)}+\sqrt[3]{(x-6)^2})^2}{\sqrt[3]{15-x}+\sqrt[3]{x-6}}=\dfrac{49}{3}.$

6.299. $\dfrac{2}{19}(\sqrt{x^2+37x+336}-\sqrt{x^2+18x+32})=\sqrt{\dfrac{21+x}{16+x}}.$

6.300. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11.$

6.301. $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$

6.302. $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12.$

Решить системы уравнений (6.303–6.341):

6.303. $\begin{cases}(x+y)(x^2-y^2)=16,\\(x-y)(x^2+y^2)=40.\end{cases}$

6.304. $\begin{cases}\dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}-\dfrac{c+a}{z+x}=1,\\\dfrac{a+b}{x+y}-\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1,\\-\dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1.\end{cases}$

6.305. $\begin{cases} uvx^2 = 8, \\ vx^2w = 24, \\ x^2wu = 12, \\ u + v + w = x + 4 \end{cases}$ (ограничиться отысканием положительных решений).

6.306. $\begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ 3x + 2y + z = 0, \\ 3(x+2)^3 + 2(y+1)^3 + (z+1)^3 = 27. \end{cases}$

6.307. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = 3, \\ \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{x}{z} = 3, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

6.308. $\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$

6.309. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$

6.310. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + y^2} + 2xy = \dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy} + x^2 + y^2 = \dfrac{21}{4}. \end{cases}$

6.311. $\begin{cases} 10(x^4 + y^4) = -17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

6.312. $\begin{cases} x - y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 - y^3 + z^3 = 36. \end{cases}$

6.313. $\begin{cases} (x+y)(x+2y)(x+3y) = 60, \\ (y+x)(y+2x)(y+3x) = 105. \end{cases}$

6.314. $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1{,}5, \\ xyz = 8. \end{cases}$

6.315. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ 2xy^2 - x^2y = 1 \end{cases}$ (ограничиться отысканием целочисленных решений).

6.316. $\begin{cases} uv + vw = 2a^2, \\ vw + wu = 2a^2 - a - 1, \\ wu + uv = 2a^2 + a - 1. \end{cases}$

6.317. $\begin{cases} 2x+y+z=6, \\ 3x+2y+z=7, \\ (x-1)^3+(y+2)^3+(z-3)^3=7. \end{cases}$

6.318. $\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=136, \\ x^3y+xy^3=30. \end{cases}$

6.319. $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ (xy+8)(x+y)=2. \end{cases}$

6.320. $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$

6.321. $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}\right)^3=12, \\ (xy)^2+xy=6. \end{cases}$

6.322. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x^3}{y^3}=14, \\ x+y=3. \end{cases}$

6.323. $\begin{cases} 8x+\dfrac{8}{y}=3y^2, \\ y+\dfrac{1}{x}=3x^2. \end{cases}$

6.324. $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=102, \\ xy+x+y=69. \end{cases}$

6.325. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16. \end{cases}$

6.326. $\begin{cases} 9(u^4+v^4)=17(u+v)^2, \\ 3uv=-2(u+v). \end{cases}$

6.327. $\begin{cases} xy+\dfrac{y}{x}=2(x^2+y^2), \\ xy-\dfrac{x}{y}=x^2+y^2. \end{cases}$

6.328. $\begin{cases} (u^2+v^2)(u+v)=15uv, \\ (u^4+v^4)(u^2+v^2)=85u^2v^2. \end{cases}$

6.329. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$ (ограничиться отысканием целочисленных решений).

6.330. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{ax+by}{bx+ay}}+\sqrt{\dfrac{bx+ay}{ax+by}}=2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+1}}=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

6.331. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1. \end{cases}$

6.332. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{z}}+\sqrt{\dfrac{z}{x}}=3, \\ \sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{z}{y}}+\sqrt{\dfrac{x}{z}}=3, \\ \sqrt{xyz}=1. \end{cases}$

6.333. $\begin{cases} \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$

6.334. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1, \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1. \end{cases}$

6.335. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8, \\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=12. \end{cases}$

6.336. $\begin{cases} \sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3(x-y), \\ x^2-y^2=41. \end{cases}$

6.337. $\begin{cases} \sqrt{x-4}+\sqrt{y}+\sqrt{z+4}=6, \\ 2\sqrt{x-4}-\sqrt{y}-4\sqrt{z+4}=-12, \\ x+y+z=14. \end{cases}$

6.338. $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y}, \\ \sqrt[3]{x+y}=\sqrt{x+y-4}. \end{cases}$

6.339. $\begin{cases} \sqrt{1-4x^2}-\sqrt{1-4y^2}=2(x+y), \\ x^2+y^2+4xy=-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

6.340. $\begin{cases} u+v+\sqrt{u^2-v^2}=12, \\ v\sqrt{u^2-v^2}=12. \end{cases}$

6.341. $\begin{cases} x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=32, \\ y^2+y\sqrt[3]{x^2y}=162. \end{cases}$

6.342. Дано уравнение $ax^2+bx+c=0$. Пусть $S_n=\alpha^n+\beta^n$, где α и β — корни уравнения. Найти зависимость между S_n, S_{n+1}, S_{n+2}.

6.343. Числа x_1, x_2, x_3 служат корнями уравнения $x^3+px^2+qx+r=0$. Требуется: 1) составить уравнение с корнями x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1; 2) воспользоваться результатом п. 1 для отыскания корней уравнения $x^3-3\sqrt{2}x^2+7x-3\sqrt{2}=0$.

6.344. Найти коэффициенты a и b уравнения $x^4+x^3-18x^2+ax+b=0$, если известно, что среди его корней имеются три равных целых числа.

6.345. Найти коэффициенты p и q уравнения $x^4-10x^3+37x^2+px+q=0$, если известно, что среди его корней имеются две пары равных между собой чисел.

6.346. Для уравнения $x^3+ax^2+bx+1=0$ произведение суммы его корней на сумму их обратных величин выразить через коэффициенты a и b.

6.347. Показать, что равенство $ab=c$ выражает необходимое и достаточное условие того, что среди корней уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеются два числа, сумма которых равна нулю.

6.348. Решить уравнение $12x^3+4x^2-17x+6=0$, если известно, что среди его корней имеются два числа, обратных по абсолютной величине и противоположных по знаку.

6.349. Решить уравнения $2x^3-5x^2+6x-2=0$ и $6x^3-3x^2-2x+1=0$, если известно, что они имеют один общий корень.

6.350. Составить кубическое уравнение по его корням x_1^2, x_1x_2 и x_2^2, если числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

6.351. Решить уравнения $x^3-6x^2-39x-10=0$ и $x^3+x^2-20x-50=0$, воспользовавшись тем, что один из корней первого уравнения в 2 раза больше одного из корней второго уравнения.

6.352. Решить уравнения $x^4-x^3-22x^2+16x+96=0$ и x^3-2x^2-3x+ $+10=0$, воспользовавшись тем, что у них есть общий корень.

6.353. Найти все значения λ, при которых уравнения $\lambda x^3-x^2-x-(\lambda+1)=0$ и $\lambda x^2-x-(\lambda+1)=0$ имеют общий корень, и найти этот корень.

6.354. Решить уравнение $8x^3+4x^2-34x+15=0$, если известно, что два из его корней x_1 и x_2 удовлетворяют соотношению $2x_1-4x_2=1$.

6.355. Показать, что для всякого натурального числа n выполняется равенство $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$, и с его помощью решить уравнение

$$(1+3+\ldots+(2n+1)):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{342}\right)=342.$$

6.356. Решить уравнение $x^4-6x^3+7x^2+6x-2=0$, если известно, что оно имеет по крайней мере одну пару корней, разность между которыми равна 1.

6.357. Решить уравнение $3x^3+2\sqrt{3}x^2-21x+6\sqrt{3}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

6.358. Решить уравнения $x^3-7x^2+12x-10=0$ и $x^3-10x^2-2x+20=0$, если известно, что один из корней первого уравнения в 2 раза меньше одного из корней второго уравнения.

6.359. Найти все три корня уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$, если его коэффициенты удовлетворяют условию $ad=bc$.

6.360. Показать, что условие $kb^2-(k+1)^2ac=0$ $(k\neq 0)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы отношение корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ было равно k.

6.361. Решить уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$, если его коэффициенты a, b, c и d в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию с заданным знаменателем q.

6.362. Доказать, что если корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ составляют геометрическую прогрессию, то один из них равен $-\sqrt[3]{c}$.

6.363. Решить уравнение $64x^3-24x^2-6x+1=0$, если известно, что его корни образуют геометрическую прогрессию.

6.364. 1. Пусть числа x_1, x_2 и x_3 служат корнями многочлена ax^3+bx^2+cx+d. В таком случае имеет место тождество

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Воспользоваться этим тождеством для получения формул, связывающих корни и коэффициенты данного многочлена.

2. С помощью формул, полученных в п. 1, найти корни x_1, x_2 и x_3 уравнения $8x^3-20x^2-10x+33=0$, составив и решив новое кубическое уравнение с корнями x_1+x_2, x_2+x_3 и x_3+x_1.

6.365. Решить уравнение $2ax^3-(2a^2+a+2)x^2+(a^2+2a+1)x-a=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

6.366. Составить уравнение с целыми коэффициентами возможно более низкой степени, одним из корней которого было бы число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

6.367. Показать, что корни уравнения $x+x^{-1}=2\cos 40^\circ$ являются также корнями уравнения $x^4+x^{-4}=2\cos 160^\circ$.

6.368. Решить уравнение $x^4-4x^3+3x^2+8x-10=0$, если известно, что два его корня отличаются друг от друга только знаками.

6.369. Решить уравнение $2x^5-x^4-2x^3+x^2-4x+2=0$, если известно, что оно имеет три корня, из которых два являются противоположными числами (противоположными называются два числа, сумма которых равна нулю).

6.370. Показать, что уравнение $\sqrt{x^4+x-2}+\sqrt[4]{x^4+x-2}=6$ имеет единственный положительный корень, и найти этот корень.

ГЛАВА 7

ЛОГАРИФМЫ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ФОРМУЛЫ

Свойства показательной функции

$$y = a^x, a > 0, a \neq 1$$

1°. Область определения функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2°. Множество значений функции — множество $\boldsymbol{R}_+$ всех положительных чисел: $a^x > 0$ для любого действительного значения x.

3°. При $a > 1$ функция возрастает, т. е. если $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$. При $0 < a < 1$ функция убывает, т. е. если $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$.

4°. Если $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$.

Свойства логарифмической функции

$$y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$$

1°. Область определения функции — множество $\boldsymbol{R}_+$ всех положительных действительных чисел.

2°. Множество значений функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

3°. При $a > 1$ функция возрастает, т. е. если $x_2 > x_1 > 0$, то $\log_a x_2 > \log_a x_1$. При $0 < a < 1$ функция убывает, т. е. если $x_2 > x_1 > 0$, то $\log_a x_2 < \log_a x_1$.

Свойства логарифмов

1°. Если $x > 0$, то

$$x = a^{\log_a x} \tag{7.1}$$

(основное логарифмическое тождество).

2°. Логарифм основания равен единице:

$$\log_a a = 1. \tag{7.2}$$

3°. Логарифм единицы равен нулю:

$$\log_a 1 = 0. \tag{7.3}$$

4°. Если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \tag{7.4}$$

(**формула для логарифма произведения**);

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 \tag{7.5}$$

(**формула для логарифма частного**).

5°. Если $x > 0$, то

$$\log_a x^p = p \log_a x, \tag{7.6}$$

где p — любое действительное число (**формула для логарифма степени**).

6°. Если $x > 0$, то

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{7.7}$$

для любого действительного числа $b > 0$ и $b \neq 1$ (**формула перехода к новому основанию логарифма**).

В частности,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ или } \log_a b \cdot \log_b a = 1; \tag{7.8}$$

$$\log_a b = \log_{a^p} b^p = p \log_{a^p} b \quad (p \in \mathbf{R}, p \neq 0). \tag{7.9}$$

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. Показательное уравнение

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \ (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1) \tag{7.10}$$

равносильно уравнению

$$f(x) \log_c a = g(x) \log_c b, \tag{7.11}$$

которое получается логарифмированием уравнения (7.10) по какому-либо основанию $c > 0$, $c \neq 1$.

В частности, уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

2°. Корнями уравнения

$$(u(x))^{f(x)} = (u(x))^{g(x)} \tag{7.12}$$

считаются только решения смешанной системы

$$\begin{cases} u(x) > 0, \\ u(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \tag{7.13}$$

и те значения x, для которых $u(x) = 1$, если при этих значениях определены $f(x)$ и $g(x)$. Функция вида $(u(x))^{f(x)}$ определена только при $u(x) > 0$, поэтому те значения x, которые формально удовлетворяют равенству (7.12), но при которых $u(x) \leq 0$, не принято считать корнями уравнения (7.12).

3°. Логарифмическое уравнение

$$\log_a f(x) = b \tag{7.14}$$

равносильно уравнению

$$f(x) = a^b. \tag{7.15}$$

4°. Логарифмическое уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0,\ a \neq 1) \tag{7.16}$$

равносильно каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \tag{7.17}$$

Для решения уравнения (7.16) переходят только к одной из этих систем (той, которая проще) либо решают уравнение $f(x) = g(x)$, которое может иметь корни, посторонние для исходного уравнения, и проверяют каждый из них подстановкой в исходное уравнение.

5°. Для решения уравнений

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a u(x), \tag{7.18}$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a u(x), \tag{7.19}$$

$$p \log_a f(x) = \log_a u(x), \tag{7.20}$$

используя формулы (7.4) — (7.6), их приводят соответственно к виду

$$\log_a (f(x) \cdot g(x)) = \log_a u(x), \tag{7.21}$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a u(x), \tag{7.22}$$

$$\log_a (f(x))^p = \log_a u(x) \tag{7.23}$$

и далее решают так, как указано в п. 4°.

Из найденных корней следует включить в ответ те, для которых $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $u(x) > 0$, либо проверить каждый из них подстановкой в исходное уравнение.

6°. Если при решении уравнения с помощью формул (7.4) — (7.6) производятся преобразования вида $\log_a (f(x) \cdot g(x))$, $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\log_a (f(x))^p$, где p —

четное число, то возникает опасность потери корней заданного уравнения. Чтобы предотвратить возможную потерю корней, надо пользоваться указанными формулами в таком виде:

$$\log_a(f(x)g(x))=\log_a|f(x)|+\log_a|g(x)|, \tag{7.24}$$

$$\log_a\frac{f(x)}{g(x)}=\log_a|f(x)|-\log_a|g(x)|, \tag{7.25}$$

$$\log_a((f(x))^p=p\log_a|f(x)|,\ p \text{ — четное число.} \tag{7.26}$$

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{5}\cdot 0{,}2^{\frac{1}{2x}}-0{,}04^{1-x}=0.$

□ Здесь все степени можно привести к одному основанию 5. Имеем: $\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$, $0{,}2^{\frac{1}{2x}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2x}}=5^{-\frac{1}{2x}}$, $0{,}04^{1-x}=\left(\frac{1}{25}\right)^{1-x}=5^{-2(1-x)}$. Тогда уравнение примет вид

$$5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2x}}-5^{-2(1-x)}=0, \text{ или } 5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}}=5^{-2(1-x)}.$$

Согласно указанию 1°, перейдем к равносильному уравнению $\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}=-2(1-x)$. После преобразований получим $\begin{cases}4x^2-5x+1=0,\\ x\neq 0,\end{cases}$ откуда $x_1=1,\ x_2=\frac{1}{4}$. ■

Пример 2. Решить уравнение

$$35\cdot 3^{x^2}-35\cdot 5^{2x}-3^{x^2}+5^{2x}=0.$$

□ Группируя подобные члены, имеем $3^{x^2}(35-1)-5^{2x}(35-1)=0$, или $3^{x^2}=5^{2x}$. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10 (см. указание 1°), получаем равносильное уравнение

$$x^2\lg 3=2x\lg 5, \text{ или } x(x\lg 3-2\lg 5)=0,$$

откуда $x_1=0,\ x_2=\frac{2\lg 5}{\lg 3}$. ■

Пример 3. Решить уравнение $4^{\sqrt{x}}-9\cdot 2^{\sqrt{x}-1}+2=0.$

□ Так как $4^{\sqrt{x}}=2^{2\sqrt{x}}$ и $2^{\sqrt{x}-1}=2^{\sqrt{x}}\cdot 2^{-1}=\frac{1}{2}\cdot 2^{\sqrt{x}}$, то данное уравнение примет вид $2^{2\sqrt{x}}-\frac{9}{2}\cdot 2^{\sqrt{x}}+2=0$. Произведем замену переменной $2^{\sqrt{x}}=y$, где $y>0$ в силу свойства 2° показательной функции. Тогда получим уравнение

$y^2-\frac{9}{2}y+2=0$, корни которого $y_1=4$, $y_2=0{,}5$ положительны. Из уравнения $2^{\sqrt{x}}=4$ следует, что $2^{\sqrt{x}}=2^2$, $\sqrt{x}=2$, откуда $x=4$. Из уравнения $2^{\sqrt{x}}=0{,}5$ следует, что $2^{\sqrt{x}}=2^{-1}$, откуда $\sqrt{x}=-1$, а это невозможно. Итак, получаем ответ: $x=4$. ■

Пример 4. Решить уравнение $|x-2|^{x^2-2x}=|x-2|^{5x-10}$.

□ Согласно указанию 2°, корнями уравнения являются только решения смешанной системы

$$\begin{cases}|x-2|>0,\\ |x-2|\neq 1,\\ x^2-2x=5x-10,\end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases}x\neq 2,\\ x\neq 3, x\neq 1,\\ x^2-7x+10=0\end{cases}$$

и, быть может, решения уравнения $|x-2|=1$. Из двух корней уравнения $x^2-7x+10=0$ решением системы является одно число $x=5$, а требованию $|x-2|=1$ удовлетворяют $x=3$ и $x=1$, также являющиеся решениями системы, поскольку при этих значениях x функции x^2-2x и $5x-10$ определены. Итак, получаем ответ: $x=1$, $x=3$, $x=5$. ■

Пример 5. Решить уравнение $2(\lg x-\lg 6)=\lg x-2\lg(\sqrt{x}-1)$.

□ Учитывая область определения логарифмической функции, квадратного корня и указание 5°, получаем систему, равносильную заданному уравнению:

$$\begin{cases}x>0,\\ \sqrt{x}-1>0,\\ \lg\frac{x^2}{36}=\lg\frac{x}{(\sqrt{x}-1)^2},\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x>0,\\ x>1,\\ \frac{x^2}{36}=\frac{x}{(\sqrt{x}-1)^2}.\end{cases}$$

Обе части уравнения разделим на x (при этом не произойдет потери корней, так как $x>0$) и умножим на $36(\sqrt{x}-1)^2$ (причем не появятся посторонние корни, так как $x\neq 1$). Тогда получим систему $\begin{cases}x>1,\\ x(\sqrt{x}-1)^2=36.\end{cases}$ Из уравнения $(\sqrt{x}(\sqrt{x}-1))^2=36$ находим $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=6$, $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\neq -6$, поскольку $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)>0$. Далее имеем $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=6$, или $(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-6=0$. Значит, $\sqrt{x}=3$, откуда $x=9>1$; $\sqrt{x}=-2$, что невозможно. Итак, получаем ответ: $x=9$. ■

Пример 6. Решить уравнение

$$\log_{0,5}\sqrt{1+x}+3\log_{1/4}(1-x)=\log_{1/16}(1-x^2)^2+2.$$

☐ Перейдем к основанию $\frac{1}{4}$. Имеем:

$$\log_{0,5}\sqrt{1+x}=\log_{1/4}(1+x) \quad \text{[см.формулу (7.7) или (7.9)];}$$

$$\log_{1/16}(1-x^2)^2=\frac{\log_{1/4}(1-x^2)^2}{\log_{1/4}\frac{1}{16}}=\frac{2\log_{1/4}\left|1-x^2\right|}{2}=\log_{1/4}\left|1-x^2\right|$$

[см. формулу (7.7) и указание 6°]; $2=\log_{1/4}\frac{1}{16}$ [см. формулу (7.6)].

В результате приходим к уравнению

$$\log_{1/4}(1+x)+3\log_{1/4}(1-x)=\log_{1/4}\left|1-x^2\right|+\log_{1/4}\frac{1}{16}.$$

Учитывая область определения логарифмической функции, находим

$$\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0;\end{cases}\quad\begin{cases}x>-1,\\x<1;\end{cases}\quad -1<x<1.$$

При этих значениях x имеем $1-x^2>0$, т. е. $\left|1-x^2\right|=1-x^2$. Далее, согласно указанию 5°, получим

$$\log_{1/4}((1+x)(1-x)^3)=\log_{1/4}\frac{1-x^2}{16}.$$

Это уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases}-1<x<1,\\(1+x)(1-x)^3=\dfrac{1-x^2}{16}.\end{cases}$$

Обе части уравнения делим на $(1+x)(1-x)>0$, причем потери корней не произойдет. Тогда получим

$$\begin{cases}-1<x<1,\\(1-x)^2=\dfrac{1}{16}.\end{cases}$$

Из уравнения $1-x=0,25$ находим $x=0,75$, причем $x\in(-1,1)$. Из уравнения $1-x=-0,25$ имеем $x=1,25$, т. е. x не удовлетворяет неравенствам $-1<x<1$. Итак, получаем ответ: $x=0,75$. ■

Пример 7. Решить уравнение $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{\lg x+1}$.

□ Так как логарифмическая функция определена при $x>0$, то левая и правая части данного уравнения положительны. Логарифмируя их по основанию 10 и используя формулы (7.6) и (7.2), получаем $\frac{\lg x+5}{3}\lg x=\lg x+1$. Произведем замену переменной $y=\lg x$ и решим уравнение $y^2+5y=3y+3$. Имеем $y^2+2y-3=0$, откуда $y_1=-3, y_2=1$. Из уравнения $\lg x=-3$ получаем $x=10^{-3}$, а из уравнения $\lg x=1$ находим $x=10$. Итак, $x_1=0{,}001$, $x_2=10$. ■

Пример 8. Решить уравнение $\log_x(2x^2-4x+3)=2$.

□ Используя указание 3° и учитывая ограничения, налагаемые на основание логарифма, записываем равносильную данному уравнению систему

$$\begin{cases}x>0;\ x\neq 1,\\ 2x^2-4x+3=x^2.\end{cases}$$

Решаем квадратное уравнение $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=3, x_2=1$ (не подходит). Итак, $x=3$. ■

Пример 9. Решить уравнение $\log_3(x+6)\cdot\log_x 3=2$.

□ Учитывая область определения логарифмической функции, ограничения, налагаемые на основание логарифма, и формулу (7.8), получаем равносильную данному уравнению систему

$$\begin{cases}x+6>0,\\ x>0;\ x\neq 1,\\ \log_3(x+6)\cdot\dfrac{1}{\log_3 x}=2.\end{cases}$$

Решаем уравнение этой системы. Так как $x\neq 1$, то $\log_3 x\neq 0$ и уравнение принимает вид

$$\log_3(x+6)=2\log_3 x, \text{ или } \log_3(x+6)=\log_3 x^2, \text{ или } x^2=x+6$$

(см. указание 4°). Находим корни этого уравнения: $x_1=-2, x_2=3$. Из них только $x=3$ удовлетворяет условиям $x+6>0, x>0$ и $x\neq 1$. Итак, получаем ответ: $x=3$. ■

Пример 10. Решить уравнение $\lg x^2=0{,}25\lg(4x+3)^4$.

□ Учитывая область определения логарифмической функции, заключаем, что $x \neq 0$, $4x+3 \neq 0$. Для преобразования $\lg(4x+3)^4$ применяем формулу (7.26) (см. указание 6°). Тогда

$$0{,}25\lg(4x+3)^4 = 0{,}25\cdot 4\lg|4x+3| = \lg|4x+3|.$$

В результате получим уравнение $\lg x^2 = \lg|4x+3|$, равносильное заданному.

Если $4x+3>0$, т. е. $x>-0{,}75$, то $|4x+3| = 4x+3$ и $x^2 = 4x+3$. Находим корни этого уравнения: $x_1 = 2+\sqrt{7} > -0{,}75$, $x_2 = 2-\sqrt{7} > -0{,}75$. Если же $4x+3<0$, т. е. $x<-0{,}75$, то $|4x+3| = -4x-3$ и $x^2 = -4x-3$. Находим корни этого уравнения: $x_1 = -1 < -0{,}75$, $x_2 = -3 < -0{,}75$. Итак, получаем ответ: $2\pm\sqrt{7}$; -1; -3. ■

Замечание. Выражение $0{,}25\lg(4x+3)^4$ можно заменить тождественно равным ему выражением $\lg((4x+3)^4)^{0,25}$ (см. указание 5°), но утверждение $\lg((4x+3)^4)^{0,25} = \lg(4x+3)$ было бы не верным. Дело в том, что при использовании правила возведения степени в степень необходимо учитывать следующее свойство степенной функции: при любом $n \in N$ имеем $(x^{2n})^{\frac{1}{2n}} = |x|$, а не x [см. формулу (2.24)]. Поэтому $\lg((4x+3)^4)^{0,25} = \lg((4x+3)^4)^{\frac{1}{4}} = \lg|4x+3|$.

Группа А

Упростить (7.001–7.015):

7.001. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

7.002. $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

7.003. $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

7.004. $-\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

7.005. $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3+5^{\frac{1}{\log_{16} 25}}\cdot 5^{\log_5 3}}$.

7.006. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$.

7.007. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

7.008. $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409}\left((\sqrt{7})^{\frac{2}{\log_{25} 7}}-125^{\log_{25} 6}\right)$.

7.009. $\left(N^{\frac{1}{\log_2 N}}\cdot N^{\frac{1}{\log_4 N}}\cdot N^{\frac{1}{\log_8 N}}\ldots N^{\frac{1}{\log_{512} N}}\right)^{\frac{1}{15}}$ (основания логарифмов представляют собой идущие подряд натуральные степени числа 2).

7.010. $\left(2^{\log_{4\sqrt{2}} a}-3^{\log_{27}(a^2+1)^3}-2a\right):\left(7^{4\log_{49} a}-5^{0{,}5\log_{\sqrt{5}} a}-1\right)$.

7.011. $\dfrac{\log_a \sqrt{a^2-1}\cdot \log^2_{1/a}\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1)\cdot \log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}}$.

7.012. $a^{\frac{2}{\log_b a}+1}b-2a^{\log_a b+1}b^{\log_b a+1}+ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}$.

7.013. $\dfrac{\left(25^{\frac{1}{2\log_{49} 25}}+2\log_2\log_2\log_2 a^{2\log_a 4}\right)\cdot 4^{\frac{-2}{\log_3 4}}-a^2}{1-a}$.

7.014. $(\log_a b+\log_b a+2)(\log_a b-\log_{ab} b)\log_b a-1$.

7.015. $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\log_a \frac{a}{b}}$.

7.016. Если $\log_a 27=b$, то чему равен $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{a}$?

7.017. Показать, что при $x>0$ и $y>0$ из равенства $x^2+4y^2=12xy$ следует равенство $\lg(x+2y)-2\lg 2=0{,}5(\lg x+\lg y)$.

7.018. Вычислить сумму 2^x+2^{-x}, если $4^x+4^{-x}=23$.

7.019. Доказать, что если $y=2^{x^2}$ и $z=2^{y^2}$, то $x=\pm\sqrt{0{,}5\log_2\log_2 z}$, и указать все значения z, при которых x принимает действительные значения.

Решить уравнения (7.020–7.046):

7.020. $\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3+\lg 2=\lg\left(27-3^{\frac{1}{x}}\right)$.

7.021. $3\log_5 2+2-x=\log_5(3^x-5^{2-x})$.

7.022. $\sqrt{\log_3 x^9}-4\log_9\sqrt{3x}=1$.

7.023. $\log_{1-x}3-\log_{1-x}2-0{,}5=0$.

7.024. $\lg 5+\lg(x+10)=1-\lg(2x-1)+\lg(21x-20)$.

7.025. $\log_2 182-2\log_2\sqrt{5-x}=\log_2(11-x)+1$.

7.026. $\log_5\sqrt{x-9}-\log_5 10+\log_5\sqrt{2x-1}=0$.

7.027. $\lg(x+1{,}5)=-\lg x$.

7.028. $5^{2(\log_5 2+x)}-2=5^{x+\log_5 2}$.

7.029. $0{,}25^{\log_2\sqrt{x+3}-0{,}5\log_2(x^2-9)}=\sqrt{2(7-x)}$.

7.030. $x\lg\sqrt[5]{5^{2x-8}}-\lg 25=0$.

7.031. $\log_5(x-2)+\log_{\sqrt{5}}(x^3-2)+\log_{0{,}2}(x-2)=4$.

7.032. $\frac{2-\lg 4+\lg 0{,}12}{\lg(\sqrt{3x+1}+4)-\lg(2x)}=1$.

7.033. $x^{\lg^3 x-5\lg x}=0{,}0001$.

7.034. $\lg(3^x-2^{4-x})=2+0{,}25\lg 16-0{,}5x\lg 4$.

7.035. $\log_3(81^x+3^{2x})=3\log_{27}90$.

7.036. $3x-\log_6 8^x=\log_6(3^{3x}+x^2-9)$.

7.037. $\log_6(3^{x^2}+1)-\log_6(3^{2-x^2}+9)=\log_6 2-1$.

7.038. $\lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2-20x+55}}\right)=0$.

7.039. $\lg 10^{\lg(x^2-21)}-2=\lg x-\lg 25$.

7.040. $\lg(x^2+1)=2\lg^{-1}(x^2+1)-1$.

7.041. $\lg\sqrt{5^{x(13-x)}}+11\lg 2=11$.

7.042. $x(\lg 5-1)=\lg(2^x+1)-\lg 6.$

7.043. $\lg\left(81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right)=0.$

7.044. $\log_x(9x^2)\cdot\log_3^2 x=4.$

7.045. $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8.$

7.046. $\lg(5-x)+2\lg\sqrt{3-x}=1.$

7.047. Найти натуральное число n из равенства

$$3^2\cdot 3^5\cdot 3^8\ldots 3^{3n-1}=27^5.$$

Решить уравнения (7.048–7.127):

7.048. $0{,}5(\lg(x^2-55x+90)-\lg(x-36))=\lg\sqrt{2}.$

7.049. $\lg(5-x)-\dfrac{1}{3}\lg(35-x^3)=0.$

7.050. $\log_2\dfrac{x-5}{x+5}+\log_2(x^2-25)=0.$

7.051. $\dfrac{\lg 8-\lg(x-5)}{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}=-1.$

7.052. $\log_{0,5}^2(4x)+\log_2\dfrac{x^2}{8}=8.$

7.053. $\lg\lg x+\lg(\lg x^3-2)=0.$

7.054. $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11.$

7.055. $\log_3(3^x-8)=2-x.$

7.056. $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3\cdot 5^{\lg x-1}-13\cdot 7^{\lg x-1}.$

7.057. $5^{x+6}-3^{x+7}=43\cdot 5^{x+4}-19\cdot 3^{x+5}.$

7.058. $\dfrac{\log_5(\sqrt{2x-7}+1)}{\log_5(\sqrt{2x-7}+7)}=0{,}5.$

7.059. $\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}}=81.$

7.060. $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x\cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}}=4\sqrt[3]{2}.$

7.061. $\sqrt{2}\cdot 0{,}5^{\frac{5}{\sqrt[4]{x+10}}}-16^{\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}}=0.$

7.062. $8^{\frac{x-3}{3x-7}}\sqrt[3]{\sqrt{0{,}25^{\frac{3x-1}{x-1}}}}=1.$

7.063. $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot(10^{x-1})^3.$

7.064. $0{,}6^x\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3.$

7.065. $5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}}\cdot 0{,}2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\sqrt[3]{25}.$

7.066. $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\cdot 0{,}5^{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=4^{\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}.$

7.067. $2{,}5^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}\cdot 0{,}4^{1-\sqrt{9-x}}=5^{10}\cdot 0{,}1^5.$

7.068. $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}.$

7.069. $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2.$

7.070. $4^{\log_9 x^2}+\log_{\sqrt{3}}3=0{,}2(4^{2+\log_9 x}-4^{\log_9 x}).$

7.071. $3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}=0{,}2.$

7.072. $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\cdot 50^{\frac{1}{x}}.$

7.073. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0.$

7.074. $4^x-10\cdot 2^{x-1}-24=0.$

7.075. $(\sqrt[5]{3})^x+(\sqrt[10]{3})^{x-10}=84.$

7.076. $9^{\sqrt{x-5}}-27=6\cdot 3^{\sqrt{x-5}}.$

7.077. $17\cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}}-8=2\cdot 4^{\sqrt{x^2-8x}}.$

7.078. $8^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{3x+3}{x}}+12=0.$

7.079. $2\log_x 27-3\log_{27}x=1.$

7.080. $\lg(\sqrt{6+x}+6)=\frac{2}{\log_{\sqrt{x}}10}.$

7.081. $\log_5 x + \log_x 25 = \operatorname{ctg}^2 \frac{25\pi}{6}$.

7.082. $x^{\frac{\lg x+5}{3}} = 10^{5+\lg x}$.

7.083. $x^{\log_4 x-2} = 2^{3(\log_4 x-1)}$.

7.084. $\frac{2^x+10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$.

7.085. $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$.

7.086. $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{100}} = 0$.

7.087. $7^x(\sqrt{2})^{2x^2-6} - \left(\frac{7}{4}\right)^x = 0$.

7.088. $3 \cdot 4^{\log_x 2} - 46 \cdot 2^{\log_x 2-1} = 8$.

7.089. $9^{\log_{1/3}(x+1)} = 5^{\log_{1/5}(2x^2+1)}$.

7.090. $27^{\lg x} - 7 \cdot 9^{\lg x} - 21 \cdot 3^{\lg x} + 27 = 0$.

7.091. $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$.

7.092. $2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$.

7.093. $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$.

7.094. $4^{\log_5 x^2} - 4^{\log_5 x+1} + 4^{\log_5 x-1} - 1 = 0$.

7.095. $\sqrt{\log_a x} + \sqrt{\log_x a} = \frac{10}{3}$.

7.096. $\lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x+4) = 1$.

7.097. $\log_3(x-3)^2 + \log_3|x-3| = 3$.

7.098. $\lg\sqrt{x-3} + \lg\sqrt{x+3} = 2 - 0{,}5\lg 625$.

7.099. $\lg(3-x) - \frac{1}{3}\lg(27-x^3) = 0$.

7.100. $2\lg x - \lg 4 = -\lg(5-x^2)$.

7.101. $\lg 8 - \lg\sqrt{x+6} = \lg 16 - \lg(x-2)$.

7.102. $2\lg\sqrt{4-x}+\lg(6-x)=1.$

7.103. $\dfrac{\lg(2x-19)-\lg(3x-20)}{\lg x}=-1.$

7.104. $\dfrac{\lg x^2}{\lg(6x-5)}=1.$

7.105. $\log_a y+\log_a(y+5)+\log_a 0{,}02=0.$

7.106. $\log_x\sqrt{2}-\log_x^2\sqrt{2}=\log_3 27-\log_x(2x).$

7.107. $(\log_2 x-3)\log_2 x+2(\log_2 x+1)\log_2\sqrt[3]{2}=0.$

7.108. $0{,}1\log_2^4(x-4)-1{,}3\log_2^2(x-4)+3{,}6=0.$

7.109. $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0.$

7.110. $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}.$

7.111. $\frac{1}{3}\lg(271+3^{2\sqrt{x}})+\lg 10=2.$

7.112. $\left((\sqrt[5]{27})^{\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}}\right)^{\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}}=\sqrt[4]{3^7}.$

7.113. $x^{\lg x}=1000x^2.$

7.114. $\lg(x(x+9))+\lg\dfrac{x+9}{x}=0.$

7.115. $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\dfrac{1}{x}.$

7.116. $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x)=\dfrac{2}{\log_4 x}.$

7.117. $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400.$

7.118. $5^{\log_2(x^2-21)}\cdot 0{,}2^2\cdot 25^{-0{,}5\log_2 x}=1.$

7.119. $4^{2\log_8(2x-2)}\cdot 0{,}25^{\log_8(2x-3)}=\sqrt[3]{16}.$

7.120. $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\dfrac{2}{9}\right)=\log_5 0{,}2.$

7.121. $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3).$

7.122. $\sqrt[3]{27^{5\sqrt{x}}}=3^{x(\sqrt{x}-4)}$.

7.123. $\log_6\sqrt[7]{3^{x(15-x)}}+8\log_6 2=8$.

7.124. $\log_5(4^x+144)-4\log_5 2=1+\log_5(2^{x-2}+1)$.

7.125. $27x^{\log_{27}x}=x^{\frac{10}{3}}$.

7.126. $\log_x 9+\log_{x^2}729=10$.

7.127. $\log_2(25^{x+3}-1)=2+\log_2(5^{x+3}+1)$.

Решить системы уравнений (7.128–7.149):

7.128. $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2,\\ x^2-y=20.\end{cases}$

7.129. $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50,\\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5.\end{cases}$

7.130. $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=2-\lg 5,\\ \lg(x+y)+\lg(x-y)=\lg 1{,}2+1.\end{cases}$

7.131. $\begin{cases}\log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9,\\ x+y-20=0.\end{cases}$

7.132. $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81,\\ \lg(y+x)^2-\lg x=2\lg 3.\end{cases}$

7.133. $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2{,}5,\\ xy=27.\end{cases}$

7.134. $\begin{cases}3^{2x}-2^y=725,\\ 3^x-2^{\frac{y}{2}}=25.\end{cases}$

7.135. $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=2,\\ \log_2 x-4=\log_2 3-\log_2 y.\end{cases}$

7.136. $\begin{cases}3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=81,\\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 3.\end{cases}$

7.137. $\begin{cases}2^{\frac{x-y}{2}}+2^{\frac{y-x}{2}}=2{,}5,\\ \lg(2x-y)+1=\lg(y+2x)+\lg 6.\end{cases}$

7.138. $\begin{cases} x^{2y^2-1}=5, \\ x^{y^2+2}=125. \end{cases}$

7.139. $\begin{cases} 8(\sqrt{2})^{x-y}=0{,}5^{y-3}, \\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3. \end{cases}$

7.140. $\begin{cases} 4^{x+y}=2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x}=y^4-5. \end{cases}$

7.141. $\begin{cases} \log_4 x-\log_2 y=0, \\ x^2-4y^2-8=0. \end{cases}$

7.142. $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y=4, \\ \log_4 x+\log_2 y=5. \end{cases}$

7.143. $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6, \\ x^2+5y^2=6xy. \end{cases}$

7.144. $\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=6, \\ 3^x\cdot 4^y=12. \end{cases}$

7.145. $\begin{cases} y=1+\log_4 x, \\ x^y=4^6. \end{cases}$

7.146. $\begin{cases} \log_{\sqrt{x}}(xy)=8, \\ \log_3\log_{1/9}\dfrac{x}{y}=0. \end{cases}$

7.147. $\begin{cases} \log_{xy}(x-y)=1, \\ \log_{xy}(x+y)=0. \end{cases}$

7.148. $\begin{cases} (x+y)2^{y-2x}=6{,}25, \\ (x+y)^{\frac{1}{2x-y}}=5. \end{cases}$

7.149. $\begin{cases} 8^{\log_9(x-4y)}=1, \\ 4^{x-2y}-7\cdot 2^{x-2y}=8. \end{cases}$

Группа Б

Упростить выражения (7.150–7.156):

7.150. $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}.$

7.151. $((\log_b^4 a+\log_a^4 b+2)^{1/2}+2)^{1/2}-\log_b a-\log_a b.$

7.152. $\log_2(2x^2)+\log_2 x\cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)}+\dfrac{1}{2}\log_4^2 x^4+2^{-3\log_{0,5}\log_2 x}.$

7.153. $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}}+1\right)^{1/2}.$

7.154. $\dfrac{\log_a b-\log_{\sqrt{a}/b^3}\sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b-\log_{a/b^6} b}:\log_b(a^3b^{-12}).$

7.155. $(6(\log_b a\cdot\log_{a^2} b+1)+\log_a b^{-6}+\log_a^2 b)^{1/2}-\log_a b$ при $a>1$.

7.156. $\dfrac{\log_a b+\log_a\left(b^{0,5\log_b a^2}\right)}{\log_a b-\log_{ab} b}\cdot\dfrac{\log_{ab} b\cdot\log_a b}{b^{2\log_b\log_a b}-1}$.

7.157. Известно, что $\log_a x=\alpha$, $\log_b x=\beta$, $\log_c x=\gamma$, $\log_d x=\delta$ и $x\neq 1$. Найти $\log_{abcd} x$.

7.158. Известно, что $\beta=10^{\frac{1}{1-\lg\alpha}}$ и $\gamma=10^{\frac{1}{1-\lg\beta}}$. Найти зависимость α от γ.

7.159. Доказать, что $\log_{ab} c=\dfrac{\log_a c\cdot\log_b c}{\log_a c+\log_b c}$.

7.160. Упростить выражение $\log_{a+b} m+\log_{a-b} m-2\log_{a+b} m\cdot\log_{a-b} m$, если известно, что $m^2=a^2-b^2$.

7.161. Найти $\log_{30}8$, если известно, что $\lg 5=a$ и $\lg 3=b$.

7.162. Доказать, что $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x}=1+\log_a b$.

7.163. Зная, что $\lg 2=a$ и $\log_2 7=b$, найти $\lg 56$.

7.164. Зная, что $b=8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ и $c=8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$, показать, что $a=8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

Решить уравнения (7.165–7.258):

7.165. $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$.

7.166. $\sqrt{\log_{0,04} x+1}+\sqrt{\log_{0,2} x+3}=1$.

7.167. $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}=-\log_x 5$.

7.168. $\log_{4x+1} 7+\log_{9x} 7=0$.

7.169. $(16^{\sin x})^{\cos x}+\dfrac{6}{4^{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}-4=0$.

7.170. $\log_2(2-x)-\log_2(2-\sqrt{x})=\log_2\sqrt{2-x}-0,5$.

7.171. $5^{1+\log_4 x}+5^{\log_{0,25} x-1}=5,2$.

7.172. $\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8\sqrt{x^2}=0$.

7.173. $2\lg x^2-\lg^2(-x)=4$.

7.174. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$

7.175. $\lg(x^3+8) - 0{,}5\lg(x^2+4x+4) = \lg 7.$

7.176. $2^{\log_5 x^2} - 2^{1+\log_5 x} + 2^{\log_5 x - 1} - 1 = 0.$

7.177. $\dfrac{\log_2(9-2^x)}{3-x} = 1.$

7.178. $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{0,2}\sqrt{3}.$

7.179. $\log_{a^2} x^2 + \log_a (x-1) = \log_a \log_{\sqrt{5}} 5.$

7.180. $x^{2\lg^2 x} = 10x^3.$

7.181. $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + 0{,}5.$

7.182. $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \dfrac{a^2}{2a-x} = 1.$

7.183. $5^{-2\log_{0,04}(3-4x^2)} + 1{,}5\log_{1/8} 4^x = 0.$

7.184. $\log_a x + \log_{a^2} x + \log_{a^3} x = 11.$

7.185. $6 - (1 + 4\cdot 9^{4-2\log_{\sqrt{3}} 3})\log_7 x = \log_x 7.$

7.186. $\log_{12}(4^{3x} + 3x - 9) = 3x - x\log_{12} 27.$

7.187. $x^2 \cdot \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4.$

7.188. $\sqrt{\log_5^2 x + \log_x^2 5 + 2} = 2{,}5.$

7.189. $\log_x m \cdot \log_{\sqrt{m}} \dfrac{m}{\sqrt{2m-x}} = 1.$

7.190. $\log_2 3 + 2\log_4 x = x^{\frac{\log_9 16}{\log_3 x}}.$

7.191. $\log_{10} x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + \ldots + \log_{\sqrt[10]{10}} x = 5{,}5.$

7.192. $\sqrt{3\log_2^2 x - 1 - 9\log_x^2 2} = 5.$

7.193. $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \ldots + \log_{\sqrt[16]{3}} x = 36.$

7.194. $\log_x 2 - \log_4 x + \dfrac{7}{6} = 0.$

7.195. $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1.$

7.196. $3^{\log_3 x+\log_3 x^2+\log_3 x^3+\ldots+\log_3 x^8}=27x^{30}.$

7.197. $5^{\frac{x}{\sqrt{x+2}}}\cdot 0{,}2^{\frac{4}{\sqrt{x+2}}}=125^{x-4}\cdot 0{,}04^{x-2}.$

7.198. $\left(3(3^{\sqrt{x}+3})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=\frac{3}{\sqrt[10]{3}}.$

7.199. $\log_2\log_3(x^2-16)-\log_{1/2}\log_{1/3}\frac{1}{x^2-16}=2.$

7.200. $\frac{1+2\log_9 2}{\log_9 x}-1=2\log_x 3\cdot\log_9(12-x).$

7.201. $3\lg 2+\lg(2^{\sqrt{x-1}-1}-1)=\lg\left(0{,}4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}}+4\right)+1.$

7.202. $5\log_{\frac{x}{9}} x+\log_{\frac{9}{x}} x^3+8\log_{9x^2} x^2=2.$

7.203. $20\log_{4x}\sqrt{x}+7\log_{16x} x^3-3\log_{0,5x} x^2=0.$

7.204. $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}}=\sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}.$

7.205. $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1.$

7.206. $|x-2|^{10x^2-3x-1}=1.$

7.207. $\log_{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{2a-x}}{a}-\log_{1/a} x=0.$

7.208. $2^{x-1}+2^{x-4}+2^{x-2}=6{,}5+3{,}25+1{,}625+\ldots$ (выражение в правой части — бесконечная геометрическая прогрессия).

7.209. $49^{1+\sqrt{x-2}}-344\cdot 7^{\sqrt{x-2}}=-7.$

7.210. $5^{x-1}+5\cdot 0{,}2^{x-2}=26.$

7.211. $\log_{\sqrt{3}} x\cdot\sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3-\log_x 9}+4=0.$

7.212. $\frac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2}+\log_{2x} 2\cdot\log_{0,5}(2x)=0.$

7.213. $\left|\log_{\sqrt{3}} x-2\right|-\left|\log_3 x-2\right|=2.$

7.214. $9^x+6^x=2^{2x+1}.$

7.215. $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}}-6=0.$

7.216. $27^x-13\cdot 9^x+13\cdot 3^{x+1}-27=0.$

7.217. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^z+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^z=14.$

7.218. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2\log_9(x+1)}\cdot\left(\frac{125}{27}\right)^{2\log_{1/27}(x-1)}=\frac{\log_5 27}{\log_5 243}.$

7.219. $5^{1+x^2}-5^{1-x^2}=24.$

7.220. $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0.$

7.221. $4^{\lg x+1}-6^{\lg x}-2\cdot 3^{\lg x^2+2}=0.$

7.222. $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x.$

7.223. $\log_5(2^{1,5x-2,5}+2^{1,5x-0,5}-0{,}01\cdot 5^{3x+1})=3x-1.$

7.224. $\frac{8^x+2^x}{4^x-2}=5.$

7.225. $\log_{3x+7}(5x+3)+\log_{5x+3}(3x+7)=2.$

7.226. $2{,}5^{\log_3 x}+0{,}4^{\log_3 x}=2{,}9.$

7.227. $(\lg(x+20)-\lg x)\log_x 0{,}1=-1.$

7.228. $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}.$

7.229. $27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^x-2^{3x}-27\cdot 2^{-x}=8.$

7.230. $\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0,5}(x+1).$

7.231. $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2.$

7.232. $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3.$

7.233. $(3\log_a x-2)\log_x^2 a=\log_{\sqrt{a}} x-3;\ a>0,\ a\neq 1.$

7.234. $\frac{10x^{2\lg^2 x}}{x^3}=\frac{x^{3\lg x}}{10}.$

7.235. $x\log_{x+1}5\cdot\log_{\sqrt[3]{0,2}}(x+1)=\frac{x-4}{x}.$

7.236. $3\lg x^2 - \lg^2(-x) = 9.$

7.237. $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 = -1.$

7.238. $\dfrac{2}{\sqrt{3}\log_2\sqrt{x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{\log_2(-x)}} = 0.$

7.239. $\lg\sqrt{10} - \lg 100 = \sqrt[6]{\lg(390635 - 5^{\sqrt[3]{2x}}) - 2{,}5}.$

7.240. $\lg^4(x-1)^2 + \lg^2(x-1)^3 = 25.$

7.241. $\dfrac{\log_2(x^3+3x^2+2x-1)}{\log_2(x^3+2x^2-3x+5)} = \log_{2x} x + \log_{2x} 2.$

7.242. $(16\cdot 5^{2x-1} - 2\cdot 5^{x-1} - 0{,}048)\lg(x^3+2x+1) = 0.$

7.243. $5^x \cdot \sqrt[x]{8^{x-1}} = 500.$

7.244. $3\log_2^2 \sin x + \log_2(1-\cos 2x) = 2.$

7.245. $\log_{1+x}(2x^3+2x^2-3x+1) = 3.$

7.246. $\log_2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \dfrac{4}{3}.$

7.247. $\sqrt{\log_5 x} + \sqrt[3]{\log_5 x} = 2.$

7.248. $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_3 x^3 + \log_2 x^2 - 6.$

7.249. $3\cdot 4^{x-2} + 27 = a + a\cdot 4^{x-2}$. При каких значениях a уравнение имеет решение?

7.250. $\log_a x + \log_{\sqrt{a}} x + \log_{\sqrt[3]{a^2}} x = 27.$

7.251. $x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} - \dfrac{1}{x} = 0.$

7.252. $\dfrac{2}{15}(16^{\log_9 x+1} - 16^{\log_3\sqrt{x}}) + 16^{\log_3 x} - \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} = 0.$

7.253. $\log_a\sqrt{4+x} + 3\log_{a^2}(4-x) - \log_{a^4}(16-x^2)^2 = 2.$ При каких значениях a уравнение имеет решение?

7.254. $\log_2\sqrt[3]{4} + \log_8(9^{x+1}-1) = 1 + \log_8(3^{x+1}+1).$

7.255. $25^{\log_4 x} - 5^{\log_{16} x^2+1} = \log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3} - 25^{\log_{16} x}.$

7.256. $\left(1+\frac{x}{2}\right)\log_2 3-\log_2(3^x-13)=2.$

7.257. $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\ldots\log_n(n+1)=10;\ n\in N.$

7.258. $2^{\frac{a+3}{a+2}}\cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}}=4^{\frac{1}{x}}$ (рассмотреть при всех действительнь чениях a).

Решить системы уравнений (7.259–7.294):

7.259. $\begin{cases}2-\log_2 y=2\log_2(x+y),\\ \log_2(x+y)+\log_2(x^2-xy+y^2)=1.\end{cases}$

7.260. $\begin{cases}3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y}+7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}-6=0,\\ \lg(3x-y)+\lg(x+y)-4\lg 2=0.\end{cases}$

7.261. $\begin{cases}(0{,}48^{x^2+2})^{2x-y}=1,\\ \lg(x+y)-1=\lg 6-\lg(x+2y).\end{cases}$

7.262. $\begin{cases}\log_2(x-y)=5-\log_2(x+y),\\ \dfrac{\lg x-\lg 4}{\lg y-\lg 3}=-1.\end{cases}$

7.263. $\begin{cases}4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=32,\\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y).\end{cases}$

7.264. $\begin{cases}y^{5x^2-51x+10}=1,\\ xy=15.\end{cases}$

7.265. $\begin{cases}\log_x y=2,\\ \log_{x+1}(y+23)=3.\end{cases}$

7.266. $\begin{cases}(x^2+y)2^{y-x^2}=1,\\ 9(x^2+y)=6^{x^2-y}.\end{cases}$

7.267. $\begin{cases}y-\log_3 x=1,\\ x^y=3^{12}.\end{cases}$

7.268. $\begin{cases}9^{\sqrt[4]{xy^2}}-27\cdot 3^{\sqrt{y}}=0,\\ \frac{1}{4}\lg x+\frac{1}{2}\lg y=\lg(4-\sqrt[4]{x}).\end{cases}$

7.269. $\begin{cases}3^{-x}\cdot 2^y=1152,\\ \log_{\sqrt{5}}(x+y)=2.\end{cases}$

7.270. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=1+\lg 8, \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=\lg 3. \end{cases}$

7.271. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2. \end{cases}$

7.272. $\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)}=48, \\ 2\log_5(2y-x-12)-\log_5(y-x)=\log_5(y+x). \end{cases}$

7.273. $\log_9(x^3+y^3)=\log_3(x^2-y^2)=\log_3(x+y).$

7.274. $\begin{cases} (\log_a x+\log_a y-2)\log_{18} a=1, \\ 2x+y-20a=0. \end{cases}$

7.275. $\begin{cases} (x+y)3^{y-x}=\dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5(x+y)=x-y. \end{cases}$

7.276. $\begin{cases} 2^{\sqrt{xy}-2}+4^{\sqrt{xy}-1}=5, \\ \dfrac{3(x+y)}{x-y}+\dfrac{5(x-y)}{x+y}=8. \end{cases}$

7.277. $\begin{cases} x^y=2, \\ (2x)^{y^2}=64;\ x>0. \end{cases}$

7.278. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12, \\ 2^{-\log_2 x}+5^{\log_5\frac{1}{y}}=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

7.279. $\begin{cases} x^{y^2-7y+10}=1, \\ x+y=8;\ x>0. \end{cases}$

7.280. $\begin{cases} 2(\log_{1/y} x-2\log_{x^2} y)+5=0, \\ xy^2=32. \end{cases}$

7.281. $\begin{cases} yx^{\log_y x}=x^{2,5}, \\ \log_3 y\cdot\log_y(y-2x)=1. \end{cases}$

7.282. $\begin{cases} \lg(x-3)-\lg(5-y)=0, \\ 4^{-1}\sqrt[y]{4^x}-8\sqrt[x]{8^y}=0. \end{cases}$

7.283. $\begin{cases} \log_x(3x+2y)=2, \\ \log_y(2x+3y)=2. \end{cases}$

7.284. $\begin{cases} x+y=12, \\ 2(2\log_{y^2} x-\log_{1/x} y)=5. \end{cases}$

7.285. $\begin{cases} x^{x^2-y^2-16}=1, \\ x-y=2;\ x>0. \end{cases}$

7.286. $\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2}=1, \\ \lg y-\lg|x|=\lg 2. \end{cases}$

7.287. $\begin{cases} 4^x-7\cdot 2^{x-0,5y}=2^{3-y}, \\ y-x=3. \end{cases}$

7.288. $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}\cdot 2^{\sqrt{y}}=200, \\ 5^{2\sqrt[3]{x}}+2^{2\sqrt{y}}=689. \end{cases}$

7.289. $\begin{cases} 10^{\lg 0,5(x^2+y^2)+1,5} = 100\sqrt{10}, \\ \dfrac{\sqrt{x^2+10y}}{3} = \dfrac{6}{2\sqrt{x^2+10y}-9}. \end{cases}$ **7.290.** $\begin{cases} y^x = 1,5 + y^{-x}, \\ y^{2,5+x} = 64; \ y > 0. \end{cases}$

7.291. $\begin{cases} \lg(x+y) - \lg 5 = \lg x + \lg y - \lg 6, \\ \dfrac{\lg x}{\lg(y+6) - (\lg y + \lg 6)} = -1. \end{cases}$

7.292. $\begin{cases} \log_{xy} \dfrac{y}{x} - \log_y^2 x = 1, \\ \log_2(y-x) = 1. \end{cases}$

7.293. $\begin{cases} (x+y)^x = (x-y)^y, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$

7.294. $\begin{cases} x^{x-2y} = 36, \\ 4(x-2y) + \log_6 x = 9 \end{cases}$ (найти только целочисленные решения).

Группа В

Упростить выражения (7.295–7.299):

7.295. $\dfrac{(\lg b \cdot 2^{\log_2 \lg b})^{1/2} \cdot \lg^{-1/2} b^2}{\sqrt{\dfrac{\lg^2 b + 1}{2\lg b} + 1 - 10^{0,5 \lg\lg b^{1/2}}}}.$

7.296. $2\log_a^{1/2} b \left(\left(\log_a \sqrt[4]{ab} + \log_b \sqrt[4]{ab} \right)^{1/2} - \left(\log_a \sqrt[4]{\dfrac{b}{a}} + \log_b \sqrt[4]{\dfrac{a}{b}} \right)^{1/2} \right)$ при $a > 1$ и $b > 1$.

7.297. $\sqrt{\log_n p + \log_p n + 2} \cdot (\log_n p - \log_{np} p) \cdot \sqrt{\log_n p}.$

7.298. $\left(\left(\dfrac{\log_a^2 b + 1}{2\log_a b} - 1 \right)^{1/2} - \left(\dfrac{\log_a^2 b + 1}{2\log_a b} + 1 \right)^{1/2} \right) \cdot \sqrt{2} \log_a^{1/2} b$ при $a > 1$.

7.299. $\dfrac{1 - \log_{1/a} \dfrac{1}{(a-b)^2} + \log_a^2(a-b)}{(1 - \log_{\sqrt{a}}(a-b) + \log_a^2(a-b))^{1/2}}.$

7.300. Используя равенства $675 = 9 \cdot 75$ и $135 = 3 \cdot 45$, установить без помощи таблиц, какое число больше: $\log_{135}675$ или $\log_{45}75$.

7.301. Уравнение $4^x + 10^x = 25^x$ имеет единственный корень. Найти его и выяснить: искомый корень положителен или отрицателен? больше или меньше единицы?

7.302. Показать, что $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$.

7.303. Выражение $\log_m A \cdot \log_n A + \log_n A \cdot \log_p A + \log_p A \cdot \log_m A$ представить в форме произведения.

7.304. Показать, что $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \frac{1}{3}$.

7.305. Упростить выражение $((\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2)^{1/2} - 2)^{1/2}$ при $1 < a < b$.

7.306. При каких значениях p уравнение $\lg(x^2 + 2px) - \lg(8x - 6p - 3) = 0$ имеет единственный корень?

7.307. При каких значениях a уравнение $2\lg(x+3) = \lg(ax)$ имеет единственный корень?

7.308. Найти x $(x \in Z)$, если $(\sqrt[3]{0{,}5} + \sqrt[3]{4})^x = 13{,}5$.

Решить уравнения (7.309–7.333):

7.309. $2\log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1} - 1)$.

7.310. $\left(1 + \log_x \dfrac{4-x}{10}\right) \cdot \lg x = \lg\lg 10^3 - 1$.

7.311. $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$.

7.312. $4^{\log_{16} x} - 3^{\log_{16} x - 0{,}5} = 3^{\log_{16} x + 0{,}5} - 2^{2\log_{16} x - 1}$.

7.313. $\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8) \cdot \log_{x-1}(x+1) = 3$.

7.314. $\dfrac{2 - 4\log_{12} 2}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$.

7.315. $2^{\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} - 2 \cdot 0{,}25^{\frac{\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}} - 1 = 0$.

7.316. $\lg(2x) + \lg(2-x) = \lg\lg p$. При каких значениях p уравнение имеет решение?

7.317. $\log_4 x + \log_x 2 - \log_4 \sqrt{x} = 1$.

7.318. $\log_k x + \log_{\sqrt{k}} x + \ldots + \log_{\sqrt[k]{k}} x = \dfrac{k+1}{2}$; $k \in N$.

7.319. $2 - \log_{b^2}(1+x) = 3\log_b \sqrt{x-1} - \log_{b^4}(x^2-1)^2$.

7.320. $m^{1+\log_3 x} + m^{1-\log_3 x} = m^2 + 1$; $m > 0$, $m \neq 1$.

7.321. $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$.

7.322. $a^{2\lg x-\lg(6-x)}=1;\ a>0$.

7.323. $p^{\log_2(x+14)+\log_2(x+2)}=p^6;\ p>0$.

7.324. $(x^2-x-1)^{x^2-1}=1$.

7.325. $(2^x-2\cdot 2^{-x})^{\log_9(2x+3)-\log_3 x}=1$.

7.326. $|x-3|^{x^2-x}=(x-3)^2$.

7.327. $\log_{\sqrt{x}}(x+12)=8\log_{x+12}x$ (ограничиться отысканием целого корня).

7.328. $5^{\lg x}-3^{\lg x}=5,(3)\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot 5^{0,5(\lg x-2)}$.

7.329. $|\log_2(3x-1)-\log_2 3|=|\log_2(5-2x)-1|$.

7.330. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$.

7.331. $\dfrac{\log_3 x-1}{\log_3\dfrac{x}{3}}-2\log_3\sqrt{x}+\log_3^2 x=3$.

7.332. $\log_{x+3}(3-\sqrt{1-2x+x^2})=0,5$.

7.333. $\sqrt{\log_2(2x^2)\cdot\log_4(16x)}=\log_4 x^3$.

Решить системы уравнений (7.334–7.340):

7.334. $\begin{cases}\log_2(u+v)-\log_3(u-v)=1,\\ u^2-v^2=2.\end{cases}$

7.335. $\begin{cases}x^p=y^q,\\ \log_a\dfrac{x}{y}=\dfrac{\log_a x}{\log_a y};\ p\neq q \text{ и } pq\neq 0.\end{cases}$

7.336. $\begin{cases}3^{\lg x}=4^{\lg y},\\ (4x)^{\lg 4}=(3y)^{\lg 3}.\end{cases}$

7.337. $\begin{cases}xy=a^2,\\ \lg^2 x+\lg^2 y=2,5\lg^2 a^2\end{cases}$

при условии $a<0$.

7.338. $\begin{cases}x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4,\\ \log_4 x-\log_4 y=1.\end{cases}$

7.339. $\begin{cases}(2^{x+y})^{x^2-xy-8}=1,\\ (0,37^{x-y})^{x^2+xy+2x-16}=1.\end{cases}$

7.340. $\begin{cases}x^{\log_3 y}+2y^{\log_3 x}=27,\\ \log_3 y-\log_3 x=1.\end{cases}$

ГЛАВА 8

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. *Простейшими тригонометрическими уравнениями* называются уравнения вида

$$\sin x = a, \cos x = a \text{ (где } |a| \le 1);$$

$$\operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a \text{ (где } -\infty < a < +\infty).$$

Формулы решений этих уравнений имеют следующий вид (здесь и в дальнейшем $n \in Z$ означает, что n — целое число):

$$\sin x = a;\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z; \tag{8.1}$$

$$\cos x = a;\ x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z; \tag{8.2}$$

$$\operatorname{tg} x = a;\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z; \tag{8.3}$$

$$\operatorname{ctg} x = a;\ x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z. \tag{8.4}$$

В частных случаях при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ получаются следующие формулы:

$$\sin x = 0;\ x = \pi n,\ n \in Z; \tag{8.5}$$

$$\sin x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z; \tag{8.6}$$

$$\sin x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z; \tag{8.7}$$

$$\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z; \tag{8.8}$$

$$\cos x = 1;\ x = 2\pi n,\ n \in Z; \tag{8.9}$$

$$\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z; \tag{8.10}$$

$$\operatorname{tg} x = 0;\ x = \pi n,\ n \in Z; \tag{8.11}$$

$$\operatorname{ctg} x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z. \tag{8.12}$$

Уравнения вида

$$\sin(\omega x+\varphi)=a,\ \cos(\omega x+\varphi)=a,\ \operatorname{tg}(\omega x+\varphi)=b,\ \operatorname{ctg}(\omega x+\varphi)=b$$

($|a|<1$, $\omega\neq 0$, φ, b — любые действительные числа) также относятся к простейшим. Их следует решать сразу по формулам (8.1)–(8.4), заменив x на $\omega x+\varphi$.

Пример 1. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

□ Согласно формуле (8.1), имеем $\frac{\pi}{6}-2x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n$. Так как $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, то $\frac{\pi}{6}-2x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, откуда $x=-(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, или $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}(6n+1),\ n\in\boldsymbol{Z}$. ■

Если уравнение не является простейшим, то с помощью тождественных преобразований его нужно свести к одному или нескольким простейшим уравнениям, совокупность которых равносильна заданному.

2°. При решении тригонометрических уравнений часто используются разложение на множители и введение новой переменной (метод подстановки).

Пример 2. Решить уравнение $\sin x=\sin 2x\cos 3x$.

□ Применив к $\sin 2x$ формулу синуса двойного аргумента (3.13), получим

$$\sin x=2\sin x\cos x\cos 3x;\ \sin x(1-2\cos x\cos 3x)=0.$$

Так как множители в левой части этого уравнения имеют смысл при любых значениях x, то оно равносильно совокупности двух уравнений: $\sin x=0$ и $1-2\cos x\cos 3x=0$.

Согласно формуле (8.5), первому уравнению удовлетворяют значения $x=\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Для решения второго уравнения преобразуем произведение косинусов в сумму по формуле (3.26); имеем $1-(\cos 4x+\cos 2x)=0$. Поскольку $1-\cos 4x=2\sin^2 2x$ [см. формулу (3.16)], уравнение принимает вид $2\sin^2 2x-\cos 2x=0$, или $2(1-\cos^2 2x)-\cos 2x=0$, откуда получим $2\cos^2 2x+\cos 2x-2=0$ — квадратное уравнение относительно $\cos 2x$. Полагая $\cos 2x=z$, имеем $2z^2+z-2=0$. Решив это уравнение, находим $z_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, $z_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$. Так как $|z_2|=\left|\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right|>1$, то уравнение $\cos 2x=z_2$ не имеет решений. Остается решить уравнение $\cos 2x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$.

По формуле (8.2) имеем $2x=\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

Итак, получаем ответ: $x=\pi n;\ x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi k,\ n,\ k\in\boldsymbol{Z}$. ■

При решении уравнения методом разложения на множители оно может не быть равносильным полученной совокупности уравнений, так как возможно появление посторонних корней. Чтобы избежать ошибки в ответе, нужно исключить из найденных значений неизвестного те, для которых заданное уравнение не имеет смысла.

Пример 3. Решить уравнение $(1 - \sin x)(\mathrm{tg}^2 x - 3) = 0$.

□ Найдем значения x, удовлетворяющие каждому из уравнений $1 - \sin x = 0$ и $\mathrm{tg}^2 x - 3 = 0$; если $\sin x = 1$, то по формуле (8.6) получим

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z; \qquad (*)$$

если $\mathrm{tg}^2 x = 3$, т. е. $\mathrm{tg}\, x = \pm\sqrt{3}$, то по формуле (8.3) имеем

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z. \qquad (**)$$

Однако было бы ошибочным считать ответом объединение решений (*) и (**). Дело в том, что исходное уравнение не имеет смысла для значений $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in Z)$. поэтому первое из предполагаемых решений непригодно и ответом является только второе решение $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$ $(n \in Z)$. ■

Пример 4. Решить уравнение $\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8}$.

□ Наиболее быстрый способ решения — умножение правой и левой частей равенства на $8 \sin x$, хотя при этом возможно появление посторонних корней. Чтобы избежать этого, следует учитывать, что в окончательное решение не должны входить значения x, для которых $\sin x = 0$, т. е. значения $x = \pi n$ $(n \in Z)$, так как они не удовлетворяют исходному уравнению.

После умножения на $8 \sin x$ уравнение примет вид

$$8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \sin x.$$

Последовательно трижды применив формулу (3.13), получим сначала $4 \sin 2x \cos 2x \cos 4x = \sin x$, затем $2 \sin 4x \cos 4x = \sin x$ и далее $\sin 8x = \sin x$, или $\sin 8x - \sin x = 0$. Преобразуя по формуле (3.20) разность синусов в произведение, получаем $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{9x}{2} = 0$.

Пусть $\sin\frac{7x}{2} = 0$; тогда $\frac{7x}{2} = \pi k$ $(k \in Z)$, откуда $x = \frac{2\pi k}{7}$ $(k \in Z)$, причем следует исключить значения $x = 2\pi n$ $(n \in Z)$, получающиеся при $k = 7n$, как посторонние для исходного уравнения. Пусть теперь $\cos\frac{9x}{2} = 0$; тогда $\frac{9x}{2} = \frac{\pi}{2} +$

$+\pi m$ $(m \in Z)$, откуда $x = \dfrac{\pi(2m+1)}{9}$ $(m \in Z)$, причем следует исключить значения $x = \pi(2n+1)$ $(n \in Z)$, получающиеся при $m = 9n+4$ $(n \in Z)$, как посторонние для исходного уравнения.

Итак, получаем ответ: $x = \dfrac{2\pi k}{7}$, где целое $k \neq 7n, n \in Z$; $x = \dfrac{\pi(2m+1)}{9}$, где целое $m \neq 9n+4, n \in Z$. ■

3°. *Однородными уравнениями* называются уравнения следующего вида:

$$a\sin kx + b\cos kx = 0; \qquad (8.13)$$

$$a\sin^2 kx + b\sin kx\cos kx + c\cos^2 kx = 0; \qquad (8.14)$$

$$a\sin^3 kx + b\sin^2 kx\cos kx + c\sin kx\cos^2 kx + d\cos^3 kx = 0. \qquad (8.15)$$

Уравнение

$$a\sin^2 kx + b\sin kx\cos kx + c\cos^2 kx = d$$

при $d \neq 0$ не является однородным, но его можно привести к однородному уравнению вида (8.14), заменив число d тождественно равным ему выражением $d(\sin^2 kx + \cos^2 kx)$.

Для решения уравнений (8.13)–(8.15) в случае $a \neq 0$ рассмотрим такие значения x, при которых $\cos kx = 0$. Тогда из каждого уравнения следует, что при тех же значениях x должно быть и $\sin kx = 0$, а это невозможно. Значит, решениями этих уравнений могут быть только такие значения x, при которых $\cos kx \neq 0$. Поэтому если (при $a \neq 0$) разделить обе части уравнения (8.13) на $\cos kx$, уравнения (8.14) — на $\cos^2 kx$, уравнения (8.15) — на $\cos^3 kx$, то потери корней не произойдет.

В результате получается алгебраическое уравнение относительно $\operatorname{tg} kx$, для решения которого следует произвести подстановку $\operatorname{tg} kx = z$.

Пример 5. Решить уравнение

$$3\sin^2 x\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) + 3\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x - \sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x = 0.$$

□ Используя формулы приведения, получаем

$$3\sin^3 x + 3\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$$

Это однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$, причем $a \neq 0$, т. е. значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются решениями заданного уравнения. Разделив члены уравнения на $\cos^3 x$, имеем:

$$3\operatorname{tg}^3 x + 3\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0;\ (3\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg} x + 1) = 0;$$

$$3\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0,\ \operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1),\ n \in Z;$$

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0,\ \operatorname{tg} x = -1,\ x = \frac{\pi}{4}(4k-1),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Итак, получаем ответ: $x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1);\ x = \frac{\pi}{4}(4k-1),\ n,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ ■

При решении уравнений (8.13)–(8.15) в случае $a = 0$ деление на $\cos kx$ недопустимо, так как оно приводит к потере корней — тех значений x, при которых $\cos kx = 0$.

При $a = 0$ уравнение (8.13) становится простейшим, а для решения уравнений (8.14) и (8.15) следует применить метод разложения на множители.

4°. Другие приемы решения тригонометрических уравнений рассмотрим при решении примеров.

Пример 6. Решить уравнение $3\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos x = 4.$

□ При решении таких уравнений удобно использовать формулы понижения степени (3.16) и (3.17), которые имеют вид $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$.

Воспользуемся второй из них: $\frac{3(1+\cos(x - \frac{\pi}{2}))}{2} - 2\cos x = 4$ и после очевидных преобразований получим уравнение

$$3 \sin x - 4 \cos x = 5. \qquad (*)$$

Оно легко приводится к алгебраическому уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул (3.28) и (3.29), т. е. равенств $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, верных для всех $x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Отметим, что замена $\sin x$ и $\cos x$ выражениями, содержащими $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, может привести к потере корней вида $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Удовлетворяют ли эти значения x исходному уравнению, выясняется проверкой.

Выполнив в уравнении (*) подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, которую называют «универсальной», придем к уравнению $z^2 - 6z + 9 = 0$. Оно имеет решение $z = 3$. Возвращаясь к переменной x, получим $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3$, откуда $x = 2\operatorname{arctg}3 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Остается проверить, не удовлетворяют ли уравнению (*) числа $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. Имеем $3\sin(\pi + 2\pi n) - 4\cos(\pi + 2\pi n) \neq 5$; значит, числа $x = \pi + 2\pi n$ не являются решениями уравнения (*).

Итак, получаем ответ: $x = 2\operatorname{arctg}3 + 2\pi n$, $n \in Z$. ■

Пример 7. Решить уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = a$ (a — заданное число).

□ Преобразуем левую часть уравнения по формуле (2.13) как сумму кубов:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 =$$

$$= \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1}(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x) =$$

$$= (\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x) - 3\sin^2 x\cos^2 x =$$

$$= \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}_{1} - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x.$$

Согласно формуле (3.13), имеем $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$. Тогда получим равносильное исходному уравнение $1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = a$, откуда $\sin^2 2x = \dfrac{4(1-a)}{3}$. Если $0 \le \dfrac{4(1-a)}{3} \le 1$, т. е. $\dfrac{1}{4} \le a \le 1$, то уравнение $\sin 2x = \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{3(1-a)}$ имеет решение

$$x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3(1-a)}\right) + \frac{\pi n}{2}, n \in Z. \blacksquare$$

В частности, при $a = 1$ решением уравнения $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$ являются числа $x = \dfrac{\pi n}{2}$ ($n \in Z$). Однако это уравнение, как и многие другие, можно решить быстрее, используя неравенства $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$ (см. примеры 8 и 9).

Пример 8. Решить уравнение $\sin^{2k+2} x + \cos^{2k+2} x = 1$ ($k \in N$).

□ Легко догадаться, что числа $x = \dfrac{\pi n}{2}$ ($n \in Z$) являются решениями уравнения. Однако еще следует доказать, что других решений нет. Предположим, что существуют решения $x = \alpha \neq \dfrac{\pi n}{2}$ ($n \in Z$). Так как для указанных значений α выполняются неравенства $|\sin\alpha| < 1$ и $|\cos\alpha| < 1$, то $\sin^2\alpha < 1$ и $\cos^2\alpha < 1$. Поэтому для любого целого положительного k справедливы неравенства $\sin^{2k+2}\alpha < \sin^2\alpha$

и $\cos^{2k+2}\alpha < \cos^2\alpha$. Складывая их, получаем $\sin^{2k+2}\alpha + \cos^{2k+2}\alpha < \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$. Но $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; следовательно, $\sin^{2k+2}x + \cos^{2k+2}x < 1$ для всех значений $x = \alpha \neq \frac{\pi n}{2}$ $(n \in Z)$.

Значит, заданное уравнение (в частности, уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$) не имеет решений, отличных от $x = \frac{\pi n}{2}$ $(n \in Z)$. ■

Пример 9. Решить уравнение $\sin(\pi\cos 2x) = 1$.

□ По формуле (8.6) находим $\pi\cos 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, т. е. $\cos 2x = \frac{1}{2} + 2k$, $k \in Z$. Но $|\cos 2x| \leq 1$, поэтому $k = 0$. Имеем $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in Z)$, откуда получаем ответ: $x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1)$, $n \in Z$. ■

Группа А

Решить уравнения (8.001–8.175):

8.001. $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$.

8.002. $7 + 4\sin x\cos x + 1{,}5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$.

8.003. $\frac{-4\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} + \sin^2 2x + 1 = 0$.

8.004. $\frac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} + 1 = 2\operatorname{tg}^2 x$.

8.005. $\sin z\sin(60° - z)\sin(60° + z) = 0{,}125$.

8.006. $\cos^{-2} 2t - \sin^{-2} 2t = \frac{8}{3}$.

8.007. $\operatorname{tg} 3t - \operatorname{tg} t - 4\sin t = 0$.

8.008. $\cos^{-1} 3t - 6\cos 3t = 4\sin 3t$.

8.009. $\operatorname{ctg} t - \sin t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$.

8.010. $8\cos z\cos(60° - z)\cos(60° + z) + 1 = 0$.

8.011. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\operatorname{ctg}3x+\sin(\pi+2x)-\sqrt{2}\cos 5x=0.$

8.012. $\sin x\cos 2x+\cos x\cos 4x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right).$

8.013. $\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}.$

8.014. $(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x.$

8.015. $\sin^2 2z+\sin^2 3z+\sin^2 4z+\sin^2 5z=2.$

8.016. $\operatorname{ctg}^4 2z+\sin^{-4} 2z=25.$

8.017. $\operatorname{tg}2x\cos 3x+\sin 3x+\sqrt{2}\sin 5x=0.$

8.018. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\operatorname{tg}^2 x=(\cos 2x-1)\cos^{-2} x.$

8.019. $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}-\sin x\sin 3x-\sin 2x\sin 3x=0.$

8.020. $1-\sin 3x=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2.$

8.021. $2\operatorname{ctg}^2 x\cos^2 x+4\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x-2=0.$

8.022. $2\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0.$

8.023. $\sin 7x+\sin 9x=2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right).$

8.024. $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x=0.$

8.025. $\sin(15^\circ+x)+\sin(45^\circ-x)=1.$

8.026. $\frac{1}{\cos x}+\operatorname{ctg}3x=\operatorname{ctg}\frac{3x}{2}.$

8.027. $\sin x\sin 3x+\sin 4x\sin 8x=0.$

8.028. $2\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg}x-3=0.$

8.029. $\cos x\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}+4x\right)\cos\left(\frac{7\pi}{4}-5x\right).$

8.030. $2+\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}x\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0.$

8.031. $\sin 2x + \sin(\pi - 8x) = \sqrt{2}\cos 3x.$

8.032. $0{,}5(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0.$

8.033. $2(\cos 4x - \sin x \cos 3x) = \sin 4x + \sin 2x.$

8.034. $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = 0{,}25 \sin 12x.$

8.035. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0.$

8.036. $\sin 2x \sin 6x - \cos 2x \cos 6x = \sqrt{2}\sin 3x \cos 8x.$

8.037. $\sin 3x \cos 3x = \sin 2x.$

8.038. $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0.$

8.039. $3\sin 2x + 2\cos 2x = 3.$

8.040. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \operatorname{ctg}^2 x + \frac{1 + \cos 2x}{\sin^2 x} = 0.$

8.041. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0.$

8.042. $2\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2} - 1\right) = \cos t.$

8.043. $\sin 3z - \cos 3z = \sqrt{\frac{3}{2}}.$

8.044. $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0.$

8.045. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$

8.046. $\sin\frac{z}{2}\cos\frac{3z}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2z = \sin\frac{3z}{2}\cos\frac{z}{2}.$

8.047. $\sin^3 z \cos z - \sin z \cos^3 z = \frac{\sqrt{2}}{8}.$

8.048. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right).$

8.049. $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$

8.050. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x.$

8.051. $1 + \sin 2x = (\cos 3x + \sin 3x)^2.$

8.052. $\sin 3x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

8.053. $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0.$

8.054. $\sin x + \sin 7x - \cos 5x + \cos(3x - 2\pi) = 0.$

8.055. $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = \frac{25}{16}.$

8.056. $1 + \cos t + \cos 2t + \cos 3t = 0.$

8.057. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x).$

8.058. $1 + \cos 7x = \left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right)^2.$

8.059. $2\operatorname{tg}^4 3x - 3\operatorname{tg}^2 3x + 1 = 0.$

8.060. $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x = \cos\left(7x + \frac{3\pi}{2}\right).$

8.061. $4\operatorname{tg}^2 3x - \cos^{-2} 3x = 2.$

8.062. $\cos^3 x + \cos^2 x - 4\cos^2\frac{x}{2} = 0.$

8.063. $\sin 9x = 2\sin 3x.$

8.064. $(\sin^{-1} z + \cos^{-1} z)(\sin z + \cos z) + 2 = 0.$

8.065. $\sin 2z + \cos 2z = \sqrt{2}\sin 3z.$

8.066. $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5.$

8.067. $\sin 3x + \sin 5x = 2(\cos^2 2x - \sin^2 3x).$

8.068. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \operatorname{ctg}^2 x + \sin^{-2} x(1 + \cos 2x) = 0.$

8.069. $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0.$

8.070. $3\sin 5z - 2\cos 5z = 3.$

8.071. $4\sin 3z + \frac{1}{3}\cos 3z = 3.$

8.072. $(\cos 6x - 1)\operatorname{ctg} 3x = \sin 3x.$

8.073. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = 3.$

8.074. $1-\cos(\pi+x)-\sin\frac{3\pi+x}{2}=0.$

8.075. $9^{\cos x}=9^{\sin x}\cdot 3^{\frac{2}{\cos x}}.$

8.076. $\sin x-\sin 2x+\sin 5x+\sin 8x=0.$

8.077. $2\sin z-\cos z=0{,}4.$

8.078. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x.$

8.079. $(1+\sin x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\cos x}-\cos x.$

8.080. $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\cos 3x.$

8.081. $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2.$

8.082. $\cos 7x+\sin 8x=\cos 3x-\sin 2x.$

8.083. $\sin^2 x-2\sin x\cos x=3\cos^2 x.$

8.084. $\cos 5x+\cos 7x=\cos(\pi+6x).$

8.085. $4\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin(\pi+x)\cos x+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(\pi+x)=1.$

8.086. $\cos 6x=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right).$

8.087. $2\sin x\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-3\sin(\pi-x)\cos x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=0.$

8.088. $(\sin 4t+\cos 4t)^2=16\sin 2t\cos^3 2t-8\sin 2t\cos 2t.$

8.089. $\cos(2t-18^\circ)\operatorname{tg}50^\circ+\sin(2t-18^\circ)=\frac{1}{2\cos 130^\circ}.$

8.090. $\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{3t}{2}+\cos^{-1}\frac{t}{2}\sin^{-1}\frac{3t}{2}=1.$

8.091. $\frac{1}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}t}-\frac{1}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}t}=\sin 2t.$

8.092. $\cos(20^\circ+x)+\cos(100^\circ-x)=0{,}5.$

8.093. $\cos t\sin\left(\frac{\pi}{2}+6t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin 6t=\cos 6t+\cos 4t.$

8.094. $\dfrac{1-\cos x}{\sin\dfrac{x}{2}}=2.$

8.095. $\sin\dfrac{7x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{5x}{2}+\sin 2x\cos 7x=0.$

8.096. $\sin 3x+\sin 5x=\sin 4x.$

8.097. $\sin z-\sin^2 z=\cos^2 z-\cos z.$

8.098. $\sin z+\sin 2z+\sin 3z=\cos z+\cos 2z+\cos 3z.$

8.099. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+2\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x+1}+\dfrac{1}{\operatorname{tg} x-1}\right)=4.$

8.100. $1-\cos 6x=\operatorname{tg} 3x.$

8.101. $\sqrt{2}\cos x+\cos 2x+\cos 4x=0.$

8.102. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-0{,}5.$

8.103. $2\cos 2x+2\operatorname{tg}^2 x=5.$

8.104. $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x.$

8.105. $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cos 2x.$

8.106. $\cos(3x-30^\circ)-\sin(3x-30^\circ)\operatorname{tg}30^\circ=\dfrac{1}{2\cos 210^\circ}.$

8.107. $4\sin x+\cos x=4.$

8.108. $2\sin^2 z+\operatorname{tg}^2 z=2.$

8.109. $\cos 2x+\cos 6x+2\sin^2 x=1.$

8.110. $\cos 3x\cos 6x=\cos 4x\cos 7x.$

8.111. $\sin 3x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x+\dfrac{1}{2}\cos 5x=0.$

8.112. $\operatorname{ctg}^3 x+\sin^{-2} x-3\operatorname{ctg} x-4=0.$

8.113. $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=1{,}5.$

8.114. $1+\sin x-\cos 5x-\sin 7x=2\cos^2\dfrac{3x}{2}.$

8.115. $\dfrac{\sin z}{1+\cos z}=2-\operatorname{ctg} z.$

8.116. $\sin(15^\circ+x)+\cos(45^\circ+x)+0{,}5=0.$

8.117. $1+\sin 2x=\sin x+\cos x$.

8.118. $3(1-\sin t)+\sin^4 t=1+\cos^4 t$.

8.119. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-3\operatorname{tg}^2 x=(\cos 2x-1)\cos^{-2} x$.

8.120. $\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{3x}{2}-\sin^2 2x-\sin^2 4x=0$.

8.121. $\dfrac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$.

8.122. $\cos^2 x+\cos^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0$.

8.123. $\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0$.

8.124. $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2\cos^{-1}4x$.

8.125. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-\sin(\pi-5x)=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 3x)$.

8.126. $\dfrac{1}{1+\cos^2 z}+\dfrac{1}{1+\sin^2 z}=\dfrac{16}{11}$.

8.127. $\dfrac{\cos x}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}-\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}x}=2\sqrt{3}$.

8.128. $\cos 4x\cos(\pi+2x)-\sin 2x\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x$.

8.129. $\sin x-\sin 3x-\sin 5x+\sin 7x=0$.

8.130. $\sin 3x-\sin 7x=\sqrt{3}\sin 2x$.

8.131. $\sqrt{3}-\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

8.132. $\sin^2 x\cos^{-4} x-4\operatorname{tg}^2 x+3\cos^{-2} x-12=0$.

8.133. $\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x$.

8.134. $(\sin 2t-\sin^{-1}2t)^2+(\cos^{-1}2t-\cos 2t)^2=1$.

8.135. $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x+0{,}25$.

8.136. $\sin 2z - 4\cos 2z = 4.$

8.137. $3 + 2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$

8.138. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + t\right) = \sin t + \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - t\right).$

8.139. $\sin^3\frac{x}{3} - \sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} - 3\sin\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3} + 3\cos^3\frac{x}{3} = 0.$

8.140. $\operatorname{tg}(x - 15°)\operatorname{ctg}(x + 15°) = \frac{1}{3}.$

8.141. $\cos(x+1)\sin 2(x+1) = \cos 3(x+1)\sin 4(x+1).$

8.142. $\cos(4x+2) + 3\sin(2x+1) = 2.$

8.143. $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1.$

8.144. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$

8.145. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x.$

8.146. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 50° + \operatorname{tg} 70° = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 50° \operatorname{tg} 70°.$

8.147. $\cos x - \sin x = 4\cos x \sin^2 x.$

8.148. $\operatorname{tg} 2x \sin 2x - 3\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2x \cos 2x = 0.$

8.149. $\cos x - \cos 3x = \sin 2x.$

8.150. $\sqrt{2}(1 + \cos x) = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$

8.151. $\sin\frac{3x - 7\pi}{2} + \cos\frac{\pi - 3x}{2} = \cos^{-1}\frac{3x}{2}.$

8.152. $\sin^2 3x = 3\cos^2 3x.$

8.153. $\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x.$

8.154. $\sin 6x + \sin 2x = 0{,}5\operatorname{tg} 2x.$

8.155. $\dfrac{2\cos(\pi + x) - 5\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x)} = \dfrac{3}{2}.$

8.156. $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 = 2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right).$

8.157. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} 2x + 1 = 4\cos^2 x + \dfrac{\sin 3x}{\sin x} - 2\cos 2x.$

8.158. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} x = 1.$

8.159. $2\cos^2 \dfrac{x}{2} - 1 = \sin 3x.$

8.160. $\sin^2 2x + \sin^2 x = \dfrac{9}{16}.$

8.161. $3\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x.$

8.162. $2(1 - \cos 2x) = \sqrt{3} \operatorname{tg} x.$

8.163. $a\cos^2 \dfrac{x}{2} - (a + 2b)\sin^2 \dfrac{x}{2} = a\cos x - b\sin x;\ \ b \neq 0.$

8.164. $\sin 5x = \cos 4x.$

8.165. $2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x = 3.$

8.166. $25\sin^2 x + 100\cos x = 89.$

8.167. $\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0{,}25.$

8.168. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = 1 + \cos 4x.$

8.169. $\sin x + \sin 3x = 4\cos^3 x.$

8.170. $\cos 2x + 3\sin x = 2.$

8.171. $\cos 2x = 1 - \sin 2x.$

8.172. $\operatorname{tg}(70^\circ + x) + \operatorname{tg}(20^\circ - x) = 2.$

8.173. $\sin x + \sin \dfrac{1}{\pi} = \sin\left(x + \dfrac{1}{\pi}\right).$

8.174. $\operatorname{tg}^2 3x - 2\sin^2 3x = 0.$

8.175. $6\operatorname{ctg}^2 x - 2\cos^2 x = 3.$

Группа Б

Решить уравнения (8.176–8.385):

8.176. $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}.$

8.177. $\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} + \sin^2 \dfrac{x}{2} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \cos^2 \dfrac{x}{2} \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2} + \sin x = 4.$

8.178. $\operatorname{tg}(120^\circ + 3x) - \operatorname{tg}(140^\circ - x) = 2\sin(80^\circ + 2x)$.

8.179. $\sin^2 x + 2\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin x \sin^2 \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x = 0$.

8.180. $\frac{\cos^2 z(1 + \operatorname{ctg} z) - 3}{\sin z - \cos z} = 3\cos z$.

8.181. $\frac{1}{2\operatorname{ctg}^2 t + 1} + \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 t + 1} = \frac{15\cos 4t}{8 + \sin^2 2t}$.

8.182. $8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$.

8.183. $\frac{6\cos^3 2t + 2\sin^3 2t}{3\cos 2t - \sin 2t} = \cos 4t$.

8.184. $\cos z \cos 2z \cos 4z \cos 8z = \frac{1}{16}$.

8.185. $\frac{\sin^3 \frac{x}{2} - \cos^3 \frac{x}{2}}{2 + \sin x} = \frac{1}{3}\cos x$.

8.186. $\operatorname{tg}^2 t - \frac{2\sin 2t + \sin 4t}{2\sin 2t - \sin 4t} = 2\operatorname{ctg} 2t$.

8.187. $\sin^2 x \operatorname{tg} x + \cos^2 x \operatorname{ctg} x + 2\sin x \cos x = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

8.188. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{ctg}(x + 25^\circ) = \operatorname{ctg} 15^\circ \operatorname{ctg}(x + 25^\circ) \operatorname{ctg} x$.

8.189. $\frac{40\left(\sin^3 \frac{t}{2} - \cos^3 \frac{t}{2}\right)}{16\sin \frac{t}{2} - 25\cos \frac{t}{2}} = \sin t$.

8.190. $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right)$.

8.191. $\sin^{-1} t - \sin^{-1} 2t = \sin^{-1} 4t$.

8.192. $\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} + 2\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} - 3 = 0$.

8.193. $\operatorname{ctg}^2 2x + \frac{3(\cos 3x - \cos x)}{\sin 3x - \sin x} + 2 = 0$.

8.194. $\operatorname{tg}^4 3t = \sin^2 6t$.

8.195. $\dfrac{1-\sin^6 z-\cos^6 z}{1-\sin^4 z-\cos^4 z}=2\cos^2 3z.$

8.196. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\dfrac{\cos x-\sin x}{0{,}5\sin x}.$

8.197. $\dfrac{\operatorname{ctg} 2z}{\operatorname{ctg} z}+\dfrac{\operatorname{ctg} z}{\operatorname{ctg} 2z}+2=0.$

8.198. $\cos^{-2} 2x\operatorname{tg} 2x+\sin^{-2} 2x\operatorname{ctg} 2x=\dfrac{8\cos^2 4x}{\sin^3 4x}+10\sin^{-1} 4x+4\sqrt{3}.$

8.199. $\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{2\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\right).$

8.200. $\dfrac{3(\cos 2x+\operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0.$

8.201. $\sin 2x+2\operatorname{ctg} x=3.$

8.202. $2\cos 13x+3\cos 3x+3\cos 5x-8\cos x\cos^3 4x=0.$

8.203. $(\sin x+\cos x)^4+(\sin x-\cos x)^4=3-\sin 4x.$

8.204. $\operatorname{tg}^3 t+6\sin^{-1} 2t=8\sin^{-3} 2t-3\operatorname{ctg} t.$

8.205. $2\sin x\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+3\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos x-5\cos^2 x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=0.$

8.206. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x=\dfrac{82}{9}(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x+1)\cos 2x.$

8.207. $2\cos^6 2t-\cos^4 2t+1{,}5\sin^2 4t-3\sin^2 2t=0.$

8.208. $\sin 6x+2=2\cos 4x.$

8.209. $\sin^2 t\operatorname{tg} t+\cos^2 t\operatorname{ctg} t-2\sin t\cos t=1+\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t.$

8.210. $\operatorname{tg}^3 2x+\operatorname{ctg}^3 2x+6\sin^{-1} 2x=8\sin^{-3} 4x.$

8.211. $\cos x\cos 2x\sin 3x=0{,}25\sin 2x.$

8.212. $\cos 9x-2\cos 6x=2.$

8.213. $2\sin^5 2t-\sin^3 2t-6\sin^2 2t+3=0.$

8.214. $\sin^6 2t+\cos^6 2t=1{,}5(\sin^4 2t+\cos^4 2t)+0{,}5(\sin t+\cos t).$

8.215. $(\cos^{-2} 2x+\operatorname{tg}^2 2x)(\sin^{-2} 2x+\operatorname{ctg}^2 2x)=4\sin^{-2} 4x+5.$

8.216. $\sin 3z + \sin^3 z = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2z.$

8.217. $(\cos 2x + (\cos x + \sin x)^2)(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0.$

8.218. $2\sin 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \cos 3x \cos^{-1} 5x \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0$

8.219. $3\operatorname{ctg} t - 3\operatorname{tg} t + 4\sin 2t = 0.$

8.220. $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x + \cos^{-2} 2x} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 2x + \sin^{-2} 2x} = \frac{2}{3}.$

8.221. $\operatorname{tg} 3t + \operatorname{tg} t = 2\sin 4t.$

8.222. $\sin(3\pi - x) + \operatorname{tg}(\pi + x) = \frac{\cos^{-1} x - \cos x}{2\sin x}.$

8.223. $0{,}5\sin 4x \sin x + \sin 2x \sin x = 2\cos^2 x.$

8.224. $\frac{2(\cos^4 t + \sin^4 t)}{\cos^4 t - \sin^4 t} = \cos^{-1} 2t + \cos 4t + 1.$

8.225. $\operatorname{tg} t = \frac{\sin^2 t + \sin 2t - 1}{\cos^2 t - \sin 2t + 1}.$

8.226. $\frac{\sin 2t + 2\cos^2 t - 1}{\cos t - \cos 3t + \sin 3t - \sin t} = \cos t.$

8.227. $\sin t^2 - \sin t = 0.$

8.228. $\sin^3 z \sin 3z + \cos^3 z \cos 3z = \cos^3 4z.$

8.229. $2\sin^4 t(\sin 2t - 3) - 2\sin^2 t(\sin 2t - 3) - 1 = 0.$

8.230. $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{8}\cos 15x.$

8.231. $2\sin^4 x + 1{,}25\sin^2 2x - \cos^4 x = \cos 2x.$

8.232. $\sin 2t \cos 2t(\sin^4 2t + \cos^4 2t - 1) = 0{,}5\sin^2 4t.$

8.233. $\sin 2x - 2\cos^2 x + 4(\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x - 1) = 0.$

8.234. $0{,}5(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg} 2x.$

8.235. $\operatorname{ctg}^4 x = \cos^3 2x + 1.$

8.236. $\dfrac{1}{\sin^3\dfrac{x}{2}\cos^3\dfrac{x}{2}}-6\cos^{-1}x=\operatorname{tg}^3\dfrac{x}{2}+\operatorname{ctg}^3\dfrac{x}{2}.$

8.237. $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-\sin 4x=0.$

8.238. $\sin x+\cos x+\sin 2x+\sqrt{2}\sin 5x=\dfrac{2\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}.$

8.239. $3\sin^2\dfrac{x}{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{x}{2}\right)+3\sin^2\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=$

$$=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}.$$

8.240. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)\dfrac{1+\sin x}{\sin x}=\sqrt{2}\cos x.$

8.241. $\operatorname{tg}^3 z+\operatorname{ctg}^3 z-8\sin^{-3}2z=12.$

8.242. $\dfrac{1}{\operatorname{tg}5x+\operatorname{tg}2x}-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}5x+\operatorname{ctg}2x}=\operatorname{tg}3x.$

8.243. $\operatorname{ctg}\dfrac{z}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}+4\cos^{-1}2z=\dfrac{4\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}}{\operatorname{tg}^2\dfrac{z}{2}-1}.$

8.244. $\operatorname{ctg}^4 x=\cos^2 2x-1.$

8.245. $\dfrac{4\sin^2\dfrac{t}{2}-1}{\cos t}=\operatorname{tg}t(1-2\cos t).$

8.246. $3\sin^2 z\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+z\right)-\dfrac{1}{2}\sin^2 2z-5\cos^4 z+2\cos 2z=0.$

8.247. $\dfrac{\cos^2 3t}{\operatorname{tg}t}+\dfrac{\cos^2 t}{\operatorname{tg}3t}=0.$

8.248. $\dfrac{\sin 2t}{1+\cos 2t}\cdot\dfrac{\sin t}{1+\cos t}=\dfrac{1}{\sin t}-1.$

8.249. $\dfrac{\cos^4 2x+\sin^4 2x}{\cos^4 2x-\sin^4 2x}-0{,}5\cos 4x=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin 4x}.$

8.250. $\cos^{-4}z=\dfrac{160}{9}-2\sin^{-2}z(\operatorname{ctg}2z\operatorname{ctg}z+1).$

8.251. $\cos^{-3} t \sin^{-3} t - \operatorname{tg}^3 t - \operatorname{ctg}^3 t = 2\sqrt{3}\cos^{-1} 2t.$

8.252. $(\sin x - \cos x)^2 + \operatorname{tg} x = 2\sin^2 x.$

8.253. $\sin 3t - \sin t = \dfrac{8\cos t \operatorname{ctg} 2t}{4 - \sin^{-2} t}.$

8.254. $\sin^2 2x \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2x\right) + 3\sin 2x \sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2x\right) + 2\cos^3 2x = 0.$

8.255. $\operatorname{tg}(x+1)\operatorname{ctg}(2x+3) = 1.$

8.256. $\dfrac{4\sin^4 z}{(1+\cos 2z)^2} - \dfrac{2}{\cos^2 z} - 1 = 0.$

8.257. $\operatorname{tg}^2 \dfrac{z}{2} + \operatorname{ctg}^2 \dfrac{z}{2} - 2 = 4\operatorname{tg} z.$

8.258. $\cos^3 z \cos 3z + \sin^3 z \sin 3z = \dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

8.259. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\sin^2 x - 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}{\cos^2 x + 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)}.$

8.260. $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3z + \operatorname{tg} 4z} + \operatorname{ctg}^2 7z = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} 3z + \operatorname{ctg} 4z}.$

8.261. $(2\cos 2t + 5)\cos^4 t - (2\cos 2t + 5)\sin^4 t = 3.$

8.262. $\operatorname{tg} z \operatorname{tg}(z + 60°)\operatorname{tg}(z + 120°) = \sqrt{3}.$

8.263. $\cos 3x + \cos 2{,}5x = 2.$

8.264. $1 - 2\cos^2 t(\cos 2t - \operatorname{tg} t \sin 2t) = \sin^4 t - \cos^4 t.$

8.265. $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = \cos 2x.$

8.266. $\cos^3 x + 0{,}5\sin 2x - \cos x \sin^3 x + 4\sin x + 4 = 0.$

8.267. $\dfrac{2(\cos^3 x + 2\sin^3 x)}{2\sin x + 3\cos x} = \sin 2x.$

8.268. $\operatorname{tg}\dfrac{3x}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 2\sin x.$

8.269. $\dfrac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} + \dfrac{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} = 1.$

8.270. $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x+0{,}375=0.$

8.271. $\sin 2z+5(\sin z+\cos z)+1=0.$

8.272. $\sin^3 2t+\cos^3 2t+0{,}5\sin 4t=1.$

8.273. $\operatorname{tg} z\operatorname{tg} 2z=\operatorname{tg} z+\operatorname{tg} 2z.$

8.274. $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{2\cos x-\sin x}=\cos 2x.$

8.275. $\dfrac{\operatorname{ctg} 4t}{\sin^2 t}+\dfrac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 4t}=0.$

8.276. $\operatorname{tg}^4 x=36\cos^2 2x.$

8.277. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x-2\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{tg} 4x+8=0.$

8.278. $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x=3\sin 2x.$

8.279. $2\cos z\sin^3\left(\dfrac{3\pi}{2}-z\right)-5\sin^2 z\cos^2 z+\sin z\cos^3\left(\dfrac{3\pi}{2}+z\right)=\cos 2z.$

8.280. $\sin 2x\sin 6x\cos 4x+0{,}25\cos 12x=0.$

8.281. $2\sin 2x+3\operatorname{tg} x=5.$

8.282. $5\sin^4 2z-4\sin^2 2z\cos^2 2z-\cos^4 2z+4\cos 4z=0.$

8.283. $1+\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 5x-\sqrt{2}\operatorname{tg} 2x\cos 3x\cos^{-1} 5x=0.$

8.284. $\cos^6 x+\sin^6 x-\cos^2 2x=\dfrac{1}{16}.$

8.285. $\dfrac{1}{\sin^2 2x}+\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x-4=0.$

8.286. $\operatorname{tg} 5z-\operatorname{tg} 3z-2\operatorname{tg} 2z=0.$

8.287. $\cos 2x+\cos 0{,}75x-2=0.$

8.288. $(\operatorname{ctg} z-1)(1+\sin 2z)=1+\operatorname{ctg} z.$

8.289. $\operatorname{tg} x\dfrac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}=\sin 6x.$

8.290. $\sin^4 3t+\sin^4\left(\dfrac{\pi}{4}+3t\right)=0{,}25.$

8.291. $\cos 10x+2\cos^2 4x+6\cos 3x\cos x=\cos x+8\cos x\cos^3 3x.$

8.292. $1+\sin\dfrac{t}{2}\sin t-\cos\dfrac{t}{2}\sin^2 t=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{t}{2}\right).$

8.293. $\dfrac{4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}+x\right)}{\cos^2 x}+2\operatorname{tg}x=0.$

8.294. $\dfrac{4\cos^2 t-1}{\sin t}=\operatorname{ctg}t(1+2\cos 2t).$

8.295. $(\sin x+\cos x)^4=2(1+\sin^2 x)-(\sin x-\cos x)^4.$

8.296. $\cos^{-4} z=64\cos^2 2z.$

8.297. $4\sin 5x\cos 5x(\cos^4 x-\sin^4 x)=\sin 4x.$

8.298. $\dfrac{\operatorname{tg}4z}{\operatorname{tg}2z}+\dfrac{\operatorname{tg}2z}{\operatorname{tg}4z}+\dfrac{5}{2}=0.$

8.299. $\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x}=6\cos 2x+4\sin 2x.$

8.300. $\operatorname{tg}5x-2\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg}5x.$

8.301. $\cos z+\sin z=\sqrt{1-2\cos^2 z}.$

8.302. $\sqrt{3}(1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x)=\operatorname{tg}2x\cos^{-1} 3x.$

8.303. $\left(\cos^{-6} z-\operatorname{tg}^6 z-\dfrac{7}{3}\right)(\sin z+\cos z+2)=0.$

8.304. $\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}3x+\operatorname{ctg}5x=0.$

8.305. $\cos^{-1} 2t+\sin^{-1} 2t+\cos^{-1} 2t\sin^{-1} 2t-5=0.$

8.306. $\cos(22^\circ-t)\cos(82^\circ-t)+\cos(112^\circ-t)\cos(172^\circ-t)=0{,}5(\sin t+\cos t).$

8.307. $\sin 4x(3\sin 4x-2\cos 4x)=\sin^2 2x-16\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 2x+\cos^2 2x.$

8.308. $\cos 3z-\cos^3 z+0{,}75\sin 2z=0.$

8.309. $\operatorname{tg}(t^2-t)\operatorname{ctg}2=1.$

8.310. $\sin^3 x(1-\operatorname{ctg}x)+\cos^3 x(1-\operatorname{tg}x)=1{,}5\cos 2x.$

8.311. $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-2t\right)}{1+\cos 2t}=\cos^{-2} 2t-1.$

8.312. $4\cos x\cos 2x\cos 3x=\cos 6x.$

8.313. $1-\cos x=\sqrt{1-\sqrt{4\cos^2 x-7\cos^4 x}}.$

8.314. $\frac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x} + \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{10}{3}.$

8.315. $4(\sin t \cos^5 t + \cos t \sin^5 t) + \sin^3 2t = 1.$

8.316. $\sin^4 x - \sin^2 x + 4(\sin x + 1) = 0.$

8.317. $\frac{\sin^2 t - \operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t - \operatorname{ctg}^2 t} + 2\operatorname{tg}^3 t + 1 = 0.$

8.318. $\frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 5t} - \frac{\operatorname{tg} 5t}{\cos^2 t} = 0.$

8.319. $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} + \sin x\left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = 4.$

8.320. $\sin 2z - \sin 6z + 2 = 0.$

8.321. $\sin^2(t + 45°) - \sin^2(t - 30°) - \sin 15° \cos(2t + 15°) = 0{,}5\sin 6t.$

8.322. $3\operatorname{tg} 3x - 4\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x.$

8.323. $\frac{5(\sin x - \operatorname{tg} x)}{\sin x + \operatorname{tg} x} + 4(1 - \cos x) = 0.$

8.324. $4\cos x = \sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 1.$

8.325. $1 + \frac{2(\cos 2z \operatorname{tg} z - \sin 2z)}{\cos^{-2} z} = \cos 2z.$

8.326. $(\cos x - \sin x)^2 + \cos^4 x - \sin^4 x = 0{,}5\sin 4x.$

8.327. $\operatorname{ctg} x(1 - 0{,}5\cos 2x) = 1.$

8.328. $\cos^2(x + 40°) + \cos^2(x - 40°) - \sin 10° \cos 2x = \sin 2x.$

8.329. $2\cos^2 \frac{x}{2}(1 - \sin x) + \cos^2 x = 0.$

8.330. $\operatorname{tg} 6x \cos 2x - \sin 2x - 2\sin 4x = 0.$

8.331. $\cos 8x + 3\cos 4x + 3\cos 2x = 8\cos x \cos^3 3x - 0{,}5.$

8.332. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x + 1) = 1.$

8.333. $\frac{8\sin^{-2} 2x + 1}{\cos^{-2} x + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x + \frac{4}{3}.$

8.334. $2 + \sin t = 3\operatorname{tg}\frac{t}{2}.$

8.335. $\operatorname{tg}(35^\circ + x)\operatorname{ctg}(10^\circ - x) = \frac{2}{3}$.

8.336. $2\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x + 2\operatorname{tg}x\operatorname{tg}3x + \operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x = 0$.

8.337. $\sin^4 2x + \sin^3 2x\cos 2x - 8\sin 2x\cos^3 2x - 8\cos^4 2x = 0$.

8.338. $\cos t(1 - \operatorname{tg}t)(\sin t + \cos t) = \sin t$.

8.339. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}} - \frac{\cos x}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{1 - \cos x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{1 - \cos x}}$.

8.340. $1 + \sin z + \cos z + \sin 2z + \cos 2z = 0$.

8.341. $\operatorname{ctg}(x - 25^\circ) + \operatorname{tg}(3x + 15^\circ) = 2\sin(2x - 50^\circ)$.

8.342. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{tg}x + 3\operatorname{ctg}x + 4 = 0$.

8.343. $\operatorname{tg}2t = \operatorname{ctg}t - 4\cos t\cos 3t$.

8.344. $\cos 2x = \cos^2 \frac{3x}{2}$.

8.345. $(\operatorname{tg}t - \operatorname{ctg}t + 2\operatorname{tg}2t)(1 + \cos 3t) = 4\sin 3t$.

8.346. $\sin x(\cos x - 2) + \operatorname{tg}x = 2 - \cos x - \cos^{-1} x$.

8.347. $(1 + \cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2} + \sin x = 2\cos x$.

8.348. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$.

8.349. $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x - \operatorname{ctg}^2 x = \frac{106}{9}$.

8.350. $\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = 0$.

8.351. $3\sqrt{3}\operatorname{tg}x\sin x - \operatorname{ctg}x\cos x + 9\sin x - 3\sqrt{3}\cos x = 0$.

8.352. $\cos 2x - \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} - 1$.

8.353. $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$.

8.354. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)}{1 + \cos x} = 2$.

8.355. $\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}2x = \sin x$.

8.356. $2\sin^2 3x + \sin^2 6x = (\sin 2x + \sin 4x)\cos^{-1} x \sin^{-1} 3x.$

8.357. $4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x.$

8.358. $5(1-\sin 2x) - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0.$

8.359. $37\operatorname{tg} 3x = 11\operatorname{tg} x.$

8.360. $\sqrt{2}(\cos^4 2x - \sin^4 2x) = \cos 2x + \sin 2x.$

8.361. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \sin^{-1} x - \cos^{-1} x.$

8.362. $\sin^6 x + \cos^6 = \frac{7}{16}.$

8.363. $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2\cos x(\cos x - 1).$

8.364. $\cos 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x).$

8.365. $2(1+\sin 2x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$

8.366. $\frac{1+\sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x}{\operatorname{tg} 2x} = 0.$

8.367. $\frac{\operatorname{tg} 2t}{\cos^2 t} - \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 2t} = 0.$

8.368. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0.$

8.369. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x.$

8.370. $\sqrt{\cos^2 x + 0{,}5} + \sqrt{\sin^2 x + 0{,}5} = 2.$

8.371. $\sin 3x = a\sin x.$

8.372. $\cos 3x = m\cos x.$

8.373. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\alpha + 1 = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\alpha.$

8.374. $12\sin x + 4\sqrt{3}\cos(\pi + x) = m\sqrt{3}.$

8.375. $\sin(x+2{,}5) + \sin(x+0{,}5) = \cos\alpha.$

8.376. $2^{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos x} = 4.$

8.377. $2^{\sin^2 x} + 4\cdot 2^{\cos^2 x} = 6.$

8.378. $3^{1+\sin x + \ldots + \sin^n x + \ldots} = \sqrt[3]{9}.$

8.379. $2^{-1+\cos x - \cos^2 x + \ldots + (-1)^{n+1}\cos^n x + \ldots} = \sqrt[3]{0{,}25}.$

8.380. $9^{1-\cos 6x}=3^{\operatorname{ctg}^{-1}3x}$.

8.381. $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$.

8.382. $1+2^{\operatorname{tg}x}=3\cdot 4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}\cos x}}$.

8.383. $\log_{\cos x}4\cdot\log_{\cos^2 x}2=1$.

8.384. $\log_{\sin x}4\cdot\log_{\sin^2 x}2=4$.

8.385. $3(\log_2\sin x)^2+\log_2(1-\cos 2x)=2$.

8.386. Дано: $(1+\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}y)=2$. Найти $x+y$.

8.387. Показать, что уравнение $\operatorname{ctg}2x+\operatorname{ctg}3x+\dfrac{1}{\sin x\sin 2x\sin 3x}=0$ не имеет корней.

8.388. Один из углов прямоугольного треугольника удовлетворяет уравнению $\sin^3 x+\sin x\sin 2x-3\cos^3 x=0$. Показать, что треугольник равнобедренный.

8.389. Показать, что не существует треугольника, каждый угол которого удовлетворял бы уравнению $(3\cos x-2)(14\sin^2 x+\sin 2x-12)=0$.

8.390. Показать, что существуют треугольники, у которых каждый угол удовлетворяет уравнению $(65\sin x-56)(80-64\sin x-65\cos^2 x)=0$. Найти эти углы.

8.391. Показать, что треугольник, каждый из углов которого удовлетворяет уравнению $3\operatorname{tg}x-3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-2\sqrt{3}=0$, является равносторонним.

8.392. Найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\operatorname{tg}\beta$, $\cos\beta=\operatorname{tg}\gamma$, $\cos\gamma=\operatorname{tg}\alpha$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

8.393. Найти углы α, β и γ первой четверти, если известно, что в указанном порядке они составляют арифметическую прогрессию с разностью $\dfrac{\pi}{12}$, а их тангенсы составляют геометрическую прогрессию.

Решить системы уравнений (8.394–8.405):

8.394. $\begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=0{,}5.\end{cases}$

8.395. $\begin{cases}9^{2\operatorname{tg}x+\cos y}=3,\\ 9^{\cos y}-81^{\operatorname{tg}x}=2.\end{cases}$

8.396. $\begin{cases} x-y=\dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x=2\sin y. \end{cases}$

8.397. $\begin{cases} \sin x\cos y=0{,}25, \\ \sin y\cos x=0{,}75. \end{cases}$

8.398. $\begin{cases} x-y=-\dfrac{1}{3}, \\ \cos^2\pi x-\sin^2\pi y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

8.399. $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

8.400. $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x=\sin y, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases}$

8.401. $\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=2, \\ \operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=-1{,}8. \end{cases}$

8.402. $\begin{cases} 2^{\cos x}+2^{\cos^{-1}y}=5, \\ 2^{\cos x}\cdot 2^{\cos^{-1}y}=4. \end{cases}$

8.403. $\begin{cases} \sin x\sin y=0{,}75, \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3. \end{cases}$

8.404. $\begin{cases} x+y=\dfrac{5\pi}{6}, \\ \cos^2 x+\cos^2 y=0{,}25. \end{cases}$

8.405. $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \sin x\sin y=0{,}25. \end{cases}$

Группа В

Решить уравнения (8.406–8.492):

8.406. $(\cos^2 x+\cos^{-2}x)(1+\operatorname{tg}^2 2y)(3+\sin 3z)=4.$

8.407. $\dfrac{1+\operatorname{tg}x+\ldots+\operatorname{tg}^n x+\ldots}{1-\operatorname{tg}x+\ldots+(-1)^n\operatorname{tg}^n x+\ldots}=1+\sin 2x,\ |\operatorname{tg}x|<1.$

8.408. $\operatorname{tg}x-\sin 2x-\cos 2x(1-2\cos^{-1}x)=0.$

8.409. $\dfrac{1-\sin t+\ldots+(-1)^n\sin^n t+\ldots}{1+\sin t+\ldots+\sin^n t+\ldots}=\dfrac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t},\ |\sin t|\neq 1.$

8.410. $\sqrt{3}\sin t-\sqrt{2\sin^2 t-\sin 2t+3\cos^2 t}=0.$

8.411. $\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{4}.$

8.412. $2\sin^2 t=\sqrt{\sin^2 t-16\sin^2 t\cos^2 2t+\cos^2 t}.$

8.413. $\cos z\sqrt{\operatorname{tg}^2 z-\sin^2 z}+\sin z\sqrt{\operatorname{ctg}^2 z-\cos^2 z}=2\sin z.$

8.414. $\cos x+\sqrt{1{,}5-\cos^2 x}-\cos x\sqrt{1{,}5-\cos^2 x}=1.$

8.415. $\sqrt[5]{0{,}5-\sin x}+\sqrt[5]{0{,}5+\sin x}=1.$

8.416. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=1+\cos x.$

8.417. $\sqrt{1+3\operatorname{ctg} x}+\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{3+\operatorname{tg} x}}=\frac{5}{2}.$

8.418. $\sqrt[4]{0{,}5-\cos 2x}+\sqrt[4]{0{,}5+\cos 2x}=1.$

8.419. $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}=3.$

8.420. $2-\sin x=\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}.$

8.421. $\sqrt[3]{2-\operatorname{tg} x}+\sqrt[3]{7+\operatorname{tg} x}=3.$

8.422. $\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3}=4.$

8.423. $\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{2\cos 2x}.$

8.424. $\cos x+\sqrt{\sin^2 x-2\sin 2x+4\cos^2 x}=0.$

8.425. $\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=2\sqrt{\sin x+\cos x}.$

8.426. $\frac{1-2\cos^2 x}{\sin x\cos x}+2\operatorname{tg} 2x+\operatorname{ctg}^3 4x=3.$

8.427. $\sqrt[4]{10+8\sin^2 x}-\sqrt[4]{8\cos^2 x-1}=1.$

8.428. $\sin^{-1} 2x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+2}+\operatorname{ctg} 2x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x-2}=4\cos^2 2x.$

8.429. $\sqrt{1-2\sin 4x}+\sqrt{6}\cos 2x=0.$

8.430. $\sin\pi\sqrt{t}+\sin\pi t=0.$

8.431. $(\cos^4 x+2\sin^3 x-2\sin x+1)(\sin x+\cos x)=0.$

8.432. $4\operatorname{ctg}^3 2x-12\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-14=0.$

8.433. $\cos^{-4} x+\cos^4 x=1+\cos 2x-2\sin^2 2x.$

8.434. $\cos^{-4} x+8\cos^{-1} x-7=0.$

8.435. $\sin^{10} 3x+\cos^{10} 3x=4\frac{\sin^6 3x+\cos^6 3x}{4\cos^2 6x+\sin^2 6x}.$

8.436. $\operatorname{ctg}^4 2z = \cos^2 4z + 1$.

8.437. $\left(2+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)(4-2\cos^4 x) = 1+5\sin 3y$.

8.438. $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)(1-4\cos^2 2x) - 2\cos 4x = 3$.

8.439. $18\cos^2 x + 5(3\cos x + \cos^{-1} x) + 2\cos^{-2} x + 5 = 0$.

8.440. $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{ctg} t) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{tg} t)$.

8.441. $\cos^{-4} x - 2\cos^{-2} x - 12\operatorname{tg} x - 16 = 0$.

8.442. $\sin^8 2x + \cos^8 2x = \dfrac{41}{128}$.

8.443. $2(1-\sin x - \cos x) + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0$.

8.444. $\dfrac{\operatorname{tg} t}{2-\cos^{-2} t}(\sin 3t - \sin t) = \dfrac{2}{\operatorname{ctg}^2 t - 3}$.

8.445. $\operatorname{tg}(\pi \cos t) = \operatorname{ctg}(\pi \sin t)$.

8.446. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - \cos 4x = 3$.

8.447. $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg}^2 5x = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}^2 3x - \operatorname{tg}^2 5x$.

8.448. $(5+3\sin^{-2} x)(2-\sin^6 x) = 7+\cos 2y$.

8.449. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x - 2 = 0$.

8.450. $\cos^4 x + 4\cos x - 1 = 0$.

8.451. $\dfrac{1-\cos 2x + \ldots + (-1)^n \cos^n 2x + \ldots}{1+\cos 2x + \ldots + \cos^n 2x + \ldots} = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^4 x$, $|\cos 2x| \neq 1$.

8.452. $2(\operatorname{tg} x - \sin x) + 3(\operatorname{ctg} x - \cos x) + 5 = 0$.

8.453. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^3 x - 4 = 0$.

8.454. $\cos\sqrt{x} = \cos x$.

8.455. $|\sin t + \cos t| = \sqrt{2}$.

8.456. $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 3x + \operatorname{tg} 4x$.

8.457. $\cos 6x + \sin\dfrac{5x}{2} = 2$.

8.458. $\sqrt{3}|\cos t| = 1 + \operatorname{ctg} t$.

8.459. $\cos^2 x^2(\operatorname{tg} x^2 + 2\operatorname{tg} x) + \operatorname{tg}^3 x\,(1 - \sin^2 x^2)(2 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x^2) = 0$

8.460. $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x + \ldots + (-1)^n \operatorname{tg}^n x + \ldots}{1 + \operatorname{tg} x + \ldots + \operatorname{tg}^n x + \ldots} = 1 + \sin 2x, \ |\operatorname{tg} x| < 1.$

8.461. $(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)^2 - \cos(x + 4\operatorname{tg} x) = -1.$

8.462. $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg}^2 2x \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 2x + \operatorname{ctg} 3x.$

8.463. $(4 - \cos 2x)(2 + 3\sin y) = 12 + 13\cos^{-2} 3z.$

8.464. $(2\sin x - 1)(\cos^4 x + 2\cos^3 x + 2\cos^2 x - 2\cos x + 1) = 0.$

8.465. $1 + \sqrt{3}\,(1 + \cos x) = \cos 2(x + 2\operatorname{tg} x).$

8.466. $2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + 4\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} 3x.$

8.467. $2\sin^2 x + \sin x + \sin^{-1} x + 2\sin^{-2} x = 6.$

8.468. $2\operatorname{tg} \pi t^2 - \operatorname{tg} \pi t + \operatorname{tg} \pi t \operatorname{tg}^2 \pi t^2 = 0.$

8.469. $\sin^4 x + 2\cos^3 x + 2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0.$

8.470. $|\sin t| + |\cos t| = 1{,}4.$

8.471. $\dfrac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{2 - \cos^{-2} x} = \dfrac{4 + 2\cos\dfrac{6x}{5}}{\cos 3x + \cos x}.$

8.472. $12\cos^{-2} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 x + 10\left(2\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{ctg} x\right) = 1.$

8.473. $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x.$

8.474. $3\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 2x.$

8.475. $\operatorname{ctg} 2\pi t^2 + \operatorname{ctg} 4\pi t = 0.$

8.476. $(3 - \operatorname{tg}^2 x)(\cos 3x + \cos x) = \dfrac{4\cos 3x}{\operatorname{tg} 2x}.$

8.477. $\dfrac{1 + \sin t + \ldots + \sin^n t + \ldots}{1 - \sin t + \ldots + (-1)^n \sin^n t + \ldots} = \dfrac{4}{1 + \operatorname{tg}^2 t}, \ |\sin t| \neq 1.$

8.478. $|\operatorname{tg} 2t + \operatorname{ctg} 2t| = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}.$

8.479. $(3-\sin x)(4-\sin^{-2}x)=12+\cos^2 y.$

8.480. $4-4(\cos z-\sin z)-\sin 2z=0.$

8.481. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{t}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\operatorname{tg}t=2\sqrt{3}+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{t}{4}.$

8.482. $\frac{3\operatorname{tg}t-\operatorname{tg}^3 t}{1-\operatorname{tg}^2 t}(\cos 3t+\cos t)=2\sin 5t.$

8.483. $\operatorname{tg}x-\sin 2x-\cos 2x+2(2\cos x-\cos^{-1}x)=0.$

8.484. $5\sin 2z-11(\sin z+\cos z)+7=0.$

8.485. $\frac{1}{\sin 5x}-\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

8.486. $4\cos^2 2t-\operatorname{tg}4t=\operatorname{ctg}2t.$

8.487. $\frac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}-\operatorname{tg}^6 x+\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x=0.$

8.488. $\sin^{10}x+\cos^{10}x=\frac{29}{64}.$

8.489. $(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2=5+\cos\left(\frac{\pi}{3}+4x\right).$

8.490. $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x=6.$

8.491. $\log_{0,5\sin 2x}\sin x=0{,}5.$

8.492. $\log_{\sin x\cos x}\sin x\cdot\log_{\sin x\cos x}\cos x=0{,}25.$

8.493. Убедиться в том, что уравнение $2\operatorname{ctg}2x-3\operatorname{ctg}3x=\operatorname{tg}2x$ не имеет корней.

Решить системы уравнений (8.494–8.499):

8.494. $\begin{cases}\sin x-\frac{1}{\sin x}=\sin y,\\ \cos x-\frac{1}{\cos x}=\cos y.\end{cases}$

8.495. $\begin{cases}3\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}^3 y,\\ \cos x=\sin 2y.\end{cases}$

8.496. $\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}},\\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2\sqrt{3}.\end{cases}$

8.497. $\begin{cases}\cos x-\cos y=\sin(x+y),\\ |x|+|y|=\frac{\pi}{4}.\end{cases}$

8.498. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\sin\left(y - \dfrac{3\pi}{4}\right), \\ \operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} y = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

8.499. $\begin{cases} 2\cos x = 3\operatorname{tg} y, \\ 2\cos y = 3\operatorname{tg} z, \\ 2\cos z = 3\operatorname{tg} x. \end{cases}$

8.500. Найти x, y, z, если $\dfrac{\sin x}{1} = \dfrac{\sin y}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sin z}{2}$, $x + y + z = \pi$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

ГЛАВА 9

НЕРАВЕНСТВА

УКАЗАНИЯ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ НЕРАВЕНСТВ

1°. *Числовое неравенство* — это неравенство, верное при всех допустимых или при специально подобранных значениях входящих в него букв. Например, $a^2+b^2 \geq 2ab$, где a и b — любые действительные числа; $\sqrt{a} \geq 0$, где $a \geq 0$.

Наиболее часто встречающийся способ доказательства неравенств основан на определениях понятий «больше» и «меньше» и заключается в выяснении знака разности между левой и правой частями неравенства. Эти определения состоят в следующем:

$$\begin{aligned} &\text{если } a-b>0, \text{ то } a>b; \\ &\text{если } a-b<0, \text{ то } a<b; \\ &\text{если } a-b=0, \text{ то } a=b. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Приведенные определения можно использовать и в обратном порядке: если $a>b$, то $a-b>0$ и т. д.

2°. ***Основные свойства числовых неравенств:***

1. Если $a>b$, то $b<a$.

2. Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

3. Если $a>b$ и $c \in R$, то $a+c>b+c$.

На основании этого свойства члены неравенства можно переносить из одной части в другую с противоположными знаками, сохраняя знак неравенства.

4. Если $a>b$ и $c>0$, то $ac>bc$.

5. Если $a>b$ и $c<0$, то $ac<bc$.

6. Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать, т. е. если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

7. Неравенства одинакового смысла с положительными членами можно почленно умножать, т. е. если $a>b>0$ и $c>d>0$, то $ac>bd$.

8. Если $a>b>0$, то $a^n>b^n$, $n \in N$.

9. Если $a>0$, $b>0$ и $a^n>b^n$, $n \in N$, то $a>b$.

10. Если $a>b>0$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

3°. Иногда при доказательстве неравенств используются некоторые известные неравенства. Такими, например, являются следующие:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},\ a \geq 0,\ b \geq 0, \tag{9.2}$$

т. е. *среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического, причем равенство достигается при условии, что эти числа равны*;

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2,\ a>0,\ b>0, \tag{9.3}$$

т. е. *сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше* 2, *причем равенство достигается при условии, что эти числа равны*.

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1°. Неравенства с одной переменной имеют следующий вид:

$$f(x)>g(x);\ f(x)<g(x);\ f(x)\geq g(x);\ f(x)\leq g(x).$$

Решением неравенства называется множество значений переменной, при которых данное неравенство становится верным числовым неравенством.

Два неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Основная идея решения неравенства заключается в замене неравенства более простым, но равносильным заданному.

2°. При решении неравенств используются следующие правила преобразования неравенства в равносильное:

а) какой-либо член неравенства можно перенести из одной его части в другую с противоположным знаком, оставив при этом без изменения знак неравенства;

б) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, оставив при этом без изменения знак неравенства;

в) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный;

г) если для одних и тех же значений x справедливы неравенства $f(x)>0$, $g(x)>0$ и $f(x)>g(x)$, то для тех же значений x верно неравенство $(f(x))^n>(g(x))^n$, $n\in N$.

3°. Пусть заданное неравенство имеет вид

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \tag{9.4}$$

(вместо знака $>$ могут быть знаки $<$, $\geq$, $\leq$, а функция в знаменателе может быть постоянной) либо оно приведено к этому виду с помощью правил п. 2°.

Для решения неравенства (9.4) применяется *метод интервалов* (*метод промежутков*), который состоит в следующем:

а) на числовую ось наносят точки $x_1, x_2, ..., x_n$, разбивающие ее на промежутки, в которых выражение $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено и сохраняет знак («плюс» или «минус»). Такими точками могут быть корни уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$. Соответствующие этим корням точки отмечают на числовой оси: закрашенными кружками — точки, удовлетворяющие заданному неравенству, а светлыми кружками — не удовлетворяющие ему;

б) определяют и отмечают на числовой оси знак выражения $\frac{f(x)}{g(x)}$ для значений x, принадлежащих каждому из полученных промежутков. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются многочленами и не содержат множителей вида $(x-a)^{2n}$, где $n \in N$, то достаточно определить знак функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ в любом таком промежутке, а в остальных промежутках знаки «плюс» и «минус» будут чередоваться.

Если же в числителе или знаменателе дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеется множитель вида $(x-a)^{2n}$, где $n \in N$, то непосредственной проверкой выясняют, удовлетворяет ли значение $x = a$ заданному неравенству.

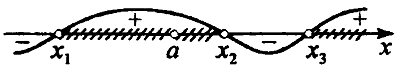


Рис. 9.1

Изменение знаков удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (*кривой знаков*), проведенной через отмеченные точки и лежащей выше или ниже числовой оси в соответствии со знаком дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ в рассматриваемом промежутке. Промежутки, которые содержат точки, удовлетворяющие данному неравенству, иногда покрывают штрихами. На ту же ось помещают и точки, соответствующие $x = a$. Например, для кривой знаков, изображенной на рис. 9.1, получаем следующее решение неравенства (9.4): $(x_1, a) \cup (a, x_2) \cup (x_3, \infty)$.

Роль кривой знаков может играть схематическое расположение параболы относительно оси Ox. Так, в случае, изображенном на рис. 9.2, решение соответствующего квадратного неравенства имеет вид $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ (x_1 и x_2 — корни квадратичной функции).

4°. Рассмотрим решение квадратного неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0 \tag{9.5}$$

в случае отрицательного дискриминанта квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ ($D = b^2 - 4ac < 0$).

Рис. 9.2

Если $a > 0$, то неравенство (9.5) выполняется при всех значениях x (рис. 9.3, *а*); если же $a < 0$, то оно не выполняется ни при каком значении x (рис. 9.3, *б*).

5°. Иррациональное неравенство

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \qquad (9.6)$$

можно рассматривать при условии $f(x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{f(x)} \geq 0 \Rightarrow g(x) > 0$. Значит, согласно указанию 2° г, обе его части можно возвести в квадрат. Из приведенных выше рассуждений следует, что неравенство (9.6) равносильно системе неравенств

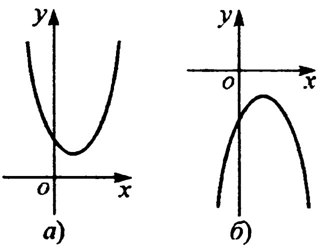


Рис. 9.3

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 < (g(x))^2. \end{cases} \qquad (9.7)$$

6°. Иррациональное неравенство

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \qquad (9.8)$$

можно рассматривать при условии $f(x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{f(x)} \geq 0$. Однако при этом условии его правая часть $g(x)$ может быть как неотрицательной, так и отрицательной, а потому неравенство (9.8) равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 > (g(x))^2; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \qquad (9.9)$$

7°. Показательное неравенство

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \qquad (9.10)$$

при $a > 1$ равносильно неравенству

$$f(x) > g(x), \qquad (9.11)$$

а при $0 < a < 1$ — неравенству

$$f(x) < g(x). \qquad (9.12)$$

8°. Логарифмическое неравенство

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \tag{9.13}$$

при $a > 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \tag{9.14}$$

а при $0 < a < 1$ — системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \tag{9.15}$$

9°. Для решения простейших тригонометрических неравенств

$$\sin x > a,\ \cos x > a,\ \operatorname{tg} x > a,\ \operatorname{ctg} x > a \tag{9.16}$$

(вместо знака $>$ могут быть знаки $<$, $\geq$, $\leq$) применяют графический способ. Находят точки пересечения графика соответствующей тригонометрической функции с прямой $y = a$, расположенные ближе к началу координат, и затем используют периодичность функции. Неравенства вида (9.16) можно решать также с помощью единичного тригонометрического круга.

Для решения более сложных тригонометрических неравенств их сводят к простейшим случаям с помощью упрощений.

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{(x+3)(5-x)}{2x-5} > 0$.

□ Корнями уравнений $(x + 3)(5 - x) = 0$ и $2x - 5 = 0$ служат числа $x_1 = -3$, $x_2 = 2{,}5$, $x_3 = 5$, которые не являются решениями заданного неравенства, поэтому на числовой оси отмечаем их светлыми кружками (рис. 9.4). Эти точки разбивают числовую ось на четыре промежутка. Легко определяем, что при $x > 5$ левая часть неравенства отрицательна — ставим знак «минус» справа от точки 5 и, двигаясь влево, чередуем знаки «плюс» и «минус». С помощью рис. 9.4 получаем ответ: $(-\infty, -3) \cup (2{,}5; 5)$. ■

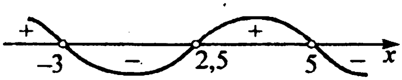


Рис. 9.4

Пример 2. Решить неравенство $\dfrac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+4)^5(2x-6)^4} \leq 0$.

□ Полагая $x \neq 0$ и $x \neq 3$, разделим обе части неравенства на положительную дробь $\frac{x^2}{(2x-6)^4}$ и сразу заметим, что $x = 0$ удовлетворяет заданному неравенству, а $x = 3$ не удовлетворяет. Кроме того, множители с нечетными показателями степени заменим соответствующими множителями первой степени (ясно, что при этом знак выражения в левой части неравенства не изменится). В результате получим более простое неравенство, равносильное заданному для всех $x \neq 0$ и $x \neq 3$:

$$\frac{(2x-9)(x-1)}{x+4} \leq 0.$$

Начертив кривую знаков, заштрихуем промежутки, удовлетворяющие этому неравенству, и отметим на той же оси точки $x = 0$ и $x = 3$ (рис. 9.5). Учитывая, что значение $x = 0$ является решением заданного неравенства, но не принадлежит заштрихованному промежутку, его дополнительно включаем в ответ. Значение $x = 3$ не является решением неравенства, но принадлежит заштрихованному промежутку; следовательно, это значение нужно исключить. Итак, получаем ответ: $(-\infty, -4) \cup [1, 3) \cup (3; 4{,}5] \cup 0$. ■

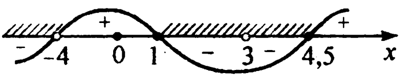


Рис. 9.5

Пример 3. Решить неравенство $\frac{1}{x^2-5x+6} \leq \frac{1}{2}$.

□ Преобразуем данное неравенство в равносильное:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{1}{2} \leq 0; \quad \frac{x^2-5x+4}{2(x^2-5x+6)} \geq 0.$$

Корни $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$ являются решениями неравенства (на рис. 9.6 отмечаем их закрашенными кружками); корни $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ не являются решениями неравенства (на рис. 9.6 отмечаем их светлыми кружками). С помощью кривой знаков получаем ответ: $(-\infty, 1] \cup (2, 3) \cup [4, \infty)$. ■

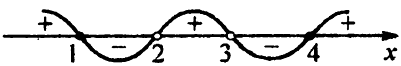


Рис. 9.6

Пример 4. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2} > 0$.

□ Учитывая, что x не может принимать отрицательные значения, разобьем точками $x_1 = 2$ (корень уравнения $x - 2 = 0$) и $x_2 = 9$ (корень уравнения $\sqrt{x} - 3 = 0$) на промежутки не всю числовую ось, а только ее часть $[0, \infty)$. С помощью кривой знаков (рис. 9.7) получаем ответ: $[0, 2) \cup (9, \infty)$. ■

Рис. 9.7

Пример 5. Решить неравенство $\sqrt{x+61} < x + 5$.

□ Согласно указанию 5°, это иррациональное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x+61 \ge 0, \\ x+5>0, \\ x+61 < x^2+10x+25, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} x>-61, \\ x>-5, \\ x^2+9x-36>0, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} x>-5, \\ x^2+9x-36>0. \end{cases}$$

Решив квадратное уравнение $x^2 + 9x - 36 = 0$, находим $x_1 = -12, x_2 = 3$. Строим кривую знаков (в данном случае — дугу параболы) и стрелкой, направленной вправо от точки -5, отмечаем промежуток $x > -5$ (рис. 9.8). Решения первого и второго неравенств системы совпадают на промежутке $(3, \infty)$. Итак, получаем ответ: $(3, \infty)$. ■

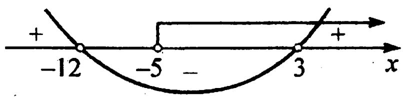


Рис. 9.8

Пример 6. Решить неравенство $x - 3 < \sqrt{x-2}$.

□ Согласно указанию 6°, это иррациональное неравенство равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x-2 \ge 0, \\ x-3 \ge 0, \\ x^2-6x+9 < x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ x-3<0, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} x \ge 2, \\ x \ge 3, \\ x^2-7x+11<0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 2, \\ x<3. \end{cases}$$

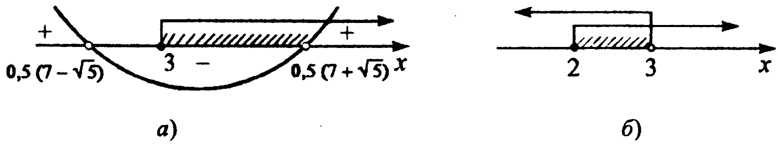


Рис. 9.9

Решением первой системы является промежуток $3 \le x < 0{,}5(7+\sqrt{5})$ (рис. 9.9, *а*), а решением второй системы — промежуток $2 \le x < 3$ (рис. 9.9, *б*). Объединяя эти решения, получаем ответ: $2 \le x < 0{,}5(7+\sqrt{5})$. ■

Пример 7. Решить неравенство $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x}-81}{x^2+2x+5}<0.$

□ Так как выражение x^2+2x+5 положительно при любом x, то, умножив на него обе части данного неравенства, получим равносильное неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x}-81<0$, или $3^{-(8+x)}<3^4$. Далее, поскольку основание степени $3>1$, используя указание 7°, имеем $-8-x<4$, откуда $x>-12$. Итак, получаем ответ: $(-12, \infty)$. ■

Пример 8. Решить неравенство $0{,}4^{\log_2^2 x+1}<6{,}25^{2-\log_2 x^3}$.

□ Заметив, что $0{,}4=\dfrac{2}{5}$ и $6{,}25=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$, приведем обе части неравенства к одному основанию:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_2^2 x+1}<\left(\frac{2}{5}\right)^{2\log_2 x^3-4}.$$

Так как основание степени $0<\dfrac{2}{5}<1$, то, используя указание 7°, имеем $\log_2^2 x+1>2\log_2 x^3-4$. Функция $f(x)=\log_2 x$ определена при $x>0$; следовательно, $2\log_2 x^3=6\log_2 x$. Полагая $y=\log_2 x$, приходим к неравенству $y^2-6y+5>0$, откуда вытекает, что $y<1$ или $y>5$.

Таким образом, данное неравенство равносильно совокупности неравенств $\log_2 x<1$, $\log_2 x>5$, которую можно переписать в виде $\log_2 x<\log_2 2$, $\log_2 x>\log_2 2^5$. Поскольку основание логарифма $2>1$, используя указание 8°, находим, что решение первого неравенства есть промежуток $0<x<2$, а второго — промежуток $x>2^5$, т. е. $x>32$. Итак, получаем ответ: $(0,\ 2)\cup(32,\ \infty)$. ■

Пример 9. Решить неравенство $x^{\frac{2x-1}{3-x}}>1$.

□ Приведем неравенство к виду $x^{\frac{2x-1}{3-x}}>x^0$ и рассмотрим два случая: $0<x<1$ и $1<x<3,\ 3<x<\infty$. Согласно указанию 7°, решаем совокупность систем неравенств:

$$\begin{cases} 0<x<1, \\ \dfrac{2x-1}{3-x}<0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1<x<3,\ 3<x<\infty, \\ \dfrac{2x-1}{3-x}>0. \end{cases}$$

Применяем метод интервалов сразу к двум системам (рис. 9.10). С помощью рисунка, учитывая знак дробного неравенства (< 0 в первом случае и > 0 во втором), получаем ответ: $(0;\ 0{,}5)\cup(1,\ 3)$. ■

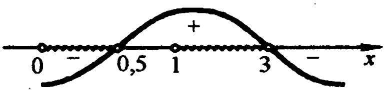


Рис. 9.10

Пример 10. Решить неравенство $\log_{1/3}\log_{1/2}\dfrac{x+4}{2x-3}<0$.

□ Согласно формуле (7.3), имеем $0=\log_{1/3}1$. Поскольку основание логарифма $0<\dfrac{1}{3}<1$, используя указание 8°, получаем равносильное неравенство $\log_{1/2}\dfrac{x+4}{2x-3}>1$ (при этом условие $\log_{1/2}\dfrac{x+4}{2x-3}>0$ выполняется автоматически). Далее в силу формулы (7.2) имеем $1=\log_{1/2}\dfrac{1}{2}$ и так как $0<\dfrac{1}{2}<1$, то, снова используя указание 8°, получаем равносильную данному неравенству систему

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2x-3}>0, \\ \dfrac{x+4}{2x-3}<\dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} \dfrac{x+4}{2x-3}>0, \\ \dfrac{11}{2(2x-3)}<0. \end{cases}$$

Из второго неравенства системы следует, что $2x-3<0$; значит, $x+4<0$ и задача сводится к решению равносильной системы $\begin{cases} 2x-3<0, \\ x+4<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<1{,}5, \\ x<-4, \end{cases}$ откуда $x<-4$. Итак, получаем ответ: $(-\infty,\ -4)$. ■

Пример 11. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{1 - \log_8(x^2 - 4x + 3)}.$$

□ Поскольку логарифмическая функция определена только для положительных чисел, а квадратный корень — для неотрицательных чисел, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ 1 - \log_8(x^2 - 4x + 3) \geq 0. \end{cases}$$

Левую часть первого неравенства разложим на множители, а во втором заменим 1 на $\log_8 8$:

$$\begin{cases} (x-3)(x-1) > 0, \\ \log_8(x^2 - 4x + 3) \leq \log_8 8. \end{cases}$$

Так как основание логарифма 8 > 1, то, согласно указанию 8°, переходим к системе

$$\begin{cases} (x-3)(x-1) > 0, \\ x^2 - 4x + 3 \leq 8, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} (x-3)(x-1) > 0, \\ (x-5)(x+1) \leq 0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна неравенству $(x-3)(x-1)(x-5)(x+1) \leq 0$, которое решаем методом интервалов. С помощью рис. 9.11 получаем ответ: $[-1, 1) \cup (3, 5]$. ■

Рис. 9.11

Группа А

9.001. Показать, что для всех положительных чисел a и b верно неравенство $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.

9.002. Доказать, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt[4]{ab}$.

9.003. Доказать, что если $p > 0$ и $q > 0$, то $(p+2)(q+2)(p+q) \geq 16pq$.

9.004. Доказать, что если $a \neq 2$, то $\dfrac{1}{a^2 - 4a + 4} > \dfrac{2}{a^3 - 8}$.

9.005. Доказать, что если m, n и p — длины сторон некоторого треугольника, то $m^2+n^2+p^2<2(mn+pm+np)$.

9.006. Доказать, что если $m\geq 0$ и $n\geq 0$, то $mn(m+n)\leq m^3+n^3$.

9.007. Доказать, что для любых действительных чисел x и y верно неравенство $x^2+2y^2+2xy+6y+10>0$.

9.008. При каких значениях a оба корня уравнения $x^2-(a+1)x+a+4=0$ отрицательны?

9.009. Показать, что для любых двух положительных чисел произведение их суммы на сумму обратных им величин не меньше 4.

9.010. Найти целые положительные значения x, удовлетворяющие неравенству $\dfrac{5x+1}{x-1}>2x+2$.

9.011. Найти целые решения системы неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{x}{2}<2-\dfrac{x+5}{2},\\ 1-\dfrac{x+5}{8}+\dfrac{4-x}{2}<3x-\dfrac{x+1}{4}.\end{cases}$$

9.012. Найти натуральные значения x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}(x-1)<4,\\ \dfrac{x}{x-3}+\dfrac{x-5}{x}<\dfrac{2x}{3-x}.\end{cases}$$

9.013. При каких значениях x функция $y=\sqrt[4]{10+x}-\sqrt{2-x}$ принимает положительные значения?

9.014. Найти целые значения x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x+8}{x+2}>2,\\ \lg(x-1)<1.\end{cases}$$

9.015. При каких значениях m неравенство $x^2-mx>\dfrac{2}{m}$ выполняется для любых x?

Найти области определения функций (9.016–9.021):

9.016. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

9.017. $y=0{,}5^{\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x-1}}$.

9.018. $y=\sqrt{\log_{0,3}\frac{x-1}{x+5}}$.

9.019. $y=\sqrt{\log_{1/2}\log_3\frac{x+1}{x-1}}$.

9.020. $y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$.

9.021. $y=\sqrt{-\frac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+8}}}$.

Решить неравенства (9.022–9.095):

9.022. $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1$.

9.023. $\log_{1/3}\frac{3x-1}{x+2}<1$.

9.024. $\log_3\frac{3x-5}{x+1}\le 1$.

9.025. $\log_\pi(x+27)-\log_\pi(16-2x)<\log_\pi x$.

9.026. $\log_{0,3}(3x-8)>\log_{0,3}(x^2+4)$.

9.027. $(x+1)(3-x)(x-2)^2>0$.

9.028. $\sqrt{3x-x^2}<4-x$.

9.029. $\frac{1}{3x-2-x^2}-\frac{3}{7x-4-3x^2}>0$.

9.030. $\frac{1}{x+2}<\frac{3}{x-3}$.

9.031. $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0$.

9.032. $\left|2x^2-9x+15\right|\ge 20$.

9.033. $\left|x^2-5x\right|<6$.

9.034. $5x-20\le x^2\le 8x$.

9.035. $\frac{4x^2-1}{\log_{1,7}(0,5(1-\log_7 3))}\le 0$.

9.036. $\frac{\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}{(x-8)(2-x)}>0$.

9.037. $(0,(4))^{x^2-1}>(0,(6))^{x^2+6}$.

9.038. $\frac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)}<0$.

9.039. $\frac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x}<0$.

9.040. $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$.

9.041. $x^6-9x^3+8>0$.

9.042. $0{,}3^{2+4+6+\ldots+2x} > 0{,}3^{72}$; $x \in N$.

9.043. $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$.

9.044. $\dfrac{\sqrt{17 - 15x - 2x^2}}{x+3} > 0$.

9.045. $\sqrt{9x - 20} < x$.

9.046. $1 < \dfrac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} < 2$.

9.047. $\dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} < 0$.

9.048. $\dfrac{4 - x}{x - 5} > \dfrac{1}{1 - x}$.

9.049. $\lg 10^{\lg(x^2+21)} > 1 + \lg x$.

9.050. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$.

9.051. $\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{1/x^2}\right)^{x^2 - 2x} \geq 1$.

9.052. $2^{1 - 2^{1/x}} < 0{,}125$.

9.053. $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0$.

9.054. $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

9.055. $0{,}5^{x-2} > 6$.

9.056. $\dfrac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3} 100 - \log_{0,3} 9} < 1$.

9.057. $0{,}3^{\log_{1/3} \log_2 \frac{3x+6}{x^2+2}} > 1$.

9.058. $2^{\log_{0,4} x \cdot \log_{0,4}(2{,}5x)} > 1$.

9.059. $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$.

9.060. $2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \dfrac{2}{3}$.

9.061. $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$.

9.062. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2 - 5x + 8)} \leq 2{,}5$.

9.063. $4^{\frac{1}{x} - 1} - 2^{\frac{1}{x} - 2} - 3 \leq 0$.

9.064. $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{3(2x-7)} \cdot 12{,}25^{\frac{4x+1}{2}} \geq 1$.

9.065. $\dfrac{15}{4 + 3x - x^2} > 1$.

9.066. $0{,}64 < \sqrt{0{,}8^{x(x-3)}} < 1$.

9.067. $\dfrac{1}{2} + \log_9 x - \log_3(5x) > \log_{1/3}(x+3)$.

9.068. $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0{,}3 > 0$.

9.069. $\log^2_{0,2}(x-1) > 4$.

9.070. $\log_{1,5} \dfrac{2x-8}{x-2} < 0$.

9.071. $\log_{0,3}(x^2-5x+7)>0$.

9.072. $x^8-6x^7+9x^6-x^2+6x-9<0$.

9.073. $a^4+a^3-a-1<0$.

9.074. $m^3+m^2-m-1>0$.

9.075. $\log_2(1+\log_{1/9}x-\log_9 x)<1$.

9.076. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>2$.

9.077. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$.

9.078. $0{,}3^{2x^2-3x+6}<0{,}00243$.

9.079. $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\le 0$.

9.080. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}<0$.

9.081. $\log_{1,2}(x-2)+\log_{1,2}(x+2)<\log_{1,2}5$.

9.082. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1$.

9.083. $\dfrac{1}{3^x+5}<\dfrac{1}{3^{x+1}-1}$.

9.084. $\log_x\log_9(3^x-9)<1$.

9.085. $0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}}>25$.

9.086. $5^{2\sqrt{x}}+5<5^{\sqrt{x}+1}+5^{\sqrt{x}}$.

9.087. $|3-\log_2 x|<2$.

9.088. $5\cdot 0{,}2^{\lg x}>0{,}04^{\lg 2}$.

9.089. $\log_2\log_{1/3}\log_5 x>0$.

9.090. $3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}-1}-3^{\sqrt{x}-2}<11$.

9.091. $0{,}5^x\le 0{,}25^{x^2}$.

9.092. $\log_{0,5}^2 x+\log_{0,5}x-2\le 0$.

9.093. $5^{\log_3\frac{x-2}{x}}<1$.

9.094. $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}}x+\log_{1/3}x<6$.

9.095. $\log_4(x+7)>\log_2(x+1)$.

Группа Б

9.096. Доказать, что произведение суммы трех положительных чисел на сумму обратных им чисел не меньше 9.

9.097. Доказать, что если a — любое действительное число, то верно неравенство $\dfrac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}\ge 2$.

9.098. Найти все значения p, при которых выражение $\lg((p-1)x^2+2px+$ $+3p-2)$ определено для любых x.

9.099. Найти все значения a, при которых $\sqrt{(a+1)x^2-2(a-1)x+3a-3}$ имеет смысл для любых $x \in \boldsymbol{R}$.

9.100. Найти множество целых значений x, удовлетворяющих неравенству

$$4^{2+\sqrt{x-1}}+3\cdot 2^{2+\sqrt{x-1}}-16<15\cdot 4^{\sqrt{x-1}}+2^{3+\sqrt{x-1}}+5\cdot 2^{1+\sqrt{x-1}}.$$

9.101. При каких значениях p оба корня квадратного трехчлена $x^2+2(p+$ $+1)x+9p-5$ отрицательны?

9.102. При каких значениях n оба корня уравнения $(n-2)x^2-2nx+n+3=$ $=0$ положительны?

9.103. При каких значениях m оба корня уравнения $4x^2-(3m+1)x-m-2=$ $=0$ заключены между -1 и 2?

9.104. При каких значениях a квадратный трехчлен $ax^2-7x+4a$ принимает отрицательные значения для любых действительных значений x?

9.105. Найти целые числа x, удовлетворяющие неравенству $\left|\frac{2}{x-13}\right|>\frac{8}{9}$.

9.106. Доказать, что при условии $2y+5x=10$ выполняется неравенство $3xy-x^2-y^2<7$.

9.107. Доказать, что если $4b+a=1$, то выполняется неравенство $a^2+4b^2\geq 0{,}2$.

9.108. Доказать, что многочлен $m^6-m^5+m^4+m^2-m+1$ принимает положительные значения при всех действительных значениях m.

9.109. Найти область определения функции f, если

$$f(x)=\sqrt[6]{4^{\frac{x+1}{x}}-17\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4}.$$

9.110. Найти область определения функции f, если $f(x)=\sqrt{9-\left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2}$.

9.111. Найти целые неотрицательные значения x, удовлетворяющие неравенству $\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}<\frac{2x}{2x-x^2}$.

9.112. При каких значениях a неравенство $\frac{ax}{x^2+4}<1{,}5$ выполняется для любых значений $x \in \boldsymbol{R}$?

9.113. Найти область определения функции f, если

$$f(x)=\sqrt{\log_{0,5}(x^2-9)+4}.$$

9.114. При каких значениях x определено выражение

$$\log_3(1-\log_{0,5}(x^2-2x-2,5))?$$

9.115. Найти такие значения m, при которых неравенство $\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$ выполняется для любых действительных значений x.

9.116. При каких значениях x разность $\dfrac{11x^2-5x+6}{x^2+5x+6}-x$ принимает только отрицательные значения?

9.117. При каких значениях m неравенство $\dfrac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3}<1$ выполняется для любых x?

9.118. При каких значениях m неравенство $\dfrac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4}>-1$ выполняется для любых x?

9.119. При каких значениях a сумма $a+\dfrac{4a^2+9a-1}{a^2-3a-10}$ принимает только положительные значения?

9.120. Найти целые значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_4 x+\log_2(\sqrt{x}-1)<\log_2\log_{\sqrt{5}}5.$$

9.121. Показать, что при любых действительных значениях x функция $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ не может принимать значений, больших $\dfrac{3}{2}$ и меньших $\dfrac{1}{2}$.

Найти области определения функций (9.122–9.129):

9.122. $y=2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}$.

9.123. $y=\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{\log_3|x-4|}$.

9.124. $y=\log_3(0,64^{2-\log_{\sqrt{2}}x}-1,25^{8-\log_2^2 x})$.

9.125. $y=\sqrt{\log_{1/3}\log_3|x-3|}$.

9.126. $y=\sqrt{\log^2_{0,5}(x-3)-1}$.

9.127. $y=\sqrt[4]{2-\lg|x-2|}$.

9.128. $y=\log_3(2^{\log_{x-3}0,5}-1)+\dfrac{1}{\log_3(2x-6)}$.

9.129. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}-1}+\dfrac{1}{\log_8(x-4)}$.

Решить неравенства (9.130–9.205):

9.130. $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right|<3$.

9.131. $\log_{|x-1|}0,5>0,5$.

9.132. $\log_x\dfrac{3x-1}{x^2+1}>0$.

9.133. $\dfrac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$.

9.134. $0,5^{\sqrt{3}}<0,5^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}}<0,5$.

9.135. а) $\dfrac{3\log_a x+6}{\log_a^2 x+2}>1$; б) $\log_2\log_4 x+\log_4\log_2 x\le -4$.

9.136. $\left(\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{3x}{4}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-x-\dfrac{(x-2)^2(1-x)}{(x+2)^2}\right)>0$.

9.137. $\log_2^4 x-\log^2_{0,5}\dfrac{x^3}{8}+9\log_2\dfrac{32}{x^2}<4\log^2_{0,5}x$.

9.138. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}\ge 2$.

9.139. $\dfrac{m^2x+1}{2}-\dfrac{m^2x+3}{3}<\dfrac{m+9x}{6}$.

9.140. $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$.

9.141. $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9$.

9.142. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\le 1$.

9.143. $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

9.144. $\dfrac{(x-0{,}5)(3-x)}{\log_2|x-1|} > 0$.

9.145. $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} < 4\operatorname{tg} x$.

9.146. $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1$.

9.147. $2 + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x < 0$.

9.148. $\dfrac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8}{x^2} < 0$.

9.149. $\dfrac{3}{6x^2 - x - 12} < \dfrac{25x - 47}{10x - 15} - \dfrac{3}{3x + 4}$.

9.150. $\dfrac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2 - 4x} < 0$.

9.151. $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

9.152. $\dfrac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \le \dfrac{1}{2}$.

9.153. $\log_{4/3}(\sqrt{x+3} - x) > 0$.

9.154. $\dfrac{2 - x}{x^3 + x^2} > \dfrac{1 - 2x}{x^3 - 3x^2}$.

9.155. $0{,}2^{\frac{6\log_4 x - 3}{\log_4 x}} > \sqrt[3]{0{,}008^{2\log_4 x - 1}}$.

9.156. $2{,}25^{\log_2(x^2 - 3x - 10)} > \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_{0,5}(x^2 + 4x + 4)}$.

9.157. $\log_{0,5}(x+3) < \log_{0,25}(x+15)$.

9.158. $\log_{1/3}(x-1) + \log_{1/3}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(5-x) < 1$.

9.159. $2\log_3 \log_3 x + \log_{1/3} \log_3(9\sqrt[3]{x}) \ge 1$.

9.160. $0{,}008^x + 5^{1-3x} + 0{,}04^{1,5(x+1)} < 30{,}04$.

9.161. $0{,}4^{\log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_3(3x)} > 6{,}25^{\log_3 x^2 + 2}$.

9.162. $0{,}3^{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots} < \sqrt[3]{0{,}3^{3x^2 + 5x}} < 1$.

9.163. $\dfrac{\lg 7 - \lg(-8x - x^2)}{\lg(x+3)} > 0$.

9.164. $\log_3 \log_4 \dfrac{4x-1}{x+1} - \log_{1/3} \log_{1/4} \dfrac{x+1}{4x-1} < 0$.

9.165. $2^{\log_{0,5}^2 x}+x^{\log_{0,5} x}>2,5.$

9.166. $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2.$

9.167. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-x+1}\le\dfrac{1-2x}{x^3+1}.$

9.168. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}.$

9.169. $\dfrac{1}{x^2-4}+\dfrac{4}{2x^2+7x+6}\le\dfrac{1}{2x+3}+\dfrac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}.$

9.170. $\dfrac{10(5-x)}{3(x-4)}-\dfrac{11}{3}\cdot\dfrac{6-x}{x-4}\ge\dfrac{5(6-x)}{x-2}.$

9.171. $0,6^{\lg^2(-x)+3}\le\left(1\dfrac{2}{3}\right)^{2\lg x^2}.$

9.172. $(x-3)\sqrt{x^2+4}\le x^2-9.$

9.173. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{13x^2}\le\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^4+36}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^{12x^2}.$

9.174. $|x-3|^{2x^2-7x}>1.$

9.175. $\log_{0,2} x+\log_4 x>1.$

9.176. $-9<x^4-10x^2<56.$

9.177. $216x^6+19x^3<1.$

9.178. $x^{0,5\log_{0,5} x-3}\ge 0,5^{3-2,5\log_{0,5} x}.$

9.179. $|x-6|>|x^2-5x+9|.$

9.180. $\dfrac{6x}{x-2}-\sqrt{\dfrac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>0.$

9.181. $\log_{0,3}\log_6\dfrac{x^2+x}{x+4}<0.$

9.182. $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1.$

9.183. $\log_{0,5}\log_2\log_{x-1} 9>0.$

9.184. $\log_{0,25}\left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$.

9.185. $x^2(x^4+36)-6\sqrt{3}(x^4+4)<0$.

9.186. $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}<0$.

9.187. $2\log_{\log_3 x}3<1$.

9.188. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+4}>0$.

9.189. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1$.

9.190. $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-2}>0$.

9.191. $2\cos x(\cos x-\sqrt{8}\,\mathrm{tg}\,x)<5$.

9.192. $\sqrt{x^3+3x+4}>-2$.

9.193. $\log_2^2(x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)>5$.

9.194. $25\cdot 2^x-10^x+5^x>25$.

9.195. $\log_3\log_{x^2}\log_{x^2}x^4>0$.

9.196. $0,5^{2\sqrt{x}}+2>3\cdot 0,5^{\sqrt{x}}$.

9.197. $x^2(x+3\sqrt{5})+5(3x+\sqrt{5})>0$.

9.198. $9^{\log_2(x-1)-1}-8\cdot 5^{\log_2(x-1)-2}>9^{\log_2(x-1)}-16\cdot 5^{\log_2(x-1)-1}$.

9.199. $\frac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)}>\frac{1}{2}$.

9.200. $\frac{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}+5)}<0,5$.

9.201. $\frac{1}{\log_2(x-1)}<\frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$.

9.202. $x^{\log_2 x}+16x^{-\log_2 x}<17$.

9.203. $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}<10$.

9.204. $\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1)<1$.

9.205. $(x^2+4x+10)^2-7(x^2+4x+11)+7<0$.

9.206. Расположить в порядке возрастания три числа: $a_1=\log_{0,5}\sin 2x$, $a_2=-1-\log_2\sin x$, $a_3=\log_{0,5}(1-\cos 2x)$, если $0<x<\dfrac{\pi}{4}$.

Решить системы неравенств (9.207–9.214):

9.207. $\begin{cases} 0{,}2^{\cos x}\le 1, \\ \dfrac{x-1}{2-x}+\dfrac{1}{2}>0. \end{cases}$

9.208. $\sqrt{x^2-9x+20}\le\sqrt{x-1}\le\sqrt{x^2-13}$.

9.209. $\begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x^2-16x+64}>0, \\ \lg\sqrt{x+7}>\lg(x-5)-2\lg 2. \end{cases}$

9.210. $\dfrac{5x-7}{x-5}<4-\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{3x}{x^2-25}<4$.

9.211. $\begin{cases} \sqrt{4x-7}<x, \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}>4. \end{cases}$

9.212. $\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x}>\dfrac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5}<8\sqrt{2}. \end{cases}$

9.213. $\begin{cases} \left|x^2+5x\right|<6, \\ |x+1|\le 1. \end{cases}$

9.214. $\begin{cases} \left|x^2-4x\right|<5, \\ |x+1|<3. \end{cases}$

9.215. Найти область определения функции $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}+\dfrac{2}{x^2-49}$.

Группа В

Решить неравенства (9.216–9.220):

9.216. $\log_5 x+\log_x\dfrac{x}{3}<\dfrac{\log_5 x(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$.

9.217. $\dfrac{\sin x-2}{4\sin^2 x-1}>2$.

9.218. $\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x+1}<3$.

9.219. $\dfrac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{|x-1|}$.

9.220. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$.

9.221. Доказать, что из всех прямоугольных параллелепипедов с данной суммой всех ребер наибольший объем имеет куб. (Для доказательства можно использовать, например, неравенство $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$, верное для всех положительных чисел.)

9.222. При каких значениях p система неравенств $-9 < \frac{3x^2+px-6}{x^2-x+1} < 6$ выполняется для всех действительных значений x?

9.223. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} (x-1)\lg 2 + \lg(2^{x+1}+1) < \lg(7\cdot 2^x + 12), \\ \log_x(x+2) > 2. \end{cases}$$

9.224. Найти область определения функции $y = \sqrt{\sin x - 0{,}5} + \log_3(25-x^2)$.

9.225. Доказать, что при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $d > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

9.226. При каких значениях m неравенство $-6 < \frac{2x^2+mx-4}{x^2-x+1} < 4$ выполняется для всех действительных значений x?

Доказать справедливость неравенств (9.227–9.230):

9.227. $\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right) \geq 8; \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$

9.228. $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3; \ a > 0,\ b > 0.$

9.229. $\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4.$

9.230. $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[n]{2-\sqrt{3}} > 2.$

9.231. Без помощи таблиц показать, что $2 < \log_3 2 + \log_2 3 < 3$.

9.232. Пусть число $x_1 > 0$ является корнем уравнения $ax^2+bx+c=0$. Показать, что существует корень x_2 уравнения $cx^2+bx+a=0$ такой, что $x_1+x_2 \geq 2$.

9.233. Доказать, что если $(x^2+5x+6)(x^2+11x+30)<0$, то $\sin 2x>0$.

9.234. Из значений x, удовлетворяющих неравенству $\log_{1,3}(2x-2)<$ $<\log_{1,3}(x+1)$, указать те, для которых $\sin 2x<0$.

9.235. Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнений $5x^3-6=0$ и $6x^3-5=0$. Показать, что $x_1+x_2>2$.

Решить неравенства (9.236–9.290):

9.236. $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}} 2>0$.

9.237. $\log_x \log_2(4^x-12)\le 1$.

9.238. $10\cdot 0{,}3^{\sqrt[4]{\log_{1/\sqrt{3}} \operatorname{tg} x}}>3$.

9.239. $2<2^{\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^2}<8$.

9.240. $3^{\frac{2\cos^2 x-6}{2\cos^2 x-1}}>3^{\frac{\cos x}{1-2\cos^2 x}}$.

9.241. $0{,}2^{\cos 2x}-\dfrac{1}{25^{\cos^2 x}}<4\cdot 125^{-0{,}5}$.

9.242. $\log_x \log_3(9^x-6)\ge 1$.

9.243. $\sqrt{\log_{0,5}(x^2+4x-4)}<1;\ x\in Z$.

9.244. $\sqrt{1-9\log_{1/8}^2 x}>1-4\log_{1/8} x$.

9.245. $\log_{0,5} x+\sqrt{1-4\log_{0,5}^2 x}<1$.

9.246. $\log_{x^2}(3-2x)>1$.

9.247. $\log_3(4^x+1)+\log_{4^x+1} 3>2{,}5$.

9.248. $\log_3(3^x-1)\cdot\log_{1/3}(3^{x+2}-9)>-3$.

9.249. $\log_p \dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x}<0$.

9.250. $\left|x^3-1\right|>1-x$.

9.251. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}\ge 2x$.

9.252. $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1} x>2$.

9.253. $\log_x(x+1)<\log_{1/x}(2-x)$.

9.254. $\log_3 \log_{0,2} \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5}>0$.

9.255. $\log_x(x^2+3x-3)>1$.

9.256. $|x-1|+|2-x|>3+x$.

9.257. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\dfrac{1}{x}$.

9.258. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

9.259. $\sqrt{4-4x^3+x^6}>x-\sqrt[3]{2}$.

9.260. $\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x$.

9.261. $\log_{0,5}\dfrac{\left|x^2-2x\right|+4}{|x+2|+x^2}\le 0.$

9.262. $\log_{x^2}\dfrac{2x}{|x-3|}\le\dfrac{1}{2}.$

9.263. $(4x^2+2x+1)^{x^2-x}>1.$

9.264. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}x-1}}>1.$

9.265. $1<3^{\left|x^2-x\right|}<9.$

9.266. $5^{\log_x\frac{8-12x}{x-6}}>25.$

9.267. $(2^x+3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1.$

9.268. $\log_{|x-4|}(2x^2-9x+4)>1.$

9.269. $\dfrac{1}{\log_{0,5}\sqrt{x+3}}\le\dfrac{1}{\log_{0,5}(x+1)}.$

9.270. $\log_x\dfrac{3}{8-2x}\ge -2.$

9.271. $\log_{0,5}(x-3)-\log_{0,5}(x+3)-\log_{\frac{x+3}{x-3}}2>0.$

9.272. $\left|2^{4x^2-1}-5\right|\le 3.$

9.273. $8\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+9^{\sqrt[4]{x}+1}\ge 9^{\sqrt{x}}.$

9.274. $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}}\ge (x^2+x+1)^3.$

9.275. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0.$

9.276. $\sin 2x\sin 3x-\cos 2x\cos 3x>\sin 10x.$

9.277. $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2}+12^\circ\right)+\operatorname{tg}(x+12^\circ)>0.$

9.278. $\left(\dfrac{15}{14}\right)^{|x+7|}<\left(\dfrac{15}{14}\right)^{\left|x^2-3x+2\right|}.$

9.279. $\log_x 10-0{,}5\log_a 10>0;\ 0<a<1.$

9.280. $\log_7 x-\log_3 7\cdot\log_3 x>\log_2 0{,}25.$

9.281. $x^{\log_a x+4}<a^4x;\ 0<a<1.$

9.282. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1.$

9.283. $\log_x^2\sqrt{5}-\log_x 5\sqrt{5}+1{,}25<0.$

9.284. $\left|\log_3 x\right|<\left|\log_3 \frac{x}{9}\right|.$

9.285. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0.$

9.286. $\sin^3 x\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\cos^3 x\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)>\frac{3\sqrt{3}}{8}.$

9.287. $2\sin^2 x-\sin x+\sin 3x<1.$

9.288. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x-2\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{tg} 4x>8\sqrt{3}.$

9.289. $4\sin x\sin 2x\sin 3x>\sin 4x.$

9.290. $\sin(2x+10^\circ)+\sin(x+10^\circ)-\sin x<0.$

9.291. Показать, что $\frac{1}{8}<\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 70^\circ<\frac{1}{4}.$

9.292. Решить неравенство $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}\geq 3\operatorname{tg} x.$

9.293. Показать, что $\operatorname{tg} 40^\circ+\operatorname{tg} 45^\circ+\operatorname{tg} 50^\circ>3.$

9.294. Показать, что при условии $360^\circ\cdot n-45^\circ<\alpha<360^\circ\cdot n+45^\circ$, где $\in Z$, выполняется неравенство $\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)+\operatorname{ctg} 45^\circ+\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)\geq 3.$

Решить неравенства (9.295–9.297):

9.295. $3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x<0{,}5.$

9.296. $\frac{\cos x+2\cos^2 x+\cos 3x}{\cos x+2\cos^2 x-1}>1.$

9.297. $8\sin^4 x-8\sin^2 x+\sin x-1<0.$

9.298. Показать, что $2<\sqrt{\log_2 3}+\sqrt{\log_3 2}<\sqrt{2}+1.$

9.299. Показать, что $\frac{1}{8}<\sin 20^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ<\frac{1}{4}.$

9.300. Решить неравенство $\log_{x^2-3} 729>3.$

9.301. Решить неравенство $\dfrac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)}>3.$

9.302. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\log_{0,25}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-1}.$$

9.303. Найти множество целых значений x, удовлетворяющих неравенству $\log_{0,3}(\sqrt{x+5}-x+1)>0$.

9.304. Указать такие значения x, при которых неравенство $y^2-(5^x-1)(y-1)>0$ выполняется для всех значений y.

9.305. Найти a из неравенства $x^2-2^{a+2}x-2^{a+3}+12>0$ при условии, что оно верно для любых значений x.

ГЛАВА 10

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1°. ***Произвольный треугольник*** (a, b, c — стороны; α, β, γ — противолежащие им углы; p — полупериметр; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; S — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S=\frac{1}{2}ah_a; \tag{10.1}$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha; \tag{10.2}$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона)}; \tag{10.3}$$

$$r=\frac{S}{p}; \tag{10.4}$$

$$R=\frac{abc}{4S}; \tag{10.5}$$

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}; \tag{10.6}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \text{ (теорема косинусов)}; \tag{10.7}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R \text{ (теорема синусов)}. \tag{10.8}$$

2°. ***Прямоугольный треугольник*** (a, b — катеты; c — гипотенуза; a_c, b_c — проекции катетов на гипотенузу):

$$S=\frac{1}{2}ab; \tag{10.9}$$

$$S=\frac{1}{2}ch_c; \tag{10.10}$$

$$r=\frac{a+b-c}{2}; \tag{10.11}$$

$$R=\frac{c}{2}; \tag{10.12}$$

$$a^2+b^2=c^2 \text{ (теорема Пифагора)}; \tag{10.13}$$

$$\frac{a_c}{h_c}=\frac{h_c}{b_c}; \tag{10.14}$$

$$\frac{a_c}{a}=\frac{a}{c}; \tag{10.15}$$

$$\frac{b_c}{b}=\frac{b}{c}; \tag{10.16}$$

$$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=b\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{ctg}\beta. \tag{10.17}$$

3°. ***Равносторонний треугольник***:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \tag{10.18}$$

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}; \tag{10.19}$$

$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}. \tag{10.20}$$

4°. ***Произвольный выпуклый четырехугольник*** (d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними; S — площадь):

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi. \tag{10.21}$$

5°. ***Параллелограмм*** (a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S=ah_a=ab\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi. \tag{10.22}$$

6°. ***Ромб***:

$$S=ah_a=a^2\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2. \tag{10.23}$$

7°. ***Прямоугольник*** (d — диагональ):

$$S=ab=\frac{1}{2}\ d^2\sin\varphi. \tag{10.24}$$

8°. ***Квадрат***:

$$S=a^2=\frac{1}{2}d^2. \tag{10.25}$$

9°. ***Трапеция*** (a и b — основания; h — расстояние между ними; l — средняя линия):

$$l=\frac{a+b}{2};\tag{10.26}$$

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h=lh.\tag{10.27}$$

10°. ***Описанный многоугольник*** (p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности):

$$S=pr.\tag{10.28}$$

11°. ***Правильный многоугольник*** (a_n — сторона правильного n-угольника; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности):

$$a_3=R\sqrt{3};\ a_4=R\sqrt{2};\ a_6=R;\tag{10.29}$$

$$S=\frac{na_nr}{2}.\tag{10.30}$$

12°. ***Окружность, круг*** (r — радиус; C — длина окружности; S — площадь круга):

$$C=2\pi r;\tag{10.31}$$

$$S=\pi r^2.\tag{10.32}$$

13°. ***Сектор*** (l — длина дуги, ограничивающей сектор; $n°$ — градусная мера центрального угла; α — радианная мера центрального угла):

$$l=\frac{\pi r n^\circ}{180^\circ}=r\alpha;\tag{10.33}$$

$$S=\frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{2}r^2\alpha.\tag{10.34}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

1°. *Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении* 2 : 1, *считая от вершины треугольника.*

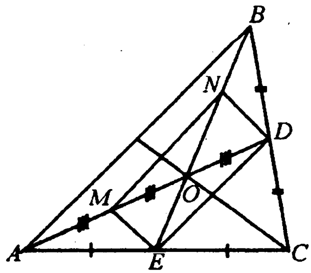


Рис. 10.1

□ Пусть медианы AD и BE пересекаются в точке O (рис. 10.1). Построим четырехугольник $MNDE$, где M и N — середины отрезков AO и BO. Тогда $MN \parallel AB$ и $MN=0{,}5AB$ как средняя линия ΔAOB; $ED \parallel AB$ и $ED=0{,}5AB$ как сред-

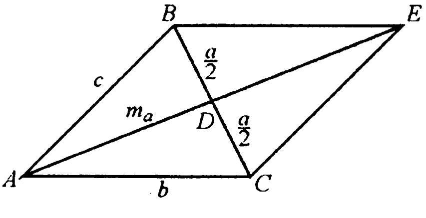


Рис. 10.2

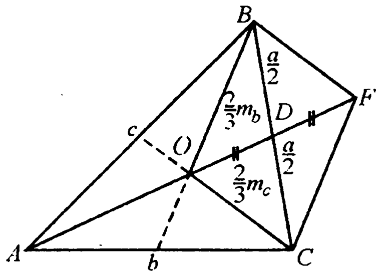


Рис. 10.3

няя линия ΔABC. Поэтому $MN \| ED$ и $MN = ED$, т. е. фигура $MNDE$ — параллелограмм с диагоналями MD и NE. Значит, $MO = OD$ и так как $MO = AM$, то $AM = MO = OD$. Итак, точка O делит медиану AD в отношении $AO : OD = 2 : 1$ и в таком же отношении эта точка делит медиану BE.

Очевидно, что в том же отношении должна делить и третью медиану точка ее пересечения как с первой, так и со второй медианами. При этом третья медиана не может пересечь их в точках, отличных от O, поскольку тогда на каждой медиане имелись бы две различные точки, делящие ее в отношении $2 : 1$, считая от вершины, что невозможно.■

2°. *Длина медианы треугольника выражается формулой*

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}, \qquad (10.35)$$

где a, b, c *— длины сторон треугольника.*

□ Продолжим медиану AD (рис.10.2) на расстояние $DE = AD$ и построим отрезки BE и EC. В полученном четырехугольнике $ABEC$ точка D пересечения диагоналей $AE = 2m_a$ и $BC = a$ делит каждую из них пополам; следовательно, $ABEC$ — параллелограмм. Теперь используем теорему о том, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон. Составив уравнение и решив его относительно m_a, получим искомое соотношение.■

3°. *Длина стороны треугольника выражается формулой*

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}, \qquad (10.36)$$

где m_a, m_b, m_c *— длины медиан треугольника.*

□ Отметим на медиане AD точку O пересечения медиан ΔABC (рис.10.3); согласно свойству 1°, она делит AD в отношении $AO : OD = 2 : 1$. Продолжим OD на расстояние $DF = OD = \frac{1}{3}m_a$ и соединим точку F с B и C.

Теперь составим уравнение, связывающее длины сторон $BO = \frac{2}{3}m_b$, $CO = \frac{2}{3}m_c$ и диагоналей $OF = \frac{2}{3}m_a$, $BC = a$ параллелограмма $OBFC$. Решив это уравнение относительно a, получим искомое соотношение.■

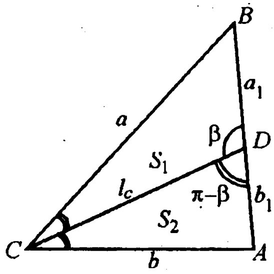


Рис. 10.4

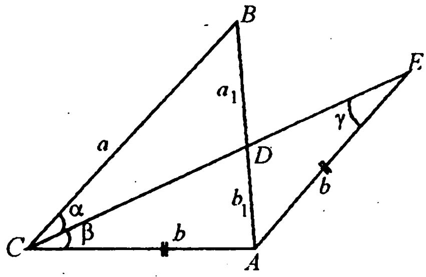


Рис. 10.5

4°. *Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам, т. е.*

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}, \tag{10.37}$$

где a, b — стороны треугольника, a_1, b_1 — прилегающие к ним отрезки стороны c.

□ I способ. Пусть CD — биссектриса ΔABC (рис. 10.4). Треугольники BCD и ACD с основаниями a_1 и b_1 имеют общую высоту. Пусть их площади равны соответственно S_1 и S_2; тогда $S_1 : S_2 = a_1 : b_1$. С другой стороны, в силу формулы (10.2) имеем $S_1=\frac{1}{2}a\cdot CD\sin\frac{C}{2}$, $S_2=\frac{1}{2}b\cdot CD\sin\frac{C}{2}$, откуда $S_1 : S_2 = a : b$. Сравнивая полученные пропорции, заключаем, что $a_1 : b_1 = a : b$.

II способ. Пусть $\angle BDC=\beta$ (рис.10.4); тогда $\angle ADC=\pi-\beta$. Согласно теореме синусов (10.8), имеем $a_1 : a=\sin\frac{C}{2}:\sin\beta$ (из ΔBCD) и $b_1 : b=\sin\frac{C}{2}:\sin(\pi-\beta)=\sin\frac{C}{2}:\sin\beta$ (из ΔACD). Сравнивая эти пропорции, заключаем, что $a_1 : a = b_1 : b$, откуда $a_1 : b_1 = a : b$.

III способ. Продолжим биссектрису CD до пересечения в точке E с прямой $AE \parallel CB$ (рис.10.5). Имеем $\angle\alpha=\angle\beta$ (по условию) и $\angle\alpha=\angle\gamma$ (углы при параллельных CB и AE и секущей CE). Сопоставив эти равенства, получим $\angle\beta=\angle\gamma$. Следовательно, $\Delta\ ACE$ — равнобедренный и $AE = AC = b$; $\Delta\ AED \sim \Delta\ BCD$ (вследствие равенства углов), откуда $a_1 : b_1 = a : b$.■

5°. *Длина биссектрисы треугольника выражается формулой*

$$l_c=\sqrt{ab-a_1b_1}, \tag{10.38}$$

где a и b — длины двух сторон треугольника ABC; a_1 и b_1 — отрезки третьей стороны (см. рис.10.4).

□ I способ. Применив теорему косинусов (10.7) к ΔBDC и ΔADC с равными углами $\overline{BCD}$ и $\overline{ACD}$, составим уравнение

$$\frac{l_c^2+a^2-a_1^2}{2al_c}=\frac{l_c^2+b^2-b_1^2}{2bl_c},$$

откуда $b(l_c^2+a^2-a_1^2)=a(l_c^2+b^2-b_1^2)$, или $l_c^2(b-a)-ab(b-a)=$ $=(a_1b)a_1-(ab_1)b_1$. Используя равенство $ab_1=a_1b$, вытекающее из формулы (10.37), имеем

$$(b-a)(l_c^2-ab)=ab_1a_1-a_1bb_1,\text{ или } (b-a)(l_c^2-ab)=-a_1b_1(b-a).$$

Полагая $b\neq a$, разделим обе части последнего равенства на $b-a$, откуда $l_c^2=ab-a_1b_1$.

II способ. Опишем около ΔABC окружность, продолжим биссектрису $CD=l_c$ до пересечения с окружностью в точке E (рис. 10.6) и соединим B с E. Так как $\Delta ADC\sim\Delta EBC$, то

$$\frac{l_c}{b}=\frac{a}{l_c+DE},\text{ или } ab=l_c(l_c+DE).$$

Учитывая, что $l_c\cdot DE=a_1b_1$, запишем последнее равенство в виде $ab=l_c^2+a_1b_1$, откуда $l_c=\sqrt{ab-a_1b_1}$. ■

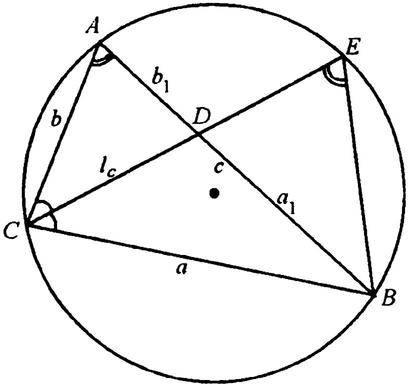


Рис. 10.6

6°. *Длина биссектрисы треугольника выражается через длины его сторон a, b и c по формуле*

$$l_c=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}. \tag{10.39}$$

□ Запишем соотношение (10.38) в виде $l_c^2=ab-a_1(c-a_1)$. Далее, используя формулу (10.37), получаем $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{c-a_1}$, т. е. $a_1=\frac{ac}{a+b}$. Отсюда находим $l_c^2=ab-\frac{ac}{a+b}\left(c-\frac{ac}{a+b}\right)$ и требуемое значение l_c. ■

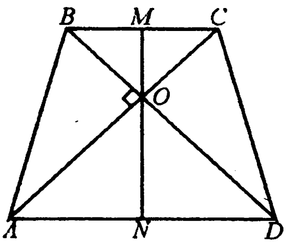


Рис. 10.7

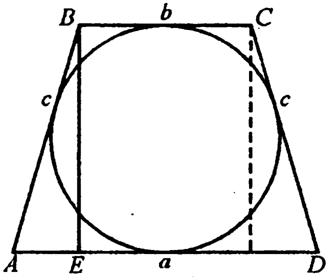


Рис. 10.8

7°. *Для всякого треугольника зависимость между его высотами h_a, h_b, h_c и радиусом r вписанной окружности выражается формулой*

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}. \qquad (10.40)$$

☐ Используя формулы (10.4) и (10.1), имеем $S = rp$, $2S = ah_a = bh_b = ch_c$. Отсюда находим

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{1}{S}=p\cdot\frac{1}{S}=\frac{1}{r}. \blacksquare$$

8°. *Площадь S равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты, т. е. $S = h^2$.*

☐ В равнобедренной трапеции осью симметрии является перпендикуляр MN к ее основаниям, проходящий через точку O пересечения диагоналей (рис.10.7).

Так как $\angle AOD = 90°$, то $AD = 2ON$ и $BC = 2OM$. Следовательно,

$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot MN=(ON+OM)MN=MN^2=h^2. \blacksquare$$

9°. *Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим ее оснований.*

☐ Так как в четырехугольнике, описанном около окружности, суммы длин противоположных сторон равны, то $a + b = 2c$ (рис.10.8), откуда $AB=\frac{a+b}{2}$.

Далее имеем $AE=\frac{a-b}{2}$ и из прямоугольного треугольника BEA находим $BE^2 = AB^2 - AE^2$, т. е. $h^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab. \blacksquare$

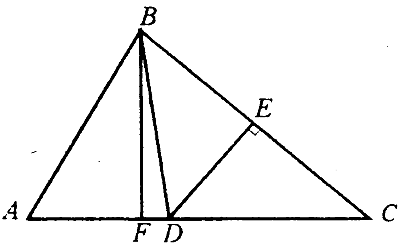


Рис. 10.9

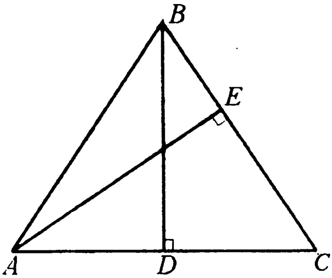


Рис. 10.10

Пример 1. Площадь треугольника ABC равна 30 см^2. На стороне AC взята точка D так, что $AD : DC = 2 : 3$. Длина перпендикуляра DE, проведенного к стороне BC, равна 9 см. Найти BC.

□ Проведем BD (рис.10.9); треугольники ABD и BDC имеют общую высоту BF, следовательно, их площади относятся как длины оснований, т. е. $S_{\Delta ABD} : S_{\Delta BDC} = AD : DC = 2 : 3$, откуда $S_{\Delta BDC} = \frac{3}{5} S_{\Delta ABC} = 18$ см^2. С другой стороны, согласно формуле (10.1), $S_{\Delta BDC} = 0{,}5 BC \cdot DE$, т. е. $18 = 0{,}5\ BC \cdot 9$, откуда $BC = 4$ см.■

Пример 2. В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и к боковой стороне, равны соответственно 10 и 12 см. Найти длину основания.

□ В ΔABC имеем $AB = BC$, $BD \perp AC$, $AE \perp BC$, $BD = 10$ см и $AE = 12$ см (рис.10.10). Пусть $AC = x$, $AB = BC = y$. Прямоугольные треугольники AEC и BDC подобны (угол C — общий); следовательно, $BC : AC = BD : AE$, или $y : x = 10 : 12 = 5 : 6$. Применяя теорему Пифагора (10.13) к ΔBDC, имеем $BC^2 = BD^2 + DC^2$, т. е. $y^2 = 100 + \frac{x^2}{4}$. Решив систему уравнений $\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ y^2 = 100 + \frac{x^2}{4}, \end{cases}$ получим $x = 15$.

Итак, $AC = 15$ см.■

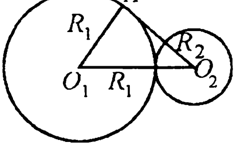


Рис. 10.11

Пример 3. Две окружности касаются внешним образом. К первой из них проведена касательная, проходящая через центр второй окружности. Расстояние от точки касания до центра второй окружности равно утроенному радиусу этой окружности. Во сколько раз длина первой окружности больше длины второй окружности?

□ Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, A — точка касания (рис.10.11). Тогда $O_1A = R_1$, $O_1O_2 = R_1 + R_2$, $O_2A = 3R_2$ (по условию). Требуется найти отноше-

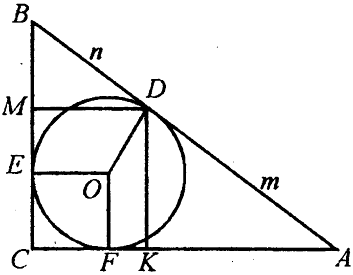


Рис. 10.12

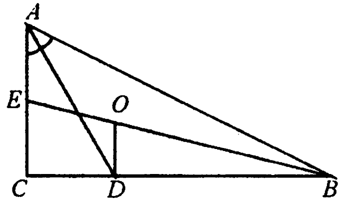


Рис. 10.13

ние $2\pi R_1 : 2\pi R_2 = R_1 : R_2$. В прямоугольном треугольнике O_1AO_2 $(\angle A = 90^\circ)$ имеем $O_1O_2^2 = O_1A^2 + O_2A^2$, или $(R_1 + R_2)^2 = R_1^2 + (3R_2)^2$. Упростив это равенство, получим $R_1 = 4R_2$, откуда $R_1 : R_2 = 4$.■

Пример 4. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной m и n. Доказать, что площадь треугольника $S = mn$. Найти площадь прямоугольника, вписанного в данный треугольник так, что одна его вершина совпадает с вершиной прямого угла, а противоположная вершина — с точкой касания окружности и гипотенузы.

□ Пусть D, E, F — точки касания (рис.10.12); тогда $AD = AF = m$, $BD = BE = n$, $CE = CF = r$ — радиус вписанной окружности, $p = r + m + n$ — полупериметр. Далее, используя формулу (10.9), находим

$$S = \frac{(r+m)(r+n)}{2}, \text{ или } 2S = r^2 + r(m+n) + mn = r(r+m+n) + mn = rp + mn.$$

Так как $rp = S$ в силу равенства (10.4), то $2S = S + mn$, откуда $S = mn$.

Пусть $CMDK$ — вписанный прямоугольник. Поскольку $DK \parallel BC$, используя гомотетию с центром в A и коэффициентом $k = \dfrac{m}{m+n}$, найдем площадь S_1 треугольника AKD:

$$S_1 = S_{\Delta ABC} \cdot \frac{m^2}{(m+n)^2} = \frac{m^3 n}{(m+n)^2}.$$

Аналогично для площади S_2 треугольника BMD имеем

$$S_2 = S_{\Delta ABC} \cdot \frac{n^2}{(m+n)^2} = \frac{mn^3}{(m+n)^2}.$$

Искомая площадь

$$S_{CMDK} = mn - \frac{m^3 n + mn^3}{(m+n)^2} = \frac{2m^2 n^2}{(m+n)^2}. \blacksquare$$

Пример 5. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса острого угла; отрезок, соединяющий ее основание с точкой пересечения медиан, перпендикулярен катету. Найти углы треугольника.

□ Пусть BE — медиана, O — точка пересечения медиан, AD — биссектриса и $OD \perp BC$ (рис.10.13). Согласно свойству точки пересечения медиан, $EO : OB = 1 : 2$. Так как $OD \| EC$, то по теореме Фалеса $CD : DB = EO : OB = 1 : 2$. Используя свойство биссектрисы треугольника, получаем $CD : DB = AC : AB$, т. е. $AC : AB = 1 : 2$. Следовательно, $\sin B = 0{,}5$, откуда $\angle B = 30°$, $\angle A = 60°$. ■

Группа А

10.001. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найти катеты треугольника.

10.002. Найти диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

10.003. В равнобедренной трапеции даны основания $a = 21$ см, $b = 9$ см и высота $h = 8$ см. Найти радиус описанного круга.

10.004. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной m и n, считая от вершины острого угла. Определить диагонали ромба.

10.005. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.

10.006. Две окружности радиусов $R = 3$ см и $r = 1$ см касаются внешним образом. Найти расстояния от точки касания окружностей до их общих касательных.

10.007. Около окружности с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найти основания трапеции.

10.008. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4 см, проведена медиана боковой стороны. Найти основание треугольника, если медиана равна 3 см.

10.009. В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а боковая сторона равна 10 см. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами.

10.010. Каждая сторона правильного треугольника разделена на три равные части, и соответственные точки деления, считая в одном направлении, соединены между собой. В полученный правильный треугольник вписана окружность радиуса $r = 6$ см. Определить стороны треугольников.

10.011. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны равна 5 см. Найти длины боковых сторон.

10.012. Из точки A, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.

10.013. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18 см. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне. Найти отрезки, на которые центр окружности делит бльшую сторону треугольника.

10.014. Хорда окружности равна 10 см. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Определить радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12 см.

10.015. Через концы дуги окружности, содержащей 120°, проведены касательные, и в фигуру, ограниченную этими касательными и данной дугой, вписана окружность. Доказать, что ее длина равна длине исходной дуги.

10.016. В сектор AOB с радиусом R и углом 90° вписана окружность, касающаяся отрезков OA, OB и дуги AB. Найти радиус окружности.

10.017. Дана точка P, удаленная на 7 см от центра окружности радиуса 11 см. Через эту точку проведена хорда длиной 18 см. Каковы длины отрезков, на которые делится хорда точкой P?

10.018. Найти длины сторон AB и AC треугольника ABC, если $BC = 8$ см, а длины высот, проведенных к AC и BC, равны соответственно 6,4 и 4 см.

10.019. Площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна Q^2. Доказать, что радиус окружности равен $\frac{2Q\sqrt[4]{3}}{3}$.

10.020. В пересечение двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6 см. Найти радиус окружностей.

10.021. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найти стороны треугольника.

10.022. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная к его гипотенузе, делит прямой угол в отношении 1 : 2.

10.023. Дан квадрат, две вершины которого лежат на окружности радиуса R, две другие — на касательной к этой окружности. Найти длину диагонали квадрата.

10.024. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4 см, а длины непараллельных сторон — 20 и 13 см. Найти высоту трапеции.

10.025. Общая хорда двух окружностей служит для одной из них стороной вписанного квадрата, а для другой — стороной правильного вписанного шестиугольника. Найти расстояние между центрами окружностей, если радиус меньшей из них равен r (рассмотреть два возможных случая расположения окружностей).

10.026. Из внешней точки к окружности проведены секущая длиной 12 см и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Определить длину касательной.

10.027. Каждая из трех равных окружностей радиуса r касается двух других. Найти площадь треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям.

10.028. Основания равнобедренной трапеции равны a и b, боковая сторона равна c, а диагональ равна d. Доказать, что $d^2 = ab + c^2$.

10.029. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и служит для одной окружности стороной правильного вписанного треугольника, а для другой — стороной вписанного квадрата. Определить расстояние между центрами окружностей (рассмотреть два возможных случая).

10.030. На сторонах квадрата вне его построены правильные треугольники, и их вершины последовательно соединены. Определить отношение периметра полученного четырехугольника к периметру данного квадрата.

10.031. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиуса 2. Найти сторону ромба.

10.032. В треугольнике длины двух сторон составляют 6 и 3 см. Найти длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.

10.033. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника.

10.034. Из одной точки проведены две касательные к окружности. Длина каждой касательной 12 см, а расстояние между точками касания 14,4 см. Определить радиус окружности.

10.035. Из точки A проведены две прямые, касающиеся окружности радиуса R в точках B и C так, что треугольник ABC — равносторонний. Найти его площадь.

10.036. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6 см, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти стороны треугольника.

10.037. Дан правильный треугольник ABC. Точка K делит сторону AC в отношении 2 : 1, а точка M — сторону AB в отношении 1 : 2 (считая в обоих случаях от вершины A). Показать, что длина отрезка KM равна радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

10.038. Периметр параллелограмма равен 90 см, а острый угол содержит 60°. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1 : 3. Найти стороны параллелограмма.

10.039. Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длины сторон трапеции, если ее площадь равна 12 см^2, а длина высоты равна 2 см.

10.040. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки длиной 15 и 20 см. Найти площадь треугольника и длину вписанной полуокружности.

10.041. Величина одного из углов параллелограмма равна 60°, а меньшая диагональ равна $2\sqrt{31}$ см. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к большей стороне, равна $0{,}5\sqrt{75}$ см. Найти длины сторон и большей диагонали параллелограмма.

10.042. Один из углов трапеции равен 30°, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а одно из оснований равно 8 см.

10.043. В окружность, диаметр которой равен $\sqrt{12}$, вписан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен другой правильный треугольник, в который вписана новая окружность. Найти радиус этой окружности.

10.044. В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB. Найти радиус окружности.

10.045. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найти радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно $\sqrt{3}+1$.

10.046. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе треугольника. Каков радиус окружности, если длины катетов равны 5 и 12?

10.047. Периметр прямоугольного треугольника ABC $(\angle C = 90°)$ равен 72 см, а разность между длинами медианы CM и высоты CK равна 7 см. Найти длину гипотенузы.

10.048. В острый угол, равный 60°, вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен r. Найти радиус большей окружности.

10.049. Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40 см. Найти катеты треугольника.

10.050. Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3 см, а один из катетов равен 10 см.

10.051. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найти радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней окружностей равны 6 и 4 см.

10.052. Окружность касается одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника и проходит через вершину противоположного острого угла. Найти радиус окружности, если ее центр лежит на гипотенузе, а катет треугольника равен a.

10.053. В параллелограмме $ABCD$ высота, проведенная из вершины B тупого угла к стороне AD, делит ее в отношении 5 : 3, считая от вершины D. Найти отношение $AC : BD$, если $AD : AB = 2$.

10.054. На основании равнобедренного треугольника, равном 8 см, как на хорде построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника. Найти радиус окружности, если длина высоты, проведенной к основанию треугольника, равна 3 см.

10.055. В равнобедренный треугольник с углом 120° при вершине и боковой стороной a вписана окружность. Найти радиус этой окружности.

10.056. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри правильного многоугольника, до всех прямых, содержащих его стороны, есть величина постоянная.

10.057. Диагональ прямоугольной трапеции и ее боковая сторона равны. Найти длину средней линии, если высота трапеции равна 2 см, а боковая сторона равна 4 см.

10.058. В правильный треугольник вписан квадрат, сторона которого равна m. Найти сторону треугольника.

10.059. В окружности радиуса r проведена хорда, равная $0{,}5r$. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Найти расстояние между касательной и секущей.

10.060. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны соответственно 2 и 5 см. Найти катеты треугольника.

10.061. Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 и 15 см. Разность длин сторон параллелограмма равна 7 см. Найти длины сторон параллелограмма и его диагоналей.

10.062. В большем из двух концентрических кругов проведена хорда, равная 32 см и касающаяся меньшего круга. Определить длину радиуса каждого из кругов, если ширина образовавшегося кольца равна 8 см.

10.063. В треугольник вписан ромб так, что один угол у них общий, а противоположная вершина делит сторону треугольника в отношении 2 : 3. Диагонали ромба равны m и n. Найти стороны треугольника, содержащие стороны ромба.

10.064. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, основание равно 12 см. К окружности, вписанной в треугольник, проведены касательные, параллельные высоте треугольника и отсекающие от данного треугольника два прямоугольных треугольника. Найти длины сторон этих треугольников.

10.065. В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности. Найти сторону треугольника, если радиус малой окружности равен r.

10.066. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

10.067. Внутри круга радиуса 15 см взята точка M на расстоянии 13 см от центра. Через эту точку проведена хорда длиной 18 см. Найти длины отрезков, на которые точка M делит хорду.

10.068. Длина основания треугольника равна 36 см. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.

10.069. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 15 см, а радиус вписанной в него окружности равен 6 см. Найти стороны треугольника.

10.070. В круговой сектор с центральным углом 120° вписан круг. Найти радиус описанного круга, если радиус данного круга равен R.

10.071. Найти сторону правильного шестиугольника, равновеликого равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

10.072. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, а боковая сторона равна 39 см. Определить радиус вписанного круга.

10.073. В квадрате со стороной 12 см середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Найти радиус круга, вписанного в образовавшийся треугольник.

10.074. Одна из двух параллельных прямых касается окружности радиуса R в точке A, а другая пересекает эту окружность в точках B и C. Выразить площадь треугольника ABC как функцию расстояния x между прямыми.

10.075. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 12 см. Найти расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

10.076. Найти отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, к высоте, опущенной на гипотенузу.

10.077. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20 см. Найти биссектрису угла при основании треугольника.

10.078. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8 см. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до центра описанной около него окружности.

10.079. Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 24 и 18 см.

10.080. Доказать, что если в четырехугольнике диагонали лежат на биссектрисах его углов, то такой четырехугольник есть ромб.

10.081. Площадь прямоугольника равна 9 см^2, а величина одного из углов, образованного диагоналями, равна 120°. Найти стороны прямоугольника.

10.082. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S, а высота трапеции в 2 раза меньше ее боковой стороны. Определить радиус вписанного круга.

10.083. Сумма длин диагоналей ромба равна m, а его площадь равна S. Найти сторону ромба.

10.084. Периметр ромба равен 2 м, длины его диагоналей относятся как 3 : 4. Найти площадь ромба.

10.085. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса R. Верхнее основание трапеции в 2 раза меньше ее высоты. Найти площадь трапеции.

10.086. На каждой медиане правильного треугольника взята точка, делящая медиану в отношении 3 : 1, считая от вершины. Во сколько раз площадь треугольника с вершинами в этих трех точках меньше площади исходного треугольника?

10.087. В равнобедренный треугольник вписан квадрат единичной площади, одна сторона которого лежит на основании треугольника. Найти площадь треугольника, если известно, что центры масс треугольника и квадрата совпадают (центр масс треугольника лежит на пересечении его медиан).

10.088. В окружность радиуса R вписана трапеция, у которой нижнее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Найти площадь трапеции.

10.089. Найти площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника, если основание этого треугольника равно 24 см, а боковая сторона равна 13 см.

10.090. Расстояние от центра круга до хорды длиной 16 см равно 15 см. Найти площадь треугольника, описанного около круга, если периметр треугольника равен 200 см.

10.091. Найти площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию, если ее большее основание равно a, а угол при меньшем основании равен 120°.

10.092. В окружность радиуса R вписан треугольник с углами 15° и 60°. Найти площадь треугольника.

10.093. Периметр прямоугольного треугольника равен $2p$, а гипотенуза равна c. Определить площадь круга, вписанного в треугольник.

10.094. Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если проекции катетов на гипотенузу равны 9 и 16 м.

10.095. Площадь равнобедренного треугольника равна $\frac{1}{3}$ площади квадрата, построенного на основании этого треугольника. Длины боковых сторон треугольника короче длины его основания на 1 см. Найти длины сторон и высоты треугольника, проведенной к основанию.

10.096. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна $32\sqrt{3}$ см^2. Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\frac{\pi}{3}$.

10.097. Площадь прямоугольного треугольника равна $2\sqrt{3}$ см^2. Определить его высоту, проведенную к гипотенузе, если она делит прямой угол в отношении 1 : 2.

10.098. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как 2 : 1. В каком отношении, считая от вершины, она делит боковые стороны?

10.099. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 8 см^2. Определить стороны трапеции, если угол при основании содержит 30°.

10.100. Равносторонний шестиугольник $ABCDEF$ состоит из двух трапеций, имеющих общее основание CF. Известно, что AC = 13 см, AE = 10 см. Найти площадь шестиугольника.

10.101. Найти площадь правильного треугольника, вписанного в квадрат со стороной a при условии, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной квадрата.

10.102. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3 см, периметр равен 42 см. Найти площадь трапеции.

10.103. Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если высота, проведенная к гипотенузе, делит последнюю на отрезки длиной 25,6 и 14,4 см.

10.104. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, площадь его равна 24 см^2. Найти площадь описанного круга.

10.105. Найти площадь равнобедренного треугольника с углом 120°, если радиус вписанного круга равен $\sqrt[4]{12}$ см.

10.106. На сторонах равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой c вне этого треугольника построены квадраты. Центры этих квадратов соединены между собой. Найти площадь полученного треугольника.

10.107. В квадрат вписан другой квадрат, вершины которого лежат на сторонах первого, а стороны составляют со сторонами первого квадрата углы в 60°. Какую часть площади данного квадрата составляет площадь вписанного?

10.108. Найти площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной a.

10.109. На сторонах равностороннего треугольника вне его построены квадраты. Их вершины, лежащие вне треугольника, последовательно соединены. Определить площадь полученного шестиугольника, если сторона данного треугольника равна a.

10.110. Квадрат со стороной a срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Определить площадь этого восьмиугольника.

10.111. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна a. Вычислить площадь квадрата, вписанного в ту же окружность.

10.112. Вычислить отношение площадей квадрата, правильного треугольника и правильного шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

10.113. Сторона равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна a. Вычислить площадь отсекаемого ею сегмента.

10.114. Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна a. Вычислить площадь отсекаемого ею сегмента.

10.115. На диаметре $2R$ полуокружности построен правильный треугольник, сторона которого равна диаметру. Треугольник расположен по ту же сторону от диаметра, что и полуокружность. Вычислить площадь той части треугольника, которая лежит вне круга.

10.116. Круг радиуса R обложен четырьмя равными кругами, касающимися данного так, что каждые два соседних из этих четырех кругов касаются друг друга. Вычислить площадь одного из этих кругов.

10.117. В точках пересечения двух окружностей с радиусами 4 и 8 см касательные к ним взаимно перпендикулярны. Вычислить площадь фигуры O_1ABO_2, где AB — общая касательная к окружностям, а O_1 и O_2 — их центры.

10.118. Определить сторону ромба, зная, что площадь его равна S, а длины диагоналей относятся как $m : n$.

10.119. Периметр ромба равен $2p$; длины диагоналей относятся как $m : n$. Вычислить площадь ромба.

10.120. Две окружности радиуса R с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга. Их пересекает прямая в точках A, B, C и D так, что $AB = BC = CD$. Найти площадь четырехугольника O_1ADO_2.

10.121. Вычислить площадь прямоугольной трапеции, если ее острый угол равен 60°, меньшее основание равно a, а бо́льшая боковая сторона равна b.

10.122. Большее основание трапеции имеет длину 24 см. Найти длину ее меньшего основания, если известно, что расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 4 см.

10.123. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\frac{\pi}{6}$.

10.124. Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Найти отношение площадей треугольников, прилегающих к боковым сторонам трапеции.

10.125. На большем катете треугольника как на диаметре построена полуокружность. Найти ее длину, если длина меньшего катета 30 см, а хорда, соединяющая вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы и полуокружности, равна 24 см.

10.126. На диаметре полукруга построен правильный треугольник, стороны которого равны диаметру. Как относятся площади частей треугольника, лежащих вне и внутри круга?

10.127. В правильный треугольник со стороной, равной a, вписана окружность, в которую вписан правильный шестиугольник. Найти площадь шестиугольника.

10.128. Около квадрата, сторона которого равна a, описана окружность, а около окружности — правильный шестиугольник. Определить площадь шестиугольника.

10.129. В равнобедренную трапецию вписан круг. Одна из боковых сторон делится точкой касания на отрезки длиной m и n. Определить площадь трапеции.

10.130. Сторона квадрата, вписанного в окружность, отсекает сегмент, площадь которого равна $(2\pi - 4)$ см^2. Найти площадь квадрата.

10.131. В ромб с острым углом 30° вписан круг, площадь которого равна Q. Найти площадь ромба.

10.132. В круговой сектор, дуга которого содержит 60°, вписан круг. Найти отношение площади этого круга к площади сектора.

10.133. Из точки M, находящейся на расстоянии a от окружности, проведена к этой окружности касательная длиной $2a$. Найти площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность.

10.134. В равнобедренной трапеции одно основание равно 40 см, а другое равно 24 см. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти ее площадь.

10.135. Основание треугольника равно 30 см, а боковые стороны равны 26 и 28 см. Высота разделена в отношении 2 : 3 (считая от вершины), и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Определить площадь полученной при этом трапеции.

10.136. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5 см. Определить площадь треугольника.

10.137. Хорда AB постоянной длины скользит своими концами по окружности радиуса R. Точка C этой хорды, находящаяся на расстояниях a и b от концов

A и *B* хорды, описывает при полном обороте окружность. Вычислить площадь кольца, заключенного между данной окружностью и окружностью, описанной точкой *C*.

10.138. Три равные окружности радиуса r попарно касаются одна другой. Вычислить площадь фигуры, расположенной вне окружностей и ограниченной их дугами, заключенными между точками касания.

10.139. На сторонах ромба как на диаметрах описаны полуокружности, обращенные внутрь ромба. Определить площадь полученной розетки, если диагонали ромба равны a и b.

10.140. Доказать, что если через вершины четырехугольника провести прямые, параллельные его диагоналям, то площадь параллелограмма, определяемого этими прямыми, в 2 раза больше площади данного четырехугольника.

10.141. Определить боковые стороны равнобедренной трапеции, если ее основания равны 8 и 14 см, а площадь равна 44 см^2.

10.142. В правильный треугольник вписана окружность, а в нее — правильный шестиугольник. Найти отношение площадей треугольника и шестиугольника.

10.143. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги в 60° и 120°. Найти отношение площадей этих кругов.

10.144. В прямоугольнике проведены биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне. На какие части делится площадь прямоугольника этими биссектрисами, если стороны прямоугольника равны 2 и 4 м?

10.145. Высота ромба равна 12 см, а одна из его диагоналей равна 15 см. Найти площадь ромба.

10.146. Длина высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника, равна 25 см, а радиус вписанной окружности равен 8 см. Найти длину основания треугольника.

10.147. В параллелограмме с периметром 32 см проведены диагонали. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 8 см. Найти длины сторон параллелограмма.

10.148. Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60°.

10.149. Круг, радиус которого равен R, разделен на два сегмента хордой, равной стороне вписанного квадрата. Определить площадь меньшего из этих сегментов.

10.150. Определить площадь кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями, длины которых равны C_1 и C_2 ($C_1 > C_2$).

10.151. Круг разделен на два сегмента хордой, равной стороне правильного вписанного треугольника. Определить отношение площадей этих сегментов.

10.152. В правильный шестиугольник, сторона которого равна a, вписана окружность, и около него же описана окружность. Определить площадь кругового кольца, заключенного между этими окружностями.

10.153. Круг радиуса R разделен двумя концентрическими с ним окружностями на три равновеликие фигуры. Найти радиусы этих окружностей.

10.154. Площадь кругового кольца равна S. Радиус большей окружности равен длине меньшей окружности. Определить радиус последней.

10.155. В круге радиуса R по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды, одна из которых равна стороне правильного вписанного треугольника, а другая — стороне правильного вписанного шестиугольника. Определить площадь части круга, содержащейся между хордами.

10.156. В круг радиуса R вписаны два правильных треугольника так, что при их взаимном пересечении каждая из сторон разделилась на три равных отрезка. Найти площадь пересечения этих треугольников.

10.157. Через точки R и E, принадлежащие сторонам AB и AD параллелограмма $ABCD$ и такие, что $AR=\frac{2}{3}AB$, $AE=\frac{1}{3}AD$, проведена прямая. Найти отношение площади параллелограмма к площади полученного треугольника.

10.158. Три окружности радиусов $R_1 = 6$ см, $R_2 = 7$ см, $R_3 = 8$ см попарно касаются друг друга. Определить площадь треугольника, вершины которого совпадают с центрами этих окружностей.

10.159. Найти отношение площадей правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника, длины сторон которых равны.

10.160. В трапеции, площадь которой равна 594 м^2, высота 22 м, а разность параллельных сторон равна 6 м, найти длину каждой из параллельных сторон.

10.161. Через вершину прямого угла прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 м проведен перпендикуляр к гипотенузе. Вычислить площади образовавшихся треугольников.

10.162. Вычислить площадь равнобедренного треугольника, если длина высоты, проведенной к боковой стороне, равна 12 см, а длина основания равна 15 см.

10.163. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. Найти отношение площадей описанного и вписанного в треугольник кругов.

10.164. Вычислить площадь трапеции $ABCD$ $(AD \| BC)$, если длины ее оснований относятся как 5 : 3 и площадь треугольника ADM равна 50 см^2, где M — точка пересечения прямых AB и CD.

10.165. В правильный треугольник вписана окружность и около него описана окружность. Найти площадь образовавшегося кольца, если сторона треугольника равна a.

10.166. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 3 см. Найти площадь треугольника.

10.167. Доказать, что площадь трапеции равна произведению длины одной из непараллельных сторон и длины перпендикуляра, проведенного через середину другой боковой стороны к первой.

10.168. Доказать, что если диаметр полукруга разделить на две произвольные части и на каждой из них построить как на диаметре полуокружность (внутри данного полукруга), то площадь, заключенная между тремя полуокружностями, равна площади круга, диаметр которого равен длине перпендикуляра к диаметру полукруга, проведенного в точке деления до пересечения с окружностью.

10.169. В круг радиуса R вписан прямоугольник, площадь которого вдвое меньше площади круга. Определить стороны прямоугольника.

10.170. Определить площадь круга, вписанного в сектор круга радиуса R с хордой $2a$.

10.171. Основания трапеции равны a и b $(a > b)$, углы при большем основании равны $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$. Найти площадь трапеции.

10.172. В ромб с острым углом 30° вписан круг, а в круг — квадрат. Найти отношение площади ромба к площади квадрата.

10.173. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 см. Найти длину гипотенузы.

10.174. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить радиус круга, если угол при основании трапеции равен 30°.

10.175. Найти площадь равнобедренного треугольника, если основание его равно a, а длина высоты, проведенной к основанию, равна длине отрезка, соединяющего середины основания и боковой стороны.

10.176. Доказать, что в параллелограмме $ABCD$ расстояния от любой точки диагонали AC до сторон BC и CD обратно пропорциональны длинам этих сторон.

10.177. Доказать, что отношение периметра треугольника к одной из его сторон равно отношению высоты, опущенной на эту сторону, к радиусу вписанной окружности.

10.178. Найти длины сторон равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, если известно, что длины его высот AN и BM равны соответственно n и m.

10.179. Ромб, у которого сторона равна меньшей диагонали, равновелик кругу радиуса R. Определить сторону ромба.

10.180. Вычислить площадь трапеции по разности оснований, равной 14 см, и двум непараллельным сторонам, равным 13 и 15 см, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.

10.181. В квадрате, сторона которого a, середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Найти площадь внутреннего треугольника.

10.182. Около квадрата со стороной a описана окружность. В один из образовавшихся сегментов вписан квадрат. Определить площадь этого квадрата.

10.183. В равнобедренную трапецию вписан круг. Доказать, что отношение площади круга к площади трапеции равно отношению длины окружности к периметру трапеции.

10.184. Вычислить площадь трапеции, параллельные стороны которой содержат 16 и 44 см, а непараллельные — 17 и 25 см.

10.185. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 5, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

10.186. Длины оснований равнобедренной трапеции относятся как 5 : 12, а длина ее высоты равна 17 см. Вычислить радиус окружности, описанной около трапеции, если известно, что ее средняя линия равна высоте.

10.187. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна H и вдвое больше своей проекции на боковую сторону. Найти площадь треугольника.

10.188. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, относится к радиусу вписанной в него окружности как 5 : 2. Найти площадь треугольника, если один из его катетов равен a.

10.189. В сегмент, дуга которого равна 60°, вписан квадрат. Вычислить площадь квадрата, если радиус круга равен $2\sqrt{3}+\sqrt{17}$.

10.190. В треугольнике длины сторон относятся как 2 : 3 : 4. В него вписан полукруг с диаметром, лежащим на большей стороне. Найти отношение площади полукруга к площади треугольника.

Группа Б

10.191. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее боковой стороны на расстояния 3 и 9 см. Найти стороны трапеции.

10.192. Две окружности касаются внешним образом. Их радиусы относятся как 3 : 1, а длина их общей внешней касательной равна $6\sqrt{3}$. Определить периметр фигуры, образованной внешними касательными и внешними частями окружностей.

10.193. Внутри прямого угла дана точка M, расстояния от которой до сторон угла равны 4 и 8 см. Прямая, проходящая через точку M, отсекает от прямого угла треугольник площадью 100 см^2. Найти катеты треугольника.

10.194. Точка C_1 — середина стороны AB треугольника ABC; угол COC_1, где O — центр окружности, описанной около треугольника, является прямым. Доказать, что $|\angle B-\angle A|=90°$.

10.195. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 и 23 см. Найти радиус окружности.

10.196. Дан треугольник ABC, в котором $2h_c=AB$ и $\angle A=75°$. Найти величину угла C.

10.197. В прямоугольный треугольник со сторонами 6, 8 и 10 см вписана окружность. Через центр окружности проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Вычислить длины средних отрезков сторон треугольника, отсекаемых построенными прямыми.

10.198. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найти стороны трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис равны 15 и 13 см.

10.199. Основания трапеции равны 4 и 16 см. Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

10.200. В треугольник вписан ромб со стороной m так, что один угол у них общий, а противоположная вершина ромба лежит на стороне треугольника и делит эту сторону на отрезки длиной p и q. Найти стороны треугольника.

10.201. Дан треугольник ABC такой, что $AB = 15$ см, $BC = 12$ см и $AC = 18$ см. В каком отношении центр вписанной в треугольник окружности делит биссектрису угла C?

10.202. Дан равнобедренный треугольник с основанием, равным a, и боковой стороной, равной b. Доказать, что центр вписанной окружности делит биссектрису угла при основании в отношении $(a + b) : b$, считая от вершины угла.

10.203. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17 см. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами данных хорд равно 5 см.

10.204. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 10 и 12 см. Найти радиус окружности, если расстояние от середины меньшей хорды до большей хорды равно 4 см.

10.205. В некоторый угол вписана окружность радиуса 5 см. Длина хорды, соединяющей точки касания, равна 8 см. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найти стороны полученной трапеции.

10.206. Какими целыми числами выражаются стороны равнобедренного треугольника, если радиус вписанной окружности равен $\frac{3}{2}$ см, а описанной $\frac{25}{8}$ см?

10.207. В треугольник со сторонами 10, 17 и 21 см вписан прямоугольник с периметром 24 см так, что одна из его сторон лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника.

10.208. Из вершины острого угла ромба проведены перпендикуляры к прямым, содержащим стороны ромба, которым не принадлежит эта вершина. Длина каждого перпендикуляра равна 3 см, а расстояние между их основаниями равно $3\sqrt{3}$ см. Вычислить длины диагоналей ромба.

10.209. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найти радиус окружности.

10.210. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 2 и 14 и боковой стороной 10.

10.211. На большем катете прямоугольного треугольника как на диаметре построена окружность. Определить радиус этой окружности, если меньший катет треугольника равен 7,5 см, а длина хорды, соединяющей вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы и окружности, равна 6 см.

10.212. Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят ее на четыре дуги. Найти расстояния от середины одной из бóльших дуг до вершин прямоугольника, если стороны его равны 24 и 7 см.

10.213. Центр полуокружности, вписанной в прямоугольный треугольник так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40. Найти длину дуги полуокружности, заключенной между точками ее касания с катетами.

10.214. Около круга радиуса 3 описан равнобедренный треугольник с острым углом 30° при основании. Определить стороны треугольника.

10.215. В прямоугольном треугольнике медианы катетов равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найти гипотенузу треугольника.

10.216. Две окружности, радиусы которых 4 и 8, пересекаются под прямым углом. Определить длину их общей касательной.

10.217. Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять трапеция, чтобы в нее можно было вписать и около нее можно было описать окружность?

10.218. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции равны 4 и 12 см.

10.219. В окружности радиуса R проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды AB и CD. Доказать, что $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

10.220. Показать, что сумма расстояний от любой точки, взятой на стороне правильного треугольника, до двух других его сторон есть величина постоянная.

10.221. Две стороны треугольника равны 6 и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти третью сторону треугольника.

10.222. Окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом. Боковые стороны равнобедренного треугольника являются их общими касательными, а основание касается большей из окружностей. Найти основание треугольника.

10.223. Периметр прямоугольного треугольника равен 60 см. Найти его стороны, если высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.

10.224. Дан равнобедренный треугольник с основанием 12 см и боковой стороной 18 см. Отрезки какой длины нужно отложить от вершины треугольника на его боковых сторонах, чтобы, соединив их концы, получить трапецию с периметром, равным 40 см?

10.225. Две окружности разных радиусов касаются друг друга внешним образом. Найти угол, определяемый хордами, соединяющими точку касания окружностей с точками касания их общей внешней касательной.

10.226. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Найти стороны треугольника, если центр вписанной окружности удален от вершины прямого угла на расстояние $\sqrt{8}$ см.

10.227. Внутри равностороннего треугольника взята точка M, отстоящая от его сторон на расстояния b, c, d. Найти высоту треугольника.

10.228. Один конец диаметра полуокружности совпадает с вершиной угла при основании равнобедренного треугольника, а другой принадлежит этому основанию. Найти радиус полуокружности, если она касается одной боковой стороны и делит другую на отрезки длиной 5 и 4 см, считая от основания.

10.229. В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 и 5 см и диагональю, равной 6 см. Найти стороны треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника.

10.230. Высота, основание и сумма боковых сторон треугольника равны соответственно 24, 28 и 56 см. Найти боковые стороны.

10.231. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса r. Найти стороны трапеции, если ее меньшее основание равно $\frac{4r}{3}$.

10.232. В треугольник с боковыми сторонами 9 и 15 см вписан параллелограмм так, что одна из его сторон длиной 6 см лежит на основании треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника. Найти другую сторону параллелограмма и основание треугольника.

10.233. Найти среднюю линию равнобедренной трапеции с высотой h, если боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 120°.

10.234. Окружность радиуса 13 см касается двух смежных сторон квадрата со стороной 18 см. На какие два отрезка делит окружность каждую из двух других сторон квадрата?

10.235. В равнобедренном треугольнике угол при основании содержит 72°, а биссектриса этого угла имеет длину, равную m. Найти длины сторон треугольника.

10.236. В равнобедренном треугольнике угол при вершине содержит 36°, а биссектриса угла при основании равна $\sqrt{20}$. Найти длины сторон треугольника.

10.237. Диагонали четырехугольника равны, а длины его средних линий равны p и q. Найти площадь четырехугольника.

10.238. Большее основание трапеции в 2 раза больше ее меньшего основания. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти отношение высоты каждой из двух полученных трапеций к высоте данной трапеции.

10.239. Найти радиус круга, в сегмент которого, соответствующий хорде длиной 6 см, вписан квадрат со стороной 2 см.

10.240. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а боковая сторона равна 18 см. К боковым сторонам треугольника проведены высоты. Вычислить длину отрезка, концы которого совпадают с основаниями высот.

10.241. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной b, проведены биссектрисы углов при основании. Отрезок прямой между точками пересечения биссектрис с боковыми сторонами равен m. Определить основание треугольника.

10.242. Основание равнобедренного треугольника равно 8, а боковая сторона равна 12. Найти длину отрезка, соединяющего точки пересечения биссектрис углов при основании с боковыми сторонами треугольника.

10.243. Внутри угла в 60° расположена точка, удаленная от сторон угла на расстояния $\sqrt{7}$ и $2\sqrt{7}$ см. Найти расстояние от этой точки до вершины угла.

10.244. В треугольник вписана окружность радиуса 3 см. Вычислить длины сторон треугольника, если одна из них разделена точкой касания на отрезки длиной 4 и 3 см.

10.245. В угол вписаны три окружности — малая, средняя и большая. Большая окружность проходит через центр средней, а средняя — через центр малой.

Определить радиусы средней и большой окружностей, если радиус меньшей равен r и расстояние от ее центра до вершины угла равно a.

10.246. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния 8 и 4 см. Найти среднюю линию трапеции.

10.247. Основания двух правильных треугольников со сторонами a и $3a$ лежат на одной и той же прямой. Треугольники расположены по разные стороны от прямой и не имеют общих точек, а расстояние между ближайшими концами их оснований равно $2a$. Найти расстояние между вершинами треугольников, не принадлежащими данной прямой.

10.248. К двум внешне касающимся окружностям радиусов R и r построена секущая так, что окружности отсекают на ней три равных отрезка. Найти длины этих отрезков.

10.249. Доказать, что расстояние от ортоцентра (точки пересечения высот) до вершины треугольника в 2 раза больше расстояния от центра описанной окружности до стороны, противоположной этой вершине.

10.250. На отрезке AB взята точка M, а на отрезках AM и MB по одну сторону от прямой AB построены квадраты, описанные окружности которых пересекаются в точке N. Доказать, что прямая AN проходит через вершину второго квадрата и что треугольник ANB прямоугольный.

10.251. В угол, содержащий 60°, вписаны пять окружностей так, что каждая последующая окружность (начиная со второй) касается предыдущей. Во сколько раз сумма площадей всех пяти кругов больше площади меньшего круга?

10.252. Стороны треугольника относятся как 5 : 4 : 3. Найти отношение отрезков сторон, на которые они делятся точкой касания вписанной окружности.

10.253. Для треугольника со сторонами 26, 28 и 30 см найти произведение радиусов вписанной и описанной окружностей.

10.254. В треугольнике ABC проведены медианы AL и BM, пересекающиеся в точке K. Вершина C лежит на окружности, проходящей через точки K, L, M. Длина стороны AB равна a. Найти длину медианы CN.

10.255. Через точку A окружности радиуса 10 см проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC. Вычислить радиус окружности, касающейся данной окружности и построенных хорд, если $AB = 16$ см.

10.256. Длины двух сторон остроугольного треугольника равны $\sqrt{13}$ и $\sqrt{10}$ см. Найти длину третьей стороны, зная, что эта сторона равна проведенной к ней высоте.

10.257. Через точку P диаметра данной окружности проведена хорда AB, образующая с диаметром угол 60°. Вычислить радиус окружности, если $AP = a$ и $BP = b$.

10.258. Расстояния от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до сторон AC и BC равны соответственно 2 и 4 см. Вычислить расстояние от точки M до прямой AB, если $AB = 10$ см, $BC = 17$ см, $AC = 21$ см.

10.259. На отрезке AC длиной 12 см взята точка B так, что $AB = 4$ см. На отрезках AB и AC как на диаметрах в одной полуплоскости с границей AC построены полуокружности. Вычислить радиус окружности, касающейся построенных окружностей и AC.

10.260. Сторона треугольника равна 48 см, а высота, проведенная к этой стороне, равна 8,5 см. Найти расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник, до вершины, противолежащей данной стороне, если радиус вписанной окружности равен 4 см.

10.261. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC, считая от вершины B?

10.262. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равна h, радиус вписанной окружности равен r. Найти гипотенузу.

10.263. Медианы треугольника равны 5, $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$ см. Доказать, что треугольник прямоугольный.

10.264. Показать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма полупериметра и радиуса вписанной окружности равна сумме катетов.

10.265. Показать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма диаметров описанной и вписанной окружностей равна сумме катетов.

10.266. Найти третью сторону остроугольного треугольника, если две его стороны равны a и b, а медианы этих сторон пересекаются под прямым углом.

10.267. На отрезке AB взята точка C и на частях AC и CB этого отрезка как на диаметрах построены полуокружности. Доказать, что сумма длин этих полуокружностей на зависит от положения точки C на отрезке AB.

10.268. Точка C перемещается по отрезку AB длиной l. На отрезках AC и CB как на основаниях построены правильные треугольники по одну сторону от AB. Где нужно взять точку C, чтобы расстояние между вершинами треугольников было наименьшим?

10.269. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20 см. Доказать, что треугольник прямоугольный.

10.270. Найти отношение суммы квадратов всех медиан треугольника к сумме квадратов всех его сторон.

10.271. Найти площадь треугольника, если его высоты равны 12, 15 и 20 см.

10.272. Числа m_1, m_2 и m_3 выражают длины медиан некоторого треугольника. Показать, что если выполняется равенство $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$, то треугольник является прямоугольным.

10.273. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника с площадями Q и q. Найти катеты.

10.274. Числа h_1, h_2 и h_3 выражают длины высот некоторого треугольника. Показать, что если выполняется равенство $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2 = 1$, то треугольник является прямоугольным.

10.275. Через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны в точках M и N. Доказать, что $MN = \frac{2ab}{a+b}$, где a и b — длины оснований.

10.276. Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD, проведенной к гипотенузе, на два треугольника BCD и ACD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD, равны соответственно 4 и 3 см. Найти расстояние между центрами окружностей.

10.277. Найти биссектрису прямого угла треугольника, у которого катеты равны a и b.

10.278. Дан квадрат, сторона которого равна a. Определить стороны равновеликого ему равнобедренного треугольника, у которого сумма длин основания и высоты, опущенной на основание, равна сумме длин двух боковых сторон.

10.279. Точки M, N, P и Q являются серединами сторон AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$. Вычислить площадь фигуры, являющейся пересечением четырехугольников $ABCD$, $ANCQ$ и $BPDM$, если площадь ромба равна 100 см^2.

10.280. Определить углы равнобедренного треугольника, если его площадь относится к площади квадрата, построенного на его основании, как $\sqrt{3}:12$.

10.281. В окружность вписан четырехугольник с углами 120°, 90°, 60° и 90°. Площадь четырехугольника равна $9\sqrt{3}$ см^2. Найти радиус окружности, если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.

10.282. В треугольнике ABC проведена прямая DE, параллельная AC. Площадь треугольника ABC равна 8 кв. ед., а площадь треугольника DEC равна 2 кв. ед. Найти отношение отрезка DE к длине стороны AC.

10.283. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2, а гипотенуза равна 10 см. Найти радиус вписанной окружности.

10.284. Около круга радиуса R описаны квадрат и равносторонний треугольник, причем одна из сторон квадрата лежит на стороне треугольника. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

10.285. В круге радиуса R по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды, одна из которых стягивает дугу в 60°, другая — в 120°. Найти площадь части круга, заключенной между хордами.

10.286. Две окружности радиусов r и $3r$ внешне касаются. Найти площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей внешней касательной.

10.287. Найти площадь треугольника, вписанного в круг радиуса 2 см, если два угла треугольника равны $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{4}$.

10.288. Найти площадь трапеции, диагонали которой равны 7 и 8 см, а основания равны 3 и 6 см.

10.289. В ромб со стороной a и острым углом 60° вписана окружность. Определить площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки касания окружности со сторонами ромба.

10.290. Две окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом. К этим окружностям проведена общая внешняя касательная, и в образовавшийся при этом треугольник вписан круг. Найти его площадь.

10.291. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 1 и 2 см. Найти площадь трапеции.

10.292. Окружность радиуса R разделена на шесть равных дуг, и внутри круга, ограниченного этой окружностью, через каждые две соседние точки деления проведены равные дуги такого радиуса, что на данной окружности они взаимно касаются. Вычислить площадь внутренней части данного круга, заключенной между проведенными дугами.

10.293. В некоторый угол вписана окружность радиуса R, а длина хорды, соединяющей точки касания, равна a. Параллельно этой хорде проведены две касательные, в результате чего получилась трапеция. Найти площадь этой трапеции.

10.294. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найти площадь трапеции, ограниченной двумя общими касательными к этим окружностям и отрезками прямых, соединяющими точки касания.

10.295. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8 см. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

10.296. Найти площадь прямоугольного треугольника, если даны радиусы R и r описанного и вписанного в него кругов.

10.297. Длины сторон треугольника относятся как $m : n : m$. Найти отношение площади этого треугольника к площади треугольника, вершины которого находятся в точках пересечения биссектрис данного треугольника с его сторонами.

10.298. Определить площадь сегмента, если его периметр равен p, а дуга содержит 120°.

10.299. На отрезке AB и на каждой его половине построены как на диаметрах полукруги (по одну сторону от AB). Считая радиус большого полукруга равным R, найти сумму площадей криволинейных треугольников, образовавшихся при построении круга, касательного ко всем трем данным кругам.

10.300. Сторона правильного треугольника равна a. Определить площадь части треугольника, лежащей вне круга радиуса $\frac{a}{3}$, центр которого совпадает с центром треугольника.

10.301. Найти отношение площади квадрата, вписанного в сегмент с дугой 180°, к площади квадрата, вписанного в сегмент того же круга с дугой 90°.

10.302. Площадь четырехугольника равна S. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям четырехугольника.

10.303. В треугольнике ABC проведены медианы BD и CE; M — точка их пересечения. Доказать, что треугольник BCM равновелик четырехугольнику $ADME$.

10.304. Два круга концентричны, причем окружность меньшего круга делит большой круг на равновеликие части. Доказать, что часть кольца, заключенная между параллельными касательными к окружности меньшего радиуса, равновелика квадрату, вписанному в меньший круг.

10.305. Найти площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, длины катетов которого являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

10.306. Прямая пересекает окружность радиуса R в точках A и B таких, что $\smile AB = 45°$, а прямую, перпендикулярную диаметру AM окружности и проходящую через ее центр, — в точке D. Прямая, проходящая через точку B перпендикулярно диаметру AM, пересекает его в точке C. Найти площадь трапеции $OCBD$.

10.307. Через две смежные вершины квадрата проведена окружность так, что длина касательной к ней, проведенной из третьей вершины, в 3 раза больше стороны квадрата. Найти площадь круга, если сторона квадрата равна a.

10.308. Дан квадрат со стороной a. На каждой стороне квадрата вне его построена трапеция так, что верхние основания этих трапеций и их боковые стороны образуют правильный двенадцатиугольник. Вычислить его площадь.

10.309. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 32 см^2. Острый угол трапеции равен 30°. Определить стороны трапеции.

10.310. Высота равнобедренной трапеции равна 14 см, а основания равны 16 и 12 см. Определить площадь описанного круга.

10.311. Длины диагоналей ромба относятся как 3 : 4. Во сколько раз площадь ромба больше площади вписанного в него круга?

10.312. В круг радиуса R вписан правильный треугольник, высоты которого продолжены до пересечения с окружностью. Эти точки пересечения соединены между собой, в результате чего получился новый треугольник. Вычислить ту часть площади круга, которая находится вне этих треугольников.

10.313. Две окружности радиуса R пересекаются так, что каждая проходит через центр другой. Две другие окружности того же радиуса имеют центры в точках пересечения первых двух окружностей. Найти площадь, общую всем четырем кругам.

10.314. Дан ромб $ABCD$, диагонали которого равны 3 и 4 см. Из вершины тупого угла B проведены высоты BE и BF. Вычислить площадь четырехугольника $BFDE$.

10.315. Отношение величин двух углов треугольника равно 2, а разность длин противоположных им сторон равна 2 см; длина третьей стороны треугольника равна 5 см. Вычислить площадь треугольника.

10.316. В прямоугольном треугольнике расстояние от середины гипотенузы до одного из катетов равно 5 см, а расстояние от середины этого катета до гипотенузы равно 4 см. Вычислить площадь треугольника.

10.317. В треугольнике ABC известны: $BC = 15$ см, $AC = 14$ см, $AB = 13$ см. Вычислить площадь треугольника, заключенного между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B.

10.318. Основания трапеции равны a и b. Определить длину отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на равновеликие части.

10.319. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а ее площадь равна a^2. Определить высоту трапеции.

10.320. Медианы одного треугольника равны сторонам другого треугольника. Найти отношение площадей этих треугольников.

10.321. Медианы треугольника равны 3, 4 и 5 см. Найти площадь треугольника.

10.322. В окружности с центром O проведена хорда AB, пересекающая диаметр в точке M и составляющая с диаметром угол, равный 60°. Найти OM, если $AM = 10$ см, а $BM = 4$ см.

10.323. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 см, а площадь равна 48 см^2. Найти высоту трапеции.

10.324. В треугольник вписан круг. Отрезки, соединяющие центр круга с вершинами, делят площадь треугольника на части с площадями 4, 13 и 15 см^2. Найти стороны треугольника.

10.325. Основание треугольника равно 20 см, медианы боковых сторон равны 18 и 24 см. Найти площадь треугольника.

10.326. Медианы треугольника равны 5, 6 и 5 м. Найти площадь треугольника.

10.327. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$ см, а медиана третьей стороны равна 2 см.

10.328. Стороны треугольника равны 3, 4 и 5 см. Определить площади треугольников, на которые данный треугольник разбивается высотой и медианой, проведенными к большей стороне.

10.329. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. Определить площади треугольников, на которые данный треугольник разбивается его медианами.

10.330. Длины катетов некоторого прямоугольного треугольника являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

10.331. В прямоугольнике со сторонами a и b проведены биссектрисы всех углов до взаимного пересечения. Найти площадь четырехугольника, образованного биссектрисами.

10.332. Определить стороны прямоугольного треугольника, у которого периметр равен $2p$, а площадь равна m^2.

10.333. Параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 153$ см, $AD = 180$ см, $BE = 135$ см (BE — высота) разделен на три равновеликие фигуры отрезками, перпендикулярными AD. На каком расстоянии от точки A находятся точки пересечения этих перпендикуляров с AD?

10.334. Внутри квадрата со стороной a на каждой его стороне как на диаметре построена полуокружность. Найти площадь розетки, ограниченной дугами полуокружностей.

10.335. Периметр сектора равен 28 см, а его площадь равна 49 см^2. Определить длину дуги сектора.

10.336. В равносторонний треугольник ABC со стороной $a = 2$ см вписан круг; точка A является центром второго круга с радиусом 1 см. Найти площадь пересечения этих кругов.

10.337. Внутри правильного треугольника со стороной a расположены три равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и двух других окружностей. Найти площадь части треугольника, расположенной вне этих окружностей.

10.338. Криволинейный треугольник составлен тремя равными попарно касающимися дугами окружностей радиуса R. Найти площадь этого треугольника.

10.339. Центр равностороннего треугольника со стороной, равной 6 см, совпадает с центром окружности радиуса 2 см. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

10.340. В ромб вписана окружность радиуса R. Найти площадь ромба, если его бóльшая диагональ в 4 раза больше радиуса вписанной окружности.

10.341. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. Проекция вершины прямого угла на гипотенузу делит ее на два отрезка, из которых меньший относится к большему как больший ко всей гипотенузе. Определить площадь треугольника.

10.342. Длины сторон и диагоналей параллелограмма равны соответственно a и b, c и f. Найти углы параллелограмма, если $a^4+b^4=c^2f^2$.

10.343. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14 см, а биссектриса угла между ними содержит 12 см.

10.344. Вычислить площадь общей части двух ромбов, длины диагоналей первого из которых равны 4 и 6 см, а второй получен поворотом первого на 90° вокруг его центра.

10.345. Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 2 см. Точка касания этой окружности делит одну из сторон на отрезки длиной 4 и 6 см. Определить вид треугольника и вычислить его площадь.

10.346. Круг с центром O разделен диаметром AB на два полукруга. В одном из них построены два новых полукруга, опирающиеся на OA и OB как на диаметры. В криволинейную фигуру, ограниченную контурами этих трех полукругов, вписан круг. Во сколько раз его площадь меньше площади данного круга?

10.347. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC одинаково наклонены к сторонам BC и AC. Найти зависимость между углами A и B.

10.348. Выпуклый четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника; площади трех из них равны 10, 20 и 30 см^2, и каждая меньше площади четвертого треугольника. Найти площадь данного четырехугольника.

10.349. Окружность радиуса R разделена на четыре большие и четыре малые части, которые чередуются одна за другой. Большая часть в 2 раза длиннее малой. Определить площадь восьмиугольника, вершинами которого являются точки деления окружности.

10.350. На медиане BD треугольника ABC, площадь которого равна S, взята точка E так, что $DE = 0{,}25BD$. Через точку E проведена прямая AE, пересекающая сторону BC в точке F. Найти площадь треугольника AFC.

10.351. Пусть BD — высота треугольника ABC, точка E — середина BC. Вычислить радиус круга, описанного около треугольника BDE, если $AB = 30$ см, $BC = 26$ см и $AC = 28$ см.

10.352. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе, вдвое больше площади прямоугольного треугольника с указанной гипотенузой. Найти отношение катетов.

10.353. На каждой медиане треугольника взята точка, делящая медиану в отношении 1 : 3, считая от вершины. Во сколько раз площадь треугольника с вершинами в этих точках меньше площади исходного треугольника?

10.354. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Вычислить площадь этого треугольника, если известно, что $AM = BM = 2$ см, а $CM = 1$ см.

10.355. Равнобедренный треугольник со сторонами 8, 8 и 5 разделен на три равновеликие части перпендикулярами, проведенными из некоторой точки к его сторонам. Найти расстояния от этой точки до каждой стороны треугольника.

10.356. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

10.357. В трапеции $ABCD$ известны длины оснований $AD = 24$ см, $BC = 8$ см и диагоналей $AC = 13$ см, $BD = 5\sqrt{17}$ см. Вычислить площадь трапеции.

10.358. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = a$, $BC = b$. На продолжении BC выбрана такая точка M, что прямая AM отсекает от площади трапеции $\frac{1}{4}$ ее часть. Найти длину отрезка CM.

10.359. В трапеции $ABCD$ с длинами оснований $AD = 12$ см, $BC = 8$ см на луче BC взята такая точка M, что AM делит трапецию на две равновеликие фигуры. Найти CM.

10.360. Центр окружности, описанной около равнобедренной трапеции, делит ее высоту в отношении 3 : 4 (считая от большего основания). Найти основания трапеции, если ее средняя линия равна высоте, а радиус окружности равен 10.

Группа В

10.361. В треугольнике ABC величина угла A вдвое больше величины угла B, а длины сторон, противолежащих этим углам, равны соответственно 12 и 8 см. Найти длину третьей стороны треугольника.

10.362. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна m, радиус вписанной окружности равен r. Определить катеты. При каком соотношении между r и m задача имеет решение?

10.363. В равнобедренный треугольник с основанием 12 см вписана окружность, и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три малых треугольника. Сумма периметров малых треугольников равна 48 см. Найти боковую сторону данного треугольника.

10.364. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длиной m и n, считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найти длины отрезков касательных, заключенных между сторонами треугольника.

10.365. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно $\sqrt{3}+1$.

10.366. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Найти радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8 см.

10.367. Выразить сторону правильного десятиугольника через радиус R описанной окружности.

10.368. Вычислить длину биссектрисы угла A треугольника ABC с длинами сторон $a = 18$ см, $b = 15$ см, $c = 12$ см.

10.369. В треугольник с периметром, равным 20 см, вписана окружность. Параллельно основанию к окружности проведена касательная, отрезок которой, заключенный между сторонами треугольника, содержит 2,4 см. Найти основание треугольника.

10.370. Бóльшая из параллельных сторон трапеции равна a, меньшая равна b, непараллельные стороны равны c и d. Найти площадь трапеции.

10.371. Точка C_1 — основание высоты CC_1 треугольника ABC. Найти зависимость между углами A и B, если $CC_1^2 = C_1A \cdot C_1B$.

10.372. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Найти длину хорды DC, если центр окружности, вписанной в данный треугольник, удален от точки D на расстояние n.

10.373. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 см вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две бóльшие стороны. Найти периметр отсеченного треугольника.

10.374. Основания равнобедренной трапеции равны 4 и 8 см, ее площадь равна 21 см^2. Какую сторону пересекает биссектриса угла при большем основании: меньшее основание или боковую сторону трапеции?

10.375. Правильный треугольник ABC, вписанный в окружность радиуса R, повернут вокруг центра окружности на 90° в положение $A_1B_1C_1$. Вычислить площадь шестиугольника $AA_1BB_1CC_1$.

10.376. Длины оснований AB и DC трапеции $ABCD$ равны a и b. Прямая, параллельная AB, пересекает стороны BC и AD в точках M и N. Вычислить MN, если трапеции $ABMN$ и $NMCD$ равновелики.

10.377. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки длиной 4 и 2 см, а высота, проведенная к той же стороне, равна $\sqrt{15}$ см. Каковы длины сторон треугольника, если известно, что они выражаются целыми числами?

10.378. Две окружности касаются друг друга внешним образом. Четыре точки касания их внешних общих касательных A, B, C, D последовательно соединены. Показать, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, и найти ее радиус, если радиусы данных окружностей равны R и r.

10.379. Высота и медиана треугольника, проведенные внутри него из одной его вершины, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из той же вершины. Определить радиус описанной окружности, если медиана равна m.

10.380. Через точку D, взятую на стороне AB треугольника ABC, проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону BC в точке E. Доказать, что AE, CD и медиана, проведенная через вершину B, пересекаются в одной точке.

10.381. Высота треугольника, равная 2 см, делит его угол в отношении 2 : 1, а основание — на части, меньшая из которых равна 1 см. Определить площадь треугольника.

10.382. Даны две концентрические окружности. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки одной окружности до концов диаметра другой окружности не зависит ни от выбранной точки, ни от выбранного диаметра.

10.383. В треугольнике ABC проведены медианы AL и BM, пересекающиеся в точке K. Вершина C лежит на окружности, проходящей через точки K, L, M. Показать, что медиана CN образует со сторонами AC и BC такие же углы, что и медианы AL и BM со стороной AB.

10.384. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке F. Точки B, D, E, F лежат на одной окружности. Показать, что угол B равен $60°$.

10.385. Площадь треугольника равна S. Каждая сторона треугольника разделена на три части в отношении $m:n:m$. Определить площадь шестиугольника, вершинами которого служат точки деления.

10.386. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$. Найти катеты.

10.387. В треугольнике ABC каждая высота h_c и h_b не меньше стороны, на которую она опущена. Найти углы треугольника.

10.388. Сторона BC треугольника ABC равна a; каждая из двух высот, опущенных на стороны AB и AC, не меньше стороны, на которую она опущена. Найти длины сторон AB и AC.

10.389. В равнобедренном треугольнике ABC дано: $AB = BC = 25$ см и $AC = 14$ см. Вычислить радиус круга, касающегося BC в точке D — основании высоты AD и проходящего через середину AC.

10.390. В треугольнике ABC со сторонами $a = 14$ см, $b = 15$ см, $c = 13$ см найти расстояние от точки пересечения высот до вершины A.

10.391. На отрезке AC дана точка B, причем $AB = 14$ см, $BC = 28$ см. На отрезках AB, BC и AC как на диаметрах построены полуокружности в одной полуплоскости относительно границы AC. Найти радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей.

10.392. В круг радиуса R вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

10.393. Через смежные вершины квадрата проведена окружность так, что касательная к ней, проведенная из третьей вершины, равна удвоенной стороне квадрата. Найти площадь этого квадрата, если радиус окружности равен R.

10.394. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка, и через нее проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник ABC на шесть частей, из которых три части являются треугольниками. Площади этих треугольников равны S_1, S_2 и S_3. Доказать, что площадь треугольника ABC равна $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

10.395. Центры четырех кругов расположены в вершинах квадрата со стороной a. Радиусы этих кругов равны a. Определить площадь их общей части.

10.396. В окружность радиуса R вписаны три равные окружности, касающиеся внешней окружности и попарно друг друга. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими тремя окружностями.

10.397. В окружность радиуса R вписаны шесть равных окружностей, каждая из которых касается данной окружности и двух соседних. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими шестью окружностями.

10.398. В окружность радиуса R вписаны четыре равные окружности, каждая из которых касается данной и двух соседних. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими четырьмя окружностями.

10.399. Сторона правильного треугольника равна a. Из его центра описана окружность радиуса $\frac{a}{3}$. Определить площадь части треугольника, лежащей вне окружности.

10.400. Вычислить площадь треугольника по двум сторонам a и b и биссектрисе l угла между ними.

10.401. Найти радиус круга, если площадь круга на Q кв. ед. больше площади вписанного в него правильного двенадцатиугольника.

10.402. Окружность радиуса R с центром O разделена точками A, B, C, D, E, F на шесть равных частей. Определить площадь фигуры COE, ограниченной дугой OC с центром B, дугой OE с центром F и дугой CE с центром A.

10.403. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90°)$ проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 0,6 и 0,8 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

10.404. Площадь треугольника ABC равна S_1; площадь треугольника AOB, где O — точка пересечения высот, равна S_2. На прямой CO взята такая точка K, что треугольник ABK — прямоугольный. Доказать, что площадь треугольника ABK есть среднее геометрическое между S_1 и S_2.

10.405. В равносторонний треугольник со стороной a вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что отрезок ее внутри треугольника равен b. Найти площадь треугольника, отсеченного этой касательной от данного.

10.406. Основания высот остроугольного треугольника ABC служат вершинами другого треугольника, периметр которого равен $2p$. Найти площадь треугольника ABC, если радиус описанной около него окружности равен R.

10.407. Стороны треугольника ABC разделены точками M, N и P так, что $AM : MB = BN : NC = CP : PA = 1 : 4$. Найти отношение площади треугольника, ограниченного отрезками AN, BP и CM, к площади треугольника ABC.

10.408. Около окружности радиуса 5 см описана равнобедренная трапеция. Расстояние между точками касания ее боковых сторон равно 8 см. Найти площадь трапеции.

10.409. Треугольник со сторонами 13, 14 и 15 разделен на три равновеликие части отрезками, перпендикулярными большей стороне. Найти расстояния до этих прямых от ближайших к ним вершин треугольника, находящихся на большей стороне.

10.410. В трапецию, у которой меньшее основание равно a, вписана окружность. Одна из боковых сторон трапеции делится точкой касания на отрезки m и n, считая от большего основания. Определить площадь трапеции.

10.411. Даны два правильных треугольника с площадью S; из которых второй получен поворотом первого треугольника вокруг его центра на угол 30°. Вычислить площадь пересечения этих треугольников.

10.412. Площадь прямоугольного треугольника равна $\frac{2r^2}{3}$, где r — радиус окружности, касающейся одного катета и продолжений другого катета и гипотенузы. Найти стороны треугольника.

10.413. Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника. Доказать, что если площади двух из них, прилежащих к основаниям трапеции, равны p^2 и q^2, то площадь трапеции равна $(p + q)^2$.

10.414. В четырехугольнике $ABCD$ через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная другой диагонали AC. Эта прямая пересекает сторону AD в точке E. Доказать, что отрезок CE делит четырехугольник $ABCD$ на равновеликие части.

10.415. Прямая, параллельная основаниям данной прямоугольной трапеции, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найти основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d, причем $c < d$.

10.416. Определить площадь треугольника по его трем высотам h_1, h_2, h_3.

10.417. В прямоугольный треугольник ABC $(\angle C = 90°)$ вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Найти отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$, если $AC = 4$ см, $BC = 3$ см.

10.418. В окружность вписан четырехугольник, длины сторон которого равны a, b, c и d. Вычислить отношение длин диагоналей этого четырехугольника.

10.419. Круг с центром на стороне AB треугольника ABC касается двух других его сторон. Найти площадь круга, если $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см, где a, b и c — длины сторон треугольника.

10.420. В треугольник с основанием, равным a, вписан квадрат, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Площадь квадрата составляет $\frac{1}{6}$ площади треугольника. Определить высоту треугольника и сторону квадрата.

10.421. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противоположную сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен основанию. Доказать, что и биссектриса равна основанию.

10.422. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла отсекает на гипотенузе отрезки длиной a и b. Найти площадь квадрата, стороной которого является эта биссектриса.

10.423. Около окружности радиуса $R = 1$ см описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5 см^2. Найти площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

10.424. Из каждой вершины, принадлежащей основанию равностороннего треугольника со стороной a, проведены во внутреннюю область треугольника по два луча, образующих с основанием треугольника углы 15° и 30°. Найти площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения построенных лучей.

10.425. Через точку M, расположенную на диаметре окружности радиуса 4 см, проведена хорда AB, образующая с диаметром угол 30°. Через точку B проведена хорда BC, перпендикулярная данному диаметру. Найти площадь треугольника ABC, если $AM : MB = 2 : 3$.

ГЛАВА 11

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1°. ***Произвольная призма*** (l — боковое ребро; P — периметр основания; S — площадь основания; H — высота; $P_{сеч}$ — периметр перпендикулярного сечения; $S_{сеч}$ — площадь перпендикулярного сечения; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности, V — объем):

$$S_{бок} = P_{сеч}l; \tag{11.1}$$

$$V = SH; \tag{11.2}$$

$$V = S_{сеч}l. \tag{11.3}$$

2°. ***Прямая призма***:

$$S_{бок} = Pl. \tag{11.4}$$

3°. ***Прямоугольный параллелепипед*** (a, b, c — его измерения; d — диагональ):

$$S_{бок} = PH; \tag{11.5}$$

$$V = abc; \tag{11.6}$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \tag{11.7}$$

4°. ***Куб*** (a — ребро):

$$V = a^3; \tag{11.8}$$

$$d = a\sqrt{3}. \tag{11.9}$$

5°. ***Произвольная пирамида*** (S — площадь основания; H — высота; V — объем):

$$V = \frac{1}{3}SH. \tag{11.10}$$

6°. ***Правильная пирамида*** (P — периметр основания; l — апофема; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок} = \frac{1}{2}Pl. \tag{11.11}$$

7°. ***Произвольная усеченная пирамида*** (S_1 и S_2 — площади оснований; h — высота; V — объем):

$$V = \frac{1}{3}h\,(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}). \tag{11.12}$$

8°. ***Правильная усеченная пирамида*** (P_1 и P_2 — периметры оснований; l — апофема; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l. \tag{11.13}$$

9°. ***Цилиндр*** (R — радиус основания; H — высота; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок} = 2\pi RH; \tag{11.14}$$

$$V = \pi R^2 H. \tag{11.15}$$

10°. ***Конус*** (R — радиус основания; H — высота; l — образующая; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок} = \pi Rl; \tag{11.16}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \tag{11.17}$$

11°. ***Усеченный конус*** (R_1 и R_2 — радиусы оснований; H — высота; l — образующая, $S_{бок}$ — площадь боковой повехности; V — объем);

$$S_{бок} = \pi(R_1 + R_2)l; \tag{11.18}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2). \tag{11.19}$$

12°. ***Шар, сфера*** (R — радиус шара; S — площадь сферической поверхности; V — объем):

$$S = 4\pi R^2; \tag{11.20}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{11.21}$$

13°. ***Шаровой сегмент*** (R — радиус шара; h — высота сегмента; S — площадь сферической поверхности сегмента; V — объем):

$$S = 2\pi Rh; \tag{11.22}$$

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right). \tag{11.23}$$

14°. ***Шаровой сектор*** (R — радиус шара; h — высота сегмента; V — объем):

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h. \tag{11.24}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

1°. *Пусть в пирамиде выполняется одно из следующих двух условий:* а) *все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы;* б) *длины всех боковых ребер равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды* (*эта же точка служит точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам основания пирамиды*).

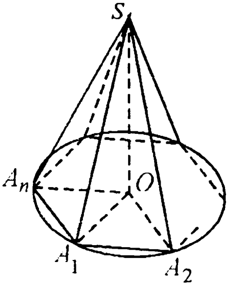


Рис. 11.1

□ Пусть O — основание высоты n-угольной пирамиды $SA_1A_2 \ldots A_n$ (рис. 11.1); $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ — ее боковые ребра; $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ — их проекции на плоскость основания; $SA_1O, SA_2O, \ldots, SA_nO$ — углы, образуемые ребрами пирамиды с плоскостью основания. Согласно условию а), эти углы равны; поэтому равны и прямоугольные треугольники $SOA_1, SOA_2, \ldots, SOA_n$, имеющие общий катет SO. Отсюда следует, что $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$, т. е. точка O равноудалена от вершин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ основания и, значит, является центром описанной около него окружности.

Если условие а) заменить условием б), то равенство треугольников $SOA_1, SOA_2, \ldots, SOA_n$ вытекает из того, что они, кроме общего катета, имеют равные гипотенузы $SA_1 = SA_2 = \ldots = SA_n$. Таким образом, $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$, т. е. O — центр окружности, описанной около основания пирамиды. ■

2°. *Пусть в пирамиде выполняется одно из следующих двух условий:* а) *все боковые грани образуют с основанием равные углы;* б) *длины всех апофем боковых граней равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды).*

□ Пусть O — основание высоты n-угольной пирамиды $SA_1A_2 \ldots A_n$ (рис. 11.2); $SB_1, SB_2, \ldots, SB_n$ — апофемы (высоты боковых граней). Проекции апофем $OB_1, OB_2, \ldots, OB_n$ на плоскость основания перпендикулярны сторонам основания (по теореме о трех перпендикулярах) и, следовательно, выражают расстояния от точки O до этих сторон, а углы $SB_1O, SB_2O, \ldots, SB_nO$ являются линейными углами соответствующих двугранных углов. Согласно условию а), эти углы равны, поэтому равны и прямоугольные треугольники $SOB_1, SOB_2, \ldots, SOB_n$, имеющие общий катет SO. Отсюда следует, что $OB_1 = OB_2 = \ldots = OB_n$, т. е. точка O равноудалена от сторон основания и, значит, является центром вписанной в него окружности.

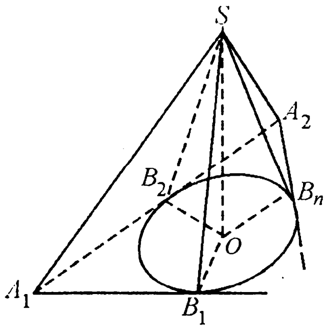


Рис. 11.2

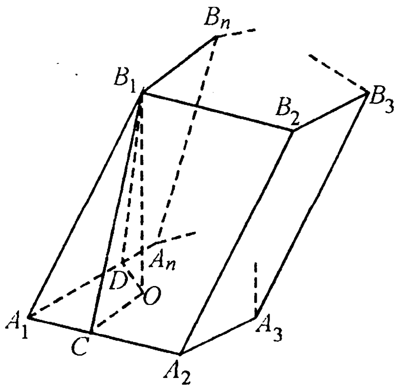


Рис. 11.3

Если условие а) заменить условием б), то равенство треугольников SOB_1, SOB_2, ..., SOB_n вытекает из того, что они, кроме общего катета SO, имеют равные гипотенузы $SB_1 = SB_2 = ... = SB_n$. Таким образом, $OB_1 = OB_2 = ... = OB_n$, т. е. O — центр окружности, вписанной в основание пирамиды. ■

3°. *Если в наклонной призме боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1* (рис. 11.3), *то основание O высоты B_1O лежит на биссектрисе угла A_1.*

□ Проведем $OC \perp A_1A_2$, $OD \perp A_1A_n$ и отрезки B_1C, B_1D. Согласно теореме о трех перпендикулярах, имеем $B_1C \perp A_1A_2$, $B_1D \perp A_1A_n$. Прямоугольные треугольники A_1CB_1 и A_1DB_1 равны, так как имеют общую гипотенузу A_1B_1 и равные углы ($\angle B_1A_1C = \angle B_1A_1D$ по условию). Следовательно, $B_1C = B_1D$ и $\Delta B_1OC = \Delta B_1OD$, откуда $OC = OD$. Итак, точка O равноудалена от сторон угла A_1 и, значит, лежит на биссектрисе A_1O угла A_1. ■

Это же утверждение можно сформулировать так: *если в трехгранном угле два острых плоских угла равны, то проекция их общего ребра на плоскость третьего плоского угла является его биссектрисой.*

4°. *Если высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны. Справедливо и обратное утверждение.*

□ Пусть AD — высота ΔABC (рис. 11.4); тогда $BC \perp AD$ и, значит, $BC \perp AO$. Но AO является проекцией ребра SA на плоскость ABC и, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $BC \perp SA$.

Аналогично доказывается, что перпендикулярны и две другие пары противоположных ребер пирамиды, т. е. $AB \perp SC$ и $AC \perp SB$.

Докажем теперь обратное утверждение, т. е. что если $BC \perp SA$, то основанием O высоты пирамиды является точка пересечения высот ΔABC (рис. 11.4). Так как $SO \perp (ABC)$ (по условию), то AO является проекцией SA на плоскость ABC. Но прямая BC, принадлежащая плоскости ABC, перпендикулярна ребру SA (по условию), поэтому $BC \perp AO$ (согласно теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, точка O лежит на высоте AD ΔABC. Аналогично доказывается, что O принадлежит и другой высоте ΔABC и, значит, является точкой пересечения высот основания пирамиды. ■

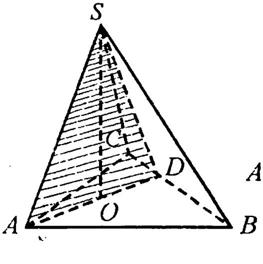


Рис. 11.4

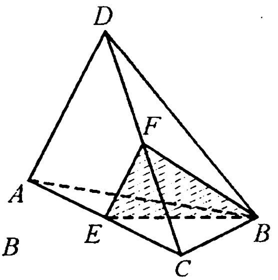


Рис. 11.5

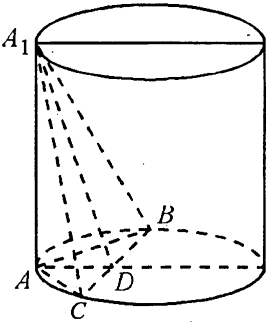


Рис. 11.6

5°. *Если SO — высота пирамиды $SABC$ и $SA \perp BC$, то плоскость SAO перпендикулярна BC* (рис. 11.4).

□ Имеем $SA \perp BC$ (по условию) и $SO \perp BC$, поскольку $SO \perp (ABC)$. Так как прямая BC перпендикулярна каждой из двух прямых SA и SO, лежащих в плоскости SAO, то $(SAO) \perp BC$ (согласно признаку перпендикулярности прямой и плоскости). ■

Пример 1. Через медиану BE основания ABC пирамиды $DABC$ и середину F ребра DC проведена плоскость. Найти объем фигуры $ADBFE$, если объем пирамиды $DABC$ равен 40 см³.

□ Объем фигуры $ADBFE$ равен разности объемов пирамид $DABC$ и $FECB$ (рис. 11.5). Чтобы найти объем пирамиды $FECB$, сравним его с объемом пирамиды $DABC$. Для этого достаточно найти отношения площадей их оснований и соответствующих высот. Так как медиана треугольника делит его площадь на две равные части, то $S_{\Delta BEC} = 0{,}5S_{\Delta ABC}$. Далее, так как F — середина ребра DC, то высота пирамиды $FECB$ равна половине высоты пирамиды $DABC$. Следовательно, $V_{FECB} = 0{,}25V_{DABC} = 10(\text{см}^3)$. Искомый объем равен 30 см³. ■

Пример 2. Высота цилиндра равна H, радиус его основания равен R. В цилиндр помещена пирамида, высота которой совпадает с образующей AA_1 цилиндра, а основанием служит равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), вписанный в основание цилиндра. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если $\angle A = 120°$.

□ Проведем $AD \perp BC$ и соединим точки A_1 и D (рис. 11.6). Согласно теореме о трех перпендикулярах, имеем $A_1D \perp BC$. Так как дуга CAB содержит 120°, а дуги AC и AB — по 60°, то $BC = R\sqrt{3}$, $AB = R$. Из ΔADB находим $AD = 0{,}5R$. Применив теорему Пифагора к ΔA_1AD, получим $A_1D = \sqrt{H^2 + 0{,}25R^2} = 0{,}5\sqrt{R^2 + 4H^2}$. Следовательно, $S_{\Delta A_1AB} = 0{,}5AB \cdot AA_1 = 0{,}5RH$; $S_{\Delta A_1BC} = 0{,}5BC \cdot A_1D = 0{,}5R\sqrt{3} \cdot 0{,}5\sqrt{R^2 + 4H^2} = 0{,}25R\sqrt{3R^2 + 12H^2}$. Окончательно получим

$$S_{\text{бок}} = 2S_{\Delta A_1AB} + S_{\Delta A_1BC} = RH + 0{,}25R\sqrt{3R^2 + 12H^2} =$$

$$= 0{,}25R(4H + \sqrt{3R^2 + 12H^2}). \ ■$$

Пример 3. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно b. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

□ Пусть O — центр шара, описанного около пирамиды $DABC$ (рис. 11.7). Тогда $OA = OB = OC = OD$. Опустим перпендикуляр OK на плоскость ABC и проведем $OE \perp DB$. Поскольку точка O равноудалена от вершин ΔABC, точ-

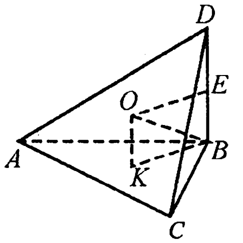


Рис. 11.7

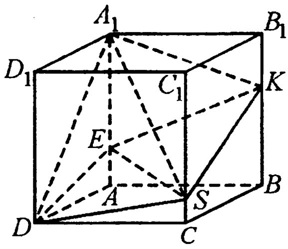


Рис. 11.8

ка K является центром треугольника и $BK = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Далее, так как $OB = OD$, то $BE = ED = \frac{b}{2}$. По теореме Пифагора из ΔOKB находим

$$OB = \sqrt{OK^2 + BK^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{12a^2 + 9b^2}}{6}. \blacksquare$$

Пример 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна a. На ребре AA_1 взята точка E так, что $AE = \frac{a}{4}$. Найти объем пирамиды, вершиной которой является точка A_1, а основанием — сечение куба, проходящее через точки D, E и произвольную внутреннюю точку ребра BB_1.

□ Построив сечение (рис. 11.8), получим на ребре CC_1 точку S, служащую общей вершиной двух треугольных пирамид SEA_1K и SEA_1D, сумма объемов которых равна объему четырехугольной пирамиды A_1EKSD.

Имеем $S_{\Delta A_1DE} = \frac{1}{2} A_1E \cdot DA = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot a = \frac{3a^2}{8}$. Расстояние от точки S до плоскости A_1ED равно a, поэтому $V_{SEA_1D} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{8} \cdot a = \frac{a^3}{8}$. Аналогично находим $V_{SEA_1K} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot a\right)a = \frac{a^3}{8}$. Итак, искомый объем есть $\frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{8} = \frac{a^3}{4}$. $\blacksquare$

Группа А

11.001. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом 30°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найти объем пирамиды.

11.002. Вычислить объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен R.

11.003. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании равен 45°. Определить объем и полную поверхность пирамиды.

11.004. Определить объем наклонной треугольной призмы, у которой площадь одной из боковых граней равна S, а расстояние от плоскости этой грани до противолежащего ребра равно d.

11.005. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 90°. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади ее основания.

11.006. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13 см, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$ см. Определить объем параллелепипеда.

11.007. Найти отношение объема куба к объему правильного тетраэдра, ребро которого равно диагонали грани куба.

11.008. В прямом параллелепипеде стороны основания равны a и b, острый угол между ними содержит 60°. Бо́льшая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найти объем параллелепипеда.

11.009. Центр верхнего основания правильной четырехугольной призмы и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в призму пирамиды, объем которой равен V. Найти объем призмы.

11.010. В кубе, ребро которого равно a, центр верхней грани соединен с вершинами основания. Найти полную поверхность полученной пирамиды.

11.011. Основанием правильной пирамиды служит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна 720°. Определить объем пирамиды, если ее боковое ребро, равное l, составляет с высотой пирамиды угол 30°.

11.012. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна ее боковому ребру и равна a. Найти полную поверхность пирамиды и ее объем.

11.013. Центр верхнего основания куба с ребром, равным a, соединен с серединами сторон нижнего основания, которые также соединены в последовательном порядке. Вычислить полную поверхность полученной пирамиды.

11.014. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при основании равен 60°. Найти полную поверхность пирамиды.

11.015. Найти полную поверхность правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а двугранный угол при основании равен 60°.

11.016. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю, равной b, и углом 60° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем пирамиды.

11.017. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1 см, а ее боковая поверхность составляет 3 см^2. Найти объем пирамиды.

11.018. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами a, a и b. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определить объем пирамиды.

11.019. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l, а высота равна h. Определить объем пирамиды.

11.020. В основании наклонной призмы лежит параллелограмм со сторонами 3 и 6 дм и острым углом 45°. Боковое ребро призмы равно 4 дм и наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найти объем призмы.

11.021. Каждое из боковых ребер пирамиды равно $\frac{269}{32}$ см. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см. Найти объем пирамиды.

11.022. Определить объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с плоскостью боковой грани угол 30°, а сторона основания равна a.

11.023. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 дм, а высота 4 дм. Найти боковую поверхность усеченной пирамиды, отсекаемой от данной плоскостью, параллельной ее основанию и отстоящей от него на 1 дм.

11.024. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами a и b ($a > b$). Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Определить объем усеченной пирамиды.

11.025. Боковые ребра правильной треугольной усеченной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Стороны нижнего и верхнего оснований равны соответственно a и b ($a > b$). Найти объем усеченной пирамиды.

11.026. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Плоскость, проведенная через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол 45°. Полученное сечение имеет площадь, равную Q. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

11.027. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°, а площадь диагонального сечения равна S.

11.028. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом 30°. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определить объем и полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен r.

11.029. Объем правильной треугольной пирамиды, боковая грань которой наклонена к плоскости основания под углом 45°, равен 9 см^3. Найти полную поверхность пирамиды.

11.030. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 и 4 см и острым углом 60°. Бóльшая диагональ параллелепипеда равна 5 см. Определить его объем.

11.031. Центр куба, ребро которого равно a, соединен со всеми его вершинами. Определить объем и полную поверхность каждой из полученных пирамид.

11.032. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием 6 см и высотой 9 см. Каждое боковое ребро равно 13 см. Вычислить объем пирамиды.

11.033. В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и имеют длины $\sqrt{70}$, $\sqrt{99}$ и $\sqrt{126}$ см. Найти объем и площадь основания пирамиды.

11.034. Определить объем правильной шестиугольной призмы, у которой наибольшая диагональ равна d, а боковые грани — квадраты.

11.035. Найти объем куба, если расстояние от его диагонали до не пересекающегося с ней ребра равно d.

11.036. Определить объем октаэдра (правильного восьмигранника), ребро которого равно a.

11.037. Основание призмы — квадрат со стороной, равной a. Одна из боковых граней — также квадрат, другая — ромб с углом 60°. Определить полную поверхность призмы.

11.038. Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания и удалена от плоскости этого основания на расстояние, равное b. Сторона основания равна a. Определить полную поверхность параллелепипеда.

11.039. В кубе центры оснований соединены с центрами боковых граней. Вычислить поверхность полученного октаэдра, если ребро куба равно a.

11.040. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 6, 5 и 5 см. Боковые грани пирамиды образуют с ее основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Определить объем пирамиды.

11.041. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна l и составляет с одной гранью угол 30°, а с другой — 45°.

11.042. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18 см, а длины сторон оснований 14 и 10 см.

11.043. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна Q. Площади диагональных сечений равны S_1 и S_2. Определить объем и боковую поверхность параллелепипеда.

11.044. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно l и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найти объем пирамиды.

11.045. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна d и составляет с боковым ребром угол 30°. Найти объем призмы.

11.046. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b. Диагональ параллелепипеда наклонена к боковой грани, содержащей сторону основания, равную b, под углом 30°. Найти объем параллелепипеда.

11.047. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b. Диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом 60°. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

11.048. Найти объем наклонной треугольной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной a, если боковое ребро призмы равно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом 60°.

11.049. Найти объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна a и боковая поверхность равновелика сумме площадей оснований.

11.050. Найти боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, высота которой равна h, а боковое ребро равно l.

11.051. Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен 90°, а сторона основания равна 3 см.

11.052. В правильной треугольной призме площадь сечения, проходящего через боковое ребро перпендикулярно противолежащей боковой грани, равна Q. Сторона основания призмы равна a. Найти полную поверхность призмы.

11.053. Высота правильного тетраэдра равна h. Вычислить его полную поверхность.

11.054. Каждое из боковых ребер пирамиды равно b. Ее основанием служит прямоугольный треугольник, катеты которого относятся как $m : n$, а гипотенуза равна c. Вычислить объем пирамиды.

11.055. Центр верхнего основания куба соединен с серединами сторон нижнего основания. Образовался четырехгранный угол, каждый плоский угол которого равен α. Доказать, что $30° < \alpha < 45°$.

11.056. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 10 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Площадь основания равна 12 см^2. Найти боковую поверхность параллелепипеда.

11.057. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ равна d, а длины ребер относятся как $m : n : p$.

11.058. Определить объем правильной треугольной пирамиды, если высота треугольника, служащего ее основанием, равна h, а апофема пирамиды равна m.

11.059. Площади боковых граней прямой треугольной призмы равны M, N и P. Боковое ребро ее равно l. Определить объем призмы.

11.060. Известны площадь основания P и объем V правильной четырехугольной призмы. Вычислить ее полную поверхность.

11.061. Найти боковую поверхность правильной треугольной призмы с высотой h, если прямая, проходящая через центр верхнего основания и середину стороны нижнего основания, наклонена к плоскости основания под углом 60°.

11.062. В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом 45°. Среднее по величине боковое ребро равно l. Найти объем и полную поверхность пирамиды.

11.063. Найти полную поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°.

11.064. Найти объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна h, а плоские углы при вершине — прямые.

11.065. Найти боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен 90°, а площадь основания равна S.

11.066. Найти объем правильного тетраэдра с ребром, равным a.

11.067. Правильная шестиугольная призма, боковые ребра которой равны 3 см, рассечена диагональной плоскостью на две равные четырехугольные призмы. Определить объем шестиугольной призмы, если боковая поверхность четырехугольной призмы равна 30 см^2.

11.068. По стороне основания, равной a, определить боковую поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой диагональное сечение равновелико основанию.

11.069. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно высоте основания, а площадь сечения, проведенного через это боковое ребро и высоту основания, равна Q. Определить объем призмы.

11.070. В прямом параллелепипеде стороны основания равны a и b и образуют угол 30°. Боковая поверхность равна S. Определить объем параллелепипеда.

11.071. Найти отношение объема правильной шестиугольной пирамиды к объему правильной треугольной пирамиды при условии, что стороны оснований этих пирамид равны, а их апофемы в 2 раза больше сторон основания.

11.072. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как $m : n$, а диагональное сечение представляет собой квадрат с площадью, равной Q. Определить объем параллелепипеда.

11.073. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2, 3 и 6 см. Найти длину ребра такого куба, чтобы объемы этих тел относились как их поверхности.

11.074. Высота пирамиды равна 8 м. На расстоянии 3 м от вершины проведена плоскость, параллельная основанию. Площадь полученного сечения равна 4 м^2. Найти объем пирамиды.

11.075. Доказать, что объем конуса равен объему цилиндра с тем же основанием и той же высотой минус произведение боковой поверхности этого цилиндра на $\frac{1}{3}$ радиуса его основания.

11.076. Высота конуса равна диаметру его основания. Найти отношение площади его основания к боковой поверхности.

11.077. Выразить объем конуса через его боковую поверхность S и расстояние r от центра основания до образующей.

11.078. Цилиндр образован вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Выразить объем V цилиндра через площадь S этого прямоугольника и длину C окружности, описанной точкой пересечения его диагоналей.

11.079. Доказать, что если два равных конуса имеют общую высоту и параллельные основания, то объем их общей части составляет 0,25 объема каждого из них.

11.080. На основаниях цилиндра с квадратным осевым сечением построены два конуса с вершинами в середине оси (цилиндра). Найти сумму полных поверхностей и сумму объемов конусов, если высота цилиндра равна $2a$.

11.081. Около конуса с радиусом основания R описана произвольная пирамида, у которой периметр основания равен $2p$. Определить отношение объемов и отношение боковых поверхностей конуса и пирамиды.

11.082. Высота конуса и его образующая равны соответственно 4 и 5 см. Найти объем вписанного в конус полушара, основание которого лежит на основании конуса.

11.083. Определить объем шара, вписанного в правильную пирамиду, у которой высота равна h, а двугранный угол при основании равен 60°.

11.084. Конус и полушар имеют общее основание, радиус которого равен R. Найти боковую поверхность конуса, если его объем равен объему полушара.

11.085. В цилиндре площадь сечения, перпендикулярного образующей, равна M, а площадь осевого сечения равна N. Определить объем и полную поверхность цилиндра.

11.086. В конус, осевое сечение которого — равносторонний треугольник, вписан шар. Найти объем конуса, если объем шара равен $\frac{32\pi}{3}$ см^3.

11.087. Доказать, что объем конуса равен $\frac{1}{3}$ произведения боковой поверхности на расстояние от центра основания до образующей.

11.088. Даны шар, цилиндр с квадратным осевым сечением и конус. Цилиндр и конус имеют одинаковые основания, а их высоты равны диаметру шара. Как относятся объемы цилиндра, шара и конуса?

11.089. Радиус основания конуса равен R, а угол при вершине в развертке его боковой поверхности равен 90°. Определить объем конуса.

11.090. Вычислить поверхность тела, полученного от вращения ромба площадью Q вокруг одной из его сторон.

11.091. На отрезке AB как на диаметре построена полуокружность с центром в точке O, а на отрезках OA и OB построены две полуокружности, расположенные в той же полуплоскости с границей AB, что и первая. Найти поверхность и объем тела, которое образовано вращением вокруг AB фигуры, ограниченной этими тремя полуокружностями, если $AB = 20$ см.

11.092. Треугольник со сторонами 10, 17 и 21 см вращается вокруг большей стороны. Вычислить поверхность и объем полученной фигуры вращения.

11.093. Найти отношение поверхности и объема шара соответственно к поверхности и объему вписанного куба.

11.094. Найти отношение поверхности и объема шара соответственно к полной поверхности и объему описанного вокруг него конуса с равносторонним осевым сечением.

11.095. Около правильной треугольной призмы, высота которой вдвое больше стороны основания, описан шар. Как относится его объем к объему призмы?

11.096. Определить поверхность шара, описанного около конуса, у которого радиус основания равен R, а высота равна h.

11.097. В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности шара.

11.098. Боковая поверхность конуса вдвое больше площади основания. Площадь его осевого сечения равна Q. Найти объем конуса.

11.099. Равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3 см и острым углом 60° вращается вокруг меньшего основания. Вычислить поверхность и объем полученной фигуры вращения.

11.100. Высота конуса разделена на три равных отрезка и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости, разбивающие конус на три части. Найти объем среднего усеченного конуса, если объем данного конуса равен V.

11.101. Боковая поверхность конуса развернута на плоскости в сектор, центральный угол которого содержит 120°, а площадь равна S. Найти объем конуса.

11.102. Из медной болванки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда размерами $80 \times 20 \times 5$ см, прокатывается лист толщиной в 1 мм. Определить площадь этого листа.

11.103. Металлический шар радиуса R переплавлен в конус, боковая поверхность которого в 3 раза больше площади основания. Вычислить высоту конуса.

11.104. В правильном тетраэдре $SABC$ построено сечение его плоскостью, проходящей через ребро AC и точку K, принадлежащую ребру SB, причем $BK : KS = 2 : 1$. Найти объем отсеченной пирамиды $KABC$, если ребро тетраэдра равно a.

11.105. Ромб вращается вокруг своей большей диагонали, а затем вокруг меньшей диагонали. Доказать, что отношение объемов полученных фигур вращения равно отношению площадей их поверхностей.

Группа Б

11.106. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a. Вычислить объем пирамиды, если известно, что ее боковая поверхность в 10 раз больше площади основания.

11.107. Объем правильной восьмиугольной призмы равен 8 м^3, а ее высота равна 2,2 м. Найти боковую поверхность призмы.

11.108. Основаниями усеченной пирамиды служат два правильных восьмиугольника. Сторона нижнего основания равна 0,4 м, а верхнего 0,3 м; высота усеченной пирамиды равна 0,5 м. Усеченная пирамида достроена до полной. Определить объем полной пирамиды.

11.109. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной a, и плоскими углами при вершине, равными углам наклона боковых ребер к основанию.

11.110. Найти расстояние между серединами двух скрещивающихся ребер куба, полная поверхность которого равна 36 см^2.

11.111. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120°. Найти боковую поверхность пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна S.

11.112. Основанием пирамиды служит параллелограмм $ABCD$, имеющий площадь m^2 и такой, что $BD \perp AD$; двугранные углы при ребрах AD и BC равны 45°, а при ребрах AB и CD равны 60°. Найти боковую поверхность и объем пирамиды.

11.113. В наклонном параллелепипеде проекция бокового ребра на плоскость основания равна 5 дм, а высота равна 12 дм. Сечение, перпендикулярное боковому ребру, есть ромб с площадью 24 дм^2 и диагональю, равной 8 дм. Найти боковую поверхность и объем параллелепипеда.

11.114. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 м, стороны одного основания — 27, 29 и 52 м, а периметр другого основания равен 72 м. Определить объем усеченной пирамиды.

11.115. В основании призмы лежит трапеция. Выразить объем призмы через площади S_1 и S_2 параллельных боковых граней и расстояние h между ними.

11.116. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2, площади боковых граней равны 9, 10 и 17 см^2. Определить объем призмы.

11.117. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция $ABCD$; $AB = CD = 13$ см, $BC = 11$ см, $AD = 21$ см. Площадь ее диагонального сечения равна 180 см^2. Вычислить полную поверхность призмы.

11.118. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб со стороной a и острым углом 30°. Диагональ одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°. Найти полную поверхность и объем параллелепипеда.

11.119. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а высота, опущенная из вершины основания на противоположную боковую грань, равна b. Определить объем пирамиды.

11.120. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в 3 раза больше площади основания. Площадь круга, вписанного в основание, численно равна радиусу этого круга. Найти объем пирамиды.

11.121. Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна одной из боковых граней (указать, какой именно).

11.122. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 2 и 1 см, а высота 3 см. Через точку пересечения диагоналей пирамиды параллельно основаниям проведена плоскость, делящая пирамиду на две части. Найти объем каждой из них.

11.123. Площадь сечения куба, представляющего собой правильный шестиугольник, равна Q. Найти полную поверхность куба.

11.124. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a, а угол при нем равен 45°. Определить объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

11.125. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC со стороной a. Вершина A_1 проецируется в центр нижнего основания, а ребро AA_1 наклонено к плоскости основания под углом 60°. Определить боковую поверхность призмы.

11.126. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a. Все ее диагональные сечения равновелики. Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

11.127. Куб, ребро которого равно a, срезан по углам плоскостями так, что от каждой грани остался правильный восьмиугольник. Определить объем полученного многогранника.

11.128. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на апофемах пирамиды и четыре — в плоскости основания. Все ребра пирамиды равны, каждое из них имеет длину a. Вычислить полную поверхность и объем куба.

11.129. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 3 см, объем пирамиды равен 38 см^3, а площади ее оснований относятся как 4 : 9. Определить боковую поверхность усеченной пирамиды.

11.130. Найти отношение объемов правильных тетраэдра и октаэдра, у которых полные поверхности равны.

11.131. В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник со стороной, равной a. Одна из боковых граней призмы перпендикулярна плоскости основания и представляет собой ромб, диагональ которого равна b. Найти объем призмы.

11.132. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна S; боковые ребра пирамиды равны и образуют с плоскостью основания угол 45°. Угол между диагоналями основания равен 60°. Найти объем пирамиды.

11.133. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной, равной a. Одна из боковых граней — также равносторонний треугольник и перпендикулярна плоскости основания. Определить полную поверхность пирамиды.

11.134. Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной основанию и делящей две стороны основания пополам. Определить объем отсеченной пирамиды, если сторона основания первоначальной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании содержит $45°$.

11.135. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если сторона большего основания равна a, сторона меньшего основания равна b, а острый угол боковой грани равен $60°$.

11.136. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Через одну из сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная противоположному боковому ребру и делящая это ребро в отношении $m : n$, считая от вершины основания. Определить полную поверхность пирамиды.

11.137. Через вершины A, C и D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол $60°$. Стороны основания равны 4 и 3 см. Найти объем параллелепипеда.

11.138. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 и 18 см, а площадь равна 90 см^2. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 6 см. Определить боковую поверхность пирамиды.

11.139. В правильный октаэдр вписан куб так, что его вершины находятся на ребрах октаэдра. Во сколько раз поверхность октаэдра больше поверхности куба?

11.140. Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен $90°$, а расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d.

11.141. Площадь того сечения правильного тетраэдра, которое имеет форму квадрата, равна m^2. Найти поверхность тетраэдра.

11.142. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость, составляющая с плоскостью нижнего основания угол $45°$. Площадь сечения равна S. Найти объем призмы.

11.143. В правильный тетраэдр помещена правильная треугольная призма так, что вершины одного ее основания находятся на боковых ребрах тетраэдра, а другого — в плоскости его основания. Ребро тетраэдра равно a. Определить объем призмы, если все ее ребра равны.

11.144. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом $30°$. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол $45°$. Определить объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

11.145. Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а площади их равны a^2, b^2 и c^2. Определить объем пирамиды.

11.146. Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник со стороной, равной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. Определить полную поверхность пирамиды.

11.147. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 и 8 м, а одна из диагоналей равна 6 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 м. Определить полную поверхность пирамиды.

11.148. Площади оснований усеченной пирамиды равны S_1 и S_2 ($S_1 < S_2$), а ее объем равен V. Определить объем полной пирамиды.

11.149. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, один из углов которого равен 30°. Площадь основания равна 4 дм^2. Площади боковых граней параллелепипеда равны 6 и 12 дм^2. Найти объем параллелепипеда.

11.150. Определить объем правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой стороны оснований равны 3 и 2 м, а боковая поверхность равновелика сумме площадей оснований.

11.151. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной, равной a, и острым углом 60°. Ребро AA_1 также равно a и образует с ребрами AB и AD углы 45°. Определить объем параллелепипеда.

11.152. Центры граней правильного тетраэдра служат вершинами нового тетраэдра. Найти отношение их поверхностей и отношение их объемов.

11.153. В треугольной усеченной пирамиде через сторону верхнего основания проведена плоскость параллельно противоположному боковому ребру. В каком отношении разделился объем усеченной пирамиды, если соответственные стороны оснований относятся как 1 : 2?

11.154. Расстояние между любыми двумя боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равно a. Боковое ребро равно l и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Определить полную поверхность призмы.

11.155. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной, равной a. Длина бокового ребра равна b, а одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами оснований углы 45°. Определить боковую поверхность призмы.

11.156. Доказать, что объем прямой призмы, основанием которой служит трапеция, равен произведению среднего арифметического площадей параллельных боковых граней на расстояние между ними.

11.157. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны a и b, а боковая поверхность равна половине полной поверхности. Найти объем пирамиды.

11.158. В треугольной пирамиде, каждое из боковых ребер которой равно a, один плоский угол при вершине — прямой, а каждый из остальных равен 60°. Вычислить объем пирамиды.

11.159. Основанием пирамиды служит параллелограмм, смежные стороны которого 9 и 10 см, а одна из диагоналей 11 см. Противоположные боковые ребра равны, а длина каждого из больших ребер составляет 10,5 см. Вычислить объем пирамиды.

11.160. Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями d_1 и d_2. Высота пирамиды проходит через вершину острого угла ромба. Площадь диагонального сечения, проведенного через меньшую диагональ, равна Q. Вычислить объем пирамиды при условии, что $d_1 > d_2$.

11.161. В треугольной пирамиде две боковые грани взаимно перпендикулярны. Площади этих граней равны P и Q, а длина их общего ребра равна a. Определить объем пирамиды.

11.162. В треугольной пирамиде все четыре грани — равные равнобедренные треугольники с основанием a и боковой стороной b. Вычислить объем пирамиды. При всяких ли a и b задача имеет решение?

11.163. В наклонной треугольной призме расстояния боковых ребер друг от друга равны a, b и c. Боковое ребро равно l, высота призмы равна h. Определить полную поверхность призмы.

11.164. Сторона основания правильной треугольной призмы меньше бокового ребра и равна a. Через сторону верхнего основания проведена плоскость, которая составляет с плоскостью основания угол 45° и делит призму на две части. Определить объем и полную поверхность верхней части призмы.

11.165. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Определить его полную поверхность.

11.166. Длины ребер параллелепипеда равны a, b и c. Ребра, длины которых равны a и b, взаимно перпендикулярны, а ребро длиной c образует с каждым из них угол 60°. Определить объем параллелепипеда.

11.167. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм с углом 120° и сторонами 3 и 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найти объем параллелепипеда.

11.168. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна S. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами 30° и 60°. Найти объем пирамиды.

11.169. Через вершину основания и середины двух боковых ребер правильной треугольной пирамиды проведена плоскость. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади ее основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна боковой грани.

11.170. Из середины высоты правильной треугольной пирамиды опущены перпендикуляры на боковое ребро и боковую грань. Длины этих перпендикуляров равны соответственно a и b. Найти объем пирамиды. При всяких ли a и b задача имеет решение?

11.171. В полушар радиуса R вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на сферической поверхности. Вычислить объем куба.

11.172. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 30°. Боковая поверхность конуса равна $3\pi\sqrt{3}$ кв. ед. Определить объем правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус.

11.173. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная призма. Определить ее полную поверхность.

11.174. В шар радиуса R вписана правильная шестиугольная усеченная пирамида, у которой плоскость нижнего основания проходит через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°. Определить объем пирамиды.

11.175. Около шара описан прямой параллелепипед, у которого диагонали основания равны a и b. Определить полную поверхность параллелепипеда.

11.176. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Определить объем этой пирамиды, если радиус окружности, описанной около ее основания, равен r.

11.177. Конус образован вращением прямоугольного треугольника площадью S вокруг одного из катетов. Найти объем конуса, если длина окружности, описанной при вращении треугольника точкой пересечения его медиан, равна L.

11.178. Треугольник со сторонами, равными a, b и c, вращается поочередно вокруг каждой из своих сторон. Найти отношение объемов полученных при этом фигур.

11.179. Дан куб $ABCDA_1C_1D_1$, ребро которого равно a. Через диагональ AC его грани $ABCD$ проведена плоскость, параллельная прямой BO_1, где O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Найти площадь полученного сечения.

11.180. На ребре двугранного угла 120° взят отрезок длиной c и из его концов проведены перпендикуляры к нему, лежащие в различных гранях данного двугранного угла и имеющие длины a и b. Найти длину отрезка прямой, соединяющего концы этих перпендикуляров.

11.181. Полная поверхность конуса равна πS кв. ед. Развертка боковой поверхности конуса представляет собой сектор с углом 60°. Определить объем конуса.

11.182. Радиус основания конуса равен R, а боковая поверхность равна сумме площадей основания и осевого сечения. Определить объем конуса.

11.183. Около шара описана правильная треугольная призма, а около нее описан шар. Найти отношение поверхностей этих шаров.

11.184. Даны цилиндр и шар. Радиусы основания цилиндра и большого круга шара равны. Полная поверхность цилиндра относится к поверхности шара как $m : n$. Найти отношение их объемов.

11.185. Найти площадь поверхности шара, вписанного в пирамиду, основанием которой служит треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см, если вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на 5 см.

11.186. Разверткой боковой поверхности конуса является сектор с центральным углом 120°. Вычислить объем конуса, если его высота равна h.

11.187. Вычислить поверхность шара, вписанного в треугольную пирамиду, все ребра которой равны a.

11.188. Определить боковую поверхность и объем усеченного конуса с образующей l, описанного около шара радиуса r.

11.189. В цилиндрический сосуд, радиус основания которого $R = 4$ см, помещен шар радиуса $r = 3$ см. В сосуд налита вода так, что ее свободная поверхность касается поверхности шара (шар при этом не всплывает). Определить толщину того слоя воды, который получится, если вынуть шар из сосуда.

11.190. Радиус основания конуса равен R. Две взаимно перпендикулярные образующие делят площадь боковой поверхности конуса в отношении $1 : 2$. Найти объем конуса.

11.191. Около шара описана правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой стороны оснований относятся как $m : n$. Определить отношение объемов пирамиды и шара.

11.192. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Определить отношение объемов полученных частей конуса.

11.193. Основание пирамиды есть прямоугольный треугольник. Боковые ребра пирамиды равны, а боковые грани, проходящие через катеты, составляют с плоскостью основания углы 30° и 60°. Найти объем описанного около пирамиды конуса, если высота пирамиды равна h.

11.194. Параллелограмм, периметр которого равен $2p$, вращается вокруг оси, перпендикулярной диагонали длиной d и проходящей через ее конец. Найти поверхность фигуры вращения.

11.195. Радиус основания конуса равен R, а угол развертки его боковой поверхности равен 90°. Определить объем конуса.

Группа В

11.196. Два равных куба с ребром a имеют общий отрезок MN, концами которого являются середины двух противоположных ребер, не принадлежащих одной грани. Один из кубов повернут вокруг прямой MN на 90° относительно другого. Найти объем общей части этих кубов.

11.197. Найти объем общей части двух кубов, если один из них получен поворотом на 90° другого куба вокруг оси, проходящей через среднюю линию одной из его граней. Ребро куба равно a.

11.198. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 6, 8 и 10 см. Некоторое плоское сечение этой призмы отсекает от боковых ребер, проходящих через вершины большего и среднего углов основания, отрезки, равные 12 см каждый, а от ребра, проходящего через вершину меньшего угла основания,— отрезок в 18 см. Найти объем и площадь полной поверхности фигуры, ограниченной плоскостью основания призмы, плоскостями боковых граней и плоскостью сечения.

11.199. Ребро наклонного параллелепипеда равно l. К нему примыкают две смежные грани, у которых площади равны m^2 и n^2, а их плоскости образуют угол 30°. Вычислить объем параллелепипеда.

11.200. Через точку, делящую ребро правильного тетраэдра в отношении 1 : 4, проведена плоскость, перпендикулярная этому ребру. Найти отношение объемов полученных частей тетраэдра.

11.201. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину и равны a. Из трех плоских углов, образованных этими ребрами при вершине пирамиды, два содержат по 45°, а третий — 60°. Определить объем пирамиды.

11.202. Через каждое ребро правильного тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Найти отношение объема полученного параллелепипеда к объему тетраэдра.

11.203. Через каждые три вершины куба, расположенные на концах каждой тройки ребер, сходящихся в одной вершине, проведена плоскость. Найти объем тела, ограниченного этими плоскостями, если ребро куба равно a.

11.204. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды проведены перпендикуляр длиной a к боковому ребру и перпендикуляр длиной b к боковой грани. Найти объем пирамиды.

11.205. Два правильных тетраэдра соединены двумя гранями так, что образуют двойную пирамиду. Центры шести боковых граней этой двойной пирамиды приняты за вершины прямой треугольной призмы. Вычислить объем полученной призмы, если ребро тетраэдра равно a.

11.206. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, площадь ее сечения, имеющего форму квадрата, равна m^2. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания.

11.207. Два куба с ребром, равным a, имеют общий отрезок, соединяющий центры двух противоположных граней, но один куб повернут на 45° по отношению к другому. Найти объем общей части этих кубов.

11.208. Через концы трех ребер, выходящих из вершин B, D, A_1 и C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a, проведены плоскости. Доказать, что полученная фигура есть правильный тетраэдр, и вычислить его полную поверхность и объем.

11.209. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, имеющей боковую поверхность 25 см^2, проведена плоскость, которая отсекает от противоположной грани треугольник площадью 4 см^2. Найти боковую поверхность пирамиды, отсеченной этой плоскостью от данной пирамиды.

11.210. Доказать, что объемы двух треугольных пирамид, имеющих по равному трехгранному углу, относятся как произведения длин трех ребер равных трехгранных углов.

11.211. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, боковое ребро составляет с высотой угол 30°. Через вершину основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащему боковому ребру. Эта плоскость разбивает пирамиду на две части. Определить объем части пирамиды, прилегающей к вершине.

11.212. Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно d. Определить полную поверхность куба.

11.213. Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой два противоположных ребра равны 4 и 12 м, а каждое из остальных ребер равно 7 м.

11.214. Гранями параллелепипеда служат ромбы, диагонали которых равны 3 и 4 см. В параллелепипеде имеются трехгранные углы, составленные тремя острыми углами ромбов. Найти объем параллелепипеда.

11.215. Найти объем треугольной пирамиды, стороны основания которой равны a, b и c, если каждая из этих сторон равна боковому ребру, не пересекающемуся с ней.

11.216. Основание пирамиды $SABCD$ есть трапеция с параллельными сторонами AB и CD. Доказать, что объем пирамиды равен $\frac{4}{3}$ произведения площади треугольника MSN, где MN — средняя линия трапеции, на расстояние ребра AB от плоскости MSN.

11.217. Многогранник имеет следующее строение: две его грани (основания) представляют собой многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях; остальные грани (боковые) — трапеции, параллелограммы или треугольники, у которых каждая вершина является одновременно вершиной одного из оснований. Доказать, что объем такого многогранника равен $\frac{1}{6}H(S_1+S_2+4S_3)$, где H — расстояние между плоскостями оснований, S_1 и S_2 — площади оснований, а S_3 — площадь сечения, равноотстоящего от обоих оснований.

11.218. Фигура ограничена сверху и снизу двумя прямоугольниками со сторонами, равными a, b и a_1, b_1, а сбоку — трапециями. Стороны прямоугольников параллельны, расстояние между параллельными плоскостями прямоугольных оснований равно h. Найти объем фигуры.

11.219. Диагонали двух одинаковых кубов с ребром, равным a, лежат на одной и той же прямой. Вершина второго куба совпадает с центром первого; второй куб повернут вокруг диагонали на 60° по отношению к первому. Найти объем общей части этих кубов.

11.220. Около шара описан усеченный конус, площадь нижнего основания которого в a раз больше площади его верхнего основания. Во сколько раз объем усеченного конуса больше объема шара?

11.221. В конус вписан шар. Доказать, что отношение полной поверхности конуса к поверхности шара равно отношению их объемов.

11.222. Высота цилиндра равна радиусу его основания и имеет длину a. Через ось цилиндра проведена другая цилиндрическая поверхность, делящая окружность основания на две дуги, длины которых относятся как 2 : 1. Эта цилиндрическая поверхность делит данный цилиндр на две части. Найти боковую поверхность и объем большей части цилиндра.

11.223. Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно q. Найти отношение объемов этих тел. При каких значениях q задача не имеет решения?

11.224. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, основание которой делит перпендикулярный ему радиус пополам. Определить поверхность шара, вписанного в пирамиду.

11.225. Конус лежит на плоскости и катится по ней, вращаясь вокруг своей неподвижной вершины. Высота конуса и его образующая равны соответственно h и l. Вычислить площадь поверхности, описываемой высотой конуса.

11.226. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник ABC такой, что $AB = AC = 10$ м и $BC = 12$ м. Грань SBC перпендикулярна основанию и $SB = SC$. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду, если высота пирамиды равна 1,4 м.

11.227. Длины боковых ребер треугольной пирамиды равны a, b и c, а плоские углы, образованные этими ребрами,— прямые. Найти длину высоты, проведенной к основанию пирамиды.

11.228. Доказать, что если в многогранник можно вписать сферу, то его объем равен $\frac{1}{3}$ произведения полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

11.229. Найти объем правильной пирамиды, в основании которой лежит правильный пятиугольник, а боковыми гранями являются правильные треугольники со стороной a.

11.230. Высота правильной треугольной пирамиды равна H. Найти ее полную поверхность, если плоскость, проведенная через вершину основания пирамиды перпендикулярно апофеме противоположной боковой грани, составляет с плоскостью основания угол 30°.

11.231. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длина гипотенузы которого $AB = 4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а его длина равна 2. Найти величину угла и расстояние между прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC, а другая — через точку C и середину ребра AB.

11.232. Доказать, что если тетраэдр ортоцентрический, т. е. такой, что прямые, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке, то:

а) каждые два его противоположных ребра взаимно перпендикулярны;

б) если один из плоских углов при какой-либо вершине тетраэдра — прямой, то и другие два плоских угла — прямые;

в) любая его вершина проецируется в ортоцентр противоположной грани (точку пересечения прямых, содержащих высоты грани);

г) суммы квадратов длин его противоположных ребер равны.

11.233. а) Длины ребер AB, AC, AD и BC ортоцентрического тетраэдра равны соответственно 5, 7, 8 и 6 см. Найти длины остальных двух ребер.

б) Является ли тетраэдр $ABCD$ ортоцентрическим, если $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $DC = 6$ см?

11.234. В ортоцентрическом тетраэдре $DABC$ угол ADC — прямой. Доказать, что $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, где h — длина высоты тетраэдра, проведенной из вершины D, $a = DA$, $b = DB$, $c = DC$.

11.235. В ортоцентрическом тетраэдре $DABC$ угол ABC — прямой; S_1, S_2, S_3 — площади граней BAC, BAD, BCD соответственно. Доказать, что объем тетраэдра равен $\frac{1}{3}\sqrt{2S_1S_2S_3}$.

ГЛАВА 12

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

1°. *Площадь параллелограмма ABCD* (рис. 12.1) *можно вычислить по следующим формулам*:

$$S=\frac{AC^2-BD^2}{4}\operatorname{tg}A; \qquad (12.1)$$

$$S=\frac{AD^2-AB^2}{2}\operatorname{tg}\angle AOD, \qquad (12.2)$$

где O — точка пересечения диагоналей AC и BD.

□ Используя теорему косинусов (10.7), выразим AC^2 из ΔACD и BD^2 из ΔABD, а затем вычтем из первого равенства второе. Тогда получим

$AC^2-BD^2=4\,AB\cdot AD\cos A$, откуда $AB\cdot AD=\dfrac{AC^2-BD^2}{4\cos A}$. Наконец, применяя формулу (10.22), находим

$$S_{ABCD}=AB\cdot AD\sin A=\frac{AC^2-BD^2}{4}\operatorname{tg}A.$$

Проведя аналогичные рассуждения по отношению к ΔAOD и ΔAOB, можно установить справедливость формулы (12.2). ■

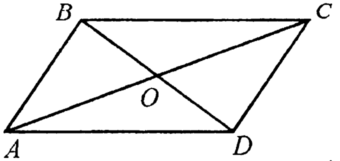


Рис. 12.1

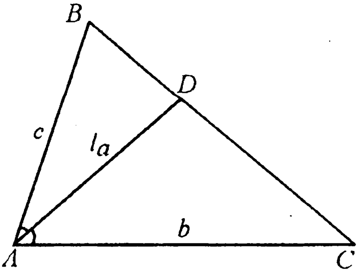


Рис. 12.2

2°. *Пусть известны длины b и c двух сторон треугольника ABC и угол A, образуемый ими* (рис. 12.2). *Тогда длина биссектрисы AD треугольника, проведенной из вершины этого угла, выражается формулой*

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}. \tag{12.3}$$

□ Имеем $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADC} + S_{\Delta ADB}$. Используя формулу (10.2), получаем

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}l_a b\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}l_a c\sin\frac{A}{2},$$

или

$$bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}l_a(b+c)\sin\frac{A}{2}.$$

Так как $\sin\frac{A}{2} \neq 0$, то $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$. ■

3°. *Справедливы следующие соотношения между элементами шара и вписанного в него конуса*:

$$l = 2R\sin\alpha; \tag{12.4}$$

$$l^2 = 2RH, \tag{12.5}$$

где R — радиус шара, l — длина образующей конуса, H — его высота, α — угол между образующей и плоскостью основания.

Такие же соотношения справедливы и для вписанной в шар пирамиды, боковые ребра которой имеют длину l и составляют с плоскостью основания угол α.

□ а) Построив осевое сечение конуса, вписанного в шар (рис. 12.3), получим равнобедренный треугольник SAB, вписанный в окружность радиуса R. Центром окружности является точка O пересечения высоты SK и серединного перпендикуляра DO к стороне SB, причем $SK = H$, $\angle SOD = \angle SBK = \alpha$. Из ΔSDO находим $SD = SO\sin\alpha$, или $0{,}5l = R\sin\alpha$, т. е. $l = 2R\sin\alpha$.

б) Продолжим SK до пересечения с окружностью в точке E и построим отрезок BE. Тогда получим прямоугольный треугольник SBE, в котором катет $SB = l$ есть среднее геометрическое между гипотенузой $SE = 2R$ и проекцией $SK = H$ катета SB на гипотенузу SE, т. е. $l^2 = 2RH$. ■

4°. *Пусть A_1B_1 — боковое ребро пирамиды или призмы, A_1O — его проекция на плоскость основания, $\angle B_1A_1O = \alpha$, $\angle OA_1A_2 = \beta$, $\angle B_1A_1A_2 = \gamma$* (рис. 12.4). *Тогда справедливо равенство* $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

□ Проведем высоту боковой грани — отрезок B_1C, тогда $OC \perp A_1A_2$ (по теореме о трех перпендикулярах) и из ΔA_1CB_1 получим $\cos\gamma = \dfrac{A_1C}{A_1B_1}$. Так как $A_1C =$

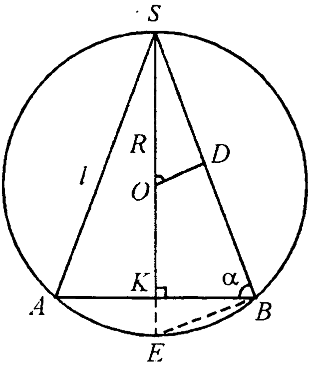


Рис. 12.3

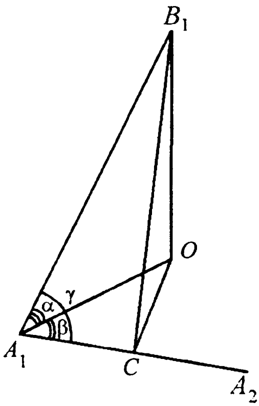


Рис. 12.4

$= OA_1 \cos\beta$ (из ΔOCA_1), то $\cos\gamma = \dfrac{OA_1\cos\beta}{A_1B_1}$. Но $\dfrac{OA_1}{A_1B_1} = \cos\alpha$ (из ΔA_1OB_1); значит, $\cos\gamma = \cos\alpha\,\cos\beta$. ■

Пример 1. Угол при основании равнобедренного остроугольного треугольника ABC ($AB = BC$) равен α. В каком отношении, считая от вершины A, высота BD делит высоту AE?

□ Согласно условию, ΔABC — остроугольный; значит, точка K пересечения высот лежит внутри треугольника (рис.12.5). Пусть $AD = a$. Из ΔAEC и ΔAKD следует, что $AE = 2a\sin\alpha$, $AK = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ ($\angle AKD = \angle C$, так как оба угла дополняют

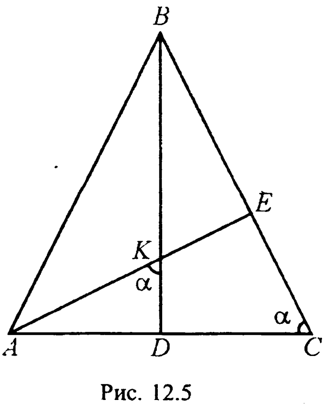


Рис. 12.5

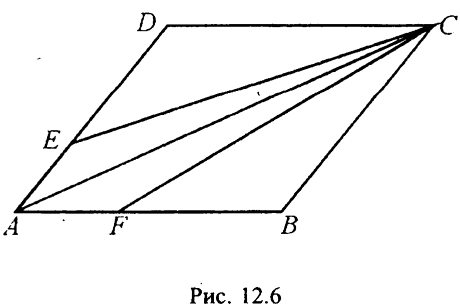


Рис. 12.6

угол KAD до 90°). Далее имеем $KE = AE - AK = 2a\sin\alpha - \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a(2\sin^2\alpha - 1)}{\sin\alpha} =$ $= -\frac{a\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$. Окончательно получим $\frac{AK}{KE} = -\frac{a}{\sin\alpha} : \frac{a\cos 2\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$. ■

Пример 2. Из вершины C ромба $ABCD$, сторона которого равна a, проведены два отрезка CE и CF (рис. 12.6), делящие ромб на три равновеликие фигуры. Известно, что $\cos C = 0{,}25$. Найти сумму $CE + CF$.

□ Высоты треугольников CED и CFB, проведенные из вершины C, имеют равные длины и $S_{\Delta CED} = S_{\Delta CFB}$ (по условию); поэтому $DE = FB$, а значит, $CE =$ $= CF$ и $AE = AF$. Проведем диагональ AC, которая разделит $AECF$ на два равных треугольника. Следовательно, $S_{\Delta ACF} = 0{,}5S_{AECF}$. Так как $S_{AECF} = S_{\Delta CFB}$ (по условию), то $S_{\Delta ACF} = 0{,}5S_{\Delta CFB}$, причем треугольники ACF и CFB имеют общую высоту, проведенную из вершины C. Отсюда вытекает, что $AF = 0{,}5FB$, т. е. $FB = \frac{2}{3}a$; кроме того, $\cos B = \cos(180° - C) = -\cos C = -0{,}25$. Из ΔCFB по теореме косинусов получим $CF = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{9} - 2a\cdot\frac{2a}{3}\cdot(-0{,}25)} = \frac{4a}{3}$. Итак, $CE + CF = \frac{8a}{3}$. ■

Пример 3. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c, а один из острых углов равен α. Каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды.

□ Так как все боковые ребра пирамиды $DABC$ (рис. 12.7) одинаково наклонены к плоскости основания, то вершина D проецируется в центр окружности, описанной около ΔABC (см. гл. 11, «Дополнительные соотношения», п. 1°); для прямоугольного треугольника — в середину E гипотенузы AB. Высота DE ΔADB является высотой пирамиды. Далее имеем $S_{\Delta ABC} =$ $= \frac{1}{2}AC\cdot BC = \frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha$, $DE = BE\,\mathrm{tg}\beta = \frac{c}{2}\mathrm{tg}\beta$. Окончательно получим

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha\cdot\frac{c}{2}\mathrm{tg}\beta = \frac{c^3}{24}\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\beta. \blacksquare$$

Пример 4. В конус, образующая которого наклонена к основанию под углом α, вписан шар. Радиус окружности касания сферической и конической поверхностей равен r. Найти длину образующей конуса.

□ В осевом сечении конуса (рис. 12.8) получим равнобедренный треугольник ABC, в который вписана окружность с центром O — точкой пересечения высоты BD треугольника и биссектрисы CO угла C. Из точки E касания окружности с образующей BC проведем $EK \perp BD$. Очевидно, что $KE = r$, $\angle KOE =$

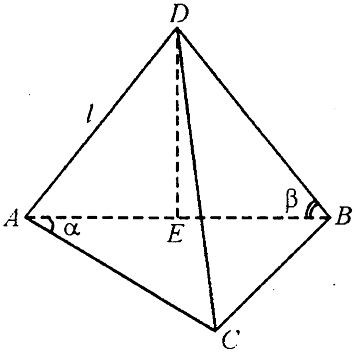


Рис. 12.7

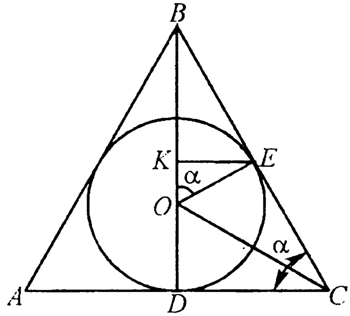


Рис. 12.8

$= \angle BCD = \alpha$ (так как $OE \perp BC$ и $KE \perp BD$), $OE = OD = \dfrac{r}{\sin\alpha}$. Из ΔODC находим $DC = OD\,\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = r\dfrac{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$, а из ΔBDC находим $BC = \dfrac{DC}{\cos\alpha} = 2r\dfrac{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$. ■

Пример 5. Найти площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна H, а величина плоского угла при вершине равна φ (рис. 12.9).

□ Введем вспомогательный угол $\alpha = \angle SA_2O$.

Тогда $SA_2 = \dfrac{H}{\sin\alpha}$ и площадь боковой поверхности пирамиды выразится следующим образом:

$$S_{\text{бок}} = 4S_{\Delta SA_2A_3} = 4\cdot\frac{1}{2}\frac{H^2}{\sin^2\alpha}\cdot\sin\varphi = \frac{2H^2\sin\varphi}{\sin^2\alpha}.$$

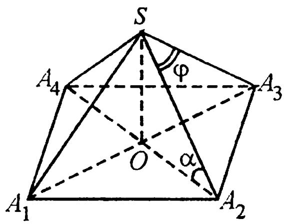


Рис. 12.9

Установим связь между углами α и φ. В ΔSOA_2 имеем $SA_2 = \dfrac{OA_2}{\cos\alpha}$, а в ΔSA_2A_3 имеем $SA_2 = \dfrac{A_2A_3}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$, где $A_2A_3 = \sqrt{2}OA_2$ (из ΔA_2OA_3). Поэтому $\dfrac{OA_2}{\cos\alpha} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}OA_2}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$, откуда $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\dfrac{\varphi}{2}$. Следовательно, $\sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\dfrac{\varphi}{2} = \cos\varphi$

и окончательно получим $S_{\text{бок}} = 2H^2\,\mathrm{tg}\,\varphi$. ■

Группа А

12.001. Сумма двух неравных высот равнобедренного треугольника равна l, угол при вершине равен α. Найти боковую сторону.

12.002. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

12.003. В ромбе через вершину острого угла, равного α, проведена прямая, делящая этот угол в отношении $1 : 2$. В каком отношении эта прямая делит сторону ромба, которую она пересекает?

12.004. В квадрате $ABCD$ через середину M стороны AB проведена прямая, пересекающая противоположную сторону CD в точке N. В каком отношении прямая MN делит площадь квадрата, если острый угол AMN равен α? Указать возможные значения α.

12.005. Высота равнобедренной трапеции равна h, а угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найти среднюю линию трапеции.

12.006. В прямоугольном треугольнике даны его площадь S и острый угол α. Найти расстояние от точки пересечения медиан треугольника до гипотенузы.

12.007. В прямоугольник $ABCD$ ($AB \parallel CD$) вписан треугольник AEF. Точка E лежит на стороне BC, точка F — на стороне CD. Найти тангенс угла EAF, если $AB : BC = BE : EC = CF : FD = k$.

12.008. В параллелограмме со сторонами a и b и острым углом α найти тангенсы углов, образуемых большей диагональю параллелограмма с его сторонами.

12.009. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине равен α. Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

12.010. Около круга радиуса R описана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании. Найти периметр трапеции.

12.011. Доказать, что во всяком треугольнике разность между суммой квадратов любых двух его сторон и произведением этих сторон, умноженным на косинус угла между ними, есть для данного треугольника величина постоянная.

12.012. Даны стороны a, b, c и d четырехугольника, вписанного в окружность. Найти угол, заключенный между сторонами a и b.

12.013. Отношение площади прямоугольного треугольника к площади квадрата, построенного на его гипотенузе, равно k. Найти сумму тангенсов острых углов треугольника.

12.014. Площадь прямоугольной трапеции равна S, острый угол равен α. Найти высоту трапеции, если ее меньшая диагональ равна большему основанию.

12.015. Общая внешняя касательная двух внешне касающихся окружностей составляет с линией центров угол α. Найти отношение радиусов окружностей.

12.016. Высоты параллелограмма, проведенные из вершины тупого угла, равны h_1 и h_2, а угол между ними равен α. Найти бóльшую диагональ параллелограмма.

12.017. Диагональ прямоугольника равна d и делит угол прямоугольника в отношении $m : n$. Найти периметр прямоугольника.

12.018. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, отношение боковой стороны к меньшему основанию равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

12.019. Площадь равнобедренного треугольника равна S, а противолежащий основанию угол между медианами, проведенными к его боковым сторонам, равен α. Найти основание.

12.020. В сегмент, дуга которого равна α радианам, вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой дуги, а две другие лежат на хорде. Площадь треугольника равна S. Найти радиус дуги сегмента.

12.021. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α, радиус вписанного круга равен r. Через вершину угла при основании и центр вписанного круга проведена прямая. Найти отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника.

12.022. Найти угол треугольника, если известно, что стороны, заключающие этот угол, равны 1 и 3, а биссектриса угла равна $0{,}75\sqrt{3}$.

12.023. В равнобедренном треугольнике даны основание a и угол α при основании. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне.

12.024. Найти отношение периметра трапеции, описанной около окружности, к длине этой окружности, если углы при большем основании трапеции равны α и β.

12.025. В прямоугольном треугольнике ABC острый угол A равен α радианам. Дуга окружности с центром в вершине прямого угла C касается гипотенузы в точке D и пересекает катеты AC и BC соответственно в точках E и F. Найти отношение площадей криволинейных треугольников ADE и BDF.

12.026. В параллелограмм со сторонами a и b ($a < b$) и острым углом α вписан ромб; две его вершины совпадают с серединами бóльших сторон параллелограмма, две другие лежат на меньших сторонах (или на их продолжениях). Найти углы ромба.

12.027. Около круга радиуса R описана трапеция с углами α и β при большем основании. Найти площадь трапеции.

12.028. В равнобедренный треугольник с углом α при основании вписана окружность радиуса r. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

12.029. Площадь равнобедренного треугольника равна S, угол между высотой, проведенной к боковой стороне, и основанием равен α. Найти радиус круга, вписанного в треугольник.

12.030. Равносторонний треугольник пересечен прямой, проходящей через середину одной из его сторон и составляющей с этой стороной острый угол α. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

12.031. В квадрат $ABCD$ вписан равнобедренный треугольник AEF, точка E лежит на стороне BC, точка F — на стороне CD и $AE = AF$. Тангенс угла AEF равен 3. Найти косинус угла FAD.

12.032. В равнобедренном треугольнике угол между боковыми сторонами равен α, радиус вписанной окружности равен r. Найти площадь треугольника.

12.033. Около круга описана прямоугольная трапеция с острым углом α. Найти высоту трапеции, если ее периметр равен P.

12.034. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Найти отношение площади треугольника к площади описанного около него круга.

12.035. В треугольнике даны длины двух сторон a и b и угол α между ними. Найти длину высоты, проведенной к третьей стороне.

12.036. Показать, что если в треугольнике отношение тангенсов двух углов равно отношению квадратов синусов этих же углов, то треугольник равнобедренный или прямоугольный.

12.037. В ромб $ABCD$ и в треугольник ABC, содержащий его бóльшую диагональ, вписаны окружности. Найти отношение радиусов этих окружностей, если острый угол ромба равен α.

12.038. На меньшем основании равнобедренной трапеции построен правильный треугольник. Его высота равна высоте трапеции, а площадь в 5 раз меньше площади трапеции. Найти угол при большем основании трапеции.

12.039. Высота BD правильного треугольника ABC продолжена за вершину B и на продолжении взят отрезок BF, равный стороне треугольника. Точка F соединена отрезком с вершиной C. С помощью этого построения показать, что $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$.

12.040. Высота равнобедренной трапеции равна h. Верхнее основание трапеции из середины нижнего основания видно под углом 2α, а нижнее основание из середины верхнего — под углом 2β. Найти площадь трапеции в этом общем случае и вычислить ее без таблиц, если $h = 2$, $\alpha = 15°$, $\beta = 75°$.

12.041. Даны две стороны b и c треугольника и его площадь, равная 0,4 bc. Найти третью сторону.

12.042. Из точки, взятой на окружности радиуса R, проведены две равные хорды, составляющие вписанный угол, равный α радианам. Найти часть площади круга, заключенную внутри этого вписанного угла.

12.043. Через вершину A равнобедренного остроугольного треугольника ABC и центр описанной около этого треугольника окружности проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D. Найти длину AD, если $AB = BC = b$ и $\angle ABC = \alpha$.

12.044. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания равна d и составляет со стороной основания угол α. Через эту сторону и противоположную ей сторону верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол β. Найти боковую поверхность параллелепипеда.

12.045. Разность между образующей и высотой конуса равна d, а угол между ними равен α. Найти объем конуса.

12.046. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Одно боковое ребро перпендикулярно плоскости основания и равно l, два других образуют с плоскостью основания угол α. В пирамиду вписана прямая призма; три ее вершины лежат на боковых ребрах пирамиды, три другие — на основании пирамиды. Диагональ боковой грани призмы составляет с плоскостью основания угол β. Найти высоту призмы.

12.047. Диагонали осевого сечения усеченного конуса делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1. Угол между диагоналями, обращенный к основанию конуса, равен α. Длина диагонали равна l. Найти объем усеченного конуса.

12.048. Найти угол при вершине осевого сечения конуса, если центральный угол в развертке его боковой поверхности равен α радианам.

12.049. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найти этот угол.

12.050. Через вершину C основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ проведена плоскость перпендикулярно боковому ребру SA. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол, косинус которого равен $\frac{2}{3}$. Найти косинус угла между двумя боковыми гранями.

12.051. В основании прямой треугольной призмы лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC = a$ и $\angle BAC = \alpha$. Через сторону AC проведена плоскость под углом $\varphi\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ к основанию. Найти площадь сечения, если известно, что в сечении получился треугольник.

12.052. Треугольник ABC вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, проходящей вне его через вершину A и одинаково наклоненной к сторонам AB и AC. Найти объем тела вращения, если $AB = a$, $AC = b$ и $\angle BAC = \alpha$.

12.053. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в 5 раз больше площади ее основания. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

12.054. Высота конуса равна H, угол между образующей и высотой равен α. В этот конус вписан другой конус так, что вершина второго конуса совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие обоих конусов взаимно перпендикулярны. Найти объем вписанного конуса.

12.055. Сторона большего основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна a. Боковое ребро и диагональ пирамиды составляют с плоскостью основания углы, равные соответственно α и β. Найти площадь меньшего основания пирамиды.

12.056. Радиус круга, вписанного в прямоугольную трапецию, равен r, острый угол трапеции равен α. Эта трапеция вращается вокруг меньшей боковой стороны. Найти боковую поверхность тела вращения.

12.057. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом α. Диагональ большей боковой грани равна d и образует с боковым ребром угол β. Найти объем призмы.

12.058. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом, равным α, обращенным к основанию. Объем цилиндра равен V. Найти высоту цилиндра.

12.059. Найти острый угол ромба, зная, что объемы тел, полученных от вращения ромба вокруг его большей диагонали и вокруг его стороны, относятся как $1:2\sqrt{5}$.

12.060. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

12.061. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция, у которой основания равны a и b ($a > b$), а острый угол равен α. Плоскость, проходящая через большее основание верхней трапеции и меньшее основание нижней трапеции, составляет с плоскостью нижнего основания угол β. Найти объем призмы.

12.062. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен α. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол β. Найти высоту параллелепипеда, если его объем равен V.

12.063. Каждое из боковых ребер четырехугольной пирамиды образует с высотой угол α. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом β между диагоналями. Найти объем пирамиды, если ее высота равна h.

12.064. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через одну из сторон этого квадрата и через вершину конуса, при пересечении с поверхностью конуса образует равнобедренный треугольник, у которого угол при вершине равен α. Найти объем конуса.

12.065. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l и составляет с плоскостью основания угол α. Найти объем пирамиды.

12.066. Через диагональ нижнего основания правильной четырехугольной призмы и противоположную вершину ее верхнего основания проведена плоскость. Угол между равными сторонами сечения равен α. Найти отношение высоты призмы к стороне основания.

12.067. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Диагональ грани, противоположной данному углу, равна l и составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

12.068. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует со стороной основания угол α. Найти угол между боковым ребром и высотой пирамиды и допустимые значения α.

12.069. Плоскость, проведенная параллельно оси цилиндра, делит окружность основания в отношении $m : n$. Площадь сечения равна S. Найти боковую поверхность цилиндра.

12.070. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды попарно взаимно перпендикулярны. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

12.071. В полушар вписан конус, вершина которого совпадает с центром окружности, являющейся основанием полушара; плоскости оснований конуса и полушара параллельны. Прямая, проходящая через центр основания конуса и произвольную точку окружности большого круга полушара, составляет с плоскостью основания конуса угол α. Найти отношение объемов полушара и конуса.

12.072. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Высота пирамиды равна H. Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Найти объем пирамиды.

12.073. Образующая конуса равна a, расстояние от вершины конуса до центра вписанного шара равно b. Найти угол между образующей и плоскостью основания.

12.074. В конус вписан шар. Отношение радиуса окружности касания шаровой и конической поверхностей к радиусу основания конуса равно k. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью основания.

12.075. Площадь основания цилиндра относится к площади его осевого сечения как $m : n$. Найти острый угол между диагоналями осевого сечения.

12.076. В основании прямой призмы лежит ромб с острым углом α. Отношение высоты призмы к стороне основания равно k. Через сторону основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

12.077. Стороны основания прямого параллелепипеда относятся как 1 : 2, острый угол в основании равен α. Найти угол между меньшей диагональю параллелепипеда и плоскостью основания, если высота параллелепипеда равна большей диагонали основания.

12.078. Отношение одной из сторон основания треугольной пирамиды к каждому из остальных пяти ее ребер равно k. Найти двугранный угол между двумя равными боковыми гранями пирамиды и допустимые значения k.

12.079. Плоскость квадрата составляет угол α с плоскостью, проведенной через одну из его сторон. Какой угол составляет с той же плоскостью диагональ квадрата?

12.080. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно стороне основания. Найти угол между стороной основания и непересекающей ее диагональю боковой грани.

12.081. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда составляют с плоскостью основания углы α и β. Найти угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

12.082. Найти угол между пересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней правильной четырехугольной призмы, если плоскость, в которой они лежат, составляет с плоскостью основания угол α.

12.083. Найти угол между апофемами двух смежных боковых граней правильной n-угольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен α.

12.084. Найти косинус угла между апофемой и диагональю основания правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне основания.

12.085. В конус вписана треугольная пирамида, у которой боковые ребра попарно взаимно перпендикулярны. Найти угол между образующей конуса и его высотой.

12.086. В грани двугранного угла, равного α, проведена прямая, составляющая угол β с ребром двугранного угла. Найти угол между этой прямой и другой гранью.

12.087. Найти угол между образующей и высотой конуса, у которого боковая поверхность есть среднее пропорциональное между площадью основания и полной поверхностью.

12.088. Все боковые ребра треугольной пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный одному из острых углов прямоугольного треугольника, лежащего в основании пирамиды. Найти этот угол, если гипотенуза треугольника равна c, а объем пирамиды равен V.

12.089. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с боковым ребром угол α. Найти объем параллелепипеда, если периметр его основания равен P.

12.090. Плоскость, проведенная через образующую цилиндра, составляет с плоскостью осевого сечения, содержащего ту же образующую, острый угол α.

Диагональ прямоугольника, полученного в сечении цилиндра этой плоскостью, равна l и образует с плоскостью основания угол β. Найти объем цилиндра.

12.091. Сторона ромба равна a, его острый угол равен α. Ромб вращается вокруг прямой, проходящей через его вершину параллельно большей диагонали. Найти объем тела вращения.

12.092. Объем шара равен V. Найти объем его сектора, у которого центральный угол в осевом сечении равен α.

12.093. Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и боковым ребром равен $\alpha\left(\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$. В каком отношении делит высоту пирамиды центр описанного шара?

12.094. Основания двух конусов, имеющих общую вершину, лежат в одной плоскости. Разность их объемов равна V. Найти объем меньшего конуса, если касательные, проведенные к окружности его основания из произвольной точки окружности основания большего конуса, образуют угол α.

12.095. Боковая грань правильной треугольной усеченной пирамиды составляет с плоскостью основания острый угол α. Найти угол между высотой и боковым ребром пирамиды.

12.096. В конус вписан полушар: большой круг полушара лежит в плоскости основания конуса, а шаровая поверхность касается поверхности конуса. Найти объем полушара, если образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α.

12.097. Стороны оснований правильной n-угольной усеченной пирамиды равны a и b. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

12. 098. В шар вписан конус. Площадь осевого сечения конуса равна S, а угол между высотой и образующей равен α. Найти объем шара.

12.099. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом β. Найти полную поверхность пирамиды.

12.100. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция, у которой диагональ равна a, а угол между диагональю и бóльшим основанием равен α. Диагональ призмы наклонена к основанию под углом β. Найти объем призмы.

12.101. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a. Угол между пересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней равен α. Найти объем призмы.

12.102. Объем конуса равен V. В конус вписана пирамида, основанием которой служит равнобедренный треугольник с углом α между боковыми сторонами. Найти объем пирамиды.

12.103. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость. Найти отношение площади сечения к полной поверхности конуса, если образующая конуса составляет с плоскостью основания угол β.

12.104. Отношение боковой поверхности правильной треугольной пирамиды к площади ее основания равно k. Найти угол между боковым ребром и высотой пирамиды.

12.105. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость, составляющая с основанием угол β. Найти объем конуса, если его высота равна h.

12.106. Высота правильной треугольной пирамиды равна H, двугранный угол при основании равен α. Найти полную поверхность пирамиды.

12.107. Около шара описан усеченный конус, у которого площадь одного основания в 4 раза больше площади другого. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

12.108. Через сторону нижнего основания куба проведена плоскость, делящая объем куба в отношении $m : n$, считая от нижнего основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если $m \le n$.

12.109. Высота правильной треугольной призмы равна H. Плоскость, проведенная через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью нижнего основания острый двугранный угол α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью.

12.110. Найти боковую поверхность усеченного конуса, описанного около правильной треугольной усеченной пирамиды, зная, что острый угол трапеции, служащей боковой гранью пирамиды, равен α и что в эту трапецию можно вписать окружность радиуса r.

12.111. Сторона основания треугольной пирамиды равна a, прилежащие к ней углы основания равны α и β. Все боковые ребра составляют с высотой пирамиды один и тот же угол φ. Найти объем пирамиды.

12.112. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно d. Угол между образующей и высотой равен α. Найти полную поверхность конуса.

12.113. Основанием пирамиды $DABC$ служит прямоугольный треугольник ABC $(\angle C = 90°)$. Боковое ребро DA перпендикулярно основанию. Найти острые углы треугольника ABC, если $\angle DBA = \alpha$ и $\angle DBC = \beta$ $(\alpha < \beta)$.

12.114. В правильной шестиугольной призме плоскость, проведенная через сторону основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований, составляет с плоскостью основания острый угол α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью, если сторона основания призмы равна a.

12.115. В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найти косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

12.116. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол между боковыми сторонами равен α. Найти объем призмы, если ее боковая поверхность равна S.

12.117. Основанием пирамиды, вписанной в конус, является четырехугольник, у которого смежные стороны попарно равны, а угол между одной парой смежных сторон равен α. Найти отношение объема пирамиды к объему конуса.

12.118. Найти косинус угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне основания.

12.119. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой касаются конус и шар, равен r. Найти объем конуса, если угол между высотой и образующей конуса равен α.

12.120. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно m и наклонено к плоскости основания под углом α. Найти объем пирамиды.

12.121. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а равные боковые ребра образуют между собой угол α. Найти высоту прямой треугольной призмы, равновеликой данной пирамиде и имеющей с ней общее основание.

12.122. Найти объем конуса, если в его основании хорда длиной a стягивает дугу в α радианов, а высота конуса составляет с образующей угол β.

12.123. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, а сумма длин его высоты и образующей равна a. Найти объем конуса.

12.124. Найти полную поверхность прямого параллелепипеда, если в основании его лежит ромб с острым углом α и меньшей диагональю d, а высота параллелепипеда в 2 раза меньше стороны основания.

12.125. В правильной двенадцатиугольной пирамиде, ребра которой пронумерованы подряд, проведено сечение через первое и пятое ребра. Плоскость сечения образует с плоскостью основания пирамиды угол α, а площадь этого сечения равна S. Найти объем пирамиды.

12.126. Найти угол в осевом сечении конуса, если сфера с центром в вершине конуса, касающаяся его основания, делит объем конуса пополам.

12.127. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник, диагонали которого пересекаются под углом α. Длина диагонали равна d. Найти боковую поверхность цилиндра.

12.128. В конус, образующая которого равна l, вписана правильная шестиугольная призма с равными ребрами. Найти боковую поверхность призмы, если угол между образующей и высотой конуса равен α.

12.129. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a, а двугранный угол при основании равен α.

12.130. Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна a и составляет с основанием угол α. Найти объем цилиндра.

Группа Б

12.131. В остроугольном треугольнике ABC высота $AD = a$, высота $CE = b$, острый угол между AD и CE равен α. Найти AC.

12.132. Острый угол прямоугольного треугольника равен α. Найти отношение радиуса вписанной в треугольник окружности к радиусу описанной окружности. При каком значении α это отношение является наибольшим?

12.133. Дуга AB сектора AOB содержит α радианов. Через точку B и середину C радиуса OA проведена прямая. В каком отношении она делит площадь сектора?

12.134. Основания равнобедренной трапеции равны a и b ($a > b$), угол при большем основании равен α. Найти радиус окружности, описанной около трапеции.

12.135. Найти отношение площади сектора с данным центральным углом α радианов к площади вписанного в него круга.

12.136. Боковые стороны трапеции равны p и q ($p < q$), большее основание равно a. Углы при большем основании относятся как 2 : 1. Найти меньшее основание.

12.137. Площадь равнобедренной трапеции равна S, угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найти высоту трапеции.

12.138. Большее основание вписанной в круг трапеции равно диаметру круга, а угол при этом основании равен α. В каком отношении точка пересечения диагоналей трапеции делит ее высоту?

12.139. В равносторонний треугольник ABC вписан равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$; точка A_1 лежит на стороне BC, точка B_1 — на стороне AC и точка C_1 — на стороне AB. Угол $A_1B_1C_1$ равен α. Найти отношение AB к A_1B_1.

12.140. В каком отношении делит высоту равнобедренного треугольника ABC точка O, из которой все три стороны видны под одним и тем же углом $(\angle AOB = \angle BOC = \angle COA)$, если угол при основании треугольника равен $\alpha\left(\alpha > \frac{\pi}{6}\right)$?

12.141. Высота равнобедренного треугольника равна h и составляет с боковой стороной угол $\alpha\left(\alpha \le \frac{\pi}{6}\right)$. Найти расстояние между центрами вписанной в треугольник и описанной около него окружностей.

12.142. В окружность радиуса R вписан треугольник, вершины которого делят окружность на три части в отношении 2 : 5 : 17. Найти площадь треугольника.

12.143. Тангенс угла при основании равнобедренного треугольника равен 0,75. Найти тангенс угла между медианой и биссектрисой, проведенными к боковой стороне.

12.144. Найти синус угла при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что медиана, проведенная к боковой стороне, составляет с основанием угол, синус которого равен 0,6.

12.145. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Через вершину этого угла проведена прямая, пересекающая противоположную боковую сторону и составляющая с основанием угол β. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

12.146. Через вершины равностороннего треугольника ABC проведены параллельные прямые AD, BE и CF. Прямая BE лежит между прямыми AD и CF и делит расстояние между ними в отношении $m : n$, считая от прямой AD. Найти угол BCF.

12.147. Найти косинус острого угла ромба, если прямая, проведенная через его вершину, делит угол в отношении 1 : 3, а противолежащую сторону — в отношении 3 : 5.

12.148. Отношение площади прямоугольника $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ к квадрату его диагонали равно k. Найти угол EAF, где E и F — соответственно середины сторон BC и CD.

12.149. Около круга радиуса r описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции составляет с меньшим основанием угол α. Найти радиус круга, описанного около трапеции.

12.150. Высота треугольника делит его угол в отношении $2:1$, а основание — на отрезки, отношение которых (большего к меньшему) равно k. Найти синус меньшего угла при основании и допустимые значения k.

12.151. Гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанного круга на отрезки, отношение которых равно k. Найти углы треугольника.

12.152. Отношение боковых сторон трапеции равно отношению ее периметра к длине вписанной окружности и равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

12.153. В сектор радиуса R вписана окружность радиуса r. Найти периметр сектора.

12.154. В равнобедренном остроугольном треугольнике радиус вписанной окружности в 4 раза меньше радиуса описанной окружности. Найти углы треугольника.

12.155. В треугольнике ABC даны острые углы α и γ ($\alpha > \gamma$), прилежащие к стороне AC. Из вершины B проведены медиана BD и биссектриса BE. Найти отношение площади треугольника BDE к площади треугольника ABC.

12.156. Угол при вершине A трапеции $ABCD$ равен α. Боковая сторона AB вдвое больше меньшего основания BC. Найти угол BAC.

12.157. В прямоугольном треугольнике найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины острого угла, равного α.

12.158. Найти косинусы острых углов прямоугольного треугольника, зная, что произведение тангенсов половин этих углов равно $\frac{1}{6}$.

12.159. Стороны параллелограмма относятся как $p:q$, а диагонали — как $m:n$. Найти углы параллелограмма.

12.160. Отношение периметра ромба к сумме его диагоналей равно k. Найти углы ромба и допустимые значения k.

12.161. Найти косинусы углов равнобедренного треугольника, у которого точка пересечения высот делит пополам высоту, проведенную к основанию.

12.162. Периметр сектора равен l. Найти расстояние от вершины центрального угла сектора до центра окружности, вписанной в этот сектор, если радиус дуги сектора равен R.

12.163. Показать, что если в треугольнике отношение суммы синусов двух углов к сумме их косинусов равно синусу третьего угла, то треугольник прямоугольный.

12.164. Найти синус угла ромба, если из середины его стороны противоположная сторона видна под углом α.

12.165. Сторона треугольника равна a, разность углов, прилежащих к данной стороне, равна $\frac{\pi}{2}$. Найти углы треугольника, если его площадь равна S.

12.166. Тангенс острого угла между медианами прямоугольного треугольника, проведенными к его катетам, равен k. Найти углы треугольника и допустимые значения k.

12.167. Радиус дуги сектора равен R, центральный угол AOB равен α. Через середину C радиуса OA проведена прямая, параллельная радиусу OB и пересекающая дугу AB в точке D. Найти площадь треугольника OCD.

12.168. В треугольнике даны сторона a, противолежащий ей угол α и высота h, проведенная к данной стороне. Найти сумму двух других сторон.

12.169. В квадрат $ABCD$ вписан равнобедренный треугольник AEF, точка E лежит на стороне BC, точка F — на стороне CD и $AE = EF$. Тангенс угла AEF равен 2. Найти тангенс угла FEC.

12.170. В треугольнике ABC даны острые углы α и γ ($\alpha > \gamma$) при основании AC. Из вершины B проведены высота BD и медиана BE. Найти площадь треугольника BDE, если площадь треугольника ABC равна S.

12.171. В прямоугольном треугольнике ABC острый угол при вершине A равен α. Через середину D гипотенузы AB проведена прямая, пересекающая катет AC в точке E. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника ABC, если $\angle DEA = \beta$, $AE > 0{,}5AC$?

12.172. В круг вписана трапеция. Большее основание трапеции составляет с боковой стороной угол α, а с диагональю — угол β. Найти отношение площади круга к площади трапеции.

12.173. В треугольнике ABC угол A равен α и сторона BC равна a. Найти длину биссектрисы AD, если угол между биссектрисой AD и высотой AE равен β.

12.174. Равнобедренный треугольник с углом α при вершине пересечен прямой, проходящей через вершину угла при основании и составляющей с основанием угол β. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

12.175. Радиус дуги сектора AOB равен R, центральный угол AOB равен α. В этот сектор вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой дуги AB, а две другие лежат на радиусах OA и OB. Найти сторону треугольника.

12.176. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при основании вписана окружность. Найти радиус окружности, касающейся вписанной окружности и боковых сторон треугольника.

12.177. Внутри данного угла α расположена точка на расстоянии a от вершины и на расстоянии b от одной из сторон. Найти расстояние этой точки от другой стороны.

12.178. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD острого угла A, равного α. Найти отношение радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABD и ADC.

12.179. Найти синус угла при вершине равнобедренного треугольника, зная, что периметр любого вписанного в него прямоугольника, две вершины которого лежат на основании, имеет постоянную величину.

12.180. Сторона треугольника равна 15, сумма двух других сторон равна 27. Найти косинус угла, противолежащего данной стороне, если радиус вписанной в треугольник окружности равен 4.

12.181. Меньшая дуга окружности, стягиваемая хордой AB, содержит α радианов. Через середину C хорды AB проведена хорда DE так, что $DC : CE = 1 : 3$. Найти острый угол ACD и допустимые значения α.

12.182. Медиана BD треугольника ABC пересекается с биссектрисой CE в точке K. Найти $CK : KE$, если $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$.

12.183. Площадь равнобедренного тупоугольного треугольника равна 8, а медиана, проведенная к его боковой стороне, равна $\sqrt{37}$. Найти косинус угла при вершине.

12.184. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на m. Найти радиус описанного круга.

12.185. В треугольнике известны площадь S, сторона a и противолежащий ей угол α. Найти сумму двух других сторон.

12.186. Пусть OA — неподвижный радиус окружности с центром в точке O; B — середина радиуса OA; M — произвольная точка окружности. Найти наибольшее значение угла OMB.

12.187. В равнобедренном остроугольном треугольнике угол при основании равен α, а площадь равна S. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания высот данного треугольника.

12.188. Пусть a, b, c — длины сторон остроугольного треугольника; A, B, C — углы, противолежащие сторонам; P_a, P_b, P_c — расстояния от центра описанной окружности до соответствующих сторон. В предположении, что $A < B < C$, расположить P_a, P_b, P_c в возрастающем порядке.

12.189. Луч, проведенный из вершины равностороннего треугольника, делит его основание в отношении $m : n$. Найти тупой угол между лучом и основанием.

12.190. Через вершину равностороннего треугольника проведена прямая, делящая основание в отношении 2 : 1. Под какими углами она наклонена к боковым сторонам треугольника?

12.191. Основание треугольника равно a, а углы при основании равны α и β радианам. Из противоположной вершины треугольника радиусом, равным его высоте, проведена окружность. Найти длину дуги этой окружности, заключенной внутри треугольника.

12.192. Даны две стороны a и b треугольника и биссектриса l угла между ними. Найти этот угол.

12.193. Основание треугольника равно 4, а его медиана равна $\sqrt{6}-\sqrt{2}$. Один из углов при основании равен 15°. Показать, что острый угол между основанием треугольника и его медианой равен 45°.

12.194. В трапеции меньшее основание равно 2, прилежащие к нему углы равны 135°. Угол между диагоналями, обращенный к основанию, равен 150°. Найти площадь трапеции.

12.195. Доказать, что если биссектриса одного из углов треугольника равна произведению заключающих его сторон, деленному на их сумму, то этот угол равен 120°.

12.196. Известно, что в треугольнике ABC $AB = a$, $\angle C = \alpha$. Найти радиус окружности, проведенной через вершины A, B и центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

12.197. В треугольнике ABC проведена высота BM и на ней как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB в точке K, а сторону BC — в точке L. Найти отношение площади треугольника KLM к площади треугольника ABC, если $\angle A = \alpha$ и $\angle C = \beta$.

12.198. В ромб вписана окружность. В образовавшийся криволинейный треугольник (с острым углом) снова вписана окружность. Найти ее радиус, если высота ромба равна h, а острый угол равен α.

12.199. Основание треугольника равно a, а прилежащие к нему углы содержат 45° и 15°. Из вершины, противоположной основанию, проведена окружность радиусом, равным высоте, опущенной на это основание. Найти площадь части соответствующего круга, заключенную внутри треугольника.

12.200. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на апофемах пирамиды, четыре — на основании пирамиды. Найти ребро куба.

12.201. Площадь боковой грани правильной двенадцатиугольной пирамиды равна S. Плоский угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды.

12.202. В конус помещен шар так, что их поверхности касаются. Радиус шара равен R, а угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α. Найти объем тела, ограниченного поверхностями шара и конуса.

12.203. Найти объем и боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоскость, проходящая через сторону основания, равную a, и середину высоты пирамиды, наклонена к основанию под углом φ.

12.204. Найти объем правильной четырехугольной призмы, если угол между диагональю призмы и боковой гранью равен α, а сторона основания равна a.

12.205. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1)$ лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого больший катет AC равен a, а противолежащий ему угол B равен α. Гипотенуза AB является диаметром основания конуса, вершина которого лежит на ребре A_1C_1. Найти высоту конуса, если $AA_1 = 0{,}5a$.

12.206. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведено сечение. Найти площадь сечения и объем пирамиды, если известны сторона a основания и угол α между сечением и основанием.

12.207. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковое ребро опущен перпендикуляр, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен α.

12.208. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковое ребро опущен перпендикуляр, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α.

12.209. Найти боковую поверхность и объем прямого параллелепипеда, если его высота равна h, диагонали составляют с основанием углы α и β, а основанием служит ромб.

12.210. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a, а угол при основании равен α. Найти объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

12.211. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Найти объем пирамиды, если ее боковые грани образуют с основанием один и тот же двугранный угол β, а радиус вписанного в нее шара равен r.

12.212. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину b; соответствующие им боковые грани перпендикулярны плоскости основания и образуют между собой угол α. Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания также равен α. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

12.213. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковую грань опущен перпендикуляр, равный d. Найти объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α.

12.214. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ. Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

12.215. В правильной треугольной пирамиде с углом α между боковым ребром и стороной основания проведено сечение через середину бокового ребра параллельно боковой грани. Зная площадь S этого сечения, найти объем пирамиды. Каковы возможные значения α?

12.216. Перпендикуляр, опущенный из центра основания конуса на образующую, вращается около оси конуса. Найти угол между образующей и осью конуса, если поверхность вращения делит его объем пополам.

12.217. Найти угол между образующей и основанием усеченного конуса, полная поверхность которого вдвое больше поверхности вписанного в него шара.

12.218. Основанием прямой призмы служит треугольник со стороной a и прилежащими к ней углами α и β. Через эту сторону основания под углом φ к нему проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро. Найти объем полученной треугольной пирамиды.

12.219. При вращении кругового сектора около одного из крайних радиусов получилось тело, площадь сферической поверхности которого равна площади конической поверхности. Найти синус центрального угла кругового сектора.

12.220. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. Через вершину основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость параллельно одной из диагоналей основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания пирамиды.

12.221. Основаниями усеченной пирамиды служат правильные треугольники. Прямая, проходящая через середину стороны верхнего основания и середину параллельной ей стороны нижнего основания, перпендикулярна плоскостям оснований. Большее боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол α. Найти длину отрезка, соединяющего центры верхнего и нижнего оснований.

12.222. В основании пирамиды лежит ромб, один из углов которого равен α. Боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Через середины двух смежных сторон основания и вершину пирамиды проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол β. Площадь полученного сечения равна S. Найти сторону ромба.

12.223. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Площадь сечения, проведенного через бóльшую диагональ основания и вершину пирамиды, равна S. Найти объем пирамиды.

12.224. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α, а боковая поверхность равна S. Найти расстояние от центра основания до боковой грани.

12.225. Высота правильной треугольной пирамиды равна H. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения.

12.226. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник, у которого площадь равна S и угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды, если угол между каждым боковым ребром и высотой пирамиды равен β.

12.227. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона равна a, а острый угол равен α. Все боковые грани образуют с основанием пирамиды один и тот же угол β. Найти полную поверхность пирамиды.

12.228. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен α, боковая поверхность пирамиды равна S. Найти расстояние от центра основания до середины апофемы боковой грани.

12.229. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен α. Отрезок прямой, соединяющий центр основания пирамиды с серединой бокового ребра, равен a. Найти полную поверхность пирамиды.

12.230. Два конуса имеют концентрические основания и один и тот же угол между высотой и образующей, равный α. Радиус основания внешнего конуса равен R. Боковая поверхность внутреннего конуса в 2 раза меньше полной поверхности внешнего конуса. Найти объем внутреннего конуса.

12.231. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого составляет с прилежащими к ней сторонами основания углы α и β. Найти отношение объема параллелепипеда к объему цилиндра.

12.232. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Этот треугольник вписан в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с серединой одной из образующих конуса. Найти отношение объема конуса к объему пирамиды.

12.233. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб; вершины его верхнего основания лежат на боковых ребрах, вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Найти отношение объема куба к объему пирамиды, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол α.

12.234. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найти радиус описанного шара.

12.235. Величина угла между боковым ребром правильной четырехугольной пирамиды и плоскостью основания равна величине плоского угла при вершине пирамиды. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

12.236. Найти отношение объема шарового сегмента к объему шара, если дуга в осевом сечении сегмента соответствует центральному углу, равному α.

12.237. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, его острый угол равен α. Треугольник вращается вокруг биссектрисы внешнего прямого угла. Найти объем тела вращения.

12.238. В усеченный конус вписан шар. Сумма длин диаметров верхнего и нижнего оснований конуса в 5 раз больше длины радиуса шара. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.

12.239. Отношение поверхности шара, вписанного в конус, к площади основания конуса равно k. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

12.240. Отношение объема шара, вписанного в конус, к объему описанного шара равно k. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

12.241. В шар, радиус которого равен R, вписан конус; в этот конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Найти полную поверхность цилиндра, если угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен α.

12.242. В полушар вписано тело, состоящее, из цилиндра и поставленного на него конуса. Нижнее основание цилиндра лежит в плоскости большого круга полушара; верхнее основание цилиндра совпадает с основанием конуса и касается поверхности шара. Вершина конуса лежит на поверхности шара. Образующая конуса составляет с плоскостью его основания угол α. Найти отношение объема тела к объему полушара.

12.243. Боковая грань правильной треугольной усеченной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. Найти отношение полной поверхности пирамиды к поверхности вписанного в нее шара.

12.244. В конус вписан шар. Радиус круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса равен r. Прямая, проходящая через центр шара и произвольную точку окружности основания конуса, составляет с высотой конуса угол α. Найти объем конуса.

12.245. Отношение объема конуса к объему вписанного в него шара равно k. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса и допустимые значения k.

12.246. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания, если боковая поверхность конуса равна сумме площадей основания и осевого сечения.

12.247. Угол между высотой и образующей конуса равен α. В конус вписана правильная треугольная призма; нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса. Боковые грани призмы — квадраты. Найти отношение боковых поверхностей призмы и конуса.

12.248. Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб. Бóльшая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол α. Найти острый угол ромба.

12.249. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед так, что его верхнее основание совпадает с верхним основанием пирамиды, а нижнее основание лежит в плоскости нижнего основания пирамиды. Найти отношение боковых поверхностей пирамиды и параллелепипеда, если диагональ параллелепипеда составляет с его основанием угол β.

12.250. В конус помещена пирамида; основание пирамиды вписано в основание конуса, а вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса. Все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом $\alpha\left(\alpha \geq \frac{\pi}{3}\right)$ при вершине. Найти отношение объемов конуса и пирамиды.

12.251. Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, делит ее высоту в отношении $m : n$, считая от вершины. Найти угол между двумя смежными боковыми гранями.

12.252. Отношение стороны основания правильной n-угольной пирамиды к радиусу описанного шара равно k. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания и допустимые значения k.

12.253. В конус вписан цилиндр; нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса. Прямая, проходящая через центр верхнего основания цилиндра и точку на окружности основания конуса, составляет с плоскостью основания угол α. Найти отношение объемов конуса и цилиндра, если угол между образующей и высотой конуса равен β.

12.254. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду, если объем пирамиды равен V.

12.255. Две грани треугольной пирамиды — равные между собой прямоугольные треугольники с общим катетом, равным l. Угол между этими гранями равен α. Две другие грани пирамиды образуют двугранный угол β. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

12.256. Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен α. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен R. Найти объем пирамиды.

12.257. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, вписанный в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса. Боковые грани пирамиды, содержащие катеты основания, составляют с плоскостью основания углы α и β. Найти отношение объемов пирамиды и конуса.

12.258. Сторона квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна a. В пирамиду вписана правильная четырехугольная призма; вершины верхнего основания лежат на боковых ребрах, вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол φ. Найти объем призмы, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол α.

12.259. Сторона нижнего основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна a, сторона верхнего основания равна b. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Через сторону нижнего основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований, проведена плоскость, пересекающая противоположную боковую грань по некоторой прямой. Найти расстояние от этой прямой до нижнего основания.

12.260. Две боковые грани усеченной треугольной пирамиды — равные прямоугольные трапеции с острым углом α и общей меньшей боковой стороной. Двугранный угол между этими гранями равен β. Найти угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания.

12.261. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость. Площадь сечения относится к полной поверхности конуса как $2 : \pi$. Найти угол между образующей и высотой конуса.

12.262. Боковая грань правильной четырехугольной усеченной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. Плоскость, проведенная через сторону нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол β. Боковая поверхность пирамиды равна S. Найти стороны верхнего и нижнего оснований.

12.263. Высота правильной треугольной усеченной пирамиды равна H и является средним пропорциональным между сторонами оснований. Боковое ребро составляет с основанием угол α. Найти объем пирамиды.

12.264. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как $m : n$ $(m > n)$. Высота пирамиды равна H. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

12.265. Через вершину конуса проведена плоскость, делящая окружность основания в отношении $p : q$. Эта плоскость отстоит от центра основания конуса на расстояние a и составляет с высотой конуса угол α. Найти объем конуса.

12.266. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Сумма двух неравных между собой плоских углов при вершине равна $\frac{\pi}{2}$. Найти эти углы.

12.267. Отношение полной поверхности конуса к площади его осевого сечения равно k. Найти угол между высотой и образующей конуса и допустимые значения k.

12.268. Одна из граней треугольной призмы, вписанной в цилиндр, проходит через ось цилиндра. Диагональ этой грани составляет с прилежащими к ней сторонами основания призмы углы α и β. Найти объем призмы, если высота цилиндра равна H.

12.269. Две вершины равностороннего треугольника со стороной a лежат на окружности верхнего основания цилиндра, а третья вершина — на окружности нижнего основания. Плоскость треугольника составляет с образующей цилиндра угол α. Найти боковую поверхность цилиндра.

12.270. Найти плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если он равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

12.271. Отрезок прямой, соединяющий точку окружности верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, равен l и составляет с плоскостью основания угол α. Найти расстояние от этой прямой до оси цилиндра, если осевое сечение цилиндра есть квадрат. Каковы возможные значения α?

12.272. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Каждое из боковых ребер равно l и составляет с прилежащими сторонами основания углы α и β. Найти объем пирамиды.

12.273. Точка A лежит на окружности верхнего основания цилиндра, точка B — на окружности нижнего основания. Прямая AB составляет с плоскостью основания угол α, а с плоскостью осевого сечения, проведенного через точку B, — угол β. Найти объем цилиндра, если длина отрезка AB равна l.

12.274. В конус вписан куб (одна из граней куба лежит в плоскости основания конуса). Отношение высоты конуса к ребру куба равно k. Найти угол между образующей и высотой конуса.

12.275. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, две другие составляют с ней углы α и β. Найти боковую поверхность пирамиды, если высота пирамиды равна H.

12.276. Одна из сторон основания прямой треугольной призмы равна a, а прилежащие к ней углы равны α и β. Найти боковую поверхность призмы, если ее объем равен V.

12.277. Одно боковое ребро треугольной пирамиды перпендикулярно плоскости основания и равно l, два других образуют между собой угол α, а с плоскостью основания — один и тот же угол β. Найти объем пирамиды.

12.278. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой острый угол равен α, а площадь равна S. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти объем пирамиды.

12.279. Косинус угла между двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен k. Найти косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания и допустимые значения k.

12.280. Основанием пирамиды является прямоугольник $ABCD$ $(AB \| CD)$. Боковое ребро OA перпендикулярно основанию. Ребра OB и OC составляют с основанием углы, соответственно равные α и β. Найду угол между ребром OD и основанием.

12.281. Через диагональ основания и высоту правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость. Отношение площади сечения к боковой поверхности пирамиды равно k. Найти косинус угла между апофемами противоположных боковых граней и допустимые значения k.

12.282. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды в 2 раза больше стороны основания. Найти угол между апофемой пирамиды и не пересекающей ее высотой треугольника, лежащего в основании пирамиды.

12.283. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Угол между смежными боковыми гранями равен α. Найти боковую поверхность пирамиды.

12.284. В правильной треугольной пирамиде через боковое ребро и высоту проведена плоскость. Отношение площади сечения к полной поверхности пирамиды равно k. Найти двугранный угол при основании и допустимые значения k.

12.285. Угол между высотой и образующей конуса равен α. Через вершину конуса проведена плоскость, составляющая с высотой угол β $(\beta < \alpha)$. В каком отношении эта плоскость делит окружность основания?

12.286. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого острый угол между равными сторонами равен α. Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Через сторону основания, противолежащую данному углу α, и середину высоты пирамиды проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

12.287. Ребра прямоугольного параллелепипеда относятся как $3 : 4 : 12$. Через большее ребро проведено диагональное сечение. Найти синус угла между плоскостью этого сечения и не лежащей в ней диагональю параллелепипеда.

12.288. Боковая грань правильной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен k. Найти тангенс угла между боковым ребром и апофемой противолежащей грани.

12.289. Все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания один и тот же угол. Найти этот угол, если отношение полной поверхности пирамиды к площади основания равно k. При каких значениях k задача имеет решение?

12.290. Отношение полной поверхности правильной n-угольной пирамиды к площади основания равно l. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.

12.291. Косинус угла между боковыми ребрами правильной четырехугольной пирамиды, не лежащими в одной грани, равен k. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

12.292. Через сторону ромба проведена плоскость, образующая с диагоналями углы α и 2α. Найти острый угол ромба.

12.293. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1)$ служит равнобедренный треугольник, у которого $AB = AC = a$ и $\angle CAB = \alpha$. Вершина B_1 верхнего основания равноудалена от всех сторон нижнего основания, а ребро B_1B составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

12.294. Основанием наклонной призмы служит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона и меньшее основание равны a, а острый угол равен β. Одна из вершин верхнего основания призмы равноудалена от всех вершин нижнего основания. Найти объем призмы, если боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α.

12.295. Основанием прямой призмы, описанной около шара радиуса r, служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Найти объем призмы.

12.296. Диагонали AB_1 и CB_1 двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составляют с диагональю AC основания $ABCD$ углы, равные соответственно α и β. Найти угол между плоскостью треугольника AB_1C и плоскостью основания.

12.297. В правильной треугольной призме сторона основания равна a, угол между непересекающимися диагоналями двух боковых граней равен α. Найти высоту призмы.

12.298. В прямоугольном треугольнике через его гипотенузу проведена плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол α, а с одним из катетов — угол β. Найти угол между этой плоскостью и вторым катетом.

12.299. В прямоугольном треугольнике с острым углом α через наименьшую медиану проведена плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол β. Найти углы между этой плоскостью и катетами.

12.300. Найти косинус угла между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней правильной треугольной призмы, у которой боковое ребро равно стороне основания.

12.301. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α между боковыми сторонами. Диагональ боковой грани, противолежащей данному углу, составляет со смежной боковой гранью угол φ. Найти объем призмы.

12.302. В основании прямой призмы лежит треугольник. Два его угла равны α и β, а площадь равна S. Прямая, проходящая через вершину верхнего основания и центр круга, описанного около нижнего основания, составляет с плоскостью основания угол φ. Найти объем призмы.

12.303. Основанием наклонной призмы служит прямоугольник со сторонами a и b. Две смежные боковые грани составляют с плоскостью основания углы α и β. Найти объем призмы, если боковое ребро равно c.

12.304. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с двумя смежными гранями углы α и β. Найти объем параллелепипеда.

12.305. В правильной треугольной призме плоскость, проведенная через центр основания и центры симметрии двух боковых граней, составляет с плоскостью основания острый угол α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью, если сторона основания равна a.

12.306. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1)$ стороны основания AB и BC равны соответственно a и b, а угол между ними равен α. Через биссектрису данного угла и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания острый угол β. Найти площадь сечения.

12.307. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1)$ лежит равнобедренный треугольник ABC с углом α между равными сторонами AB и AC. Отрезок прямой, соединяющий вершину A_1 верхнего основания с центром круга, описанного около нижнего основания, равен l и составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

12.308. Основанием призмы служит правильный треугольник со стороной a. Боковое ребро равно b и составляет с пересекающими его сторонами основания углы, каждый из которых равен α. Найти объем призмы и допустимые значения α.

12.309. Основанием призмы служит прямоугольник. Боковое ребро составляет равные углы со сторонами основания и наклонено к плоскости основания под углом α. Найти угол между боковым ребром и стороной основания.

12.310. На шаровой поверхности радиуса R лежат все вершины равнобедренной трапеции, у которой меньшее основание равно боковой стороне, а острый угол равен α. Найти расстояние от центра шара до плоскости трапеции, если большее основание трапеции равно радиусу шара.

12.311. Высота конуса равна H, угол между образующей и плоскостью основания равен α. В этот конус вписан шар. К окружности касания шаровой и конической поверхностей проведена касательная прямая, а через эту прямую проведена плоскость параллельно высоте конуса. Найти площадь сечения шара этой плоскостью.

12.312. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию. Площадь сечения равна боковой поверхности образовавшейся усеченной пирамиды. Найти расстояние от секущей плоскости до основания данной пирамиды.

12.313. Высота конуса равна H, угол между образующей и плоскостью основания равен α. Полная поверхность конуса делится пополам плоскостью, перпендикулярной его высоте. Найти расстояние от этой плоскости до основания конуса.

12.314. Найти угол между апофемой правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания, если разность между этим углом и углом, который составляет боковое ребро пирамиды с плоскостью основания, равна α.

12.315. Катет прямоугольного треугольника равен a, противолежащий ему угол равен α. Этот треугольник вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника, проходящей через вершину данного угла и перпендикулярной его биссектрисе. Найти объем тела вращения.

12.316. Отношение объема прямого параллелепипеда к объему вписанного в него шара равно k. Найти углы в основании параллелепипеда и допустимые значения k.

12.317. Образующая усеченного конуса, описанного около шара, равна a, угол между образующей и плоскостью основания равен α. Найти объем конуса, основанием которого служит круг касания шаровой поверхности с боковой поверхностью усеченного конуса, а вершина совпадает с центром большего основания усеченного конуса.

12.318. В шар радиуса R вписаны два конуса с общим основанием; вершины конусов совпадают с противоположными концами диаметра шара. Шаровой сегмент, вмещающий меньший конус, имеет в осевом сечении дугу, равную α. Найти расстояние между центрами шаров, вписанных в эти конусы.

12.319. Найти отношение объема правильной n-угольной пирамиды к объему описанного шара, если угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды равен α.

12.320. Боковые грани правильной треугольной призмы — квадраты. Найти угол между диагональю боковой грани и не пересекающей ее стороной основания призмы.

12.321. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и составляет с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан цилиндр с квадратным осевым сечением (основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды). Найти объем цилиндра.

12.322. В треугольнике ABC угол A равен α, угол C равен β и биссектриса BD равна l. Треугольник ABD вращается вокруг прямой BD. Найти объем тела вращения.

12.323. Основанием прямой призмы служит равносторонний треугольник. Через одну из его сторон проведена плоскость, отсекающая от призмы пирамиду, объем которой равен V. Найти площадь сечения, если угол между секущей плоскостью и плоскостью основания равен α.

12.324. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение, параллельное основанию. Прямая, проходящая через вершину основания и противолежащую (т. е. не принадлежащую той же грани) вершину сечения, составляет с плоскостью основания угол α. Найти площадь сечения, если боковое ребро пирамиды равно диагонали основания и равно a.

12.325. Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого боковая сторона равна b, а угол при основании равен α. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину данного угла α и высоту пирамиды.

12.326. Плоская ломаная линия состоит из n равных отрезков, соединенных в виде зигзага под углом α друг к другу. Длина каждого отрезка ломаной равна a. Эта линия вращается вокруг прямой, проходящей через один из ее концов параллельно биссектрисе угла α. Найти площадь поверхности вращения.

12.327. Два конуса имеют общую высоту; их вершины лежат на противоположных концах этой высоты. Образующая одного конуса равна l и составляет с высотой угол α. Образующая другого конуса составляет с высотой угол β. Найти объем общей части обоих конусов.

12.328. Равнобедренный тупоугольный треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через точку пересечения его высот параллельно большей стороне. Найти объем тела вращения, если тупой угол равен α, а противолежащая ему сторона треугольника равна a.

12.329. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, угол при основании равен α. Этот треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину, противолежащую основанию, параллельно биссектрисе угла α. Найти поверхность тела вращения.

12.330. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого радиус вписанной окружности равен r, а острый угол равен α. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти объем пирамиды.

12.331. В конус вписан шар и к шару проведена касательная плоскость параллельно плоскости основания конуса. В каком отношении эта плоскость делит боковую поверхность конуса, если угол между образующей и плоскостью основания равен α?

12.332. В основание шарового сегмента вписан прямоугольный треугольник, у которого площадь равна S, а острый угол равен α. Найти высоту сегмента, если его дуге в осевом сечении соответствует центральный угол, равный β.

12.333. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1)$ служит равнобедренный треугольник ABC $(AB = AC)$, у которого периметр равен $2p$, а угол при вершине A равен α. Через сторону BC и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

12.334. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен α. Найти полную поверхность пирамиды.

12.335. Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен α. Около этой пирамиды описан шар радиуса R. Найти объем пирамиды, если все ее боковые ребра образуют с основанием угол β.

12.336. Образующая конуса равна l и составляет с высотой угол α. Через две образующие конуса, угол между которыми равен β, проведена плоскость. Найти расстояние от этой плоскости до центра шара, вписанного в конус.

12.337. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого площадь равна S, а угол между боковыми сторонами равен α. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол. Найти этот угол, если объем пирамиды равен V.

12.338. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a, ее объем равен V. Найти косинус угла между диагоналями двух смежных боковых граней.

12.339. Острый угол ромба, лежащего в основании четырехугольной пирамиды, равен α. Отношение полной поверхности пирамиды к квадрату стороны основания равно k. Найти синус угла между апофемой и высотой пирамиды, если все ее боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Каковы допустимые значения k?

12.340. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти расстояние от центра основания пирамиды до ее бокового ребра.

12.341. Отношение площади диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды к площади ее основания равно k. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

12.342. Расстояние от стороны основания правильной треугольной пирамиды до непересекающего ее ребра в 2 раза меньше стороны основания. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

12.343. Линейный угол двугранного угла, составленного двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, в 2 раза больше плоского угла при вершине пирамиды. Найти этот плоский угол.

12.344. В правильной треугольной пирамиде сумма углов, образованных апофемой пирамиды с плоскостью основания и боковым ребром с той же плоскостью, равна $\frac{\pi}{4}$. Найти эти углы.

12.345. Объем правильной пирамиды равен V. Через центр вписанного в пирамиду шара проведена плоскость, параллельная ее основанию. Найти объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды этой плоскостью, если двугранный угол при основании равен α.

12.346. Найти углы прямоугольного треугольника, если объем тела, полученного от вращения треугольника вокруг меньшего катета, равен сумме объемов тел, полученных от вращения треугольника вокруг его гипотенузы и вокруг большего катета.

12.347. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, ее боковая поверхность равна S. Найти угол между смежными боковыми гранями.

12.348. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

12.349. Радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, в 4 раза меньше стороны основания пирамиды. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

12.350. Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды имеют одну и ту же длину a, а угол между равными сторонами основания равен α. Найти радиус описанного шара.

12.351. В конус вписан цилиндр, высота которого равна диаметру основания конуса. Полная поверхность цилиндра равна площади основания конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

12.352. Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб с острым углом α. Найти угол между большей диагональю призмы и плоскостью основания.

12.353. В усеченный конус вписан шар, объем которого вдвое меньше объема конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

12.354. Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого основание равно a, а противолежащий угол равен α. Боковое ребро пирамиды, проходящее через вершину данного угла, составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды, если высота пирамиды проходит через точку пересечения высот основания.

12.355. Площадь сегмента равна S, а дуга сегмента равна α радианам. Этот сегмент вращается вокруг своей оси симметрии. Найти поверхность тела вращения.

12.356. В конус вписан шар. Окружность касания шаровой и конической поверхностей делит поверхность шара в отношении 1 : 4. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.

12.357. Боковая поверхность треугольной пирамиды равна S, а каждое из боковых ребер равно l. Найти плоские углы при вершине, зная, что они образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{6}$.

12.358. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α. Найти боковую поверхность пирамиды, если радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен R.

12.359. Радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, равен апофеме пирамиды. Найти угол между апофемой и плоскостью основания пирамиды.

12.360. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. В этот конус вписан шар, а в шар вписана правильная треугольная призма, у которой все ребра равны между собой. Найти объем призмы.

12.361. Около шара радиуса R описана правильная n-угольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

12.362. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания и образуют между собой угол β. Две другие боковые грани составляют с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

12.363. Расстояние от середины высоты правильной четырехугольной пирамиды до ее боковой грани равно d. Найти полную поверхность вписанного в пирамиду конуса, если его образующая составляет с плоскостью основания угол α.

12.364. Основанием пирамиды $SABC$ служит равносторонний треугольник ABC. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Найти угол между боковой гранью SBC и плоскостью основания, если боковая поверхность пирамиды относится к площади основания как 11 : 4.

12.365. Радиус основания конуса равен R, угол между образующей и плоскостью основания равен α. В этот конус вписан шар. Через точку P, лежащую на окружности касания шаровой и конической поверхностей, проведена касательная прямая к этой окружности, а через эту прямую проведена плоскость параллельно той образующей конуса, которая проходит через точку, диаметрально противоположную точке P. Найти площадь сечения шара этой плоскостью.

12.366. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны и длина каждой из них равна a. Угол между образующей и плоскостью основания равен α. Найти полную поверхность усеченного конуса.

12.367. Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до противоположной боковой грани равно l. Угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен α. Найти полную поверхность конуса, вписанного в пирамиду.

12.368. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно стороне меньшего основания и равно a. Угол между боковым ребром и стороной большего основания равен α. Найти площадь диагонального сечения усеченной пирамиды.

12.369. Высота конуса составляет с образующей угол α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом $\beta\left(\beta > \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ к плоскости основания. Найти площадь сечения, если высота конуса равна h.

12.370. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен α. Все боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания. Найти двугранные углы при основании, если высота пирамиды равна гипотенузе треугольника, лежащего в ее основании.

12.371. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1)$ лежит равнобедренный треугольник, у которого $AB = BC = a$ и $\angle ABC = \alpha$. Высота призмы равна H. Найти расстояние от точки A до плоскости, проведенной через точки B, C и A_1.

12.372. В пирамиде, у которой все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания, через центр вписанного шара параллельно основанию проведена плоскость. Отношение площади сечения пирамиды этой плоскостью к площади основания равно k. Найти двугранный угол при основании пирамиды.

12.373. Высота правильной треугольной пирамиды равна H и составляет с боковым ребром угол α. Через сторону основания проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро под углом $\beta\left(\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Найти объем той части пирамиды, которая заключена между этой плоскостью и плоскостью основания.

12.374. Отрезок прямой, соединяющий центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найти косинус угла между смежными боковыми гранями.

12.375. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a; две ее боковые грани перпендикулярны основанию, а большее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом β. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед; одно его основание лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого основания — на боковых ребрах пирамиды. Найти объем параллелепипеда, если его диагональ составляет с плоскостью основания угол α.

12.376. Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол между боковыми сторонами равен α. Боковая грань пирамиды, проходящая через сторону основания, противолежащую данному углу α, составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем конуса, описанного около пирамиды, если все ее боковые ребра равны между собой.

12.377. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. В эту пирамиду вписан шар. Найти объем пирамиды, вершинами которой служат точки касания шаровой поверхности с боковыми гранями данной пирамиды и произвольная точка, лежащая в плоскости основания данной пирамиды.

12.378. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой большее основание проходит через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем усеченной пирамиды.

12.379. На отрезке AB, равном $2R$, построена как на диаметре полуокружность и проведена хорда CD параллельно AB. Найти объем тела, образованного вращением треугольника ACD вокруг диаметра AB, если вписанный угол, опирающийся на дугу AC, равен α ($AC < AD$).

12.380. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен α. Наибольшая по площади боковая грань призмы — квадрат. Найти угол между пересекающимися диагоналями двух других боковых граней.

12.381. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\alpha\left(\alpha > \frac{\pi}{4}\right)$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру (т. е. ребру, не лежащему с этой вершиной в одной боковой грани).

12.382. Высота правильной четырехугольной пирамиды образует с боковым ребром угол α. Через вершину пирамиды параллельно диагонали основания проведена плоскость, составляющая угол β со второй диагональю. Площадь полученного сечения равна S. Найти высоту пирамиды.

12.383. Вершина конуса находится в центре шара, а основание конуса касается поверхности шара. Полная поверхность конуса равна поверхности шара. Найти угол между образующей и высотой конуса.

12.384. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна c, а меньший из острых углов равен α. Наибольшее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды, если ее высота проходит через точку пересечения медиан основания.

12.385. Сторона правильного треугольника равна a. Треугольник вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника вне его, проходящей через вершину треугольника и составляющей со стороной угол α. Найти объем тела вращения и выяснить, при каком значении α он является наибольшим.

12.386. Боковая грань правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет с плоскостью основания угол α. Через сторону BC основания и точку D на боковом ребре SA проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если $AD : DS = k$.

12.387. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом α между боковыми сторонами. Пирамида помещена в некоторый цилиндр так, что ее основание оказалось вписанным в основание этого цилиндра, а вершина совпала с серединой одной из образующих цилиндра. Объем цилиндра равен V. Найти объем пирамиды.

12.388. Через вершину квадрата, лежащего в основании правильной призмы, проведена плоскость параллельно противолежащей диагонали квадрата под углом α к плоскости основания. Найти углы многоугольника в сечении призмы этой плоскостью (предполагается, что высота призмы достаточно велика для того, чтобы этим сечением оказался четырехугольник).

12.389. Большее основание равнобедренной трапеции равно a, острый угол равен α. Диагональ трапеции перпендикулярна ее боковой стороне. Трапеция вращается вокруг ее большего основания. Найти объем тела вращения.

12.390. В шаровой сектор радиуса R вписан шар. Найти радиус окружности касания поверхностей шара и сектора, если центральный угол в осевом сечении шарового сектора равен α.

Группа В

12.391. Стороны параллелограмма равны a и b ($a < b$). Меньшая диагональ составляет с меньшей стороной тупой угол, а с большей стороной — угол α. Найти бóльшую диагональ параллелограмма.

12.392. В сектор POQ радиуса R с центральным углом α вписан прямоугольник; две его вершины лежат на дуге сектора, две другие — на радиусах OP и OQ. Найти площадь прямоугольника, если острый угол между его диагоналями равен β.

12.393. В треугольнике ABC даны острые углы α и γ ($\alpha > \gamma$) при основании AC. Из вершины B проведены высота BD и биссектриса BE. Найти площадь треугольника BDE, если площадь треугольника ABC равна S.

12.394. В сегмент окружности радиуса R вписаны две равные окружности, касающиеся друг друга, дуги сегмента и его хорды. Найти радиусы этих окружностей, если центральный угол, опирающийся на дугу сегмента, равен α ($\alpha < \pi$).

12.395. Отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, к радиусу окружности, описанной около него, равно m. Найти углы треугольника и допустимые значения m.

12.396. В параллелограмме даны две стороны a и b ($a > b$) и острый угол α между диагоналями. Найти углы параллелограмма.

12.397. В сегмент с центральным углом α вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой хорды сегмента, а две другие лежат на дуге сегмента. Высота треугольника равна h. Найти радиус дуги сегмента.

12.398. Расстояние между центрами двух внешне касающихся окружностей равно d. Угол между их общими внешними касательными равен α радианам. Найти площадь криволинейного треугольника, ограниченного отрезком одной касательной и двумя соответствующими дугами окружностей.

12.399. В параллелограмме даны две стороны a и b ($a > b$) и высота h, проведенная к большей стороне. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма.

12.400. Углы треугольника равны A, B и C. Высота треугольника, проходящая через вершину угла B, равна H. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Точки пересечения окружности со сторонами AB и BC треугольника соединены с концами высоты. Найти площадь построенного четырехугольника.

12.401. Стороны параллелограмма равны a и b ($a < b$). Из середины большей стороны параллельная сторона видна под углом α. Найти площадь параллелограмма.

12.402. В треугольнике даны две стороны a и b ($a > b$) и площадь S. Найти угол между высотой и медианой, проведенными к третьей стороне.

12.403. Отношение радиуса круга, описанного около трапеции, к радиусу круга, вписанного в нее, равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

12.404. Отношение периметра параллелограмма к его большей диагонали равно k. Найти углы параллелограмма, если известно, что бльшая диагональ делит угол параллелограмма в отношении $1:2$.

12.405. В равносторонний треугольник ABC вписан равносторонний треугольник DEF, точка D лежит на стороне BC, точка E — на стороне AC и точка F — на стороне AB. Сторона AB относится к стороне DF как $8:5$. Найти синус угла DEC.

12.406. Тангенс угла между медианой и высотой, проведенными к боковой стороне равнобедренного треугольника, равен 0,5. Найти синус угла при вершине.

12.407. Прямая, перпендикулярная хорде сегмента, делит хорду в отношении $1:4$, а дугу — в отношении $1:2$. Найти косинус центрального угла, опирающегося на эту дугу.

12.408. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = \alpha$ радианов и $\angle B = \beta$ радианов, $AC = b$. Через ортоцентр (точку пересечения высот) и основания высот, опущенных на стороны AB и BC, проведена окружность. Найти площадь общей части треугольника и круга.

12.409. В остроугольном треугольнике ABC известны углы. Найти отношение, в котором ортоцентр делит высоту, проведенную из вершины угла A.

12.410. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AL и CN. Найти радиус окружности, проходящей через точки B, L и N, если $AC = a$ и $\angle ABC = \alpha$.

12.411. Показать, что отношение площади любого треугольника к площади описанного около него круга меньше $\frac{2}{3}$.

12.412. Для остроугольного треугольника образованы три числа, выражающие отношения длин его сторон к соответствующим расстояниям от них центра описанной окружности. Доказать, что сумма этих чисел в 4 раза меньше их произведения.

12.413. Длины четырех дуг, на которые разбита окружность радиуса R, составляют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным 3. Точки деления служат вершинами четырехугольника, вписанного в эту окружность. Найти его площадь.

12.414. Один из плоских углов трехгранного угла равен α. Двугранные углы, прилежащие к этому плоскому углу, равны β и γ. Найти два других плоских угла.

12.415. В основании пирамиды лежит квадрат. Углы, которые образуют боковые грани с основанием, относятся как $1:2:4:2$. Найти эти углы.

12.416. В конус вложен шар так, что их поверхности касаются. Объем тела, заключенного между ними, в 8 раз меньше объема шара. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

12.417. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. К шару проведена параллельно основанию пирамиды касательная плоскость, которая делит объем пирамиды в отношении $m : n$, считая от вершины. Найти угол между высотой пирамиды и ее боковой гранью.

12.418. Через вершину основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость перпендикулярно противоположной боковой грани и параллельно противоположной стороне основания. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол α. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

12.419. Прямоугольник вращается вокруг оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали. Найти поверхность тела вращения, если площадь прямоугольника равна S, а угол между диагоналями равен α.

12.420. Найти радиус шара, касающегося основания и боковых ребер правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а двугранный угол при основании равен α.

12.421. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. Найти расстояние от центра шара, вписанного в эту пирамиду, до бокового ребра.

12.422. Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через ее боковое ребро и высоту. В сечении образовался треугольник с углом $\frac{\pi}{4}$ при вершине пирамиды. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

12.423. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине равен α. В пирамиду вписан шар. Найти площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр основания пирамиды и перпендикулярной ее боковому ребру.

12.424. Основанием пирамиды, вписанной в конус, служит четырехугольник, у которого одна сторона равна a, а каждая из остальных трех сторон равна b. Вершина пирамиды лежит на середине одной из образующих. Найти объем пирамиды, если угол между образующей и высотой конуса равен α.

12.425. Отношение объема усеченного конуса к объему вписанного в него шара равно k. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

12.426. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Отрезок AB, соединяющий точку A окружности верхнего основания с точкой B окружности нижнего основания, равен a и отстоит от оси цилиндра на расстояние b. Найти угол между прямой AB и плоскостью основания цилиндра.

12.427. Через вершину основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро под прямым углом. Площадь сечения в 2 раза меньше площади основания пирамиды. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.

12.428. Даны три попарно взаимно перпендикулярных луча OM, ON и OP. На луче OM взята точка A на расстоянии OA, равном a; на лучах ON и OP взяты соответственно точки B и C так, что угол ABC равен α, а угол ACB равен β. Найти OB и OC.

12.429. В конус вписан шар. Плоскость, содержащая окружность касания шаровой и конической поверхностей, делит объем шара в отношении 5 : 27. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса.

12.430. Поверхность шара, вписанного в правильную треугольную усеченную пирамиду, относится к полной поверхности пирамиды как $\pi : 6\sqrt{3}$. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

12.431. Угол между плоскостями двух равных прямоугольных треугольников ABC и ADC с общей гипотенузой AC равен α. Угол между равными катетами AB и AD равен β. Найти угол между катетами BC и CD.

12.432. Сторона нижнего основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды в 5 раз больше стороны верхнего основания. Боковая поверхность пирамиды равна квадрату ее высоты. Найти угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания.

12.433. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция, диагонали которой перпендикулярны соответствующим боковым сторонам. Угол между диагоналями трапеции, противолежащий ее боковой стороне, равен α. Отрезок прямой, соединяющий вершину верхнего основания с центром окружности, описанной около нижнего основания, равен l и образует с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

12.434. В основании прямой призмы лежит параллелограмм с острым углом α. Диагонали призмы составляют с плоскостью основания углы β и γ ($\beta < \gamma$). Найти объем призмы, если ее высота равна H.

12.435. Основанием призмы служит правильный треугольник со стороной a. Боковое ребро равно b и составляет с пересекающими его сторонами основания углы α и β. Найти объем призмы.

12.436. Основанием призмы служит параллелограмм с острым углом α. Боковое ребро, проходящее через вершину данного угла α, равно b и составляет с прилежащими сторонами основания углы, каждый из которых равен β. Найти высоту призмы.

12.437. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм с диагоналями a и b ($a > b$) и острым углом α между ними. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с большей диагональю основания острый угол β. Найти объем параллелепипеда.

12.438. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. В эту пирамиду вписана прямая треугольная призма; три ее вершины лежат на апофемах пирамиды, а три другие — в плоскости основания пирамиды. Найти объем призмы, если центр вписанного в пирамиду шара лежит в плоскости верхнего основания призмы.

12.439. Основание прямой призмы — ромб. Одна из диагоналей призмы равна a и составляет с плоскостью основания угол α, а с одной из боковых граней — угол β. Найти объем призмы.

12.440. Отношение двух отрезков, заключенных между параллельными плоскостями, равно k, а углы, которые каждый из этих отрезков составляет с одной из плоскостей, относятся как 2 : 3. Найти эти углы и допустимые значения k.

12.441. Угол между плоскостью квадрата $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ и некоторой плоскостью P равен α, а угол между стороной AB и той же плоскостью равен β. Найти угол между стороной AD и плоскостью P.

12.442. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) через середины двух смежных сторон основания DC и AD и вершину B_1 верхнего основания проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если периметр сечения в 3 раза больше диагонали основания.

12.443. Расстояния от центра основания правильной четырехугольной пирамиды до боковой грани и до бокового ребра равны соответственно a и b. Найти двугранный угол при основании пирамиды.

12.444. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания. Найти косинус угла между двумя другими боковыми гранями, если они составляют с плоскостью основания угол α.

12.445. Основанием наклонной призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Боковая грань, содержащая гипотенузу, перпендикулярна основанию, а боковая грань, содержащая катет, прилежащий к данному углу, составляет с основанием острый угол β. Найти острый угол между третьей боковой гранью и основанием.

12.446. Сторона BC треугольника ABC, лежащего в основании наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$), равна a, прилежащие к ней углы равны β и γ. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания, если объем призмы равен V и $A_1A = A_1B = A_1C$.

12.447. В правильную треугольную усеченную пирамиду вписаны два шара; один касается всех ее граней, другой — всех ребер. Найти синус угла между боковым ребром и плоскостью основания.

12.448. В основании четырехугольной пирамиды лежит равнобедренная трапеция с основаниями a и b ($a > 2b$) и углом φ между неравными отрезками ее диагоналей. Вершина пирамиды проецируется в точку пересечения диагоналей основания. Углы, которые составляют с плоскостью основания боковые грани, проходящие через основания трапеции, относятся как 1 : 2. Найти объем пирамиды.

12.449. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найти расстояние между боковым ребром и не пересекающей его стороной основания.

12.450. В треугольной пирамиде все грани — правильные треугольники. Через сторону основания проведена плоскость, делящая объем пирамиды в отношении 1 : 3, считая от основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

12.451. В правильной четырехугольной пирамиде через два боковых ребра, не принадлежащих данной грани, проведена плоскость. Отношение площади сечения к боковой поверхности пирамиды равно k. Найти угол между двумя смежными боковыми гранями и допустимые значения k.

12.452. В основании прямой призмы лежит параллелограмм с острым углом φ между диагоналями. Диагонали каждой из смежных боковых граней пересекаются под углами α и β ($\alpha > \beta$), обращенными к соответствующим сторонам основания. Найти объем призмы, если ее высота равна h.

12.453. Основанием пирамиды $EABCD$ служит ромб $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Высота пирамиды проходит через середину стороны AB. Боковые ребра EC и ED составляют с плоскостью основания углы α и β. Найти косинус острого угла ромба, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

12.454. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Угол между высотой пирамиды и боковым ребром равен α $\left(\alpha \le \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проведенной через середину высоты перпендикулярно одному из ее боковых ребер.

12.455. Пусть AB — диаметр нижнего основания цилиндра, A_1B_1 — хорда верхнего основания, параллельная AB. Плоскость, проведенная через прямые AB и A_1B_1, составляет с плоскостью нижнего основания цилиндра острый угол α, а прямая AB_1 составляет с той же плоскостью угол β. Найти высоту цилиндра, если радиус основания цилиндра равен R (точки A и A_1 лежат по одну сторону от прямой, проходящей через середины отрезков AB и A_1B_1).

12.456. Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна H. Через вершину A основания ABC проведена плоскость перпендикулярно противоположному боковому ребру SC. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол α. Найти объем части пирамиды, заключенной между плоскостью основания и плоскостью сечения.

12.457. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна H. Боковое ребро составляет с основанием угол α, а диагональ пирамиды с основанием — угол β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ пирамиды параллельно не пересекающей ее диагонали основания.

12.458. Стороны нижнего и верхнего оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны соответственно a и b ($a > b$). Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через среднюю линию боковой грани и центр нижнего основания.

12.459. Найти радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, высота которой равна H, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α.

12.460. Радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, относится к стороне ее основания как 3 : 4. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

12.461. В конус, осевое сечение которого — прямоугольный треугольник, вписан цилиндр; его нижнее основание лежит в плоскости основания конуса. Отношение боковых поверхностей конуса и цилиндра равно $4\sqrt{2}$. Найти угол между плоскостью основания конуса и прямой, проходящей через центр верхнего основания цилиндра и произвольную точку окружности основания конуса.

12.462. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция с острым углом α. Эта трапеция описана около окружности основания конуса. Вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса, а ее проекция на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции. Найти объем пирамиды, если образующая конуса равна l и составляет с высотой угол β.

12.463. Основанием пирамиды $FABC$ служит равнобедренный треугольник ABC, у которого угол между равными сторонами AB и AC равен $\alpha\left(\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. В пирамиду вписана треугольная призма $AEDA_1E_1D_1$; точки A_1, E_1 и D_1 лежат соответственно на боковых ребрах FA, FC и FB пирамиды, а сторона ED основания AED проходит через центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найти отношение объема призмы к объему пирамиды.

12.464. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1)$ проведена плоскость через середины ребер DD_1 и D_1C_1 и вершину A. Найти угол между этой плоскостью и гранью $ABCD$.

12.465. Отношение объема правильной треугольной усеченной пирамиды к объему вписанного в нее шара равно k. Найти угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью основания и допустимые значения k.

ГЛАВА 13

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

УКАЗАНИЯ К СОСТАВЛЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ПО ТЕКСТУ ЗАДАЧИ

1°. Решение задачи с помощью уравнения (системы уравнений) обычно производят в такой последовательности:

1) вводят переменные, т. е. обозначают буквами $x, y, t, u, \ldots$ величины, которые требуется найти по условию задачи, либо те, которые необходимы для отыскания искомых величин;

2) используя введенные переменные, а также указанные в условии задачи конкретные значения переменных и соотношения между ними, составляют уравнение (систему уравнений), т. е. как бы «переводят» текст задачи на язык алгебры, формируя равенство (систему равенств) алгебраических выражений;

3) решают составленное уравнение (систему уравнений) и из полученных решений отбирают те, которые подходят по смыслу задачи.

2°. При решении задач о соотношениях между натуральными числами используют следующие утверждения:

1) если к натуральному числу x приписать справа n-значное число y, то получится число $10^n x + y$;

2) если a и b — натуральные числа, $a > b$ и a не кратно b, то существует единственная пара натуральных чисел q и r таких, что $a = bq + r$, где $r < b$.

3°. При решении задач на движение принимают такие допущения:

1) движение считается равномерным, т. е. происходящим с постоянной скоростью, если нет специальных оговорок;

2) изменение направления движения и переходы на новый режим движения считаются происходящими мгновенно;

3) постоянная скорость u, с которой рассматриваемый объект двигался бы по стоячей (неподвижной) воде, называется его *собственной скоростью*. Если движение происходит по реке, имеющей постоянную скорость v движения воды, то реальная скорость объекта по течению реки равна $u + v$, а против течения она равна $u - v$.

4°. При составлении уравнений в задачах, связанных с равномерным движением, пользуются формулами

$$s = vt,\ v = \frac{s}{t},\ t = \frac{s}{v},$$

где t — время, v — скорость, s — пройденное расстояние.

Часто, приступая к решению таких задач, вводят систему координат tOs, где по оси абсцисс (оси Ot) откладывают время (t), а по оси ординат (оси Os) — пройденное расстояние (s) (рис. 13.1). Тогда графиком зависимости $s = vt$ является прямая AM, составляющая с осью Ot острый угол α, тангенс которого равен значению скорости v.

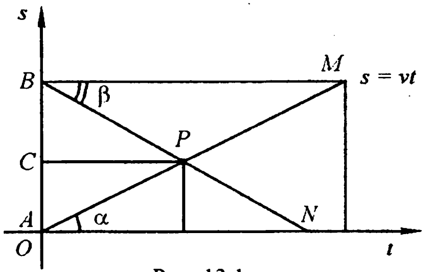


Рис. 13.1

Если по условию задачи одновременно с маршрутом из A в B начинается встречный маршрут из B в A, то отсчет расстояния, пройденного от пункта B по направлению к точке O, ведется от точки B, отмеченной на той же оси Os. Графиком встречного маршрута является прямая BN, составляющая с прямой BM, параллельной Ot, острый угол β, тангенс которого равен значению скорости v движения по этому маршруту. Координаты точки P пересечения графиков указывают время встречи и пройденные от A и от B расстояния до места встречи (соответственно AC и BC).

5°. При решении задач, связанных с выполнением (индивидуально или совместно) определенного объема работы, используют формулу

$$A = Wt,$$

где A — количество всей работы, намеченной к выполнению (по смыслу задачи часто A принимают за единицу), t — время выполнения всего количества работы, W — производительность труда, т. е. количество работы, выполняемой в единицу времени.

Если весь объем работы, принятый за единицу, выполняется одним субъектом за t_1, а вторым — за t_2 единиц времени, то производительность труда при их совместном выполнении того же объема работы равна

$$W_{\text{совм}} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}, \text{ а } t_{\text{совм}} = \frac{1}{W_{\text{совм}}} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}.$$

6°. При решении задач о смесях, сплавах, растворах используют следующие допущения:

1) все полученные смеси, сплавы, растворы считаются однородными;

2) не делается различия между литром как мерой вместимости сосуда и литром как мерой количества жидкости (или газа).

Если смесь (сплав, раствор) имеет массу m и состоит из веществ A, B и C, массы которых соответственно m_A, m_B, m_C, то величину $\frac{m_A}{m}$ (соответственно $\frac{m_B}{m}$, $\frac{m_C}{m}$) называют *концентрацией* вещества A (соответственно B, C) в смеси (сплаве, растворе), а величину $\frac{m_A}{m} \cdot 100\%$ (соответственно $\frac{m_B}{m} \cdot 100\%$, $\frac{m_C}{m} \cdot 100\%$) —

процентным содержанием вещества A (соответственно B, C) в смеси (сплаве, растворе). При этом выполняется равенство

$$\frac{m_A}{m}+\frac{m_B}{m}+\frac{m_C}{m}=1.$$

Пример 1. В направлении от A к B автомобиль ехал некоторое время с постоянной скоростью $v_1 = 60$ км/ч. Остальную часть пути он проехал за такое же время, но со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. В противоположном направлении автомобиль ехал одну половину пути со скоростью $v_3 = 80$ км/ч, а другую половину — со скоростью $v_4 = 45$ км/ч. Какова средняя скорость рейса: а) из A в B? б) из B в A?

□ а) Так как автомобиль в течение одинаковых промежутков времени ехал с каждой из указанных скоростей, то $v_{\text{ср}}=\dfrac{v_1+v_2}{2}=\dfrac{60+40}{2}=50$ (км/ч).

б) Обратный рейс состоит из двух равных частей пути (предположим, что каждая из них равна s км), которые пройдены автомобилем в неравные промежутки времени; поэтому было бы неверно считать, что $v_{\text{ср}}=\dfrac{v_3+v_4}{2}=\dfrac{80+45}{2}=62{,}5$ (км/ч). Пусть автомобиль ехал x часов со скоростью v_3 и y часов — со скоростью v_4. Тогда $v_3x=v_4y=s$, откуда $x=\dfrac{v_4y}{v_3}$. Следовательно, средняя скорость

$$v_{\text{ср}}=\frac{2s}{x+y}=\frac{2v_4y}{\dfrac{v_4y}{v_3}+y}=\frac{2v_3v_4}{v_3+v_4}=\frac{2\cdot80\cdot45}{125}=57{,}6\ \text{(км/ч)}.\ ■$$

Пример 2. Бригада рабочих выполнила некоторое задание. Если бригаду уменьшить на 20 человек, то такое же задание она выполнит на 5 дней позже, чем при первоначальном составе, а если бригаду увеличить на 15 человек, то она выполнит задание на 2 дня раньше. Сколько рабочих было в бригаде первоначально и за сколько дней они выполнили задание?

□ Пусть x рабочих выполнили задание за y дней; тогда по условию $xy = (x-20)(y+5)$ и $xy=(x+15)(y-2)$.

Запишем оба равенства в виде пропорций: $\dfrac{x-20}{x}=\dfrac{y}{y+5}$ и $\dfrac{x+15}{x}=\dfrac{y}{y-2}$.

Каждую пропорцию вида $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ заменим равносильной пропорцией вида $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$. Тогда получим $\dfrac{-20}{x}=\dfrac{-5}{y+5}$ и $\dfrac{15}{x}=\dfrac{2}{y-2}$. Теперь легко находим, что $x=60$ и $y=10$. Итак, в бригаде было 60 рабочих, которые выполнили задание за 10 дней. ■

Пример 3. Три насоса, качающие воду для поливки, начали работать одновременно. Первый и третий насосы закончили работу одновременно, а второй — через 2 ч после начала работы. В результате первый насос выкачал 9 м^3 воды, а второй и третий вместе 28 м^3. Какое количество воды выкачивает за час каждый насос, если известно, что третий насос за час выкачивает на 3 м^3 больше, чем первый, и что три насоса, работая вместе, выкачивают за час 14 м^3?

☐ Пусть первый и второй насосы выкачивают за час соответственно x и y м^3, тогда третий выкачивает за час $(x+3)$ м^3. Второй и третий насосы выкачали соответственно $2y$ и $(28-2y)$ м^3 воды. Первый насос работал $\frac{9}{x}$ ч, третий $\frac{28-2y}{x+3}$ ч. Согласно условию, $\frac{9}{x}=\frac{28-2y}{x+3}$ и $2x+y+3=14$. Решив систему уравнений, находим $x=3$, $y=5$. Итак, получаем ответ: 3, 5 и 6 м^3. ■

Пример 4. Пешеход, идущий из дома на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 км, рассчитал, что он опоздает к отходу поезда на 40 мин, если будет идти с той же скоростью. Поэтому остальной путь он прошел со скоростью 4 км/ч и прибыл на станцию за 15 мин до отхода поезда. Чему равно расстояние от дома до станции и с какой постоянной на всем пути скоростью пешеход пришел бы на станцию точно к отходу поезда?

☐ Составим следующую таблицу:

Пешеход пришел бы на станцию	Расстояние, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Точно	x	v	$\frac{x}{v}$
С опозданием	$x-3$	3	$\frac{x-3}{3}$
С опережением	$x-3$	4	$\frac{x-3}{4}$

Уравнивая промежутки времени, записанные в первой и второй, в первой и третьей строках, получаем систему уравнений

$$\frac{x}{v}=1+\frac{x-3}{3}-\frac{2}{3},\ \frac{x}{v}=1+\frac{x-3}{4}+\frac{1}{4},$$

или $\frac{x-2}{3}=\frac{x+2}{4}$, откуда $x=14$. Итак, получаем ответ: $x=14$, $v=3{,}5$ км/ч. ■

Пример 5. Расстояние между точками A в B равно 270 м. Из A в B равномерно движется тело; достигнув B, оно сразу же возвращается назад с той же скоростью. Второе тело, выходящее из B в A через 11 с после выхода первого из A, движется равномерно, но медленнее. На пути от B к A оно встречается с первым

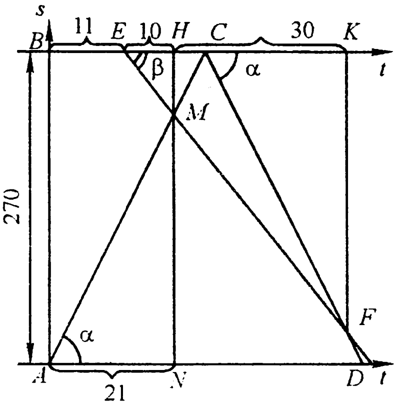


Рис. 13.2

дважды: через 10 и 40 с после своего выхода из B. Найти скорость движения каждого тела.

☐ Удобная модель задачи — график равномерного движения в системе координат «путь» (s — в метрах), «время» (t — в секундах). Пусть AC (рис. 13.2) — график движения из A в B со скоростью $v_1 = \operatorname{tg}\alpha$ (ось времени At); CD — график движения из B в A того же тела с той же скоростью $v_1 = \operatorname{tg}\alpha$ (ось времени Bt); EF — график движения из B в A со скоростью $v_2 = \operatorname{tg}\beta$, $\beta < \alpha$ (ось времени Bt).

Промежуток времени $BE = 11$, промежуток времени до первой встречи $EH = 10$, между первой и второй встречами $HK = 30$; тогда $NM = 21v_1$, $MH = 10v_2$, $KF = 40v_2$, $NM + MH = AB = 270$, т. е.

$$21v_1 + 10v_2 = 270. \qquad (*)$$

Промежуток времени $HC = \frac{MH}{v_1} = 10\frac{v_2}{v_1}$; промежуток времени $CK = \frac{KF}{v_1} = 40\frac{v_2}{v_1}$. Так как $HC + CK = 30$, то $10\frac{v_2}{v_1} + 40\frac{v_2}{v_1} = 30$, откуда

$$5v_2 = 3v_1. \qquad (**)$$

Решив совместно уравнения (*) и (**), находим $v_1 = 10$ м/с, $v_2 = 6$ м/с. ■

Пример 6. Из A в B вышла машина с почтой. Через 20 мин по тому же маршруту вышла вторая машина, скорость которой 45 км/ч. Догнав первую машину, шофер передал пакет и немедленно поехал обратно с той же скоростью (время, затраченное на остановку и разворот, не учитывается). В тот момент, когда первая машина прибыла в B, вторая достигла лишь середины пути от места встречи ее с первой машиной до пункта A. Найти скорость первой машины, если расстояние между A и B равно 40 км.

☐ Рассмотрим систему координат «путь» (s — в километрах), «время» (t — в часах). Пусть AC (рис. 13.3) график движения первой машины с искомой скоростью $v = \operatorname{tg}\alpha$; DE и EF — график движения «туда — обратно» второй машины со скоростью $\operatorname{tg}\beta = 45$; $AD = \frac{1}{3}$. Известно, что $AB = 40$ и G — середина пути AH.

Пусть $AG = NK = y$. Тогда промежуток времени $DK = \frac{y}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{y}{45}$. Геометрически ясно, что $DK = KL = LM$, поэтому промежуток времени движения первой машины

$$AM = \frac{1}{3} + \frac{3y}{45}, \quad \text{откуда}$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{15}\right)v=40. \qquad (*)$$

Промежуток времени $AL=\frac{1}{3}+\frac{2y}{45}$, $LE=AH=2y$, поэтому

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2y}{45}\right)v=2y. \qquad (**)$$

Решив совместно уравнения (*) и (**), находим y = 15 км и v = 30 км/ч.■

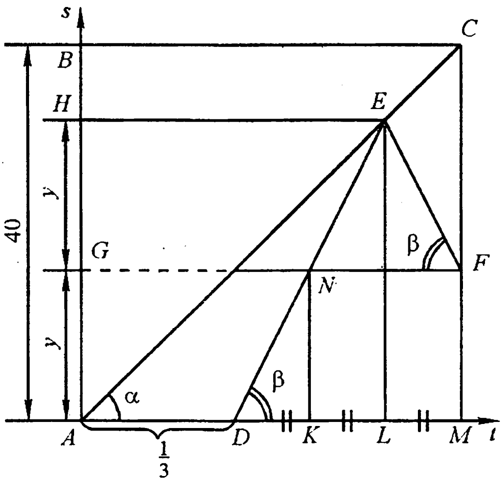


Рис. 13.3

Пример 7. Из колбы, содержащей раствор соли, отливают $\frac{1}{n}$ раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого получившийся раствор выливают в колбу и смешивают с оставшимся в ней раствором. В результате содержание соли в растворе повысилось на p%. Определить процентное содержание соли в первоначальном растворе.

□ Пусть в колбе было первоначально n литров раствора, содержащего x% соли, что составляет $\frac{nx}{100}$ л соли. В пробирку отлили $\frac{1}{n}\cdot n=1$ л раствора. По условию после выпаривания процентное содержание соли в пробирке повысилось вдвое; так как выпаривается только вода, а количество соли остается неизменным, то затем в колбу вылили только 0,5 л раствора. Тогда в колбе окажется $n-1+$

$+\ 0{,}5 = n - 0{,}5$ л раствора, в котором по-прежнему содержится $\frac{nx}{100}$ л соли. Согласно условию, имеем $\frac{nx}{100} = \frac{(x+p)(n-0{,}5)}{100}$, или $nx = (x+p)(n-0{,}5)$, откуда $x = p\,(2n-1)$. ■

Пример 8. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими свойствами: первая цифра числа в 3 раза меньше суммы двух других его цифр; разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81.

□ Пусть искомое число имеет вид $100x + 10y + z$, где x, y, z — его цифры. Согласно условию, $3x = y + z$ и число $100x + 10y + z - (100x + 10z + y)$ делится на 81. Упрощая, получаем, что $9\,(y-z)$ делится на 81, т. е. $y - z$ кратно числу 9. Так как y и z — цифры, то последнее возможно лишь в двух случаях: 1) $y - z = 0$; 2) $y - z = 9$.

В первом случае имеем систему $\begin{cases} 3x = y + z, \\ y - z = 0 \end{cases}$, откуда $3x = 2y$, что возможно при $x = 2$, $y = z = 3$ (искомое число 233), при $x = 4$, $y = z = 6$ (искомое число 466) и при $x = 6$, $y = z = 9$ (искомое число 699). Во втором случае имеем систему $\begin{cases} 3x = y + z, \\ y - z = 9. \end{cases}$ Второе уравнение системы возможно лишь при $z = 0$, $y = 9$; тогда $x = 3$ и искомое число 390. Итак, получаем ответ: 233, 390, 466, 699. ■

Группа А

13.001. Из данных четырех чисел первые три относятся между собой как $\frac{1}{5} : \frac{1}{3} : \frac{1}{20}$, а четвертое составляет 15% второго. Найти эти числа, если известно, что второе число на 8 больше суммы остальных.

13.002. Сколько килограммов воды нужно выпарить из 0,5 т целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить массу с содержанием 75% воды?

13.003. В двух бидонах находится 70 л молока. Если из первого бидона перелить во второй 12,5% молока, находящегося в первом бидоне, то в обоих бидонах будет поровну. Сколько литров молока в каждом бидоне?

13.004. Две бригады, работая одновременно, обработали участок земли за 12 ч. За какое время могла бы обработать этот участок каждая из бригад в отдельности, если скорости выполнения работы бригадами относятся как 3 : 2?

13.005. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к этому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти исходное число.

13.006. Тракторист вспахал три участка земли. Площадь первого равна $\frac{2}{5}$ площади всех трех участков, а площадь второго относится к площади третьего как

$\frac{3}{2}:\frac{4}{3}$. Сколько гектаров было во всех трех участках, если в третьем было на 16 га меньше, чем в первом?

13.007. Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после пересчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

13.008. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%?

13.009. В библиотеке имеются книги на английском, французском и немецком языках. Английские книги составляют 36% всех книг на иностранных языках, французские — 75% английских, а остальные 185 книг — немецкие. Сколько книг на иностранных языках в библиотеке?

13.010. Насос может выкачать из бассейна $\frac{2}{3}$ воды за 7,5 мин. Проработав 0,15 ч, насос остановился. Найти вместимость бассейна, если после остановки насоса в бассейне еще осталось 25 $м^3$ воды.

13.011. Вследствие реконструкции оборудования производительность труда рабочего повышалась дважды в течение года на одно и то же число процентов. На сколько процентов возрастала каждый раз производительность труда, если за одно и то же время рабочий раньше вырабатывал изделий на 2500 р.*, а теперь на 2809 р.?

13.012. Рабочий день уменьшился с 8 до 7 ч. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата возросла на 5%?

13.013. В январе завод выполнил 105% месячного плана выпуска готовой продукции, а в феврале дал продукции на 4% больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

13.014. Найти три числа, если первое составляет 80% второго, второе относится к третьему как $0{,}5:\frac{9}{20}$, а сумма первого и третьего на 70 больше второго.

13.015. Турист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал $\frac{1}{5}$ всего пути и еще 60 км, во второй $\frac{1}{4}$ всего пути и еще 20 км, а в третий день $\frac{23}{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найти расстояние между городами.

13.016. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2 и 3, а обратные величины соответствующих знаменателей пропорциональны числам 1, $\frac{1}{3}$ и 0,2. Найти эти дроби, если их среднее арифметическое равно $\frac{136}{315}$.

---

*Указанные в условии задач числовые значения, характеризующие стоимость, величину заработка, размер премии, кредитные и другие денежные операции, не претендуют на совпадение с их реальными прототипами в современной действительности.

13.017. Найти сумму трех чисел, зная, что третье относится к первому как 18,48 : 15,4 и составляет 40% второго, а сумма первого и второго равна 400.

13.018. Вкладчик снял со своего счета в сбербанке сначала $\frac{1}{4}$ вклада, затем $\frac{4}{9}$ оставшихся денег и еще 640 р. После этого у него осталось на сберкнижке $\frac{3}{20}$ всех его денег. Как велик был вклад?

13.019. На уборке снега работают две снегоочистительные машины. Первая может убрать всю улицу за 1 ч, а вторая — за 75% этого времени. Начав уборку одновременно, обе машины проработали вместе 20 мин, после чего первая машина прекратила работу. Сколько еще нужно времени, чтобы вторая машина закончила работу?

13.020. Сумма первых трех членов пропорции равна 58. Третий член составляет $\frac{2}{3}$, а второй — $\frac{3}{4}$ первого члена. Найти четвертый член пропорции и записать ее.

13.021. Одна бригада может убрать поле за 12 дней. Другой бригаде для выполнения той же работы нужно 75% этого времени. После того как в течение 5 дней работала только первая бригада, к ней присоединилась вторая, и обе вместе закончили работу. Сколько дней работали бригады вместе?

13.022. На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число решивших все задачи верно относится к числу не решивших вовсе как 5 : 3. Сколько человек экзаменовались по математике в этот день?

13.023. Однотипные детали обрабатываются на двух станках. Производительность первого станка на 40% больше производительности второго. Сколько деталей было обработано за смену на каждом станке, если первый работал в эту смену 6 ч, а второй — 8 ч, причем оба станка вместе обработали 820 деталей?

13.024. Тракторная бригада может вспахать $\frac{5}{6}$ участка земли за 4 ч 15 мин. До обеденного перерыва бригада работала 4,5 ч, после чего остались невспаханными еще 8 га. Как велик был участок?

13.025. От пристани в город отправилась лодка со скоростью 12 км/ч, а через полчаса после нее в том же направлении вышел пароход со скоростью 20 км/ч. Каково расстояние от пристани до города, если пароход пришел туда на 1,5 ч раньше лодки?

13.026. Турист проплыл по реке на лодке 90 км и прошел пешком 10 км. При этом на пеший путь было затрачено на 4 ч меньше, чем на путь по реке. Если бы турист шел пешком столько времени, сколько плыл по реке, а плыл по реке столько времени, сколько шел пешком, то эти расстояния были бы равны. Сколько часов он шел пешком и сколько часов плыл по реке?

13.027. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти исходное число.

13.028. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели пропорциональны соответственно числам 1, 3, 7. Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{200}{441}$. Найти эти дроби.

13.029. В штате гаража числятся 54 шофера. Сколько свободных дней может иметь каждый шофер в месяц (30 дней), если ежедневно 25% автомашин из имеющихся 60 остаются в гараже для профилактического ремонта?

13.030. Три бригады рабочих сделали насыпь. Вся работа оценена в 325 500 р. Какую зарплату получит каждая бригада, если первая состояла из 15 человек и работала 21 день, вторая — из 14 человек и работала 25 дней, а число рабочих третьей бригады, работавшей 20 дней, на 40% превышало число рабочих первой бригады?

13.031. Группа студентов во время каникул совершила поход по Подмосковью. Первые 30 км они прошли пешком, 20% оставшейся части маршрута проплыли на плоту по реке, а затем опять шли пешком, пройдя расстояние в 1,5 раза больше того, которое проплыли по реке. Остальной путь проехали за 1 ч 30 мин на попутном грузовике, который шел со скоростью 40 км/ч. Какова длина всего маршрута?

13.032. За 3,5 ч работы один штамповочный пресс может изготовить 42% всех заказанных деталей. Второй пресс за 9 ч работы может изготовить 60% всех деталей, а скорости выполнения работы на третьем и на втором прессах относятся как 6 : 5. За какое время будет выполнен весь заказ, если все три пресса будут работать одновременно?

13.033. Каждая из двух машинисток перепечатывала рукопись объемом 72 страницы. Первая машинистка перепечатывала 6 страниц за то же время, за которое вторая перепечатывала 5 страниц. Сколько страниц перепечатывала каждая машинистка в час, если первая закончила работу на 1,5 ч быстрее второй?

13.034. В магазин для продажи поступили учебники по физике и математике. Когда продали 50% учебников по математике и 20% учебников по физике, что составило в общей сложности 390 книг, учебников по математике осталось в 3 раза больше, чем по физике. Сколько учебников по математике и сколько по физике поступило в продажу?

13.035. Обувная фабрика за первую неделю выполнила 20% месячного плана, за вторую — 120% количества продукции, выработанной за первую неделю, а за третью неделю — 60% продукции, выработанной за первые две недели вместе. Каков месячный план выпуска обуви, если известно, что для его выполнения необходимо за последнюю неделю месяца изготовить 1480 пар обуви?

13.036. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие — 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

13.037. Одна мельница может смолоть 19 ц пшеницы за 3 ч, другая 32 ц за 5 ч, а третья 10 ц за 2 ч. Как распределить 133 т пшеницы между этими мельницами, чтобы, одновременно начав работу, они окончили ее также одновременно?

13.038. В трех секциях спортивной школы было 96 спортсменов. Число членов конькобежной секции составляло 0,8 числа членов лыжной, а число членов хоккейной секции составляло $33\frac{1}{3}\%$ суммарного числа членов двух первых секций. Сколько спортсменов было в каждой секции?

13.039. За первый квартал автозавод выполнил 25% годового плана выпуска автомашин. Число машин, выпущенных за второй, третий и четвертый кварталы, оказалось пропорционально числам 11,25, 12 и 13,5. Определить перевыполнение годового плана в процентах, если во втором квартале автозавод дал продукции в 1,08 раза больше, чем в первом.

13.040. Трое сотрудников получили премию в размере 2970 р., причем второй получил $\frac{1}{3}$ того, что получил первый, и еще 180 р., а третий получил $\frac{1}{3}$ денег второго и еще 130 р. Какую премию получил каждый?

13.041. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

13.042. Площади трех участков земли относятся как $2\frac{3}{4}:1\frac{5}{6}:1\frac{3}{8}$. С первого участка собрано зерна на 72 ц больше, чем со второго. Найти площадь всех трех участков, если средняя урожайность составляет 18 ц с 1 га.

13.043. Расстояние между Москвой и Смоленском по железной дороге равно 415 км. На этом пути расположены города Можайск и Вязьма. Расстояние между Москвой и Можайском относится к расстоянию между Можайском и Вязьмой как 7 : 9, а расстояние между Можайском и Вязьмой составляет $\frac{27}{35}$ расстояния между Вязьмой и Смоленском. Найти расстояния между каждыми двумя соседними городами.

13.044. В магазин привезли сахар и сахарный песок в 63 мешках, всего 4,8 т, причем мешков с сахарным песком было на 25% больше, чем с сахаром. Масса каждого мешка с сахаром составляла $\frac{3}{4}$ массы мешка с сахарным песком. Сколько привезли сахара и сколько сахарного песка?

13.045. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

13.046. Охотничий порох состоит из селитры, серы и угля. Масса серы должна относиться к массе селитры как 0,2 : 1,3, а масса угля должна составлять $11\frac{1}{9}\%$ массы серы и селитры вместе. Сколько пойдет каждого из веществ на приготовление 25 кг пороха?

13.047. Музыкальный театр объявил конкурс для поступления в оркестр. Первоначально предполагалось, что число мест для скрипачей, виолончелистов и трубачей распределится в отношении 1,6 : 1 : 0,4. Однако затем было решено увеличить прием, и в результате скрипачей было принято на 25% больше, а виолончелистов на 20% меньше, чем ранее намечалось. Сколько музыкантов каждого жанра было принято в оркестр, если всего приняли 32 человека?

13.048. Длина Дуная относится к длине Днепра как $\frac{19}{3}:5$, а длина Дона относится к длине Дуная как 6,5 : 9,5. Найти протяженность каждой из рек, если Днепр длиннее Дона на 300 км.

13.049. Первое из неизвестных чисел составляет 140% второго, а отношение первого к третьему равно $\frac{14}{11}$. Найти эти числа, если разность между третьим и вторым на 40 единиц меньше числа, составляющего 12,5% суммы первого и второго чисел.

13.050. Заработки рабочего за октябрь и ноябрь относились как $\frac{3}{2}:\frac{4}{3}$, а за ноябрь и декабрь как $2:\frac{8}{3}$. За декабрь он получил на 450 р. больше, чем за октябрь, и за перевыполнение квартального плана рабочему начислили премию в размере 20% его трехмесячного заработка. Найти размер премии.

13.051. По наклоненной доске длиной 6 м катятся два цилиндра, у одного из которых длина окружности равна 3 дм, а у другого 2 дм. Можно ли увеличить длины окружностей обоих цилиндров на одну и ту же величину так, чтобы на том же пути один из них сделал на 3 оборота больше другого?

13.052. Искусственный водоем имеет форму прямоугольника с разностью сторон 1 км. Два рыбака, находящиеся в одной вершине этого прямоугольника, одновременно отправились в пункт, расположенный в противоположной вершине. При этом один рыбак поплыл на лодке напрямик по диагонали, а второй пошел пешком вдоль берега. Определить размеры водоема, если каждый рыбак передвигался со скоростью 4 км/ч и один из них прибыл к месту назначения на 30 мин раньше другого.

13.053. Кристалл, находясь в стадии формирования, равномерно наращивает свою массу. Наблюдая формирование двух кристаллов, заметили, что за год первый кристалл увеличил свою первоначальную массу на 4%, а второй — на 5%, в то время как прирост массы первого кристалла за 3 мес. оказался равным приросту массы второго кристалла за 4 мес. Каковы были первоначальные массы этих кристаллов, если известно, что после того как каждая из них увеличилась на 20 г, отношение массы первого кристалла к массе второго кристалла достигло числа 1,5?

13.054. Один фермер получил средний урожай гречихи 21 ц с 1 га, а другой, у которого под гречихой было на 12 га меньше, добился среднего урожая 25 ц с 1 га. В результате второй фермер собрал на 300 ц гречихи больше, чем первый. Сколько центнеров гречихи было собрано каждым фермером?

13.055. На вагоноремонтном заводе в определенный срок должно быть отремонтировано 330 вагонов. Перевыполняя план ремонта в среднем на 3 вагона в неделю, на заводе уже за две недели до срока отремонтировали 297 вагонов. Сколько вагонов в неделю ремонтировали на заводе?

13.056. На расстоянии s км грузовой автомобиль расходует бензина на a л больше, чем легковой. Расходуя 1 л бензина, грузовой автомобиль проходит по той же дороге на b км меньше, чем легковой. Каков расход бензина каждого из этих автомобилей на расстоянии s км?

13.057. Две силы приложены к одной точке и направлены под прямым углом. Модуль одной из них на 4 Н больше модуля другой, а модуль равнодействующей на 8 Н меньше суммы модулей данных сил. Найти модули данных сил и их равнодействующей.

13.058. В лаборатории измеряется скорость, с которой распространяется звук вдоль стержней, сделанных из разных материалов. В первом опыте оказалось, что весь путь, состоящий из трех последовательно соединенных стержней, звук проходит за время a с, а путь, состоящий из второго и третьего стержней, звук проходит в 2 раза быстрее, чем один первый стержень. В другом опыте второй стержень заменили новым, и тогда последовательное соединение из трех стержней звук прошел за время b с, а соединение из первого и второго стержней — вдвое медленнее, чем один третий стержень. Найти скорость распространения звука в новом стержне, если его длина l м.

13.059. По обе стороны улицы длиной 1200 м находятся прямоугольные полосы земли, отведенные под участки, одна — шириной 50 м, а другая — 60 м. На сколько участков разбит весь поселок, если более узкая полоса содержит на 5 участков больше, чем широкая, при условии, что на узкой полосе каждый участок на 1200 м^2 меньше, чем каждый участок на широкой полосе?

13.060. Груз массой 60 кг давит на опору. Если массу груза уменьшить на 10 кг, а площадь опоры уменьшить на 5 дм^2, то масса, приходящаяся на каждый квадратный дециметр опоры, увеличится на 1 кг. Определить площадь опоры.

13.061. Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобились 4 различные почтовые марки на общую сумму 21 р. Определить стоимости марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

13.062. Ученик токаря вытачивает шахматные пешки для определенного числа комплектов шахмат. Он хочет научиться изготовлять ежедневно на 2 пешки больше, чем теперь; тогда такое же задание он выполнит на 10 дней быстрее. Если бы ему удалось научиться изготовлять ежедневно на 4 пешки больше, чем теперь, то срок выполнения такого же задания уменьшился бы на 16 дней. Сколько комплектов шахмат обеспечивает пешками этот ученик, если для каждого комплекта нужно 16 пешек?

13.063. В зрительном зале клуба было 320 мест, расположенных одинаковыми рядами. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале?

13.064. Запас сена таков, что можно ежедневно выдавать на всех лошадей 96 кг. В действительности ежедневную порцию каждой лошади смогли увеличить на 4 кг, так как две лошади были проданы. Сколько лошадей было первоначально?

13.065. Сочинение писали 108 экзаменующихся. Им было роздано 480 листов бумаги, причем каждая девушка получила на один лист больше каждого юноши, а все девушки получили столько же листов, сколько все юноши. Сколько было девушек и сколько юношей?

13.066. На машиностроительном заводе разработали новый тип деталей для генераторов. Из 875 кг металла изготовляют теперь на три детали нового типа больше, чем деталей старого типа изготовляли из 900 кг. Каковы массы деталей нового и старого типов, если две детали нового типа по массе меньше одной детали старого типа на 0,1 т?

13.067. В первый день спортивных соревнований не выполнили зачетные нормы и выбыли из дальнейшей борьбы $\frac{1}{6}$ состава команды юношей и $\frac{1}{7}$ состава команды девушек. В течение остального периода соревнований из обеих команд выбыло из-за невыполнения норм одинаковое количество спортсменов. Всего к концу соревнований не выполнили зачетные нормы 48 человек из команды юношей и 50 человек из команды девушек, но из общего количества спортсменов, выполнивших зачетные нормы, девушек оказалось вдвое больше, чем юношей. Какова была первоначальная численность команд?

13.068. Рабочий час мастеров A и B оплачивается неодинаково, но оба мастера работали одинаковое число часов. Если бы A работал на 1 ч меньше, а B — на 5 ч меньше, то A заработал бы 720 р., а B — 800 р. Если бы, наоборот, A работал на 5 ч меньше, а B — на 1 ч меньше, то B заработал бы на 360 р. больше, чем A. Какую сумму получил каждый мастер за все время работы?

13.069. В одном бассейне имеется 200 м^3 воды, а в другом — 112 м^3. Открывают краны, через которые наполняются бассейны. Через сколько часов количество воды в бассейнах будет одинаковым, если во второй бассейн вливается в час на 22 м^3 больше воды, чем в первый?

13.070. Через 1 ч после начала равномерного спуска воды в бассейне ее осталось 400 м^3, а еще через 3 ч — 250 м^3. Сколько воды было в бассейне первоначально?

13.071. Для перевозки 60 т груза из одного места в другое затребовали некоторое количество машин. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому было дополнительно затребовано 4 машины. Какое количество автомашин было затребовано первоначально?

13.072. Город C, расположенный между пунктами A и B на одной прямой, снабжается газом из этих пунктов, расстояние между которыми 500 км. Из резервуара A в каждую минуту откачивается 10 000 м^3 газа, а из резервуара B — на 12% больше. При этом утечка газа в каждой магистрали составляет 4 м^3 в минуту на километр трубы. Зная, что в город C газ поступает из резервуаров A и B поровну, найти расстояние между городом C и пунктом A.

13.073. Имеются два куска кабеля разных сортов. Масса первого куска равна 65 кг; другой, длина которого на 3 м больше длины первого и масса каждого метра которого на 2 кг больше массы каждого метра первого куска, имеет массу 120 кг. Найти длины этих кусков.

13.074. В швейный цех поступило три кипы бельевого материала, всего 5000 м. В первой кипе количество материала было в 3 раза меньше, чем во второй, а в третьей — 22% всего количества. Из материала первой кипы сшили 150 простыней и 240 наволочек. Для изготовления одной простыни требовалось на 3,25 м больше материала, чем для изготовления одной наволочки. Из скольких метров материала шьется одна наволочка?

13.075. Двое рабочих за смену вместе изготовили 72 детали. После того как первый рабочий повысил производительность труда на 15%, а второй — на 25%, вместе за смену они стали изготовлять 86 деталей. Сколько деталей изготовляет каждый рабочий за смену после повышения производительности труда?

13.076. Сбор кукурузы с полей животноводческой фермы составлял 4340 ц. На следующий год запланировано получить 5520 ц кукурузы за счет увеличения площади на 14 га и увеличения урожайности на 5 ц с 1 га. Определить площадь, занятую под кукурузу, и урожайность в центнерах с 1 га (урожай был меньше 40 ц с 1 га).

13.077. Старший брат на мотоцикле, а младший на велосипеде совершили двухчасовую безостановочную поездку в лес и обратно. При этом мотоциклист проезжал каждый километр на 4 мин быстрее, чем велосипедист. Сколько километров проехал каждый из братьев за 2 ч, если известно, что путь, проделанный старшим братом за это время, на 40 км больше?

13.078. Турист ехал на автомобиле $\frac{5}{8}$ всего пути, а остальную часть — на катере. Скорость катера на 20 км/ч меньше скорости автомобиля. На автомобиле турист ехал на 15 мин дольше, чем на катере. Каковы скорость автомобиля и скорость катера, если весь путь туриста равен 160 км?

13.079. Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Спустя 4 ч после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

13.080. Из поселка, расположенного в 60 км от города, сегодня должен приехать отец студентки, который хотел посетить воскресную лекцию. Однако лекция перенесена на другой день. Чтобы предупредить отца об этом, дочь поехала по шоссе ему навстречу. При встрече выяснилось, что отец и дочь выехали на мопедах одновременно, но средняя скорость дочери была вдвое большей. Возвращаясь после встречи, каждый из них увеличил первоначальную скорость на 2 км/ч, и дочь прибыла в город на 5 мин позже, чем отец в поселок. С какими средними скоростями отец и дочь ехали первоначально?

13.081. Мотоциклист отправился из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 120 км. Обратно он выехал с той же скоростью, но через час после выезда должен был остановиться на 10 мин. После этой остановки он продолжал путь до A, увеличив скорость на 6 км/ч. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, сколько на путь от A до B?

13.082. Две группы туристов должны идти навстречу друг другу из турбаз A и B, расстояние между которыми 30 км. Если первая группа выйдет на 2 ч раньше второй, то они встретятся через 2,5 ч после выхода второй группы. Если же вторая группа выйдет на 2 ч раньше, чем первая, то встреча произойдет через 3 ч после выхода первой группы. С какой средней скоростью идет каждая группа?

13.083. Товарный поезд был задержан в пути на 12 мин, а затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найти первоначальную скорость поезда.

13.084. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 120 км, вышли одновременно навстречу друг другу два автобуса. В пути первый сделал остановку на 10 мин, второй — на 5 мин. Первый автобус прибыл в B на 25 мин раньше, чем второй прибыл в A. Можно считать, что скорости движения автобусов были постоянными, причем скорость первого автобуса превышала скорость второго автобуса на 20 км/ч. Сколько времени продолжалась поездка пассажиров каждого из этих автобусов между пунктами A и B?

13.085. Два брата взяли свои велосипеды и одновременно тронулись в путь с намерением проехать 42 км. Старший брат на всем пути сохранял одну и ту же скорость, а младший брат каждый час отставал от старшего на 4 км. Но так как старший брат отдыхал в пути целый час, а младший — только 20 мин, то к финишу они прибыли одновременно. Сколько времени продолжалась поездка?

13.086. Задумано целое положительное число. К его записи присоединили справа цифру 7 и из полученного нового числа вычли квадрат задуманного числа. Остаток уменьшили на 75% этого остатка и еще вычли задуманное число. В окончательном результате получили нуль. Какое число задумано?

13.087. Задумано целое положительное число. К его записи присоединили справа цифру 5 и из полученного нового числа вычли квадрат исходного числа. Разность разделили на исходное число, а затем вычли исходное число и в результате получили единицу. Какое число задумано?

13.088. На рис. 13.4 изображены окружность, касающаяся двух взаимно перпендикулярных осей Ox и Oy, и прямая AB, касающаяся окружности в точке P. Радиус окружности $R = 10$ см, а площадь треугольника OAB равна 600 см^2. Найти координаты точек A, B, P, учитывая, что $OA > OB$.

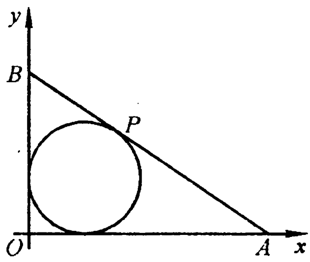


Рис. 13.4

13.089. Некоторое расстояние поезд прошел со скоростью 120 км/ч. После этого расстояние, на 75 км большее, он прошел со скоростью 150 км/ч, а остальное расстояние, на 135 км меньшее пройденного, — со скоростью 96 км/ч. Как велик весь путь, если средняя скорость поезда оказалась равной 120 км/ч?

13.090. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы полученный новый сплав содержал 40% меди?

13.091. Имеющиеся на складе 300 кг товара проданы в неравных количествах двум организациям по цене 37 р. 50 к. за 1 кг. Первая организация перевозит купленный товар на расстояние 20 км, а вторая — на 30 км. Перевозка 10 кг товара обходится в 1 р. 50 к. за 1 км пути. Зная, что вторая организация заплатила за покупку и перевозку товара на 2700 р. больше первой, определить, сколько килограммов товара купила каждая организация и какую сумму она заплатила за товар и его перевозку.

13.092. Денежная премия была распределена между тремя изобретателями: первый получил половину всей премии без $\frac{3}{22}$ того, что получили двое других вместе. Второй получил $\frac{1}{4}$ всей премии и $\frac{1}{56}$ денег, полученных вместе двумя остальными. Третий получил 30 000 р. Как велика была премия и сколько денег получил каждый изобретатель?

13.093. Сплав меди с серебром содержит серебра на 1845 г больше, чем меди. Если бы к нему добавить некоторое количество чистого серебра, по массе равное $\frac{1}{3}$ массы чистого серебра, первоначально содержавшегося в сплаве, то получился бы новый сплав, содержащий 83,5% серебра. Какова масса сплава и каково первоначальное процентное содержание в нем серебра?

13.094. В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5% железа, в оставшейся руде содержание железа повысилось на 20%. Какое количество железа осталось еще в руде?

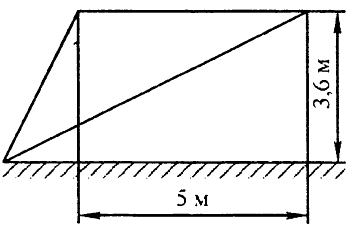


Рис. 13.5

13.095. На ровной горизонтальной площадке стоят две мачты равной высоты на расстоянии 5 м друг от друга. На высоте 3,6 м от площадки к каждой мачте прикреплено по одному концу куска проволоки длиной 13 м. Проволока натянута в плоскости расположения мачт и прикреплена к площадке, как показано на рис. 13.5. На каком расстоянии от ближайшей мачты находится точка прикрепления проволоки к площадке?

13.096. Велосипедист каждую минуту проезжает на 500 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 120 км он затрачивает на 2 ч больше, чем мотоциклист. Вычислить скорость каждого из них.

13.097. Расстояние от A до B по железной дороге равно 88 км, а по реке оно составляет 108 км. Поезд из A выходит на 1 ч позже теплохода и прибывает в B на 15 мин раньше. Найти среднюю скорость поезда, если известно, что она на 40 км/ч больше средней скорости теплохода.

13.098. Пешеход и велосипедист отправляются одновременно навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми 40 км, и встречаются спустя 2 ч после отправления. Затем они продолжают путь, причем велосипедист прибывает в A на 7 ч 30 мин раньше, чем пешеход в B. Найти скорости пешехода и велосипедиста, полагая, что они все время оставались неизменными.

13.099. Расстояние между поселками A и B равно s км. Из A отправились в B одновременно по одной и той же дороге два автотуриста, которые должны были прибыть в B в одно и то же время. В действительности первый турист прибыл в B

на n ч раньше срока, а второй на $3n$ ч опоздал, так как проезжал за каждый час в среднем на r км меньше первого. Определить среднюю скорость каждого автотуриста.

13.100. Определить целое положительное число по следующим данным: если его записать цифрами и присоединить справа цифру 4, то получится число, делящееся без остатка на число, большее искомого на 4, причем полученное частное представляет собой число, меньшее делителя на 27.

13.101. В один и тот же час навстречу друг другу должны были выйти A из поселка M и B из поселка N. Однако A задержался и вышел позже на 6 ч. При встрече выяснилось, что A прошел на 12 км меньше, чем B. Отдохнув, они одновременно покинули место встречи и продолжили путь с прежней скоростью. В результате A пришел в N через 8 ч, а B пришел в M через 9 ч после встречи. Определить расстояние MN и скорости пешеходов.

13.102. Даны два двузначных числа, из которых второе обозначено теми же цифрами, что и первое, но написанными в обратном порядке. Частное от деления первого числа на второе равно 1,75. Произведение первого числа на цифру его десятков в 3,5 раза больше второго числа. Найти эти числа.

13.103. От станции железной дороги до турбазы можно пройти по шоссе или тропинкой, причем тропинкой ближе на 5 км. Два товарища условились, что один пойдет по шоссе, строго выдерживая намеченную скорость v км/ч, а второй — тропинкой со скоростью 3 км/ч. Второй пришел на турбазу раньше первого на 1 ч. Найти расстояние от станции до турбазы по шоссе и скорость v первого товарища, если известно, что v — целое число.

13.104. Длина автобусного маршрута составляет 16 км. В часы «пик» автобус переходит на режим экспресса, т. е. значительно уменьшает число остановок, вследствие чего продолжительность поездки от начала до конца маршрута сокращается на 4 мин, а средняя скорость автобуса увеличивается на 8 км/ч. С какой скоростью идет автобус в режиме экспресса?

13.105. По одной из трамвайных линий начали курсировать трамваи новой конструкции. Рейс протяженностью 20 км продолжается теперь на 12 мин меньше, так как средняя скорость трамвая новой конструкции на 5 км/ч больше средней скорости трамвая устаревшей конструкции. Сколько времени затрачивает на рейс трамвай новой конструкции и какова его средняя скорость?

13.106. Самолет должен пролететь 2900 км. Пролетев 1700 км, он сделал вынужденную посадку на 1 ч 30 мин, после чего полетел со скоростью, на 50 км/ч меньшей, чем раньше. Найти первоначальную скорость самолета, если известно, что он прибыл на место через 5 ч после вылета.

13.107. Две бригады, работая вместе, должны отремонтировать заданный участок шоссейной дороги за 18 дней. В действительности же получилось так, что сначала работала только одна первая бригада, а заканчивала ремонт участка дороги одна вторая бригада, производительность труда которой выше, чем у первой бригады. В результате ремонт участка дороги продолжался 40 дней, причем первая бригада в свое рабочее время выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько дней был бы отремонтирован заданный участок дороги каждой бригадой отдельно?

13.108. На полях, выделенных агролаборатории для опытов, с двух участков собрали 14,7 ц зерна. На следующий год после применения новых методов агротехники урожай на первом участке повысился на 80%, а на втором — на 24%, благодаря чему с этих же участков было собрано 21,42 ц зерна. Сколько центнеров зерна собирают с каждого участка после применения новых методов агротехники?

13.109. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух мест, расстояние между которыми равно 270 км. Второй проезжает в час на 1,5 км меньше, чем первый, и встречается с ним через столько часов, сколько километров в час делает первый. Определить скорость каждого велосипедиста.

13.110. Два поезда отправляются из пунктов A и B навстречу друг другу. Они встретятся на половине пути, если поезд из A выйдет на 2 ч раньше, чем поезд из B. Если же оба поезда выйдут одновременно, то через 2 ч расстояние между ними составит 0,25 расстояния между A и B. За какое время каждый поезд проходит весь путь?

13.111. Поезд был задержан на t ч. Увеличив скорость на m км/ч, машинист на перегоне в s км ликвидировал опоздание. Определить, какую скорость должен был иметь поезд на этом перегоне, если бы не было задержки.

13.112. Два тела движутся навстречу друг другу из двух мест, расстояние между которыми 390 м. Первое тело прошло в первую секунду 6 м, а в каждую следующую проходило на 6 м больше, чем в предыдущую. Второе тело двигалось равномерно со скоростью 12 м/с и начало движение спустя 5 с после первого. Через сколько секунд после того, как начало двигаться первое тело, они встретятся?

13.113. В отверстие трубы вошла одна материальная частица, а спустя 6,8 мин в то же отверстие вошла вторая частица. Войдя в трубу, каждая частица немедленно начинает поступательное движение вдоль трубы: первая частица движется равномерно со скоростью 5 м/мин, вторая в первую минуту пробегает 3 м, а в каждую следующую минуту на 0,5 м больше, чем в предыдущую. Через сколько минут вторая частица догонит первую?

13.114. Расстояние между двумя городами равно a км. Два автомобилиста, выехав из этих городов навстречу друг другу, встретятся на полпути, если первый выедет на t ч раньше второго. Если же навстречу друг другу они выедут одновременно, то встреча произойдет через $2t$ ч. Определить скорость каждого автомобиля, считая, что скорости постоянны на всем пути.

13.115. Турист A отправился из города M в город N с постоянной скоростью 12 км/ч. Турист B, находившийся в городе N, получив сигнал, что A уже проехал 7 км, тотчас выехал навстречу ему и проезжал каждый час 0,05 всего расстояния между M и N. С момента выезда B до его встречи с A прошло столько часов, на сколько километров в час продвигался B. Найти расстояние между городами M и N, если оно не меньше 100 км.

13.116. Выйдя со станции с опозданием в 20 мин, поезд покрыл перегон 160 км со скоростью, превышающей скорость по расписанию на 16 км/ч, и пришел к концу перегона вовремя. Какова по расписанию скорость поезда на этом перегоне?

13.117. Велосипедист проехал 60 км из пункта A в пункт B. На обратном пути он первый час проехал с прежней скоростью, после чего сделал остановку на 20 мин. Начав движение снова, он увеличил скорость на 4 км/ч и поэтому потратил на путь из B в A столько же времени, сколько и на путь из A в B. Определить скорость велосипедиста на пути из A в B.

13.118. Два автобуса одновременно выехали с фабрики и направились в зону отдыха, к озеру. Расстояние между фабрикой и озером 48 км. Первый автобус прибыл к озеру на 10 мин раньше второго, причем средняя скорость второго меньше средней скорости первого на 4 км/ч. Найти скорости автобусов.

13.119. Произведение цифр двузначного числа в 3 раза меньше самого числа. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти исходное число.

13.120. Мотоциклист остановился для заправки горючим на 12 мин. После этого, увеличив скорость движения на 15 км/ч, он наверстал потерянное время на растоянии 60 км. С какой скоростью он двигался после остановки?

13.121. При испытаниях на дальность самолет пролетел от заводского аэродрома до заранее намеченного пункта всего s км, затратив на это t_1 ч. Затем он повернул обратно и за время t_2 ч возвратился на аэродром $(t_1 < t_2)$. В полете туда и обратно истинная скорость самолета (скорость относительно неподвижной массы воздуха) сохранялась одной и той же, а неравенство $t_1 < t_2$ объясняется влиянием ветра, сначала попутным, а затем встречным. Найти истинную скорость v самолета, скорость ветра $v_{\text{в}}$ и путь $s_{\text{ист}} = v_{\text{в}}(t_2 - t_1)$, пройденный самолетом относительно неподвижной массы воздуха.

13.122. Два брата имели билеты на стадион, расположенный в 20 км от их дома. Чтобы добраться до стадиона, они решили воспользоваться своим велосипедом и договорились, что отправятся одновременно — один на велосипеде, а другой пешком; проехав часть пути, первый оставит велосипед, а второй, дойдя до места, где будет оставлен велосипед, дальше поедет на нем и догонит первого у входа на стадион. Где должен оставить велосипед первый брат и сколько времени уйдет на дорогу, если каждый из братьев будет идти равномерно со скоростью 4 км/ч, а ехать в 5 раз быстрее?

13.123. Мотоциклист задержался у шлагбаума на 24 мин. Увеличив после этого скорость на 10 км/ч, он наверстал опоздание на перегоне в 80 км. Определить скорость мотоциклиста до задержки.

13.124. Из порта одновременно вышли два теплохода, причем один из них пошел на юг, а другой на восток. Через 2 ч расстояние между ними составило 174 км. Найти среднюю скорость каждого теплохода, если известно, что один из них в среднем за каждый час проходил на 3 км больше, чем другой.

13.125. Скорости пассажирского и товарного поездов относятся как $a : b$. Пассажирский поезд вышел со станции A на 0,5 ч позже товарного, а прибыл на станцию B на 0,5 ч раньше его. Найти скорости поездов, если расстояние между A и B равно s км.

13.126. По двум окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать в 1 мин на два оборота больше. Сколько оборотов в минуту совершает каждая точка?

13.127. По сигналу дрессировщика два пони одновременно побежали равномерно вдоль внешней окружности арены цирка в противоположных направлениях.

Первый пони бежал несколько быстрее второго и к моменту встречи пробежал на 5 м больше, чем второй. Продолжая бег, первый пони подбежал к дрессировщику, остававшемуся на том месте, от которого начали бежать пони, через 9 с после встречи со вторым пони, а второй — через 16 с после их встречи. Каков диаметр арены?

13.128. Над пунктом A вертолет был в 8 ч 30 мин. Пролетев по прямой s км, вертолет оказался над пунктом B. Продержавшись 5 мин в воздухе над пунктом B, вертолет пошел обратным курсом по той же трассе. К пункту A он вернулся в 10 ч 35 мин. От A к B он летел по ветру, а обратно против ветра. Скорость ветра все время была постоянной. Найти скорость ветра, если собственная скорость вертолета также все время постоянна и при безветрии равна v км/ч. При каком соотношении между заданными величинами задача имеет решение?

13.129. В 9 ч самоходная баржа вышла из A вверх по реке и прибыла в пункт B; 2 ч спустя после прибытия в B эта баржа отправилась в обратный путь и прибыла в A в 19 ч 20 мин того же дня. Предполагая, что средняя скорость течения реки 3 км/ч и собственная скорость баржи все время постоянна, определить, когда баржа прибыла в пункт B. Расстояние между A и B равно 60 км.

13.130. Два приятеля в одной лодке прокатились по реке вдоль берега и вернулись по той же трассе через 5 ч с момента отплытия. Весь рейс составил 10 км. По их подсчетам получилось, что на каждые 2 км против течения в среднем им требовалось столько же времени, сколько на каждые 3 км по течению. Найти скорость течения, время проезда туда и время проезда обратно.

13.131. Бакенщик, инспектируя свой участок реки, в обыкновенной весельной лодке поднялся вверх по реке на 12,5 км, а затем по той же трассе вернулся на прежнее место. В этом рейсе он преодолевал каждые 3 км против течения и каждые 5 км по течению в среднем за одинаковые промежутки времени, а всего в пути находился ровно 8 ч. Найти скорость течения и время рейса бакенщика вверх по реке.

13.132. В лабораторной установке некоторая жидкость поступает в сосуд через три входных крана. Если открыть все краны одновременно, то сосуд наполнится за 6 мин. Если же наполнять сосуд только через второй кран, то на это потребуется 0,75 того времени, за которое может наполниться сосуд только через один первый кран. Через один третий кран этот сосуд наполняется на 10 мин дольше, чем через один второй кран. На какое время надо открывать каждый кран в отдельности для наполнения сосуда?

13.133. Бассейн имеет три трубы разного сечения для отвода воды с помощью равномерно откачивающего насоса. Через первую и вторую трубы вместе при закрытой третьей трубе наполненный бассейн опорожняется за a мин, через первую и третью вместе при закрытой второй — за b мин, а через вторую и третью трубы при закрытой первой — за c мин. За какое время наполненный бассейн опорожняется через каждую трубу в отдельности?

13.134. Согласно программе, два станка на поточной линии должны за a ч обработать по одинаковому числу деталей. Первый станок выполнил задание. Второй станок оказался не вполне исправным, работал с перебоями, вследствие чего за то же время обработал на n деталей меньше, чем первый. Обработка одной детали вторым станком продолжалась в среднем на b мин больше, чем первым. Сколько деталей обработал каждый станок?

13.135. Бригада слесарей может выполнить некоторое задание по обработке деталей на 15 ч быстрее, чем бригада учеников. Если бригада учеников отработает 18 ч, выполняя это задание, а потом бригада слесарей продолжит выполнение задания в течение 6 ч, то и тогда будет выполнено только 0,6 всего задания. Сколько времени требуется бригаде учеников для самостоятельного выполнения этого задания?

13.136. От пристани по течению реки отправился плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом с той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Какова скорость плота, если известно, что скорость моторной лодки больше скорости плота на 12 км/ч?

13.137. Три машины разных систем выполняют некоторую счетную работу. Если всю работу поручить только одной второй или одной первой машине, то одна вторая машина затратит на выполнение всей работы на 2 мин больше, чем одна первая. Одна третья машина может выполнить всю работу за срок, вдвое больший, чем одна первая. Так как части работы однотипны, то всю работу можно поделить между тремя машинами. Тогда, работая вместе и закончив работу одновременно, они выполнят ее за 2 мин 40 с. За какое время может выполнить эту работу каждая машина, действуя отдельно?

13.138. Двое рабочих, из которых второй начал работать на 1,5 дня позже первого, работая независимо один от другого, оклеили обоями несколько комнат за 7 дней, считая с момента выхода на работу первого рабочего. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то первому для ее выполнения понадобилось бы на 3 дня больше, чем второму. За сколько дней каждый из них отдельно выполнил бы эту работу?

13.139. Найти двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно $\frac{8}{3}$, а разность между искомым числом и числом, написанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 18.

13.140. На одном из двух станков обрабатывают партию деталей на 3 дня дольше, чем на другом. Сколько дней продолжалась бы обработка этой партии деталей каждым станком в отдельности, если известно, что при совместной работе на этих станках втрое большая партия деталей была обработана за 20 дней?

13.141. Было задано целое число. Требовалось увеличить его на 200 000 и полученное число утроить. Вместо этого приписали к цифровой записи заданного числа справа цифру 2 и получили правильный результат. Какое число было задано?

13.142. Чан наполняется двумя кранами A и B. Наполнение чана только через кран A длится на 22 мин дольше, чем через кран B. Если же открыть оба крана, то чан наполнится за 1 ч. За какой промежуток времени каждый кран отдельно может наполнить чан?

13.143. Некоторое задание A выполняет в срок на a дней больший, чем B, и на b дней больший, чем C. Работая вместе, A и B выполняют задание за столько же дней, что и C. Определить время, за которое каждый выполняет задание отдельно. При каком соотношении между заданными величинами задача имеет решение?

13.144. Сумма всех четных двузначных чисел разделилась на одно из них без остатка. Полученное частное отличается от делителя только порядком цифр, а сумма его цифр равна 9. Какое двузначное число являлось делителем?

13.145. Сначала катер шел 10 км по течению реки, а затем вдвое большее расстояние — по озеру, в которое река впадает. Весь рейс продолжался 1 ч. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 7 км/ч.

13.146. Найти три числа, из которых первое больше второго во столько раз, во сколько второе больше третьего. Если из первого числа вычесть сумму двух других, то получится 2, а если к первому прибавить полуразность второго и третьего, то получится 9.

13.147. Имеется лист жести в форме прямоугольника, у которого отношение длины к ширине равно 2 : 1. Из этого листа изготовлена открытая сверху коробка таким образом, что по углам листа вырезано по квадрату со стороной 3 см и получившиеся края загнуты. Определить размеры листа жести, если объем коробки оказался равным 168 см^3.

13.148. Фотокарточка размерами 12×18 см вставлена в рамку постоянной ширины. Определить ширину рамки, если ее площадь равна площади самой карточки.

13.149. Найти два числа, сумма которых равна 44, причем меньшее число отрицательно. Процентное отношение разности между большим и меньшим числами к меньшему числу совпадает с меньшим числом.

13.150. В рукописи задачника по арифметике был помещен пример, в котором данное число надо умножить на 3 и от полученного результата отнять 4. В типографии допустили опечатку: вместо знака умножения поставили знак деления, а вместо минуса — плюс. Тем не менее конечный результат от этого не изменился. Какой пример предполагали поместить в задачнике?

13.151. Кошка, гнавшаяся за мышкой вдоль длинного коридора, догнала ее через a с после начала погони. Первоначальное расстояние между ними l м. Если при таком же начальном расстоянии мышка с перепугу побежала бы не от кошки, а навстречу ей, то была бы схвачена через b с. Полагая, что в том и в другом случае кошка и мышка прилагали бы максимальные усилия, найти средние скорости каждой из них.

13.152. Участок прямоугольной формы обнесен изгородью. Если от него отрезать по прямой некоторую часть так, что оставшаяся часть окажется квадратом, то при этом его площадь уменьшится на 400 м^2, а изгородь уменьшится на 20 м. Определить первоначальные размеры участка.

13.153. Для спортплощадки отвели участок в форме прямоугольника с диагональю, равной 185 м. При выполнении строительных работ длину каждой стороны уменьшили на 4 м. При этом прямоугольная форма была сохранена, но площадь оказалась уменьшенной на 1012 м^2. Каковы действительные размеры спортплощадки?

13.154. За 1 кг одного продукта и 10 кг другого заплачено 20 р. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15%, а второй подешевеет на 25%, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 18 р. 20 к. Сколько стоит килограмм каждого продукта?

13.155. В первую неделю отпускного путешествия друзья израсходовали на 60 р. меньше, чем $\frac{2}{5}$ количества взятых с собой денег; во вторую неделю $\frac{1}{3}$ остатка и еще на билеты в театр 12 р.; в третью неделю $\frac{3}{5}$ нового остатка и еще на морские прогулки 31 р. 20 к., после чего у них осталось 420 р. Сколько денег было израсходовано за три недели путешествия?

13.156. Моторная лодка, обладающая скоростью движения 20 км/ч, прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратно, не останавливаясь, за 6 ч 15 мин. Расстояние между пунктами равно 60 км. Определить скорость течения реки.

13.157. Найти двузначное число такое, что если его разделить на произведение цифр, из которых оно состоит, то в частном получится $\frac{16}{3}$, а если вычесть из него 9, то разность будет также двузначным числом, которое отличается от искомого числа только порядком следования цифр.

13.158. В магазин привезли яблоки 1-го сорта на сумму 228 р. и яблоки 2-го сорта на сумму 180 р. При разгрузке привезенные яблоки случайно перемешались. Подсчет показал, что если теперь продавать все яблоки по одной цене — на 90 к. ниже цены килограмма яблок 1-го сорта, то будет выручена ранее намеченная сумма. Сколько килограммов яблок привезено, если известно, что яблок 2-го сорта было на 5 кг больше, чем 1-го сорта?

13.159. От трех кафедр института поступили заявки на приобретение дополнительного оборудования лабораторий. Стоимость оборудования в заявке первой кафедры составляет 45% от заявки второй кафедры, а стоимость оборудования в заявке второй кафедры — 80% от заявки третьей. Стоимость оборудования в заявке третьей кафедры превышает заявку первой на 640 тыс. р. Какова общая стоимость оборудования в заявках всех трех кафедр?

13.160. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 5. Найти исходное число.

13.161. Перевозка тонны груза от пункта M до пункта N по железной дороге обходится на b р. дороже, чем водным путем. Сколько тонн груза можно перевезти от M до N по железной дороге на сумму a р., если водным путем на эту же сумму можно перевезти на k т больше, чем по железной дороге?

13.162. Некоторый товар был куплен осенью и за него было уплачено 825 р. Килограмм этого товара осенью на 1 р. дешевле, чем весной, и поэтому на ту же сумму весной было куплено на 220 кг меньше. Сколько стоит 1 кг товара весной и сколько его было куплено осенью?

13.163. При уборке урожая с каждого из двух участков собрано по 210 ц пшеницы. Площадь первого участка на 0,5 га меньше площади второго участка. Сколько центнеров пшеницы собрано с 1 га на каждом участке, если урожай пшеницы на первом участке был на 1 ц с гектара больше, чем на втором?

13.164. Стоимость 60 экземпляров первого тома и 75 экземпляров второго тома составляет 2700 р. В действительности за все эти книги уплатили только 2370 р., так как была произведена скидка: на первый том в размере 15%, а на второй — в размере 10%. Найти первоначальную цену этих книг.

13.165. Имеется 140 банок двух вместимостей. Объем банки большей вместимости на 2,5 л больше объема банки меньшей вместимости. Общий объем больших банок равен общему объему малых банок и равен 60 л. Определить количество больших и малых банок.

13.166. Ученику надо было найти произведение числа 136 на некоторое двузначное число, в котором цифра единиц вдвое больше цифры десятков. По рассеянности он поменял местами цифры двузначного числа, отчего и получил произведение на 1224 больше истинного. Чему равно истинное произведение?

13.167. Моторная лодка и парусник, находясь на озере в 30 км друг от друга, движутся навстречу и встречаются через 1 ч. Если бы моторная лодка находилась в 20 км от парусника и догоняла его, то на это потребовалось бы 3 ч 20 мин. Определить скорости лодки и парусника, полагая, что они постоянны и неизменны в обоих случаях.

13.168. Однозначное число увеличили на 10 единиц. Если полученное число увеличить на столько же процентов, как в первый раз, то получится 72. Найти первоначальное число.

13.169. Кристалл, находясь в стадии формирования, равномерно наращивает свою массу. Наблюдая формирование двух кристаллов, заметили, что первый из них за 3 мес. дал такой же прирост массы, как второй за 7 мес. Однако по истечении года оказалось, что первый кристалл увеличил свою первоначальную массу на 4%, второй — на 5%. Найти отношение первоначальных масс этих кристаллов.

13.170. Одна тракторная бригада вспахала 240 га, а другая — на 35% больше, чем первая. Ежедневно первая бригада обрабатывала на 3 га меньше, чем вторая, но закончила работу на 2 дня раньше второй. Сколько гектаров обрабатывала каждая бригада за рабочий день, если известно, что намеченная ежедневная норма 20 га перевыполнялась обеими бригадами?

13.171. В семье отец, мать и три дочери; всем вместе 90 лет. Разница в возрасте у девочек — 2 года. Возраст матери на 10 лет больше суммы возрастов дочерей. Разность лет отца и матери равна возрасту средней дочери. Сколько лет каждому члену семьи?

13.172. Два сосуда с раствором соли поставлены для выпаривания. Ежедневно выпариваемые порции соли постоянны для каждого сосуда. Из первого сосуда получено 48 кг соли, а из второго, стоявшего на 6 дней меньше, — 27 кг. Если бы первый сосуд стоял столько же дней, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то из обоих растворов получилось бы одинаковое количество соли. Сколько дней стоял каждый раствор?

13.173. Если неизвестное двузначное число разделить на число, изображенное теми же цифрами, но в обратном порядке, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же искомое число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 8 и в остатке 7. Найти это число.

13.174. В четырех ящиках лежит чай. Когда из каждого ящика взяли по 9 кг, во всех вместе осталось столько же чая, сколько было в каждом. Сколько чая было в каждом ящике?

13.175. Катер отошел от причала одновременно с плотом и прошел вниз по реке $\frac{40}{3}$ км. Не делая остановки, он развернулся и пошел вверх по реке. Пройдя $\frac{28}{3}$ км, он встретился с плотом. Если скорость течения реки 4 км/ч, то какова собственная скорость катера?

13.176. Общая вместимость трех цистерн составляет 1620 л. Две из них наполнены керосином, а третья пустая. Чтобы наполнить ее, нужно использовать либо все содержимое первой цистерны плюс $\frac{1}{5}$ содержимого второй, либо все содержимое второй плюс $\frac{1}{3}$ содержимого первой. Найти вместимость каждой цистерны.

13.177. Планом было предусмотрено, что предприятие на протяжении нескольких месяцев изготовит 6000 насосов. Увеличив производительность труда, предприятие стало изготовлять в месяц на 70 насосов больше, чем было предусмотрено, и на один месяц раньше установленного срока перевыполнило задание на 30 насосов. На протяжении скольких месяцев было предусмотрено выпустить 6000 насосов?

13.178. Два парка общей площадью 110 га разбиты на равное количество участков. Участки каждого парка по площади равны между собой, но отличаются от участков другого. Если бы первый парк был разбит на участки такой же площади, как второй, то он имел бы 75 участков, а если бы второй был разбит на такие же участки, как первый, то он содержал бы 108 участков. Определить площадь каждого парка.

13.179. Отец хочет разделить 36 яблок между пятью своими детьми. Половину всех яблок он отдает сыновьям, которые делят их поровну, а другую половину отдает дочерям, которые также делят их поровну. Оказалось, что каждая дочь получила на 3 яблока больше, чем каждый сын. Сколько у отца было сыновей и сколько дочерей?

13.180. Одна из двух дробей вдвое больше другой. После возведения каждой из дробей в квадрат и сложения этих результатов получается некоторая сумма. Та же сумма получается после возведения каждой из дробей в куб и сложения этих результатов. Найти данные дроби.

13.181. Бригада рабочих должна была изготовить за смену 7200 деталей, причем каждый из них должен был сделать одинаковое количество деталей. Однако трое рабочих заболели, и поэтому для выполнения всей нормы каждому из оставшихся рабочих пришлось сделать на 400 деталей больше. Сколько рабочих было в бригаде?

13.182. В два сосуда одинаковой массы налита вода, причем масса сосуда A с водой составляет 0,8 массы сосуда B с водой. Если воду из сосуда B перелить в сосуд A, то масса его вместе с водой станет в 8 раз больше массы сосуда B. Найти массу сосудов и количество воды в них, зная, что в сосуде B содержится воды на 50 г больше.

13.183. В зале имелось 500 стульев, расположенных рядами, причем каждый ряд содержал одинаковое количество стульев. После реконструкции зала в каждом ряду оказалось на 5 стульев больше, чем было, но зато число рядов уменьшилось на 5. В результате общее число мест в зале уменьшилось на 0,1 прежнего количества стульев. Сколько рядов было в зале и сколько стульев было в каждом ряду?

13.184. Если бы ученик правильно перемножил два написанных на доске числа, то получил бы в произведении 4500. Но, переписывая с доски сомножители, в одном из них он вместо последней цифры 5 написал цифру 3 и после умножения в результате получил 4380. Какие числа должен был перемножить ученик?

13.185. При испытании двух двигателей было установлено, что первый израсходовал 300 г, а второй 192 г бензина, причем второй работал на 2 ч меньше, чем первый. Первый двигатель затрачивал в час на 6 г бензина больше, чем второй. Какое количество бензина в час расходовал каждый из двигателей?

13.186. Бригада каменщиков взялась уложить 432 м^3 кладки и намеченную работу выполнила, хотя в действительности на работу вышло на 4 человека меньше. Сколько всего каменщиков в бригаде, если известно, что каждому каменщику пришлось укладывать на 9 м^3 больше, чем первоначально предполагалось?

13.187. Бригада рабочих должна была изготовить 8000 одинаковых деталей в определенный срок. Фактически эта работа была окончена на 8 дней раньше срока, так как бригада делала ежедневно на 50 деталей больше, чем было намечено по плану. В какой срок должна была быть окончена работа и каков ежедневный процент перевыполнения плана?

13.188. На обработку одной детали рабочий A затрачивает на k мин меньше, чем рабочий B. Сколько деталей обрабатывает каждый из них за t ч работы, если A обрабатывает за это время на n деталей больше, чем B?

13.189. Сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ равна 1,75. Найти значение a.

13.190. Кусок платины, плотность которой равна $2{,}15 \cdot 10^4$ кг/м^3, связан с куском пробкового дерева (плотность $2{,}4 \cdot 10^2$ кг/м^3). Плотность системы равна $4{,}8 \cdot 10^2$ кг/м^3. Какова масса куска дерева, если масса куска платины составляет 86,94 г?

13.191. К материальной точке приложены две силы, угол между которыми равен 30°. Модуль одной из приложенных сил в $7\sqrt{3}$ раза больше модуля другой, а модуль равнодействующей силы на 24 Н больше, чем модуль меньшей силы. Определить модули меньшей и равнодействующей сил.

13.192. Имеются три сосуда, содержащих неравные количества жидкости. Для выравнивания этих количеств сначала $\frac{1}{3}$ жидкости перелили из первого сосуда во второй, затем 0,25 жидкости, оказавшейся во втором сосуде, перелили в третий и, наконец, 0,1 жидкости, оказавшейся в третьем сосуде, перелили в первый. После этого в каждом сосуде оказалось 9 л жидкости. Сколько жидкости было первоначально в каждом сосуде?

13.193. На учениях разведывательный катер подошел к головному кораблю эскадры и получил приказание произвести разведку впереди эскадры по направлению ее движения на расстоянии 70 км. Определить, через какое время катер вернется к головному кораблю эскадры, продолжающей идти вперед, если известно, что скорость катера 28 км/ч, а эскадра должна двигаться со скоростью 14 км/ч.

13.194. Переднее колесо движущейся модели на протяжении 120 м делает на 6 оборотов больше, чем заднее. Если окружность переднего колеса увеличить на $\frac{1}{4}$ ее длины, а окружность заднего — на $\frac{1}{5}$ ее длины, то на том же расстоянии переднее колесо сделает на 4 оборота больше, чем заднее. Найти длины окружностей переднего и заднего колес.

13.195. Бригада монтеров могла окончить электропроводку в 4 ч дня, прокладывая в час по 8 м провода. После выполнения половины всего задания один рабочий выбыл из бригады; в связи с этим бригада стала прокладывать в час по 6 м и закончила запланированную на день работу в 6 ч вечера. Сколько метров провода было проложено и за сколько часов?

13.196. Через 2 ч после выезда с фабрики шофер посмотрел на спидометр и заметил, что проехал только 112 км. Он сообразил, что если и дальше поедет с той же скоростью, то на 30 мин опоздает с доставкой груза на станцию. Поэтому шофер увеличил скорость и прибыл на станцию даже на 30 мин раньше срока. Определить начальную и последующую скорости движения автомобиля, если расстояние от фабрики до станции по спидометру составляет 280 км.

13.197. В кинозале имеются две двери, широкая и узкая. Через обе двери после сеанса зрители выходят из зала в течение 3 мин 45 с. Если зрителей выпускать через одну широкую дверь, то выход из зала займет на 4 мин меньше, чем в том случае, если зрителей выпускать только через одну узкую дверь. Сколько времени требуется для выхода зрителей из кинозала через каждую дверь в отдельности?

13.198. Некоторое вещество впитывает влагу, увеличивая при этом свою массу. Чтобы впитать 1400 кг влаги, требуется взять нераздробленного вещества на 300 кг больше, чем раздробленного. Сколько процентов от массы вещества составляет масса впитанной влаги в случае раздробленного вещества и в случае нераздробленного, если во втором случае это число процентов на 105 меньше, чем в первом?

13.199. На пути от села до поля колесо грузовика делает на 100 оборотов меньше, чем колесо велосипеда, и на 150 оборотов больше, чем гусеница трактора. Найти расстояние между селом и полем, если известно, что длина окружности колеса грузовика составляет $\frac{4}{3}$ длины окружности колеса велосипеда и на 2 м короче гусеницы трактора.

13.200. Две шкурки общей стоимостью в 22 500 р. были проданы на аукционе с прибылью в 40%. Какова стоимость каждой шкурки, если от первой было получено прибыли 25%, а от второй — 50%?

13.201. Спортивная площадка имеет форму прямоугольника, длина которого на b м больше ширины. Площадка окаймлена дорожкой одинаковой ширины в a м. Каковы размеры спортивной площадки, если ее площадь равна площади окаймляющей ее дорожки?

13.202. Две машинистки должны перепечатать рукопись, состоящую из трех глав, первая из которых вдвое короче второй и втрое длиннее третьей. Работая вместе, машинистки перепечатали первую главу за 3 ч 36 мин. Вторая глава была перепечатана за 8 ч, из которых 2 ч работала только первая машинистка, а остальное время они работали вместе. Какое время потребуется второй машинистке для того, чтобы одной перепечатать третью главу?

13.203. Расстояние между двумя селами равно 10 км. Два человека выходят одновременно из одного села в другое, причем первый идет со скоростью на 3 км/ч большей, чем второй, и приходит к месту назначения на 3 ч раньше. С какой скоростью идет каждый из них?

13.204. Двое рабочих выполняют совместно некоторое задание за 8 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить его на 12 ч скорее, чем второй, если тот будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая порознь, может выполнить задание?

13.205. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 7. Если же затем взять сумму квадратов цифр этого числа и вычесть из нее произведение тех же цифр, то получится первоначальное число. Найти это число.

13.206. Трехзначное число оканчивается цифрой 2. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Найти исходное число.

13.207. Экспресс проходит путь от Москвы до Санкт-Петербурга на 3 ч 30 мин быстрее пассажирского поезда, так как за 1 ч он проходит на 35 км больше. Сколько километров в час проходит каждый из них, если расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом принять с округлением равным 650 км?

13.208. Некоторое двузначное число в 4 раза больше суммы и в 3 раза больше произведения своих цифр. Найти это число.

13.209. Два тела одновременно начали прямолинейное движение навстречу друг друга. Одно из них проходит в каждую минуту 7 м, другое в первую минуту прошло 24 м, а в каждую последующую проходит на 4 м меньше, чем в предыдущую. Через сколько минут оба тела встретятся, если первоначальное расстояние между ними было равно 100 м?

13.210. На сколько процентов следует увеличить длину радиуса круга, чтобы площадь круга стала больше на 96%?

Группа Б

13.211. Три последовательные цифры некоторого числа составляют геометрическую прогрессию. Если в этом числе поменять местами цифры сотен и единиц, то новое трехзначное число будет на 594 меньше искомого. Если же в искомом числе зачеркнуть цифру сотен и в полученном двузначном числе переставить его цифры, то новое двузначное число будет на 18 меньше числа, выраженного двумя последними цифрами искомого числа. Найти это число.

13.212. На покупку велосипедов спортивный клуб выделил n р. Так как вследствие снижения цен стоимость каждого велосипеда уменьшилась на a р., то было куплено на b велосипедов больше, чем предполагалось. Сколько купили велосипедов?

13.213. Обычно к выполнению некоторого задания привлекаются одновременно два механизма. Производительности этих механизмов не одинаковы и при совместном действии задание выполняется ими за 30 ч. Однажды совместная работа двух механизмов продолжалась только 6 ч, после чего первый механизм был остановлен и всю остальную часть задания выполнил второй механизм за 40 ч. За какое время такое же задание может выполнить каждый механизм, работая отдельно с присущей ему производительностью?

13.214. Согнутые из проволоки окружность и прямоугольник прилажены так, что окружность проходит через две вершины A и B и касается стороны CD (рис. 13.6). Найти отношение сторон прямоугольника, если известно, что его периметр в 4 раза больше радиуса окружности.

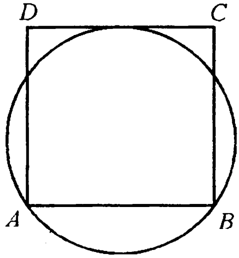


Рис. 13.6

13.215. От пункта A вдоль шоссе удаляется гонщик, поддерживающий все время постоянную скорость a км/ч. Спустя 30 мин из того же пункта стартовал второй гонщик с постоянной скоростью $1{,}25a$ км/ч. Через сколько минут после старта первого гонщика был отправлен из того же пункта третий гонщик, если известно, что он развил скорость $1{,}5a$ км/ч и одновременно со вторым гонщиком догнал первого?

13.216. Два мотоциклиста отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 600 км. В то время как первый проходит 250 км, второй проходит 200 км. Найти скорости движения мотоциклистов, считая их движения равномерными, если первый мотоциклист приходит в B на 3 ч раньше, чем второй в A.

13.217. Дорога между поселками A и B сначала имеет подъем, а потом спуск. Велосипедист, двигаясь на спуске со скоростью, на a км/ч большей, чем на подъеме, затрачивает на путь от A до B ровно t ч, а на обратный путь от B до A — половину этого времени. Найти скорости велосипедиста на подъеме и на спуске, если расстояние между поселками b км.

13.218. Результат умножения двух положительных чисел, полученный вычислителем, показался ему сомнительным. Для проверки он решил разделить результат на больший сомножитель. В частном получилось 17 и в остатке 8. Тогда вычислитель понял свою ошибку: оказалось, что цифра десятков, записанная им в произведении, больше истинной цифры десятков на 6. Какие числа перемножал вычислитель, если известно, что их разность равна 36?

13.219. Население города ежегодно увеличивается на 0,02 наличного числа жителей. Через сколько лет население утроится?

13.220. Юноша пошел к железнодорожной станции, до которой от его дома было 10,5 км. Через полчаса из того же дома вслед за юношей по той же дороге вышел его брат, который, двигаясь со скоростью 4 км/ч, догнал юношу, передал ему забытую им вещь, тут же повернул обратно и пошел с прежней скоростью. С какой скоростью шел юноша, если известно, что шел он всю дорогу равномерно, а его брат вернулся домой в тот момент, когда юноша подошел к станции?

13.221. Из пунктов A и C в пункт B выехали одновременно два всадника и, несмотря на то, что C отстоял от B на 20 км дальше, чем A от B, прибыли в B одновременно. Найти расстояние от C до B, если всадник, выехавший из C, проезжал каждый километр на 1 мин 15 с быстрее, чем всадник, выехавший из A, который приехал в B через 5 ч.

13.222. Расстояние между станциями A и B равно 103 км. Из A в B вышел поезд и, пройдя некоторое расстояние, был задержан, а потому оставшийся до B

путь проходил со скоростью, на 4 км/ч большей, чем прежняя. Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что оставшийся до B путь был на 23 км длиннее пути, пройденного до задержки, и на прохождение пути после задержки было затрачено на 15 мин больше, чем на прохождение пути до задержки.

13.223. Пункт C расположен в 12 км от пункта B вниз по течению. Рыбак отправился на лодке в пункт C из пункта A, расположенного выше пункта B. Через 4 ч он прибыл в C, а на обратный путь затратил 6 ч. В другой раз рыбак воспользовался моторной лодкой, увеличив тем самым собственную скорость передвижения относительно воды втрое, и дошел от A до B за 45 мин. Требуется определить скорость течения, считая ее постоянной.

13.224. Юноша, возвращаясь на велосипеде из отпуска, проехал 246 км и потратил на этот путь на один день больше половины числа дней, оставшихся после этого до конца отпуска. Теперь у юноши две возможности проехать остальные 276 км так, чтобы прибыть домой точно к сроку: проезжать ежедневно на h км больше, чем первоначально, или сохранить прежнюю норму ежедневного пути, привысив ее лишь один раз — в последний день пути — на $2h$ км. За сколько дней до конца отпуска отправился юноша домой, если известно, что искомое число дней — целое?

13.225. Некоторый заказ выполняют в мастерской № 1 на 3,6 ч дольше, чем в мастерской № 2, и на 10 ч дольше, чем в мастерской № 3. Если при тех же условиях работы мастерские № 1 и № 2 объединятся для выполнения заказа, то срок его выполнения окажется таким же, как в одной мастерской № 3. На сколько часов больше или меньше одного семичасового рабочего дня длится выполнение указанного заказа в мастерской № 3?

13.226. Рукопись в 80 страниц отдана двум машинисткам. Если первая машинистка начнет перепечатывать рукопись через 3 ч после второй, то каждая из них перепечатает по половине рукописи. Если же обе машинистки начнут работать одновременно, то через 5 ч останутся не перепечатанными 15 страниц. За какое время может перепечатать рукопись каждая машинистка в отдельности?

13.227. Двум рабочим было поручено задание; второй рабочий приступил к нему на 1 ч позже первого. Через 3 ч после того как первый приступил к заданию, им осталось выполнить 0,45 всего задания. По окончании работы выяснилось, что каждый выполнил половину всего задания. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить все задание?

13.228. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как первый проработал 2 ч, а второй 5 ч, оказалось, что они выполнили половину всей работы. Проработав совместно еще 3 ч, они установили, что им осталось выполнить 0,05 всей работы. За какое время каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

13.229. Найти четыре числа, образующих пропорцию, если известно, что сумма крайних членов равна 14, сумма средних членов равна 11, а сумма квадратов таких четырех чисел равна 221.

13.230. Имеются три положительных двузначных числа, обладающих следующим свойством: каждое число равно неполному квадрату суммы своих цифр. Требуется найти два из них, зная, что второе число на 50 единиц больше первого.

13.231. Сплавили два сорта чугуна с разным процентным содержанием хрома. Если одного сорта взять в 5 раз больше другого, то процентное содержание хрома в сплаве вдвое превысит процентное содержание хрома в меньшей из сплавляемых частей. Если же взять одинаковое количество обоих сортов, то сплав будет содержать 8% хрома. Определить процентное содержание хрома в каждом сорте чугуна.

13.232. От станции железной дороги до пляжа 4,5 км. Мальчик и рейсовый автобус одновременно отправились от станции к пляжу. Через 15 мин мальчик встретил автобус, возвращающийся с пляжа, и успел пройти еще $\frac{9}{28}$ км от места первой встречи с автобусом, как его догнал тот же автобус, который дошел до станции и опять отправился к пляжу. Найти скорости мальчика и автобуса, считая, что они постоянны и ни мальчик, ни автобус в пути не останавливались, но у пляжа и на станции автобус делал остановки продолжительностью в 4 мин каждая.

13.233. Турист возвращался из отпуска на велосипеде. На первом участке пути, составляющем 246 км, он проезжал в среднем за каждый день на 15 км меньше, чем за каждый день на последнем участке пути, составляющем 276 км. Он прибыл домой точно в срок — к концу последнего дня отпуска. Известно также, что на преодоление первого участка пути ему потребовалось на один день больше половины числа дней, оставшихся после этого до конца отпуска. За сколько дней до конца отпуска турист отправился домой?

13.234. Имелось два сплава с разным процентным содержанием меди в каждом. Число, выражающее в процентах содержание меди в первом сплаве, на 40 меньше числа, выражающего в процентах содержание меди во втором сплаве. После того как оба этих сплава были сплавлены вместе содержание меди в новом сплаве составило 36%. Определить процентное содержание меди в каждом сплаве, если в первом из них меди было 6 кг, а во втором — 12 кг.

13.235. В заезде на одну и ту же дистанцию участвовали два автомобиля и мотоцикл. Второму автомобилю на всю дистанцию потребовалось на 1 мин больше, чем первому. Первый автомобиль двигался в 4 раза быстрее мотоцикла. Какую часть дистанции в минуту проходил второй автомобиль, если он проходил в минуту на $\frac{1}{6}$ дистанции больше, чем мотоцикл, а мотоцикл прошел дистанцию меньше, чем за 10 мин?

13.236. Мастер дает сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. К концу первых двух часов он выиграл 10% от числа всех играемых партий, а 8 противников свели вничью свои партии с мастером. За следующие два часа мастер выиграл 10% партий у оставшихся противников, 2 партии проиграл, а остальные 7 партий закончил вничью. На скольких досках шла игра?

13.237. Задумано целое положительное число. К его цифровой записи приписали справа какую-то цифру. Из получившегося нового числа вычли квадрат задуманного числа. Разность оказалась в 8 раз больше задуманного числа. Какое число задумано и какая цифра была приписана?

13.238. Стрелку в тире были предложены следующие условия: каждое попадание в цель вознаграждается пятью жетонами, но за каждый промах отбираются три жетона. Стрелок был не очень метким. После последнего (n-го) выстрела у него не осталось ни одного жетона. Из скольких выстрелов состояла серия и сколько было удачных выстрелов, если $10 < n < 20$?

13.239. К цифровой записи некоторого задуманного двузначного числа приписали справа это же число и из полученного таким образом числа вычли квадрат задуманного числа. Разность разделили на 4% от квадрата задуманного числа; в частном получили половину задуманного числа, а в остатке — задуманное число. Какое число задумано?

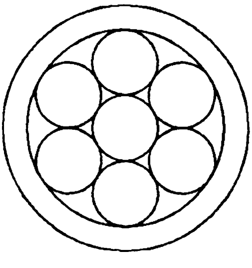


Рис. 13.7

13.240. В плоское кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями, вложено семь равных соприкасающихся дисков (рис. 13.7). Площадь кольца равна сумме площадей всех семи дисков. Доказать, что ширина кольца равна радиусу одного диска.

13.241. К цифровой записи некоторого задуманного положительного числа приписали справа еще какое-то положительное однозначное число и из полученного таким образом нового числа вычли квадрат задуманного числа. Эта разность оказалась больше задуманного числа во столько раз, сколько составляет дополнение приписанного числа до 11. Доказать, что так будет получаться тогда и только тогда, когда приписанное число равно задуманному.

13.242. Два одинаковых бассейна одновременно начали наполняться водой. В первый бассейн поступает в час на 30 м^3 больше воды, чем во второй. В некоторый момент в двух бассейнах вместе оказалось столько воды, сколько составляет объем каждого из них. После этого через 2 ч 40 мин наполнился первый бассейн, а еще через 3 ч 20 мин — второй. Сколько воды поступало в час в каждый бассейн?

13.243. Одна из трех бочек наполнена водой, а остальные пустые. Если вторую бочку наполнить водой из первой бочки, то в первой останется $\frac{1}{4}$ бывшей в ней воды. Если затем наполнить третью бочку из второй, то во второй останется $\frac{2}{9}$ количества содержавшейся в ней воды. Если, наконец, из третьей бочки вылить воду в пустую первую, то для ее наполнения потребуется еще 50 ведер. Определить вместимость каждой бочки.

13.244. Два шарика помещены в цилиндрическую банку, диаметр которой 22 см (рис. 13.8). Если влить в банку 5 л воды, то покроются ли полностью водой оба шарика, диаметры которых 10 и 14 см?

13.245. Цистерну в течение 5 ч наполнили водой. При этом в каждый следующий час поступление воды в цистерну уменьшалось в одно и то же число раз по сравнению с предыдущим. Оказалось, что в первые четыре часа было налито воды вдвое больше, чем в последние четыре часа. Каков объем цистерны, если известно еще, что за первые два часа в нее было налито 48 м^3 воды?

13.246. Квадрат и равносторонний треугольник заполнены одинаковым количеством равных кругов, касающихся друг друга и сторон этих фигур. Сколько кругов для этого потребуется, если к стороне треугольника примыкает на 14 кругов больше, чем к стороне квадрата (рис. 13.9)?

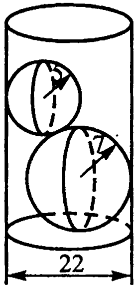


Рис. 13.8

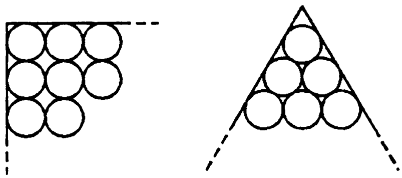


Рис. 13.9

13.247. Из молока, жирность которого составляет 5%, изготовляют творог жирностью 15,5%, при этом остается сыворотка жирностью 0,5%. Сколько творога получается из 1 т молока?

13.248. Имеются два одинаковых куска разных тканей. Стоимость всего первого куска на 126 р. больше стоимости второго. Стоимость четырех метров ткани из первого куска на 135 р. превышает стоимость трех метров ткани из второго куска. Покупательница приобрела 3 м ткани из первого куска и 4 м ткани из второго куска и заплатила за все 382 р. 50 к. Сколько метров ткани было в каждом из этих кусков? Какова стоимость одного метра ткани каждого куска?

13.249. Было намечено разделить премию поровну между наиболее отличившимися сотрудниками предприятия. Однако выяснилось, что сотрудников, достойных премии, на 3 человека больше, чем предполагалось. В таком случае каждому пришлось бы получить на 400 р. меньше. Профсоюз и администрация нашли возможность увеличить общую сумму премии на 9000 р., в результате чего каждый премированный получил 2500 р. Сколько человек получили премию?

13.250. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8 м^3 сверх плана, поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была бригада заготовлять по плану?

13.251. Часовая и минутная стрелки совпадают в полночь, и начинается новый день. В котором часу этого нового дня впервые снова совпадут часовая и минутная стрелки, если допустить, что стрелки часов движутся без скачков?

13.252. Дежурный монтер спустился по движущемуся вниз эскалатору метро. Весь его путь от верхней площадки до нижней продолжался 24 с. Затем он поднялся и в том же темпе снова спустился вниз, но теперь уже по неподвижному эскалатору. Известно, что спуск продолжался 42 с. За сколько секунд спустился бы человек по движущемуся вниз эскалатору, стоя на ступеньке?

13.253. Для гидродинамических исследований изготовлена небольшая модель канала. К этой модели подведено несколько труб одинакового сечения, вводящих воду, и несколько труб другого, но также одинакового сечения, предназначенных для удаления воды. Если сразу открыть четыре вводящие и три выводящие трубы, то через 5 ч в модели прибавится 1000 м^3 воды. Если же одновременно открыть на 2 ч две вводящие и две выводящие трубы, то увеличение объема воды составит 180 м^3. Сколько воды пропускает за час одна вводящая и сколько пропускает одна выводящая труба?

13.254. Первым отправился по намеченному маршруту путешественник *А*. Второй путешественник *Б* отправился следом за *А* спустя 45 мин. Намереваясь догнать *А*, скорость которого v_1 км/ч, *Б* поехал со скоростью v_2 км/ч $(v_2 > v_1)$. Через сколько минут после момента отправления *А* с турбазы должен выехать путешественник *В*, чтобы догнать *А* одновременно с *Б*, если известно, что *В* поедет со скоростью v_3 км/ч $(v_3 > v_2)$?

13.255. Три пловца должны проплыть в бассейне дорожку длиной 50 м, немедленно повернуть обратно и вернуться к месту старта. Сначала стартует первый, через 5 с — второй, еще через 5 с — третий. В некоторый момент времени, еще не достигнув конца дорожки, пловцы оказались на одном расстоянии от старта. Третий пловец, доплыв до конца дорожки и повернув назад, встретил второго в 4 м от конца дорожки, а первого — в 7 м от конца дорожки. Найти скорость третьего пловца.

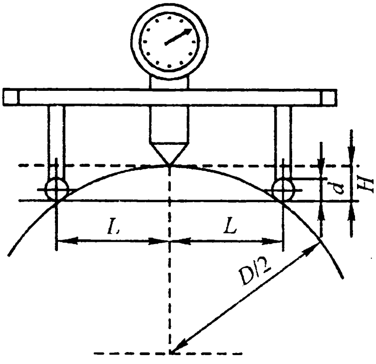


Рис. 13.10

13.256. Прибор, применяемый для определения диаметра крупной детали ($D > 2$ м), указывает высоту H сегмента, отсекаемого плоскостью, касательной к шаровым опорам прибора, при постоянном расстоянии $2L$ между центрами опорных шариков прибора (рис. 13.10). Требуется выразить формулой соответствие между искомым диаметром D детали и измеряемой высотой H ее сегмента при постоянных L и d, где d — диаметр каждого из опорных шариков.

13.257. Из города *А* в город *В*, расстояние между которыми 120 км, на мопеде отправился курьер. Через 1 ч после этого из *А* на мотоцикле выехал второй курьер, который, нагнав первого и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в *А* в тот момент, в который первый достиг *В*. Какова скорость первого курьера, если скорость второго равна 50 км/ч?

13.258. Поезд идет от станции *А* к станции *В*. На некотором участке пути, примыкающем к станции *В*, производились ремонтные работы, и на этом участке поезду разрешена скорость, составляющая только $\frac{1}{n}$ первоначальной скорости, вследствие чего поезд пришел на станцию *В* с опозданием на a ч. На другой день фронт ремонтных работ приблизился к станции *В* на b км, и при тех же условиях поезд опоздал на c ч. Найти скорость поезда.

13.259. Пароход через 2 ч после отправления от пристани *А* останавливается на 1 ч и затем продолжает путь со скоростью, равной 0,8 первоначальной, вследствие чего опаздывает к пристани B на 3,5 ч. Если бы остановка произошла на 180 км дальше, то при тех же остальных условиях пароход опоздал бы в B на 1,5 ч. Найти расстояние AB.

13.260. Две материальные частицы, находясь на расстоянии 295 м одна от другой, одновременно начали двигаться навстречу друг другу. Первая частица продвигается равномерно со скоростью 15 м/с, а вторая в первую секунду продвинулась на 1 м, а в каждую следующую — на 3 м больше, чем в предыдущую. На какой угол переместится секундная стрелка часов за время, прошедшее от начала движения частиц до их встречи?

13.261. В полдень из пункта A в пункт B вышел пешеход и выехал велосипедист, и в полдень же из B в A выехал верховой. Через 2 ч велосипедист и верховой встретились на расстоянии 3 км от середины AB, а еще через 48 мин встретились пешеход и верховой. Определить скорость каждого и расстояние AB, если известно, что пешеход движется вдвое медленнее велосипедиста.

13.262. Известно, что свободно падающее тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Если два тела начали падать с одной высоты спустя 5 с одно после другого, то через какое время они будут друг от друга на расстоянии 220,5 м?

13.263. Путь от A до B пассажирский поезд проходит на 3 ч 12 мин быстрее товарного. За то время, что товарный поезд проходит путь от A до B, пассажирский проходит на 288 км больше. Если скорость каждого увеличить на 10 км/ч, то пассажирский пройдет от A до B на 2 ч 24 мин быстрее товарного. Определить расстояние от A до B.

13.264. Для того чтобы подняться на обычном лифте на последний этаж восьмиэтажного дома (высота 33 м) при двух 6-секундных промежуточных остановках, нужно затратить столько же времени, сколько его потребуется, чтобы подняться на лифте высотного здания при одной 7-секундной промежуточной остановке на 20-й этаж (высота 81 м). Определить подъемную скорость лифта в высотном здании, зная, что она превышает скорость обычного лифта на 1,5 м/с, но не достигает 5 м/с.

13.265. По внутренней области угла в 60° прямолинейно движется материальная точка. Выйдя из вершины этого угла, она через некоторый промежуток времени оказалась на расстоянии a от одной стороны угла и на расстоянии b от другой стороны. Далее она изменила направление движения и по кратчайшему пути просто упала на ту сторону, к которой она была ближе. Найти длину пути, пройденного точкой, если $a < b$.

13.266. Два спортсмена начинают бег одновременно — первый из A в B, второй из B в A. Они бегут с неодинаковыми, но постоянными скоростями и встречаются на расстоянии 300 м от A. Пробежав дорожку AB до конца, каждый из них тотчас поворачивает назад и встречает другого на расстоянии 400 м от B. Найти длину AB.

13.267. С одного старта в одном и том же направлении одновременно начали гонки два мотоциклиста: один со скоростью 80 км/ч, другой со скоростью 60 км/ч. Через полчаса с того же старта и в том же направлении отправился третий гонщик. Найти его скорость, если известно, что он догнал первого гонщика на 1 ч 15 мин позже, чем второго.

13.268. Спортсмен стреляет в мишень, отстоящую от него на d м. Наблюдатель, находящийся на расстоянии a м от стрелка и b м от мишени, слышит одновременно звук выстрела и звук удара пули в мишень. Найти скорость пули, если скорость звука равна v м/с.

13.269. На пристани с теплохода сошли два пассажира и направились в один и тот же поселок. Один из них первую половину пути шел со скоростью 5 км/ч, а вторую половину — со скоростью 4 км/ч. Другой шел первую половину времени со скоростью 5 км/ч, а вторую половину — со скоростью 4 км/ч и пришел в поселок на 1 мин раньше первого. За какое время каждый из них прошел весь путь и каково расстояние между пристанью и поселком?

13.270. В Одессу должны прибыть два теплохода с интервалом в 1 ч. Оба теплохода идут с одинаковой скоростью, но обстоятельства сложились так, что первый теплоход опоздал бы на t_1 мин, а второй на t_2 мин. Получив по радио указание о необходимости прибыть без опоздания, оба капитана одновременно увеличили скорости теплоходов: первый — на v_1 км/ч, второй — на v_2 км/ч, в результате чего оба теплохода прибыли в Одессу точно по расписанию. С какой скоростью шли теплоходы до получения сигнала по радио?

13.271. Трасса соревнований по велосипеду представляет собой контур прямоугольного треугольника с разностью катетов в 2 км. При этом его гипотенуза пролегает по проселочной дороге, а оба катета — по шоссе. Один из участников прошел отрезок по проселочной дороге со скоростью 30 км/ч, а оба отрезка по шоссе за то же время со скоростью 42 км/ч. Определить протяженность трассы.

13.272. От почтамта A отправилась автомашина по направлению к почтовому отделению B. Через 20 мин за ней выехал мотоциклист со скоростью 60 км/ч. Догнав автомашину, мотоциклист передал шоферу пакет и тотчас повернул обратно. Автомашина прибыла в B в тот момент, когда мотоциклист оказался на половине пути от места встречи с автомашиной до A. Определить скорость автомашины, если расстояние между A и B составляет 82,5 км.

13.273. Мяч катится перпендикулярно боковой линии футбольного поля. Предположим, что, двигаясь равномерно замедленно, мяч прокатился в первую секунду 4 м, а в следующую секунду на 0,75 м меньше. Футболист, находящийся первоначально в 10 м от мяча, побежал в направлении движения мяча, чтобы догнать его. Двигаясь равномерно ускоренно, футболист пробежал в первую секунду 3,5 м, а в следующую секунду на 0,5 м больше. За какое время футболист догонит мяч и успеет ли он сделать это до выхода мяча за боковую линию, если к линии поля футболисту надо пробежать 23 м?

13.274. По графику поезд проходит перегон в 120 км с одной и той же скоростью. Вчера поезд прошел половину перегона с этой скоростью и вынужден был остановиться на 5 мин. Чтобы вовремя прибыть в конечный пункт перегона, машинисту на второй половине перегона пришлось увеличить скорость поезда на 10 км/ч. Сегодня повторилась остановка поезда на середине того же перегона, только задержка продолжалась 9 мин. С какой скоростью машинист вел поезд сегодня на второй половине перегона, если в конечный пункт этого перегона поезд снова прибыл по расписанию?

13.275. Расстояние между городом A и станцией F по железной дороге равно 185 км. Пригородный электропоезд идет от A первые 40 км в гору, следующие 105 км по ровному месту и остальные 40 км снова в гору. В гору поезд идет на 10 км/ч медленнее, чем по ровному месту. На этом пути имеются станции B, C, D и E на расстояниях 20, 70, 100 и 161 км от A, и на каждой из них поезд стоит 3 мин.

Найти время прихода поезда в B, C, D и E, если известно, что он вышел из A в 8 ч и пришел в F в 10 ч 22 мин того же дня.

13.276. По шоссе от завода C до станции B железной дороги на 28 км дальше, чем до станции A той же дороги. Расстояние от A до B через C на 2 км больше, чем длина участка AB железной дороги. Доставка тонны груза из C в A стоит 130 р., а по железной дороге из A в B — 260 р. Перевозка тонны груза на 1 км автотранспортом стоит на 32 р. дороже, чем по железной дороге. Определить расстояния AC, BC, AB.

13.277. Учебный самолет летел со скоростью 220 км/ч. Когда ему осталось пролететь на 385 км меньше, чем он пролетел, самолет увеличил скорость до 330 км/ч. Средняя скорость на всем пути оказалась равной 250 км/ч. Какое расстояние пролетел самолет?

13.278. Пассажир поезда знает, что на данном участке пути скорость этого поезда равна 40 км/ч. Как только мимо окна начал проходить встречный поезд, пассажир включил секундомер и заметил, что встречный поезд проходил мимо окна в течение 3 с. Определить скорость встречного поезда, если известно, что его длина 75 м.

13.279. Два контрольных пункта делят лыжную трассу на три участка одинаковой длины. Известно, что путь, состоящий из первого и второго участков вместе, лыжник прошел со средней скоростью a м/мин; путь, состоящий из второго и третьего участков вместе, он прошел со средней скоростью b м/мин. Средняя скорость лыжника на втором участке была такой же, как средняя скорость для первого и третьего участков вместе. Какова средняя скорость лыжника по всей трассе в целом и на каждом участке этой трассы в отдельности? Провести анализ условий существования реального решения задачи.

13.280. Для контроля за движением лыжника тренер разделил трассу на три участка равной длины. Стало известно, что средние скорости лыжника на этих трех отдельных участках были различными. При этом на пробег первого и второго участков вместе лыжнику потребовалось 40,5 мин, а на пробег второго и третьего — 37,5 мин. Выяснилось также, что средняя скорость лыжника на втором участке была такой же, как средняя скорость для первого и второго участков вместе. За какое время лыжник достиг финиша?

13.281. Два велосипедиста стартовали одновременно из одного и того же места в одном направлении. Следом за ними, через 10 мин с того же места начал путь третий велосипедист. Сначала он обогнал первого велосипедиста, после чего находился в пути еще 20 мин, пока догнал второго. Начиная от самого старта и до конца пути каждый велосипедист шел с постоянной скоростью: a км/ч — первый велосипедист, b км/ч — второй. Найти скорость третьего велосипедиста.

13.282. Связист получил задание прибыть в пункт B из пункта A в назначенный срок. Расстояние между A и B равно s км. Когда связист добрался до пункта C, расположенного точно на полпути от A до B, он рассчитал, что опоздает на 2 ч, если будет продолжать движение с той же скоростью. Если же в пункте C он отдохнет 1 ч, а на оставшейся половине пути увеличит скорость на v км/ч, то прибудет в B в назначенный срок. Какой срок был назначен связисту?

13.283. Из двух пунктов, расстояние между которыми 28 км, одновременно вышли навстречу друг другу два пешехода. Если бы первый не задержался на

1 ч на расстоянии 9 км от места своего отправления, то встреча пешеходов произошла бы на полпути. После остановки первый пешеход увеличил скорость на 1 км/ч и встреча произошла на расстоянии 4 км от того места, где задержался первый. Найти первоначальные скорости пешеходов.

13.284. Найти скорость и длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы пройти с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

13.285. На участке шоссе протяженностью 10 км, лишенном перекрестков, автобус останавливается только для входа и выхода пассажиров. Всего он делает 6 промежуточных остановок, затрачивая на каждую из них по 1 мин, а движется всегда с одной и той же скоростью. Если бы автобус двигался без остановок, то тот же путь он прошел бы со скоростью, превышающей среднюю скорость своего движения с остановками на 5 км/ч. Сколько минут автобус находится в движении на этом участке шоссе?

13.286. Шхуна идет от A до B по озеру, а от B до C вверх по реке и затем отправляется обратно. Скорость шхуны относительно неподвижной воды все время поддерживается равной c км/с. От A до C шхуна идет α ч, а обратный путь занимает β ч, причем на путь от C до B шхуне нужно втрое меньше времени, чем на путь от B до A. Найти расстояния AB и BC.

13.287. Два цеха молокозавода совместно должны обработать поровну определенное количество литров молока. Второй цех приступил к выполнению задания на a рабочих дней позже, но обрабатывал ежедневно на m л молока больше, чем первый. Прошло еще $\frac{5a}{9}$ рабочих дней от начала совместной работы этих цехов и осталась невыполненной $\frac{1}{3}$ всего задания. Сколько рабочих дней потребовалось для выполнения задания, если работа была окончена одновременно и каждый цех обработал половину заданного количества литров молока?

13.288. Мастеру и его ученику было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как мастер проработал 7 ч. а ученик 4 ч, оказалось, что они выполнили $\frac{5}{9}$ всей работы. Проработав совместно еще 4 ч, они установили, что остается выполнить $\frac{1}{18}$ всей работы. За какое время выполнил бы работу ученик. работая один?

13.289. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько килограммов олова содержится в полученном новом сплаве?

13.290. Если две трубы открыть одновременно, то бассейн наполнится за 2 ч 24 мин. В действительности же сначала была открыта только первая труба в течение 0,25 времени, которое необходимо второй трубе, чтобы наполнить бассейн, действуя отдельно. Затем действовала вторая труба также в течение 0,25 времени, которое необходимо первой, чтобы одной наполнить бассейн, после чего оказалось, что остается наполнить $\frac{11}{24}$ полной вместимости бассейна. Сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

13.291. Если выполнение заказа по набору нескольких книг возложить на одного из трех наборщиков, то первый справится с работой на 10 ч быстрее, а третий — на 6 ч быстрее, чем второй. Если же одну из заказанных книг будет набирать первый наборщик, а другую книгу одновременно будет набирать второй, то за 9 ч они наберут столько страниц, сколько за 10 ч наберут второй и третий, работая вместе при тех же условиях. Сколько времени потребуется каждому наборщику для набора всех заказанных книг при раздельной работе?

13.292. Два «механических крота» разной мощности при одновременной работе с разных концов тоннеля могли бы прорыть его за 5 дней. В действительности же оба «крота» были применены последовательно с одной стороны тоннеля, причем первый прорыл $\frac{1}{3}$, а второй — остальные его $\frac{2}{3}$ длины. На выполнение всей работы ушло при этом 10 дней. За сколько дней каждый «крот», работая самостоятельно, мог бы прорыть тоннель?

13.293. В бассейн проведены две трубы разного сечения. Одна — равномерно подающая, другая — равномерно отводящая воду, причем через первую бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на $\frac{1}{3}$ бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

13.294. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей; после того как первый проработал a ч, а второй $0{,}6a$ ч, оказалось, что они выполнили $\frac{5}{n}$ всей работы. Проработав совместно еще $0{,}6a$ ч, они установили, что им осталось изготовить еще $\frac{1}{n}$ всей партии деталей. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, выполнит всю работу? Число n натуральное; найти его.

13.295. Водоем снабжен двумя каналами. Через первый вода равномерно выливается, через второй — равномерно вливается. Если оба канала открыть одновременно, то в каждый час в водоем прибывает a л воды. За сколько часов через первый канал пройдет n л воды, если известно, что через второй вольется вдвое больше тогда, когда он будет открыт на a ч меньше того времени, за которое через первый канал пройдет n л?

13.296. Два экскаваторщика должны выполнить некоторое задание. После того как первый проработал 15 ч, начинает работать второй и заканчивает это задание за 10 ч. Если бы при раздельной работе первый выполнил $\frac{1}{6}$, а второй —

$\frac{1}{4}$ всего задания, то для его окончания потребовалось бы еще 7 ч их совместной работы. За сколько часов может выполнить задание каждый экскаваторщик в отдельности?

13.297. Длина круговой дорожки ипподрома равна b км. Из двух наездников A и B, начавших скачки одновременно, наездник A прибыл к финишу на 2 мин раньше. В другой раз наездник B увеличил скорость на c км/ч, в то время как наездник A уменьшил скорость на c км/ч и потому B прибыл к финишу на 2 мин раньше, чем A. Найти скорости наездников в первом заезде.

13.298. Два спортсмена бегут по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на 10 с меньше, чем второй. Если они начнут пробег с общего старта в одном направлении, то еще раз сойдутся через 720 с. Какую часть длины всей дорожки пробегает в секунду каждый спортсмен?

13.299. По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать на два оборота в минуту больше. Пусть в начале движения лучи, направленные из центра окружности к этим точкам, сливались. Вычислить величину угла между лучами через 1 с.

13.300. Меньшая дуга между точками A и B, находящимися на окружности, равна 150 м. Если точки начнут двигаться навстречу друг другу по меньшей дуге, то встретятся через 10 с, а если по большей дуге, то встреча произойдет через 14 с. Определить скорости движения точек и длину окружности, если известно, что точка A может обежать всю окружность в то время, как B пройдет только 90 м.

13.301. В некотором механизме три шестеренки разных диаметров связаны между собой так, что бóльшая из них касается обеих меньших, причем все три шестеренки вместе имеют 60 зубцов. Когда бóльшая шестеренка не доходит на 20 зубцов до полных четырех оборотов, вторая и третья делают соответственно 5 и 10 полных оборотов. Сколько зубцов имеет каждая шестеренка в отдельности?

13.302. По окружности длиной 60 м равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее другой. При этом совпадения точек происходят каждый раз через 1 мин. Определить скорости точек.

13.303. Два колеса соединены бесконечным ремнем; меньшее из них делает на 300 оборотов в минуту больше второго. Большое колесо совершает 10 оборотов в промежуток времени, на 1 с больший, чем время такого же числа оборотов меньшего колеса. Сколько оборотов в минуту совершает каждое колесо?

13.304. Две сцепляющиеся шестерни A и B насажены плотно: первая — на вал O_1, а вторая — на вал O_2. Шестерня A имеет на 10 зубцов больше, чем B. При некоторой скорости вращения вала O_1 вал O_2 совершает 63 оборота в минуту. Если шестерни поменять местами, то при той же скорости вала O_1 вал O_2 совершит 28 оборотов. Определить число зубцов каждой шестерни.

13.305. Найти два двузначных числа A и B по следующим условиям. Если число A написать впереди записи числа B и полученное четырехзначное число разделить на число B, то в частном получится 121. Если же число B написать впереди числа A и полученное четырехзначное число разделить на A, то в частном получится 84 и в остатке 14.

13.306. Через 2 ч после отправления поезд остановился на 30 мин. На оставшемся до станции участке пути производились ремонтные работы и поезду была разрешена скорость, составляющая $\frac{1}{3}$ первоначальной скорости, вследствие чего поезд пришел на станцию с опозданием на 1 ч 10 мин. На другой день остановка поезда произошла на 14 км ближе к конечной станции и при тех же условиях опоздание сократилось до 50 мин. Определить расстояние между станциями и скорость поезда.

13.307. Найти трехзначное число, последовательные цифры которого образуют геометрическую прогрессию, если известно, что после его уменьшения на 495 получается число, записанное такими же цифрами, какими записано искомое число, но расположенными в обратном порядке; если же цифры числа, получившегося после вычитания, уменьшить (слева направо) соответственно на 1, на 1 и на 2, то получится арифметическая прогрессия.

13.308. Какое двузначное число меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5?

13.309. Имеются два сплава золота и серебра. В одном сплаве количества этих металлов находятся в отношении 1 : 2, в другом — 2 : 3. Сколько граммов нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 19 г сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 7 : 12?

13.310. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5 и 40%. Сколько нужно взять металла каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т стали с 30%-ным содержанием никеля?

13.311. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, навстречу друг другу выходят одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них идет с постоянной скоростью, и в некоторый момент времени они встречаются. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на 3 ч раньше фактического момента встречи. Если же оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на 5 ч позже фактического момента встречи. Найти скорости поездов.

13.312. При разгрузке баржи сначала 2 ч действовали четыре подъемных крана одинаковой мощности. Затем добавочно ввели в действие еще два крана меньшей, но одинаковой мощности. После этого для окончания разгрузки потребовалось еще 3 ч. Если бы все эти краны начали работать одновременно, то разгрузка была бы произведена за 4,5 ч. Если бы один кран большей и один кран меньшей мощности работали совместно, то за какое время они разгрузили бы баржу?

13.313. Знаменатель дроби меньше квадрата ее числителя на 1. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше $\frac{1}{4}$; если от числителя и знаменателя первоначальной дроби отнять по 3, то значение дроби будет равно $\frac{1}{12}$. Найти эту дробь.

13.314. Два зубчатых колеса находятся в сцеплении. Колесо A имеет 12 зубьев, а колесо B — 54. Сколько оборотов сделает каждое колесо до того, как оба они вернутся в исходное положение?

13.315. Первоначальная себестоимость единицы продукции была равна 50 р. В течение первого года производства она повысилась на некоторое число процентов, а в течение второго года снизилась (по отношению к повышенной себестоимости) на такое же число процентов, в результате чего она стала равной 48 р. Определить проценты повышения и снижения себестоимости единицы продукции.

13.316. Предприятие увеличивало объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что за два года объем выпускаемой продукции возрос в 2 раза.

13.317. Один турист вышел в 6 ч, а второй — навстречу ему в 7 ч. Они встретились в 8 ч и, не останавливаясь, продолжили путь. Сколько времени затратил каждый из них на весь путь, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 28 мин позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый? Считается, что каждый шел без остановок с постоянной скоростью.

13.318. На один продукт два раза была снижена цена, каждый раз на 15%. На другой продукт, имевший первоначально ту же цену, что и первый, снизили цену один раз на x%. Каким должно быть число x, чтобы после всех указанных снижений оба продукта снова имели одну и ту же цену?

13.319. Сосуд вместимостью 8 л наполнен смесью кислорода и азота, причем на долю кислорода приходится 16% вместимости сосуда. Из этого сосуда выпускают некоторое количество смеси и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять добавляют столько же азота. В новой смеси кислорода оказалось 9%. Какое количество смеси каждый раз выпускалось из сосуда?

13.320. Примеси составляют 20% от общего объема раствора. Каково наименьшее число фильтров, через которые нужно пропустить раствор, чтобы окончательное содержание примесей не превышало 0,01%, если каждый фильтр поглощает 80% примесей? (Известно, что $\lg 2 \approx 0{,}30$.)

13.321. Сумма двух трехзначных чисел, написанных одинаковыми цифрами, но в обратном порядке друг относительно друга, равна 1252. Найти эти числа, если сумма цифр каждого из них равна 14, а сумма квадратов цифр равна 84.

13.322. Пчелы, перерабатывая цветочный нектар в мед, освобождают его от значительной части воды. Исследования показали, что нектар обычно содержит около 70% воды, а полученный из него мед содержит только 17% воды. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчелам для получения 1 кг меда?

13.323. Для изготовления пшеничного хлеба взято столько килограммов муки, сколько процентов составляет припек на эту муку. Для изготовления ржаного хлеба взято на 10 кг муки больше, т. е. столько килограммов, сколько процентов составляет припек на ржаную муку. Сколько килограммов взято той и другой муки, если всего выпечено 112,5 кг хлеба?

13.324. Инженер в первую неделю отпуска израсходовал несколько меньше, чем $\frac{3}{5}$ количества взятых с собой денег; во вторую неделю $\frac{1}{4}$ остатка и еще 30 р.; в третью неделю $\frac{2}{5}$ нового остатка и еще 12 р., после чего осталось $\frac{6}{35}$ от количества взятых денег. Известно также, что количество денег, оставшихся неизрасходованными к концу первой, второй и третьей недель, убывало в арифметической прогрессии. Сколько денег было израсходовано за три недели отпуска?

13.325. Можно изготовить 9000 деталей на нескольких новых станках одинаковой конструкции и одном станке старой конструкции, работающем вдвое медленнее каждого из новых станков. Можно и этот старый станок заменить новым станком той же конструкции, что и остальные. Тогда по второму варианту на каждом станке изготовлялось бы на 200 деталей меньше, чем на одном новом станке по первому варианту. Сколько было работающих станков?

13.326. Из A в B через равные промежутки времени отправляются три автомашины. Они прибывают в B одновременно, затем выезжают в пункт C, находящийся на расстоянии 120 км от B. Первая машина прибывает туда через час после второй. Третья машина, прибыв в C, сразу поворачивает обратно и в 40 км от C встречает первую машину. Определить скорость первой машины, считая, что по всей трассе скорость каждой машины была неизменной.

13.327. По трем сосудам распределено 24 л жидкости. Сначала из первого сосуда перелили в два другие столько, сколько было в каждом из них. Затем из второго перелили в два другие столько, сколько стало в каждом из них после первого переливания. Наконец, из третьего перелили в остальные столько, сколько стало в каждом из них после второго переливания. В результате в каждом сосуде оказалось одинаковое количество жидкости. Сколько жидкости было в каждом сосуде первоначально?

13.328. Бригада рыбаков планировала выловить в определенный срок 1800 ц рыбы. В течение $\frac{1}{3}$ этого срока был шторм, вследствие чего плановое задание ежедневно недовыполнялось на 20 ц. Однако в остальные дни бригаде удавалось ежедневно вылавливать на 20 ц больше дневной нормы, и плановое задание было выполнено за один день до срока. Сколько центнеров рыбы планировалось вылавливать ежедневно?

13.329. Два рабочих были приняты на один и тот же срок выполнения сезонной работы с разной оплатой каждому за один день труда. Первый работал на a дней меньше срока и получил r р., а второй проработал на a дней больше срока и получил s р. Если бы первый работал столько дней, сколько второй, а второй столько дней, сколько первый, то они получили бы поровну. Определить установленный срок работы.

13.330. Два грузовых автомобиля должны были перевезти некоторый груз в течение 6 ч. Второй автомобиль задержался в гараже, и когда он прибыл на место погрузки, первый перевез уже 0,6 всего груза; остальную часть груза перевез второй автомобиль, и весь груз был перевезен таким образом за 12 ч. Сколько времени нужно было каждому автомобилю в отдельности для перевозки груза?

13.331. Из металла определенной марки изготовлено несколько шариков, равных по массе, и несколько поршневых колец, также равных по массе. Если бы число, выражающее массу каждого шарика в граммах, было на 2 меньше числа сделанных колец, а число, выражающее массу каждого кольца в граммах, было на 2 больше числа сделанных шариков, то число, выражающее их общую массу, превышало бы удвоенную разность числа колец и шариков на 800. Если же число, выражающее массу каждого предмета в граммах, было бы равно числу сделанных предметов того же рода, то общая их масса была бы равна 881 г. Сколько было сделано шариков и сколько колец?

13.332. Три мальчика *А*, *Б* и *В* условились, что при совместном путешествии на катере каждый побывает в должности капитана, причем величина времени пребывания каждого в этой должности будет пропорциональна числу очков, которые он получит, участвуя в географической викторине. В итоге *А* получил на 3 очка больше, чем *В*; *Б* и *В* вместе получили 15 очков. Число, выражающее 0,1 всего времени путешествия (в часах), на 25 больше числа очков, полученных мальчиками. Сколько времени были капитанами *А* и *В*, если *Б* исполнял эту обязанность 160 ч?

13.333. Мяч падает с высоты 2 м 43 см и, ударяясь о землю, отскакивает вновь, поднимаясь всякий раз на $\frac{2}{3}$ высоты, с которой он в очередной раз падает. После скольких ударов мяч поднимется на высоту 32 см?

13.334. В ателье поступило по одному куску черной, зеленой и синей ткани. Хотя зеленой ткани было на 9 м меньше, чем черной, и на 6 м больше, чем синей, стоимость кусков была одинаковой. Известно также, что стоимость 4,5 м черной ткани равна стоимости 3 м зеленой и 0,5 м синей вместе. Сколько метров ткани было в каждом куске?

13.335. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 8. Если же число, составленное из тех же цифр, но записанных в обратном порядке, разделить на произведение цифр, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найти это число.

13.336. Уголь, привезенный на склад, предназначен для двух заводов. На первый завод начали доставлять уголь с 1-го июня по m т ежедневно, не исключая воскресений, на второй завод — с 8-го июня по n т ежедневно, не исключая воскресений. К концу дня 16-го июня на складе осталась половина первоначального количества угля. Какого числа был вывезен со склада весь уголь, если оба завода получили угля поровну?

13.337. На предприятие, где изготовляют растворимый кофе, в последних числах мая привезли партию зерен кофе для переработки. Один механизм, перемалывающий зерна, был приведен в действие в понедельник 1-го июня и перемалывал ежедневно по m кг. С 6-го июня к выполнению этой работы подключили второй механизм, который перемалывал ежедневно по n кг. К концу рабочего дня 10-го июня осталась не перемолотой только половина первоначального количества зерен. Когда была закончена переработка всей партии зерен, если известно, что оба механизма перемололи поровну и, кроме воскресений, других перерывов в работе не имели?

13.338. Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

13.339. Нужно было взять несколько литров жидкости при температуре a и другое количество литров той же жидкости при температуре b, чтобы получить температуру смеси c. Однако второй жидкости было взято столько, сколько предполагалось взять первой, и наоборот. Какая температура смеси получилась?

13.340. Известно, что разность переменных величин z и y пропорциональна величине x, а разность величин x и z пропорциональна величине y. Коэффициент пропорциональности один и тот же и равен целому положительному числу k. Некоторое значение величины z в $\frac{5}{3}$ раза больше разности соответствующих значений x и y. Найти числовое значение коэффициента k.

13.341. Трое рабочих участвовали в конкурсе. Первый и третий из них произвели продукции в 2 раза больше, чем второй, а второй и третий — в 3 раза больше, чем первый. Какое место занял каждый рабочий в конкурсе? В каком отношении находятся количества выработанной ими продукции?

13.342. Расстояние между станциями A и B равно 360 км. В одно и то же время из A и из B навстречу друг другу выходят два поезда. Поезд, вышедший из A, прибывает на станцию B не ранее чем через 5 ч. Если бы его скорость была в 1,5 раза больше, чем на самом деле, то он встретил бы второй поезд раньше, чем через 2 ч после своего выхода из A. Скорость какого поезда больше?

13.343. Есть предположение, что выражение

$$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$$

является квадратом трехчлена вида $x^2+px+qa^2$. Как можно проверить это утверждение и найти коэффициенты p и q?

13.344. Модули двух сил, действующих на материальную точку под прямым углом, и модуль их равнодействующей составляют арифметическую прогрессию. Определить, в каком отношении находятся модули сил.

13.345. Предполагая, что стрелки часов движутся без скачков, установить, через сколько минут после того, как часы показывали 8 ч, минутная стрелка догонит часовую.

13.346. Объем вещества A составляет половину суммы объемов веществ B и C, а объем вещества B составляет $\frac{1}{5}$ суммы объемов веществ A и С. Найти отношение объема вещества C к сумме объемов веществ A и B.

13.347. Найти два числа по следующим условиям: сумма их равна 1244; если в конце обозначения первого числа приписать цифру 3, а в конце обозначения второго числа отбросить цифру 2, то получатся два равных числа.

13.348. От станции A по направлению к станции B отошел пассажирский поезд. Через a ч от станции B по направлению к станции A отошел поезд «Стрела». Поезда встретились на станции C. После встречи пассажирский поезд шел b ч, поезд «Стрела» шел c ч. Сколько времени потребовалось каждому из этих поездов на весь путь между станциями A и B? Предполагается, что скорости поездов постоянны на всем пути.

13.349. От почты A до поселка B надо пройти 9 км. Почтальон проходит путь туда и обратно, не задерживаясь в поселке, за 3 ч 41 мин. Дорога из A в B идет сначала в гору, потом по ровному месту и затем под гору. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту, если в гору почтальон идет со скоростью 4 км/ч, по ровному месту 5 км/ч, а под гору 6 км/ч?

13.350. Два автомобилиста встретились на полпути между городами A и B. При встрече выяснилось, что первый из A выехал раньше, чем второй из B, на столько часов, сколько составит половина того времени (также в часах), которое прошло бы до их встречи при одновременном выезде из тех же пунктов, по той же дороге, с теми же скоростями, постоянными на всем пути. Во сколько раз второй автомобилист ехал быстрее первого?

13.351. Дорога от почты A до поселка B идет сначала в гору на протяжении 2 км, потом по ровному месту 4 км и затем под гору 3 км. Почтальон проходит от A до B за 2 ч 16 мин, а обратно — за 2 ч 24 мин. Если бы конечный пункт его пути был расположен по той же дороге, но вдвое ближе к A, то на весь путь туда и обратно почтальону было бы достаточно 2 ч 19 мин. Сколько километров в час проходит почтальон, когда он идет: а) в гору; б) по ровному месту; в) под гору?

13.352. Навстречу движущемуся трамваю шла девушка — знакомая юноши, сидевшего у окна трамвая. Через 8 с после того как она поравнялась с окном, юноша вышел из трамвая и пошел следом за ней. Сколько времени прошло с этого момента до того, как он догнал девушку? Скорость юноши в 2 раза больше скорости девушки и в 5 раз меньше скорости трамвая.

13.353. При умножении двух положительных чисел, из которых одно на 75 больше другого, по ошибке получилось произведение на 1000 меньше истинного. Вследствие этого, разделив (при проверке) ошибочное произведение на меньший из множителей, получили в частном 227 и в остатке 113. Найти оба числа.

13.354. При умножении двух чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив цифру десятков произведения на 4. При делении полученного произведения на меньший множитель для проверки ответа он получил в частном 39, а в остатке 22. Найти множители.

13.355. Автомобиль, пройдя путь от A до B, равный 300 км, повернул назад и через 1 ч 12 мин после выхода из B увеличил скорость на 16 км/ч. В результате на обратный путь он затратил на 48 мин меньше, чем на путь от A до B. Найти первоначальную скорость автомобиля.

13.356. Расстояние между пунктами A и B равно 308 м. Из A по направлению к B движется точка, которая в первую секунду проходит 15 м, а в каждую следующую секунду на 1 м меньше. Из B в противоположном направлении движется точка, которая в первую секунду проходит 20 м, а в каждую следующую на 3 м больше. На каком расстоянии от A произойдет встреча, если точка, вышедшая из B, начала двигаться на 3 с позже точки, вышедшей из пункта A?

13.357. Велосипедист проехал 96 км на 2 ч быстрее, чем предполагал. При этом за каждый час он проезжал на 1 км больше, чем предполагал проезжать за 1 ч 15 мин. С какой скоростью он ехал?

13.358. Найти шестизначное число, начинающееся с цифры 1 и такое, что если переставить эту цифру в конец, то получится число, втрое большее искомого.

13.359. Найти два двузначных числа, обладающих следующим свойством: если к большему искомому числу приписать справа нуль и за ним меньшее число, а к меньшему числу приписать справа большее число и затем нуль, то из полученных таким образом двух пятизначных чисел первое, будучи разделено на второе, дает в частном 2 и в остатке 590. Кроме того, известно, что сумма, составленная из удвоенного большего искомого числа и утроенного меньшего, равна 72.

13.360. Велосипедист отправляется из A в B. Расстояние от A до B равно 60 км; скорость велосипедиста постоянна. Затем он едет обратно с той же скоростью, но через час после выезда из B делает остановку на 20 мин. После этого он продолжает путь, увеличив скорость на 4 км/ч. В каких границах заключена скорость v велосипедиста, если известно, что на обратный путь от B до A он потратил не больше времени, чем на путь от A до B?

13.361. Красный карандаш стоит 2 р. 70 к., синий — 2 р. 30 к. На покупку карандашей можно затратить не более 94 р. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество красных и синих карандашей. При этом красных карандашей нужно закупить как можно меньше, но число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более чем на 10. Сколько красных и сколько синих карандашей следует закупить при указанных условиях?

13.362. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1 : 2, а другой содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

13.363. Некоторый сплав содержит металлы A и B в отношении $m : n$, другой — те же металлы в отношении $p : q$. Какие количества первого и второго сплавов нужно взять, чтобы получить 1 кг третьего сплава с равным содержанием металлов A и B?

13.364. Основание степени увеличили в k раз, а показатель степени уменьшили во столько же раз, в результате чего сама степень не изменилась. Найти основание степени, обладающей таким свойством.

13.365. Два судна движутся прямолинейно и равномерно в один и тот же порт. В начальный момент времени положения судов и порта образуют равносторонний треугольник, а после того как второе судно прошло 80 км — прямоугольный треугольник. В момент прибытия первого судна в порт второму остается пройти 120 км. Найти расстояние между судами в начальный момент времени.

13.366. На реке, скорость течения которой 5 км/ч, в направлении ее течения расположены пристани A, B и C, причем B находится посередине между A и C. От пристани B одновременно отходят плот, который движется по течению к пристани C, и катер, который идет к пристани A, причем скорость катера в стоячей воде равна v км/ч. Дойдя до пристани A, катер разворачивается и движется по направлению к пристани C. Найти все те значения v, при которых катер приходит в C позже, чем плот.

13.367. Несколько студентов решили купить импортный магнитофон стоимостью от 170 до 195 долларов. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 доллар больше. Сколько стоил магнитофон?

13.368. Для перевозки груза из одного места в другое было затребовано некоторое количество грузовиков одинаковой вместимости. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно были затребованы 4 такие же машины. Масса перевезенного груза была не менее 55 т, но не превосходила 64 т. Сколько тонн груза было перевезено на каждом грузовике?

13.369. Около дома посажены липы и березы, причем их общее количество более 14. Если количество лип увеличить вдвое, а количество берез на 18, то берез станет больше, чем лип. Если же количество берез увеличить вдвое, не изменяя количества лип, то лип теперь будет больше, чем берез. Сколько лип и сколько берез было посажено?

13.370. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если же школьнику подарить еще такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

13.371. Сооружается участок железнодорожной насыпи длиной 100 м, поперечным сечением которого является равнобедренная трапеция с нижним основанием 5 м, верхним основанием, не меньшим 2 м, и углом откоса 45°. Какую высоту h должна иметь эта насыпь, чтобы объем земляных работ составил не менее 400 м^3, но не более 500 м^3?

Группа В

13.372. В былое время комиссионный магазин как-то принял для продажи фотоаппараты, часы, авторучки и радиоприемники на сумму 240 р. Сумма цен приемника и одних часов на 4 р. больше суммы цен фотоаппарата и авторучки, а цена авторучки равна целому числу рублей, не превосходящему 6. Количество принятых фотоаппаратов равно цене одного фотоаппарата в рублях, деленной на 10; количество принятых часов равно числу приемников, а также числу фотоаппаратов. Количество авторучек в 3 раза больше числа фотоаппаратов. Сколько всего предметов указанных наименований было принято магазином?

13.373. Электронная вычислительная машина получила задание решить последовательно несколько задач. Регистрируя время выполнения задания, заметили, что на решение каждой следующей задачи машина затрачивала в одно и то же число раз меньше времени, чем на решение предыдущей. Сколько было предложено задач и сколько времени затрачено машиной на решение всех задач, если на решение всех задач, кроме первой, затрачено 63,5 мин, на решение всех задач, кроме последней, затрачено 127 мин, а на решение всех задач, кроме двух первых и двух последних, затрачено 30 мин?

13.374. Три свечи имели одинаковую длину, но разную толщину. Первая свеча была зажжена на 1 ч раньше двух других, зажженных одновременно. В некоторый момент горения первая и третья свечи оказались имеющими одинаковую длину, а через 2 ч после этого одинаковую длину стали иметь первая и вторая свечи. За сколько часов сгорает первая свеча, если вторая сгорает за 12 ч, а третья — за 8 ч?

13.375. Найти трехзначное число, зная, что число его десятков есть среднее геометрическое числа сотен и единиц. Если в его записи поменять местами цифры сотен и единиц и вычесть новое число из искомого, то разность будет равна 297.

13.376. Искомое трехзначное число оканчивается цифрой 1. Если ее стереть и затем ее же приписать в качестве первой цифры числа, то полученное новое трехзначное число будет меньше искомого на $10a^{\log_{\sqrt{a}} 3}$. Найти это число.

13.377. Разность логарифмов цифр сотен и десятков трехзначного числа равна логарифму разности тех же цифр. Если из этого трехзначного числа вычесть число, имеющее обратный порядок цифр, то их разность будет равна положительному числу, у которого цифра сотен совпадает с цифрой десятков данного числа. Найти это число.

13.378. В куске сплава массой 6 кг содержится медь. В куске другого сплава массой 8 кг содержится медь в ином процентном отношении, чем в куске первого сплава. От первого куска отделили некоторую часть, а от второго — часть, вдвое большую по массе, чем от первого. Каждую из отделенных частей сплавили с остатком другого куска, после чего получили два новых сплава с одинаковым процентным содержанием меди. Какова масса каждой из частей, отделенных от кусков первоначальных сплавов?

13.379. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Бриллиант массой p карат был разбит на две части, после чего его стоимость уменьшилась в k раз. Найти массу частей, на которые был разбит бриллиант (1 карат = 0,2 г). Доказать, что наибольшая потеря в стоимости бриллианта происходит в том случае, когда обе его части равны по массе.

13.380. Куплено несколько килограммов товара двух сортов: 1-го сорта на 4500 р. и 2-го на 2000 р., причем 1-го сорта куплено на 1 кг больше. Стоимость 1 кг товара 1-го сорта на $100a$ р. больше стоимости 1 кг товара 2-го сорта. Сколько килограммов товара каждого сорта куплено? Определить число решений в зависимости от возможных значений a.

13.381. Уголь, добываемый в пункте A, продается по q р. за тонну, а добываемый в пункте B — на p% дороже. Пункты A и B соединяет дорога длиной s км. В какой зоне этой дороги AB расположены потребители угля, для которых закупка и доставка угля из B обходится дешевле, чем из A, если перевозка 1 т угля на расстояние 1 км обходится в r р.? В каком месте дороги AB расположено предприятие, расходы которого на потребление угля не зависят от выбора пункта A или B? Исследовать возможные случаи.

13.382. Точка P расположена на диаметре окружности радиуса R между концами диаметра AB. Из этой точки P движутся три единичные массы по направлениям отрезков PA, PB и PC так, что PC — полухорда, перпендикулярная диаметру AB. На каком расстоянии от A находится точка P, если известно, что скорости движения постоянны и за единицу времени первая масса достигла точки A, вторая — точки B, а третья — точки C? При этом кинетическая энергия ($0{,}5mv^2$) в сумме составляет a^2 единиц. В каких пределах можно изменять величину a^2, чтобы выполнялось условие задачи?

13.383. Несколько рабочих выполняют задание за 14 дней. Если бы их было на 4 человека больше и каждый работал бы в день на 1 ч дольше, это же задание было бы выполнено за 10 дней. Если же их было еще на 6 человек больше и каждый работал бы еще на 1 ч в день дольше, задание было бы выполнено за 7 дней. Сколько было рабочих и сколько часов в день они работали?

13.384. Пять человек выполняют некоторое задание. Первый, второй и третий, работая вместе, могут выполнить все задание за 7,5 ч; первый, третий и пятый вместе — за 5 ч; первый, третий и четвертый вместе — за 6 ч, а второй, четвертый и пятый вместе — за 4 ч. За какое время выполнят это задание все 5 человек, работая вместе?

13.385. На соревнованиях авиамоделей с моторчиками лучшими оказались две модели. При встречном ветре первая модель продержалась в воздухе на m мин меньше второй, но пролетела на h м дальше. Скорость ветра равна c м/мин, но на продолжительность полета модели ветер не влияет, от ветра зависит только дальность полета. Предполагается, что собственная скорость каждой модели все время постоянна. Какая из этих моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде?

13.386. На сторонах равностороннего треугольника ABC между его вершинами расположены точки A_1, B_1 и C_1 так, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = x$. Сторона треугольника равна a. Найти такое значение x, при котором отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC было бы равно данному положительному числу m. В каких пределах можно изменять величину m, чтобы выполнялось условие задачи?

13.387. Из пункта A отправилась моторная лодка вверх по Волге, а из пункта B одновременно вышел плот по течению. Через a ч они встретились и далее двигались без остановок. Дойдя до пункта B, лодка, не задерживаясь, повернула обратно и догнала плот в пункте A. Предполагается, что собственная скорость лодки была все время неизменной. Сколько времени находились в плавании плот и лодка?

13.388. Три пловца должны проплыть в бассейне дорожку длиной 50 м, немедленно повернуть обратно и вернуться к месту старта. Сначала стартует первый, через a с — второй, еще через a с — третий. В некоторый момент времени, еще не достигнув конца дорожки, пловцы оказались на одном расстоянии от старта. Третий пловец, доплыв до конца дорожки и повернув назад, встретил второго в s м от конца дорожки, а первого — в r м от конца дорожки. Найти скорости первого и третьего пловцов и установить связь в виде неравенств между параметрами r и s так, чтобы задача имела решение.

13.389. От двух кусков сплава одинаковой массы, но с различным процентным содержанием меди отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих кусках стало одинаковым. Во сколько раз отрезанный кусок меньше целого?

13.390. Колонна автомобилей, движущихся с одной и той же постоянной скоростью, имеет длину 5 км. В последнем автомобиле находится начальник колонны, а рядом мотоциклист. По приказу начальника мотоциклист увеличил скорость, поравнялся с головной машиной, передал водителю пакет, мгновенно развернулся и с той же скоростью, с какой ехал вперед, поехал обратно на свое место. Начальник сообщил мотоциклисту, что пока тот выполнял поручение, колонна продвинулась вперед на 5 км. Сколько километров проехал мотоциклист?

13.391. Из пунктов A и B одновременно выезжают два автомобиля и встречаются в 12 ч дня. Если скорость первого удвоить, а скорость второго оставить первоначальной, то встреча произойдет на 56 мин раньше. Если же скорость второго удвоить, а скорость первого оставить первоначальной, то они встретятся на 65 мин раньше. Определить время встречи в том случае, когда скорость обоих автомобилей была бы удвоенной.

13.392. Из аэропорта к центру города вышел автомобиль, одновременно из центра города в аэропорт вышел автобус-экспресс. Когда первый прошел половину пути, второму осталось до конца маршрута 19,2 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось до конца маршрута 12 км. Сколько километров остается пройти автобусу после того как автомобиль закончит свой маршрут? Предполагается, что скорости автомобиля и автобуса постоянны на всем пути.

13.393. Расстояние между двумя точками равно d. Под действием некоторых сил обе точки начинают равномерное движение навстречу друг другу. Чтобы они встретились на середине пути, первой точке нужно начать движение на t единиц времени раньше второй. Если же точки начнут сближение одновременно, то через T единиц времени расстояние между ними составит k-ю часть ($k > 1$) первоначального расстояния. Найти скорости движения точек.

13.394. Два брата имели билеты на стадион, расположенный в 10 км от их дома. Сначала они собирались идти на стадион пешком, но изменили намерение и решили воспользоваться своим велосипедом, договорившись, что один отправится на велосипеде, а другой одновременно с ним — пешком. Проехав часть пути, первый оставит велосипед, а второй, дойдя до оставленного велосипеда, поедет на нем дальше и догонит первого у входа на стадион. Сколько времени выигрывают братья при этом по сравнению с первоначальным намерением идти весь путь пешком, если каждый из них на велосипеде преодолевает километр пути на 12 мин быстрее, чем пешком?

13.395. Спортсмен, тренируясь в быстрой ходьбе вдоль шоссе, заметил, что каждые 6 мин его догоняет троллейбус и каждые 3 мин проходит встречный троллейбус. Требуется найти, через какие промежутки времени отправляются троллейбусы с конечных пунктов и во сколько раз медленнее троллейбуса шел спортсмен, если допустить, что в обе стороны троллейбусы отправляются через одинаковые промежутки

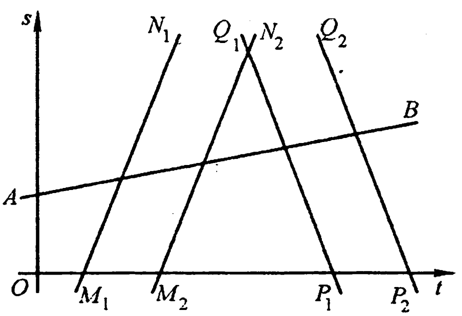


Рис. 13.11

времени, идут без остановок с постоянной и одинаковой скоростью. Спортсмен также идет без остановок с постоянной скоростью (рис. 13.11, где AB — график движения спортсмена, прямые $M_1N_1 \| M_2N_2$ и $Q_1P_1 \| Q_2P_2$ — графики движения каких-либо последовательно идущих один за другим троллейбусов попутно спортсмену и навстречу ему).

13.396. По расписанию учебно-тренировочных занятий сначала из пункта A должен выехать один связист, а через 6 ч — второй связист с такой скоростью, чтобы нагнать первого в 180 км от пункта A. Однако в момент отправления первый связист получил распоряжение ехать со скоростью на a км/ч большей, чем намечалось первоначально. Второму же связисту не разрешалось увеличивать скорость, намеченную расписанием, поэтому, чтобы точно выполнить задание, ему пришлось выехать из пункта A на 3 ч раньше, чем намечалось. Сколько часов будет в пути каждый связист? Доказать, что задача имеет смысл только при $a < 30$.

13.397. Два поезда выходят одновременно из A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии p км от B. Через t ч после встречи второй поезд, миновав пункт A, находился в q км от него, а первый в это время, миновав пункт B, находился от второго поезда на расстоянии вдвое большем, чем расстояние между A и B. Найти скорости поездов и расстояние между A и B. Поезда не имели остановок и скорости их считаются постоянными.

13.398. Два приятеля собрались на охоту. Один из них живет в 46 км от охотничьей базы, другой, имеющий автомобиль, в 30 км от базы — между этой базой и домом своего приятеля. Они тронулись в путь одновременно, причем владелец автомобиля поехал навстречу своему приятелю, идущему пешком. Встретившись, они вместе поехали на базу и прибыли туда через час после выхода из дома. Если бы пешеход вышел из дома на 2 ч 40 мин раньше владельца автомобиля, то приятели встретились бы в 11 км от дома пешехода. Какова скорость автомобиля? Скорости движения пешехода и автомобиля считать постоянными.

13.399. Поезд был задержан на станции отправления на 1 ч 42 мин. Получив сигнал отправления, машинист повел состав по такому графику: на участке, составляющем 0,9 всего пути от станции отправления до станции назначения, он поддерживал скорость на 20% выше обычной и 0,1 пути вел состав со скоростью на 25% выше обычной. В результате поезд прибыл на станцию назначения без опоздания. Какова продолжительность движения этого поезда между станциями при обычной скорости?

13.400. На шоссе последовательно расположены пункты D, A, C и B. Из A и B одновременно выехали мотоциклист и велосипедист в пункты C и D соответственно. Встретившись в E, они обменялись машинами, и каждый продолжал свой путь. В результате первый затратил на поездку от A до C 6 ч, а второй затратил на поездку от B до D 12 ч. Определить длину пути AB, если известно, что каждый едущий на мотоцикле развивает скорость 60 км/ч, а на велосипеде — 25 км/ч, и, кроме того, средняя скорость первого на пути AC равна средней скорости второго на пути BD.

13.401. На беговой дорожке одновременно стартовали два конькобежца на дистанцию s м. Когда победитель достиг финиша, другому осталось бежать еще целый круг. Определить длину беговой дорожки, если победитель, пробегая каждый круг на a с быстрее побежденного, закончил дистанцию за t мин. Считается, что скорости спортсменов сохранялись постоянными на всей дистанции.

13.402. Вместимости трех сосудов A, B, C, каждый из которых имеет форму куба, относятся как 1 : 8 : 27, а объемы налитой в них воды — как 1 : 2 : 3. После переливания части воды из сосуда A в сосуд B и из сосуда B в сосуд C во всех трех сосудах получили слой воды одинаковой глубины. Затем перелили $128\frac{4}{7}$ л воды из сосуда C в сосуд B, а после этого из сосуда B в сосуд A столько, что глубина воды в сосуде A стала вдвое больше, чем в сосуде B. При этом оказалось, что в сосуде A имеется теперь на 100 л воды меньше, чем было первоначально. Сколько воды было первоначально в каждом сосуде?

13.403. Соревнуются три бригады лесорубов. Первая и третья бригады обработали древесины в 2 раза больше, чем вторая, а вторая и третья — в 3 раза больше, чем первая. Какая бригада победила в этом соревновании?

13.404. Два человека одновременно начали спускаться по движущемуся вниз эскалатору метро, причем один шел вдвое быстрее другого. Один из них насчитал 60 ступенек, а другой — 40. Сколько ступенек пришлось бы им отшагать по неподвижному эскалатору?

13.405. Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму до конца пути осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому до конца пути осталось пройти 15 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того как первый закончит переход?

13.406. Три мотоциклиста проезжают с постоянными, но различными скоростями один и тот же участок AB дороги. Сначала пункт A проехал первый мотоциклист, а 5 с спустя в том же направлении — второй и третий. Через некоторое время первого мотоциклиста обогнал третий, а еще через 10 с его обогнал и второй. За какое время первый мотоциклист проедет расстояние AB, если второй проехал это расстояние за 1 мин, а третий — за 40 с?

13.407. К берегу водохранилища подошли трое: A, B и C; A отправился на противоположный берег вплавь со скоростью v км/ч; одновременно B и C отправились на моторной лодке со скоростью $10v$ км/ч. Через некоторое время C решил остаток пути преодолеть вплавь и поплыл с той же скоростью, что и A. В тот же момент B повернул назад, чтобы взять в лодку A, который быстро сел в нее и продолжил путь вместе с B. На противоположном берегу все трое оказались одновременно. Определить время переправы, если известно, что ширина водохранилища равна b км (скорость течения предполагается равной нулю).

13.408. Между пунктами A и B, удаленными друг от друга на 3,01 м, совершает колебательное движение материальная частица m_1. Скорость ее постоянна по величине, и на конечных пунктах она не задерживается. Через 11 с после выхода частицы m_1 из пункта A другая частица m_2 начинает двигаться из пункта B также с постоянной, но меньшей скоростью. Эта частица, двигаясь в направлении пункта A, дважды встречается с частицей m_1, а именно через 10 и 45 с после выхода второй частицы. Определить скорости частиц.

13.409. Самоходный каток, употребляемый для ремонта дорог, в состоянии укатывать полосу шириной 0,85 м, причем каждая следующая полоса перекрывает предыдущую на 0,25 ширины. С какой скоростью должен двигаться этот каток, чтобы за время, не большее 6 ч и не меньшее 5 ч, можно было дважды провести укатку участка шоссе длиной 750 м и шириной 6,5 м?

13.410. Вдоль сторон прямого угла по направлению к вершине движутся два шара с радиусами 2 и 3 см, причем центры этих шаров перемещаются по сторонам угла с неравными, но постоянными скоростями. В некоторый момент времени центр меньшего шара находится на расстоянии 6 см от вершины, а центр большего — на расстоянии 16 см. Через 1 с расстояние между центрами стало 13 см, а еще через 2 с шары ударились, не дойдя до вершины. Найти скорости шаров.

13.411. Две точки A и B, первоначальное расстояние между которыми равно a, одновременно начали двигаться по разным сторонам прямого угла к его вершине с одной и той же постоянной скоростью v. Точка B достигает вершины на t единиц времени раньше, чем точка A (все измерения выполнены в одной системе единиц). Определить, сколько времени двигалась точка A. Какое значение надо придать величине a, чтобы искомое время приняло наименьшее из возможных его значений?

13.412. Три фермы расположены не на одной прямой, но соединены прямолинейными дорогами. Расстояние от первой фермы до третьей через вторую вчетверо длиннее прямолинейного пути между ними; расстояние от первой фермы до второй через третью на a км длиннее прямолинейного пути; расстояние от второй фермы до третьей через первую равно 85 км. В каком интервале находятся все значения a, для которых было бы возможным указанное расположение ферм? Вычислить расстояния между фермами при $a = 5$.

13.413. Сплав состоит из олова, меди и цинка. Если от этого сплава отделить 20 г и сплавить их с 2 г олова, то во вновь получившемся сплаве масса меди будет равна массе олова. Если же отделить от первоначального сплава 30 г и прибавить 9 г цинка, то в этом новом сплаве масса олова будет равна массе цинка. Определить процентное содержание металлов в первоначальном сплаве.

13.414. Из двух пунктов A и B одновременно выехали два инспектора к месту происшествия, в пункт C. Первый инспектор прибыл в C через a мин. Если второй инспектор будет стремиться попасть из B в C одновременно с первым, то ему придется на проезд каждого километра затрачивать на c мин меньше, чем первому, так как расстояние от B до C на b км больше расстояния от A до C. На каком расстоянии от пункта A случилось происшествие?

13.415. Два велосипедиста выехали одновременно из A и B навстречу друг другу. Первый прибыл в B через 4 ч после встречи, второй прибыл в A через 9 ч после встречи. Сколько часов был в пути каждый велосипедист?

13.416. На складе имеется некоторое число бочек двух образцов общей вместимостью 7000 л. Если бы все бочки были первого образца, то вместимость всех бочек увеличилась бы на 1000 л. Если же все бочки были второго образца, то вместимость уменьшилась бы на 4000 л. Найти вместимость всех бочек каждого образца в отдельности.

13.417. К цветущей яблоне полетел шмель со скоростью v_1 м/мин. Одновременно к другой яблоне полетела пчела со скоростью v_2 м/мин. При этом шмелю нужно было преодолеть расстояние в $2a$ м, а пчеле — расстояние в $2b$ м. Предположим, что траектории их полета — взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке, делящей пополам и путь шмеля, и путь пчелы. Найти формулу, выражающую зависимость расстояния y между шмелем и пчелой от времени x их полета. Установить момент, когда в полете шмеля и пчелы расстояние между ними достигает наименьшего значения. Исследовать, пролетит ли пчела или шмель точку пересечения их траекторий к моменту, когда будет достигнуто наименьшее расстояние между шмелем и пчелой.

13.418. Два велосипедиста выезжают одновременно из пункта A с различными (но для каждого постоянными) скоростями и едут к пункту B. Достигнув его, они тотчас же едут обратно. Первый велосипедист, ехавший быстрее второго, на обратном пути встречает второго на расстоянии a км от B; затем, достигнув A, едет снова по направлению к B и, пройдя k-ю часть пути AB, встречает второго велосипедиста, возвращающегося из B. Найти расстояние от A до B.

13.419. Два поезда длиной в 490 и 210 м равномерно движутся навстречу друг другу по параллельным путям. Машинист одного из них заметил встречный состав на расстоянии 700 м; после этого через 28 с поезда встретились. Определить скорость каждого поезда, если известно, что один из них проезжает мимо светофора на 35 с дольше другого.

13.420. Кортеж автомобилей с космонавтами равномерно движется по проспекту со скоростью v км/ч. Протяженность кортежа постоянно сохраняется равной m м. Букет цветов, брошенный из окна дома, попал в коляску мотоциклиста, ехавшего позади кортежа. Мотоциклист проехал вперед, передал букет космонавту, находившемуся в первом автомобиле, и тотчас отправился обратно. На проезд туда и обратно вдоль движущегося кортежа мотоциклисту потребовалось t мин. Вычислить скорость мотоциклиста, если она на всем пути была одинакова.

13.421. Если двузначное число разделить на некоторое целое число, то в частном получится 3 и в остатке 8. Если же в делимом поменять местами цифры, а делитель оставить прежним, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найти первоначальное значение делимого.

13.422. Арбузы, привезенные на базу, предназначены для двух магазинов. Первый магазин сразу приступил к перевозке арбузов и перевозил их ежедневно одинаковыми по массе порциями. Второй магазин приступил к перевозке арбузов на a дней позже и также перевозил их ежедневно одинаковыми по массе, но иными, чем первый магазин, порциями. Через b дней, прошедших от начала перевозочных операций, на базе осталась половина первоначального количества арбузов. За сколько дней были вывезены все арбузы с базы, если перевозка закончилась одновременно и масса арбузов, полученных первым магазином, равна массе арбузов, полученных вторым магазином?

13.423. В бригаде землекопов каждый работает ежедневно по одинаковому числу часов. Известно, что производительность труда одинакова у всех рабочих бригады и при этом бригада может вырыть канаву для укладки кабеля за 6 дней. Однако еще до начала работы выяснилось, что рабочий день сокращается на 1 ч, а состав бригады уменьшается на 5 человек. В таком случае канава может быть вырыта за 9 дней. В действительности эту канаву рыли 12 дней, так как рабочий день был сокращен не на 1 ч, а на 2 ч и два человека не вышли на работу по болезни. Сколько рабочих было в бригаде первоначально и сколько часов в день они работали?

13.424. Три машины производят некоторую работу. Если эту работу будет выполнять одна первая, то она завершит работу на a дней позже, чем при работе всех машин вместе. Если же эту работу будет выполнять вторая, то она завершит ее на b дней позже, чем все вместе, а если третья, то ей потребуется в c раз больше времени, чем всем машинам вместе. За сколько дней выполняет работу каждая из машин в отдельности?

13.425. Имеется n мензурок с жидкостью. Из первой мензурки перелили $\frac{1}{n}$ имеющейся там жидкости во вторую мензурку, затем из второй мензурки $\frac{1}{n}$ оказавшейся там после переливания из первой мензурки жидкости перелили в третью мензурку и т. д. Наконец, из n-й мензурки перелили $\frac{1}{n}$ оказавшейся в ней после переливания из предыдущей мензурки жидкости снова в первую мензурку. После этого в каждой мензурке оказалось по a см^3 жидкости. Сколько жидкости было первоначально в каждой мензурке?

13.426. Для наполнения водой бассейна были поставлены два насоса. Один первый насос может наполнить бассейн на 8 ч быстрее, чем один второй. Сначала был открыт только один второй насос на время, равное удвоенному количеству времени, которое потребовалось бы для наполнения бассейна при одновременном действии обоих насосов. Затем открыли также первый насос и через 1,5 ч после того как был открыт первый насос, бассейн наполнился водой. За сколько часов каждый из насосов, работая порознь, может наполнить бассейн?

13.427. Пройдя через пористый фильтрующий материал, жидкость равномерной струей вливается в 40-ведерную бочку и может выливаться через кран, имеющийся в дне бочки. Если этот кран открыт, то приток и отток жидкости таковы, что за каждые 4 мин в бочке убавляется одно ведро. За какое время отфильтрованная жидкость наполнит пустую бочку при закрытом нижнем кране, если известно, что для этого потребуется на 3 мин меньше того времени, за которое открытый нижний кран способен пропустить 66 ведер?

13.428. Партия одинаковых деталей обрабатывалась на трех станках разных конструкций в такой последовательности: сначала действовал только I станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на II и III станках; затем действовал только II станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на I и III станках. Остальная часть партии деталей была обработана на III станке в течение стольких часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на I и II станках. Во сколько раз быстрее была бы выполнена эта работа, если бы действовали совместно все три станка?

13.429. Сначала катер шел a км по озеру, а затем половину этого расстояния по реке, впадающей в озеро. Весь рейс продолжался 1 ч. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки равна c км/ч. При каком соотношении между c и a рейс неосуществим?

13.430. Из Москвы в город N пассажир может отправиться поездом. В этом случае он пробудет в пути 20 ч. Если же он дождется отправления самолета (а ждать придется более 5 ч после отправления поезда), то пассажир доберется до города N через 10 ч, включая и время ожидания. Протяженности трассы самолета и железнодорожного пути одинаковы. Во сколько раз скорость самолета превышает скорость поезда, если известно, что самолет окажется над этим поездом через $\frac{8}{9}$ ч после отправления из аэропорта и пролетит к этому моменту столько же километров, сколько пройдет поезд?

13.431. Известно, что разность переменных величин y и z пропорциональна величине x, а разность величин z и x пропорциональна величине y. Коэффициенты этих пропорциональностей равны соответственно k_1 и k_2. Некоторое значение величины z в 3 раза больше разности соответствующих значений x и y. Доказать, что если каждый из коэффициентов k_1 и k_2 увеличить на 3, то произведение полученных чисел будет равно числу 8 (предполагается, что величины x и y не принимают нулевых значений).

13.432. Два спортсмена бегут по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на a с меньше, чем второй. Если они начинают пробег с общего старта и в одном направлении, то сходятся через каждые b с. Через какое время они встретятся, если побегут в противоположных направлениях по той же дорожке с прежними скоростями?

13.433. Предприятие A, потребляющее лед, закупает его в пункте B по цене a р. за тонну. Иногда этому предприятию приходится закупать лед в другом пункте C по цене $1{,}5a$ р. за тонну. Оба изготовителя сами доставляют потребителю A закупленный им лед, начисляя за перевозку по p р. за тонно-километр. Потеря в массе, происходящая при транспортировке от таяния льда, составляет $0{,}001n$ его начальной массы на километр пути. Предприятие A расположено между B и C, и каждая тонна фактически полученного льда обходится предприятию A одинаково (в рублях) при доставке как из пункта B, так и из пункта C. Во сколько рублей обходится предприятию A тонна получаемого льда, если известно, что расстояние от B до C через A равно s км?

13.434. Доказать, что куб наибольшего из трех последовательных натуральных чисел не может быть равен сумме кубов двух других чисел.

13.435. Искомое число больше 400 и меньше 500. Найти его, если сумма его цифр равна 9 и оно равно $\frac{47}{36}$ числа, изображенного теми же цифрами, но написанными в обратном порядке.

13.436. На участке реки от A до B течение так невелико, что им можно пренебречь; на участке от B до C течение оказывает заметное влияние на движение лодки. Лодка покрывает расстояние вниз от A до C за 6 ч, а вверх от C до A за 7 ч. Если бы на участке от A до B течение было бы таким же, как на участке от B до C, то весь путь от A до C занял бы 5,5 ч. Какое время в этом случае понадобилось бы той же лодке на движение вверх от C до A? Собственная скорость лодки принимается неизменной во всех случаях.

13.437. На какое целое положительное число надо разделить 180, чтобы остаток составлял 25% от частного?

13.438. Смешав по 2 см^3 трех веществ, получили 16 г смеси. Известно, что 4 г второго вещества занимают объем, на 0,5 см^3 больший, чем 4 г третьего вещества. Найти плотность третьего вещества, если известно, что масса второго вещества в смеси вдвое больше массы первого.

13.439. Если двузначное число увеличить на 46, то получится число, произведение цифр которого равно 6. Найти искомое число при условии, что сумма его цифр равна 14.

13.440. Даны две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, а также точка $A\ (a;\ a)$, где $a > 0$. Требуется найти координаты такой точки M на оси Ox и такой точки P на оси Oy, чтобы треугольник AMP был равносторонним.

13.441. На расстоянии l м от моста A вниз по течению реки расположен мост B. Когда спортсмен проплывал мимо моста A, направляясь к мосту B, ему бросили два мяча. Первый мяч он подхватил, а второй оставил плыть по течению. Проплыв с мячом некоторый участок реки, спортсмен оставил этот мяч и поплыл вверх по реке за вторым мячом. Подхватив второй мяч, снова повернул по направлению к мосту B и достиг его одновременно со свободно плывшим первым мячом. Какое расстояние пришлось проплыть спортсмену, если его собственная скорость все время была в k раз больше скорости течения?

13.442. В магазин поступил товар 1-го и 2-го сортов на общую сумму в 450 млн. р. Дополнительная экспертиза установила, что весь поступивший товар можно продавать только по цене 2-го сорта, в результате чего фирма потерпела бы убыток в 50 млн. р. Продавцы магазина безвозмездно не только устранили дефекты в товаре 1-го сорта, но и довели товар 2-го сорта до кондиции 1-го сорта. Получив после этого разрешение продавать весь товар по цене 1-го сорта, магазин дал фирме прибыль в 30 млн. р. В какую сумму оценивался первоначально весь товар 1-го сорта и весь товар 2-го сорта отдельно?

13.443. В колбе имеется раствор соли. Из колбы отливают $\frac{1}{n}$ раствора в пробирку, а раствор, оставшийся в колбе, выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли не повысится вдвое. После этого вливают в колбу раствор из пробирки. В результате содержание соли в растворе повысилось на $p\%$ по сравнению с первоначальным. Определить процентное содержание соли в первоначальном растворе. Какую часть первоначального раствора следовало отлить, чтобы в результате описанной процедуры процентное содержание соли увеличилось в 1,5 раза?

13.444. Зная длины сторон треугольника, ученик выразил его площадь и обратил внимание на то, что значениями длин сторон и площади этого треугольника являются соответственно четыре последовательных целых числа. Каковы длины сторон треугольника?

13.445. На столе стоит цилиндрическая банка с водой. Радиус основания банки равен R. Если в банку опустить шарик радиуса r, то он ляжет на дно банки, а поверхность воды при этом поднимется настолько, что окажется касательной к шарику. Доказать, что произойдет то же самое, если в эту банку с тем же количеством воды опустить вместо данного шарика шарик другого радиуса. Найти радиус нового шарика и установить условия, при которых он будет больше или меньше радиуса данного шарика.

13.446. Из одного и того же пункта одновременно в одном направлении по прямолинейному участку шоссе с постоянными, но различными скоростями вышли два пешехода. Через 2 ч расстояние между ними было s км. После этого пешеходы стали идти быстрее и затрачивать на каждый километр пути на 10 мин меньше. Еще через 2 ч расстояние между ними стало равным $3s$ км. Найти расстояния, пройденные пешеходами за первые два часа движения.

13.447. Сравнивая два бруска, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, установили, что длина, ширина и высота второго бруска соответственно на 1 см больше, чем у первого бруска, а объем и полная поверхность второго бруска соответственно на 18 см^3 и 30 см^2 больше, чем у первого. Какова величина полной поверхности первого бруска?

13.448. Со станции A отошли два электропоезда с интервалом в 12 мин и практически сразу развили одинаковую скорость 50 км/ч. Они едут в одном направлении без остановок, сохраняя указанную скорость неизменной. С какой постоянной скоростью шел встречный поезд, если он повстречал эти электропоезда через 5 мин один после другого?

13.449. Искомое трехзначное число начинается с цифры 1. Если ее стереть и затем ее же приписать в качестве последней цифры числа, то полученное новое трехзначное число будет больше искомого на $9a^{1/\lg a}$. Найти число.

13.450. Если при начале отсчета времени было m_0 г вещества A и $2m_0$ г вещества B, то через любое число t лет, в результате радиоактивного распада, этих веществ останется соответственно $m = m_0 \cdot 2^{-\lambda_1 t}$ и $M = 2m_0 \cdot 2^{-\lambda_2 t}$, где λ_1 и λ_2 — постоянные, зависящие от природы веществ. Вычислить период полураспада каждого из этих веществ, т. е. найти, через сколько лет от каждого вещества останется только половина его первоначального количества, если известно, что период полураспада вещества B в 2 раза меньше, чем вещества A, и что через 20 лет общая масса этих веществ уменьшается в 8 раз.

ЧАСТЬ II

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ (дополнительные задачи). НАЧАЛА АНАЛИЗА. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

ГЛАВА 14

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ

Пример 1. Показать, что $\log_2 \cos 20^\circ + \log_2 \cos 40^\circ + \log_2 \cos 80^\circ = -3$.

□ Утверждение верно, если верно, что $\log_2 (\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ) = -3$ [использована формула (7.4)], т. е. $\log_2 A = -3$, где $A = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$. Умножим и разделим правую часть последнего равенства на $8\sin 20^\circ$:

$$A = \frac{4 \cdot 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}.$$

Применяя трижды последовательно формулу (3.13), получаем

$$A = \frac{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{8\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ} = 2^{-3}.$$

Следовательно, $\log_2 A = \log_2 2^{-3} = -3$. ■

Пример 2. При каких значениях p уравнение

$$x^2 - (2^p - 1)x - 3(4^{p-1} - 2^{p-2}) = 0$$

имеет равные корни?

□ Квадратное уравнение имеет равные корни, если его дискриминант $D = b^2 - 4ac$ равен нулю. Находим

$$D = (2^p - 1)^2 + 12(4^{p-1} - 2^{p-2}) =$$

$$= 2^{2p} - 2 \cdot 2^p + 1 + \frac{12 \cdot 2^{2p}}{4} - \frac{12 \cdot 2^p}{4} = 4 \cdot 2^{2p} - 5 \cdot 2^p + 1.$$

Используя замену переменной $2^p = y$, получаем уравнение $4y^2 - 5y + 1 = 0$, которое имеет корни $y_1 = 0{,}25$, $y_2 = 1$. Решаем уравнения $2^p = 2^{-2}$ и $2^p = 1$, откуда $p = -2$ и $p = 0$. ■

Пример 3. Решить уравнение $|x-1|\cdot|x+2|=4$.

□ Поскольку $|xy|=|x|\cdot|y|$, перепишем данное уравнение в виде $|(x-1)(x+2)|=4$. Оно равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}(x-1)(x+2)>0,\\(x-1)(x+2)=4;\end{cases}\quad\begin{cases}(x-1)(x+2)<0,\\-(x-1)(x+2)=4.\end{cases}$$

В первой системе корни уравнения $x_1=-3$, $x_2=2$ удовлетворяют неравенству этой системы, а значит, и самой системе; дискриминант квадратного уравнения второй системы отрицателен; следовательно, эта система несовместна. Итак, получаем ответ: -3; 2. ■

Пример 4. При каких целых значениях a неравенство

$$2\log_{0,5}a-3+2x\log_{0,5}a-x^2<0$$

выполняется в любой точке оси Ox?

□ Заменим заданное неравенство равносильным: $x^2-2x\log_{0,5}a+3-$ $-2\log_{0,5}a>0$. Так как коэффициент при x^2 положителен, то неравенство выполняется в любой точке оси Ox, если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен (см. указание 4° из гл. 9). Следовательно,

$$4\log_{0,5}^2 a-4(3-2\log_{0,5}a)<0,\text{ или }\log_{0,5}^2 a+2\log_{0,5}a-3<0.$$

После замены переменной $y=\log_{0,5}a$ получаем неравенство $y^2+2y-3<0$; $f(y)=y^2+2y-3=0$ при $y_1=1$, $y_2=-3$. Схематическое расположение параболы относительно оси Oy приведено на рис. 14.1. Отсюда находим $-3<y<1$.

Рис. 14.1

Решаем неравенство $-3<\log_{0,5}a<-1$, которое, используя формулы (7.6) и (7.2), запишем в виде $\log_{0,5}0,5^{-3}<\log_{0,5}a<\log_{0,5}0,5$. Так как основание логарифма $0<0,5<1$, то в силу указания 7° из гл. 9 получаем равносильную этому неравенству систему

$$\begin{cases}a>0,\\0,5<a<0,5^{-3},\end{cases}\text{ т. е. }0,5<a<8.$$

Целыми значениями a, удовлетворяющими последнему неравенству, являются числа 1, 2, ..., 7. ■

Пример 5. Решить неравенство $10^{|\sin x|} > 10^{|\cos x|}$.

□ Так как основание степени $10 > 1$, то на основании указания 7° из гл. 9 перейдем к равносильному неравенству $|\sin x| > |\cos x|$. Отсюда, применяя указание 2° г) из гл. 9, получим $\sin^2 x > \cos^2 x$. Далее, используя тождественные преобразования тригонометрических выражений, имеем $\sin^2 x > 1 - \sin^2 x$; $2\sin^2 x > 1$; $1 - \cos 2x > 1$; $\cos 2x < 0$, откуда $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Итак, получаем ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Решение неравенства $|\sin x| > |\cos x|$ можно также найти графически, построив графики функций $|\sin x|$ и $|\cos x|$ на одном чертеже (рис. 14.2). ■

Пример 6. Доказать, что графики функций $y = m \cdot 3^x + n$ и $y = n \cdot 3^{-x} + m$ при условии $mn < 0$ пересекаются в двух точках, из которых одна лежит на оси абсцисс, а другая — на оси ординат.

□ Абсциссы точек пересечения графиков являются корнями уравнения $m \cdot 3^x + n = n \cdot 3^{-x} + m$; умножая все его члены на $3^x \neq 0$ и группируя подобные слагаемые, получим $m \cdot 3^{2x} + (n - m)\, 3^x - n = 0$.

Положим $3^x = y > 0$ и решим квадратное уравнение $my^2 + (n - m)\, y - n = 0$. Имеем $D = (n - m)^2 + 4mn = (n + m)^2$ и, следовательно,

$$y_{1,2} = \frac{-(n-m) \pm (n+m)}{2m}; \quad y_1 = 1, \ y_2 = -\frac{n}{m} > 0 \quad (mn < 0 \text{ по условию}).$$

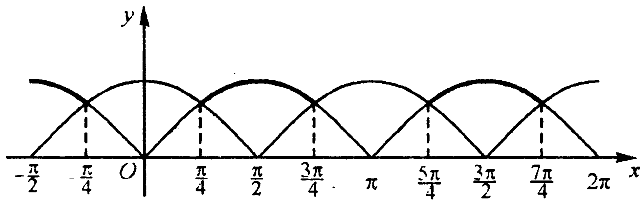


Рис. 14.2

Из уравнения $3^x = 1$ находим $x = 0$, а из уравнения $3^x = -\frac{n}{m}$ получим $x = \log_3\left(-\frac{n}{m}\right)$. Найдем ординаты точек пересечения. Если $x_1 = 0$, то $y_1 = m \cdot 3^0 + n = m + n$. Точка $(0;\ m + n)$ лежит на оси Oy. Если $x_2 = \log_3\left(-\frac{n}{m}\right)$, то

$y_2 = m \cdot 3^{\log_3\left(-\frac{n}{m}\right)} + n = m\left(-\frac{n}{m}\right) + n = 0$, так как $3^{\log_3\left(-\frac{n}{m}\right)} = -\frac{n}{m}$ в силу равенства (7.1). Точка $\left(\log_3\left(-\frac{n}{m}\right); 0\right)$ лежит на оси Ox. ■

Упростить выражения (14.001–14.004):

14.001. $\frac{m}{m^2+1}\sqrt{1+\left(\frac{m^2-1}{2m}\right)^2}$.

14.002. $\frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt[4]{(b-a)^3}}$.

14.003. $\sqrt{\frac{1-\cos 246^\circ}{1+\cos 246^\circ}}$.

14.004. $\sqrt{\frac{\cos(\pi+\alpha)+1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+1}}$.

Решить уравнения (14.005–14.026):

14.005. $\sqrt{x^2-1} - \frac{6}{\sqrt{x^2-1}} = 1$.

14.006. $\sqrt{\frac{1+x}{x}} + \frac{1}{x} = 5$.

14.007. $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$.

14.008. $\frac{3^{\sqrt{-12x}}+3}{4} = 3^{\sqrt{-3x}}$.

14.009. $4^{\log_2 x} + x^2 = 8$.

14.010. $\lg^2 x^2 = 1$.

14.011. $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$.

14.012. $x^{2\log_2 x} = 8$.

14.013. $\log_3(\log_2^2(x-4)) = 0$.

14.014. $\lg^2(10x) + \lg x = 19$.

14.015. $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5$.

14.016. $x^{\log_3 x} = \sqrt[4]{3x^3}$.

14.017. $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$.

14.018. $\log_2(\sqrt{4x+5}-1) = 0{,}5\log_2(\sqrt{4x+5}+11)$.

14.019. $\log_2^2(4x) - 4\log_4 x = 12$.

14.020. $\log_{x+6}(2x-\sqrt{x+6}) = 0{,}5$.

14.021. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$.

14.022. $2x - \lg(5^{2x}+4^x-16) = x\lg 4$.

14.023. $x + \lg(1+4^x) = \lg 50$.

14.024. $\cos^{58} x + \sin^{40} x = 1$.

14.025. $\log_{\cos x}\sin x = 1$.

14.026. $\operatorname{ctg}\sin x = 1$.

Решить системы уравнений (14.027–14.032):

14.027. $\begin{cases} 6{,}751x + 3{,}249y = 26{,}751, \\ 3{,}249x + 6{,}751y = 23{,}249. \end{cases}$

14.028. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2{,}5, \\ x^2 - y^2 = 3{,}0. \end{cases}$

14.029. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4. \end{cases}$

14.030. $\begin{cases} 8^x = 10y, \\ 2^x = 5y. \end{cases}$

14.031. $\begin{cases} 0{,}5\log_2 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

14.032. $\begin{cases} x^{\log_y x} = 2, \\ y^{\log_x y} = 16. \end{cases}$

14.033. При каком значении q сумма кубов корней уравнения $x^2 - x - q = 0$ равна 19?

14.034. При каких значениях p сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px + 35 = 0$ равна 74?

14.035. Не решая уравнения $x^2 - 3x - 10 = 0$, вычислить сумму кубов его корней.

14.036. Имеет ли корни уравнение $(2x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$?

14.037. Сколько корней имеет уравнение $0{,}3^x = x^2 - x + 1$?

14.038. Проверить, что для уравнения $2^x + x^2 - 3 = 0$ оба корня больше $-\sqrt{3}$, причем один точно равен 1.

14.039. Решить уравнение $x^3 - 7x - 6 = 0$. Убедиться в том, что сумма всех его корней равна нулю. Нельзя ли было убедиться в этом, не находя самих корней?

14.040. Решить графически уравнение $|x - 1| + 2x - 5 = 0$.

14.041. Показать графически, что уравнение $\lg x = \lg(2x)$ не имеет корней.

14.042. Сколько корней имеет уравнение $x^3 = \sin 3x$?

14.043. Показать, что уравнение $\sqrt{9 - x^2} - \log_3(|x| - 3) = 0$ не имеет корней.

14.044. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x + y^2 = 3? \end{cases}$

14.045. Решить уравнение $\left|x^2 + 1{,}5x + 1\right| = m$. При каких значениях m оно имеет единственное решение?

14.046. Найти число x, если числа 1, 7, 13, ..., x составляют такую арифметическую прогрессию, для которой $1 + 7 + 13 + ... + x = 280$.

14.047. Найти рациональные корни уравнения

$$\frac{\sqrt{x+2}}{|x|}+\frac{|x|}{\sqrt{x+2}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

14.048. Найти целые корни уравнения $x^3-|x-1|=1$.

14.049. Чему равна сумма всех корней всякого биквадратного уравнения?

14.050. Доказать, что последовательность, заданная формулой $y_n=\frac{10n+7}{2n}$, убывает.

14.051. Равносильны ли уравнения

$$(1+2\sin x)\ \mathrm{tg}\,x=0 \text{ и } \frac{1+2\sin x}{\mathrm{ctg}\,x}=0?$$

14.052. Показать, что уравнение $\sin x+\sin 2x=2$ не имеет корней.

14.053. При каком значении m система уравнений

$$\begin{cases}2x+(m-1)\ y=3,\\(m+1)\ x+4y=-3\end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений? Не имеет решений?

Определить знаки чисел (14.054–14.056):

14.054. $\log_{1,7}(0{,}5(1-\log_7 3))$.

14.055. $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)$.

14.056. $\dfrac{\log_3 5-\log_5 3}{\log_{0,3} 4-\log_{0,3} 3}$.

14.057. Чему равно основание логарифма, при котором число a равно своему логарифму?

14.058. Записать x в виде десятичной дроби, если $x=49^{1-\log_7 2}+5^{-\log_5 4}$.

14.059. Вычислить $0{,}8(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$.

14.060. Вычислить без таблиц $\lg 32{,}11-\lg 0{,}03211$.

14.061. Вычислить $\log_{1/2} 28$, если $\log_7 2=a$.

14.062. Найти $\lg^2\sqrt{x}$, если $\log_x 100=a$.

14.063. Найти $\lg_9 2{,}97$, если $\lg 3=a$ и $\lg 11=b$.

Вычислить (14.064–14.067):

14.064. $\lg\mathrm{tg}\,2^\circ+\lg\mathrm{tg}\,4^\circ+\lg\mathrm{ctg}\,2^\circ+\lg\mathrm{ctg}\,4^\circ$.

14.065. $\lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 9^\circ \ldots \lg \operatorname{tg} 87^\circ$.

14.066. $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \ldots \lg \operatorname{tg} 89^\circ$.

14.067. $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \ldots + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$.

14.068. Чему равно произведение $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \ldots \log_{10} 9$, если известно, что $\lg 2 = 0{,}3010$?

14.069. Вычислить $\log_2 36$, если $\log_{12} 9 = m$.

14.070. Определить знак произведения

$$\lg \sin 32^\circ \cdot \lg \cos 17^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \lg \operatorname{ctg} 20^\circ.$$

14.071. Какой знак имеет число $\lg \operatorname{arctg} 2$?

14.072. Доказать, что $\log_2 5$ — иррациональное число.

14.073. Всегда ли неверно равенство $\lg(a + b) = \lg a + \lg b$?

14.074. Доказать, что если $a^2 + b^2 = 7ab$, то

$$\log_k \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_k a + \log_k b).$$

14.075. Найти ошибку в следующих рассуждениях:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8};\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3;\ 2\log_a \frac{1}{2} > 3\log_a \frac{1}{2}.$$

Сокращая обе части неравенства на $\log_a \frac{1}{2}$, получаем $2 > 3$.

Решить неравенства (14.076–14.100):

14.076. $x^3 + 4 \ge x^2 + 4x$.

14.077. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > \frac{6}{x^3}$.

14.078. $-\frac{15}{x^2} - \frac{16}{x^4} < -1$.

14.079. $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$.

14.080. $x^2 - 4|x| + 3 > 0$.

14.081. $x^2 - 5|x| + 6 < 0$.

14.082. $\frac{3|x| - 14}{x - 3} \le 4$.

14.083. $\frac{x^2 - 5x + 6 < 0}{|x| + 7} < 0$.

14.084. $\left|\frac{2}{x-4}\right| > 1$.

14.085. $\frac{\sqrt{1 - 2x + x^2} + x}{x} > 0$.

14.086. $7^{x^3 - 4x - 2} > \frac{1}{49}$.

14.087. $0{,}5^{(x^2 + x - 2)(3 - x)} > 1$.

14.088. $1 < 2^{x(x+2)} < 8$.

14.089. $\log_{0,5}(2x + 6) > \log_{0,5}(x + 8)$.

14.090. $2\lg x < \lg^2 x$.

14.091. $\lg\dfrac{6}{x} > \lg(x+5)$.

14.092. $\log_2(1+\log_{1/3}x) < 1$.

14.093. $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \le \dfrac{1}{2}$.

14.094. $x^{\log_{0,2} 0,3} + 0,3^{\log_{0,2} x} \le 0,18$.

14.095. $\log_{0,5}\log_3 x > 1$.

14.096. $x^2 \log_2 0,3 - 2\log_2 0,09 > 0$.

14.097. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} < 1$.

14.098. $x^{-3x-8} > x^7$.

14.099. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} \ge 0$.

14.100. $\sin x \cos x > 0,25$.

14.101. Для каких точек оси Ox выполняется неравенство: а) $\sin x < 0,5$; б) $|\sin x| < 0,5$?

14.102. Что больше: $\sin 2x$ или $2\sin x$?

14.103. Для различных x из области определения функций выяснить, какая из величин больше: $\lg x^2$ или $\lg^2 x$.

14.104. Каковы возможные значения x, если $\log_x(a^2+1) < 0$?

14.105. Что больше: 3^{400} или 4^{300}?

14.106. При каких значениях a выполняется неравенство $\dfrac{5a+6}{4-a} > 1$?

14.107. Существуют ли такие значения a, при которых оба корня уравнения $x^2 - 2(a-3)x - a + 3 = 0$ заключены в интервале $(-3, 0)$?

14.108. При каких значениях x выражение $\log_{0,5}(x^2-8)$ неотрицательно?

14.109. Доказать, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \ge 2$, если $ab > 0$.

14.110. Доказать, что если $a + b + c = 1$, то $a^2 + b^2 + c^2 \ge \dfrac{1}{3}$; a, b, c — действительные числа.

14.111. Доказать, что сумма кубов катетов меньше куба гипотенузы.

14.112. Доказать, что в любом треугольнике сумма длин трех медиан меньше его периметра и больше полупериметра.

14.113. Доказать, что если a и b — катеты, а c — гипотенуза, то $a+b \le c\sqrt{2}$.

14.114. Доказать справедливость неравенства $\sqrt{a^2+b^2} > \sqrt[3]{a^3+b^3}$ $(a > 0,$ $b > 0)$.

Построить графики функций (14.115–14.134):

14.115. а) $y = x^2 + 5x + 6$; б) $y = x^2 + 5|x| + 6$;

в) $y = |x^2 + 5x + 6|$; г) $y = |x^2 + 5|x| + 6|$.

14.116. а) $y=-x^2+4x-5$; б) $y=-x^2+4|x|-5$;

в) $y=|-x^2+4x-5|$; г) $y=|-x^2+4|x|-5|$.

14.117. а) $y=\log_{0,5}x$; б) $y=\log_{0,5}(-x)$;

в) $y=\log_{0,5}|x|$; г) $y=|\log_{0,5}x|$; д) $y=|\log_{0.5}|x||$.

14.118. а) $y=\sin x$; б) $y=2\sin x$; в) $y=\sin 2x$; г) $y=\sin\frac{x}{2}$.

14.119. а) $y=\cos x$; б) $y=\cos|x|$; в) $y=|\cos x|$; г) $y=|\cos|x||$.

14.120. $y=\frac{1+x}{x}$.

14.121. $y=\frac{1}{x^2-9}$.

14.122. $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$.

14.123. $y=2^{1/x}$.

14.124. $y=-\frac{1}{\cos x}$.

14.125. $y=\log_2\sin x$.

14.126. $y=\log_2(\sin x\cos x)$.

14.127. $y=|x+1|-x$.

14.128. $y=x|x|+1$.

14.129. $y=x+\frac{|x|}{x}$.

14.130. $y=-2^{-|x|}$.

14.131. $y=2^x\cdot 2^{|x|}$.

14.132. $y=\lg x+|\lg x|$.

14.133. $y=\frac{|x-1|}{x-1}(x^2-4)$.

14.134. $y=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$.

14.135. Как, зная график $f(x)$, построить график $|f(x)|$? Можно ли по графику $|f(x)|$ восстановить график $f(x)$?

14.136. Выразить простейшей формулой функцию f, которая одновременно является четной, нечетной, невозрастающей, неубывающей и периодической.

14.137. Если $\log_a\sin 40^\circ+\log_a\operatorname{tg}40^\circ+\log_a\cos^{-1}40^\circ=b$, то чему равна сумма $\log_a\sin 50^\circ+\log_a\operatorname{tg}50^\circ+\log_a\cos^{-1}50^\circ$?

14.138. Построить график функции

$$y=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & \text{при } x\neq 0,\\ 2 & \text{при } x=0\end{cases}$$

и показать, что $x=0$ является точкой минимума данной функции. Кроме того, на этом примере показать, что не обязательно слева от точки минимума находится промежуток убывания функции, а справа — промежуток возрастания; может быть и наоборот.

Для графика функции $y = ax^2 + bx + c$, изображенного на рисунке, определить, положительно, отрицательно или равно нулю каждое из чисел a, b и c (14.139–14.140):

14.139. См. рис. 14.3.

14.140. См. рис. 14.4.

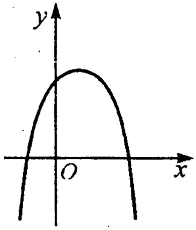


Рис. 14.3

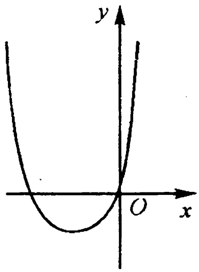


Рис. 14.4

14.141. Построить график функции $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, если $a > 0$ и $b^2 - 4ac = 0$.

Найти области определения функций (14.142–14.147):

14.142. $y = \dfrac{\lg x}{\arcsin(x-3)}$.

14.143. $y = \dfrac{1}{1-\sqrt{x^2}}$.

14.144. $y = \sqrt{\lg \dfrac{1-2x}{x+3}}$.

14.145. $y = (\log_3 x - \log_2 x)^{-1/2}$.

14.146. $y = \sqrt{2^x - 3^x}$.

14.147. $y = \log_3 \log_{1/2} x$.

Найти множества значений функций (14.148–14.150):

14.148. $y = \dfrac{\cos x}{\cos\dfrac{x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}}$.

14.149. $y = (\sin x + \cos x)^2$.

14.150. $y = 5\sin x - 12\cos x$.

Изобразить в координатной плоскости xOy заданные соотношения между переменными x и y (14.151–14.159):

14.151. $|x| + |y| = 1$.

14.152. $|x| - |y| = 1$.

14.153. $x + |x| = y + |y|$.

14.154. $|y| = \log_{0.5}|x|$.

14.155. $|y| = |\sin x|$.

14.156. $|y| = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

14.157. $3x - 4y + 12 > 0$ и $x + y - 2 < 0$.

14.158. $y + 3 \geq x^2 + 2x$ и $x + y \leq 3$.

14.159. $\log_2(x + y - 1) < 0$.

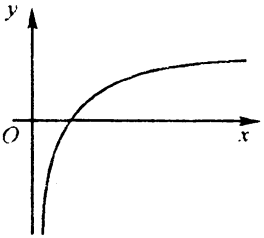


Рис. 14.5

14.160. На рис. 14.5 изображен график функции $y = \log_a x$ (масштабы на осях координат одинаковы). С помощью этого графика найти число a.

14.161. Найти наименьшее значение функции $y = x^2 - 6x + 11$.

14.162. Найти наименьшее значение функции $y = \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{x^2}{2}$.

14.163. Найти наибольшее значение функции $y = 1 + 2x - x^2$.

14.164. Показать, что парабола $y = x^2 - x + 5{,}35$ не пересекает график функции $y = 2\sin x + 3$.

14.165. Показать, что координаты всех точек прямой $x + y = 2$ удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \geq 2$, и истолковать этот факт геометрически.

Используя определение факториала $n! = 1 \cdot 2 \ldots n$, сократить дроби (14.166–14.169):

14.166. $\dfrac{n!}{(n+1)! - n!}$.

14.167. $\dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$.

14.168. $\dfrac{(n+2)n!}{(n+1)!}$.

14.169. $\dfrac{((n+2)! + n!)(n+1)}{(n+2)!(n^2 + 3n + 3)}$.

14.170. Показать, что графиком уравнения $\sin(x + y) = 0$ является бесконечная совокупность равноотстоящих параллельных прямых.

14.171. Дано:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ – рациональное число;} \\ -1, & \text{если } x \text{ – иррациональное число.} \end{cases}$$

Является ли эта функция постоянной? А ее квадрат?

14.172. Доказать, что при некоторых ограничениях для α и β из равенства $\sin(\alpha + \beta) = 3\sin(\alpha - \beta)$ следует, что $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$. Указать требуемые ограничения для α и β.

14.173. Определить z, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 3^z$, $\operatorname{tg}\beta = 3^{-z}$ и $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$.

14.174. Установить, является ли заданная последовательность убывающей или возрастающей:

а) $x_n = 3n^2 - n$; б) $x_n = n^2 - 3n$; в) $x_n = 7n - n^2$; г) $y_n = \lg 0{,}75^n$.

14.175. Найти целые значения x, при которых верно неравенство

$$\log_3(x+3)^2 \le 2.$$

14.176. Доказать, что сумма кубов n нечетных чисел равна $n^2(2n^2-1)$ при любом натуральном n.

14.177. Рассмотрев случаи $0 < a < 1$ и $a > 1$, выяснить, существует ли число $\sqrt{\log_a \operatorname{tg}40^\circ \cdot \log_a \operatorname{tg}70^\circ}$.

14.178. Показать, что если арифметический квадратный корень из произведения двух натуральных чисел есть число рациональное, то и квадратный корень из их частного — число рациональное.

14.179. Не находя x и y в отдельности, вычислить сумму $x^3y + xy^3$, если $x - y = 4$ и $xy = 3$.

14.180. Если $\log_b a = m$ и $\log_c b = n$, то чему равен $\log_{bc}(ab)$?

14.181. Доказать, что неравенство $\left|\sin x + \sqrt{3}\cos x\right| \le 2$ верно для любого значения x.

14.182. На числовой оси построить точки, изображающие числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

14.183. Что больше: 123% от 456 или 456% от 123? Какое свойство процентов можно сформулировать, обобщая ответ на этот вопрос? Обосновать это свойство.

14.184. На некоторый товар была дважды снижена цена — сначала на 15%, а затем еще на 20%. Каков общий процент снижения цены?

14.185. Если среднее арифметическое десятичных логарифмов двух чисел равно q, то чему равно среднее геометрическое кубов самих этих чисел?

14.186. С точностью до 0,01 найти $2\sqrt{5{,}21}$.

14.187. Показать, что число $\sqrt{12345{,}67}$ иррационально.

14.188. Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}$.

14.189. Что больше: а) $0{,}8^{-1{,}3}$ или $0{,}8^{-1{,}4}$; б) $\log_{1/3}0{,}5$ или $\log_3 0{,}5$?

14.190. Сколько цифр содержит число 2^{100}?

14.191. Доказать, что неравенство $3^n \geq n + 2$ верно, если n — натуральное число.

14.192. Произведение $(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)(2^{2^3}+1)$ представить в виде суммы степеней числа 2.

14.193. Через один первый кран вода равномерно вливается в бак и заполняет его за 3 ч, а через один второй — за 5 ч. За какое время вода заполнит бак, если открыть оба крана одновременно?

14.194. Через один первый кран вода равномерно вливается в бак и заполняет его за 3 ч, а через один второй кран вода равномерно выливается и наполненный бак опорожняется за 5 ч. За какое время вода заполнит порожний бак, если открыть оба крана одновременно?

14.195. Существует ли такая арифметическая прогрессия, у которой сумма любого числа ее членов равна: а) квадрату числа членов; б) кубу числа членов?

14.196. Разделить $a^{128} - b^{128}$ на произведение

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\dots(a^{64}+b^{64}).$$

14.197. Показать, что уравнение $x^8 + p^2x^6 + q^2x^4 + r^2x^2 = 0$ не имеет отличных от нуля корней.

14.198. Многочлен $x^4 + 4$ представить в виде произведения двух многочленов второй степени.

14.199. Найти произведение xy, если $x + y = a$ и $x^4 + y^4 = b^4$.

14.200. Многочлен $x^8 + y^8$ представить в виде произведения двух многочленов четвертой степени относительно x и y.

14.201. Разложить на множители $a^4 + 4b^4$.

14.202. Найти квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$, зная, что при $x = -0,75$ она принимает наибольшее значение 3,25, а при $x = 0$ принимает значение 1.

14.203. Из всех выпуклых четырехугольников с данными диагоналями m и n найти четырехугольник наибольшей площади.

14.204. Построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x+1 & \text{при } x \leq 0, \\ \cos x & \text{при } 0 < x < \pi, \\ x^2 - 3\pi x + 2\pi^2 & \text{при } x \geq \pi. \end{cases}$$

Указать значение функции в точке разрыва.

14.205. Для каких значений x равенство

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = \frac{1-x^8}{1-x}$$

является верным?

14.206. Доказать, что многочлен $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x + 16$ принимает положительные значения при любых действительных значениях x.

14.207. Доказать, что никакое четное число, не кратное четырем, нельзя представить как разность квадратов двух натуральных чисел.

14.208. Разложить на множители $x-3\sqrt{xy}+2y$ $(x>0,\ y>0)$.

14.209. Найти такие значения λ, при которых оба корня трехчлена $(\lambda-1)x^2+(\lambda-3)x+(\lambda-2)$ положительны.

14.210. Является ли простым или составным число $2^{2001}+1$?

14.211. Дана правильная несократимая дробь $\frac{p}{q}$. Доказать, что из равенства $\frac{a}{q}+\frac{p}{q}=1$ следует, что $\frac{a}{q}$ — несократимая дробь.

14.212. Нетрудно заметить, что равенство

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1$$

имеет относительно x степень не выше, чем вторую. Тем не менее оно имеет более двух корней — можно проверить, что числа $x_1=a, x_2=b$ и $x_3=c$ ему удовлетворяют. Чем это объяснить?

14.213. Доказать, что если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами имеет целый корень, то свободный член уравнения делится на этот корень.

14.214. Как решить уравнение

$$x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0,$$

если известно, что многочлен в его левой части разлагается на множители второй степени с целыми коэффициентами?

14.215. Дано произведение

$$\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right).$$

В типографии как-то случилось, что обе дроби выпали из набора и получилось произведение

$$(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).$$

Наборщик утверждает, что, несмотря на потерю дробей, получившееся выражение тождественно данному. Прав ли он?

14.216. При каких значениях a график функции $y=(a+5)x^2+x+a-3$ пересекает ось абсцисс по разные стороны от оси ординат?

14.217. Указать область определения функции $y=\log_2(x^2-2x+3)$. Имеет ли график этой функции какую-либо ось симметрии? Если да, то какую?

14.218. Указать область определения функции $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-10x+25}}$. Показать, что график этой функции симметричен относительно прямой $x=5$.

14.219. Показать, что функция $y=\dfrac{2x+3}{5x-2}$ совпадает с функцией, обратной данной.

14.220. Указать, какие из следующих функций являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

а) $y=\sin^3 x+\operatorname{ctg}^5 x$; б) $y=\sin 2x+\cos 3x$;

в) $y=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$; г) $y=\sin^4 x+x^2+1$;

д) $y=x|x|$; е) $y=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$;

ж) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$; з) $y=\arccos 3x$;

и) $y=5\operatorname{arctg} x$; к) $y=-\operatorname{arcctg} x$.

14.221. Найти значения функции $f(n)=\arcsin\sin n$ при $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ и 7.

14.222. Можно ли утверждать, что сумма двух периодических функций есть функция периодическая?

14.223. Доказать, что произведение четного числа нечетных функций есть функция четная.

14.224. Величина y есть целая часть (характеристика) логарифма x по основанию 2. Построить график y как функции x при изменении x от 0,5 до 8,0.

14.225. Доказать, что если p и q — простые числа, большие 3, то p^2-q^2 делится на 24.

14.226. Доказать, что если кубы двух действительных чисел равны, то равны и сами числа.

14.227. Верно ли, что три произвольных рациональных числа a, b и c всегда можно рассматривать как члены некоторой арифметической прогрессии?

14.228. Дано $n<m$, где n и m — натуральные числа. В какой последовательности располагаются на числовой оси точки, изображающие числа 1, $\dfrac{n}{m}$, $\dfrac{m}{n}$? Какая из двух последних точек лежит ближе к точке, изображающей число 1?

14.229. Почему при делении на 3 чисел, равных квадрату целого числа, в остатке никогда не получается 2?

14.230. Доказать, что при любом натуральном n выражение $\dfrac{n^3}{6}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{3}$ — натуральное число.

14.231. Доказать, что если каждое из двух данных чисел является суммой квадратов двух чисел, то произведение данных чисел можно представить в виде суммы квадратов двух чисел.

14.232. Доказать, что если n — простое число, большее 3, то $\dfrac{n^2-1}{24}$ — целое число.

14.233. Доказать, что n^7-n делится на 42, если n — любое целое число.

14.234. Доказать, что $1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

14.235. Доказать, что $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

14.236. Показать, что всякое нечетное число можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

14.237. Используя метод математической индукции, доказать справедливость неравенства $(1+a)^n \geq 1+na$ (n — натуральное число, $n \geq 2$ и $a > -1$).

14.238. Доказать, что $|\alpha_1+\alpha_2| \leq |\alpha_1|+|\alpha_2|$. На основании этого методом математической индукции доказать, что $|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n| \leq |\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|$.

14.239. Как использовать тождество $\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ для доказательства справедливости неравенства $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$?

14.240. Доказать, что для всякого $n \in N$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2.$$

14.241. Исключить t из равенств $x=10^{\cos t}$, $y=10^{\sin t}$.

14.242. Исключить φ из равенств $u=10^{\cos^2\varphi}$, $v=10^{\sin^2\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

14.243. Чему равна сумма чисел α и β, если $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ являются корнями уравнения $6x^2-5x+1=0$?

14.244. Для чисел α и β таких, что $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, значения $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$ являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$ (предполагается, что оба корня этого уравнения положительны). Найти $\alpha+\beta$.

14.245. Выразить $\operatorname{tg} 3\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

14.246. Пусть $\sin 10° = a$. Найти $\sin 20°$ двумя способами: по формуле синуса двойного угла и формуле синуса разности углов 30° и 10°. Почему получились «разные» ответы?

14.247. С помощью формулы, связывающей $\sin 3\alpha$ и $\sin\alpha$, доказать, что $0{,}1 < \sin 10° < 0{,}2$.

14.248. Доказать, что сумма $\sin^n x+\cos^n x$ тождественно равна единице только при $n=2$.

14.249. Значения функции $y=\sin^k x+\cos^k x$ на отрезке $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ сравнить с единицей для $k=0, 1, 2, 3$.

14.250. Показать, что $\sin 495° - \sin 795° + \sin 1095° = 0$.

14.251. Выразить $\sin^2 6°$ через $\sin 12°$.
14.252. Существует ли угол, для которого косинус равен:

$$\text{а) } a+\frac{1}{a} \text{ при } a\neq 0;\ \text{б) } \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}?$$

14.253. Существует ли такой угол, для которого числа $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ являются соответственно его тангенсом и котангенсом?

Найти периоды функций (14.254–14.255):

14.254. а) $y=\cos x+\sin\frac{x}{3}$; б) $y=\sin x+\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{5}$.
14.255. $y = 15\sin^2 12x + 12\sin^2 15x$.
14.256. Построить острый угол, тангенс которого в 2 раза больше его синуса.
14.257. Найти $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
14.258. Доказать, что $8\cos 20°\cos 40°\cos 80° = 1$.
14.259. При каких значениях α и β возможно равенство

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha+\beta)?$$

14.260. Найти наибольшее значение функции

$$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(2x+\frac{2\pi}{15}\right).$$

14.261. Чему равно наибольшее значение функции $y=\sin\sin x$?
14.262. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 3\sin^2 x + 2\cos^2 x$.
14.263. Что больше: tg 1 или arctg 1?
14.264. Чему равна дробь $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=m$?

14.265. Вычислить $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$, $\cos\beta=-\frac{1}{2}$.

14.266. Определить знак произведения $\sin 2\cdot\sin 3\cdot\sin 5$.

14.267. Что меньше: $\frac{\pi}{4}$ или $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{8}$?

14.268. Что меньше: $\frac{\pi}{4}$ или $\arcsin\frac{2}{3}+\arccos\frac{2}{3}$?

14.269. Найти такие два числа m и M, чтобы неравенство $m\leq\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\leq M$ было верным при любых α и чтобы разность между M и m была наименьшей.

14.270. Показать, что знаки $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ совпадают при любом значении $\alpha\neq k\pi$ (k — целое).

14.271. Найти такие значения a и b, при которых функция $y=(a-b)\sin^2 x + 0{,}5(a+b)\cos^2 x$ тождественно (для всех значений x) равна 2.

14.272. Возможно ли равенство $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt[3]{3}$?

14.273. Знак $\vee$ заменить одним из знаков <, >, ≤, ≥ так, чтобы следующие соотношения были верными: а) $\lg \sin \alpha \vee 0$; б) $\sin \alpha + \cos \alpha \vee 1{,}5$; в) $\sqrt[3]{\sin\alpha} + \sqrt[3]{\cos\alpha} \vee 1$; г) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \vee 1{,}9$ (α — острый угол).

14.274. Доказать, что если в треугольнике выполняется зависимость $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$, то он равнобедренный.

14.275. Доказать, что если отношение косинусов двух углов треугольника равно отношению синусов тех же углов, то треугольник равнобедренный.

14.276. Доказать, что для любого треугольника со сторонами a, b, c и углами A, B, C, лежащими соответственно против этих сторон, справедливо равенство

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0.$$

14.277. Доказать, что если в треугольнике выполняется равенство $\frac{a-b}{a} = 1 - 2\cos C$, то он равнобедренный.

14.278. Пусть A, B, C — углы треугольника, причем C — тупой угол. Доказать, что $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B < 1$.

14.279. Доказать, что во всяком треугольнике сумма попарных произведений котангенсов всех углов равна единице.

14.280. Доказать, что для всякого треугольника со сторонами a, b и c и углами A, B, C его площадь S можно определить по формуле

$$S = \frac{1}{2}(abc)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}.$$

Построить графики функций (14.281–14.298):

14.281. $y = |x-2|(x+2)$.

14.282. $y = \frac{x-1}{|x-1|}(x^2-4)$.

14.283. $y = \sqrt{10^{\lg x^2}}$.

14.284. $y = x^{\log_x 2}$.

14.285. $y = 2^{\log_2 x}$.

14.286. $y = 2^{\sqrt{-\sin^2 x}}$.

14.287. $y = |x|^{1/2}$.

14.288. $y = 5^{\frac{1}{3}\log_5(x-1)}$.

14.289. $y = \frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{|x|}$.

14.290. а) $y = x^2 - 7x + 6$; б) $y = |x|^2 - 7|x| + 6$;

в) $y = |x^2 - 7x + 6|$; г) $y = \left||x|^2 - 7|x| + 6\right|$.

14.291. $y=\frac{x}{|x|}\sin 2x.$

14.292. $y=\frac{2-x}{|x+1|}(x^2-x-2).$

14.293. $y=\frac{x-1}{|x-3|}(x^2-9).$

14.294. $y=\frac{x^2+5x-6}{x-1}.$

14.295. $y=\log_2\frac{x^2-4}{x-2}.$

14.296. $y=0{,}5^{\frac{2x^2-6x}{x-3}}.$

14.297. $y=\log_3\frac{x^2-9}{|x|-3}.$

14.298. $y=\left|\log_2\frac{x-4}{x^2-16}\right|.$

14.299. Отличаются ли друг от друга графики функций $y=\lg x^2$ и $y=2\lg x$?

14.300. Построить на одном чертеже графики функций $y=\lg x^2$ и $y=\lg^2 x$.

14.301. На вступительных экзаменах один из поступающих предложил следующее решение уравнения

$$\sin 2x+7\cos 2x+7=0:$$

выразил $\sin 2x$ и $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$ и получил уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+\frac{7(1-\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x}+7=0,$$

откуда нашел, что $\operatorname{tg}x=-7$ и $x=\pi n-\operatorname{arctg}7$. Все ли верно в таком решении?

14.302. Найти $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и α не принадлежит I четверти.

14.303. Вычислить $\sin(\arcsin(-0{,}5)-\arccos(-0{,}5\sqrt{3})+\operatorname{arctg}\sqrt{3})$.

14.304. Вычислить $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{1}{3}\right)$.

14.305. Цифры трехзначного числа записаны в обратном порядке. Показать, что разность между полученным и данным числами делится на 9.

14.306. Найти произведение $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\,\ldots\sqrt[512]{a}$.

14.307. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases}x^{-1}+y^{-1}=5,\\ y^{-1}+z^{-1}=3,\\ z^{-1}+x^{-1}=8\end{cases}$$

не имеет решений.

14.308. В предположении, что $a \neq 10^n$ (a и n — целые), доказать, что $\lg a$ есть число иррациональное.

14.309. Возможно ли равенство $x = \log_2 x$?

14.310. Решить уравнение $\log_y x + \log_x y = 2$.

14.311. Для каких углов I четверти выполняется неравенство $\sin\alpha \geq \sin 2\alpha$?

14.312. Показать, что сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом целого числа.

14.313. Найти значения x, при которых все значения функции $y = x^2 + 5x + 6$ принадлежат промежутку $[6, 12]$.

14.314. Доказать, что если квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами p и q имеет рациональные корни, то эти корни — целые числа.

14.315. Не решая уравнения $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-5} = 10$, показать, что оно не имеет корней.

14.316. Указать область определения и множество значений функции $y = \log_5 \sin x$.

14.317. Указать область определения функции $y = \sqrt{\log_3 \cos x}$.

14.318. Для каких значений x имеет смысл равенство

$$\lg\frac{x(x-4)}{1-x} = \lg x + \lg(x-4) - \lg(1-x)?$$

14.319. При каких значениях x функция $y = |x-1| + |x-3|$ принимает наименьшее значение? Найти это значение.

14.320. Известно, что дробь $\frac{a+b}{a-b}$ сократима (a, b — не оба четные числа, $b \neq 0$, $a \neq b$). Сократима ли дробь $\frac{a}{b}$?

14.321. Имеет ли уравнение $x^3 + 2x - 3 = 0$ отрицательные корни?

14.322. Многочлен $a^4 + 2a^3 + 6a - 9$ разложить на множители.

14.323. Решить уравнение $x^{1/\lg x} = 10$.

14.324. Решить уравнение $x^{\lg 2} \cdot 2^{-\lg x} = 1$.

14.325. Вычислить без таблиц $\lg \operatorname{tg} 22^\circ + \lg \operatorname{tg} 68^\circ$.

14.326. Доказать, что сумма трех степеней числа 3 с натуральными подряд идущими показателями, меньший из которых не меньше числа 2, делится без остатка на 117.

14.327. Решить неравенство $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.

14.328. Вычислить $\log_{a_1 a_2 \ldots a_k} x$, если $\log_{a_1} x = b_1$, $\log_{a_2} x = b_2$, … …, $\log_{a_k} x = b_k$; $x \neq 1$.

14.329. Сколько существует целых чисел, у которых характеристика их десятичных логарифмов равна одному и тому же числу: а) $n (n \in N)$; б) $-m (m \in N)$?

14.330. Решить систему уравнений $\begin{cases} (x-a)(y-b) = c, \\ \dfrac{x-a}{y-b} = c. \end{cases}$

14.331. Катеты прямоугольного треугольника равны $\log_4 9$ и $\log_3 16$. Найти площадь треугольника.

14.332. Найти наибольшее значение функции $y = \dfrac{x^2}{x^4 + 25}$.

14.333. Найти все значения x, для которых существует сумма

$$\log_{0,5} x + \log_{0,5}^2 x + \ldots + \log_{0,5}^n x.$$

14.334. Доказать, что $x = 1$ — единственный корень уравнения $x^3 + 3x - 4 = 0$.

14.335. Какой знак имеет число $\log_{\pi/4} \operatorname{tg} 1$?

14.336. Имеет ли решение уравнение $\sin x = 2 \sin 47° \cos 44°$?

14.337. Решить уравнение $\dfrac{4}{\sqrt[5]{(11x-1)^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{(11x-1)^2}}{4}$.

14.338. Показать, что координаты только одной точки плоскости удовлетворяют уравнению $x^2 - 4x + y - 6\sqrt{y} + 13 = 0$, и найти эту точку.

14.339. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y + z = 2, \\ -x + y + z = 4. \end{cases}$

14.340. Показать, что уравнение $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ имеет только один корень. Какой?

14.341. Многочлен $k^5 + k^4 - 2k^3 - 2k^2 + k + 1$ разложить на множители.

14.342. Решить уравнение $\cos 2x = x^2 + 1$.

14.343. Найти наибольшее значение функции $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$.

14.344. Найти наибольшее значение функции $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2 - 2x}$.

14.345. Найти сумму $4 - \dfrac{8}{3} + \dfrac{16}{9} - \dfrac{32}{27} + \ldots + 4\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} + \ldots$.

14.346. Решить уравнение $\cos(\pi x^2) = -0,5$.

14.347. Решить уравнение $\cos(\pi\sqrt{x}) = 1$.

14.348. При каких значениях a уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение?

14.349. Число членов геометрической прогрессии четно. Сумма всех ее членов в 3 раза больше суммы членов, расположенных на нечетных местах. Определить знаменатель прогрессии.

14.350. Найти $1 + 2^x + 2^{2x} + \ldots + 2^{kx} + \ldots$, если k — число натуральное, а $x < 0$.

14.351. Без преобразования уравнения $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 17$ показать, что оно не имеет корней.

14.352. Пусть A, B, C — углы треугольника. Показать, что $\sin A \sin B - \cos C = \cos A \cos B$.

14.353. Дано уравнение $3\sin 2x + \cos 2x = 4$. Имеет ли оно решение?

14.354. При каких значениях k корни уравнения $x^2 - (2k + 1)\,x + k^2 = 0$ относятся как $1 : 4$?

14.355. При каких значениях a уравнение $x^2 - 2x - \log_3 a^2 = 0$ имеет корни?

14.356. Составить биквадратное уравнение, если числа $\sqrt{3} - 1$ и $\sqrt{3} + 1$ являются двумя его корнями.

14.357. Решить уравнение $3^{2+\log_9 25} = 5 \cdot 9^{2/x}$.

14.358. Указать наименьшее значение функции

$$y = \log_2(x^2 - 4x + 20).$$

14.359. Может ли синус какого-либо угла быть равным:

а) $\lg a + \dfrac{1}{\lg a}\,(a > 0,\ a \neq 1)$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}\right)^{-1}$; в) $\cos 40^\circ + \cos 50^\circ$?

14.360. Найти без помощи таблиц $c = \sqrt[15]{a^{-5}b^3}$, если $\lg a = -0{,}6498$, а $\lg b = 13{,}9170$.

14.361. Выразить $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$ и с помощью полученной формулы вычислить $\sin 54^\circ$, если известно, что $\sin 18^\circ = 0{,}25(\sqrt{5} - 1)$.

14.362. Найти x из условий $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3 + \sqrt{x}}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{2}$, $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$.

14.363. Решить уравнение $x^2 \cdot 2^x + 8 = 2x^2 + 2^{x+2}$.

14.364. При каких значениях m может выполняться равенство

$$\cos\varphi = \frac{m^2 - 4m - 4}{m^2 + 1}, \text{ если } 0 < \varphi < \frac{\pi}{3}?$$

14.365. При каких значениях a возможно равенство $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{2a^2+2a}{a^2-6a+9}$, если $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$?

14.366. Показать, что если $x=a\cos\alpha\sin\beta$, $y=a\sin\alpha\sin\beta$, $z=a\cos\beta$, то $x^2+y^2+z^2=a^2$.

14.367. Найти произведение корней уравнения $z^{\log_5(3z)}=25\sqrt[3]{z^4}$.

14.368. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2+ax+a-2=0$ является наименьшей?

14.369. Составить уравнение параболы с осью, параллельной оси ординат, если эта парабола проходит через точки $(-2;-3)$, $(-1;2)$ и $(1;0)$. Показать, что она пересекает ось абсцисс по разные стороны от оси ординат.

14.370. В каких точках график функции $y=\sqrt{-x+9}-\sqrt{-x+4}$ пересекается с прямой $y=1$?

14.371. Найти целые значения x, удовлетворяющие неравенству

$$0{,}000729^3<0{,}3^{x^2-5x+4}<11\frac{1}{9}.$$

14.372. Найти неотрицательные решения неравенства

$$\sqrt[15]{32^{3x^2-8x}}<\left(\frac{2}{15}\right)^{\log_{7,5}0,5}.$$

Установить, для каких значений x выполняются равенства (14.373–14.376):

14.373. $\left|x^2-8x+12\right|=x^2-8x+12.$

14.374. $\left|\dfrac{x^2-10x+16}{x^2-10x+24}\right|=\dfrac{x^2-10x+16}{x^2-10x+24}.$

14.375. $\left|\dfrac{x^3}{x^2-1}\right|=\dfrac{x^3}{1-x^2}.$

14.376. $\left|\lg^2(1-9x)+\lg(1-9x)-2\right|=2-\lg(1-9x)-\lg^2(1-9x).$

14.377. Найти натуральное значение k из условия

$$2^2\cdot2^4\cdot2^6\ldots2^{2k}=0{,}25^{-28}.$$

14.378. Решить уравнение $x^2+2x-3|x+1|+3=0.$

14.379. Решить уравнение: а) $|x+1|+|x-1|=2x^3$; б) $\left|x^2-3|x|+1\right|=1.$

Решить неравенства (14.380–14.383):

14.380. $|x+1|>2|x+2|.$

14.381. $\log_2(x+1)>\log_{x+1}16.$

14.382. $\log_{0,5}(2^x-1)>x-1$. **14.383.** $\log_{x-3}(x-1)<2$.

14.384. Решить систему неравенств $\frac{1}{\sqrt{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{|\sin x|}<1$.

14.385. Показать, что система уравнений

$$\begin{cases}2^{\log_2 x}-3^{\log_3 y}=1,\\ 2x-3y=4\end{cases}$$

не имеет решений.

14.386. Найти целые значения x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}(\log_3 x)^{\log_9 x}\le 1,\\ x>1.\end{cases}$$

14.387. Решить систему уравнений $\begin{cases}2x-3|y|=1,\\ |x|+2y=4.\end{cases}$

14.388. Доказать, что функция $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ является нечетной.

14.389. При каких значениях x функция $y=\frac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{ctg}^2 x+1$ достигает наименьшего значения? Найти это значение.

14.390. Каково наибольшее значение функции $y=\sin x+\cos x$? При каких значениях x оно достигается?

14.391. Показать, что график функции $y=\frac{\lg 5+\lg(x^2+1)}{\lg(x-2)}-2$ ни в одной точке не пересекает ось Ox.

14.392. На графике функции $y=0{,}8|x|\cdot\frac{x^2+1}{x+1}$ найти точку, ордината которой в 2 раза больше ее абсциссы (сам график строить не обязательно).

14.393. Доказать, что графики функций $y=4^x-3\cdot 2^x$ и $y=-(5\cdot 2^{-x}+1)$ не имеют общих точек.

14.394. Найти точки пересечения параболы $y=x^2+1$ и кривой $y=|3x^2-5|$.

14.395. Найти точки пересечения кривой $y=12x^2-5|x|-36$ и параболы $y=6x^2-5x-12$.

14.396. Для каких значений x график функции $y=x+3+\sqrt{(x+1)(x+7)}$ расположен ниже оси абсцисс?

14.397. Определить, при каком значении k график функции $y=\lg(kx)-2\lg(x+1)$ имеет только одну общую точку с осью абсцисс.

14.398. Указать все точки на оси Ox, в которых не определена функция

$$y=\sqrt{3\cdot 81^{\frac{1}{x}}-10\cdot 9^{\frac{1}{x}}+3}.$$

14.399. При каких значениях x график функции $y=0{,}7^{\lg(x^2-8x+8)}$ расположен не ниже прямой $y=1$?

14.400. Найти значения x, при которых график функции $y=$ $=\log_{1/3}(x^2-8x)+2$ расположен не ниже оси абсцисс.

14.401. В каких точках график функции $y=\log_3(\sqrt{x^2+21}-\sqrt{x^2+12})$ пересекает ось Ox?

14.402. Найти точку пересечения графика функции

$$y=(3{,}6^{1+\log_{3,6}(10+x)})^{\log_6(5-x)}$$

с осью ординат.

14.403. Найти точку пересечения графиков функций $y=\log_2(x+14)$ и $y=6-\log_2(x+2)$.

14.404. Найти абсциссу той точки графика функции

$$y=\log_2\log_6(2^{\sqrt{x}+1}+4),$$

ордината которой равна единице.

14.405. Найти точки пересечения графика функции $f(x)=x^{\lg x}-100000x^4$ с осью абсцисс.

14.406. Найти целые значения x, принадлежащие области определения функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\sin x}}{\lg(-3x^2+10x-3)}$.

Найти области определения функций (14.407–14.410):

14.407. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3x-10}{x^4-9x^2}}$. **14.408.** $f(x)=\sqrt{\log_x 2-\log_2 x}$.

14.409. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x+2x^2}}$. **14.410.** $f(x)=\sqrt{1-\lg(x-1)}+\sqrt{\dfrac{4-x}{x+2}}$.

ГЛАВА 15

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ И ПЕРВООБРАЗНЫХ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

(a, b — постоянные)

Первообразная $F(x)$	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
ax	a	0
$\frac{x^{p+1}}{p+1}$, $p \neq -1$	x^p, $p \in R$	px^{p-1}
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x	e^x
$x \ln x - x$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$x \log_a \frac{x}{e}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$-\ln\|\cos x\|$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln\|\sin x\|$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{a} F(u) = \frac{1}{a} F(ax+b)$, $a \neq 0$	$f(u) = f(ax+b)$	$af'(u) = af'(ax+b)$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1°. ***Правила дифференцирования*** (u, v — функции; c — постоянная):

$$(cu)' = cu'; \tag{15.1}$$

$$(u+v)' = u' + v'; \tag{15.2}$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \qquad (15.3)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \qquad (15.4)$$

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))\,f'(x), \text{ где } g(f(x)) \text{ — сложная функция.} \qquad (15.5)$$

2°. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ записывается в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \qquad (15.6)$$

где $(x_0;\ y_0)$ — точка касания.

3°. ***Правила нахождения первообразных***:

а) если F — первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F + G$ есть первообразная для $f + g$;

б) если F — первообразная для f, а k — постоянная, то kF есть первообразная для kf;

в) если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $k \neq 0$ и b — постоянные, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для функции $f(kx + b)$.

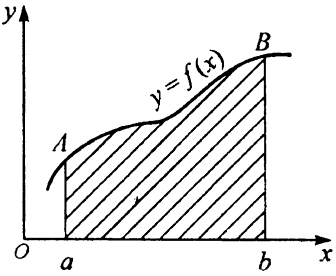


Рис. 15.1

4°. Формула Ньютона—Лейбница имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (15.7)$$

5°. Площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 15.1), ограниченной осью Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком неотрицательной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, находится по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (15.8)$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{2x - 4}$.

□ Функция $f(x) = \frac{x^3 - 8}{2x - 4}$ в точке $x = 2$ не определена. Разложив числитель на множители по формуле (2.14), представим эту функцию в виде $f(x) = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{2(x-2)}$. В области определения функции $f(x)$ выражение

$x-2\neq 0$, поэтому дробь можно сократить на $x-2$. Тогда получим

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{2}=f(2)=6. \blacksquare$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$.

□ Функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$ в точке $x=4$ не определена. Умножив числитель и знаменатель на $\sqrt{x^2-7}+3\neq 0$ и используя формулу (2.8), преобразуем дробь:

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7-9}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{\sqrt{x^2-7}+3}=f(4)=\frac{4}{3}. \blacksquare$$

Пример 3. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x-2}$ в точке его пересечения с осью ординат.

□ Согласно формуле (15.6), уравнение касательной записывается в виде $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, где $(x_0;\, y_0)$ — точка касания. Абсцисса x_0 точки пересечения графика с осью Oy равна нулю, а ордината $y_0=f(0)=-2$; значит, $(0;\,-2)$ — точка касания. Далее, используя формулу (15.4) и таблицу производных, получим

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-(x^2+4)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-4}{(x-2)^2},$$

откуда $f'(0)=-1$. Итак, искомое уравнение касательной имеет вид $y-(-2)=$ $=-1\cdot(x-0)$, или $y=-x-2$. $\blacksquare$

Пример 4. Найти промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x^2}$.

□ Область определения функции — вся числовая ось, кроме точки $x=0$. Используя формулу (15.4) и таблицу производных, находим

$$f'(x)=\frac{2(x-2)x^2-(x-2)^2 2x}{x^4}=\frac{4(x-2)}{x^3};$$

$f'(x) = 0$ только при $x = 2$. Составим таблицу:

Интервал	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	–	0	+
$f(x)$	↗	↘	min	↗

Следовательно, $x = 2$ — точка минимума; функция возрастает на $(-\infty, 0)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(0, 2)$. ■

Пример 5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

□ Сначала найдем значения $f(x)$ на концах данного отрезка: $f(0) = 0$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$, а затем критические точки, принадлежащие этому отрезку.

Имеем $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$; $f'(x) = 0$, если $\cos x + \cos 2x = 0$, откуда $2\cos\frac{3x}{2} \times \times \cos\frac{x}{2} = 0$. Из уравнения $\cos\frac{3x}{2} = 0$ следует, что $\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, т.е. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$, а из уравнения $\cos\frac{x}{2} = 0$ — что $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, т.е. $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Второе решение является частью первого, значит, решение уравнения $f'(x) = 0$ имеет вид $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Отрезку $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежат точки $x_1 = \frac{\pi}{3}$ и $x_2 = \pi$.

Находим значения $f(x)$ в критических точках: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1{,}5\sqrt{3}$, $f(\pi) = 0$. Сравнивая между собой числа $f(0)$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f(\pi)$, заключаем, что $y_{\text{наим}} = -2$, $y_{\text{наиб}} = 1{,}5\sqrt{3}$. ■

Пример 6. В арифметической прогрессии шестой член равен 3, а разность прогрессии больше 0,5. При каком значении разности этой прогрессии произведение первого, четвертого и пятого ее членов является наибольшим?

□ Согласно условию, $a_6 = a_1 + 5d = 3$, откуда $a_1 = 3 - 5d$. Обозначим произведение $a_1a_4a_5$ через y. Тогда получим $y = a_1(a_1+3d)(a_1+4d) = -10d^3 + 51d^2 - 72d + 27$. Для отыскания значения d, при котором функция y принимает наибольшее значение, сначала найдем производную

$$y' = -30d^2 + 102d - 72 = -6(5d^2 - 17d + 12),$$

а затем, решив уравнение $5d^2 - 17d + 12 = 0$, найдем ее корни $d_1 = 1$; $d_2 = 2{,}4$. Так как по условию $d > 0{,}5$, то исследуем поведение функции y на интервале $(0{,}5; \infty)$. Составим таблицу:

Интервал изменения d	$(0{,}5;\ 1)$	1	$(1;\ 2{,}4)$	2,4	$(2{,}4;\ \infty)$
y'	–	0	+	0	–
y	↘	min	↗	max	↘

На интервале $(0{,}5; \infty)$ имеется только одна точка максимума функции y, а именно $d = 2{,}4$. Это значит, что на интервале $(0{,}5; \infty)$ функция y достигает наибольшего значения при $d = 2{,}4$. ■

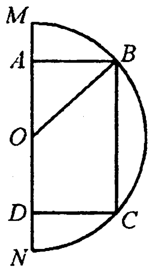


Рис. 15.2

Пример 7. Площадь поверхности сферы равна 27π. Какова высота цилиндра наибольшего объема, вписанного в эту сферу?

□ Пусть цилиндр образован вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг диаметра MN (рис. 15.2). Полагая $AD = x$, выразим объем V цилиндра как функцию от x. Имеем $S_{\text{сферы}} = 4\pi OB^2$, т. е. $4\pi OB^2 = 27\pi$, откуда $OB^2 = \frac{27}{4}$. Далее, из ΔOAB следует, что $AB^2 = OB^2 - OA^2$, т. е. $AB^2 = \frac{27}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{27 - x^2}{4}$. Используя формулу объема цилиндра (11.15), получим

$$V(x) = \pi AB^2 \cdot AD = \pi\frac{27 - x^2}{4}x = \frac{\pi}{4}(27x - x^3).$$

По смыслу задачи, $0 < x < 2OB$, т. е. $0 < x < 3\sqrt{3}$. Имеем $V'(x) = \frac{\pi}{4}(27 - 3x^2) = \frac{3}{4}\pi(9 - x^2)$; $V'(x) = 0$, если $9 - x^2 = 0$. Отсюда находим $x = 3$ (так как $x > 0$).

Если $0 < x < 3$, то $V'(x) > 0$, а если $3 < x < 3\sqrt{3}$, то $V'(x) < 0$. Следовательно, $x = 3$ — точка максимума. Итак, при $x = 3$ функция $V(x)$ достигает наибольшего значения. ■

Пример 8. Для функции $f(x) = 2\sin 5x + \sqrt{x} + \dfrac{3}{5}$ найти первообразную $F(x)$ при условии, что графики функций $f(x)$ и $F(x)$ пересекаются в точке, лежащей на оси Oy.

□ Так как для функции $\sin x$ одной из первообразных является $-\cos x$, то, согласно правилам п. 3°, первообразная функции $2\sin 5x$ есть $-\dfrac{2}{5}\cos 5x$. Далее, первообразная функции $\sqrt{x} + \dfrac{3}{5}$ есть $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + \dfrac{3}{5}x$. Тогда для $f(x)$ первообразной функцией является $F(x) = -\dfrac{2}{5}\cos 5x + \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + \dfrac{3}{5}x + C$ при произвольном значении постоянной C. Необходимо найти такое значение C, при котором графики функций $F(x)$ и $f(x)$ пересекаются в точке, лежащей на оси Oy. Это значит, что при $x = 0$ должно быть выполнено равенство $F(0) = f(0)$. Но $F(0) = -\dfrac{2}{5} + C$, а $f(0) = \dfrac{3}{5}$; следовательно, $-\dfrac{2}{5} + C = \dfrac{3}{5}$, откуда $C = 1$. Итак, искомая первообразная имеет вид $F(x) = -\dfrac{2}{5}\cos 5x + \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + \dfrac{3}{5}x + 1$. ■

Пример 9. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^3$, $y = \dfrac{8}{3}\sqrt{x}$ и $y = 8$.

□ Графики заданных функций изображены на рис. 15.3. Требуется найти площадь S фигуры OAB (на рисунке она заштрихована).

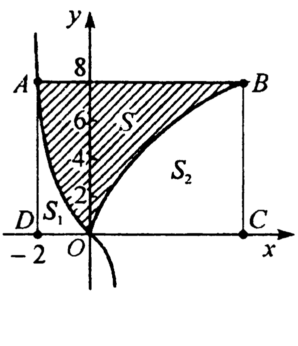


Рис. 15.3

Очевидно, что искомая площадь равна разности между площадью прямоугольника $ABCD$ и площадями S_1 и S_2 двух криволинейных треугольников OAD и OBC. Найдем координаты точек A и B. Решив системы уравнений $\begin{cases} y = -x^3, \\ y = 8 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = \dfrac{8}{3}\sqrt{x}, \\ y = 8, \end{cases}$ получим $A\ (-2;\ 8)$ и $B\ (9;\ 8)$. Далее имеем $C(9;\ 0)$, $D(-2;\ 0)$, $CD = 11$, $BC = 8$, откуда $S_{ABCD} = 11 \cdot 8 = 88$. Площади криволинейных треугольников OAD и OBC находим с помощью интеграла по формуле (15.8):

$$S_1=\int\limits_{-2}^{0}(-x^3)dx=-\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-2}^{0}=4,\ S_2=\frac{8}{3}\int\limits_{0}^{9}\sqrt{x}\,dx=\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Bigg|_{0}^{9}=48.$$

Итак, $S=S_{ABCD}-S_1-S_2=88-4-48=36$ (кв. ед.). ■

Вычислить (15.001–15.010):

15.001. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$.

15.002. $\lim\limits_{x\to0{,}5}\dfrac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$.

15.003. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$.

15.004. $\lim\limits_{x\to0{,}4}\dfrac{5x^3-2x^2+5x-2}{5x^4-2x^3-5x^2+2x}$.

15.005. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6}$.

15.006. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2+2x^3}$.

15.007. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-3}$.

15.008. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$.

15.009. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$.

15.010. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$.

Вычислить пределы и подтвердить или отвергнуть данные утверждения (15.011–15.018):

15.011. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{3x-9}=5+\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-16}{8-x^3}$.

15.012. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}>\lim\limits_{x\to-0{,}5}\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-18x-10}$.

15.013. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}<\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}$.

15.014. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}<\cos\dfrac{\pi}{10}$.

15.015. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2+5x-6}>\lim\limits_{x\to5}\dfrac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}$.

15.016. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2-1}\cdot\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}<0$.

15.017. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{9x^3+9x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x}$.

15.018. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x(x^2-4)}-\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x+2}-16}{4^x-2^4}=1$.

Найти производные функций (15.019–15.033):

15.019. а) $y=3\sqrt[3]{x^2}+2x^3\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^3}$. б) $y=(x^3-1)^5+\dfrac{x^2}{2}$.

15.020. а) $y=(x^4-x^2+1)^3$; б) $y=\dfrac{x^3-3x^2+1}{x-1}$.

15.021. а) $y=\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$; б) $y=\lg\dfrac{10-x}{x+2}$.

15.022. а) $y=\sqrt[3]{4x^3-7x^2+1}$; б) $y=(\sin^2 x+1)e^x$.

15.023. а) $y=\sqrt[3]{x^2-1}\,(x^4-1)$; б) $y=\ln\sqrt{x^2-1}$.

15.024. а) $y=e^{x^3-5x^2}$; б) $y=\sqrt[3]{x(1-x)^2}$.

15.025. а) $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2}$; б) $y=\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}2x$.

15.026. а) $y=x^2\cos\dfrac{1}{x}$; б) $y=x+\sin x\cos x$.

15.027. а) $y=\cos^2 3x$; б) $y=\sin^2\dfrac{x}{2}$.

15.028. а) $y=\operatorname{tg}\sin x$; б) $y=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$.

15.029. а) $y=\dfrac{2}{3}\left(x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}\right)-x$; б) $y=\sqrt{1-x^3}-x\sqrt{x}$.

15.030. а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4x}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3}$.

15.031. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x}$.

15.032. а) $y=(x^3+1)\cos 2x$; б) $y=\sin 2x\operatorname{tg}x$.

15.033. а) $y=x\sqrt[3]{3x^2+1}$; б) $y=\sin\dfrac{\pi}{10}-\ln\dfrac{3}{x}$.

15.034. Решить уравнение $f'(x)-\frac{2}{x}f(x)=0$, если $f(x)=x^3\ln x$.

15.035. Решить неравенство $f'(x)<g'(x)$, если $f(x)=\frac{x^3+1}{x}$, $g(x)=$ $=5x+\frac{1}{x}$.

15.036. Решить неравенство $f'(x)+\varphi'(x)\le 0$, если $f(x)=2x^3+12x^2$, $\varphi(x)=9x^2+72x$.

15.037. Решить уравнение $1+5f(x)+6f'(x)=0$, если $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

Вычислить значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной (15.038–15.059):

15.038. $f(x)=\sqrt{x^2+3}+\frac{2x}{x+1}$; $f'(1)=?$

15.039. $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+2}$; $f'(2)=?$

15.040. $f(x)=\frac{x}{3}-\frac{3}{x}$; $f'(3)=?$

15.041. $f(x)=x-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3x^3}$; $f'(-1)=?$

15.042. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{x+1}$; $f'(1)=?$

15.043. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$; $f'(0)=?$

15.044. $f(x)=\sin 4x\cos 4x$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=?$

15.045. $f(x)=\sin^2 x^2$; $f'(0)=?$

15.046. $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

15.047. $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$; $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=?$

15.048. $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$; $f'(2)=?$

15.049. $f(x)=5(x+1)^2\sqrt[5]{x-1};\ f'(2)=?$

15.050. $f(x)=\sqrt{x^2-1+\sqrt[3]{x}};\ f'(1)=?$

15.051. $f(x)=\frac{1}{2}\sin x\ \mathrm{tg}\,2x;\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

15.052. $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}};\ f'(0)=?$

15.053. $f(x)=\frac{2^{2x}}{\sqrt{2-2^{2x}}};\ f'(0)=?$

15.054. $f(x)=\sin^3\frac{x}{2};\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

15.055. $f(x)=2^{x-2x^2-1};\ f'(0)=?$

15.056. $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1};\ f'(0)=?$

15.057. $f(x)=(x^2-x)\cos^2 x;\ f'(0)=?$

15.058. $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}};\ f'(\pi)=?$

15.059. $f(x)=\frac{x-2}{\sin^2 x};\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

15.060. Найти вторую производную функции $f(x)$ и вычислить ее значение при указанном значении x:

а) $f(x)=x^2\ln x+\cos 2x;\ f''(1)=?\ f''(\pi)=?$

б) $f(x)=\sin\frac{x}{3}+x\ln x^2;\ f''(3)=?\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

15.061. Выяснить знак производной функции $y=\sqrt{4x+9}\,(x^2-16)$ в точке $x=0$.

15.062. Дана функция $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$. Как изменяется ее производная с возрастанием x от $\frac{1}{16}$ до 81?

15.063. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x(\ln x-1)$ в точке с абсциссой $x=e$.

15.064. Дана функция $y = x^4 - 6x^2 + 1$. Найти наибольшее и наименьшее значения ее производной в промежутке $[-1, 3]$.

15.065. Дана функция $f(x) = 2\cos^2(4x - 1)$. Найти множество значений ее производной.

15.066. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} 3x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$.

15.067. Доказать, что функция $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$ убывает на всех интервалах области определения.

15.068. Дана функция $f(x) = x\ln x - x$. Как изменяется ее производная с возрастанием x от 1 до 9?

15.069. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{4 + 3x - x^2}$ и область определения ее производной.

15.070. Дано: $f(x) = 0{,}5\sqrt{x^3 + 1}$ и $g(x) = xe^{-x}$. Показать, что $f'(2)$ является корнем уравнения $g'(x) = 0$.

15.071. Функция задана формулой $f(x) = e^{ax^2+bx+1}$. Найти значения постоянных a и b, если $f(1) = f(0) = f'(0)$.

15.072. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная к графику функции $g(x) = x^2 \ln x$, проведенная в точке с абсциссой $x = 1$?

15.073. Функция задана формулой $f(x) = 5\sin x + 3\cos x$. Решить уравнение $f'(0) = f'(x)$.

15.074. Функция задана формулой $f(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 1)$. Решить уравнение $f'(x) = 2f(x)$.

15.075. Можно ли почленно дифферснцировать неравенство?

15.076. Дана функция $f(x) = |x|$. Написать выражение ее первообразной.

15.077. Написать дифференциальное уравнение гармонического колебания: а) $y = -4\sin(2x + 3)$; б) $y = 3{,}8\cos(0{,}6x - 10)$.

15.078. Найти отличное от нуля решение дифференциального уравнения: а) $y' = -36y$; б) $y'' = -36y$.

15.079. Построить раздельно графики функций $f(x) = x$, $\varphi(x) = |x|$ и $g(x) = x|x|$ в окрестности точки $x = 0$. Несмотря на то что $f(x)$ дифференцируема при $x = 0$, а $\varphi(x)$ — нет, их произведение $g(x) = x|x|$ имеет производную в точке $x = 0$. Обосновать правильность этих утверждений и найти $g'(0)$.

15.080. Доказать, что функция $f(x)=x+\sin x$ не убывает в каждой точке оси Ox.

15.081. Показать, что для любых значений постоянных p и $q\,(p\neq q)$ функция, заданная формулами

$$f(x)=\begin{cases}p\cos x+q\sin x & \text{при } x\geq 0,\\ px+q+1 & \text{при } x<0,\end{cases}$$

не дифференцируема в точке $x=0$.

15.082. Точка движется прямолинейно по закону $s(t)=\sqrt[3]{t^2}$. Показать, что ее ускорение обратно пропорционально квадрату пройденного расстояния.

15.083. Дана функция $f(x)=0{,}5(x^2-\cos x)$. Пользуясь соображениями непрерывности, выяснить, имеют ли уравнения $f(x)=7{,}8$ и $f'(x)=7{,}8$ хотя бы по одному корню в промежутке $[2\pi,\ 3\pi]$.

15.084. Найти все значения постоянной a, при которых производная функции, заданной формулой $y=e^{ax^3+3x^2+x}$, принимает только положительные значения на всей области определения данной функции.

15.085. Найти сумму $x+x^2+\ldots+x^n$, а затем сумму $1+2x+3x^2+\ldots$ $\ldots+nx^{n-1}$.

15.086. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\dfrac{x^3+1}{3}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

15.087. На графике функции $y=x(x-4)^3$ найти точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

15.088. Показать, что касательные, проведенные к графику функции $y=\dfrac{x-4}{x-2}$ в точках его пересечения с осями координат, параллельны.

15.089. Под каким углом кривая $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

15.090. Показать, что на графике функции $y=x^3+x^2+x+1$ нет точек, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

15.091. В каких точках касательные к кривой $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-x+1$ параллельны прямой $y=2x-1$?

15.092. В каких точках касательная к графику функции $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}+$ $+7x-4$ образует с осью Ox угол 45°?

15.093. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная, проведенная к кривой $y = 2x^3 - x$ в точке ее пересечения с осью Oy?

15.094. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная, проведенная к кривой $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ в точке $M_0\,(2; -4)$?

15.095. Известно, что прямая $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{32}$ является касательной к линии, заданной уравнением $y = 0{,}5x^4 - x$. Найти координаты точки касания.

15.096. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2e^{-x}$ в точке с абсциссой $x = 1$.

15.097. Составить уравнения касательных к кривым $y = 2x^2 - 5$ и $y = x^2 - 3x + 5$, проведенных через точки пересечения этих кривых.

15.098. Найти угол, который образует с осью ординат касательная к кривой $y = \dfrac{2}{3}x^5 - \dfrac{1}{9}x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x = 1$.

15.099. Составить уравнения касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, проходящих через точку $M\,(2; -5)$. Сделать чертеж.

15.100. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \ln(2e - x)$ в точке с абсциссой $x = e$.

15.101. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x - 4x - 3x^2$ в точке с абсциссой $x = -2$.

15.102. В каких точках угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ равен 3?

15.103. В каких точках касательная к графику функции $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол 135°?

15.104. Дана функция $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Требуется:

а) составить уравнение касательной к графику данной функции в точке с абсциссой $x = \dfrac{\pi}{6}$ (окончательные числовые значения округлять до второго десятичного знака);

б) установить, в каких точках промежутка $0 \le x \le \pi$ касательная к графику данной функции составляет с осью Ox угол 60°.

15.105. Дана функция $f(x) = \dfrac{2}{3}\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. Требуется найти:

а) угол, образованный с осью Ox касательной к графику данной функции в точке с абсциссой $x = \dfrac{\pi}{3}$;

б) точки минимума в промежутке $[0, \pi]$.

15.106. Через точку пересечения графиков функций $y=\dfrac{6}{\sqrt{x}}$ и $y=12x^{-1/2}-2x^{1/2}$ проведена касательная к каждому графику. Найти разность углов, образованных этими касательными с положительным направлением оси Ox.

15.107. В точке $M(1;\ 8)$ к кривой $y=\sqrt{(5-x^{2/3})^3}$ проведена касательная. Найти длину ее отрезка, заключенного между осями координат.

15.108. Найти площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к кривой $y=\sqrt{x^2-5}$ в точке $M(3;\ 2)$.

15.109. К гиперболе $y=\dfrac{4}{x}$ проведены касательные: одна — в точке $M(2;\ 2)$, а другие — параллельно прямой $y=-4x$. Найти площади треугольников, образованных каждой из этих касательных с осями координат.

15.110. Отрезок произвольной касательной к кривой $y=x^2$, заключенный между точкой касания и осью Ox, спроецирован на ось Ox. Показать, что эта проекция вдвое больше проекции аналогичного отрезка касательной к кривой $y=x^4$ с той же абсциссой точки касания.

15.111. В произвольной точке кривой $y=\sqrt{2x-x^2}$ проведена касательная. Показать, что длина отрезка касательной от точки касания до пересечения с осью Oy равна ординате точки пересечения.

В задачах 15.112–15.115 указан закон прямолинейного движения $s(t)$; s и t измеряются соответственно в метрах и секундах.

15.112. $s(t)=\dfrac{4t+3}{t+4}$. Найти скорость в момент $t=9$.

15.113. $s(t)=2t^3-3t+4$. Найти скорость и ускорение в момент $t=2$.

15.114. $s(t)=0{,}5t^4-5t^3+12t^2-1$. В какие моменты ускорение тела равно нулю?

15.115. $s(t)=8-2t+24t^2-0{,}3t^5$. В какой момент тело имеет наибольшую скорость? Найти эту скорость.

15.116. Движения двух материальных точек вдоль одной прямой заданы уравнениями $s_1=4t^2+2$, $s_2=3t^2+4t-1$ (s_1, s_2 — в метрах, t — в секундах). Найти скорости точек в те моменты, когда пройденные ими расстояния равны.

15.117. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями $s_1=2t^3-5t^2-3t$, $s_2=2t^3-3t^2-11t+7$ (s_1, s_2 — в метрах, t — в секундах). Найти ускорения точек в тот момент, когда скорости их равны.

15.118. Две точки движутся по оси Ox. Координата x_1 первой точки определяется формулой $x_1=3t^2-5$, координата x_2 второй точки — формулой $x_2=3t^2-t+1$ (x_1, x_2 — в метрах, t — в секундах). Найти скорости движения точек в тот момент, когда их координаты равны.

15.119. Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону: а) $h(t)=8t-5t^2$; б) $h(t)=4+8t-5t^2$ (h — в метрах, t — в секундах). Найти скорость тела в момент соприкосновения с землей (ускорение g считается равным 10 м/с^2).

15.120. Тело массой m_0 движется прямолинейно по закону $s(t)=\dfrac{2}{2t-1}$. Доказать, что сила, действующая на тело, пропорциональна кубу пройденного пути.

15.121. Тело массой m_0 движется прямолинейно по закону $s(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$ (α, β, γ — постоянные). Доказать, что сила, действующая на тело, постоянна.

15.122. Радиус шара r равномерно возрастает со скоростью 2 см/с. С какими скоростями возрастают поверхность и объем шара? Найти эти скорости в момент, когда r достигнет 10 см. (При $t=0$ величина $r=0$.)

15.123. Угол α, на который повернется колесо через промежуток t, равен $\alpha=3t^2-12t+36$ (α — в радианах, t — в секундах). Найти угловую скорость ω в момент $t=4$ и определить, в какой момент колесо остановится.

15.124. В тонком неоднородном стержне, имеющем длину 25 см, масса (в граммах) распределяется по закону $g(l)=4l^2-2l$, где l — расстояние от начала стержня до любой его точки. Найти плотность стержня на расстоянии 4 см от начала стержня и среднюю плотность стержня.

15.125. Функция задана формулой $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$. Показать, что эта функция возрастает в любой точке, принадлежащей ее области определения.

15.126. Функция задана формулой $y=\sqrt{ax^3-6x^2+3x}$. Найти все значения постоянной a, при которых данная функция определена и монотонно возрастает для всех $x>0$.

Найти точки экстремума функций (15.127–15.130):

15.127. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

15.128. $y=\dfrac{\ln x+2}{x}$.

15.129. $y=x^2e^{-x}$.

15.130. $y=x^3e^{-x}$.

15.131. Найти экстремум функции $y=x^2-\ln(1+2x)$.

15.132. Найти точки экстремума функции $y=e^{-x}-e^{-2x}$ и угол между осью Ox и касательной к графику данной функции в точке с абсциссой $x=0$.

15.133. Найти точки экстремума функции $y=e^{-x}\sin x$ и угол между осью Ox и касательной к графику данной функции в точке с абсциссой $x=0$.

15.134. Найти точки экстремума функции $y=x-\ln(1+x)$ и точку на графике данной функции, в которой касательная к графику параллельна прямой, проходящей через точки A (2; 3) и B (– 1; 4).

15.135. Найти экстремумы функции $y = x^3 + \frac{3}{x}$ и составить уравнение касательной к графику в точке с абсциссой $x = -2$.

15.136. Дана функция $y = -x^4 - 8x^2 + 9$. Найти ее экстремумы и ординаты точек пересечения с графиком функции $y = -9x^2 + 9$.

15.137. Показать, что функция $y = x^3 + 4x$ возрастает на всей числовой оси.

15.138. При каких значениях p функция $f(x) = \cos x - px + q$ убывает на всей числовой оси?

15.139. Доказать, что функция $y = 2x + \sin x$ возрастает на всей числовой оси.

15.140. Доказать, что функция $y = x + \frac{1}{1+x^2}$ возрастает на всей числовой оси.

Найти промежутки возрастания и убывания функций (15.141–15.145):

15.141. $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$.

15.142. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

15.143. $f(x) = -x(x-3)^2$.

15.144. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}$.

15.145. $f(x) = (2^x - 1)(2^x - 4)^2$.

Найти наименьшее и наибольшее значения функций в заданных промежутках (15.146–15.164):

15.146. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$; $[-2, 2]$.

15.147. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$; $[-2, 1]$.

15.148. $y = x^5 - x^3 + x + 2$; $[-1, 1]$.

15.149. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$; $[-5, -1]$.

15.150. $y = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$; $[1, 6]$.

15.151. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$; $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

15.152. $f(x) = \cos^2\frac{x}{2}\sin x$; $[0, \pi]$.

15.153. $y(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+16}}$; а) $[-3, 3]$; б) $[2\sqrt{5}, 8]$.

15.154. $f(x)=x+\cos^2 x$; $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

15.155. $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x$; $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

15.156. $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x+\sin x$; $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

15.157. $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x$; $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

15.158. $f(x)=\cos^2 x+\sin x$; а) $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$; б) $\left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$.

15.159. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2x-1}}$; а) $[0{,}75; 2]$; б) $[1{,}5; 3]$.

15.160. $f(x)=x+\dfrac{8}{x^4}$; а) $[-2, -1]$; б) $[1, 3]$.

15.161. $f(x)=(5-x)2^{-x}$; а) $[-1, 0]$; б) $[5, 6]$.

15.162. $f(x)=2^{\sqrt[3]{x^2}}$; а) $[-8, -1]$; б) $[-1, 1]$.

15.163. $y=3\sqrt[3]{(x-1)^2}+x$; а) $[-7, 0]$; б) $[1, 2]$.

15.164. $f(x)=2x^2-\ln x$; $[1, e]$.

15.165. Найти наибольшее значение функции $f(x)=\cos x\sqrt{\sin x}$ в промежутке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

15.166. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ и установить, в какой из точек $x_1=\log_5 4$ или $x_2=\log_5 3$ функция принимает большее значение.

15.167. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$ и установить, в какой из точек $x_1=e^{-1}$ или $x_2=e^{-2}$ функция принимает большее значение.

15.168. Найти наименьшее значение функции $f(x)=\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2$ в промежутке $(0, \pi)$.

15.169. Найти наименьшее значение функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}$ в промежутке $[0, 1)$, где n — число натуральное.

15.170. Найти промежуток возрастания функции $y=\frac{x}{\ln x}$, а затем установить, что больше: e^{π} или π^{e}.

Найти экстремумы функций и указать промежутки их возрастания и убывания (15.171–15.175):

15.171. $y=e^{-x}-e^{-2x}$.

15.172. $y=x^2e^{-x}$.

15.173. $y=e^{-x}\sin x$, если $0<x<\pi$.

15.174. $y=x+\ln(1-2x)$.

15.175. $y=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-5)^2}$.

15.176. Число 18 разбить на такие два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

15.177. Число 180 разбить на три положительных слагаемых так, чтобы два из них относились как 1 : 2, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

15.178. Найти число, которое превышало бы свой квадрат на максимальное значение.

15.179. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью 294 м^2 и затем разделить этот участок забором на две равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?

15.180. Прямоугольный лист жести имеет линейные размеры 5 × 8 дм. В четырех его углах вырезают одинаковые квадраты и делают открытую коробку, загибая края под прямым углом. Какова наибольшая вместимость полученной коробки?

15.181. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 24 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

15.182. Две стороны параллелограмма лежат на сторонах данного треугольника, а одна из его вершин принадлежит третьей стороне. При каких условиях площадь параллелограмма является наибольшей?

15.183. Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной a указать треугольник наибольшей площади.

15.184. Боковые стороны и меньшее основание трапеции имеют одинаковые длины — по 50 см. Найти размер ее большего основания, при котором площадь трапеции была бы наибольшей.

15.185. Найти длины сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами 18, 24, 30 см и имеющего с ним общий прямой угол.

15.186. Определить длины сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольную трапецию с длинами оснований 24 и 8 см и длиной высоты 12 см. (Две вершины прямоугольника лежат на боковых сторонах трапеции, а две другие — на ее большем основании.)

15.187. Из пункта A на прогулку вышел пешеход со скоростью v км/ч. После того как он отошел от A на 6 км, из A следом за ним выехал велосипедист, скорость которого была на 9 км/ч больше скорости пешехода. Когда велосипедист догнал пешехода, они повернули назад и возвратились вместе в A со скоростью 4 км/ч. При каком значении v время прогулки пешехода окажется наименьшим?

15.188. В равнобедренный треугольник с длинами сторон 15, 15 и 18 см вписан параллелограмм наибольшей площади так, что угол при основании у них общий. Найти длины сторон параллелограмма.

15.189. В какой круг можно вписать прямоугольник наибольшей площади с периметром, равным 56 см?

15.190. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Каким должен быть угол при большем основании, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

15.191. Величина угла при вершине A трапеции $ABCD$ равна α. Длина боковой стороны AB вдвое больше длины меньшего основания BC. При каком значении α величина угла BAC окажется наибольшей? Чему равно это наибольшее значение?

15.192. Найти косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, имеющего наибольшую площадь при данной постоянной длине медианы, проведенной к его боковой стороне.

15.193. Величина угла при основании равнобедренного треугольника равна α. При каком значении α отношение длин радиусов вписанной и описанной окружностей является наибольшим? Чему равно это отношение?

15.194. Какие размеры нужно придать радиусу основания и высоте открытого цилиндрического бака, чтобы при данном объеме V на его изготовление пошло наименьшее количество листового металла?

15.195. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды имеет постоянную заданную площадь и наклонена к плоскости основания под углом α. При каком значении α объем пирамиды является наибольшим?

15.196. В правильную четырехугольную пирамиду с ребром основания a и высотой H вписана правильная четырехугольная призма так, что ее нижнее основание лежит в основании пирамиды, а вершины верхнего основания — на боковых ребрах. Найти длину ребра основания и длину высоты призмы, имеющей наибольшую боковую поверхность.

15.197. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и составляет с плоскостью основания угол α. При каком значении α объем пирамиды является наибольшим?

15.198. В правильной треугольной пирамиде боковая грань имеет заданную постоянную площадь и составляет с плоскостью основания угол α. При каком значении α расстояние от центра основания пирамиды до ее боковой грани является наибольшим?

15.199. В конус с заданным постоянным объемом вписана пирамида; в ее основании лежит равнобедренный треугольник, у которого величина угла при вершине равна α. При каком значении α объем пирамиды является наибольшим?

15.200. Образующая конуса имеет постоянную длину и составляет с высотой конуса угол α. В конус вписана правильная шестиугольная призма с равными длинами ребер (основание призмы лежит в плоскости основания конуса). При каком значении α боковая поверхность призмы является наибольшей?

15.201. Переменная y обратно пропорциональна переменной x. Найти коэффициент k обратной пропорциональности и заполнить таблицу:

x		0,1	9,6
y	30		3,05

На графике заданной обратной пропорциональности найти точку, ближайшую к началу координат O (0; 0).

15.202. Известно, что мощность P, отдаваемая электрическим элементом, определяется по формуле $P=\dfrac{E^2R}{(r+R)^2}$, где E — постоянная электродвижущая сила элемента, r — постоянное внутреннее сопротивление, R — внешнее сопротивление. Каким должно быть внешнее сопротивление R, чтобы мощность P была наибольшей?

Найти экстремумы функций, указать промежутки их возрастания и убывания, а также начертить эскизы графиков функций (15.203–15.212):

15.203. $y=2x^3+3x^2-1$.

15.204. $y=0{,}5x^4-4x^2$.

15.205. $y=x^4-10x^2+9$.

15.206. $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+3$.

15.207. $y=x^3-3x^2+2$.

15.208. $y=2x^3-15x^2+36x$.

15.209. $y=8+2x^2-x^4$.

15.210. $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2-\dfrac{9}{4}$.

15.211. $y=\dfrac{1}{5}x^5-4x^2$.

15.212. $y=\dfrac{2}{1+x^2}$.

Найти промежутки возрастания и убывания функций и точки экстремума (15.213–15.230):

15.213. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

15.214. $y=\dfrac{-5}{(x-2)^2+1}$.

15.215. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$.

15.216. $y=x+\dfrac{4}{x^2}$.

15.217. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

15.218. $y=\dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$.

15.219. $y=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+8}$.

15.220. $y=\dfrac{1}{x^2+8x}$.

15.221. $y=\dfrac{x+2}{x^2-9}$.

15.222. $y=\dfrac{4}{x^2-2x+2}$.

15.223. $y=\dfrac{1-x}{(x-2)^3}$.

15.224. $y=\dfrac{3x}{x^2+4x+4}$.

15.225. $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$.

15.226. $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$.

15.227. $y=\dfrac{2x}{x^2+x+1}$.

15.228. $y=\dfrac{x^2}{x^3-1}$.

15.229. $y=\dfrac{(x-3)^2}{x^2}$.

15.230. $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-4)}$.

15.231. Используя метод математической индукции, доказать, что при $x>0$ выполняется неравенство

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},\ n\in N.$$

15.232. Найти функцию $F(x)$, график которой проходит через заданную точку $M_0\,(x_0;y_0)$, если:

а) $F'(x)=4x^2+9x^{-2};\ M_0(3;-2)$;

б) $F'(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x+\dfrac{1}{3};\ M_0(2;1)$.

Для данной функции $f(x)$ найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через заданную точку $M_0\,(x_0;y_0)$ (15.233–15.236):

15.233. $f(x)=x^4;\ M_0(-1;2)$.

15.234. $f(x)=\sin 2x;\ M_0(0;1)$.

15.235. $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 3x};\ M_0\left(\dfrac{\pi}{12};-1\right)$.

15.236. $f(x)=x^{-4};\ M_0(2;-3)$.

15.237. Найти функцию $F(x)$, если известно, что $F'(x)=4x^3-3x^2$ и что $F(1)=3$.

15.238. Для функции $f(x)=\cos 4x$ найти первообразную $F(x)$, если известно, что $F\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=-1$.

15.239. Найти функцию $S(x)$, если ее производная $S'(x)=\frac{2}{\sqrt{5-x}}$ и $S(1)=-1$.

Вычислить интегралы (15.240–15.265):

15.240. $\int\limits_0^{\pi}\cos^2 x\,dx.$

15.241. $\int\limits_{-\pi}^{\pi/2}\sin^2 2x\,dx.$

15.242. $\int\limits_8^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$

15.243. $\int\limits_0^{\pi/4}(\sin 2t-\cos 2t)^2\,dt.$

15.244. $\int\limits_0^{3\pi/2}\frac{dx}{\cos^2\frac{2x}{9}}.$

15.245. $\int\limits_0^{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}-3x\right)dx.$

15.246. $\int\limits_{-\pi}^{2\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx.$

15.247. $\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\cos x\,dx.$

15.248. $\int\limits_0^{2\pi/3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)dx.$

15.249. $\int\limits_0^{2}(1+3x)^4\,dx.$

15.250. $\int\limits_9^{-54}\sqrt[3]{2-\frac{t}{9}}\,dt.$

15.251. $\int\limits_0^{7/3}\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx.$

15.252. $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1-x}\,dx.$

15.253. $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{0,5x}.$

15.254. $\int\limits_1^{0,5}\left(4x-\frac{1}{2x}\right)dx.$

15.255. $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+2x}}.$

15.256. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^{-1}\,dx.$

15.257. $\int\limits_0^{\pi}\cos^4 x\,dx.$

15.258. $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx.$

15.259. $\int\limits_0^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{9+16x}}.$

15.260. $\int\limits_0^{1}\frac{x\,dx}{(x+1)^3}.$

15.261. $\int\limits_{-1}^{15}\frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}}.$

15.262. $\int_0^{\pi} \sin 2x \cos 3x\, dx.$

15.263. $\int_0^{\pi/2} \sin 4x \sin 5x\, dx.$

15.264. $\int_0^{\pi/2} \cos 3x \cos 2x\, dx.$

15.265. $\int_{-2}^{2} (10^{x/4} - \sin \pi x)\, dx.$

Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями (15.266–15.273):

15.266. $y = x^3$, $y = 1$ и $x = 2$.

15.267. $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{4}$.

15.268. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ и $x = 9$.

15.269. $y = x^3$ и $y = \sqrt{x}$.

15.270. $y = 2x - x^2$ и $y = \frac{3}{4}$.

15.271. $y = x^4$ и $y = x$.

15.272. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 0{,}5$ и $x = 2{,}5$.

15.273. $y = \frac{5}{x}$ и $y = 6 - x$.

15.274. Чему равен путь, пройденный точкой, движущейся прямолинейно, за отрезок времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = 4$, если скорость точки $v(t) = 2t^2 + 3t$ (t — в секундах, v — в м/с)? Чему равно ускорение точки в момент $t = 2$?

15.275. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = \sqrt[3]{1 + t}$ (t — в секундах, v — в м/с). Найти путь, пройденный телом за первые 7 с. Чему равно ускорение тела в момент $t = 7$?

ГЛАВА 16

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

Пример 1. Доказать, что в прямоугольном треугольнике величина угла между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе, равна модулю разности величин острых углов треугольника (рис.16.1).

□ Пусть $\angle C = 90°$, CD — высота, CE — медиана. Требуется доказать, что $\angle DCE = |\angle B - \angle A|$. Положим $\angle DCE = \angle x$; тогда $\angle DCA = \angle B$ (так как оба угла дополняют угол A до $90°$). В прямоугольном треугольнике длина медианы, проведенной к гипотенузе, равна половине длины гипотенузы; следовательно, ΔCEA — равнобедренный и $\angle ECA = \angle x + \angle B = \angle A$, откуда $\angle x = \angle A - \angle B$. Если вершины A и B треугольника поменять местами (см. рис. 16.1), то получим $\angle x = \angle B - \angle A$. Оба результата можно объединить в один: $\angle x = |\angle B - \angle A|$. ■

Пример 2. Доказать, что для любой точки M, принадлежащей произвольному треугольнику ABC со сторонами a, b и c и высотами h_a, h_b и h_c (рис.16.2), справедливо равенство $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$, где x, y и z — соответственно расстояния от точки M до сторон BC, AC и AB. Сформулировать соответствующее свойство для произвольной точки, принадлежащей равностороннему треугольнику.

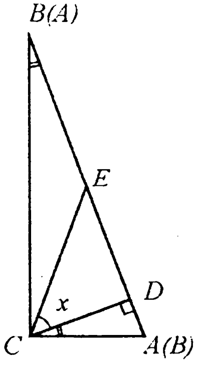


Рис. 16.1

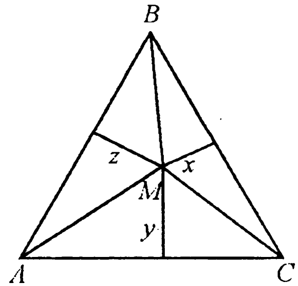


Рис. 16.2

□ Соединив точку M с вершинами A, B и C, получим три треугольника BMC, AMC и AMB, высоты которых соответственно равны x, y и z. Пусть S — площадь ΔABC; тогда $S = 0{,}5(ax + by + cz)$. С другой стороны, $S = 0{,}5ah_a$, $S = 0{,}5bh_b$, $S = 0{,}5ch_c$. Комбинируя эти равенства, находим

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1.$$

В равностороннем треугольнике $h_a = h_b = h_c = h$, а потому $x + y + z = h$, т. е. сумма расстояний от произвольной точки, принадлежащей равностороннему треугольнику, до его сторон постоянна и равна высоте треугольника. ■

Пример 3. Длина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника равна 40. Окружность с радиусом, равным 9, касается гипотенузы в ее середине. Найти длину отрезка, отсекаемого этой окружностью на одном из катетов.

□ Сначала выясним, имеет ли задача решение при заданных значениях длины гипотенузы и радиуса окружности. Из геометрических соображений (рис.16.3) ясно, что для того чтобы окружность с центром O на высоте BK ΔABC пересекала катет BC в двух точках D и E, необходимо и достаточно, чтобы ее радиус OK был не больше половины высоты BK, но больше радиуса вписанной в треугольник окружности. Первое соотношение очевидно ($9 < 10$), второе также нетрудно проверить. Радиус r вписанной окружности найдем по формуле $r = \dfrac{S}{p}$, т. е.

$$r = \frac{20\sqrt{2} \cdot 20\sqrt{2}}{2 \cdot \dfrac{40 + 40\sqrt{2}}{2}} = \frac{20}{\sqrt{2} + 1} = 20\sqrt{2} - 20.$$ Ясно, что $9 > 20\sqrt{2} - 20$, так как, возведя в квадрат обе части равносильного ему неравенства $29 > 20\sqrt{2}$, получим верное неравенство $841 > 800$.

Для отыскания длины отрезка DE проведем $OF \perp DE$ и радиус OE заданной окружности. Вычислим последовательно длины отрезков BO, OF, FE и DE. Имеем

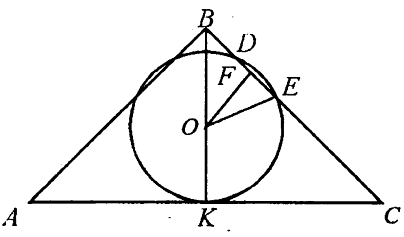


Рис. 16.3

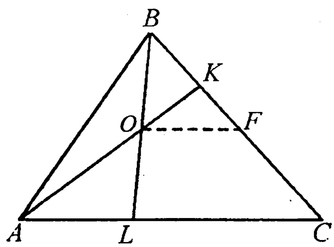


Рис. 16.4

$BO = BK - OK = 11$, $OF = BO\sin 45^\circ = \dfrac{11\sqrt{2}}{2}$, $FE = \sqrt{OE^2 - OF^2} = \sqrt{81 - \dfrac{121}{2}} =$

$= \sqrt{\dfrac{41}{2}}$, $DE = 2FE = \sqrt{82}$. ■

Пример 4. В треугольнике ABC точка K, взятая на стороне BC, делит ее в отношении $1:3$, считая от вершины B, а точка L делит сторону AC в отношении $2:5$, считая от вершины A. В каком отношении точка O пересечения прямых AK и BL делит отрезки AK и BL, считая от соответствующих вершин?

□ I способ. Пусть $BK = x$, $AL = 2y$ (рис.16.4), тогда по условию $KC = 3x$, $LC = 5y$. Пусть, далее, $KF = m$, $OF = n$. Из подобия треугольников OKF и AKC имеем $\dfrac{n}{m} = \dfrac{7y}{3x}$, откуда

$$\frac{n}{y} = \frac{7m}{3x}. \qquad (*)$$

Из подобия треугольников BOF и BLC находим $\dfrac{n}{5y} = \dfrac{x+m}{4x}$, откуда

$$\frac{n}{y} = \frac{5(x+m)}{4x}. \qquad (**)$$

Приравнивая правые части пропорций (*) и (**), после упрощений получаем $28m = 15(x+m)$, откуда $m = \dfrac{15x}{13}$. Следовательно, $BF = BK + KF = \dfrac{28x}{13}$ и $CF = BC - BF = 4x - \dfrac{28x}{13} = \dfrac{24x}{13}$. Согласно теореме Фалеса, имеем

$$\frac{BO}{OL} = \frac{BF}{FC} = \frac{\frac{28x}{13}}{\frac{24x}{13}} = \frac{7}{6}, \quad \frac{AO}{OK} = \frac{\frac{24x}{13}}{\frac{15x}{13}} = \frac{8}{5}.$$

II способ. Введем следующие обозначения: $\overline{BC} = \overline{a}$, $\overline{CA} = \overline{b}$, $\overline{AO} = \overline{x}$, $\overline{LO} = \overline{y}$ (рис.16.5). Тогда векторы $\overline{OK}$ и $\overline{OB}$, коллинеарные соответственно векторам $\overline{AO}$ и $\overline{LO}$, можно записать в виде $\overline{OK} = \alpha\overline{AO}$ и $\overline{OB} = \beta\overline{LO}$, где числа α и β подлежат определению.

Рассмотрим три замкнутых контура: $OBKO$ (I), $OLAO$ (II), $OKCLO$ (III). Из (I) имеем $\overline{OB} + \overline{BK} + \overline{KO} = \overline{0}$, т. е. $\beta\overline{y} + \dfrac{1}{4}\overline{a} - \alpha\overline{x} = \overline{0}$; из (II) $\overline{OL} + \overline{LA} + \overline{AO} = \overline{0}$, т. е. $-\overline{y} + \dfrac{2}{7}\overline{b} + \overline{x} = \overline{0}$; из (III) $\overline{OK} + \overline{KC} + \overline{CL} + \overline{LO} = \overline{0}$, т. е. $\alpha\overline{x} + \dfrac{3}{4}\overline{a} + \dfrac{5}{7}\overline{b} + \overline{y} = \overline{0}$.

В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} -\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}+\dfrac{1}{4}\bar{a}=\bar{0}, \\ \bar{x}-\bar{y}+\dfrac{2}{7}\bar{b}=\bar{0}, \\ \alpha\bar{x}+\bar{y}+\dfrac{3}{4}\bar{a}+\dfrac{5}{7}\bar{b}=\bar{0}. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений выразим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ через векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$, а затем подставим эти выражения в третье уравнение. После несложных преобразований получим

$$\left(4\alpha-\frac{5}{2}\right)\bar{x}+\left(\frac{7}{2}-3\beta\right)\bar{y}=0.$$

Так как векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ не коллинеарны, то это равенство возможно тогда и только тогда, когда коэффициенты при $\bar{x}$ и $\bar{y}$ равны нулю, т. е. $4\alpha-\dfrac{5}{2}=0$, $\dfrac{7}{2}-3\beta=0$. Отсюда $\alpha=\dfrac{5}{8}$, $\beta=\dfrac{7}{6}$, т. е. $\overline{OK}=\dfrac{5}{8}\overline{AO}$, $\overline{OB}=\dfrac{7}{6}\overline{LO}$.
Итак, $AO : OK = 8 : 5$, $BO : OL = 7 : 6$.

III способ. Пусть стороны треугольника ABC представляют собой невесомые стержни, а в вершинах треугольника приложены параллельные силы (рис. 16.6). Предположим, что в вершине C приложена сила, равная 2 Н; тогда в точке B, согласно условиям равновесия (равенству моментов сил относительно точки K), должна быть приложена сила 6 Н, а в точке K, согласно правилу сложения параллельных сил, должна быть приложена сила 8 Н. Рассуждая аналогично относительно точек A и L, находим, что в точке A должна быть приложена сила 5 Н, а в точке L — сила 7 Н. Наконец, согласно условиям равновесия относительно точки O, получаем $AO : OK = 8 : 5$ и $BO : OL = 7 : 6$. ■

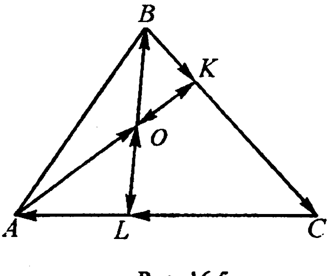


Рис. 16.5

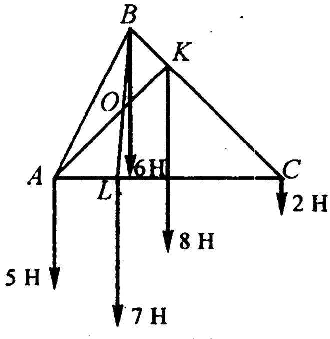


Рис. 16.6

Пример 5. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и имеют длины a, b и c. Найти объем пирамиды.

□ Будем считать основанием пирамиды прямоугольный треугольник ADB (рис.16.7), а вершиной — точку C. Так как $CD \perp AD$ и $CD \perp BD$, то в силу теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости $CD \perp (ADB)$ и, следовательно, ребро CD — высота пирамиды. По формуле (11.10) находим объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ADB} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot c = \frac{abc}{6}. \blacksquare$$

Пример 6. Основанием пирамиды $DABC$ служит остроугольный равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC = a$ и $AC = b$ (рис.16.8). Каждое боковое ребро равно c. Через центр окружности, описанной около основания, проведена плоскость, параллельная прямым DB и AC. Найти площадь сечения.

□ Так как ΔABC — остроугольный, то центр O описанной около него окружности лежит внутри треугольника и заданная плоскость пересекает все грани пирамиды. Далее, из равенства всех боковых ребер пирамиды следует, что ее вершина D проецируется в точку O (см. гл.11, «Дополнительные соотношения», п.1°) и проекцией DB на плоскость основания служит отрезок BO, перпендикулярный стороне AC основания пирамиды. Согласно теореме о трех перпендикулярах, $BD \perp AC$.

Для построения заданной плоскости через точку O проведем прямую $MN \parallel AC$ (в плоскости ABC), а через точку N — прямую $NP \parallel BD$ (в плоскости BDC).

Плоскость MNP параллельна прямым AC и BD (в силу признака параллельности прямой и плоскости) и пересекает боковую грань ADC по прямой $PQ \parallel AC$, а боковую грань ABD — по прямой $MQ \parallel BD$. Сечение $MNPQ$ — прямоугольник, так как выше было показано, что $BD \perp AC$, а MN и NP параллельны соответственно AC и BD.

Найдем длины сторон прямоугольника $MNPQ$. Заметим, что BO — радиус описанной окружности, а BF — высота ΔABC. Пусть $BO = R$ и $BF = h$. Из

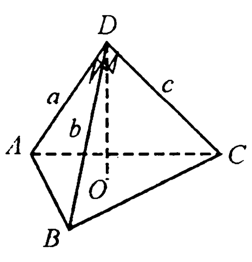


Рис. 16.7

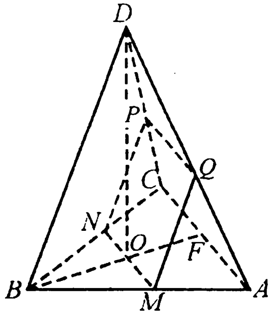


Рис. 16.8

подобия треугольников MBN и ABC следует, что $\frac{R}{h}=\frac{MN}{b}=\frac{BN}{a}$, откуда $MN=\frac{bR}{h}$ и $BN=\frac{aR}{h}$. Тогда $CN=BC-BN=\frac{a(h-R)}{h}$. Далее, из подобия треугольников CNP и CBD следует, что $\frac{PN}{BD}=\frac{CN}{BC}$, или $\frac{PN}{c}=\frac{h-R}{h}$, откуда $PN=\frac{c(h-R)}{h}$. Таким образом, площадь сечения

$$S_{MNPQ}=MN\cdot PN=\frac{bcR(h-R)}{h^2}. \qquad (*)$$

Остается выразить h и R через известные величины. Из ΔBFC находим $h=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}$, а зависимость между R, h и a в равнобедренном треугольнике имеет вид $R=\frac{a^2}{2h}$ [см. формулу (12.5)]. Подставив эти выражения в равенство (*), после упрощений получим

$$S_{MNPQ}=\frac{2a^2bc(2a^2-b^2)}{(4a^2-b^2)^2}.$$

Покажем, что эта формула имеет смысл, т. е. что $2a^2-b^2>0$. Здесь снова существенно, что равнобедренный треугольник ABC — остроугольный. Из этого вытекает, что угол A при его основании больше $45°$. Поэтому $\cos A<\cos 45°$, т. е. $\frac{\frac{b}{2}}{a}<\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $b<a\sqrt{2}$, $b^2<2a^2$ и $2a^2-b^2>0$. ■

Пример 7. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна a. Найти объем конуса, вершина которого совпадает с вершиной B_1, а окружность основания проходит через середины трех ребер, выходящих из вершины D.

□ Пусть точки M, N и P (рис.16.9) — соответственно середины ребер AD, CD и DD_1, т. е. $MD=ND=PD=\frac{a}{2}$. Из равенства равнобедренных прямоугольных треугольников DPN, DPM и DMN следует, что $MN=MP=NP=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Далее, из равенства прямоугольных треугольников B_1MA, B_1NC и B_1PD_1 (у которых один из катетов есть диагональ соответствующей грани куба, а другой —

половина ребра куба) следует, что $B_1M = B_1N = B_1P = \sqrt{B_1D_1^2 + D_1P^2} =$ $= \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$. Значит, точки M, N и P равноудалены как от точки D, так и от точки B_1. Поэтому прямая B_1D перпендикулярна плоскости ΔMNP и пересекает эту плоскость в точке O — центре окружности, описанной около ΔMNP. Итак, ON — радиус основания конуса, B_1O — высота конуса.

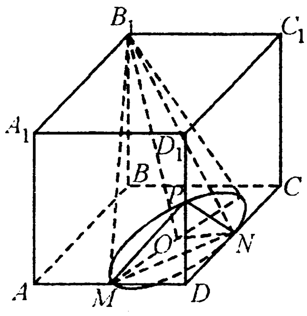


Рис. 16.9

Так как сторона a_3 правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса R, выражается формулой $a_3 = R\sqrt{3}$, то $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $ON = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$. Затем из ΔB_1ON находим

$B_1O = \sqrt{B_1N^2 - ON^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{6}} = \frac{5a}{2\sqrt{3}}$. Окончательно получим

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{6} \cdot \frac{5a}{2\sqrt{3}} = \frac{5\pi a^3\sqrt{3}}{108}. \blacksquare$$

16.001. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если точка касания вписанной в него окружности делит один из катетов на отрезки длиной m и n ($m < n$).

16.002. Доказать, что сумма квадратов длин медиан любого треугольника составляет 75% от суммы квадратов длин его сторон.

16.003. В прямоугольном треугольнике найти биссектрису прямого угла, если гипотенуза треугольника равна c, а один из острых углов равен α.

16.004. Доказать, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей полукругов, построенных на его катетах.

16.005. Из каких одноименных равных правильных многоугольников можно сложить паркет?

16.006. Тангенс тупого внешнего угла прямоугольного треугольника равен k. Найти тангенс острого угла треугольника, не смежного с данным внешним углом.

16.007. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом восьмиугольнике?

16.008. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник, площадь которого равна $3R^2$. Найти n.

16.009. Треугольник разбит медианами на шесть частей, не имеющих попарно общих внутренних точек. Сравнить площади этих частей.

16.010. Найти площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса R.

16.011. Доказать, что прямая, проходящая через основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него подобный ему треугольник.

16.012. Медиана некоторого треугольника совпадает с его биссектрисой. Доказать, что такой треугольник — равнобедренный.

16.013. Даны отрезок AB и прямая, не перпендикулярная отрезку и пересекающая его в точке, не являющейся серединой этого отрезка. Ученик построил точку B_1, симметричную точке B относительно данной прямой, и заметил, что теперь легко построить треугольник ABC, для которого биссектриса угла ACB лежит на данной прямой. Как это можно сделать?

16.014. В каком выпуклом многоугольнике число диагоналей равно числу сторон?

16.015. Доказать, что длина медианы треугольника меньше полусуммы длин заключающих ее сторон.

16.016. Пары точек A и A_1, B и B_1 расположены симметрично относительно одной прямой. Доказать, что эти четыре точки лежат на одной окружности или же на одной прямой.

16.017. Доказать, что если две стороны и медиана одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны (рассмотреть два случая).

16.018. Доказать, что в любой трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ (рис. 16.10) треугольники AOB и COD равновелики (O — точка пересечения диагоналей).

16.019. В окружность радиуса $R = 1$ см вписан квадрат, а в квадрат — второй квадрат, вершины которого делят пополам стороны первого квадрата (рис. 16.11). Не вычисляя длины стороны первого квадрата, доказать, что площадь второго квадрата равна 1 см^2.

16.020. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.

16.021. Доказать, что сумма длин высот треугольника меньше его периметра.

16.022. Из каких точек плоскости данный отрезок виден под данным углом?

16.023. Три средние линии треугольника разбивают его на четыре части. Если площадь одной из них равна S, то чему равна площадь данного треугольника?

16.024. Дан треугольник с площадью 1 и длинами сторон a, b и c. Известно, что $a \geq b \geq c$. Доказать, что $b \geq \sqrt{2}$.

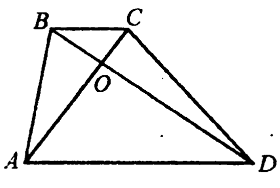


Рис. 16.10

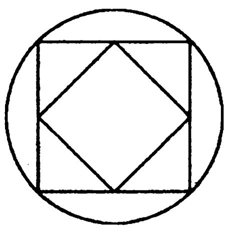


Рис. 16.11

16.025. Окружность каждого из двух кругов радиуса R проходит через центр другого круга. Найти площадь общей части этих кругов.

16.026. Какую фигуру образует на плоскости множество всех вершин равнобедренных треугольников, имеющих общее основание?

16.027. Из точки A проведены два луча, пересекающие данную окружность: один — в точках B и C, другой — в точках D и E. Известно, что $AB = 7$, $BC = 7$, $AD = 10$. Определить DE.

16.028. Непараллельные стороны трапеции продолжены до пересечения. Доказать, что прямая, проходящая через полученную точку и точку пересечения диагоналей, делит каждую из параллельных сторон трапеции на две равные части.

16.029. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна s. Найти границы возможных значений длины его гипотенузы c.

16.030. Доказать, что из трех медиан прямоугольного треугольника наименьшую длину имеет та, которая проведена к гипотенузе.

16.031. Через точку, принадлежащую меньшей стороне треугольника, провести прямую, отсекающую от него треугольник, подобный данному. Показать, что существуют четыре такие прямые.

16.032. Каково наибольшее возможное число острых углов в произвольном выпуклом многоугольнике?

16.033. Какую фигуру образует множество ортоцентров (точек пересечения высот) всех треугольников, имеющих общую сторону, при условии, что углы, противолежащие этой стороне, равны?

16.034. В круговой сектор радиуса R с прямым центральным углом вписан квадрат так, что две его вершины лежат на крайних радиусах, две — на дуге сектора. Найти сторону квадрата.

16.035. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри правильного многоугольника, до прямых, содержащих его стороны, равна произведению апофемы многоугольника на число его сторон.

16.036. Каждая сторона выпуклого четырехугольника меньше a. Доказать, что его площадь меньше a^2.

16.037. В круге радиуса 4 м найти длину хорды, которая видна из любой точки меньшей дуги окружности под углом 135°.

16.038. В круге радиуса a найти длину хорды, которая из любой точки большей дуги окружности видна под углом 30°.

16.039. Дан треугольник ABC. На основании BC построить треугольник с той же площадью, но с углом при вершине B, равным половине угла B данного треугольника.

16.040. Найти длины наименьших сторон всех тупоугольных треугольников, у которых длины сторон выражаются целыми числами и составляют арифметическую прогрессию с разностью 3 см.

16.041. Пусть n — число сторон выпуклого многоугольника, а d — число диагоналей. Указать все значения n, для которых $n > d$.

16.042. Сформулировать какое-либо утверждение, верное вместе с ему обратным. Сформулировать какое-либо верное утверждение, но такое, для которого обратное утверждение является неверным.

16.043. Пусть BO — биссектриса угла B прямоугольного треугольника ABC, D — середина катета AC, $OD \perp AC$, $OE \perp AB$, $OF \perp BC$, AB — гипотенуза (рис. 16.12). Легко доказать, что $\Delta BOE = \Delta BOF$, откуда $BE = BF$. (*) Далее, так как $OA = OC$, то $\Delta OEA = \Delta OFC$, откуда $AE = FC$. (**). Складывая равенства (*) и (**), получаем, что $AB = BC$, т. е. что длина гипотенузы равна длине катета. Найти ошибку в проведенном доказательстве.

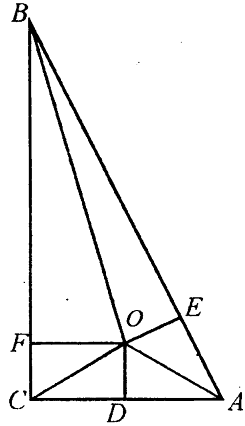


Рис. 16.12

16.044. Меньшее основание трапеции равно 6 см. Найти ее большее основание, если расстояние между серединами диагоналей равно 5 см.

16.045. Биссектриса острого угла параллелограмма делит его диагональ на отрезки длиной 3,2 и 8,8 см. Найти стороны параллелограмма, если его периметр равен 30 см.

16.046. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4 см, а длины непараллельных сторон 20 и 13 см. Найти высоту трапеции.

16.047. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки длиной 8 и 10 см. Найти длины сторон треугольника, если центр вписанной окружности делит эту биссектрису в отношении 3 : 2, считая от вершины угла.

16.048. В четырехугольник, три последовательные стороны которого равны 2, 3 и 4 см, вписана окружность радиуса 1,2 см. Найти площадь четырехугольника.

16.049. Две стороны треугольника и биссектриса угла между ними равны соответственно 60, 40 и 24 см. Найти площадь треугольника.

16.050. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании делит боковую сторону на отрезки 4 и 1 см, считая от вершины. Найти длину биссектрисы.

16.051. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противоположную сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Доказать, что биссектриса также равна основанию треугольника.

16.052. Сторона, биссектриса и высота треугольника, выходящие из одной и той же вершины, равны соответственно 5, 5 и $2\sqrt{6}$ см. Найти две другие стороны треугольника.

16.053. Найти наибольшую площадь прямоугольного треугольника с данной гипотенузой c.

16.054. Определить вид треугольника по длинам трех сторон (если такой треугольник возможен): а) 2, 2 и 3; б) 6, 8 и 10; в) 3, 1 и 4; г) 3, 5 и 7.

16.055. Доказать, что если через точку касания двух окружностей провести две прямые, пересекающие обе окружности, и точки пересечения прямых с окружностями соединить хордами, то эти хорды параллельны.

16.056. Две диагонали, исходящие из одной и той же вершины правильного пятиугольника, разбивают его на три треугольника. Найти отношение площади треугольника, ограниченного этими двумя диагоналями, к сумме площадей двух других треугольников.

16.057. Через произвольно выбранную точку на одной стороне параллелограмма и концы противоположной стороны сделаны два разреза. Определить площадь данного параллелограмма, если площади отрезанных треугольников равны S_1 и S_2.

16.058. Доказать, что точка пересечения биссектрис углов, прилегающих к одной из непараллельных сторон произвольной трапеции, принадлежит средней линии трапеции.

16.059. Показать, что $3 < \pi < 4$, не пользуясь приближенными значениями числа π.

16.060. Периметр равнобедренной трапеции, описанной около круга, равен P. Найти длину средней линии трапеции.

16.061. Доказать, что в четырехугольнике с непараллельными сторонами середины диагоналей и середины двух противоположных сторон являются вершинами некоторого параллелограмма.

16.062. Доказать, что если медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC равны, то треугольник равнобедренный: $CA = CB$.

16.063. Длины сторон треугольника составляют арифметическую прогрессию. Высота, проведенная к средней по величине стороне, равна h. Найти радиус круга, вписанного в треугольник.

16.064. Радиус круга с центром в точке O равен 6 см, а его хорда $AB = 3$ см. Найти радиус круга, вписанного в сектор AOB.

16.065. Длины сторон треугольника относятся как 2 : 3 : 4. В нем проведена биссектриса наименьшего угла. В каком отношении (считая от вершины) она делится центром окружности, вписанной в треугольник?

16.066. На отрезке AB произвольно взята точка M. На AM и MB по одну сторону от AB построены квадраты. Около квадратов описаны окружности, пересекающиеся в точке C. Показать, что луч MC есть биссектриса угла ACB.

16.067. Около окружности с центром O описан четырехугольник $ABCD$. Найти сумму углов AOB и COD.

16.068. Доказать, что в любом треугольнике отношение суммы всех попарных произведений, составленных из длин сторон треугольника, к сумме длин его трех высот равно диаметру описанной окружности.

16.069. Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма квадратов длин медиан составляет 150% от квадрата длины его гипотенузы.

16.070. В квадрате $ABCD$ точки M и N — середины сторон DC и BC. Найти $\angle MAN$.

16.071. В равнобедренной трапеции $ABCD$ дано: $AB \parallel DC$, $AB = 3DC$, $\cos\angle ABC = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Доказать, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны.

16.072. Точки A и B расположены по разные стороны от прямой MN. На прямой MN найти точку C такую, что $\angle ACN = \angle BCN$.

16.073. Углы треугольника относятся как 2 : 3 : 7. Наименьшая сторона треугольника равна a. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

16.074. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

16.075. Одна из сторон пятиугольника имеет длину 30 см. Длины остальных сторон выражаются целыми числами и составляют арифметическую прогрессию с разностью 2 см, причем длина меньшей из сторон не превышает 7 см. Найти длины сторон всех пятиугольников, для которых выполняются эти условия.

16.076. Длины сторон остроугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию с разностью 5 см. Найти наибольшее число, обладающее следующим свойством: длина большей стороны любого треугольника указанного типа больше этого числа.

16.077. Центры описанной около треугольника и вписанной в него окружностей расположены симметрично относительно одной из сторон треугольника. Найти углы треугольника.

16.078. Сторона AB треугольника видна из вершины C под углом α. Под каким углом она видна из центра окружности, описанной около треугольника? Рассмотреть три случая: C — вершина острого, прямого или тупого угла.

16.079. Две окружности имеют только одну общую точку. Через нее проведена произвольная секущая. Доказать, что касательные в точках пересечения этой секущей с каждой из окружностей параллельны.

16.080. Показать, что если длины сторон некоторого треугольника составляют геометрическую прогрессию, то и длины высот треугольника также составляют геометрическую прогрессию.

16.081. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 8 см. Может ли длина гипотенузы быть равной 5 см?

16.082. Доказать, что угол C треугольника ABC является прямым в том и только в том случае, если длины сторон этого треугольника связаны равенством $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (прямая и обратная теоремы Пифагора).

16.083. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию. Найти функцию, выражающую зависимость площади сечения от расстояния между вершиной пирамиды и секущей плоскостью.

16.084. Высоты всех боковых граней некоторой пирамиды равны. Под каким углом боковые грани наклонены к плоскости основания, если площадь полной поверхности пирамиды в 1,5 раза больше площади ее боковой поверхности?

16.085. Дан правильный тетраэдр $SABC$. Под каким углом ребро AB видно из середины ребра SC?

16.086. В куб помещена четырехугольная пирамида так, что ее основание совпадает с одной из граней куба, а вершина — с серединой одного из ребер противоположной грани. Под какими углами боковые грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания?

16.087. Все ребра (в том числе и стороны основания) треугольной пирамиды равны. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к ее высоте.

16.088. В конус, осевое сечение которого — правильный треугольник, вписан шар, затем вписан второй шар, касающийся первого шара и боковой поверхности конуса, и т. д. (n - й шар касается ($n-1$)-го шара и боковой поверхности конуса). Найти отношение предела суммы объемов шаров при $n \to \infty$ к объему конуса.

16.089. В усеченном конусе AB и CD — взаимно перпендикулярные диаметры нижнего основания, EF — диаметр верхнего основания, параллельный прямой CD. Найти косинус острого угла между прямыми AE и BF, если образующая конуса есть среднее пропорциональное между диаметрами оснований и составляет с плоскостью основания угол $\alpha\left(\alpha > \frac{\pi}{3}\right)$.

16.090. Двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен α, а высота пирамиды равна H. Найти радиус описанного шара.

16.091. Образующая усеченного конуса составляет с плоскостью основания угол α. Внутри конуса расположены два шара, касающиеся друг друга и боковой поверхности конуса, причем первый шар касается нижнего основания конуса, а второй — верхнего основания. Расстояние между центрами шаров равно l. Найти радиусы оснований конуса.

16.092. В правильном тетраэдре $SABC$ через ребро AC проведена плоскость, пересекающая ребро SB в точке K. Доказать, что проекция вершины B на плоскость сечения лежит на высоте сечения, проведенной к стороне AC. При каком условии эта проекция совпадает с точкой K?

16.093. Найти угол между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба.

16.094. Какую фигуру образует множество всех точек, отстоящих от данной плоскости на расстояние a и от фиксированной точки данной плоскости на расстояние b $(a < b)$?

16.095. Какому условию должен удовлетворять четырехугольник, чтобы на нем, как на основании, можно было построить пирамиду с равным наклоном всех боковых граней?

16.096. Найти наименьшее целое число градусов, которое может содержать плоский угол трехгранного угла, обладающего следующим свойством: каждый из плоских углов содержит целое число градусов, причем эти три числа составляют арифметическую прогрессию с разностью $50°$.

16.097. Отношение полной поверхности конуса к поверхности вписанного в него шара равно k. Найти угол между высотой и образующей конуса и допустимые значения k.

16.098. Отношение боковой поверхности усеченного конуса, описанного около шара, к сумме площадей его оснований равно k. Найти угол между образующей и плоскостью основания и допустимые значения k.

16.099. Найти отношение объема шара к объему вписанного в него куба.

16.100. Сколько боковых граней содержит призма, у которой 60 ребер?

16.101. Доказать, что если все диагонали параллелепипеда имеют равные длины, то он прямоугольный.

16.102. Какую фигуру образует множество точек пересечения биссектрис всех треугольников, имеющих общую сторону, при условии, что углы, противолежащие этой стороне, равны?

16.103. Доказать, что если наклонная образует равные углы с тремя попарно непараллельными прямыми, лежащими в одной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

16.104. Даны две скрещивающиеся прямые. Можно ли провести две пересекающиеся прямые так, чтобы каждая из них пересекала обе данные прямые?

16.105. Пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник с катетами 9 и 8 см, вписана в конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найти объем пирамиды.

16.106. Около правильной пирамиды с высотой 27 см описана сфера радиуса 18 см. Найти угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основання.

16.107. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти расстояние от прямой, проходящей через ребро AA_1, до прямой, проходящей через диагональ B_1D.

16.108. Существует ли в пространстве точка, равноудаленная от всех вершин параллелограмма? От всех прямых, содержащих его стороны? Каким свойством должен обладать параллелограмм, чтобы точка, равноудаленная от его вершин, была бы равноудалена и от прямых, содержащих его стороны?

16.109. Каким свойством должна обладать трапеция, чтобы в пространстве существовала точка, равноудаленная от ее вершин? Если данная трапеция обладает этим свойством, то какую фигуру представляет собой множество всех таких точек?

16.110. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер AD, A_1B_1 и CC_1.

16.111. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки A, B и C (рис.16.13).

16.112. Через среднюю линию основания треугольной пирамиды и ее вершину проведена плоскость. В каком отношении находятся объемы полученных пирамид?

16.113. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — ее вершина) провести сечение через середину ребра SB и прямую MDN, расположенную в плоскости основания $ABCD$ и параллельную его диагонали AC.

16.114. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость параллельно плоскости основания пирамиды. В каком отношении находятся объемы полученных многогранников?

16.115. В правильном тетраэдре с ребром $\sqrt{2}$ см определить расстояние между двумя скрещивающимися ребрами.

16.116. Найти площадь полной поверхности конуса, если его боковую поверхность можно развернуть в круговой сектор с радиусом 1 и с прямым центральным углом.

16.117. На сколько дальше центр верхнего основания куба с ребром 1 отстоит от вершины нижнего основания, чем от его стороны?

16.118. Одно из боковых ребер наклонного параллелепипеда составляет равные острые углы с прилежащими к нему сторонами нижнего основания. Что представляет собой проекция прямой, содержащей

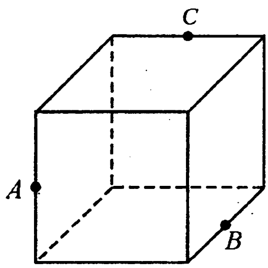


Рис. 16.13

это ребро, на плоскость нижнего основания? При каком условии эта проекция и диагональ основания лежат на одной прямой?

16.119. Через диагональ нижнего основания произвольного параллелепипеда и середину не пересекающего ее бокового ребра проведена плоскость. Как относятся объемы полученных при этом частей параллелепипеда?

16.120. В основании пирамиды лежит треугольник, длины сторон которого 30, 40 и 50 см. Вершина большего острого угла основания принадлежит боковому ребру, имеющему длину 72 см и перпендикулярному плоскости основания. Найти полную поверхность пирамиды.

16.121. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны. Найти объем пирамиды, если площади ее боковых граней равны S_1, S_2 и S_3.

16.122. Показать, что если в основании пирамиды, имеющей равные боковые ребра, лежит прямоугольный треугольник, то одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания.

16.123. Показать, что если пирамида имеет равные боковые ребра, то около нее можно описать сферу и что радиус этой сферы равен квадрату длины ребра, деленному на удвоенную длину высоты пирамиды.

16.124. Всякая ли пирамида обладает тем свойством, что около нее можно описать сферу? Если около пирамиды можно описать сферу, то где лежит центр этой сферы?

16.125. Показать, что если около основания пирамиды можно описать окружность, то все плоскости, перпендикулярные боковым ребрам пирамиды и делящие их пополам, пересекаются в одной точке.

16.126. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1)$ пересечен плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину E ребра DD_1. Показать, что объем пирамиды $EACD$ равен $\frac{1}{12}$ объема куба.

16.127. В треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра попарно равны. Доказать, что полная поверхность пирамиды равна учетверенной площади одной из ее граней.

16.128. Два конуса имеют общую вершину, а их высоты пересекаются. Показать, что прямая, по которой пересекаются плоскости оснований конусов, перпендикулярна плоскости, содержащей высоты конусов.

16.129. Доказать, что проекция диагонали осевого сечения усеченного конуса на основание равна сумме радиусов окружностей оснований конуса.

16.130. Радиус полукруга, лежащего в основании полуцилиндра, равен 1. Через диаметр полукруга проведена плоскость под углом 45° к плоскости полукруга. Показать, что в развертке полуцилиндра линия пересечения проведенной плоскости с цилиндрической поверхностью полуцилиндра образует дугу синусоиды.

ГЛАВА 17

ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТ И ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Прямоугольная декартова система координат на плоскости

1°. Расстояние между точками $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ находится по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (17.1)$$

С помощью этой же формулы выражается длина отрезка A_1A_2 или модуль вектора $\overline{A_1A_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

2°. Координаты $(x; y)$ середины отрезка с концами $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (17.2)$$

3°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой имеет вид

$$y = kx + q. \qquad (17.3)$$

Угловой коэффициент k представляет собой значение тангенса угла, образуемого прямой с положительным направлением оси Ox, а начальная ордината q — значение ординаты точки пересечения прямой с осью Oy.

4°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $A(x_0; y_0)$, имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (17.4)$$

5°. Общее уравнение прямой имеет вид

$$ax + by + c = 0. \qquad (17.5)$$

6°. Уравнения прямых, параллельных соответственно осям Oy и Ox, имеют вид

$$x = a, \qquad (17.6)$$

$$y = b. \qquad (17.7)$$

7°. Условия параллельности и перпендикулярности прямых $y_1 = k_1x + q_1$ и $y_2 = k_2x + q_2$ соответственно имеют вид

$$k_1 = k_2, \tag{17.8}$$

$$k_1 k_2 = -1. \tag{17.9}$$

8°. Уравнения окружностей с радиусом R и с центрами соответственно в точках $O\,(0;\,0)$ и $C\,(x_0;\,y_0)$ имеют вид

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{17.10}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{17.11}$$

9°. Уравнение

$$y = ax^2 + bx + c \tag{17.12}$$

представляет собой уравнение параболы с вершиной в точке, абсцисса которой $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Прямоугольная декартова система координат в пространстве

1°. Расстояние между точками $A_1\,(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $A_2\,(x_2;\,y_2;\,z_2)$ находится по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{17.13}$$

С помощью этой же формулы выражается длина отрезка A_1A_2 или модуль вектора $\overline{A_1A_2}\,(x_2 - x_1;\; y_2 - y_1;\; z_2 - z_1)$.

2°. Координаты $(x;\,y;\,z)$ середины отрезка с концами $A_1\,(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $A_2\,(x_2;\,y_2;\,z_2)$ находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\; y = \frac{y_1 + y_2}{2},\; z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{17.14}$$

3°. Модуль вектора $\overline{a}\,(a_1;\,a_2;\,a_3)$, заданного своими координатами, находится по формуле

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{17.15}$$

4°. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, т. е. справедливы формулы

$$(a_1;\,a_2;\,a_3) + (b_1;\,b_2;\,b_3) = (a_1 + b_1;\,a_2 + b_2;\,a_3 + b_3), \tag{17.16}$$

$$\lambda\,(a_1;\,a_2;\,a_3) = (\lambda a_1;\,\lambda a_2;\,\lambda a_3). \tag{17.17}$$

5°. Единичный вектор $\overline{a}_0$, сонаправленный с вектором $\overline{a}$, находится по формуле

$$\overline{a}_0 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}. \tag{17.18}$$

6°. Скалярным произведением $\bar{a}\bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi, \qquad (17.19)$$

где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

7°. Скалярное произведение векторов $\bar{a}(a_1;\, a_2;\, a_3)$ и $\bar{b}(b_1;\, b_2;\, b_3)$ выражается формулой

$$\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \qquad (17.20)$$

В частности, $\bar{a}^2 = \bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|^2$, откуда $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

8°. Косинус угла между векторами $\bar{a}(a_1;\, a_2;\, a_3)$ и $\bar{b}(b_1;\, b_2;\, b_3)$ находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \qquad (17.21)$$

9°. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\bar{a}(a_1;\, a_2;\, a_3)$ и $\bar{b}(b_1;\, b_2;\, b_3)$ имеет вид

$$\bar{a}\bar{b} = 0, \text{ или } a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0, \qquad (17.22)$$

а условие их коллинеарности (параллельности) — вид

$$\bar{a} = \lambda\bar{b}, \text{ где } |\lambda| = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}, \qquad (17.23)$$

или

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}. \qquad (17.24)$$

10°. Общее уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\bar{n}(a;\, b;\, c)$, имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (17.25)$$

11°. Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\bar{n}(a;\, b;\, c)$ и проходящей через точку $(x_0;\, y_0;\, z_0)$, имеет вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (17.26)$$

12°. Уравнение сферы с центром $O\,(0;\, 0;\, 0)$ записывается в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (17.27)$$

Пример 1. В параллелограмме $OABC$ даны вершины O (0; 0), A (3; 6) и B (8; 6). Найти отношение длин диагоналей OB и AC, а также составить уравнения сторон параллелограмма и диагонали AC.

□ Так как ординаты вершин A и B равны, то $AB \parallel Ox$ (рис. 17.1). Из трех отрезков OA, AB и OB сторонами параллелограмма могут быть только OA и AB, так как по условию OB — диагональ; поэтому $BC \parallel OA$ и C (5; 0). По формуле (17.1) находим $OB = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100}$, $AC = \sqrt{(5-3)^2+(0-6)^2} = \sqrt{40}$; значит, $OB : AC = \sqrt{100} : \sqrt{40} = \sqrt{2{,}5}$ — искомое отношение диагоналей.

Согласно формуле (17.3), уравнение стороны OA имеет вид $y = kx + q$, где $k = 6 : 3 = 2$ и $q = 0$; следовательно, $y = 2x$. Используя равенство (17.7), запишем уравнение стороны AB: $y = 6$. Далее, так как $BC \parallel OA$, то угловой коэффициент прямой BC в силу формулы (17.8) есть $k = 2$, а соответствующее значение q найдем из уравнения $y = 2x + q$, подставив в него вместо x и y координаты точки C (5; 0); тогда получим $0 = 10 + q$, т. е. $q = -10$; значит, уравнение BC имеет вид $y = 2x - 10$. Наконец, уравнение OC есть $y = 0$.

Чтобы найти уравнение диагонали AC, воспользуемся тем, что точки A (3; 6) и C (5; 0) принадлежат прямой AC и, следовательно, их координаты удовлетворяют искомому уравнению. Подставив эти координаты в уравнение $y = kx + q$, получим $6 = 3k + q$, $0 = 5k + q$, откуда $k = -3$, $q = 15$. Итак, $y = -3x + 15$ есть уравнение диагонали AC. ■

Пример 2. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, образованного прямыми $y = 0{,}2x - 0{,}4$, $y = x + 2$, $y = 8 - x$.

□ Угловые коэффициенты прямых $y = x + 2$ и $y = 8 - x$ равны соответственно $k_1 = 1$ и $k_2 = -1$. Так как $k_1 k_2 = -1$, то выполняется условие (17.9) перпендикулярности прямых; значит, ΔABC — прямоугольный (рис. 17.2) и центром описанной окружности является середина его гипотенузы AB. Найдем точки

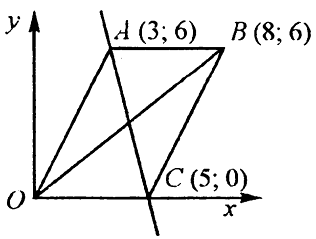


Рис. 17.1

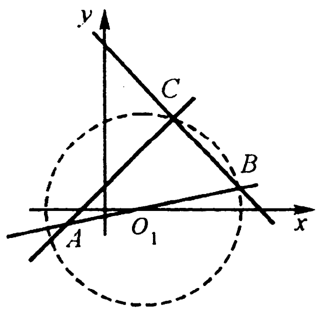


Рис. 17.2

пересечения прямой $y = 0{,}2x - 0{,}4$ с прямыми $y = x + 2$ и $y = 8 - x$; решив системы уравнений

$$\begin{cases} y = 0{,}2x - 0{,}4, \\ y = x + 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y = 0{,}2x - 0{,}4, \\ y = 8 - x, \end{cases}$$

получим точки $A\,(-3;\,-1)$ и $B\,(7;\,1)$ — концы гипотенузы. Используя формулы (17.2), найдем координаты центра окружности: $O_1\,(2;\,0)$. В силу формулы (17.1) радиус окружности есть $R = O_1A = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{26}$. Наконец, согласно формуле (17.11) получим искомое уравнение окружности: $(x-2)^2 + y^2 = 26$. ■

Пример 3. Найти единичный вектор, коллинеарный вектору, направленному по биссектрисе угла BAC треугольника ABC, если заданы его вершины: $A\,(1;\,1;\,1)$, $B\,(3;\,0;\,1)$, $C\,(0;\,3;\,1)$.

□ Найдем координаты и модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; имеем $\overline{AB}\,(2;\,-1;\,0)$, $\overline{AC}\,(-1;\,2;\,0)$, $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$, $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$.

Так как $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AC}\right|$, то $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$ является диагональю ромба $ABDC$ (рис. 17.3), а следовательно — биссектрисой угла BAC. Находим $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC} = (2;\,-1;\,0) + (-1;\,2;\,0) = (1;\,1;\,0)$ и $\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{2}$. Пусть $\overline{e}$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\overline{AD}$; тогда, согласно формуле (17.18), $\overline{e} = \dfrac{\overline{AD}}{\left|\overline{AD}\right|}$. Окончательно получаем $\overline{e}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\,\dfrac{1}{\sqrt{2}};\,0\right)$. ■

Пример 4. Прямая, параллельная медиане CM треугольника ABC, пересекает прямые BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Доказать, что $\overline{A_1C_1} + \overline{B_1C_1} = \overline{CA} + \overline{CB}$.

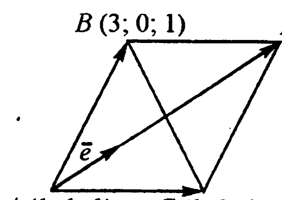


Рис. 17.3

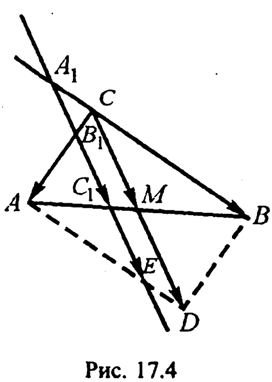


Рис. 17.4

□ Пусть $A_1E \parallel CM$ (рис. 17.4). Построим $\overline{CD} = 2\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{CB}$. Очевидно, что A_1CDE — параллелограмм; следовательно, $\overline{A_1E} = \overline{CD}$, причем $\overline{A_1E} = \overline{A_1C_1} + \overline{C_1E}$. Так как AM — медиана ΔACD и $B_1E \parallel CD$, то AC_1 — медиана ΔAB_1E и $\overline{B_1C_1} = \overline{C_1E}$. Теперь имеем $\overline{CA} + \overline{CB} = \overline{CD} = \overline{A_1E} = \overline{A_1C_1} + \overline{C_1E} = \overline{A_1C_1} + \overline{B_1C_1}$. ■

Пример 5. Даны два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ таких, что $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$. Доказать, что $\bar{a} \perp \bar{b}$.

□ I способ. Если на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах построить параллелограмм, то векторы $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$ совпадут с его диагоналями, длины которых составляют $|\bar{a} + \bar{b}|$ и $|\bar{a} - \bar{b}|$. Так как по условию длины диагоналей равны, то полученный параллелограмм является прямоугольником, откуда $\bar{a} \perp \bar{b}$.

II способ. Пусть $\bar{x} = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{y} = \bar{a} - \bar{b}$; тогда $\bar{x}^2 = (\bar{a} + \bar{b})^2 = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2$, $\bar{y}^2 = \bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2$. Квадрат вектора равен квадрату его модуля; значит,

$$\bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2 = |\bar{a} + \bar{b}|^2, \ \bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2 = |\bar{a} - \bar{b}|^2.$$

Правые части последних соотношений равны по условию; следовательно, $\bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2 = \bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2$, откуда $\bar{a}\bar{b} = 0$; в силу формулы (17.22) это означает, что $\bar{a} \perp \bar{b}$. ■

Пример 6. Даны два отрезка AB и CD. Доказать, что если $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$, то $AB \perp CD$. Верно ли обратное утверждение?

□ Рассмотрим векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ и $\overline{BC}$. В зависимости от их взаимного расположения может получиться плоская или пространственная фигура (рис. 17.5). Учитывая, $\overline{AB}^2 = |\overline{AB}|^2 = AB^2$, преобразуем данное равенство следующим образом:

$$\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2; \ \underbrace{(\overline{BD} - \overline{BC})}_{\overline{CD}}(\overline{BD} + \overline{BC}) = \underbrace{(\overline{AD} - \overline{AC})}_{\overline{CD}}(\overline{AD} + \overline{AC});$$

$$\overline{CD}(\underbrace{\overline{BD} - \overline{AD}}_{-\overline{AB}} + \underbrace{\overline{BC} - \overline{AC}}_{-\overline{AB}}) = 0; \ -2\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0; \ \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0,$$

а это и означает, что $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

Выполняя преобразования «от конца к началу» ($\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$, или $-2\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$, или $\overline{CD}(\overline{BD}+\overline{DA}+\overline{BC}+\overline{CA})=0$ и т. д.), убеждаемся в том, что верно и обратное утверждение. ■

Пример 7. В пирамиде $SABC$ все грани — правильные треугольники; точка M — центр треугольника ABC, а точка P делит ребро SC пополам (рис. 17.6). Найти разложение вектора $\overline{MP}$ по векторам $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AS}$.

□ Имеем $\overline{MP}=\overline{MC}-\overline{PC}$, где $\overline{PC}=\frac{1}{2}\overline{SC}=\frac{1}{2}(\overline{AC}-\overline{AS})$; следовательно, $\overline{MP}=\overline{MC}-\frac{1}{2}(\overline{AC}-\overline{AS})$. Теперь найдем $\overline{MC}$. В равностороннем треугольнике ABC имеем $MC=\frac{2}{3}CN$, где CN — высота треугольника; поэтому $\overline{MC}=\frac{2}{3}\overline{NC}$.

Но $\overline{NC}=\overline{AC}-\overline{AN}=\overline{AC}-\frac{1}{2}\overline{AB}$ и, значит, $\overline{MC}=\frac{2}{3}\left(\overline{AC}-\frac{1}{2}\overline{AB}\right)=\frac{2}{3}\overline{AC}-\frac{1}{3}\overline{AB}$. Таким образом, окончательно получим

$$\overline{MP}=\frac{2}{3}\overline{AC}-\frac{1}{3}\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{AS}=\frac{1}{6}\overline{AC}-\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AS}. \blacksquare$$

Пример 8. Доказать, что для всякого треугольника ABC справедливо неравенство $\cos A+\cos B+\cos C\le 1{,}5$.

□ На сторонах треугольника построим единичные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ (рис. 17.7). Суммой этих векторов является некоторый вектор $\bar{d}$, т. е. $\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3=\bar{d}$. Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$\bar{e}_1^2+\bar{e}_2^2+\bar{e}_3^2+2\bar{e}_1\bar{e}_2+2\bar{e}_1\bar{e}_3+2\bar{e}_2\bar{e}_3=\bar{d}^2,$$

или

$$1+1+1+2\cos(\pi-B)+2\cos(\pi-A)+2\cos(\pi-C)=\left|\bar{d}\right|^2.$$

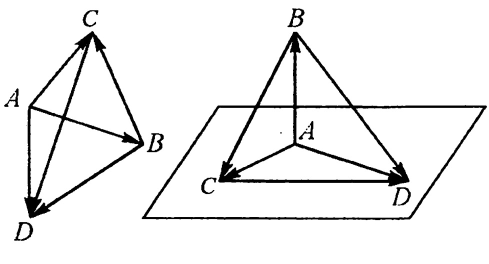


Рис. 17.5

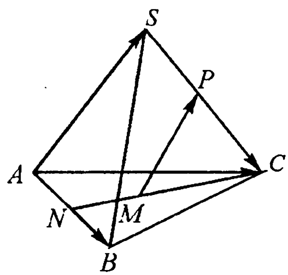


Рис. 17.6

Так как $\left|\vec{d}\right|^2 \geq 0$, то $3-2\cos B-2\cos A-2\cos C \geq 0$, откуда $\cos A+\cos B+$ $+\cos C \leq 1{,}5$. ■

Пример 9. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна a. Найти радиус сферы, проведенной через точки A, B_1, E и F, где E и F — точки на ребре CC_1, причем $CE = EF = FC_1$.

□ Введем систему координат (рис. 17.8), началом которой является точка B (0; 0; 0). В этой системе точки A, B_1, E и F имеют следующие координаты:

A (a; 0; 0), B_1 (0; 0; a), $E\left(0; a; \dfrac{a}{3}\right)$, $F\left(0; a; \dfrac{2a}{3}\right)$. Пусть $O(x; y; z)$ — центр искомой сферы. Тогда $OA^2 = OB_1^2 = OE^2 = OF^2 = R^2$, где R — радиус сферы. Используя формулу (17.13), выражающую расстояние между двумя точками, получим систему уравнений

$$(x-a)^2+y^2+z^2=R^2, \qquad (*)$$

$$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2, \qquad (**)$$

$$x^2+(y-a)^2+\left(z-\frac{a}{3}\right)^2=R^2, \qquad (***)$$

$$x^2+(y-a)^2+\left(z-\frac{2a}{3}\right)^2=R^2. \qquad (****)$$

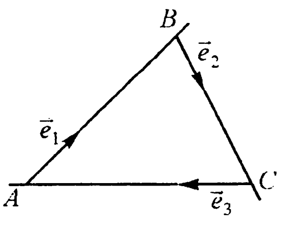


Рис. 17.7

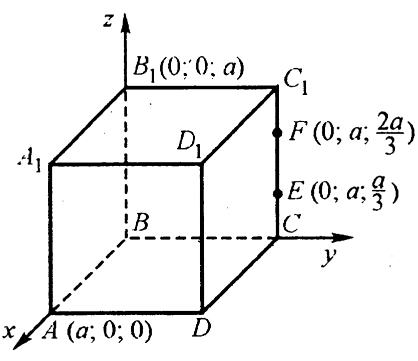


Рис. 17.8

Вычитая уравнение (****) из (***), имеем $\left(z-\frac{a}{3}\right)^2-\left(z-\frac{2a}{3}\right)^2=0$, откуда $2z-a=0$, т. е. $z=\frac{a}{2}$. Подставим это значение z в уравнения (*) и (**) и вычтем (**) из (*); тогда получим $x=\frac{a}{2}$. Вычитая уравнение (***) из (**), имеем $y=\frac{7a}{18}$. После подстановки значений x, y и z в уравнение (**) окончательно найдем $R=\frac{a\sqrt{211}}{18}$. ■

17.001. Дана окружность $x^2+y^2=4$. Составить уравнение прямой l, параллельной оси абсцисс и пересекающей окружность в таких точках M и N, что $MN=1$.

17.002. Даны три точки A (2; 1), B (3; –1), C (– 4; 0), являющиеся вершинами равнобедренной трапеции $ABDC$. Найти координаты точки D, если $\overline{AB}=k\overline{CD}$.

17.003. Даны вершины треугольника: A (– 2; – 3), B (– 1; 2), C (4; 1). Доказать, что треугольник ABC — равнобедренный, и составить уравнение прямой, содержащей высоту, проведенную из вершины A.

17.004. В прямоугольной системе координат изображена равнобедренная трапеция с основаниями 6 и 10 и углом $\varphi=60°$ при основании (рис. 17.9). Составить уравнения сторон трапеции.

17.005. Составить уравнение окружности, проходящей через точки A (2; 0), B (5; 0) и касающейся оси Oy.

17.006. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2; 3) и образующей с осью Ox угол 120°. Найти площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат.

17.007. В окружность $x^2+y^2=R^2$ вписан квадрат $ABCD$. Найти R и координаты вершин B, C и D, если (5; – 12) — координаты вершины A.

17.008. Дана окружность $x^2+y^2=9$. Составить уравнение окружности, проходящей через начало координат и точку A (1; 0) и касающейся данной окружности.

17.009. Составить уравнение окружности, проходящей через точку A (2; 1) и касающейся осей координат.

17.010. На прямой $5x-2y+9=0$ найти точку A, равноудаленную от точек B (– 2; – 3) и C (4; 1), и вычислить площадь треугольника ABC.

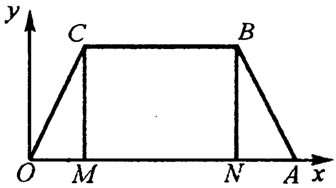


Рис. 17.9

17.011. Длины диагоналей AC и BD ромба равны 15 и 8 см. Первая диагональ направлена по оси Ox, вторая — по оси Oy. Составить уравнения сторон ромба и найти расстояние от начала координат до стороны ромба.

17.012. Составить уравнение окружности, вписанной в треугольник, стороны которого лежат на прямых $x = 0$, $y = 0$ и $3x + 4y - 12 = 0$.

17.013. Пусть A — точка пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $x - 3y + 4 = 0$; O — начало координат. Найти расстояние OA и составить уравнение прямой OA.

17.014. Найти координаты вершин C и D квадрата $ABCD$, если A (2; 1), B (4; 0).

17.015. При повороте вокруг начала координат точка A (6; 8) переходит в точку A_1 (8; 6). Найти косинус угла поворота.

17.016. Вычислить длины диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$, если A (1; – 3; 0), B (– 2; 4; 1), C (– 3; 1; 1).

17.017. Даны две вершины равностороннего треугольника: A (– 2; 2), B (– 2; – 4). Найти координаты третьей вершины треугольника и его площадь.

17.018. Найти длину хорды, образующейся при пересечении прямой $x + y - 5 = 0$ и окружности $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 40$.

17.019. Известны координаты середин сторон треугольника: M_1 (–1; 2), M_2 (2; – 3), M_3 (– 3; – 1). Найти координаты точки пересечения медиан треугольника.

17.020. Даны координаты двух вершин треугольника: A (2; – 1), B (– 3; 5) и координаты точки пересечения медиан этого треугольника: M (1; 1). Найти координаты вершины C.

17.021. Даны координаты вершин четырехугольника: A (2; – 2), B (– 3; 1), C (7; 7), D (7; 1). Доказать, что $ABCD$ — трапеция, и найти длину ее средней линии.

17.022. Составить уравнения касательных, проведенных к окружности $x^2 + y^2 = 9$ из точки M (5; 0).

17.023. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, образованного прямой $3x - y + 6 = 0$ и осями координат.

17.024. Составить уравнение сферы, проходящей через точку A (1; – 1; 4) и касающейся координатных плоскостей.

17.025. Убедиться в том, что существует только одна точка, сумма квадратов расстояний от которой до данных двух точек A (2; 3; – 1), B (1; – 1; 3) постоянна и равна 16,5. Найти координаты этой точки.

17.026. Даны точки A (1; 1), B (6; 6), C (5; 4), D (2; 1). Доказать, что $ABCD$ — трапеция, и найти угол α между ее диагоналями.

17.027. Доказать, что треугольник с вершинами A (2; 1), B (3; 0), C (1; 5) тупоугольный, и найти косинус тупого угла.

17.028. При каких значениях α и β вектор $\bar{a}(3; -1; \alpha)$ перпендикулярен вектору $\bar{b}(2; \beta; 1)$, если $|\bar{b}| = 3$?

17.029. Даны три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Доказать, что вектор $(\bar{b}\bar{c})\bar{a} - (\bar{a}\bar{c})\bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{c}$.

17.030. Доказать, что сумма квадратов длин всех ребер параллелепипеда равна сумме квадратов длин всех его диагоналей.

17.031. Даны точки A_1 (0; 1; 2), A_2 (1; 2; 4), B_1 (– 1; – 1; 3), B_2 (1; 0; 0); M_1 и M_2 — середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2. Найти вектор $\overline{M_1M_2}$ и его модуль.

17.032. Доказать, что треугольник с вершинами A (6; – 4; 2), B (3; 2; 3), C (3; – 5; – 1) прямоугольный.

17.033. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC и $\overline{AO} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$. Разложить $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

17.034. При каких значениях x векторы $(x^3 - 1)\overline{a}$ и $2x\overline{a}$ сонаправлены, если $\overline{a} \neq \overline{0}$?

17.035. При каких значениях m векторы $(m^2 - m - 2)\overline{b}$ и $m^3\overline{b}$ противоположно направлены, если $\overline{b} \neq \overline{0}$?

17.036. При каких значениях x векторы $(5x - x^2)\overline{a}$ и $\overline{a}$ сонаправлены и $|(x-5)\overline{a}| \leq 3|\overline{a}|$, если $\overline{a} \neq \overline{0}$?

17.037. При каких значениях y векторы $(3y^2 - 11y + 6)\overline{p}$ и $(y^2 + 1)\overline{p}$ противоположно направлены, если $\overline{p} \neq \overline{0}$?

17.038. При каких значениях x и y векторы $(x; -2; 5)$ и $(1; y; -4)$ коллинеарны?

17.039. При каких x верно неравенство $|(x-2)\overline{a}| > 3|\overline{a}|$, если $\overline{a} \neq \overline{0}$?

17.040. Пусть K и M — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$ и $\overline{AK} = \overline{a}$, $\overline{AM} = \overline{b}$. Выразить векторы $\overline{BD}$ и $\overline{AD}$ через $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

17.041. В параллелограмме $ABCD$ дано: $M \in BC$ и $BM : MC = 1:2$; $N \in DC$, $DN : NC = 1 : 2$; $\overline{AM} = \overline{a}$; $\overline{AN} = \overline{b}$. Выразить векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{MN}$ и $\overline{BD}$ через $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

17.042. В тетраэдре $ABCD$ медиана DD_1 грани ADB делится точкой M в отношении $DM : MD_1 = 3 : 7$. Разложить вектор $\overline{CM}$ по векторам $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$.

17.043. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина каждого ребра равна a; точка $M \in SC$ и $SM : MC = 2:1$. Найти угол между векторами $\overline{DC}$ и $\overline{AM}$.

17.044. Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (вершины основания $ABCD$ расположены по ходу часовой стрелки); K — середина ребра AA_1; H — середина ребра AD; M — центр грани CC_1D_1D. Доказать, что прямая KM перпендикулярна прямой B_1H.

17.045. Доказать, что для всякого треугольника ABC выполняется неравенство $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -1{,}5$.

17.046. Дано: прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$; $\overline{BB_1} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$ и $\overline{BA} = \overline{c}$; O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Разложить $\overline{A_1O}$ по векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

17.047. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано: $AA_1 = 10$, $AD = 6$, $AB = 8$. Найти косинус угла между векторами $\overline{DB_1}$ и $\overline{AD_1}$.

17.048. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти угол между векторами $\overline{MN}$ и $\overline{DC}$, если $M \in AA_1$ и $AM : MA_1 = 1:2$; $N \in CC_1$ и $CN : NC_1 = 2:1$.

17.049. Медианы боковых сторон равнобедренного треугольника пересекаются под углом 60°. Найти угол при вершине треугольника.

17.050. В треугольнике ABC дано: $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \bar{b}$, $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 2$, $\angle BAC = 60°$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ единичный вектор, направленный по высоте треугольника, проведенной из вершины A.

17.051. Даны векторы $\bar{a}(2;\,-3;\,5)$, $\bar{b}(-1;\,1;\,-3)$ и $\bar{c}(3;\,7;\,1)$. Найти координаты вектора $\bar{p}(x;\,y;\,z)$, если $\bar{p}\bar{a} = 12$, $\bar{p}\bar{b} = -6$ и $\bar{p} \perp \bar{c}$.

17.052. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ лежат в одной плоскости и образуют попарно друг с другом углы $\frac{2\pi}{3}$. Разложить вектор $\bar{a}$ по векторам $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 1$.

17.053. Даны координаты вершин четырехугольника: $A(-1;\,2;\,3)$, $B(-1;\,3;\,1)$, $C(-1;\,7;\,3)$, $D(-1;\,6;\,5)$. Доказать, что $ABCD$ — прямоугольник.

17.054. В треугольнике ABC дано: $\overline{AB} = 4\bar{i} + 2\bar{j}$, $\overline{AC} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, где $\bar{i}$ и $\bar{j}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Доказать, что треугольник ABC прямоугольный, и вычислить его площадь.

17.055. В окружности проведены радиусы OA, OB, OC. Найти величину угла AOB, если $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$.

17.056. Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если $|\overline{OA}| = 5$, $|\overline{OB}| = 2$, $|\overline{OC}| = 6$, $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$, $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0$, $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 8$.

17.057. Дан прямоугольный треугольник ABC: $\angle C = 90°$, D — основание высоты, проведенной из вершины прямого угла. Выразить вектор $\overline{CD}$ через векторы $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$.

17.058. Стороны треугольника ABC связаны соотношением $a^2 + b^2 = 5c^2$. Доказать, что две медианы треугольника перпендикулярны. Верно ли обратное утверждение?

17.059. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти косинус угла между векторами $\overline{DA_1}$ и $\overline{DM}$, где M — середина ребра CC_1.

17.060. Даны координаты вершин пирамиды: $S(0;\,0;\,2)$, $A(0;\,0;\,0)$, $B(1;\,0;\,0)$, $C(0;\,1;\,0)$. Найти координаты точки M, лежащей на оси Oz, и координаты точки N, лежащей в плоскости SBC, если известно, что $\overline{MN}\left(\frac{1}{3};\,\frac{1}{3};\,0\right)$.

17.061. В ромбе $ABCD$ длина стороны равна 6, а величина угла BAD равна $\frac{\pi}{3}$. На стороне BC взята точка E такая, что $EC = 2$. Найти расстояние от E до центра симметрии ромба.

17.062. Даны единичные векторы $\overline{m}, \overline{n}$ и $\overline{p}$ такие, что $\overline{m} \perp \overline{n}, \overline{n} \perp \overline{p}$ и угол между $\overline{m}$ и $\overline{p}$ равен 60°. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a} = 3\overline{m} - 2\overline{n} + \overline{p}$ и $\overline{b} = -2\overline{m} + \overline{n} - \overline{p}$.

17.063. В треугольнике ABC точка N лежит на стороне AB и $AN = 3NB$; медиана AM пересекается с CN в точке O. Найти AB, если $AM = CN = 7$ см и $\angle NOM = 60°$.

17.064. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $(\overline{a} - \overline{b})^2 + (2\overline{a} - \overline{b})^2 = 56$, $|\overline{a}| = 2$ и $|\overline{b}| = 3$.

17.065. Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если $\overline{AB} = \overline{a} - \overline{b} + 3\overline{c}$, $\overline{AD} = 4\overline{a} - \overline{b} - \overline{c}$, где $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — единичные попарно перпендикулярные векторы.

17.066. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC, а точка M — середина стороны CD. Найти AD, если $AK = 6$ см, $AM = 3$ см и $\angle KAM = 60°$.

17.067. Дан вектор $\overline{a}(1; -2; 5)$. Найти координаты вектора $\overline{b}$, лежащего в плоскости xOy и перпендикулярного вектору $\overline{a}$, если $|\overline{b}| = 2\sqrt{5}$.

17.068. Пусть $\overline{i}, \overline{j}$ и $\overline{k}$ — единичные векторы, направленные вдоль координатных осей, и $\overline{a} = 6\overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}$. Найти косинусы углов, образуемых вектором $\overline{a}$ с векторами $\overline{i}, \overline{j}$ и $\overline{k}$.

17.069. Вектор $\overline{OA}$ составляет с осями Ox, Oy и Oz углы, соответственно равные $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{4}$; точка B имеет координаты $(-2; -2; -2\sqrt{2})$. Найти угол между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

17.070. Найти длину медианы AM треугольника ABC, если $AB = 10$ см, $AC = 6$ см и $\angle BAC = 60°$.

17.071. Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Разложить вектор $\overline{A_1A_3}$ по векторам $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_5}$.

17.072. Даны два вектора: $\overline{a}(x; 1; -1)$ и $\overline{b}(1; 0; 1)$. При каком значении x справедливо равенство $(\overline{a} + 3\overline{b})^2 = (\overline{a} - 2\overline{b})^2$?

17.073. К окружности с центром O проведены из точки M две касательные; A и B — точки касания. Разложить вектор $\overline{MO}$ по векторам $\overline{MA}$ и $\overline{MB}$, если $\angle AMB = \alpha$.

17.074. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята точка K так, что $AK:KB=7$. Сторона AB в 3 раза длиннее стороны BC. Разложить $\overline{DK}$ по $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ и найти отношение $DK:AB$, если $\angle BAD=60°$.

17.075. На сторонах BC, CA и AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC $(\angle C=90°)$ взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1. Доказать, что отрезки CC_1 и A_1B_1 перпендикулярны и равны, если точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника по обходу в равных отношениях.

17.076. В треугольнике ABC дано: $AB = BC$; D — середина стороны AC; DK — перпендикуляр к BC; точка M — середина отрезка DK. Доказать, что прямые AK и BM перпендикулярны.

17.077. Пусть $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы, направленные вдоль координатных осей, и $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}+3\alpha\bar{k}$, $\bar{b}=\alpha^2\bar{i}+4\bar{j}-3\bar{k}$. При каких значениях α векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны?

17.078. Даны две вершины треугольника: $A(-1;1)$; $B(-5;4)$ и $C(7;2)$. Найти скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ и площадь треугольника.

17.079. Медианы граней SAB и SAC тетраэдра $SABC$ пересекаются соответственно в точках M и N. Доказать, что $\overline{MN}\parallel\overline{BC}$, и найти отношение $|\overline{MN}|:|\overline{BC}|$.

17.080. Даны векторы $\bar{a}(6;-8;5\sqrt{2})$ и $\bar{b}(2;-4;\sqrt{2})$. Найти угол, образуемый вектором $\bar{a}-\bar{b}$ с осью Oz.

17.081. Даны три ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, каждые два их которых неколлинеарны. Найти их сумму, если $(\bar{a}+\bar{b})\parallel\bar{c}$ и $(\bar{b}+\bar{c})\parallel\bar{a}$.

17.082. Доказать, что если биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна каждой из них.

17.083. Даны вершины треугольника: $M(1;1;4)$, $N(1;4;4)$ и $K(3;3;2)$. Доказать, что $\overline{ON}\perp\overline{MK}$, где O — середина стороны MK. Определить вид треугольника.

17.084. Доказать, что для любых четырех данных точек A, B, C, D имеет место равенство $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AC}\cdot\overline{DB}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0$.

17.085. Найти модуль проекции вектора $\bar{a}(7;-4)$ на ось, параллельную вектору $\bar{b}(-8;6)$.

17.086. Найти угол между медианами катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, обращенный к гипотенузе.

17.087. Дан параллелограмм $ABCD$; $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$, K — середина BC, P — середина DC. Выразить сумму векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$ через векторы $\overline{AK}=\bar{a}$ и $\overline{AP}=\bar{b}$.

17.088. Доказать, что если суммы квадратов противоположных ребер тетраэдра равны, то эти ребра попарно перпендикулярны.

17.089. В ромбе $ABCD$ точки M и N — середины сторон BC и CD. Найти $\angle MAN$, если $\angle BAD = 60°$.

17.090. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $AD = a$, $DC = b$, $DD_1 = c$. Найти острый угол между прямыми BD_1 и A_1D.

17.091. Даны вершины треугольника: $A(-2; 1; -3)$, $B(4; -7; 1)$ и $C(1; 2; -1)$. Найти угол между стороной CA и медианой, проведенной из вершины C.

17.092. Единичные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ удовлетворяют условию $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = \bar{0}$. Найти $\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_3\bar{e}_1$.

17.093. Дана неплоская замкнутая линия $ABCD$. Доказать, что если $\angle ABC = \angle DAB = 90°$ и $DA = CB$, то $\angle ADC = \angle BCD$.

17.094. Дан тетраэдр $DABC$ и точка M в плоскости его грани ABC. Доказать, что для разложения $\overline{DM} = \alpha\overline{DA} + \beta\overline{DB} + \gamma\overline{DC}$ выполняется равенство $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

17.095. Известны длины ребер тетраэдра $DABC$. Найти косинус угла между противолежащими ребрами AB и CD.

17.096. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

17.097. Найти отношения, на которые точка P пересечения биссектрис треугольника ABC делит каждую биссектрису, если $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

17.098. Дан треугольник ABC; $AB = 4$ см, $AC = 8$ см; $\angle BAC = 60°$. Найти длину вектора $\overline{AN}$, где $N \in BC$ и $BN : NC = 3:1$.

17.099. В тетраэдре $OABC$ плоские углы трехгранного угла при вершине O — прямые. Точка H — основание перпендикуляра, проведенного из вершины O к плоскости грани ABC. Разложить вектор $\overline{OH}$ по векторам $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

17.100. Дан треугольник ABC; BD — медиана, $\angle DBC = 90°$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Найти $\angle ABD$.

17.101. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, равен $\sqrt{15}$. Определить длину вектора $\overline{OC}$, если $\overline{OA}\cdot\overline{OB} = 1$, $\overline{OA}\cdot\overline{OC} = 0$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC} = 0$, $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = 2$.

17.102. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Определить $\overline{OA}\cdot\overline{OC}$, если $|\overline{OA}| = 1$, $|\overline{OB}| = 2$, $|\overline{OC}| = 3$, $\overline{OB}\cdot\overline{OA} = 0$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC} = 0$.

17.103. Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если $\left|\overline{OA}\right| = \left|\overline{OB}\right| = \left|\overline{OC}\right| = 5$, $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$, $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0$, $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 20$.

17.104. На плоскости заданы точки A (– 6; – 1), B (– 4; – 4), C (– 1; – 6), D (– 3; – 3). Доказать, что $ABCD$ — ромб, и вычислить его площадь.

17.105. Дан треугольник ABC; $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 8$, $\left|\overline{AB}\right| = 10$, $\left|\overline{BC}\right| = 6$. Найти длину высоты, опущенной из вершины B. Является ли угол ABC острым или тупым?

17.106. Даны векторы $\bar{a}\,(2; -1; 3)$, $\bar{b}\,(1; -3; 2)$, $\bar{c}\,(3; 2; -4)$. Найти вектор $\bar{x}$, если $\bar{x}\,\bar{a} = -5$, $\bar{x}\bar{b} = -11$, $\bar{x}\,\bar{c} = 20$.

17.107. Даны векторы $\bar{a} = (3; 2; 2)$, $\bar{b} = (18; -22; -5)$. Найти вектор $\bar{x}$, если он перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, образует с осью Oy тупой угол, а его длина равна 14.

17.108. Даны два вектора $\overline{OA}(-1; 2)$ и $\overline{OB}(-4; -2)$, где O — начало координат. Найти длину отрезка AB, площадь треугольника OAB и длину медианы OM.

17.109. Найти вектор $\bar{b}$, коллинеарный вектору $\bar{a}\,(2\sqrt{2}; -1; 4)$, если $\left|\bar{b}\right| = 10$.

17.110. Доказать, что если в тетраэдре $DABC$ противоположные ребра попарно перпендикулярны, то $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

17.111. Найти скалярное произведение векторов $\overline{AK}$ и $\overline{BL}$, если AK и BL — медианы равнобедренного треугольника ABC, площадь которого равна S, а $\angle A = 120°$.

17.112. Даны вершины тетраэдра: A (3; – 2; 1), B (3; 1; 5), C (4; 0; 3), D (0; 0; 0). Медианы граней ADB и BDC пересекаются в точках M_1 и M_2. Найти отношение $AC : M_1M_2$.

17.113. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Разложить векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AE}$ по векторам $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

17.114. В куб вписана сфера. Доказать, что сумма квадратов расстояний каждой точки сферы до вершин куба не зависит от выбора взятой точки. Найти эту сумму.

17.115. В квадрат вписана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора взятой точки. Найти эту сумму.

17.116. Около квадрата описана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний точек окружности до вершин квадрата не зависит от выбора взятых точек. Найти эту сумму.

17.117. Дан прямоугольник $ABCD$. Доказать, что сумма квадратов расстояний любой точки пространства до вершин A и C равна сумме квадратов ее расстояний до вершин B и D.

17.118. Доказать, что в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сумма квадратов расстояний любой точки пространства до вершин A, B_1, C и D_1 равна сумме квадратов ее расстояний до вершин A_1, B, C_1 и D.

17.119. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 60°, $\overline{AB}(4; 2; 4)$, $AC = 1$. Найти косинус угла между медианой AA_1 и стороной AB.

17.120. Найти длину биссектрисы AM треугольника ABC, если $AB = c$, $AC = b$ и $\angle A = \alpha$.

17.121. Точки M и N — середины отрезков AB и CD. Доказать, что $MN \le \le 0{,}5(AC + BD)$, $MN \le 0{,}5(BC + AD)$.

17.122. Дан треугольник ABC; M — точка пересечения его медиан. Доказать, что $OM < \frac{1}{3}(OA + OB + OC)$, где O — произвольная точка пространства.

17.123. Дан треугольник ABC. Прямая l пересекает прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что векторы $\overline{AB} + \overline{A_1B_1}$, $\overline{BC} + \overline{B_1C_1}$, $\overline{CA} + \overline{C_1A_1}$ коллинеарны.

17.124. В окружность вписан треугольник ABC. Прямая, содержащая медиану CC_1 треугольника, пересекает окружность вторично в точке D. Доказать, что $CA^2 + CB^2 = 2CC_1 \cdot CD$.

17.125. В равнобедренном треугольнике ABC с площадью S проведены высоты AM и BN. Найти скалярное произведение $\overline{AM} \cdot \overline{BN}$ при условии, что точки M и N лежат на боковых сторонах треугольника, а длина его основания равна c.

17.126. Пусть вектор $\bar{a}$ имеет координаты $\frac{2m}{1+m^2}$ и $\frac{1-m^2}{1+m^2}$, а вектор $\bar{b}$ — координаты $\frac{1-k^2}{1+k^2}$ и $\frac{2k}{1+k^2}$. Доказать, что оба вектора единичные: $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$. Используя свойство скалярного произведения $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \le |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$, доказать справедливость двойного неравенства $-\frac{1}{2} \le \frac{(m+k)(1-mk)}{(1+m^2)(1+k^2)} \le \frac{1}{2}$.

17.127. В прямоугольном треугольнике ABC известны длины катетов: $AC = = 3$ см, $BC = 4$ см. Точка M делит гипотенузу в отношении $AM : MB = 3 : 4$. На какие части вектор $\overline{CM}$ делит угол C?

17.128. Доказать, что луч CM, где C — вершина прямого угла треугольника ABC, а M — центр квадрата, построенного на гипотенузе и лежащего вне треугольника, есть биссектриса угла C.

17.129. Дан пятиугольник $ABCDE$; точки M, N, P и Q — середины его сторон AB, BC, CD и DE. Доказать, что если U и V — середины MP и NQ, то вектор $\overline{UV}$ коллинеарен вектору $\overline{AE}$. Найти отношение $AE : UV$.

17.130. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого, пересекающиеся в точке P, взаимно перпендикулярны. Доказать, что середины сторон AB и CD, центр O и точка P являются вершинами параллелограмма.

ГЛАВА 18

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

1°. *Алгебраическая форма* комплексного числа имеет вид

$$z = a + bi \quad (a \in \boldsymbol{R}, b \in \boldsymbol{R}, i^2 = -1), \tag{18.1}$$

где $a = \mathrm{Re}\, z$ — *действительная часть*, $b = \mathrm{Im}\, z$ — *мнимая часть*. Если $a \neq 0, b \neq 0$, то число z называется *мнимым*; если $a = 0, b \neq 0$, то оно называется *чисто мнимым*.

2°. Комплексное число $z = a + bi$ на координатной плоскости изображается либо точкой M с абсциссой a и ординатой b, либо вектором $\overline{OM}$ с началом O и концом M (радиус-вектором точки M).

3°. Условие равенства двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases} \tag{18.2}$$

4°. Сумма, разность и произведение комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ находятся по формулам

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i; \tag{18.3}$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i; \tag{18.4}$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \tag{18.5}$$

5°. Числа $z = a + bi$ и $-z = -a - bi$ называются *противоположными*. Сумма двух противоположных чисел равна нулю: $z + (-z) = 0$.

6°. Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются *сопряженными*. Сумма и произведение двух сопряженных чисел являются действительными числами:

$$z + \bar{z} = 2a, \; z\bar{z} = a^2 + b^2.$$

7°. Для нахождения частного комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ сначала числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ умножают на сопряженное знаменателю число $\bar{z}_2 = a_2 - b_2 i$, а затем производят остальные действия.

8°. *Степени числа i.* Так как $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -i, i^4 = (i^2)^2 = 1$, то

$$i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ i^{4n} = 1,\ n \in N. \tag{18.6}$$

9°. *Тригонометрическая форма* комплексного числа z имеет вид

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{18.7}$$

где

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{18.8}$$

— *модуль* числа z, а *аргумент* φ числа z связан с a и b формулами

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{18.9}$$

Аргумент комплексного числа определен неоднозначно: если φ — аргумент числа z, то $\varphi + 2\pi k$ — также аргумент этого числа при любом целом k. Для однозначности определения аргумента его выбирают в пределах $-\pi < \varphi \le \pi$ и обозначают $\arg z$; такое значение аргумента называют *главным*. В дальнейшем под аргументом комплексного числа мы будем понимать его главное значение.

10°. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ — комплексные числа, заданные в тригонометрической форме. Тогда для произведения $z_1 z_2$ и частного $\frac{z_1}{z_2}$ справедливы формулы

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \tag{18.10}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \tag{18.11}$$

а для n-й степени числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — формула

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in N. \tag{18.12}$$

При $r = 1$ соотношение (18.12) принимает вид

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \tag{18.13}$$

и называется *формулой Муавра*.

11°. Корень n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{18.14}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Пример 1. Найти число, сопряженное числу $z = \dfrac{2\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} + 3$.

□ Умножив числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{3}-i$, сопряженное знаменателю, получим

$$z=\frac{(2\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}+3=\frac{6-2\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-1}{4}+3=$$

$$=\frac{5-3\sqrt{3}i}{4}+3=\frac{17-3\sqrt{3}i}{4}=\frac{17}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}i,$$

откуда $\bar{z}=\frac{17}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i.$ ■

Пример 2. Найти сумму $A=i+i^2+i^3+...+i^{15}$.

□ Имеем

$$A=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+(i^9+i^{10}+i^{11}+i^{12})+(i^{13}+i^{14}+i^{15})=$$

$$=(i+i^2+i^3+i^4)(1+i^4+i^8)+i^{13}+i^{14}+i^{15}.$$

Так как $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$, то $A=i^{13}+i^{14}+i^{15}=i-1-i=-1.$ ■

Пример 3. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1=x+1+y^2-3i$ и $z_2=y-x^2-2xi+y^2i-1-i$ являются противоположными?

□ Запишем данные числа в виде $z_1=(x+y^2+1)-3i$ и $z_2=(y-x^2-1)+$ $+(y^2-2x-1)i$. Для того чтобы комплексные числа z_1 и z_2 были противоположными, нужно, чтобы действительные числа x и y удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases}x^2-y+1=x+y^2+1,\\2x+1-y^2=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2-x-y=0,\\y^2-2x-4=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x+y)(x-y-1)=0,\\y^2-2x-4=0.\end{cases}$$

Последняя система распадается на две:

$$\begin{cases}x+y=0,\\y^2-2x-4=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x-y-1=0,\\y^2-2x-4=0.\end{cases}$$

Решив их, получим ответ: $x_1=1-\sqrt{5}$, $y_1=-1+\sqrt{5}$; $x_2=1+\sqrt{5}$, $y_2=-1-\sqrt{5}$; $x_3=2+\sqrt{7}$, $y_3=1+\sqrt{7}$; $x_4=2-\sqrt{7}$, $y_4=1-\sqrt{7}$. ■

Пример 4. Изобразить на плоскости множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют условию

$$x^2 + i - 2x + 2yi = y - 1 + \frac{4y^2 - 1}{2y - 1} i.$$

□ При $y \neq 0{,}5$ имеем $(x^2 - 2x) + (2y + 1)i = (y - 1) + (2y + 1)i$. Используя условие (18.2) равенства двух комплексных чисел, получим систему

$$\begin{cases} x^2 - 2x = y - 1, \\ 2y + 1 = 2y + 1, \\ y \neq 0{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y \in (-\infty;\ 0{,}5) \cup (0{,}5;\ \infty). \end{cases}$$

Искомое множество представляет собой параболу $y = (x-1)^2$ с двумя «выколотыми» точками, ординаты которых равны 0,5 (рис. 18.1). ■

Пример 5. Изобразить множество точек z, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} 2 \le |z - 1| \le 3, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \sqrt{5}. \end{cases}$$

□ Пусть $z = x + yi$, где $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$. Тогда первое условие можно переписать в виде $2 \le |(x-1) + yi| \le 3$, или $2 \le \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \le 3$, откуда $4 \le (x-1)^2 + y^2 \le 9$. Это — множество точек, лежащих внутри и на границе кольца между окружностями с центром $M\,(1;\ 0)$ и радиусами, равными 2 и 3. Учитывая второе условие, заключаем, что искомое множество есть часть этого кольца, ограниченная отрезками прямых $y = 0$ и $y = \sqrt{5}$ и не включающая эти отрезки (рис. 18.2). ■

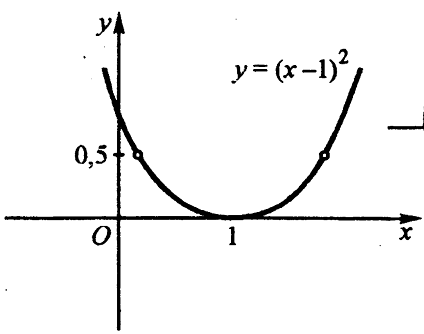


Рис. 18.1

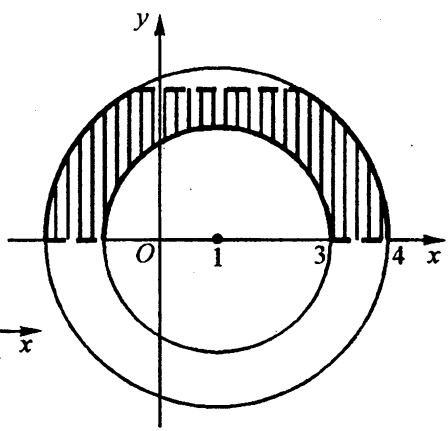


Рис. 18.2

Пример 6. Представить в тригонометрической форме комплексные числа: а) $-16\sqrt{3}+16i$; б) $-2i$; в) $1-\sqrt{5}$; г) $1-\cos 200°+i\sin 200°$.

□ а) Находим модуль данного числа: $|z|=r=\sqrt{(-16\sqrt{3})^2+16^2}=32$. Так как точка, изображающая число z, лежит во II четверти, то $\cos\varphi=-\frac{16\sqrt{3}}{32}=$ $=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$; значит, $\arg z=\varphi=\frac{5\pi}{6}$. Итак, $z=32\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

б) Здесь $r=2$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}$; тогда

$$-2i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

в) Имеем $r=\sqrt{5}-1$, $\varphi=\pi$; следовательно,

$$1-\sqrt{5}=(\sqrt{5}-1)(\cos\pi+i\sin\pi).$$

г) Сначала запишем данное число в виде $z=2\sin^2 100°+2i\sin 100°\cos 100°=$ $=2\sin^2 80°-2i\sin 80°\cos 80°$ и найдем его модуль:

$$r=\sqrt{4\sin^4 80°+4\sin^2 80°\cos^2 80°}=\sqrt{4\sin^2 80°}=2\sin 80°,$$

так как $\sin 80°>0$. Далее имеем

$$\cos\varphi=\frac{2\sin^2 80°}{2\sin 80°}=\sin 80°,\ \sin\varphi=-\frac{2\sin 80°\cos 80°}{2\sin 80°}=-\cos 80°.$$

Значит, $z=2\sin 80°(\sin 80°-i\cos 80°)$, но эта запись не является тригонометрической формой данного числа. Чтобы найти искомое представление, воспользуемся тем, что $\sin 80°=\cos(80°-90°)=\cos(-10°)$, $-\cos 80°=\sin(80°-90°)=$ $=\sin(-10°)$. Тогда получим

$$z=2\sin 80°(\cos(-10°)+i\sin(-10°)).\ ■$$

Пример 7. Вычислить $(1+i\sqrt{3})^7+(1-i\sqrt{3})^7$.

□ <u>I способ</u>. Представим числа $1+i\sqrt{3}$ и $1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\ 1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Далее, используя соотношение (18.12), находим

$$(1+i\sqrt{3})^7+(1-i\sqrt{3})^7=$$

$$=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^7+\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^7=$$

$$=2^7\left(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right)+2^7\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=2^8\cos\frac{\pi}{3}=2^7=128.$$

II способ. В данном случае можно воспользоваться формулой бинома Ньютона с учетом того, что члены с нечетными степенями i взаимно уничтожатся:

$$(1+i\sqrt{3})^7+(1-i\sqrt{3})^7=2(1+C_7^2(i\sqrt{3})^2+C_7^4(i\sqrt{3})^4+C_7^6(i\sqrt{3})^6)=$$

$$=2(1-21\cdot 3+35\cdot 9-7\cdot 27)=2\cdot 64=128. \blacksquare$$

Пример 8. Известно, что число $\dfrac{72}{\left(2\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)\right)^3}$ является корнем уравнения

$$2x^3+15x^2+ax+171=0, \text{ где } a\in \boldsymbol{R}. \qquad (*)$$

Найти a и решить уравнение при этом значении a.

☐ Обозначим заданное число через x_1 и преобразуем его:

$$x_1=\frac{72}{\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^3}=\frac{72}{8(\cos\pi+i\sin\pi)}=-9.$$

Подставив это значение в уравнение (*), получим

$$2(-729)+15\cdot 81-9a+171=0;\ 162-135+a-19=0;\ a=-8.$$

Тогда уравнение (*) примет вид

$$2x^3+15x^2-8x+171=0, \text{ или } (x+9)(2x^2-3x+19)=0.$$

Решив уравнение $2x^2-3x+19=0$, находим остальные два корня данного уравнения:

$$x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{9-152}}{4}=\frac{3\pm i\sqrt{143}}{4}. \blacksquare$$

Пример 9. Вывести формулы, выражающие $\cos 5\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\sin 5\alpha$ через $\sin\alpha$.

□ Согласно формуле Муавра (18.13), имеем

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = \cos 5\alpha + i\sin 5\alpha.$$

С другой стороны,

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = \cos^5\alpha + 5i\cos^4\alpha\,\sin\alpha + 10i^2\cos^3\alpha\,\sin^2\alpha +$$
$$+ 10i^3\cos^2\alpha\,\sin^3\alpha + 5i^4\cos\alpha\,\sin^4\alpha + i^5\sin^5\alpha =$$
$$= (\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\,\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\,\sin^4\alpha) +$$
$$+ i(5\cos^4\alpha\,\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\,\sin^3\alpha + \sin^5\alpha).$$

Из условия (18.2) равенства двух комплексных чисел следует

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\,\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\,\sin^4\alpha =$$
$$= \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha + 10\cos^5\alpha + 5\cos\alpha - 10\cos^3\alpha + 5\cos^5\alpha =$$
$$= 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha;$$
$$\sin 5\alpha = 5\cos^4\alpha\,\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\,\sin^3\alpha + \sin^5\alpha =$$
$$= 5\sin\alpha - 10\sin^3\alpha + 5\sin^5\alpha - 10\sin^3\alpha + 10\sin^5\alpha + \sin^5\alpha =$$
$$= 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha. \blacksquare$$

Группа А

18.001. Даны комплексные числа $z_1 = -2 + 5i$ и $z_2 = 3 - 4i$. Найти:

а) $z_1 + z_2$; б) $z_2 - z_1$; в) $z_1 z_2$; г) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Найти сумму и произведение комплексных чисел (18.002–18.004):

18.002. $z_1 = 5 + 2\sqrt{6}\,i$ и $z_2 = 5 - 2\sqrt{6}\,i$.

18.003. $z_1 = 5 - 3i$ и $z_2 = -1 + 6i$.

18.004. $z_1 = 0{,}2 + 4i$ и $z_2 = -0{,}3 - 0{,}9i$.

Найти разность $z_2 - z_1$ и частное $\dfrac{z_2}{z_1}$ комплексных чисел (18.005–18.007):

18.005. $z_1 = 2 + 2i$ и $z_2 = 1 - i$.

18.006. $z_1 = a + \sqrt{b}\,i$ и $z_2 = a - \sqrt{b}\,i$.

18.007. $z_1 = 5 - 3i$ и $z_2 = -4 + 7i$.

Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, если известен один из его корней (18.008–18.011):

18.008. $x_1 = 1 - 3i$.

18.009. $x_1 = -\dfrac{1}{2i^3}$.

18.010. $x_1 = \dfrac{4 - 2i}{1 - i}$.

18.011. $x_1 = \dfrac{i}{3 + 4i}$.

18.012. Найти координаты точки M, изображающей комплексное число

$$z=\frac{5i-2}{3i+1}+i+\frac{8i-3}{2-i}.$$

18.013. Доказать, что $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=2.$

Найти действительные части комплексных чисел (18.014–18.016):

18.014. $z=\frac{(2-i)^3}{3+4i}.$

18.015. $z=\frac{(1-2i)^3}{i}+4i^{16}.$

18.016. $z=\frac{(1+i)^3}{1-i}+\frac{1}{i^{10}}.$

Найти мнимые части комплексных чисел (18.017–18.019):

18.017. $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{11}.$

18.018. $z=(2+i)^3(2-11i).$

18.019. $z=\frac{3-2i}{1-4i}+i^9.$

Выполнить действия (18.020–18.028):

18.020. $\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}.$

18.021. $2i\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$

18.022. $\frac{i^{13}-i^{14}}{1+i^{15}}+i^{10}.$

18.023. $\frac{(3+4i)(-1+3i)}{6-8i}.$

18.024. $\frac{5+12i}{8-6i}+\frac{(1+2i)^2}{2+i}.$

18.025. $(3+2i)^3-(3-2i)^3.$

18.026. $\left(-2(1+i)^3+\frac{31-17i}{4-3i}\right)\frac{1+i}{6}-1.$

18.027. $\left(\frac{1}{3}\left((1-i)^4+\frac{7-24i}{4-3i}\right)+i\right)\frac{8}{(1+i)^2}.$

18.028. $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.

18.029. Найти число, сопряженное с числом $z=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{17+31i}{7+i}+\dfrac{12}{(1+i)^4}\right)+i$.

18.030. Делится ли многочлен $x^4+2x^2+4(1+i)$ на $x-1+i$?

Решить на множестве комплексных чисел уравнения (18.031–18.036):

18.031. $x^2+6x+34=0$.

18.032. $x^2+36=0$.

18.033. $x^2+4x+29=0$.

18.034. $4x^2-8x+13=0$.

18.035. $x^4-5x^2-36=0$.

18.036. $x^4+15x^2+54=0$.

Разложить на комплексные множители выражения (18.037–18.040):

18.037. m^2+25n^2.

18.038. $\dfrac{p^2}{4}+\dfrac{q^2}{9}$.

18.039. $7+\sqrt{3}$.

18.040. $1+\operatorname{tg}^2\alpha$.

Считая x и y действительными числами, решить уравнения (18.041–18.043):

18.041. $(-5+2i)x-(3-4i)y=2-i$.

18.042. $(2-7i)x+(8+6i)y=(-6+5i)x-8$.

18.043. $\dfrac{2+5i}{x-y}-\dfrac{1-3i}{x+y}=\dfrac{-7x+12i}{y^2-x^2}$.

Установить, при каких действительных значениях x и y равны следующие комплексные числа (18.044–18.046):

18.044. $z_1=x^2+xyi-5+i$ и $z_2=xi-y^2+yi$.

18.045. $z_1=x^2(1+i)-3x$ и $z_2=y^2(i-1)-i$.

18.046. $z_1=x^2-3(1+i)-5xi$ и $z_2=y(1-i)$.

Установить, при каких действительных значениях x и y являются сопряженными следующие комплексные числа (18.047–18.049):

18.047. $z_1=2x^2-3i-1+yi$ и $z_2=y+x^2i-3-2i$.

18.048. $z_1=(x-i)^2+y^2$ и $z_2=12+yi+i$.

18.049. $z_1=x(x+yi)$ и $z_2=17+2i^3+(2yi)^2$.

Установить, при каких действительных значениях x и y являются противоположными следующие комплексные числа (18.050–18.052):

18.050. $z_1=x+y^2i-4i+4$ и $z_2=y+x^2i-8-4i$.

18.051. $z_1=x^2(1-3i)-10$ и $z_2=y(y-i)$.

18.052. $z_1=\dfrac{xyi+y^2-9x^2}{i}$ и $z_2=\dfrac{29}{2+5i}$.

18.053. Найти комплексное число z из условия
$$(z+i)(1+2i)+(1+zi)(3-4i)=1+7i.$$

18.054. Найти комплексное число z, если известно, что $z^2=3+4i$.

18.055. Найти сумму $z+\bar{z}$, если $z=\dfrac{7-2i}{3+2i}+i$.

18.056. Проверить, что если $z=3+4i$, то справедливо равенство
$$z=\left(2-\frac{z+1}{z+7}\right)^2.$$

18.057. Найти все корни многочлена x^8-16.

18.058. При каких действительных значениях a комплексное число $(1-ai)^3-(2+ai)^2$ является: а) действительным; б) чисто мнимым?

18.059. Пусть $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$. Доказать справедливость равенств:

а) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$; б) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$.

18.060. Пусть $z_1=3+4i$, $z_2=-4+3i$. Найти действительные значения a и b, для которых $\dfrac{z_1}{z_2}=az_1+bz_2$.

Изобразить множества точек, для которых выполняются заданные условия (18.061–18.070):

18.061. $\operatorname{Re} z=-2$.

18.062. $-1<\operatorname{Re} z\le 3$.

18.063. $-1<\operatorname{Im} z<2$.

18.064. $-\dfrac{\pi}{6}\le \arg z<\dfrac{\pi}{4}$.

18.065. $|z|<2$.

18.066. $|z+i|=1{,}5$.

18.067. $|z-i|>1$.

18.068. $|z+2-2i|\le 2\sqrt{2}$.

18.069. $1\le |z+1|<2{,}5$.

18.070. $|z+3i|=|z-3|$.

Найти модуль и главное значение аргумента для каждого из заданных комплексных чисел. Записать эти числа в тригонометрической форме и изобразить их точками на плоскости (18.071–18.078):

18.071. $z=4-4\sqrt{3}i$.

18.072. $z=-2+2i$.

18.073. $z=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

18.074. $z=-6\sqrt{3}-6i$.

18.075. $z=-\sqrt{5}\,i$.

18.076. $z=10$.

18.077. $z=3-\sqrt{10}$.

18.078. $z=(\sqrt{5}-2)i$.

Представить в тригонометрической форме комплексные числа (18.079–18.084):

18.079. $z=\sin 36^\circ+i\cos 54^\circ$.

18.080. $z=(\sin 42^\circ+i\cos 42^\circ)i$.

18.081. $z=\dfrac{6i}{(1+i)^2}$.

18.082. $z=i^{16}+i^{15}$.

18.083. $z=\sin\dfrac{4\pi}{5}+i\left(1-\cos\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

18.084. $z=\dfrac{1}{\cos\dfrac{7\pi}{8}+i\sin\dfrac{7\pi}{8}}$.

Представить в алгебраической форме комплексные числа (18.085–18.090):

18.085. $z=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

18.086. $z=5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

18.087. $z=4\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$.

18.088. $z=-\sqrt{2}\,i\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

18.089. $z=\dfrac{1}{\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}}$.

18.090. $z=\dfrac{2i}{\cos\dfrac{7\pi}{6}-i\sin\dfrac{7\pi}{6}}$.

Выполнить умножение (18.091–18.096):

18.091. $(4-4i)\cdot 3\sqrt{2}(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)$.

18.092. $8\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

18.093. $\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{6}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

18.094. $\sqrt{3}(\cos 92^\circ+i\sin 92^\circ)\cdot\sqrt{6}(\cos 88^\circ+i\sin 88^\circ)$.

18.095. $\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right)(-3+\sqrt{3}i)$.

18.096. $(-2-2i)(6-2\sqrt{3}\,i)$.

Выполнить деление (18.097–18.102):

18.097. $8(\cos(-105^\circ)+i\sin(-105^\circ)):(-0{,}5\sqrt{3}-0{,}5i)$.

18.098. $\sqrt{6}(\cos 160^\circ+i\sin 160^\circ):\sqrt{3}(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)$.

18.099. $4\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right):\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$.

18.100. $(6-6i):3(\cos 15°+i\sin 15°)$.

18.101. $(-2+2\sqrt{3}\,i):(4-4i)$.

18.102. $-6i:(-4+4i)$.

18.103. Даны комплексные числа $z_1=-1-i$, $z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$, $z_3=1+\sqrt{3}\,i$.

Представив их в тригонометрической форме, найти $\dfrac{z_1z_3}{z_2}$.

Возвести в степень (18.104–18.109):

18.104. $(-1+i\sqrt{3})^9$.

18.105. $\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{15}$.

18.106. $\left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{18}+i\sin\dfrac{5\pi}{18}\right)\right)^6$.

18.107. $(2+2i)^5$.

18.108. $(1{,}5-0{,}5\sqrt{3}\,i)^6$.

18.109. $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)^{10}$.

Выполнить действия (18.110–18.117):

18.110. $\dfrac{16i\left(\sin\dfrac{\pi}{6}+i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2}{(-1+i\sqrt{3})^4}$.

18.111. $\dfrac{\cos 42°+i\sin 42°}{(\cos 51°+i\sin 51°)^2}$.

18.112. $\dfrac{(\cos 72°+i\sin 72°)(\cos 41°+i\sin 41°)^2}{\cos 19°+i\sin 19°}$.

18.113. $(1-i)^3(-2\sqrt{3}+2i)$.

18.114. $\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{(-1+i)(\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i)}$.

18.115. $(6-6i)^2\cdot\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)^3$.

18.116. $\dfrac{4\sqrt{2}\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}{(\sqrt{3}-i)(1-i)^2}$.

18.117. $\dfrac{\left(\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{\pi}{6}+i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^3}{\left(\sqrt{3}\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)\right)^2}$.

18.118. Дано: $z_1 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $z_2 = 1 - i$. Найти: а) $\frac{z_1^3}{z_2}$; б) z_2^6.

18.119. Дано: $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$. Найти $(z_1 z_2)^6$.

Извлечь корни из комплексных чисел (18.120–18.125):

18.120. $\sqrt[3]{-8i}$.

18.121. $\sqrt{-6 + 6\sqrt{3}\,i}$.

18.122. $\sqrt[3]{-125}$.

18.123. $\sqrt[3]{-13{,}5\sqrt{2} - 13{,}5\sqrt{2}\,i}$.

18.124. $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}\,i}$.

18.125. $\sqrt[6]{-64}$.

Группа Б

18.126. Найти все значения x, для которых комплексное число $z = (\log_{0,5}\log_4\log_8(x^2 + 4) - 1)i$ изображается точкой, лежащей в верхней части мнимой оси.

18.127. Доказать, что ни при каких значениях m комплексное число $\log_2(m^2 - 13m + 44) - 2 + i\sqrt{\log_2 m - 3}$ не может быть чисто мнимым.

18.128. Найти действительные числа x и y, при которых $z_1 = \log_y \frac{x}{2} + 2xi$ и $z_2 = \log_x y - yi$ — сопряженные комплексные числа.

18.129. При каких значениях $x \in \boldsymbol{R}$ комплексные числа $z_1 = \lg(2x^2 + x + 1) + 4^x i$ и $z_2 = \lg(x^2 + 1) + (2^{x+1} - 3)i$ являются сопряженными?

18.130. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1 = 4i - 2xy - xyi$ и $z_2 = y^2 i - x^2 + 3$ равны?

18.131. Найти действительное число b из условия, что точки, изображающие комплексные числа $3 - 5i$, $1 - i$ и $-2 + bi$, лежат на одной прямой.

18.132. На окружности с центром в начале координат взяты три точки на равных расстояниях друг от друга. Доказать, что комплексные числа, соответствующие этим точкам, образуют геометрическую прогрессию. Найти знаменатель этой прогрессии.

18.133. Дано комплексное число $z = \sqrt{3} - i$. Найти все комплексные числа $\hat{z}$ такие, что $|\hat{z}| = 2|z|$, а $|\arg\hat{z} - \arg z| = \frac{\pi}{3}$.

18.134. Найти z^6, если $3z - \bar{z} = -4 + 8i$.

18.135. Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $x^2 + 1 + yi + 2i = 2(x + y) + \frac{y^2 - 4}{y - 2}i$.

Изобразить множества точек, удовлетворяющих заданным условиям (18.136–18.141):

18.136. $|z-2i| \le |z+1|$.

18.137. $\begin{cases} 1 \le |z+0{,}5i| \le 2, \\ 0{,}5 < \operatorname{Re} z \le 1. \end{cases}$

18.138. $\begin{cases} 2 \le |z-2-i| \le 3, \\ 0 \le \operatorname{Im} z < 3. \end{cases}$

18.139. $|z|^2 + 2z + 2\bar{z} = 0$.

18.140. $z^2\bar{z}^2 - 5z\bar{z} < -4$.

18.141. $\log_2|z-2i| < 1$.

Решить уравнения (18.142–18.147):

18.142. $z^2 + 3|z| = 0$.

18.143. $z^2 - 3\bar{z} = 0$.

18.144. $|z| = 2|\bar{z}| - |z+i|$.

18.145. $|z| - iz = 4 - 2i$.

18.146. $|z|i - 4z = \bar{z} + 10$.

18.147. $\bar{z}^2 - z^2 = |z| - 5 + 48i$.

Решить системы уравнений (18.148–18.152):

18.148. $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i. \end{cases}$

18.149. $\begin{cases} 4iz_1 - 5z_2 = -4 + 14i, \\ 3z_1 + 2iz_2 = 7 + 3i. \end{cases}$

18.150. $\begin{cases} |z+1-i| = |z+i|, \\ |3+2i-z| = |z+i|. \end{cases}$

18.151. $\begin{cases} |z+1| = |z+2|, \\ |3z+9| = |5z+10i|. \end{cases}$

18.152. $\begin{cases} \left|\dfrac{z+2i}{z+4i}\right| = 1, \\ \dfrac{|z+2i|}{|z-1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

18.153. Составить уравнение наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющее корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 4 - 3i$.

18.154. Разложить многочлен $x^4 - x^3 - 11x^2 + 31x - 20$ на множители с действительными коэффициентами, если известны два его корня $x_1 = -4$ и $x_2 = 1$.

18.155. Сократить дробь $\dfrac{z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3}{z^4 - 5z^3 + 5z^2 - 5z + 4}$, предварительно убедившись, что ее числитель и знаменатель обращаются в нуль при $z = \pm i$.

18.156. Сумма двух корней уравнения $x^3 - 3x^2 + 4x + \lambda = 0$ равна 2. Найти λ и решить это уравнение.

Решить уравнения (18.157–18.160):

18.157. $z^2-(2+i)z-1+7i=0$. **18.158.** $z^2-4iz+6(2-5i)=0$.

18.159. $z^2-(8+3i)z+13(1+i)=0$. **18.160.** $z^2-(5+2i)z+9+7i=0$.

18.161. Найти α и β, если известно, что комплексное число $\alpha+\beta i$ является корнем уравнения $x^2-3x+3+i=0$.

18.162. Даны два комплексных числа: $z_1=1+ai$ и $z_2=2^{3/4}\left(\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right)$. Найти все действительные значения a, при которых $z_1^3=z_2^2$.

18.163. Найти наибольшее и наименьшее значения $|z|$, если $z=2+\cos\alpha+$ $+i\sin\alpha$.

18.164. Комплексное число z удовлетворяет условию $z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$. Найти z^{18}.

18.165. Найти модуль комплексного числа z^3+z^5, если $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $\alpha\in\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Представить в тригонометрической форме комплексные числа (18.166–18.169):

18.166. $z=\sin 2\alpha-i(1+\cos 2\alpha)$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

18.167. $z=1+i\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

18.168. $z=\dfrac{8(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ)i}{5(\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ)}$.

18.169. $z=\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}+i\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)}{1+i}$.

Представить в алгебраической и тригонометрической формах комплексные числа (18.170–18.173):

18.170. $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^5$.

18.171. $\dfrac{(0{,}5\sqrt{2}+0{,}5\sqrt{6}\,i)^3}{(-1{,}5+0{,}5\sqrt{3}\,i)^2 i}$.

18.172. $\left(\dfrac{-\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}}{\cos\dfrac{13\pi}{12}-i\sin\dfrac{13\pi}{12}}\right)^3$.

18.173. $\dfrac{\left(\left(-\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\right)^2}{1+i}$.

Проверить справедливость равенств (18.174–18.176):

18.174. $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^5+\left(\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}\right)^5=\sqrt{3}$.

18.175. $\dfrac{(\sin 26^\circ+i\cos 154^\circ)(\sin 27^\circ+i\cos 153^\circ)^3}{\sin 17^\circ-i\cos 17^\circ}=-1$.

18.176. $z^3+\dfrac{1}{z^3}=1$, где $z=\dfrac{\cos 125^\circ-i\sin 125^\circ}{\sin(-15^\circ)-i\cos(-15^\circ)}$.

18.177. Возвести в степень: а) $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$; б) $(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$.

18.178. При каких целых значениях n справедливо равенство $(1+i)^n=(1-i)^n$?

18.179. Решить неравенство $\left|1+4i-2^{-x}\right|\le 5$.

18.180. Доказать, что если коэффициенты членов кубического уравнения, расположенных в порядке убывания степеней искомой величины, составляют геометрическую прогрессию, то и корни уравнения также составляют геометрическую прогрессию со знаменателем i.

Группа В

Изобразить множества точек, удовлетворяющих заданным условиям (18.181–18.186):

18.181. $\begin{cases}|z-1-i|\le|z+1+i|,\\ |z-3i|\le\sqrt{5}.\end{cases}$

18.182. $\dfrac{\operatorname{Re} z}{z\bar{z}}\le\dfrac{1}{2}$.

18.183. $\operatorname{Im}\dfrac{2}{\bar{z}-1}\le -1$.

18.184. $\operatorname{Re}\dfrac{2}{\bar{z}+1}<1$.

18.185. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{3z}\ge\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}-2\right)$.

18.186. $\dfrac{|z+2i|}{|z-i|}\ge 2$.

Найти множества точек, удовлетворяющих заданным условиям (18.187–18.190):

18.187. $|z-x|<|z-2i|$.

18.188. $|z+2i|<|z-x|<|z-1|$.

18.189. $\sin|z| > 0$. **18.190.** $z^3 = \dfrac{1-i}{1+i}$.

18.191. Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z| = |z+8i|$, найти число с наименьшим модулем.

18.192. Найти наименьший модуль комплексного числа, удовлетворяющего условию $|z+\sqrt{3}| = |z-i|$.

18.193. Из всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $z\bar{z} = 41$, найти такие, для которых сумма $|z-9| + |z-9i|$ принимает наименьшее значение.

18.194. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z-5i| \le 4$, найти такое, аргумент которого имеет наименьшее положительное значение.

18.195. Представить в тригонометрической форме число $1 + i\operatorname{ctg}\alpha$.

18.196. Число $x_1 = \left(\sin\dfrac{3\pi}{8} - i\cos\dfrac{3\pi}{8}\right)^4$ является корнем уравнения $x^3 - (a+3)x^2 + a^2x - 1 - a^2 = 0$ $(a \in \boldsymbol{R})$. Найти a и решить уравнение при этом значении a.

18.197. Число $x = \dfrac{(1+i)^6}{8}$ является корнем уравнения $3x^3 - a^2x^2 + 3a^2x - 2 + a = 0$ $(a \in \boldsymbol{R})$. Найти a и решить уравнение при этом значении a.

18.198. Решить уравнение $z^4 + (2-4i)z^2 - (1-i)^6 = 0$.

18.199. Решить уравнение

$$x^4 + (2a+6)x^3 + (a^2+8a+13)x^2 + (2a^2+12a+14)x + (2a^2+8a+6) = 0,$$

если известно, что одним из его корней является число $-1+i$ и $a \in \boldsymbol{R}$.

18.200. Коэффициенты членов уравнения пятой степени, расположенных по убывающим степеням искомой величины, составляют геометрическую прогрессию со знаменателем q. Найти все пять корней этого уравнения.

18.201. Множество точек комплексной плоскости определяется условием $|z-3-4i| \le 1$. В каких пределах может изменяться отношение $k = \operatorname{Im} z : \operatorname{Re} z$?

18.202. Известно, что $a^2 + a + 1 = 0$. Найти $a^{2k} + a^k + 1$ $(k \in \boldsymbol{N})$.

Найти значения x, удовлетворяющие заданным неравенствам (18.203–18.205):

18.203. $\left|1 + 0{,}25\sqrt{7}\,i - \cos x\right| \le 0{,}25\sqrt{43}$.

18.204. $|4i - 1 + \log_{0,5} x| \ge 5$.

18.205. $1+\log_{0,5}\dfrac{|x+1+2i|-2}{\sqrt{2}-1}\geq 0.$

18.206. Доказать, что если $x\in \boldsymbol{R}, y\in \boldsymbol{R}$, причем $x\neq 0$ и $y\neq 0$ одновременно, то $\left|\dfrac{x^2-y^2+2xyi}{xy\sqrt{2}+i\sqrt{x^4+y^4}}+1\right|\leq 2.$

18.207. Доказать, что при всех допустимых значениях a модуль числа $z=\dfrac{(\sqrt{a}+i\sqrt{a})^4}{4}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2a^2+1}}{\sqrt[4]{2a^2-1}}+i\sqrt[4]{2a^2-1}\right)^2-\dfrac{1}{\sqrt{2a^2-1}}$ не меньше, чем $2a$.

18.208. Полагая $\sqrt{a+bi}=u+vi$ $(b>0)$, выразить u и v через a и b (иными словами, вывести формулу для извлечения квадратного корня из комплексных чисел с положительной мнимой частью). Выполнить то же для случая $\sqrt{a+bi}$, $b<0$.

18.209. Найти комплексные корни многочлена x^5-1 (ответ записать в алгебраической форме).

18.210. Пусть z — комплексное число, не равное ± 1. Доказать, что число $\dfrac{z-1}{z+1}$ является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $|z|=1$.

18.211. Доказать, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство $|z_1+z_2|^2+|z_2-z_1|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$, и дать его геометрическую интерпретацию.

18.212. Найти наибольшее значение модуля комплексного числа z, если известно, что $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=1.$

18.213. Пусть M — множество всех точек z_1 комплексной плоскости таких, что $|z_1 i+\sqrt{2}|=0{,}5$, а K — множество точек z_2 этой плоскости, имеющих вид $z_2=z_1 i$. Найти расстояние между фигурами M и K (расстоянием между фигурами называется наименьшее из расстояний между точками этих фигур).

18.214. Пусть N — множество всех точек z_1 комплексной плоскости таких, что $|-z_1 i-2\sqrt{2}\,i|=1$, а L — множество точек z_2 этой плоскости, имеющих вид $z_2=-z_1 i$. Найти расстояние между фигурами N и L.

18.215. Вычислить суммы:

$$\textstyle\sum_1=1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha;$$

$$\textstyle\sum_2=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha.$$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Требуемые вычисления следует производить, не пользуясь техническими средствами: калькулятором, счетной линейкой, таблицами и т. п.

Вариант I

1. В уравнении $x^2 + bx - 12 = 0$ один из корней равен 3. Найти значение коэффициента b.

2. Упростить выражение $(2x^{1/2} - y^{-1/4})(2x^{1/2} + y^{-1/4})$ и вычислить его значение при $x = 1{,}2$ и $y = 4$.

3. Найти сумму корней уравнения $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot (10^{x-1})^3$.

4. Решить уравнение $\sqrt{2{,}1x+1} = x - 1$.

5. Найти сумму целых значений x, удовлетворяющих неравенству $x^2 - 3x < 4$.

6. Используя формулы тождественных преобразований, вычислить

$$\cos 50° \cos 40° - 2\sin 50° \sin 20° \cos 20°.$$

7. Найти корень уравнения $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$, лежащий в интервале $(0°, 90°)$. Ответ записать в градусах.

8. Площадь равнобедренной трапеции 180 см^2. Длина средней линии равна 45 см; длина боковой стороны 5 см. Найти длину меньшего основания трапеции.

9. Высота конуса равна 3; угол между высотой и образующей равен 45°. В этот конус вписан другой конус так, что его вершина совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие конусов перпендикулярны. Найти объем вписанного конуса (положить $\pi = 3{,}14$ и округлить ответ до сотых).

10. Вычислить $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = 0{,}5\sin x \operatorname{tg} 2x + 2{,}5\cos x$.

Вариант II

1. Вычислить $\dfrac{4\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}$.

2. Решить уравнение $2x + \sqrt{3x-2} = 3$.

3. Найти количество целых решений неравенства $5 + \dfrac{17}{x-2} < \dfrac{2}{x+3}$.

4. Решить уравнение $\log_5 x + \log_5(x-4) = 1$.

5. В равнобедренной трапеции основания равны 24 и 10, а радиус описанной около нее окружности равен 13. Найти высоту трапеции при условии, что центр описанной окружности лежит вне трапеции.

6. Найти сумму квадратов наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на отрезке $[-1, 2]$.

7. Найти количество решений уравнения $\sin 3x - \cos 3x = 0$ на отрезке $[0, \pi]$.

8. Сумма четвертого и пятого членов геометрической прогрессии равна 20, а сумма третьего и четвертого членов равна 5. Найти шестой член прогрессии.

9. Металлический шар радиуса $R=\sqrt[3]{2}$ переплавлен в конус, площадь боковой поверхности которого в 3 раза больше площади основания. Найти высоту конуса.

10. Решить уравнение $2(\arcsin x)^2+\pi^2=3\pi\arcsin x$.

Вариант III

1. Упростить выражение

$$\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1}+2\sqrt{x}$$

и найти его значение при $x=7$.

2. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$.

3. Решить уравнение $4^{x-1}-3\cdot 2^{x-2}=1$.

4. Найти $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $f(x)=2\sqrt{2}\sin^3 x$.

5. Основание равнобедренного треугольника равно 30, а высота, проведенная к боковой стороне, равна 24. Найти длину боковой стороны.

6. Найти сумму корней уравнения $f(x)+4f'(x)=0$, если $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$.

7. Найти произведение корней уравнения $\cos^2\frac{\pi x}{2}=1$, принадлежащих отрезку $[\pi,\ 3\pi]$.

8. Найти целое число, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases}\log_{0,5}(2x-3)>-3,\\ x^2-4x>0.\end{cases}$$

9. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние $5\sqrt{2}$, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45°, а между собой угол 60°. Найти расстояние между основаниями наклонных.

10. Вектор $\bar{a}(x;-1;2)$ перпендикулярен вектору $\bar{b}(1;2;0)$. Найти модуль вектора $\bar{a}$.

Вариант IV

1. Вычислить $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{1/2}-\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4}$.

2. Найти все целые значения x, удовлетворяющие неравенству $\frac{4-x}{x-5}\ge 1-\frac{4}{x}$.

3. Решить уравнение $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$.

4. Найти корни уравнения $2^{1+\log_2 x}+4^{1+\log_2 x}=110$.

5. Равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3 см и углом 60° вращается вокруг меньшего основания. Найти объем тела вращения и записать ответ, округлив его до ближайшего целого числа.

6. Найти количество корней уравнения $\cos^2 2x+\cos^2 6x=1$, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$.

7. Найти координату середины отрезка, на котором справедливо неравенство $\log_{0,1}(x^2-x+8)\geq -1$.

8. Найти два числа, если их среднее арифметическое на 16 меньше большего из этих чисел, а среднее геометрическое на 8 больше меньшего из них.

9. Упростить выражение $\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}\right)^6$.

10. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt{x(10-x)}$ в области ее определения.

Вариант V

1. Решить уравнение $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+24}=14$.

2. Упростить

$$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2};a>b>0.$$

3. Найти больший корень уравнения

$$\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\frac{1}{x}.$$

4. Найти наименьшее положительное целое x, удовлетворяющее неравенству $\sqrt{0{,}8^{x(x-3)}}>0{,}64$.

5. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$.

6. Найти корень уравнения $\sin x-1=0{,}5\sin 2x-\cos x$, лежащий в интервале $0^\circ<x<180^\circ$. Ответ записать в градусах.

7. В равнобедренном треугольнике высота относится к основанию как 3 : 4, а боковая сторона равна $2\sqrt{39}$ см. Найти площадь треугольника.

8. Металлический цилиндр с диаметром основания $d=4$ см и высотой $h=4$ см переплавлен в шар. Вычислить радиус этого шара (считать $\sqrt[3]{12}\approx 2{,}3$).

9. Число 26 разбить на такие два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

10. Решить уравнение $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

Вариант VI

1. Вычислить $\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+2\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)}$.

2. Вычислить $3x+y+z$, если $x+y+2z=14$, $2x+y+z=10$, $x+2y+z=12$.

3. Решить уравнение $\log_2(17-2^x)=4-x$.

4. Вычислить значение 10^x при $x=\lg 12+(\log_4 10)^{-1}$.

5. Дано: $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{3}{4}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найти $\cos^2\alpha$.

6. Сколько корней у $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ inx + cosx = 1,4 находится на отрезке $[-\pi, 3\pi]$?

7. Найти координат ы отрезка, на котором выполняется неравенство $3\sqrt[6]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}\geq 2$.

8. Восьмой член арифметической прогрессии равен 2, одиннадцатый член равен 11. Сколько членов прогрессии, начиная с первого, надо взять, чтобы их сумма была равна 30?

9. Найти квадрат наибольшего значения функции $f(x)=\sin x+\cos x$.

10. Через вершину конуса проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол, косинус которого равен $\frac{1}{3}$, и отсекающая на окружности основания дугу в 90°. Расстояние от центра основания до этой плоскости равно $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$. Найти объем конуса.

Вариант VII

1. Вычислить $(4^{-0,25}-2^{0,5})(4^{-0,25}+(2\sqrt{2})^{1/3})$.

2. Вычислить значение выражения $x-y+2z$, если $x+y=4$, $y+z=8$, $x+z=6$.

3. Решить уравнение $\frac{1}{2x}\lg 2=\lg(2^{1/x}-2)$.

4. Сколько корней уравнения $\sin x+\cos 2x=0$ находится на отрезке $[-\pi, 3\pi]$?

5. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}; 0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$. Вычислить значение выражения $25\sin^2\alpha\cos\alpha$.

6. Найти длину отрезка, на котором выполняется неравенство $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}\leq 6$.

7. Сколько раз пересекает ось абсцисс график функции $f(x)=x^3+3x^2+5x$?

8. Сумма седьмого и одиннадцатого членов арифметической прогрессии равна 10, а сумма пятого и десятого членов равна 1. Найти сумму 20 первых членов.

9. Вычислить $f'(1)$, если $f(x)=\frac{x}{x^2+1}-\sqrt{x}$.

10. Боковая сторона равнобедренной трапеции в 3 раза длиннее меньшего основания. Биссектрисы тупых углов трапеции пересекаются в точке, лежащей на основании. Найти отношение площади трапеции к площади треугольника, образо-

ванного меньшим основанием и биссектрисами.

Вариант VIII

1. Решить уравнение $\frac{x-1}{x}-\frac{3x}{2x-2}=-\frac{5}{2}$.

2. Найти x в градусах, если $180° < x < 360°$ и

$$\cos^2(180° + x) + 3\cos^2(90° + x) = 2.$$

3. Найти наибольшее значение x, при котором справедливо неравенство

$$x^2+4(\sqrt{4-x})^2-21\le 0.$$

4. Решить уравнение $2\sqrt[4]{3x+0{,}1}=3\sqrt{3x+0{,}1}-1$.

5. Разность длин оснований трапеции равна 14 см; длины боковых сторон равны 13 и 15 см. Вычислить площадь трапеции при условии, что в эту трапецию можно вписать окружность.

6. Моторная лодка сначала прошла 60 км против течения реки, а затем 60 км по течению, затратив в первый раз на 50 мин больше, чем во второй. Найти скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде равна 21 км/ч.

7. Найти число x, если

$$\frac{\sqrt[3]{9^2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6}{(\sqrt[3]{3})^{-1}\cdot 27^{-2/3}}=\frac{x}{3(\sqrt[3]{3})^4}.$$

8. Вычислить значение выражения $27\cos^4 2\alpha$, если $\cos(3\pi-4\alpha)=\frac{2}{3}$.

9. Найти сумму и произведение корней уравнения

$$x^2\cdot 6^{-x}+6^{\sqrt{x}+2}=x^2\cdot 6^{\sqrt{x}}+6^{2-x}.$$

10. Вычислить значение A, если $A=4^B$, где $B=\log_2 5+\log_{0,25}10$.

Вариант IX

1. Найти число x, если $\frac{(x-1)(\sqrt[4]{9})^3}{\sqrt{27}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{9^2}{(\sqrt[6]{9})^3}$.

2. Решить уравнение $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448$.

3. Решить уравнение $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$.

4. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна 32 см^2. Найти длину боковой стороны, если угол при основании трапеции равен $\frac{\pi}{6}$.

5. Найти синус большего острого угла прямоугольного треугольника, если радиус окружности, описанной около треугольника, в 2,5 раза больше радиуса вписанной окружности.

6. Упростить выражение

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(2\pi-\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2(\pi-\alpha).$$

7. Вычислить $(0{,}001^{\lg 3-1}+0{,}01^{\lg 0{,}3+0{,}5})\cdot 2{,}7.$

8. На ребре двугранного угла в 120° взят отрезок $AB = 3$ см; из его концов в различных гранях к нему восставлены перпендикуляры $AC = 1$ см и $BD = 2$ см. Вычислить расстояние между точками C и D.

9. Дано: $F(x)=\dfrac{x}{2-x}+2.$ Найти сумму корней уравнения $F(x) = F'(x)$.

10. Найти площадь треугольника, образованного отрезками осей Ox и Oy и прямой, проходящей через точки (0; 4) и (4; 2).

Вариант X

1. Найти число $2x$, если

$$\frac{x+5{,}5}{14}(4+\sqrt{2})=\frac{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{8^{2/3}-2^{1/2}}.$$

2. Найти значение выражения x^2+y^2, если $2x + y = 2$, $x + 3y = 3$.

3. Решить уравнение $\log_{1/2}(x-1)+\log_{1/2}(x+1)-\log_{1/\sqrt{2}}(7-x)=1.$

4. Сколько целых значений x удовлетворяет неравенству $x^2 + 8x < 20$?

5. Решить уравнение $2^x + 3\cdot 2^{x+2} = 6{,}5$.

6. Найти значение выражения $\operatorname{tg}^2 15° + 4\operatorname{tg} 60°$.

7. Сколько корней уравнения $\sin x - \sin 2x + \sin 3x = 0$ находится в промежутке $[0, \pi]$?

8. Шестой член арифметической прогрессии в 4 раза меньше девятого члена, а их сумма равна 20. Найти сумму девяти первых членов прогрессии.

9. Найти точки экстремума функции $f(x) = x\ln x$.

10. Через вершины произвольного четырехугольника проведены прямые, параллельные его диагоналям. Найти отношение площади параллелограмма, образованного этими прямыми, к площади данного четырехугольника.

Вариант XI

1. Найти число $3x$, если

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{9^{1/2}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2^{3/2}(3-\sqrt{5})}=\sqrt{6+2\sqrt{5}}.$$

2. Найти значение выражения $x^2 - y$, если $2x - 5y = 0$, $x + 10y = 2$.

3. Вычислить значение 5^x при $x=\log_4 16+1{,}5\log_{1/3}3-\lg\sqrt{5}-\lg\sqrt{2}.$

4. Вычислить длину отрезка, на котором выполняется неравенство

$$x^2-x\le 6.$$

5. Решить уравнение $4\cdot 5^x-5^{-x}+\lg 100=5.$

6. Упростив выражение, вычислить $\cos 20° - \sin 20° \operatorname{ctg} 10°$.

7. Найти количество корней уравнения $\cos x - \cos 3x - \sin 2x = 0$, принадлежащих промежутку $[0, \pi]$.

8. Исследовать функцию $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$. Сколько раз ее график пересекает ось Ox?

9. Сумма шестого и девятого членов арифметической прогрессии равна 20, а их произведение равно 64. Найти десятый член этой прогрессии, если ее первый член отрицателен.

10. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник. Найти отношение объема конуса к объему вписанного в него шара.

Вариант XII

1. Решить уравнение $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$.

2. В треугольнике с основанием 15 см проведен отрезок, параллельный основанию. Площадь полученной трапеции составляет 75% площади треугольника. Найти длину этого отрезка.

3. Упростить выражение

$$\frac{\sin(60^\circ+\alpha)}{4\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(75^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)},$$

а затем найти его значение, если $\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)=0{,}8$ и $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

4. Решить уравнение $\lg^2(100x)-\lg^2(10x)+\lg x=9$.

5. Найти наименьшее из отрицательных решений неравенства

$$\sqrt{\frac{3+2x}{4-x}}>-\sqrt{3}.$$

6. Сколько корней, не превосходящих по абсолютной величине π, имеет уравнение $1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\cos^4 x-\sin^4 x$?

7. Решить уравнение $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}-\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}=0$.

8. Отношение среднего арифметического двух положительных чисел к среднему геометрическому этих чисел равно $\frac{13}{12}$. Найти отношение большего из заданных чисел к меньшему.

9. Дано: $\cos 3\alpha=\frac{2}{3}$. Вычислить значение выражения $81\cos^2\left(6\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

10. Доказать, что функция $f(x)=\sin^2 2x+0{,}5\cos 4x+2\sin^2 x+\cos 2x$ принимает одно и то же постоянное значение при любом значении x, и найти это значение.

Вариант XIII

1. Упростить выражение

$$\frac{x^{-6}-64}{16+4x^{-2}+x^{-4}}\cdot\frac{1}{4-4x^{-1}+x^{-2}}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}.$$

2. Упростить выражение $\left(1+\frac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{tg}2\alpha\right)\left(1-\frac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{tg}2\alpha\right)$.

3. Решить уравнение $1{,}5\cdot 4^{x+0{,}5}=6^x+2\cdot 9^{x-0{,}5}$.

4. Сумма первого, третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна –12, а их произведение равно 80. Найти первый член a_1 и разность d прогрессии, выбрав наименьшее значение a_1.

5. Найти сумму всех целых решений неравенства $\log_{0,5}\frac{x-1}{7-x}>-1$.

6. Найти количество решений уравнения $f'(x)=0$ на отрезке $[0, 2\pi]$, где $f(x)=4\sin 2x-3\cos 2x-10x$.

7. В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна $4\sqrt{10}$, а длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $3\sqrt{10}$. Найти длину основания треугольника.

8. При каком значении параметра a уравнение $\left|x^2-2x-3\right|=a$ имеет ровно три решения?

9. В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и BCD — правильные треугольники с заданной высотой. Угол между этими гранями равен φ. При каком значении $\frac{1}{\cos\varphi}$ площадь полной поверхности пирамиды является наибольшей?

10. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y=x^2-3x+4$ из начала координат, при условии, что абсцисса точки касания — число положительное.

Вариант XIV

1. Решить уравнение $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0$.

2. Вычислить $A=5^B$, где $B=2\log_{25}8+\log_{0,2}5$.

3. Найти наименьшее x, при котором справедливо неравенство

$$\frac{x-3}{2}\geq\frac{(\sqrt{x-5})^2}{x-6}.$$

4. В бассейн проведены три трубы. Первая наполняет его на 4 ч дольше, чем вторая, а вторая — за $\frac{1}{3}$ времени, необходимого для наполнения бассейна третьей трубой. Если все трубы будут действовать одновременно, то бассейн наполнится за 4 ч. За сколько часов первая и третья трубы, действуя раздельно, могут наполнить бассейн?

5. Решить уравнение

$$(x^2-3x)9^{\sqrt{2-x}}+4\cdot 9^x=(x^2-3x)9^x+4\cdot 9^{\sqrt{2-x}}.$$

6. Найти число x, если $\frac{(\sqrt[6]{4})^5\cdot 16^{1/2}}{\sqrt[3]{64}\cdot x}=(16)^{1/6}\cdot 4^{-1/2}$.

7. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна средней линии, а периметр равен 48. Найти длину боковой стороны.

8. Вычислить значение выражения $4\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. Решить уравнение $x\sqrt[3]{x}+16=8\sqrt[3]{x^2}$, $x>0$.

10. Найти x в градусах, если $0°<x<360°$ и $2\sin^2(x+270°)-7\sin(x+90°)=4$.

Вариант XV

1. Решить уравнение $x^2\cdot 2^{2\sqrt{6-x}}+4^{2-x}=16\cdot 4^{\sqrt{6-x}}+x^2\cdot 2^{-2x}$.

2. Найти число x, если

$$\frac{\sqrt[3]{25}\cdot 5^{-1/2}}{(\sqrt[6]{25})^2\cdot\sqrt{5}\cdot x}=\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{25}}\right)^2.$$

3. Найти значение A, если $A=2^B+6^C$, где $B=\frac{2}{\log_{\sqrt{3}}2}$ и $C=\frac{1}{\log_2 6}$.

4. Решить уравнение $\sqrt{42-x}=2+\sqrt{6-x}$.

5. Решить уравнение $\frac{6}{x^2-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x-1}-1$.

6. Найти значение выражения $16\sin^4\left(\frac{11\pi}{2}-2\alpha\right)$, если $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-4\alpha\right)=\frac{1}{4}$.

7. Две окружности равного радиуса касаются в точке C внешним образом. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса 6,5 в точках A и B. Найти площадь треугольника ABC, если $AB=5$.

8. Найти наибольшее значение x, при котором верно неравенство

$$\frac{x^2+x-45}{x-6}\geq\frac{3x+1}{2}.$$

9. Найти x в градусах, если $90°<x<270°$ и $3\cos^2(x+270°)+\sin^2(x+180°)=1$.

10. В первую поездку автомобиль израсходовал 10% бензина, имеющегося в баке, затем во вторую поездку — 25% остатка. После этого в баке осталось бензина на 13 л меньше, чем было первоначально. Сколько литров бензина находилось в баке первоначально?

Вариант XVI

1. Вычислить значение $A=2^B-10^C$, где, $B=\frac{1}{\log_6 2}$, $C=\frac{2}{\log_2 10}$.

2. Найти значение x, удовлетворяющее уравнению

$$10x:(\sqrt[3]{2})^2=2^{5/3}\cdot 4^{-2/3}:\sqrt[6]{64}.$$

3. Решить уравнение $2\sqrt{x-2}-15=\sqrt[4]{x-2}$.

4. Найти наибольшее значение x, при котором верно неравенство

$$2x-5\sqrt{x}+2\le 0.$$

5. Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна 16, а диагональ равна 20.

6. Найти x в градусах, если $0° < x < 270°$ и $\sin(90°+2x)+\sin x=0$.

7. Вычислить значение выражения $49:\operatorname{tg}^2\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)$, если $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.

8. На двух станках требовалось обработать по 150 деталей, причем на первом из них обрабатывали в час на 5 деталей больше, чем на втором. На первом станке работа была начата на 1 ч позже, чем на втором, и, кроме того, она была прервана на 30 мин. Однако на обоих станках работу выполнили к одному и тому же сроку. Сколько деталей в час обрабатывали на каждом станке?

9. Решить уравнение $x^2\cdot 5^{\sqrt{3x-2}}+5^{2+x}=5^{\sqrt{3x-2}+2}+x^2\cdot 5^x$.

10. Решить уравнение $\frac{6-x}{1-x^2}-\frac{x+3}{x(1-x)}=\frac{x+5}{x(1+x)}$.

Вариант XVII

1. Решить уравнение $\frac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}=6$.

2. В квадрате $ABCD$ точка E — середина стороны BC, а точка F — середина стороны CD. Найти тангенс угла EAF.

3. Найти сумму всех значений параметра a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2-2\sqrt{6}\,x+a-1=0$ имеет ровно один корень.

4. Высота и диагональ равнобедренной трапеции равны соответственно 5 и 13. Найти площадь трапеции.

5. Найти $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=3$.

6. Найти сумму всех целых решений неравенства $\log_{1/3}(2x-1)>-2$.

7. Найти длину отрезка, отсекаемого на оси ординат касательной, проведенной к линии $y=\frac{8}{x^2}$ в точке ее пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

8. Точка $M(2;\,5)$ принадлежит параболе $y=-x^2+ax+5$. Найти ординату вершины параболы.

9. Боковые грани правильной треугольной призмы — квадраты. Площадь боковой поверхности призмы равна 144. Найти объем многогранника, вершинами которого служат центры всех граней призмы.

10. Найти значение числа k, при котором равенство

$$2\sin 4x\,(\cos^4 2x-\sin^4 2x)=\sin kx$$

верно при любом значении x.

Вариант XVIII

1. Найти сумму квадратов корней уравнения $x(x-\sqrt{3})=1$.

2. Решить уравнение $\log_{0,5}(\log_2 x-1)=-1$.

3. Три целых положительных числа образуют геометрическую прогрессию. Найти третий член прогрессии, если ее второй член на 1 больше первого.

4. Найти наименьшее значение функции $f(x)=|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|$.

5. В параллелограмме $ABCD$ $(AB\parallel CD)$ биссектриса тупого угла B пересекает сторону AD в точке F. Найти периметр параллелограмма, если длина AB равна 12 и $AF:FD=4:3$.

6. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}\ge 1,\\ 2\cdot 4^{2x}\ge 32^x.\end{cases}$$

7. Высота конуса равна 6. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол 60°. В конус помещена пирамида, основанием которой служит равнобедренный прямоугольный треугольник, вписанный в основание конуса, а вершиной — середина одной из образующих конуса. Найти объем пирамиды.

8. Параметр k квадратного уравнения $x^2-2kx+3(2k-3)=0$ принимает следующие значения: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Каждому из указанных значений k соответствует то или иное количество корней заданного уравнения. Найти количество всех корней.

9. Решить уравнение $4\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{x+3}=\pi$.

10. Найти целый корень уравнения $\dfrac{f(x)}{2f'(x)}=\dfrac{1}{3}$, если $f(x)=\sqrt{x^2-3x+1}$.

Вариант XIX

1. Найти наибольшее значение функции $f(x)=\sqrt{x^2-6x+16}$ в промежутке $[1,6]$.

2. Решить неравенство $\dfrac{x^2(x-2)^2}{\log_{0,5}(x^2+1)}\ge 0$.

3. Найти $|x|$, если $|x-4|+5x=-8$.

4. В параллелограмме $ABCD$ длина диагонали BD, перпендикулярной стороне AB, равна 6; длина диагонали AC равна $2\sqrt{22}$. Найти длину стороны AD.

5. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{x-1}=2$.

6. Найти количество корней уравнения $\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}}=0$ на отрезке $[0,9\pi]$.

7. Куб с ребром, длина которого $4\sqrt[4]{3}$, пересечен плоскостью, проходящей через середины трех его ребер, выходящих из одной вершины. Найти площадь сечения.

8. Найти $\sqrt{5\cos \operatorname{arctg} 0{,}75}$.

9. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$.

10. Вычислить $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^n}{3^n}+\ldots}$.

Вариант XX

1. Найти значение числа a, при котором система

$$\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}+\dfrac{x+3y}{5}=2, \\ \dfrac{x+2y}{2}-\dfrac{x-5y}{3}=3, \\ \dfrac{5x-y}{3}-\dfrac{x-10y}{2}=a \end{cases}$$

имеет решение.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=4-x, y=4+x, y=|x|.$$

3. Найти $\left(\dfrac{\sin 80^\circ+\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}\right)^2$.

4. Решить уравнение $\log_2^2(2x)=\log_2 x^4$.

5. В прямоугольном треугольнике отношение катетов равно 0,5. Найти тангенс острого угла между медианами, проведенными к катетам.

6. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найти второй член прогрессии.

7. В результате измерений некоторой величины получены следующие пять значений: 51; 51,2; 51,4; 52,1; 52,3. Найти такое число x, для которого сумма квадратов разностей между полученными значениями и числом x была бы наименьшей.

8. Решить уравнение $\dfrac{\log_2(9-x^{\log_x 2^{x-3}})}{x}=1$.

9. Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна 4. Найти сумму $\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{BC}\cdot\overline{BA}+\overline{CA}\cdot\overline{CB}$.

10. Найти наименьший положительный угол (в градусах), удовлетворяющий уравнению $2\cos^2(270^\circ+\alpha)+7\sin(270^\circ-\alpha)=5$.

Вариант XXI

1. Решить уравнение $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5$.

2. Длина основания равнобедренного треугольника равна 12. Радиус вписанного в треугольник круга равен 3. Найти площадь треугольника.

3. Найти сумму всех целых положительных решений неравенства

$$4^{x-1}-2^{x}<1{,}25.$$

4. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=3$.

5. Решить уравнение $\log_2\log_{0,5}\log_9 x=0$.

6. Решить систему уравнений $\begin{cases}\cos\pi x=-1,\\ x^3-5x^2-14x=0.\end{cases}$

7. Найти максимум функции $f(x)=\dfrac{20x}{x^2+1}$.

8. Основанием пирамиды $FABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной, длина которой равна 20. Ребро FB перпендикулярно плоскости основания и имеет длину, равную 5. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной скрещивающимся ребрам AC и FB так, что в сечении получился квадрат. Найти длину стороны квадрата.

9. Найти расстояние между точками пересечения параболы $y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{3}x-3$ и прямой $4x+3y+9=0$.

10. Решить уравнение $|x-4|=x$.

Вариант XXII

1. Выражение $(2\log_2 25+\lg 2)\log_2 10$ преобразовать к виду $(A\log_2 5+B)^2$.

2. Известно, что точка пересечения прямых $2x+y=9$ и $kx+5y=18$ принадлежит биссектрисе первого координатного угла. Найти число k.

3. Величина угла между боковыми сторонами равнобедренного треугольника меньше 60°. К боковой стороне проведены медиана и высота, длины которых соответственно равны $3\sqrt{5}$ и 6. Найти длину боковой стороны.

4. Касательная, проведенная к параболе $y=x^2-5x+10$, образует с осью абсцисс угол 45°. Найти расстояние от точки касания до начала координат.

5. Решить уравнение $\dfrac{25}{2x+1}+\dfrac{10}{\sqrt{2x+1}}=3$.

6. Найти $\cos^2 2\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

7. Пятый член арифметической прогрессии равен 4. Какова должна быть разность прогрессии, чтобы сумма квадратов второго и шестого членов была наименьшей?

8. В пирамиде $FABC$ через медиану BK основания ABC и середину L бокового ребра FA проведена плоскость. Найти отношение объема многогранника $BCKLF$ к

объему пирамиды $ABKL$.

9. Найти сумму всех целых решений неравенства $2^x + 9 \cdot 2^{-x} < 10$.

10. Решить уравнение $\frac{\pi}{24}(6x+1) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вариант XXIII

1. Сумма модулей корней квадратного уравнения $4x^2 + kx - 3 = 0$ равна 2, причем модуль отрицательного корня больше положительного корня. Найти число k.

2. Найти наименьший положительный корень уравнения $\log_3 \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{15} + \frac{1}{2} = 0$.

3. Разность между площадью круга и площадью вписанного в него квадрата равна $2\sqrt{3}(\pi - 2)$. Найти площадь правильного шестиугольника, вписанного в этот круг.

4. Решить уравнение $2x + \sqrt{x+11} = 14$.

5. Решить уравнение $\frac{2x}{9} = (\sin 15° + \operatorname{tg} 30° \cos 15°)^2$.

6. Все четыре грани пирамиды — правильные треугольники. Найти расстояние между центрами двух ее граней, если площадь полной поверхности пирамиды равна $81\sqrt{3}$.

7. Решить уравнение $\frac{\sqrt{x^2 - x - 12}(2^{x-1,5} - \sqrt{2})}{x+3} = 0$.

8. Найти длину отрезка, отсекаемого на оси абсцисс касательной, проведенной к графику функции $y = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ в точке с абсциссой, равной –2.

9. Найти целое решение неравенства $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 12x + 35} < 0$.

10. Найти количество корней уравнения $\sin x + \cos 2x = 0$, принадлежащих отрезку $[0, 3\pi]$.

Вариант XXIV

1. Найти сумму всех корней уравнения $(x^2 - 7x + 2)^2 - 13(x^2 - 7x) - 26 = 0$.

2. Найти $\sin^2 3\alpha$, если $\alpha = 2\operatorname{arctg} 1 - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC длины катетов AC и BC соответственно равны 12 и 8; точка K — середина медианы BD. Найти длину отрезка CK.

4. Решить уравнение $\log_{|x|}(x^4 + x^3 - 6x^2 - 7x) = 4$.

5. Найти наименьшее значение функции $f(x) = 2^x + 2^{2-x}$ на отрезке [0, 2].

6. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$) служит квадрат $ABCD$, площадь которого равна 50. Точка O — центр квадрата $ABCD$, точки F и K — соответственно середины ребер CC_1 и A_1B_1. Вектор $\overline{OF}$ перпендикулярен вектору $\overline{DK}$. Найти объем параллелепипеда.

7. Если некоторое двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же к сумме квадратов цифр этого числа прибавить произведение его цифр, то получится исходное число. Найти это число.

8. Найти $\sin^2 x$, если $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 2\operatorname{tg} x = 2$ и $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

9. Точка пересечения прямых $2x - y = 10$ и $3x + 2y = 1$ принадлежит окружности с центром в начале координат. Найти радиус этой окружности.

10. Найти произведение всех целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases}$$

Вариант XXV

1. Найти положительные корни уравнения $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 8$.

2. Решить уравнение $\log_{0,5}(x - 12) = -\log_2 \sqrt{x}$.

3. В треугольнике ABC величина угла C равна 60°, длина стороны AB равна $\sqrt{31}$. На стороне AC отложен отрезок AD, длина которого равна 3. Найти длину стороны BC, если длина отрезка BD равна $2\sqrt{7}$.

4. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC составляет с основанием AC угол, тангенс которого равен 0,5. Найти косинус угла ABC.

5. На координатной плоскости xOy даны прямая $x + 5y = 4$ и два вектора $\bar{a}(2; -3)$ и $\bar{b}(-1; 5)$. На данной прямой найти такую точку M, чтобы вектор $\overline{OM}$ был перпендикулярен вектору $2\bar{a} + 3\bar{b}$.

6. Основанием четырехугольной пирамиды служит квадрат. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания. Какую длину должна иметь высота пирамиды, чтобы радиус шара, описанного около пирамиды, был наименьшим, если объем пирамиды равен 72?

7. Дана функция $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$. Чему равно ее наибольшее значение на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$?

8. Найти $f'(2)$, если $f(x) = x \ln(x^2 + 2x - 7)$.

9. Найти сумму всех рациональных (в том числе и сократимых) дробей со знаменателем 2, являющихся решениями неравенства $2^x + 3 \cdot 2^{2-x} < 13$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком уравнения $x + |y| = 2$ и осью ординат.

Вариант XXVI

1. Решить уравнение $x = 2 - \sqrt{-10x - x^2}$.

2. Пассажир проехал на поезде 120 км и, пробыв на станции 40 мин, вернулся с обратным поездом, проходящим в час на 6 км больше, чем первый. Общая продолжительность поездки составила 8 ч. Сколько километров в минуту проезжает каждый поезд?

3. Найти середину промежутка, на котором выполняется неравенство

$$4x^2 + 4x + 2(\sqrt{2x+1})^2 \le 34.$$

4. Две окружности равного радиуса касаются в точке C внешним образом. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса 5 в точках A и B. Определить площадь треугольника ABC, если $AB = 6$.

5. Найти x, если $\dfrac{4^{-1/3} \cdot 16^{2/3}}{\sqrt[3]{64} \cdot x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3/4} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}$.

6. Найти сумму и произведение корней уравнения

$$2x^2 \cdot 2^{\sqrt{x+2}} + x \cdot 2^{x+1} = 2x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{\sqrt{x+2}+1}.$$

7. Вычислить $A = 9\left(\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4\alpha\right)\right)^{-1}$, если $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

8. Решить уравнение $\dfrac{2x+1}{x} + \dfrac{3x}{2(2x+1)} = \dfrac{5}{2}$.

9. Найти x в градусах, если $0° < x < 360°$ и $2\cos^2(x + 270°) = 3\sin(x + 270°)$.

10. Вычислить A, если $A = 4^B + 5^C$, где $B = \dfrac{1}{2\log_5 2}$, $C = \dfrac{1}{\log_7 5}$.

Вариант XXVII

1. Найти x в градусах, если $90° < x < 270°$ и $\sin^2(180° + x) + 3\cos^2(180° + x) = 2$.

2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 2 см, тангенс двугранного угла при основании равен $\dfrac{4}{3}$. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

3. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел A, B и C, где $A = 62$, $B = 102$ и $C = 42$.

4. В арифметической прогрессии содержится 10 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 50, а сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 35. Определить первый член и разность прогрессии.

5. Найти корень уравнения $\log_4(x^2 + 3x - 4) = \log_4 \dfrac{x-1}{x+4}$.

6. Вычислить A, если $A = 10^B + 3^C$, где $B = \dfrac{2}{\log_3 10}$ и $C = \dfrac{1}{\log_6 3}$.

7. Найти значение производной функции $f(x) = \dfrac{\sin x + 2x}{\cos x - 3}$ в точке $x = 0$.

8. Найти середину промежутка, на котором выполняется неравенство

$$x^2 + 7 < 6x + y^2, \text{ где } y = (7 - 2x)^{1/2}.$$

9. Найти квадрат расстояния между точками, координаты которых удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 0, \\ x^{-2} + y^{-2} = 8. \end{cases}$

10. Найти x из уравнения $8^{2/3} \cdot 2^3 \cdot (0{,}5)^{-2} \cdot x^{-1} = 2^7 \cdot 2^{-2}$.

Вариант XXVIII

1. Для перевозки 60 т груза из одного места в другое требуется некоторое количество машин. Так как на каждую машину грузили на 0,5 т меньше, то дополнительно потребовалось 4 машины. Сколько машин было затребовано первоначально?

2. Найти середину промежутка, на котором выполняется неравенство

$$\log_{0{,}25} \frac{1 - 2x}{x + 1} < 0{,}5.$$

3. Решить уравнение $x = (16 - x^2 - 6x)^{1/2} - 2$.

4. Решить уравнение $\dfrac{2x + 1}{x} + \dfrac{2{,}5x}{2x + 1} = 3{,}5$.

5. На отрезке [0°, 360°] найти количество различных корней уравнения

$$7 + 4\sin x : \frac{1}{\cos x} + \frac{3}{\cos(90° - 2x)} = 0.$$

6. Найти сумму и произведение чисел x, y, z, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 5x - 2y - z = 2, \\ 3x + 4y - 5z = 4, \\ x + 3y - 2z = -1. \end{cases}$$

7. Вычислить $A = \sin(90° - 2x)$, если $\sin(180° - x) : \cos(180° - x) = -2$.

8. Найти коэффициенты k и q уравнения прямой $y = kx + q$, которая пересекает гиперболу $\dfrac{2{,}4}{x}$ в точках с абсциссами $x = 2$ и $x = -3$.

9. Дано уравнение относительно x:

$$x \cdot 3^y - x \cdot 3^x = 3^{y+1} - 3^{x+1}, \text{ где } y = (x + 2)^{1/2}.$$

Найти сумму и произведение корней этого уравнения.

10. При каких значениях k система уравнений $\begin{cases} 3x+2y=k, \\ x^2+y^2=117 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Вариант XXIX

1. Найти число, 3,2% которого равны $A = \dfrac{3\left(0{,}5:1{,}25+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)}{\left(1{,}5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}$.

2. Упростить выражение

$$\frac{2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-(b-a)^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3}}{a^{3/2}+b^{3/2}}-\frac{(\sqrt{ab}-a)\lg 64}{(b-a)\lg 4}.$$

3. Упростить выражение $\sin^4\dfrac{3\alpha}{2}-6\sin^2\dfrac{3\alpha}{2}\cos^2\dfrac{3\alpha}{2}+\cos^4\dfrac{3\alpha}{2}-\cos 6\alpha+4$.

4. Даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, удовлетворяющие условию $\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}=\bar{0}$. Зная, что $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$ и $|\bar{c}|=5$, вычислить $\bar{b}\bar{c}-\bar{a}\bar{b}-\bar{c}\bar{a}$.

5. Известно, что при любом n сумма S_n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n = 5n^2 - 4n$. Найти три первых члена прогрессии.

6. Решить уравнение $\sqrt{x+6}-\sqrt{3x-26}=\sqrt{x-6}$.

7. Найти корни уравнения $\log_2(9^{x+2}+7)=2+\log_2(3^{x+2}+1)$.

8. Около круга радиуса $\sqrt{3}$ см описана равнобедренная трапеция с острым углом 60°. Найти длину средней линии трапеции.

9. Найти x в градусах, если $-90° < x < 90°$ и

$$\sin(180° - x)\cos(90° - 7x) = \cos(270° + 3x)\sin(360° + 5x).$$

10. Образующая конуса равна 2 см и составляет с плоскостью основания угол 30°. Найти объем описанной около конуса пирамиды, основанием которой служит ромб с тупым углом 150°.

Вариант XXX

1. Найти два первых члена бесконечной геометрической прогрессии $(0 < q < 1)$, сумма которой равна 9, а сумма трех первых ее членов равна $\dfrac{26}{3}$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2}+\sqrt{y+1}=1-t, \\ 2\sqrt{xy+x+2y+2}=5+t^2+2t. \end{cases}$$

3. Решить уравнение $\left(\frac{9}{4}\right)^{x} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{x-1} = \frac{\lg 64}{\lg 16}$.

4. Найти x в градусах, если $-80° < x < 80°$ и

$$4\,(\sin 2x \cos^5 2x + \cos 2x \sin^5 2x) + \sin^3 4x = 1.$$

5. Найти целые числа x, удовлетворяющие неравенству $\left|\frac{2}{x-12}\right| > \frac{8}{9}$.

6. В правильной четырехугольной пирамиде длины ее бокового ребра и диагонали основания равны $2\sqrt{3}$ см. Найти объем пирамиды.

7. Расстояние между городами A и B равно 195 км. Из A в B и из B в A одновременно выезжают два поезда и встречаются через 3 ч. Затем они продолжают свой путь. Поезд из A прибыл в B на $\frac{13}{14}$ ч раньше, чем другой прибыл в A. Определить скорости поездов.

8. Найти значение производной функции $y = 3\cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$ при $x = 1$.

9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали основания AC и DB пересекаются в точке M и $\angle ABD = 60°$. Определить скалярное произведение $\overline{AC} \cdot \overline{AD}$, если $\left|\overline{B_1M}\right| = 3$ и $\angle BMB_1 = 30°$.

10. Какое число больше: $\log_3^2 28$ или $\log_3 20\,412$?

ОТВЕТЫ

ЧАСТЬ I

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА 1

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

1.001. 20. **1.002.** 1. **1.003.** 32. **1.004.** 0,5. **1.005.** 5. **1.006.** 1. **1.007.** 3. **1.008.** 1. **1.009.** 9. **1.010.** 1. **1.011.** 2. **1.012.** 4. **1.013.** 12. **1.014.** 1. **1.015.** 4. **1.016.** 2. **1.017.** 8. **1.018.** 3. **1.019.** 2. **1.020.** 3. **1.021.** 0,5. **1.022.** 1. **1.023.** 10. **1.024.** 1. **1.025.** 3. **1.026.** 3. **1.027.** 6. **1.028.** 2. **1.029.** 3. **1.030.** 0,5. **1.031.** $\frac{5}{6}$. **1.032.** 11. **1.033.** 1. **1.034.** $\frac{5}{3}$. **1.035.** 9. **1.036.** 16. **1.037.** $\frac{17}{27}$. **1.038.** 5. **1.039.** 12. **1.040.** $\frac{15}{14}$. **1.041.** 1. **1.042.** $\frac{1}{3}$. **1.043.** 5. **1.044.** 5. **1.045.** 25. **1.046.** 1. **1.047.** 125. **1.048.** 0,25. **1.049.** 5. **1.050.** –1,5.

ГЛАВА 2

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

2.001. $x-1$. **2.002.** $\frac{2(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}{p-q}$. **2.003.** $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b}$. **2.004.** 0,2. **2.005.** 0. **2.006.** $\frac{1}{ab}$. **2.007.** $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$. **2.008.** y^2. **2.009.** $\frac{t+1}{t}$. **2.010.** –4. **2.011.** $\frac{16x\sqrt{x}}{(1-x^2)(x-1)}$. **2.012.** $x+1$. **2.013.** $\sqrt{a-1}$. **2.014.** $\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$. **2.015.** $\sqrt[m]{y}$. **2.016.** $\left|z^{1/p}-z^{1/q}\right|$. **2.017.** $\sqrt{x}$. **2.018.** 0,04. **2.019.** 16. **2.020.** $\frac{2\sqrt[6]{a^5}}{a}$. **2.021.** $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. **2.022.** $-\sqrt{x}$, если $x\in(0, 2)$; $\sqrt{x}$, если $x\in(2, \infty)$. **2.023.** $\sqrt{6x}$. **2.024.** $\sqrt[3]{20x}$. **2.025.** 1. **2.026.** $\frac{1}{\sqrt[12]{a^2b}}$. **2.027.** $-\sqrt[6]{2}$, если $x\in(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$; $\sqrt[6]{2}$, если $x\in(-1, 1)$. **2.028.** $\frac{2}{x^2-a^2}$. **2.029.** $\frac{2\sqrt[3]{r}}{r}$. **2.030.** – 1. **2.031.** $\frac{1}{a}$. **2.032.** 5. **2.033.** $4p-\sqrt{4p^2-1}$.

2.034. $\sqrt{a^2-1}$. **2.035.** $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$. **2.036.** $-3n\,(m+p)$. **2.037.** $-\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)$.

2.038. $\frac{1-a}{\sqrt{a}}$. **2.039.** -4. **2.040.** 0,1. **2.041.** $-\frac{1}{a^2+a+1}$. **2.042.** 1. **2.043.** $\left(\frac{m}{n}\right)^{m+n}$.

2.044. 1. **2.045.** $\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$. **2.046.** -1. **2.047.** $\frac{b+1}{b-2a}$. **2.048.** 0,5. **2.049.** $q\,(p+q)$. **2.050.** $1+3x^2$. **2.051.** 5. **2.052.** $1-x^2$. **2.053.** $\frac{2}{1-p^4}$. **2.054.** 1. **2.055.** $\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}$. **2.056.** 0,5. **2.057.** $\frac{x-y}{x+y}$. **2.058.** 1. **2.059.** $\frac{1}{xy}$. **2.060.** $\frac{24}{5y-2x}$. **2.061.** 20. **2.062.** $2a+3$.

2.063. $1+2x$. **2.064.** $\frac{a-b}{a+b}$. **2.065.** $x+y$. **2.066.** $-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})$. **2.067.** $a^{5/6}$. **2.068.** 1.

2.069. $a^{1/3}+b^{1/3}$. **2.070.** $a-b$. **2.071.** $\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m}$. **2.072.** $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}$. **2.073.** 1.

2.074. $\frac{1}{a(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a})}$. **2.075.** $\frac{x^{\frac{1}{m}}+3x^{\frac{1}{n}}}{x}$. **2.076.** 6. **2.077.** 0,25. **2.078.** 2. **2.079.** $\sqrt{2}(m+3)$. **2.080.** $a-b$. **2.081.** $\frac{\sqrt{t^2-4}}{t+2}$. **2.082.** -1. **2.083.** $2x-1$. **2.084.** 1. **2.085.** 1.

2.086. 25, если $a<0$; -25, если $a>0$. **2.087.** $-\sqrt{ac}$. **2.088.** $\sqrt{1+x}$. **2.089.** 2.

2.090. 3. **2.091.** $\frac{x^{1/3}+y^{1/3}}{\sqrt[6]{x^5y^2}}$. **2.092.** $\frac{1}{x^2-1}$. **2.093.** $2\sqrt{3}$. **2.094.** 0. **2.095.** $z^{1/(p-3)}$.

2.096. $\frac{a^2}{4(a^2-x)}$. **2.097.** 2. **2.098.** 1. **2.099.** -1. **2.100.** $z\,(z+1)\,(z+2)$. **2.101.** $-\frac{\sqrt{2}}{2a}$.

2.102. $1-a$, если $a\in(-\infty,-1)$; $a-1$, если $a\in(-1,\ 0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$. **2.103.** $0{,}5a$.

2.104. $(a+b)\sqrt[3]{b^2+2a^3}$. **2.105.** -1. **2.106.** $\frac{29}{35}$. **2.107.** $\frac{a^3}{2(a-1)}$. **2.108.** $-\frac{7}{24}$. **2.109.** 100.

2.110. $\frac{1}{3}$. **2.111.** $\frac{1}{ab}$. **2.112.** $\frac{\sqrt[3]{8-t^3}}{\sqrt{2}}$. **2.113.** $\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}$. **2.114.** $16a^2$. **2.115.** $(a+b)^2$.

2.116. $\frac{1}{m^2}$. **2.117.** $-a^2$. **2.118.** 0,5. **2.119.** 0,6. **2.120.** 31. **2.121.** $\sqrt[12]{32}$.

2.122. $2\sqrt[6]{18}$. **2.123.** 0. **2.124.** 0. **2.135.** 0. **2.136.** 0. **2.137.** $\frac{a+b}{ab}$. **2.138.** $-0{,}75$. **2.139.** 0,75. **2.140.** 0,2. **2.141.** 6. **2.142.** $-0{,}5\sqrt{6}$. **2.143.** $a-b$. **2.144.** $a+b$. **2.145.** 1. **2.146.** $2(\sqrt[4]{3}-\sqrt[8]{2})(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2})(3+\sqrt{2})$. **2.147.** $(\sqrt[4]{13}+\sqrt{3})\times$ $\times(\sqrt{13}+3)$. **2.148.** $-0{,}5(4+3\sqrt{2})(5+3\sqrt{3})$. **2.149.** $0{,}5(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30})$. **2.150.** $\frac{(2\sqrt{6}+1)(3-4\sqrt{2})}{23}$. **2.151.** $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})}{a}$. **2.153.** 6. **2.154.** 5. **2.156.** 638. **2.157.** а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) 4. **2.158.** $-\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$, если $a\in(-1,1)$; $\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$, если $a\in(1,\infty)$. **2.159.** $\frac{1}{ab}$. **2.160.** 1. **2.161.** $\frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{(a+2)\sqrt{a-1}}$. **2.162.** -2, если $a\in(-\infty,0)$; 2, если $a\in(0,\infty)$. **2.163.** $\frac{16a^4}{x^2}$. **2.164.** $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$. **2.165.** $-\sqrt{\frac{t+2}{t-2}}$. **2.166.** $\frac{b^2-1}{\sqrt{b}}$, если $b\in(0,1)$; $\frac{b^2+3}{\sqrt{b}}$, если $b\in(1,\infty)$. **2.167.** $-(m^2+m\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$, если $m\in(-\infty,0)\cup(0,1)$; $\frac{m^3}{m-\sqrt[3]{2}}$, если $m\in[1,\sqrt[3]{2})\cup(\sqrt[3]{2},\infty)$. **2.168.** $-(x^2+x+1)$, если $x\in(-\infty,1)\cup(1,3)$; x^2+x+1, если $x\in(3,\infty)$. **2.169.** mn. **2.170.** $-0{,}5a$, если $a\in(-\infty,-2)$; $0{,}5a(a-1)$, если $a\in(-2,\infty)$. **2.171.** $0{,}5(x+y)$.

2.172. $\frac{(4-a)(a^2+16)}{2a(a+4)}$, если $a\in(-4,0)\cup(0,4)$; $\frac{4(a-4)}{a+4}$, если $a\in(4,\infty)$. **2.173.** $\frac{1}{m+2}$, если $m\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(3,\infty)$; $-\frac{1}{m+2}$, если $m\in(0,3)$. **2.174.** $-\frac{1}{x}$, если $x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$; $\frac{1}{x}$, если $x\in(2,3)\cup(3,\infty)$. **2.175.** -1, если $x\in[1,2)$; 1, если $x\in(2,\infty)$. **2.176.** $\frac{1}{a+1}$, если $a\in(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup$ $\cup(-1,2)$; $\frac{1}{a+3}$ если $a\in(2,\infty)$. **2.177.** $\frac{x+3}{x^2-x}$, если $x\in(-\infty,0)$; $\frac{2x^2+x+3}{x^2+x}$, если $x\in(0,1)$; $\frac{3}{x}$, если $x\in[1,\infty)$. **2.178.** $\frac{a+2}{a-1}$. **2.179.** $\frac{a^2+1}{a-1}$. **2.180.** $\frac{1}{1-3x}$, если $x\in(-\infty,0)$; $\dfrac{x+1}{(x-1)(3x-1)}$, если $x\in\left[0,\ \dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},1\right)$; $\dfrac{1}{x-1}$, если $x\in(1,\infty)$. **2.181.** $\sqrt[6]{a^2-1}$. **2.182.** $a^2x^2-b^2y^2$. **2.183.** $\dfrac{3}{x(2x+3)}$, если $x\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{2},0\right)\cup\left(0,\ 3\right]$; $\dfrac{1}{x}$, если $x\in(3,\infty)$. **2.184.** $-\dfrac{1}{a}$, если $a\in(-\infty,-5)$; $\dfrac{a+5}{a(3a-5)}$, если $a\in\left(-5,\ 0\right)\cup\left(0,\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3},\infty\right)$. **2.185.** $-\dfrac{x+1}{x}$, если $x\in(-\infty,-1)$; $\dfrac{x+1}{2-x}$, если $x\in[-1,0)$; $\dfrac{x+1}{x-2}$, если $x\in(0,2)\cup(2,\infty)$. **2.186.** p. **2.187.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-1}$. **2.188.** $\dfrac{1}{x-x^2}$, если $x\in(0,1)$; $\dfrac{1}{x^2-x}$, если $x\in(1,\infty)$.

2.189. $\dfrac{r^2-r}{r^2+1}$, если $r\in(-\infty,0)$; $\dfrac{r}{1-r}$, если $r\in[0,1)$; $\dfrac{r}{r-1}$, если $r\in(1,\infty)$. **2.190.** $\dfrac{1}{z+2}$. **2.191.** $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{a}}$. **2.192.** $\dfrac{a}{a+1}$. **2.193.** $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$. **2.194.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{a}}$.

2.195. $\dfrac{a+2}{a^2(a-1)^2}$. **2.196.** 2, если $x\in(-\infty,-1)$; $\dfrac{2x^2}{2x^2-1}$, если $x\in\left[-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$; 0, если $x\in(1,\infty)$. **2.197.** $\dfrac{1}{\sqrt{b+2}}$. **2.198.** $\dfrac{1-b}{b+1}$. **2.199.** $\sqrt[6]{m}-\sqrt[6]{n}$. **2.200.** $\sqrt[4]{x}$, если $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}>0$; $-\sqrt[4]{x}$, если $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}<0$. **2.201.** $\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}}$. **2.202.** $0{,}5(m-8)$. **2.203.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}}$. **2.204.** 1.

2.205. $\dfrac{x^2-1}{2x-b}$. **2.206.** $\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{x+y}$. **2.207.** $\dfrac{x^2-3x+2}{3x}$. **2.208.** 1. **2.209.** $3-2\sqrt{x}$, если $x\in[0,9)$; -3, если $x\in(9,\infty)$. **2.210.** 2, если $a\in(0,1)$; $\dfrac{2}{3}$, если $a\in(1,\infty)$. **2.211.** $\dfrac{z^2}{z^2+z+1}$. **2.212.** 5. **2.213.** $-0{,}5$, если $x\in(-\infty,0)$; 0,5, если $x\in(0,\infty)$. **2.214.** -2, если $x\in(-\infty,0)$; 2, если $x\in(0,\infty)$. **2.215.** $\frac{(z^2+9)(3-z)}{9z}$, если $z\in(-3,0)\cup(0,3)$; $\frac{2(z-3)}{3}$, если $z\in(3,\infty)$. **2.216.** $0{,}5m$. **2.217.** $\frac{1}{a(3a+b)}$. **2.218.** $2\sqrt{2}$, если $x\in[2,4)$; $2\sqrt{x-2}$, если $x\in[4,\infty)$. **2.219.** 5. **2.220.** 1, если $0\le b\le a$, $a\ne 0$; $\frac{\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}}$, если $0<-b\le a$. **2.221.** $x\sqrt{2}$. **2.222.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **2.223.** $-\frac{1}{\sqrt{a-2}}$, если $a\in(2,3)$; $-\sqrt{a-2}$, если $a\in(3,\infty)$. **2.224.** $\frac{3-x^2}{x+2}$, если $x\in(-\infty,-2)$; $\frac{5-x^2}{x+2}$, если $x\in(-2,2)$; $\frac{x^2-3}{x+2}$, если $x\in[2,+\infty)$. **2.225.** $3-x$, если $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{5},3\right)$; $x-3$, если $x\in[3,\infty)$. **2.226.** $-3x$, если $x\in(-\infty,-3)\cup(-3,0)$; $3x$, если $x\in(0,\infty)$. **2.227.** $\frac{a+\sqrt{a^2-9}}{3}$. **2.228.** $\left(y-\frac{2}{y}\right)^2$. **2.229.** $\sqrt{2}$. **2.230.** 2. **2.231.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.232.** $-2a$, если $a\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$; $2a$, если $a\in(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},\infty)$. **2.233.** $\sqrt{a^2-1}$. **2.234.** $-2-4\sqrt{3}$. **2.235.** $\frac{1-a}{2a}$, если $a\in(0,1)$; $\frac{a-1}{2}$, если $a\in(1,\infty)$. **2.236.** $\frac{m-1}{2m}$, если $m\in(0,1)$; $\frac{1-m}{2}$, если $m\in[1,\infty)$. **2.237.** $\frac{1-a}{\sqrt{a}}$, если $a\in(0,1)$; $\frac{a-1}{\sqrt{a}}$, если $a\in(1,\infty)$. **2.238.** $\frac{1}{x-\sqrt{2x+1}}$. **2.239.** $-\sqrt[4]{2}$. **2.240.** 1. **2.241.** $\sqrt[3]{4-x^2}$. **2.242.** $\frac{z^2-5z+6}{1-z}$, если $z\in(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,2)$; $z-2$, если $z\in(2,\infty)$. **2.243.** $\frac{x}{x-2}$. **2.244.** $a-b$. **2.245.** $-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$. **2.246.** $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}$. **2.247.** $1+\sqrt[3]{a}$. **2.248.** $\sqrt{2}$. **2.249.** $-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2})$. **2.250.** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}}$. **2.251.** $2\sqrt[4]{\frac{y}{x^2}}$. **2.252.** 2,4. **2.253.** -1, если $x\in\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$; 1, если $x\in\left(\frac{1}{4},\infty\right)$. **2.254.** 3. **2.255.** 3. **2.256.** $x^3\sqrt[4]{a}$. **2.257.** $\frac{1}{\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}}$. **2.258.** $\frac{1}{2\sqrt{b}}$. **2.259.** 0. **2.260.** $\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{\sqrt{p}}$. **2.261.** $\sqrt[3]{\frac{1-x}{3x}}$, где $x\in(0,1]$. **2.262.** 1,25. **2.263.** x^2+1.

2.264. $\frac{x+3}{x-1}$. **2.265.** 1,1. **2.266.** $\frac{4}{9}$. **2.267.** $\frac{1}{2y^3}$, если $0<y<2x$; $-\frac{1}{2y^3}$, если $y>2x$.

2.268. $\sqrt{x}+1$. **2.269.** $-(a^3+\sqrt[4]{a^3})$. **2.270.** $\frac{4}{\sqrt{x-4}}-1$, если $x\in(4,8)$; 1, если $x\in[8,\infty)$. **2.271.** 4. **2.272.** $\frac{1}{\sqrt[8]{p-q}}$. **2.273.** $-\sqrt{x}$, если $x\in\left(0,\frac{2}{3}\right]$; $\sqrt{x}$, если $x\in\left(\frac{2}{3},\infty\right)$. **2.274.** 2. **2.275.** $x^2\left|\sqrt[3]{y}\right|$. **2.276.** $0{,}25(\sqrt[3]{a}-1)$. **2.277.** 1. **2.278.** $\sqrt[3]{\frac{2n}{1+n}}$.

2.279. $-2b(a+3\sqrt{ab})$. **2.280.** $\sqrt{\frac{a}{a+4b}}$. **2.281.** $\frac{\sqrt[4]{a}}{6}$. **2.282.** -1.

2.283. 1. **2.284.** $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, если $0<b<a$; $\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$, если $0<a<b$. **2.285.**

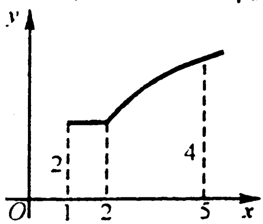


Рис. О.2.1

$y=\begin{cases}2 & \text{при } 1\le x<2,\\ 2\sqrt{x-1} & \text{при } 2\le x<\infty\end{cases}$ (рис. О.2.1). **2.286.** При $k=\frac{11}{3}$. **2.287.** При $a=165{,}5$; $b=158{,}5$. **2.289.** $(x^2-2)(x^2+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$. **2.290.** $3b^2+a^4=4ac$. **2.294.** Верно при всех $n\in[0,3m]$, $m>0$. **2.304.** Верно при всех $q\in[0,5p]$, $p>0$. **2.306.** 3^3-2^3. **2.307.** $\frac{n}{n+1}$. **2.310.** $A=1, B=2, C=0$. **2.312.** $\frac{x+1}{x}$, если $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$; $-\frac{x+1}{x}$, если $x\in(-1,0)$. **2.313.** -1, если $x\in(-\infty,-1)$; $\frac{2+x-x^3}{x^3+x}$, если $x\in[-1,0)\cup(0,1)$; 1, если $x\in[1,\infty)$. **2.314.** $-(x+1)$, если $x\in(-\infty,-1)$; $x+1$, если $x\in[-1,1)$; $2x^2+x-1$, если $x\in[1,\infty)$. **2.315.** 6, если $x\in(-\infty,0)$; $6-2x$, если $x\in[0,6)$; -6, если $x\in[6,\infty)$. **2.316.** $\frac{2\sqrt{2}}{4-x}$, если $x\in[2,4)$; $\frac{2\sqrt{x-2}}{x-4}$, если $x\in(4,\infty)$. **2.317.** $m-n$, если $0<\frac{m}{n}<1$ или $\frac{m}{n}>2$; $n-m$, если $1\le\frac{m}{n}<2$. **2.318.** $2x^2-a^2$, если $x<-|a|$; $-a^2$, если $x>|a|$. **2.319.** $x-2$, если $x\in(-\infty,-1)$; $\frac{x^2+4}{x-2}$, если $x\in(-1,1)$; $-(x+2)$, если $x\in(1,2)$; $x+2$, если $x\in(2,\infty)$. **2.320.** $\frac{2x-2x^2-3}{x}$, если $x\in(-\infty,0)$; $\frac{2x+3}{x}$, если $x\in(0,2)$; $\frac{2x^2-2x+3}{x}$, если $x\in[2,\infty)$. **2.321.** $6-4a$, если $a\in[0,\sqrt{2})$; $2(a-1)^2$, если $a\in[\sqrt{2},\infty)$. **2.322.** -4, если $y\in(-\infty,3)$; $2y-10$, если $y\in[3,9)$; 8, если $y\in[9,\infty)$. **2.323.** $\frac{5}{2\sqrt{x}}$, если $x\in(0,4)$; $\frac{2x-3}{2\sqrt{x}}$, если $x\in[4,\infty)$. **2.324.** $\frac{1+x-x^2}{x+1}$, если $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$; $\frac{1-x-x^2}{x+1}$, если $x\in(-1,0)$; $\frac{x^2+x-1}{x+1}$, если $x\in[1,\infty)$. **2.325.** $\frac{n+1}{n}$, где $n\neq 0, n\neq 1$. **2.326.** $\frac{1}{\sqrt{a}}$, если $\sqrt{2a}>5\sqrt[3]{b}$; $-\frac{1}{\sqrt{a}}$, если $\sqrt{2a}<5\sqrt[3]{b}$. **2.327.** $\frac{x+1}{1-x}$, если $x\in(-\infty,-1)$; $\frac{x+1}{x-1}$, если $x\in[-1,0)$; $\frac{x-1}{x+1}$, если $x\in[0,\infty)$. **2.328.** $\frac{2-x}{2}$, если $x\in(-\infty,-2)$; $-\frac{x^2+2x+8}{2x}$, если $x\in[-2,0)$; $\frac{x^2+2x+8}{2x}$, если $x\in(0,\infty)$. **2.329.** $\frac{x}{x-1}$, если $x\in(-\infty,-1)$; $\frac{x}{1-x}$, если $x\in(-1,0)$; $-\frac{x}{x+1}$, если $x\in[0,1)$; $\frac{x}{x+1}$, если $x\in(1,\infty)$. **2.330.** $\frac{4-x^2}{x^2+4x-4}$, если $x\in(-\infty,-2-2\sqrt{2})\cup(-2-2\sqrt{2},-2+2\sqrt{2})\cup(-2+2\sqrt{2},1)$; $\frac{x+2}{2-x}$, если $x\in[1,2)$; $\frac{x+2}{x-2}$, если $x\in(2,\infty)$. **2.331.** $-x$, если $x\in(0,1)$; x, если $x\in(1,\infty)$. **2.332.** $\frac{x-1}{x}$, если $x\in(-\infty,0)\cup[1,\infty)$; $\frac{1-x}{x}$, если $x\in(0,1)$. **2.333.** $-\frac{z+1}{z}$, если $z\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$; $\frac{z+1}{z}$, если $z\in[-1,0)\cup(1,\infty)$. **2.334.** 1, где $a>0$, $-\sqrt[6]{a}\le b<\sqrt[3]{a^3-\sqrt{a}}$. **2.335.** $\frac{1}{a}$, если $a\in(-\infty,-1)\cup[1,\infty)$; a, если $a\in[-1,1)$. **2.336.** $\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$, если $x\in(0,\infty)$, $y\in(0,\infty)$; $-(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})$, если $x\in(0,\infty)$, $y\in[-0{,}5x,0)$. **2.337.** $2a$, если $a\in(-\infty,0)\cup(3,\infty)$; $-2a$, если $a\in(0,3)$. **2.338.** $\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$, где $y\neq 0$, $y\neq 8x$. **2.339.** $\frac{4a^2+3}{9(a^2+1)}$. **2.340.** $\frac{2}{2-a}$, если

$a\in[1, 2)$; $\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$, если $a\in(2, \infty)$. **2.341.** $-9z^3$, если $z\in(-\infty; -0{,}5)\cup(0; 0{,}5)$; $7z^3+2$, если $z\in[-0{,}5; 0)\cup(0{,}5; \infty)$. **2.342.** $-\frac{2}{\sqrt{2x+1}}$, если $x\in(-0{,}5; 1{,}5)$; $-\frac{\sqrt{2x+1}}{2}$, если $x\in(1{,}5; \infty)$. **2.343.** $\frac{1}{\sqrt{x}}$, если $x>0$, $0\le y<4x^2$; $-\frac{1}{\sqrt{x}}$, если $x>0$, $y>4x^2$. **2.344.** $\frac{t-1}{3t-1}$, если $t\in\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)\cup[1, \infty)$; $\frac{1-t}{3t-1}$, если $t\in\left(\frac{1}{3}, 1\right)$. **2.345.** $-\frac{1}{x}$, если $x\in(-\infty, -\sqrt{2})\cup(0, \sqrt{2})$; $\frac{1}{x}$, если $x\in(-\sqrt{2}, 0)\cup(\sqrt{2}, \infty)$. **2.346.** $1-\sqrt{x}$, если $x\in[0, 1)$; $\sqrt{x}-1$, если $x\in[1, \infty)$. **2.347.** x, если $x\in(0; 0{,}5)$; $-x$, если $x\in(0{,}5; \infty)$, **2.348.** $x^2-4x-12$, если $x\in(-\infty, 2)$; $(x+2)^2$, если $x\in(2, \infty)$. **2.349.** $x^2+\sqrt{2}$. **2.350.** $\frac{9-2x}{x}$, если $x\in(-\infty, 0)$; $\frac{2x-9}{x}$, если $x\in(0; 1{,}5)$; $\frac{2x+3}{x}$, если $x\in(1{,}5; \infty)$. **2.351.** x^4. **2.352.** $-\frac{2\sqrt{x}}{3}$. **2.353.** $\frac{\sqrt{2}}{1-3a}$, если $a\in\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$; $\frac{\sqrt{12a-2}}{3a-1}$, если $a\in\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. **2.354.** $-\frac{(\sqrt{1-4p^2}+1)^2}{4p^2}$, если $p\in[-0{,}5; 0)$; -1, если $p\in(0; 0{,}5)$. **2.355.** $\left|\sqrt[4]{a}-\sqrt[6]{b}\right|$, где $a\ge 0, b\ge 0$, $a+b\ne 0$. **2.356.** $\frac{4x}{x-4}$, если $x\in(4, 8)$; $\frac{2x}{\sqrt{x-4}}$, если $x\in[8, \infty)$. **2.358.** $(y-x)(z-y)(x-z)$. **2.359.** $(x-y)(z-x)(y-z)$.

ГЛАВА 3

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

3.063. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$. **3.064.** $-\sin^2\alpha$. **3.065.** $\frac{1}{8}$. **3.066.** $-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}$. **3.067.** $2\sin\alpha$. **3.068.** $\sin 2\alpha$. **3.069.** $-0{,}5\sin 8\alpha$. **3.070.** $\frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{2}$. **3.071.** $\sin\alpha\sin 4\beta$. **3.072.** $\frac{1}{\cos^3 2x}$. **3.073.** $-\sin 2\alpha\sin 4\beta$. **3.074.** $-\cos 2\alpha\cos 4\beta$.

3.075. $4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$. **3.076.** $-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{tg}\alpha$. **3.077.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. **3.078.** $2\operatorname{tg}\alpha$. **3.079.** $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **3.080.** $\operatorname{tg}\frac{m+n}{2}\alpha$. **3.081.** 2. **3.082.** $\frac{1}{2\cos^2\alpha}$. **3.083.** $\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. **3.084.** $\operatorname{ctg}^4\alpha$. **3.085.** $\frac{1}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **3.086.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$. **3.087.** 1. **3.088.** 1. **3.089.** 1. **3.090.** $\sin^2\alpha$. **3.091.** $\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$. **3.092.** $-\cos\alpha$. **3.093.** $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **3.094.** $\operatorname{tg}^2 2\alpha$. **3.095.** $-\frac{1}{4}\sin 8\alpha$. **3.096.** $\frac{2}{\sin^3 2\alpha}$. **3.097.** $\frac{2}{\cos^3\alpha}$. **3.098.** 0. **3.099.** $-\operatorname{tg}^4\alpha$. **3.100.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\alpha$. **3.101.** $\cos 4\alpha$. **3.102.** $4\cos 2\alpha$. **3.103.** $\operatorname{ctg}2\alpha$. **3.104.** $\cos 4\alpha$. **3.105.** 2. **3.106.** $\operatorname{ctg}2\alpha$. **3.107.** $\operatorname{tg}4\alpha$. **3.108.** $\sin^2\alpha$. **3.109.** $\operatorname{tg}2\alpha$. **3.110.** $\operatorname{ctg}4\alpha$. **3.111.** $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^4\alpha$. **3.112.** $2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **3.113.** $2\cos\alpha$. **3.114.** $\sqrt{2}\sin(4\alpha-45^\circ)$. **3.115.** $\frac{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$. **3.116.** $-\frac{16\cos 2\alpha}{\sin^4 2\alpha}$. **3.117.** $\operatorname{tg}^8\alpha$. **3.118.** $\frac{4\sin(\alpha-60^\circ)\sin(\alpha+60^\circ)}{\sin^2\alpha}$. **3.119.** $\frac{4\sin(30^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos^2\alpha}$. **3.120.** $\frac{4\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}$. **3.121.** $4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)$. **3.122.** $4\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)$. **3.123.** $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$. **3.124.** $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$. **3.125.** $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.126.** $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+3\alpha\right)}{\cos 3\alpha}$. **3.127.** $2\sqrt{2}\cos\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$. **3.128.** $2\sqrt{2}\sin\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$. **3.129.** $2\cos 3\alpha\cos\alpha$. **3.130.** $4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha$. **3.131.** $\frac{2\sqrt{2}\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\cos 4\alpha}$. **3.132.** $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\operatorname{ctg}3\alpha$. **3.133.** $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.134.** $\operatorname{tg}5\alpha$. **3.135.** $2\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 6\alpha$.

3.136. $2\cos 2\alpha \sin 6\alpha \sin 10\alpha$. **3.137.** $\operatorname{ctg}\frac{17\alpha}{2}$. **3.138.** $-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}$. **3.139.** $-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{9\alpha}{2}$. **3.140.** $\operatorname{tg}\frac{29\alpha}{2}$. **3.141.** $4\sin 3\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha$. **3.142.** $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}$. **3.143.** $4\cos\frac{3\alpha}{2}\cos 2\alpha\cos\frac{17\alpha}{2}$. **3.144.** $8\cos^4 2\alpha$. **3.145.** $2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. **3.146.** $\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}$. **3.147.** $4\sin 3\alpha\sin 2\alpha\sin\alpha$.

3.153. 2. **3.154.** 4. **3.155.** $2\sqrt{3}$. **3.156.** $\frac{7}{25}$. **3.157.** $2\sqrt{3}$. **3.158.** $-\frac{17\sqrt{2}}{26}$. **3.159.** $\frac{7\sqrt{2}}{26}$. **3.160.** $\frac{65}{113}$. **3.161.** $\frac{26}{87}$. **3.162.** 0.96. **3.163.** $1-p^2$. **3.164.** $\frac{57}{5}$. **3.165.** 2. **3.166.** $-\frac{22}{9}$. **3.167.** $\pi-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **3.169.** $\pi-\operatorname{arctg}5$. **3.170.** $\frac{23}{32}$. **3.171.** $\frac{3\pi}{4}$. **3.172.** $\frac{\sqrt{5}}{20}$. **3.174.** $-\frac{4\sqrt{6}}{23}$. **3.176.** $\frac{\pi}{4}$. **3.177.** 2. **3.178.** 2. **3.181.** $x-y=xy$. **3.184.** $1+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}$. **3.185.** m^4-4m^2+2. **3.240.** $2|\operatorname{ctg}\alpha|$. **3.241.** $-0{,}5\sin 2\alpha$. **3.242.** $|\sin\alpha-\sin\beta|$. **3.243.** -1. **3.244.** 1. **3.245.** $-\sqrt{3}\operatorname{ctg}2\alpha$. **3.246.** $\operatorname{tg}2\alpha$. **3.247.** 1. **3.248.** $\frac{\sin 4x}{\cos^2 4x}$. **3.249.** $-\cos^2 4\alpha$. **3.250.** $-2\sin^2 2\alpha$. **3.251.** $\cos(40°+2\alpha)$. **3.252.** $\operatorname{tg}^4 2\alpha$. **3.253.** $\operatorname{tg}\alpha$. **3.254.** $\sin 4\alpha$. **3.255.** $\cos 8\alpha$. **3.256.** $-\sin 4\alpha$. **3.257.** $\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$. **3.258.** $2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.259.** $-0{,}5$. **3.260.** $-2\operatorname{ctg}^2\alpha$. **3.261.** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$. **3.262.** $8\sqrt{3}$. **3.263.** $0{,}5\sqrt{3}$. **3.264.** $\operatorname{tg}5x$. **3.265.** $\sin 3x$. **3.266.** $\cos 3x$. **3.267.** $\frac{2}{|\sin 2\alpha|}$. **3.268.** $\operatorname{tg}\alpha$. **3.269.** $\operatorname{tg}(\alpha+30°)\operatorname{tg}(\alpha-30°)$. **3.270.** $2\sin 2\alpha$. **3.271.** $2|\operatorname{ctg}4\alpha|$. **3.272.** $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. **3.273.** 0,25. **3.274.** $\sin(\alpha+\beta)$. **3.275.** а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; б) $-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **3.276.** $-\sin 2\alpha$. **3.277.** $\sin 4\alpha$. **3.278.** а) $-2\operatorname{tg}\alpha$; б) $2\operatorname{tg}\alpha$. **3.279.** $\cos\frac{\alpha}{2}$. **3.280.** $\operatorname{tg}^4 2\alpha$.

3.281. $\frac{1}{8}\sin 4\alpha \sin 8\alpha$. **3.282.** 1. **3.283.** $-\sin 6\alpha$. **3.284.** 1, если $\operatorname{ctg} x > 0$; -1, если $\operatorname{ctg} x < 0$. **3.285.** $2\sin(6\alpha - 60^\circ)$. **3.286.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(4\alpha - 60^\circ)$. **3.287.** $-8\cos 4\alpha$. **3.288.** $\frac{4\sqrt{2}\sin(x-45^\circ)\sin(x-60^\circ)\sin(x+60^\circ)}{\cos^3 x}$. **3.289.** $\frac{4\cos 2x \sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x)}{\cos^4 x}$.

3.290. $-8\cos(2\alpha+60^\circ)\cos(2\alpha-60^\circ)$. **3.291.** $2\sin\frac{\alpha}{4}$. **3.292.** $8\sin(2\alpha+30^\circ)\sin(30^\circ-2\alpha)$. **3.293.** $\sin^2(\alpha-\beta)$. **3.294.** $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha \cos(2\alpha+\beta)}{\cos 4\alpha}$. **3.295.** $-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$. **3.296.** $-2\cos\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha-2\beta)$. **3.297.** $-2\sin 2\alpha \sin\beta \cos(2\alpha-\beta)$.

3.298. $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.299.** $4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$. **3.300.** $-\frac{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{\sin 8\alpha}$. **3.301.** $\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$. **3.302.** $2\operatorname{ctg} 4\alpha$. **3.303.** $\cos^2(\alpha-\beta)$. **3.304.** $\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}$. **3.305.** $8\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. **3.306.** а) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **3.307.** $2\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.308.** $2\sin\alpha\sin(2\beta-\alpha)\cos 2\beta$. **3.309.** $4\cos 4\alpha\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.310.** $4\sin 4\alpha\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)$. **3.311.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. **3.312.** $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-4\alpha\right)$. **3.313.** $\frac{1}{2\cos 2\alpha}$. **3.314.** $\operatorname{tg}(\alpha-15^\circ)\operatorname{ctg}(\alpha+15^\circ)$. **3.315.** $4\sin 4\alpha\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ)$. **3.316.** $-\sin 4\alpha$. **3.317.** $\operatorname{ctg}^3\alpha$. **3.318.** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\operatorname{tg}^2\alpha$. **3.319.** $2\sqrt{2}\sin 2\alpha\sin(4\alpha-45^\circ)$.

3.320. $\frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **3.321.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\alpha$. **3.322.** $\frac{4\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$.

3.323. $\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)$. **3.324.** $4\cos 4\alpha\sin(15^\circ-\alpha)\cos(15^\circ+\alpha)$.

3.325. $4\sin(30^\circ+2\alpha)\sin(30^\circ-2\alpha)$. **3.326.** $\cos\frac{(m+n)\alpha}{2}\cos\frac{(m-n)\alpha}{2}$.

3.327. $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$. **3.328.** $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$. **3.329.** $\sin 4\alpha$. **3.330.** $2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$. **3.331.** $\frac{8}{\sqrt{3}}\sin 70^\circ$. **3.355.** $\frac{3}{2}$. **3.356.** $\frac{3}{16}$. **3.357.** $\frac{1}{4}$.

3.358. 1. **3.359.** 1. **3.360** 0. **3.361.** 1. **3.362.** $-\frac{85}{44}$. **3.363.** $-\frac{50}{7}$. **3.364.** $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{7}{\sqrt{130}}$, $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{9}{\sqrt{130}}$. **3.365.** $\frac{27}{7\sqrt{130}}$. **3.366.** $\frac{3n-n^3}{2}$. **3.367.** $-\frac{9}{4}$. **3.375.** 2 или $-\frac{1}{3}$. **3.376.** $\frac{1-m}{1+m}$. **3.377.** $\frac{m^2-1}{2}$. **3.378.** $\frac{p+q}{p-q}\operatorname{ctg}\alpha$. **3.379.** $\frac{1}{4}(1+6m^2-3m^4)$. **3.380.** $\sin 2\alpha=\frac{2pq}{p^2+q^2}$, $\cos 2\alpha=\frac{q^2-p^2}{p^2+q^2}$, $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2pq}{q^2-p^2}$.

3.381. а) $-\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{5}$. **3.382.** а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{3}{5}$. **3.383.** $\frac{q-p}{q+p}\operatorname{ctg}\alpha$. **3.390.** $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$. **3.392.** $\frac{1}{3}$. **3.394.** $\frac{7}{9}$.

3.410. $\frac{3}{4}\sin 8\alpha$. **3.411.** $2\sin^3 2\alpha$. **3.412.** $-\cos^2 2x$. **3.413.** $\frac{3}{4}\sin 4\alpha$. **3.414.** $\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin 2\alpha}$. **3.415.** $8\cos 16\alpha\cos^3 2\alpha$. **3.441.** $-\frac{a}{b}$. **3.442.** $-\frac{b}{a}$.

3.443. $-\frac{2\sqrt[4]{2}}{3}$. **3.444.** $-0{,}007$. **3.445.** $\frac{6}{25}$. **3.446.** $\frac{6}{25}$. **3.447.** $\frac{3\pi}{4}$. **3.448.** $-\frac{\pi}{4}$.

3.449. $\frac{1-a^2}{2a}$. **3.450.** 0,009. **3.451.** $\frac{1}{8}$. **3.452.** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. **3.453.** $\sqrt{10}-3$. **3.454.** 0,98.

3.455. $-\frac{119}{120}$. **3.456.** $\frac{1}{5}$. **3.457.** -2. **3.458.** $-\frac{24}{7}$. **3.459.** $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **3.460.** $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3.461. $\frac{2a}{b}$. **3.462.** $-\frac{1}{2}$. **3.463.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $3-2\sqrt{2}$. **3.465.** $\frac{2m}{1+m^2}$. **3.466.** $\frac{3m^2+1}{4}$.

3.467. $\frac{m(m^2+1)}{2}$. **3.468.** $2(1-m^2)$. **3.469.** $-\frac{38}{125}$. **3.476.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ при $\alpha=\frac{\pi}{16}$. **3.477.** 2 при $\alpha=\frac{\pi}{16}$. **3.481.** 2 при $\alpha=\frac{\pi}{8}$. **3.482.** $\frac{1}{2}$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **3.484.** $-\frac{76}{125}$. **3.485.** 4 при $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **3.486.** 2 при $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **3.487.** $\frac{41}{125}$. **3.490.** $\frac{1}{4}$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **3.491.** $\frac{1}{2}$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **3.493.** $\frac{\sin(n+1)2\alpha\cdot\cos 2n\alpha}{\sin 2\alpha}$.

ГЛАВА 4

ПРОГРЕССИИ

4.001. 9 колец. **4.002.** $\frac{119}{3}$. **4.003.** 21 раз. **4.004.** 1) 2; – 1; – 4; 2) –10; – 7; – 4. **4.005.** 7; 1) 1; 6; 11; 2) 7; 10; 13. **4.006.** За 8 ч. **4.007.** 3 и 4. **4.008.** 7; –14; 28; –56. **4.009.** $\frac{1}{8}$. **4.010.** 3; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$. **4.011.** $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1. **4.012.** 44. **4.013.** 120. **4.014.** 1; 9; 17. **4.015.** –20 100. **4.016.** 1) 7; –28; 112; –448; 2) $-11\frac{2}{3}$; $-46\frac{2}{3}$; $-186\frac{2}{3}$; $-746\frac{2}{3}$. **4.017.** 3; – 6; 12; – 24. **4.018.** 5. **4.019.** 1) 6 и 0,25; 2) – 6 и – 0,25. **4.020.** 5 и 405. **4.021.** 10; 5; 15 и 25. **4.022.** 1) 3 и 4; 2) 48 и 0,25. **4.023.** а) $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=-\frac{7}{9}$; б) $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=\frac{2}{3}$. **4.024.** 9 или 31. **4.025.** $\frac{3}{16}$ и $\frac{1}{4}$. **4.026.** 1; 2; 3; 4. **4.027.** 37,5 или 52,5. **4.028.** 6. **4.029.** 810. **4.030.** 0,2. **4.031.** 9. **4.032.** 4 и 5. **4.033.** 6; 3; 1,5; ... . **4.034.** 3; 9; 15. **4.035.** 4 и 12. **4.036.** 1) 3 и 2; 2) 12 и 0,5. **4.038.** Да; $n+m$. **4.039.** 14. **4.040.** 1) 1; 3; 9; 2) $\frac{1}{9}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{49}{9}$. **4.041.** 7. **4.042.** 82 350. **4.043.** 6 и – 0,5. **4.044.** 1) 3; 6; 12; 18; 2) 18,75; 11,25; 6,75; 2,25. **4.045.** 5103 или $\frac{7}{81}$. **4.046.** 1) 4; 8; 16; 2) $\frac{4}{25}$; $-\frac{16}{25}$; $\frac{64}{25}$. **4.047.** 2; 4; 8. **4.049.** $\frac{127}{8}$. **4.050.** 70 336.

4.051. $2n+\frac{(4^n-1)(4^{n+1}+1)}{3\cdot 4^n}$. **4.052.** $S=S_1S_2$. **4.055.** $\frac{S^2}{2S-1}$. **4.056.** 2. **4.061.** $x=7$. **4.062.** 1) $12+24+48+96$; 2) $4{,}5+13{,}5+40{,}5+121{,}5$. **4.063.** 7. **4.064.** 1) 3; 6; 12; 2) 27; 18; 12. **4.065.** $\frac{(a+b)S-2ab}{2S-(a+b)}S$. **4.066.** $3n$. **4.067.** $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$. **4.068.** -2. **4.069.** 931. **4.070.** 41. **4.071.** 1064. **4.072.** Меньше 2. **4.073.** $25\frac{25}{27}$. **4.075.** 101. **4.077.** 1) 2; -6; 18; -54; 2) -54; 18; -6; 2. **4.078.** $x=q^{1/d}$. **4.079.** $2^{n+1}(n-1)+2-0{,}5n(n+1)$. **4.080.** $3^{n+1}(n-1)+3$. **4.081.** $\left(\frac{S}{\sigma}\right)^{n/2}$. **4.082.** 9. **4.084.** 0. **4.085.** 12.

ГЛАВА 5

КОМБИНАТОРИКА И БИНОМ НЬЮТОНА

5.001. а) $x=4$; б) $x=7$. **5.002.** а) $x=5$; б) $x=5$. **5.003.** а) $x=5$; б) $x_1=6$; $x_2=11$. **5.004.** а) $x=8$; б) $x=7$. **5.005.** а) $x=5$; б) $x=7$. **5.008.** 240; третье слагаемое. **5.009.** $C_{10}^2a^2=45a^2$. **5.010.** При $\frac{15}{28}<x<\frac{10}{13}$. **5.011.** 924. **5.012.** $252ab$. **5.013.** $\frac{1547}{1024}$. **5.014.** При $x=4$. **5.015.** $A_{16}^2=240$. **5.016.** В пятую степень. **5.017.** $A_{11}^5=55\,440$ расписаний. **5.018.** $A_7^2=42$ способами. **5.019.** $C_{20}^3=1140$ способами. **5.020.** 968. **5.021.** $C_{10}^5+C_5^5=253$ способами. **5.022.** $\tilde{A}_8^2=64$ маршрута. **5.023.** $2C_{16}^2=240$ встреч. **5.024.** $\tilde{A}_5^3-1=124$ попытки. **5.025.** $A_{15}^4=32\,760$ способами. **5.026.** $A_{25}^5=\frac{25!}{20!}=6\,375\,000$ способами. **5.027.** 3136 способами. **5.028.** $16A_8^2=896$ расположений. **5.029.** $P_8=8!$ способами. **5.030.** $x=8; y=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. **5.031.** $x=10$. **5.032.** $x=7$. **5.033.** а) $x=5$; $y=7$; б) $x=5$; $y=3$. **5.034.** а) $x=8$; $y=3$; б) $x=7$; $y=3$. **5.035.** а) $x=7$; $y=3$; б) $x=7$; $y=3$. **5.037.** Шесть членов. **5.038.** 7290; третье слагаемое. **5.039.** $x_1=0{,}25\sqrt{2}$; $x_2=5\sqrt{5}$. **5.040.** $C_{10}^5=252$. **5.041.** $U_3=10z^2, V_4=20z^2$. **5.042.** Девять членов. **5.043.** При $x=2$. **5.044.** $C_{30}^{10}\cdot C_{20}^{10}\cdot C_{10}^{10}=\frac{30!}{(10!)^3}$ составов. **5.045.** $2A_4^3-A_3^2=42$ числа. **5.046.**

9! колец. **5.047.** $30! - 2 \cdot 29! = 28 \cdot 29!$ способами. **5.048.** $C_8^2 C_6^2 C_4^2 = 2520$ способами. **5.049.** $\frac{12!}{(2!)^6} = 7\,484\,400$ списков. **5.050.** $(A_6^4 - A_5^3) - (A_5^4 - A_4^3) = 204$ числа. **5.051.** $2 \cdot 9!$ вариантов. **5.052.** $\frac{C_{16}^2 C_{14}^2 C_{12}^2 \ldots C_2^2}{8!} = 2\,027\,025$ расписаний. **5.053.** $\tilde{A}_5^6 = 5^6$ способами; в $6 \cdot 4^5$ вариантах. **5.054.** 2^{10} способами. **5.055.** $\tilde{A}_{16}^{100} = 16^{100}$ способами. **5.056.** 40 чисел. **5.057.** $\frac{80!}{3!75!}$ способами. **5.058.** $\frac{10!}{48}$ способами. **5.059.** 3^6 способами; 6! вариантов. **5.060.** 2304 способами. **5.061.** 15 368 составов. **5.062.** $C_{15}^4 \cdot C_{10}^3 \cdot C_{12}^5 \cdot C_{20}^1 = \frac{15!10}{7!}$ способами. **5.063.** $\frac{28!}{(7!)^4}$ вариантов. **5.064.** 15 015 способами. **5.065.** $\tilde{A}_3^5 = 3^5$ способами. **5.066.** 10^8 способами. **5.067.** $\frac{16!}{2^6 \cdot 3^2}$ способами. **5.068.** 420 вариантов. **5.069.** 1800 чисел. **5.070.** 105 способами. **5.071.** 62 буквы. **5.072.** $\tilde{A}_{30}^3 \cdot \tilde{A}_{10}^4 = 9 \cdot 10^6$ номеров. **5.073.** 36 способами. **5.074.** 60 способами. **5.077.** $(n+1)! - 1$. **5.079.** 2^{36}. **5.080.** $T_9 = C_{20}^8 2^4 \cdot 5^6 = 314\,925 \cdot 10^5$. **5.081.** При $\frac{5}{8} < x < \frac{10}{21}$. **5.082.** 3003. **5.083.** $2(6!)^2$ способами. **5.084.** 2^{200} вариантов. **5.085.** 8^6 способами; в $8^6 - 13 \cdot 7^5$ случаях. **5.086.** $2(11!)^2$ способами. **5.088.** $A_{10}^3 C_9^2 C_7^3 = \frac{10!}{4}$ способами. **5.089.** 23 предложения. **5.090.** $2^8 \cdot 8!$ исходов.

ГЛАВА 6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

6.001. $x_1 = 5; x_2 = -\frac{55}{16}$. **6.002.** $x_1 = a+b$; $x_2 = 0{,}5(a+b)$. **6.003.** $x_1 = 1; x_2 = -5; x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}$. **6.004.** $x_{1,2} = \pm 2; x_{3,4} = \pm 0{,}5\sqrt[4]{24}$. **6.005.** $x_1 = 1; x_2 = -3$. **6.006.** $x_1 = \frac{m+n}{m-n}; x_2 = \frac{m-n}{m+n}$. **6.007.** $x_{1,2} = \pm a\sqrt{b}, x_{3,4} =$

$=\pm b\sqrt{a}$. **6.008.** $x=0$. **6.009.** $y_1=0$; $y_{2,3}=0{,}25(-9\pm\sqrt{5})a$. **6.010.** $x_1=1$; $x_2=-\sqrt[3]{6}$. **6.011.** $x_{1,2}=\pm2$; $x_{3,4}=\pm\frac{3\sqrt{21}}{7}$. **6.012.** $x=1$. **6.013.** $x_1=-1$; $x_2=3$; $x_3=\frac{1}{3}$. **6.014.** $x=0$. **6.015.** $x_1=0$; $x_2=5$; $x_3=\frac{38}{11}$. **6.016.** $x_1=2$; $x_2=0{,}5$. **6.017.** Если $n=p$, то x — любое число, кроме n; если $n\neq p$, то $x_{1,2}=\pm m$, $x_3=m+n+$ $+p$. **6.018.** $x_1=x_2=1$; $x_{3,4}=0{,}5(-3\pm\sqrt{5})$. **6.019.** $x_1=1$; $x_2=3$. **6.020.** Если $a\neq b$, то $x_1=2b-a$; $x_2=2a-b$; если $a=b$, то корней нет. **6.021.** $x_1=-2$; $x_2=-0{,}125$. **6.022.** $x_1=1$; $x_2=-5$. **6.023.** $x_1=0$; $x_{2,3}=-3\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **6.024.** $x_1=2$; $x_2=0{,}5$; $x_{3,4}=0{,}25(-11\pm\sqrt{105})$. **6.025.** Если $a=b$, то x — любое число; если $a\neq b$, то $x_1=0$; $x_2=a+b$. **6.026.** $x_1=a+1$; $x_2=\frac{a+1}{a}$. **6.027.** Если $a\neq0$, то $x_1=3a$; $x_2=-2a$; если $a=0$, то корней нет. **6.028.** Если $b\neq0$, то $x_1=a+b$; $x_2=\frac{a^2-b^2}{2b}$; если $b=0$, то $x=a$. **6.029.** $x_1=a$; $x_2=\frac{1-a^2}{a}$. **6.030.** $x_{1,2}=\pm3$. **6.031.** $x=4$. **6.032.** $x=5$. **6.033.** $x=-1$. **6.034.** $x=7$. **6.035.** $x_1=a$; $x_2=\frac{4a-b}{3}$. **6.036.** $x_1=-1$; $x_2=3$. **6.037.** $x=0$. **6.038.** $x=3$. **6.039.** $x=\frac{5}{3}$. **6.040.** $x=9$. **6.041.** $x_1=-61$; $x_2=30$. **6.042.** $x_1=-5$; $x_2=2$. **6.043.** $x_{1,2}=\pm7$. **6.044.** $x_1=6$; $x_2=-0{,}4\,(1+\sqrt[3]{4})$. **6.045.** $x_{1,2}=\pm2\sqrt{2}$. **6.046.** $x_{1,2}=\pm2\sqrt{2}$. **6.047.** $x_{1,2}=\pm4$. **6.048.** $x_1=8$; $x_2=27$. **6.049.** $x=2$. **6.050.** $x_1=3$; $x_2=5$. **6.051.** $x_1=8$; $x_2=7$. **6.052.** $x=4$. **6.053.** $x=8$. **6.054.** $x=64$. **6.055.** $x=1024$. **6.056.** $x_{1,2}=\pm4$. **6.057.** $x_{1,2}=\pm1$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$. **6.058.** $x=1$. **6.059.** $z_1=2$; $z_2=-\frac{1}{511}$. **6.060.** $x_1=4$, $x_2=-3$. **6.061.** $x=64$. **6.062.** $x_{1,2}=\pm1$. **6.063.** $x=64$. **6.064.** $x=-2$. **6.065.** $x=2$. **6.066.** $x_1=6$; $x_2=-2$. **6.067.** (0,6; 0,3); (0,4; 0,5). **6.068.** (–1; 2); (2; –1). **6.069.** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. **6.070.** (2; 3); (3; 2). **6.071.** (2; 1); (– 1; – 2). **6.072.** (4; 3); (4; – 3). **6.073.** (7; 3); (– 7; – 3). **6.074.** (4; 1); $\left(\frac{10}{3};\frac{2}{3}\right)$. **6.075.** (1; 2); (2; 1). **6.076.** (1; 2). **6.077.** (1; 3); (– 1; – 3); (3; 1); (– 3; – 1). **6.078.** (2; 3); (3; 2). **6.079.** (1; 2); (2; 1).

6.080. (3; 2); (– 3; – 2). **6.081.** (4; 1); (1; 4). **6.082.** (2; 1); (2; – 1); $(1;\sqrt{2})$; $(1;-\sqrt{2})$.

6.083. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right);\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3}\right);\left(-\frac{5}{24};-\frac{7}{24}\right);\left(-\frac{3}{8};-\frac{1}{8}\right)$. **6.084.** (2; 6); (1; 3). **6.085.** (2; 4); (4; 2). **6.086.** (4; 1); (1; 4). **6.087.** (2; 1); (– 2; – 1). **6.088.** (3; 2); (– 3; – 2). **6.089.** $(\sqrt[3]{m};-1)$; $(-1;\sqrt[3]{m})$ **6.090.** Если $ab=0$, то решений нет; если $ab\neq 0$, то $x=\frac{1}{a}$, $y=b$. **6.091.** (5; 3). **6.092.** (–4; –4); (–6; –2). **6.093.** (2; 3; 4). **6.094.** (5; 1); (– 5; – 1). **6.095.** (1; 2; 3). **6.096.** (0,5; 4). **6.097.** (2; – 1; 1). **6.098.** (2; – 1); (– 1; 2). **6.099.** (1; 9); (9; 1). **6.100.** (41; 40). **6.101.** (12; 4); (34; – 30). **6.102.** (3; 1). **6.103.** (1; 4). **6.104.** (1; 64); (64; 1). **6.105.** (2; 1); (1; 2); (– 1; – 2); (– 2; – 1). **6.106.** (1; 4); (4; 1); $(2+\sqrt{3};2-\sqrt{3})$; $(2-\sqrt{3};2+\sqrt{3})$. **6.107.** (1; 9); (9; 1). **6.108.** (5; 4). **6.109.** (1; 27); (27; 1). **6.110.** (41; 40). **6.111.** (4; 1); (1; 4). **6.112.** (1; 81); (81; 1). **6.113.** Если $a\neq 0$, то $x_1=0$, $y_1=a$; $x_2=2-a$, $y_2=2$; если $a=0$, то $x=y=2$. **6.114.** (0,5; 8). **6.115.** (1; 8); (8; 1). **6.116.** (16; 1). **6.117.** $(9a^2;\ a^2)$. **6.118.** (124; 76). **6.119.** (4; 1). **6.120.** $\frac{b^2-2ac}{c^2}$. **6.121.** $cx^2+bx+a=0$. **6.122.** $a^2x^2+(ab-ac)x-bc=0$. **6.123.** $ax^2+(b-2a)x+(c-b+a)=0$. **6.124.** $p=0$, $q=0$; $p=1$, $q=-2$. **6.125.** $A_1=1$, $B_1=-2$; $A_2=0$, $B_2=0$. **6.126.** При $k=2$. **6.127.** При $p=3$; $x=1$. **6.128.** $a=1$ и $a=0{,}5$. **6.129.** При $a=-6$. **6.130.** $c=-15$. **6.131.** При $a=4$. **6.132.** При $p_1=-6$, $p_2=6$. **6.133.** $\frac{215}{27}$. **6.134.** При $b=2$. **6.135.** При $c=\frac{1}{3}$. **6.136.** $x=1$. **6.137.** $x_1=1$; $x_{2,3}=-2\pm\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **6.138.** $x_1=x_2=3$; $x_{3,4}=3\pm 2\sqrt{5}$. **6.139.** $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm 1$. **6.140.** $z_1=0$; $z_2=1$. **6.141.** $x_1=0$; $x_2=-2$; $x_{3,4}=0{,}5(-2\pm\sqrt{66})$. **6.142.** $x_1=a$; $x_2=b$; $x_3=c$. **6.143.** $x_1=1$; $x_2=-3$. **6.144.** $x_1=2$; $x_2=-4$. **6.145.** $x=1$. **6.146.** $x=0$. **6.147.** $x_1=0$; $x_2=-3$; $x_{3,4}=0{,}5(-3\pm\sqrt{73})$. **6.148.** $x_{1,2}=\pm 1$; $x_3=-2$; $x_4=0{,}5$. **6.149.** $x_1=x_2=-1$. **6.150.** $u_1=1$; $u_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$. **6.151.** Если $m=1$, то x — любое число, кроме ± 1, ± 2; если $m\neq 1$, то корней нет. **6.152.** Корней нет. **6.153.** Если $a=0$, то x — любое число; если $a\neq 0$, то $x_{1,2}=\pm a$. **6.154.** $x_1=0$; $x_2=-2$. **6.155.** Если $a=0$, то $x=0$; если $a\neq 0$, то $x_1=\frac{1}{a}$; $x_2=-\sqrt[3]{a}$. **6.156.** $x_1=3$; $x_2=\frac{2}{3}$. **6.157.** $x_1=2a-1$; $x_2=2-a$. **6.158.** $x=0$. **6.159.** $x=2$. **6.160.** $x=12$. **6.161.** $x_1=1$; $x_2=4$. **6.162.** $x_1=\frac{b+128}{a}$;

$x_2 = \frac{128b+1}{128a}$. **6.163.** $x_1 = 0$; $x_2 = 4$. **6.164.** $x = 2$. **6.165.** $x_1 = 0$; $x_2 = -5$, **6.166.** $x_1 = 2$; $x_2 = -7$. **6.167.** $x_1 = 0$; $x_2 = -1$. **6.168.** $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. **6.169.** $x = 1$. **6.170.** $x = 5$. **6.171.** $x_1 = 8$; $x_{2,3} = 8 \pm \frac{12\sqrt{21}}{7}$. **6.172.** $x_{1,2} = \pm 1$. **6.173.** $x = 0$. **6.174.** $z = -\frac{4}{3}$. **6.175.** $x_1 = 1$; $x_2 = 1{,}5$; $x_3 = 2$. **6.176.** $x = 0$. **6.177.** $x = 1$. **6.178.** $x_1 = \frac{4b-a}{3}$; $x_2 = \frac{4a-b}{3}$; если $a = b$, то корней нет. **6.179.** $x \in [0,\ 1]$. **6.180.** $x_1 = 10$; $x_2 = -20{,}5$. **6.181.** $x = -(a+1)$. **6.182.** $x_1 = -1$; $x_2 = 2$. **6.183.** (2; 3); (3;2); $\left(\frac{-7+\sqrt{73}}{2}; \frac{-7-\sqrt{73}}{2}\right)$; $\left(\frac{-7-\sqrt{73}}{2}; \frac{-7+\sqrt{73}}{2}\right)$. **6.184.** (2; 1); (– 2; – 1). **6.185.** (3; 2); (–3; –2); $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$. **6.186.** $x = \frac{k(k-c)(k-b)}{a(a-c)(a-b)}$, $y = \frac{k(k-c)(k-a)}{b(b-c)(b-a)}$, $z = \frac{k(k-a)(k-b)}{c(c-a)(c-b)}$. **6.187.** (1; 4); (4; 1). **6.188.** $x = abc$, $y = ab + {}$ $+ bc + ca$, $z = a + b + c$. **6.189.** (2; 1); (– 1; – 2). **6.190.** $\left(\frac{\sqrt{abc}}{b}; \frac{\sqrt{abc}}{c}; \frac{\sqrt{abc}}{a}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{abc}}{b}; -\frac{\sqrt{abc}}{c}; -\frac{\sqrt{abc}}{a}\right)$. **6.191.** (2; 2); (–3; – 3); $\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}; \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$; $\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$. **6.192.** (3; 1); (3; – 1); $\left(-\frac{5}{3}; \frac{\sqrt{65}}{3}\right)$; $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{\sqrt{65}}{3}\right)$. **6.193.** (1; 1; 1); (– 2; – 2; – 2). **6.194.** (5; 3); (– 5; – 3). **6.195.** (1; 2); $\left(-\frac{239}{146}; \frac{117}{146}\right)$. **6.196.** (3; 5); (5; 3). **6.197.** (2; 2); (– 2; – 2); (2; – 2); (– 2; 2). **6.198.** Если $ab + 1 = 0$, то $y = {}$ $= \pm\sqrt{x^2+1}$, x — любое; если $ab + 1 \neq 0$, то $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $y_1 = \frac{a-b}{2}$; $x_2 = \frac{a+b}{2ab}$, $y_2 = \frac{a-b}{2ab}$. **6.199.** (3; 0; 5). **6.200.** (3; 2); (1; 4); (– 3; – 4); (– 5; – 2). **6.201.** (2; – 3). **6.202.** (1; 1; 1). **6.203.** (0; 0; 0); ($a - b$; $b - c$; $c - a$). **6.204.** (2; 1); (6; – 3); $(6+2\sqrt{3}; -2-2\sqrt{3})$; $(6-2\sqrt{3}; -2+2\sqrt{3})$. **6.205.** (3; 1); (– 3; – 1); $\Big(\frac{14\sqrt{106}}{53};$

$\left.\frac{4\sqrt{106}}{53}\right);\left(-\frac{14\sqrt{106}}{53};-\frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$. **6.206.** (1; 3); (3; 1). **6.207.** (1; 2; 3); (1; 4; 1); (5; 2; – 1); (5; 4; – 3). **6.208.** (a; $2a$); ($2a$; a). **6.209.** (3; –2); (– 2; 3). **6.210.** (2; 1); (1; 2); (– 2; 1); (1; – 2); (2; – 1); (– 1; 2); (– 2; – 1); (– 1; – 2). **6.211.** (2; 3); (– 2; – 3). **6.212.** (1; 3; 5); (– 1; – 3; – 5). **6.213.** (2; 1); (1; 2); (– 2; 1); (1; – 2); (2; – 1); (– 1; 2); (–2; –1); (–1; –2). **6.214.** (0; 0; 0); (2; – 1; – 1). **6.215.** (2; – 5). **6.216.** (4; 4); (– 5; – 5); $\left(\frac{1+\sqrt{77}}{2};\frac{1-\sqrt{77}}{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{77}}{2};\frac{1+\sqrt{77}}{2}\right)$. **6.217.** (1; 3); (3; 1); (– 1; – 3); (– 3; – 1).

6.218. (a; $2a$); ($2a$; a). **6.219.** (1; 1; 1); (7; – 3; – 1). **6.220.** (4; 2); (– 4; – 2). **6.221.** (3; – 2; 1); (– 1; 0; 3). **6.222.** (11; 1). **6.223.** (2; – 2). **6.224.** (3; – 2; 6). **6.225.** (1; 16); (16; 1). **6.226.** (1; 1). **6.227.** (– 4; 5; 3). **6.228.** (9; 4); (4; 9). **6.229.** (49; 49). **6.230.** (2; 3); $\left(\frac{13}{3};-\frac{5}{3}\right)$. **6.231.** (5; 4); (– 9; 25). **6.232.** (5; 4). **6.233.** (2; – 1). **6.234.** (64; 1); (1; 64). **6.235.** (1; 7); $\left(\frac{49}{64};\frac{41}{8}\right)$; (7; – 8). **6.236.** $(\sqrt{10};\sqrt{6})$; $(\sqrt{10};-\sqrt{6})$. **6.237.** (4; 1); $\left(\frac{121}{64};\frac{169}{64}\right)$. **6.238.** (1; 2); (– 1; – 2). **6.239.** $\left(\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right)$; (– 1; – 1); (1; 1); $\left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)$.

6.240. (4; 1); (1; 4); (– 4; – 1); (– 1; – 4); **6.241.** (5; 4); (5; – 4); $(-\sqrt{28{,}5};-\sqrt{12{,}5})$; $(-\sqrt{28{,}5};\sqrt{12{,}5})$. **6.242.** (3; 1,5); (6; 3). **6.243.** (10; 1); $\left(-\frac{21}{2};\frac{53}{12}\right)$. **6.244.** $x_1=0$; $x_2=-10$. **6.245.** $m=0$, $n=0$; $m=1$, $n=-1$; $m=0{,}5$, $n=0$. **6.246.** $ax^2+bx+(c+$ $+\sqrt{b^2-4ac}-a)=0$. **6.247.** При $m=3$ и $m=-2$; $z_1=-1$; $z_2=-3$; $z_3=4$. **6.250.** При $a=-2$. **6.251.** При $p>2$; $x_1=p+2$; $x_2=0{,}2(2-p)$. **6.252.** $p=1$, $q=-6$ и $p=$ $=-1$, $q=-6$. **6.253.** $x^2+(4q-2p^2)x+(p^4-4p^2q)=0$. **6.254.** $21x^2-23x+6=$ $=0$. **6.256.** $x_1=-3$; $x_2=-5$. **6.257.** $u_1=1$; $u_2=a+b$; $u_3=a-b$. **6.258.** $x_1=1$; $x_2=a$; $x_3=1-a$. **6.259.** $x_1=-1$; $x_2=a$; $x_3=2a$. **6.260.** $x_1=-1$; $x_2=0$; $x_3=-2$. **6.261.** $x_1=1$; $x_{2,3}=a\pm\sqrt{a}$. **6.262.** $x=1$. **6.263.** $x_1=4$; $x_2=2$. **6.264.** $x_1=-1$; $x_2=2$. **6.265.** $x_1=1$; $x_{2,3}=a\pm\sqrt{m}$. **6.266.** $x_1=a$; $x_{2,3}=a\pm\sqrt{b}$. **6.267.** $x_1=-3$; $x_2=$ $=p+1$; $x_3=-p+2$. **6.268.** $z_1=-1$; $z_{2,3}=-p\pm\sqrt{q}$. **6.269.** $x_1=2\sqrt{3}$; $x_2=x_3=$ $=a-\sqrt{3}$. **6.270.** $x=-0{,}5$. **6.271.** $x_1=2$; $x_2=4$; $x_3=-1$; $x_4=-0{,}5$. **6.272.** $x_1=x_2=\frac{2}{3}$; $x_3=-\frac{5}{3}$. **6.273.** $x_{1,2}=\pm0{,}5$; $x_{3,4}=2\pm\sqrt{3}$. **6.274.** $x_{1,2}=1\pm\sqrt{19}$. **6.275.** $x=0$. **6.276.** $x_1=1$; $x_2=4$. **6.277.** $x=1$. **6.278.** $x=3$. **6.279.** $x=8$. **6.280.**

$x = 0$. **6.281.** $x_1 = -6$; $x_2 = -5{,}5$; $x_3 = -5$. **6.282.** $u = 2$. **6.283.** $x = 32$. **6.284.** $x_1 = 12{,}6$; $x_2 = -3{,}4$. **6.285.** $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. **6.286.** $x = 1$. **6.287.** $x = 64$. **6.288.** $x = 5$. **6.289.** $x_1 = 1; x_2 = 2\sqrt[3]{4}$; $x_3 = -3\sqrt[3]{9}$. **6.290.** $x = 5$. **6.291.** $x = 4$. **6.292.** $x_{1,2} = \pm 1$. **6.293.** $x_{1,2} = \pm 1$. **6.294.** $x_1 = 1; x_2 = -6$. **6.295.** $x_{1,2} = \pm 1$. **6.296.** $x_1 = 7; x_2 = 26$. **6.297.** $x = 31$. **6.298.** $x_1 = 7; x_2 = 14$; $x_{3,4} = \dfrac{21}{2} \pm \dfrac{7\sqrt{141}}{12}$. **6.299.** $x = 79$. **6.300.** $x = 3$. **6.301.** $x_1 = \dfrac{190}{63}$; $x_2 = \dfrac{2185}{728}$. **6.302.** $x = 2$. **6.303.** $(3;\ -1)$; $(1;\ -3)$. **6.304.** $(a;\ b;\ c)$. **6.305.** $x = 2,\ u = 1,\ v = 2,\ w = 3$. **6.306.** $(0;\ 0;\ 0)$; $(-1;\ 1;\ 1)$. **6.307.** $(1;\ 1;\ 1)$. **6.308.** $(1;\ 2;\ 3)$; $(-1;\ -2;\ -3)$. **6.309.** $(1;\ -1;\ 2)$; $(1;\ 2;\ -1)$; $(-1;\ 1;\ 2)$; $(-1;\ 2;\ 1)$; $(2;\ 1;\ -1)$; $(2;\ -1;\ 1)$. **6.310.** $(2;\ 1)$; $(1;\ 2)$; $(-2;\ -1)$; $(-1;\ -2)$; $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5};\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)$; $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{10};\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$; $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5};-\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)$; $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{10};-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$. **6.311.** $(2;\ -1)$; $(-1;\ 2)$; $(-2;\ 1)$; $(1;\ -2)$. **6.312.** $(1;\ -2;\ 3)$; $(1;\ -3;\ 2)$; $(2;\ -1;\ 3)$; $(2;\ -3;\ 1)$; $(3;\ -1;\ 2)$; $(3;\ -2;\ 1)$. **6.313.** $(2;\ 1)$; $\left(\dfrac{19\sqrt[3]{4}}{4};-\dfrac{17\sqrt[3]{4}}{4}\right)$. **6.314.** $(2;\ 2;\ 2)$. **6.315.** $(1;\ 1)$. **6.316.** $(a+1;\ a;\ a-1)$; $(-a-1;\ -a;\ 1-a)$. **6.317.** $(3;-2;2)$; $\left(\dfrac{9+3\sqrt{5}}{2};\dfrac{-7-3\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-3\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2};\dfrac{-7+3\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}\right)$. **6.318.** $(3;\ 1)$; $(1;\ 3)$; $(-1;\ -3)$; $(-3;\ -1)$. **6.319.** $(-2;\ 3)$; $(3;\ -2)$. **6.320.** $(1;\ 2)$; $(2;\ 1)$. **6.321.** $(2;\ 1)$; $(-2;\ -1)$. **6.322.** $(2;\ 1)$. **6.323.** $(1;\ 2)$. **6.324.** $(6;\ 9)$; $(9;\ 6)$. **6.325.** $(4;\ 4;\ -4)$. **6.326.** $(0;\ 0)$; $(-1;\ -2)$; $(-2;\ -1)$; $\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$; $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. **6.327.** Решений нет. **6.328.** $(0;\ 0)$; $(2;\ 4)$; $(4;\ 2)$. **6.329.** $(1;\ 64)$; $(64;\ 1)$. **6.330.** Если $a \neq b$, то $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $y_1 = \dfrac{1}{3}$; $x_2 = -\dfrac{4}{3}$, $y_2 = -\dfrac{4}{3}$; если $a = b \neq 0$, то система имеет бесконечное множество решений, представляющих собой координаты точек прямых $x - 4y = -1$ и $4x - y = -4$. **6.331.** $\left(\dfrac{17}{12};\dfrac{5}{3}\right)$. **6.332.** $(1;\ 1;\ 1)$. **6.333.** $(2;\ 3)$; $(-2;\ -3)$; $(2;\ -3)$; $(-2;\ 3)$. **6.334.** $(0;\ 0)$. **6.335.** $(26;\ 10)$; $(650;\ -646)$. **6.336.** $\left(\dfrac{25}{3};\dfrac{16}{3}\right)$. **6.337.** $(5;\ 4;\ 5)$. **6.338.** $(4;\ 4)$; $(4{,}5;\ 3{,}5)$. **6.339.** $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4};-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$; $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4};\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$. **6.340.** $(5;\ 3)$; $(5;\ 4)$. **6.341.**

$\left(\frac{8\sqrt{26}}{13}; \frac{27\sqrt{26}}{13}\right)$; $\left(-\frac{8\sqrt{26}}{13}; -\frac{27\sqrt{26}}{13}\right)$; $\left(\frac{8\sqrt{26}}{13}; -\frac{27\sqrt{26}}{13}\right)$; $\left(-\frac{8\sqrt{26}}{13}; \frac{27\sqrt{26}}{13}\right)$.

6.342. $S_{n+2} = -\frac{bS_{n+1} + cS_n}{a}$. **6.343.** 1) $x^3 - qx^2 + prx - r^2 = 0$; 2) $x = \sqrt{2}$. **6.344.** $a = -52, b = -40$. **6.345.** $p = -60, q = 36$. **6.346.** ab. **6.348.** $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$; $x_3 = \frac{1}{2}$. **6.349.** $x = \frac{1}{2}$ — общий корень; первое уравнение не имеет других корней, второе имеет корни $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. **6.350.** $x^3 - (p^2 - q)x^2 + (p^2q - q^2)x - q^3 = 0$. **6.351.** $x_1 = 10, x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$ и $x = 5$. **6.352.** $x_1 = -2$, $x_2 = 3, x_{3,4} = \pm 4$ и $x = -2$. **6.353.** $x = 1 + \lambda^{-1}$, где λ — действительное число, $\lambda \neq 0$. **6.354.** $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = -2{,}5$. **6.355.** $n = 17$. **6.356.** $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$; $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$. **6.357.** $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_3 = -2\sqrt{3}$. **6.358.** $x = 5$ и $x_1 = 10, x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$. **6.359.** $x_1 = -\frac{b}{a}$; $x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{d}{b}}$ при условии $bd < 0$. **6.361.** $x = -q$. **6.363.** $x_1 = \frac{1}{8}; x_2 = -\frac{1}{4}$; $x_3 = \frac{1}{2}$. **6.364.** $x_1 = 1{,}5$; $x_{2,3} = 0{,}5 \pm \sqrt{3}$. **6.365.** $x_1 = a$; $x_2 = a^{-1}$; $x_3 = 0{,}5$. **6.366.** $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. **6.368.** $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. **6.369.** $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$; $x_3 = 0{,}5$. **6.370.** $x = 2$.

ГЛАВА 7

ЛОГАРИФМЫ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

7.001. 10. **7.002.** 890. **7.003.** 3. **7.004.** 2. **7.005.** –11. **7.006.** 24. **7.007.** 19. **7.008.** 1. **7.009.** 8. **7.010.** $a^2 + a + 1$, где $a > 0$ и $a \neq 0{,}5(1 + \sqrt{5})$. **7.011.** $\log_a \sqrt{a^2 - 1}$, где $a > 1$ и $a \neq \sqrt{2}$. **7.012.** $ab\,(a - b)^2$, где $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$. **7.013.** $1 + a$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. **7.014.** $\log_a b$, где $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ и $ab \neq 1$. **7.015.** $\log_a b$, где $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ и $b \neq a$. **7.016.** $\frac{1}{b}$. **7.018.** 5. **7.019.** $z \geq 2$. **7.020.** $x = 0{,}5$. **7.021.** $x = 2$. **7.022.** $x_1 = 3$; $x_2 = 81$. **7.023.** $x = -1{,}25$. **7.024.** $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 10$. **7.025.** $x = -2$. **7.026.** $x = 13$. **7.027.** $x = 0{,}5$. **7.028.** $x = 0$. **7.029.** $x = 5$.

7.030. $x_1 = -1$; $x_2 = 5$. **7.031.** $x = 3$. **7.032.** $x = 1$. **7.033.** $x_1 = 0{,}01$; $x_2 = 0{,}1$; $x_3 = 10$; $x_4 = 100$. **7.034.** $x = 3$. **7.035.** $x = 1$. **7.036.** $x_{1,2} = \pm 3$. **7.037.** $x_{1,2} = \pm 1$. **7.038.** $x_1 = 5$; $x_2 = 15$. **7.039.** $x = 7$. **7.040.** $x_{1,2} = \pm 3$. **7.041.** $x_1 = 2$; $x_2 = 11$. **7.042.** $x = 1$. **7.043.** $x_1 = 2$; $x_2 = -6$. **7.044.** $x_1 = \frac{1}{9}$; $x_2 = 3$. **7.045.** $x = 37$. **7.046.** $x = 4 - \sqrt{11}$. **7.047.** $n = 3$. **7.048.** $x = 54$. **7.049.** $x_1 = 2$; $x_2 = 3$. **7.050.** $x = 6$. **7.051.** $x = 29$. **7.052.** $x_1 = \frac{1}{128}$; $x_2 = 2$. **7.053.** $x = 10$. **7.054.** $x = 64$. **7.055.** $x = 2$. **7.056.** $x = 100$. **7.057.** $x = -3$. **7.058.** $x = 5{,}5$. **7.059.** $x = 81$. **7.060.** $x_1 = -0{,}2$; $x_2 = 3$. **7.061.** $x = 25$. **7.062.** $x = \frac{5}{3}$. **7.063.** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. **7.064.** $x_1 = -2{,}5$; $x_2 = 3$. **7.065.** $x = 2{,}25$. **7.066.** $x = 4$. **7.067.** $x_1 = -7$; $x_2 = 8$. **7.068.** $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$. **7.069.** $x = 2$. **7.070.** $x_1 = 1$; $x_2 = 3$. **7.071.** $x = 0$. **7.072.** $x_{1,2} = \pm 0{,}5$. **7.073.** $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$. **7.074.** $x = 3$. **7.075.** $x = 20$. **7.076.** $x = 9$. **7.077.** $x_1 = -1$; $x_2 = 9$. **7.078.** $x_1 = 3$; $x_2 = 3\log_6 2$. **7.079.** $x_1 = \frac{1}{27}$; $x_2 = 9$. **7.080.** $x = 10$. **7.081.** $x_1 = 5$; $x_2 = 25$. **7.082.** $x_1 = 10^{-5}$; $x_2 = 10^3$. **7.083.** $x_1 = 2$; $x_2 = 64$. **7.084.** $x = 3$. **7.085.** $x_{1,2} = \pm 1$. **7.086.** $x_1 = 100$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$. **7.087.** $x_1 = -3$; $x_2 = 1$. **7.088.** $x = \sqrt[3]{2}$. **7.089.** $x_1 = 0$; $x_2 = 2$. **7.090.** $x_1 = 1$; $x_2 = 100$. **7.091.** $x = 1$. **7.092.** $x_1 = 3$; $x_2 = 3 + \sqrt{2}$. **7.093.** $x_1 = \frac{1}{9}$; $x_2 = 9$. **7.094.** $x = 5$. **7.095.** $x_1 = \sqrt[9]{a}$; $x_2 = a^9$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. **7.096.** $x_1 = -1$; $x_2 = 7$. **7.097.** $x_1 = 0$; $x_2 = 6$. **7.098.** $x = 5$. **7.099.** $x = 0$. **7.100.** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. **7.101.** $x = 10$. **7.102.** $x = 5 - \sqrt{11}$. **7.103.** $x = 10$. **7.104.** $x = 5$. **7.105.** $y = 5$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. **7.106.** $x_1 = \sqrt[4]{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$. **7.107.** $x_1 = \sqrt[3]{2}$; $x_2 = 4$. **7.108.** $x_1 = \frac{33}{8}$; $x_2 = \frac{17}{4}$; $x_3 = 8$; $x_4 = 12$. **7.109.** $x = 1$. **7.110.** $x = 0$. **7.111.** $x = 9$. **7.112.** $x = 10$. **7.113.** $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 1000$. **7.114.** $x = -10$. **7.115.** $x_1 = 10^{-4{,}5}$; $x_2 = 10$. **7.116.** $x_1 = 2$; $x_2 = 8$. **7.117.** $x = 9$. **7.118.** $x = 7$. **7.119.** $x = 2$. **7.120.** $x_1 = 3$; $x_2 = 10$. **7.121.** $x = 2$. **7.122.** $x_1 = 0$; $x_2 = 25$. **7.123.** $x_1 = 7$; $x_2 = 8$. **7.124.** $x_1 = 2$; $x_2 = 4$. **7.125.** $x_1 = 3$; $x_2 = 27^3$. **7.126.** $x = \sqrt{3}$. **7.127.** $x = -2$. **7.128.** (5; 5). **7.129.** (4,5; 0,5). **7.130.** (4; 2); (4; –2). **7.131.** (2; 18); (18; 2). **7.132.** (1; 2); (16; –28). **7.133.** (3; 9); (9; 3). **7.134.** (3; 2). **7.135.** (6; 8); (8; 6). **7.136.** (25; 36). **7.137.** (4; 2). **7.138.** (5; 1); (5; –1). **7.139.** (3; –3). **7.140.** (0,5; –1,5). **7.141.** (4; 2). **7.142.** (4; 16). **7.143.** (3; 3); (5; 1). **7.144.** (1; 1). **7.145.** (16; 3); $\left(\frac{1}{64}; -2\right)$. **7.146.** (3; 27). **7.147.** $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. **7.148.** (9; 16).

7.149. (5; 1). **7.150.** $a+b$, где $a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1$ и $ab\neq 1$. **7.151.** 0, если $\begin{cases}0<a<1,\\0<b<1\end{cases}$ или $\begin{cases}a>1,\\b>1;\end{cases}$ $-2(\log_b a+\log_a b)$, если $\begin{cases}a>1,\\0<b<1\end{cases}$ или $\begin{cases}0<a<1,\\b>1.\end{cases}$ **7.152.** $(1+\log_2 x)^3$, где $x>1$. **7.153.** $x+1$, где $x>0$ и $x\neq 1$. **7.154.** $\log_a b$, где $a>0$, $a\neq 1, b>0, b\neq 1, a\neq b^4$ и $a\neq b^6$. **7.155.** $3-2\log_a b$, если $0<b<a^3$, $b\neq 1$; -3, если $b\geq a^3$. **7.156.** $\dfrac{1}{\log_a b-1}$, где $a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1$ и $ab\neq 1$. **7.157.** $\dfrac{1}{\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1}+\delta^{-1}}$. **7.158.** $\alpha=10^{\frac{1}{1-\lg\gamma}}$. **7.160.** 0. **7.161.** $\dfrac{3(1-a)}{b+1}$. **7.163.** $a(b+3)$. **7.165.** $x=-0{,}5$. **7.166.** $x=25$. **7.167.** $x=\dfrac{1}{25}$. **7.168.** $x=\dfrac{1}{12}$. **7.169.** $\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$. **7.170.** $x_1=0; x_2=\dfrac{16}{9}$. **7.171.** $x_1=1; x_2=\dfrac{1}{16}$. **7.172.** $x_1=-64; x_2=-1$. **7.173.** $x=-100$. **7.174.** $x_1=\dfrac{1}{9}; x_2=9$. **7.175.** $x_1=-1; x_2=3$. **7.176.** $x=5$. **7.177.** $x=0$. **7.178.** $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **7.179.** $x=2$. **7.180.** $x_1=0{,}1; x_{2,3}=10^{0,5(1\pm\sqrt{3})}$. **7.181.** $x_1=\dfrac{1}{3}; x_2=9$. **7.182.** $x=a$, где $a>0$ и $a\neq 1$. **7.183.** $x=0{,}75$. **7.184.** $x=a^6$, где $a>0$ и $a\neq 1$. **7.185.** $x_1=\sqrt[5]{7}; x_2=7$. **7.186.** $x=3$. **7.187.** $x=2$. **7.188.** $x_1=\dfrac{1}{25}$; $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $x_3=\sqrt{5}$; $x_4=25$. **7.189.** $x=m$, где $m>0$ и $m\neq 1$. **7.190.** $x=\dfrac{16}{3}$. **7.191.** $x=\sqrt[10]{10}$. **7.192.** $x_1=\dfrac{1}{8}; x_2=8$. **7.193.** $x=\sqrt{3}$. **7.194.** $x_1=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$; $x_2=8$. **7.195.** $x_1=\dfrac{1}{625}; x_2=5$. **7.196.** $x=\sqrt{3}$. **7.197.** $x=9$. **7.198.** $x=25$. **7.199.** $x_{1,2}=\pm 5$. **7.200.** $x=6$. **7.201.** $x=17$. **7.202.** $x_1=\sqrt{3}$; $x_2=3$. **7.203.** $x_1=\dfrac{1}{4\sqrt[5]{8}}; x_2=1; x_3=4$. **7.204.** $x_1=2; x_2=4$; $x_3=11$. **7.205.** $x_1=\dfrac{1}{3}; x_2=2; x_3=4$. **7.206.** $x_1=-0{,}2$; $x_2=0{,}5$; $x_3=1; x_4=3$. **7.207.** $x=a$, где $a>0$ и $a\neq 1$. **7.208.** $x=4$. **7.209.** $x=3$. **7.210.** $x_1=1$; $x_2=3$. **7.211.** $x=\dfrac{1}{3}$. **7.212.** $x=4$. **7.213.** $x_1=\dfrac{1}{9}; x_2=9$. **7.214.** $x=0$. **7.215.** $x=2{,}5$. **7.216.** $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$. **7.217.** $z_{1,2}=\pm 2$. **7.218.** $x=2$. **7.219.**

$x=1$. **7.220.** $x=-2$. **7.221.** $x=0{,}01$. **7.222.** $x_1=0; x_2=0{,}5$. **7.223.** $x=\frac{1}{3}$. **7.224.** $x_1=1;$ $x_2=\log_2(3+\sqrt{29})-1$. **7.225.** $x=2$. **7.226.** $x_1=\frac{1}{3}; x_2=3$. **7.227.** $x=5$. **7.228.** $x=100$. **7.229.** $x=0$. **7.230.** $x=1$. **7.231.** $x=16$. **7.232.** $x_1=2^{-1/3}; x_2=4$. **7.233.** $x_1=\frac{1}{a};\ x_2=\sqrt{a};\ x_3=a^2$. **7.234.** $x_1=0{,}1; x_2=\sqrt{10};\ x_3=100$. **7.235.** $x=1$. **7.236.** $x=-1000$. **7.237.** $x=-0{,}5$. **7.238.** $x=-2\sqrt[3]{2}$. **7.239.** $x=256$. **7.240.** $x_1=1{,}1; x_2=11$. **7.241.** $x=1$. **7.242.** $x=0$. **7.243.** $x=3$. **7.244.** $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **7.245.** $x=3$. **7.246.** $x=2$. **7.247.** $x=5$. **7.248.** $x_1=8; x_2=9$. **7.249.** $x=2+\log_4\frac{a-27}{3-a}$, где $3<a<27$. **7.250.** $x=a^6$, где $a>0$ и $a\neq 1$. **7.251.** $x_1=0{,}001; x_2=1;\ x_3=10$. **7.252.** $x=1$. **7.253.** $x=4-a^2$, где $0<a<1$ или $1<a<2\sqrt{2}$. **7.254.** $x=0$. **7.255.** $x=4$. **7.256.** $x=4\log_3 2$. **7.257.** $n=1023$. **7.258.** $x=\frac{2a-1}{a+3}$, где $a\neq-2, a\neq-3$ и $a\neq 0{,}5$; нет корней при $a=-2$, $a=-3$ и $a=0{,}5$. **7.259.** $(1;1)$; $\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{3};\ \frac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right)$. **7.260.** (2; 2). **7.261.** (2; 4). **7.262.** (6; 2). **7.263.** (2; 1). **7.264.** (10; 1,5); (0,2; 75); (15; 1). **7.265.** (2; 4). **7.266.** $(\sqrt{3}; 1)$, $(-\sqrt{3}; 1)$. **7.267.** (27; 4); $\left(\frac{1}{81};-3\right)$. **7.268.** (1;9); (16;1). **7.269.** (–2; 7). **7.270.** (8; 4). **7.271.** (5; 2). **7.272.** (16; 20). **7.273.** (1; 0); (2; 1). **7.274.** $(9a; 2a)$; $(a; 18a)$, где $a>0$ и $a\neq 1$. **7.275.** (4; 1). **7.276.** (4; 1); (–4; –1). **7.277.** $(\sqrt{2}; 2)$; $(0{,}5\sqrt[3]{4}; -3)$. **7.278.** (6; 6). **7.279.** (3; 5); (6; 2); (1; 7). **7.280.** (2; 4); $(4\sqrt{2}; 2\sqrt[4]{2})$. **7.281.** (3; 9). **7.282.** (6; 2). **7.283.** (5; 5). **7.284.** (3; 9); (9; 3). **7.285.** (5; 3); (1; –1). **7.286.** (–10; 20); $\left(\frac{10}{3};\frac{20}{3}\right)$. **7.287.** (1; 4). **7.288.** (8; 9); $(27\log_5^3 2; 4\log_2^2 5)$. **7.289.** (4; 2); (–4; 2). **7.290.** (0,5; 4). **7.291.** (2; 3). **7.292.** (1; 3). **7.293.** $\left(\frac{2}{9};\frac{1}{9}\right)$. **7.294.** (6; 2). **7.295.** $\lg b$, где $b>1$. **7.296.** 2, если $1<a\le b$; $2\log_a b$, если $1<b<a$. **7.297.** $\log_n^2 p$, где $\begin{cases}0<n<1,\\0<p<1\end{cases}$ или $\begin{cases}n>1,\\p>1.\end{cases}$ **7.298.** -2, если $1<a\le b$; $-2\log_a b$, если $1<b<a$. **7.299.** $1-\log_a(a-b)$, если $\begin{cases}0<a<1,\\b<0\end{cases}$ или

$\begin{cases} a>1, \\ 0<b<a; \end{cases}$ $\log_a(a-b)-1$, если $0<b<a<1$ или $\begin{cases} a>1, \\ b<0. \end{cases}$ **7.300.** $\log_{135}675>$ $>\log_{45}75$. **7.301.** $x=\log_{0,4}\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0<x<1$. **7.303.** $\log_m A \log_n A \log_p A\times$ $\times \log_A(mnp)$. **7.305.** $\log_a b-\log_b a$. **7.306.** При $p=1$ и при $p\in\left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right]$. **7.307.** При $a=12$ и при $a\in(-\infty, 0)$. **7.308.** $x=3$. **7.309.** $x_1=1$; $x_2=4$. **7.310.** $x=$ $=3$. **7.311.** $x_1=\frac{1}{8}$; $x_2=\frac{1}{2}$. **7.312.** $x=64$. **7.313.** $x=3$. **7.314.** $x=7$. **7.315.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$. **7.316.** $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-0{,}5\lg p}$, где $1<p\le 100$. **7.317.** $x=4$. **7.318.** $x=\sqrt[k]{k}$, где $k\ge 2$. **7.319.** $x=1+b^2$, где $b>0$ и $b\ne 1$. **7.320.** $x_1=3$; $x_2=\frac{1}{3}$. **7.321.** $x_1=0{,}1$; $x_2=2$; $x_3=1000$. **7.322.** $x=2$, если $0<a<1$ или $1<a<\infty$; $x\in$ $\in(0, 6)$, если $a=1$. **7.323.** $x=2$, если $0<p<1$ или $1<p<\infty$; $x\in(-2,\infty)$, если $p=$ $=1$. **7.324.** $x_{1,2}=\pm 1$; $x_3=2$. **7.325.** $x_1=1$; $x_2=3$. **7.326.** $x_1=-1$; $x_2=2$; $x_3=4$. **7.327.** $x=4$. **7.328.** $x=100$. **7.329.** $x_1=1$; $x_2=\frac{17}{12}$; $x_3=\frac{11}{6}$. **7.330.** $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$; $x_3=1$. **7.331.** $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=9$. **7.332.** $x_1=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$; $x_2=\frac{9-\sqrt{29}}{2}$. **7.333.** $x=16$. **7.334.** $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **7.335.** $\left(a^{\frac{q^2}{p(q-p)}}; a^{\frac{q}{q-p}}\right)$. **7.336.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$. **7.337.** $\left(-a^3; -\frac{1}{a}\right)$; $\left(-\frac{1}{a}; -a^3\right)$. **7.338.** $(8; 2)$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$. **7.339.** $(0; 0)$; $(8; -8)$; $\left(3; \frac{1}{3}\right)$; $(-4; -2)$. **7.340.** $(3; 9)$; $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$.

ГЛАВА 8

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

(Всюду, если нет иных указаний, предполагается, что k, l, m, n принимают любые целые значения)

8.001. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{12}(12k+1)$. **8.002.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.003.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.004.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.005.** $z=(-1)^k\cdot 10^\circ+60^\circ\cdot k$. **8.006.**

$t=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.007.** $t_1=\pi k$; $t_2=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$. **8.008.** $t_1=\frac{\pi}{12}(4k-1)$; $t_2=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi k}{3}$. **8.009.** $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $t_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.010** $z=\pm 40^\circ+120^\circ\cdot k$. **8.011.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. **8.012.** $x=\frac{\pi}{12}(4k-1)$. **8.013.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.014.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.015.** $z_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $z_2=\frac{\pi}{14}(2k+1)$. **8.016.** $z=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. **8.017.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$; $x_2=\frac{\pi}{8}(8k\pm 3)$. **8.018.** $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.019.** $x=\frac{\pi}{9}(2k+1)$. **8.020** $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.021.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.022.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $x_2=\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$. **8.023.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{2\pi k}{5}$; $x_3=\frac{\pi}{11}(2k+1)$. **8.024.** $x=\frac{\pi k}{3}$. **8.025.** $x=15^\circ+360^\circ\cdot k$. **8.026.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.027.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$; $x_2=\frac{\pi k}{7}$. **8.028.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.029.** $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{14}(2k+1)$. **8.030.** $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.031.** $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}$. **8.032.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{2\pi k}{11}$. **8.033.** $x=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.034.** $x=\frac{\pi k}{8}$. **8.035.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.036.** $x_1=\frac{\pi}{16}(2k+1)$; $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. **8.037.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. **8.038.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.039.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $x_2=\operatorname{arcctg}5+\pi k$. **8.040.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+3)$. **8.041.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$; $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.042.** $t=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.043.** $z_1=35^\circ+120^\circ\cdot k$; $z_2=55^\circ+120^\circ\cdot k$. **8.044.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$; $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{21}+\frac{\pi k}{7}$. **8.045.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.046.** $z_1=\pi k$; $z_2=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. **8.047.** $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}$.

8.048. $x=\frac{\pi k}{4}$. **8.049.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.050.** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **8.051.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.052.** $x_1=\pi k$; $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.053.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.054.** $x_1=\frac{\pi k}{4}$; $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+3)$. **8.055.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.056.** $t_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $t_2=\frac{\pi}{3}(2k+1)$. **8.057.** $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$. **8.058.** $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{20}(4k+3)$. **8.059.** $x_1=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$; $x_2=\pm\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi k}{3}$. **8.060.** $x=\frac{\pi k}{5}$. **8.061.** $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. **8.062.** $x=\pi(2k+1)$. **8.063.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$; $x_2=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$. **8.064.** $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.065.** $z_1=\frac{\pi}{4}(8k+1)$; $z_2=\frac{\pi}{20}(8k+3)$. **8.066.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.067.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{18}(4k+1)$. **8.068.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.069.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.070.** $z_1=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}$; $z_2=\frac{2}{5}\operatorname{arctg}5+\frac{2\pi k}{5}$. **8.071.** $z_1=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}2+\frac{2\pi k}{3}$; $z_2=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\frac{2\pi k}{3}$. **8.072.** $x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$. **8.073.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.074.** $x_1=\pi(2k+1)$; $x_2=\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi k$. **8.075.** $x_1=\pi k$; $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k$. **8.076.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$; $x_2=\frac{\pi}{7}(2k+1)$. **8.077.** $z_1=2\operatorname{arcctg}3+2\pi k$; $z_2=-2\operatorname{arctg}7+2\pi k$. **8.078.** $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.079.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.080.** $x_1=\pi k$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.081.** $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x_2=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k$. **8.082.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$; $x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$; $x_3=\frac{\pi}{10}(4k+1)$. **8.083.** $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x_2=\operatorname{arctg}3+\pi k$. **8.084.** $x_1=\frac{\pi}{12}(2k+1)$; $x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **8.085.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. **8.086.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.087.**

$x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$. **8.088.** $t=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.089.** $t_1=-31°+180°\cdot k$; $t_2=89°+180°\cdot k$. **8.090.** $t=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.091.** $t_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $t_2=\pi k$. **8.092.** $x_1=100°+360°\cdot k$; $x_2=-20°+360°\cdot k$. **8.093.** $t_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$; $t_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$. **8.094.** $x=\pi(4k+1)$. **8.095.** $x=\frac{\pi k}{6}$. **8.096.** $x_1=\frac{\pi k}{4}$; $x_2=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$. **8.097.** $z_1=2\pi k$; $z_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.098.** $z_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$; $z_2=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.099.** $x=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.100.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$; $x_2=\frac{\pi}{12}(4k+1)$. **8.101.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{12}(8k\pm 3)$. **8.102.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.103.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.104.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.105.** $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.106.** $x=\pm 40°+120°\cdot k$. **8.107.** $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $x_2=2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+2\pi k$. **8.108.** $z=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.109.** $x=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.110.** $x=\frac{\pi k}{10}$. **8.111.** $x_1=75°+180°\cdot k$; $x_2=45°\cdot k-3°45'$. **8.112.** $x_1=\frac{3\pi}{4}+\pi k$; $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.113.** $x_1=\frac{\pi}{16}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.114.** $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.115.** $z=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.116.** $x_1=135°+360°\cdot k$; $x_2=-105°+360°\cdot k$. **8.117.** $x_1=2\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $x_3=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.118.** $t_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; $t_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.119.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.120.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{5}(2k+1)$; $x_3=\frac{\pi}{7}(2k+1)$. **8.121.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.122.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$; $x_2=\frac{\pi k}{5}$. **8.123.** $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **8.124.** $x=\frac{\pi}{12}(4k+1)$. **8.125.** $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{12}(12k-1)$. **8.126.** $z=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. **8.127.** $x=\frac{\pi}{12}(6k+1)$. **8.128.**

$x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$. **8.129.** $x=\frac{\pi k}{4}$. **8.130.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$; $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{5}$. **8.131.** $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{3}(3k+1)$. **8.132.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.133.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$; $x_2=\frac{\pi k}{9}$. **8.134.** $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.135.** $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.136.** $z_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $z_2=\operatorname{arctg}4+\pi k$. **8.137.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.138.** $t_1=\pi k$; $t_2=\frac{\pi}{4}(8k\pm1)$. **8.139.** $x_1=\frac{3\pi}{4}(4k+1)$; $x_2=\pi(3k\pm1)$. **8.140.** $x=45°(4k+1)$. **8.141.** $x_1=\frac{\pi k}{2}-1$; $x_2=\frac{\pi}{10}(2k+1)-1$. **8.142.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)-\frac{1}{2}$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+$ $+\frac{\pi k}{2}-\frac{1}{2}$. **8.143.** $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.144.** $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. **8.145.** $x_1=\frac{2\pi k}{3}$; $x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$; $x_3=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.146.** $x=60°+180°\cdot k$. **8.147.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.148.** $x=\frac{\pi}{6}(3k+1)$. **8.149.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.150.** $x_1=\pi(2k+1)$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$. **8.151.** $x_1=\frac{2\pi k}{3}$; $x_2=\frac{\pi}{6}(4k+1)$. **8.152.** $x=\frac{\pi}{9}(3k\pm1)$. **8.153.** $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.154.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.155.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.156.** $x_1=\frac{2\pi k}{5}$; $x_2=\frac{2\pi}{9}(3k+1)$. **8.157.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.158.** $x=30°+180°\cdot k$. **8.159.** $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.160.** $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}+\pi k$. **8.161.** $x_1=\pi k-\operatorname{arctg}3$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.162.** $x_1=\pi k$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.163.** $x_1=2\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.164.** $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{18}(4k+1)$. **8.165.** $x=\frac{\pi k}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$. **8.166.** $x=$ $=\pm\arccos 0{,}8+2\pi k$. **8.167.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.168.** $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. **8.169.**

$x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.170.** $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.171.** $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.172.** $x=180°\cdot k-25°$. **8.173.** $x_1=2\pi k$; $x_2=2\pi k-\frac{1}{\pi}$. **8.174.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$; $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.175.** $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{73}-9}{2}+\pi k$. **8.176.** $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. **8.177.** $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $x_2=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi k$. **8.178.** $x=60°\cdot k-40°$. **8.179.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.180.** $z_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $z_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.181.** $t=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. **8.182.** $x_1=\frac{2\pi k}{5}$; $x_2=\frac{2\pi k}{3}$. **8.183.** $t=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi k}{2}$. **8.184.** $z_1=\frac{2\pi k}{15}, k\neq15l$; $z_2=\frac{\pi}{17}(2k+1), k\neq17l+8$. **8.185.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.186.** $t=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.187.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.188.** $x=25°+90°\cdot k$. **8.189.** $t=2\operatorname{arctg}\frac{4}{5}+2\pi k$. **8.190.** $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+3)$; $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.191.** $t=\frac{\pi}{7}(2k+1)$, $k\neq7l+3$. **8.192.** $x_1=\pi k$; $x_2=\operatorname{arctg}2+\pi k$. **8.193.** $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.194.** $t_1=\frac{\pi k}{3}$; $t_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.195.** $z=\frac{\pi}{18}(6k\pm1)$. **8.196.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.197.** $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.198.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4}$. **8.199.** $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.200.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.201.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.202.** $x=\frac{\pi k}{12}$. **8.203.** $x=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.204.** $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.205.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.206.** $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. **8.207.** $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.208.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$; $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.209.** $t=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.210.** $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.211.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$; $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.212.** $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$; $x_2=\frac{2\pi}{9}(3k\pm1)$. **8.213.** $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.214.** $t_1=\pi(2k+1)$; $t_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.215.**

$x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.216.** $z_1=\pi k$; $z_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $z_3=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **8.217.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.218.** $x_1=\pm\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}$; $x_2=\pi k$. **8.219.** $t=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.220.** $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.221.** $t_1=\frac{\pi k}{4}$, $k\neq 4l+2$; $t_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi k$. **8.222.** $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.223.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.224.** $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.225.** $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $t_2=\mathrm{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\pi k$; $t_3=\mathrm{arctg}\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\pi k$. **8.226.** $t=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.227.** $t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2}$; $t_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\pi(2k+1)}}{2}$; $k=0,1,2,\ldots$. **8.228.** $z=\frac{\pi k}{3}$. **8.229.** $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $t_2=(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin(1-\sqrt{3})+\frac{\pi k}{2}$. **8.230.** $x=\frac{\pi k}{14}$, $k\neq 14l$. **8.231.** $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.232.** $t=\frac{\pi k}{4}$. **8.233.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.234.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{6}(3k+1)$. **8.235.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.236.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.237.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{24}(2k+1)$. **8.238.** $x_1=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}$; $x_2=\frac{5\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}$. **8.239.** $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1)$; $x_2=\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$. **8.240.** $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$. **8.241.** $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.242.** $x=\frac{\pi}{20}(2k+1)$, $k\neq 5l+2$. **8.243.** $z=\frac{\pi}{8}(4k-1)$. **8.244.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.245.** $t=\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$. **8.246.** $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.247.** $t=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.248.** $t=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.249.** $x=\frac{\pi}{12}(3k+1)$. **8.250.** $z=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. **8.251.** $t=\frac{\pi}{6}(3k+1)$. **8.252.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.253.** $t_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $t_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.254.** $x_1=\frac{\pi}{8}(4k-1)$; $x_2=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,2+\frac{\pi k}{2}$. **8.255.** $x=\pi k-2$. **8.256.** $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.257.** $z=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.258.** $z=\frac{\pi}{8}(8k\pm1)$.

8.259. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $x_3=-\operatorname{arctg}2+\pi k$. **8.260.** $z_1=\frac{\pi}{14}(2k+1)$, $k\neq 7l+3$; $z_2=\frac{\pi}{28}(4k+3)$, $k\neq 7l+1$; $l=\pm1, \pm3, \ldots$. **8.261.** $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.262.** $z=-20°+60°\cdot k$. **8.263.** $x=4\pi k$. **8.264.** $t=\pi k$. **8.265.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.266.** $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.267.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $x_2=\operatorname{arctg}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$; $x_3=\operatorname{arctg}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$.

8.268. $x_1=2\pi k$; $x_2=\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+2\pi k$. **8.269.** $x=\operatorname{arctg}3+\pi k$. **8.270.** $x=(-1)^{k+1}\times\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$. **8.271.** $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.272.** $t_1=\pi k$; $t_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.273.** $z_1=\pi k$; $z_2=\pi k-\operatorname{arctg}3$. **8.274.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_3=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$. **8.275.** $t_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\neq 3l+1$; $t_2=\frac{\pi k}{5}$, $k\neq 5l$. **8.276.** $x_1=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{73}-7}{12}+\pi k$; $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$; $x_3=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k$. **8.277.** $x=\frac{\pi}{32}(4k+3)$. **8.278.** $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.279.** $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.280.** $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$.

8.281. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.282.** $z_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$; $z_2=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. **8.283.** $x_1=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$. **8.284.** $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. **8.285.** $x_1=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$; $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}3+\frac{\pi k}{2}$. **8.286.** $z_1=\pi k$; $z_2=\frac{\pi}{16}(2k+1)$. **8.287.** $x=8\pi k$. **8.288.** $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.289.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$; $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.290.** $t_1=\frac{\pi k}{3}$; $t_2=\frac{\pi}{12}(4k-1)$. **8.291.** $x=2\pi k$. **8.292.** $t=\pi k$. **8.293.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $x_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. **8.294.** $t=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$.

8.295. $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.296.** $z_1=\pm\arccos\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}+\pi k$; $z_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$.

8.297. $x_1=\frac{\pi k}{4}$; $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.298.** $z_1=\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\frac{\pi k}{2}$; $z_2=\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{5}+\frac{\pi k}{2}$.

8.299. $x_1=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$; $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi k}{2}$. **8.300.** $x=\pi k$. **8.301.** $z_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $z_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.302.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.303.** $z=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. **8.304.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.305.** $t_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$; $t_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. **8.306.** $t_1=360°\cdot k$; $t_2=90°(4k+1)$. **8.307.** $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+1)$; $x_2=-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{4}$. **8.308.** $z_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $z_2=\pi k$; $z_3=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.309.** $t_{1,\,2}=\frac{1\pm\sqrt{9+4\pi k}}{2}$, $k=0, 1, 2, \ldots$. **8.310.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.311.** $t_1=\pi k$; $t_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\pi k$. **8.312.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.313.** $x_1=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$; $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.314.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.315.** $t=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.316.** $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.317.** $t=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.318.** $t_1=\pi k$; $t_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.319.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.320.** $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.321.** $t_1=90°\cdot k$; $t_2=\pm 15°+90°\cdot k$. **8.322.** $x=\pi k$. **8.323.** $x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k$. **8.324.** $x_1=\frac{\pi}{3}(6k+1)$; $x_2=\frac{2\pi}{9}(3k+1)$. **8.325.** $z_1=\pi k$; $z_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.326.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.327.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.328.** $x=45°+180°\cdot k$. **8.329.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.330.** $x_1=\frac{\pi}{18}(6k\pm 1)$; $x_2=\frac{\pi k}{2}$. **8.331.** $x=\frac{\pi}{30}(6k\pm 1)$. **8.332.** $x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$. **8.333.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. **8.334.** $t=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.335.** $x_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-35°+180°\cdot k$; $x_2=-\operatorname{arctg}2-35°+180°\cdot k$. **8.336.** $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{12}(4k-1)$, $k\neq 3l+1$; $x_3=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k$. **8.337.** $x_1=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$; $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi k}{2}$. **8.338.** $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.339.** $x=2\pi k$. **8.340.**

$z_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $z_2=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.341.** $x_1=-5°+60°\cdot k$; $x_2=70°+90°\cdot k$. **8.342.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.343.** $t_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$; $t_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.344.** $x_1=2\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.345.** $t_1=\frac{\pi}{3}(2k+1), k\neq 3l+1$; $t_2=\frac{\pi}{5}(2k+1), k\neq 5l+2$. **8.346.** $x=2\pi k$. **8.347.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.348.** $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $x_3=2\pi k$. **8.349.** $x_1=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$; $x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{157}-6}{11}+\pi k$. **8.350.** $x=\frac{7\pi}{12}+\pi k$. **8.351.** $x_1=\frac{\pi}{6}(6k+1)$; $x_2=\operatorname{arctg}\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+\pi k$; $x_3=\pi k-\operatorname{arctg}\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. **8.352.** $x_1=\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}(8k\pm3)$. **8.353.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.354.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.355.** $x=\pi k$. **8.356.** $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\neq 3l+1$; $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.357.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.358.** $x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.359.** $x_1=\pi k$; $x_2=\pi k\pm\operatorname{arctg}5$. **8.360.** $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{8}(8k-1)$; $x_2=\frac{\pi}{8}(4k-1)$. **8.361.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.362.** $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. **8.363.** $x_1=2\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_3=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.364.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $x_2=\frac{\pi}{6}(12k-1)$; $x_3=\frac{\pi}{3}(6k-1)$. **8.365.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $x_2=$ $=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.366.** $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.367.** $t_1=\pi k$; $t_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.368.** $x_1=\pi k$; $x_2=\pi k\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_3=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.369.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $x_2=(-1)^k\times$ $\times\arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.370.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.371.** $x=\pi k$ при любом a; $x=\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{2}$ при $-1\leq a\leq 3$. **8.372.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ при любом m; $x=\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{m+1}{2}$ при $-3\leq m\leq 1$. **8.373.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)-\alpha$ при $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\pi n$;

при $\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi n$ решений нет. **8.374.** $x=(-1)^k\arcsin\frac{m}{8}+\frac{\pi}{6}(6k+1)$; $-8\le m\le 8$. **8.375.** $x=\pi k-\frac{3}{2}+(-1)^k\arcsin\frac{\cos\alpha}{2\cos 1}$ при любом α. **8.376.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.377.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.378.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.379.** $x=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$. **8.380.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{6}$. **8.381.** $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. **8.382.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.383.** $x=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$. **8.384.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$. **8.385.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.386.** $x+y=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.390.** $\arcsin\frac{3}{5}$, $\arcsin\frac{5}{13}$, $\pi-\arcsin\frac{56}{65}$. **8.392.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **8.393.** $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$. **8.394.** $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $y_1=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $y_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **8.395.** $x=\pi k$, $y=\frac{\pi}{3}(6n\pm 1)$. **8.396.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+3)$, $y=\frac{\pi}{6}(6k-1)$. **8.397.** $x_1=\frac{\pi}{6}+\pi(k_1-k_2)$, $y_1=\frac{\pi}{3}+\pi(k_1+k_2)$; $x_2=-\frac{\pi}{6}+\pi(k_1-k_2)$, $y_2=\frac{2\pi}{3}+\pi(k_1+k_2)$. **8.398.** $x=\frac{1}{6}(6k-1)$, $y=\frac{1}{6}(6k+1)$. **8.399.** $x_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $y_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi k$; $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$, $y_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi k$. **8.400.** $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$, $y=\frac{\pi}{4}(4n\pm 1)$, k и n — числа одной четности. **8.401.** $x_1=2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi k_1$, $y_1=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k_2$; $x_2=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k_1$, $y_2=2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi k_2$. **8.402.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\frac{\pi}{3}(6n\pm 1)$. **8.403.** $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k_1+k_2)$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k_2-k_1)$. **8.404.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y_1=\frac{\pi}{3}(1-3k)$; $x_2=\frac{\pi}{3}(3k+1)$, $y_2=\frac{\pi}{2}(1-2k)$. **8.405.** $x=\frac{\pi}{6}(6k+1)$, $y=\frac{\pi}{6}(1-6k)$. **8.406.** $x=\pi k$, $y=\frac{\pi m}{2}$, $z=\frac{\pi}{6}(4n-1)$. **8.407.** $x=\pi k$. **8.408.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.409.** $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.410.** $t_1=\frac{\pi}{4}(8k+1)$; $t_2=-\operatorname{arctg}3+$

$+\pi(2k+1)$. **8.411.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.412.** $t_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $t_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$; $t_3=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi k$. **8.413.** $z_1=\frac{\pi}{6}+\pi k$; $z_2=\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\pi k$. **8.414.** $x_1=2\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.415.** $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.416.** $x_1=\pi(2k+1)$; $x_2=\arccos(\sqrt{5}-2)+2\pi k$. **8.417.** $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x_2=-\operatorname{arctg}4+\pi k$. **8.418.** $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. **8.419.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.420.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.421.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $x_2=-\operatorname{arctg}6+\pi k$. **8.422.** $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.423.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.424.** $x_1=\frac{\pi}{4}(8k+5)$; $x_2=\operatorname{arctg}3+\pi(2k+1)$. **8.425.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $x_2=2\pi k$. **8.426.** $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+3)$; $x_{2,\,3}=\frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}+\frac{\pi k}{4}$. **8.427.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.428.** $x=\frac{\pi}{8}(8k+3)$. **8.429.** $x_1=\frac{3\pi}{8}+\pi k$; $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.430.** $t_1=\frac{1-\sqrt{1+8k}}{2}+2k$; $t_2=\frac{3+\sqrt{5+8k}}{2}+2k$; $k=0, 1, 2, \ldots$. **8.431.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.432.** $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+3)$; $x_2=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. **8.433.** $x=\pi k$. **8.434.** $x=\pm\arccos\frac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-2}}+2\pi k$. **8.435.** $x=\frac{\pi k}{6}$. **8.436.** $z=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.437.** $x=\pi k$, $y=\frac{\pi}{6}(4n+1)$. **8.438.** $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. **8.439.** $x_1=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $x_2=\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi k$. **8.440.** $t=\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{4}{2k+1}+\frac{\pi n}{2}$, $k=3, 4, \ldots$; $k=-4, -5, \ldots$. **8.441.** $x_{1,\,2}=\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}+\pi k$. **8.442.** $x=\frac{\pi}{12}(3k\pm1)$. **8.443.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}+2\pi k$. **8.444.** $t=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.445.**

$t=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi k$. **8.446.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $x_2=(-1)^k\ \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\pi k}{2}$.

8.447. $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{32}(4k+1)$. **8.448.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\pi n$. **8.449.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.450.** $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}{\sqrt{2}}+2\pi k$. **8.451.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.452.** $x_1=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-2}{2}+2\pi k$. **8.453.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.454.** $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2}+2\pi k$; $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. **8.455.** $t=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.456.** $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.457.** $x=\pi(4k+1)$. **8.458.** $t=\frac{\pi}{4}(4k-1)-\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$. **8.459.** $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+\pi k}$; $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. **8.460.** $x=\pi k$. **8.461.** $x=2\pi k$. **8.462.** $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.463.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\frac{\pi}{2}(4l+1)$, $z=\frac{\pi n}{3}$.

8.464. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.465.** $x=\pi(2k+1)$. **8.466.** $x=\frac{2\pi k}{5}$, $k\neq 5l$.

8.467. $x_1=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.468.** $t_1=0$; $t_2=\frac{1+\sqrt{1+8k}}{4}$, $k>0$, $k\neq l(2l+1)$; $t_3=\frac{1-\sqrt{1+8k}}{4}$, $k\neq l(2l-1)$, $l>0$. **8.469.** $x=\pi(2k+1)$. **8.470.** $t=\pm2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$. **8.471.** $x=\frac{5\pi}{6}(4k+1)$, $k\neq 3l+2$. **8.472.** $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{6}+\pi k$. **8.473.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.474.** $x_1=\pi k$; $x_2=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{5}}+\pi k$.

8.475. $t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+2k}}{2}$, $k\geq-1$, $k\neq 2(l^2-1)$. **8.476.** $x=\frac{\pi}{12}(4k+1)$, $k\neq 3l+2$.

8.477. $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.478.** $t=\frac{\pi}{12}(3k\pm1)$. **8.479.** $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $y=\frac{\pi}{2}(2n+1)$.

8.480. $z_1=2\pi k$; $z_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.481.** $t=\frac{\pi}{12}(6k+5)$. **8.482.** $t_1=\pi k$; $t_2=\frac{\pi}{8}(2k+1)$.

8.483. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.484.** $z=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}+2\pi k$. **8.485.** $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.486.** $t_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $t_2=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.487.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.488.** $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.489.** $x=\frac{\pi}{6}(6k+1)$. **8.490.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.491.** $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. **8.492.** $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. **8.494.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $y=\frac{\pi}{4}(2k+5)+2\pi n$. **8.495.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y_1=\pi n$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $y_2=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$. **8.496.** $x_1=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $y_1=\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $x_2=2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi k$, $y_2=2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi n$; $x_3=2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi k$, $y_3=2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi n$. **8.497.** $x_1=\frac{\pi}{8}$, $y_1=-\frac{\pi}{8}$; $x_2=-\frac{\pi}{8}$, $y_2=\frac{\pi}{8}$. **8.498.** $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $y=\frac{\pi}{4}+\pi(2n+1)$. **8.499.** $x_1=(-1)^{k_1}\frac{\pi}{6}+\pi k_1$, $y_1=(-1)^{k_2}\frac{\pi}{6}+\pi k_2$, $z_1=(-1)^{k_3}\frac{\pi}{6}+\pi k_3$; k_1, k_2, k_3 — числа одной четности; $x_2=y_3=z_4=\frac{\pi}{6}+2\pi k_1$; $y_2=z_3=x_4=\frac{\pi}{6}+\pi(2k_2+1)$; $z_2=x_3=y_4=-\frac{\pi}{6}+2\pi k_3$; $x_5=y_6=z_7=-\frac{\pi}{6}+\pi(2k_1+1)$; $y_5=z_6=x_7=-\frac{\pi}{6}+2\pi k_2$; $z_5=x_6=y_7=\frac{\pi}{6}+\pi(2k_3+1)$. **8.500.** $x_1=\frac{\pi}{6}$, $y_1=\frac{\pi}{3}$, $z_1=\frac{\pi}{2}$; $x_2=y_3=z_4=0$; $y_2=z_3=x_4=0$; $z_2=x_3=y_4=\pi$.

ГЛАВА 9

НЕРАВЕНСТВА

9.008. При $a\in(-4,-3]$. **9.010.** 2. **9.011.** 1. **9.012.** 2. **9.013.** При $x\in(-1,2]$. **9.014.** 2; 3. **9.015.** При $m\in(-2,0)$. **9.016.** $(-\infty,-1)\cup[4,\infty)$. **9.017.** $[-2,1)\cup(1,2]$. **9.018.** $(1,\infty)$. **9.019.** $[2,\infty)$. **9.020.** $(-\infty,0)\cup[2,3]$. **9.021.** $[2,4)$. **9.022.** $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$. **9.023.** $(-\infty,-2)\cup(0{,}625;\infty)$. **9.024.** $\left(\frac{5}{3},\infty\right)$. **9.025.** $(3;4{,}5)$.

9.026. $\left(\frac{8}{3}, \infty\right)$. **9.027.** $(-1, 2)\cup(2, 3)$. **9.028.** $[0, 3]$. **9.029.** $(-\infty, 1)\cup\left(\frac{4}{3}, 2\right)$. **9.030.** $(-4{,}5; -2)\cup(3, \infty)$. **9.031.** $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)\cup(3, 5)\cup(5, \infty)$. **9.032.** $(-\infty; -0{,}5]\cup[5, \infty)$. **9.033.** $(-1, 2)\cup(3, 6)$. **9.034.** $[0, 8]$. **9.035.** $(-\infty; -0{,}5]\cup[0{,}5; \infty)$. **9.036.** $(-\infty, 2)\cup(8, \infty)$. **9.037.** $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. **9.038.** $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right)\cup(3, \infty)$. **9.039.** $(0, 4)$. **9.040.** $(-\infty; 0{,}75)\cup(4, 7)$. **9.041.** $(-\infty, 1)\cup(2, \infty)$. **9.042.** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. **9.043.** $[4, \infty)$. **9.044.** $(-3, 1)$. **9.045.** $\left[\frac{20}{9}, 4\right)\cup(5, \infty)$. **9.046.** $(1, 6)$. **9.047.** $(-1, 5)$. **9.048.** $(1, 3)\cup(3, 5)$. **9.049.** $(0, 3)\cup(7, \infty)$. **9.050.** $(-\infty, -2)\cup(-1, 0]$. **9.051.** $(0, 2]$. **9.052.** $(0; 0{,}5)$. **9.053.** $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. **9.054.** $(0, \infty)$. **9.055.** $(-\infty, 1-\log_2 3)$. **9.056.** $\left(-1, \frac{91}{9}\right)$. **9.057.** $(-0{,}5; 2)$. **9.058.** $(0; 0{,}4)\cup(1, \infty)$. **9.059.** $(3, \infty)$. **9.060.** $(3, 4)\cup(4, \infty)$. **9.061.** $(0, 1)$. **9.062.** $[1, 4]$. **9.063.** $(-\infty, 0)\cup[0{,}5; \infty)$. **9.064.** $(-\infty, 11]$. **9.065.** $(-1, 4)$. **9.066.** $(-1, 0)\cup(3, 4)$. **9.067.** $(0, \infty)$. **9.068.** $(1, \infty)$. **9.069.** $(1; 1{,}04)\cup(26, \infty)$. **9.070.** $(4, 6)$. **9.071.** $(2, 3)$. **9.072.** $(-1, 1)$. **9.073.** $(-1, 1)$. **9.074.** $(1, \infty)$. **9.075.** $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$. **9.076.** $(0; 0{,}25)\cup(4, \infty)$. **9.077.** $(0, \infty)$. **9.078.** $(-\infty; 0{,}5)\cup(1, \infty)$. **9.079.** $(-8, 1]$. **9.080.** $(-2, -1)\cup(-1, 2)$. **9.081.** $(2, 3)$. **9.082.** $(-\infty, -3)\cup(-2, -1)$. **9.083.** $(-1, 1)$. **9.084.** $\left(\frac{1}{\lg 3}, \infty\right)$. **9.085.** $(-1, 0)\cup(0, 1)$. **9.086.** $(0, 1)$. **9.087.** $(2, 32)$. **9.088.** $(0, 40)$. **9.089.** $(1, \sqrt[3]{5})$. **9.090.** $[0, 4)$. **9.091.** $[0; 0{,}5]$. **9.092.** $[0{,}5; 4]$. **9.093.** $(2, \infty)$. **9.094.** $(0, 27)$. **9.095.** $(-1, 2)$. **9.098.** $p\in(2, \infty)$. **9.099.** $a\in[1, \infty)$. **9.100.** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. **9.101.** При $p\in\left(\frac{5}{9}, 1\right]\cup[6, \infty)$. **9.102.** При $n\in(-\infty, -3)\cup(2, 6]$. **9.103.** При $m\in\left(-\frac{3}{2}, \frac{12}{7}\right)$. **9.104.** При $a\in(-\infty; -1{,}75)$. **9.105.** 11; 12; 14; 15. **9.109.** $[-0{,}5; 0)\cup(0; 0{,}5]$. **9.110.** $\left[\frac{37}{7}, 7\right]$. **9.111.** 1. **9.112.** При $a\in(-6, 6)$. **9.113.**

$[-5,-3)\cup(3,5]$. **9.114.** При $x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$. **9.115.** $m\in(-\infty;-0{,}5)$. **9.116.** При $x\in(-3,-2)\cup(1,2)\cup(3,\infty)$. **9.117.** При $m\in(-6,2)$. **9.118.** При $m\in(-7,1)$. **9.119.** При $a\in(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(5,\infty)$. **9.120.** 2; 3. **9.122.** $[5{,}5;\infty)$. **9.123.** $[0,3)\cup(3,4)$. **9.124.** $\left(0,\frac{1}{64}\right)\cup(4,\infty)$. **9.125.** $[0,2)\cup(4,6]$. **9.126.** $(3;3{,}5]\cup[5,\infty)$. **9.127.** $[-98,2)\cup(2,102]$. **9.128.** $(3;3{,}5)\cup(3{,}5;4)$. **9.129.** $(4,5)\cup(5,\infty)$. **9.130.** $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$. **9.131.** $(0;0{,}75)\cup(1{,}25;2)$. **9.132.** $\left(\frac{1}{3},1\right)\cup(1,2)$. **9.133.** $(-1,\sqrt[3]{4})$. **9.134.** $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n,\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **9.135.** а) $\left(a^4,\frac{1}{a}\right)$, если $0<a<1$; $\left(\frac{1}{a},a^4\right)$, если $a>1$; б) $(1,\sqrt[4]{2}]$. **9.136.** $(-2,0)\cup(0,1)$. **9.137.** $(0{,}125;0{,}25)\cup(4,8)$. **9.138.** $[1{,}5;2)$. **9.139.** Если $m>3$ или $m<-3$, то $x\in\left(-\infty,\frac{1}{m-3}\right)$; если $-3<m<3$, то $x\in\left(\frac{1}{m-3},\infty\right)$; если $m=3$, то $x\in(-\infty,\infty)$; если $m=-3$, то решений нет. **9.140.** $(-\infty,2\sqrt{5}-4)$. **9.141.** $(2,\infty)$. **9.142.** $[0;1{,}6]\cup[2{,}5;\infty)$. **9.143.** $\left(\frac{2\sqrt{21}}{3},\infty\right)$. **9.144.** $(0;0{,}5)\cup(2,3)$. **9.145.** $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n,\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **9.146.** $\left(\frac{\pi n}{2},\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$. **9.147.** $\left(\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4},\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\cup\left(\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{8},\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$. **9.148.** $(-2,0)\cup(0,1)$. **9.149.** $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{79}{75},\frac{3}{2}\right)\cup(2,\infty)$. **9.150.** $(-\infty,0)\cup(1,2)\cup(2,3)\cup(4,\infty)$. **9.151.** $(-\infty,0]\cup(4{,}5;\infty)$. **9.152.** $(0;0{,}5)\cup[\sqrt{2},\infty)$. **9.153.** $[-3,1)$. **9.154.** $(-\infty,-7)\cup$ $\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(3,\infty)$. **9.155.** $(1,2)\cup(64,\infty)$. **9.156.** $(-\infty,-2)\cup(6,\infty)$. **9.157.** $(1,\infty)$. **9.158.** $(2,5)$. **9.159.** $[27,\infty)$. **9.160.** $\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$. **9.161.** $\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup(243,\infty)$. **9.162.** $\left(-2,-\frac{5}{3}\right)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right)$. **9.163.** $(-3,-2)\cup(-1,0)$. **9.164.** $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$. **9.165.** $(0;0{,}5)\cup(2,\infty)$. **9.166.** $(0{,}01;\infty)$. **9.167.** $(-\infty,-1)\cup(-1,2]$. **9.168.** $\left(1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$. **9.169.**

$(-2; -1{,}5)\cup[1, 2)\cup[5, \infty)$. **9.170.** $(-\infty, 2)\cup[3{,}5; 4)\cup[7, \infty)$. **9.171.** $(-\infty; -0{,}1]\cup[-0{,}001; 0)$. **9.172.** $\left(-\infty, -\frac{5}{6}\right]\cup[3, \infty)$. **9.173.** $[-3, -\sqrt{6})\cup(-\sqrt{6},-2]\cup[2, \sqrt{6})\cup(\sqrt{6}, 3]$. **9.174.** $(-\infty, 0)\cup(2, 3)\cup(3; 3{,}5)\cup(4, \infty)$. **9.175.** $(4^{\log_{0,8} 0,2}, \infty)$. **9.176.** $(-\sqrt{14}, -3)\cup(-1, 1)\cup(3, \sqrt{14})$. **9.177.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. **9.178.** $[0{,}125; 4]$. **9.179.** $(1,3)$. **9.180.** $(2,8)$. **9.181.** $(-4, -3)\cup(8, \infty)$. **9.182.** $(0; 0{,}5)\cup(1, 2)\cup(3, 6)$. **9.183.** $(4, 10)$. **9.184.** $\left(-\frac{4}{3}, -1\right)\cup\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$. **9.185.** $(-\sqrt[4]{12}, \sqrt[4]{12})$. **9.186.** $(-\infty, -5)\cup(-3, -1)\cup(1, 2)$. **9.187.** $(1, 3)\cup(3^9, \infty)$. **9.188.** $\left(\frac{\sqrt{34}-1}{2}, \infty\right)$. **9.189.** $(1,4)$. **9.190.** $(-\infty, -2)\cup(1, 2)\cup(3, \infty)$. **9.191.** $\left(2\pi n-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **9.192.** $[-1, \infty)$. **9.193.** $\left(1, 1+\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\right)\cup(3, \infty)$. **9.194.** $(0, 2)$. **9.195.** $(-\sqrt{2}, -1)\cup(1, \sqrt{2})$. **9.196.** $(0, \infty)$. **9.197.** $(-\sqrt{5}, \infty)$. **9.198.** $(1, 5)$. **9.199.** $(5, \infty)$. **9.200.** $(-2, 13)$. **9.201.** $(1, 2)\cup(3, \infty)$. **9.202.** $(0{,}25; 1)\cup(1, 4)$. **9.203.** $(0{,}2; 5)$. **9.204.** $(2^{-28}, 1)$. **9.205.** $(-3, -1)$. **9.206.** $a_2; a_1; a_3$. **9.207.** $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. **9.208.** $4\cup[5, 7]$. **9.209.** $(5, 8)\cup(8, 29)$. **9.210.** $(-8; -6{,}5)\cup(0, 5)$. **9.211.** $[1{,}75; 4)$. **9.212.** $(-1, 3)$. **9.213.** $(-2, 0]$. **9.214.** $(-1, 2)$. **9.215.** $(-\infty, -7)\cup(-7, -2]\cup(1, 7)\cup(7, 8]\cup(11, \infty)$. **9.216.** $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\cup(1, 3)$. **9.217.** $\left(2\pi n-\pi, 2\pi n-\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(2\pi n-\frac{\pi}{6}, 2\pi n\right)\cup\left(\arcsin\frac{1}{8}+2\pi n, \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n, \pi-\arcsin\frac{1}{8}+2\pi n\right)$, $n \in Z$. **9.218.** $[0{,}8; 1)$. **9.219.** $(0, 1)\cup(1, 2)$. **9.220.** $(-\infty, -2]\cup\left[-1, \frac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$. **9.222.** При $p\in(-3, 6)$. **9.223.** $(1, 2)$. **9.224.** $\left(-5, -\frac{7\pi}{6}\right]\cup$

$\cup\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. **9.226.** При $m\in(-2, 4)$. **9.234.** $x\in\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$. **9.236.** $(3, \infty)$. **9.237.** $(\log_4 13,\ 2]$. **9.238.** $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in Z$. **9.239.** $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n, \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **9.240.** $\left(2\pi n-\frac{3\pi}{4}, 2\pi n-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n,\right.$ $\left.\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **9.241.** $\left(\pi n-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **9.242.** $(\log_9 7, 1)\cup(1,\infty)$. **9.243.** -5; 1. **9.244.** $[0{,}5;\ 1)$. **9.245.** $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\right)\cup(1, \sqrt{2}]$. **9.246.** $(-3, -1)$. **9.247.** $(-\infty, \log_4(\sqrt{3}-1))\cup(1{,}5;\ \infty)$. **9.248.** $\left(\log_3\frac{28}{27}, \log_3 4\right)$. **9.249.** $(p, 1)\cup\left(\frac{1}{p}, \infty\right)$, если $0<p<1$; $\left(\frac{1}{p}, 1\right)$, если $p>1$. **9.250.** $(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$. **9.251.** $(-\infty, 3)$. **9.252.** $(2,\infty)$. **9.253.** $(0,1)\cup\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, 2\right)$. **9.254.** $(-\infty,-11)$. **9.255.** $\left(\frac{\sqrt{21}-3}{2}, 1\right)\cup(1,\infty)$. **9.256.** $(-\infty,0)\cup(6,\infty)$. **9.257.** $[-2,0)\cup(0,2]$. **9.258.** $(5,\infty)$. **9.259.** $(-\infty,\sqrt[3]{2})\cup(\sqrt[3]{2},\infty)$. **9.260.** $(-\infty,-2)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$. **9.261.** $\left(-\infty, \frac{\sqrt{17}+1}{4}\right]$. **9.262.** $[5,\infty)$. **9.263.** $(-\infty;-0{,}5)\cup(1,\infty)$. **9.264.** $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in Z$. **9.265.** $(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$. **9.266.** $\left(\frac{2}{3}, 1\right)\cup(2,6)$. **9.267.** $(3,\infty)$. **9.268.** $(-\infty,0)\cup(5,\infty)$. **9.269.** $(-1,0)\cup[1,\infty)$. **9.270.** $(0,1)\cup\left[\frac{4}{3}, 4\right)$. **9.271.** $(3, 9)$. **9.272.** $\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$. **9.273.** $[0, 16]$. **9.274.** $(-2,-1]\cup[-0{,}5;\ 0)$. **9.275.** $(-5,-2)\cup(2,3)\cup(3,5)$. **9.276.** $\left(\frac{2\pi n}{5}-\frac{\pi}{10}, \frac{2\pi n}{5}-\right.$

$-\frac{\pi}{30}\Big)\cup\left(\frac{2\pi n}{5}+\frac{\pi}{10}, \frac{2\pi n}{5}+\frac{7\pi}{30}\right)$, $n\in Z$. **9.277.** $(180°\cdot n, 180°\cdot n+78°)\cup(180°\cdot n+$ $+156°, 180°\cdot n+168°)$, $n\in Z$. **9.278.** $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$. **9.279.** $(0, a^2)\cup(1,\infty)$. **9.280.** $\left(0, 3^{\frac{2}{\log_3 7-\log_7 3}}\right)$. **9.281.** $(0, a)\cup\left(\frac{1}{a^4}, \infty\right)$. **9.282.** $(-2,-1]\cup\left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. **9.283.** $(\sqrt[5]{5}, 5)$. **9.284.** $(0, 3)$. **9.285.** $\left(\pi n-\frac{\pi}{3}, \pi n-\frac{\pi}{9}\right)\cup\left(\pi n, \pi n+\frac{2\pi}{9}\right)\cup$ $\cup\left(\pi n+\frac{\pi}{2}, \pi n+\frac{5\pi}{9}\right)$, $n\in Z$. **9.286.** $\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{12}, \frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$, $n\in Z$. **9.287.** $\left(2\pi n-\frac{\pi}{4}, 2\pi n+\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(2\pi n+\frac{\pi}{4}, 2\pi n+\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(2\pi n+\frac{5\pi}{6}, 2\pi n+\frac{5\pi}{4}\right)$, $n\in Z$. **9.288.** $\left(\frac{\pi n}{8}, \frac{\pi n}{8}+\frac{\pi}{48}\right)$, $n\in Z$. **9.289.** $\left(\pi n-\frac{\pi}{8}, \pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{8}+\pi n, \frac{3\pi}{8}+\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{5\pi}{8}+\pi n\right)$, $n\in Z$. **9.290.** $(360°\cdot n-95°, 360°\cdot n-10°)\cup(360°\cdot n+85°,$ $360°\cdot n+180°)$, $n\in Z$. **9.292.** $\left[\pi n-\frac{7\pi}{12}, \pi n-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi n-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12}+\pi n\right]$, $n\in Z$. **9.295.** $\left(\frac{2\pi n}{3}-\frac{7\pi}{18}, \frac{2\pi n}{3}+\frac{\pi}{18}\right)$, $n\in Z$. **9.296.** $\left(2\pi n-\frac{\pi}{3}, 2\pi n+\frac{\pi}{3}\right)$, $n\in Z$. **9.297.** $x\neq 2\pi n+\frac{\pi}{2}$, $n\in Z$. **9.300.** $(-\sqrt{12},-2)\cup(2,\sqrt{12})$. **9.301.** $(2, 3)$, где $a>0, a\neq 1$. **9.302.** $\left[-\frac{1}{3}, 0\right)\cup(0, 1]$. **9.303.** 3. **9.304.** $x\in(0, 1)$. **9.305.** $a\in(-\infty, 0)$.

ГЛАВА 10

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

10.001. 8 и 15 см. **10.002.** $8\sqrt{5}$ и $4\sqrt{5}$ см. **10.003.** 10,625 см. **10.004.** $\sqrt{2n(m+n)}$ и $\sqrt{2(2m+n)(m+n)}$. **10.005.** $\frac{4ab}{a+b}$. **10.006.** 0 и 1,5 см. **10.007.** 9 и 25 см. **10.008.** $\sqrt{10}$ см. **10.009.** $\frac{8}{3}, \frac{25}{3}$ и 5 см. **10.010.** $12\sqrt{3}$ и 36 см. **10.011.** 6 см.

10.012. 13 см. **10.013.** 8 и 10 см. **10.014.** 6,25 см. **10.016.** $R(\sqrt{2}-1)$. **10.017.** 12 и 6 см. **10.018.** $\sqrt{41}$ и 5 см. **10.020.** 7,5 см. **10.021.** m, $m\sqrt{3}$ и $2m$. **10.022.** 60° и 30°. **10.023.** $1{,}6R\sqrt{2}$. **10.024.** 12 см. **10.025.** $0{,}5r(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ или $0{,}5r(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. **10.026.** 6 см. **10.027.** $2r^2(2\sqrt{3}+3)$. **10.029.** $\frac{a(3+\sqrt{3})}{6}$ или $\frac{a(3-\sqrt{3})}{6}$. **10.030.** $0{,}5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. **10.031.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **10.032.** 4 см. **10.033.** 3 см. **10.034.** 9 см. **10.035.** $0{,}75R^2\sqrt{3}$. **10.036.** 9, $9\sqrt{3}$ и 18 см. **10.038.** 15 и 30 см. **10.039.** 4, 8, $2\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$ см. **10.040.** 294 см^2; 12π см. **10.041.** 12, 10 и $2\sqrt{91}$ см. **10.042.** 2 см. **10.043.** 0,75. **10.044.** $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$. **10.045.** 2 и $\sqrt{2}$. **10.046.** $\frac{65}{18}$. **10.047.** 32 см. **10.048.** $3r$. **10.049.** 42 и 56 см. **10.050.** 7,25 см. **10.051.** 2 см. **10.052.** $a(2-\sqrt{2})$. **10.053.** 2 : 1. **10.054.** $\frac{20}{3}$ см. **10.055.** $\frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$. **10.057.** $3\sqrt{3}$ см. **10.058.** $\frac{m(2\sqrt{3}+3)}{3}$. **10.059.** $\frac{r}{8}$. **10.060.** 6 и 8 см. **10.061.** 10 и 17; 21 и $\sqrt{337}$ см. **10.062.** 12 и 20 см. **10.063.** $\frac{5\sqrt{m^2+n^2}}{6}$ и $\frac{5\sqrt{m^2+n^2}}{4}$. **10.064.** 3, 4 и 5 см. **10.065.** $6r\sqrt{3}$. **10.066.** 5 см. **10.067.** 14 и 4 см. **10.068.** $18\sqrt{2}$ см. **10.069.** 18, 24 и 30 см. **10.070.** $R\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$. **10.071.** $\frac{16\sqrt[4]{3}}{3}$ см. **10.072.** 10 см. **10.073.** $2\sqrt{5}-\sqrt{2}$ см. **10.074.** $x\sqrt{2Rx-x^2}$. **10.075.** 1 см. **10.076.** $\sqrt{2}-1$. **10.077.** 6 см. **10.078.** $\sqrt{5}$ см. **10.079.** $9\sqrt{5}$ и $8\sqrt{10}$ см. **10.081.** $3\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[4]{27}$ см. **10.082.** $0{,}25\sqrt{2S}$. **10.083.** $0{,}5\sqrt{m^2-4S}$. **10.084.** 0,24 м^2. **10.085.** $5R^2$. **10.086.** В 64 раза. **10.087.** 2,25 кв. ед. **10.088.** $0{,}75R^2\sqrt{3}$. **10.089.** $285{,}61\pi$ см^2. **10.090.** 1700 см^2. **10.091.** $\frac{\pi a^2}{12}$. **10.092.** $0{,}25R^2\sqrt{3}$. **10.093.**

$\pi(p-c)^2$. **10.094.** 25π м^2. **10.095.** 5, 5, 6 и 4 см. **10.096.** 8 см. **10.097.** $\sqrt{3}$ см. **10.098.** $(\sqrt{6}+2):1$ или $(\sqrt{3}+1):2$. **10.099.** $4+2\sqrt{3}$, $4-2\sqrt{3}$, 4 и 4 см. **10.100.** 120 см^2. **10.101.** $a^2(2\sqrt{3}-3)$. **10.102.** 96 см^2. **10.103.** 64π см^2. **10.104.** 25π см^2. **10.105.** $2(7+4\sqrt{3})$ см^2. **10.106.** $0{,}5c^2$. **10.107.** $4-2\sqrt{3}$. **10.108.** $3a^2(7-4\sqrt{3})$. **10.109.** $a^2(3+\sqrt{3})$. **10.110.** $2a^2(\sqrt{2}-1)$. **10.111.** $\frac{2a^2}{3}$. **10.112.** $8:3\sqrt{3}:6\sqrt{3}$. **10.113.** $\frac{a^2(4\pi-3\sqrt{3})}{36}$. **10.114.** $\frac{a^2(\pi-2)}{8}$. **10.115.** $\frac{R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{6}$. **10.116.** $\pi R^2(3+2\sqrt{2})$. **10.117.** 48 см^2. **10.118.** $\sqrt{\frac{S(m^2+n^2)}{2mn}}$. **10.119.** $\frac{mnp^2}{2(m^2+n^2)}$. **10.120.** $\frac{5R^2\sqrt{3}}{4}$. **10.121.** $\frac{(4a+b)b\sqrt{3}}{8}$. **10.122.** 16 см. **10.123.** $\sqrt{2S}$. **10.124.** 1. **10.125.** 20π см. **10.126.** $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3\sqrt{3}+\pi}$. **10.127.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **10.128.** $a^2\sqrt{3}$. **10.129.** $2\sqrt{mn}\,(m+n)$. **10.130.** 16 см^2. **10.131.** $\frac{8Q}{\pi}$. **10.132.** 2 : 3. **10.133.** $\frac{27a^2\sqrt{3}}{8}$. **10.134.** 1024 см^2. **10.135.** 282,24 см^2. **10.136.** 54 см^2. **10.137.** πab. **10.138.** $\frac{r^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2}$. **10.139.** $\frac{\pi(a^2+b^2)-4ab}{8}$. **10.141.** 5 см. **10.142.** 2 : 1. **10.143.** 3 : 1. **10.144.** 2, 2 и 4 м^2. **10.145.** 150 см^2. **10.146.** $\frac{80}{3}$ см. **10.147.** 12 и 4 см. **10.148.** $h^2\sqrt{3}$. **10.149.** $\frac{R^2(\pi-2)}{4}$. **10.150.** $\frac{C_1^2-C_2^2}{4\pi}$. **10.151.** $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$. **10.152.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **10.153.** $R\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $R\sqrt{\frac{2}{3}}$. **10.154.** $\sqrt{\frac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$. **10.155.** $\frac{(\pi+\sqrt{3})R^2}{2}$. **10.156.** $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. **10.157.** 9. **10.158.** 84 см^2. **10.159.** $\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$. **10.160.** 24 и 30 м. **10.161.** 8,64 и 15,36 м^2.

10.162. 75 см^2. **10.163.** $\left(\frac{65}{32}\right)^2$. **10.164.** 32 см^2. **10.165.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **10.166.** 60 см^2. **10.169.** $0{,}5R(\sqrt{4+\pi}\pm\sqrt{4-\pi})$. **10.170.** $\pi\left(\frac{Ra}{R+a}\right)^2$. **10.171.** $\frac{(a^2-b^2)(\sqrt{3}-1)}{4}$. **10.172.** 4. **10.173.** 5 см. **10.174.** $\frac{\sqrt{2S}}{4}$. **10.175.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **10.178.** $AC=\frac{2mn}{\sqrt{4m^2-n^2}}$, $BC=\frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$. **10.179.** $R\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$. **10.180.** 168 см^2. **10.181.** $\frac{3a^2}{8}$. **10.182.** $\frac{a^2}{25}$. **10.184.** 450 см^2. **10.185.** 25. **10.186.** 13 см. **10.187.** $H^2\sqrt{3}$. **10.188.** $\frac{3a^2}{8}$ или $\frac{2a^2}{3}$. **10.189.** 1. **10.190.** $\frac{3\pi\sqrt{15}}{50}$. **10.191.** $\frac{36}{\sqrt{10}}, \frac{12}{\sqrt{10}}, \frac{18}{\sqrt{10}}$ и $\frac{30}{\sqrt{10}}$ см. **10.192.** $14\pi+12\sqrt{3}$. **10.193.** 20 и 10 см или 5 и 40 см. **10.195.** 17 см. **10.196.** 75°. **10.197.** $\frac{3}{2}, \frac{8}{3}$ и $\frac{25}{6}$ см. **10.198.** 14; 12,5; 29,4 и 16,9 см. **10.199.** 4 и $\frac{5\sqrt{41}}{4}$ см. **10.200.** $\frac{m(p+q)}{q}$, $\frac{m(p+q)}{p}$ и $p+q$. **10.201.** 2 : 1. **10.203.** $\frac{85}{8}$ см. **10.204.** 6,25 см. **10.205.** 5; 20; 12,5 и 12,5 см. **10.206.** 5, 5 и 6 см. **10.207.** $\frac{84}{13}$ и $\frac{72}{13}$ см. **10.208.** 6 и $2\sqrt{3}$ см. **10.209.** $\frac{120}{17}$. **10.210.** $5\sqrt{2}$. **10.211.** 5 см. **10.212.** 15 и 20 см. **10.213.** 12π. **10.214.** $4\sqrt{3}+6$, $4\sqrt{3}+6$ и $6\sqrt{3}+12$. **10.215.** 10. **10.216.** 8. **10.217.** Трапеция равнобедренная, боковая сторона равна средней линии. **10.218.** 6 см. **10.221.** $2\sqrt{5}$ см. **10.222.** $\frac{2R^2}{\sqrt{Rr}}$. **10.223.** 15, 20 и 25 см. **10.224.** 6 см. **10.225.** 90°. **10.226.** 6, 8 и 10 см. **10.227.** $b+c+d$. **10.228.** $\frac{15\sqrt{11}}{11}$ см. **10.229.** 9, 9 и $6\sqrt{2}$ см. **10.230.** 26 и 30 см. **10.231.** $4r$, $\frac{10r}{3}$, $2r$. **10.232.** $4\sqrt{2}$ и 18 см. **10.233.** $\frac{h\sqrt{3}}{3}$. **10.234.** 1 и 17 см. **10.235.** m, $\frac{m(\sqrt{5}+1)}{2}$

и $\frac{m(\sqrt{5}+1)}{2}$. **10.236.** $2\sqrt{5}, 5+\sqrt{5}$ и $5+\sqrt{5}$. **10.237.** pq. **10.238.** 1 : 3; 2 : 3. **10.239.** $\sqrt{10}$ см. **10.240.** $\frac{28}{3}$ см. **10.241.** $\frac{bm}{b-m}$. **10.242.** 4,8. **10.243.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ см. **10.244.** 7, 24 и 25 см. **10.245.** $\frac{ar}{a-r}$ и $\frac{a^2r}{(a-r)^2}$. **10.246.** $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ см. **10.247.** $2a\sqrt{7}$. **10.248.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$. **10.251.** В 7381 раз. **10.252.** 3 : 2; 3 : 1; 2 : 1. **10.253.** 130 см^2. **10.254.** $0{,}5a\sqrt{3}$. **10.255.** 8 см. **10.256.** 3 см. **10.257.** $\sqrt{a^2-ab+b^2}$. **10.258.** 5,8 см. **10.259.** 3 см. **10.260.** 5 см. **10.261.** 1 : 2. **10.262.** $\frac{2r^2}{h-2r}$. **10.266.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$. **10.268.** В середине отрезка AB. **10.270.** 3 : 4. **10.271.** 150 см^2. **10.273.** $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{\frac{Q}{q}}}$ и $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{\frac{q}{Q}}}$. **10.276.** $5\sqrt{2}$ см. **10.277.** $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. **10.278.** $a\sqrt{3}, \frac{5a\sqrt{3}}{6}$ и $\frac{5a\sqrt{3}}{6}$. **10.279.** 20 см^2. **10.280.** 30°, 30° и 120°. **10.281.** 3 см. **10.282.** 1 : 2. **10.283.** 2 см. **10.284.** $\frac{R^2\sqrt{3}(6\sqrt{3}-4)}{3}$. **10.285.** $\frac{R^2(\pi+\sqrt{3})}{2}$. **10.286.** $\frac{r^2(24\sqrt{3}-11\pi)}{6}$. **10.287.** $3+\sqrt{3}$ см^2. **10.288.** $12\sqrt{5}$ см^2. **10.289.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$. **10.290.** $\frac{\pi R^2r^2}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^4}$. **10.291.** 3,6 см^2. **10.292.** $\frac{2R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{3}$. **10.293.** $\frac{8R^3}{a}$. **10.294.** $\frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$. **10.295.** $\frac{100\pi}{9}$ см^2. **10.296.** r^2+2Rr. **10.297.** $\frac{(m+n)^2}{mn}$. **10.298.** $\frac{3p^2(4\pi-3\sqrt{3})}{4(2\pi+3\sqrt{3})^2}$. **10.299.** $\frac{5\pi R^2}{36}$. **10.300.** $\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{18}$. **10.301.** 10:1. **10.302.** $2S$. **10.305.** $\frac{\pi(b^2-2ac)}{4a^2}$. **10.306.** $\frac{R^2(3+\sqrt{2})}{4}$. **10.307.** $\frac{65\pi a^2}{4}$. **10.308.** $\frac{3a^2}{2}$. **10.309.** 8, 8, $8+4\sqrt{3}$ и $8-4\sqrt{3}$ см.

10.310. 100π см^2. **10.311.** $\frac{25}{6\pi}$. **10.312.** $R^2(\pi-\sqrt{3})$. **10.313.** $\frac{R^2(2\pi-3\sqrt{3})}{6}$. **10.314.** 4,32 см^2. **10.315.** $\frac{15\sqrt{7}}{4}$ см^2. **10.316.** $\frac{200}{3}$ см^2. **10.317.** 9 см^2. **10.318.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **10.319.** a. **10.320.** 3 : 4. **10.321.** 8 см^2. **10.322.** 6 см. **10.323.** 8 или 6 см. **10.324.** $\frac{8}{\sqrt{3}}$, $\frac{26}{\sqrt{3}}$ и $\frac{30}{\sqrt{3}}$ см. **10.325.** 288 см^2. **10.326.** 16 м^2. **10.327.** $0,5\sqrt{15}$ см^2. **10.328.** 2,16; 3 и 0,84 см^2. **10.329.** 14 см^2. **10.330.** $-\frac{b+\sqrt{b^2-2ac}}{2a}$. **10.331.** $0,5(b-a)^2$. **10.332.** $\frac{p^2-m^2}{p}, \frac{p^2+m^2\pm\sqrt{(p^2+m^2)^2-8m^2p^2}}{2p}$. **10.333.** 96 и 156 см. **10.334.** $0,5(\pi-2)a^2$. **10.335.** 14 см. **10.336.** $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{18}$ см^2. **10.337.** $\frac{a^2(2\sqrt{3}-6\pi+3\pi\sqrt{3})}{8}$. **10.338.** $0,5(2\sqrt{3}-\pi)R^2$. **10.339.** $2(3\sqrt{3}-\pi)$ см^2. **10.340.** $\frac{8R^2\sqrt{3}}{3}$. **10.341.** $0,5c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}$. **10.342.** 45° и 135°. **10.343.** 235,2 см. **10.344.** 9,6 см^2. **10.345.** Прямоугольный; 24 см^2. **10.346.** В 9 раз. **10.347.** $\angle A = \angle B$ или $\angle A + \angle B = 120°$. **10.348.** 120 см^2. **10.349.** $R^2(\sqrt{3}+1)$. **10.350.** $0,4S$. **10.351.** 16,9 см. **10.352.** $\sqrt{3}$. **10.353.** В 2,56 раза. **10.354.** $\frac{9\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{8}$ см$^2 \approx 3,4$ см^2. **10.355.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{9-5\sqrt{3}}{3}$. **10.357.** 80 см^2. **10.358.** $a\cdot\frac{3a-b}{a+b}$, если $b<3a$; $\frac{a}{3}\cdot\frac{a-3b}{a+b}$, если $a > 3b$. **10.359.** 2,4 см. **10.360.** 12 и 16. **10.361.** 10 см. **10.362.** $0,5(2r+m\pm\sqrt{m^2-4r(r+m)})$; $r\le 0,5m(\sqrt{2}-1)$. **10.363.** 18 см. **10.364.** $\frac{2mn}{m+2n}$ и $\frac{n(m+n)}{m+2n}$. **10.365.** 30° и 60°. **10.366.** $\frac{20}{3}$ и $\frac{15}{4}$ см. **10.367.** $0,5R(\sqrt{5}-1)$. **10.368.** 10 см. **10.369.** 6 или 4 см. **10.370.**

$\frac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(a-b+c+d)(a-b+d-c)(c+a-b-d)(c-a+b+d)}$. **10.371.** $\angle A+\angle B=90°$ или $|\angle A-\angle B|=90°$. **10.372.** n. **10.373.** 16 см. **10.374.** Боковую сторону. **10.375.** 2,25 R^2. **10.376.** $\sqrt{0{,}5(a^2+b^2)}$. **10.377.** 8, 4 и 6 см. **10.378.** $\frac{2Rr}{R+r}$. **10.379.** m. **10.381.** $\frac{11}{3}$ см^2. **10.385.** $S\left(1-\frac{3m^2}{(2m+n)^2}\right)$. **10.386.** 3 и 4. **10.387.** 45°, 45° и 90°. **10.388.** $AB=AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **10.389.** $\frac{175}{48}$ см. **10.390.** 8,25 см. **10.391.** 6 см. **10.392.** $0{,}25R^2(8\sqrt{3}-9)$. **10.393.** $0{,}4R^2$. **10.395.** $\frac{a^2(3-3\sqrt{3}+\pi)}{3}$. **10.396.** $\frac{3R^2(2\sqrt{3}-\pi)(7-4\sqrt{3})}{2}$. **10.397.** $\frac{2R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{9}$. **10.398.** $R^2(3-2\sqrt{2})(4-\pi)$. **10.399.** $\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{18}$. **10.400.** $\frac{l(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-l^2(a+b)^2}$. **10.401.** $\sqrt{\frac{Q}{\pi-3}}$. **10.402.** $\frac{\pi R^2}{6}$. **10.403.** 1 см. **10.405.** $\frac{a(a-2b)\sqrt{3}}{12}$. **10.406.** Rp. **10.407.** 3 : 7. **10.408.** 125 см^2. **10.409.** $\sqrt{42}$ и $\sqrt{33}$. **10.410.** $a\sqrt{mn}\,\frac{(m+a-n)}{a-n}$. **10.411.** $(\sqrt{3}-1)S$. **10.412.** r, $\frac{4r}{3}$ и $\frac{5r}{3}$. **10.415.** $\frac{(\sqrt{d+c}\pm\sqrt{d-c})^2}{4}$.

10.416. $\frac{1}{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)}$. **10.417.** 5.

10.418. $\frac{ad+bc}{ab+cd}$. **10.419.** $\frac{3136\pi}{81}$ см^2. **10.420.** $\frac{a(3+\sqrt{6})}{6}$ и $a(5+2\sqrt{6})$ или $\frac{a(3-\sqrt{6})}{6}$ и $a(5-2\sqrt{6})$. **10.422.** $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$. **10.423.** 1,6 см^2. **10.424.** $\frac{a^2(9-5\sqrt{3})}{12}$.

10.425. $\frac{180\sqrt{3}}{19}$ см^2.

ГЛАВА 11

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

11.001. $\frac{c^3\sqrt{3}}{48}$. **11.002.** $\frac{R^3\sqrt{6}}{4}$. **11.003.** $\frac{a^3}{24}$; $\frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{4}$. **11.004.** $\frac{Sd}{2}$. **11.005.** $\sqrt{3}$. **11.006.** 144 см^3. **11.007.** 3. **11.008.** $\frac{ab\sqrt{6ab}}{2}$. **11.009.** $6V$. **11.010.** $a^2(\sqrt{5}+1)$. **11.011.** $\frac{3l^3}{16}$. **11.012.** $\frac{a^2(1+\sqrt{7})}{2}$; $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **11.013.** $2a^2$. **11.014.** $\frac{3h^2\sqrt{3}}{2}$. **11.015.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **11.016.** $\frac{b^3\sqrt{3}}{24}$. **11.017.** $\frac{\sqrt{47}}{24}$см^3. **11.018.** $\frac{a^2b\sqrt{3}}{12}$. **11.019.** $\frac{(l^2-h^2)h\sqrt{3}}{4}$. **11.020.** $18\sqrt{2}$ дм^3. **11.021.** 60,375 см^3. **11.022.** $a^3\sqrt{2}$. **11.023.** 26,25 дм^2. **11.024.** $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{2}}{6}$. **11.025.** $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{3}}{12}$. **11.026.** $2Q\sqrt{2}$. **11.027.** $\frac{2S\sqrt{S}}{3}$. **11.028.** $\frac{8r^3\sqrt{3}}{3}$; $24r^2$. **11.029.** $9\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$см^2. **11.030.** $4\sqrt{3}$ см^3. **11.031.** $\frac{a^3}{6}$; $a^2(1+\sqrt{2})$. **11.032.** 108 см^3. **11.033.** $21\sqrt{55}$ см^3; 84 см^2. **11.034.** $\frac{3d^3\sqrt{15}}{50}$. **11.035.** $2d^3\sqrt{2}$. **11.036.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **11.037.** $a^2(4+\sqrt{3})$. **11.038.** $2a(a+\sqrt{4b^2+a^2})$. **11.039.** $a^2\sqrt{3}$. **11.040.** 6 см^3. **11.041.** $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$. **11.042.** 872 см^3. **11.043.** $\sqrt{0{,}5S_1S_2Q}$; $2\sqrt{S_1^2+S_2^2}$. **11.044.** $\frac{l^3\sqrt{3}}{12}$. **11.045.** $\frac{9d^3}{64}$. **11.046.** $ab\sqrt{3a^2-b^2}$. **11.047.** $2(a+b)\sqrt{3(a^2+b^2)}$. **11.048.** $0{,}375a^3$. **11.049.** $0{,}125a^3$. **11.050.** $1{,}5\sqrt{(l^2-h^2)(3l^2+h^2)}$. **11.051.** $\frac{9\sqrt{2}}{8}$см^3. **11.052.** $\sqrt{3}(2Q+0{,}5a^2)$. **11.053.** $1{,}5h^2\sqrt{3}$. **11.054.** $\frac{mnc^2\sqrt{4b^2-c^2}}{12(m^2+n^2)}$. **11.056.** $70\sqrt{3}$ см^2.

11.057. $\dfrac{mnpd^3}{(m^2+n^2+p^2)^{3/2}}$. **11.058.** $\dfrac{h^2\sqrt{3(9m^2-h^2)}}{27}$. **11.059.** $\dfrac{1}{4l}\sqrt{(M+N+P)(M+N-P)(M+P-N)(N+P-M)}$. **11.060.** $2\left(P+\dfrac{2V}{\sqrt{P}}\right)$.

11.061. $6h^2$. **11.062.** $\dfrac{l^3\sqrt{2}}{12}$; $\dfrac{l^2(2+\sqrt{2})}{2}$. **11.063.** $3a^2$; $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **11.064.** $0{,}5h^3\sqrt{3}$.

11.065. $S\sqrt{3}$. **11.066.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **11.067.** $18\sqrt{3}$ см^3. **11.068.** $3a^2$; $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **11.069.** $Q\sqrt{\dfrac{Q}{3}}$. **11.070.** $\dfrac{abS}{4(a+b)}$. **11.071.** $\dfrac{6\sqrt{1833}}{47}$. **11.072.** $\dfrac{mnQ\sqrt{Q}}{m^2+n^2}$. **11.073.** 3 см. **11.074.** $4\left(\dfrac{8}{3}\right)^3$ м^3. **11.076.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **11.077.** $\dfrac{Sr}{3}$. **11.078.** $V=CS$. **11.080.** $2\pi(\sqrt{2}+1)a^2$; $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

11.081. $\dfrac{\pi R}{p}$. **11.082.** $\dfrac{1152\pi}{125}$ см^3. **11.083.** $\dfrac{4\pi h^3}{81}$. **11.084.** $\pi R^2\sqrt{5}$. **11.085.** $0{,}5N\sqrt{\pi M}$; $\pi N+2M$. **11.086.** 24π см^3. **11.088.** 3 : 2 : 1. **11.089.** $\dfrac{\pi R^3\sqrt{15}}{3}$. **11.090.** $4\pi Q$. **11.091.** 600π см^2; 1000π см^3. **11.092.** 216π см^2; 448π см^3. **11.093.** $S_1:S_2=\pi:2$; $V_1:V_2=\pi\sqrt{3}:2$. **11.094.** $S_1:S_2 = V_1:V_2 = 4:9$. **11.095.** $64\pi:27$. **11.096.** $\dfrac{\pi(R^2+h^2)^2}{h^2}$. **11.097.** 9 : 16. **11.098.** $\dfrac{\pi Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$. **11.099.** $4\pi\sqrt{3}$ см^2; 2π см^3. **11.100.** $\dfrac{7V}{27}$. **11.101.** $\dfrac{2S\sqrt{6\pi S}}{27\pi}$. **11.102.** 8 м^2. **11.103.** $2R\sqrt[3]{4}$. **11.104.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **11.106.** $\dfrac{9a^3\sqrt{11}}{4}$. **11.107.** $16\sqrt{2{,}2(\sqrt{2}-1)}$ м^2. **11.108.** $\dfrac{640(1+\sqrt{2})}{3}\approx 515$ дм^3.

11.109. $\dfrac{a^3\sqrt{1+\sqrt{5}}}{6}$. **11.110.** 3 см. **11.111.** $4S$. **11.112.** $\dfrac{m^2(2+\sqrt{2})}{2}$; $\dfrac{m^3\sqrt[4]{2}}{6}$. **11.113.** 260 дм^2; 312 дм^3. **11.114.** 1900 м^3. **11.115.** $0{,}5(S_1+S_2)\,h$. **11.116.** 12 см^3. **11.117.** 906 см^2. **11.118.** $a^2(1+2\sqrt{3}+\sqrt{13})$; $0{,}5a^3\sqrt{3}$. **11.119.** $\dfrac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$.

11.120. $\frac{2\sqrt{6}}{\pi^3}$. **11.121.** $\sqrt{6}$. **11.122.** $\frac{37}{27}$ и $\frac{152}{27}$ см^3. **11.123.** $\frac{8Q\sqrt{3}}{3}$. **11.124.** $\frac{a^3(\sqrt{2}-1)}{8}$. **11.125.** $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{13})}{3}$. **11.126.** $\frac{3a^3}{4}$; $\frac{3a^2\sqrt{6}}{2}$. **11.127.** $\frac{7a^3(\sqrt{2}-1)}{3}$.

11.128. $\frac{3a^2}{4}$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$. **11.129.** $10\sqrt{19}$ см^2. **11.130.** $1:\sqrt{2}$. **11.131.** $\frac{ab\sqrt{3(4a^2-b^2)}}{8}$.

11.132. $\frac{S\sqrt{S}\sqrt[4]{27}}{9}$. **11.133.** $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{5})}{4}$. **11.134.** $\frac{a^3}{128}$. **11.135.** $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{2}}{6}$.

11.136. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{\frac{3(m+2n)}{m}}\right)$. **11.137.** $\frac{144\sqrt{3}}{5}$ см^3. **11.138.** 192 см^2.

11.139. $\sqrt{3}(3+2\sqrt{2}):6$. **11.140.** $\frac{d^3\sqrt{2}}{3}$. **11.141.** $4m^2\sqrt{3}$. **11.142.** $\frac{S\sqrt{S}\sqrt[4]{6}}{2}$.

11.143. $\frac{a^3(27\sqrt{2}-22\sqrt{3})}{2}$. **11.144.** $\frac{c^3}{32}$. **11.145.** $\frac{abc\sqrt{2}}{3}$. **11.146.** $\frac{a^2(6+3\sqrt{3}+\sqrt{7})}{2}$. **11.147.** $8(11+\sqrt{34})$ м^2. **11.148.** $VS_2\sqrt{S_2}:(S_2\sqrt{S_2}-S_1\sqrt{S_1})$.

11.149. 12 дм^3. **11.150.** 1,9 дм^3. **11.151.** $0{,}5a^3$. **11.152.** 9 : 1; 27 : 1. **11.153.** 3 : 4.

11.154. $3al+a^2$. **11.155.** $ab(\sqrt{2}+1)$. **11.157.** $\frac{ab(a^2+b^2+ab)}{3(a+b)}$. **11.158.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

11.159. 200 см^3. **11.160.** $\frac{d_1\sqrt{16Q^2-d_1^2d_2^2}}{12}$. **11.161.** $\frac{2PQ}{3a}$. **11.162.** $\frac{a^2\sqrt{2(2b^2-a^2)}}{12}$; $0<a<b\sqrt{2}$. **11.163.** $2l\left(p+\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{h}\right)$, где $p=0{,}5(a+b+c)$. **11.164.** $\frac{a^3}{8}$; $\frac{a^2\sqrt{3}(3+\sqrt{2})}{4}$. **11.165.** $\sqrt{a^4-(b^2-c^2)^2}+\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}+\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$. **11.166.** $\frac{abc\sqrt{2}}{2}$. **11.167.** $36\sqrt{2}$ см^3.

11.168. $\frac{S\sqrt{S}}{3}$. **11.169.** $\sqrt{6}$. **11.170.** $\frac{18a^3b^3}{(a^2-b^2)\sqrt{4b^2-a^2}}$; $b<a<2b$. **11.171.**

$\frac{2R^3\sqrt{6}}{9}$. **11.172.** $\frac{27\sqrt{2}}{8}$ куб. ед. **11.173.** $12R^2\sqrt{3}$. **11.174.** $\frac{21R^3}{16}$. **11.175.** $3ab$.

11.176. $\frac{2r^2(R+\sqrt{R^2-r^2})}{3}$ или $\frac{2r^2(R-\sqrt{R^2-r^2})}{3}$. **11.177.** SL. **11.178.** $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$.

11.179. $0{,}5a^2\sqrt{3}$. **11.180.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab}$. **11.181.** $\frac{\pi S\sqrt{5S}}{21}$. **11.182.** $\frac{2\pi^2R^3}{3(\pi^2-1)}$.

11.183. 5 : 1. **11.184.** $\frac{3(2m-n)}{4n}$. **11.185.** $\frac{64\pi}{9}$ см^2. **11.186.** $\frac{\pi h^3}{24}$. **11.187.** $\frac{\pi a^2}{6}$.

11.188. πl^2; $\frac{2\pi r(l^2-r^2)}{3}$. **11.189.** 3,75 см. **11.190.** $\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{6}$. **11.191.**

$\frac{2(m^2+mn+n^2)}{\pi mn}$. **11.192.** $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{10\pi+3\sqrt{3}}$. **11.193.** $\frac{10\pi h^3}{9}$. **11.194.** $2\pi dp$. **11.195.**

$\frac{\pi R^3\sqrt{15}}{3}$. **11.196.** $\frac{a^3(3\sqrt{2}-2)}{3}$. **11.197.** $\frac{a^3}{4}$. **11.198.** 336 см^3; 396 см^2. **11.199.**

$\frac{m^2n^2}{2l}$. **11.200.** 4 : 121. **11.201.** $\frac{a^3}{12}$. **11.202.** 3 : 1. **11.203.** $\frac{a^3}{6}$. **11.204.**

$\frac{16a^3b^3}{3(a^2-b^2)\sqrt{2b^2-a^2}}$; $b<a<b\sqrt{2}$. **11.205.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$. **11.206.** $\frac{\sqrt{3(3m^2+2am-a^2)}}{a-m}$.

11.207. $2a^3(\sqrt{2}-1)$. **11.208.** $2a^2\sqrt{3}$; $\frac{a^3}{3}$. **11.209.** 20,25 см^2.

11.211. $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **11.212.** $18d^2$. **11.213.** 24 м^3. **11.214.** $\frac{9\sqrt{39}}{4}$ см^3.

11.215. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. **11.218.**

$\frac{h(2ab+2a_1b_1+ab_1+a_1b)}{6}$. **11.219.** $\frac{9a^3}{64}$. **11.220.** $\frac{a+\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$. **11.222.**

$2\pi a^2$; $\frac{(2\pi+3\sqrt{3})a^3}{6}$. **11.223.** $\frac{q^2(2-q)}{4}$ при $0<q<2$; при $q\geq 2$ задача не имеет решения. **11.224.** $\dfrac{\pi R^2(4-\sqrt{7})}{2}$ или $\dfrac{\pi R^2(12-3\sqrt{15})}{2}$. **11.225.** $\dfrac{\pi h^3}{l}$. **11.226.** $\dfrac{12}{19}$ м.

11.227. $\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$. **11.229.** $\dfrac{a^3(5+\sqrt{5})}{24}$. **11.230.** $3H^2\sqrt{3}$.

11.231. $60°$; $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **11.233.** а) $5\sqrt{3}$ и $\sqrt{51}$ см; б) нет.

ГЛАВА 12

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

12.001. $\dfrac{l}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3\alpha}{4}\right)}$. **12.002.** $\sin 2\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **12.003.** $\cos\dfrac{\alpha}{2}:\cos\dfrac{\alpha}{6}$. **12.004.** $\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$; $\operatorname{arctg}2\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. **12.005.** $h\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. **12.006.** $\dfrac{1}{3}\sqrt{S\sin 2\alpha}$. **12.007.** $\dfrac{k^2+k+1}{(k+1)^2}$. **12.008.** $\dfrac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}$ и $\dfrac{a\sin\alpha}{b+a\cos\alpha}$. **12.009.** $\dfrac{a\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\alpha}{4}\right)}$. **12.010.** $\dfrac{8R}{\sin\alpha}$. **12.012.** $\arccos\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$. **12.013.** $\dfrac{1}{2k}$.

12.014. $\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}$. **12.015.** $\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **12.016.** $\dfrac{\sqrt{h_1^2+h_2^2+2h_1h_2\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. **12.017.**
$k>1.$
$2d\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi(m-n)}{4(m+n)}$. **12.018.** $\arccos\dfrac{k-1}{k}$ и $\pi-\arccos\dfrac{k-1}{k}$; $k>1$. **12.019.** $2\sqrt{\dfrac{S\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{3}}$. **12.020.** $\dfrac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{4}}$. **12.021.** $\dfrac{4r\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$. **12.022.** $60°$. **12.023.** $\dfrac{a}{4}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+9}$.

12.024. $\dfrac{4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$. **12.025.** $\left(\operatorname{ctg}\alpha+\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right):(\operatorname{tg}\alpha-\alpha)$.

12.026. $2\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b\sin\alpha}$ и $\pi-2\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b\sin\alpha}$. **12.027.** $\dfrac{4R^2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}$. **12.028.**

$\dfrac{r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$. **12.029.** $\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **12.030.** $\dfrac{2\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}$. **12.031.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

12.032. $r^2\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. **12.033.** $\dfrac{P\sin\alpha}{4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. **12.034.** $\dfrac{2\sin 2\alpha\sin^2\alpha}{\pi}$.

12.035. $\dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$. **12.037.** $2\cos^2\dfrac{\alpha}{4}$. **12.038.** $30°$. **12.040.** $\dfrac{h^2\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 16 кв. ед. **12.041.** $\sqrt{b^2+c^2\pm 1{,}2bc}$. **12.042.** $R^2(\alpha+\sin\alpha)$. **12.043.** $\dfrac{b\sin\alpha}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$. **12.044.** $2d^2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$. **12.045.** $\dfrac{1}{3}\pi d^3\operatorname{ctg}^3\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **12.046.** $\dfrac{l\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **12.047.** $\dfrac{7\pi l^3}{54}\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}$. **12.048.** $2\arcsin\dfrac{\alpha}{2\pi}$. **12.049.** $2\arcsin\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. **12.050.** $\dfrac{1}{7}$. **12.051.** $\dfrac{a^2\sin 2\alpha}{2\cos\varphi}$. **12.052.** $\dfrac{\pi}{3}ab(a+b)\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

12.053. $2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **12.054.** $\dfrac{\pi H^3}{12}\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. **12.055.** $\dfrac{a^2\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$. **12.056.** $\dfrac{8\pi r^2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\alpha}$. **12.057.** $\dfrac{d^3\sin\beta\sin 2\beta\sin 2\alpha}{8}$. **12.058.** $\sqrt[3]{\dfrac{4V\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{\pi}}$. **12.059.** $\arccos\dfrac{1}{9}$. **12.060.** $\dfrac{a^3\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{6}$. **12.061.** $\dfrac{(a+b)(a-b)^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta}{8}$. **12.062.** $\sqrt[3]{\dfrac{2V}{\operatorname{ctg}^2\beta\sin\alpha}}$. **12.063.** $\dfrac{2h^3\operatorname{tg}^2\alpha\sin\beta}{3}$. **12.064.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.065.** $\dfrac{\sqrt{3}l^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{8}$. **12.066.** $\dfrac{\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.067.** $\dfrac{1}{8}l^3\sin 2\beta\cos\beta\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. **12.068.**

$\arcsin\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}$; $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. **12.069.** $\frac{\pi S}{\sin\frac{\pi n}{m+n}}$. **12.070.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **12.071.** $\frac{2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. **12.072.** $\frac{H^3\,\mathrm{ctg}^2\beta\sin 2\alpha}{3}$. **12.073.** $2\,\mathrm{arctg}\frac{b}{a}$. **12.074.** $1-k$. **12.075.** $2\,\mathrm{arctg}\frac{4m}{\pi n}$ при $\frac{m}{n}<\frac{\pi}{4}$; $2\,\mathrm{arctg}\frac{\pi n}{4m}$ при $\frac{m}{n}>\frac{\pi}{4}$. **12.076.** $\mathrm{arctg}\frac{k}{2\sin\alpha}$. **12.077.** $\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{5+4\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}}$. **12.078.** $2\arcsin\frac{k}{\sqrt{3}}$; $0<k<\sqrt{3}$. **12.079.** $\arcsin\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$. **12.080.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.081.** $\mathrm{arcctg}\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\beta}$. **12.082.** $2\,\mathrm{arctg}\cos\alpha$. **12.083.** $2\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{n}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.084.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **12.085.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. **12.086.** $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$. **12.087.** $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **12.088.** $\arcsin\frac{\sqrt{12cV}}{c^2}$. **12.089.** $\frac{(P^2-4l^2\sin^2\alpha)l\cos\alpha}{8}$. **12.090.** $\frac{\pi l^3\sin 2\beta\cos\beta}{8\cos^2\alpha}$. **12.091.** $2\pi a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$. **12.092.** $V\sin^2\frac{\alpha}{4}$. **12.093.** $\cos 2\alpha:1$, считая от основания. **12.094.** $V\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **12.095.** $\mathrm{arctg}(2\,\mathrm{ctg}\,\alpha)$. **12.096.** $\frac{\pi l^3\sin^3 2\alpha}{12}$. **12.097.** $\frac{n(a^2-b^2)\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n}}{4\cos\alpha}$. **12.098.** $\frac{\pi S\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{3\sin^2 2\alpha\cos^3\alpha}$. **12.099.** $\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$. **12.100.** $\frac{a^3\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{2}$. **12.101.** $\frac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **12.102.** $\frac{2V\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\pi}$. **12.103.** $\frac{\sin\alpha}{4\pi\cos\beta\cos^2\frac{\beta}{2}}$. **12.104.** $\mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{k^2-1}}$. **12.105.** $\frac{\pi h^3}{3\sin^2\beta}\left(\cos^2\beta+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.106.** $\frac{3H^2\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **12.107.** $\arccos\frac{1}{3}$. **12.108.**

$\operatorname{arctg}\dfrac{2m}{m+n}$. **12.109.** $\dfrac{H^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$. **12.110.** $\dfrac{8\sqrt{3}\pi r^2}{3\sin^2\alpha}$. **12.111.** $\dfrac{a^3\operatorname{ctg}\varphi\sin\alpha\sin\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$.

12.112. $\dfrac{\pi d^2}{2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}$. **12.113.** $\arcsin\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ и $\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. **12.114.**

$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$. **12.115.** $\dfrac{7}{25}$. **12.116.** $\dfrac{aS}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}\right)$. **12.117.** $\dfrac{2\sin\alpha}{\pi}$. **12.118.** $-\dfrac{1}{3}$.

12.119. $\dfrac{\pi r^3\operatorname{ctg}^3\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$. **12.120.** $\dfrac{m^3\sin2\alpha\cos\alpha}{3}$. **12.121.**

$\dfrac{a\sqrt{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}}{3\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.122.** $\dfrac{\pi a^3\operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.123.** $\dfrac{\pi a^3\sin2\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}}{24\cos^5\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.124.**

$\dfrac{d^2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.125.** $\dfrac{4S\sqrt[4]{3}\sin\alpha\sqrt{S\cos\alpha}}{3}$. **12.126.** $2\arccos\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$. **12.127.**

$\dfrac{d^2\sin\alpha}{2}$. **12.128.** $\dfrac{3l^2\sin^2 2\alpha}{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$. **12.129.** $\dfrac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{6}$. **12.130.** $\dfrac{a^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$. **12.131.**

$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. **12.132.** $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-1$; при $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$. **12.133.** $\dfrac{\sin\alpha}{2\alpha-\sin\alpha}$.

12.134. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos2\alpha}}{2\sin2\alpha}$. **12.135.** $\dfrac{2\alpha\cos^4\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}\right)}{\pi\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.136.** $\dfrac{p^2+ap-q^2}{p}$.

12.137. $\sqrt{S\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.138.** $-\cos2\alpha$. **12.139.** $2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$. **12.140.** $2\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right):\cos\alpha$, считая от вершины. **12.141.** $\dfrac{h\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. **12.142.** $\dfrac{R^2}{4}$. **12.143.** $\dfrac{1}{13}$.

12.144. $\dfrac{72}{97}$. **12.145.** $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin\beta}$. **12.146.** $\operatorname{arctg}\dfrac{n\sqrt{3}}{2m+n}$. **12.147.** $\dfrac{7}{18}$.

12.148. $\operatorname{arctg}\dfrac{3k}{2}$. **12.149.** $\dfrac{r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$. **12.150.** $\dfrac{1}{k-1}$; $k>2$. **12.151.** $\dfrac{\pi}{4}\pm\arcsin\dfrac{\sqrt{2}\,(k-1)}{2(k+1)}$. **12.152.** $\arcsin\dfrac{2(1+k)}{\pi k^2}$, $\arcsin\dfrac{2(1+k)}{\pi k}$, $\pi-\arcsin\dfrac{2(1+k)}{\pi k^2}$ и $\pi-\arcsin\dfrac{2(1+k)}{\pi k}$; $k\geq\dfrac{2}{\pi-2}$. **12.153.** $2R\left(1+\arcsin\dfrac{r}{R-r}\right)$. **12.154.** $2\arcsin\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ и $\arccos\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$. **12.155.** $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\gamma}{2}\right)}{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\gamma}{2}\right)}$. **12.156.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$.

12.157. $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$. **12.158.** $\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{4}{5}$. **12.159.** $\arccos\dfrac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$ и $\pi-\arccos\dfrac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$. **12.160.** $\arcsin\dfrac{4-k^2}{k^2}$ и $\pi-\arcsin\dfrac{4-k^2}{k^2}$; $\sqrt{2}\leq k\leq 2$.

12.161. $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **12.162.** $\dfrac{R}{2\cos^2\dfrac{(\pi+2)R-l}{4R}}$. **12.164.** $\dfrac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha$. **12.165.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{4S}{a^2}$; $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{4S}{a^2}+\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{4S}{a^2}$. **12.166.** $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{4k}{3}$ и $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{4k}{3}$; $0<k\leq\dfrac{3}{4}$.

12.167. $\dfrac{R^2\sin\alpha(\sqrt{4-\sin^2\alpha}-\cos\alpha)}{8}$. **12.168.** $\sqrt{a^2+2ah\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.169.** $3-\sqrt{5}$.

12.170. $\dfrac{S\sin(\alpha-\gamma)}{2\sin(\alpha+\gamma)}$. **12.171.** $\dfrac{3\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$. **12.172.** $\dfrac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin 2\beta}$. **12.173.**

$\dfrac{a\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)}{\sin\alpha\cos\beta}$. **12.174.** $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\beta}$. **12.175.** $\dfrac{R\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)}$. **12.176.** $\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$. **12.177.** $\sqrt{a^2-b^2}\sin\alpha-b\cos\alpha$. **12.178.** $\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{4}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. **12.179.** $\dfrac{4}{5}$.

12.180. $\dfrac{5}{13}$. **12.181.** $\arcsin\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$; $\alpha\le\dfrac{2\pi}{3}$. **12.182.** $\dfrac{2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha}$.

12.183. $-\dfrac{3}{5}$. **12.184.** $\dfrac{m}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.185.** $\sqrt{a^2+4S\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.186.** $\dfrac{\pi}{6}$. **12.187.** $-\dfrac{1}{2}S\operatorname{ctg}\alpha\sin4\alpha$. **12.188.** $P_a>P_b>P_c$. **12.189.** $\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{(m+n)\sqrt{3}}{m-n}$. **12.190.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ и $\arcsin\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. **12.191.** $a(\pi-\alpha-\beta)\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **12.192.** $2\arccos\dfrac{(a+b)l}{2ab}$. **12.194.** 2 кв. ед. **12.196.** $\dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.197.** $\dfrac{1}{4}\sin2\alpha\sin2\beta$. **12.198.** $\dfrac{h}{2}\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}\right)$. **12.199.** $\dfrac{\pi a^2(2-\sqrt{3})}{18}$. **12.200.** $\dfrac{a\sin\alpha}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$. **12.201.** $\dfrac{S}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin^3 15^\circ}\sqrt{S\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(15^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. **12.202.** $\dfrac{4\pi R^3\sin^4\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\alpha}$.

12.203. $\dfrac{a^3\operatorname{tg}\varphi}{12}$; $\dfrac{a^2\sqrt{3(4\operatorname{tg}^2\varphi+1)}}{4}$. **12.204.** $\dfrac{a^3\sqrt{\cos2\alpha}}{\sin\alpha}$. **12.205.** $\dfrac{a\sqrt{\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{2\sin\alpha}$.

12.206. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}$; $\dfrac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{48}$. **12.207.** $\dfrac{9p^3\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}}{4\sqrt{3\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1}}$. **12.208.** $\dfrac{\sqrt{3}p^3\sqrt{(4+\operatorname{tg}^2\alpha)^3}}{8\operatorname{tg}^2\alpha}$.

12.209. $2h^2\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}$; $\dfrac{h^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{2}$. **12.210.** $\dfrac{a^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{8}$. **12.211.** $\dfrac{4r^3\operatorname{ctg}^3\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha}$. **12.212.** $\dfrac{b\sin\alpha}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{4}}$. **12.213.** $\dfrac{\sqrt{3}d^3\sqrt{(4\operatorname{tg}^2\alpha+1)^3}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$. **12.214.** $\dfrac{a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{3}$; $\dfrac{2a^2\sin\alpha\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi}$. **12.215.** $\dfrac{16}{3}S\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{\dfrac{2S\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\alpha}}$; $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. **12.216.** $\arccos\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. **12.217.** $\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **12.218.** $\dfrac{a^3\sin^2\beta\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{6\sin^2(\alpha+\beta)}$.

12.219. $\dfrac{4}{5}$. **12.220.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{3}$. **12.221.** $\dfrac{l\sqrt{5-4\cos 2\alpha}}{3}$. **12.222.** $2\sqrt{\dfrac{2S\cos\beta}{\sin\alpha}}$.

12.223. $\dfrac{2S\sqrt{S\operatorname{ctg}\beta\sin\dfrac{\alpha}{2}}}{3\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.224.** $\dfrac{\sin\alpha\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}}{3}$. **12.225.** $\dfrac{H^2\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{3(1+16\operatorname{ctg}^2\alpha)}}{2}$. **12.226.** $\dfrac{S\operatorname{ctg}\beta\sqrt{2S\sin\alpha}}{6\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.227.** $\dfrac{2a^2\sin\alpha\cos^2\dfrac{\beta}{2}}{\cos\beta}$.

12.228. $\dfrac{\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}}{6\cos\alpha}$. **12.229.** $\dfrac{4na^2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{n}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$. **12.230.** $\dfrac{1}{3}\pi R^3\cos^3\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha$. **12.231.** $\dfrac{4\cos\alpha\cos\beta}{\pi(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}$. **12.232.** $\dfrac{2\pi}{\sin 2\alpha}$. **12.233.** $\dfrac{3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{(1+\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)^3}$. **12.234.** $\dfrac{a(3+\cos 2\alpha)}{4\sin 2\alpha}$. **12.235.** $\operatorname{arctg}\sqrt{1+\sqrt{5}}$. **12.236.**

$\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(2+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.237.** $\dfrac{\pi c^3\sin 2\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{6}$. **12.238.** $\arcsin\frac{4}{5}$. **12.239.** $\dfrac{4-k}{4+k}$; $0<k<4$. **12.240.** $\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{1-2\sqrt[3]{k}}}{2}$; $0<k\le\frac{1}{8}$. **12.241.** $\dfrac{6\pi R^2\sin^2 2\alpha}{(1+2\operatorname{ctg}\alpha)^2}$.

12.242. $2\sin^2 2\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **12.243.** $\dfrac{3\sqrt{3}(3+4\operatorname{ctg}^2\alpha)}{2\pi}$. **12.244.** $-\dfrac{\pi r^3\operatorname{tg}2\alpha}{24\cos^6\alpha}$. **12.245.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}}$; $k\ge 2$. **12.246.** $2\operatorname{arcctg}\pi\approx 39{,}2°$.

12.247. $\dfrac{9\sin 2\alpha\cos\alpha}{8\pi\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}$. **12.248.** $2\arcsin\operatorname{tg}\alpha$. **12.249.** $\dfrac{\sqrt{2(1+\sin^2\alpha)}\sin(\alpha+\beta)}{2\sin^2\alpha\cos\beta}$.

12.250. $\dfrac{\pi\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)}{4\sin\alpha\cos^3\frac{\alpha}{2}}$. **12.251.** $\pi-\arccos\dfrac{n^2}{m^2}$. **12.252.** $\frac{1}{2}\arcsin\dfrac{k}{2\sin\frac{\pi}{n}}$; $0<k\le 2\sin\frac{\pi}{n}$. **12.253.** $\dfrac{\cos^3\alpha\cos^3\beta}{3\sin\alpha\sin\beta\cos^2(\alpha+\beta)}$. **12.254.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sqrt[3]{6V\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}$. **12.255.** $\dfrac{l\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta+\cos^4\frac{\alpha}{2}}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **12.256.** $\dfrac{2R^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha}{3}$.

12.257. $\dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\pi(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)}$. **12.258.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}\operatorname{ctg}^2\varphi}{(2\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\varphi)^3}$. **12.259.** $\dfrac{a(a-b)\operatorname{tg}\alpha}{3a-b}$.

12.260. $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **12.261.** $\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi-\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\right)$. **12.262.** $\sin(\alpha\pm\beta)\sqrt{\dfrac{S}{2\sin\alpha\sin 2\beta}}$. **12.263.** $\dfrac{H^3\sqrt{3}}{4\sin^2\alpha}$. **12.264.** $\dfrac{2(m+n)H^2}{m-n}\times$

$\times \operatorname{ctg}\alpha \sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. **12.265.** $\dfrac{2\pi a^3}{3\cos\alpha \sin 2\alpha \cos^2 \dfrac{\pi p}{p+q}}$. **12.266.** $\arccos(\sqrt{3}-1)$ и

$\dfrac{\pi}{2} - \arccos(\sqrt{3}-1)$. **12.267.** $\dfrac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{k}$; $k > \pi$. **12.268.**

$\dfrac{H^3 \cos\beta \sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{2\sin^2\alpha}$. **12.269.** $\dfrac{\pi a^2(3\sin^2\alpha+1)\operatorname{ctg}\alpha}{4}$. **12.270.**

$\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **12.271.** $0{,}5l\sqrt{-\cos 2\alpha}$; $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$. **12.272.**

$\dfrac{4l^3 \cos\alpha \cos\beta \sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{3}$. **12.273.** $\dfrac{\pi l^3 \sin 2\alpha \cos^3\alpha}{8\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. **12.274.**

$\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}(k-1))$. **12.275.** $\dfrac{2H^2 \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha \sin\beta}$. **12.276.**

$\dfrac{2V \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{a \sin\dfrac{\alpha}{2} \sin\dfrac{\beta}{2}}$. **12.277.** $\dfrac{l^3 \sin\dfrac{\alpha}{2} \sqrt{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)}}{3\sin^2\beta}$. **12.278.** $\dfrac{S \operatorname{tg}\beta \sqrt{S \sin\alpha}}{6}$.

12.279. $\sqrt{-k}$; $-1 < k < 0$. **12.280.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sin\alpha \sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$. **12.281.**

$16k^2 - 1$; $0 < k < \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **12.282.** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{30}$. **12.283.** $\dfrac{a^2}{\sqrt{-\cos\alpha}}$. **12.284.**

$2\operatorname{arctg}(2k\sqrt{3})$; $0 < k < \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **12.285.** $\dfrac{\arccos\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{\pi - \arccos\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}$. **12.286.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}$.

12.287. $\dfrac{24}{65}$. **12.288.** $\dfrac{3k}{k^2-2}$. **12.289.** $\arccos\dfrac{1}{k-1}$, где $k > 2$. **12.290.**

$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{l^2 - 2l\cos\dfrac{\pi}{n}}\right)$. **12.291.** $\dfrac{1+k}{2}$. **12.292.** $2\operatorname{arcctg}(2\cos\alpha)$. **12.293.**

$\dfrac{a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}$. **12.294.** $2a^3\cos^3\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **12.295.** $2r^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

12.296. $\arccos\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}$. **12.297.** $\dfrac{a\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **12.298.** $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$. **12.299.** $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$ и $\arcsin(\cos\alpha\sin\beta)$.

12.300. $\frac{1}{4}$. **12.301.** $\dfrac{a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sin\varphi}$. **12.302.** $S\operatorname{tg}\varphi\sqrt{\dfrac{S}{2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta}}$. **12.303.** $\dfrac{abc}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}$. **12.304.** $l^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. **12.305.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\alpha}$. **12.306.** $\dfrac{a^2b\sin\alpha}{2(a+b)\cos\beta}$.

12.307. $l^3\sin2\beta\cos\beta\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **12.308.** $\dfrac{a^2b}{2}\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}$; $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{5\pi}{6}$. **12.309.** $\arccos\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}$. **12.310.** $\dfrac{R}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\times$ $\times\sqrt{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$. **12.311.** $\dfrac{\pi H^2\cos^4\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$. **12.312.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\alpha$. **12.313.** $2H\sin^2\frac{\alpha}{4}$. **12.314.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-8}}{2}$. **12.315.** $\dfrac{\pi a^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha}{3}$. **12.316.** $\arcsin\dfrac{6}{\pi k}$ и

$\pi-\arcsin\frac{6}{\pi k};\ k\ge\frac{\pi}{6}$. **12.317.** $\frac{\pi a^3\sin^5\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{12}$. **12.318.** $\frac{R\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{8}\right)}$.

12.319. $\frac{n\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha\sin\frac{2\pi}{n}}{4\pi}$. **12.320.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.321.** $\frac{\pi\sqrt{2}a^3\sin^3 2\alpha}{128\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

12.322. $\frac{\pi l^3\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{3\sin^2\alpha}$. **12.323.** $\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}V^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}}$. **12.324.** $\frac{a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$.

12.325. $-\frac{b^2\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{2\cos 3\alpha}$. **12.326.** $\pi n^2a^2\sin\frac{\alpha}{2}$. **12.327.** $\frac{\pi l^3\sin^2 2\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$.

12.328. $\frac{\pi a^3\left(3-\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{12}$. **12.329.** $8\pi a^2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

12.330. $\frac{r^3\left(1+\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^3\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{12\cos^2\alpha}$. **12.331.** $\frac{\sin^4\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **12.332.** $\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{4}$.

12.333. $p^3\,\mathrm{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\beta$. **12.334.** $8a^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. **12.335.** $\frac{4R^3\sin^2 2\beta\sin^2\beta\sin\alpha}{3}$. **12.336.** $\frac{l\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **12.337.** $\mathrm{arctg}\left(\frac{3V\cos\frac{\alpha}{2}}{S}\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{S}}\right)$. **12.338.** $\frac{V^2}{V^2+a^6}$. **12.339.** $\frac{\sin\alpha}{k-\sin\alpha}$; $k>2\sin\alpha$.

12.340. $\frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{2}$. **12.341.** $\frac{4k^2}{4k^2+1}$. **12.342.** $\mathrm{arctg}\sqrt{2}$. **12.343.** $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

12.344. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ и $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{2}$. **12.345.** $\frac{V}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}$. **12.346.** $\frac{1}{2}\arcsin(2(\sqrt{2}-1))$ и $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin(2(\sqrt{2}-1))$. **12.347.** $\arccos\left(-\frac{a^4}{S^2}\right)$. **12.348.** $\frac{a}{6}\sqrt{\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}}$. **12.349.** $\frac{23}{26}$. **12.350.** $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}}$. **12.351.** $\operatorname{arctg}\frac{2(4+\sqrt{6})}{5}$. **12.352.** $\operatorname{arctg}\sin\frac{\alpha}{2}$. **12.353.** $\operatorname{arctg} 2$. **12.354.** $\frac{a^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{12}$.

12.355. $\frac{8\pi S\sin^2\frac{\alpha}{4}\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{4}\right)}{\alpha-\sin\alpha}$. **12.356.** $\arccos 0{,}6$. **12.357.** $\pm\frac{\pi}{6}+\arcsin\frac{S(\sqrt{3}-1)}{l^2}$; $\arcsin\frac{S(\sqrt{3}-1)}{l^2}$. **12.358.** $4R^2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **12.359.** $\arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{3}$. **12.360.** $\frac{18\sqrt{7}l^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{49}$. **12.361.** $\frac{\pi R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\cos\alpha}$. **12.362.** $\frac{2a^2\sin\beta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$. **12.363.** $\frac{2\pi d^2}{\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **12.364.** $\operatorname{arctg} 0{,}75$. **12.365.** $\pi R^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 2\alpha$. **12.366.** $\frac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$. **12.367.** $\frac{2\pi l^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{9\sin 2\alpha}$.

12.368. $2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-2\cos 2\alpha}$. **12.369.** $\frac{h^2\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\sin^2\beta\cos\alpha}$. **12.370.** $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sin\alpha}$ и $\operatorname{arctg}\frac{2}{\cos\alpha}$. **12.371.** $\frac{aH\sin\alpha}{\sqrt{H^2+a^2\sin^2\alpha}}$. **12.372.** $2\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{4k}}$.

12.373. $\dfrac{3\sqrt{3}H^3\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{8\sin\beta}$. **12.374.** $\dfrac{7}{15}$. **12.375.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}\sin^3\beta\cos^2\alpha\sin\alpha}{\sin^3(\alpha+\beta)}$. **12.376.** $\dfrac{\pi a^3\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{24\cos^3\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.377.** $\dfrac{a^3\sin\alpha\sin^4\dfrac{\alpha}{2}}{3}$.

12.378. $\dfrac{2R^3\sin2\beta(1-\cos2\beta+\cos^2 2\beta)}{3}$. **12.379.** $\dfrac{2\pi R^3\sin2\alpha\sin4\alpha}{3}$. **12.380.** $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{8+\sin^2 2\alpha}}$. **12.381.** $-\dfrac{a^2\cos2\alpha}{\sin\alpha}$. **12.382.** $\sin\beta\sqrt{-\dfrac{S\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}$. **12.383.** $\mathrm{arctg}\dfrac{4}{3}$. **12.384.** $\dfrac{c^3\sqrt{3\cos^2\alpha+1}\sin2\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{36}$. **12.385.** $\dfrac{\pi a^3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2}$; при $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

12.386. $\mathrm{arctg}\left(\dfrac{k}{k+3}\mathrm{tg}\,\alpha\right)$. **12.387.** $\dfrac{V\sin\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{3\pi}$. **12.388.** $2\,\mathrm{arctg}\cos\alpha$ и $\pi-2\,\mathrm{arctg}\cos\alpha$. **12.389.** $\dfrac{\pi a^3\sin^2 2\alpha\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)}{3}$. **12.390.** $\dfrac{R\sin\alpha}{4\cos^2\dfrac{\pi-\alpha}{4}}$.

12.391. $\sqrt{a^2+b^2+2b(\cos\alpha\sqrt{a^2-b^2\sin^2\alpha}+b\sin^2\alpha)}$. **12.392.** $\dfrac{4R^2\,\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}}{1+\left(2\,\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}+\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}$; $\dfrac{4R^2\,\mathrm{ctg}\dfrac{\beta}{2}}{1+\left(2\,\mathrm{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}$. **12.393.** $\dfrac{S\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$. **12.394.** $4R\cos\dfrac{\alpha}{4}\sin^2\dfrac{\alpha}{8}$. **12.395.** $2\arcsin\dfrac{1\pm\sqrt{1-2m}}{2}$ и $\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{1-2m}}{2}$; $0<m\le\dfrac{1}{2}$. **12.396.** $\arcsin\left(\dfrac{a^2-b^2}{2ab}\mathrm{tg}\,\alpha\right)$ и $\pi-\arcsin\left(\dfrac{a^2-b^2}{2ab}\mathrm{tg}\,\alpha\right)$. **12.397.** $\dfrac{h}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sqrt{1+\dfrac{1}{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\right)$. **12.398.**

$\frac{d^2}{8}\left(4\cos\frac{\alpha}{2}-\pi\left(1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.399.** $\operatorname{arctg}\frac{2ah}{a^2-b^2}$. **12.400.** $\frac{H^2\sin B\cos(A-C)}{2}$. **12.401.** $\frac{(4a^2-b^2)\operatorname{tg}\alpha}{4}$. **12.402.** $\operatorname{arctg}\frac{a^2-b^2}{4S}$. **12.403.** $\arcsin\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right)$ и $\pi-\arcsin\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right)$; $k>\sqrt{2}$. **12.404.** $3\arccos\frac{k+2}{2k}$ и $\pi-3\arccos\frac{k+2}{2k}$. **12.405.** $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$ или $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$ **12.406.** 0,6 или 1. **12.407.** $-\frac{23}{27}$ **12.408.** $0{,}25b^2\operatorname{ctg}^2\beta(\beta-\sin\beta\cos(2\alpha+\beta))$. **12.409.** $\frac{\cos A}{\cos B\cos C}$. **12.410.** $0{,}5a\operatorname{ctg}\alpha$. **12.413.** $0{,}25R^2\sqrt{2}$. **12.414.** $\operatorname{arcctg}(\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha\times$ $\times(\operatorname{ctg}\beta+\cos^{-1}\alpha\operatorname{ctg}\gamma))$ и $\operatorname{arcctg}(\sin\gamma\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\gamma+\cos^{-1}\alpha\operatorname{ctg}\beta))$. **12.415.** $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$. **12.416.** $\frac{\pi}{3}$. **12.417.** $2\operatorname{arctg}\sqrt[6]{\frac{m+n}{m}}-\frac{\pi}{2}$. **12.418.** $2\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\sin\alpha)$. **12.419.** $4\pi S\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. **12.420.** $\frac{a\sqrt{3}(\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2\alpha}-2\operatorname{ctg}\alpha)}{3}$. **12.421.** $\frac{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$. **12.422.** $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{17}}{2}$. **12.423.** $\frac{\pi a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{9\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}$. **12.424.** $\frac{(ab+b^2)^{3/2}\operatorname{ctg}\alpha}{24}$. **12.425.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{2k-3}}$; $k>\frac{3}{2}$. **12.426.** $\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4b^2}{a^2}\right)$. **12.427.** $\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$. **12.428.** $a\sqrt{-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$ и $a\sqrt{-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$. **12.429.** $\frac{\pi}{3}$. **12.430.** $\operatorname{arctg}2$. **12.431.** $2\arcsin\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}$. **12.432.** $\operatorname{arctg}\sqrt{9+3\sqrt{10}}$. **12.433.** $l^3\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin2\beta\cos\beta$. **12.434.**

$\frac{H^3\sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta)\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4\sin^2\beta\sin^2\gamma}$. **12.435.** $\frac{a^2b}{4}\sqrt{3-4(\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)}$.

12.436. $\frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **12.437.** $\frac{ab^2\sin\alpha\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{2\cos\beta}$.

12.438. $\frac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}}{128\cos^5\frac{\alpha}{2}}$. **12.439.** $\frac{a^3\sin2\alpha\cos\alpha\sin\beta}{4\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}$. **12.440.** $2\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$ и $3\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}\le k<\frac{3}{2}$. **12.441.** $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$. **12.442.** $\arccos 0{,}75$. **12.443.** $\arccos\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{b}$.

12.444. $-\frac{1+3\cos2\alpha}{4}$. **12.445.** $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)$. **12.446.** $\mathrm{arctg}\frac{4V\sin^2(\beta+\gamma)}{a^3\sin\beta\sin\gamma}$.

12.447. $\frac{1}{3}$. **12.448.** $\frac{1}{24}(a+b)^2\sqrt{a(a-2b)}\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}$. **12.449.** $\frac{a\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+4}}$. **12.450.** $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{5}$. **12.451.** $\arccos(8k^2-1)$; $0<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.452.** $\frac{h^3\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}$.

12.453. $\frac{5}{12}$. **12.454.** $\frac{a^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha}{8}$. **12.455.** $\frac{2R\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$.

12.456. $\frac{3\sqrt{3}H^3\,\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}{8}$. **12.457.** $\frac{H^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin2\beta\sin\beta}$. **12.458.** $\frac{(7a+3b)\sqrt{3(a^2+b^2+2ab\cos2\alpha)}}{144\cos\alpha}$. **12.459.** $\frac{H\,\mathrm{ctg}^2\alpha(\sqrt{4\,\mathrm{tg}^2\alpha+1}-1)}{4}$.

12.460. $\frac{\pi}{4}$ или $\mathrm{arctg}\,2$. **12.461.** $\mathrm{arcctg}(4+2\sqrt{2})$ или $\mathrm{arcctg}(4-2\sqrt{2})$.

12.462. $\frac{2l^3\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin2\beta}{3}$. **12.463.** $\frac{3\cos\alpha}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}$. **12.464.** $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$.

12.465. $\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{2\sqrt{3}\,k\pi-27}}{6}$; $k>\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$.

ГЛАВА 13

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

13.001. 48; 80; 12; 12. **13.002.** 200 кг. **13.003.** 40 и 30 л. **13.004.** За 20 и 30 ч. **13.005.** 48. **13.006.** 136 га. **13.007.** На 38,8%. **13.008.** 70 кг. **13.009.** 500 книг. **13.010.** 125 м^3. **13.011.** На 6%. **13.012.** На 20%. **13.013.** На 7,1%. **13.014.** 80; 100; 90. **13.015.** 400 км. **13.016.** $\frac{4}{7}; \frac{8}{21}; \frac{12}{35}$. **13.017.** 520. **13.018.** 2400 р. **13.019.** 10 мин. **13.020.** 12; 24 : 18 = 16 : 12. **13.021.** 3 дня. **13.022.** 240 человек. **13.023.** 420 и 400 деталей. **13.024.** 68 га. **13.025.** 60 км. **13.026.** 2 и 6 ч. **13.027.** 32. **13.028.** $\frac{4}{7}; \frac{8}{21}; \frac{20}{49}$. **13.029.** 5 дней. **13.030.** 126 000, 105 000 и 94 500 р. **13.031.** 150 км. **13.032.** За 3 ч 45 мин. **13.033.** 8 страниц и 9,6 страницы. **13.034.** 720 и 150 книг. **13.035.** 5000 пар. **13.036.** 2,5 кг. **13.037.** 475, 480 и 375 ц. **13.038.** 40, 32 и 24 спортсмена. **13.039.** 13,2%. **13.040.** 1800, 780 и 390 р. **13.041.** 150 и 450 г. **13.042.** 26 га. **13.043.** 105, 135 и 175 км. **13.044.** 1,8 и 3 т. **13.045.** 13,5 кг. **13.046.** Серы 3 кг, селитры 19,5 кг, угля 2,5 кг. **13.047.** 20 скрипачей, 8 виолончелистов и 4 трубача. **13.048.** 2850, 2250 и 1950 км. **13.049.** 280; 200; 220. **13.050.** 1494 р. **13.051.** Можно увеличить на 2 дм. **13.052.** 3×4 км. **13.053.** 100 и 60 г. **13.054.** 3150 и 3450 ц. **13.055.** 33 вагона. **13.056.** $\frac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4abs}}{2b}$ и $\frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4abs}}{2b}$ л. **13.057.** 12, 16 и 20 Н. **13.058.** $\frac{3l}{2(b-a)}$ м/с, где $b > a$. **13.059.** На 45 участков. **13.060.** 15 дм^2. **13.061.** 3р., 4 р. 50 к., 6 р. и 7 р. 50 к. **13.062.** 15 комплектов. **13.063.** 21 ряд. **13.064.** 8 лошадей. **13.065.** 48 девушек и 60 юношей. **13.066.** 175 и 450 кг. **13.067.** 72 юноши и 98 девушек. **13.068.** 750 и 1000 р. **13.069.** Через 4 ч. **13.070.** 450 м^3. **13.071.** 20 машин. **13.072.** 100 км. **13.073.** 5 и 8 м или 19,5 и 22,5 м. **13.074.** Из 1,25 м. **13.075.** 46 и 40 деталей. **13.076.** 124 га; 35 ц с га. **13.077.** 20 и 60 км. **13.078.** Скорость автомобиля 100 или 80 км/ч; скорость катера 80 или 60 км/ч. **13.079.** 56 км. **13.080.** 14 и 28 км/ч. **13.081.** 48 км/ч. **13.082.** 5 и 3 км/ч. **13.083.** 60 км/ч. **13.084.** 1 ч 40 мин и 2 ч 5 мин. **13.085.** 3 ч 20 мин. **13.086.** 7. **13.087.** 5. **13.088.** A (40; 0), B (0; 30), P (16; 18). **13.089.** 415 км. **13.090.** 1,5 кг. **13.091.** 120 кг и 4860 р; 180 кг и 7560 р. **13.092.** 95 000 р; 40 000, 25 000 и 30 000 р. **13.093.** 3165 г; ≈ 79%. **13.094.** 187,5 кг. **13.095.** 2,7 м. **13.096.** 30 и 60 км/ч. **13.097.** 88 км/ч. **13.098.** 4 и 16 км/ч. **13.099.** $\frac{-nr+\sqrt{nr(nr+s)}}{2n}$ и $\frac{nr+\sqrt{nr(nr+s)}}{2n}$ км/ч. **13.100.** 32. **13.101.** 84 км; 6 и 4 км/ч. **13.102.** 21 и 12. **13.103.** 8 км; 4 км/ч. **13.104.** 48 км/ч. **13.105.** 48 мин; 25 км/ч. **13.106.** 850 км/ч. **13.107.** За 45 и 30 дней. **13.108.** 10,26 и 11,16 ц. **13.109.**

12 и 10,5 км/ч. **13.110.** За 4 и 8 ч. **13.111.** $\dfrac{\sqrt{t^2m^2+4tms}-tm}{2t}$ км/ч. **13.112.** Через 10 с. **13.113.** Через 17 мин. **13.114.** $\dfrac{a(3-\sqrt{5})}{4t}$ и $\dfrac{a(\sqrt{5}-1)}{4t}$ км/ч. **13.115.** 140 км. **13.116.** 80 км/ч. **13.117.** 20 км/ч. **13.118.** 32 и 36 км/ч. **13.119.** 24. **13.120.** 75 км/ч. **13.121.** $v=\dfrac{s(t_2+t_1)}{2t_1t_2}$ км/ч; $v_в=\dfrac{s(t_2-t_1)}{2t_1t_2}$ км/ч; $s_{ист}=\dfrac{s(t_2-t_1)^2}{2t_1t_2}$ км. **13.122.** На середине пути; 3 ч. **13.123.** 40 км/ч. **13.124.** 60 и 63 км/ч. **13.125.** $\dfrac{s(a-b)}{b}$ и $\dfrac{s(a-b)}{a}$ км/ч. **13.126.** 4 и 6 оборотов. **13.127.** $\dfrac{35}{\pi}\approx 11$ м. **13.128.** $\sqrt{v(v-s)}$ км/ч; при $v>s$. **13.129.** В 14 ч. **13.130.** $\dfrac{5}{12}$ км/ч; 2 и 3 ч. **13.131.** $\dfrac{5}{6}$ км/ч; 5 ч. **13.132.** На $\dfrac{56}{3}$, 14 и 24 мин. **13.133.** За $\dfrac{2abc}{ab+bc-ac}$, $\dfrac{2abc}{ac+bc-ab}$ и $\dfrac{2abc}{ab+ac-bc}$ мин. **13.134.** $\dfrac{bn+\sqrt{b^2n^2+240abn}}{2b}$ и $\dfrac{-bn+\sqrt{b^2n^2+240abn}}{2b}$ деталей. **13.135.** 45 ч. **13.136.** 3 км/ч. **13.137.** За 6, 8 и 12 мин. **13.138.** За 14 и 11 дней. **13.139.** 64. **13.140.** 15 и 12 дней. **13.141.** 85 714. **13.142.** За 132 и 110 мин. **13.143.** $b+\sqrt{b(b-a)}$; $b-a+\sqrt{b(b-a)}$; $\sqrt{b(b-a)}$ дней; задача имеет решение при $b>a$. **13.144.** 54. **13.145.** 28 км/ч. **13.146.** 8; 4; 2 или $-6{,}4$; 11,2; $-19{,}6$. **13.147.** 10×20 см. **13.148.** 3 см. **13.149.** -220 и 264. **13.150.** $3\times 3-4$. **13.151.** $\dfrac{l(a+b)}{2ab}$ и $\dfrac{l(a-b)}{2ab}$ м/с. **13.152.** 40×50 м. **13.153.** 149×100 м. **13.154.** 8 р. и 1 р. 20 к. **13.155.** 2330 р. **13.156.** 4 км/ч. **13.157.** 32. **13.158.** 85 кг. **13.159.** 2 млн. 160 тыс. р. **13.160.** 23. **13.161.** $\dfrac{\sqrt{b^2k^2+4abk}-bk}{2b}$ т. **13.162.** 2 р. 50 к.; 550 кг. **13.163.** 21 и 20 ц. **13.164.** 20 р. **13.165.** 20 и 120 банок. **13.166.** 1632. **13.167.** 18 и 12 км/ч. **13.168.** 2. **13.169.** 35 : 12. **13.170.** 24 и 27 га. **13.171.** 38, 31, 5, 7 и 9 лет. **13.172.** 18 дней и 24 дня. **13.173.** 71. **13.174.** 12 кг. **13.175.** $\dfrac{68}{3}$ км/ч. **13.176.** 540, 450 и 630 л. **13.177.** Десяти. **13.178.** 50 и 60 га. **13.179.** 3 сына и 2 дочери. **13.180.** $\dfrac{5}{9}$ и $\dfrac{10}{9}$. **13.181.** 9 рабочих. **13.182.** 50, 150 и 200 г. **13.183.** 20 рядов по 25 стульев в каждом. **13.184.** 75 и 60. **13.185.** 30 и 24 г. **13.186.** 16 каменщиков. **13.187.** 40 дней;

25%. **13.188.** $\frac{-kn+\sqrt{k^2n^2+240ktn}}{2k}$ и $\frac{kn+\sqrt{k^2n^2+240ktn}}{2k}$ деталей. **13.189.** $\pm 0{,}5$. **13.190.** ≈ 85 г. **13.191.** 2 и 26 Н. **13.192.** 12, 8 и 7 л. **13.193.** Через 3 ч 20 мин. **13.194.** 4 и 5 м. **13.195.** 96 м; за 14 ч. **13.196.** 56 и 84 км/ч. **13.197.** 6 и 10 мин. **13.198.** 280 и 175%. **13.199.** 600 м. **13.200.** 9000 и 13500 р. **13.201.** $0{,}5(\sqrt{b^2+32a^2}+4a-b)$ и $0{,}5(\sqrt{b^2+32a^2}+4a+b)$ м. **13.202.** 3 ч. **13.203.** 2 и 5 км/ч. **13.204.** За 12 и 24 ч. **13.205.** 37. **13.206.** 202. **13.207.** 65 и 100 км/ч. **13.208.** 24. **13.209.** Через 4 мин. **13.210.** На 40%. **13.211.** 842. **13.212.** $\frac{ab+\sqrt{ab(ab+4n)}}{2a}$ велосипедов. **13.213.** За 75 и 50 ч. **13.214.** 4 : 1. **13.215.** Через 50 мин. **13.216.** 40 и 50 км/ч. **13.217.** $\frac{\pm 3at+4b+\sqrt{9a^2t^2+16b^2}}{6t}$ км/ч; $4b > 3at$. **13.218.** 16 и 52. **13.219.** $\approx$ через 55 лет. **13.220.** 3 км/ч. **13.221.** 80 км. **13.222.** 80 км/ч. **13.223.** 1 км/ч. **13.224.** За 4 дня. **13.225.** На 1 ч больше. **13.226.** За 16 и 10 ч. **13.227.** За 10 и 8 ч. **13.228.** За 12 и 15 ч. **13.229.** 12; 8; 3; 2. **13.230.** 13 и 63. **13.231.** 5 и 11%. **13.232.** 3 и 45 км/ч. **13.233.** За 4 дня. **13.234.** 20 и 60%. **13.235.** $\frac{2}{3}$. **13.236.** На 20 досках. **13.237.** Приписанная цифра либо 0, либо 3, либо 8; в первом случае задумано число 2, во втором 3, в третьем 4. **13.238.** Из 16 выстрелов 6 удачных. **13.239.** 50. **13.242.** 60 и 90 м^3. **13.243.** 120, 90 и 70 ведер. **13.244.** Немного не покроются. **13.245.** 62 м^3. **13.246.** 1225 кругов на каждую фигуру. **13.247.** 300 кг. **13.248.** В каждом куске было по 5,6 м; 67 р. 50 к. и 45 р. **13.249.** 18 человек. **13.250.** 24 м^3. **13.251.** В 1 ч $5\frac{5}{11}$ мин. **13.252.** За 56 с. **13.253.** 65 и 20 м^3. **13.254.** Через $\frac{45v_2(v_3-v_1)}{v_3(v_2-v_1)}$ мин. **13.255.** $\frac{22}{15}$ м/с. **13.256.** $D=\frac{L^2+H^2-Hd}{H}$. **13.257.** 30 км/ч. **13.258.** $\frac{b(n-1)}{a-c}$ км/ч. **13.259.** 270 км. **13.260.** На 60°. **13.261.** 6, 9 и 12 км/ч; 42 км. **13.262.** Через 7 с после начала падения первого тела. **13.263.** 360 км. **13.264.** 3 м/с. **13.265.** $a+2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$. **13.266.** 500 м. **13.267.** 100 км/ч. **13.268.** $\frac{vd}{a-b}$ м/с. **13.269.** За 1 ч 21 мин и 1 ч 20 мин; 6 км. **13.270.** $\frac{60v_1v_2}{v_1t_2-v_2t_1}$ км/ч. **13.271.** 24 км. **13.272.** 45 км/ч. **13.273.** Через 5 с; за 0,5 м до линии поля. **13.274.** 100 км/ч. **13.275.** 8 ч 15 мин; 8 ч 53 мин; 9 ч 16 мин; 10 ч 01 мин. **13.276.** 3,25; 31,25 и 32,5 км. **13.277.** 1375 км. **13.278.** 50 км/ч. **13.279.** $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{2ab}{3b-a}$,

$\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{2ab}{3b-a}$ м/мин, где $\frac{b}{3}<a<3b$. **13.280.** За 58,5 мин. **13.281.** $\frac{a+3b+\sqrt{a^2-10ab+9b^2}}{4}$ км/ч. **13.282.** $\frac{v+\sqrt{9v^2+6sv}}{v}$ ч. **13.283.** Первоначально оба шли с одной скоростью 3 км/ч. **13.284.** 75,6 км/ч; 147 м. **13.285.** 24 мин. **13.286.** $AB=\frac{3c\beta}{4}$ км; $BC=\frac{c\beta(4\alpha-3\beta)}{4(2\alpha-\beta)}$ км. **13.287.** $2a$ дней. **13.288.** За 24 ч. **13.289.** 170 кг. **13.290.** 4 и 6 ч. **13.291.** 20, 30 и 24 ч. **13.292.** За 15 дней и 7,5 дня. **13.293.** За 8 и 6 ч. **13.294.** За $\frac{0{,}4an}{11-n}$ и $\frac{0{,}24an}{n-9}$ ч; $n = 10$. **13.295.** За $\frac{a^2+n+\sqrt{a^4+6a^2n+n^2}}{2a}$ ч. **13.296.** За 20 и 30 ч. **13.297.** $0{,}5(c+\sqrt{c^2+120bc})$ и $0{,}5(-c+\sqrt{c^2+120bc})$ км/ч. **13.298.** $\frac{1}{80}$ и $\frac{1}{90}$. **13.299.** 12° или 60°. **13.300.** 12 и 3 м/с; 360 м. **13.301.** 10, 20 и 30 зубцов. **13.302.** 3 и 4 м/с. **13.303.** 300 и 600 оборотов. **13.304.** 20 и 30 зубцов. **13.305.** 42 и 35. **13.306.** 196 км; 84 км/ч. **13.307.** 964. **13.308.** 15 или 95. **13.309.** 9 и 10 г. **13.310.** 40 и 100 т. **13.311.** 100 и 60 км/ч. **13.312.** За 14,4 ч. **13.313.** $\frac{4}{15}$. **13.314.** 9 оборотов и 2 оборота. **13.315.** 20%. **13.316.** ≈ 41,4%. **13.317.** 3 ч 40 мин и 2 ч 12 мин. **13.318.** 27,75. **13.319.** 2 л. **13.320.** 5 фильтров. **13.321.** 824 и 428. **13.322.** ≈ 2,77 кг. **13.323.** 35 и 45 кг. **13.324.** 1160 р. **13.325.** 5 станков. **13.326.** 30 км/ч. **13.327.** 13, 7 и 4 л. **13.328.** 100 ц. **13.329.** $\frac{a(\sqrt{s}+\sqrt{r})}{\sqrt{s}-\sqrt{r}}$ дней, где $s>r$. **13.330.** 10 и 15 ч или по 12 ч. **13.331.** 25 шариков и 16 колец или 16 шариков и 25 колец. **13.332.** 200 и 140 ч. **13.333.** После пяти ударов. **13.334.** 45, 36 и 30 м. **13.335.** 53. **13.336.** 28 июня. **13.337.** Через 15 рабочих дней, т.е. 17 июня. **13.338.** 285 714. **13.339.** $a+b-c$. **13.340.** 3. **13.341.** На первом месте — третий рабочий, на втором — второй, на третьем — первый. Количества выработанной ими продукции относятся как 5 : 4 : 3. **13.342.** Вышедшего из B. **13.343.** $p=5a$, $q=5$. **13.344.** 3 : 4 : 5. **13.345.** Через $43\frac{7}{11}$ мин. **13.346.** 1. **13.347.** 12 и 1232. **13.348.** $0{,}5(a+2b+\sqrt{a^2+4bc})$ и $0{,}5(2c-a+\sqrt{a^2+4bc})$ ч. **13.349.** 4 км. **13.350.** В $0{,}5(1+\sqrt{5})$ раз. **13.351.** а) 3 км/ч; б) 4 км/ч; в) 5 км/ч. **13.352.** 88 с. **13.353.** 159 и 234. **13.354.** 31 и 41. **13.355.** 60 км/ч. **13.356.** 105 м. **13.357.** 16 км/ч. **13.358.** 142 857. **13.359.** 21 и 10. **13.360.** $0<v\le 20$ км/ч. **13.361.**

14 красных и 24 синих. **13.362.** 9 и 35. **13.363.** $\frac{1}{2}+\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$; $\frac{1}{2}-\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$.

13.364. $\sqrt[k-1]{k}$. **13.365.** 240 км. **13.366.** $5 < v < 15$ км/ч. **13.367.** 180 долларов. **13.368.** 2,5 т. **13.369.** 11 лип и 5 берез. **13.370.** 12 листов. **13.371.** $1 \le h \le$ $\le 0{,}5(5-\sqrt{5})$ м. **13.372.** 18 предметов. **13.373.** 8 задач; 127,5 мин. **13.374.** 16 ч.

13.375. 421. **13.376.** 211. **13.377.** 421. **13.378.** 2,4 и 4,8 кг. **13.379.** $\frac{p(k\pm\sqrt{k(2-k)})}{2k}$ карат, где $1 \le k \le 2$; наибольшая потеря стоимости в 2 раза. **13.380.** $\frac{25+a+\sqrt{D}}{2a}$ и $\frac{25-a+\sqrt{D}}{2a}$ кг или $\frac{25+a-\sqrt{D}}{2a}$ и $\frac{25-a-\sqrt{D}}{2a}$ кг, где $D=a^2-130a+625$, причем если $a>5$ — нет решений, если $0<a<5$ — два решения, если $a=5$ — одно решение (3 и 2 кг). **13.381.** Если $s \ge \frac{pq}{100r}$, то на расстоянии от B, не большем, чем $\frac{s}{2}-\frac{pq}{200r}$ км, выгоднее брать уголь в B; на расстоянии от B, большем, чем $\frac{s}{2}-\frac{pq}{200r}$ км, выгоднее брать уголь в A; для пункта, отстоящего от B на $\frac{s}{2}-\frac{pq}{200r}$ км, расходы на потребление угля не зависят от выбора пункта A или B. Если же $s<\frac{pq}{100r}$, то для любого пункта, расположенного на дороге AB, выгоднее брать уголь в A. **13.382.** $R\pm\sqrt{2a^2-3R^2}$; $1{,}5R^2 \le a^2 < 2R^2$.

13.383. 20 рабочих; 6 ч. **13.384.** За 3 ч. **13.385.** Если $c<\frac{h}{m}$, то первая модель; если $c>\frac{h}{m}$, то вторая модель; если $c=\frac{h}{m}$, то одинаково. **13.386.** $\frac{a(3\pm\sqrt{3(4m-1)})}{6}$, где $\frac{1}{4}\le m<1$. **13.387.** $a(1+\sqrt{2})$ ч. **13.388.** $\frac{100s-r(50+s)}{(3s-r)a}$ и $\frac{100s-r(50+s)}{(r-s)a}$ м/с, где $s<r<\frac{100s}{50+s}$. **13.389.** В 2 раза. **13.390.** $5+5\sqrt{2}\approx 12$ км. **13.391.** 10 ч 29 мин. **13.392.** 6,4 км. **13.393.** $\frac{d(k-1)}{2Tk}\pm\frac{d}{2t}\left(1-\sqrt{1+\frac{t^2(k-1)^2}{T^2k^2}}\right)$.

13.394. 1 ч. **13.395.** Через 4 мин; в 3 раза. **13.396.** $\frac{3(-a+\sqrt{a^2+240a})}{2a}$ и

$\dfrac{-3(3a-\sqrt{a^2+240a})}{2a}$ ч, где $a<30$. **13.397.** $\dfrac{2(2p-q)}{t}$ и $\dfrac{2p}{t}$ км/ч; $3p-q$ км, где $0\le q<2p$, $p>0$, $t>0$. **13.398.** 60 км/ч. **13.399.** 10 ч. **13.400.** 340 км. **13.401.** $\dfrac{s(-a+\sqrt{a^2+240at})}{120t}$ м. **13.402.** 500, 1000 и 1500 л. **13.403.** Третья. **13.404.** 120 ступенек. **13.405.** 8 км. **13.406.** За 80 с. **13.407.** $\dfrac{31b}{130v}$ ч. **13.408.** 11 и 7 см/с. **13.409.** От 2,5 до 3 км/ч. **13.410.** 1 и 4 см/с. **13.411.** $\dfrac{vt+\sqrt{2a^2-v^2t^2}}{2v}$; $a=\dfrac{vt}{\sqrt{2}}$. **13.412.** $0<a<68$. При $a=5$ расстояния между фермами 60, 40 и 25 км. **13.413.** 50, 40 и 10%. **13.414.** $\dfrac{\sqrt{b^2c^2+4abc}-bc}{2c}$ км; a, b, c — произвольные положительные числа. **13.415.** 10 и 15 ч. **13.416.** 6400 и 600 л. **13.417.** Через $\dfrac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$ мин от начала полета. **13.418.** $2ak$ км. **13.419.** 36 и 54 км/ч. **13.420.** $\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+2500t^2v^2}}{50t}$ км/ч. **13.421.** 53. **13.422.** За $b+\sqrt{b(b-a)}$ дней. **13.423.** 21 человек; 6 ч. **13.424.** $a+\dfrac{\sqrt{D}-(a+b)}{2(c+1)}$; $b+\dfrac{\sqrt{D}-(a+b)}{2(c+1)}$; $\dfrac{c(\sqrt{D}-(a+b))}{2(c+1)}$, где $D=(a-b)^2+4abc^2$, $c>1$. **13.425.** В первой $\dfrac{an(n-2)}{(n-1)^2}$ см^3; во второй $\dfrac{a(n^2-2n+2)}{(n-1)^2}$ см^3; во всех остальных по a см^3. **13.426.** За 4 и 12 ч. **13.427.** За 96 и за 5 мин. **13.428.** В 4 раза. **13.429.** 0,25 $(3a+2c+\sqrt{4c^2-4ac+9a^2})$ км/ч; задача имеет решение при любых $a>0$, $c>0$. **13.430.** В 10 раз. **13.432.** Через $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+4ab}}$ с. **13.433.** $\dfrac{1000(2{,}5a+sp)}{2000-sn}$ р.; задача имеет решение при $sn<2000$. **13.435.** 423. **13.436.** 7,7 ч. **13.437.** На 11. **13.438.** 4 г/см^3. **13.439.** 77 или 86. **13.440.** $M_1(a\sqrt{3}-a;\ 0)$, $P_1(0;\ a\sqrt{3}-a)$; $M_2(-a\sqrt{}$ **13.441.** $\dfrac{l(3k+1)}{k+3}$ м. **13.442.** 300 и 150 млн. р. **13.443.** $\dfrac{p(n+1)}{n-1}$; $\dfrac{1}{3}$. **13.444.** 3; 4; 5. **13.445.** $r_1=\dfrac{-r+\sqrt{6R^2-3r^2}}{2}$; $r<r_1\le R$ при $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\le\dfrac{r}{R}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $r_1<r<R$ при

$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{r}{R}\le 1$. **13.446.** $0{,}5(24+s-\sqrt{s^2+288})$ и $0{,}5(24-s-\sqrt{s^2+288})$ км; $s<6$. **13.447.** 22 см^2. **13.448.** 70 км/ч. **13.449.** 121. **13.450.** 10 и 5 лет.

ЧАСТЬ II

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ (дополнительные задачи). НАЧАЛА АНАЛИЗА. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

ГЛАВА 14

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ

14.001. 0,5, если $m>0$; $-0{,}5$, если $m<0$. **14.002.** $\sqrt[4]{b-a}$, где $b>a$. **14.003.** $\operatorname{ctg}33°$. **14.004.** $\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|$. **14.005.** $x_{1,2}=\pm\sqrt{10}$. **14.006.** $x=\frac{1}{3}$. **14.007.** $x=35$. **14.008.** $x_1=0$; $x_2=-\frac{1}{3}$. **14.009.** $x=2$. **14.010.** $x_{1,2}=\pm\sqrt{10}$; $x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$. **14.011.** $x=64$. **14.012.** $x_{1,2}=2^{\pm0{,}5\sqrt{6}}$. **14.013.** $x_1=4{,}5$; $x_2=6$. **14.014.** $x_1=10^{-6}$; $x_2=10^3$. **14.015.** $x=\sqrt{26}$. **14.016.** $x_1=3$; $x_2=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. **14.017.** $x_1=6$; $x_2=\frac{1}{6}$. **14.018.** $x=5$. **14.019.** $x_1=4$; $x_2=\frac{1}{16}$. **14.020.** $x=3$. **14.021.** $x_1=100$; $x_2=0{,}01$. **14.022.** $x=2$. **14.023.** $x=1$. **14.024.** $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **14.025.** $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. **14.026.** $x=(-1)^k\arcsin\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. **14.027.** (3; 2). **14.028.** (2; 1); (−2; −1). **14.029.** (0; 2); (2; 0). **14.030.** $(0{,}5; 0{,}2\sqrt{2})$. **14.031.** (1; 1); (4; 2). **14.032.** $(2^{\sqrt[3]{4}}; 2^{2\sqrt[3]{2}})$. **14.033.** При $q=6$. **14.034.** При $p=\pm12$. **14.035.** 117. **14.036.** Нет. **14.037.** Один. **14.039.** $x_1=-2$; $x_2=-1$; $x_3=3$. **14.040.** $x=2$. **14.042.** Три. **14.044.** Четыре. **14.045.** $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{16m-7}}{4}$ при $m\ge\frac{7}{16}$; $x_1=x_2=-\frac{3}{4}$ при $m=\frac{7}{16}$. **14.046.** 55. **14.047.**

$x_1 = -\frac{2}{3}$; $x_2 = 1$. **14.048.** $x = 1$. **14.049.** Нулю. **14.051.** Нет. **14.053.** Нет решений при $m = 3$; бесконечное множество решений при $m = -3$. **14.054.** Минус. **14.055.** Минус. **14.056.** Минус. **14.057.** $a^{\frac{1}{a}}$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. **14.058.** 12,5. **14.059.** 4. **14.060.** 3. **14.061.** $-\frac{1+2a}{a}$. **14.062.** $\frac{1}{a^2}$. **14.063.** $\frac{b+3a-2}{2a}$. **14.064.** 0. **14.065.** 0. **14.066.** 0. **14.067.** 0. **14.068.** 0,3010. **14.069.** $\frac{2(2+m)}{2-m}$. **14.070.** Минус. **14.071.** Плюс. **14.073.** Верно при $a = \frac{b}{b-1}$, где $b > 1$. **14.076.** $[-2, 1] \cup [2, \infty)$. **14.077.** $(-3, 0) \cup (2, \infty)$. **14.078.** $(-4, 0) \cup (0, 4)$. **14.079.** $(-1, 1) \cup (2, \infty)$. **14.080.** $(-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty)$. **14.081.** $(-3, -2) \cup (2, 3)$. **14.082.** $\left(-\infty, -\frac{2}{7}\right] \cup (3, \infty)$. **14.083.** $(2, 3)$. **14.084.** $(2, 4) \cup (4, 6)$. **14.085.** $(0, \infty)$. **14.086.** $(-2, 0) \cup (2, \infty)$. **14.087.** $(-2, 1) \cup (3, \infty)$. **14.088.** $(-3, -2) \cup (0, 1)$. **14.089.** $(-3, 2)$. **14.090.** $(0, 1) \cup (100, \infty)$. **14.091.** $(0, 1)$. **14.092.** $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$. **14.093.** $(0; 0{,}5) \cup [\sqrt{2}, \infty)$. **14.094.** $(0; 0{,}04]$. **14.095.** $(1, \sqrt{3})$. **14.096.** $(-2, 2)$. **14.097.** $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$. **14.098.** $(0, 1)$. **14.099.** $[2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$. **14.100.** $\left(\frac{\pi}{12} + \pi n, \frac{5\pi}{12} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **14.101.** а) $x \in \left(2\pi n - \frac{7\pi}{6}, 2\pi n + \frac{\pi}{6}\right)$, $n \in Z$; б) $x \in \left(\pi n - \frac{\pi}{6}, \pi n + \frac{\pi}{6}\right)$, $n \in Z$. **14.102.** $\sin 2x \geq 2 \sin x$, если $x \in [2\pi n - \pi, 2\pi n + \pi]$, $n \in Z$; $\sin 2x \leq 2 \sin x$, если $x \in [2\pi n, 2\pi n + \pi]$, $n \in Z$. **14.103.** $\lg x^2 - \lg^2 x > 0$, если $x \in (1, 100)$; $\lg x^2 - \lg^2 x < 0$, если $x \in (0, 1) \cup (100, \infty)$; $\lg x^2 - \lg^2 x = 0$, если $x = 1$ или $x = 100$. **14.104.** $x \in (0, 1)$. **14.105.** $3^{400} > 4^{300}$. **14.106.** При $a \in \left(-\frac{1}{3}; 4\right)$. **14.107.** $a \in (1{,}2; 2]$. **14.108.** При $x \in [-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3]$. **14.115.** а) См. рис. О.14.1, *а*; б), г) см. рис. О.14.1, *б*; в) см. рис. О.14.1, *в*. **14.116.** а)–г) См. соответственно рис. О.14.2, *а–г*. **14.117.**

а)–д) См. соответственно рис. О.14.3, *а–д*. **14.119.** а), б) См. рис. О.14.4, *а*; в), г) см. рис. О.14.4, *б*. **14.121.** См. рис. О.14.5. **14.123.** См. рис. О.14.6. **14.124.** См. рис. О.14.7. **14.125.** См. рис. О.14.8. **14.126.** См. рис. О.14.9. **14.129.** См. рис. О.14.10. **14.130.** См. рис. О.14.11. **14.132.** См. рис. О.14.12. **14.134.** См. рис. О.14.13. **14.135.** Нет. **14.137.** $-b$. **14.139.** $a < 0, b > 0, c > 0$. **14.140.** $a > 0, b > 0, c = 0$. **14.141.** См. рис. О.14.14. **14.142.** $[2, 3) \cup (3, 4]$. **14.143.** $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. **14.144.** $\left(-3, -\frac{2}{3}\right]$. **14.145.** $(0, 1)$. **14.146.** $(-\infty, 0]$. **14.147.** $(0, 1)$. **14.148.** $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. **14.149.** $[0, 2]$. **14.150.** $[-13, 13]$. **14.151.** См. рис. О.14.15. **14.152.** См. рис. О.14.16. **14.153.** См. рис. О.14.17. **14.154.** См. рис. О.14.18. **14.155.** См. рис. О.14.19. **14.156.** См. рис. О.14.20. **14.157.** См. рис. О.14.21. **14.158.** См. рис. О.14.22. **14.159.** См. рис. О.14.23. **14.160.** $a = 2$. **14.161.** $y_{\min} = 2$. **14.162.** $y_{\min} = 4$. **14.163.** $y_{\max} = 2$.

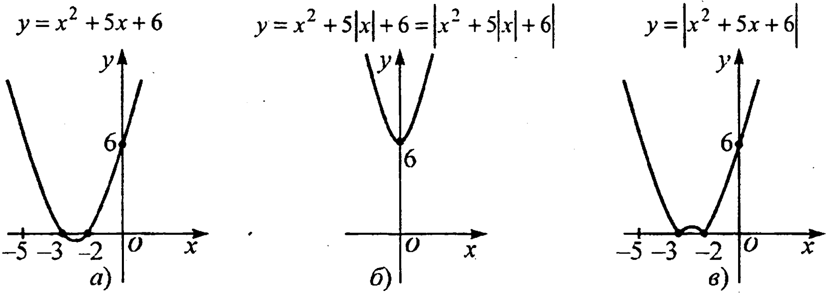


Рис. О.14.1

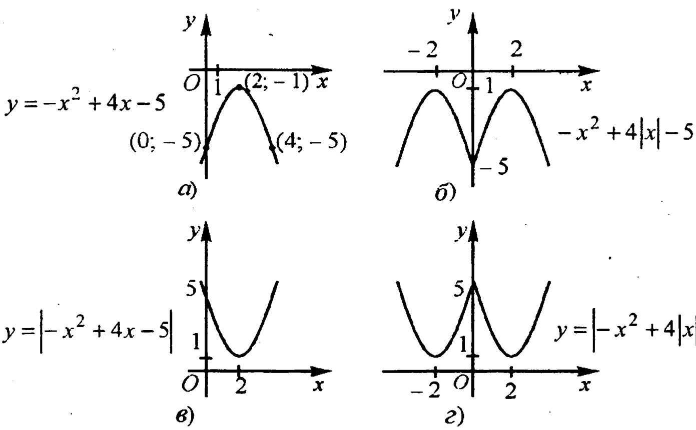


Рис. О.14.2

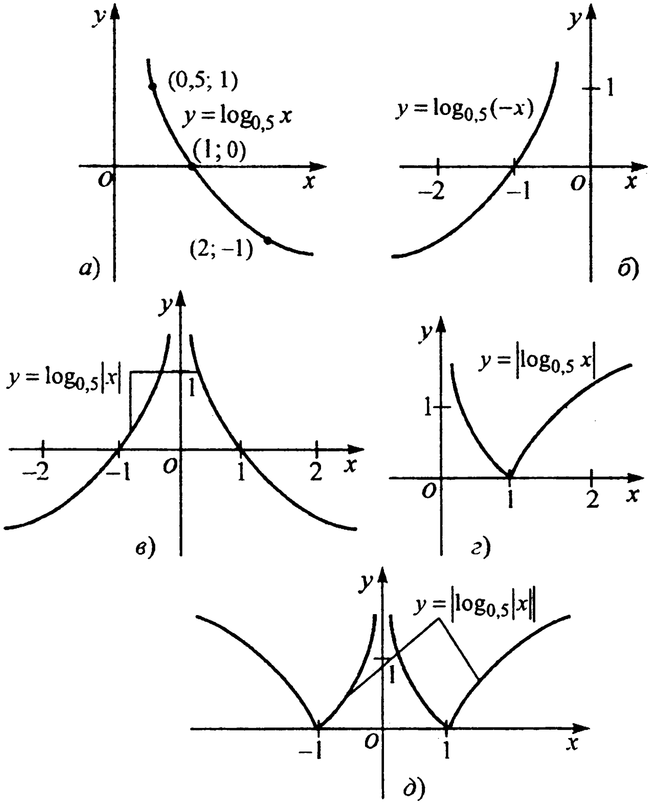


Рис. О.14.3

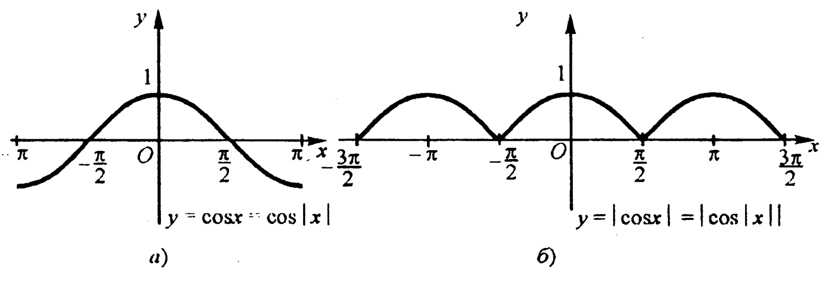


Рис. О.14.4

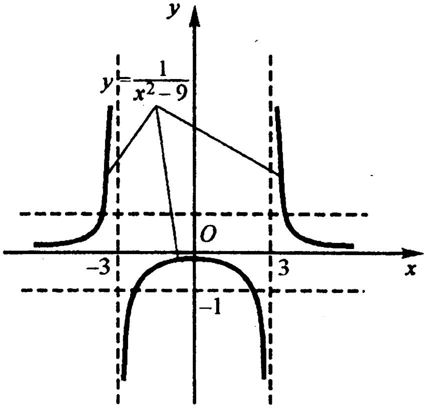


Рис. О.14.5

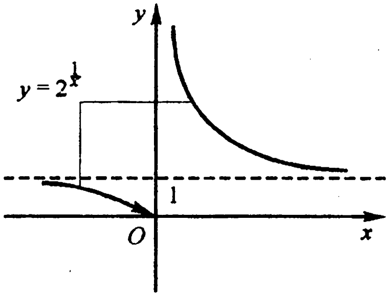


Рис. О.14.6

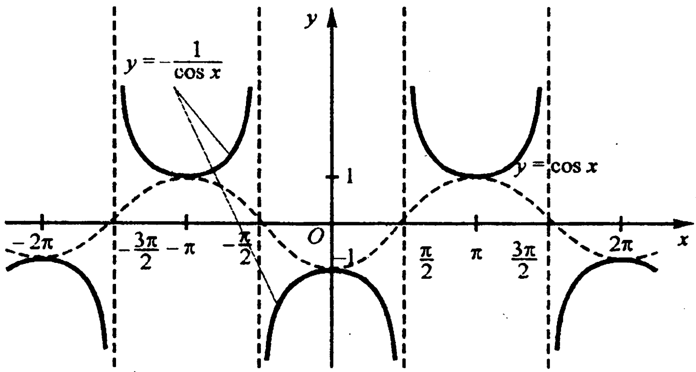


Рис. О.14.7

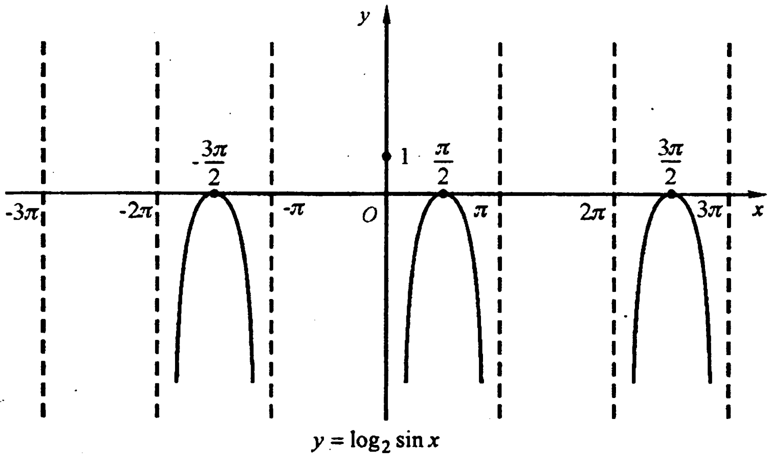


Рис. О.14.8

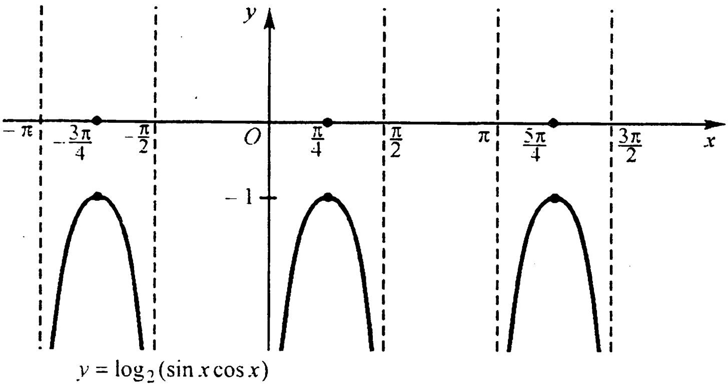


Рис. О.14.9

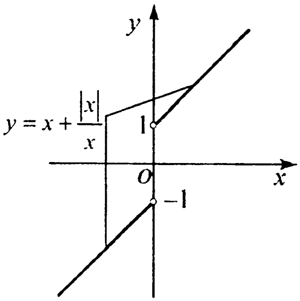


Рис. О.14.10

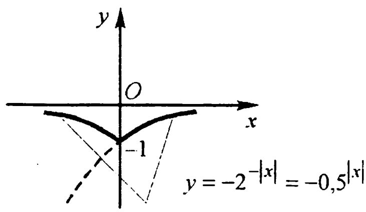


Рис. О.14.11

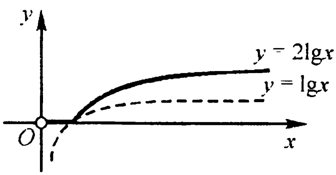


Рис. О.14.12

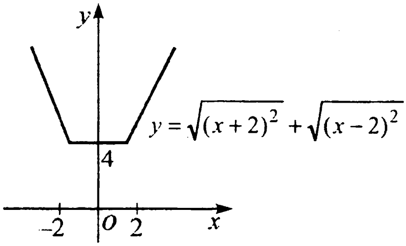


Рис. О.14.13

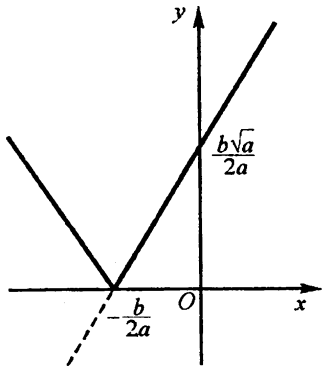


Рис. О.14.14

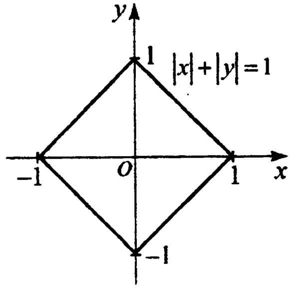


Рис. О.14.15

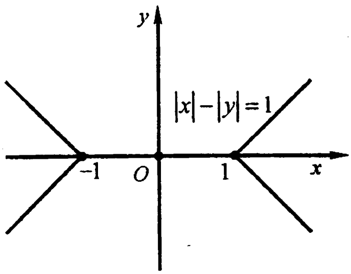


Рис. О.14.16

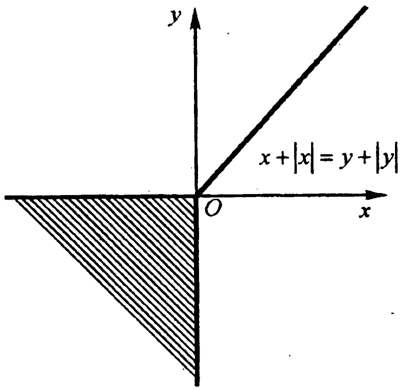


Рис. О.14.17

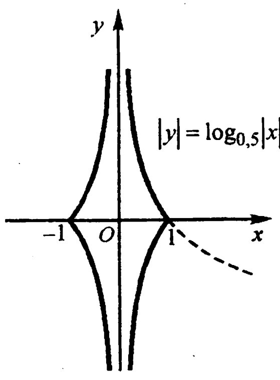


Рис. О.14.18

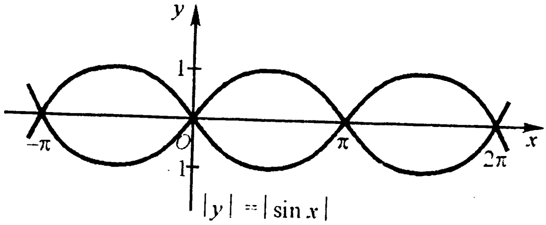


Рис. О.14.19

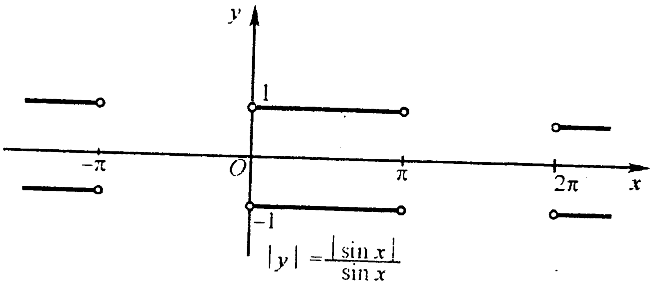


Рис. О.14.20

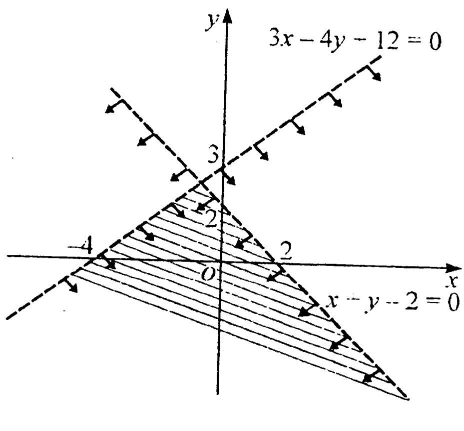


Рис. О.14.21

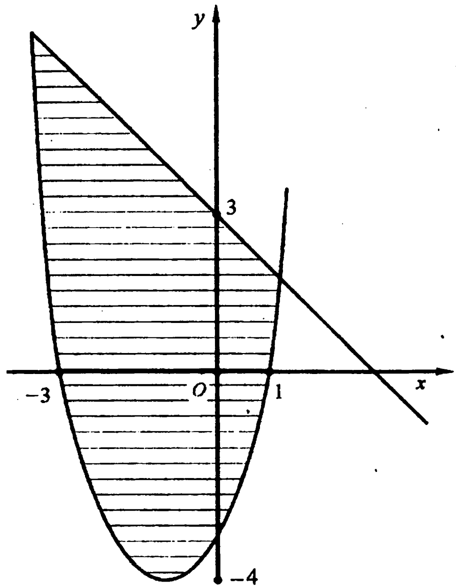


Рис. О.14.22

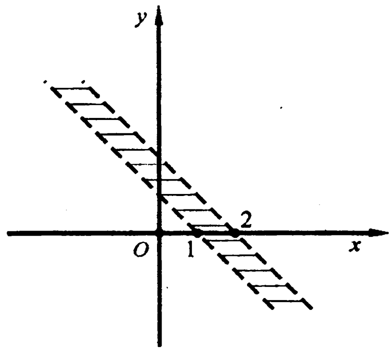


Рис. О.14.23

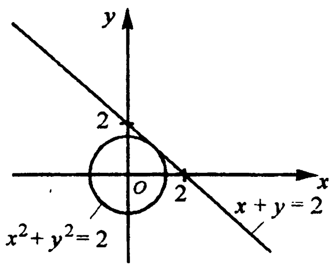


Рис. О.14.24

14.165. См. рис. О.14.24. **14.166.** $\frac{1}{n}$. **14.167.** $\frac{n+3}{n+1}$. **14.168.** $\frac{n+2}{n+1}$. **14.169.** $\frac{1}{n+2}$.

14.171. Нет; да. **14.172.** $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$, если $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$. **14.173.** 0,5. **14.174.** а) Возрастающая; б) возрастающая; в) не монотонная; г) убывающая. **14.175.** – 6; –5; – 4; –2; –1; 0. **14.177.** Нет. **14.179.** 66. **14.180.** $\frac{n(m+1)}{n+1}$.

14.183. a% от b равны b% от a. **14.184.** 32%. **14.185.** 1000^q. **14.186.** 4,56. **14.188.** $0{,}5(2\sqrt{2}+2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[6]{2}+2+\sqrt[6]{32}+\sqrt[3]{4})$. **14.189.** а) $0{,}8^{-1{,}4}$; б) $\log_{1/3}0{,}5$. **14.190.** 31 цифру. **14.192.** $2^{14}+2^{12}+2^{10}+\ldots+2^2+2^0$. **14.193.** За $1\frac{7}{8}$ ч. **14.194.** За 7,5 ч. **14.195.** а) $a_n=2n-a_1,\ n\in N$; б) нет. **14.196.** $a-b$. **14.198.** $(x^2-2x+2)(x^2+$ $+2x+2)$. **14.199.** $0{,}5(2a^2\pm\sqrt{2(a^4+b^4)})$. **14.200.** $(x^4+\sqrt{2}x^2y^2+y^4)(x^4-$ $-\sqrt{2}x^2y^2+y^4)$. **14.201.** $(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$. **14.202.** $y=-4x^2-$ $-6x+1$. **14.203.** Множество четырехугольников с взаимно перпендикулярными диагоналями. **14.204.** См. рис. О.14.25; $f(\pi)=0$. **14.205.** Для $a\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)$. **14.208.** $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-2\sqrt{y})$. **14.209.** $\lambda\in\left(2,\frac{3+\sqrt{12}}{3}\right]$. **14.210.** Составным. **14.215.** Нет. **14.216.** При $a\in(-5,3)$. **14.217.** $x\in\boldsymbol{R}$; да, $x=1$ — ось симметрии. **14.218.** $(-\infty,5)\cup(5,\infty)$. **14.220.** а) Нечетная; б) ни четная, ни нечетная; в) ни четная, ни нечетная; г) четная; д) нечетная; е) нечетная; ж) нечетная; з) ни четная, ни нечетная; и) нечетная; к) ни четная, ни нечетная. **14.221.** $f(1)=1; f(2)=\pi-2;$ $f(3)=\pi-3; f(4)=\pi-4; f(5)=5-2\pi; f(6)=6-2\pi; f(7)=7-2\pi$. **14.222.** Нет. **14.224.** См. рис. О.14.26. **14.227.** Да. **14.228.** $\frac{n}{m};1;\frac{m}{n}$; точка $\frac{n}{m}$ ближе к 1, чем точка $\frac{m}{n}$. **14.241.** $\lg^2x+\lg^2y=1$. **14.242.** $\lg^{2/3}u+\lg^{2/3}v=1$. **14.243.** $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **14.244.** $\operatorname{arcctg}\frac{1-q}{p}$, где $1<q\le\frac{p^2}{4}$. **14.245.** $\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$. **14.249.** $y>1$ при $k=0$; $y\ge1$ при $k=1$; $y=1$ при $k=2$; $0<y\le1$ при $k=3$. **14.251.** $\sin^2 6^\circ=0{,}5(1-\sqrt{1-\sin^2 12^\circ})$. **14.252.** а) Нет; б) нет. **14.253.** Да. **14.254.** а) 6π; б) 30π. **14.255.** $\frac{\pi}{3}$. **14.257.** $-0{,}4\sqrt{5}$. **14.259.** При $\alpha+\beta=2\pi n$; при $\alpha=2\pi n$, $\beta\in\boldsymbol{R}$; при $\beta=2\pi n$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. **14.260.** $y_{\max}=0{,}75$. **14.261.** $y_{\max}=\sin 1$. **14.262.** $y_{\min}=2$, $y_{\max}=3$. **14.263.** tg 1. **14.264.** $\frac{m-1}{m+1}$ при $m\ne1$, $m\ne-1$. **14.265.** $-\frac{23}{36}$. **14.266.** Минус. **14.267.** $\frac{\pi}{4}$. **14.268.** $\frac{\pi}{4}$. **14.269.** $m=-\frac{1}{4}$, $M=\frac{1}{4}$. **14.271.** $a=3$,

$b = 1$. **14.272.** Нет. **14.273.** а) «$<$»; б) «$<$»; в) «$>$»; г) «$>$». **14.283.** См. рис. О.14.27. **14.284.** См. рис. О.14.28. **14.286.** См. рис. О.14.29. **14.291.** См. рис. О.14.30. **14.295.** См. рис. О.14.31. **14.299.** Да. **14.300.** См. рис. О.14.32. **14.301.** В процессе решения уравнения была потеряна вторая серия его корней $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **14.302.** $-\frac{7}{24}$. **14.303.** $-0{,}5\sqrt{3}$. **14.304.** $\frac{3+8\sqrt{2}}{15}$. **14.306.** $\sqrt[512]{a^{511}}$. **14.309.** Нет. **14.310.** $y = x$, где $x > 0, x \neq 1$. **14.311.** $\alpha = 0$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$. **14.313.** $x \in [-6, -5] \cup [0, 1]$. **14.316.** Область определения $(2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$; множество значений $(-\infty, 0]$. **14.317.** $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **14.318.** Ни при каких x. **14.319.** $y_{\min} = 2$ при $1 \leq x \leq 3$. **14.320.** Сократима тогда и только тогда, когда числа $a + b$ и $a - b$ либо порознь делятся на 4, либо имеют наибольший общий делитель $k > 2$. **14.321.** Нет. **14.322.** $(a - 1)(a + 3)(a^2 + 3)$. **14.323.** $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. **14.324.** $x \in (0, \infty)$. **14.325.** 0. **14.327.** $(-\infty, \infty)$. **14.328.** $\frac{1}{b_1^{-1} + b_2^{-1} + \ldots + b_k^{-1}}$. **14.329.** а) $9 \cdot 10^n$; б) 0. **14.330.** Если $c = 0$, то $x = a$, y — любое число, кроме $y = b$; если $c \neq 0$, то $x_1 = a + c$, $y_1 = b + 1$; $x_2 = a - c$, $y_2 = b - 1$. **14.331.** 2 кв. ед. **14.332.** $y_{\max} = 0{,}1$. **14.333.** $x \in (0{,}5; 2)$. **14.335.** Минус. **14.336.** Нет. **14.337.** $x_1 = 3$; $x_2 = -\frac{31}{11}$. **14.338.** (2; 9). **14.339.** (1; 2; 3). **14.340.** $x = -1$. **14.341.** $(k + 1)^3 (k - 1)^2$. **14.342.** $x = 0$. **14.343.** $y_{\max} = 6$. **14.344.** $y_{\max} = 2$. **14.345.** 2,4. **14.346.** $x_1 = \pm\sqrt{2n + \frac{2}{3}}$, где $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$; $x_2 = \pm\sqrt{2n - \frac{2}{3}}$, где $n \in \mathbf{N}$. **14.347.** $x = 4n^2$, где $n \in \mathbf{Z}$ и $n \geq 0$. **14.348.** $x = 0$ при $a \in \mathbf{R}$. **14.349.** 2. **14.350.** $\frac{1}{1 - 2^x}$. **14.353.** Нет. **14.354.** При $k = 2$ и $k = -\frac{2}{9}$. **14.355.** При $a \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$. **14.356.** $x^4 - 8x^2 + 4 = 0$. **14.357.** $x = 2$. **14.358.** $y_{\min} = 4$. **14.359.** а) Нет; б) да; в) нет. **14.360.** 1000. **14.361.** $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\sin 54° = 0{,}25(\sqrt{5} + 1)$. **14.362.** 17. **14.363.** $x_{1,2} = \pm 2$; $x_3 = 1$. **14.364.**

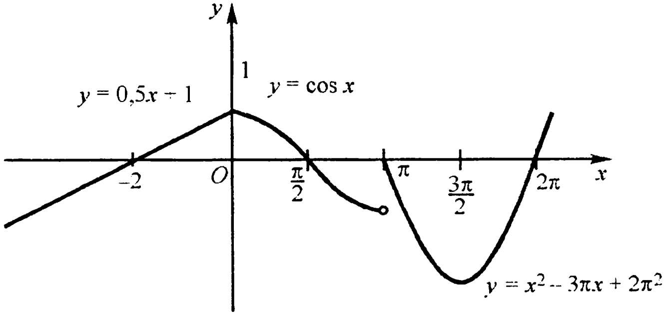


Рис. О.14.25

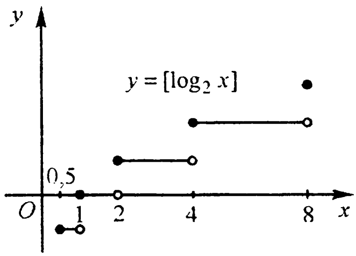


Рис. О.14.26

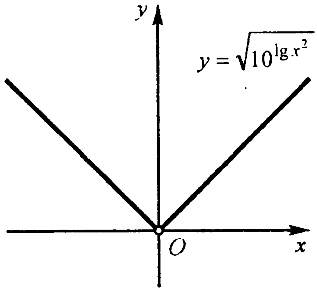


Рис. О.14.27

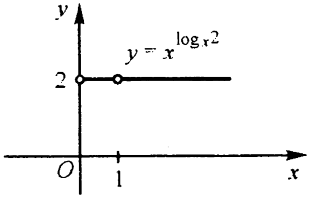


Рис. О.14.28

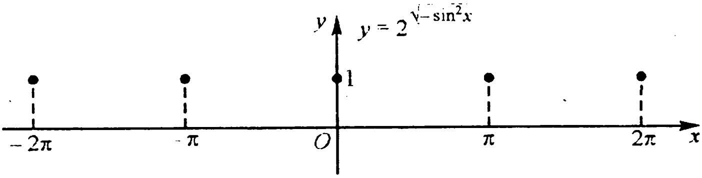


Рис. О.14.29

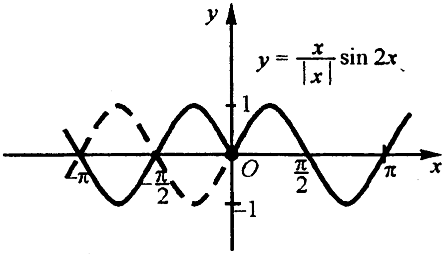


Рис. О.14.30

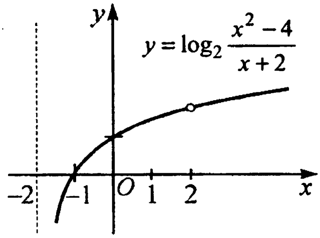


Рис. О.14.31

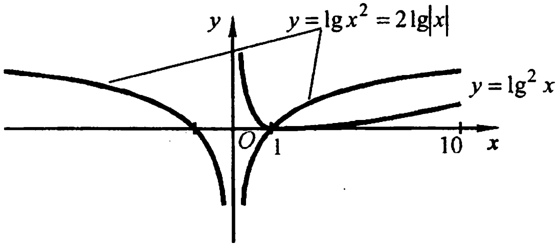


Рис. О.14.32

При $m \in (-1{,}25; -1)\cup(9,\infty)$. **14.365.** При $a \in [-9,-1]\cup[0,1]$. **14.367.** $\frac{5\sqrt[3]{5}}{3}$. **14.368.** При $a=1$. **14.369.** $y=-2x^2-x+3$. **14.370.** В точке (0; 1). **14.371.** – 1; 0; 1; 4; 5; 6. **14.372.** $[0,3)$. **14.373.** Для $x\in(-\infty,2]\cup[6,\infty)$. **14.374.** Для $x\in(-\infty,2]\cup(4,6)\cup[8,\infty)$. **14.375.** Для $x\in(-\infty,-1)\cup[0,1)$. **14.376.** Для $x\in[-1;0{,}11]$. **14.377.** 7. **14.378.** $x_1=-3$; $x_2=-2$; $x_3=0$; $x_4=1$. **14.379.** а) $x=1$; б) $x_{1,2}=\pm 3$; $x_{3,4}=\pm 2$; $x_{5,6}=\pm 1$; $x_7=0$. **14.380.** $\left(-3,-\frac{5}{3}\right)$. **14.381.** $\left(-\frac{3}{4},0\right)\cup(3,\infty)$. **14.382.** (0, 1). **14.383.** $(3,4)\cup(5,\infty)$. **14.384.** $\pi n-\frac{\pi}{6}<x<\pi n$ и $\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **14.386.** 2; 3. **14.387.** (2; 1). **14.389.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; $y_{\min}=4$. **14.390.** $y_{\max}=\sqrt{2}$ при $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. **14.392.** (3;6). **14.394.** $(-\sqrt{3};4),(-1;2),(1;2),(\sqrt{3};4)$. **14.395.** (–3; 57), (2; 2). **14.396.** Для

$x \in (-\infty, -7]$. **14.397.** При $k < 0$ и $k = 4$. **14.398.** $(-\infty, -2) \cup (2, \infty) \cup 0$. **14.399.** При $x \in [1, 4-2\sqrt{2}) \cup (4+2\sqrt{2}, 7]$. **14.400.** $x \in [-1, 0) \cup (8, 9]$. **14.401.** В точках $(-2; 0)$ и $(2; 0)$. **14.402.** $(0; 25)$. **14.403.** $(2; 4)$. **14.404.** 16. **14.405.** $(10^5; 0)$; $(0,1; 0)$. **14.406.** 1; 2. **14.407.** $(-\infty, -3) \cup [-2, 0) \cup (0, 3) \cup [5, \infty)$. **14.408.** $(0; 0,5] \cup (1, 2]$. **14.409.** $(0,5; 1) \cup [3, \infty)$. **14.410.** $(1, 4]$.

ГЛАВА 15

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

15.001. −3. **15.002.** 0,8. **15.003.** 0. **15.004.** $-\frac{145}{42}$. **15.005.** − 5. **15.006.** 1. **15.007.** 0,25. **15.008.** − 1. **15.009.** 1,5. **15.010.** 4. **15.011.** Верно. **15.012.** Верно. **15.013.** Неверно. **15.014.** Неверно. **15.015.** Неверно. **15.016.** Неверно. **15.017.** Верно. **15.018.** Верно. **15.019.** а) $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7x^2\sqrt{x} - \frac{3}{x^4}$; б) $y' = 15x^2(x^3-1)^4 + x$. **15.020.** а) $y' = 6x(x^4 - x^2 + 1)^2(2x^2 - 1)$; б) $y' = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 1}{(x-1)^2}$. **15.021.** а) $y' = \frac{4\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}$; б) $y' = \frac{12}{(x-10)(x+2)\ln 10}$. **15.022.** а) $y' = \frac{2x(6x-7)}{3\sqrt[3]{(4x^3 - 7x^2 + 1)^2}}$; б) $y' = e^x(\sin 2x + \sin^2 x + 1)$. **15.023.** а) $y' = \frac{2x(x^2-1)(7x^2+1)}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$; б) $y' = \frac{x}{x^2-1}$. **15.024.** а) $y' = e^{x^3 - 5x^2}(3x^2 - 10x)$; б) $y' = \frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$. **15.025.** а) $y' = \frac{5x+2}{3\sqrt[3]{x}}$; б) $y' = \frac{8}{\sin^2 4x}$. **15.026.** а) $y' = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$; б) $y' = 1 + \cos 2x$. **15.027.** а) $y' = -3\sin 6x$; б) $y' = \frac{1}{2}\sin x$. **15.028.** а) $y' = \frac{\cos x}{\cos^2 \sin x}$; б) $y' = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$. **15.029.** а) $y' = 2x^2 - 2x\sqrt{x^2-1} - 1$; б) $y' = -\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} + \sqrt{x}\right)$. **15.030.** а) $y' = -\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}$; б) $y' = -\frac{3\sqrt{1+x^2}}{x^4}$.

15.031. а) $y' = -\dfrac{2}{\sqrt{(x^2-2)^3}}$; б) $y' = -\dfrac{2}{x^2\sqrt{2-x^2}}$. **15.032.** а) $y' = 3x^2\cos 2x - 2(x^3+1)\sin 2x$; б) $y' = 2\sin 2x$. **15.033.** а) $y' = \dfrac{5x^2+1}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^2}}$; б) $y' = \dfrac{1}{x}$. **15.034.** $x = e^{-1}$. **15.035.** $(-\infty, 0) \cup (0; 2{,}5)$. **15.036.** $[-4, -3]$. **15.037.** $x_1 = 3$; $x_2 = 4$. **15.038.** 1. **15.039.** $\dfrac{4}{9}$. **15.040.** $\dfrac{2}{3}$. **15.041.** -2. **15.042.** $\dfrac{1}{8}$. **15.043.** $\dfrac{1}{8}$. **15.044.** -2. **15.045.** 0. **15.046.** $-0{,}5$. **15.047.** 1. **15.048.** $\dfrac{1}{30}$. **15.049.** 39. **15.050.** $\dfrac{7}{6}$. **15.051.** 1. **15.052.** $-0{,}5$. **15.053.** $3\ln 2$. **15.054.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$. **15.055.** $0{,}5\ln 2$. **15.056.** -3. **15.057.** -1. **15.058.** $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$. **15.059.** 1. **15.060.** а) $f''(x) = 2\ln x + 3 - 4\cos 2x$; $f''(1) = 3 - 4\cos 2$; $f''(\pi) = 2\ln\pi - 1$; б) $f''(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{9}\sin\dfrac{x}{3}$; $f''(3) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{9}\sin 1$; f''

15.061. $y'(0) < 0$. **15.062.** Убывает от 1,5 до 0,25. **15.063.** $y = x - e$. **15.064.** 72; -8. **15.065.** $[-8, 8]$. **15.066.** $y = 3x - \pi$. **15.068.** Возрастает от 0 до $\ln 9$. **15.069.** $[-1, 4]$ и $(-1, 4)$. **15.071.** $a = -1$, $b = 1$. **15.072.** $\dfrac{\pi}{4}$. **15.073.** $x_1 = 2\pi n$; $x_2 = 2\pi n - 2\,\mathrm{arctg}\,0{,}6$, $n \in Z$. **15.074.** $x_1 = 0$; $x_2 = -\dfrac{7}{3}$. **15.075.** Нет. **15.076.** $F(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2 + C & \text{при } x \ge 0, \\ -0{,}5x^2 + C & \text{при } x < 0. \end{cases}$ **15.077.** а) $y'' + 4y = 0$; б) $y'' + 0{,}36y = 0$. **15.078.** а) $y = Ce^{-36x}$; б) $y = A\cos(6x + \varphi)$. **15.083.** Первое — нет, второе — да. **15.084.** $a > 3$. **15.085.** $S_n = \dfrac{x(1-x^n)}{1-x}$; $S_n' = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. **15.086.** $y = x + 1$. **15.087.** $(4; 0)$, $(1; -27)$. **15.089.** $\dfrac{\pi}{3}$. **15.091.** $(3; -2)$, $\left(-1; \dfrac{2}{3}\right)$. **15.092.** $\left(2; \dfrac{8}{3}\right)$, $\left(3; \dfrac{7}{2}\right)$. **15.093.** $\dfrac{3\pi}{4}$. **15.094.** $\dfrac{\pi}{4}$. **15.095.** $\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{15}{32}\right)$. **15.096.** $y = \dfrac{x}{e}$. **15.097.** В точке $(-5; 45)$: $y = -20x - 55$ и $y = -13x - 20$; в точке $(2; 3)$: $y = 8x - 13$ и $y = x + 1$.

15.098. $\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}3$. **15.099.** $y=4x-13$; $y=-4x+3$. **15.100.** $x+ey-2e=0$. **15.101.** $8x-y+14=0$. **15.102.** $(1;0)$, $\left(-\frac{1}{3};-\frac{44}{27}\right)$. **15.103.** $(4;3)$, $(0;-1)$ **15.104.** а) $y=x-0{,}09$; б) $\frac{\pi}{24},\frac{\pi}{8},\frac{13\pi}{24},\frac{5\pi}{8}$. **15.105.** а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{7\pi}{18}$. **15.106.** $\frac{\pi}{6}$. **15.107.** $5\sqrt{5}$. **15.108.** 5 кв. ед. **15.109.** $S_1=S_2=S_3=8$ кв. ед. **15.112.** $\frac{1}{13}$ м/с. **15.113.** 21 м/с; 24 м/с^2. **15.114.** 1 с; 4 с. **15.115.** При $t=2$ с; $v(2)=70$ м/с. **15.116.** $v_1=8$ м/с, $v_2=10$ м/с; $v_1=24$ м/с, $v_2=22$ м/с. **15.117.** $a_1=14$ м/с^2, $a_2=18$ м/с^2. **15.118.** $v_1=36$ м/с, $v_2=35$ м/с. **15.119.** а) $v=8$ м/с; б) $v=12$ м/с. **15.122.** 160π см^2/с; 800π см^3/с. **15.123.** $\omega=12$ рад/с; $t=2$ с. **15.124.** 30 г/см; 98 г/см. **15.126.** $a>4$. **15.127.** $x=e$ — точка минимума. **15.128.** $x=\frac{1}{e}$ — точка максимума. **15.129.** $x=0$ — точка минимума, $x=2$ — точка максимума. **15.130.** $x=3$ — точка максимума. **15.131.** $y_{\min}=0{,}25-\ln 2$ при $x=0{,}5$. **15.132.** $x=\ln 2$ — точка максимума; 45°. **15.133.** $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$ — точки максимума; $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$ — точки минимума; 45°. **15.134.** $x=0$ — точка минимума; $(-0{,}25;\ -0{,}25-\ln 0{,}75)$. **15.135.** $y_{\max}=-4$ при $x=-1$, $y_{\min}=4$ при $x=1$ **15.136.** $y_{\max}=9$ при $x=0$; 9, 0 и 0. **15.138.** При $p>1$. **15.141.** Возрастает на $\left(2\pi n-\frac{\pi}{3},\ 2\pi n+\frac{2\pi}{3}\right)$, убывает на $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ 2\pi n+\frac{5\pi}{3}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **15.142.** Возрастает на $(-\infty;-0{,}5)$, убывает на $(-0{,}5;\infty)$. **15.143.** Возрастает на $(1, 3)$, убывает на $(-\infty, 1)$ и на $(3, \infty)$. **15.144.** Возрастает на $(-6, 0)$ и на $(0, 2)$, убывает на $(-\infty, -6)$ и на $(2, \infty)$. **15.145.** Возрастает на $(-\infty, 1)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(1, 2)$. **15.146.** $y_{\text{наим}}=-24$, $y_{\text{наиб}}=4$. **15.147.** $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}=17$ **15.148.** $y_{\text{наим}}=1$, $y_{\text{наиб}}=3$. **15.149.** $y_{\text{наим}}=-\frac{10}{3}$, $y_{\text{наиб}}=-2$. **15.150.** $y_{\text{наим}}=1$, $y_{\text{наиб}}=2{,}125$. **15.151.** $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}=1$. **15.152.** $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}=0{,}375\sqrt{3}$. **15.153.** а) $y_{\text{наим}}=0{,}8$, $y_{\text{наиб}}=1$; б) $y_{\text{наим}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $y_{\text{наиб}}=\frac{2}{3}$. **15.154.** $y_{\text{наим}}=1$, $y_{\text{наиб}}=\frac{\pi}{2}$. **15.155.**

$y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **15.156.** $y_{\text{наим}} = 0{,}5$, $y_{\text{наиб}} = 0{,}75$. **15.157.** $y_{\text{наим}} = -\frac{\pi}{4}$, $y_{\text{наиб}} = \frac{\pi}{4}$. **15.158.** а) $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = 1{,}25$; б) $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = 1{,}25$. **15.159.** а) $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$; б) $y_{\text{наим}} = 0{,}5\sqrt[3]{9}$, $y_{\text{наиб}} = \sqrt[3]{1{,}8}$. **15.160.** а) $y_{\text{наим}} = -1{,}5$, $y_{\text{наиб}} = 7$; б) $y_{\text{наим}} = 2{,}5$, $y_{\text{наиб}} = 9$. **15.161.** а) $y_{\text{наим}} = 5$, $y_{\text{наиб}} = 12$; б) $y_{\text{наим}} = -\frac{1}{64}$, $y_{\text{наиб}} = 0$. **15.162.** а) $y_{\text{наим}} = 2$, $y_{\text{наиб}} = 16$; б) $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = 2$. **15.163.** а) $y_{\text{наим}} = 3$, $y_{\text{наиб}} = 5$; б) $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = 5$. **15.164.** $y_{\text{наим}} = 2$, $y_{\text{наиб}} = 2e^2 - 1$. **15.165.** $2^{1/2} \cdot 3^{-3/4}$. **15.166.** Возрастает на $(-\infty, -1)$ и на $(1, \infty)$, убывает на $(-1, 0)$ и на $(0, 1)$; $f(x_1) < f(x_2)$. **15.167.** Возрастает на $(1, \infty)$, убывает на $(0, 1)$; $f(x_2) > f(x_1)$. **15.168.** 3. **15.169.** 2. **15.170.** (e, ∞); $\pi^e < e^\pi$. **15.171.** $y_{\max} = 0{,}25$ при $x = \ln 2$; возрастает на $(-\infty, \ln 2)$, убывает на $(\ln 2, \infty)$. **15.172.** $y_{\min} = 0$ при $x = 0$, $y_{\max} = 4e^{-2}$ при $x = 2$; возрастает на $(0, 2)$, убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(2, \infty)$. **15.173.** $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}$ при $x = \frac{\pi}{4}$; возрастает на $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, убывает на $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$. **15.174.** $y_{\max} = \ln 2 - 0{,}5$ при $x = -0{,}5$; возрастает на $(-\infty; -0{,}5)$, убывает на $(-0{,}5; 0{,}5)$. **15.175.** $y_{\min} = -\frac{25}{96}$ при $x = \frac{7}{11}$; возрастает на $\left(\frac{7}{11}, 5\right)$, убывает на $\left(-\infty, \frac{7}{11}\right)$ и на $(5, \infty)$. **15.176.** 9 и 9. **15.177.** 40; 60; 80. **15.178.** 0,5. **15.179.** 14×21 м. **15.180.** 18 дм^3. **15.181.** $3\sqrt{3}$ и 12 см. **15.182.** Две другие стороны параллелограмма должны быть средними линиями данного треугольника. **15.183.** Равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен a. **15.184.** 100 см. **15.185.** 12 и 9 см. **15.186.** 12 и 9 см. **15.187.** 6 км/ч. **15.188.** 9 и 7,5 см. **15.189.** $R = 7\sqrt{2}$ см. **15.190.** 60°. **15.191.** $\angle BAC_{\text{наиб}} = \frac{\pi}{6}$ при $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. **15.192.** 0,8. **15.193.** При $\alpha = \frac{\pi}{3}$ наибольшее значение $\frac{r}{R}$ равно $\frac{1}{2}$. **15.194.** Радиус основания и высота бака равны $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **15.195.**

При $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **15.196.** $0{,}5a$; $0{,}5H$. **15.197.** При $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}5\sqrt{2}$. **15.198.** При $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **15.199.** При $\alpha = 60°$. **15.200.** При $\alpha = 45°$. **15.201.** $k = 29{,}28$; $x = y \approx 5{,}4$. **15.202.** $R = r$. **15.203.** $y_{\max} = 0$ при $x = -1$, $y_{\min} = -1$ при $x = 0$; возрастает на $(-\infty, -1)$ и на $(0, \infty)$, убывает на $(-1, 0)$ (рис. О.15.1). **15.204.** $y_{\max} = 0$ при $x = 0$, $y_{\min} = -8$ при $x = -2$ и $x = 2$; возрастает на $(-2, 0)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(-\infty, -2)$ и на $(0, 2)$ (рис. О.15.2). **15.205.** $y_{\min} = -16$ при $x = -\sqrt{5}$ и $x = \sqrt{5}$, $y_{\max} = 9$ при $x = 0$; убывает на $(-\infty, -\sqrt{5})$ и на $(0, \sqrt{5})$, возрастает на $(-\sqrt{5}, 0)$ и на $(\sqrt{5}, \infty)$. **15.206.** $y_{\max} = \frac{25}{6}$ при $x = -1$, $y_{\min} = -\frac{1}{3}$ при $x = 2$; возрастает на $(-\infty, -1)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(-1, 2)$ (рис. О.15.3). **15.207.** $y_{\max} = 2$ при $x = 0$, $y_{\min} = -2$ при $x = 2$; возрастает на $(-\infty, 0)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(0, 2)$. **15.208.** $y_{\max} = 28$ при $x = 2$, $y_{\min} = 27$ при $x = 3$; возрастает на $(-\infty, 2)$ и на $(3, \infty)$, убывает на $(2, 3)$. **15.209.** $y_{\max} = 9$ при $x = -1$ и $x = 1$, $y_{\min} = 8$ при $x = 0$; возрастает на $(-\infty, -1)$ и на $(0, 1)$, убывает на $(-1, 0)$ и на $(1, \infty)$. **15.210.** $y_{\min} = -6{,}25$ при $x = -2$ и $x = 2$, $y_{\max} = -2{,}25$ при $x = 0$; убывает на $(-\infty, -2)$ и на $(0, 2)$, возрастает на $(-2, 0)$ и на $(2, \infty)$. **15.211.** $y_{\max} = 0$ при $x = 0$, $y_{\min} = -9{,}6$ при $x = 2$; возрастает на $(-\infty, 0)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(0, 2)$. **15.212.** $y_{\max} = 2$ при $x = 0$; возрастает на $(-\infty, 0)$, убывает на $(0, \infty)$; ось Ox — асимптота графика функции (рис. О.15.4). **15.213.** $x = -1$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума; возрастает на $(-1, 1)$, убывает на $(-\infty, -1)$ и на $(1, \infty)$. **15.214.** $x = 2$ — точка минимума; убывает на $(-\infty, 2)$, возрастает на $(2, \infty)$. **15.215.** $x = \sqrt[3]{0{,}5}$ — точка минимума; убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, \sqrt[3]{0{,}5})$, возрастает на $(\sqrt[3]{0{,}5}, \infty)$. **15.216.** $x = 2$ — точка минимума; возрастает на $(-\infty, 0)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(0, 2)$. **15.217.** $x = 0$ — точка минимума; убывает на $(-\infty, 0)$, возрастает на $(0, \infty)$. **15.218.** $x = 2$ — точка минимума, $x = -2$ — точка максимума; возрастает на $(-\infty, -2)$ и на $(2, \infty)$, убывает на $(-2, 2)$. **15.219.** $x = 2$ — точка минимума; убывает на $(-\infty, 2)$, возрастает на $(2, \infty)$. **15.220.** $x = -4$ — точка максимума; возрастает на $(-\infty, -8)$ и на $(-8, -4)$, убывает на $(-4, 0)$ и на $(0, \infty)$. **15.221.** Точек экстремума нет; убывает на $(-\infty, -3)$, на $(-3, 3)$

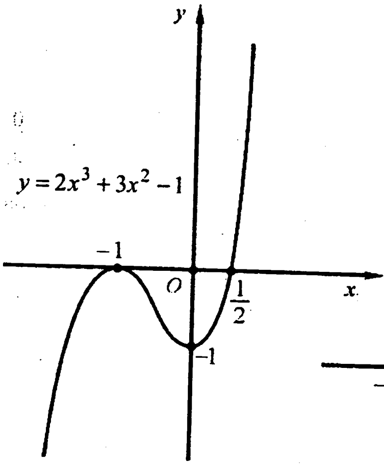


Рис. О.15.1

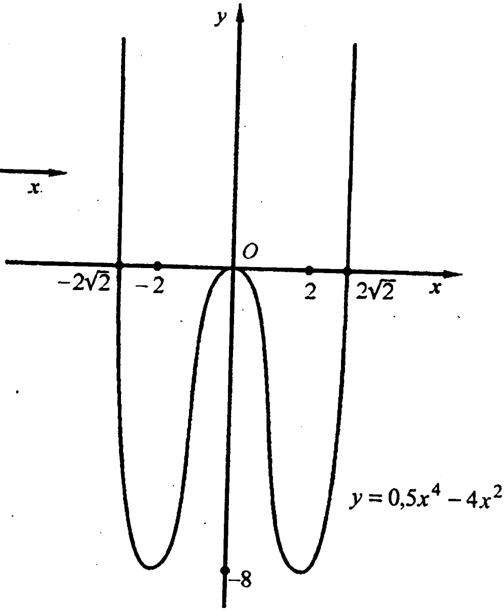


Рис. О.15.2

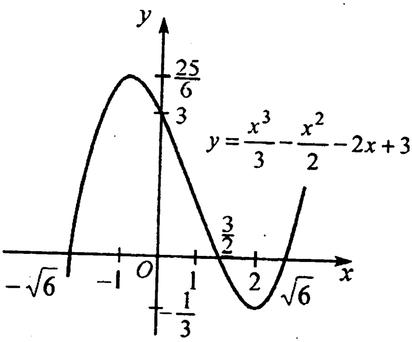


Рис. О.15.3

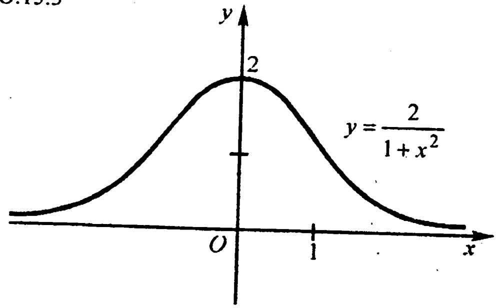


Рис. О.15.4

и на $(3, \infty)$. **15.222.** $x = 1$ — точка максимума; возрастает на $(-\infty, 1)$, убывает на $(1, \infty)$. **15.223.** $x = 0{,}5$ — точка минимума; убывает на $(-\infty; 0{,}5)$, возрастает на $(0{,}5; 2)$ и на $(2, \infty)$. **15.224.** $x = 2$ — точка максимума; убывает на $(-\infty, -2)$ и на $(2, \infty)$, возрастает на $(-2, 2)$. **15.225.** $x = 1-\sqrt{3}$ — точка максимума, $x = 1+\sqrt{3}$ — точка минимума; возрастает на $(-\infty, 1-\sqrt{3})$ и на $(1+\sqrt{3}, \infty)$, убывает на $(1-\sqrt{3}, 1)$ и на $(1, 1+\sqrt{3})$. **15.226.** $x = 0$ — точка минимума, $x = 2$ — точка максимума; убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(2, \infty)$, возрастает на $(0, 2)$. **15.227.** $x = -1$ — точка минимума; $x = 1$ — точка максимума; убывает на $(-\infty, -1)$ и на $(1, \infty)$, возрастает на $(-1, 1)$. **15.228.** $x = -\sqrt[3]{2}$ — точка минимума, $x = 0$ — точка максимума; убывает на $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$, на $(0, 1)$ и на $(1, \infty)$, возрастает на $(-\sqrt[3]{2}, 0)$. **15.229.** $x = 3$ — точка минимума; возрастает на $(-\infty, 0)$ и на $(3, \infty)$, убывает на $(0, 3)$. **15.230.** $x = 2{,}5$ — точка максимума; возрастает на $(-\infty, 1)$ и на $(1; 2{,}5)$, убывает на $(2{,}5; 4)$ и на $(4, \infty)$. **15.232.** а) $F(x) = \frac{4x^3}{3} - \frac{9}{x} - 35$; б) $F(x) = \frac{x^4}{12} - 2x^2 + \frac{x}{3} + 7$. **15.233.** $F(x) = \frac{x^5+11}{5}$. **15.234.** $F(x) = \frac{3-\cos 2x}{2}$. **15.235.** $F(x) = -\frac{2+\operatorname{ctg} 3x}{3}$. **15.236.** $F(x) = -\frac{71x^3+8}{24x^3}$. **15.237.** $F(x) = x^4 - x^3 + 3$. **15.238.** $F(x) = \frac{2\sin 4x - 9}{8}$. **15.239.** $S(x) = 7 - 4\sqrt{5-x}$. **15.240.** $\frac{\pi}{2}$. **15.241.** $\frac{3\pi}{4}$. **15.242.** 3. **15.243.** $\frac{\pi-2}{4}$. **15.244.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **15.245.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **15.246.** 2. **15.247.** 0,5. **15.248.** 0. **15.249.** 1120,4. **15.250.** −101,25. **15.251.** $\frac{46}{15}$. **15.252.** $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$. **15.253.** 2. **15.254.** $0{,}5\ln 2 - 1{,}5$. **15.255.** $0{,}75(\sqrt[3]{9}-1)$. **15.256.** 0,125. **15.257.** $\frac{3\pi}{8}$. **15.258.** $\frac{3\pi}{16}$. **15.259.** $\frac{11}{96}$. **15.260.** 0,125. **15.261.** 12. **15.262.** − 0,8. **15.263.** $\frac{4}{9}$. **15.264.** 0,6. **15.265.** $3{,}6\sqrt{10}\lg e \approx 4{,}9$. **15.266.** 2,75 кв. ед. **15.267.** $\sqrt{2}$ кв. ед. **15.268.** $\frac{8}{3}$ кв. ед. **15.269.** $\frac{5}{12}$ кв. ед. **15.270.** $\frac{1}{6}$ кв. ед.

15.271. 0,3 кв. ед. **15.272.** 1,6 кв. ед. **15.273.** $12 - 5\ln 5 \approx 4$ кв. ед. **15.274.** 64,5 м; 11 м/с^2. **15.275.** 11,25 м; $\frac{1}{12}$ м/с^2.

ГЛАВА 16

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

16.001. $\frac{m^2+n^2}{n-m}$. **16.003.** $\frac{c\sin 2\alpha}{2\cos(45°-\alpha)}$. **16.005.** Из правильных треугольников; из квадратов; из правильных шестиугольников. **16.006.** $-\frac{1}{k}$. **16.007.** 20 диагоналей. **16.008.** 12. **16.009.** Части равновелики. **16.010.** $3R^2$. **16.014.** В пятиугольнике. **16.022.** Из точек дуги окружности, опирающейся на этот отрезок, для которой данный угол является вписанным. **16.023.** $4S$. **16.025.** $\frac{R^2(4\pi-3\sqrt{3})}{6}$. **16.026.** Прямую, перпендикулярную основанию и проходящую через его середину. **16.027.** 0,2. **16.029.** $\frac{s}{\sqrt{2}} \le c < s$. **16.032.** Три. **16.034.** $0{,}2R\sqrt{10}$. **16.037.** $4\sqrt{2}$ м. **16.038.** a. **16.040.** 4, 5, 6, 7 и 8 см. **16.041.** 3 и 4. **16.044.** 16 см. **16.045.** 4 и 11 см. **16.046.** 12 см. **16.047.** 12, 15 и 18 см. **16.048.** 7,2 см^2. **16.049.** $600\sqrt{3}$ см^2. **16.050.** 1,5 см. **16.052.** $4\frac{8}{21}$ и $5\frac{20}{21}$ см. **16.053.** $0{,}25c^2$. **16.054.** а) Тупоугольный; б) прямоугольный; в) невозможен; г) тупоугольный. **16.056.** $(\sqrt{5}+1):4$. **16.057.** $2(S_1 + S_2)$. **16.060.** 0,25 P. **16.063.** $\frac{h}{3}$. **16.064.** 1,2 см. **16.065.** 7 : 2. **16.067.** 180°. **16.070.** arccos 0,8. **16.073.** a. **16.074.** arctg 0,75. **16.075.** 1) 5, 7, 9, 11 и 30 см; 2) 6, 8, 10, 12 и 30 см; 3) 7, 9, 11, 13 и 30 см. **16.076.** 25. **16.077.** 36°, 36° и 108°. **16.078.** 2α; π; $2\pi - 2\alpha$. **16.081.** Нет. **16.083.** $f(x)=\frac{S}{H^2}x^2$, где S — площадь основания пирамиды, H — ее высота, причем $0 \le x \le H$. **16.084.** 60°. **16.085.** $\arccos\frac{1}{3}$. **16.086.** $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; arctg 2; arctg 2. **16.087.** 1 : 4. **16.088.** 6 : 13. **16.089.** $\frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$. **16.090.** $\frac{1}{2}H\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **16.091.** $l\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $l\cos^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **16.093.** 60°. **16.094.** Окружность, являющуюся основанием конуса с высотой a и образующей b; высота конуса перпендикулярна данной плоскости, а вершина находится в фиксированной точке этой плоскости. **16.095.** В данный четырехугольник можно вписать окружность. **16.096.** 51°. **16.097.**

$\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}}$; $k\geq 2$. **16.098.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\sqrt{2k-k^2}}{k-1}}$; $1<k<2$.

16.099. $\pi\sqrt{2}:3$. **16.100.** 20 боковых граней. **16.104.** Да. **16.105.** $6\sqrt{435}$ см^3. **16.106.** 60°. **16.107.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **16.108.** Да, если параллелограмм является прямоугольником; да, если параллелограмм является ромбом. В том случае, когда точка равноудалена и от вершин, и от сторон параллелограмма, он должен представлять собой квадрат. **16.109.** Около нее можно описать окружность, т. е. трапеция является равнобедренной. Для такой трапеции искомое множество представляет собой перпендикуляр к плоскости ее основания, проходящий через центр описанной около трапеции окружности. **16.112.** 1 : 3. **16.114.** 1 : 7. **16.115.** 1 см. **16.116.** $\frac{5\pi}{16}$. **16.117.** На $0{,}5(\sqrt{6}-\sqrt{5})$. **16.118.** Проекцией ребра является биссектриса соответствующего угла основания. Эта проекция совпадает с диагональю основания, если основание представляет собой ромб. **16.119.** 1 : 11. **16.120.** 5040 см^2. **16.121.** $\frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$. **16.124.** Нет; на перпендикуляре к плоскости основания пирамиды, проходящем через центр описанной около этого основания окружности.

ГЛАВА 17

ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТ И ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

17.001. $y\pm 0{,}5\sqrt{15}=0$. **17.002.** $D(-1{,}4;-5{,}2)$. **17.003.** $5x-y+7=0$. **17.004.** $y=0$, $y=2\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}x$, $y=-\sqrt{3}(x-10)$ **17.005.** $(x-3{,}5)^2+(y\pm\sqrt{10})^2=12{,}25$. **17.006.** $y=-\sqrt{3}x+(3+2\sqrt{3})$; $6+3{,}5\sqrt{3}$ кв. ед. **17.007.** $R=13$; $B(12;5)$, $C(-5;12)$, $D(-12;-5)$. **17.008.** $(x-0{,}5)^2+(y-\sqrt{2})^2=2{,}25$ или $(x-0{,}5)^2+(y+\sqrt{2})^2=2{,}25$. **17.009.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ или $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **17.010.** $A(-1;2)$; 13 кв. ед. **17.011.** $8x+15y+60=0$; $8x+15y-60=0$; $8x-$ $8x-15y-60=0$; $\frac{60}{17}$ см. **17.012.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. **17.013.** $\frac{4\sqrt{17}}{11}$; $y=4x$. **17.014.** $C(5;2)$, $D(3;3)$ или $C(3;-2)$, $D(1;-1)$. **17.015.** 0,96. **17.016.** $\sqrt{33}$ и $\sqrt{105}$.

17.017. $(-2+3\sqrt{3}; -1)$ или $(-2-3\sqrt{3}; -1)$; $9\sqrt{3}$ кв. ед. **17.018.** $4\sqrt{2}$. **17.019.** $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. **17.020.** C (4; – 1). **17.021.** $1{,}5\sqrt{34}$. **17.022.** $3x+4y-15=0$ и $3x-4y-15=0$. **17.023.** $(x+1)^2+(y-3)^2=10$. **17.024.** $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$. **17.025.** (1,5; 1; 1). **17.026.** $\alpha=\arccos\frac{31}{5\sqrt{41}}$. **17.027.** $\cos A=-\frac{5}{\sqrt{34}}$. **17.028.** При $\alpha=-4$, $\beta=2$ или $\alpha=-8$, $\beta=-2$. **17.031.** $\overline{M_1M_2}(1{,}5; 1; -0{,}5)$, $\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{3{,}5}$. **17.033.** $\overline{AB}=3\bar{a}-\bar{b}$, $\overline{BC}=-3\bar{a}+2\bar{b}$. **17.034.** При $x\in(-\infty, 0)\cup(1, \infty)$. **17.035.** При $m\in(-\infty, -1)\cup(0, 2)$. **17.036.** При $x\in[2, 5)$. **17.037.** При $y\in\left(\frac{2}{3}, 3\right)$. **17.038.** При $x=-\frac{5}{4}$, $y=\frac{8}{5}$. **17.039.** При $x\in(-\infty, -1)\cup(5, \infty)$. **17.040.** $\overline{BD}=-2\bar{a}+2\bar{b}$, $\overline{AD}=-\frac{2}{3}\bar{a}+\frac{4}{3}\bar{b}$. **17.041.** $\overline{AB}=\frac{9}{8}\bar{a}-\frac{3}{8}\bar{b}$, $\overline{AD}=-\frac{3}{8}\bar{a}+\frac{9}{8}\bar{b}$, $\overline{MN}=$ $=-\frac{3}{2}\bar{a}+\frac{3}{2}\bar{b}$. **17.042.** $\overline{CM}=$ $=\frac{3}{20}\overline{CA}+\frac{3}{20}\overline{CB}+\frac{7}{10}\overline{CD}$. **17.043.** $\arccos\frac{5\sqrt{13}}{26}$. **17.046.** $\overline{A_1O}=-\bar{a}+\frac{1}{3}\bar{b}-\frac{2}{3}\bar{c}$. **17.047.** $\frac{8}{5\sqrt{17}}$. **17.048.** $\arccos\frac{3}{\sqrt{19}}$. **17.049.** $\arccos\frac{13}{14}$. **17.050.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}(\bar{a}+\bar{b})$. **17.051.** $\bar{p}(2; -1; 1)$. **17.052.** $\bar{a}=-1{,}5\bar{b}-3\bar{c}$. **17.054.** 5 кв. ед. **17.055.** 120°. **17.056.** $\frac{10\sqrt{5}}{3}$ куб. ед.. **17.057.** $\overline{CD}=\frac{AC^2\overline{CB}+BC^2\overline{CA}}{AB^2}$. **17.058.** Да. **17.059.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **17.060.** $M\left(0; 0; \frac{2}{3}\right)$, $N\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **17.061.** $\sqrt{13}$. **17.062.** – 11,5. **17.063.** $4\sqrt{7}$ см. **17.064.** 120°. **17.065.** $\frac{7}{5\sqrt{33}}$. **17.066.** 4 см. **17.067.** (– 4; – 2; 0) или (4; 2; 0). **17.068.** $\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}$. **17.069.** 180°. **17.070.** 7 см. **17.071.** $\overline{A_1A_3}=0{,}5(\sqrt{5}+1)\overline{A_1A_2}+\overline{A_1A_5}$. **17.072.** При $x=0$. **17.073.** $\overline{MO}=\frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}(\overline{MA}+\overline{MB})$. **17.074.** $\overline{DK}=\frac{7}{8}\overline{AB}-$ $-\overline{AD}$, $\frac{DK}{AB}=\frac{\sqrt{337}}{24}$. **17.077.** При $\alpha=0{,}5$ и $\alpha=4$. **17.078.** – 29; 14 кв. ед. **17.079.**

1 : 4. **17.080.** 45°. **17.081.** $\overline{0}$. **17.083.** Равнобедренный остроугольный. **17.085.** 8. **17.086.** arccos (– 0,8). **17.087.** $\overline{AB}+\overline{CB}=2(\overline{a}-\overline{b})$. **17.089.** $\arccos\frac{13}{14}$. **17.090.** $\arccos\frac{|a^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2+c^2}}$. **17.091.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{14}}$. **17.092.** –1,5. **17.095.** $\cos x=\frac{a^2+d^2-e^2-b^2}{2cf}$, где $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $DA = d$, $DB = e$, $DC = f$. **17.096.** $\left(\frac{1}{\sqrt{11}};-\frac{3}{\sqrt{11}};\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ или $\left(-\frac{1}{\sqrt{11}};\frac{3}{\sqrt{11}};-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$. **17.097.** $\frac{a+b}{c}$; $\frac{b+c}{a}$; $\frac{c+a}{b}$. **17.098.** $\sqrt{43}$ см. **17.099.** $\overline{OH}=\frac{b^2c^2\overline{OA}+a^2c^2\overline{OB}+a^2b^2\overline{OC}}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$. **17.100.** 30°. **17.101.** 6. **17.102.** $\pm\sqrt{6}$. **17.103.** 12,5 куб. ед. **17.104.** 5 кв. ед. **17.105.** $\sqrt{\frac{442}{19}}$; $\angle ABC$ — тупой. **17.106.** (2; 3; –2). **17.107.** (–4; –6; 12). **17.108.** $AB=5$; $S_{\Delta OAB}=5$ кв. ед.; OM = 2,5. **17.109.** $(4\sqrt{2};-2;8)$ или $(-4\sqrt{2};2;-8)$. **17.111.** $-\frac{S\sqrt{3}}{6}$. **17.112.** 3 : 1. **17.113.** $\overline{AB}=\overline{AC}+k\overline{AD}$, $\overline{AE}=\overline{AD}+k\overline{AC}$, где $k=0{,}5(1-\sqrt{5})$. **17.114.** $8a^2$, где a — длина ребра куба. **17.115.** $3a^2$, где a — длина стороны квадрата. **17.116.** $4a^2$, где a — длина стороны квадрата. **17.119.** $\frac{13}{2\sqrt{43}}$. **17.120.** $\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$. **17.125.** $\frac{16S^2c^2(c^4-16S^2)}{(16S^2+c^4)^2}$. **17.127.** На равные части по 45°. **17.129.** 4 : 1.

ГЛАВА 18

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

18.001. а) $1+i$; б) $5-9i$; в) $14+23i$; г) $-1{,}04+0{,}28i$. **18.002.** 10 и 49. **18.003.** $4+3i$ и $13+33i$. **18.004.** $-0{,}1+3{,}1i$ и $3{,}54-1{,}38i$. **18.005.** $-1-3i$ и $-0{,}5i$. **18.006.** $-2\sqrt{b}\,i$ и $\frac{a^2-b}{a^2+b}-\frac{2a\sqrt{b}}{a^2+b}i$. **18.007.** $-9+10i$ и $-\frac{41}{34}+\frac{23}{34}i$. **18.008.** $x^2-2x+10=0$. **18.009.** $4x^2+1=0$. **18.010.** $x^2-6x+10=0$. **18.011.**

$25x^2-8x+1=0$. **18.012.** $M(-1{,}5;\ 4{,}7)$. **18.014.** $\mathrm{Re}\,z=-1{,}52$. **18.015.** $\mathrm{Re}\,z=6$. **18.016.** $\mathrm{Re}\,z=-3$. **18.017.** $\mathrm{Im}\,z=-1$. **18.018.** $\mathrm{Im}\,z=0$. **18.019.** $\mathrm{Im}\,z=\frac{27}{17}$. **18.020.** $-1{,}6$. **18.021.** $2i$. **18.022.** $-1+i$. **18.023.** $-1{,}3-0{,}9i$. **18.024.** $-0{,}72+3{,}46i$. **18.025.** $92i$. **18.026.** $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}i$. **18.027.** 0. **18.028.** $\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i$. **18.029.** $-2i$. **18.030.** Да. **18.031.** $x_{1,2}=-3\pm5i$. **18.032.** $x_{1,2}=\pm6i$. **18.033.** $x_{1,2}=-2\pm5i$. **18.034.** $x_{1,2}=1\pm1{,}5i$. **18.035.** $x_{1,2}=\pm3;\ x_{3,4}=\pm2i$. **18.036.** $x_{1,2}=\pm3i;\ x_{3,4}=\pm\sqrt{6}\,i$. **18.037.** $(m+5i)(m-5i)$. **18.038.** $\left(\frac{p}{2}+\frac{qi}{3}\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{qi}{3}\right)$. **18.039.** $(\sqrt{7}+\sqrt[4]{3}\,i)(\sqrt{7}-\sqrt[4]{3}\,i)$. **18.040.** $(1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha)(1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha)$. **18.041.** $x=-\frac{5}{14},\ y=-\frac{1}{14}$. **18.042.** $x=-\frac{1}{3},\ y=-\frac{2}{3}$. **18.043.** $x=-1,\ y=-2$. **18.044.** При $x_1=1,\ y_1=2;\ x_2=2,\ y_2=1;\ x_3=1,\ y_3=-2;\ x_4=-2,\ y_4=1$. **18.045.** При $x_1=1,\ y_1=\sqrt{2};\ x_2=1,\ y_2=-\sqrt{2};\ x_3=0{,}5,\ y_3=0{,}5\sqrt{5};\ x_4=0{,}5,\ y_4=-0{,}5\sqrt{5}$. **18.046.** При $x_1=-1,\ y_1=-2;\ x_2=6,\ y_2=33$. **18.047.** При $x_1=1,\ y_1=4;\ x_2=-1,\ y_2=4$. **18.048.** При $x_1=2,\ y_1=3;\ x_2=-1{,}2,\ y_2=-3{,}4$. **18.049.** При $x_1=1,\ y_1=2;\ x_2=4,\ y_2=0{,}5;\ x_3=-4,\ y_3=-0{,}5;\ x_4=-1,\ y_4=-2$. **18.050.** При $x=2,\ y=2$. **18.051.** При $x_1=1,\ y_1=-3;\ x_2=-1,\ y_2=-3$. **18.052.** При $x_1=1,\ y_1=-2;\ x_2=-1,\ y_2=2$. **18.053.** $z=1+i$. **18.054.** $z=2+i$ или $z=-2-i$. **18.055.** $\frac{34}{13}$. **18.057.** $x_{1,2}=\pm\sqrt{2};\ x_{3,4}=\pm\sqrt{2}\,i;\ x_{5,6}=1\pm i;\ x_{7,8}=-1\pm i$. **18.058.** а) При $a=-\sqrt{7}$, $a=0$ и $a=\sqrt{7}$; б) ни при каком a. **18.060.** $a=-0{,}16$, $b=-0{,}12$. **18.061.** См. рис. О.18.1. **18.062.** См. рис. О.18.2. **18.063.** См. рис. О.18.3. **18.064.** См. рис. О.18.4. **18.065.** См. рис. О.18.5. **18.066.** См. рис. О.18.6. **18.067.** См. рис. О.18.7. **18.068.** См. рис. О.18.8. **18.069.** См. рис. О.18.9. **18.070.** См. рис. О.18.10. **18.071.** $z=8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. **18.072.** $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. **18.073.** $z=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. **18.074.** $z=12\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$. **18.075.** $z=\sqrt{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$. **18.076.** $z=10(\cos 0+i\sin 0)$. **18.077.** $z=(\sqrt{10}-3)(\cos\pi+i\sin\pi)$. **18.078.** $z=(\sqrt{5}-2)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. **18.079.** $z=\sqrt{2}\sin 36^\circ(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$. **18.080.**

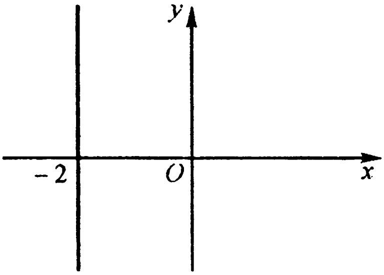


Рис. О.18.1

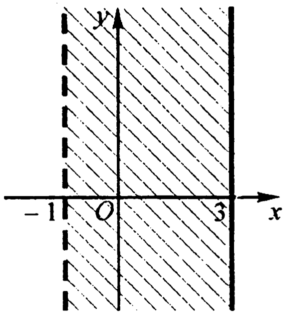


Рис. О.18.2

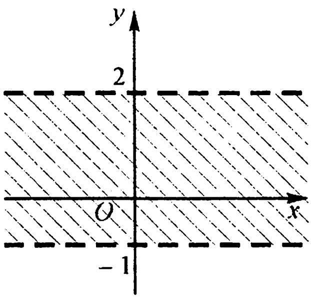


Рис. О.18.3

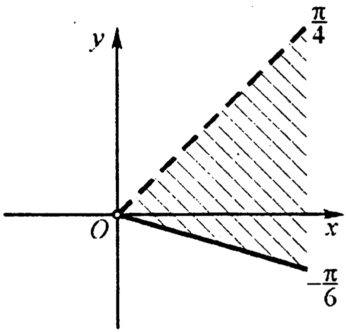


Рис. О.18.4

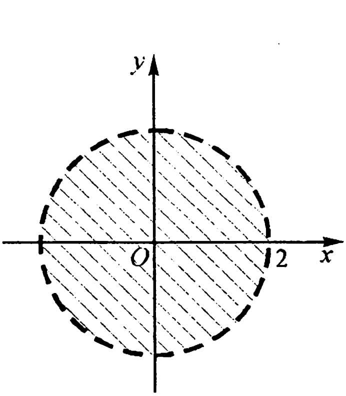


Рис. О.18.5

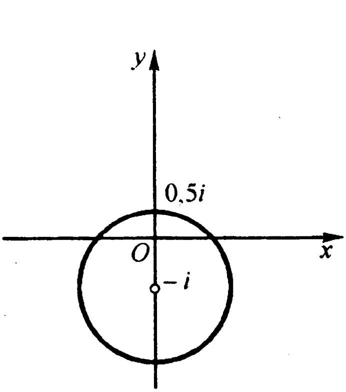


Рис. О.18.6

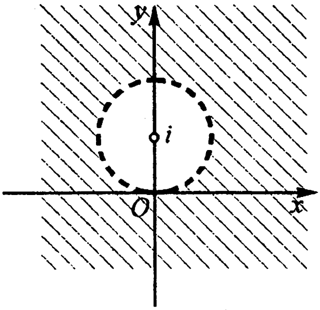


Рис. О.18.7

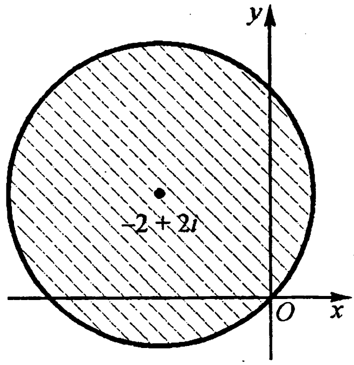


Рис. О.18.8

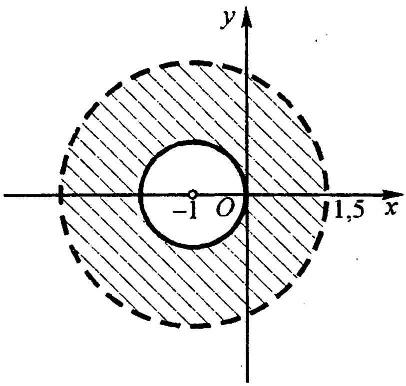


Рис. О.18.9

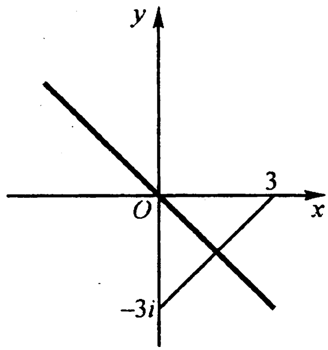


Рис. О.18.10

$z=\cos 138° + i\sin 138°$. **18.081.** $z=3(\cos 0 + i\sin 0)$. **18.082.** $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. **18.083.** $z=2\sin\frac{2\pi}{5}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$. **18.084.** $z=\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$. **18.085.** $z=-3+3\sqrt{3}\,i$. **18.086.** $z=5-5i$. **18.087.** $z=-2\sqrt{3}-2i$. **18.088.** $z=1+i$. **18.089.** $z=-0{,}5+0{,}5\sqrt{3}\,i$. **18.090.** $z=1-\sqrt{3}\,i$. **18.091.** $12\sqrt{3}+12i$. **18.092.** $2i$. **18.093.** $-\frac{1}{6}i$. **18.094.** $-3\sqrt{2}$. **18.095.** $-\sqrt{6}+\sqrt{6}\,i$. **18.096.** $8\sqrt{6}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right)$. **18.097.** $4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i$. **18.098.**

$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$. **18.099.** $8i$. **18.100.** $\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i$. **18.101.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$. **18.102.** $-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i$. **18.103.** $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$. **18.104.** 512. **18.105.** $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$. **18.106.** $4-4\sqrt{3}\,i$. **18.107.** $-128-128i$. **18.108.** -27. **18.109.** $\frac{32}{243}i$. **18.110.** i. **18.111.** $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **18.112.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$. **18.113.** $8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. **18.114.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$. **18.115.** $9i$. **18.116.** $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$. **18.117.** $\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}i$. **18.118.** а) $32+32i$; б) $8i$. **18.119.** $-4096i$. **18.120.** $\sqrt{3}-i$; $2i$; $-\sqrt{3}-i$. **18.121.** $\sqrt{3}+3i$; $-\sqrt{3}-3i$. **18.122.** $2{,}5+2{,}5\sqrt{3}\,i$; -5; $2{,}5-2{,}5\sqrt{3}\,i$. **18.123.** $1{,}5\sqrt{2}-1{,}5\sqrt{2}\,i$; $3\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$; $3\Big($ cos **18.124.** $1+\sqrt{3}\,i$; $-\sqrt{3}+i$; $-1-\sqrt{3}\,i$; $\sqrt{3}-i$. **18.125.** $\sqrt{3}+i$; $2i$; $-\sqrt{3}+i$; $-\sqrt{3}-i$; $-2i$; $\sqrt{3}-i$. **18.126.** $-2\sqrt{15}<x<-2$ или $2<x<2\sqrt{15}$. **18.128.** $x=2^{-1/3}$, $y=2^{2/3}$. **18.129.** При $x=0$. **18.130.** При $x_1=3$, $y_1=1$; $x_2=-3$, $y_2=-1$; $x_3=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y_3=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$; $y_4=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **18.131.** $b=5$. **18.132.** $-0{,}5+0{,}5\sqrt{3}\,i$. **18.133.** $\hat{z}_1=-4i$, $\hat{z}_2=2\sqrt{3}+2i$. **18.134.** $512i$. **18.135.** См. рис. О.18.11. **18.136.** См. рис. О.18.12. **18.137.** См. рис. О.18.13. **18.138.** См. рис. О.18.14. **18.139.** См. рис. О.18.15. **18.140.** См. рис. О.18.16. **18.141.** См. рис. О.18.17. **18.142.** $x_1=0$; $z_{2,3}=\pm 3i$. **18.143.** $z_1=0$; $z_2=3$; $z_{3,4}=$ $=-1{,}5\pm 1{,}5\sqrt{3}i$. **18.144.** $z=-0{,}5i$. **18.145.** $z=2+1{,}5i$. **18.146.** $z=-2+0{,}5\sqrt{2}\,i$. **18.147.** $z_1=3-4i$; $z_2=-3+4i$; $z_3=4-3i$; $z_4=-4+3i$. **18.148.** $z_1=1-i$; $z_2=i$. **18.149.** $z_1=1+i$; $z_2=-2i$. **18.150.** $z=\frac{7}{6}+\frac{5}{6}i$. **18.151.** $z_1=-1{,}5-2i$; $z_2=-1{,}5-4{,}25i$. **18.152.** $z_1=2-3i$; $z_2=-4-3i$. **18.153.** $x^3-6x^2+9x+50=0$. **18.154.** $(x+4)(x-1)(x^2-4x+5)$. **18.155.** $\frac{z-3}{z-4}$. **18.156.** $\lambda=-2$; $x_1=1$; $x_{2,3}=1\pm i$. **18.157.** $z_1=3-i$; $z_2=-1+2i$. **18.158.** $z_1=3+7i$; $z_2=-3-3i$. **18.159.** $z_1=5+i$; $z_2=3+2i$. **18.160.** $z_1=2+3i$; $z_2=3-i$. **18.161.** $\alpha=1,\beta=1$ или $\alpha=2,\beta=-1$.

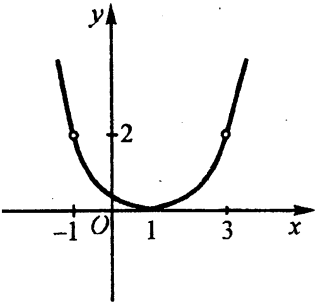


Рис. О.18.11

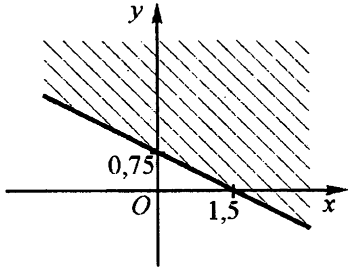


Рис. О.18.12

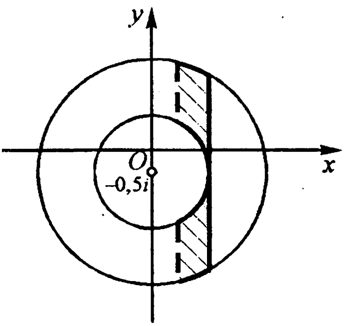


Рис. О.18.13

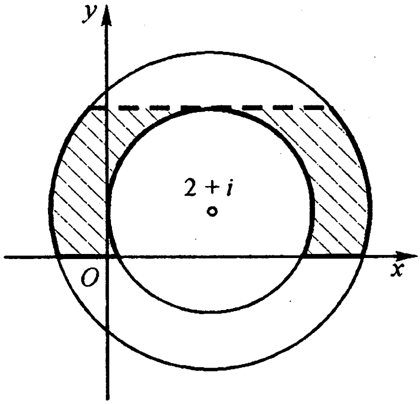


Рис. О.18.14

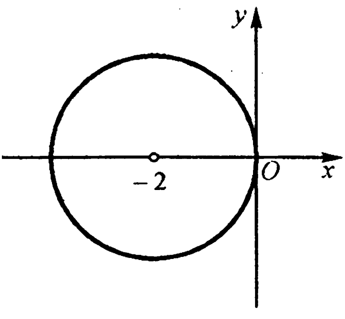


Рис. О.18.15

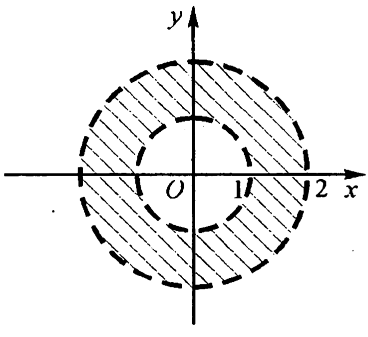


Рис. О.18.16

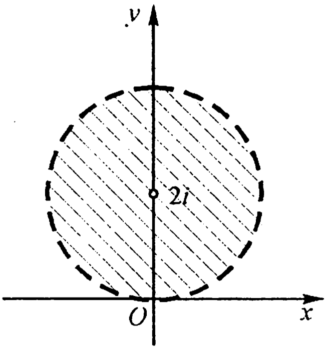


Рис. О.18.17

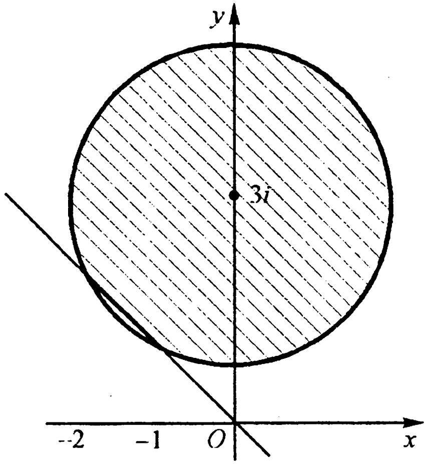


Рис. О.18.18

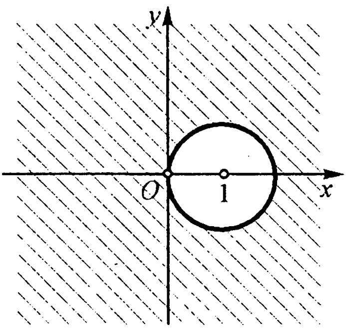


Рис. О.18.19

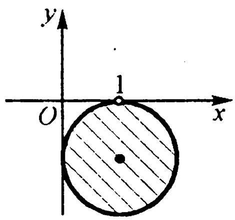


Рис. О.18.20

18.162. $a = 1$. **18.163.** 3 и 1. **18.164.** -1. **18.165.** $-2\cos\alpha$. **18.166.** $z = 2|\cos\alpha|\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$. **18.167.** $z = \frac{1}{|\cos\alpha|}(\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+$ $+\alpha))$. **18.168.** $z = 1{,}6(\cos(-130°)+i\sin(-130°))$. **18.169.** $z = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{10}\times$ $\times\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{20}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{20}\right)\right)$. **18.170.** $2(\sqrt{3}+1)+2(\sqrt{3}-1)i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. **18.171.** $-\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$. **18.172.** $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$.

18.173. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{1-\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\right.$ **18.177. а)** $2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\times$

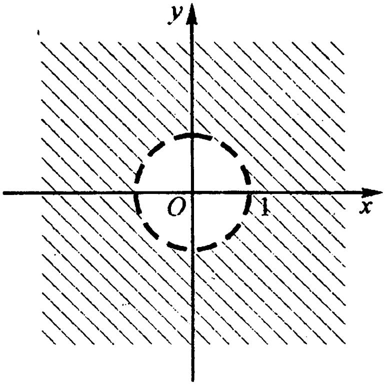


Рис. О.18.21

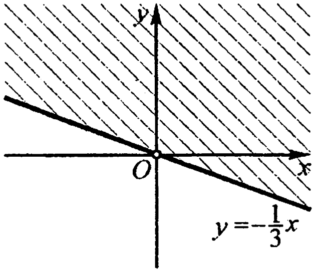


Рис. О.18.22

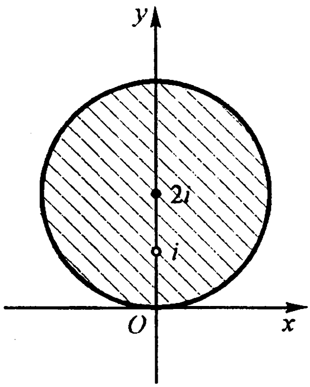


Рис. О.18.23

$\times\left(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n\varphi}{2}\right)$; б) $2^n\sin^n\frac{\varphi}{2}\left(\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right)$ **18.178.** При $n = 4k$, $k \in Z$. **18.179.** $[-2, \infty)$. **18.181.** См. рис. О.18.18. **18.182.** См. рис. О.18.19. **18.183.** См. рис. О.18.20. **18.184.** См. рис. О.18.21. **18.185.** См. рис. О.18.22. **18.186.** См. рис. О.18.23. **18.187.** Часть плоскости, расположенная под параболой $y = 0{,}25(x^2+4)$. **18.188.** Часть плоскости, расположенная под параболой $y=-0{,}25(x^2+4)$ и не содержащая точек прямой $x = 1$. **18.189.** Бесконечное множество концентрических колец с центром $z = 0$; эти кольца содержат интервалы действительной оси $2\pi k < x < (2k+1)\pi$, где $k \in Z$. **18.190.** Три точки $(0; 1)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, лежащие на окружности с центром $z = 0$ и радиусом 1 и делящие ее на три равные части. **18.191.** $z = -4i$. **18.192.** $|z| = 0{,}5$. **18.193.** $z = 4 + 5i$ и $z = 5 + 4i$. **18.194.** $z = 2{,}4 + 1{,}8i$. **18.195.** $\frac{1}{\sin\alpha}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$, если $2\pi n < \alpha < (2n+1)\pi$, $n \in Z$; $\frac{1}{|\sin\alpha|}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)$, если $(2n+1)\pi < \alpha < (2n+2)\pi$, $n \in Z$. **18.196.** $a = -1$; $x_{1,2} = \pm i$; $x_3 = 2$. **18.197.** $a = 1$; $x_{1,2} = \pm i$; $x_3 = \frac{1}{3}$. **18.198.** $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$; $z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$; $z_3 = \sqrt{2}\,i$; $z_4 = -$ **18.199.** $x_{1,2} = -1 \pm i$; $x_3 = 0$; $x_4 = 2$. **18.200.** $x_1 = q$; $x_{2,3} = \frac{q}{2}(1 \pm \sqrt{3}\,i)$; $x_{4,5} = \frac{q}{2}(-1 \pm$ **18.201.** $0{,}25(6 - \sqrt{6}) \le k \le 0{,}25(6 + \sqrt{6})$. **18.202.** 3, если k кратно трем; 0, если k не кратно трем. **18.203.** $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **18.204.** $\left(0, \frac{1}{16}\right] \cup [4, \infty)$.

18.205. $[-3, -1) \cup (-1, 1]$. **18.208.** $\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b}}{2}}\right.$

при $b > 0$; $\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b}}{2}}\right.$ при $b < 0$. **18.209.**

$x_1 = 1$; $x_{2,3} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm \frac{i}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$; $x_{4,5}$ **18.211.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. **18.212.** $|z| = 0{,}5(1 + \sqrt{5})$. **18.213.** 1. **18.214.** 2. **18.215.** $\Sigma_1 = \frac{1 - \cos\alpha + \cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{2(1 - \cos\alpha)}$,

$$\Sigma_2 = \frac{\sin\alpha + \sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha}{2(1 - \cos\alpha)}.$$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Вариант I. 1. 1. **2.** 4,3. **3.** 3. **4.** 4,1. **5.** 6. **6.** 0. **7.** 30°. **8.** 42 см. **9.** 3,53 куб. ед. **10.** –1,5.

Вариант II. 1. 4. **2.** 1. **3.** 4. **4.** 5. **5.** 7. **6.** 41. **7.** 3. **8.** 64. **9.** 4. **10.** 1.

Вариант III. 1. 8. **2.** 7. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 25. **6.** 2. **7.** 192. **8.** 5. **9.** 10. **10.** 3.

Вариант IV. 1. 2. **2.** 1; 2; 4. **3.** 2. **4.** 5. **5.** 6 см^3. **6.** 8. **7.** 0,5. **8.** 4 и 36. **9.** 8. **10.** 0 и 5.

Вариант V. 1. 40. **2.** –25. **3.** 10. **4.** 1. **5.** 0,28. **6.** 90°. **7.** 72 см^2. **8.** 2,3 см. **9.** 13 и 13. **10.** 6.

Вариант VI. 1. 1. **2.** 11. **3.** 0; 4. **4.** 48. **5.** 0,8. **6.** 4. **7.** 31,5. **8.** 15. **9.** 2. **10.** 18.

Вариант VII. 1. – 1,5. **2.** 8. **3.** 0,5. **4.** 6. **5.** 7,2. **6.** 16. **7.** 1. **8.** 190. **9.** – 0,5. **10.** 7.

Вариант VIII. 1. 2; 0,25. **2.** 225°; 315°. **3.** 4. **4.** 0,3. **5.** 168 см^2. **6.** 3 км/ч. **7.** 1. **8.** 0,75. **9.** 6 и 0. **10.** 2,5.

Вариант IX. 1. 2. **2.** 9. **3.** 10. **4.** 8 см. **5.** 0,8. **6.** 0. **7.** 103. **8.** 4 см. **9.** 6. **10.** 16 кв. ед.

Вариант X. 1. –9. **2.** 1. **3.** 3. **4.** 11. **5.** –1. **6.** 7. **7.** 4. **8.** 0. **9.** $x = \frac{1}{e}$ — точка минимума. **10.** 2.

Вариант XI. 1. 6. **2.** 0. **3.** 1. **4.** 5. **5.** 0. **6.** –1. **7.** 5. **8.** 1. **9.** 20. **10.** 2,25.

Вариант XII. 1. 1; 5. **2.** 7,5 см. **3.** 0,6. **4.** 100. **5.** – 1,5. **6.** 3. **7.** 1. **8.** 2,25. **9.** 80. **10.** 1,5.

Вариант XIII. 1. $(2x + 1)^2$, $x \neq 0$, $x \neq 0,5$. **2.** $2\operatorname{tg} 2\alpha$. **3.** 1. **4.** –10; 3. **5.** 9. **6.** 2. **7.** 10. **8.** 4. **9.** – 3. **10.** 1.

Вариант XIV. 1. 3. **2.** 1,6. **3.** 5. **4.** 12 и 24 ч. **5.** –1; 1. **6.** 4. **7.** 12. **8.** 0,5. **9.** 8. **10.** 120°; 240°.

Вариант XV. 1. –4; –3; 4. **2.** 25. **3.** 5. **4.** –58. **5.** 2; 3. **6.** 2,25. **7.** 9,375 кв. ед. **8.** 12. **9.** 150°; 210°. **10.** 40 л.

Вариант XVI. 1. 2. **2.** 0,1. **3.** 83. **4.** 4. **5.** 192 кв. ед. **6.** 90°; 210°. **7.** 32. **8.** 25 и 20. **9.** 2; 1; 5. **10.** 2; 4.

Вариант XVII. 1. 4. **2.** 0,75. **3.** 5. **4.** 60 кв. ед. **5.** 0,8. **6.** 10. **7.** 6. **8.** 6. **9.** 12 куб. ед. **10.** 8.

Вариант XVIII. 1. 5. **2.** 8. **3.** 4. **4.** 2. **5.** 66. **6.** 1. **7.** 12 куб. ед. **8.** 13. **9.** 2. **10.** 3.

Вариант XIX. 1. 4. **2.** 2. **3.** 3. **4.** 7. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 6 кв. ед. **8.** 2. **9.** 4. **10.** 3.

Вариант XX. 1. 7. **2.** 8 кв. ед. **3.** 3. **4.** 2. **5.** 0,6. **6.** 2. **7.** 51,6. **8.** 3. **9.** 16. **10.** 120°.

Вариант XXI. 1. 4. **2.** 48 кв. ед. **3.** 3. **4.** 5. **5.** 3. **6.** 7. **7.** 10. **8.** 4. **9.** 5. **10.** 2.

Вариант XXII. 1. $(2 \log_2 5 + 1)^2$. **2.** 1. **3.** 10. **4.** 5. **5.** 12. **6.** 0,36. **7.** 0,8. **8.** 3. **9.** 6. **10.** 2.

Вариант XXIII. 1. 4. **2.** 5. **3.** 9 кв. ед. **4.** 5. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 4. **8.** 2. **9.** 6. **10.** 4.

Вариант XXIV. 1. 14. **2.** 0,5. **3.** 5. **4.** 7. **5.** 4. **6.** 250 куб. ед. **7.** 63. **8.** 0,2. **9.** 5. **10.** 20.

Вариант XXV. 1. 1. **2.** 16. **3.** 6. **4.** 0,28. **5.** (9; –1). **6.** 6. **7.** 3. **8.** 12. **9.** 14. **10.** 4 кв. ед.

Вариант XXVI. 1. –2; –1. **2.** 0,5; 0,6. **3.** 0,75. **4.** 18 кв. ед. **5.** 4. **6.** 2 и 0. **7.** 16. **8.** –2; –1. **9.** 120°; 240°. **10.** 12.

Вариант XXVII. 1. 135°; 225°. **2.** 24 см^2. **3.** 2 и 22 134. **4.** –5 и 3. **5.** –5. **6.** 15. **7.** –1,5. **8.** 1,75. **9.** 2. **10.** 4.

Вариант XXVIII. 1. 20. **2.** –0,4. **3.** 1. **4.** –1; 2. **5.** 4. **6.** –6 и –6. **7.** –0,6. **8.** 0,4 и 0,4. **9.** 5 и 6. **10.** 39 и –39.

Вариант XXIX. 1. 1000. **2.** 0. **3.** 4. **4.** 25. **5.** 1; 11; 21. **6.** 10. **7.** –2; –1. **8.** 4 см. **9.** –45°; 0°; 45°. **10.** 8 см^3.

Вариант XXX. 1. 6; 2. **2.** (2; 3; –3). **3.** 2. **4.** –52,5°; 7,5°; 37,5°. **5.** 10; 11; 13; 14. **6.** 6 см^3. **7.** 30 и 35 км/ч. **8.** 0. **9.** 20,25. **10.** Первое.

В таблице указаны номера всех задач шестого издания «Сборника» (левый столбец), для которых те же задачи в десятом издании приведены с решениями или указаниями (их номера — в правом столбце; курсивом выделены номера задач, к которым даны указания). Таблица начинается с гл. 2, так как в десятом издании отсутствует глава, соответствующая гл. 1 ше\стого издания.

Глава 2

2.029	1.028	2.156	1.152	2.198	1.175	2.261	1.191	2.306	1.316
2.039	1.027	2.161	1.170	2.200	1.268	2.263	1.169	2.308	1.313
2.040	1.001	2.163	1.172	2.202	*1.176*	2.269	1.193	2.310	1.315
2.044	1.030	2.166	1.242	2.212	1.162	2.270	1.250	2.312	1.320
2.075	1.029	2.171	1.173	2.218	1.273	2.281	1.197	2.316	1.321
2.078	1.002	2.175	1.266	2.221	1.182	2.284	*1.281*	2.325	1.326
2.079	1.026	2.177	1.243	2.223	1.274	2.285	1.308	2.326	*1.327*
2.080	1.003	2.178	1.158	2.224	1.244	2.286	1.309	2.334	1.332
2.112	1.031	2.186	*1.159*	2.228	*1.275*	2.290	1.311	2.336	1.333
2.122	1.119	2.188	1.249	2.229	1.183	2.293	1.293	2.243	1.340
2.130	1.125	2.190	1.160	2.235	1.277	2.294	1.294	2.351	1.342
2.150	1.146	2.197	1.174	2.255	1.190	2.299	1.296	2.353	1.344
2.155	*1.156*							2.359	1.357

Глава 3

3.001	4.001	3.077	4.077	3.154	4.154	3.229	4.229	3.303	4.303
3.004	4.004	3.091	4.091	3.161	4.161	3.231	4.231	3.307	4.307
3.008	4.008	3.094	4.094	3.163	*4.163*	3.233	4.233	3.309	*4.309*
3.011	4.011	3.096	4.096	3.164	4.164	3.236	4.236	3.311	4.311
3.014	4.014	3.099	4.099	3.167	4.167	3.241	4.241	3.313	4.313
3.019	4.019	3.101	*4.101*	3.171	4.171	3.246	4.246	3.320	4.320
3.023	4.023	3.102	4.102	3.172	4.172	3.249	4.249	3.327	4.327
3.026	4.026	3.108	4.108	3.173	4.173	3.255	4.255	3.330	4.330
3.029	4.029	3.111	4.111	3.177	4.177	3.259	4.259	3.335	4.335
3.032	4.032	3.112	4.112	3.180	4.180	3.263	4.263	3.340	4.340
3.035	4.035	3.114	4.114	3.181	4.181	3.268	4.268	3.343	4.343
3.042	4.042	3.115	4.115	3.183	4.183	3.269	4.269	3.348	4.348
3.045	*4.045*	3.116	4.116	3.184	4.184	3.271	4.271	3.351	4.351
3.048	*4.048*	3.120	4.120	3.191	4.191	3.274	*4.274*	3.353	4.353
3.051	4.051	3.126	4.126	3.194	4.194	3.277	*4.277*	3.357	4.357
3.054	4.054	3.133	4.133	3.197	4.197	3.281	*4.281*	3.358	4.358
3.056	*4.056*	3.136	4.136	3.200	4.200	3.284	4.284	3.363	4.363
3.058	4.058	3.140	4.140	3.207	4.207	3.286	4.286	3.364	4.364
3.062	4.062	3.144	4.144	3.211	4.211	3.291	4.291	3.371	4.371
3.063	4.063	3.145	4.145	3.215	4.215	3.292	4.292	3.374	4.374
3.068	4.068	3.148	4.148	3.218	*4.218*	3.295	*4.295*	3.378	4.378
3.071	4.071	3.149	4.149	3.220	*4.220*	3.298	4.298	3.381	4.381
3.076	4.076	3.150	4.150	3.226	4.226	3.301	4.301	3.384	4.384

3.385	4.385	3.408	4.408	3.444	4.444	3.472	4.472	3.492	4.492
3.388	4.388	3.419	4.419	3.447	4.447	3.474	4.474	3.495	4.495
3.392	4.392	3.422	4.422	3.456	4.456	3.481	4.480	3.496	4.496
3.393	4.393	3.425	*4.425*	3.463	4.463	3.486	4.486	3.497	4.497
3.398	4.398	3.429	4.429	3.465	4.465	3.488	4.490	3.499	4.499
3.401	4.401	3.434	4.434	3.466	4.466	3.490	4.481	3.500	4.500
3.405	4.405								

Глава 4

4.003	6.003	4.015	6.015	4.026	6.026	4.044	6.044	4.069	6.069
4.005	6.005	4.018	6.018	4.032	6.032	4.046	6.046	4.070	6.070
4.008	6.008	4.021	6.021	4.036	6.036	4.052	6.052	4.074	6.074
4.009	6.009	4.023	6.023	4.038	6.038	4.067	6.067	4.077	6.077
4.011	6.011	4.025	6.025	4.043	6.043			4.085	6.085

Глава 5

5.001а	16.001	5.027	16.035	5.044	16.058	5.067	16.079	5.080	16.091
5.007а	16.012	5.030	16.039	5.045	16.059	5.071	16.083	5.082	16.093
5.007б	*16.013*	5.031	16.040	5.047	16.061	5.073	16.085	5.085	16.097
5.014	16.020	5.033а	16.042	5.050	16.064	5.075	16.086	5.087	16.098
5.018	16.023	5.036а	16.048	5.052	16.066	5.077	16.088	5.088	16.099
5.020	16.028	5.040	16.054	5.055	16.069	5.078	16.089	5.089	16.104
5.024	16.032	5.042	16.056	5.062	16.076			5.090	16.105

Глава 6

6.003	*2.020*	6.054	*2.050*	6.114	*2.105*	6.159	2.164	6.193	2.210
6.004	*2.026*	6.056	2.035	6.115	2.117	6.160	*2.172*	6.201	*2.202*
6.005	*2.025*	6.058	*2.061*	6.120	2.120	6.163	2.169	6.202	2.219
6.007	2.018	6.060	2.041	6.121	2.121	6.164	2.176	6.207	2.214
6.008	2.001	6.063	2.052	6.127	2.127	6.165	2.175	6.208	2.200
6.013	2.016	6.069	*2.077*	6.128	2.128	6.166	2.173	6.209	2.184
6.016	*2.028*	6.071	2.067	6.132	2.132	6.167	*2.162*	6.211	2.192
6.017	2.008	6.074	*2.087*	6.133	2.133	6.168	2.174	6.213	2.197
6.019	*2.027*	6.075	*2.091*	6.136	2.145	6.169	2.163	6.224	2.232
6.020	*2.024*	6.083	*2.080*	6.138	2.158	6.170	2.180	6.228	2.228
6.022	*2.013*	6.085	2.072	6.139	2.140	6.173	*2.177*	6.229	2.223
6.023	2.009	6.087	2.074	6.142	2.149	6.174	*2.170*	6.232	2.224
6.025	2.014	6.089	2.090	6.143	2.152	6.176	*2.171*	6.238	2.227
6.026	2.003	6.097	2.096	6.146	2.136	6.178	2.181	6.239	2.222
6.027	2.021	6.101	*2.114*	6.148	*2.151*	6.179	2.143	6.241	*2.226*
6.030	2.012	6.102	*2.113*	6.151	2.137	6.181	2.182	6.245	2.245
6.033	2.031	6.105	2.110	6.154	*2.154*	6.189	*2.194*	6.246	2.246
6.047	*2.063*	6.106	*2.115*	6.156	2.160	6.190	*2.218*	6.247	2.247
6.051	*2.036*	6.109	*2.106*	6.157	*2.153*	6.191	2.183	6.248	2.248
6.053	2.047	6.110	*2.107*	6.158	*2.179*			6.249	2.249

6.250	2.250	6.282	2.276	6.305	2.328	6.329	2.331	6.349	2.359
6.254	2.254	6.283	2.294	6.306	2.304	6.330	2.339	6.350	2.367
6.255	2.255	6.286	*2.277*	6.307	2.306	6.331	2.340	6.351	2.361
6.256	2.257	6.288	2.296	6.308	2.326	6.335	*2.338*	6.352	2.363
6.260	*2.258*	6.289	*2.297*	6.309	2.324	6.336	2.333	6.356	2.350
6.261	2.265	6.291	*2.298*	6.310	*2.307*	6.337	2.337	6.357	2.343
6.262	2.256	6.293	2.285	6.313	*2.312*	6.338	2.332	6.359	2.366
6.267	*2.267*	6.294	*2.299*	6.318	2.315	6.340	2.335	6.362	2.347
6.269	2.271	6.295	*2.287*	6.321	2.309	6.342	2.369	6.363	*2.348*
6.270	*2.264*	6.296	*2.301*	6.322	2.310	6.344	2.351	6.364	2.342
6.273	2.270	6.298	*2.302*	6.323	2.319	6.346	2.345	6.366	2.358
6.274	2.261	6.300	2.300	6.324	*2.311*	6.347	2.364	6.367	2.354
6.277	2.292	6.301	*2.291*	6.325	2.303	6.348	2.357	6.369	2.355
6.279	2.289	6.304	2.308	6.327	*2.317*			6.370	2.368

Глава 7

7.003	7.046	7.071	7.019	7.151	7.190	7.211	7.251	7.279	*7.299*
7.005	7.043	7.072	7.020	7.158	7.197	7.213	*7.269*	7.280	*7.300*
7.010	7.052	7.078	7.026	7.161	7.202	7.216	7.175	7.283	7.303
7.011	7.053	7.079	*7.100*	7.165	7.173	7.217	*7.182*	7.286	7.306
7.016	7.058	7.080	7.064	7.166	7.260	7.221	7.226	7.288	7.308
7.017	7.062	7.082	7.032	7.167	*7.246*	7.222	7.176	7.294	7.314
7.018	7.042	7.087	*7.012*	7.168	7.247	7.227	7.256	7.296	7.316
7.019	7.063	7.093	*7.103*	7.169	7.244	7.229	*7.178*	7.297	7.317
7.021	7.109	7.097	7.083	7.170	7.204	7.240	*7.268*	7.300	7.321
7.023	7.107	7.099	7.069	7.173	*7.236*	7.242	7.235	7.305	7.320
7.024	7.071	7.115	7.094	7.174	*7.239*	7.243	7.185	7.306	7.326
7.029	7.110	7.116	7.106	7.177	*7.225*	7.247	*7.267*	7.308	7.328
7.032	7.074	7.117	7.018	7.179	*7.214*	7.249	7.187	7.310	7.330
7.044	7.096	7.120	7.140	7.180	*7.240*	7.253	7.217	7.315	7.335
7.047	7.041	7.134	*7.145*	7.183	7.231	7.257	*7.212*	7.321	*7.341*
7.053	*7.080*	7.138	7.146	7.188	7.262	7.259	7.279	7.322	*7.342*
7.054	7.099	7.141	7.163	7.190	*7.206*	7.264	7.284	7.327	7.347
7.056	7.131	7.143	7.149	7.193	7.207	7.266	7.286	7.329	*7.349*
7.058	7.067	7.144	*7.150*	7.197	7.158	7.267	*7.287*	7.332	7.352
7.060	7.004	7.145	7.162	7.202	7.220	7.268	7.288	7.335	7.355
7.067	7.011	7.148	*7.151*	7.203	*7.250*	7.276	*7.296*	7.338	7.358
7.068	7.015	7.150	7.189	7.204	7.170	7.278	7.298	7.339	7.359

Глава 8

8.001	5.001	8.033	5.004	8.067	5.051	8.093	5.008	8.100	5.043
8.002	5.104	8.050	5.154	8.069	5.110	8.094	5.134	8.113	5.055
8.004	*5.161*	8.051	5.048	8.071	5.129	8.096	5.013	8.115	5.113
8.009	5.078	8.059	5.096	8.075	5.175	8.097	5.120	8.121	5.157
8.010	5.061	8.062	5.084	8.083	5.115	8.098	5.036	8.124	5.107
8.029	5.072	8.063	5.032	8.085	*5.126*	8.099	5.146	8.126	5.165

8.135	*5.101*	8.208	5.296	8.306	*5.301*	8.389	5.389	8.450	*5.447*
8.138	*5.168*	8.213	*5.256*	8.309	5.352	8.393	5.393	8.452	5.420
8.140	5.172	8.225	*5.228*	8.311	5.330	8.403	5.403	8.454	5.462
8.141	*5.067*	8.228	5.305	8.313	5.367	8.406	5.406	8.458	5.443
8.158	5.138	8.233	5.248	8.317	5.344	8.409	5.451	8.459	5.418
8.175	5.088	8.240	5.326	8.318	5.193	8.413	5.487	8.461	*5.468*
8.176	5.365	8.241	5.211	8.320	5.358	8.415	*5.482*	8.466	5.431
8.177	*5.279*	8.242	5.321	8.326	*5.239*	8.416	5.490	8.467	*5.427*
8.178	5.187	8.244	5.355	8.330	5.179	8.417	*5.486*	8.469	5.466
8.179	*5.241*	8.250	5.207	8.335	*5.200*	8.419	*5.484*	8.471	5.425
8.181	5.324	8.254	5.219	8.336	5.261	8.424	5.474	8.472	*5.433*
8.183	5.226	8.274	5.231	8.340	5.236	8.427	5.479	8.474	5.413
8.186	5.258	8.277	5.287	8.349	*5.291*	8.431	5.421	8.476	5.442
8.188	5.274	8.280	*5.182*	8.357	5.222	8.432	5.429	8.480	5.435
8.190	5.266	8.283	5.176	8.359	5.284	8.433	5.464	8.482	5.414
8.192	5.267	8.284	5.314	8.369	5.251	8.435	5.458	8.488	5.456
8.197	*5.270*	8.289	5.197	8.371	5.371	8.436	5.450	8.489	*5.471*
8.198	5.294	8.291	5.311	8.377	5.377	8.438	5.470	8.490	*5.437*
8.200	5.272	8.292	5.440	8.378	5.381	8.444	5.415	8.491	5.491
8.201	*5.213*	8.294	5.263	8.383	5.383	8.445	5.459	8.493	5.493
8.205	5.216	8.300	*5.281*	8.387	5.387	8.447	5.416	8.497	5.494
8.206	5.285	8.304	5.191					8.500	5.500

Глава 9

9.001	8.001	9.040	8.035	9.101	8.102	9.146	8.190	9.205	*8.134*
9.002	8.002	9.041	*8.023*	9.103	8.104	9.147	8.191	9.206	8.207
9.003	8.003	9.046	8.027	9.105	8.106	9.150	8.173	9.208	8.209
9.004	*8.004*	9.055	8.087	9.106	*8.097*	9.156	8.147	9.213	*8.214*
9.005	8.005	9.057	8.080	9.109	8.193	9.159	8.157	9.216	8.234
9.007	8.007	9.063	8.052	9.115	*8.110*	9.161	*8.175*	9.217	*8.235*
9.008	8.009	9.066	8.045	9.120	*8.163*	9.164	*8.162*	9.220	8.238
9.011	*8.011*	9.067	8.070	9.121	8.100	9.165	*8.176*	9.221	*8.217*
9.013	*8.039*	9.068	8.073	9.122	8.201	9.172	*8.139*	9.222	8.222
9.015	*8.012*	9.069	8.060	9.125	8.196	9.174	8.188	9.225	8.216
9.016	8.013	9.072	8.024	9.128	8.199	9.177	*8.128*	9.227	8.218
9.017	8.089	9.075	8.064	9.130	8.115	9.178	*8.177*	9.229	8.220
9.018	8.090	9.077	8.054	9.131	8.167	9.180	8.142	9.230	8.221
9.021	8.092	9.080	8.033	9.132	*8.168*	9.182	*8.169*	9.231	8.285
9.022	*8.015*	9.084	8.085	9.133	*8.116*	9.183	8.171	9.232	8.224
9.024	8.058	9.086	*8.049*	9.134	8.143	9.184	8.153	9.233	8.289
9.028	8.037	9.089	8.086	9.136	8.117	9.187	*8.170*	9.238	8.241
9.032	8.020	9.092	*8.074*	9.139	8.119	9.191	8.192	9.250	8.226
9.033	8.021	9.096	8.095	9.140	*8.135*	9.195	8.183	9.252	8.253
9.035	8.075	9.097	*8.096*	9.142	8.120	9.198	8.150	9.257	8.230
9.037	*8.040*	9.098	*8.205*	9.143	8.136	9.199	8.158	9.262	*8.258*
9.038	8.077	9.099	8.101	9.145	8.189	9.201	8.160	9.263	*8.259*

9.269	*8.265*	9.276	8.294	9.282	*8.275*	9.287	8.296	9.294	8.293
9.273	*8.269*	9.278	8.271	9.284	*8.278*	9.288	8.297	9.301	8.280
9.274	*8.270*	9.281	*8.274*	9.286	8.295	9.291	8.291	9.303	8.284

Глава 10

10.002	11.164	10.107	11.112	10.201	11.294	10.272	11.204	10.349	11.333
10.004	11.128	10.110	11.189	10.208	11.318	10.275	11.354	10.354	11.207
10.011	11.011	10.111	11.104	10.210	11.336	10.282	11.228	10.356	11.313
10.014	11.025	10.112	11.181	10.212	11.315	10.283	*11.271*	10.357	11.357
10.015	11.029	10.113	11.049	10.213	11.276	10.285	11.255	10.360	11.339
10.017	11.033	10.117	11.144	10.214	11.288	10.287	11.300	10.364	11.385
10.024	11.148	10.121	11.156	10.219	11.252	10.289	*11.320*	10.366	11.398
10.027	11.055	10.123	11.173	10.223	11.195	10.293	11.345	10.368	11.362
10.031	11.132	10.129	11.177	10.226	11.270	10.298	11.258	10.370	11.404
10.033	11.084	10.130	11.116	10.228	11.291	10.300	11.282	10.373	11.389
10.036	11.120	10.133	11.185	10.231	11.348	10.302	11.327	10.377	11.364
10.041	11.136	10.135	11.022	10.234	11.309	10.305	11.273	10.379	11.392
10.043	11.088	10.136	11.007	10.237	11.330	10.306	11.351	10.380	11.365
10.047	11.193	10.148	11.168	10.239	11.257	10.308	11.360	10.383	*11.394*
10.049	11.001	10.151	11.051	10.241	11.213	10.309	*11.342*	10.385	11.423
10.050	*11.068*	10.153	11.036	10.248	11.246	10.313	11.267	10.388	11.367
10.051	11.044	10.157	11.140	10.249	11.303	10.315	11.231	10.396	11.401
10.056	11.190	10.160	11.152	10.250	11.306	10.320	11.234	10.402	11.413
10.065	11.092	10.163	11.096	10.251	11.261	10.322	11.249	10.403	11.382
10.067	11.040	10.168	11.047	10.254	11.304	10.324	11.297	10.404	11.372
10.068	11.019	10.173	11.003	10.258	11.225	10.326	11.235	10.406	11.395
10.072	11.080	10.175	11.015	10.261	11.216	10.329	11.233	10.408	11.411
10.074	11.059	10.177	11.100	10.264	11.280	10.334	11.312	10.414	11.419
10.076	11.076	10.188	11.064	10.266	11.219	10.337	11.285	10.415	11.408
10.084	11.124	10.192	11.243	10.267	11.264	10.341	11.198	10.421	11.377
10.095	11.108	10.193	11.191	10.268	11.210	10.344	11.324	10.422	*11.416*
10.102	11.159	10.196	11.222	10.269	11.201	10.347	11.240	10.424	11.421
10.103	11.072	10.197	11.279					10.425	11.397

Глава 11

11.001	12.001	11.061	12.062	11.097	12.093	11.113	12.161	11.146	12.135
11.009	12.069	11.062	12.038	11.099	12.103	11.114	12.137	11.147	12.130
11.013	12.027	11.064	12.009	11.101	12.080	11.120	12.107	11.148	*12.145*
11.014	12.031	11.065	12.022	11.102	12.054	11.122	12.142	11.152	12.116
11.016	12.017	11.067	12.076	11.103	12.095	11.123	12.151	11.153	12.139
11.018	12.005	11.072	12.050	11.104	12.013	11.125	12.167	11.160	12.128
11.031	12.035	11.075	12.084	11.105	12.105	11.136	12.113	11.163	12.176
11.035	12.046	11.079	12.087	11.107	12.179	11.137	12.156	11.174	12.147
11.042	12.042	11.081	12.090	11.110	12.149	11.139	11.153	11.175	12.164
11.043	12.058	11.084	12.098	11.111	12.125	11.140	12.110	11.177	12.182
11.048	12.065	11.093	12.100	11.112	12.132	11.145	12.119	11.178	12.183

11.183	12.180	11.195	12.189	11.208	12.221	11.216	12.233	11.224	12.215
11.187	12.122	11.196	12.217	11.209	12.213	11.217	12.234	11.225	12.230
11.188	12.192	11.199	12.224	11.210	12.210	11.219	12.220	11.230	12.197
11.192	12.186	11.202	12.208	11.213	12.204	11.222	*12.227*	11.232	12.199
11.194	12.195								

Глава 12

12.001	13.001	12.117	13.115	12.212	13.354	12.297	13.207	12.392	*13.412*
12.004	13.019	12.119	13.127	12.215	13.288	12.299	13.236	12.397	13.410
12.005	13.013	12.121	13.061	12.217	13.383	12.300	13.270	12.400	13.392
12.006	13.012	12.122	13.105	12.220	13.282	12.302	13.208	12.401	13.404
12.009	13.006	12.125	13.091	12.221	13.321	12.305	13.286	12.402	13.395
12.010	13.005	12.127	13.093	12.222	13.275	12.310	13.387	12.405	13.396
12.017	*13.026*	12.131	13.131	12.225	13.280	12.315	13.303	12.407	13.411
12.019	13.017	12.132	13.146	12.227	13.217	12.316	13.342	12.408	13.393
12.021	13.018	12.135	13.184	12.230	13.292	12.317	13.384	12.409	*13.394*
12.022	*13.031*	12.137	13.133	12.233	13.323	12.320	13.259	12.414	13.415
12.023	13.004	12.141	13.191	12.235	13.257	12.323	13.273	12.415	13.430
12.031	13.032	12.143	13.132	12.236	13.388	12.325	13.277	12.418	13.431
12.036	13.037	12.145	13.147	12.240	13.370	12.328	13.304	12.420	13.454
12.037	13.025	12.148	13.173	12.243	13.363	12.330	13.222	12.424	13.452
12.040	13.040	12.150	13.159	12.245	13.374	12.332	13.389	12.426	13.449
12.045	13.098	12.153	13.182	12.248	13.343	12.333	13.211	12.428	13.416
12.047	13.107	12.155	13.148	12.251	13.346	12.335	13.359	12.430	13.460
12.049	13.080	12.161	13.166	12.253	13.334	12.338	13.241	12.431	13.414
12.055	13.063	12.163	13.168	12.258	13.324	12.341	13.244	12.436	13.420
12.060	*13.059*	12.166	13.176	12.261	13.299	12.361	13.358	12.438	13.457
12.067	13.047	12.168	13.136	12.263	13.316	12.364	13.256	12.440	13.417
12.076	13.083	12.171	13.151	12.265	13.301	12.366	13.298	12.441	13.418
12.078	13.081	12.173	13.144	12.266	13.265	12.369	13.300	12.443	13.432
12.083	13.067	12.179	13.179	12.268	13.331	12.371	13.210	12.445	13.422
12.085	13.116	12.181	13.185	12.269	13.290	12.374	13.262	12.446	13.428
12.086	13.071	12.184	13.192	12.271	13.289	12.375	13.326	12.447	13.436
12.089	13.044	12.186	13.199	12.274	13.332	12.377	13.364	12.449	13.433
12.091	13.108	12.191	13.183	12.276	13.202	12.378	13.366	12.454	13.434
12.096	13.120	12.194	13.139	12.279	13.268	12.379	13.307	12.456	13.435
12.099	*13.057*	12.197	13.149	12.281	13.266	12.382	13.284	12.457	13.446
12.101	13.050	12.199	13.145	12.284	13.267	12.384	13.223	12.461	*13.448*
12.104	13.077	12.205	13.293	12.287	13.243	12.386	*13.260*	12.462	13.453
12.107	13.129	12.207	13.224	12.289	*13.250*	12.387	13.328	12.463	13.437
12.109	13.082	12.209	13.200	12.292	13.237	12.389	13.308	12.464	13.429
12.113	13.062	12.211	13.355	12.294	13.212	12.391	13.401		

Глава 13

13.001	3.001	13.005	3.082	13.012	3.022	13.019	3.148	13.054	3.038
13.002	3.164	13.006	3.007	13.018	3.002	13.042	3.016	13.067	3.024

13.075	3.010	13.178	3.050	13.265	3.202	13.326	3.264	13.379	3.313
13.079	3.115	13.194	3.064	13.266	3.237	13.338	3.232	13.389	3.366
13.081	3.120	13.206	3.091	13.270	3.271	13.340	*3.177*	13.394	3.343
13.083	3.118	13.211	3.220	13.273	*3.213*	13.344	3.208	13.408	*3.337*
13.086	3.092	13.213	3.286	13.278	*3.260*	13.346	3.173	13.415	*3.126*
13.088	3.063	13.237	3.227	13.281	3.252	13.354	3.224	13.425	3.316
13.098	3.124	13.238	3.180	13.293	3.297	13.361	3.216	13.428	3.362
13.099	3.110	13.243	3.171	13.301	3.204	13.362	3.306	13.435	*3.323*
13.113	3.113	13.246	3.200	13.312	3.295	13.366	*3.259*	13.436	3.357
13.140	3.144	13.247	3.191	13.319	3.308	13.368	3.187	13.437	3.321
13.153	3.057	13.252	3.284	13.320	3.309	13.373	3.311	13.441	3.358
13.160	3.087	13.262	*3.211*	13.322	3.310	13.374	*3.312*	13.446	3.334
13.169	3.070	13.263	3.236					13.450	*3.380*

Глава 14

14.001	9.001	14.098	9.175	14.164	9.260	14.229	*9.201*	14.313	9.072
14.006	9.115	14.102	9.299	14.166	9.371	14.230	9.194	14.314	9.141
14.015	7.115	14.103	9.183	14.176	9.380	14.238	9.385	14.321	9.086
14.023	9.122	14.105	9.185	14.177	9.295	14.239	9.376	14.324	*7.033*
14.024	9.124	14.107	*9.071*	14.178	9.199	14.240	9.375	14.326	9.203
14.025	9.125	14.110	9.154	14.179	9.076	14.241	9.286	14.327	*9.164*
14.026	9.126	14.111	9.156	14.182	9.193	14.244	9.254	14.338	9.069
14.027	*9.019*	14.112	*9.157*	14.190	9.346	14.247	9.305	14.343	9.223
14.035	9.077	14.113	9.158	14.195	9.363	14.248	9.290	14.344	9.222
14.038	9.205	14.115	9.024	14.202	*9.066*	14.256	9.319	14.346	9.307
14.039	9.085	14.117	9.037	14.203	9.266	14.259	9.250	14.351	9.094
14.040	9.050	14.121	9.225	14.206	9.089	14.263	9.316	14.353	9.143
14.044	9.073	14.123	9.038	14.207	9.353	14.264	*9.253*	14.356	*9.075*
14.047	9.006	14.129	9.027	14.209	9.083	14.267	9.317	14.367	9.145
14.050	9.369	14.132	9.041	14.210	9.200	14.271	*9.304*	14.368	9.082
14.053	*9.211*	14.134	9.031	14.212	*9.091*	14.273	9.282	14.373	9.111
14.054	9.321	14.139	9.063	14.214	9.139	14.276	*9.276*	14.379a	9.009
14.065	9.331	14.141	9.051	14.218	9.093	14.277	9.277	14.380	*9.017*
14.068	*9.334*	14.142	9.098	14.220	9.233	14.279	9.279	14.381	9.176
14.069	9.335	14.146	9.101	14.221	*9.296*	14.283	9.042	14.382	*9.177*
14.071	9.324	14.149	9.267	14.222	9.236	14.284	9.043	14.386	9.023
14.072	9.337	14.150	9.269	14.224	9.052	14.295	9.047	14.387	9.018
14.075	9.340	14.151	9.056	14.225	9.377	14.300	10.206	14.393	9.054, 10.207
14.080	9.011	14.154	9.059	14.227	9.367	14.301	9.298	14.398	9.107
14.094	9.172	14.157	9.231	14.228	9.192	14.304	9.315	14.406	*9.108*
						14.309	9.140		

Глава 15

15.005	10.005	15.014	10.014	15.046	10.046	15.076	10.222	15.082	10.208
15.007	*10.007*	15.018	10.018	15.064	10.136	15.077	10.269	15.083	10.072
15.010	10.010	15.023	10.023	15.072	10.139	15.078	10.270	15.085	10.074
15.011	10.011	15.038	10.038	15.073	10.067	15.081	10.071	15.087	10.141

15.097	10.151	15.124	10.221	15.171	10.175	15.201	10.134	15.243	10.236
15.098	*10.152*	15.127	10.166	15.176	10.109	15.206	10.198	15.249	10.242
15.099	10.153	15.134	10.172	15.179	10.112	15.213	10.180	15.251	10.244
15.108	*10.162*	15.141	10.081	15.181	10.114	15.232a	10.223	15.257	10.250
15.110	10.164	15.146	10.088	15.187	10.120	15.235	10.226	15.260	*10.252*
15.112	10.209	15.151	10.092	15.191	10.124	15.239	10.230	15.261	*10.254*
15.115	10.212	15.162	10.103	15.192	10.125	15.240	10.233	15.262	10.255
15.119	10.216	15.165	10.106	15.193	*10.126*	15.242	10.235	15.266	10.259
15.120	10.217	15.168	10.107	15.195	10.128			15.274	10.231

Глава 16

16.001	14.001	16.027	14.044	16.064	14.047	16.076	14.004	16.091	14.124
16.002	*14.012*	16.033	14.041	16.065	14.006	16.077	14.050	16.093	14.086
16.003	14.010	16.035	14.067	16.067	14.049	16.081	14.002	16.096	14.089
16.005	14.065	16.036	14.061	16.068	14.003	16.083	14.101	16.102	*14.042*
16.008	14.066	16.041	14.069	16.070	14.060	16.085	14.100	16.104	14.084
16.012	14.005	16.052	14.008	16.071	14.063	16.087	14.107	16.116	14.121
16.018	14.062	16.056	14.068	16.074	14.011	16.088	14.123	16.117	14.085
16.025	14.043	16.059	*14.046*	16.075	14.064	16.090	14.105	16.126	14.087

Глава 17

17.002	15.002	17.042	15.069	17.066	*15.093*	17.081	15.117	17.100	15.035
17.008	15.018	17.043	15.039	17.067	15.085	17.082	15.087	17.111	15.105
17.011	15.008	17.044	15.088	17.068	*15.031*	17.084	15.109	17.113	15.065
17.014	15.010	17.045	15.129	17.069	15.032	17.085	15.108	17.114	15.097
17.015	15.025	17.049	15.033	17.071	15.060	17.088	*15.110*	17.118	*15.101*
17.024	15.024	17.056	15.089	17.073	15.061	17.089	*15.063*	17.121	15.067
17.033	15.053	17.057	15.059	17.075	15.081	17.092	*15.119*	17.123	15.130
17.034	15.045	17.058	15.080	17.076	15.082	17.094	15.073	17.124	15.102
17.036	15.047	17.060	15.128	17.079	15.054	17.099	15.074	17.125	15.106
17.041	15.056	17.063	15.091	17.080	15.043			17.128	15.038

Глава 18

18.001	17.001	18.050	*17.050*	18.079	17.079	18.136	17.136	18.194	17.194
18.008	17.008	18.061	17.061	18.091	17.091	18.148	*17.148*	18.202	17.202
18.014	17.014	18.065	17.065	18.097	17.097	18.156	*17.156*	18.208	17.208
18.017	17.017	18.069	17.069	18.104	17.104	18.157	17.157	18.209	*17.209*
18.026	17.026	18.070	17.070	18.120	17.120	18.162	17.162	18.212	17.212
18.030	*17.030*	18.071	17.071	18.126	17.126	18.165	17.165	18.213	17.213
18.041	17.041	18.075	17.075	18.131	17.131	18.185	17.185	18.215	*17.215*
18.047	17.047								

ОГЛАВЛЕНИЕ

АВТОРСКИЙ КОЛЛЕКТИВ

Егерев Виктор Константинович
Зайцев Владимир Валентинович
Кордемский Борис Анастасьевич
Маслова Тамара Николаевна
Орловская Ираида Федоровна
Позойский Роман Исаевич
Ряховская Галина Сергеевна
Сканави Марк Иванович
Суходский Андрей Матвеевич
Федорова Нина Михайловна

Учебное издание

Егерев Виктор Константинович
Зайцев Владимир Валентинович
Кордемский Борис Анастасьевич и др.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ ВО ВТУЗЫ

Ответственный редактор *О. А. Богатырева*
Младший редактор *К. А. Каширина*
Технический редактор *В. Н. Журавлева*
Корректор *Е. В. Морозова*

Оригинал-макет подготовлен *ООО «Бета-Фрейм»*

Подписано в печать 24.08.2012. Формат 84×108 1/32.
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 31,92. Тираж 5000 экз. Заказ № 1343.

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательство «Мир и Образование».
109451, Москва, ул. Верхние Поля, д. 40, кор. 1, пом. V, комн. 1.
Тел./факс: (495) 742-43-51, 742-43-54.
www.mio-books.ru E-mail: **mail@mio-books.ru**

ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ».
119017, Москва, пер. Пыжевский, д. 5, стр. 1.
Отдел реализации: тел. (495) 649-85-07.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Рыбинский Дом печати»
152901, г. Рыбинск, ул. Чкалова, 8.
e-mail: printing@yaroslavl.ru www.printing.yaroslavl.ru