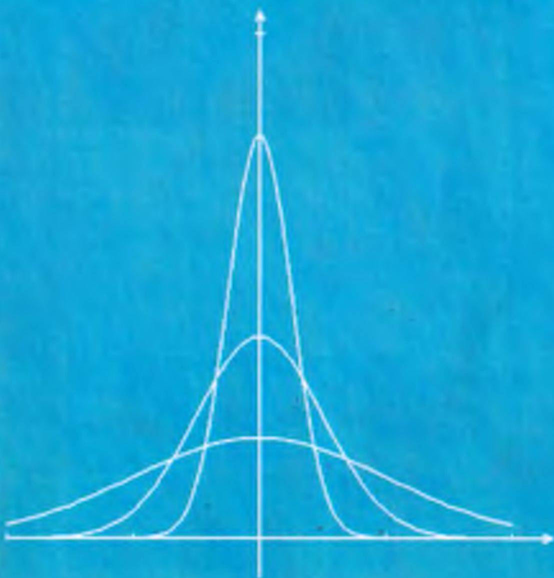
Sh.Q. Farmonov, R.M. Turgunbayev,
L.D. Sharipova, N.T. Parpiyeva

EHTIMOLLIKLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

Sh.Q. Farmonov, R.M. Turgunbayev, L.D. Sharipova, N.T. Parpiyeva

EHTIMOLLIKLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan pedagogika oliy ta'lim muassasalarining «Matematika va informatika» bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

«TAFAKKUR-BO'STONI»
TOSHKENT — 2012

UDK: 519.22(075)
22.171
E97

Taqrizchilar: **Y.M. Xusanboyev**, fizika-matematika fanlari doktori,
M. Jo'rayev, pedagogika fanlari doktori, professor.

E97 **Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika.** /Sh.Q.Farmonov va boshq.; O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi. — T.: «Cho'lpon» NMIU, «Tafakkur-Bo'stoni», 2012. — 208 b.

1. Farmonov, Sh.Q.

Darslik pedagogika oliy ta'lim muassasalari «Matematika va informatika» bakalavriat ta'lim yo'nalishi o'quv rejasidagi «Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika» fanining amaldagi dasturi asosida yozilgan. Unda fan bo'limlari bo'yicha nazariy ma'lumot va ularga doir misollar yechib ko'rsatilgan. Boblar oxirida o'z-o'zini tekshirish uchun savollar, hamda nazariy ma'lumotlarni o'zlashtirish uchun test topshiriqlari berilgan. Mazkur darslikdan matematika va informatika, mexanika, fizika va astronomiya hamda iqtisodiyot yo'nalishlarining talabalari, shuningdek, ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikani mustaqil o'rganuvchilar ham foydalanishi mumkin.

UDK 519.22(075)
KBK 22.171
22.172

ISBN 978-9943-05-521-6

Akademik Sa'di Hasanovich Sirojiddinovning unutilmas yorqin xotirasiga bag'ishlanadi.

SO'Z BOSHI

Ushbu qo'llanma hozirgi zamon «Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika» kursining respublikamiz universitetlari va pedagogika institutlari matematika, tadbiqiy matematika, informatika mutaxassisliklari bo'yicha qabul qilingan o'quv dasturlari asosida yozilgan. Bundan tashqari, qo'llanmadan mazkur kurs bo'yicha qo'shimcha mashg'ulotlar, talabalar bilan mustaqil ta'lim dasrlarini o'tkazishda foydalanish mumkin. Shu maqsadda kitobda keltirilgan hamma teoremalar matematika nuqtayi nazaridan qa'tiy isbotlari bilan ta'minlangan. Ular bilan tanishish o'quvchiga hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasida qo'llaniladigan metodlar haqida to'la ma'lumot beradi. Aytilgan fikrning ahamiyatliligi shundaki, ehtimollik nazariyasi matematik fan sifatida bevosita tabiiy va ijtimoiy jarayonlarning modellarini o'rganadi. O'z navbatida esa, bu modellar asosiy tushuncha sifatida qabul qilingan «Elementar hodisalar» tushunchasi orqali ifodalanadi.

Qo'llanmada keltirilgan ma'lumotlarni tushunish uchun o'quvchidan kombinatorikaga tegishli dastlabki tushunchalar va birinchi, ikkinchi kurslarda o'qitiladigan matematik analiz elementlari bilan tanish bo'lish talab etiladi.

Ushbu darslik mualliflarning ko'p yillar davomida Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika Universitetida o'qigan ma'ruzalari asosida yozilgan.

Ushbu kitobning yozilishida Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat pedagogika universitetining «Matematik analiz» kafedrasining o'qituvchilarining maslahatlaridan foydalanildi. Mualliflar kitob qo'lyozmasi bilan tanishib, foydali maslahatlar bergan fizika-matematika fanlari doktori A.A. Abdushukurov, Y.M. Husanboyevlarga, fizika-matematika fanlari nomzodi J.B. Azimovga chuqur minnatdorchilik izhor qiladilar.

Albatta, har qanday yozilgan kitob mualliflarning tanlangan predmetga bo'lgan shaxsiy munosabatlarini ko'proq aks ettiradi. Shuning uchun ham taklif qilinayotgan darslikni kamchiliklardan xolis, deb bo'lmaydi. Biz mutaxassislar va oddiy o'qituvchilar tomonidan darslikka bildiriladigan tanqidiy fikrlarni kutib qolamiz.

Manzil: Toshkent sh., Yusuf Xos Hojib ko'chasi, 103-uy. Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika Universiteti, fizika-matematika fakulteti, «Matematik analiz» kafedrasi.

Mualliflar

KIRISH

Ehtimolliklar nazariyasi matematik fan sifatida ro'y berishi yoki ro'y bermaganligi noaniq bo'lgan voqealarning modellarini (voqealarning o'zini emas) o'rganadi. Boshqacha qilib aytganda, ehtimolliklar nazariyasida shunday tajribalar modellari o'rganiladiki, bu tajribalarning natijalaridan qaysisi ro'y berishini aniqlab bo'lmaydi. Masalan, tanga tashlanganda uni gerb yoki raqam tomoni bilan tushishi, ob-havoni oldindan aytib berish, ishlab turgan agregatning yana qancha ishlashi, ommaviy ishlab chiqarilgan mahsulotning nosozlik qismi, elektr signallarini uzatishda halaqit beruvchi vaziyatlar yuzaga kelishi — bularning hammasini ehtimolliklar nazariyasi qo'llanilishi mumkin bo'lgan sohalar deb qaralishi mumkin.

Ehtimolliklar nazariyasini qo'llash yoki qo'llash mumkinmasligi o'rganilayotgan tajriba uchun «stoxastik turg'unlik» xossasi o'rinli bo'lishiga bog'liq. Oxirgi tushuncha esa, o'z navbatida, o'rganilayotgan tajribaning bir xil sharoitda ko'p marta kuzatish (o'tkazish) imkoniyati bilan bog'liq (sanab o'tilgan misollarga e'tibor bering). Lekin, aytib o'tilgan fikrlarni «stoxastik turg'unlik»ning ta'rifi sifatida qabul qilib bo'lmaydi. Aslida esa, bu tushunchaga ehtimolliklar nazariyasi fundamental natijalaridan biri — katta sonlar qonuni orqali kelish mumkin. Buning uchun quyidagi fikrlarni keltirish bilan chegaralanib qolamiz.

Bizning ongimizda biror hodisaning ehtimolligi («ro'y berishlik darajasi») bir xil tipdagi tajribalarni bir xil sharoitda ko'p marta takrorlanganda bu hodisaning ro'y berishlar soniga bog'liq. Buni ko'p marta foydalaniladigan «tanga tashlash» misolida namoyish etamiz. Aytaylik, tanga n marta tashlansin, m_n — «gerb» ro'y berishining nisbiy chastotasi bo'lsin, ya'ni n_g deb tanga n marta tashlanganda uning «gerb» tomoni bilan tushgan soni belgilansa, u holda

$$m_n = \frac{n_g}{n}.$$

Intuitiv ravishda tushunarliki (tajribalar esa buni isbotlaydi), agar tangani oldingi tashlangan natijalariga bog'liq qilmasdan tashlasak, katta n lar uchun m_n chastota 1/2 ga yaqin bo'ladi, ya'ni $n \to \infty$ da

$$m_n \to \frac{1}{2} \tag{*}$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Masalan XVIII asrda yashagan mashxur tabiatshunos Byuffon tangani 4040 marta tashlab, unda «gerb» tomoni 2048 marta tushganini kuzatgan. Bu holda $m_n = \frac{n_g}{n} \approx 0,508$. Mashhur ingliz statist olimi K.Pirson tangani 24000 marta tashlab, «gerb» tomoni bilan 12012 marta tushganini kuzatgan. Bu holda $m_n \approx 0,5005$ (bu ma'lumotlar B.V.Gnedenkoning «Курс теории вероятностей» (Moskva, 1969) kitobidan olindi). Aytilganlardan kelib chiqadiki, tanga tashlanganda uning «gerb» tomoni bilan tushish ehtimolligini 1/2 soni bilan tenglashtirish mumkin.

Lekin bu mulohazalarda quyidagi prinsipial qiyinchiliklar yuzaga keladi: keltirilgan fikrlarni odatdagi matematik tushunchalar orqali asoslab bo'lmaydi, chunki, birinchidan tajribalarning bog'liqsizligining qat'iy matematik ta'rifini kiritish kerak bo'ladi. Ikkinchidan, m_n oddiy ma'nodagi miqdor bo'lmasdan, u har xil tajribalar seriyalarida har xil qiymatlarni qabul qiladi (hattoki har qanday n uchun m_n=1 bo'lishligini, ya'ni tanga tashlanganda doimo uning «gerb» tomoni bilan tushishini inkor etib bo'lmaydi). Demak, (*) munosabatni sonli ketma-ketliklarning limiti tushunchasi doirasida asoslab bo'lmaydi, chunki m_n — oddiy ma'nodagi miqdor emas, u «tasodifiy miqdor» bo'ladi. Demak, aslida biz cheksiz $\{m_n,\ n \geq 1\}$ ketma-ketlikka ega bo'lmasdan, bu ketma-ketlikning chekli sondagi chastotalari elementlari bilan ish ko'rishimizga to'g'ri keladi.

Eslatib o'tilgan qiyinchiliklarni bartaraf etish uchun hozirgi zamon matematikasida qabul qilinganidek, «tasodifiy hodisalar» va ularning «ehtimolliklari» uchun aksiomatik modellar tuzish kerak bo'ladi. Bu muammolar XX asrning mashhur matematigi A.N.Kolmogorov tomonidan taklif qilingan «ehtimolliklar nazariyasi aksiomalari» sistemasini kiritilishi bilan hal etildi.

Ma'lumki, oxirgi yillarda «Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika» fanining asosiy tushunchalari davlat standartlari asosida akademik litseylar va kollejlar dasturiga kiritildi. Shuning uchun ham bu fanni pedagogika oily o'quv yurtlarida o'qitishni yaxshilash muammolari yuzaga keldi.

Taklif qilinayotgan kitob yuqorida eslatib o'tilgan akademik A.N. Kolmogorov konsepsiyasi asosida yozildi va u hozirgi zamon «Ehtimoliklar nazariyasi va matematik statistika» fanining asosiy boblarini o'z ichiga oladi.

Mazkur darslikning oxirida «Ehtimoliklar nazariyasi va matematik statistika»ning matematik fan sifatida shakllanish tarixidan lavhalar va bu fan bo'yicha O'zbekistonda dunyoga mashhur maktab yaratilganligi haqidagi ma'lumotlar berilgan.

I bob. EHTIMOLLIKLAR FAZOSI

I bobni o'rganish natijasida talaba:

— *ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika kursining hozirgi zamon matematika fanlari tizimi va fandagi o'rni;*

— *ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikaning asosiy g'oyalari va tushunchalarining maktab, o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi matematika kurslarida aks etishi;*

— *ehtimollikni hisoblashning klassik ta'rifi;*

— *ehtimollikning statistik va geometrik ta'riflari;*

— *ehtimolliklar nazariyasi aksiomalari;*

— *kombinatorika formulalari;*

— *ehtimollik xossalari;*

— *shartli ehtimollik;*

— *hodisalar bog'liqsizligi;*

— *to'la ehtimollik va Bayes formulalari*

haqida tasavvurga ega bo'lishi;

— *tasodifiy hodisalar tushunchasini;*

— *tasodifiy hodisalar ustida amallarni;*

— *kombinatorikaning asosiy formulalarini;*

— *ehtimollik tushunchasini;*

— *ehtimollikning klassik ta'rifini;*

— *ehtimollikning geometrik ta'rifini;*

— *uchrashuv haqidagi masalani;*

— *ehtimollikning statistik ta'rifini;*

— *ehtimollikning xossalarini;*

— *uzluksizlik xossalarini;*

— *hodisalar algebrasi va σ-algebrasini;*

— *shartli ehtimollik tushunchasini;*

— *hodisalar bog'liqsizligini;*

— *to'la ehtimollik formulasini;*

— *Bayes formulasini*

bilishi va amalda qo'llay olishi;

— *tasodifiy hodisa ehtimolligini topa olishni;*
— *ehtimollikning klassik ta'rifiga doir misollar yechishni;*
— *ehtimollikning geometrik ta'rifiga doir misollar yechishni;*
— *kombinatorikaning asosiy formulalarini qo'llab masalalar yechishni;*
— *hodisalar bog'liqsizligini tekshirishni;*
— *shartli ehtimollikga doir misollar yechishni;*
— *to'la ehtimollik formulasiga doir misollar yechishni;*
— *Bayes formulasiga doir masalalar yechishni*
uddalay olishi lozim.

1.1-§. Elementar hodisalar fazosi. Hodisalar va ular ustida amallar

Elementar hodisalar fazosi ehtimolliklar nazariyasi uchun asosiy tushuncha bo'lib, unga ta'rif berilmaydi. Formal nuqtayi nazardan bu ixtiyoriy to'plam hisoblanib, uning elementlari o'rganilayotgan tajribaning «bo'linmaydigan» va bir vaqtda ro'y bermaydigan natijalaridan iborat bo'ladi. Elementar hodisalar fazosini Ω harfi bilan belgilab, uning elementlarini (elementar hodisalarni) esa ω harfi bilan ifodalaymiz. Elementar hodisalardan iborat bo'lgan to'plamlar *tasodifiy hodisalar* deb hisoblanadi.

Tasodifiy hodisalarni, odatda, lotin alfavitining bosh harflari A, B, C, ... lar bilan belgilanadi. Demak, A, B, C, ... lar Ω ning qism to'plamlarini tashkil qiladi.

Misollar. 1) Tanga tashlash tajribasi uchun $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{G, R\}$ ikkita elementar hodisadan iborat va bu yerda ω_1 — tanganing «gerb» tomoni tushish hodisasi, ω_2 — tanganing «raqam» tomoni tushish hodisasi (tanga «qirra tomoni bilan tushadi» degan hodisa mumkin bo'lmagan hodisa hisoblanadi). Bu hol uchun Ω to'plamning elementlari soni $|\Omega|=2$. Bu tajriba bilan bog'liq hodisalar sistemasi $(\Omega, \varnothing, G, R)$ dan iborat.

Izoh. Tajriba natijasida biror A hodisa ro'y berdi deganda, A ga kiruvchi (ya'ni A ro'y berishiga qulaylik yaratuvchi) elementar hodisalardan biri ro'y berganligi tushuniladi. Shu ma'noda Ω —

doim ro'y beradigan hodisa va uni ehtimolliklar nazariyasida «muqarrar» hodisa deb ataladi. O'z navbatida $\varnothing$ — bo'sh to'plam bo'lganligi uchun (chunki unda birorta ham elementar hodisa yo'q), uni «ro'y bermaydigan» hodisa deb hisoblanadi.

2) O'yin kubigi (yoqlari birdan oltigacha raqamlangan bir jinsli kubik) tashlash tajribasi uchun

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

va bu yerda ω_i — kubikning i raqam bilan belgilangan tomoni bilan tushish hodisasi. Bu misol uchun $|\Omega|=6$.

3) Tangani ikki marta tashlash (yoki ikkita tangani birdaniga tashlash) tajribasi uchun

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{GG, GR, RG, RR\},$$

bu yerda GG — tanganing ikki marta ham «gerb» tomoni bilan tushish hodisasi, RG — birinchi marta «raqam» tomoni, ikkinchi marta esa «gerb» tomoni bilan tushish hodisasi va qolgan GR, RR lar shularga o'xshash hodisalar bo'ladi. Bu holda $|\Omega|=4$ va GR, RG hodisalar bir-biridan mantiqan farq qiladi.

4) Tajriba 2-misoldagi o'yin kubigini 2 marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bu holda elementar hodisalar ushbu ko'rinishga ega:

$$\omega_{ij} = (i, j), \quad i, j = 1, 2, ..., 6.$$

Bunda ω_{ij} hodisa kubikni birinchi tashlashda i raqamli yoq, ikkinchi tashlashda j raqamli yoq bilan tushganligini bildiradi.

Bu tajribada elementar hodisalar fazosi Ω:

$$\Omega = \{\omega_{ij}, i, j = 1, 2, ..., 6\}.$$

Elementar hodisalar soni $|\Omega| = 6^2 = 36$.

5) Tajriba biror A hodisani n marta kuzatishdan iborat bo'lsin (yoki A hodisa ustida n marta tajriba o'tkazilsin). Har bir o'tkazilgan tajribaning natijasi A hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligidan iborat bo'lsin. Agar tajriba natijasida A hodisa kuzatilsa, uni «yutuq» deb, ro'y bermasa «yutqiziq» (yutuq emas) deb hisoblaymiz. Masalan, tangani bir necha marta tashlashdan iborat tajribani ko'rsak, uning «gerb» tomoni bilan tushishini «yutuq» deb, «raqam» tomoni bilan tushishini esa «yutqiziq» deb tushunish

mumkin. Agar shartli ravishda «yutuq»ni 1, «yutqiziq»ni 0 deb olsak, o'rganilayotgan tajriba uchun har bir elementar hodisa

$$\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega$$

bo'lib, u n ta 1 va 0 lardan iborat ketma-ketlik bo'ladi. Masalan, $n = 4$ bo'lganda $\omega = 1001$ elementar hodisa birinchi va to'rtinchi tajribalarda «yutuq» bo'lganini, ikkinchi va uchinchi tajribalarda esa «yutqiziq» bo'lganini bildiradi. Bu holda barcha elementar hodisalar soni

$$|\Omega| = 2^n,$$

chunki har bir ω ni ikkilik sanoq sistemasidagi n-raqamli son deb tushunish mumkin.

6) Tajriba nuqtani [0;1] segmentga tasodifiy ravishda tashlashdan iborat bo'lsin.

Bu holda elementar hodisa ω sifatida [0;1] segmentning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin. Bu tajribada elementar hodisalar fazosi [0;1] to'plamdan iborat.

Aytib o'tganlarimizni yakunlab, bunday xulosa qilishimiz mumkin: har qanday tajriba ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalar to'plami bilan bog'liq va bu hodisalar to'plami chekli, sanoqli va hatto kontinuum quvvatga ega bo'lishi mumkin.

Elementar hodisalar fazosi Ω ning ixtiyoriy A qism to'plami ($A \subset \Omega$) *tasodifiy hodisa* deyiladi va A hodisa ro'y berdi deganda, shu A to'plamga kirgan biror elementar hodisaning ro'y berishi tushuniladi.

Tajriba natijasida har gal ro'y beradigan hodisa *muqarrar hodisa* (Ω) deyiladi, chunki hamma elementar hodisalar Ω ni tashkil qiladi.

Birorta ham elementar hodisani o'z ichiga olmagan hodisa *mumkin bo'lmagan hodisa* deyiladi va $\varnothing$ bilan belgilanadi.

Shunday qilib har qanday A tasodifiy hodisa elementar hodisalar to'plamidan tashkil topgan bo'ladi va A ga kiradigan ω larning birortasi ro'y bersa ($\omega \in A$), *A hodisa ro'y berdi* deb hisoblanadi.

Agar shu elementar hodisalardan birortasi ham ro'y bermasa, u holda A hodisa ro'y bermadi va, aksincha, A ga teskari hodisa (uni $\bar{A}$ orqali belgilaymiz) ro'y bergan deb hisoblanadi.

A va $\bar{A}$ lar *o'zaro qarama-qarshi hodisalar* deyiladi.

Misollar.

1. A hodisa 3-misoldagi tajribada gerb va raqam tushishdan iborat bo'lsin. Bu holda $A = \{\omega_2, \omega_3\}$.

Bu hodisaga qarama-qarshi hodisa:

$$\overline{A} = \{\omega_1, \omega_4\}.$$

2. B hodisa 3-misoldagi tajribada hech bo'lmaganda bir marta gerb tushishdan iborat bo'lsin. Bu holda

$$B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}.$$

Bu hodisaga qarama-qarshi hodisa: $\overline{B} = \{\omega_4\}$.

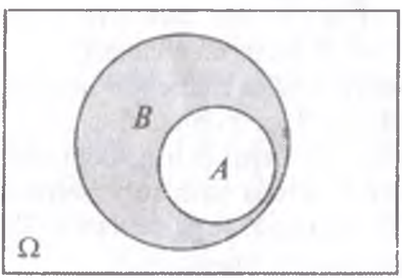
Endi hodisalar ustida amallarni ko'rib chiqaylik.

1. Agar A hodisani tashkil etgan elementar hodisalar B hodisaga ham tegishli bo'lsa, u holda *A hodisa B hodisani ergashtiradi* deyiladi va $A \subset B$ kabi belgilanadi (1-rasm).

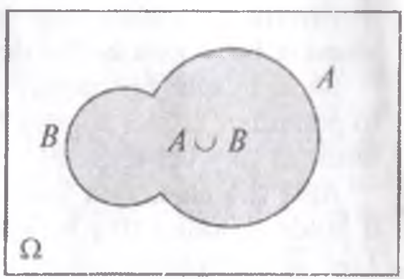
2. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$, ya'ni A hodisa B ni, va, aksincha, B hodisa esa A ni ergashtirsa, u holda A va B hodisalar *teng kuchli* deyiladi va $A = B$ kabi belgilanadi.

3. A va B hodisalarning *yig'indisi* deb shunday C hodisaga aytiladiki, bu hodisa A va B hodisalarning kamida bittasi ro'y berganda ro'y beradi va $C = A \cup B$ (yoki $C = A + B$) kabi belgilanadi (2-rasm).

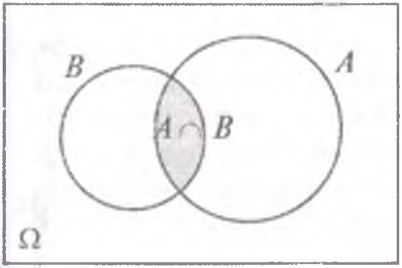
4. A va B hodisalarning *ko'paytmasi* deb, shunday C hodisaga aytiladiki, bu hodisa A va B hodisalar bir paytda ro'y berganda ro'y beradi va $C = A \cap B$ (yoki $C = A \cdot B$) kabi belgilanadi (3-rasm).



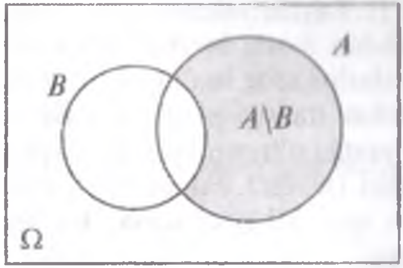
1-rasm.



2-rasm.

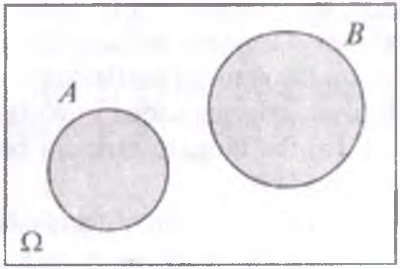


3-rasm.



4-rasm.

5. A va B hodisalarning *ayirmasi* deb, shunday C hodisaga aytiladiki, u A hodisa ro'y berib, B hodisa ro'y bermaganda ro'y beradi va $C = A \setminus B$ (yoki $C = A - B$) kabi belgilanadi (4-rasm).



5-rasm.

6. Agar $A \cap B = \varnothing$ bo'lsa, A va B hodisalar *birgalikda bo'lmagan hodisalar* deyiladi (5-rasm).

7. Agar $A_i A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ va $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$ bo'lsa, u holda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lar *hodisalar to'la guruhini* tashkil etadi deyiladi.

1.2-§. Elementar hodisalarning diskret fazosi. Ehtimollikning klassik ta'rifi

Elementar hodisalarning diskret fazosi – chekli yoki sanoqli elementar hodisalardan iborat to'plamdir, ya'ni

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\} \quad \text{yoki} \quad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}.$$

Oldingi paragrafda ko'rib o'tilgan 1–5-misollarda elementar hodisalar fazosi Ω chekli bo'lib, mos ravishda 2, 6, 4, 36 va 2^n elementdan iborat edi.

Endi tajriba natijasida ro'y beradigan elementar hodisalar soni sanoqli bo'lgan hol uchun misollarni ko'ramiz.

1) Tajriba telefon stansiyasiga tushgan «chaqiriqlarni» o'rganishdan iborat bo'lsin. Bu yerda «telefon stansiyasi», «chaqiriq» so'zlarini keng ma'noda tushunish mumkin. Masalan, abonentni telefon stansiyaga ulash, savdo do'koniga xaridorlar murojaati, ro'yxatga olingan kosmik zarrachalar va hokazolar. Agar bir vaqt birligi (sekund, minut, soat, yil) davomida tushadigan «chaqiriqlar» soni bilan qiziqsak, bu tajriba uchun elementar hodisalar fazosi

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$$

bo'lib, bu yerda ω_i – i ta «chaqiriq» tushish elementar hodisasini bildiradi. Umumiy «chaqiriqlar» soni ixtiyoriy bo'lishini hisobga olib, bu tajribani modellashtirishda Ω ni sanoqli to'plam va $|\Omega|=\infty$ deb hisoblash maqsadga muvofiq bo'ladi.

2) Tajriba tangani birinchi bor raqam tushguncha tashlashdan iborat bo'lsin.

$\omega_1 = \{R\}$ – birinchi tashlashdayoq raqam tushish hodisasi;

$\omega_2 = \{GR\}$ – birinchi tashlashda gerb, ikkinchi tashlashda raqam tushish hodisasi;

$\omega_3 = \{GGR\}$ – birinchi va ikkinchi tashlashda gerb, uchinchisida raqam tushish hodisasi va shu tariqa.

$\omega_i = \{\underbrace{GGG...G}_{i-1}R\}$ – birinchi, ikkinchi va hokazo $i-1$ ta tashlashda gerb, i-tashlashda raqam tushish hodisasi. Bu holda $\Omega = \{\omega, i = 1, 2, \dots, n, \dots\}$ va elementar hodisalar to'plami sanoqli bo'ladi.

Qayd qilib o'tish kerakki, elementar hodisalar fazosi Ω ning tarkibi ahamiyatli bo'lmaydi.

1-ta'rif. Agar Ω to'plamda aniqlangan $P(\omega)$ funksiya uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

$$0 \le P(\omega) \le 1, \quad \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1,$$

u *ehtimolliklar taqsimoti deyiladi.*

Ixtiyoriy A hodisaning ($A \subset \Omega$) *ehtimolligi* deb quyidagi songa aytiladi:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Amalga oshishi bir xil imkoniyatli bo'lgan hodisalar *teng imkoniyatli hodisalar* deyiladi.

Teng imkoniyatlilik shuni bildiradiki, A_1, A_2, ..., A_n hodisalarning ro'y berishida hech biri qolganlariga nisbatan biror obyektiv ustunlikka ega emas.

Masalan, o'yin kubigining simmetrik bir jinsliligidan 1, 2, 3, 4, 5, 6 ochkolardan istalganining tushishini teng imkoniyatli deb hisoblash mumkin.

2-ta'rif (*ehtimollikning klassik ta'rifi*). Ω elementar hodisalar fazosi chekli va barcha elementar hodisalar teng imkoniyatli bo'lsin $(|\Omega| = n)$, ya'ni

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

U holda A hodisaning *ehtimolligi* deb, tajribaning A ga qulaylik tug'diruvchi natijalari soni $n(A)$ ni barcha natijalar soni n ga nisbatiga aytiladi va u $P(A)$ bilan aniqlanadi:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Masalan, tajriba simmetrik tangani bir marta tashlashdan iborat bo'lsin.

Bu holda elementar hodisalar

$\omega_1 = \{G\}$ – gerb tushish hodisasi;

$\omega_1 = \{R\}$ – raqam tushish hodisasi.

Ularning ehtimolliklari quyidagilarga teng:

$$P(\omega_1) = \frac{1}{2}, \ P(\omega_2) = \frac{1}{2}.$$

Klassik ta'rif bo'yicha aniqlangan ehtimollik xossalari.

1. Muqarrar hodisaning ehtimolligi 1 ga teng.

$$P(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. Mumkin bo'lmagan hodisalarning ehtimolligi 0 ga teng:

$$P(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. Tasodifiy hodisaning ehtimolligi musbat son bo'lib, u 0 va 1 orasida bo'ladi, chunki $0 \le n(A) \le n$ ekanligidan $0 \le P(A) \le 1$ munosabat kelib chiqadi.

Ehtimollikning klassik ta'rifidan ko'rinadiki, hodisalarning ehtimolliklarini hisoblashda kombinatorika masalalari juda muhim rol o'ynaydi. Shuning uchun ham biz quyida ulardan asosiylarini keltirib o'tamiz.

O'rin almashtirishlar deb, n ta turli elementlarning bir-biridan faqat joylashishi bilan farq qiluvchi kombinatsiyalarga aytiladi. Ularning soni $P_n = n!$ formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$.

1-misol. 5, 6, 7 raqamlaridan nechta uch xonali son hosil qilish mumkin?

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

O'rinlashtirishlar deb, n ta turli elementdan m tadan tuzilgan kombinatsiyalarda elementlari yoki ularning tartibi bilan farq qilishiga aytiladi.

Ularning soni $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ formula bilan aniqlanadi.

2-misol. 5,6,7,8 raqamlaridan nechta 2 xonali son hosil qilish mumkin?

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Gruppalashlar deb, bir-biridan hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiluvchi n ta elementdan m tadan tuzilgan kombinatsiyalarga aytiladi.

Bu gruppalashlar sonini C_n^m ko'rinishda belgilanadi.

m ta elementdan iborat bo'lgan har bir gruppalash mumkin bo'lgan hamma o'rin almashtirishlardan so'ng $P_m = m!$ ta, n ta elementdan m tadan olib tuzilgan gruppalashlarning hammasi esa C_n^m ta bo'lgani uchun barcha o'rinlashtirishlarning umumiy soni A_n^m

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m$$

bo'ladi. Bundan quyidagi formula kelib chiqadi:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \quad \text{yoki} \quad C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot m}. \tag{1}$$

(1) tenglikning o'ng tomonini $(n-m)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-m)$ ga ko'paytirib va bo'lib, grupplashlar formulasini

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{2}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bu formulada m sonini $n - m$ bilan almashtirsak, u

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \tag{3}$$

tenglikni olamiz.

(1) va (3) formulalardan

$$C_n^m = C_n^{n-m} \tag{4}$$

kelib chiqadi.

$m = n$ bo'lsin, u vaqtda (2), (3) va (4) formulalardan mos ravishda quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1, \quad C_n^0 = \frac{n!}{n!0!} = 1 \text{ va } C_n^n = C_n^0.$$

3-misol. Yashikdagi 10 ta detalni 2 tadan qilib nechta usulda olish mumkin?

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45.$$

Endi klassik ta'rifga mos keladigan bir qancha misollarni ko'rib o'tamiz.

4-misol. Yashikda o'lchamlari va og'irligi bir xil bo'lgan uchta ko'k, sakkizta qizil va to'qqizta oq shar bo'lib, sharlar yaxshilab aralashtirilgan. Yashikdan tavakkaliga 1 ta shar tanlab olinadi. Tanlangan sharning ko'k yoki qizil, yoxud oq chiqish ehtimolliklarini toping.

Yechish. Istalgan sharning chiqishini teng imkoniyatli deb hisoblash mumkin bo'lganligidan, jami $n=3+8+9=20$ ta elementar hodisaga egamiz. A, B, C orqali mos ravishda ko'k, qizil va oq shar chiqishidan iborat hodisalarni belgilaymiz. Ehtimollikning klassik ta'rifga ko'ra

$$P(A)=\frac{3}{20}=0,15;$$

$$P(B)=\frac{8}{20}=0,4;$$

$$P(C)=\frac{9}{20}=0,45.$$

5-misol. Ikkita o'yin kubigi tashlanganda tushgan ochkolar ko'paytmasi 12 ga teng bo'lish ehtimolligini toping.

Yechish. Ikkita o'yin kubigini tashlanganda har birida 1, yoki 2, yoki 3, yoki 4, yoki 5, yoki 6 ochko tushishi mumkin. Bir o'yin kubigining har bir yog'ini boshqasining har bir yog'i bilan kombinatsiyasini olish mumkin. Mumkin bo'lgan hamma kombinatsiyalarni quyidagi jadval ko'rinishida ifodalash mumkin («birinchi» o'yin kubigida tushgan ochkolar soni birinchi qilib, «ikkinchi» o'yin kubigida tushgan ochkolar soni esa ikkinchi qilib yozilgan):

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	**62**
13	23	33	**43**	53	63
14	24	**34**	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	**26**	36	46	56	66

A = {tushgan ochkolar ko'paytmasi 12 ga teng}.

Bu jadvaldan ko'rinadiki, ikkita o'yin kubigi tashlanganda ro'y berishi mumkin bo'lgan teng imkoniyatli hodisalar soni $6\cdot 6=36$ ga teng. Ular orasida faqat 4 ta holatda (ular jadvalda tagiga chizib ko'rsatilgan) ochkolar ko'paytmasi 12 ga teng. Ehtimollikning klassik ta'rifiga ko'ra

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

6-misol. Beshta bir xil kartochkaga T, K, O, B, I harflari yozilgan. Kartochkalarni tasodifiy joylashtirilganda «KITOB» so'zi hosil bo'lish ehtimolligini toping.

Yechish. Ko'rsatilgan beshta harfning beshtadan mumkin bo'lgan joylashishlari soni, ya'ni tajribada ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha hollari soni 5 tadan tuzilgan o'rin almashtirishlar soniga teng, ya'ni

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Shu o'rin almashtirishlarning faqat bittasida «KITOB» so'zi hosil bo'ladi.

A = {«KITOB» so'zi hosil bo'lish hodisasi} – bizni qiziqtirayotgan hodisa ekan.

Ehtimollikning klassik ta'rifiga ko'ra

$$P(A) = \frac{1}{120}.$$

1.3-§. Ehtimollikning geometrik va statistik ta'riflari

Klassik ta'rifga tushmaydigan, ya'ni mumkin bo'lgan hollari cheksiz bo'la oladigan yana bir modelni keltiramiz.

Biror D soha berilgan bo'lib, D_1 soha uning qism ostisi bo'lsin. Agar D sohaga tavakkaliga nuqta tashlanayotgan bo'lsa, shu nuqtaning D_1 ga tushish ehtimolligi $P(D)$ nimaga teng bo'ladi? – degan savol o'rinli bo'ladi. Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, «D sohaga tavakkaliga nuqta tashlanayapti», deyilganda biz quyidagini tushunamiz: tashlanayotgan nuqta D sohaning ixtiyoriy nuqtasiga tushishi mumkin va D ning biror qism ostisiga nuqta tushishi ehtimolligi shu qism o'lchovi (uzunlik, yuza va hokazo)ga proporsional bo'lib, uning joylashishiga va shakliga bog'liq emas.

Demak, yuqoridagilarni hisobga olib, quyidagi ta'rifini kiritishimiz mumkin:

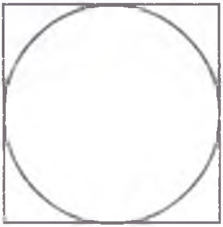
Ta'rif. D sohaga tavakkaliga tashlanayotgan nuqtaning uning qism ostisi D_1 ga tushish ehtimolligi deb,

$$P(D_1) = \frac{mes\{D_1\}}{mes\{D\}}$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi.

Bu yerda *mes* (messung — o'lchov) orqali sohaning o'lchovi (uzunlik, yuza yoki hajm) belgilangan.

Odatda, bu ta'rif ehtimollikning *geometrik ta'rifi* deb yuritiladi.



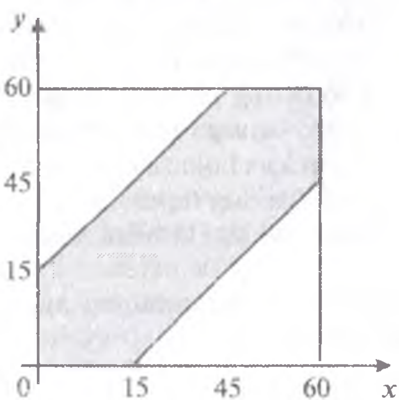
6-rasm.

1-misol. Tomoni 4 ga teng bo'lgan kvadratga aylana ichki chizilgan. Tasodifiy ravishda kvadratning ichiga tashlangan nuqtaning aylana ichiga tushish ehtimolligini toping (6-rasm).

Yechish. D — tomoni 4 ga teng bo'lgan kvadrat. D_1 — kvadratga ichki chizilgan radiusi 2 ga teng aylana. D va D_1 shakllar tekislikda qaralayotganligi uchun o'lchov sifatida yuza olinadi. U holda

$$P(D_1)=\frac{mes\{D_1\}}{mes\{D\}}=\frac{yuza\{D_1\}}{yuza\{D\}}=\frac{4\pi}{16}=\frac{\pi}{4}.$$

2-misol. Ikki do'st soat 9 bilan 10 orasida uchrashmoqchi bo'lishdi. Birinchi kelgan kishi do'stini 15 minut davomida kutishi avvaldan shartlashib olindi. Agar bu vaqt mobaynida do'sti kelmasa, u ketishi mumkin. Agar ular soat 9 bilan 10 orasidagi ixtiyoriy paytda kelishlari mumkin bo'lib, kelish paytlari ko'rsatilgan vaqt mobaynida tasodifiy bo'lsa va o'zaro kelishib olingan bo'lmasa, bu ikki do'stning uchrashish ehtimolligini hisoblang.



7-rasm.

Yechish. Birinchi kishining kelish vaqt momenti x, ikkinchisiniki esa y bo'lsin. Ularning uchrashishlari uchun $|x-y|\le 15$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir. x va y larni tekislikdagi Dekart koordinatalari sifatida tasvirlaymiz va masshtab birligi deb minutlarni olamiz. Ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlar tomonlari 60 bo'lgan kvadrat nuqtalaridan va uchrashishga qulaylik tug'diruvchi imkoniyatlar shtrixlangan soha nuqtalaridan iborat (7-rasm). Demak, ehtimollikning geometrik ta'rifiga ko'ra, izlanayotgan ehtimollik shtrixlangan soha yuzasining kvadrat yuzasiga nisbatiga teng. Izlanayotgan ehtimollik

$$P=\frac{60^2-45\cdot45}{60^2}=1-\frac{45\cdot45}{60^2}=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{16}.$$

Ehtimollikning klassik ta'rifi formulasidan tajribalar natijalari faqat teng imkoniyatli bo'lgandagina foydalanish mumkin. Ammo amaliyotda esa mumkin bo'lgan hollar teng imkoniyatli bo'lavermasligini yoki bizni qiziqtirayotgan hodisa uchun qulaylik yaratuvchi hollarni aniqlab bo'lmasligini ko'rishimiz mumkin. Bunday hollarda tajribani muayyan sharoitda bog'liqsiz ravishda ko'p marta takrorlab, hodisa nisbiy takrorlanishini kuzatib, uning ehtimolligini taqriban aniqlash mumkin bo'ladi.

Tasodifiy hodisa A ning nisbiy chastotasi deb shu hodisaning ro'y bergan tajribalar soni $n(A)$ ning o'tkazilgan tajribalar umumiy soni n ga nisbatiga aytiladi. Tajribalar soni yetarlicha katta $(n\to\infty)$ bo'lganida ko'p hodisalarning nisbiy chastotasi ma'lum qonuniyatga ega bo'ladi va biror son atrofida tebranib turar ekan. Bu qonuniyat XVIII asr boshlarida Yakob Bernulli tomonidan aniqlangan. Unga asosan bog'liqsiz tajribalar soni cheksiz ortib borganida $(n\to\infty)$ muqarrarlikka yaqin ishonch bilan hodisaning nisbiy chastotasi uning ro'y berish ehtimolligiga yetarlicha yaqin bo'lishi tasdiqlanadi. Bu qonuniyat o'z navbatida ehtimollikning *statistik ta'rifi* deb ataladi. Demak, A hodisa $P(A)$ ehtimolligi sifatida $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(A)}{n}=P(A)$ yoki $\frac{n(A)}{n}\approx P(A)$ yetarlicha katta lar uchun ni olish mumkin.

Boshqacha qilib aytganda, $P(A)$ sifatida taqriban $\frac{n(A)}{n}$ ni olish mumkin ekan.

Misol sifatida tanga tashlash tajribasini olaylik. Bizni {Gerb tushadi} $=G$ hodisasi qiziqtirayotgan bo'lsin. Klassik ta'rifga asosan $P(G)=\frac{1}{2}$. Shu natijaga statistik ta'rif bilan ham kelishimiz mumkin. Shu boisdan biz Byuffon va Pirsonlar tomonidan o'tkazilgan tajribalar natijasini quyidagi 1-jadvalda keltiramiz. Jadvaldan ko'rinadiki, n ortgani sari $\frac{n(G)}{n}$ soni $\frac{1}{2}$ ga yaqinlashar ekan. Ammo statistik ta'rifning ham amaliyotda noqulaylik tomonlari bor. U tajribalarning soni orttirilishini talab qiladi. Bu esa amaliyotda ko'p vaqt va xarajatlarni talab qilishi mumkin.

1-jadval

Tajriba o'tkazuvchi	Tajribalar soni, n	Tushgan gerblar soni, $n(G)$	Nisbiy takrorlanish $\frac{n(G)}{n}$
Byuffon	4040	2048	0,5080
K.Pirson	12000	6019	0,5016
K.Pirson	24000	12012	0,5005

1.4-§. Ehtimolliklar nazariyasi aksiomalari

Natijalarini oldindan aytib berish mumkin bo'lmagan tajribalarni matematik modellarini ko'rish uchun birinchi navbatda elementar hodisalar fazosi tushunchasi kerak bo'ladi (elementar hodisa tushunchasi boshlang'ich (asosiy) tushuncha sifatida qabul qilinib unga ta'rif berilmaydi). Bu fazo sifatida ixtiyoriy Ω to'plam qabul qilinib, uning elementlari ω lar ($\omega \in \Omega$) elementar hodisalar deb e'lon qilinadi va bizni qiziqtiradigan har qanday natijalar shu elementar hodisalar bilan ifodalanadi.

Odatda eng sodda tajribalarda biz chekli sondagi elementar hodisalar bilan ish ko'ramiz. Masalan, tanga tashlash tajribasi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{G, R\}$ uchun ikkita elementar hodisa – tanganing G (gerb) tomoni yoki R (raqam) tomoni bilan tushish hodisalaridan iborat ekanligi bizga ma'lum. Kub tashlash tajribasida esa Ω 6 ta elementar hodisadan iborat. Lekin tanga va kub tashlash shunday tajribalar bilan bog'liqki, ular uchun chekli sondagi elementar hodisalar bilan chegaralanib bo'lmaydi. Masalan, 1.2-§ dagi misolni olsak, ya'ni tangani birinchi marta *R* (raqam) tomoni bilan tushishiga qadar tashlash tajribasini ko'rsak, bu tajribaning elementar hodisalari *R, GR, ..., GG..R* ketma-ketliklar ko'rinishida bo'lib, ularning soni cheksiz va ular bir-biridan farq qiladi. Tabiiyki, bu tajribani chekli sondagi elementar hodisalar (natijalar) fazosi bilan ifoda etib bo'lmaydi.

Umuman Ω to'plam chekli yoki sanoqli (diskret) bo'lgan holda uning ixtiyoriy qismi (to'plam ostisi) tasodifiy hodisa sifatida qabul qilinadi. Masalan, Ω to'plam *n* ta elementar hodisalar $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ lardan iborat bo'lsa, bu fazo (to'plam) bilan bog'liq

$$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_n\}, \{\omega_1,\omega_2\}, ..., \{\omega_{n-1},\omega_n\}, ..., \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$$

2^n ta tasodifiy hodisalar sistemasi yuzaga keladi.

Yuqorida, 1.2-§ da elementar hodisalar to'plami Ω diskret bo'lgan holda hodisa sifatida Ω to'plamning ixtiyoriy qismini olish mumkinligini eslatib o'tgan edik, demak $\Im$ hodisalar sistemasi

$$\mathfrak{F} = \{A : A \subseteq \Omega\}.$$

$\Im$ sistemada esa ehtimollik $P(\cdot)$ konstruktiv ravishda

$$P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\omega)$$

tenglik bilan aniqlangan edi.

Lekin mumkin bo'lgan natijalari (elementar hodisalari) sanoqli bo'lmagan tajribalarni oson tassavur qilish mumkin. Masalan, $[t_1,t_2]$ oraliqda tasodifiy nuqtani tanlash tajribasini (ixtiyoriy kishining temperaturasini o'lchashni) ko'rsak, bu tajribaning natijalari kontinuum to'plamni tashkil qiladi, chunki $[t_1,t_2]$ oraliqni ixtiyoriy nuqtasi elementar hodisa sifatida qabul qilinishi mumkin ($\Omega=[t_1,t_2]$). Bu holda Ω ning ixtiyoriy qismini (to'plam ostisini) tasodifiy hodisa deb tushunsak, qo'shimcha chalkashliklar yuzaga keladi va shu sababli, hodisalar sifatida Ω ning maxsus to'plam ostilari sinfini ajratib olish bilan bog'liq ehtiyoj yuzaga keladi. Umuman aytganda, Ω ixtiyoriy to'plam bo'lganda, u bilan bog'liq hodisalar sistemasini tuzish, Ω diskret bo'lganda uning har qanday qismini hodisa deb tushunish imkoniyatini saqlab qolish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Aytaylik, elementar hodisalar fazosi Ω ixtiyoriy to'plam bo'lib, $\mathfrak{F}$ esa Ω ning qism to'plamlaridan tashkil topgan sistema bo'lsin.

1-ta'rif. Agar quyidagi shartlar bajarilsa, $\mathfrak{F}$ sistema algebrani tashkil qiladi deymiz:

A_1 : $\Omega \in \mathfrak{F}$;

A_2 : agar $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ bo'lsa, $A \cup B \in \mathfrak{F}$, $A \cap B \in \mathfrak{F}$ bo'ladi;

A_3 : Agar $A \in \mathfrak{F}$ bo'lsa, $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathfrak{F}$ bo'ladi.

Ravshanki, A_2 da keltirilgan ikkita munosabatdan bittasini talab qilinishi yetarli bo'ladi, chunki ikkinchisi A_3 ni hisobga olgan holda doim bajariladi.

$\mathfrak{F}$ algebrani ba'zi hollarda halqa deb ham qabul qilinadi, chunki $\mathfrak{F}$ da qo'shish va ko'paytirish amallari mavjudki (to'plamlar nazariyasi ma'nosida), ularga nisbatan $\mathfrak{F}$ yopiq sistema bo'ladi. $\mathfrak{F}$ algebra birlik elementga ega bo'lgan halqadir, chunki $\Omega \in \mathfrak{F}$ ekanligidan har qanday $A \in \mathfrak{F}$ uchun $A\Omega = \Omega A = A$ tenglik o'rinlidir.

2-ta'rif. To'plamlar sistemasi $\mathfrak{F}$ σ-algebrani tashkil qiladi deymiz, agar quyidagi xossa ixtiyoriy to'plamlar ketma-ketligi uchun bajarilsa:

A_2' : agar har qanday n uchun $A_n \in \mathfrak{F}$ bo'lsa, u holda

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F},$$

bo'ladi.

Qayd qilib o'tamizki, A_2 xossadagi kabi A_2' da ham keltirilgan 2 ta munosabatdan bittasining bajarilishi yetarli, chunki (ikkilik prinsipi)

$$\overline{\bigcap_n A_n} = \overline{\bigcup_n A_n}$$

tenglik o'rinli. $\mathfrak{F}$ — σ-algebra, σ-halqa yoki hodisalarning Borel maydoni deb ham yuritiladi.

Keltirilganlardan kelib chiqadiki, algebra chekli sonda bajariladigan to'plamlarni qo'shish, ko'paytirish, to'ldiruvchi to'plamlarga o'tish amallariga nisbatan yopiq bo'lgan to'plamlar sistemasi bo'lar ekan. σ-algebra esa bu amallarni sanoqli sonda bajarilishiga nisbatan yopiq sistemadir.

Har qanday algebra σ-algebra bo'lavermaydi. Masalan, $[0,1]$ kesmadagi chekli intervallardan tashkil topgan to'plamlar sistemasi algebra bo'ladi, lekin σ-algebra bo'lmaydi.

Agar Ω to'plam va uning to'plam ostilaridan tuzilgan algebra yoki σ-algebra $\mathfrak{F}$ berilgan bo'lsa, $(\Omega,\mathfrak{F})$ ***o'lchovli fazo*** deyiladi. O'lchovli fazo tushunchasi to'plamlar nazariyasi, o'lchovlar nazariyasi va ehtimolliklar nazariyasida juda muhimdir. Quyidagi teoremaga asoslanib, o'lchovli $(\Omega,\mathfrak{F})$ fazolarni o'rganishda $\mathfrak{F}$ sistema σ-algebra tashkil qilgan holni ko'rish bilan chegaralanib qolish yetarli ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Ω to'plamning ixtiyoriy qismini ω-to'plam deb ataymiz.

Teorema. $\mathfrak{F}_0$ ixtiyoriy ω-to'plamlar sistemasi bo'lsin. U holda ω-to'plamlarning shunday σ-algebrasi $\mathfrak{F}$ mavjudki, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

I. $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$.

II. Agar $\mathfrak{F}_1$ ω-to'plamlarning σ-algebrasi bo'lib, $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1$ bo'lsa, u holda $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$.

I va II xossalardan kelib chiqadiki, har qanday ω-to'plamlarning sistemasi uchun uni qoplovchi (o'z ichiga oluvchi) minimal σ-algebra $\mathfrak{F}$ mavjud bo'lar ekan. Kelgusida bu σ-algebrani $\mathfrak{F}_0$ sistema hosil qilgan σ-algebra deymiz va $\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{F}_0)$ deb belgilaymiz. σ-algebraning ta'rifidan kelib chiqadiki, $\sigma(\mathfrak{F}_0)$ ning ixtiyoriy ω-to'plami (hodisasi) A, shu $\mathfrak{F}_0$ sistemasining elementlaridan sanoqli sondagi $\cup, \cap$ va to'ldiruvchi to'plamlarga o'tish amallari orqali hosil bo'lgan to'plamdan iborat bo'ladi.

Teoremaning isboti sodda va konstruktiv xarakterga ega. Haqiqatan ham, σ-algebraning ta'rifidan ixtiyoriy sondagi σ-algebralarning ko'paytmasi yana σ-algebra bo'lishi kelib chiqadi. O'z-o'zidan tushunarliki, Ω to'plamning hamma to'plamostilaridan tuzilgan sistema σ-algebra tashkil qiladi va u $\mathfrak{F}_{max}$ — maksimal σ-algebra deyiladi. Demak hech bo'lmaganda bitta σ-algebra $(\mathfrak{F}_{max})$

borki, ω-to'plamlarning ixtiyoriy sistemasi $\mathfrak{F}_0 > \mathfrak{F}_{max}$ bo'ladi. Oxirgidan ko'rinadiki, $\mathfrak{F}$ bo'sh to'plam emas va u berilgan $\mathfrak{F}_0$ sistemani o'z ichiga oluvchi hamma σ-algebralarning ko'paytmasidan iborat bo'ladi (o'quvchiga mashq sifatida, agar Ω to'plam sanoqli bo'lsa, $(\Omega,\mathfrak{F}_{max})$ asosiy o'lchovli fazo bo'lishini tekshirishni taklif etamiz). Keltirilgan mulohazalardan $\sigma(\mathfrak{F}_0) = \mathfrak{F}$ ning II banddagi xossasi kelib chiqadi.

Aytaylik, $\Omega = \mathbb{R}$ – haqiqiy sonlar to'plami va $\mathfrak{F}_0$ – barcha intervallar sistemasi bo'lsin. U holda Borel $\mathfrak{B} = \sigma(\mathfrak{F}_0)$ σ-algebrasi deyiladi va $\mathfrak{B}$ intervallarni o'z ichiga oluvchi hamma σ-algebralarning ko'paytmasi bo'ladi ($\mathfrak{F}$ hamma intervallarni o'z ichiga oluvchi minimal σ-algebra). Borel σ-algebrasi $\mathfrak{F}$ ni intervallar ustida sanoqli sondagi qo'shish, ko'paytirish va to'ldiruvchi to'plamlarga o'tish amallari orqali hosil bo'lgan to'plamlar sistemasi deb qarash mumkin va bunday to'plamlar Borel to'plamlari deyiladi. Masalan, (a,b) intervallar bilan bir vaqtda bir nuqtali to'plamlar $\{a\}$ va va $(a,b]$, $[a,b]$, $[a,b)$ (a va b lar chekli yoki cheksiz qiymatlarni qabul qilishi mumkin) ko'rinishidagi to'plamlar Borel to'plamlari bo'ladi, chunki ular uchun

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right), \quad (a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a, b + \frac{1}{n}\right)$$

munosabatlar o'rinli.

Ochiq va yopiq to'plamlarning strukturasidan foydalanib aytishimiz mumkinki, agar $\mathfrak{F}_0$ $\mathbb{R}$ dagi yoki ochiq, yoki yopiq to'plamlar sistemasi bo'lsa, $\sigma(\mathfrak{F}_0) = \mathfrak{B}$ (Borel σ-algebrasi) bo'ladi va $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ o'lchovli fazo bo'ladi. Aytib o'tilganlardan ko'rinadiki, Borel σ-algebrasi $\mathfrak{B}$ to'g'ri chiziqda juda ham boy to'plamlar sistemasini tashkil qiladi (Borel to'plami bo'lmaydigan to'plamlarga misol keltirish qiyin).

Agar n-o'lchovli Evklid fazosi $\mathbb{R}^n$ ni ko'rsak, undagi Borel to'plamlari sistemasi $\mathfrak{B}^n$ n-o'lchovli to'g'ri to'rtburchaklar (intervallar), sferalar sistemasi hosil qilgan σ-algebradan iborat bo'ladi.

Umuman, ehtimolliklar bilan bog'liq biror masalani yechishda unga mos kelgan tajriba uchun $(\Omega,\mathfrak{F})$ o'lchovli fazoni qabul qilish kerak. Bunda Ω ko'rilayotgan tajribaning elementar hodisalar (natijalar) to'plami, $\mathfrak{F}$ shu tajriba bilan bog'liq hodisalar σ-algebrasi. $\mathfrak{F}$ ga kirmaydigan Ω ning barcha to'plamostilari hodisalar hisoblanmaydilar. Ko'pincha $\mathfrak{F}$ sifatida konkret ma'noga ega bo'lgan to'plamlar sistemasi hosil qilgan σ-algebra qabul qilinadi.

Umuman, agar

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$$

va har xil i va j lar uchun $A_i \cap A_j = \varnothing$ bo'lsa, u holda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar sistemasi Ω *to'plamning bo'linishi* deyiladi.

Ko'p hollarda

$$\mathfrak{F} = \sigma(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

deb olish maqsadga muvofiq bo'ladi. Bu yerda qanday bo'laklash sistemasini qabul qilish qo'yilgan masalaning ma'nosiga bog'liq.

Endi $(\Omega,\mathfrak{F})$ o'lchovli fazoda ehtimollik tushunchasi qanday kiritilganini eslatib o'tamiz.

3-ta'rif. $(\Omega,\mathfrak{F})$ o'lchovli fazodagi ehtimollik $P(\cdot)$, σ-algebraning to'plamlarida aniqlangan sonli funksiya bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

P_1: Har qanday $A \in \mathfrak{F}$ uchun $P(A) \geq 0$.

P_2: $P(\Omega) = 1$.

P_3: Agar $\mathfrak{F}$ ga tegishli hodisalar ketma-ketligi $\{A_n, n \geq 1\}$ uchun $A_i \cdot A_j = A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ bo'lsa,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

P_3 xossa ehtimollikning σ-additivlik xossasi deyiladi.

$(\Omega,\mathfrak{F},P)$ uchlik *ehtimollik fazosi* deyiladi.

Ehtimollik P o'lchovli $(\Omega,\mathfrak{F})$ fazodagi taqsimot yoki yanada soddaroq ravishda, Ω dagi taqsimot deb ham yuritiladi.

Shunday qilib, ehtimollik fazosi berilgan deganda, o'lchovli fazoda sanoqli additiv, manfiy bo'lmagan qiymatlarni qabul qiluvchi va hamma elementar hodisalar to'plamida 1 ga teng bo'lgan o'lchovni berish tushuniladi.

$\mathfrak{F}$ σ-algebrani va unda P ehtimollikni aniqlaydigan A_1, A_2', A_3, P_1, P_2, P_3 aksiomalar birgalikda hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasining asosini tashkil etadi va ular XX asrning mashhur matematigi A.N.Kolmogorov tomonidan kiritilgan.

Mantiqiy nuqtayi nazardan, keltirilgan aksiomalar to‘la bo‘lmagan, qarama-qarshiliksiz aksiomalar sistemasini tashkil qiladi. $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ ehtimollik fazosini ko‘rish tasodifiy tajribalarning matematik modelini tuzishda asosiy rol o‘ynaydi.

Umuman, «Ehtimollik o‘zi nima?» deb ataladigan munozara ancha katta tarixga ega. Bu tushuncha o‘rganilayotgan hodisaning bevosita zarurligi va tasodifiyligi bilan bog‘liq, faqatgina matematika nuqtayi nazaridan emas, balki falsafaviy xarakterdagi qiyinchiliklarga ham olib keladi. Bu munozaraning yuzaga kelishi va rivojlanishi mashhur matematiklar E.Borel, R.Fon Mizes, S.N.Bernshteyn, A.N.Kolmogorovlar nomi bilan bog‘liq. Ehtimollik fazosi $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ ni aniqlovchi Kolmogorov aksiomalari «ehtimollikning» matematik ma’nosini «sabab va zaruriyat» kabi falsafiy tushunchalardan ajratib turadi.

1.5-§. Ehtimollikning xossalari

Quyida biz ehtimollikning asosiy xossalarini keltiramiz.

1. $P(\varnothing)=0$.

Isbot. Bu natija $\varnothing \cup \Omega = \Omega$ tenglikdan va 2, 3-aksiomalardan kelib chiqadi:

$$P(\varnothing \cup \Omega) = P(\Omega),$$

$$P(\varnothing) + P(\Omega) = P(\Omega),$$

$$P(\varnothing) = 0.$$

2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Isbot. Bu xossaning isboti uchun $A \cup \overline{A} = \Omega$ va $A \cap \overline{A} = \varnothing$ tengliklardan foydalanamiz. Haqiqatan ham, bu tengliklarga asosan

$$P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega),$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

3. Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda $P(A) \le P(B)$.

Isbot. Ravshanki, $B = A \cup \bar{A}B$ va

$$P(B) = P(A) + P(\bar{A}B)$$

tenglik o'rinli. Bunda $P(\bar{A}B) \ge 0$ ekanligini e'tiborga olsak, isbotlash talab qilingan tengsizlik kelib chiqadi.

4. $0 \le P(A) \le 1$.

Isbot. Bu xossaning isboti 3-xossadan va 1-, 2- aksiomalardan kelib chiqadi.

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Isbot. Quyidagi $A \cup B = A \cup [B \setminus (A \cap B)]$ tenglikni yozish mumkin, demak

$$P(A \cup B) = P(A) + P([B \setminus (A \cap B)]) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

6. $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$.

Isbot. 5-xossadan kelib chiqadi.

7. Ixtiyoriy $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar uchun

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n)$$

tenglik bajariladi. Bu munosabat Bul formulasi deyiladi.

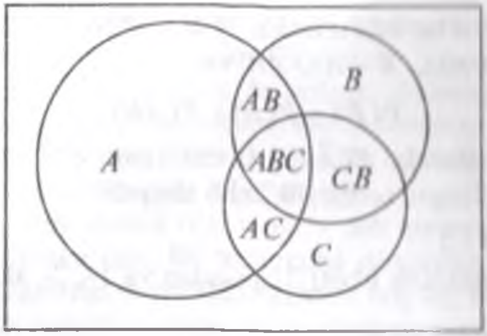
Isbot. Matematik induksiya metodi bo'yicha isbotlaymiz. $k=2$ uchun bu xossa o'rinli, chunki 5-xossa bo'yicha

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Faraz qilaylik, $k=n-1$ uchun bu xossa o'rinli bo'lsin, ya'ni ixtiyoriy $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ hodisa uchun

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) + ... + (-1)^{n-2} P(A_1 A_2 ... A_{n-1})$$



8-rasm.

tenglik bajariladi. U holda $B = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ belgilashni kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(B \cup A_n) = P(B) + P(A_n) - P(A_n B).$$

Endi

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \quad \text{va} \quad P(A_n B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i A_n)\right)$$

munosabatlardan $k=n$ uchun xossaning bajarilishi kelib chiqadi.

Uchta hodisa uchun Bul formulasi quyidagi

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$- P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

ko'rinishda bo'lib, uni 8-rasmdagi kabi chizma orqali izohlash mumkin.

1.6-§. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi

Misollardan boshlaylik. Tajribamiz simmetrik tangani 3 marta tashlashdan iborat bo'lsin. «Gerb» tomoni bir marta tushish ehtimolligi klassik sxemada $\frac{3}{8}$ ga teng. (Elementar hodisalar umumiy soni sakkizta; uchta elementar hodisadan (GRR), (RGR), (RRG) birortasi ro'y berishi mumkin.) Bu hodisani A orqali belgilaylik. Endi biz B hodisa B={tanga «Gerb» tomoni bilan toq marta tushadi} ro'y berganligi haqida qo'shimcha ma'lumotga ega bo'laylik. Bu qo'shimcha ma'lumot A hodisaning ehtimolligiga qanday ta'sir qiladi? B hodisa 4 ta elementar hodisadan iborat, A hodisa esa 3 ta B hodisaga tegishli elementar hodisadan iborat. Tabiiyki, endi A hodisaning yangi ehtimolligi $\frac{3}{4}$ ga teng deb olish to'g'ri bo'ladi.

Bu yangi ehtimollik – shartli ehtimollik bo'lib, u A hodisaning B hodisa ro'y beradi degan sharti ostidagi ehtimolligini bildiradi.

Yana bir misol. Natijalari n ta bo'lgan klassik sxemani ko'raylik. Agar A hodisa r ta elementar hodisadan, B hodisa m ta elementar hodisadan, AB hodisa esa k ta elementar hodisadan iborat bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan misolda yuritilgan fikrlar asosida A hodisaning B hodisa ro'y beradi degan sharti ostidagi ehtimolligini

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{k}{m} = \frac{k/n}{m/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

deb qabul qilinadi.

Endi umumiyroq ta'rifga o'tish mumkin. $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ ehtimollik fazosi berilgan bo'lib, A va B ixtiyoriy hodisalar bo'lsin $(A,B\in\mathfrak{F})$.

1-ta'rif. A hodisaning B hodisa ro'y beradi degan *sharti ostidagi ehtimolligi* deb, $P(B)>0$ bo'lgan holda $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ formula bilan aniqlanadigan songa aytamiz.

Shartli ehtimolliklar quyidagi xossalarga ega:

$P(B/B) = 1$, $P(\Omega/B) = 1$;

$P(\varnothing/B) = 0$;

agar $B\subseteq A$ bo'lsa, u holda $P(A/B)=1$;

agar $A_1\cap A_2=\varnothing$ bo'lsa, u holda $P(A_1\cap A_2/B)=P(A_1/B)+P(A_2/B)$.

Yuqoridagi xossalar bevosita shartli ehtimollikning ta'rifidan kelib chiqadi.

Keltirilgan xossalardan kelib chiqadiki, $P_B(\cdot)=P(\cdot/B)$ ehtimollik $(B,\mathfrak{F}_B,P_B)$ fazoda aniqlangan ehtimollik bo'lib, bu yerda

$$\mathfrak{F}_B=\mathfrak{F}\cap B=\{A\cap B : A\in\mathfrak{F}\}.$$

$(B,\mathfrak{F}_B,P_B)$ ehtimollik fazosini birlamchi $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ fazoning «qisqartirilgan» varianti deb tushuniladi.

Shartli ehtimolliklar hodisalarning quyidagi bog'liqsizlik tushunchasini oydinlashtiradi.

2-ta'rif. Agar A va B hodisalar uchun $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ tenglik bajarilsa, A va B *o'zaro bog'liq bo'magan (bog'liqsiz) hodisalar* deyiladi. Aks holda bu hodisalar *bog'liq* deyiladi.

Bog'liq bo'lmagan hodisalar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli.

1) A va B hodisalar o'zaro bog'liqsiz bo'lishi uchun $P(A/B)=P(A)$ tenglik bajarilishi yetarli va zaruriy shartdir.

2) Agar A va B o'zaro bog'liqsiz hodisalar bo'lsa, u holda $\bar{A}$ va B, A va $\bar{B}$ hamda $\bar{A}$ va $\bar{B}$ hodisalar ham mos ravishda o'zaro bog'liqsiz bo'ladi.

Keltirilgan da'volarni $\bar{A}$ va B hodisalar uchun hisoblaymiz. Haqiqatdan ham,

$$P(\bar{A}B) = P(B\backslash AB) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) =$$
$$= P(B)(1 - P(A)) = P(\bar{A})P(B).$$

3) A va B_1 hamda A va B_2 hodisalar o'zaro bog'liqsiz bo'lib, B_1 va B_2 birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsin ($B_1B_2=\varnothing$). U holda A va $B_1\cup B_2$ o'zaro bog'liqsiz hodisalar bo'ladi.

Buni ushbu

$$P(A(B_1\cup B_2)) = P(AB_1\cup AB_2) = P(AB_1) + P(AB_2) =$$
$$= P(A)(P(B_1) + P(B_0)) = P(A)\cdot P(B_1\cup B_2).$$

tengliklar isbotlaydi.

Shartli ehtimollikning ta'rifidan quyidagi

$$P(AB) = P(B)\cdot P(A/B),\quad P(AB) = P(A)\cdot P(B/A)$$

tengliklar kelib chiqadi.

Bu tengliklar yordamida ikkita bog'liq bo'lgan hodisaning bir vaqtda ro'y berish ehtimolligini hisoblash mumkin. Bu ehtimollik hodisalardan birining ehtimolligini ikkinchisining birinchisi ro'y berdi degan shart ostidagi ehtimolligiga ko'paytmasiga teng.

Demak, biz amalda bog'liq bo'lgan hodisalar uchun ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasini keltirdik.

Bu teoremani quyidagicha umumlashtirish mumkin. Bir qancha bog'liq bo'lgan hodisalarning bir vaqtda ro'y berish ehtimolligi uchun

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$$

formula o'rinli. Ravshanki, o'ng tomondagi ko'paytma mumkin bo'lgan ko'paytmalardan birginasidir xolos.

O'zaro bog'liqsiz hodisalar uchun ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasi 2-ta'rifdan bevosita kelib chiqadi va u quyidagicha:

ikkita bog'liqsiz hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimolligi bu hodisalar har birining ro'y berish ehtimolliklarining ko'paytmasiga teng:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Natija. O'zaro bog'liq bo'lmagan bir nechta hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimolligi bu hodisalar har birining ro'y berish ehtimolliklarining ko'paytmasiga teng:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

3-ta'rif. Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar berilgan bo'lib, ixtiyoriy k $(2 \leq k \leq n)$ va $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi butun sonlar uchun

$$P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

tengliklar sistemasi o'rinli bo'lsa, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar birgalikda *o'zaro bog'liq bo'lmagan (bog'liqsiz) hodisalar* deyiladi. Aks holda bu hodisalarga *birgalikda bog'liq* deb aytiladi.

Hodisalarning juft-jufti bilan bog'liqsizligidan ularning birgalikda bog'liqsizligi kelib chiqmaydi. Bunga quyidagi Bernshteyn misolini keltirish mumkin.

Misol. Tajriba tekislikka tetraedrni tashlashdan iborat bo'lsin. Tetraedrning birinchi tomoni ko'k, ikkinchi tomoni yashil, uchinchi tomoni qizil, to'rtinchi tomoni esa har uchala rangga, ya'ni ko'k, yashil va qizil ranglarga bo'yalgan bo'lsin.

A hodisa tetraedrning tekislikka ko'k rangli tomoni bilan tushish, B hodisa tekislikka yashil rangli tomoni bilan tushish, C hodisa esa tekislikka qizil rangli tomoni bilan tushish hodisalari bo'lsin. Tushunarliki, agar tetraedr tekislikka to'rtinchi tomoni (har uchala rangga bo'yalgan tomoni) bilan tushsa, u holda A, B va C hodisalarning uchalasi bir vaqtda sodir bo'ladi. Bu hodisalarning ehtimolliklarini klassik ta'rif yordamida hisoblaymiz:

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{1}{2},\quad P(C)=\frac{1}{2}.$$

Endi

$$P(AB)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)\cdot P(B),$$
$$P(AC)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)\cdot P(C),$$
$$P(BC)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(B)\cdot P(C)$$

bo'lganligi uchun bu hodisalar juft-jufti bilan o'zaro bog'liqsiz hodisalardir. Endi ularning uchalasining ko'paytmasini ko'ramiz. Tushunarliki, $P(ABC)=\frac{1}{4}$. Ammo $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\frac{1}{8}\neq P(ABC)$. Demak, A, B, C hodisalar birgalikda bog'liqsiz bo'lmas ekan.

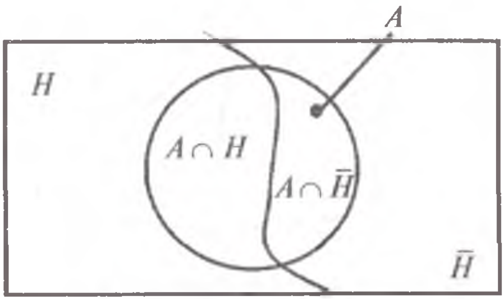
1.7-§. To'la ehtimollik va Bayes formulalari

Oddiy holdan boshlaylik. A va H ixtiyoriy hodisalar bo'lsin. A hodisaning ehtimolligi, A va H hodisalar o'zaro qanday munosabatda bo'lishidan qat'iy nazar hamma vaqt A va H, hamda A va $\overline{H}$ hodisalarning bir vaqtda ro'y berish ehtimolliklari yig'indisiga teng:

$$P(A)=P(AH)+P(A\overline{H}).$$

Buni Venn diagrammasida ifodalaymiz (9-rasm).

A hodisani qismlarga ajratish H va $\overline{H}$ hodisalarga bog'liq. H va $\overline{H}$ hodisalar – A hodisani ikkita o'zaro birgalikda bo'lmagan qism to'plamlarga ajratish usuli. A hodisa yoki H hodisa bilan yoki $\overline{H}$ hodisa bilan ro'y berishi mumkin, ammo ikkalasi bilan bir vaqtda ro'y bermaydi.



9-rasm.

Endi murakkabroq holga o'tamiz.

Faraz qilaylik, A hodisa n ta juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan $H_1, H_2, ..., H_n$ hodisalarning bittasi bilangina ro'y beradigan bo'lib,

$$\left(H_i H_j = \varnothing, i \neq j; \;\; A \subset \bigcup_{j=1}^{n} H_j \right), \; P(H_j) > 0, j = 1,2,...,n \text{ bo'lsin.}$$

$H_1, H_2, ..., H_n$ hodisalarning qaysi biri ro'y berishi oldindan ma'lum bo'lmagani uchun ular gipotezalar deb ataladi.

Bu holda A hodisaning ro'y berish ehtimolligi quyidagi ***to'la ehtimollik*** deb nomlanuvchi formuladan topiladi:

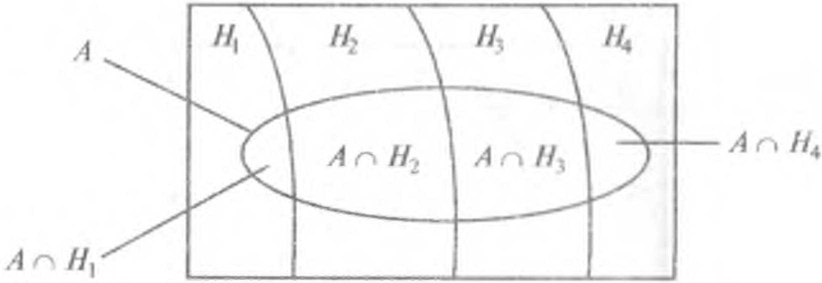
$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A/H_j).$$

Isbot. Keltirilgan shartlardan $A = \bigcup_{j=1}^{n} H_j A$ tenglik kelib chiqadi (10-rasmda hodisa to'rtta juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan H_1, H_2, H_3, H_4 hodisalarning bittasi bilangina ro'y beradi).

$H_1A, H_2A, ..., H_nA$ hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmaydi, chunki $H_1, H_2, ..., H_n$ hodisalar juft-jufti bilan birgalikda emas. Shuning uchun

$$P(A) = P(H_1 A \cup H_2 A \cup ... \cup H_n A) =$$

$$= P(H_1 A) + P(H_2 A) + ... + P(H_n A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j A).$$



10-rasm.

Har qanday j uchun (j=1,2,..., n) H_j va A bog'liq bo'lgan hodisalardir. Bu hodisalar uchun ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasini qo'llab to'la ehtimollik formulasiga kelamiz:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

1-masala. O'qituvchi nazoratga 15 ta bilet tayyorlagan. Biletda ikkita savol bo'lib, savollar takrorlanmaydi. Nazorat topshirish uchun o'zining biletidagi ikkita savolga yoki bo'lmasa o'z biletining bitta savoliga va bitta qo'shimcha savolga javob berish yetarli. Agar talaba 20 ta savolga javob bilsa, uning nazoratni topshirish ehtimolligini toping.

Yechish. Bizda A hodisa quyidagicha: A={talaba nazoratni topshiradi}. Bu hodisa quyidagi H_1 yoki H_2 hodisa bilan bir vaqtda ro'y berishi mumkin:

H_1={talaba biletdagi ikkita savolning javobini biladi},

H_2={talaba biletdagi ikkita savoldan bittasining javobini biladi}.

Bu hodisalar to'la guruhni tashkil qilmaydi, chunki H_3={talaba biletdagi ikkita savolga javob bilmaydi} hodisasi ham mavjud va shartli ehtimollik nolga teng bo'ladi.

H_1 va H_2 gipotezalar ehtimolliklarini topamiz. Masalaning shartiga ko'ra

$$P(H_1) = \frac{C_{20}^2}{C_{30}^2} = \frac{38}{87}, \quad P(H_2) = \frac{C_{20}^1 \cdot C_{10}^1}{C_{30}^2} = \frac{40}{87}.$$

Endi shartli ehtimolliklarni topamiz. Tushunarliki, H_1 hodisa ro'y bersa talaba nazoratni topshiradi va $P(A/H_1)$ ehtimolligi 1 ga teng. H_2 hodisa ro'y bergan holda talaba qolgan 28 ta savoldan 19 tasiga javob biladi va u nazorat topshirish uchun qo'shimcha savolning javobini bilishi kerak. Shuning uchun $P(A/H_2)=\frac{19}{28}$ bo'ladi.

A hodisaning ehtimolligi to'la ehtimollik formulasidan topamiz:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) =$$

$$=\frac{38}{87}\cdot 1+\frac{40}{87}\cdot\frac{19}{28}=\frac{152}{203}\approx 0,75.$$

Endi bu misoldan foydalanib, quyidagi masalani yechamiz.

2-masala. Guruhda 20 ta talaba bo'lib, ulardan 4 tasi «a'lo», 6 tasi «yaxshi» va 10 tasi «qoniqarli» o'qiydigan talaba bo'lsin. Nazoratga tayyorlangan 15 ta biletda 2 tadan savol bo'lib, savollar takrorlanmaydi. Nazorat topshirish uchun yoki o'zining biletidagi 2 ta savolga yoki bo'lmasa o'z biletining 1 ta savoliga va 1 ta qo'shimcha savolga javob berish yetarli. «A'lo» o'qiydigan talaba hamma 30 ta savolga javob biladi, «yaxshi» o'qiydigan talaba 20 ta savolga, «qoniqarli» o'qiydigan talaba esa 15 ta savolga javob bera oladi. Tavakkaliga tanlangan talabaning nazorat topshirish ehtimolligini toping.

Yechish. Bizda A hodisa quyidagicha:

A={tavakkaliga tanlangan talaba nazoratni topshiradi}.

Gipotezalarni quyidagicha aniqlaymiz:

H_1={tavakkaliga tanlangan talaba – «a'lochi»},

H_2={tavakkaliga tanlangan talaba yaxshi o'qiydi},

H_3={tavakkaliga tanlangan talaba qoniqarli o'qiydi}.

Masalaning shartiga ko'ra

$$P(H_1)=\frac{4}{20}=0,2,\quad P(H_2)=\frac{6}{20}=0,3 \quad \text{va} \quad P(H_3)=\frac{10}{20}=0.5$$

bo'ladi.

Endi $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, $P(A/H_3)$ shartli ehtimolliklarni topamiz. Tushunarliki, $P(A/H_1)=1$, chunki a'lochi talaba hamma savolga javob biladi.

1-masalaga ko'ra yaxshi o'qiydigan talaba nazoratni topshirish ehtimolligi, ya'ni $P(A/H_2)$ sharti ehtimolligi $P(A/H_2)=\frac{152}{203}$.

Xuddi shunday $P(A/H_3)$ shartli ehtimollik, ya'ni qoniqarli o'qiydigan talaba nazoratni topshirishi ehtimolligini topamiz:

$$P(A/H_3)=\frac{C_{15}^2}{C_{30}^2}\cdot 1+\frac{C_{15}^1\cdot C_{15}^1}{C_{30}^2}\cdot\frac{14}{28}=\frac{1}{2}.$$

To'la ehtimollik formulasi bo'yicha A hodisaning $P(A)$ ehtimolligini topamiz:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A/H_i)=$$

$$0,2\cdot 1+0,3\cdot\frac{152}{203}+0,5\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+\frac{228}{1015}+\frac{1}{4}=\frac{2739}{4060}\approx 0,67.$$

Endi biz to'la ehtimollik formulasidan foydalanib, Bayes formulasini keltirib chiqaramiz. A va H_1, H_2, ..., H_n hodisalar paragraf boshidagi shartlarni qanoatlantirsin. Agar A hodisa ro'y bersa, u holda H_m gipotezaning shartli ehtimolligi quyidagi Bayes formulasidan topiladi:

$$P(H_m/A)=\frac{P(H_m)\cdot P(A/H_m)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)},$$

bu yerda $m=1,2,...,n$.

Bu formulani quyidagi shartli ehtimollik ta'rifidan keltirib chiqarish mumkin:

$$P(H_m/A)=\frac{P(H_m A)}{P(A)}.$$

Bog'liq hodisalar uchun ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasidan foydalanib oxirgi kasrning suratini quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$P(H_m/A)=P(H_m)\cdot P(A/H_m).$$

Bu kasrning maxrajidagi A hodisaning $P(A)$ ehtimolligi to'la ehtimollik formulasiga asosan

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i).$$

$P(H_k)$ $(k=1,2,...,n)$ ehtimolliklar *aprior* (sinovdan oldingi) ehtimolliklar, $P(H_k/A)$ $(k=1,2,...,n)$ — *aposterior* (sinovdan keyingi) ehtimolliklar deyiladi.

3-masala. Uchta mergan nishonga bittadan o'q uzadi. Birinchi merganning o'qi nishonga 0,6 ehtimollik bilan, ikkinchi merganning o'qi nishonga 0,8 ehtimollik bilan, uchinchi merganning o'qi esa 0,3 ehtimollik bilan tegadi. Uchala mergan o'q uzgandan so'ng nishonga ikkita o'q tekkanligi ma'lum bo'lsa, birinchi merganning o'qi nishonga tegish ehtimolligini toping.

Yechish. Tajriba o'tkazishdan oldin quyidagi gipotezalarni qo'yamiz.

H_1 = {birinchi mergan otgan o'q nishonga tegadi};

H_2 = {birinchi mergan otgan o'q nishonga tegmadi}.

Bu gipotezalarning ehtimolliklari

$$P(H_1)=0{,}6, \qquad P(H_2)=1-0{,}6=0{,}4.$$

A hodisa quyidagicha bo'ladi:

A = {uchta otilgan o'qdan ikkitasi nishonga tegdi}.

Bu hodisani H_1 va H_2 gipotezalar ostidagi shartli ehtimolliklarini topamiz. H_1 hodisa ro'y berganda qolgan ikkita mergan ichidan faqat bittasining o'qi nishonga tegadi. Shuning uchun

$$P(A/H_1)=0{,}8\cdot 0{,}7+0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}72.$$

Tushunarliki, $P(A/H_2)$ shartli ehtimollik $0{,}8\cdot 0{,}3$ ko'paytmaga, ya'ni 0,24 ga teng.

Endi so'ralgan $P(H_1/A)$ ehtimollikni Bayes formulasi bo'yicha topamiz:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}72}{0{,}6\cdot 0{,}72+0{,}4\cdot 0{,}24}=\frac{27}{33}.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ehtimolliklar nazariyasida «hodisa» deyilganda nimani tushuniladi?

2. Ehtimolliklar nazariyasining kelib chiqishi tarixini qisqacha gapirib bering.

3. Elementar hodisalar fazosi deb nimaga aytiladi?

4. Tasodifiy hodisalar deb nimaga aytiladi? Tasodifiy hodisalar qanday belgilanadi?

5. Elementar hodisa nima va u qanday belgilanadi?

6. Elementar hodisalarga misollar keltiring.

7. Muqarrar hodisa nima va u qanday belgilanadi?

8. Mumkin bo'lmagan hodisa nima va u qanday belgilanadi?

9. O'zaro qarama-qarshi hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi? Qarama-qarshi hodisalarga misollar keltiring.

10. Qachon A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va u qanday belgilanadi?

11. Teng hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi?

12. A va B hodisalarning yig'indisi deb nimaga aytiladi?

13. A va B hodisalar ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?

14. Birgalikda bo'lmagan hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi?

15. Hodisalarning to'la guruhi deb nimaga aytiladi?

16. Kombinatorikaning asosiy formulalarini aytib bering.

17. Ehtimollikning klassik ta'rifini aytib bering.

18. Klassik ehtimollikning asosiy xossalari qanday?

19. Biror A hodisaning ma'lum ehtimolligi bo'yicha $\bar{A}$ qarama-qarshi hodisaning ehtimolligi qanday topiladi?

20. Qanday hodisalar bog'liq hodisalar deyiladi?

21. Qanday hodisalar bog'liqsiz hodisalar deyiladi?

22. Shartli ehtimollik nima?

23. «To'la ehtimollik» nima? To'la ehtimollik formulasi qaysi hollarda tadbiq qilinadi?

24. Bayes formulasi nimaga xizmat qiladi? U qaysi hollarda tadbiq qilinishi mumkin?

25. Nima uchun ehtimollikning klassik ta'rifi yetarli emas?

26. Ehtimollikning geometrik ta'rifi nima? Uning qo'llanishiga doir misollar keltiring.

27. Ehtimollikning statistik ta'rifi nima? Fizikadan va tabiatshunoslikning boshqa sohalaridan statistik qonuniyatlarga misollar keltiring.

28. Elementar hodisalar fazosi deb nimaga aytiladi?
29. Hodisalar algebrasi deb nimaga aytiladi?
30. Hodisalar σ-algebrasi deb nimaga aytiladi?
31. Kolmogorov aksiomalarini aytib bering.

Misol va masalalar

1. O'yin kubigi ikki marta tashlanadi. Quyidagi hodisalarni aniqlang: A={tushgan raqamlar yig'indisi 10 ga teng}; B={kamida bir marta 6 raqam tushdi}. A, B va AB hodisalarning ehtimolliklarini toping.

Javob: $A=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$,

$B=\{(i_1,6),(6,i_2);i_1,i_2=1,2,...,6\}=\{(1,6),(2,6),...,(6,6),(6,1),(6,2),...,(6,5)\}$;

$AB=\{(4,6),(6,4)\}$; $P(A)=\frac{1}{12}$; $P(B)=\frac{11}{36}$; $P(C)=\frac{1}{18}$.

2. Idishda 4 ta qora va 6 ta oq sharlar bor. Qaytarishsiz sxemada tavakkaliga 3 ta shar olinadi. Elementar hodisalar fazosini quring va har bitta elementar hodisa ehtimolligini toping.

Javob: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}$; ω_1={oq,oq,oq},

ω_2={qora,qora}, ω_3={oq,qora,oq}, ω_4={qora,oq,oq},

ω_5={oq,qora,qora}, ω_6={qora,oq,qora}, ω_7={qora,qora,oq},

ω_8={qora,qora,qora},

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=P(\omega_3)=P(\omega_4)=\frac{1}{6},$$

$$P(\omega_5)=P(\omega_6)=P(\omega_7)=\frac{1}{10},\quad P(\omega_8)=\frac{1}{30}.$$

3. O'yin kubigi birinchi bor «olti» raqam tushguncha tashlanadi. Elementar hodisalar fazosini quring. Quyidagi hodisalar ehtimolligini toping:

A={«olti» birinchi ikki tashlashda tushdi}; B={tashlashlar soni toq}.

Javob: $\Omega=\{(i_1,...,i_{k-1},6);\ i_j,...,i_{k-1}\in\{1,2,3,4,5\},\ k\geq 1;$

$$A=\{(6),(i_1,6);\ i_1=\overline{1,5}\};\ P(A)=\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6^2}=\frac{11}{36};$$

$$B=\{(i_1,\dots,i_{2k},6);\ i_j=\overline{1,5},\ j=\overline{1,2k},\ k\ge 1\},$$

$$P(B)=\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6^3}+5^4\cdot\frac{1}{6^5}+\dots=\frac{6}{11}.$$

4. Idishda 3 ta oq va 2 ta qora shar bor. Tavakkaliga 2 ta shar olindi. Bu sharlar har xil rangda bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{5}{8}$.

5. Idishda 4 ta oq va 6 ta qora shar bor. Idishdan tavakkaliga bitta shar olinib, rangi aniqlanadi va keyin u idishga qaytariladi. So'ng idishdan tasodifan yana bitta shar olinadi. Olingan sharlar: 1) har xil rangda, 2) bir xil rangda bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: 1) 0,48; 2) 0,52.

6. O'yin kubigi bir marta tashlanadi. Agar tushgan raqam toq ekanligi ma'lum bo'lsa, bu raqamning tub ekanligi ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{2}{3}$.

7. (Kavaler de Mere masalasi). Uchta o'yin kubigi tashlanadi. Quyidagi hodisalardan qaysinisining ehtimolligi ko'proq: A={tushgan raqamlar yig'indisi 11 ga teng}; B={tushgan raqamlar yig'indisi 12 ga teng}?

Javob: $P(A)=\frac{27}{216}>P(B)=\frac{25}{216}$.

8. Uch olim bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda ma'lum bir fizik kattalikni tekshirib, o'lchov natijalarni yozib bormoqdalar. Birinchi olimning o'lchov natijasida xatoga yo'l qo'yish ehtimolligi 0,1 ga, ikkinchisi uchun 0,15 ga, uchinchisi uchun esa 0,2 ga teng. Bir martadan o'lchaganda hech bo'lmaganda bitta olimning xatoga yo'l qo'yish ehtimolligini toping.

Javob: 0,388.

9. Strategik ahamiyatga ega ko‘prikning buzilishi uchun unga bitta bomba tushishi kifoya. Agar ko‘prikka unga tegish ehtimolligi mos ravishda 0,3; 04; 0,6; 0,7 bo‘lgan to‘rtta bomba tashlangan bo‘lsa, ko‘prikning buzilish ehtimolligini toping.

Javob: 0,9496.

10. Statistik ma’lumotlar bo‘yicha matematika fakulteti talabalarining 60 foizi sport bilan shug‘ullanadi, 40 foizi ilmiy ish bilan faol shug‘ullanadi va 20 foizi ham sport ham ilmiy ish bilan shug‘ullanadi. Fakultet ro‘yxatlaridan tavakkaliga bitta talaba tanlangan. Quyidagi hodisalarning ehtimolligini toping: A={tanlangan talaba qayd etilgan mashg‘ulotlarning kamida bittasi bilan shug‘ullanadi}; B={tanlangan talaba faqat sport bilan shug‘ullanadi}; C={tanlangan talaba faqat bitta mashg‘ulot bilan shug‘ullanadi}.

Javob: $P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}4$; $P(C) = 0{,}6$.

11. Ro‘yxatdagi 100 ta talabadan 50 tasi nemis tili, 40 tasi fransuz tili va 35 tasi ingliz tilini biladilar. Ingliz va fransuz tilini 20 ta talaba, ingliz va nemis tilini – 8 ta, hamda fransuz va nemis tilini – 10 ta talaba biladi. Hamma uch tilni 5 ta talaba biladi. Ro‘yxatdan tavakkaliga bitta talaba olingan. Quyidagi hodisalarni qaraymiz: D={tanlangan talaba nemis tilini biladi}, E={tanlangan talaba ingliz tilini biladi}, F={tanlangan talaba fransuz tilini biladi}. 1) Barcha bog‘liqsiz hodisalar juftliklarini toping. 2) D, E va F hodisalar o‘zaro bog‘liqsizmi?

Javob: 1) E va F, 2) yo‘q.

12. 4 ta bir xil idish bor. Uchta idishning har birida 2 ta oq va 1 ta qora shar, to‘rtinchisida esa 1 ta qora va 1 ta oq shar bor. Tavakkaliga olingan idishdan tasodifan shar olinadi. Bu shar oq bo‘lish ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{5}{8}$.

13. 4 ta bir hil idish bor. Uchta idishning har birida 2 ta oq va 1 ta qora shar, to‘rtinchisida esa 2 ta qora va 2 ta oq shar bor.

Tavakkaliga olingan idishdan tasodifan shar olindi. Agar bu shar qora bo'lsa, to'rtinchi idishdan olingan bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{1}{3}$.

14. Ikkita mergan o'q uzishmoqda. 10 marta o'q uzishda birinchi mergan 5 marta nishonga tekkizadi, ikkinchi mergan esa 8 ta marta tekkiza oladi. Navbat aniqlash uchun ular tanga tashlaydi. Kuzatuvchi esa otish qoidasini bilib, lekin kim o'q uzishini bilmaydi. U o'q nishonga tekkanligini ko'rdi. Bu o'qni birinchi mergan otgan bo'lish ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{5}{13}$.

15. Ikki mergan bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda nishonga qarab bir martadan o'q otishdi. Nishonga tekkizish ehtimolligi birinchisi uchun 0,8; ikkinchisi uchun esa 0,4 ga teng. O'q uzishlardan so'ng nishonga bitta o'q tekkani aniqlangan bo'lsa, uni birinchi mergan tekkizganligining ehtimolligini toping.

Javob: $\frac{2}{3}$.

I bob bo'yicha test topshiriqlari

1. A, B, C va D hodisalar to'la guruh tashkil qiladi. Quyidagi $P(A)=0,2$, $P(B)=0,3$, $P(D)=0,4$ ehtimolliklar ma'lum bo'lsa, C hodisa ehtimolligini toping.

A) $P(C)=0,2$ C) $P(C)=0,1$
B) $P(C)=0,5$ D) $P(C)=0,4$.

2. Ikkita o'yin kubigi tashlanadi. Kubiklarning yoqlarida tushgan ochkolar yig'indisi 6 ga, ko'paytmasi 5 ga teng bo'lishi ehtimolligini toping.

A) 1/36 B) 2/5 C) 5/6 D) 1/18.

3. Tanga ikki marta tashlanadi. Ikki marta «raqam»li tomon tushish ehtimolligini toping.

A) 3/4 B) 1/4 C) 2/4 D) 1.

4. Tomoni 2 ga teng kvadratga aylana ichki chizilgan. Kvadratga tavakkaliga tashlangan nuqtaning aylanaga tushish ehtimolligini toping.

A) $\pi/4$ B) $\pi/2$ C) $\pi/3$ D) $\pi/6$.

5. Guruhda 12 ta talaba bo'lib, ulardan 8 tasi a'lochi. Ro'yxat bo'yicha tavakkaliga 9 ta talaba ajratilgan. Ajratilganlar orasida 5 ta a'lochi talaba bo'lish ehtimolligini toping.

A) 14/55 B) 5/55 C) 5/12 D) 5/9.

6. Qopda 45 ta qora va 5 ta oq shar bor. Tavakkaliga bitta shar olinadi. Olingan shar oq bo'lish ehtimolligini toping.

A) 0,5 B) 0,3 C) 0,1 D) 0,2.

7. Tanga va o'yin kubigi tashlandi. «Raqamli tomon tushdi» va «5 ochko chiqdi» hodisalarining birgalikda ro'y berish ehtimolligini toping.

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{13}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{4}$.

8. 21 ta standart, 10 ta nostandart detal solingan yashikni tashish vaqtida bitta detal yo'qolgan, biroq qanday detal yo'qolgani ma'lum emas. Yashikdan (tashishdan keyin) tavakkaliga olingan detal standart detal bo'lib chiqdi: nostandart detal yo'qolgan bo'lish ehtimolligini toping.

A) 1/3 B) 2/3 C) 1/6 D) 1/5.

9. Sportchilar guruhida 20 ta chang'ichi, 6 ta velosipedchi va 4 ta yuguruvchi bor. Saralash normasini bajarish ehtimolligi chang'ichi uchun 0,9, velosipedchi uchun 0,8, yuguruvchi uchun 0,75. Tavakkaliga ajratilgan sportchining normani bajara olish ehtimolligini toping.

A) 0,86 B) 0,84 C) 0,83 D) 0,9.

10. Yashikda 1,2,3, ... 10 raqamlar bilan nomerlangan 10 ta bir xil detal bor. 6 ta detal tasodifiy ravishda olingan. Yashikdan olingan shu detallar orasida 1 nomerli detalning bo'lish ehtimolligini toping.

A) 0,6 B) 0,5 C) 0,1 D) 0,4.

11. 10 ta elementdan to'rttadan tuzilgan gruppalashlar sonini toping.

A) 212 B) 210 C) 100 D) 102.

12. Tijorat banki boshqarmasi bir xil lavozimlarga 6 ta nomzoddan 2 tasini tanlamoqda. Har bir nomzod bir xil imkoniyatga ega. 6 ta nomzoddan 2 kishidan iborat nechta guruh tuzish mumkin?

A) 30 B) 12 C) 15 D) 10.

13. Nishonga otishda tekkazishlar nisbiy chastotasi 0,6 bo'lgan. Agar mergan 12 marta nishonga tekkiza olmagan bo'lsa, jami bo'lib necha marta o'q otilgan?

A) 1/4 B) 1/2 C) 1/18 D) 1/36.

14. Agar $P(B)=0,73$ bo'lsa, B hodisaga qarama-qarshi hodisaning ehtimolligini toping.

A) $P(B) = 0,3$ C) $P(B) = 0,37$
B) $P(B) = 0,27$ D) $P(B) = 1$.

15. Tavakkaliga 30 dan katta bo'lmagan natural son tanlanganda, uning 6 ga karrali bo'lish ehtimolligini toping.

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,6 D) 0,3.

16. Abonent telefon nomerni terayotib, nomerning oxirgi uch raqamini eslay olmadi va bu raqamlar turli ekanligini bilgan holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilgan bo'lish ehtimolligini toping.

A) 1/720 B) 1/10 C) 1/9 D) 1/120.

17. Aylanaga tavakkaliga ichki chizilgan uchburchak o'tkir burchakli bo'lishi ehtimolligini toping.

A) 1/3 B) 1/4 C) 1/2 D) 0.

18. Sharga kub ichki chizilgan. Nuqta tavakkaliga sharga tashlanadi. Nuqtaning kubga tushishi ehtimolligini toping.

A) 0,368 B) 0,5 C) 0,7 D) 0.

19. Qopda a ta oq va c ta qizil shar bo'lish ehtimolligini toping.

A) $\frac{c}{a}$ B) $\frac{c}{a-c}$ C) $\frac{c}{a+c}$ D) $\frac{a}{a+c}$.

20. Qutida 5 ta bir xil buyum bo'lib, ularning 3 tasi bo'yalgan. Tavakkaliga 2 ta buyum olingan. Ikkita buyum orasida hech bo'lmaganda bitta bo'yalgan buyum bo'lish ehtimolligini toping.

A) 0,3 B) 0,4 C) 0,2 D) 0,9.

21. Uzunligi 20 sm bo'lgan L kesmaga uzunligi 10 sm bo'lgan l kesma joylashtirilgan. Katta kesmaga tavakkaliga qo'yilgan nuqtaning kichik kesmaga ham tushish ehtimolligini toping.

A) 1/2 B) 1/20 C) 1/10 D) 0,25.

22. Radiusi 10 bo'lgan doiraga radiusi 5 bo'lgan kichik doira joylashtiriladi. Katta doiraga tashlangan nuqtaning kichik doiraga ham tushish ehtimolligini toping.

A) 0,8 B) 0,1 C) 0,21 D) 0,25.

23. Ikkita to'pdan bir yo'la o'q uzishda nishonga bitta o'q tegish ehtimolligi 0,38 ga teng. Agar ikkinchi to'pdan bitta otishda o'qning nishonga tegish ehtimolligi 0,8 ga teng bo'lsa, bu ehtimollikni birinchi to'p uchun toping.

A) 0,3 B) 0,7 C) 0,21 D) 0,9.

24. Tasodifiy ravishda 2 xonali son tanlanadi, bu sonning raqamlari bir xil bo'lish ehtimolligini toping.

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3 D) 0,5.

25. Agar barcha mahsulotning 4% i sifatsiz, sifatli mahsulotning 75% i birinchi nav talabiga javob berishi ma'lum bo'lsa, tasodifan olingan mahsulotning birinchi navli bo'lish ehtimolligini toping.

A) 0,74 B) 0,72 C) 0,75 D) 0,9.

26. Tomoni *a* ga teng bo'lgan kvadratga aylana ichki chizilgan. Tasodifiy ravishda kvadratning ichiga tashlangan nuqtaning aylana ichiga tushish ehtimolligini toping.

A) 1/45 B) $\pi/4$ C) $\pi/2$ D) $\pi/8$.

27. Biror fizik kattalikni bir marta o'lchashda berilgan aniqlikdan ortiq xatoga yo'l qo'yish ehtimolligi 0,3 ga teng. Uchta bog'liqsiz o'lchash o'tkazilgan. Bulardan faqat bittasida yo'l qo'yilgan xato berilgan aniqlikdan ortiq bo'lish ehtimolligini toping.

A) 0,559 B) 1/2 C) 0,009 D) 0,441.

28. Basketbolchining to'pni to'rga tushirish ehtimolligi 0,6 ga teng. U to'pni 4 marta tashlagan. To'pning to'rga rosa 2 marta tushishi ehtimolligini toping.

A) 0,36 B) 0,64 C) 0,3456 D) 0,6544.

29. Ikki xil detallar to'plami bor. Birinchi to'plamdagi detallarning standart bo'lish ehtimolligi 0,9 ga, ikkinchisiniki esa 0,7 ga teng. Tavakkaliga tanlangan to'plamdan tasodifiy ravishda olingan detalning standart bo'lish ehtimolligini toping.

A) 0,8 B) 0,85 C) 0,9 D) 0,75.

30. Stol ustida 1-zavodda ishlab chiqarilgan 18 ta, 2-zavodda ishlab chiqarilgan 20 ta va 3-zavodda ishlab chiqarilgan 12 ta detal bor. 1-zavodda tayyorlangan detalning sifatli bo'lish ehtimolligi 0,6 ga, 2- va 3-zavodlar uchun bu ehtimolliklar mos ravishda 0,8 va 0,9 ga teng. Tasodifiy ravishda olingan detalning sifatli bo'lish ehtimolliginini toping.

A) 0,752 B) 0,78 C) 0,562 D) 0,64.

II bob. TASODIFIY MIQDORLAR VA TAQSIMOT FUNKSIYALARI

II bobni o‘rganish natijasida talaba:

– *tasodifiy miqdorlar;*

– *tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari;*

– *tasodifiy miqdorlarning zichlik funksiyalari;*

– *ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar haqida*

tasavvurga ega bo‘lishi;

– *tasodifiy miqdorlarni;*

– *taqsimot funksiyalarini;*

– *zichlik funksiyalarni;*

– *ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlarni*

bilishi va amalda qo‘llay olishi;

– *diskret tasodifiy miqdorlarga doir misol va masalalar yechishni;*

– *uzluksiz tasodifiy miqdorlarga doir misol va masalalar yechishni;*

– *taqsimot funksiyalariga doir misollar yechishni;*

– *zichlik funksiyalariga doir misollar yechishni*

uddalashi lozim.

2.1-§. Tasodifiy miqdorlar. Ta’rif va misollar

$(\Omega,\mathfrak{F},P)$ ixtiyoriy ehtimollik fazosi bo‘lsin.

1-ta’rif. Tasodifiy miqdor deb, elementar hodisalar fazosi Ω ni haqiqiy sonlar to‘plami $\mathbb{R}$ ga akslantiruvchi $\xi=\xi(\omega)$ o‘lchovli funksiyaga aytiladi, ya’ni shu funksiya uchun ixtiyoriy B Borel to‘plamining $\xi^{-1}(B)=\{\omega:\xi(\omega)\in B\}$ proobrazi $\mathfrak{F}$ σ-algebraning elementi bo‘ladi.

ξ tasodifiy miqdor $(\Omega,\mathfrak{F})$ ni $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ ga o‘lchovli akslantiradi deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\xi:(\Omega,\mathfrak{F})\to(\mathbb{R},\mathfrak{B}).$$

Bu yerda $\mathfrak{B}$ orqali to'g'ri chiziqdagi Borel to'plamlari σ-algebrasi belgilangan.

Tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz.

1) Tanga tashlanganda Ω elementar hodisalar fazosi ikkita elementdan iborat: ω_1={gerb} va ω_2={raqam}. $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdorni quyidagicha aniqlash mumkin: $\xi(\omega_1) = 1$, agar ω_1 elementar hodisa ro'y bersa va $\xi(\omega_2) = 0$, agar ω_2 elementar hodisa ro'y bersa. Haqiqatan, $\xi(\omega)$ o'lchovli funksiya bo'ladi. $\mathfrak{F}$ σ-algebrasi 4 ta elementdan iborat bo'ladi, ya'ni $\mathfrak{F} = \{\Omega, \varnothing, \omega_1, \omega_2\}$ va

agar $0,1 \notin B$ bo'lsa, $\xi^{-1}(B) = \varnothing$ bo'ladi;

agar $0 \notin B$ va $1 \in B$ bo'lsa, $\xi^{-1}(B) = \omega_1$ bo'ladi;

agar $0 \in B$ va $1 \notin B$ bo'lsa, $\xi^{-1}(B) = \omega_2$ bo'ladi;

agar $0,1 \in B$ bo'lsa, $\xi^{-1}(B) = \Omega$ bo'ladi.

Demak, to'rt holda ham $\xi^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$.

2) O'yin kubigi bir marta tashlanganda tushadigan ochkolar soni tasodifiy miqdor bo'ladi. Bu miqdor 1, 2, 3, 4, 5, 6 qiymatlarni qabul qiladi.

3) Tajriba tanganing birinchi marta gerb tomoni bilan tushguncha tashlashdan iborat bo'lsin. Tanganing tashlashlar soni (1, 2, 3, ...) barcha natural sonlar to'plamidan qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdordir.

4) $\xi = \xi(\omega)$ – koordinatalar boshidan $[0,1]\times[0,1] = \{(x,y): 0 \le x, y \le 1\}$ kvadrat ichiga tashlangan nuqtagacha bo'lgan t masofa ham tasodifiy miqdor bo'ladi. Bu holda $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ va $\{(x,y): x^2 + y^2 < t\}$ ko'rinishidagi to'plamlar o'lchovli bo'ladi.

5) Berilgan guruhdagi darsga kelgan talabalar soni noldan to guruhdagi umumiy talabalar soniga teng bo'lgunga qadar butun qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdordir.

6) n ta bog'liq bo'lmagan sinovda A hodisaning yuz berishlari soni tasodifiy miqdor bo'ladi. Bu tasodifiy miqdor n ta sinov natijasida $0,1,2,\ldots,n$ qiymatlardan birini qabul qilishi mumkin.

7) Elektron lampaning ishlash vaqti ham tasodifiy miqdordir.

Yuqorida keltirilgan misollarda tasodifiy miqdorlar chekli, sanoqli yoki cheksiz qiymatlarni qabul qilishi mumkin.

Agar tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlarini chekli yoki sanoqli ketma-ketlik ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, bunday tasodifiy miqdor *diskret tasodifiy miqdor* deyiladi (1–3-, 5-, 6-misollar).

Biror chekli yoki cheksiz sonli oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifly miqdor *uzluksiz tasodifiy miqdor* deyiladi (4- va 7-misollar).

Kelgusida biz bu ta'riflarni biroz oydinlashtiramiz.

2.2-§. Tasodifiy miqdorning taqsimoti va taqsimot funksiyasi. Taqsimot funksiyasining xossalari

Tasodifiy miqdorning ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy B Borel to'plami uchun $(B\in\mathfrak{B})$

$$\xi^{-1}(B)=\{\omega:\xi(\omega)\in B\}\in\mathfrak{F}.$$

Demak, ξ tasodifiy miqdor $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ o'lchovli fazoda $P_\xi(B)=P(\xi\in B)$ ehtimollikni aniqlaydi va ($(\mathbb{R},\mathfrak{B},P_\xi)$ ehtimollik fazosini hosil qiladi.

1-ta'rif. $\{P_\xi(B),B\in\mathfrak{B}\}$ ehtimolliklar ξ *tasodifiy miqdorning taqsimoti* deb ataladi.

Agar B to'plam sifatida $(-\infty,x)$ oraliqni olsak, bu holda biz haqiqiy o'qda aniqlangan $F_\xi(x)=P_\xi\{(-\infty,x)\}=P(\omega:\xi(\omega)<x)=P(\xi<x)$ funksiyaga ega bo'lamiz.

2-ta'rif. $F_\xi(x)$ funksiya ξ *tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi* deyiladi.

Kelgusida, agar tushunmovchiliklar keltirib chiqarmasa, $F_\xi(x)$ ni $F(x)$ kabi yozamiz.

Quyida ko'rish mumkinki, tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi uning taqsimotini to'laligicha aniqlaydi va shu sababli taqsimot o'rniga ko'p hollarda taqsimot funksiyasi ishlatiladi.

1-misol. ξ tasodifiy miqdor 1 va 0 qiymatlarni mos ravishda p va q ehtimolliklar bilan qabul qilsin ($p+q=1$), ya'ni $p=P(\xi=1)$ va $q=P(\xi=0)$. Bu holda uning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x \le 0, \\ q, & \text{agar} \quad 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{agar} \quad x > 1 \end{cases}$$

bo‘ladi.

2-misol. $[a,b]$ kesmaga ($[a,b] \subset \mathbb{R}$) tasodifiy ravishda nuqta tashlanmoqda, ya’ni $[a,b]$ ga tegishli qaysidir to‘plamga nuqtaning tushish ehtimolligi bu to‘plamning Lebeg o‘lchoviga proporsional bo‘lsin. Bu misol uchun $\Omega=[a,b]$ va $\mathfrak{F}$ esa $[a,b]$ dagi Borel to‘plamostilaridan iborat σ-algebradir. ξ tasodifiy miqdorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\xi(\omega) = \omega, \quad \omega \in [a,b],$$

ya’ni ξ tasodifiy miqdor tashlangan nuqtaning $[a,b]$ dagi qiymatiga teng bo‘lib, o‘lchovli funksiya bo‘ladi. Agar $x<a$ bo‘lsa, $F(x)=P(\xi<x)=0$ bo‘ladi. Endi $x\in[a,b]$ bo‘lsin. U holda $(\xi<x)$ hodisa ro‘y berganda nuqta $[a,x)$ intervalga tushadi. Bu intervalga tushish ehtimolligi uning uzunligiga proporsional, ya’ni

$$F(x) = P(\xi < x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Agar $x > b$ bo‘lsa, $F(x) = 1$ bo‘ladi.

Demak, $F(x)$ taqsimot funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{agar} \quad a < x \le b, \\ 1, & \text{agar} \quad x > b. \end{cases}$$

Yuqoridagi taqsimot funksiyasi bilan aniqlangan ξ tasodifiy miqdor $[a,b]$ *oraliqda tekis taqsimlangan* deb ataladi.

Endi taqsimot funksiyasi xossalarini keltiramiz. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo‘lsin. U holda $F(x)$ quyidagi xossalarga ega:

F1. agar $x_1 \le x_2$ bo‘lsa, u holda $F(x_1) \le F(x_2)$ (*monotonlik xossasi*);

F2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ (*chegaralanganlik xossasi*);

F3. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$ (*chapdan uzluksizlik xossasi*).

Isboti. $x_1 \le x_2$ uchun $\{\xi < x_1\} \subseteq \{\xi < x_2\}$ bo'lganligi sababli F1 xossasi ehtimollikning 3) xossasidan (1.3-§ ga qarang) bevosita kelib chiqadi.

F2 xossani isbotlash uchun quyidagi $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonli ketma-ketliklarni kiritamiz: $\{x_n\}$ kamayuvchi ketma-ketlik bo'lib, $x_n \to -\infty$ va $\{y_n\}$ o'suvchi ketma-ketlik bo'lib, $y_n \to +\infty$ bo'lsin. $A_n = \{\xi < x_n\}$, $B_n = \{\xi < y_n\}$ to'plamlarni kiritamiz. $x_n \downarrow -\infty$ ekanidan A_n to'plamlar ketma-ketligi monoton kamayadi va $\cap A_n = \varnothing$ bo'ladi. Ehtimollikning uzluksizlik aksiomasiga binoan $n \to \infty$ da $P(A_n) \to 0$. U holda $\lim\limits_{x \to \infty} F(x_n) = 0$. Bundan va $F(x)$ funksiya monotonligidan $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. $\{y_n\}$ ketma-ketlik $n \to \infty$ da $+\infty$ ga monoton yaqinlashganligi uchun B_n to'plamlar ketma-ketligi ham o'suvchi bo'lib, $\cup B_n = \Omega$ bo'ladi, binobarin, ehtimollikning xossasiga asosan $n \to \infty$ da $P(B_n) \to 1$ bo'ladi. Bundan, xuddi avvalgidek, $\lim\limits_{n \to \infty} F(y_n) = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ munosabatlar kelib chiqadi.

F3 xossani isbotlash uchun $A = \{\xi < x_0\}$, $A_n = \{\xi < x_n\}$ hodisalarni kiritamiz. $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, $\cup A_n = A$ bo'ladi. Binobarin, $P(A_n) \to P(A)$. Bundan $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$ tenglik kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, agar taqsimot funksiyasini $F(x) = P(\xi \le x)$ deb olsak, u holda u o'ngdan uzluksizlik xossasiga ega bo'lar edi.

Ammo, yuqoridagidek tanlangan $F(x)$ o'ngdan uzluksiz bo'la olmaydi, chunki uzluksizlik aksiomasiga ko'ra

$$F(x+0) - F(x) = \lim_{n \to \infty}\left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right) = \lim_{n \to \infty} P\left(x \le \xi < x + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\xi \in \left[x, x + \frac{1}{n}\right]\right\}\right) = P(\xi = x).$$

Bu esa, o'z navbatida, $F(x)$ ning uzluksiz bo'lishi uchun ixtiyoriy x lar uchun $P(\xi=x)=0$ shart bajarilishi zarur va yetarli ekanini ko'rsatadi.

Keltirilgan munosabatlardan quyidagi

$$P(x \le \xi \le y) = P_\xi([x,y]) = F(y+0) - F(x)$$

tenglik ham kelib chiqadi.

Quyidagi teorema berilgan taqsimot funksiyaga mos tasodifiy miqdor mavjudligini ko'rsatadi. Biz uni isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Agar $F(x)$ funksiya F1, F2 va F3 xossalarga ega bo'lsa, u holda shunday $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ehtimollik fazosi va unda aniqlangan tasodifiy miqdor mavjud bo'lib, $F_\xi(x) = F(x)$ bo'ladi.

Endi ko'p uchraydigan taqsimotlarga misollar keltiramiz.

3-misol. ξ tasodifiy miqdor «birlik» (xos) taqsimotga ega deyiladi, agar biror a haqiqiy son uchun $P(\xi = a) = 1$ bo'lsa. Bu taqsimot uchun taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \le a, \\ 1, & \text{agar } x > a. \end{cases}$$

4-misol. Agar ξ tasodifiy miqdor $0,1,2,...,n$ qiymatlarni $P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $0 < p < 1$, $0 \le k \le n$ ehtimolliklar bilan qabul qilsa, bu tasodifiy miqdor binomial qonun bo'yicha taqsimlangan deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \le 0, \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, & \text{agar } 0 < x \le n, \\ 1, & \text{agar } x > n \end{cases}$$

bo'ladi. Ushbu taqsimot bilan boq'liq ba'zi masalalarga III bobda to'liqroq to'xtalib o'tamiz.

5-misol. Agar ξ tasodifiy miqdor $0,1,2,...$ qiymatlarni

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0,1,2,...$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsa, uni Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x \le 0, \\ \sum\limits_{k<x} \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & \text{agar } x > 0. \end{cases}$$

6-misol. Agar ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Phi_{a,\sigma^2}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du$$

ko'rinishda bo'lsa, bunday tasodifiy miqdor (a,σ^2) parametrlar bilan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Bu yerda $\sigma > 0$, $-\infty < a < \infty$ — o'zgarmas sonlar. Agar a=0, σ=1 bo'lsa, bunday taqsimlangan tasodifiy miqdor standart normal taqsimotga ega deyiladi va uning taqsimot funksiyasi

$$\Phi(x)=\Phi_{0,1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

bo'ladi. Ushbu $\Phi_{a,\sigma^2}(x)=\Phi_{0,1}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ tenglikni tekshirib ko'rish qiyin emas. Bundan a va σ lar mos ravishda taqsimotning «siljishi» va «masshtabi» parametrlari ma'nolariga ega bo'lishligi kelib chiqadi.

7-misol. Agar ξ tasodifiy miqdor 1,2,... qiymatlarni

$$P(\xi=k)=(1-p)\,p^{k-1},\ p\in(0,1),\ k=1,2,...$$

ehtimolligiklar bilan qabul qilsa, uni geometrik qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x \le 1, \\ \sum\limits_{k<x} (1-p)\,p^{k-1}, & \text{agar } x > 1. \end{cases}$$

2.3-§. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

Ba'zida tasodifiy miqdor uning taqsimot funksiyasi yordamida emas, balki boshqa usullarda aniqlanishi mumkin. Aniq qoidalar orqali tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasini topish imkoniyatini beruvchi har qanday xarakteristika tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb ataladi. Biror ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni $x_1 \leq \xi < x_2$ tengsizlik ehtimolligini aniqlovchi interval funksiyani olishimiz mumkin. Haqiqatan ham, agar $P\{x_1,x_2\}$ ma'lum bo'lsa, u holda taqsimot funksiyasini

$$F(x) = P\{-\infty, x\}$$

formula orqali topishimiz mumkin. O'z navbatida, $F(x)$ yordamida ixtiyoriy x_1 va x_2 lar uchun $P\{x_1,x_2\}$ funksiyani topishimiz mumkin:

$$P\{x_1, x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Tasodifiy miqdorlar orasidan chekli yoki sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qiladiganlarini ajratib olamiz. Bunday tasodifiy miqdorlar diskret tasodifiy miqdorlar deyiladi. Musbat ehtimolliklar bilan $x_1,x_2,x_3,...$ qiymatlarni qabul qiluvchi ξ tasodifiy miqdorni to'laligicha xarakterlash uchun $p_k = P\{\xi = x_k\}$ ehtimolliklarni bilish yetarli, ya'ni p_k ehtimolliklarni barchasi yordamida $F(x)$ taqsimot funksiyasini quyidagi tenglik yordamida topish mumkin:

$$F(x) = \sum p_k ,$$

bu yerda yig'indi $x_k < x$ bo'lgan indekslar uchun hisoblanadi.

Ixtiyoriy diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi uzilishga ega va ξ ning qabul qilishi mumkin bo'lgan x qiymatlarida sakrash orqali o'sib boradi. $F(x)$ taqsimot funksiyaning x nuqtadagi sakrash miqdori $F(x+0)-F(x)$ ayirmaga teng.

Agar ξ tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo'lgan ikkita qiymati interval bilan ajratilgan va bu intervalda ξ tasodifiy miqdorning boshqa qiymati bo'lmasa, u holda bu intervalda $F(x)$ taqsimot funksiya o'zgarmas bo'ladi. Chekli sondagi qiymatlarni qabul qiluvchi ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ ning grafigi zinapoya ko'rinishidagi qamaymaydigan to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

Diskret taqsimot qonunini jadval ko'rinishida berish qulay bo'-ladi, ya'ni

Qiymatlar	$x_1\ x_2\ x_3 \ldots$
Ehtimolliklar	$p_1\ p_2\ p_3 \ldots$

Bu yerda yuqorida aytib o'tilganidek,

$$p_k = P\{\xi = x_k\} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Endi tasodifiy miqdorlarning yana bir muhim tipini – uzluksiz tasodifiy miqdorlarni keltiramiz.

Bu tipga taqsimoti $P_\xi(B)$ ni ixtiyoriy Borel to'plami B uchun quyida keltirilgan ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lgan ξ tasodifiy miqdorlar kiradi:

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B) = \int_B f(x)dx,$$

bu yerda $f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

$P_\xi(B)$ *absolut uzluksiz taqsimot* deyiladi.

O'lchovlarning davom ettirishning yagonaligi teoremasidan, yuqorida keltirilgan absolut uzluksizlik ta'rifi barcha $x \in \mathbb{R}$ lar uchun

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

ko'rinishiga ekvivalent ekanligini aniqlash qiyin emas. Bunday xossaga ega bo'lgan taqsimot funksiyasi absolut uzluksiz deb ataladi.

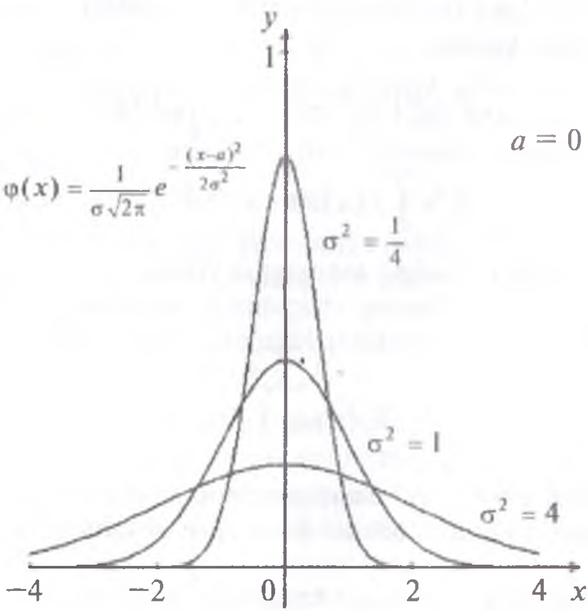
$f(x)$ funksiya yuqoridagi tengliklardan aniqlanadi va *taqsimot zichligi* (*zichlik funksiyasi*) deb ataladi. Bu funksiya $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

uchun tenglik o'rinli. Masalan, (a,σ^2) parametrli normal qonun uchun zichlik funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

$\varphi(x)$ zichlik funksiyasi $x=a$ nuqtada eng katta qiymatiga erishadi va uning grafigi $x=a$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylashgan. Bu funksiya uchun Ox o'q gorizontal asimptota, $x=\alpha\pm\sigma$ nuqtalar bu funksiyaning bukilish nuqtalari bo'ladi. Zichlik funksiyasining grafigiga σ parametrning ta'sirini ko'rsatish maqsadida 11-rasmda $\varphi(x)$ ning $a=0$ va 1) $\sigma^2=\frac{1}{4}$, 2) $\sigma^2=1$, 3) $\sigma^2=4$ bo'lgan hollardagi grafiklarini ko'rsatamiz.

Agar $a\neq 0$ bo'lsa ham zichlik funksiyasi grafigi xuddi shunday ko'rinishga ega, faqat a ning ishorasiga qarab o'ngga $(a>0)$ yoki chapga $(a<0)$ surilgan bo'ladi.



11-rasm.

Zichlik funksiyasiga ega bo'lmagan uzluksiz tasodifiy miqdorlar ham mavjud.

Bunday tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalariga *singular taqsimot funksiyalari* deyiladi. Singular taqsimot funksiya uzluksiz, barcha o'sish nuqtalaridan tashkil topgan to'plamning Lebeg o'lchovi 0 ga teng, ya'ni deyarli barcha nuqtalarda $F'(x)=0$ bo'lib, $F(+\infty)-F(-\infty)=1$ tenglik o'rinli.

Taqsimot funksiyalarining mumkin bo'lgan tiplari haqida boshqa to'xtalmay, haqiqatda taqsimot funksiyalar yuqorida keltirilgan uchta tip bilan chegaralanishi haqidagi mulohaza bilan kifoyalanamiz. Aniqroq aytganda, ixtiyoriy $F(x)$ taqsimot funksiyasini

$$F(x)=c_1F_1(x)+c_2F_2(x)+c_3F_3(x)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bu yerda — $c_i \geq 0$, $i=1,2,3$, $c_1+c_2+c_3=1$, $F_1(x)$ — diskret taqsimot funksiya, $F_2(x)$ — absolut uzluksiz taqsimot funksiya, $F_3(x)$ esa singular taqsimot funksiya.

2.4-§. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar

$(\Omega,\mathfrak{F},P)$ ehtimollik fazosida $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ tasodifiy miqdorlarni qaraymiz. Har bir $\omega\in\Omega$ ga bu tasodifiy miqdorlar n-o'lchovli vektor $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\ldots,\xi_n(\omega))$ ni mos qo'yadi. $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ tasodifiy miqdorlar orqali berilgan $\Omega\to\mathbb{R}^n$ akslantirish *tasodifiy vektor* yoki *ko'p o'lchovli tasodifiy miqdor* deyiladi.

$\Omega\to\mathbb{R}^n$ akslantirishni $(\Omega,\mathfrak{F})$ ni $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}^n)$ fazoga o'lchovli akslantirish sifatida qarash mumkin, bu yerda $\mathfrak{B}^n$ — $\mathbb{R}^n$ dagi Borel to'plamlari σ-algebrasi. Shuning uchun ixtiyoriy Borel to'plami B uchun ξ *vektorning taqsimoti* deb ataluvchi $P_\xi(B)=P(\xi\in B)$ funksiya aniqlangan.

$F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)=P(\xi_1<x_1,\ldots,\xi_n<x_n)$ funksiya $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ tasodifiy *miqdorning birgalikdagi taqsimot funksiyasi* deb ataladi.

Tasodifiy vektor taqsimot funksiyasining ba'zi xossalarini keltiramiz:

$FF1.\ \lim\limits_{x_n\to\infty} F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)=F_{\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1}).$

$FF2.\ \lim\limits_{x_n \to -\infty} F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n) = 0.$

Limitlar oxirgi argument bo'yicha olinganligi katta ahamiyatga ega emas, chunki tasodifiy miqdorlarni har doim qayta nomerlash mumkin.

$F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n)$ taqsimot funksiyasi $P_\xi(B)$ taqsimotni bir qiymatli aniqlashini ko'rish qiyin emas.

Xuddi bir o'lchovli holga o'xshab, agar tasodifiy vektor komponentalari ko'pi bilan sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qilsa, u holda tasodifiy vektorlarning *taqsimoti diskret tipga tegishli* deymiz.

Agarda ixtiyoriy $B \subset \mathbb{R}^n$ Borel to'plami uchun

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B) = \int\limits_B f(x)dx$$

bo'lsa, bu yerda $f(x) \geq 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$, u holda tasodifiy vektorlarning *taqsimoti absolut uzluksiz tipga tegishli* deymiz.

Bu ta'rifni unga ekvivalent bo'lgan

$$F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \dots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t_1,\dots,t_n)\,dt_1 \dots dt_n$$

ko'rinishga almashtirish mumkin.

Yuqoridagi $f(x)$ funksiya ξ *taqsimotning zichligi* (*zichlik funksiyasi*) yoki $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ *birgalikdagi taqsimotining zichligi* deyiladi. Uning uchun deyarli hamma yerda

$$\frac{\partial^n F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = f(x_1,\dots,x_n)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Ehtimolliklar nazariyasining muhim tushunchasi bo'lgan hodisalarning bog'liqsizligi o'z ma'nosini tasodifiy miqdorlar uchun ham saqlab qoladi. Hodisalar bog'liqsizligiga mos ravishda quyidagini aytish mumkin: agarda to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy Borel $B_1,\dots,B_n$ to'plamlari uchun

$$P(\xi_1 \in B, \ldots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot P(\xi_2 \in B_2) \ldots P(\xi_n \in B_n)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz deyiladi.

Buni taqsimot funksiyalari tilida quyidagicha aytish mumkin:

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz bo‘lishi uhun ixtiyoriy x_i larda

$$F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \ldots F_{\xi_n}(x_n)$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli. Bu yerda $F_{\xi_i}(x_i) - \xi_i$ – tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasidir.

Agar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar mos ravishda $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ taqsimot zichliklariga ega bo‘lsalar, u holda n o‘lchovli $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ tasodifiy miqdor $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$ ko‘paytma bilan ifodalanadigan taqsimot zichligiga ega bo‘ladi.

Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlarning taqsimotlariga misollar keltiramiz.

1-misol. Polinomial taqsimot. Agar ξ m-o‘lchovli diskret tasodifiy vektor uchun $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$, $k_i \in Z$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ bo‘lib

$$p_k = P(\{\xi = k\}) = P(\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_m = k_m\}) =$$

$$= \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}, \qquad (1)$$

$p_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$ bo‘lsa, u holda ξ vektor $(n; p_1, p_2, \ldots, p_m) = (n; p)$ parametrli polinomial qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy vektor va $P(k; p_1, p_2, \ldots, p_m) = p_k$ ehtimolliklarga $(n; p_1, p_2, \ldots, p_m)$ parametrli *polinomial taqsimot* deyiladi. (1) tenglikning o‘ng tomoni $(p_1 + p_2 + \ldots + p_m)^n$ polinomning $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sonlarning darajalari bo‘yicha yoyilmasini umumiy holidan iborat bo‘lgani sababli, yuqoridagi taqsimotning polinomial taqsimot deb atalishi tabiiydir.

Agar $m=2,\ p_1=p,\ p_2=1-p$ bo‘lsa, (1) polinomial taqsimot (n,p)-parametrli binomial taqsimotga aylanadi.

2-misol (Ko‘p o‘lchovli normal taqsimot). $\bar{m}=(m_1, m_2, \dots, m_n)$ – n-o‘lchovli vektor va $R=\|r_{ij}\|$ birorta $n\times n$ o‘lchovli, musbat aniqlangan, simmetrik matritsa bo‘lsin. R musbat aniqlangan matritsa bo‘lgani uchun, uning teskari matritsasi $R^{-1}=A=\|a_{ij}\|$ mavjud.

Zichlik funksiyasi

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)=\varphi_{\xi_1\xi_2\dots\xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)=$$
$$=\frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)\right\}$$

ko‘rinishga ega bo‘lgan $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ – n-o‘lchovli tasodifiy vektor $(\bar{m};R)$ *parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy vektor* deyiladi. Bu yerda $|A|=\det A$ orqali matritsaning determinanti belgilangan.

Xususan 2-o‘lchovli va parametrlari $(\bar{m};R)$ bo‘lgan normal taqsimotni ko‘raylik. Buning uchun $m=(m_1,m_2)$ sonli vektor va

$$R=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix},\quad -1<r<1$$

simmetrik va musbat aniqlangan 2×2-o‘lchovli matritsani ko‘ramiz. R matritsaning determinanti

$$|R|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-r^2)$$

bo‘lgani uchun

$$A=R^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sigma_1^2(1-r^2)} & \dfrac{-r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)}\\[2ex] \dfrac{-r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} & \dfrac{1}{\sigma_2^2(1-r^2)}\end{pmatrix}$$

va A matritsaning determinanti

$$|A|=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-r^2)}$$

bo'ladi. Bu holda $\varphi_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2)$ zichlik funksiya

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

2.5-§. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari

Endi boshqa tasodifiy miqdorlarning funksiyalari bo'lgan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topish masalasini ko'raylik.

Faraz qilaylik, $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ va $g(x)$ Borel funksiyasi bo'lsin. U holda $\eta=g(\xi)$ tasodifiy miqdorni taqsimot funksiyasi quyidagiga teng:

$$F_{g(\xi)}(x) = P(g(\xi) < x) = P(\xi \in g^{-1}(-\infty, x)).$$

Agar $g(x)$ — kamaymaydigan funksiya bo'lib, uning uchun teskari $g^{-1}(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsa, u holda

$$F_{g(\xi)}(x) = P(\xi < g^{-1}(x)) = F_\xi(g^{-1}(x)).$$

Xususan, agar $F_\xi(x)$ uzluksiz bo'lsa, $\eta=F_\xi(\xi)$ tasodifiy miqdor $[0,1]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo'ladi. Aksincha, η tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor va F berilgan taqsimot funksiyasi bo'lsin. U holda $\xi=F^{-1}(\eta)$ tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot funksiyasiga ega bo'ladi.

Boshqa xususiy holda, ya'ni $g(x) = a + bx$, $b > 0$ holatda

$$F_{g(\xi)}(x) = F_\xi\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

bo'ladi.

Agar $g(x)=x^2$ bo'lsa, $x<0$ uchun $F_\eta(x)=0$, $x \geq 0$ uchun esa

$$F_{g(\xi)}(x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) =$$

$$= F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}) - P(\xi = -\sqrt{x}).$$

Endi $g(\xi)$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini topish masalasini qaraylik.

Yuqoridagilarga qo'shimcha ravishda g funksiya differensiallanuvchi va ξ tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funksiyasiga ega bo'lsin. U holda $g(\xi)$ ning quyidagi zichlik funksiyasi mavjud

$$f_{g(\xi)}(x) = f\left(g^{-1}(x)\right)\left(g^{-1}(x)\right)' = \frac{f\left(g^{-1}(x)\right)}{g'(x)}.$$

Misol uchun $g(x) = a + bx,\ b > 0$ bo'lganda

$$f_{a+b\xi}(x) = \frac{1}{b} f\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

Eslatma. Agar g o'smaydigan funksiya bo'lsa, u holda

$$f_{g(\xi)}(x) = -\frac{f\left(g^{-1}(x)\right)}{g'(x)}.$$

Endi bir nechta tasodifiy miqdor funksiyalarini qaraymiz.

Taqsimot funksiyasining ta'rifiga asosan $g(\xi_1, \xi_2)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F_{g(\xi_1,\xi_2)}(z) = P\left(g(\xi_1,\xi_2) < z\right) = P\left(\left\{\omega : g\left(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega)\right) < z\right\}\right).$$

Masalan, ξ_1 va ξ_2 bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar f_{ξ_1} va f_{ξ_2} zichlik funksiyalariga ega bo'lsa, u holda

$$F_\eta(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f_{\xi_1}(u)\,du\right] f_{\xi_2}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f_{\xi_1}(u-y)\,du\right] f_{\xi_2}(y)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(u-y) f_{\xi_2}(y)\,dy\right] du$$

Oxirgi tenglikni differensiallab,

$$f_\eta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(z-y) f_{\xi_2}(y)\,dy,$$

$$f_\eta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(z-x) f_{\xi_1}(x)\,dx \qquad (*)$$

tengliklarni hosil qilamiz.

1-misol. Agar ξ_1 va ξ_2 o'zaro bog'liq bo'lmagan va [0,1] da tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $\eta = \xi_1 + \xi_2$ uchun

$$f_\eta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(z-x)\, f_{\xi_2}(x)\, dx = \int_0^1 f_{\xi_2}(z-x)\, dx = \int_{z-1}^{z} f_{\xi_2}(y)\, dy$$

bo'ladi.

Aytaylik, $0 < z \leq 1$ bo'lsin, u holda

$$f_\eta(z) = \int_{z-1}^{0} f_{\xi_2}(y)\, dy + \int_0^z f_{\xi_2}(y)\, dy = z,$$

agar $1 < z \leq 2$ bo'lsa,

$$f_\eta(z) = \int_{z-1}^{1} f_{\xi_2}(y)\, dy = \int_{z-1}^{1} dy = 2 - z.$$

Shunday qilib,

$$f_\eta(z) = \begin{cases} 0, & \text{agar } z \notin [0,2]; \\ z, & \text{agar } z \in [0,1]; \\ 2-z, & \text{agar } z \in [1,2]. \end{cases}$$

2-misol. Endi ξ_1 tasodifiy miqdor (a_1, σ_1^2) parametrli, ξ_{12} tasodifiy miqdor (a_2, σ_2^2) parametrli normal qonun bilan taqsimlangan holni ko'raylik.

Agar

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

standart normal qonun zichlik funksiyasi bo'lsa,

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sigma_1}\varphi\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right), \quad f_{\xi_2}(x) = \frac{1}{\sigma_2}\varphi\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right),$$

bo'ladi va (*) formula yordamida

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\varphi\left(\frac{x-(a_1+a_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)$$

topiladi.

Demak, (a_1,σ_1^2) va (a_2,σ_2^2) parametrli normal qonun bilan taqsimlangan ikkita bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisi, $(a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ parametrli normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lar ekan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Diskret tasodifiy miqdor nima? Misollar keltiring.
2. Uzluksiz tasodifiy miqdor nima? Misollar keltiring.
3. Ehtimollikning taqsimot qonuni deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
4. Tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb nimaga aytiladi?
5. Taqsimot funksiyasining asosiy xossalarini aytib bering.
6. Taqsimot funksiyasini ham diskret, ham uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ta'riflash mumkinmi yoki faqat diskret yoki faqat uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ta'riflash mumkinmi?
7. Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi deb nimaga aytiladi? Bu funksiyaning ehtimoliy ma'nosi qanday?
8. Diskret tasodifiy miqdor uchun zichlik funksiyani ta'riflash mumkinmi?
9. Zichlik funksiyasining asosiy xossalarini aytib bering.
10. Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bilan taqsimot funksiyasi o'zaro qanday bog'langan?
11. Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor uzluksiz yoki diskret bo'la oladimi?
12. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar deb nimaga aytiladi?
13. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar deb nimaga aytiladi?

Misol va masalalar

1. Qutida bir xil o'lchamli 7 ta shar bo'lib, 4 tasi oq, qolganlari esa qora rangda. Sharlar bir-xil o'lchamli. Qutidan tavakkaliga 3 ta shar olinadi. ξ diskret tasodifiy miqdor – olingan oq sharlar soni bo'lsa, ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Javob:
$$\begin{array}{cccccc} \xi: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ P: & \frac{1}{35} & \frac{12}{35} & \frac{18}{35} & \frac{4}{35} \end{array}$$

2. ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

Javob:
$$\begin{array}{cccc} \xi: & 2 & 4 & 6 \\ P: & 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{array}$$

$\eta = 4\xi$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Javob:
$$\begin{array}{cccc} \xi: & 8 & 16 & 24 \\ P: & 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{array}$$

3. ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

Javob:
$$\begin{array}{cccc} \xi: & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} \\ P: & 0,2 & 0,7 & 0,1 \end{array}$$

$\eta = \sin\xi$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Javob:
$$\begin{array}{cccc} \xi: & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ P: & 0,2 & 0,7 & 0,1 \end{array}$$

4. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x \le 2, \\ 0,3, & \text{agar} \quad 2 < x \le 3, \\ 0,5, & \text{agar} \quad 3 < x \le 4, \\ 1\ , & \text{agar} \quad x > 4. \end{cases}$$

$\{1 \le \xi \le 3\}$ hodisaning ehtimolligini toping.

Javob: $P\{1 \le \xi \le 3\} = 0,5.$

5. ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi butun Ox o'qida

$$f(x)=\frac{2C}{e^{x}+e^{-x}}$$

tenglik bilan berilgan. O'zgarmas C parametrni toping.

Javob: $C=\frac{1}{\pi}$.

6. Bir soat ($0\le t\le 1$, t birligi soatlarda hisoblangan vaqt) ichida bekatga faqat bitta avtobus kelib to'xtaydi. Vaqtning $t=0$ momentida bekatga kelgan yo'lovchining avtobusni 10 minutdan ortiq kutmaslik ehtimolligi qanday?

Javob: $\frac{1}{6}$.

7. Avtobuslar 5 minut oraliq bilan qatnaydilar. Bekatda avtobus kutish vaqti ξ tekis taqsimlangan deb, $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping.

Javob: $F(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x\le 0,\\ 0{,}2x, & \text{agar } 0<x\le 5,\\ 1, & \text{agar } x>5.\end{cases}$

8. ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x\le 0,\\ bx, & \text{agar } 0<x\le 2,\\ 1, & \text{agar } x>2.\end{cases}$$

b ni aniqlang.

Javob: $b=0{,}5$.

9. Televizorning buzilmay ishlash ehtimolligi ushbu ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan: $f(x)=0{,}002e^{-0{,}002t}$ $(t>0)$.

Televizorning 1000 soat buzilmay ishlashi ehtimolligini toping.

Javob: $P(1000)=e^{-2}\approx 0{,}1359$.

10. 10 ta bir xil kartochkada 0, 1, ..., 9 raqamlari yozilgan. Bitta kartochka olinib, u kartochkalar to'plamiga qaytariladi. Keyin yana bitta kartochka olinadi. ξ tasodifiy miqdor – birinchi kartochkadagi raqam va η tasodifiy miqdor – ikkinchi kartochkadagi raqam bo'lib, $\zeta = \xi + \eta$ bo'lsin. ξ, η va ζ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini toping. $P(\zeta \leq 2)$ hodisa ehtimolligini toping.

Javob:

$P(\xi = i) = 0,1, \ i = 0,1,...,9;$

$P(\eta = i) = 0,1, \ i = 0,1,...,9;$

$P(\zeta = i) = 0,01, \ i = 0,18; \ P(\zeta = i) = 0,02, \ i = 1,17;$

$P(\zeta = i) = 0,03, \ i = 2,16; \ P(\zeta = i) = 0,04, \ i = 3,15;$

$P(\zeta = i) = 0,05, \ i = 4,14; \ P(\zeta = i) = 0,06, \ i = 5,13;$

$P(\zeta = i) = 0,07, \ i = 6,12; \ P(\zeta = i) = 0,08, \ i = 7,11;$

$P(\zeta = i) = 0,09, \ i = 8,10; \ P(\zeta = i) = 0,1, \ i = 9;$

$P(\zeta \leq 2) = 0,06.$

II bob bo'yicha test topshiriqlari

1. Qutida 10 ta shar bor. Ular orasida 8 ta oq shar, qolganlari qora shar. Tavakkaliga 2 ta shar olingan. Olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

A)

ξ:	0	1	2
P:	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

B)

ξ:	0	1	2
P:	9/16	6/16	1/16

C)

ξ:	0	1	2
P:	3/6	2/6	1/6

D)

ξ:	0	1	2
P:	1/2	1/2	1/2

2. ξ tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuniga ega:

ξ:	-2	1	4
P:	$0,5$	$0,35$	$0,15$

Uning taqsimot funksiyasini toping.

A) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x \le -2 \text{ bo‘lsa}, \\ 0,5, & \text{agar } -2 < x \le 1 \text{ bo‘lsa}, \\ 0,85, & \text{agar } 1 < x \le 4 \text{ bo‘lsa}, \\ 1, & \text{agar } x > 4 \text{ bo‘lsa} \end{cases}$

B) $F(x)=\begin{cases} 0; & x<1, \\ 0,3; & 1<x<4, \\ 0,4; & 4<x<8, \\ 1; & x \ge 8. \end{cases}$

C) $F(x)=\begin{cases} 0, & x=1, \\ 0,3, & x=4, \\ 0,4, & x=8, \\ 1, & x>8. \end{cases}$

D) $F(x)=\begin{cases} 0; & x \le 1, \\ 0,1; & 1 \le x < 4, \\ 0,2; & 1 \le x \le 4, \\ 0,4; & 4 < x \le 8. \end{cases}$

3. ξ tasodifiy miqdor ushbu taqsimot funksiyasiga ega:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x \le 2 \text{ bo‘lsa}, \\ \dfrac{x}{2}, & \text{agar } 2 < x \le 4 \text{ bo‘lsa}, \\ 1, & \text{agar } x > 4 \text{ bo‘lsa}. \end{cases}$$

Ushbu $P(3 < \xi < 3,5)$ ehtimollik qiymatini toping.

A) 0,25 B) 0,27 C) 0,32 D) 0,31.

4. Ikkita o'yin kubigi bir vaqtda 2 marta tashlanadi. X diskret tasodifiy miqdor ikkita o'yin kubigida toq ochkolar tushish sonining binomial taqsimot qonunini yozing.

A) $\begin{array}{llll} \xi: & 0 & 1 & 2 \\ P: & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{array}$

B) $\begin{array}{llll} \xi: & 0 & 1 & 1 \\ P: & 9/16 & 6/16 & 1/16 \end{array}$

C) $\begin{array}{llll} \xi: & 0 & 1 & 2 \\ P: & 3/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}$

D) $\begin{array}{llll} \xi: & 0 & 1 & 2 \\ P: & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}$

5. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{4}, & -1 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Tajriba natijasida ξ tasodifiy miqdorning (0;2) intervaldagi ehtimolligini aniqlang.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 1.

6. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -3, \\ \frac{1}{9}(x+3)^2, & -3 < x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Shu tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f(x)$ ni toping.

A) $f(x)=\begin{cases} 0, & x \le -3, \\ \frac{2}{9}(x+3), & -3 < x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

B) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3, \\ \frac{1}{9}(x+3)^2, & -3<x\le 0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$

C) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3, \\ \frac{1}{9}(x+3)^2, & -3<x\le 0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$

D) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3, \\ \frac{1}{9}(x+3), & -3<x\le 0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$

10. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

ξ:	-6	8	9	10
P:	0,1	0,1	0,6	0,2

Taqsimot funksiyasini toping.

A) $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -6, \\ 0{,}1, & -6<x\le 8, \\ 0{,}2, & 8<x\le 9, \\ 0{,}8, & 9<x\le 10, \\ 1, & x>10. \end{cases}$

C) $F(x)=\begin{cases} 0, & x=6, \\ 0{,}1, & x=8, \\ 0{,}2, & x=9, \\ 0{,}6, & x=10, \\ 1, & x>10. \end{cases}$

B) $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -6, \\ 0{,}1, & -6<x\le 8, \\ 0{,}1, & 8<x\le 9, \\ 0{,}6, & 9<x\le 10, \\ 0{,}2, & x>10. \end{cases}$

D) $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -6, \\ 0{,}1, & -6<x\le 8, \\ 0{,}2, & 8<x\le 9, \\ 1, & x>10. \end{cases}$

III bob. BOG'LIQ BO'LMAGAN TAJRIBALAR KETMA-KETLIGI

III bobni o'rganish natijasida talaba:

— *Bernulli sxemasi;*
— *binomial taqsimot;*
— *Muavr-Laplasning lokal teoremasi;*
— *Muavr-Laplasning integral teoremasi;*
— *Puasson teoremasi haqida*

tasavvurga ega bo'lishi;

— *binomial taqsimot formulasini;*
— *Muavr-Laplas teoremalarini;*
— *Puasson teoremasini*

bilishi va amalda qo'llay olishi;

— *binomial taqsimot formulasidan foydalanib misollarni yechish;*
— *Muavr-Laplas teoremalaridan foydalanib masalalarni yechish;*
— *Puasson teoremasidan foydalanib misollar yechishni*

uddalashi lozim.

3.1-§. Bernulli sxemasi. Binomial taqsimot

Ehtimolliklar nazariyasida Bernulli sxemasi deganda, o'zaro bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi tushuniladi va har bir tajriba natijasida biror A hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligi kuzatiladi. Bu hodisaning ro'y berish ehtimolligi $p = P(A)$ tajriba tartibiga bog'liq bo'lmaydi.

Bernulli sxemasini umumiyroq qilib quyidagicha ham kiritish mumkin. Aytaylik, 2 ta $\{0,1\}$ elementlardan iborat bo'lgan bosh to'plamdan qaytariladigan sxema bo'yicha hajmi n ga teng bo'lgan tanlanmalar olaylik va bu tanlanmalar to'plamini Ω deb belgilaylik. Ω ning ixtiyoriy elementi

$$\omega = \omega_1\omega_2...\omega_n$$

bo'lib, ω_i 0 yoki 1 ga teng bo'ladi.

Barcha tanlanmalar soni $|\Omega|=2^n$ va Ω da quyidagi manfiy bo'lmagan $P(\omega)$ funksiyani aniqlaylik. Agar ω tanlanmada k ta 1 bo'lsa,

$$P(\omega)=p^k(1-p)^{n-k},\ 0<p<1.$$

Bu $P(\cdot)$ funksiyani ehtimollik taqsimoti bo'lishi uchun

$$P(\Omega)=1$$

shart bajarilishi lozim. Haqiqatan ham, k ta 1 elementni tanlanmadagi n ta joyga C_n^k ta usul bilan joylashtirish mumkin. Demak, k ta 1 ni o'ziga oluvchi tanlanmalar soni ham mana shu C_n^k ga teng, ya'ni

$$\Omega_k=\{\omega : \omega \text{ da } k \text{ ta } 1 \text{ bor}\}$$

deb olsak,

$$P_n(k)=P(\Omega_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \tag{1}$$

$k=0,1,2,...,n$.

Endi $P_n(k)$ lar ehtimollik taqsimoti bo'lishligi quyidagi tenglikdan kelib chiqadi:

$$P(\Omega)=\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)=\sum_{k=0}^{n}P(\Omega_k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=[p+(1-p)]^n=1.$$

(1) formula orqali aniqlangan $P_n(k)$ ehtimolliklar *binomial taqsimot* deyiladi va bu taqsimotni quyidagicha tushunish mumkin. Aytaylik, n ta bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi davomida biror A hodisaning ro'y berish yoki ro'y bermasligi kuzatilsin. Bitta tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolligi $p=P(A)$ tajribalar nomeriga bog'liq bo'lmasin. Agar tajriba natijasida A hodisa ro'y bersa bu holatni «yutuq» deb tushunsak (aks holda «yutqiziq» va uning ehtimolligi $P(\overline{A})=1-p$, $P_n(k)$ n ta tajribada «yutuqlar» soni k ga teng bo'lishi ehtimolligi bo'ladi.

Endi $P_n(k)$ binomial taqsimotni k ga nisbatan qanday o'zgarishini o'rganaylik. Buning uchun quyidagi nisbatni ko'ramiz:

$$R_n(k)=\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)}=\frac{p}{1-p}\frac{n-k+1}{k}=\frac{p}{1-p}\left(\frac{n+1}{k}-1\right).$$

Bu nisbat k o'sgan sari kamayadi va $\frac{k}{n+1} < p$ bo'lsa, u 1 dan katta, $\frac{k}{n+1} > p$ bo'lsa, 1 dan kichik bo'ladi. Demak, $P_n(k)$ ehtimollik oldin k o'sganida monoton ravishda o'sadi, keyin $\frac{k}{n+1} > p$ bo'lganida esa kamayadi va $P_n(k)$

$$k = k_0 = [np + p]$$

bo'lganda maksimal qiymatga erishadi. Aytilganlardan kelib chiqadiki, n ta tajribada k_0 marta «yutuq» bo'lish ehtimolligi qolgan $P_n(k)$ lardan katta bo'ladi, ya'ni

$$\max_{0 \le k \le n} P_n(k) = P_n(k_0)$$

munosabat o'rinli.

Bernulli sxemasida «yutuqlar» soni k dan katta bo'lmaslik ehtimolligi

$$Q_n(k) = \sum_{j=0}^{k} P_n(j)$$

tenglik bilan aniqlanadi va uni $R_n(k)$ nisbat orqali baholash mumkin. Haqiqatan ham, $k < p(n+1)$ bo'lganda

$$Q_n(k) = P_n(k)\left(1 + \frac{1}{R_n(k)} + \frac{1}{R_n(k)R_n(k-1)} + \dots\right) \le$$
$$\le P_n(k)\frac{R_n(k)}{R_n(k)-1} = P_n(k)\frac{(n+1-k)p}{(n+1)p-k}.$$

Ko'rish qiyin emaski, $Q_n(k)$ uchun keltirilgan baho n va k larning katta qiymatlarida, $\frac{k}{np}$ qiymat esa 1 dan farq qilganda deyarli aniq bo'ladi, chunki bu holda

$$1 + \frac{1}{R_n(k)} + \frac{1}{R_n(k)R_n(k-1)} + \dots$$

yig'indi

$$\sum_{j=0}^{\infty} R_n^{-j}(k) = \frac{R_n(k)}{R_n(k)-1}$$

geometrik progressiya yig'indisidan kam farq qiladi. Demak, quyidagi taqribiy

$$Q_n(k) \approx P_n(k)\frac{(n+1-k)p}{(n+1)p-k} \tag{2}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Masalan, n=30, p=0,7, k=16 bo'lsin. Bu holda np=21 bo'lib, (1) formula bilan hisoblashlar ko'rsatadiki, $P_n(k) = P_{30}(16) \approx 0,023$. Berilgan qiymatlar uchun

$$\frac{(n+1-k)p}{(n+1)p-k} = \frac{15\cdot 0,7}{5,7} \approx 1,84.$$

Demak, (2) munosabatning o'ng tomoni

$$0,023 \cdot 1,84 \approx 0,042.$$

Berilgan n, p, k larning qiymatlarida $Q_n(k)$ ni bevosita hisoblasak, 10^{-3} tartibdagi aniqlik bilan 0,040 qiymatni hosil qilamiz.

Bernulli sxemasi bilan bog'liq bo'lgan «tasodifiy joylashtirishlarga» taalluqli quyidagi masalani ko'raylik.

Faraz qilaylik, 1-, 2-, ..., n-chi deb belgilangan n ta yacheykalarga N ta zarracha tashlansin (solinsin). Har bir zarracha n ta yacheykalardan xohlagan bittasiga tushishi mumkinligidan N ta zarrachani n ta yacheykalarga tashlashlarni n^N ta usul bilan joylashtirishi mumkin. Zarrachalarning yacheykalarga joylashishini n ta elementdan iborat bosh to'plamdan hajmi N ga teng bo'lgan qaytariladigan sxema bo'yicha olingan tanlanmalar deb qabul qilish mumkin. U holda tanlanmalardan har biri $\frac{1}{n^N}$ ehtimollikga ega bo'ladi. Keltirilgan zarrachalarni yacheykalarga «joylashish» («tushish») sxemasi uchun i-yacheykaga k ta zarracha tushish ehtimolligini topaylik. i-yacheykaga tushmagan $N-k$ ta zarracha qolgan $n-1$ yacheykalarga $(n-1)^{N-k}$ ta usul bilan joylashadi. N ta zarrachadan i-yacheykaga tushmagan $N-k$ ta zarrachalar C_N^{N-k} ta usul bilan joylashtiriladi. Demak, klassik sxema bo'yicha topilishi kerak bo'lgan ehtimollik

$$C_N^{N-k}\cdot\frac{(n-1)^{N-k}}{n^N}=C_N^{N-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{N-k}=C_N^k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{N-k}. \quad (3)$$

Bu yerda $C_n^k=C_n^{n-k}$ formuladan foydalanildi va (3) dan ko'rinadiki, bu ehtimollik $p=\frac{1}{n}$ bo'lgan Bernulli sxemasidagi $P_N(k)$ ehtimollik bilan ustma-ust tushadi.

3.2-§. Muavr-Laplas lokal va integral teoremalari

Binomal taqsimot formulasidan ko'rinadiki, tajribalar soni n yetarlicha katta bo'lganida $P_n(m)$ ehtimolliklarni hisoblashda qiyinchiliklar yuzaga keladi. Shuning uchun ham $P_n(m)$ ga nisbatan sodda ko'rinishdagi asimptotik formulalarning zaruriyati yuzaga keladi. Bu masalani $p=q=\frac{1}{2}$ bo'lgan holda Muavr, umumiy holda ($p\neq q$) esa Laplas hal qilganlar. Ular isbotlagan ikkita asimptotik formulalar quyidagi Muavr–Laplas teoremasi ko'rinishida keltiriladi.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi.

Agar n ta bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida biror A hodisaning ro'y berish ehtimolligi p $(0<p<1)$ bo'lsa, u holda m ning ushbu

$$\frac{|m-np|}{\sqrt{npq}}<c \quad (c \text{ — o'zgarmas son})$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun tekis ravishda

$$P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}\left(1+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

tenglik bajariladi.

Isboti. Teoremani analiz kursidan ma'lum bo'lgan ushbu

$$n!=\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}e^{\theta_n}, \quad |\theta_n|\le\frac{1}{12n}$$

Stirling formulasidan foydalanib isbotlaymiz. Agar

$$x = x_{m,n,p} = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

belgilashni kiritsak, u holda

$$m = np + x\sqrt{npq} = np\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) \quad (1)$$

va

$$n - m = nq - x\sqrt{npq} = nq\left(1 - x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) \quad (2)$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. (1) va (2) tengliklardan ko‘rinadiki, $n \to \infty$ da va $|x| \le c$ shart bajarilganida m, $n-m$ cheksizlikka intiladi. Shu sababli, $(n-m)!$ va $m!$ sonlar uchun Stirling formulasini qo‘llashimiz mumkin va binomial formulani quyidagicha yoza olamiz:

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}} \cdot \frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}} e^{\theta_{n,m}}.$$

Bu yerda

$$|\theta_{n,m}| \le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m}\right). \quad (3)$$

(1), (2) va (3) munosabatlardan ushbu tengsizlik o‘rinli bo‘ladi:

$$|\theta_{n,m}| \le \frac{1}{12n}\left(1 + \frac{1}{p + x\sqrt{\frac{pq}{n}}} + \frac{1}{q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right). \quad (4)$$

Bundan ko‘rinadiki, $|x| < c$ bo‘lgani uchun $n \to \infty$ da $e^{\theta_{n,m}} \to 1$. Natijada (4) ga asosan katta n lar uchun

$$e^{\theta_{n,m}} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5)$$

ifodani hosil qilamiz. Teorema shartiga asosan $x\sqrt{\frac{q}{np}}$ va $x\sqrt{\frac{p}{nq}}$ miqdorlar n ning yetarlicha katta qiymatlarida istalgancha kichik bo‘ladi.

Shu sababli $\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)$ va $\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)$ ifodalarni darajali qatorga yoyib,

$$\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)=x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{qx^2}{np}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

$$\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)=-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{1}{2}\frac{px^2}{nq}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklarga asosan

$$\ln\frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^n (n-m)^{n-m}}=\ln\left(\frac{np}{m}\right)^m+\ln\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}=$$

$$=-m\ln\frac{m}{np}-(n-m)\ln\frac{n-m}{nq}=$$

$$=-\left(np+x\sqrt{npq}\right)\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)-\left(nq-x\sqrt{npq}\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right)=$$

$$=-(np+x\sqrt{npq})\cdot\left[x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{qx^2}{np}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right]-$$

$$-(np-x\sqrt{npq})\left[-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{px^2}{nq}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right]=-\frac{x^2}{2}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (6)$$

Natijada (6) dan $e^{o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ni e'tiborga olgan holda

$$\frac{n^n p^m q^{n-m}}{m^m (n-m)^{n-m}}=e^{-\frac{x^2}{2}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} \quad (7)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bevosita ishonch hosil qilish mumkinki,

$$\frac{1}{\sqrt{1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}}=1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Shuning uchun (1), (2) tengliklarga asosan

$$\frac{1}{2\pi m(n-m)}=\sqrt{\frac{n}{2\pi npq\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}}=\frac{1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{2\pi npq}}. \tag{8}$$

Demak, yetarlicha katta n lar uchun (4), (5), (7), (8) ifodalardan teoremaning o'rinli ekaniga ishonch hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiyaning x argument musbat qiymatlariga mos tuzilgan qiymatlari jadvali mavjud (1-ilova). $\varphi(x)$ funsiyaning juftligini e'tiborga olib bu jadvaldan argumentning manfiy qiymatlari uchun ham foydalaniladi.

1-misol. Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolligi 0,2 ga teng bo'lsa, 400 ta tajribada bu hodisalarning rosa 80 marta ro'y berish ehtimolligini toping.

Yechish. $n=400$; $m=80$; $p=0{,}2$; $q=0{,}8$.

Yuqoridagi teoremadan foydalanamiz:

$$P_{400}(80)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=\frac{1}{8}\varphi(x),$$

bunda $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-400\cdot 0{,}2}{8}=0$ jadvaldan $\varphi(0)=0{,}3989$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$P_{400}(80)\approx\frac{0{,}3989}{8}=0{,}04986.$$

Muavr-Laplasning integral teoremasi.

Agar A hodisaning n ta bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida ro'y berish ehtimolligi o'zgarmas va p $(0<p<1)$ ga teng bo'lsa, u holda yetarlicha katta n larda A hodisaning m_1 dan m_2 tagacha ro'y berish ehtimolligi $P(m_1\le m\le m_2)$ taqriban quyidagicha hisoblanadi:

$$P(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

bu yerda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p.$$

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

2-misol. Ixtiyoriy olingan pillaning yaroqsiz chiqish ehtimolligi 0,2 ga teng. Tasodifan olingan 400 ta pilladan yaroqsizlari soni 70 tadan 130 tagacha bo‘lish ehtimolligini toping.

Yechish. $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $n = 400$; $m_1 = 70$; $m_2 = 130$.

U holda

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -\frac{10}{8} = -1{,}25,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{130 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = \frac{55}{8} = 6{,}25.$$

jadvaldan $\Phi(-1{,}25) = -\Phi(1{,}25) = -0{,}39435$, $\Phi(6{,}25) = 0{,}5$, chunki $x > 5$ da $\Phi(x) = 0{,}5$.

Demak,

$$P_{400}(70,130) \approx \Phi(6{,}25) + \Phi(1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}39435 = 0{,}89435.$$

3.3-§. Lokal limit teorema

Ehtimolliklar nazariyasida diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari uchun isbotlangan limit teoremalar *lokal teoremalar* deyiladi. Quyida biz yuqorida keltirilgan Muavr-Laplas lokal teoremasini umumlashtirilgan variantda keltiramiz.

Kelgusida quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: agar ikkita ketma-ketlik $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ uchun $\frac{a_n}{b_n} \to 1$, $n \to \infty$ bo‘lsa, bu munosabatni

$$a_n \sim b_n$$

ko‘rinishda belgilaymiz (bu ketma-ketliklar ekvivalent deyiladi).

O'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

berilgan bo'lsin. Agar bu ketma-ketlikning elementlari bir xil taqsimlangan va

$$\xi_k = \begin{cases} 1 \text{ ehtimolligi } p, \\ 0 \text{ ehtimolligi } 1-p, \end{cases} \qquad 0 < p < 1$$

bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik *Bernulli sxemasini* tashkil qiladi, deymiz. Haqiqatan ham, ξ_k Bernulli sxemasidagi k-tajribaning natijasiga mos keladi. Agar $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ deb belgilansa, S_n tasodifiy miqdor Bernulli sxemasini biror A hodisaning ro'y berishlar sonini ifodalab, uning taqsimoti

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \tag{1}$$

binomial taqsimot bo'ladi. Bizga ma'lumki, (1) formuladan n larning katta qiymatlari uchun foydalanish qo'shimcha noqulayliklarni keltirib chiqaradi. Shuning uchun ham $P(S_n=k)$ ehtimollikning $n \to \infty$ dagi asimptotikasini topish zaruriyati yuzaga keladi. Shu maqsadda

$$H(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-p}, \quad 0 < x < 1$$

funksiyani kiritamiz.

1-teorema. Agar $n \to \infty$, $n - k \to \infty$ bo'lsa,

$$P(S_n = k) = P\left(\frac{S_n}{n} = p^*\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n p^*(1-p^*)}} \exp\{-nH(p^*)\}$$

munosabat o'rinli bo'ladi va bu yerda $p^* = \dfrac{k}{n}$.

Isbot. Analiz kursidan Stirling formulasi deb ataluvchi quyidagi munosabat ma'lum:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}, \quad n \to \infty.$$

Bu formuladan foydalanib quyidagi ekvivalent munosabatlarni yozamiz:

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \cdot \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} \cdot p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi p^*(1-p^*)}} \exp\left\{-k \ln \frac{k}{n} - (n-k) \ln \frac{n-k}{n}\right\} \times$$

$$\times \exp\{k \ln p + (n-k) \ln(1-p)\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n p^*(1-p^*)}} \exp\{-n[p^* \ln p^* + (1-p^*) \ln(1-p^*)]\} \times$$

$$\times \exp\{-n[p^* \ln p - (1-p^*) \ln(1-p)]\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n p^*(1-p^*)}} \exp\{-nH(p^*)\}$$

1-teorema isbot bo‘ldi.

$H(x)$ funksiyaning cheksiz differensiallanuvchi ekanligini ko‘rish qiyin emas. Xususan,

$$H'(x) = \ln \frac{x}{p} - \ln \frac{1-x}{1-p}, \quad H''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

O‘z-o‘zidan ko‘rinadiki, $H(p) = H'(p) = 0$ va $p^* - p \to 0$ bo‘lganda quyidagi yoyilma o‘rinli bo‘ladi:

$$H(p^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)(p^* - p)^2 + O\left(|p^* - p|^3\right),^* \quad q = 1 - p.$$

Bu yoyilmadan 1-teoremaga asosan kelib chiqadiki, $p^* \sim p$ va $n(p^* - p)^3 \to 0$ bo‘lsa

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{n}{2pq}(p^* - p)^2\right\}.$$

---

* Asimptotik analizda ko‘p qo‘llaniladigan belgilashlarni eslatib o‘tamiz: agar $b(x) > 0$ va $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{a(x)}{b(x)} = 0$ bo‘lsa, $x \to x_0$ da $a(x) = o(b(x))$ deymiz; agar $\limsup\limits_{x \to x_0} \frac{|a(x)|}{b(x)} < \infty$ bo‘lsa, $a(x) = O(b(x))$ deymiz.

Agar $\Delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ bo'lsa oxirgi ekvivalentlik munosabatidan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $z = n(p^* - p) = k - np = o\left(n^{2/3}\right)$ bo'lsa,

$$P(S_n = k) = P(S_n - np = z) \sim \varphi(z\Delta) \cdot \Delta . \qquad (2)$$

Keltirilgan (2) ekvivalentlik munosabatini *Muavr-Laplasning lokal limit teoremasi* deb ham ataladi. Bu formula $p^* \approx p$ bo'lganda $\{S_n < m\}$ ko'rinishidagi hodisalarning ehtimolligini baholashga imkon beradi. Agar p^* tub ma'noda p dan farq qilsa, bu ehtimollikni oldingi 3.1-§ da keltirilgan natijalardan foydalanib baholash mumkin.

Misol. Aytaylik toq sondagi $n=2m+1$ hay'at a'zolaridan har biri boshqalarga bog'liq bo'lmagan holda $p=0,7$ ehtimollik bilan to'g'ri qaror qabul qiladi. Ko'pchilik ovoz bilan qabul qilingan qarorning to'g'ri bo'lishining ehtimolligini 0,99 dan kam bo'lmasligini ta'minlaydigan hay'at a'zolarining minimal soni topilsin.

Yechish. Tasodifiy miqdor $\xi_k=1$ deymiz, agar k-hay'at a'zosi to'g'ri qaror qabul qilsa, aksincha $\xi_k=0$ deymiz, agar k-hay'at a'zosi noto'g'ri qaror qabul qilsa. Masalaning ma'nosi bo'yicha bizni n ning shundek toq qiymatlari qiziqtiradiki, ular uchun $P(S_n \le m) \le 0,01$ bo'lishi kerak. Tushunarliki, qabul qilingan qarorning aniqligiga n ning katta qiymatlarida erishish mumkin. Oldingi 3.1-§ da keltirilgan natijalarga asosan,

$$Q_n(m) = P(S_n \le m) \approx \frac{m+1-m}{(n+1)p-m} P(S_n = m) \approx \frac{p}{2p-1} P(S_n = m).$$

Biz ko'rayotgan masalada $p^* \approx 1/2$, $H(1/2) = -\frac{1}{2}\ln 4p(1-p)$,

$H'(1/2) = \ln\frac{1-p}{p}$. Bularni hisobga olgan holda, $P(S_n=m)$ ehtimollikni 1-teorema yordamida baholaymiz:

$$P(S_n \le m) \approx \frac{p}{2p-1}\sqrt{\frac{2}{np}}\exp\left\{-nH\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\right\} \approx$$

$$\approx \frac{p}{2p-1}\sqrt{\frac{2}{np}}\exp\left\{-nH\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}H'\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{2p(1-p)}}{(2p-1)\sqrt{\pi n}}\left(\sqrt{4p(1-p)}\right)^n \approx 0{,}915\frac{1}{\sqrt{n}}(0{,}84)^{n/2}=a(n).$$

Oson ishonch hosil qilish mumkinki, $a(n)$ monoton kamayuvchi funksiya va

$$a(n) = 0{,}01$$

tenglamaning yechimi n=33 bo‘ladi. Bu javobga aniq formulalardan va kompyuterdan foydalanib ham kelish mumkin.

Endi $P(S_n=k)$ ehtimollikni 1-teoremaga asolanib baholashdagi yuzaga keladigan xatoliklarni o‘rganishga o‘tamiz. Buning uchun Stirling formulasidagi qoldiq hadning quyidagi bahosidan foydalanamiz:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n} e^{\theta_n}, \quad \frac{1}{12n+1} < \theta_n < \frac{1}{12n}.$$

(В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Москва, 1984. Т.1, 66-bet).

2-teorema. Quyidagi asimptotik formula o‘rinli:

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1-p^*)}}\exp\{-nH(p^*)+\theta(k,n)\}.$$

Bu yerda

$$\theta(k,n) = |\theta(n)-\theta(k)\theta(n-k)| < \frac{1}{12k}+\frac{1}{12(n-k)} = \frac{1}{12np^*(1-p^*)}.$$

Bu teoremadan foydalanib, Muavr-Laplasning lokal teoremasidagi qoldiq hadning bahosini ham topish mumkin, ya’ni (2) munosabatni aniqlashtirish mumkin. Buni quyidagi teorema ko‘rinishida keltiramiz.

3-teorema. Quyidagi

$$|p^*-p| \le \frac{1}{2}\min(p,q)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha k lar uchun

$$P(S_n = k) = \varphi(2)\Delta\left(1+\varepsilon(k,n)\right) \qquad (3)$$

va

$$1+\varepsilon(k,n)=\exp\left\{\theta\left[\frac{|z|^3}{3}\Delta^4+\left(|z|+\frac{1}{6}\right)\Delta^2\right]\right\},\quad |\theta|<1.$$

Agar $x\to 0$ da $e^x-1=O(x)$ ekanligini hisobga olsak, u holda (3) munosabatning qoldiq hadi qanday tartibda 0 ga intilishini topish mumkin.

3.4-§. Puasson teoremasi

Yuqorida $P(S_n=k)$ ehtimolliklar uchun aniq baholar keltirildi. Ulardan ko'rinadiki, agar p va $q=1-p$ lar musbat bo'lib fiksirlanganida npq miqdor katta qiymatlar qabul qilsa, Muavr-Laplas teoremasi bu ehtimolliklar uchun eng yaxshi approksimatsion ifodalar beradi. Lekin, masalan, $p=0{,}001$ va $n=1000$ bo'lsa, $np=1$ va n katta son bo'lishiga qaramasdan Muavr-Laplas teoremasidan foydalanib bo'lmaydi. Bu holda $P(S_n=k)$ ehtimolliklarni Puasson taqsimoti orqali approksimatsiyalash qulay bo'lar ekan.

Har qanday B to'plam uchun parametri λ bo'lgan Puasson taqsimoti

$$\Pi_\lambda(B)=\sum_{0\le k\in B}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

tenglik bilan aniqlanishini eslatib o'tamiz.

1-teorema. To'g'ri chiziqdagi har qanday B to'plam uchun

$$\left|P(S_n\in B)-\Pi_\lambda(B)\right|\le\frac{\lambda^2}{n},\quad \lambda=np.$$

Bu teoremaning isbotini ehtimolliklar nazariyasida ko'p ishlatiladigan «bitta ehtimolliklar fazosi» metodini qo'llagan holda keltiramiz. Bu metodning asosida tasodifiy miqdor S_n berilgan ehtimollik fazosida, S_n ga yaqin bo'lgan shunday S_n^* tasodifiy miqdor aniqlaniladiki, bu tasodifiy miqdor $\Pi_\lambda(\cdot)$ Puasson taqsimotiga ega bo'ladi.

Quyida biz bu metod yordamida

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

tasodifiy miqdorlar har xil taqsimlangan holda (bir jinsli bo'lmagan Bernulli sxemasi) 1-teorema o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Bu holda Bernulli tajribalari sxemasida har bir tajribada 1 ning paydo bo'lish ehtimolligi p tajribaning nomeriga bog'liq bo'ladi.

Avvalgidek, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar uchun

$$\xi_j = \begin{cases} 1 \text{ ehtimolligi } p_j, \\ 0 \text{ ehtimolligi } 1 - p_j, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \text{ va } \lambda = ES_n = \sum_{j=1}^{n} p_j \text{ bo'lsin.}$$

2-teorema. Har qanday B to'plam uchun

$$|P(S_n \in B) - \Pi_\lambda(B)| \le \sum_{j=1}^{n} p_j^2 .$$

Bu teorema isbotini keltirishdan oldin Puasson taqsimotining quyidagi xossasini isbotlaymiz.

Lemma. Agar η_1 va η_2 miqdorlar bog'liqsiz bo'lib, η_1 parametri λ_1, η_2 esa parametri λ_2 bo'lgan Puasson taqsimotlariga ega bo'lsalar, $\eta_1+\eta_2$ yig'indi parametri $\lambda_1+\lambda_2$ bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'ladi.

Isbot. To'la ehtimollik formulasiga asosan

$$P(\eta_1 + \eta_2 = k) = \sum_{j=0}^{k} P(\eta_1 = j, \eta_2 = k - j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} P(\eta_1 = j) P(\eta_2 = k - j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda_1^j e^{-\lambda_1}}{j!} \cdot \frac{\lambda_2^{k-j} e^{-\lambda_2}}{(k-j)!} = \frac{1}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Lemma isbot bo'ldi.

2-teoremaning isboti. Faraz qilaylik,

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$

– bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar $[0,1]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo'lsin. Ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ da quyidagi tasodifiy miqdorlarni aniqlaymiz:

$$\xi_j(\omega) = \begin{cases} 0, \text{ agar } \omega_j < 1 - p_j, \\ 1, \text{ agar } \omega_j \geq 1 - p_j, \end{cases} \quad 0 \leq p_j \leq 1,$$

$$\xi_j^*(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{agar } \omega_j < e^{-p_j}, \\ k \geq 1, & \text{agar } \omega_j \in [\pi_k, \pi_{k-1}], \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

va bu yerda $\pi_k = \sum_{m=0}^{k} e^{-p_j} \frac{(p_j)^m}{m!}, \quad k = 0, 1, \dots$.

Bevosita ishonish mumkinki, $\xi_j(\omega)$ lar bog'liqsiz va parametri p_j bo'lgan Bernulli taqsimotiga, $\xi_j^*(\omega)$ lar ham bog'liqsiz bo'lib, parametri p_j bo'lgan Puasson taqsimotiga ega bo'ladilar. Yana bevosita tekshirib ko'rish mumkinki, $1 - p_j \leq e^{-p_j}$ tengsizlik o'rinli ekanligidan

$$\{\omega : \xi_j(\omega) \neq \xi_j^*(\omega)\} =$$
$$= \{\omega : \omega_j \in [1 - p_j, e^{-p_j}]\} \cup \{\omega : \omega_j \in [e^{-p_j} + p_j e^{-p_j}, 1]\}.$$

Bu oxirgi tenglikka asosan $(1 - e^{-x} \leq x, \ 0 \leq x \leq 1)$

$$P(\xi_j \neq \xi_j^*) = (e^{-p_j} - 1 + p_j) + (1 - e^{-p_j} - p_j e^{-p_j}) =$$
$$= p_j (1 - e^{-p_j}) \leq p_j^2.$$

To'la ehtimollik formulasidan foydalanib va oxirgi tengliksizni hisobga olib quyidagi munosabatlarni yozish mumkin:

$$P(S_n \in B) = P(S_n \in B,\ S_n = S_n^*) + P(S_n \in B,\ S_n \neq S_n^*) =$$
$$= P(S_n^* \in B) - P(S_n^* \in B, S_n \neq S_n^*) + P(S_n \in B, S_n \neq S_n^*),$$
$$\left|P(S_n \in B) - P(S_n^* \in B)\right| \le \left|P(S_n^* \in B,\ S_n \neq S_n^*) - P(S_n \in B,\ S_n \neq S_n^*)\right| \le$$
$$\le P(S_n \neq S_n^*) \le \sum_{j=1}^{n} p_j^2 . \qquad (*)$$

Lemmaga asosan S_n^* tasodifiy miqdor parametri $\lambda = \sum_{j=1}^{n} p_j$ bo‘lgan Puasson taqsimotiga ega bo‘ladi, ya’ni

$$P(S_n^* \in B) = \Pi_\lambda(B).$$

2-teoremaning isboti (*) munosabatning birinchi va oxirgisidan kelib chiqadi. Agar har qanday j uchun $p_j=p$ bo‘lsa, $\lambda=np$ va 1-teorema o‘rinli bo‘ladi.

ξ_k tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan holga qaytamiz. 1-teoremadan foydalanish uchun, ya’ni $P(S_n=k)$ taqsimotni $\Pi_\lambda(\cdot)$ bilan approksimatsiyalash uchun masalani boshqacharoq qo‘yishiga to‘g‘ri keladi, chunki np miqdor n o‘sib borganda chegaralangan bo‘lishi uchun $p = P(\xi_k = 1)$ ehtimollik 0 ga intilishi kerak. Buni esa fiksirlangan

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun ta’minlash mumkin emas. Shuning uchun Puasson teoremasi holida seriyalar tashkil qiluvchi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini ko‘rish zarur bo‘ladi:

$\xi_1^{(1)}$	1-seriya
$\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}$	2-seriya
$\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}, \xi_3^{(3)}$	3-seriya
... ...	....
$\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$	n-seriya

Bu yerda yuqoridagi indeks seriya nomerini, quyi indeks esa tasodifiy miqdorning seriyadagi nomerini anglatadi.

Faraz qilaylik, n-seriyadagi $\xi_k^{(n)}$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lib, har qanday k uchun

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} 1, \text{ ehtimolligi } & p_n, \\ 0, \text{ ehtimolligi } & 1 - p_n \end{cases}$$

bo'lsin. Endi $S_n = \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}$ tasodifiy miqdorlar taqsimoti va $P_n(m) = P(S_n = m)$ ehtimolligi uchun quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

3-teorema. Agar $n \to \infty$ da $p_n \to 0$ shart bajarilsa, u holda

$$P_n(m) - \frac{(np_n)^m}{m!} e^{-np_n} \to 0$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isboti. $a_n = np_n$ deb belgilaymiz va

$$P_n(m) = C_n^m p_n^m q_n^{n-m}, \quad q_n = 1 - p_n$$

formuladan $p_n = \frac{a_n}{n}$ ekanligini e'tiborga olib, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

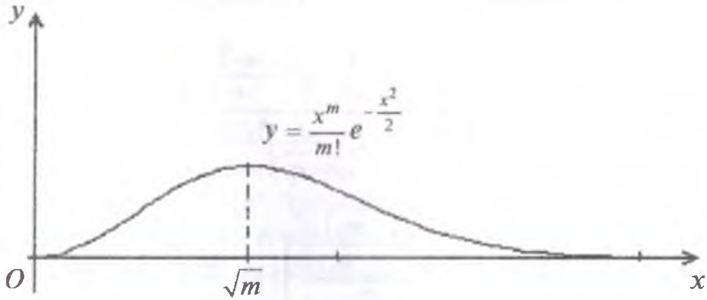
$$P_n(m) = C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{a_n}{n}\right)^m \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{a_n^m}{m!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{n^m} \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{a_n^m}{m!} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^m} \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n. \qquad (1)$$

Aytaylik, m tayinlangan (fiksirlangan) bo'lsin. Quyidagi ikki holni ko'rib chiqamiz:

1-hol. a_n — chegaralanmagan, ya'ni $n \to \infty$ da $a_n \to \infty$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $0 \le x \le 1$ uchun $1 - x < e^{-x}$ ekanini va (1) ni hisobga olsak,



12-rasm.

$$I=\left|P_n(m)-\frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n}\right|\le P_n(m)+\frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n}\le\frac{a_n^m}{m!}e^{-\frac{n-m}{n}a_n}+\frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n} \qquad (2)$$

munosabat hosil boʻladi.

Endi $y=\frac{x^m}{m!}e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiyani qaraymiz (12-rasm). Agar $x=0$ boʻlsa, u holda $y=0$ va $x\to\infty$ da esa $y\to 0$. y eng katta qiymatiga $x=\sqrt{m}$ da erishadi. Bu funksiyaning grafigi yuqorida keltirilgan. Natijada ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday A_ε son topiladiki, yetarlicha katta n $(n>\sqrt{m})$ lar uchun $a_n>A_\varepsilon$ boʻlganida

$$\frac{a_n^m}{m!}e^{-\frac{n-m}{n}a_n}<\frac{\varepsilon}{2},\quad \frac{a_n^m}{m!}e^{-a_n}<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

boʻladi. Demak, (2) va (3) dan $I<\varepsilon$ ekani kelib chiqadi.

2-hol. a_n – chegaralangan boʻlsin, u holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ topiladiki, $n>n_0(\varepsilon)$ boʻlganida ushbu tengsizliklar bajariladi:

$$\left|\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n-e^{-a_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\left|\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^m}-1\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Bu tengsizliklardan va (1) dan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left| P_n(m) - \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n} \right| = \left| \frac{a_n^m}{m!} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right) \ldots \left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^m} \cdot \left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n - \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n} \right| =$$

$$= \left| \frac{a_n^m}{m!} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right) \ldots \left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^m} \cdot \left[\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n - e^{-a_n} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{a_n^m}{m!} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right) \ldots \left(1-\frac{m-1}{n}\right) e^{-a_n}}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^m} - \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n} \right| \le$$

$$\le \frac{a_n^m}{m!} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right) \ldots \left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n} \cdot \left| \left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n - e^{-a_n} \right| +$$

$$+ \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n} \cdot \left| \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right) \ldots \left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Bu esa teoremani isbotlaydi.

Puasson teoremasi A hodisaning har bir tajribada ro‘y berish ehtimolligi nolga teng bo‘lganida ham o‘rinli ekanligini ta’kidlab o‘tamiz. Bu holda $a_n = 0$ bo‘ladi.

$$P(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

ifodani kiritaylik. $P(m)$ miqdorlar $\sum_{m=0}^{\infty} P(m) = 1$ tenglikni qanoatlantirishini ko‘rish qiyin emas. Haqiqatan ham.

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(m)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}e^{-a}=e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}=e^{-a}\quad e^{a}=1.$$

Hosil qilingan ehtimolliklar taqsimoti *Puasson qonuni* deyiladi.

Misol. Har bir otilgan o'qning nishonga tegish ehtimolligi 0,001 ga teng. Agar 5000 ta o'q otiladigan bo'lsa, ikkita va undan ortiq o'qning nishonga tegish ehtimolligini toping.

Yechish. Nishonga tekkan o'qlar sonini μ_n desak, izlanayotgan ehtimollik $P(\mu_n \geq 2)$ dan iborat bo'lib, u quyidagiga teng bo'ladi:

$$P(\mu_n \geq 2)=\sum_{m=2}^{n} P_n(m)=1-P_n(0)-P_n(1).$$

$a_n = n\cdot p = 5000\cdot 0{,}001 = 5$ ekanini e'tiborga olsak, $P_n(0)$, $P_n(1)$ ehtimolliklar Puasson formulasi yordamida osongina topiladi:

$$P_{5000}(0)=\frac{5^0}{0!}\cdot e^{-5}=e^{-5},$$

$$P_{5000}(1)=\frac{5^1}{1!}\cdot e^{-5}=5e^{-5},$$

u holda $P(\mu_{5000} \geq 2)=1-e^{-5}-5e^{-5}\approx 0{,}9596$.

$P_{5000}(m)$ ehtimollik m=4 va m=5 bo'lganida ushbu maksimum qiymatga erishadi:

$$P_{5000}(4)=P_{5000}(5)\approx 0{,}1755.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi deganda nimani tushunasiz?
2. Bernulli sxemasini tushuntirib bering.
3. Binomial taqsimot formulasini yozing va unga doir misollar keltiring.
4. Muavr-Laplasning lokal teoremasi nimadan iborat?
5. Muavr-Laplasning lokal teoremasi tadbig'iga misol keltiring.
6. Muavr-Laplasning integral teoremasi nimadan iborat?

7. Muavr-Laplasning integral teoremasi qanday ahamiyatga ega? U qanday masalalarga tadbiq qilinadi?

8. Lokal va integral teoremalar tadbiq qilinadigan masalalar orasidagi farq nimalardan iborat?

9. Puasson teoremasini aytib bering.

10. Muavr-Laplas teoremasining shartlari Puasson teoremasining shartlaridan nima bilan farq qiladi?

11. Ehtimolliklar nazariyasining asimptotik formulalari qanday maqsadlarga xizmat qiladi?

12. Nima uchun Puasson qonuni kam yuz beruvchi hodisalar qonuni deb ataladi?

Misol va masalalar

1. Biror mergan uchun bitta o'q uzishda nishonga tegishi ehtimolligi 0,8 ga teng va o'q uzish tartibiga bog'liq emas. 5 marta o'q uzilganida nishonga rosa 2 marta tegish ehtimolligini toping.

Javob: 0,0512.

2. Tajriba 3 ta o'yin kubigini tashlashdan iborat bo'lsin. 5 ta bog'liqsiz tajribada 2 marta 3 ta bir raqami tushish ehtimolligini toping.

Javob: 0,00021137.

3. Zavod omborga 5000 ta sifatli buyumlar yubordi. Har bir buyumning yo'lda shikastlanish ehtimolligi 0,0002 ga teng. 5000 ta buyum ichidan yo'lda

A) rosa 3 tasi shikastlanishi ehtimolligini;

B) 3 tadan ko'p bo'lmagani shikastlanishi ehtimolligini;

C) 3 tadan ko'pi shikastlanish ehtimolligini toping.

Javob: A) 0,06313; B) 0, 981; C) 0,019.

4. Do'kon 1000 shisha ma'danli suv oldi. Tashib keltirishda 1 ta shishaning sinib qolishi ehtimolligini 0,003 ga teng. Do'konga keltirilgan shisha idishlarning:

A) rosa 2 tasi;

B) 2 tadan kami;

C) 2 tadan ko'pi;

D) hech bo'lmaganda bittasi singan bo'lishi ehtimolligini toping.

Javob: A) 0,224; B) 0,1992; C) 0,5768; D) 0,95.

5. Uzunligi 15 sm bo'lgan AB kesma C nuqta bilan 2:1 nisbatda bo'lingan. Bu kesmaga tavakkaliga 4 ta nuqta tashlanadi. Ulardan ikkitasi C nuqtadan chaproqqa, ikkitasi o'ngroqqa tushishi ehtimolligini toping (nuqtaning kesmaga tushish ehtimolligi kesma uzunligiga proporsional va uning joylashishiga bog'liq emas deb faraz qilinadi).

Javob: 8/27.

6. Ishchi ayol 300 ta urchuqqa xizmat ko'rsatadi. τ vaqt oralig'ida har bir urchuqda yigirilayotgan ipning uzilish ehtimolligi 0,005 ga teng. Uzilishlarning eng katta ehtimollik sonini va bu sonning ehtimolligini toping.

Javob: 0,2.

7. Ayrim o'q uzishda o'qning nishonga tegish ehtimolligi 0,63 ga teng. Nishonga kamida 10 ta o'qni 0,9 ga teng ehtimollik bilan tekkizish uchun nechta o'q o'zish kerak bo'ladi?

Javob: $n \geq 20$.

8. t vaqt ichida bitta kondensatorning ishdan chiqishi ehtimolligi 0,2 ga teng. t vaqt ichida 100 ta bir-biriga bog'liqsiz ishlovchi kondensatordan:

A) kamida 20 tasi ishdan chiqishi;

B) 28 tadan kami ishdan chiqishi;

C) 14 tadan 28 tagachasining ishdan chiqish ehtimolligini toping.

Javob: A) 0,55; B) 0,98; C) 0,9.

9. O'yin kubigi 10 marta tashlanganda uchga karrali ochkolar kamida 2 marta, ko'pi bilan 5 marta tushishi ehtimolligini toping.

avob: 0,488.

10. Kesma 4 ta teng bo‘lakka bo‘lingan. Kesmaga 8 ta nuqta tavakkaliga tashlangan. Kesmaning to‘rtta bo‘lagining har biriga ikkitadan nuqta tushish ehtimolligini toping. Nuqtaning kesmaga tushish ehtimolligi kesmaning uzunligiga proporsional bo‘lib, uning kamayishiga esa bog‘liq emas deb faraz qilinadi.

Javob: $P = C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$.

11. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x \le 0, \\ x^2, & \text{agar} \quad 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{agar} \quad x > 1. \end{cases}$$

4 ta bog‘liq bo‘lmagan tajriba natijasida ξ uzluksiz tasodifiy miqdor rosa 3 marta (0,25;0,75) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilishi ehtimolligini toping.

Javob: $P_4(3)=0,25$.

III bob bo‘yicha test topshiriqlari

1. Tanga 5 marta tashlanadi. «Gerbli» tomoni ikki martadan kam tushish ehtimolligini toping.

A) $P_5(0)+P_5(1)$ B) $P_5(5)+P_5(0)$ C) $P_5(1)$ D) $P_5(0)$.

2. Tanga 5 marta tashlanadi. «Gerbli» tomoni ikki marta tushish ehtimolligini toping.

A) $P_5(0)+P_5(1)$ C) $1-(P_5(5)+P_5(0))$
B) $1-(P_5(0)+P_5(1))$ D) $P_5(2)$.

3. Oilada 5 ta farzand bor. Bu bolalar orasida ikkita o‘g‘il bola bo‘lish ehtimolligini toping. O‘g‘il bolalar tug‘ilish ehtimolligini 0,51 ga teng deb oling.

A) 0,48 B) 0,31 C) 0,51 D) 0,5.

4. Oilada 5 ta farzand bor. Bu bolalar orasida ko'pi bilan ikki o'g'il bola bo'lish ehtimolligini toping. O'g'il bolalar tug'ilish ehtimolligini 0,51 ga teng deb oling.

A) 0,51 B) 0,2 C) 0,48 D) 1.

5. Hodisaning 25 ta bog'liqsiz tajribaning har birida ro'y berish ehtimolligi $p = 0,8$ ga teng. Hodisaning kamida 11 marta va ko'pi bilan 23 marta ro'y berish ehtimolligini toping.

A) 0,9331 B) 0,2321 C) 0,4831 D) 1.

6. Hodisaning 676 ta bog'liqsiz tajribaning har birida ro'y berish ehtimolligi 0,9 ga teng.Hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolligidan chetlanishi absolut qiymati 0,03 dan ortiq bo'lmaslik ehtimolligini toping.

A) 0,9906 B) 0,9331 C) 0,2321 D) 0,4831.

7. Hodisaning bog'liqsiz tajribalarning har birida ro'y berish ehtimolligi $p = 0,75$ ga teng. Hodisa ro'y berish nisbiy chastotasining uning ehtimolligidan chetlanishi absolut qiymati bo'yicha 0,03 dan ortiq bo'lmasligini 0,4972 ehtimollik bilan kutish mumkin bo'lishi uchun o'tkazilishi lozim bo'lgan tajribalar soni n ni toping.

A) 93 B) 91 C) 92 D) 94.

8. O'yin kubigi uch marta tashlanadi. Bunda ikki marta 6 ochko tushish hodisasining ehtimolligini toping.

A) $P_3(2) = \frac{5}{72}$ B) $P_3(2) = \frac{4}{72}$ C) $P_3(2) = \frac{5}{70}$ D) $P_3(2) = \frac{3}{71}$.

9. Tangani 8 marta tashlanadi. Bunda «gerbli» tomoni bilan 6 marta tushishi hodisasining ehtimolligini toping.

A) $\frac{7}{64}$ B) $\frac{6}{73}$ C) $\frac{9}{74}$ D) $\frac{5}{64}$.

10. Ixtiyoriy olingan detalning nostandart chiqish hodisasi ehtimolligi $p = 0,4$ ga teng. Tasodifan olingan 2400 ta detal orasidagi nostandart detallar sonining 1000 tadan 1060 tagacha bo'lishi hodisasining ehtimolligini toping.

A) $P_{2400}\,(1000,1060) = 0,0484$ C) $P_{2400}\,(960,1060) = 0,0472$
B) $P_{2400}\,(960,1060) = 0,0484$ D) $P_{2400}\,(960,1000) = 0,0484$.

11. Bitta o'q uzilganda nishonga tegish ehimolligi 0,8 ga teng. 100 ta o'q uzilganda rosa 75 ta o'qning nishonga tegish ehtimolligini toping.

A) $P_{100}\,(25) = 0,0397$ C) $P_{400}\,(20) = 0,0377$
B) $P_{100}\,(75) = 0,04565$ D) $P_{100}\,(75) = 0,4565$.

12. O'g'il bolalar tug'ilish ehtimolligi 0,51ga teng. Tug'ilgan 100 ta chaqaloqning 50 tasi o'g'il bola bo'lish ehtimolligini toping.

A) $P_{100}\,(25) = 0,0397$ C) $P_{100}\,(50) = 0,0782$
B) $P_{10}\,(50) = 0,04565$ D) $P_{100}\,(50) = 0,4565$.

13. Tanga $2N$ marta tashlanadi (N – katta son). «Gerbli» tomon rosa N marta tushish ehtimolligini toping.

A) $P_{2N}(N) = 0,5642/\sqrt{N}$ C) $P_{2N}(N) = 0,5642$
B) $P_{N}(2N) = 0,5642/\sqrt{N}$ D) $P_{2N}(N) = 0,5642/N$.

14. Hodisaning bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida ro'y berish ehtimolligi 0,8 ga teng. Hodisaning kamida 75 marta ro'y berishini 0,9 ehtimollik bilan kutish mumkin bo'lishi uchun nechta tajriba o'tkazish lozim?

A) 93 B) 91 C) 100 D) 101.

15. k ta tajribaning har birida ijobiy natija olish ehtimolligi 0,9 ga teng. Kamida 150 ta tajribada ijobiy natija olinishini 0,98 ehtimollik bilan kutish mumkin bo'lishi uchun nechta tajriba o'tkazish lozim?

A) 107 B) 177 C) 100 D) 101.

IV bob. TASODIFIY MIQDORLARNING SONLI XARAKTERISTIKALARI

IV bobni o'rganish natijasida talaba:

— Stiltes integrali;

— matematik kutilma va uning xossalari;

— matematik kutilmaning ehtimollik ma'nosi;

— dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanish;

— dispersiyaning xossalari;

— boshlang'ich va markaziy momentlar haqida

tasavvurga ega bo'lishi;

— matematik kutilma va uning xossalarini;

— dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanishni;

— boshlang'ich va markaziy momentlarni;

— yuqori tartibli momentlarni

bilishi va amalda qo'llay olishi;

— matematik kutilmaga doir misollar yechishni;

— dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanishga doir misollar yechishni;

— boshlang'ich va markaziy momentlarga doir misollar yechishni;

— yuqori tartibli momentlarga doir misollar yechishni

uddalashi lozim.

4.1-§. Stiltes integrali

Ehtimolliklar nazariyasining ko'p masalalari to'g'ri chiziqda aniqlangan funksiyalar uchun integral tushunchasini umumlashtirishni taqozo qiladi.

Biz bu paragrafda oddiy Riman integralining umumlashgan varianti, Stiltes integralining ta'rifini keltiramiz. Stiltes integralining asosiy xossalarini isbotsiz keltiramiz.

Faraz qilaylik, chekli (a,b) intervalda aniqlangan $f(x)$ funksiya va shu intervalda aniqlangan kamaymaydigan, variatsiyasi chegaralangan $F(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Aniqlik uchun $F(x)$ chapdan uzluksiz bo'lsin deb faraz qilamiz. (a,b) intervalni x_i, $i=0,1,2,\dots,n$ nuqtalar yordamida quyidagicha

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

n ta bo'lakka bo'lamiz va ushbu

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right] \tag{1}$$

yig'indini tuzamiz. Bu yerda $\overline{x}_i$ nuqta (x_{i-1},x_i) intervalga tegishli ixtiyoriy nuqtadir. Endi, bo'linish nuqtalarini sonini shunday orttiramizki, maksimal uzunlikka ega bo'lgan xususiy intervallarning uzunligi nolga intilsin. Agar shu holda I_n yig'indi

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right]$$

chekli limitga intilsa, bu limitni $f(x)$ funksiyadan $F(x)$ integrallovchi funksiya bo'yicha olingan *Stiltes integrali* deyiladi va

$$I = \int_a^b f(x)\,dF(x)$$

kabi belgilanadi.

Integral chegaralari cheksiz bo'ladigan Stiltesning xosmas integrali quyidagicha aniqlanadi: ixtiyoriy $[a,b]$ chekli oraliqda Stiltes integrali olinadi hamda a va b sonlar ixtiyoriy ravishda $-\infty$ va $+\infty$ ga intilganidagi

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,dF(x)$$

limit qaraladi. Agar bunday mavjud bo'lsa, bu limitni $f(x)$ funksiyadan $F(x)$ funksiya bo'yicha $(-\infty; +\infty)$ oraliqda olingan Stiltes integrali deyiladi va

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF(x)$$

kabi belgilanadi.

Shuningdek, $f(x)$ funksiya uzluksiz va chegaralangan bo'lsa, (1) yig'indining limiti integrallash oraliqlari chekli bo'lganda ham, cheksiz bo'lganda ham mavjudligini isbotlash qiyin emas. Ba'zi hollarda $f(x)$ funksiya chegaralanmagan bo'lganda ham Stiltes integrali mavjud bo'ladi.

Bunday integrallarni qarash ehtimolliklar nazariyasi uchun (matematik kutilma, dispersiya, momentlar va boshqalarni o'rganishda) muhim ahamiyatga egadir.

Bundan keyin hamma yerda $|f(x)|$ funksiyaning $F(x)$ funksiya bo'yicha olingan integrali mavjud bo'lgandagina $f(x)$ funksiyaning $F(x)$ funksiya bo'yicha olingan integrali mavjud deb qaraymiz.

Ehtimolliklar nazariyasining maqsadlarini e'tiborga olib, Stiltes integralining ta'rifini $f(x)$ funksiya chekli yoki sanoqli sonda uzilish nuqtalariga ega bo'lgan hol uchun kengaytirish muhimdir.

Har qanday chegaralangan hamda chekli yoki sanoqli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo'lgan funksiya variatsiyasi chegaralangan ixtiyoriy integrallovchi funksiya bo'yicha integrallanuvchidir. Bu holda uzilish nuqtalarini intervalning bo'linish nuqtalari sifatida olishga to'g'ri keladi. Shuningdek, integral chegaralarini ko'rsatishda bu chegara integrallash oralig'iga tegishli bo'lishi yoki tegishli bo'lmasligini ko'rsatish muhimdir. Haqiqatdan ham, Stiltes integralining ta'rifidan quyidagiga ega bo'lamiz. ($a-0$ simvol a ni integrallash oralig'iga tegishli bo'lishi, $a+0$ simvol esa a ni integrallash oralig'idan chiqarib tashlanganligini bildiradi):

$$\int_{a-0}^{b} f(x)dF(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n} f(\overline{x}_i)\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right] + \lim_{x_1\to x_0=a} f(\tilde{x}_i)F(x_1)-F(x_0) =$$

$$= \int_{a+0}^{b} f(x)dF(x) + f(a)\left[F(a+0)-F(a)\right].$$

Shunday qilib, agar $f(a)\neq 0$ va $F(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada sakrashga ega bo'lsa, u holda

$$\int_{a-0}^{b} f(x)dF(x) - \int_{a+0}^{b} f(x)dF(x) = f(a)\left[F(a+0) - F(a)\right].$$

Bu ifoda shuni ko'rsatadiki, bitta nuqtaga keltiriladigan oraliq bo'yicha olingan Stiltes integrali noldan farqli natija berishi mumkin.

Keyingi yozuvlarimizda, agar alohida ko'rsatma berilmagan bo'lsa, oraliqning oxirgi nuqtasini integrallash oralig'idan chiqarib tashlaymiz, boshlanish nuqtasini esa integrallash oralig'iga kiritilishini kelishib olamiz. Bu shart quyidagi tenglikni yozishga imkon beradi:

$$\int_{a}^{b} dF(x) = F(b) - F(a).$$

Haqiqatdan ham, ta'rifga asosan,

$$\int_{a}^{b} dF(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[F(x_n) - F(x_0)\right] = F(b) - F(a),$$

chunki $F(x)$ funksiya chapdan uzluksiz bo'lgani uchun $F(b) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Agar $F(x)$ funksiya $p(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda chekli orttirmalar formulasiga asosan

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = p(\overline{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

munosabatni yozamiz, bunda $x_{i-1} < \overline{x}_i < x_i$,

$$\int_{a}^{b} f(x)dF(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\, p(\overline{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_{a}^{b} f(x)\, p(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘lib, Stiltes integrali oddiy integralga keltiriladi. Agar $F(x)$ funksiya $x=c$ nuqtada sakrashga ega bo‘lsa, oraliqlarni bo‘lishni shunday tanlaymizki, $x_k < c < x_{k+1}$ bo‘lganda

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{k} f(\bar{x}_i)\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right]+\right.$$

$$\left.+f(c)\left[F(x_{k+1})-F(x_k)\right]\right\}+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=k+2}^{n} f(\bar{x}_i)F(x_i)-F(x_{i-1})\big]=$$

$$=\int_a^c f(x)dF(x)+\int_{c+0}^{b} f(x)dF(x)+f(c)\left[F(c+0)-F(c)\right]$$

ga ega bo‘lamiz. Xususiy holda $F(x)$ funksiyaning sakrashlari $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ nuqtalarda bo‘lsa, u holda Stiltes integrali qator ko‘rinishida ifodalanadi:

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(c_n)\left[F(c_n+0)-F(c_n)\right].$$

Stiltes integrali quyidagi xossalarga ega:

1) $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$ bo‘lganda

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \sum_{i=0}^{n}\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dF(x), \quad \left[a=c_0,\ b=c_{n+1}\right];$$

2) $\int_a^b c\, f(x)dF(x) = c\int_a^b f(x)d\,F(x);$

3) $\int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(x)dF(x) = \sum_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(x)dF(x);$

4) $f \geq 0$ va $a < b$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dF(x) \geq 0;$

5) agar $F_1(x)$, $F_2(x)$ lar o'zgarishi (variatsiyasi) chegaralangan monoton funksiyalar va c_1, c_2 lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)d[c_1F_1(x)+c_2F_2(x)] = c_1\int_a^b f(x)dF_1(x)+c_2\int_a^b f(x)dF_2(x)$$

bo'ladi;

6) Agar $F(x)=\int_c^x g(u)dG(u)$, c – o'zgarmas son, $g(u)$ – uzluksiz funksiya, $G(u)$ – chegaralangan variatsiyali kamaymaydigan funksiya bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)g(x)dG(x)$$

bo'ladi.

4.2-§. Matematik kutilma, uning ehtimollik ma'nosi va xossalari

Tasodifiy miqdor haqida to'liq ma'lumotni uning taqsimot funksiyasi yordamida olish mumkinligi bizga ma'lum. Haqiqatan ham taqsimot funksiya tasodifiy miqdorning qaysi qiymatlarni qanday ehtimolliklar bilan qabul qilishini aniqlashga imkon beradi. Lekin ba'zi hollarda tasodifiy miqdor haqida kamroq ma'lumotlarni bilish ham yetarli bo'ladi. Ehtimolliklar nazariyasi va uning amaliyotdagi tadbiqlarida tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari orqali ma'lum qoidalar asosida topiladigan ba'zi o'zgarmas sonlar muhim rol o'ynaydilar. Bunday sonlar orasida tasodifiy miqdorlarning umumiy miqdoriy xarakteristilalarini bilish uchun matematik kutilma, dispersiya va turli tartibdagi momentlar juda muhimdir.

Tasodifiy miqdorning biz dastlab tanishadigan asosiy sonli xarakteristikasi uning matematik kutilmasidir.

ξ diskret tasodifiy miqdor $\{x_k\}$ qiymatlarni $\{p_k\}$ ehtimolliklar bilan qabul qilsin. Unda,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1\,.$$

1-ta'rif. ξ diskret tasodifiy miqdorning ***matematik kutilmasi*** deb, ushbu

$$E\xi = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k$$

tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdorlarning mumkin bo'lgan qiymatlari soni cheksiz bo'lishi ham mumkin. Bu holda $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ va matematik kutilmani ta'riflash uchun

$$E\xi = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_k \cdot p_k + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \qquad (1)$$

qatordan foydalaniladi. Matematik kutilma mavjud bo'lishi uchun (1) qatorni absolut yaqinlashuvchi deb faraz qilinadi.

Ba'zi misollarni qarab chiqamiz.

1-misol. A hodisaning ro'y berish ehtimolligi p ga teng bo'lsa, bitta tajribada A hodisa ro'y berish sonining matematik kutilmasini toping.

Yechish. Bitta tajribada A hodisaning ro'y berish sonini ξ deb belgilaylik. U holda

$$\begin{array}{ccc} \xi: & 0 & 1 \\ P: & q & p, \end{array}$$

bu yerda $p + q = 1$ va 1-ta'rifga asosan, $E\xi = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$.

2-misol. (n,p) parametrli binomial qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. ξ orqali A hodisaning n ta bog'liqsiz tajribalarda ro'y berish sonini belgilasak, $P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, k=0,1,...,n tenglik o'rinli ekani bizga ma'lum. Matematik kutilma ta'rifiga ko'ra

$$E\xi = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(q+p)^{n-1} = n \cdot p.$$

3-misol. Puasson qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. $P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ tenglik o'rinli ekani bizga ma'lum.

Uning taqsimot qonunini ushbu jadval ko'rinishida yozamiz.

x_i	0	1	2	...	m	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	...

Matematik kutilmasi uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$E\xi = 0 \cdot e^{-\lambda} + 1 \cdot \frac{\lambda}{1} e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \ldots + m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} + \ldots =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots \right).$$

Qavs ichidagi qator e^{λ} funksiyaning Makloren qatoriga yoyilmasidir. Shuning uchun matematik kutilma $E\xi = \lambda$. Shunday qilib, biz Puasson taqsimot qonuniga kirgan λ parametrning ehtimolliy ma'nosini topdik: λ parametr tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga teng.

ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $p(x)$ bo'lsin.

2-ta'rif. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb, ushbu

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx \tag{2}$$

integralga (agar bu integral absolut yaqinlashuvchi bo'lsa) aytiladi.

4-misol. (a, σ^2) parametrli normal qonun bilan taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. Ta'rifga asosan

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx +$$

$$+ \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + a = a.$$

Demak, (a,σ^2) parametrli normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi a parametrga teng ekan.

5-misol. $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi quyidagicha topiladi:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{a} x\cdot 0dx + \int_{a}^{b} x\cdot\frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{+\infty} x\cdot 0dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b\right) = \frac{b+a}{2}.$$

6-misol. μ parametrli eksponensial qonun bo'yicha taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx + \int_{0}^{+\infty} x\cdot\mu e^{-\mu x}dx =$$

$$= x\cdot\left(-e^{-\mu x}\right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\mu x}dx = \left(-\frac{1}{\mu}e^{-\mu x}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\mu}.$$

3-ta'rif. Taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$ kabi aniqlanadi.

Tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi hamma vaqt ham mavjud bo'lavermasligini eslatib o'tamiz. Masalan, tasodifiy miqdor Koshi qonuni bilan taqsimlangan bo'lsin. U holda uning zichlik funksiyasi

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},\ |x| \le \infty,$$

ko'rinishda bo'ladi va

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

integral mavjud bo'lmaydi.

Matematik kutilmaning ehtimollik ma'nosi.

ξ tasodifiy miqdor ustida n ta bog'liqsiz tajriba o'tkazilgan bo'lsin. Tajriba natijalari ushbu jadvalda keltirilgan:

$$\xi: \; x_1 \; x_2 \; \dots \; x_k$$
$$n: \; n_1 \; n_2 \; \dots \; n_k$$

Yuqori satrda ξ miqdorning kuzatilgan qiymatlari, pastki satrda esa mos qiymatlarning chastotalari ko'rsatilgan, ya'ni n_1 son n_1 ta tajribada ξ miqdor x_1 ga teng qiymat qabul qilganligini bildiradi va hokazo.

$\overline{X}$ orqali kuzatilgan barcha qiymatlarning o'rta arifmetigini belgilaylik, u holda,

$$\overline{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot x_k}{n},$$

yoki

$$\overline{X} = x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \dots + x_k \cdot \frac{n_k}{n} = x_1 \cdot p_1^* + x_2 \cdot p_2^* + \dots + x_k p_k^*.$$

Bu yerda $p_1^*, p_2^*, \dots, p_k^*$ – mos ravishda $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymatlarning nisbiy chastotalari. Tajribalar soni yetarlicha katta bo'lganda $p_1^* \approx p_1, \dots, p_k^* \approx p_k$ bo'ladi. Shuning uchun $\overline{X} \approx E\xi$, ya'ni ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uning kuzatiladigan qiymatlari o'rta arifmetigiga taqriban teng.

Matematik kutilma quyidagi ***xossalar***ga ega:

1-xossa. O'zgarmas sonning matematik kutilmasi shu sonning o'ziga teng.

Isbot: c o'zgarmas sonni faqat bitta c qiymatni 1 ehtimollik bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdor deb qarash mumkin. Shuning uchun $Ec = c \cdot 1 = c$.

2-xossa. $|E\xi| \le E|\xi|$ tengsizlik o'rinli.

Bu xossaning isboti matematik kutilmaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

3-xossa. $E\xi$, $E\eta$ va $E(\xi + \eta)$ larning ixtiyoriy ikkitasi mavjud bo'lsa, u holda ushbu $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Isbotni diskret hol uchun keltiramiz. Faraz qilaylik, ξ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ ehtimolliklar bilan, η tasodifiy miqdor esa $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$

qiymatlarni mos ravishda q_1, q_2, ... q_k, ... ehtimolliklar bilan qabul qilsin, u holda $\xi+\eta$ yig'indining qabul qiladigan qiymatlari $\{x_k + y_l\}$ $(k = 1,2,.., l = 1,2...)$ ko'rinishdagi sonlardan iborat.

$p_{k,l}$ orqali ξ ning x_k va η ning y_l qiymatlarni qabul qilish ehtimolligini belgilaymiz. U holda to'la ehtimollik formulasiga asosan

$$E(\xi+\eta) = \sum_{k,l=1}^{\infty}(x_k + y_l)\, p_{k,l} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left(\sum_{l=1}^{\infty} p_{k,l}\right) + \sum_{l=1}^{\infty} y_l \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_{k,l}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k + \sum_{l=1}^{\infty} y_l q_l = E\xi + E\eta.$$

1-natija. $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi shu tasodifiy miqdorlar matematik kutilmalarining yig'indisiga teng, ya'ni $E\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E\xi_k$.

4-xossa. O'zgarmas sonni matematik kutilma ishorasidan tashqariga chiqarib yozish mumkin: $Ec\xi = cE\xi$, $c = const$.

Isbot. Isbotni diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun alohida-alohida keltiramiz.

1-ta'rifdan va (1) dan foydalanib, diskret tasodifiy miqdor uchun ushbu

$$E(c\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} c x_i p_i = c\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = cE\xi$$

natijani hosil qilamiz.

(2) formulaga asosan uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ushbu

$$E(c\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} cxp(x)dx = c\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = cE\xi.$$

5-xossa. ξ va η tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmasin. Agar $E\xi$ va $E\eta$ mavjud bo'lsa, u holda $E\xi\eta$ mavjud bo'ladi va $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$.

Isbot. Faraz qilaylik, ξ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, ..., p_k, ...$ ehtimolliklar bilan, η tasodifiy miqdor $y_1, y_2, ..., y_k, ...$ qiymatlarni mos ravishda $q_1, q_2, ... q_k, ...$ ehtimolliklar bilan qabul qilsin.

ξ va η tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liqsizligidan $\xi \cdot \eta$ tasodifiy miqdor $x_i \cdot y_j$ ko'rinishdagi qiymatlarni $p_i q_j$ ehtimollik bilan qabul qiladi, natijada

$$E\xi\eta = \sum_{i,j} x_i y_j P(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_{i,j} x_i y_j p_i q_j =$$

$$= \sum_i x_i p_i \left(\sum_j y_j q_j \right) = E\xi E\eta.$$

teoremaning teskarisi doim ham to'g'ri emas, ya'ni $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$ ekanligidan ξ va η ning o'zaro bog'liq bo'lmasligi kelib chiqmaydi.

6-xossa. Agar $\alpha \leq \xi \leq \beta$ bo'lsa, $\alpha \leq E\xi \leq \beta$.

7-xossa. Agar nomanfiy ξ tasodifiy miqdor uchun $E\xi = 0$ bo'lsa, u holda $\xi = 0$ tenglik 1 ehtimollik bilan bajariladi.

Yuqoridagi 6- va 7-xossalarni isbot qilishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

4.3-§. Dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanish. Dispersiyaning xossalari

Oldingi paragrafda biz tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymatini xarakterlovchi sonli xarakteristikalardan biri – matematik kutilma bilan tanishdik. Biroq tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymatinigina bilish bilan uning qiymatlarining qanday joylashganligini ko'z oldimizga keltira olmaymiz. Masalan, +1 va –1 qiymatlarning har birini 0,5 ga teng ehtimollik bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdor uchun ham, +100 va –100 qiymatlarning har birini xuddi shunday ehtimolliklar bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdor uchun ham matematik kutilma bir xil va nolga teng, shunga qaramasdan bu miqdorlar qiymatlarining umumiy matematik kutilmaga nisbatan tarqoqligi har xildir.

Tasodifiy miqdorning uning o'rtacha qiymatidan chetlanishini xarakterlash, ya'ni bu miqdor qiymatlarining tarqoqligini xarakterlash uchun uning boshqa sonli xarakteristikasi — dispersiyasi kiritiladi.

1-ta'rif. Tasodifiy miqdorning *dispersiyasi* deb, shu tasodifiy miqdor va uning matematik kutilmasi orasidagi ayirma kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2. \tag{1}$$

Agar ξ tasodifiy miqdor x_k qiymatlarni mos p_k ehtimolliklar bilan qabul qilsa (k=1,2,...), $\eta = (\xi - E\xi)^2$ tasodifiy miqdor $(x_k - E\xi)^2$ qiymatlarni ham p_k ehtimolliklar bilan qabul qiladi va shu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uchun

$$E\eta = D\xi = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - E\xi)^2\, p_k \tag{2}$$

formula o'rinli bo'ladi.

ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini ushbu formula bilan hisoblash qulaydir:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2. \tag{3}$$

Haqiqatan ham, matematik kutilmaning xossalaridan foydalanib, (3) ni isbotlash mumkin:

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\left(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2\right) =$$

$$= E\xi^2 - 2E\xi \cdot E\xi + E(E\xi)^2 = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2.$$

1-misol. *A* hodisaning ro'y berish ehtimolligi *p* ga teng bo'lsa, bitta tajribada *A* hodisa ro'y berish sonining dispersiyasini toping.

Yechish. Tasodifiy miqdorni quyidagicha kiritib

$$\xi = \begin{cases} 0, & q = 1 - p \text{ ehtimollik bilan,} \\ 1, & p \text{ ehtimollik bilan,} \end{cases}$$

$E\xi = p$ ekanini e'tiborga olsak, (2) ga asosan

$$D\xi = (0 - E\xi)^2 \cdot q + (1 - E\xi)^2\, p = p^2 q + (1-p)^2\, p =$$

$$= p^2 q + q^2 p = pq(p+q) = p \cdot q.$$

2-misol. Binomial qonun bilan taqsimlagan tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. 4.1-§ ning, 2-misoliga ko'ra $E\xi = np$ edi. $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$ tenglikka asosan

$$D\xi = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2 = np\left[(n-1)p\sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} q^{n-k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}\right] - (np)^2 = np((n-1)p+1) - (np)^2 = npq.$$

3-misol. Puasson qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. Shu bobdagi 4.1-§ ning, 3-misoliga asosan $E\xi = \lambda$; (3) tenglikka ko'ra

$$D\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \lambda^2 . \tag{4}$$

Dastlab qatorning yig'indisini hisoblaymiz,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda\left[\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\right] = \lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda .$$

Buni (4) munosabatga qo'ysak, $D\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Demak, Puasson qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi λ parametrga teng ekan.

Endi uzluksiz tasodifiy miqdor dispersiyasining ta'rifini beramiz. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bo'lsin.

2-ta'rif. Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb quyidagi

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 \, p(x)dx$$

integralning qiymatiga aytiladi.

4-misol. (a,σ^2) – parametrli normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. $E\xi = a$ ekanini e'tiborga olgan holda

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

$\frac{x-a}{\sigma} = z$ almashtirishni kiritib, u holda $dx = \sigma dz$ bo'ladi va quyidagini hosil qilamiz:

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz .$$

Hosil bo'lgan integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$D\xi = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot z e^{-\frac{z^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sigma^2 .$$

Demak, (a,σ^2) – parametrli normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasi σ^2 teng ekan.

5-misol. $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. $E\xi = \frac{a+b}{2}$ ekanini hisobga olsak,

$$D\xi = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^2-a^2}{12} .$$

6-misol. μ parametrli eksponensial qonun bo'yicha taqsimlangan η tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. 4.2-§ dagi 6-misolda hisoblangan $E\xi = \frac{1}{\mu}$ ni e'tiborga olib, (3) formuladan foydalanaylik. Bu holda

$$D\xi = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \mu e^{-\mu x} dx - \frac{1}{\mu^2} = x^2 \cdot (-e^{-\mu x})\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x \cdot (-e^{-\mu x}) dx - \frac{1}{\mu^2} =$$

$$= 2\left(x \cdot \left(-\frac{e^{-\mu x}}{\mu} \right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\mu x}}{\mu} dx \right) - \frac{1}{\mu^2} = -\frac{2e^{-\mu x}}{\mu^2}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}.$$

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi tasodifiy miqdor bilan uning matematik kutilmasi orasidagi ayirmaning – farqning kvadratiga bog‘liq ekaniga e’tibor beraylik. Bu farq qanchalik katta bo‘lsa, dispersiyaning qiymati ham shuncha katta va aksinchadir. Shuning uchun dispersiya qiymatini qaralayotgan tasodifiy miqdor qiymatlarining ularning o‘rta qiymatiga nisbatan tarqoqlik xarakteristikasi deb qarash mumkin.

Dispersiya quyidagi ***xossalar***ga ega:

1-xossa. O‘zgarmas sonning dispersiyasi 0 ga teng.

Isbot. 1-ta’rifga asosan

$$Dc = E(c - Ec)^2 = E(c - c)^2 = E0 = 0.$$

2-xossa. Agar tasodifiy miqdor o’zgarmas songa ko’paytirilsa, u holda o’zgarmas sonni kvadratga oshirib, dispersiya ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni

$$Dc\xi = c^2 D\xi.$$

Isbot. Dispersiyasining ta’rifi bo‘yicha

$$D(c\xi) = E(c\xi - Ec\xi)^2 = E(c\xi - cE\xi)^2 = c^2 E(\xi - E\xi)^2 = c^2 D\xi.$$

3-xossa. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar yig‘indisining dispersiyasi bu tasodifiy miqdorlar dispersiyalarining yig‘indisiga teng:

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Isbot. Ta’rifga asosan

$$D(\xi + \eta) = E\left((\xi + \eta) - E(\xi + \eta)\right)^2.$$

Matematik kutilmaning xossasidan foydalansak,

$$D(\xi + \eta) = E\left((\xi - E\xi) + (\eta - E\eta)\right)^2 =$$
$$= E(\xi - E\xi)^2 + 2E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) + E(\eta - E\eta)^2 =$$
$$= D\xi + 2E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) + D\eta. \quad (5)$$

Endi $\xi - E\xi$ va $\eta - E\eta$ tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liqsizligini hisobga olsak, u holda

$$E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E(\xi - E\xi) \cdot E(\eta - E\eta) = 0$$

bo'ladi.

Buni e'tiborga olsak, (5) formuladagi 3-xossaning isboti kelib chiqadi.

Natija. Chekli sondagi o'zaro bog'liq bo'lmagan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi ularning dispersiyalari yig'indisiga teng:

$$D\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k \, .$$

Bu natijaning isboti kitobxonga havola qilinadi.

Ta'rif. tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi deb dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma = \sqrt{D\xi} \, .$$

O'rtacha kvadratik chetlanish σ amaliyot masalalarida ko'p ishlatiladi.

4.4-§. Yuqori tartibli momentlar

Tasodifiy miqdorlarning boshqa sonli xarakteristikalariga ham to'xtalib o'tamiz. Bunday xarakteristikalar sifatida ko'p hollarda yuqori tartibli momentlar ishlatiladi.

Agar ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lsa,

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x) = E\xi^k , \quad k \geq 0$$

integral tasodifiy miqdorning *k-tartibli momenti* yoki *k-tartibli boshlang'ich momenti* deyiladi. Tushunarliki, agar

$$E|\xi|^k = \beta_k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \, dF(x) < \infty$$

integral yaqinlashuvchi bo'lsa, k-tartibli m_k moment mavjud bo'ladi $(|m_k| \leq \beta_k)$. Ehtimolliklar nazariyasida m_k momentning mavjudligini β_k k-tartibli absolut moment mavjud bo'lgan hol bilan tenglashtiriladi.

Agar ξ tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasi $F(x)$ diskret tipda bo'lib, uning uzilish nuqtalari

$$x_1, x_2, ..., x_k, ...$$

ketma-ketlikni tashkil qilsa, u holda Stiltes integralining xossasiga ko'ra k-tartibli moment

$$m_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k P_n$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda

$$P_n = F(x_n + 0) - F(x_n - 0) = F(x_n + 0) - F(x_n) = P(\xi = x_n)$$

bo'lib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^k P_n < \infty$$

qator yaqinlashadi deb faraz qilinadi.

Agar ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ uzulksiz tipda bo'lib, $f(x)$ funksiya uning zichlik funksiyasi bo'lsa ($F'(x) = f(x)$), u holda Stiltes integralining xossasiga asosan

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, \quad k \geq 0$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu holda esa

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x)dx < \infty$$

integral yaqinlashadi deb faraz qilinadi. Nolinchi tartibdagi moment doim mavjud va

$$m_0 = F(+\infty) - F(-\infty) = 1.$$

Birinchi tartibli moment

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x) = E\xi$$

ξ tasodifiy miqdorning o'rta qiymati yoki matematik kutilmasi bo'ladi. Agar c o'zgarmas son bo'lsa,

$$E(\xi - c)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^k \, dF(x)$$

integralga ξ tasodifiy miqdorning c ga nisbatan k-tartibli momenti deyiladi. Matematik kutilmaga nisbatan momentlar

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k \, dF(x) = E(\xi - E\xi)^k$$

ξ tasodifiy miqdorning k-tartibli markaziy momentlari deb ataladi.

Bu yerda $(x - m_1)^k$ ifodani Nyuton binomi formulasi bilan ochib chiqib, quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0,$$
$$\alpha_2 = m_2 - m_1^2,$$
$$\alpha_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^2,$$
$$\alpha_4 = m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4$$

va hokazo. Ular k-tartibli momentlar m_k larni markaziy momentlar α_k bilan bog'laydilar. O'zgarmas c ga nisbatan ikkinchi tartibli moment uchun

$$E(\xi - c)^2 = E\left[(\xi - m_1) + (m_1 - c)\right]^2 = \alpha_2 + (m_1 - c)^2 \geq \alpha_2$$

munosabatga ega bo'lamiz va undan

$$\alpha_2 = \min_c E(\xi - c)^2 = E(\xi - m_1)^2 \qquad (*)$$

tenglikni olamiz. Ma'lumki, bu moment tasodifiy miqdor ξ ning dispersiyasi deb ataladi va ξ uchun asosiy sonli xarakteristikalardan hisoblanadi. Isbot etilgan (*) munosabatni ξ tasodifiy miqdor dispersiyasining ta'rifi sifatida qabul qilinishi mumkin.

Agar $E\xi = 0$ bo'lsa, markaziy moment boshlang'ich momentga teng bo'ladi.

ξ tasodifiy miqdorning *k-tartibli markaziy absolut momenti* deb

$$E|\xi - E\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x - E\xi|^k \, dF(x)$$

ifodaga aytiladi.

Xususan, agar $E\xi = 0$ bo'lsa, k-tartibli markaziy absolut moment k-tartibli boshlang'ich absolut moment bilan ustma-ust tushadi.

Quyida momentlarga doir ba'zi muhim tengsizliklarni ko'rib chiqamiz.

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. Ikkinchi tartibli momentga ega ixtiyoriy ξ va η tasodifiy miqdorlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$E|\xi\eta| \le \sqrt{E\xi^2} \cdot \sqrt{E\eta^2}.$$

Isbot. Ma'lumki, $|\xi\eta| \le \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$ hamda $E\xi^2$ va $E\eta^2$ momentlar chekliligidan $E|\xi\eta| < \infty$ ekani kelib chiqadi. x va y o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan musbat aniqlangan ushbu

$$E(x|\xi| + y|\eta|)^2 = x^2 E\xi^2 + 2xyE(|\xi| \cdot |\eta|) + y^2 E\eta^2$$

kvadratik formaning diskriminanti

$$(2E(\xi\eta))^2 - 4E\xi^2 E\eta^2 \le 0$$

bundan esa (1) tengsizlikning o'rinlili ekani kelib chiqadi.

Gyolder tengsizligi. Aytaylik, 1 ehtimolik bilan $\xi \ge 0$, $\eta \ge 0$ va p, q sonlar uchun $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ munosabatlar o'rinli bo'lsin.

Agar $E\xi^p < \infty$ va $E\eta^q < \infty$ bo'lsa, u holda

$$E\xi\eta \le (E\xi^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (E\eta^q)^{\frac{1}{q}}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Gyolder tengsizligida $p=q=2$ deb olinsa, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

Ko'p hollarda berilgan ξ tasodifiy miqdorning chiziqli kombinatsiyalari bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi, ularning yuqori tartibli momentlari uchun

$$E(a\xi + b)^k = a^k m_k + C_k^1 a^{k-1} b m_{k-1} + \ldots + b^k$$

formulani isbot etish mumkin.

Endi yuqori tartibli ($k \geq 2$) absolut momentlar – β_k larga tegishli quyidagi xossani isbotlaylik. Buning uchun u va v o‘zgaruvchilarga nisbatan

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u|x|^{\frac{k-1}{2}} + v|x|^{\frac{k+1}{2}}]^2 \, dF(x) = \beta_{k-1}u^2 + 2\beta_k uv + \beta_{k+1}v^2 \geq 0$$

manfiy bo‘lmagan kvadratik formani ko‘raylik. Bu kvadratik formaning determinantini hisoblab,

$$\beta_k^{2k} \leq \beta_{k+1}^k \cdot \beta_{k+1}^k$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikda navbati bilan k=1,2,... deb hisoblansa,

$$\beta_1{}^2 \leq \beta_2, \quad \beta_2{}^4 \leq \beta_1{}^2\beta_3{}^2, \quad \beta_3{}^6 \leq \beta_2{}^3 \cdot \beta_4{}^3 \ldots.$$

Hosil bo‘lgan tengsizliklarni o‘zaro ko‘paytirsak,

$$\beta_k^{k+1} \leq \beta_{k+1}^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Oxirgidan esa

$$\beta_k^{\frac{1}{k}} \leq \beta_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

ekanligi kelib chiqadi. Xususan,

$$\beta_1 \leq \beta_2^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_2^{\frac{1}{2}} \leq \beta_3^{\frac{1}{3}}, \ldots$$

va bu tengsizliklar *Lyapunov tengsizliklari* deb ataladi.

Ixtiyoriy taqsimot funksiya $F(x)$ ning hamma tartibdagi momentlari

$$m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$$

mavjud bo‘lsin. Bu momentlar $F(x)$ funksiyani bir qiymatli aniqlaydi degan masalani qo‘yamiz. Bu masala matematik analizdagi «momentlar problemasi» deb ataladigan umumiy masala bilan bog‘liq va uning yechimidan quyidagi natija kelib chiqadi. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{n!} r^n < \infty$$

qator biror $r > 0$ uchun yaqinlashsa. $F(x)$ funksiya $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ momentlarga ega bo‘lgan yagona funksiya bo‘ladi.

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi (ikkinchi tartibli markaziy momenti) bu miqdor qiymatlarining o'rta qiymat atrofida qanday tarqoqlik bilan joylashganligini xarakterlaydi. Shundan kelib chiqib, yuqori tartibdagi momentlarning ehtimollik ma'nolari haqida to'xtalib o'tamiz.

Agar $F(x)$ simmetrik taqsimot funksiyasi (ya'ni simmetrik ξ tasodifiy miqdor) bo'lsa, uning hamma toq tartibdagi momentlari 0 ga teng bo'ladi (albatta shu momentlar mavjud bo'lganda). Bunga bu taqsimot uchun

$$F(-x) = 1 - F(x), \quad x > 0$$

tenglik o'rinli ekanligidan ishonch hosil qilish mumkin. Demak, hamma 0 ga teng bo'lmagan toq tartibdagi momentlarni taqsimotning asimmetriklik xarakteristikasi sifatida qabul qilish mumkin. Shu ma'noda eng sodda asimmetriklik xarakteristikasi sifatida, berilgan taqsimotning 3-tartibli momenti olinadi. Masshtab bir jinsligini hisobga olgan holda

$$\gamma = \frac{\alpha_3}{\sigma^3}, \quad \sigma^2 = D\xi$$

ifodani taqsimotning asimmetriklik koeffitsiyenti deb qabul qilinadi. Juft tartibli (dispersiyaga nisbatan yuqori tartibli) momentlarga ehtimollik ma'nosi berish mumkin. Masalan,

$$\gamma_e = \frac{\alpha_4}{\sigma^4} - 3$$

ifoda $F(x)$ taqsimotning ekssess koeffitsiyenti deb atalib, u $F(x)$ ning «markaz» (o'rta qiymat) atrofidagi «silliqlik» darajasini xarakterlaydi.

Berilgan taqsimotning momentlari mavjudligini tekshirib ko'rish qiyin bo'lmaydi, chunki bu masala «chap qoldiq» $F(-x)$ va «o'ng qoldiq» $(1 - F(x))$ ning $x \to \infty$ dagi asimptotikalariga bog'liq. Masalan,

$$F(-x) = O(x^{-k}),$$
$$1 - F(x) = O(x^{-k}), \quad x \to \infty$$

bo'lsa, bu taqsimot uchun $v > k$ tartibdagi hamma momentlar mavjud bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ta'rifini bering.
2. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ta'rifini bering.
3. Matematik kutilmaning ehtimollik ma'nosini aytib bering.
4. Matematik kutilmaning asosiy xossalarini aytib bering.
5. Tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalarini topishga misollar keltiring.
6. Tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb nimaga aytiladi? Uning vazifasi nimadan iborat?
7. Dispersiyaning asosiy xossalarini aytib bering.
8. O'rtacha kvadratik chetlanish deb nimaga aytiladi?
9. Dispersiyani hisoblash formulasini yozing.
10. Binomial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi nimaga teng?
11. Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblang.
12. ξ tasodifiy miqdorning k-tartibli boshlang'ich momenti deb nimaga aytiladi?
13. ξ tasodifiy miqdorning k-tartibli markaziy momenti deb nimaga aytiladi?
14. ξ tasodifiy miqdorning k-tartibli absolut momenti deb nimaga aytiladi?
15. ξ tasodifiy miqdorning k-tartibli markaziy absolut momenti deb nimaga aytiladi?
16. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini yozing.
17. Gyolder tengsizligini yozing.

Misol va masalalar

1. Agar $E\xi = 3$, $D\xi = 16$ ekanligi ma'lum bo'lsa, normal taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

Javob: $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$.

2. ξ uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi $f(x)$ bilan berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x<0, \\ 5e^{-5x}, & \text{agar } x\geq 0. \end{cases}$$

$E\xi$ ni toping.

Javob: $E\xi = 0{,}2$.

3. Taqsimot funksiyasi $F(x)=1-e^{-0,1x}$ $(x>0)$ bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotga ega ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Javob: $D\xi = 100$.

4. Qopda 7 ta olma bo'lib, ularning to'rttasi oq, qolganlari qizil. Qopdan tavakkaliga 3 ta olma olinadi. ξ – olingan oq olmalar soni. $E\xi$ ni toping.

Javob: $E\xi = 1\frac{5}{7}$.

5. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

ξ:	-1	2	3
P:	0,3	0,2	0,5

matematik kutilmasini toping.

Javob: $E\xi = 1{,}6$.

6. ξ tasodifiy miqdor $[0;1]$ kesmada $f(x)=3x^2$ zichlik funksiyasi bilan berilgan, bu kesmadan tashqarida $f(x)=0$. Matematik kutilmasini toping.

Javob: $E\xi = 0{,}75$.

7. ξ diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

ξ:	2	3	5
P:	0,1	0,4	0,5

Ikkinchi tartibli boshlang'ich momentini toping.

Javob: 16,5.

8. ξ diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

ξ:	1	2	4
P:	0,1	0,3	0,6

Dispersiyani toping.
Javob: 1,29.

9. ξ diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

ξ:	1	3
P:	0,4	0,6

Uchinchi tartibli boshlang'ich momentini toping.
Javob: 16,6.

10. Partiyadagi 100 ta mahsulotning 10 tasi nosoz. Tekshirish uchun partiyadan 5 ta mahsulot tasodifiy ravishda tanlab olinadi. Tanlanmadagi nosoz mahsulotlar sonining matematik kutilmasini toping.
Javob: $E\xi = 0,5$.

IV bob bo'yicha test topshiriqlari

1. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan ξ diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping:

ξ:	0	1	3
P:	1/6	2/3	1/6

A) 4/3 B) 1/3 C) 1 D) 7/6.

2. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan ξ diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping:

ξ:	0,21	0,54	0,61
P:	0,1	0,5	0,4

A) 5 B) 0,5 C) 0,535 D) 0,631.

3. Agar ξ va η ning matematik kutilmasi ma'lum bo'lsa, δ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping: $\delta = \xi + 2\eta$, $E\xi = 5$, $E\eta = 3$.

A) 10 B) 11 C) 30 D) 12.

4. ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

ξ:	-1	0	1	2
P:	0,2	0,1	0,3	0,4

Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

A) 0,9 B) 0,4 C) 0,5 D) 0,3.

5. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan.

ξ:	-1	0	1	2
P:	0,2	0,1	0,3	0,4

Tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

A) 1,29 B) 0,3 C) 0,9 D) 0,29.

6. ξ diskret tasodifiy miqdor 3 ta mumkin bo'lgan qiymatni qabul qiladi: $x_1=4$ ni $p_1=0,5$ ehtimollik bilan, $x_2=6$ ni $p_2=0,3$ ehtimollik bilan va x_3 ni p_3 ehtimollik bilan. $E\xi = 8$ ni bilgan holda x_3 ni va p_3 ni toping.

A) $x_3 = 29$, $p_3 = 0,2$ C) $x_3 = 20$, $p_3 = 0,5$
B) $x_3 = 21$, $p_3 = 0,2$ D) $x_3 = 30$, $p_3 = 0,3$.

7. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping:

X:	-4	6	10
P:	0,2	0,2	0,6

A) 6 B) 6,4 C) 6,3 D) 7.

8. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning kvadratik chetlanishini toping:

X:	1	2	3	4	5
P:	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

A) 1,2 B) 1,23 C) 1,1357 D) 11,357.

V bob. BOG‘LIQ BO‘LMAGAN TASODIFIY MIQDORLAR KETMA-KETLIGI. LIMIT TEOREMALAR

V bobni o‘rganish natijasida talaba:

— Chebishev tengsizligi;

— katta sonlar qonuni;

— markaziy limit teoremalari haqida

tasavvurga ega bo‘lishi;

— Chebishev tengsizligini;

— katta sonlar qonunini;

— markaziy limit teoremani

bilishi va amalda qo‘llay olishi;

— Chebishev tengsizligidan foydalanib misollar yechishni;

— katta sonlar qonunidan foydalanib misollar yechishni;

— markaziy limit teoremalardan foydalanib misollar yechishni ***uddalashi lozim.***

5.1-§. Chebishev tengsizligi. Katta sonlar qonuni

«Katta sonlar qonuni» (turg‘unlik xossasi) keng ma’noda katta sondagi tasodifiy hodisalar ta’sirining o‘rtacha natijasi amalda tasodifiy bo‘lmay qolishini va yetarlicha aniqlikda aytish mumkinligini anglatadi.

Tor ma’noda esa «katta sonlar qonuni» deganda ko‘p sondagi kuzatishlar natijasida o‘rtacha xarakteristikalarning biror doimiy kattaliklarga yaqinlashishini ta’kidlaydigan teoremalar guruhi tushuniladi.

Faraz qilaylik, $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,..$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar shunday sonlar ketma-ketligi $\{a_n,\ n=1,2,...\}$ mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo'ysunadi, deyiladi.

Katta sonlar qonunini isbotlashda quyidagi Chebishev tengsizligi keng qo'llaniladi. Biz uning qo'llanilishini Chebishev teoremasida keltiramiz.

1-teorema. (***Chebishev tengsizligi***). Chekli dispersiyaga ega bo'lgan ξ tasodifiy miqdor va $\varepsilon > 0$ uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$P\left(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Isbot. ξ tasodifiy miqdor absolut uzluksiz, $f(x)$ uning zichlik funksiyasi bo'lsin. U holda uning dispersiyasi

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f(x)dx$$

bo'ladi. Oxirgi integralni ikkiga ajratamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^2 f(x)dx = \int_{|x-E\xi|\geq\varepsilon} (x-E\xi)^2 f(x)dx + \int_{|x-E\xi|<\varepsilon} (x-E\xi)^2 f(x)dx.$$

Bu tenglikdan quyidagi

$$D\xi \geq \int_{|x-E\xi|\geq\varepsilon} (x - E\xi)^2 f(x)dx$$

tengsizlik kelib chiqadi. Integral ostidagi $(x - E\xi)$ ni ε ga almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$D\xi \geq \int_{|x-E\xi|\geq\varepsilon} (x - E\xi)^2 f(x)dx \geq \varepsilon^2 \int_{|x-E\xi|\geq\varepsilon} f(x)dx = \varepsilon^2 P\left(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\right).$$

Bu yerdan esa absolut uzluksiz tasodifiy miqdor uchun Chebishev tengsizligi kelib chiqadi. Endi ξ tasodifiy miqdor diskret bo'lib, $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ ehtimolliklar bilan qabul qilsin. U holda uning dispersiyasi

$$D\xi = \sum_{k} (x_k - E\xi)^2 \, p_k$$

bo'ladi.

Bunday tasodifiy miqdor uchun Chebishev tengsizligini quyidagicha isbotlaymiz. $A_i = \{ i : |x_i - E\xi| \geq \varepsilon \}$ va $\overline{A}_i = \{ i : |x_i - E\xi| < \varepsilon \}$ hodisalarni kiritsak, u holda

$$D\xi \geq \sum_{i \in A_i} (x_i - E\xi)^2 \, p_i \geq \varepsilon^2 \sum_{i \in A_i} p_i = \varepsilon^2 P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon)$$

bo'lib, Chebishev tengsizligining o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

Eslatma. Chebishev tengsizligini quyidagi

$$P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

ko'rinishda ham yozish mumkin, ya'ni ξ tasodifiy miqdor o'zining $E\xi$ matematik kutilmasidan chetlashishining absolut qiymati musbat ε dan kichik bo'lish ehtimolligi $1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ dan kichik emas.

Misol. Matematik kutilmasi a va dispersiyasi σ^2 bo'lgan ξ tasodifiy miqdor berilgan bo'lsin. ξ tasodifiy miqdor o'zining matematik kutilmasidan 3σ ga chetlanish ehtimolligini yuqoridan baholang.

Yechish. Chebishev tengsizligida $\varepsilon = 3\sigma$ deb olamiz. U holda

$$P(|\xi - a| \geq 3\sigma) \leq \frac{D\xi}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}$$

bo'ladi. Yuqorida keltirilgan tengsizlikni matematik statistikada 3σ qoidasi deyiladi.

Endi katta sonlar qonuniga o'tamiz.

2-teorema. (***Chebishev formasidagi katta sonlar qonuni***). Agar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ tasodifiy miqdorlar juft-jufti bilan bog'liq bo'lmagan bo'lib, ularning dispersiyalari o'zgarmas C son bilan tekis chegaralangan ($D\xi_i \leq C$ ixtiyoriy i uchun, i=1,2,...) bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

ya'ni $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...$ tasodifiy miqdorlar katta sonlar qonuniga bo'ysunadi.

Isbot. $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, $n = 1,2,...$ tasodifiy miqdorlarni kiritamiz.

Teorema shartiga ko'ra, tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi va dispersiyasi xossalariga asosan quyidagi munosabatlarni hosil qilamiz:

$$E\eta_n = E\left(\frac{\xi_1+...+\xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\ ,$$

$$D\eta_n = D\left(\frac{\xi_1+...+\xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i \leq \frac{C}{n}.$$

Endi Chebishev tengsizligini η_n tasodifiy miqdorga tadbiq qilib,

$$P\left(|\eta_n - E\eta_n| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\eta_n}{\varepsilon^2} = \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan esa

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

kelib chiqadi. Teorema isbot qilindi.

Demak, Chebishev teoremasiga ko'ra, $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...$ tasodifiy miqdorlar juft-jufti bilan bog'liqsiz va dispersiyalari tekis chegaralangan bo'lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlar o'rta arifmetigi n ortgani bilan bu tasodifiy miqdorlar o'rta qiymatlarining matematik kutilmasiga istalgancha yaqin bo'lar ekan.

Keyingi teorema Bernulli teoremasi deyiladi.

n ta bog'liqsiz tajribalar o'tkazilgan bo'lib, ularning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimolligi o'zgarmas p soniga teng bo'lsin.

3-teorema (*Bernulli teoremasi*). Bog'liqsiz tajribalar soni n ortishi bilan A hodisaning n ta tajribada ro'y berish nisbiy chastotasi $\frac{m}{n}$, uning bitta tajribada ro'y berish ehtimolligi p ga ehtimollik bo'yicha yaqinlashadi, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Teorema shartlari bajarilganda va n chekli bo'lganda $\frac{m}{n}$ tasodifiy miqdor uchun

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = p \quad \text{va} \quad D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}$$

bo'ladi. U holda $\frac{m}{n}$ tasodifiy miqdor uchun Chebishev tengsizligi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \qquad (*)$$

va bu tengsizlikdan teoremaning isboti kelib chiqadi (n cheksizlikka intilganda ixtiyoriy kichkina ε uchun $\frac{pq}{n\varepsilon^2}$ nolga, $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$ ehtimollik birga intiladi).

Bernulli teoremasi ko'rsatadiki, tajribalar soni n yetarlicha katta bo'lganida, hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi $\frac{m}{n}$ o'zining tasodifiylik ma'nosini yo'qotadi va berilgan hodisaning ehtimolligi o'zgarmas son p ga yaqinlashadi. Bu esa tasodifiy tajribalar uchun muqarrarlik prinsipini ifoda etadi.

1-misol. Mahsulotlar partiyasini nosozlikka tekshirish uchun 1000 mahsulot tanlab olingan. Agar har 10000 ta mahsulotga o'rtacha 500 ta nosoz mahsulot to'g'ri kelsa, olingan tanlanma orqali topilgan nosoz mahsulotlar ulushi absolut qiymat bo'yicha mahsulotlar partiyasining nosozlik ulushidan 0,01 dan kichik farqqa ega bo'lish ehtimolligini baholang.

Yechish. Masalaning shartlari bo'yicha bog'liqsiz tajribalar soni $n=1000$, $p=\frac{500}{10000}=0,05$, $q=1-0,05=0,95$, $\varepsilon=0,01$ va $\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<0,01\right\}$ hodisaning ehtimolligini baholash kerak.

(*) formula bo'yicha

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<0,01\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}=1-\frac{0,05\cdot 0,95}{1000\cdot 0,0001}=0,527$$

bo'ladi. Demak, tanlanmadagi nosozliklar ulushi (nosozlik ro'y berishining nisbiy chastotasi) mahsulotlar partiyasidagi nosozliklar ulushidan (nosozlik ehtimolligi) 0,01 dan kichik farqlanishining ehtimolligi 0,527 dan kichik bo'lmas ekan.

5.2-§. Markaziy limit teorema

1. Masalaning qo'yilishi.

Ko'p hollarda tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimot qonunlarini aniqlashga to'g'ri keladi. Faraz qilaylik, o'zaro bog'liq bo'lmagan $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ tasodifiy miqdorlarning yig'indisi $S_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ berilgan bo'lsin va har bir ξ_i, $i=1,2,\ldots$ tasodifiy miqdor «0» va «1» qiymatlarni mos ravishda q va p ehtimolliklar bilan ($p+q=1$) qabul qilsin. U holda S_n tasodifiy miqdor binomial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lib, uning matematik kutilishi np, dispersiyasi esa npq ga teng bo'ladi. S_n tasodifiy miqdor $0,1,\ldots,n$ qiymatlarni qabul qila oladi va demak n ning ortishi bilan S_n tasodifiy miqdorning qiymatlari istalgancha katta son bo'lishi mumkin, shuning uchun S_n tasodifiy miqdor o'rniga $\eta_n=\frac{S_n-A_n}{B_n}$ tasodifiy miqdorni ko'rish maqsadga muvofiqdir. Bu ifodada A_n, B_n lar n ga bog'liq bo'lgan sonlar ($B_n>0$.

Xususan, A_n va B_n larni $A_n=ES_n=np$, $B_n=DS_n=npq$ ko'rinishida tanlansa, Muavr-Laplasning integral teoremasini quyidagicha bayon etish mumkin: agar $0<p<1$ bo'lsa, $n\to\infty$ da ixtiyoriy $a,b\in(-\infty,+\infty)$ uchun

$$P\left\{a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du \qquad (1)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Tabiiy savol tug'iladi: (1) munosabat ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar uchun ham o'rinli bo'ladimi? (1) o'rinli bo'lishi uchun S_n dagi qo'shiluvchilarning taqsimot funksiyalariga qanday shartlar qo'yish kerak?

Bu masalalarni hal qilishda P.L.Chebishev va uning shogirdlari A.A.Markov, A.M.Lyapunovlarning xizmatlari kattadir. Ularning tadqiqotlari shuni ko'rsatadiki, qo'shiluvchi tasodifiy miqdorlarga juda ham umumiy shartlar qo'yish mumkin ekan. Bu shartlarning ma'nosi ayrim olingan qo'shiluvchining umumiy yig'indiga sezilmaydigan ta'sir ko'rsatishini ta'minlashdir.

Misol. Tajriba sizot suvlarning chuqurligini (yer yuzasidan) o'lchashdan iborat bo'lsin. Albatta o'lchash natijasida yo'l qo'yiladigan xatolar juda ko'p faktorlarga bog'liq. Bu faktorlarning har biri ma'lum xatoga olib kelishi mumkin. Lekin, o'lchashlar soni yetarlicha katta bo'lib, ular bir xil sharoitda olib borilsa, o'lchashda kuzatilayotgan xatolik tasodifiy miqdor bo'lib, juda ko'p sondagi, kattaligi jihatidan sezilarsiz va o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy xatolar yig'indisidan iborat bo'ladi. O'lchashlar natijasida bu xatolarning birgalikdagi ta'siri sezilarli bo'ladi, shuning uchun ham tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimotini topish katta ahamiyatga egadir.

Ta'rif. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Agar shunday $\{A_n\}, \{B_n\}$, $B_n > 0$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo'lsaki, $n \to \infty$ da

$$P\left\{\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

munosabat $\forall x \in (-\infty, \infty)$ da bajarilsa, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o'rinli deyiladi. Bu holda

$$\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n-A_n}{B_n}$$

tasodifiy miqdor $n\to\infty$ da asimptotik *normal taqsimlangan* deyiladi.

2. Matematik kutilmasi a va σ^2 dispersiyasi bo'lgan bog'liq bo'lmagan, bir xil taqsimlangan $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Umumiylikka zarar keltirmasdan $a=0$, $\sigma^2=1$ deymiz. Quyidagi tasodifiy miqdorlarni kiritamiz:

$$S_n=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n,\quad \eta_n=\frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

1-teorema. Yuqorida keltirilgan $\{\xi_n\}$ ketma-ketlik uchun $n\to\infty$ da

$$P\{\eta_n<x\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

munosabat ixtiyoriy x ($x\in R$) da bajariladi.

3. Bog'liq bo'lmagan $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun $E\xi_k=a_k$, $D\xi_k=\sigma_k^2$ bo'lsin.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2,\quad S_n=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n,$$

$$\eta_n=\frac{S_n-A_n}{B_n},\quad F_k(x)=P(\xi_k<x).$$

2-teorema. Ixtiyoriy $\tau>0$ uchun $n\to\infty$ da

$$L_n(\tau)=\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x)\to 0 \qquad \text{(L)}$$

bo'lsa, $\{\xi_n\}$ uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'ladi.

(L) shart Lindeberg sharti deyiladi. Lindeberg shartining bajarilishi ixtiyoriy k da $\frac{1}{B_n}(\xi_k-a_k)$ qo'shiluvchilarning tekis ravishda kichikligini ta'minlaydi. Haqiqatan ham,

$$P(|\xi_k-a_k|>\tau B_n)=\int_{|x-a_k|>\tau B_n}dF_k(x)\le\frac{1}{(\tau B_n)^2}\int_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x)$$

ekanligini e'tiborga olinsa,

$$P\left\{\max_{1\le k\le n}|\xi_k - a_k| > \tau B_n\right\} = P\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(|\xi_k - a_k| > \tau B_n)\right\} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} P(|\xi_k - a_k| > \tau B_n) \le \frac{1}{\tau^2 B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2\,dF_k(x)$$

Agar Lindeberg sharti bajarilsa, u holda oxirgi tengsizlikning o'ng tomoni, $\tau > 0$ son har qanday bo'lganda ham $n\to\infty$ da nolga intiladi.

Xususan, agar $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bir xil taqsimlangan bo'lsa, u holda 2-teoremadan 1-teorema kelib chiqadi. Haqiqatan ham, bu holda $B_n^2 = \sigma^2\cdot n$, $0<\sigma^2<\infty$ va $n\to\infty$ da ixtiyoriy $\tau > 0$ uchun

$$L_n(\tau) = \frac{1}{\sigma^2}\int_{|x-a|>\tau\sigma\sqrt{n}}(x-a)^2\,dF(x)\to 0.$$

Endi yuqoridagi $\eta_n = \frac{S_n - A_n}{B_n}$ ketma-ketlik asimptotik normal bo'lishi uchun yetarli bo'lgan boshqa shartlarni ham ko'rsatish mumkin. Misol uchun Lyapunov shartini qaraylik. Bu shart Lindeberg shartiga ko'ra nisbatan ko'proq talablar qo'ysa ham, ba'zi hollarda bu shartni tekshirish oson bo'ladi.

Aytaylik, biror $\delta > 0$ son uchun

$$c_k^{2+\delta} = E|\xi_k - a_k|^{2+\delta}$$

mavjud bo'lsin va

$$C_n^{2+\delta} = \sum_{k=1}^{n} c_k^{2+\delta}$$

deylik.

3-teorema (*A.M.Lyapunov*). Agar $n\to\infty$ da

$$\frac{C_n}{B_n}\to 0$$

shart bajarilsa, u holda $n \to \infty$ da

$$P(\eta_n < x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

munosabat $\forall x \in (-\infty, \infty)$ da bajariladi.

Isboti. Lyapunov sharti bajarilganda Lindeberg sharti o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz. $|x - a_k| \geq \tau B_n$ tengsizlikdan ushbu $\frac{|x-a_k|}{\tau B_n} \geq 1$ ni hosil qilamiz, u holda

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-a_k| > \tau B_n} (x - a_k)^2 \, dF_k(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\tau B_n)^\delta} \int_{|x-a_k| > \tau B_n} |x - a_k|^{2+\delta} \, dF_k(x) \leq \frac{C_n^{2+\delta}}{\tau^\delta B_n^{2+\delta}} = \frac{1}{\tau^\delta} \left(\frac{C_n}{B_n} \right)^{2+\delta} \to 0$$

$n \to \infty$ da, bu esa teoremani isbotlaydi.

Misol. Quyidagi bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teoremaning o‘rinliligi tekshirilsin:

$$P(\xi_k = \pm k) = \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}}, \quad P(\xi_k = 0) = 1 - k^{-\frac{1}{2}}, \; k = 1, 2, \ldots .$$

Yechish. Lyapunov shartini tekshiramiz:

$$E\xi_k = 0; \; D\xi_k = k^{\frac{3}{2}} = \sigma_k^2; \; c_k^3 = k^{\frac{5}{2}}.$$

Ushbu $\alpha > -1$ bo‘lganda o‘rinli bo‘ladigan

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \int_1^n x^\alpha dx \sim \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}$$

munosabatni tekshirishni o‘quvchiga mashq sifatida beramiz. Bu munosabatdan foydallanib,

$$B_n^2 \sim A_1 n^{\frac{5}{2}}, \; C_n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{5}{2}} \sim A_2 n^{\frac{7}{2}}$$

ni aniqlaymiz, bu yerda A_1 va A_2 – absolut o‘zgarmas sonlar.

Demak,

$$\frac{C_n^3}{B_n^3} = \left(\frac{C_n}{B_n}\right)^3 \sim \frac{A_2 n^{\frac{7}{2}}}{A_1 n^{\frac{15}{4}}} \to 0, \quad n \to \infty .$$

Shunday qilib Lyapunov sharti bajariladi va markaziy limit teorema o'rinli ekan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Katta sonlar qonunining mohiyati nimadan iborat?
2. Chebishev tengsizligini yozing. Uni isbotlang.
3. Chebishev formasidagi katta sonlar qonuni nimadan iborat?
4. Chebishev teoremasini aytib bering. Uni isbotlang.
5. Bernulli teoremasini aytib bering. Uni isbotlang.
6. Markaziy limit teoremasining mazmuni nimadan iborat?
7. Ehtimolliklar nazariyasining limit teoremalari qanday ahamiyatga ega?
8. Lyapunovning markaziy limit teoremasi nimadan iborat?

Misol va masalalar

1. ξ tasodifiy miqdor ushbu $E\xi = 1$, $D\xi = 0{,}04$ xarakteristikalarga ega. $A = \{0{,}5 \le \xi < 1{,}5\}$, $B = \{0{,}75 \le \xi < 1{,}35\}$, $C = \{\xi < 2\}$ hodisalar ehtimolligini quyidan baholang.

Javob: $P(A) \ge 0{,}84$; $P(B) \ge 0{,}36$; $P(C) \ge 0{,}96$.

2. Biror tayin joyda 1 yildagi quyoshli kunlar soni X, o'rta qiymati 100 kun va o'rtacha kvadratik chetlanishi 20 kun bo'lgan tasodifiy miqdor bo'lsin. Quyidagi hodisalar ehtimolliklarini yuqoridan baholang: $A = \{X \ge 150\}$, $B = \{X \ge 200\}$.

Javob: $P(A) \le 0{,}16$, $P(B) \le 0{,}04$.

3. $\xi_1,\xi_2,\dots$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ξ_n $\sqrt{n}$, 0 va $-\sqrt{n}$ qiymatlarni mos ravishda $\frac{1}{2n}$, $1-\frac{1}{n}$, $\frac{1}{2n}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni bajariladimi?

, *Javob:* bajariladi.

4. $\xi_1,\xi_2,\dots$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ξ_n $-\sqrt{n}$, 0 va n qiymatlarni mos ravishda $\frac{1}{2n^2}$, $1-\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{2n^2}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonunini qo'llash mumkinmi?

Javob: ha.

5. $\xi_1,\xi_2,\dots$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ξ_n $-n$, 0 va n qiymatlarni mos ravishda $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonunini qo'llash mumkinmi?

Javob: yo'q.

6. $\xi_1,\xi_2,\dots$ matematik kutilmalari va dispersiyalari chekli bo'lgan bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin. Ixtiyoriy haqiqiy son x uchun quyidagi $\lim\limits_{n\to\infty} P(\xi_1+\dots+\xi_n<x)$ limit yoki 0 yoki 1 yoki 1/2 ga teng ekanligini isbotlang. Ushbu vaziyatlar bajariladigan shartlarni ko'rsating.

Javob: 0 agar $E\xi_1>0$; 1 agar $E\xi_1<0$; 1/2 agar $E\xi_1=0$.

7. $\xi_1,\xi_2,\dots$ matematik kutilmalari 0 va dispersiyalari chekli bo'lgan bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin, $\eta_n=\xi_1+\dots+\xi_n$. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\eta_n}{\sqrt{n}}>1\right)=\frac{1}{3}$ bo'lsa, $D\xi_i$ ni toping.

Javob: $D\xi_i=\frac{1}{\sqrt{x}}$; bu yerda x soni $\Phi(x)=\frac{2}{3}$ tenglamaning yechimi.

8. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lsin, $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Agar ξ_n tasodifiy miqdor $[a_n - 1,\ a_n + 1]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo‘lib, $a_1, a_2, \ldots$ haqiqiy sonlar ketma-ketligi uchun $\sum a_i = A < \infty$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(0 < \frac{\eta_n}{\sqrt{n}} < 1\right)$ ni toping.

Javob: $\Phi(\sqrt{3}) - \frac{1}{3}$.

V bob bo‘yicha test topshiriqlari

1. Diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	0,1	0,3
P	0,4	0,6

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|\xi - E\xi| < 0,2$ ning ehtimolligini baholang.

A) 0,76 B) 0,73 C) 0,9 D) 0,29.

2. Agar ξ tasodifiy miqdor chekli $E\xi$ matematik kutilmaga, σ o‘rta kvadrat chetlanishga ega bo‘lsa, $|\xi - E\xi| < 3\sigma$ hodisa ehtimolligini baholang.

A) 8/9 B) 1/3 C) 1 D) 7/6.

3. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan 1000 tajribaning har birida biror A hodisa 0,5 ehtimollik bilan ro‘y bersin. Agar A hodisaning ro‘y berishlar soni X bo‘lsa, $P(350 \le X \le 650)$ ehtimollikni baholang.

A) $P(340 \le X \le 660) > 0,989$

B) $P(350 \le X \le 650) > 0,989$

C) $P(350 \le X \le 650) < 0,989$

D) $P(350 \le X \le 650) \le 0,989$.

4. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{E\xi\}$ uchun $E\xi = 0$, $D\xi_n = n^\alpha$, $\alpha = const$, $\alpha < 1$ berilgan. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o‘rinlimi?

A) O‘rinli.
B) O‘rinli emas.
C) O‘rinli bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin.
D) $\alpha = const$, $\alpha < \frac{1}{2}$ bo‘lganda o‘rinli, qolgan hollarda o‘rinli emas.

5. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan 500 ta tajribaning har birida biror A hodisa $p = 0{,}2$ ehtimollik bilan ro‘y bersin. Bu tajribalarda A hodisaning ro‘y berishlar soni ξ bo‘lsa, $P(50 \le \xi \le 150)$ ehtimollikni Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

A) $P(50 \le \xi \le 150) > 0{,}968$ C) $P(50 \le \xi \le 150) = 0{,}968$
B) $P(50 \le \xi \le 150) < 0{,}058$ D) $P(50 \le \xi \le 150) < 0{,}968$.

6. Ushbu munosabat ma’lum:

$P(|X - MX| < \varepsilon) \ge 0{,}36;$ $DX = 0{,}25$. ε sonini toping.

A) 0,625 B) 0,73 C) 0,325 D) 0,295.

7. O‘zaro bog‘liqsiz ξ_n tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi

$$P\{\xi_n = n^\alpha\} = P\{\xi_n = -n^\alpha\} = \frac{1}{2n^\beta}, \quad P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n^\beta}$$

ko‘rinishdagi taqsimot qonuni bilan berilgan. α va β ning qanday qiymatida bu ketma-ketlik uchun markaziy limit teorema o‘rinli bo‘ladi?

A) $0 \le \beta < 1, \ \ 2\alpha > \beta - 1$ C) $0 \le \beta < 1, \ \ 2\alpha \le \beta - 1$
B) $\beta < 1, \ \ 2\alpha > \beta - 1$ D) $0 \le \beta \le 1, \ \ 2\alpha \le \beta - 1$.

8. ξ tasodifiy miqdor λ parametrli Puasson taqsimot qonuni bilan taqsimlangan $\lim\limits_{\lambda \to \infty} P\left(\frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right)$ ni toping.

A) (0,1) parametrli normal taqsimot
B) $(0,\lambda)$ parametrli normal taqsimot
C) λ parametrli Puasson taqsimoti
D) $(1,\lambda)$ parametrli normal taqsimot.

9. Chebishev tengsizligidan foydalanib, ξ tasodifiy miqdor o'zining matematik kutilmasidan chetlanishi, ikkilangan o'rtacha kvadratik chetlanishdan kichik bo'lmasligi ehtimolligini baholang.

A) $P(|\xi - E\xi)| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}$ C) $P(|\xi - E\xi)| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{4}$

B) $P(|\xi - E\xi)| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{9}$ D) $P(|\xi - E\xi)| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{2}$.

10. Agar $D\xi$ =0,004 bo'lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|\xi - E\xi| < 0,2$ ning ehtimolligini baholang.

A) 0,6 B) 0,7 C) 0,9 D) 0,2.

11. $P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) \geq 0,9$ berilgan. Chebishev tengsizligidan foydalanib, ε ning qiymatini toping.

A) $\varepsilon = 0,3$ B) $\varepsilon = 0,7$ C) $\varepsilon = 0,9$ D) $\varepsilon = 0,2$.

12. Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolligi 1/4 ga teng. Agar 800 ta tajriba o'tkaziladigan bo'lsa, A hodisaning ro'y berish soni ξ ning 150 dan 250 gacha bo'lgan oraliqda yotish ehtimolligini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

A) 0,64 B) 0,72 C) 0,94 D) 0,25.

13. ξ tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuniga ega:

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|\xi - E\xi| < 0,2$ hodisa ehtimolligini baholang.

A) 0,64 B) 0,72 C) 0,94 D) 0,25.

14. ξ tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuniga ega:

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|\xi - E\xi| < \sqrt{0,4}$ bo'lish ehtimolligini baholang.

A) 0,909 B) 0,723 C) 0,942 D) 0,251.

VI bob. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

VI bobni o'rganish natijasida talaba:

— matematik statistikaning asosiy masalalari;
— tanlanma metodi;
— bosh va tanlanma to'plam;
— variatsion qator;
— gistogramma va poligon;
— empirik taqsimot funksiyasi;
— tanlanmaning o'rta qiymatlari;
— tanlanmaning tarqoqlik darajalari;
— statistik baholar va uning xossalari;
— nuqtaviy baholar;
— intervalli baholash;
— ishonchlilik intervallari;
— statistik gipotezalar nazariyasi elementlari haqida
tasavvurga ega bo'lishi;
— tanlanma to'plamni;
— variatsion qatorlarni;
— tanlanmani gruppalashni;
— empirik taqsimot funksiyani;
— tanlanmaning o'rta qiymatlarini;
— tarqoqlik darajalarini;
— asimmetriya koeffitsiyentini;
— statistik baholarni;
— nuqtaviy baholarni;
— intervalli baholashni;
— ishonchlilik intervallarini;
— statistik gipotezalarni tekshirishni
bilishi va amalda qo'llay olishi;
— variatsion qator tuzishini;
— tanlanmani gruppalashni;
— gistogramma va poligon chizishni;

— *nisbiy chastota va nisbiy chastota gistogrammasini topishni;*
— *empirik taqsimot funksiyani topishni;*
— *tanlanmaning moda va medianasini topishni;*
— *tanlanmaning vazniy o'rta arifmetik qiymatlarini topishni;*
— *tanlanmaning o'rta geometrik qiymatini topishni;*
— *tanlanmaning asimmetriya koëffitsiyenti topishni;*
— *statistik gipotezalarni tekshirishni*

uddalashi lozim.

6.1-§. Matematik statistika asosiy masalalari

«Statistika» so'zi lotincha so'zdan olingan bo'lib, holat, vaziyat degan ma'noni anglatadi.

Statistika tabiatda va jamiyatda bo'ladigan ommaviy hodisalarni o'rganadi. Statistika fani qonuniyatlarni aniqlash maqsadida ommaviy tasodifiy hodisalarni kuzatish natijalarni tasvirlash, to'plash, sistemalashtirish, tahlil etish va izohlash usullarini o'rganadi.

Matematik statistika esa ommaviy va ijtimoiy xarakterga ega bo'lgan tabiiy jarayonlarni tahlil etish uchun matematik apparat bo'lib xizmat qiladi.

Matematik statistikaning vazifasi o'rganilayotgan obyekt bo'yicha statistik ma'lumotlarni to'plash, ularni tahlil qilish va shu asosda ba'zi bir xulosalarni chiqarishdan iborat.

Quyida matematik statistikaning asosiy masalalari bilan tanishib chiqamiz:

1. Faraz qilaylik, tasodifiy miqdor ξ ning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lsin. Statistika nuqtayi nazaridan ξ tasodifiy miqdor ustida n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar o'tkazib, $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlarni olgan bo'laylik. Hosil bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_n$ lar bo'yicha ξ tasodifiy miqdorning $F(x)$ no'malum taqsimot funksiyasini baholash matematik statistikaning vazifalaridan biridir. Matematik statistikaning ushbu masalani yechish bilan shug'ullanuvchi bo'limi *noparametrik baholash nazariyasi* deb ataladi.

2. ξ tasodifiy miqdor k ta noma'lum parametrga bog'liq ma'lum ko'rinishdagi taqsimot funksiyaga ega bo'lsin. ξ tasodifiy miqdor

ustidagi kuzatishlarga asoslanib, bu noma'lum parametrlarni baholash matematik statistikaning vazifasidir. Matematik statistikada bu masalani yechish bilan shug'ullanuvchi bo'lim *parametrik baholash nazariyasi* deyiladi.

3. Kuzatilayotgan miqdorlarning taqsimot qonunlari, ba'zi xarakteristikalari haqidagi har qanday farazlarni «statistik gipotezalar» deb ataladi.

Faraz qilaylik, ba'zi mulohazalarga asoslanib, ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini $F(x)$ deb hisoblash mumkin bo'lsin. Shu $F(x)$ funksiya haqiqatan ham ξ ning taqsimot funksiyasimi yoki yo'qmi degan savol statistik gipoteza hisoblanadi.

U yoki bu gipotezani tekshirish uchun kuzatishlar orqali yoki maxsus tajribalar o'tkazish yo'li bilan ma'lumotlar olib, ularni qilingan gipotezaga muvofiq nazariy jihatdan kuzatilayotgan ma'lumotlar bilan taqqoslab ko'rish kerak. Agar olingan ma'lumotlar haqiqatan ham nazariy jihatdan kutilgan ma'lumotlar bilan mos kelsa, u vaqtda bu fakt o'sha gipotezaning to'g'riligiga ishonch hosil qilish bilan, uni qabul qilish uchun asos bo'lishi mumkin. Agar olingan ma'lumotlar nazariy jihatdan kutilayotgan ma'lumotga yetarlicha to'g'ri kelmasa, u holda qilingan gipotezani qabul qilishga asos bo'lmaydi.

Umuman, kuzatish natijalari bilan nazariy jihatdan kutiladigan natija orasidagi farq turlicha bo'lishi mumkin. Shu farqni statistik baholash natijasida u yoki bu gipotezani ma'lum ehtimollik bilan qabul qilish mumkin, ya'ni shu farq katta bo'lsa gipoteza qabul qilinmaydi, aks holda qabul qilinadi, albatta bu farq qancha bo'lganda gipotezani qabul qilish mumkinligi masalaning qo'yilishiga bog'liq bo'ladi.

Matematik statistikaning bu masalani yechish bilan shug'ullanuvchi bo'limi *statistik gipotezalar nazariyasi* deyiladi.

6.2-§. Bosh va tanlanma to'plam

Bir jinsli elementlar jamlanmasida ushbu elementlarning xususiyatlarini xarakterlovchi biror alomatni o'rganish talab etilgan bo'lsin. Ko'p hollarda barcha elementlarni alohida o'rganish imkoniyati bo'lmaydi (elementlar soni juda ko'p bo'lishi mumkin, elementni o'rganish ko'p sarf-xarajat talab etishi mumkin, tekshirilish jarayonida ushbu element yoq qilinishi mumkin va hokazo). Bu hollarda ushbu elementlar jamlanmasidan biror qismini ajratib olinadi va bu ajratilgan to'plam bo'yicha butun jamlanma xususiyatlari haqida xulosalar qilinadi.

Masalan, O'zbekiston fuqarolarining bo'yi yoki og'irligini aniqlamoqchi bo'lsak, har bir kishini tekshirish imkoniyatiga ega bo'lmaymiz, chunki buning uchun ko'p mablag' va vaqt sarflash lozim bo'ladi. Bunday hollarda tekshiruvchi uchun eng yaxshi yo'l soni cheklangan birliklarni shunday ustalik bilan tekshirishki, ular umumiy o'rganilayotgan to'plam haqida amaliy jihatdan yetarli darajada aniqlikda ko'zlangan axborotlarni olish imkoniyatini bersin.

Statistik analiz qilish uchun tasodifiy tanlab olingan to'plam *tanlanma to'plam* deyiladi.

Tanlanma qaysi to'plamdan olingan bo'lsa, bu to'plam *bosh to'plam* deyiladi.

Bosh to'plam yoki tanlanma to'plamning *hajmi* deb, bu to'plamdagi obyektlar soniga aytiladi. Odatda, bosh to'plam hajmi N, tanlanma to'plam hajmi n bilan belgilanadi.

Masalan, agar 10000 ta detalning sifatini tekshirish uchun 100 ta detal tanlab olingan bo'lsa, bosh to'plam hajmi $N = 10000$ va tanlanmaning hajmi $n = 100$ ga teng bo'ladi.

Agar bosh to'plamdan bitta element ajratib olinsa va uning xususiyatlari qayd qilingach, elementni bosh to'plamga qaytarilsa va bundan so'ng ikkinchi elementni tekshirib, uni ham bosh to'plamga qaytarilsa va shu tariqa hajmi k ga teng tanlanma hosil qilinsa, bunday tanlanma *takroriy tanlanma* deyiladi. Agar tanlab olingan element bosh to'plamga qaytarilmasa, bu tanlanma *takroriy bo'lmagan tanlanma* deyiladi. Takroriy tanlanmalarning hajmi k bosh to'plam hajmi n bilan ixtiyoriy munosabatda bo'lishi mumkin ($k \leq n$, $k > n$). Takroriy bo'lmagan tanlanmalar uchun $k \leq n$ bo'ladi.

Agar bosh to'plam hajmi juda katta bo'lib, tanlanma to'plam hajmi katta bo'lmasa, u holda takroriy va takroriy bo'lmagan tanlanmalar orasidagi farq sezilarli bo'lmaydi.

Amaliyotda ko'pincha takroriy bo'lmagan tanlab olish usulidan foydalaniladi. Albatta, bu ikkala tanlab olish usulida ham tanlanma to'plam bosh to'plamning barcha xususiyatlarini saqlagan holda olinishi kerak, ya'ni tanlanma to'plam bosh to'plamga «o'xshash» bo'lishini ta'minlaydigan qilib tanlash lozim.

Agar tanlanma to'plam bosh to'plamni deyarli barcha xususiyatlarini o'zida saqlasa, u holda bunday tanlanma *reprezentativ* (*vakolatli*) *tanlanma* deyiladi.

Reprezentativ tanlanma hosil qilish uchun biz tanlanmani tasodifiy qilib tuzamiz. Tanlab olish usuli bosh to'plamning bizni qiziqtiradigan belgisiga hech qanday ta'sir qilmaydi va bosh to'plamning har bir elementi tanlanmada bir xil imkoniyat bilan qatnashishi ta'minlanadi. Agar tanlanma to'plam reprezentativligini saqlamasa, u holda tanlanma to'plam ustida chiqarilgan xulosani bosh to'plamga tadbiq qilish noto'g'ri xulosaga olib kelishi mumkin.

6.3-§. Empirik taqsimot funksiya. Poligon. Gistogramma

Biror tasodifiy miqdor ustida n marta kuzatish o'tkazib,

$$x_1, x_2, ..., x_n \tag{1}$$

natijalar olingan bo'lsin, u holda biz tanlanma to'plamga ega bo'lamiz. Tajribalar bir xil sharoitda, bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda o'tkazilgan deb faraz qilinadi. Ma'lumki, tajriba natijalari (1) ya'ni 1-tajriba natijasi x_1 (1-o'rinda yozilgan), 2-tajriba natijasi x_2 (2-o'rinda yozilgan), ..., n-tajriba natijasi (n-o'rinda yozilgan) bo'lib, ular son qiymatlari bo'yicha tartibsiz joylashgan bo'lishi mumkin.

Agar tanlanma to'plam qiymatlar bo'yicha o'sish (yoki kamayish) tartibida

$$x_1^* \le x_2^* \le ..... \le x_n^* \quad (\text{yoki } x_n^* \ge x_{n-1}^* \ge ... \ge x_2^* \ge x_1^*)$$

kabi joylashtirilsa,

$$x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$$

variatsion qator deyiladi.

(1) tanlanma to'plamdagi x_i, $i=1,2,\ldots,n$ lar *variantalar* deyiladi.

Agar tanlanmada x_1 varianta n_1 marta, x_2 varianta n_2 marta, ..., x_k varianta n_k marta (bu yerda $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$) kuzatilgan bo'lsa, u holda

$$n_1, n_2, \ldots, n_k$$

sonlar *chastotalar*,

$$w_i = \frac{n_i}{n} \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

sonlar esa *nisbiy chastotalar* deyiladi. Ravshanki,

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_k = 1$$

bo'ladi.

Tanlanmaning *statistik* yoki *empirik taqsimoti* deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalardan iborat ushbu jadvalga aytiladi:

$$\begin{pmatrix} x_i: & x_1, & x_2, & \ldots, & x_k \\ n_i: & n_1, & n_2, & \ldots, & n_k \end{pmatrix} \text{ yoki } \begin{pmatrix} x_i: & x_1, & x_2, & \ldots, & x_k \\ w_i: & w_1, & w_2, & \ldots, & w_k \end{pmatrix}.$$

1-misol. Tanlanma chastotlarining empirik taqsimoti berilgan:

$$\begin{array}{lcccc} x_i: & -1 & 0 & 1 & 2 \\ n_i: & 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}$$

Nisbiy chastotalarni toping.

Yechish. $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2+4+6+8 = 20$;

$$w_1 = \frac{2}{20} = 0,1; \quad w_2 = \frac{4}{20} = 0,2; \quad w_3 = \frac{6}{20} = 0,3; \quad w_4 = \frac{8}{20} = 0,4.$$

$$\begin{array}{lcccc} x_i: & -1 & 0 & 1 & 2 \\ w_i: & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{array}$$

Shu bilan birga $0,1+0,2+0,3+0,4=1$.

Ta'rif. Tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi deb x ning har bir qiymati uchun quyidagicha aniqlangan $F_n^*(x)$ funksiyaga aytiladi:

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

bunda n_x – x qiymatdan kichik bo'lgan variantalar soni; n – tanlanmaning hajmi.

Tanlanmaning empirik funksiyasidan farqli bosh to'plam uchun aniqlangan ushbu $F(x)$ funksiya *nazariy taqsimot funksiyasi* deb ataladi. Empirik va nazariy taqsimot funksiyalar orasidagi farq shundaki, $F(x)$ nazariy taqsimot funksiya $\{X < x\}$ hodisa ehtimolligini, $F_n^*(x)$ empirik taqsimot funksiya esa shu hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydi. Bernulli teoremasidan kelib chiqadiki, $\{X < x\}$ hodisa nisbiy chastotasi, ya'ni $F_n^*(x)$ shu hodisaning $F(x)$ ehtimolligiga ehtimollik bo'yicha yaqinlashadi. Boshqacha so'z bilan aytganda $F_n^*(x)$ va $F(x)$ funksiyalalar bir-biridan kam farq qiladi. Shu yerning o'zidanoq, bosh to'plam taqsimotining nazariy funksiyasini taqribiy tasvirlashda tanlanma taqsimotining empirik funksiyasidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'lishi kelib chiqadi.

Yuqoridagi mulohazalardan, quyidagi teoremaning o'rinli ekanini ko'rish qiyin emas.

1-teorema. Biror ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lsin, bu tasodifiy miqdor ustida o'tkazilgan n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan kuzatishlar natijalarining empirik taqsimot funksiyasi $F_n^*(x)$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy x $(-\infty < x < +\infty)$ va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|F_n^*(x) - F(x)\right| < \varepsilon\right) = 1 .$$

Demak, agar tanlanma hajmi katta bo'lsa, empirik taqsimot funksiyasining x nuqtadagi qiymatini, nazariy taqsimot funksiyaning shu nuqtadagi qiymati uchun baho sifatida qabul qilinishi mumkin ekan.

2-teorema *(Glivenko-Kantelli)*. Biror ξ tasodifiy miqdorning nazariy taqsimot funksiyasi $F(x)$ va empirik taqsimot funksiya $F_n^*(x)$ bo'lsin, u holda $n \to \infty$ da

$$P\left\{\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n^*(x) - F(x)\right| \to 0\right\} = 1 .$$

Boshqacha qilib aytganda, yetarlicha katta hajmdagi tanlanmalar uchun empirik taqsimot funksiyaning nazariy taqsimot funksiyadan chetlanishi

$$L_n = \sup_{-\infty<x<\infty} \left| F_n^*(x) - F(x) \right|$$

1 ehtimollik bilan hohlagancha kichik bo'ladi.

Empirik taqsimot funksiyaning xossalari.

1. $0 \le F_n^*(x) \le 1$.

2. $F_n^*(x)$ – kamaymaydigan funksiya;

3. Agar x_1 – eng kichik varianta va x_k – eng katta varianta bo'lsa, u holda quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$F_n^*(x) = 0, \text{ agar } x \le x_1 \text{ bo'lsa},$$

$$F_n^*(x) = 1, \text{ agar } x > x_k \text{ bo'lsa}.$$

2-misol. Quyidagi empirik taqsimot berilgan:

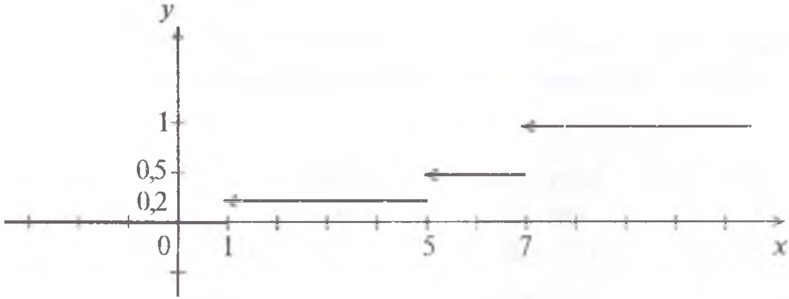
x_i:	1	5	7
n_i:	12	18	30

Empirik taqsimot funksiyasini toping.

Yechish. $n = 12 + 18 + 30 = 60$ – tanlanmaning hajmi. Eng kichik varianta $x_1 = 1$, demak $x \le 1$ lar uchun $F_{60}^*(x) = 0$. $x \le 5$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n_x variantalar soni bitta $x_1=1$ va bu varianta 12 marta kuzatilgan, demak $1 < x \le 5$ lar uchun $F_{60}^*(x) = \frac{12}{60} = 0,2$. $x \le 7$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n_x variantalar soni ikkita: $x_1=1$ va $x_2=5$, ular 12+18=30 marta kuzatilgan, demak $5 < x \le 7$ lar uchun $F_{60}^*(x) = \frac{30}{60} = 0,5$. $x_3=7$ eng katta varianta bo'lgani uchun $x > 7$ larda $F_{60}^*(x) = 1$.

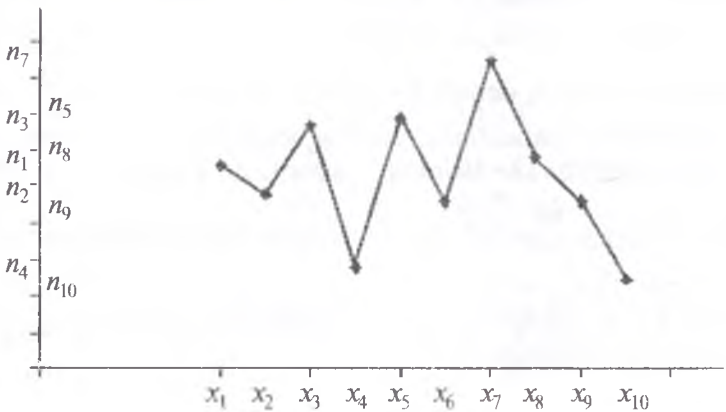
Demak, izlanayotgan empirik taqsimot funksiyasi va uning grafigi quyidagi ko'rinishga ega:

$$F_{60}^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,2, & 1 < x \le 5, \\ 0,5, & 5 < x \le 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$



Tanlanmani grafik usulda tasvirlash uchun poligon va gistogrammalardan foydalaniladi.

Chastotalar poligoni deb (x_i, n_i), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k) nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi. Chastotalar poligonini qurish uchun abssissalar o'qida x_i variantalar qiymatlari va ordinatalari o'qida ularga mos kelgan chastotalar n_i qiymatlari belgilanadi. Koordinatalari (x_i, n_i) juftliklardan iborat nuqtalar kesmalar bilan tutashtiriladi.

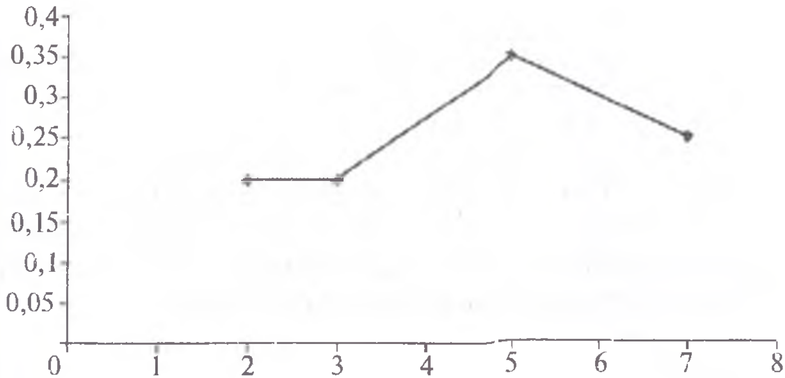


Nisbiy chastotalar poligoni deb koordinatalari $(x_1;w_1)$, $(x_2;w_2)$, ..., $(x_k;w_k)$ bo'lgan nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi.

3-misol. Ushbu empirik taqsimotning nisbiy chastotalar poligonini yasang:

x_i:	2	3	5	7
w_i:	0,2	0,2	0,35	0,25

Yechish. xOy koordinatalar tekisligida koordinatalari $(x_i;w_i)$ bo'lgan M_i nuqtalarni belgilaymiz va ularni kesmalar bilan tutashtiramiz. Nisbiy chastotalar poligoni ushbu yo'l bilan hosil qilingan siniq chiziqdan iborat.



Tanlanmani grafik usulda tasvirlash uchun tanlanmaning hajmi kam bo'lganda poligondan, agar hajm katta bo'lsa yoki kuzatilayotgan kattalik uzluksiz xarakterga ega bo'lsa gistogrammadan foydalaniladi.

Chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallardan, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$, $i = 1,2,...,k$ dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onasimon shaklga aytiladi.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallardan, balandliklari esa $\frac{w_i}{h} = \frac{n_i}{nh}$, $i = 1,2,...,k$ dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklarlardan tuzilgan pog'onasimon shaklga aytiladi.

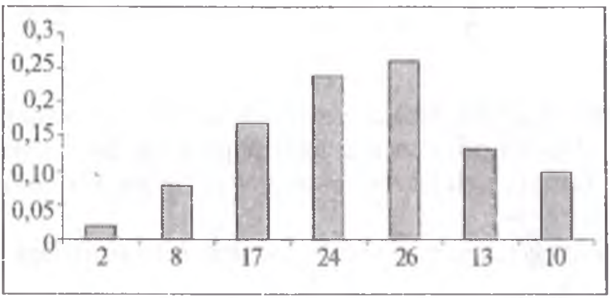
4-misol. Ushbu tanlanmaning chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang:

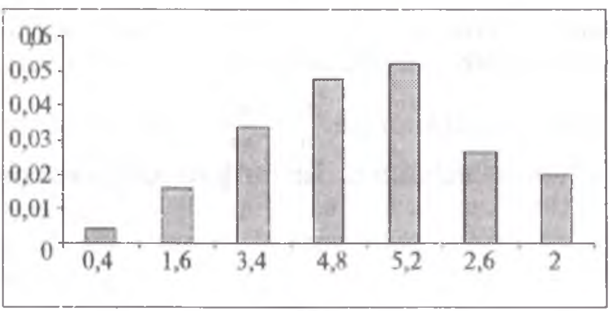
Δi	(–20;–15)	(–15;–10)	(–10;–5)	(–5;0)	(0;5)	(5;10)	(10;15)
n_i	2	8	17	24	26	13	10
w_i	0,02	0,08	0,17	0,24	0,26	0,13	0,1

Yechish. $h = 5$.

Δi	(–20;–15)	(–15;–10)	(–10;–5)	(–5;0)	(0;5)	(5;10)	(10;15)
$\frac{n_i}{h}$	0,4	1,6	3,4	4,8	5,2	2,6	2
$\frac{w_i}{h}$	0,004	0,016	0,034	0,048	0,052	0,026	0,020

Berilgan tanlanmalar asosida chastotalarning gistogrammasi va nisbiy chastotalarning gistogrammasini hosil qilamiz.





6.4-§. Tanlanma xarakteristikalar

Ehtimolliklar nazariyasida tasodifiy miqdorlar uchun aniqlangan sonli xarakteristikalar kabi, tanlanma uchun ham ba'zi sonli xarakteristikalarni kiritish mumkin.

Amalda quyidagi xarakteristikalar ko'p qo'llaniladi.

Tanlanmaning barcha qiymatlarining o'rta arifmetigi *tanlanma o'rtacha qiymat* deyiladi, ya'ni

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i .$$

Tanlanma dispersiya D_T deb,

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$$

ifodaga aytiladi. Tanlanma dispersiyasi quyidagi

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - \bar{x}^2$$

formula yordamida hisoblash ham mumkinligini ko'rsatish qiyin emas.

Tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma = \sqrt{D_T}$ formula orqali aniqlanadi. Ko'p hollarda amaliy masalalarni yechishda, ushbu

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}D_T$$

tuzatilgan tanlanma dispersiya ishlatiladi.

Mos ravishda $S = \sqrt{S^2}$ kattalik tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlanishi deb ataladi.

Bizga x_1, x_2, ..., x_n ($x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$) variatsion qator berilgan bo'lsin.

Tanlanmaning son o'qida qanchalik uzoqlikda joylashganligini ko'rsatuvchi kattalik $R = x_n - x_1$ ga *tanlanma qulochi* deyiladi.

Variatsion qatorning modasi M_0 deb, eng ko'p uchraydigan variantaga aytiladi. M_0 yagona bo'lmasligi mumkin.

Tanlanma mediana M_e deb, variatsion qatorning o'rtasiga mos keluvchi qiymatga aytiladi.

Agar $n = 2m$ (variatsion qatori hajmi juft) bo'lsa, u holda $M_e = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}$; agar $n = 2m + 1$ bo'lsa, unda $M_e = x_{m+1}$ bo'ladi.

Misol. Matematika bo'yicha 10 ta talaba test sinovlarini topshirmoqda. Har bir talaba 5 ballgacha to'plashi mumkin. Test natijalariga ko'ra quyidagi tanlanma olindi:

5, 3, 0, 1, 4, 2, 5, 4, 1, 5.

Ushbu tanlanma uchun variatsion va statistik qatorlarni tuzing. Tanlanma xarakteristikalarni hisoblang.

Yechish. 1) Berilgan tanlanmani o'sish tartibida joylashtirib, variatsion qatorni topamiz, ya'ni

0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5.

2) Endi chastotatlarni aniqlab statistik qator tuzamiz.

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	2	1	1	2	3

Yuqoridagi formulalardan foydalanib tanlanma xarakteristikalarni hisoblaymiz.

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3) = 3;$$

$$D_T = \frac{1}{10}((0-3)^2 \cdot 1 + (1-3)^2 \cdot 2 + (2-3)^2 \cdot 1 + (3-3)^2 \cdot 1 +$$

$$+ (4-3)^2 \cdot 2 + (5-3)^2 \cdot 3) = 3,2;$$

$$\sigma = \sqrt{D_T} = \sqrt{3,2} \approx 1,79;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{10}{9} \cdot 3,2 \approx 3,56;$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{3,56} \approx 1,87;$$

$$R = 5 - 0 = 5, \quad M_0 = 5, \quad M_e = \frac{3+4}{2} = 3,5.$$

6.5-§. Statistik baholar va ularning xossalari. Nuqtaviy baholar

Matematik statistikaning asosiy masalalaridan biri baholash masalasidir.

Aytaylik, bosh to'plamning biror miqdoriy ko'rsatkichini baholash talab qilinsin. Nazariy mulohazalardan bu baholanayotgan ko'rsatkichning qanday taqsimotga ega ekanligi ma'lum bo'lsin. Tabiiy ravishda bu taqsimotni aniqlaydigan parametrlarni baholash masalasi kelib chiqadi. Odatda kuzatuvchi ixtiyorida bosh to'plamdan olingan n ta kuzatish natijasi $x_1, x_2, ..., x_n$, ya'ni tanlanma qiymatlaridan boshqa ma'lumot bo'lmaydi (bu $x_1, x_2, ..., x_n$ miqdorlarni o'zaro bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar sifatida qaraymiz). Nazariy taqsimot, ya'ni ξ tasodifiy miqdor noma'lum parametrining bahosini topish uchun kuzatish natijalarining shunday funksiyasini topish kerakki, bu funksiya baholanadigan parametrning taqribiy qiymatini bersin.

Nazariy taqsimot noma'lum parametrining *statistikasi* deb kuzatish natijalarining (tanlanma elementlarining) $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ ixtiyoriy funksiyasiga aytiladi.

Masalan, taqsimot matematik kutilmasini baholash uchun *tanlanmaning o'rta qiymati*

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

xizmat qiladi.

Eslatma. Statistika — bu baholanadigan parametrning funksiyasi emas, balki kuzatish natijalarining funksiyasidir. Statistika, odatda, noma'lum parametrni baholashga xizmat qiladi (shu sababli uni «baho» deb ham atashadi), shu sababli ham u noma'lum parametrga bog'liq bo'lishi mumkin emas.

Albatta, statistika tanlanmaning «ixtiyoriy» funksiyasi emas, balki «o'lchovli» funksiyasidir (ya'ni $\mathbb{R}$ dagi ixtiyoriy Borel to'plamining proobrazi $\mathbb{R}^n$ dagi o'lchovli to'plam bo'ladigan funksiya). Ammo biz qaraydigan statistikalar odatda o'lchovli funksiya bo'ladi, shu sababli har safar statistika o'lchovli funksiya ekanligini ta'kidlab o'tirmaymiz.

Statistik baholar baholanayotgan parametrga «yaxshi» yaqinlashishi uchun ular ayrim shartlarni qanoatlantirishi talab qilinadi.

Faraz qilaylik, nazariy taqsimotning noma'lum θ parametrining statistik bahosi $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ bo'lsin.

Ixtiyoriy hajmdagi tanlanma uchun matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lgan statistika *siljimagan baho* deyiladi ($E\theta^* = \theta$ tenglikning o'rinli bo'lishidan θ^* ning siljimagan baho ekanligi kelib chiqadi).

Matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lmagan statistika *siljigan baho* deyiladi ($E\theta^* \neq \theta$ bo'lsa, undan θ^* bahoning siljigan ekanligi kelib chiqadi).

Demak, taklif etilgan statistikaning siljimaganligini tekshirish uchun uning matematik kutilmasini hisoblash kerak bo'ladi.

Tanlamaning hajmi n orttirilganda matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga yaqinlashidigan statistika *asimptotik siljimagan baho* deyiladi. ($\lim\limits_{n\to\infty} E\theta^* = \theta$ bo'lganda θ^* statistika θ noma'lum parametr uchun asimptomik siljimagan baho bo'ladi).

Katta hajmdagi tanlanmalar bilan ish ko'rilganda bahoga asoslilik talabi qo'yiladi. Agar kuzatishlar sonini cheksiz orttirilganda $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ statistika baholanayotgan θ parametrga ehtimollik bo'yicha yaqinlashsa, ya'ni ixtiyoriy $\sigma > 0$ uchun ushbu

$$P(|\theta^* - \theta| > \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda θ^* statistika θ parametrning *asosli bahosi* deyiladi.

Siljimaganlik – bu bahoning fiksirlangan n dagi xossasi bo'lib, u bu bahodan sistematik ravishda foydalanishda vujudga keladigan «o'rtacha» xatoning bo'lmasligini ta'minlaydi.

Asoslilik xossasi ma'lumotlar miqdori kattalashganda baholar ketma-ketligining noma'lum parametrga yaqinlashishini anglatadi. Ravshanki, agar statistika bu xossaga ega bo'lmasa, u holda bu statistika baho sifatida umuman «asossiz» bo'ladi.

Ko'p hollarda θ^* bahoning asosli ekanligini tekshirish uchun quyidagi teoremadan foydalaniladi.

Teorema. Agar θ^* baho θ parametr uchun siljimagan baho va $n\to\infty$ da $D\theta^*\to 0$ bo'lsa, u holda θ^* asosli baho bo'ladi.

Bu teoremani Chebishev tengsizligi yordamida oson isbotlash mumkin.

Baholanayotgan parametr uchun bir nechta baho taklif etish mumkin. U holda ularning orasidan «eng yaxshisini» tanlash masalasi kelib chiqadi. Tabiiyki, statistik baho dispersiyasining kichik bo'lishini ta'minlashga harakat qilishimiz kerak. Shu maqsadda effektiv baho tushunchasini kiritamiz. Berilgan hajmli tanlanma to'plamdagi eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan siljimagan statistika *effektiv baho* deyiladi.

Effektiv baholar odatda Rao-Kramer tengsiligidan foydalanib topiladi, ya'ni:

$$D\theta^* \geq \frac{1}{nI(\theta)}, \qquad (*)$$

bu yerda $I(\theta)$ – Fisher informatsiyasi bo'lib, uni quyidagicha aniqlanadi: diskret hol uchun

$$I(\theta) = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\xi,\theta)\right]^2 = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{p'_\theta(x_k,\theta)}{p(x_k,\theta)}\right]^2 \cdot p(x_k,\theta),$$

bu yerda $p(x,\theta) = P\{\xi = x\}$; uzluksiz hol uchun

$$I(\theta) = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\xi,\theta)\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{f'_\theta(x,\theta)}{f(x,\theta)}\right]^2 f(x,\theta)\,dx,$$

bu yerda $f(x,\theta)$ – ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi.

Rao-Kramer tengsizligi (*) dan ko'rinadiki θ^* baho effektiv bo'lishligi uchun $D\theta^* = \dfrac{1}{nI(\theta)}$ bo'lishligi yetarli va zaruriy shart.

Agar
$$\lim_{n\to\infty}\frac{E\left(\theta^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)-\theta\right)^2}{\inf\limits_{\theta_i^*} E\left(\theta_i^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)-\theta\right)^2} = 1$$

bo'lsa, θ^* baho *asimptotik effektiv* baho deyiladi.

Statistik baholar ikki xil – nuqtaviy va intervalli bo'ladi.

Bitta miqdoriy kattalik bilan aniqlanadigan statistik baho *nuqtaviy baho* deyiladi.

Baholanayotgan parametrni qoplaydigan intervalning chegaralarini bildiruvchi ikki miqdoriy kattalik bilan aniqlanadigan statistik baho *intervalli baho* deyiladi.

Endi ba'zi statistik baholar va ularning xossalarini keltiramiz.

ξ tasodifiy miqdorning kuzatilgan qiymatlari, ya'ni tanlanma $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bo'lsin. Tanlamaning o'rta qiymati $\overline{x}$ bosh to'plam matematik kutilmasining siljimagan va asosli bahosi bo'ladi. Buni tekshirish qiyin emas, ya'ni $E\xi = Ex_i = a$, $D\xi = Dx_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ desak,

$$E\overline{x} = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ex_i = \frac{1}{n}\cdot na = E\xi .$$

Demak, $\overline{x}$ baho $E\xi$ uchun siljimagan baho bo'ladi. Katta sonlar qonuniga asosan har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $n \to \infty$ da

$$P\left(\left|\overline{x} - E\xi\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

va $\overline{x}$ baho $E\xi$ uchun asosli baho bo'ladi.

Xususan, agar normal taqsimlangan bo'lsa, u holda qiymati uchun effektiv baho bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Tanlanma dispersiya

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

bosh to'plam dispersiyasining siljigan bahosi bo'ladi, chunki $ED_T = \frac{n-1}{n}D\xi$. Haqiqatan ham, quyidagi tengliklarni

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i - E\xi - (\overline{x} - E\xi)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - E\xi)^2 - \frac{2}{n}(\overline{x} - E\xi)\sum_{i=1}^{n}(x_i - E\xi) + \frac{n}{n}(\overline{x} - E\xi)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - E\xi)^2 - \frac{2}{n}(\overline{x} - E\xi)(\overline{x} - E\xi)n + (\overline{x} - E\xi)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - E\xi) - (\overline{x} - E\xi)^2$$

va

$$E(\bar{x} - E\xi)^2 = D\bar{x} = \frac{1}{n} D\xi$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$ED_T = \frac{1}{n} E\sum_{i=1}^{n}(x_i - E\xi)^2 - E(\bar{x} - E\xi)^2 = D\xi - \frac{1}{n} D\xi = \frac{n-1}{n} D\xi$$

bo'ladi.

Shu sababli, bosh to'plam dispersiyasi $D\xi$ uchun quyidagi «tuzatilgan» dispersiya

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

siljimagan baho bo'ladi, chunki $ES^2 = D\xi$.

Tanlanma dispersiyasining $n \to \infty$ da $D\xi$ uchun asosli baho ekanligini ko'rsatish mumkin.

Tanlanma dispersiyasini hisoblaganda quyidagi formuladan foydalanish qulay:

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 .$$

Tanlanma dispersiyasidan olingan kvadrat ildizga $\sigma_T = \sqrt{D_T}$ tanlanmaning *o'rtacha kvadratik chetlanishi* deb ataladi.

Tanlanmaning «tuzatilgan» dispersiyasidan olingan kvadrat ildizga $S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_T}$ tanlanmaning «*tuzatilgan*» *o'rtacha kvadratik chetlanishi* deb ataladi.

Empirik taqsimot funksiyasi $F_n^*(x)$ taqsimot funksiya $F(x) = P(\xi < x)$ uchun siljimagan va asosli baho bo'ladi.

6.6-§. Nuqtaviy baholarni topish usullari

Nuqtaviy baholarni topishning juda ko'p usullari mavjud. Biz ko'p tarqalgan usullar: momentlar usuli, haqiqatga eng katta o'xshashlik usuli va eng kichik kvadratlar usuliga to'xtalib o'tamiz.

1. ***Momentlar usuli***. Momentlar usuli yordamida baho toppish uchun taqsimotning nazariy momentlari tanlanma to'plam yordamida topilgan mos empirik momentlar bilan tenglashtiriladi.

Demak, agar taqsimot bitta parametr θ ga bog'liq bo'lsa, u holda $E\xi = \bar{x}$ tenglamani θ nisbatan yechish kerak bo'ladi. Agar taqsimot ikkita θ_1, θ_2 parametr ga bog'liq bo'lsa, u holda

$$\begin{cases} E\xi = \bar{x}, \\ D\xi = D_T \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini θ_1, θ_2 ga nisbatan yechish kerak bo'ladi. Va nihoyat, agar taqsimot n ta parametr $\theta_1,\theta_2,...,\theta_n$ ga bog'liq bo'lsa, u holda

$$\begin{cases} E\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \\ E\xi^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \\ \quad \ldots \\ E\xi^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} E\xi = \bar{x}, \\ D\xi = D_T, \\ \quad \ldots \\ E(\xi - E\xi)^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^k \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining bittasini yechish kerak bo'ladi.

Odatda momentlar usuli yordamida topilgan baho asosli bo'ladi.

1-misol. Momentlar usuli yordamida normal taqsimlangan ξ tasodifiy miqdor parametrlarining bahosi topilsin.

Berilganga ko'ra, $x_1,x_2,...,x_n$ tanlanma yordamida $a = E\xi = \theta_1$ va $\sigma^2 = D\xi = \theta_2$ parametrlar uchun nuqtaviy baho topish kerak.

Momentlar usuliga ko'ra

$$\begin{cases} E\xi = \bar{x}, \\ D\xi = D_T, \end{cases} \quad \text{ya'ni} \quad \begin{cases} a = \bar{x}, \\ \sigma^2 = D_T \end{cases}$$

bo'ladi.

Demak, normal taqsimot parametrlari uchun momentlar usuli yordamida topilgan baholar $\theta_1^* = \overline{x}$ va $\theta_2^* = D_T$.

2. Haqiqatga eng katta o'xshashlik usuli (*HKO'U*). Ayataylik, ξ tasodifiy miqdor ustida n ta bog'liqsiz tajriba o'tkazib, $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma olingan bo'lsin. Ushbu tasodifiy miqdor zichlik funksiyasining ko'rinishi $f(x,\theta)$ ma'lim, lekin θ parametr noma'lum. Tanlanma yordamida θ parametrni baholash talab etiladi.

HKO'U asosida, haqiqatga o'xshashlik funksiyasi tushunchasi yotadi.

Tanlanma $x_1, x_2, ..., x_n$ yordamida qurilgan haqiqatga o'xshashlik funksiyasi deb, quyidagi

$$L(x,\theta) = L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = f(x_1,\theta) \cdot f(x_2,\theta) \cdot ... \cdot f(x_n,\theta)$$

ko'rinishdagi θ argumentning funksiyaga aytiladi.

Agar ξ tasodifiy miqdor diskret tipda bo'lsa,

$$L(x,\theta) = p(x_1,\theta) \cdot p(x_2,\theta) \cdot ... \cdot p(x_n,\theta)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $p(x,\theta) = P\{\xi = x\}$.

HKO'U ko'ra θ parametrning nuqtaviy bahosi sifatida θ ning shunday qiymati olinadiki, bu qiymatda haqiqatga o'xshashlik funksiyasi maksimumga erishadi.

Bunday yo'l bilan topilgan baho haqiqatga eng katta o'xshash baho deb ataladi va u

$$\frac{dL(x,\theta)}{d\theta} = 0$$

tenglamaning yechimi bo'ladi.

Ushbu $L(x,\theta)$ va $\ln L(x,\theta)$ funksiyalar θ ning bir xil qiymatida maksimumga erishishini e'tiborga olib, qulaylik uchun $L(x,\theta)$ funksiya o'rniga $\ln L(x,\theta)$ funksiya maksimumi topiladi.

Shunday qilib, haqiqatga eng katta o'xshash bahosini topish uchun:

1) haqiqatga o'xshashlik tenglamasi $\dfrac{d(\ln L(x,\theta))}{d\theta} = 0$ ni yechish;

2) yechimlar ichidan $\ln L(x,\theta)$ ga maksimum qiymat beradiganini ajratib olish. Buning uchun ikkinchi tartibli hosilasidan foydalanishi qulay, ya'ni agar

$$\left.\frac{d^2(\ln L(x,\theta))}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta^*} < 0 \text{ bo'lsa,}$$

u holda $\theta = \theta^*$ maksimum nuqtasi bo'ladi.

Agar taqsimot qonuni n ta $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ parametrlarga bog'liq bo'lsa, u holda θ_1^*, θ_2^*, ..., θ_n^* baholar

$$\begin{cases} \dfrac{d(\ln L)}{d\theta_1} = 0, \\ \quad \ldots \\ \dfrac{d(\ln L)}{d\theta_n} = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechimlari orqali aniqlanadi.

2-misol. HKO'U yordamida Puasson taqsimotining λ parametri uchun baho topilsin.

Bu holda $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Shuning uchun $x_i \in \mathbb{N}$ da

$$p(x_i, \theta) = \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} e^{-\theta}.$$

Haqiqatga o'xshashlik funksiyasini topamiz

$$L(x,\theta) = \frac{\theta^{x_1} \cdot e^{-\theta}}{x_1!} \cdot \frac{\theta^{x_2} \cdot e^{-\theta}}{x_2!} \cdot \ldots \cdot \frac{\theta^{x_n} \cdot e^{-\theta}}{x_n!} = e^{-\theta n} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \frac{1}{x_1! \cdot \ldots \cdot x_n!}.$$

U holda

$$\ln L(x,\theta) = -n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln\theta - \ln\left(\frac{1}{x_1! \cdot \ldots \cdot x_n!}\right)$$

va

$$\frac{d \ln L(x,\theta)}{d\theta} = -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Haqiqatga o'xshashlik tenglamasi quyidagi ko'rinishiga ega:

$$\left.\left(-n+\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\right|_{\theta=\theta^*}=0.$$

Bu yerdan

$$\theta^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

ekanligini topamiz.

Endi

$$\left.\frac{d^2\ln L(x,\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta^*}=\left.\frac{d}{d\theta}\left(-n+\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\right|_{\theta=\theta^*}=-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i<0$$

ekanligini aniqlaymiz. Demak, $\theta^*=\bar{x}$ haqiqatga eng katta o'xshash baho bo'ladi.

3. ***Eng kichik kvadratlar usuli*** (***EKKU***). Noma'lum parametr θ uchun, tanlanma qiymatlarining izlanayotgan bahodan chetlanishi kvadratlarining yig'indisini minimallashtirish asosida baho topish usuli *eng kichik kvadratlar usuli* deyiladi.

Boshqacha qilib aytganda, EKKUda θ^* ning ushbu

$$G(\theta)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\to\min$$

yig'indini minimallashtiruvchi iymatini topish talab etiladi.

3-misol. EKKU yordamida Puasson taqsimotining λ parametri uchun baho topilsin.

Buning uchun $G(\theta)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2$ funksiyaning minimum nuqtasini topamiz:

$$G'(\theta)=\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\theta)\cdot(-1).$$

Endi $G'(\theta)=0$ tenglamadan kritik nuqtani aniqlamiz:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \theta = 0,$$

bu yerdan $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\theta$ va $\theta_{kr} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Bu nuqta minimum nuqtasi bo'lishi uchun $G''(\theta_{kr}) > 0$ ekanligini ko'rsatishimiz kerak, ya'ni

$$G''(\theta_{kr}) = \left(-2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)\right)' = -2\sum_{i=1}^{n}(-1) = 2n > 0.$$

Demak, $G(\theta)$ funksiyaning minimum nuqtasi $\theta_{kr} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ekan va $\theta^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ baho λ parametr uchun EKKU yordamida topilgan baho bo'ladi.

6.7-§. Intervalli baholash. Ishonchlilik intervallari

Oldingi paragrafda ko'rib chiqilgan baholarning hammasi nuqtaviy baholar edi. Agar tanlanmaning hajmi kichik bo'lsa, u holda nuqtaviy baho baholanayotgan parametrdan sezilarli farq qilishi mumkin. Shu sababli tanlanma hajmi kichik bo'lganida bahoning aniqligi va ishonchliligini yaxshiroq ta'minlaydigan interval baholardan foydalanish o'rinliroqdir.

Avvalgidek, $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \ldots x_n)$ statistik baho θ noma'lum parametrning bahosi bo'lsin. Tushunarliki, $|\theta^* - \theta|$ ayirma qanchalik kichkina bo'lsa, θ^* statistik baho θ parametrni shuncha aniq baholaydi. Statistik metodlar θ^* baho $|\theta^* - \theta| < \delta$ tengsizlikni albatta qanoatlantiradi, deb tasdiqlashga to'la imkon bermaydi, shu sababli bu tengsizlik amalga oshishi mumkin bo'lgan ehtimollik haqida gapirish mumkin. Agar $\left|\theta^*-\theta\right|<\delta$ tengsizlik γ ehtimollik bilan o'rinli, ya'ni $P\left(\left|\theta^*-\theta\right|<\delta\right)=\gamma$ bo'lsa, u holda γ ehtimollikni θ parametr uchun θ^* statistik bahoning *ishonchlilik ehtimolligi* deyiladi. Odatda, bahoning ishonchlilik ehtimolligi oldindan berilgan bo'ladi va birga yaqin qilib olinadi, masalan:

$$0{,}9;\ 0{,}95;\ 0{,}99;\ 0{,}999.$$

Faraz qilaylik, $P\left(\left|\theta^*-\theta\right|<\delta\right)=\gamma$ tenglik bajarilgan bo'lsin, u holda bu ifoda

$$P\left(\left|\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta\right|\right)=\gamma$$

bilan teng kuchlidir, ya'ni $\left(\theta^*-\delta,\ \theta^*+\delta\right)$ oraliq (interval) θ noma'lum parametrni o'z ichiga olish ehtimolligi γ ga teng.

Noma'lum θparametrni berilgan γ ishonchlilik ehtimolligi bilan o'z ichiga olgan $\left(\theta^*-\delta,\ \theta^*+\delta\right)$ oraliq *ishonchlilik intervali* deyiladi.

Ishonchlilik intervalini topishga doir misol tariqasida quyidagi masalani ko'ramiz.

ξ tasodifiy miqdor (a,σ^2) parametrlar bilan normal qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lsin. ya'ni

$$P(\xi<x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du,\quad x\in(-\infty,\infty).$$

Bu taqsimotning *a* parametri uchun σ^2 ma'lum bo'lgan holda ishonchlilik intervalini topamiz.

a noma'lum parametrning bahosi sifatida

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$$

ni olamiz, bu yerda $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – tanlanmaning variantalari – (a,σ^2) parametrlar bilan normal taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning bog'liqsiz kuzatish natijalaridan iborat. Demak, bu holda normal taqsimotning asosan

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$$

bahosi $\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ parametrlar bilan normal taqsimlangan bo‘ladi. Shuning uchun ham

$$P\left(\frac{|\bar{x}-a|}{\sigma/\sqrt{n}} < \delta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-u^2/2} du.$$

Ishonchlilik ehtimolligi γ berilsa, normal qonun jadvali (ilovadagi 2-jadval) dan δ_γ ni shunday tanlaymizki,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} e^{-u^2/2} du = 2\Phi_0(\delta_\gamma)$$

bo‘lsin, bu yerda $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$ — Laplas funksiyasi. U holda

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\delta_\gamma, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\delta_\gamma\right)$$

oraliq a parametr uchun ishonchlilik ehtimolligi γ bo‘lgan ishonchlilik intervali bo‘ladi, ya’ni

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\delta_\gamma < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\delta_\gamma\right) = P\left(\frac{|\bar{x}-a|}{\sigma/\sqrt{n}} < \delta\right) = \gamma.$$

6.8-§. Statistik gipotezalar nazariyasi elementlari

Tajribada kuzatiladigan tasodifiy miqdorning taqsimoti haqida aytiladigan har qanday taxminga *statistik gipoteza* deyiladi. Bunday taxminlarni nazariy mulohazalar yoki boshqa kuzatuvlarning statistik tahliliga asoslanib aytish mumkin.

Masalan asl qiymati «a» noma’lum bo‘lgan fizik kattalikni o‘lchash tajribasini ko‘raylik (masalan, a — biror samoviy jism diametri). Tajriba natijalariga bir qancha tasodifiy faktorlar ta’sir qiladi (o'lchash asbobining aniqligi, muhit harorati, va h.k.). Shuning uchun k-o'lchash natijasi (kuzatuv) $X_k = a + \varepsilon_k$ ko'rinishda bo'lib, bu yerda ε_k — o'lchashda yo'l qo'yiladigan tasodifiy xatolikdir. Odatda, yuqorida aytilgan tasodifiy ta'sirlarni inobatga olinganida, ε_k ko'p sondagi har biri juda katta bo'lmagan tasodifiy xatolar yig'indisi ko'rinishida bo'ladi. Shuning uchun markaziy limit teorema asosida X_k ni taqriban normal taqsimotga ega degan taxminni ayta olamiz.

Aniqlanishi kerak bo'lgan noaniqlik haqida aytilgan va tekshirilishi lozim bo'lgan gipoteza *asosiy gipoteza* deyiladi (odatda uni nolinchi gipoteza deb atalib, H_0 bilan belgilanadi).

Statistik gipotezalarni tekshirish deganda, biz shunday qoidani tuzishimiz kerakki, bu qoidaga binoan tanlanma natijalariga asoslanib asosiy gipoteza H_0 ni yo qabul qilishimiz yoki rad etishimiz kerak.

Asosiy gipoteza H_0 ni qabul qilishni yoki rad etishni aniqlovchi qoida *statistik kriteriy* deyiladi. Bunday qoidalarni (kriteriylarni) ishlab chiqish va ularni optimallashtirish usullarim aniqlash — statistik gipotezalar nazariyasining masalalaridir.

Asosiy gipotezadan farqli bo'lgan har qanday statistik gipoteza *alternativ* (*qarshi*) gipoteza deyiladi. Masalan, yuqorida keltirilgan misolda $H_0 = \{a = a_0\}$ asosiy gipotezaga $H_1 = \{a \neq a_0\}$ gipoteza alternativ bo'ladi.

Agar statistik gipoteza noma'lumni bir qiymatli aniqlasa, bunday gipotezaga *sodda gipoteza* deyiladi. Aks holda u *murakkab gipoteza* deyiladi (keltirilgan misolda H_0 — sodda, H_1 — murakkab gipoteza).

Statistik gipotezaga misollar keltiraylik.

1-misol (*taqsimot haqida gipoteza*). Faraz qilaylik, taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ noma'lum bo'lgan tasodifiy miqdor ξ ustida hajmi n bo'lgan kuzatuvlar olib borilgan bo'lsin. Tekshirilishi lozim bo'lgan gipoteza H_0: $F_\xi(x) = F(x)$, bu yerda $F(x)$ — to'la to'kis berilgan (ma'lum), masalan, $F_\xi(x) = \Phi(x)$ — normal taqsimot funksiyasi, yoki H_0: $F_\xi \in \mathfrak{F}$, bu yerda $\mathfrak{F}$ — berilgan taqsimot funksiyalar oilasi. Ko'p holda, odatda $\mathfrak{F}$ parametrik taqsimot funksiyalar oilasi bo'ladi: $\mathfrak{F}=\{F(\cdot,\theta),\theta\in H\}$. Misol uchun $\mathfrak{F}=\{\Pi(\theta):\theta\in(0,\infty)\}$, $\Pi(\theta)$ – parametri θ bo'lgan Puasson taqsimot funksiyasi. Keltirilgan gipoteza *taqsimot ko'rinishi haqidagi* gipoteza deyiladi.

2-misol (bir jinslilik gipotezasi). Natijalari $\left(x_{i1},\ldots,x_{im_i}\right)$, $i=1,\ldots,k$ bo'lgan k ta bog'liqsiz kuzatuvlar seriyalari o'tkazilgan bo'lsin. Bu kuzatuvlar bitta tasodifiy miqdor ustida olib borilganligiga asos bormi, ya'ni kuzatuvlar taqsimoti seriyadan seriyaga o'zgarmaydimi? Agar javob «ha» bo'lsa, bu tanlanmalar bir jinsli deyiladi. Agar $F_l(x)$ deb l-seriyada kuzatilgan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini belgilasak, *bir jinslilik* haqidagi asosiy gipoteza H_0: $F_1(x)=\ \ldots\ =F_k(x)$ ko'rinishda bo'ladi.

3-misol (bog'liqsizlik gipotezasi). Tajribada (X,Y) ikki o'lchovli tasodifiy vektor kuzatilib, uning taqsimot funksiyasi $F_{(X,Y)}(u,v)$ noma'lum bo'lsin. Agar X, Y larni bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar deyishga asos mavjud bo'lsa, asosiy gipoteza H_0 : $F_{(X,Y)}(u,v)=F_X(u)F_Y(v)$ ko'rinishda bo'ladi (bu yerda $F_X(u)$, $F_Y(v)$ – mos ravishda va tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari).

Tabiiyki, bu keltirilgan misollar amaliyotda uchraydigan barcha hollarni o'z ichiga olmaydi. Xususan, talaygina hollarda noaniqlik taqsimot funksiya bog'liq bo'lgan parametrda (yoki parametrlarda) bo'ladi, ya'ni parametr noma'lum (masalan, bosh to'plamning o'rta qiymati yoki dispersiya va h.k.). Statistik gipoteza shu parametr ma'lum qiymatga tengligidan $\left(H_0\text{: }\theta=\theta_0\right)$ yoki berilgan sonli to'plamga tegishligidan $\left(H_0\text{: }\theta\in\Theta\right)$ iborat bo'ladi. Bunday gipotezalarga *parametrik gipotezalar* deyiladi.

Kriteriylar

Faraz qilaylik, $X_1,\ldots,X_n$ kuzatuvlar olib borilgan tasodifiy miqdor X dagi mavjud bo'lgan noaniqlik haqida H_0 gipoteza (taxmin) qabul qilingan bo'lsin. Bu gipotezani tekshirish quyidagi qadamlarda amalga oshiriladi. Avvalo empirik ma'lumotlarni (tanlanmani) H_0 gipotezadagidan farqini xarakterlovchi statistika $T=T(X_1,\ldots,X_n)$

tanlanadi. Odatda, bunday statistika manfiy bo'lmaydi va uning taqsimotini H_0 da aniq yoki taxminan topish mumkin bo'ladi. Xususan, agar H_0 murakkab bo'lsa, T ning taqsimoti H_0 ni tashkil etuvchi barcha gipotezalar uchun bir xil bo'ladi.

Faraz qilaylik, bunday statistika $T=T(X_1,...,X_n)$ tanlangan bo'lib, uning qabul qiladigan qiymatlari to'plami J, ya'ni $J=\{t: t=T(x_1,...,x_n),\ x_1,...,x_n\in\Psi\}$, bu yerda Ψ — kuzatilayotgan tasodifiy miqdorning qiymatlar to'plami bo'lsin. Oldindan yetarlicha kichik $\alpha>0$ olib, J ni shunday qismi $J_{1\alpha}$ $(J_{1\alpha}\subset J)$ ni ajratamizki, agar asosiy gipoteza H_0 o'rinli bo'lsa $T(X_1,...,X_n)\in J_{1\alpha}$ hodisaning ehtimolligi (bunday ehtimollikni $P\{T(X_1,...,X_n)\in J_{1\alpha}/H_0\}$ ko'rinishda yozamiz) α dan katta bo'lmasin:

$$P\{T(X_1,...,X_n)\in J_{1\alpha}/H_0\}\le\alpha .$$

Bunda H_0 ni tekshirish qoidasi quyidagicha bo'ladi. Faraz qilaylikki, n ta tajriba o'tkazilib, $x_1,...,x_n$ natijalar olindi va $T(X_1,...,X_n)$ statistikaning mos qiymati $t=T(x_1,...,x_n)$ bo'lsin.

Aga $t\in J_{1\alpha}$ bo'lsa, u holda H_0 gipotezada ehtimolligi kichik (α) bo'lgan hodisa ro'y bergan bo'lib, H_0 gipoteza rad etilishi kerak (chunki tajribalar natijalari uni tasdiqlamadi). Aks holda, ya'ni agar $t\notin J_{1\alpha}$ bo'lsa, H_0 gipotezani qabul qilishga asos bor, chunki tajriba natijalari uni tasdiqlayapti.

Shuni aytish kerakki, $t\in J_{1\alpha}$ (ya'ni $t\in J/J_{1\alpha}$) bo'lsa, albatta H_0 ni qabul qilish kerak degan qat'iy fikr aytilmaydi, faqatgina shu konkret tajribalar natijalari H_0 ni tasdiqlayapti va uni qabul qilishga asos bor deyiladi, xolos.

Aytilgan qoidadagi $T(X_1,...,X_n)$ statistika *kriteriy statistikasi*, $J_{1\alpha}$ to'plam *kritik to'plam*, α esa *muhimlilik darajasi* deyiladi.

Bunda ikki turdagi xatoga yo'l qo'yilishi mumkin.

Aslida asosiy gipoteza H_0 to'g'ri bo'lganda uni rad etishdan hosil bo'lgan xato, ya'ni aslida H_0 to'g'ri, lekin $t=T(x_1,...,x_n)\in J_{1\alpha}$ bo'ldi. Bunday xato *birinchi turdagi xato* deyiladi. Demak, birinchi turdagi xato ehtimolligi $_\alpha$ dan oshmasligi kerak. Ikkinchi holda — aslida asosiy gipoteza H_0 noto'g'ri bo'lganda uni qabul qilishdan hosil bo'lgan xato, ya'ni aslida H_0 noto'g'ri, ammo tajriba natijalari $x_1,...,x_n$ da $t = T(x_1,...,x_n) \notin J_{1\alpha}$ bo'ldi va H_0 qabul qilindi. Bunday xatoni *ikkinchi turdagi xato* deyiladi. Odatda, bu xatoliklarga yo'l qo'yish ehtimolliklari mos ravishda *birinchi va ikkinchi turdagi xatolik ehtimolliklari* deyiladi.

Yuqorida aytilganidek, asosiy gipoteza H_0 dan farqli bo'lgan har qanday H_1 gipoteza *qarshi (alternativ) gipoteza* deyiladi va $P\{T(X_1,...,X_n) \in J_{1\alpha}/H_1\}$ ehtimollikni *kriteriy quvvati* deyiladi. Umuman, $P\{T(X_1,...,X_n) \in J_{1\alpha}/H\} = W(H)$ ehtimollik gipoteza H ning funksiyasi sifatida qaralib, kriteriyning quvvat funksiyasi deyiladi va $H=H_1$ bo'lganda $W(H_1)$ ehtimollik aslida asosiy gipoteza noto'g'ri bo'lganida uni rad etish ehtimolligini beradi.

Kritik to'plam $J_{1\alpha}$ ni ko'rinishiga qarab kriteriy uch turga bo'linadi:

agar $J_{1\alpha}=\{t : t > C_\alpha\}$ bo'lsa *o'ng tomonlama*, $J_{1\alpha}=\{t : t < C_\alpha\}$ bo'lsa *chap tomonlama*, $J_{1\alpha}=\{t : C_{1\alpha} < t < C_{2\alpha}\}$ bo'lsa *ikki tomonlama* kriteriy deyiladi. C_α, $C_{1\alpha}$, $C_{2\alpha}$ larga kritik nuqtalar deyiladi.

Shuni aytish kerakki, kritik nuqtani aniqlash uchun, yuqorida aytilganga ko'ra

$$P\{T(X_1,...,X_n) \in J_{1\alpha}/H_0\} = \alpha$$

tenglamani yechish kerak (aniqlik uchun o'ng tomonli kriteriyni ko'ramiz). Buning uchun esa o'z navbatida kriteriy statistikasining taqsimot funksiyasini bilish kerak. Ammo amaliyotda ko'p hollarda statistikaning taqsimotini aniqlab bo'lmaydi. Shuning uchun statistika taqsimoti uchun limit teoremalardan foydalaniladi, ya'ni ma'lum shartlarda $P\{T(X_1,...,X_n) > C_\alpha/H_0\} \sim \Phi_0(C_\alpha)$ ekanligi ko'rsatiladi, bunda $\Phi_0(x)$ ma'lum funksiya ($\Phi_0(x)$ funksiyaning qiymatlari 2-ilovadagi jadvalda keltirilgan). Kritik nuqta C_α quyidagi $\Phi(C_\alpha)=\alpha$ tenglamaning yechimi sifatida olinadi.

Yuqoridagi 1-misolda ko'rdikki, ko'p hollarda kuzatishlar natijasiga ko'ra noma'lum taqsimot qonuni haqidagi gipotezalarni tekshirishga to'g'ri keladi. Noma'lum taqsimot qonuni haqidagi gipotezani tekshirish uchun qo'llaniladigan statistik kriteriyga *moslik kriteriysi* deyiladi.

Turli moslik kriteriylari mavjud, ya'ni Pirson, Kolmogorov, Fishear va boshqalarning moslik kriteriylari.

Amaliyotda Pirsonning moslik kriteriysi eng ko'p qo'llaniladi. Shuning uchun bu kriteriy haqida batafsil to'xtalib o'tamiz.

Pirsonning xi-kvadrat kriteriysi

Faraz qilaylik, kuzatilayotgan ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ noma'lum bo'lsin. Asosiy gipoteza sifatida $H_0 : F_\xi(x) = F(x)$ olaylik, bu yerda $F(x)$ — ma'lum taqsimot funksiya, demak H_0 — sodda gipoteza. Tasodifiy miqdor ξ ni qiymatlar to'plamini $\mathfrak{A}$ orqali belgilaylik. $\mathfrak{A}$ ni k ta kesishmaydigan qismlar (oraliq)lar $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k$ ga bo'lamiz:

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{i=1}^{k} \varepsilon_i, \ \varepsilon_i \cap \varepsilon_j = \varnothing, \ i \neq j, \ i, j = 1, ..., k .$$

υ_1 deb ε_i oraliqga tushgan kuzatuvlar sonini belgilaymiz, ya'ni $X_1,...,X_n$ tanlanmadan ε_i oraliqqa tegishli bo'lganlar soni. υ_1 ga ε_i *oraliq chastotasi*, $\upsilon=(\upsilon_1,...,\upsilon_2)$ *chastotalar vektori* deyiladi. Chastotalar vektori υ tanlanma vektor $X_1,...,X_n$ orqali bir qiymatli aniqlanadi va $\upsilon_1+...+\upsilon_2 = n$ bo'ladi.

Asosiy gipoteza H_0 o'rinli degan shart ostida ixtiyoriy kuzatuvni ε_i oraliqdan olingan bo'lish shartli ehtimolligini P_{i0} orqali belgilaylik: $P_{i0} = P\{X \in \varepsilon_i / H_0\}, i = 1, ..., k$.

Kriteriy statistikasi sifatida

$$X_n^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\upsilon_i - nP_{i0})^2}{nP_{i0}} \qquad (*)$$

olinadi.

Ehtimollikning statistik ta'rifiga ko'ra (yoki katta sonlar qonunining Bernulli formasiga ko'ra), agar H_0 o'rinli bo'lsa υ_i/n nisbiy chastota P_{i0} ehtimollikka yaqin bo'lishi kerak. Demak, agar H_0 o'rinli bo'lsa, X_n^2 statistika katta bo'lmasligi kerak. Shunday qilib, Pirsonning χ^2 kriteriysi X_n^2 statistikaning katta qiymatlarida asosiy gipoteza H_0 ni rad etadi, ya'ni kritik to'plam o'ng tomonli bo'lib, $J_{1\alpha}=\{t : t > C_\alpha\}$ ko'rinishda bo'ladi.

Pirson teoremasiga ko'ra (*) statistika $n \to \infty$ da ozodlik darajasi $k-1$ bo'lgan χ^2 taqsimot bo'yicha taqsimlangan bo'ladi. Agar $F(x)$ taqsimot funksiyasi $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$ noma'lum m ta parametrga bog'liq bo'lsa, $P_{i0} = P_{i0}(\theta)$ ehtimolliklar ham θ parametrlarga bog'liq bo'ladi. Bunday vaziyatda $P_{i0}(\theta)$ ehtimolliklarni hisoblashda θ parametrlar ularning baholari bilan almashtiriladi (masalan, HKO'U orqali topilgan baholar). Bu holda χ^2 taqsimotning ozodlik darajasi parametrlar soni m ga kamaytiriladi, ya'ni ozodlik darajasi $k - m - 1$ bo'ladi. Xususan, agar normal taqsimot haqidagi gipoteza qaralsa, $m = 2$ bo'ladi.

Amaliyotda Pirson teoremasini $n \geq 50$, $\upsilon_i \geq 5$ bo'lganda qo'llash mumkin. Bunda kritik nuqta C_α ni berilgan α muhimlilik darajasi bo'yicha χ^2 taqsimot jadvali orqali topiladi.

Demak kuzatuv natijalariga ko'ra $X_n^2 > C_\alpha$ bo'lsa, H_0 gipoteza rad etiladi. Aksincha, agar $X_n^2 \leq C_\alpha$ bo'lsa, H_0 *gipotezani qabul qilishga asos bor* deyiladi.

6.9-§. Styudent taqsimoti (*t*-taqsimot) va uning qo'llanilishi

Faraz qilaylik, X parametrlari (a,σ^2) bo'lgan normal taqsimotga ega bo'lsin. Statistika terminlarida oxirgi jumla bosh to'plam (X ning qiymatlari) berilgan parametrlar bilan normal taqsimlanganligini ifodalaydi. Oldingi paragraflarda keltirilgan faktlardan kelib chiqadiki,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

statistika noma'lum parametr $a=EX$ uchun eng yaxshi baho bo'ladi (bu yerda $x_1, x_2, ..., x_n$ – normal taqsimotga ega bo'lgan bosh to'plamdan hajmi n ga teng qilib olingan tanlanma). Juda oson ko'rish mumkinki,

$$Z = \frac{\bar{x} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

statistika standart normal taqsimotga ega bo'ladi, ya'ni

$$P(Z < x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Bu holda tanlanma o‘rta qiymat $\bar{x}$ ning noma’lum parametr a dan qanchalik chetlanishi haqida to‘la ma’lumotga ega bo‘lamiz. Lekin ko‘p hollarda bosh to‘plamning dispersiyasi σ^2 noma’lum miqdor bo‘ladi. Shuning uchun ham

$$t = \frac{\bar{x} - a}{S} \cdot \sqrt{n}$$

statistikaning taqsimotini o‘rganish katta amaliy ahamiyatga ega bo‘ladi. Bu yerda

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

noma’lum parametr σ^2 uchun siljimagan, asosli optimal baho.

Matematik statistika bo‘yicha adabiyotlarda isbot etilganki

$$P(t < x) = \int_{-\infty}^{x} S(u, n)\, du,$$

$$S(x, n) = \frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{n/2}}. \qquad (1)$$

Keltirilgan (1) formula ko‘rinishidagi zichlik funksiyasiga ega bo‘lgan taqsimotni ozodlik darajasi $n-1$ ga teng bo‘lgan *Styudent taqsimoti* (yoki *t-taqsimot*) deyiladi. Yana (1) formuladan ko‘rinadiki t-taqsimot noma’lum parametrlar a va σ^2 larga bog‘liq bo‘lmasdan, faqatgina tanlanma hajmi n orqali aniqlanadi. Shuning uchun ham bu taqsimot matematik statistikaning amaliy masalalarida juda muhim rol o‘ynaydi va matematik statistika bo‘yicha yozilgan kitoblarda $S(x,n)$ funksiyaning qiymatlari jadvali keltirilgan.

Endi Styudent taqsimotining statistik gipotezalarni tekshirish masalalariga tadbig‘i haqida to‘xtalamiz. Ko‘p amaliy tadqiqotlarda ikkita taqsimotning o'rta qiymatlari tengligi haqidagi statistik gipotezalarni tekshirish kerak bo'ladi. Aytilgan fikrni statistik masala ko'rinishida umumiy holatda keltiramiz.

Faraz qilaylik, X va Y tasodifiy miqdorlar normal taqsimotga ega bo'lsin. O'z navbatida

$$X_1, X_2, ..., X_{n_1} \quad \text{va} \quad Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2}$$

tanlanmalar mos ravishda X va Y bosh to'plamlardan olingan bo'lsin. Bu tanlanmalar asosida $H_0 : EX = EY$ va unga alternativ bo'lgan $H_1 : EX \neq EY$ ($|EX - EY| > 0$) gipotezalarni tekshirish masalasini ko'ramiz.

Noma'lum miqdorlar EX va EY lar uchun

$$\overline{X} = \frac{X_1 + ... + X_{n_1}}{n_1}, \quad \overline{Y} = \frac{Y_1 + ... + Y_{n_2}}{n_2}$$

statistikalar eng yaxshi baho bo'ladi. X va Y miqdorlarning dispersiyalari uchun

$$DX = \sigma_X^2 = DY = \sigma_Y^2 = \sigma^2 \qquad (2)$$

shartni qabul qilamiz va bu yerda σ^2 ni noma'lum parametr deb hisoblaymiz (keyingi mulohazalar ko'rsatadiki, (2) tenglik deyarli umumiylikni chegaralamaydi). Oldingi paragraflarda keltirilgan natijalardan kelib chiqadiki

$$S_X^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(X_i - \overline{X}\right)^2, \quad S_Y^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$$

statistikalar mos ravishda $\left(X_1, X_2, ..., X_{n_1}\right)$ va $\left(Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2}\right)$ tanlanmalar bo'yicha σ^2 uchun siljimagan baholar bo'ladi. Lekin X va Y bosh to'plamlar umumiy dispersiya σ^2 ga ega bo'lganlari uchun noma'lum σ^2 ni baholashda har ikki tanlanmadan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi. Qiyin bo'lmagan mulohazalar ko'rsatadiki

$$S_{(X,Y)}^2 = \frac{S_X^2 (n_1 - 1) + S_Y^2 (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

statistika σ^2 uchun eng yaxshi baho bo'ladi (siljimagan, eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan statistik baho).

Agar H_0 gipoteza o'rinli bo'lsa, $\overline{X}-\overline{Y}$ tasodifiy miqdor o'rta qiymati 0 va dispersiyasi $\sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)$ bo'lgan normal taqsimotga ega bo'ladi. Haqiqat ham

$$E(\overline{X}-\overline{Y})=E\overline{X}-E\overline{Y}=0,$$

$$D(\overline{X}-\overline{Y})=D(\overline{X})+D(\overline{Y})=\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}=\sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right).$$

Bevosita hisoblash yo'li bilan quyidagi tengliklarni to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz:

$$E\left[\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S^2_{(X,Y)}\right]=\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)ES^2_{(X,Y)}=$$

$$=\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)E\left[\frac{S_X^2(n_1-1)+S_Y^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1-1)ES_X^2+(n_2-1)ES_Y^2}{n_1+n_2-2}=\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1-1)\sigma^2+(n_2-1)\sigma^2}{n_1+n_2-2}=$$

$$=\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\sigma^2.$$

Demak, $\overline{X}-\overline{Y}$ tasodifiy miqdorning dispersiyasi $D(\overline{X}-\overline{Y})$ uchun

$$S^2_{\overline{X}-\overline{Y}}=\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)S^2_{(X,Y)}$$

statistika yaxshi baho sifatida qabul qilinishi mumkin ekan. Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki

$$t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-E(\overline{X}-\overline{Y})}{S^2_{\overline{X}-\overline{Y}}}$$

statistika (tasodifiy miqdor) ozodlik darajasi $k=n_1+n_2-2$ bo'lgan Styudent taqsimotiga ega bo'lar ekan.

Agar H_0 gipoteza o'rinli bo'lsa, t statistikani

$$t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1-1)S_X^2+(n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2}}} \tag{3}$$

ko'rinishida yozish mumkin. Aytib o'tilgan fikrlarni umumlashtirib, quyidagi teoremaning o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Teorema. $(X_1, X_2, ..., X_{n_1})$ va $(Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2})$ tanlanmalar normal taqsimotga ega bo'lgan X va Y bosh to'plamlardan olingan bo'lsin. Agar H_0 gipoteza o'rinli bo'lsa, (3) tenglik bilan ifodalangan t-statistika ozodlik darajasi $k=n_1+n_2-2$ bo'lgan va (1) formula bilan aniqlanadigan Styudent taqsimotiga ega bo'ladi.

Keltirilgan teorema statistik gipotezalarni tekshirish masalasiga bevosita tadbiq etilishi mumkin. Haqiqatan ham, agar ishonchlilik ehtimolligi $p = 1-\alpha$ berilgan bo'lsa, (1) formulaga asoslanib

$$P\left(|t| > t_{n_1+n_2-2}(\alpha)\right) = \alpha \tag{4}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi kritik qiymat $t_{kr} = t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$ ni topish mumkin. Endi hisoblangan qiymat $|t| > t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$ bo'lsa, $p = 1-\alpha$ ehtimollik (ishonchlilik) bilan H_0 gipoteza rad etiladi (alternativ gipoteza H_1 qabul qilinadi).

Misol. Noma'lum miqdorni aniqlash uchun 2 seriyadan iborat o'lchash ishlari bajarildi. Birinchi seriya uchun o'lchashlar soni $n_1=25$ va ikkinchi seriya uchun $n_2=50$ bo'lib, quyidagi tanlanma o'rta qiymatlar olindi: $\overline{X} = 9,79$ va $\overline{Y} = 9,60$. Bosh to'plamlar X va Y larning dispersiyasi bir xil, lekin noma'lum. Berilgan holda H_0 gipotezani tekshirish uchun S_X^2 va S_Y^2 tanlanma dispersiyalarni hisoblash kerak bo'ladi. Faraz qilaylik, $(X_1, X_2, ..., X_{n_1})$ va $(Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2})$ tanlanma qiymatlari shundayki, ular uchun

$$S_X^2 = 0,28, \quad S_Y^2 = 0,33$$

bo'lsin. Ko'rilayotgan misolda

$$S=\sqrt{\frac{(0,28)^2\cdot 24+(0,33)^2\cdot 49}{73}}\approx 0,31$$

va t-statistikaning qiymati

$$t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{0,19}{0,31\cdot\sqrt{0,04+0,02}}=2,47.$$

Ehtimollik (ishonchlilik darajasi) p=0,99 va ozodlik darajasi k=73 uchun (4) tenglikni qanoatlantiruvchi kritik qiymat

$$t_{kr}=t_{73}(0,01)=2,65.$$

Demak, 2,47 < 2,65 ekanligidan 0,99 ehtimollik bilan H_0 ($EX=EY$) gipoteza qabul qilinadi.

Statistik gipotezalarni tekshirishda namoyish etilgan Styudent taqsimotining qo'llanishga oid quyidagi izohlarni keltiramiz:

1) Umuman statistik metodlar yordamida berilgan H_0 va H_1 gipotezalardan qaysi biri qabul qilinishi mumkinligi haqida aniq xulosaga kelish imkoniyati yuzaga keladi. Lekin statistik metodlar bu gipotezalardan qaysinisi to'g'ri ekanligini isbot etmaydi.

2) Biz bu paragrafda bosh to'plam (X va Y tasodofiy midorlarni qiymatlari) noma'lum $a=EX=EY$ va $\sigma^2=DX=DY$ parametrlarga ega bo'lgan normal taqsimot bo'lsin deb faraz etdik. Lekin tanlanma $(X_1, X_2, \ldots, X_{n_1})$ ning elementlari ixtiyoriy $F(x)$ taqsimotga ega bo'lsa, markaziy limit teoremaga $n\to\infty$ asosan da

$$P(\overline{X}<x)=P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}<x\right)=P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}<x\sqrt{n}\right)=$$
$$=P\left(\frac{\overline{X}-E\overline{X}}{\sigma\sqrt{n}}<\frac{x-E\overline{X}}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\Phi_n(x)$$

asimptotik munosabatga ega bo'lamiz. Bu yerda

$$\Phi_n(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{n}}\right),\quad a=\int_{-\infty}^{x}x\,dF(x),\quad \sigma^2=\int_{-\infty}^{x}(x-a)^2\,dF(x).$$

Demak, umumiy holda ham tanlanma o'rta qiymati $\overline{X}$ parametrlari $\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ bo'lgan asimptotik normal taqsimotga ega bo'ladi. Keltirilgan izohdan ko'rinadiki, bu paragrafda namoyish etilgan Styudent taqsimotini hajmlari yetarli darajada katta bo'lgan ixtiyoriy tanlanmalar uchun ham tadbiq etish mumkin ekan.

3) Ixtiyoriy ikkita bosh to'plamlar uchun H_0 $(EX=EY)$ gipotezani tekshirish masalasi pedagogik tadqiqotlarda keng qo'llaniladi. Masalan, Y miqdor biror bir yangi pedagogik texnologiyaning pedagogik jarayonga ta'sir qilish darajasini ifoda etsa, H_0 gipoteza bu texnologiyaning o'quv jarayoniga ta'siri sezilarli bo'lmaganligini, aksincha alternativ gipoteza $(|EX - EY| > 0)$ esa ta'sir sezilarli bo'lganligini ko'rsatadi. Keltirilgan misolda aytib o'tilgan fikrlar sonli xarakteristikalarda ifoda etilgan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Matematik statistikaning asosiy masalalarini aytib bering.
2. Bosh to'plam nima?
3. Tanlanma to'plamga ta'rif bering.
4. Tanlanmaning qanday turlarini bilasiz?
5. Variatsion qator deb nimaga aytiladi?
6. Variatsion qatorga misol keltiring.
7. Empirik taqsimot funksiyasi deb nimaga aytiladi?
8. Empirik taqsimot funksiyasining asosiy xossalarini ayting.
9. Empirik taqsimot funksiyasining asosiy xossalari qanday?
10. Poligon va gistogramma qanday quriladi?
11. Statistik bahoga ta'rif bering.
12. Statistik bahoning asosiy xossalarini ayting.
13. Nuqtaviy bahoga ta'rif bering.
14. Ishonchlilik intervaliga ta'rif bering.
15. Kriteriy tushunchasiga ta'rif bering.
16. Gipotezalarni tekshirish nimadan iborat?
17. K. Pirsonning xi-kvadrat kriteriysini aytib bering.
18. Gipotezalarni statistik tekshirishda qanday xatolarga yo'l qo'yish mumkin?

Misol va masalalar

1. Quyidagi tanlanma uchun variatsion qator va statistik taqsimotini yozing: 5, 7, 4, 3, 5, 10, 7, 4, 5, 7, 7, 9, 9, 10, 3, 5, 4, 7, 5, 10.

Javob: Variatsion qator:

3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 10, 10.

Statistik taqsimot:

x_i:	3	4	5	7	9	10
n_i:	2	3	5	5	2	3

2. Yuqorida berilgan tanlanma uchun empirik taqsimot funksiyasini toping.

$$Javob:\ F_{20}^*(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3,\\ 0,1, & 3<x\le 4,\\ 0,25, & 4<x\le 5,\\ 0,5, & 5<x\le 7,\\ 0,75, & 7<x\le 9,\\ 1, & x>9.\end{cases}$$

3. Quyidagi tanlanma uchun statistik taqsimotni yozing va chastotalar poligonini chizing: 1, 5, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 7, 5, 4, 7, 3, 4, 5, 1, 1, 3, 7, 4, 5, 5, 4, 1, 3, 5, 4, 7, 5, 1, 4, 5, 3, 1, 4, 7, 1, 4, 3, 5, 1, 4, 5, 5, 7, 3, 1, 3, 4, 5.

4. 5, 5, 4, 6, 5, 4, 6, 6, 9, 7, 10, 5, 6, 10, 7, 4, 4, 5, 4, 7, 5, 4, 6, 6, 5, 6, 10, 6, 5, 5 tanlanma berilgan bo'lsin. Tanlanmaning statistik taqsimoti, tanlanma o'rta qiymati va tanlanma dispersiyasini toping.

Javob:

Statistik taqsimot:

x_i:	4	5	6	7	9	10
n_i:	6	9	8	3	1	3

$\overline{x}=5,9,\ D_T=0,29$.

5. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tanlanma berilgan bo'lsin. Tanlanma o'rta qiymati uchun quyidagi

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

tenglik bajarilishini isbotlang.

6. Tanlanmaning statistik taqsimoti quyidagicha bo'lsin:

$$\begin{array}{lllll} x_i: & x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ n_i: & n_1 & n_2 & \ldots & n_k \end{array}$$

Tanlanma dispersiyasini hisoblash uchun quyidagi

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i - \bar{x}^2$$

formula o'rinli ekanligini ko'rsating.

7. Berilgan tanlanma taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini tuzing.

Interval	Interval chastotalari
1–5	10
5–9	20
9–13	28
13–17	12
17–21	20
21–23	10

8. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tanlanma berilgan. Bosh to'plamning matematik kutilmasi m ning bahosi sifatida $\tilde{m}_1 = x_1$ statistik baho taklif qilingan. Bu bahoning siljimaganligi va asosliligini tekshiring.

9. Bosh to'plam λ parametrli Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan bo'lib, bu to'plam bo'yicha tanlanma tuzilgan bo'lsin. λ parametr uchun tanlanma o'rta qiymati siljimagan va asosli baho bo'lishini ko'rsating.

10. Bir xil sharoitda n ta bog'liqsiz tajribalar o'tkazilganda A hodisa k marta ro'y berdi. A hodisaning ro'y berish nisbiy chastotasi $h = \frac{k}{n}$ bu hodisaning bitta tajribada ro'y berishi ehtimolligi $p=P(A)$ uchun siljimagan va asosli baho bo'lishini ko'rsating.

VI bob bo'yicha test topshiriqlari

1. Bosh to'plamdan $n = 60$ hajmli tanlanma olingan:

x_i:	1	3	6	26
n_i:	8	40	10	2

Bosh to'plam matematik kutilmasining siljimagan bahosini toping.

A) $\bar{x} = 4$ B) $\bar{x} = 2$ C) $\bar{x} = 3$ D) $\bar{x} = 5$.

2. Bosh to'plamdan $n = 50$ hajmli tanlanma olingan:

x_i:	2	5	7	10
n_i:	16	12	8	14

Bosh to'plam matematik kutilmasining siljimagan bahosini toping.

A) $\bar{x}$ =5,76 B) $\bar{x}$ =2,74 C) $\bar{x}$ =3,76 D) $\bar{x}$ =4,75.

3. $n = 20$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma o'rtacha qiymatini toping:

x_i:	2560	2600	2620	2650	2700
n_i:	2	3	10	4	1

A) $\bar{x}$ =2621 B) $\bar{x}$ =2742 C) $\bar{x}$ =3761 D) $\bar{x}$ =4275.

4. $n = 41$ hajmli tanlanma bo'yicha bosh to'plam dispersiyasining $D_T = 3$ siljigan bahosi topilgan. Bosh to'plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

A) $S^2 = 3,075$ C) $S^2 = 2,075$

B) $S^2 = 3,751$ D) $S^2 = 3,775$.

5. $n = 51$ hajmli tanlanma bo'yicha bosh to'plam dispersiyasining $D_T = 5$ siljigan bahosi topilgan. Bosh to'plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

A) $S^2 = 5,1$ C) $S^2 = 2,3$
B) $S^2 = 3,7$ D) $S^2 = 3,4$.

8. $n = 100$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i:	340	360	375	380
n_i:	20	50	18	12

A) 167,29 B) 162,56 C) 165,35 D) 156,26.

10. $n = 50$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i:	0,1	0,5	0,6	0,8
n_i:	5	15	20	10

A) 0,32 B) 0,36 C) 0,52 D) 0,33.

11. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X belgisining noma'lum a matematik kutilmasini 0,95 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchlilik intervalini toping. Bosh to'plam o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma = 5$, tanlanma o'rtacha qiymat $\bar{x} = 14$ va tanlanma hajmi $n = 25$ berilgan.

A) $12,04 < a < 16,96$ C) $12,34 < a < 16,46$
B) $12,14 < a < 16,56$ D) $12,54 < a < 16,76$.

14. Tanlanmaning shunday minimal hajmini topingki, bosh to'plamni a matematik kutilmasining tanlanma o'rtacha qiymat bo'yicha bahosining aniqligi 0,925 ishonchlilik bilan 0,2 ga teng bo'lsin. Bosh to'plamning o'rtacha kvadratik chetlanishi ma'lum: $\sigma = 1,5$.

A) $n = 178$ B) $n = 189$ C) $n = 179$ D) $n = 183$.

Ehtimolliklar nazariyasining matematik fan sifatida yuzaga kelishi tarixidan lavhalar

Ehtimolligiklar nazariyasi fan sifatida shakllanishini bu sohaning yirik mutaxassislari, akademiklar A.N.Kolmogorov, B.V.Gnedenko, Yu.V.Proxorov, S.H.Sirojiddinov, A.N.Shiryaevlar, asosan, quyidagi bosqichlarga bo'ladilar:

1. Qadimgi davr (ehtimolliklar nazariyasi yuzaga kelishigacha o'tgan davr).
2. Birinchi bosqich (XVII–XVIII asr boshi).
3. Ikkinchi bosqich (XVIII–XIX asr boshi).
4. Uchinchi bosqich (XIX asr ikkinchi yarimi).
5. To'rtinchi bosqich (XX asr boshi va o'rtasi).

Qadimgi davr

Tasodifiylik to'g'risidagi birinchi tasavvurlar (kishi taqdiriga oid munosabatlar, faslning issiq yoki sovuq kelishi, janjalli masalalar natijalarini oldindan ayta bilish, sayyoralar harakatlarining holatlari – munajjimlik va boshqalar) asrlar boshiga borib taqaladi. Bu tasavvurlar ilmiy jihatdan asoslanganligiga o'tgan davrda inson aqli tomonidan inkor etib bo'lmaydigan holatlarga tegishli bo'lib, ularga oxirgi bir necha asrlar davomidagina ilmiy ma'no berildi, xolos.

Birinchi tasodifiyliklar asboblari – qimor o'yinlari oshiqlari haqida ko'pgina arxeologik ma'lumotlar mavjud. Ularga moslanib bu oshiqlar qadimgi Misrning birinchi sulolasi davrida (miloddan 3500 yil ilgari) qadimgi Yunon va Rim imperiyalarida qimor o'yinlari uchun asbob bo'lib xizmat qilganini aytib o'tish mumkin. Masalan Rim imperatorlari Avgust (mil. avv. 63 yil – milodiy 14 yil) va Klavdiy (mil. avv.10 yil – milodiy 54 yil) «oshiq» o'yinining eng ashaddiy muxlislari bo'lganlar.

Qimor o'yinlaridan tashqari, foydali va ziyonli imkoniyatlar bilan bog'liq bo'lgan tasodifiyotlar savdo-sotiq, sug'urtalash sohalarida qadimgi davrlardayoq yuzaga kelgan.

Masalan, Qadimgi Bobil (Vavilon) davlatchiligiga oid yozuvlarda miloddan avvalgi 4—3 ming yilliklar sug'urta uchun kontrakt (kelishuv) asosiy hujjat bo'lib hisoblangan. Bu yozuvlarning ko'pchiligi dengiz orqali yuk tashish moslamalariga tegishli bo'lgan. Sug'urtaning kontrakt shakllari finikiylar orqali yunonlarga, rimliklarga va hindularga o'tgan.

Ular qadimgi Rim imperiyasi davlat va madaniyat kodekslarida, Vizantiya imperiyasi qonunlarida o'z akslarini topgan. Masalan, Rim imperiyasi davrida Yuriy Ulpian (mil. avv. 220 yil) kishi hayoti sug'urtasiga oid xatolarni o'rganib, birinchi marta «o'lim jadvalini» tuzgan.

Italiya shaharlari-respublikalari (Rim, Venetsiya, Genuya, Piza, Florensiya) gullab yashnagan davrda sug'urta faoliyati bilan bog'liq statistik ma'lumotlarni yig'ish va o'rganish zaruriyati yuzaga kelgan. Tarixiy ma'lumotlardan ma'lumki, kishi hayoti sug'urtasi haqidagi kuni aniq belgilangan kontrakt 1347-yilda Genuyada manfaatdor shaxslar tomonidan tuzilgan.

G'arbiy Yevropa «Uyg'onish» davrida (XIV asr oxiri — XVII asr boshi) aytib o'tilgan shahar-respublikalar ijtimoiy va madaniy hayotda ro'y bergan ulkan islohotlarda muhim rol o'ynadilar. Xususan, shu davrda falsafiy ilmlarda «ehtimollik» tushunchasi shakllana boshlangandi. Bu jarayonda italyan matematiklari Luki Pacholi (1445—1517), Ch.Kalkanini (1479—1541), N.Tartali (1500—1557) va boshqalarning faoliyati sezilarli iz qoldirgan.

Qimor o'yinlarida ro'y berishi mumkin bo'lgan imkoniyatlarni matematik nuqtayi nazardan tahlil qilish bilan birinchilar qatorida shug'ullangan mashhur ixtirochi Dj. Kardano (1501—1576) bo'lgan. Ma'lumki, uning texnika sohasida «Kardan vali»ni ixtiro qilishi va matematikada uchinchi darajali tenglamalarni yechish uchun topgan «Kardano formulalari» uning fan tarixida o'chmas iz qoldirganini bildiradi. Dj.Kardano vafotidan keyin bosilgan «Qimor o'yinlari haqidagi kitob» asari bu o'yinning ishqibozlari uchun ajoyib qo'llanma bo'lib xizmat qilgan. Bu asrlarda kombinatorika g'oyalaridan foydalanilgan va bemalol aytish mumkinki, u ehtimollikning hozirgi zamonda ishlatiladigan «klassik» ta'rifiga juda yaqin bo'lgan.

1. Birinchi bosqich (XVII asr – XVIII asr boshi).

Juda ko'pchilik matematiklar fikricha (xususan mashhur fransuz matematigi P.Laplas), hozirgi zamon «ehtimolliklar nazariyasi»ning yuzaga kelishi XVII asrda yashab ijod qilgan taniqli fransuz matematiklari B.Paskal (1623–1662) va P.Ferma (1601–1665) orasida olib borilgan «ehtimolliklar hisobi» nomi bilan mashhur bo'lgan yozilmalardan boshlanadi. Bu yozilmalar esa o'sha davrda taniqli shaxs bo'lgan Anton Gotvaud (kavaler de Mere, yozuvchi, targ'ibotchi, 1607–1684) tomonidan B. Paskalga qo'yilgan ba'zi savollarga asoslangan. Xususan, bu savollardan birida ma'lum bir sabablar bilan qimor o'yini to'xtatilsa, yutuqlarni qanday taqsim etish kerakligi masalasi qo'yiladi. Oxirgi jumlani quyidagicha konkretlashtirish mumkin. Aytaylik, A va B o'yinchilar kelishib olishdiki, kim birinchi bo'lib 5 ta partiyada g'olib bo'lsa, unga hamma o'yin stavkasi (bahosi) beriladi. Masalan, 1984-yilda shaxmat bo'yicha jahon chempionligi uchun o'tkazilgan Karpov-Kasparov matchida kim birinchi bo'lib 6 ta partiyani yutsa chempion deb e'lon qilinishiga kelishib olingan. Bunda durrang natijalar hisobga olinmaydi va partiyalar soni chegaralanmaydi.

Faraz qilaylik, o'yin ba'zi sababalarga ko'ra majburiy ravishda, A o'yinchi 4 ta yutuqga, B o'yinchi esa 3 ta yutuqga ega bo'lgan holda to'xtatildi. (Eslatib o'tilgan Karpov-Kasparov matchida 48 partiyadan so'ng Karpov 5 ta, Kasparov 3 ta yutuqga ega bo'lgan holatda Jahon Shaxmat Federatsiyasi tomonidan to'xtatilgan). To'xtatilgan o'yinda umumiy stavkani qanday nisbatda bo'linishi kerakligi haqidagi savol bilan kavaler de Mere matematik B.Paskalga murojaat qilganining «tabiiy» variantlaridan biri sifatida 2:1 nisbati qabul qilinishi mumkin. Haqiqatan ham, o'yin davom ettirilsa qolgan partiyalarda A o'yinchi 1 marta yutishi yetarli bo'ladi, B o'yinchi esa 2 marta yutishi kerak bo'ladi. Bundan 2:1 nisbatga kelamiz, ya'ni A o'yinchi umumiy yutuqning 2/3 qismini, B o'yinchi esa 1/3 qismini olishi kerak.

Lekin yutilgan partiyalar sonini hisobga olgan holda 4:3 nisbat ham «tabiiy» deb hisoblanishi mumkin. Eslatib o'tilgan yozishmalarda B. Paskal va P. Ferma keltirilgan har ikki nisbat ham noto'g'ri bo'lganligini, aslida 3:1 nisbat haqqoniy ekanligi isbotlab berilgan.

Kavaler de Merening savollariga bog'liq bo'lgan ikkinchi bir masala quyidagicha qo'yiladi: olti qirrali o'yin kubigini 4 marta tashlaganda hech bo'lmaganda 1 ta 6 raqam tushishini yoki 2 o'yin kubigini 24 marta tashlaganda (6,6) juftlikni hech bo'lmaganda 1 marta yuzaga kelishi haqiqatga yaqinmi?

Bu savolga ham Paskal va Ferma to'g'ri javob topishgan. Birinchi kombinatsiya ikkinchisiga nisbatan haqiqatga yaqinm chunki birinchi kombinatsiya yuzaga kelish ehtimolligi

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,516,$$

ikkinchi kombinatsiya uchun esa ehtimollik

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491$$

keltirilgan javoblarni olishda Paskal va Ferma qo'yilgan masalalarni kombinatorikaga oid mulohazalar bilan yechishgan va bunda binomial koeffitsiyentlardan tashkil topgan «Paskal uchburchagi» o'zining amaliy tadbig'ini topgan.

1657-yilda fanning ko'p sohalarida mashhur olim bo'lgan X.Gyuygensning (1629—1695) «Qimor o'yinlaridagi hisoblar haqida» kitobi bosmadan chiqqan va u «ehtimollik hisobi» bo'yicha birinchi manbaa bo'lib xizmat qilgan. Bu kitobda ehtimollik tushunchasining fundamental ta'rifi va ehtimolliklarni hisoblash prinsiplari, ehtimolliklarni qo'shish va ko'paytirish formulalari keltirilgan. X.Gyuygensning kitobi uzoq vaqt davomida «Elementar ehtimolliklar nazariyasi» bo'yicha asosiy qo'llanma bo'lgan.

Eslatib o'tilgan davrda «ehtimolliklar nazariyasi»ning fan sifatida shakllanishida ensiklopedik olim Yakob Bernullining (1654—1705) roli juda ahamiyatli bo'lgan. U tomonidan hozirgi zamon «ehtimolliklar nazariyasi»ning klassik ta'rifi kiritilgan. Tabiatni matematik metodlar bilan o'rganishda juda ham muhim va Ya.Bernulli nomi bilan bog'langan «Katta sonlar qonuni» ehtimolliklar nazariyasining amaliyotdagi qo'llanmalari asosida yotadi. Bu qonun ehtimolliklar nazariyasining birinchi limit teoremalaridan hisoblanib, u Bernulli vafotidan so'ng 1713-yilda «Farazlar san'ati» kitobida (jiyani N.Bernulli ishtirokida) chop etilgan.

Buyuk rus matematiklaridan A.A.Markovning (1856–1921) e'tirof etishi bo'yicha, Ya.Bernulli o'zining 1704-yil 20-aprelda mashhur olim G.Leybnitsga (1646–1716) yozgan xatida «katta sonlar haqidagi teorema» unga ancha oldin ma'lum bo'lganligini eslatib o'tadi (qiziqligi shundaki, «katta sonlar qonuni» ilmiy termin sifatida 1835-yilda Puasson tomonidan keltirilgan).

Mashhur Bernullilar sulolasidan bo'lgan Daniil Bernulli (1667–1748) ehtimolliklar nazariyasida «Peterburg paradoksi» deb ataluvchi muammoni hal qilgani bilan tarixda o'z nomini abadiylashtirgan (u ko'p yillar davomida Sankt-Peterburg shahrida yashab ijod qilgan). Bu paradoksni hal qilish jarayonida tasodifiy sonlarning asosiy sonli xarakteristikasi sifatida «axloqiy kutilma» tushunchasidan foydalangan. Qayd qilib o'tish zarurki, «Peterburg paradoksi» hozirgi zamon «Moliya va sug'urta matematikasi»ning birinchi fundamental modellaridan hisoblanadi.

Ehtimolliklar nazariyasining yuzaga kelishining ilk davri tabiatshunoslikni «matematikalashtirish» jarayoniga mos keladi. Aynan shu davrda matematikada uzluksizlik, cheksiz katta va kichik miqdorlar konsepsiyalari shakllana boshlandi. Shu davrga kelib I.Nyuton (1642–1727) va G.Leybnits bu konsepsiyalarga asoslangan holda differensial va integral hisobni yaratdilar. Ma'lumki, o'rganilayotgan dinamik sistemaning hozirgi holatga nisbatan kelgusidagi evolutsiyasi differensial tenglamalar orqali o'rganiladi. Lekin deterministik xarakterga ega bo'lmagan sistemalarni o'rganish uchun differensial tenglamalar nazariyasi yetarli bo'lmaydi. Tabiatshunoslikda ehtimolliklar nazariyasi nodeterministik sistemalarni o'rganishda juda ham muhim bo'lib, uning qo'llanilishi tajribalarni cheksiz marta takrorlash imkoniyatlari (tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga o'tish) bilan bog'liq bo'ladi.

2. ***Ikkinchi bosqich*** (XVIII asr – XIX asr boshi).

Bu davrda ehtimolliklar nazariyasini mustaqil fan sifatida rivojlantirish P.-R. Monmor (1678–1719), A.Muavr (1667–1754), T.Bayes (1702–1761), P.S.Laplas ((1749–1827), K.Gauss (1777–1855), S.Puasson (1741–1840) kabi mashhur matematiklarning ijodida namoyon bo'ldi.

Yuqorida keltirilgan (1-punktda) farqlardan kelib chiqadiki, birinchi bosqich asosan falsafiy xarakterga ega bo'lib, ehtimolliklar nazariyasining predmeti va metodlari shakllanmagan edi. Ikkinchi bosqich davomida bu fan konkret matematika sifatida o'zining analitik metodlarini yaratib, uni matematik analiz elementlari bilan boyitib bordi. Bu bosqichda ehtimollik tushunchasi asosida amaliy sohalarda hisoblash usullarini rivojlantirish zaruriyati yuzaga keladi.

Aynan shu davrda ehtimolliklar nazariyasi «qimor o'yinlari» kabi tor soha doirasidan chiqib, astronomik kuzatishlar, harbiy sohada («O'q otish nazariyasi») va tajriba o'tkazishlar bilan bog'liq bo'lgan boshqa amaliy yo'nalishlarda tadqiq etila boshlandi. Masalan, ehtimollik-statistik metodlar asosida «xatoliklar nazariyasi» yuzaga keldi.

Yuqoridagi nomlari keltirilgan taniqli matematiklardan Monmor va Muavrlar ijodlarida Ya.Bernullining «ehtimolliklarni hisoblash» traktati chuqur iz qoldirgan. Monmorning «Tasodifiy o'yinlarning analizi tajribalari» (1708-y.) kitobida turli o'yinlar uchun ro'y berishi mumkin bo'lgan imkoniyatlarni hisoblash metodlari takomillashtirilgan.

A.Muavr o'zining ikki kitobida («Hodisalar doktrinasi», 1718- y., «Analitik metodlar», 1730- y.) ehtimollik nazariyasi uchun muhim bo'lgan «hodisalarning bog'liqsizligi», «matematik kutilma», «shartli ehtimolliklar» tushunchalarini chuqur tahlil etgan. Lekin, Muavr matematikada binomial taqsimot uchun normal approksimatsiya mavjud ekanligini isbotlagan teoremasi bilan mashhurdir. Bu teorema haqida quyida to'xtalamiz.

Hech shubhasiz aytish mumkinki, ehtimolliklar nazariyasi taraqqiyoti uchun mazkur bosqichda P.Laplas monumental shaxs hisoblanadi. Uning 1812-yilda chop etilgan «Analitik ehtimollik nazariyasi» kitobi XIX asr davomida ehtimolliklar nazariyasi bo'yicha asosiy darslik bo'lgan. U bundan tashqari, ehtimollik tushunchasining falsafiy asoslariga, bevosita ehtimolliklarni hisoblashga, ehtimolliklar nazariyasini astronomiyada, mexanika va matematik analiz masalalarida tadbiqlariga oid bir nechta asarlar yozgan. P.Laplas binomial taqsimotni normal qonun orqali yaqinlashtirish (approksimatsiyalash) haqidagi yuqorida eslatib o'tilgan Muavr teoremasini umumlashtiribgina qolmasdan, uning yangi analitik isbotini topdi. Bu teorema Muavr-Laplas nomi bilan atalib, XIX asr matematikasida sharafli mavqelarga ega bo'ldi. Muavr-Laplas teoremasining nazariy va amaliy ahamiyatini oydinroq yoritish maqsadida uning hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasidagi ifodasini keltiramiz.

O'zaro bog'liqsiz va bir xil Bernulli qonuni bilan taqsimlangan

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini ko'ramiz, ya'ni har qanday j uchun

$$\xi_j = \begin{cases} 1, & p \text{ ehtimollik bilan}, \\ 0, & 1-p \text{ ehtimollik bilan}, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots$$

bo'lsin. Agar

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$$

deb belgilasak, $P(S_n=k)$ ehtimollik quyidagi ma'noga ega. Aytaylik, Bernulli sxemasida n ta takroriy tajribalar o'tkazilib, har bir tajribada biror A hodisaning ro'y berish yoki bermasligi kuzatilsin. Bu holda n ta tajribada (kuzatishda) A hodisaning k marta ro'y berish ehtimolligi

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Bu formulada $p = P(A)$ — har bir tajribada A hodisaning ro'y berishi, $q = 1 - p$ — ro'y bermaslik ehtimolliklaridir.

Agar biz $p = P(A)$ ehtimollik berilgan deb hisoblasak, $P(S_n=k)$ ehtimolliklarni topish ehtimolliklar nazariyasining masalasi bo'ladi. Agar p ehtimollik noma'lum bo'lsa, uni A hodisa ustidan kuzatishlar (tajribalar) o'tkazish orqali aniqlashga to'g'ri keladi, ya'ni oldingi masalaga nisbatan teskari bo'lgan masala yuzaga keladi. Aytilgan ma'nodagi teskari masalalar matematik statistikaning asosiy predmeti bo'ladi. O'z-o'zidan tushunarliki, $\frac{S_n}{n}$ miqdor A hodisaning n ta tajribada qanchalik ko'p ro'y berishlarini xarakterlaydi va uni A hodisaning chastotasi deyiladi.

Ya.Bernulli tomonidan isbotlangan va ehtimolliklar nazariyasining katta sonlar qonuni deb ataluvchi limit teorema quyidagidan iborat.

1-teorema. Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $n \to \infty$ da

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \to 0. \qquad (2)$$

Bu teoremaning ma'nosi yetarli darajadagi katta n lar uchun $\frac{S_n}{n} \approx p$ bo'ladi degan xulosadan iborat.

Muavr-Laplas teoremasi (2) limit munosabatdagi ehtimollikni baholash imkoniyatini beradi va u quyidagicha ifodalanadi.

2-teorema. Har qanday $a < b$ haqiqiy sonlar uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du. \qquad (3)$$

Bu tenglamaning simmetrik hol uchun ($p = q = 1/2$) Muavr va ixtiyoriy $0 < p \leq 1$ uchun Laplas isbotlagan. (3) limit munosabatning o'ng $\Phi(b) - \Phi(a)$ tomonini ko'rinishda yozish mumkin va bunda $\Phi(\cdot)$ standart normal taqsimot funksiyasi bo'lib

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \qquad (4)$$

Muavr-Laplas teoremasining tadbig'i sifatida quyidagi misolni ko'rish mumkin.

Rasmiy statistik ma'lumotlarga asosan o'g'il bola tug'ilish ehtimolligi o'zgarmas $p = 0{,}512$ ga teng. Aytaylik, 10^4 bola tug'ildi. Shu tug'ilgan bolalardan o'g'il bolalar soni qiz bolalar sonidan 200 ta ko'p bo'lish ehtimolligi topilsin.

Qo'yilgan masala bog'liqsiz tajribalar Bernulli sxemasi doirasida quyidagicha yechiladi. Faraz qilaylik mumkin bo'lgan 10^4 bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi bor ($n = 10^4$) va undagi har bir tajribaning natijasi o'g'il yoki qiz bola tug'ilishidan iborat bo'ladi. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ξ_j larni quyidagicha keltiramiz: $\xi_j=1$, agar j-tug'ilgan bola o'g'il bo'lsa, $\xi_j=0$, agar u qiz bola bo'lsa. U holda

$$S_n = \sum_{j=1}^{10^4} \xi_j$$

miqdor ro'yxatdan o'tgan o'g'il bolalar sonini belgilaydi. Bu holda

$$npq \approx 0,25 \cdot 10^4 .$$

Topilishi kerak bo'lgan ehtimollik 2-teoremaga asosan

$$P(S_n \geq 5100) = 1 - P(S_n < 5100) = 1 - P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < \frac{5100-5120}{\sqrt{2500}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(-\frac{20}{50}\right) = 1 - \Phi(-0,4) \approx 0,66.$$

Eslatib o'tamizki, $\Phi(x)$ funksiyaning sonli qiymatlari jadvali ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha yozilgan deyarli hamma qo'llanmalarda keltiriladi.

Agar

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

formulani hisobga olsak, topilgan ehtimollikni (1) formula orqali hisoblash deyarli mumkin emasligiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan ham

$$P(S_n \geq 5100) = \sum_{\{k: k \geq 5100\}} \frac{(10^4)!}{(10^4 - k)!\,k!} p^k q^{n-k}$$

tenglik o'rinli bo'lib, yig'indi ostidagi qo'shiluvchilarni deyarli hisoblab bo'lmaydi.

Alohida qayd qilib o'tish kerak bo'ladiki, Muavr-Laplas teoremasi (1) formuladagi binomial taqsimot parametrlari n va p lar, $np \to \infty$ munosabatda bo'lganda (xususan p fiksirlangan holda) samarali natijalar beradi. Agar $p = p(n)$ bo'lib va $n \to \infty$ da $np \to \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$ asimptotik munosabat bajarilsa, Muavr-Laplas teoremasi o'rniga Puasson teoremasini ishlatishga to'g'ri keladi.

Muavr-Laplas teoremasidan tasodifiy miqdorlarni qo'shish nazariyasi boshlandi, degan fikrni oldinga sursak, hech ham xato qilmagan bo'lamiz. Uning umumlashgan variantlari «ehtimolliklar nazariyasining markaziy limit teoremalari» nomi bilan hozirgi zamon matematikasining fundamental va praktik jihatdan juda muhim yo'nalishini tashkil qiladi (termin mashhur matematik D.Poya (1887—1985) tomonidan taklif qilingan).

Shu davr davomida Bernulli tomonidan ilgari surilgan va «ehtimollikning klassik ta'rifini» asoslaydigan «teng imkoniyatlilik» prinsipidan chetlanish g'oyalari ham yuzaga keldi. Buning natijasida klassik sxemalarga mos kelmaydigan «noklassik taqsimotlar» mavjud bo'lishi hamda ularning nazariya va amaliyotda muhim rol o'ynashi kashf etildi. Masalan, (4) formula bilan aniqlanadigan normal taqsimot, Puasson taqsimotlari shular jumlasidandir (eslatib o'tamizki, butun va manfiy bo'lmagan qiymatlar qabul qiladigan tasodifiy miqdor Puasson taqsimotiga ega deyiladi, agar

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0,1,\ldots$$

bo'lsa. Tushunarliki ehtimollikning klassik ta'rifi darajasida bu taqsimotni aniqlab bo'lmaydi).

«Noklassik taqsimotlar»ning boshqa misoli sifatida «geometrik ehtimolliklarni» keltirish mumkin. Bu ehtimolliklar birinchi bor mashhur naturalist I.Nyutonda uchraydi (1665 y.). Bu ehtimolliklar Byuffonning «ignalarni tasodifiy tashlash» nomi bilan mashhur masalasida uchraydi. Teng imkoniyatli bo'lmagan taqsimotlar 1763-yilda topilgan Bayes formulasi va unga bog'liq bo'lgan «to'la ehtimollik» formulalarini asosini tashkil qiladi va ular «klassik sxemaning» juda tor ekanligini isbotlaydi. Bu formulalar kelgusida matematik statistika masalalarida yangi yo'nalish — Bayes metodlarini yuzaga keltirdi.

Lekin aytib o'tilgan taraqqiyotlar (shu davrda erishilgan) ehtimollik nazariyasini mustaqil fan darajasiga ko'tara olmadilar, chunki bu davrda ushbu fan nazariyasi uchun umumiy (abstrakt) konstruksiyalar yo'q edi. Ikkinchidan esa, shu davrda qo'llanilgan metodlar qimor o'yinlari, xatolik nazariyasi, sodda sug'urta, demografiyaning konkret masalalarini yechish doirasida chegaralanib qolgan edi.

3. Uchinchi bosqich (XIX asr ikkinchi yarmi).

XIX asr ikkinchi yarmidan boshlab Sankt-Peterburg ehtimolliklar nazariyasining umumiy muammolari bo'yicha olib borilayotgan ilmiy tadqiqot ishlarining markaziga aylandi. P.L.Chebishev (1821–1894), A.A.Markov (1856–1921), A.M.Lyapunov (1857–1918) va boshqa rus matematiklari ehtimolliklar nazariyasini mustaqil matematika fani sifatida rivojlanishiga katta hissa qo'shdilar. Aynan shu olimlarning tadqiqotlari natijasida ehtimolliklar nazariyasi «klassik sxema» doirasidan chiqdi. Masalan, P.L.Chebishev tasodifiy miqdorlar, matematik kutilma tushunchalarini juda erkin his qilganini sezish qiyin emas.

Bu davrgacha kashf qilingan katta sonlar qonuni, Muavr-Laplas teoremasi faqat 2 ta qiymat qabul qiladigan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga tegishli edi, xolos (Bernulli sxemasi). P.L.Chebishev bu teoremalarning tadbiq doiralarini kengaytirdi. Masalan, u katta sonlar qonunini biror o'zgarmas son bilan tekis chegaralangan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun o'rinli ekanligini isbot etdi. Uning o'quvchisi A.A.Markov bu tadqiqotni davom ettirib, katta sonlar qonuni o'rinli bo'lishi uchun kerak bo'ladigan yetarli va zaruriy shartlarni topdi. Bu tadqiqotlar davomida matematikaning boshqa sohalarida ham muhim ahamiyatga ega bo'lgan Chebishev, Chebishev-Markov tengsizliklari isbot etildi.

Katta sonlar qonunidan so'ng P.L.Chebishev yuqorida keltirilgan Muavr-Laplas teoremasining umumiy ko'rinishi – markaziy limit teoremaning juda keng tasodifiy miqdorlar ketma-ketliklari sinfi uchun o'rinli bo'lish muammolari bilan shug'ullandi. Bu tadqiqotlarda P.L.Chebishev markaziy limit teoremaning o'rinli bo'lishida ko'p qo'llaniladigan «momentlar metodi»ni ishlab chiqdi. Bu metod A.A.Markovning ishlaridan takomillashtirildi.

Ma'lumki, «momentlar metodi»ning qo'llanilishi, qo'shiluvchi bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun hamma tartibdagi momentlar mavjud bo'lishligini taqozo qiladi. P.L.Chebishevning shogirdlaridan biri A.M. Lyapunov o'zi asos solgan analitik metod – xarakteristik funksiyalar metodini qo'llab, markaziy limit teorema o'rinli bo'lishi uchun qo'shiluvchi bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarning atigi $2+\delta$ $(\delta > 0)$ tartibdagi momentlari mavjudligi yetarli ekanligini isbotladi. Eslatib o'tamizki, A.M.Lyapunov ehtimolliklar nazariyasidan tashqari matematika va mexanikaning boshqa sohalarida ham juda sermahsul ish qilgan. Masalan, uning hozirgi zamon fanidagi «turg'unlik nazariyasiga» asos solganini eslatib o'tish yetarli bo'ladi.

Bu davr oxirida A.A.Markov tomonidan bog'liqsiz bo'lmagan, ya'ni bog'liqli bo'lgan tasodifiy miqdorlar sxemasining kiritilgani va o'rganilgani ehtimolliklar nazariyasida butunlay yangi konsepsiyasini yuzaga keltirdi. Bu sxema «Markov prinsipi» deb ataldigan qoidaga bo'ysunib, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ifoda etadigan fizik sistemaning «kelgusidagi» evolutsiyasi faqat uning hozirgi holatiga bog'liq bo'lishini taqozo qiladi. Pirovardida, bu sxema tasodifiy miqdorlarning «Markov zanjirlari» nomini oldi va Markovning o'zi ikki qiymatli «zanjirlar» uchun ergodik teorema (katta sonlar qonunining qat'iy formasi) va markaziy limit teoremasi (Mauvr-Laplas teoremasining umumlashgani) o'rinli ekanligini isbotladi. A.A.Markovning bu ishlari hozirgi zamon ehtimolliklar naziriyasining «Markov tasodifiy jarayonlari» yo'nalishiga asos bo'ldi.

Umuman, xulosa qilib aytish mumkinki, P.L.Chebishev, A.A.Markov, A.M.Lyapunovlarning yuqorida qisqacha izohlangan ishlari («Peterburg maktabi») ehtimollik nazariyasining keyingi davrlardagi rivojlanishiga mustahkam poydevor bo'lib xizmat qildi.

XIX asrning ikkinchi yarmida G'arbiy Yevropada ham ehtimolliklar nazariyasiga qiziqish keskin yuksaldi. Bu qiziqishning asosiy sabablari, bu nazariyaning sof matematika tushunchalari orqali, statistik fizika va endigina ro'yobga chiqayotgan matematik statistika masalalari bilan uzviy ravishda bog'liqligi bor ekanligida bo'ldi. Shu davrda ko'pchilik matematiklarga ehtimolliklar nazariyasi mustaqil fan sifatida rivojlanish uchun uni «klassik asoslar» (ya'ni elementar hodisalar soni chekli va ularning teng imkoniyatligi)dan qutilishi kerakligi tushunarli bo'ldi.

Aynan shu davrda sof matematikaning o'zida ham «ehtimollik» tushunchasi bilan bog'liq bo'lgan ulkan o'zgarishlar ro'y berdi. Masalan, ehtimolliklar nazariyasidan juda yiroq bo'lgan sonlar nazariyasida ehtimolliklar taqsimotlari bilan bog'liq metodlarni qo'llash orqali qiyin masalalar hal qilindi. 1880-yilda mashhur matematik A.Puankare (1854—1912) «Uch jism harakati» haqidagi qiyin mexanik masalalarni yechishda tasodifiy xarakterda bo'lgan dinamik sistemalarning «qaytalanish» xossalaridan foydalandi. Shu davrda «tasodifiy tanlash» kabi tushunchalarga murojaat ko'payib bordi. Masalan, A.Puankare 1886-yilda chop etgan «Ehtimolliklar nazariyasi» kitobida «[0,1] oraliqdan tasodifiy ravishda tanlangan nuqtaning ratsional songa mos kelishligi qanday ehtimollik bilan ro'y beradi» kabi masalalarga ko'p to'xtalgan. 1888-yilda astronom X.Gyulden (1841—1896) tomonidan yozilgan maqolada, A.Puankare qo'ygan bu masala, sayyoralar harakatlarining «turg'unlik bo'lishi yoki bo'lmasligi» bilan bog'liq ekanligi ko'rsatib o'tilgan.

«Ehtimolliklar taqsimoti» tushunchalari va ular bilan bog'liq metodlar XIX asrning ikkinchi yarmida klassik fizikada va statistik mexanikada keng qo'llanila boshlandi. Masalan, zarrachalarning molekular harakati uchun «Maksvell taqsimoti» (J.Maksvell (1831—1879), mashhur ingliz fizigi), L.Bolsman (1844—1906) tomonidan «o'zgaruvchi o'rta qiymatlar» va «ergodik» prinsiplarini kashf etilganini eslatib o'tish yetarli bo'ladi. Ehtimolliklar nazariyasi va uning metodlarini shu davrdagi rivojlanishiga 1827-yilda «Braun harakati» (R.Braun (1773—1858), ingliz botanigi) nomi bilan atalgan tasodifiy jarayonlarning ochilganligi sezilarli ravishda ta'sir etdi. Bu «harakat»ning matematik asoslari keyinroq mashhur fizik A.Eynshteyn (1879—1955) va uning shogirdi M.Smoluxovskiy ishlarida keltirildi. Braun jarayonlari («harakatlari») A.Bekkeren (1852—1908) tomonidan kashf etilgan jismlarning radioaktivlik xossalarini o'rganishda muhim rol o'ynadi. 1900-yilda esa L.Bashale (1870—1946) «aksiyalarning qiymatini» matematik usul bilan aniqlashda «Braun jarayonlari»dan foydalandi (eslatib o'tish mumkinki, hozirgi zamon moliya matematikasiga L.Bashalening shu ishlari asos bo'ldi).

Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, yuqorida keltirilgan va muhim praktik ahamiyatga ega bo'lgan tasodifiy jarayonlarning mohiyatini «klassik» konsepsiyaga asoslangan ehtimolliklar nazariyasi orqali tushuntirib berish mumkin bo'lmaydigan vaziyat yuzaga keldi. Aynan shu davr oxirida sof matematikada to'plamlar nazariyasini va u bilan bog'liq ravishda «o'lchamlar nazariyasi» shakl topa boshladi. Bu yangi nazariyalar yuqorida keltirilgan va ehtimolliklar nazariyasini «boshi berk» ko'chaga olib kirgan vaziyatini bartaraf etishda muhim omil bo'lib hizmat qildi. Bunda mashhur fransuz matematigi E.Borel (1871—1956) tomonidan «o'lchovli to'plamlar», «to'plamlarning o'lchovi» tushunchalari kiritilishi muhim ahamiyat kasb etdi. To'plamlarning «Borel o'lchovlari» matematikada muhim bo'lgan uzunlik, yuza, hajm tushunchalarini beqiyos umumlashtiradi. E.Borelning bu ishlarida tajribalarning elementar natijalari ixtiyoriy to'plam tashkil etishini hisobga olgan holda bu tajribaning matematik modelini qurish mumkinligiga asos solindi. Xususan, bu modellar berilgan tajribaning cheksiz marta davom ettirish mumkinligi hollari uchun ham mos keladi. Matematik nuqtayi nazardan oxirgi xulosada to'plamlar ustida sanoqli sondagi birlashtirish (qo'shish) va umumlashtirish (ko'paytirish), pirovardida esa, limitga o'tish amallarini bajarish kerakligi e'tirof etiladi. Aytilganlardan tushunarliki, E.Borelning ishlarida ehtimolliklar nazariyasi uchun butunlay yangi konseptual-falsafiy asos solindi. Ayni paytda bular XIX asrning oxirlarida isbotlangan «kuchaytirilgan katta sonlar qonuni» haqidagi teoremada namoyon bo'ldi. Bu teorema ma'lum xossani qanoatlantiradigan haqiqiy sonlar «ko'pligi yoki ozligi» haqida tassavvur hosil qilish imkonini beradi va uni quyidagicha izohlash mumkin:

Aytaylik, haqiqiy son $\omega \in [0,1]$ bo'lib,

$$\omega = 0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$$

bu sonning ikkilik sanoq sistemasidagi yoyilmasi bo'lsin. Ya'ni har qanday n uchun α_n=0 yoki 1. Agar $\upsilon_n(\omega)$ deb birinchi $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ qismida 1 ning takrorlanishi chastotasini belgilasak, u holda

$$\left\{\omega : \upsilon_n(\omega) \to \frac{1}{2}\right\}, \quad n \to \infty$$

to'plamning «Borel o'lchovi» 1 ga teng bo'ladi yoki, aksincha, bu xossani qanoatlantirmaydigan ω lar to'plami uchun bu «o'lchov» 0 ga teng bo'ladi. Bu teorema hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasida «Borelning kuchaytirilgan sonlar qonuni» nomi bilan atalib yuqorida keltirilgan Bernullining katta sonlar qonunini tubdan kuchaytirildi. Haqiqatan ham, Bernulli teoremasi har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\omega : \left|v_n(\omega) - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

ekanligini e'tirof etsa, Borel teoremasi esa

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\omega : \sup_{m\geq n}\left|v_m(\omega) - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

ekanligini tasdiqlaydi.

Mashhur fransuz matematigi A.Lebeg (1875—1941) yuqorida izohlangan E.Borelning ishlarini davom ettirib, haqiqiy funksiyalar nazariyasida o‘lchovli fazolar tushunchasini kiritib, ularda yangi integral hisobini ixtiro qildi.

Xulosa qilib aytish mumkinki, Borelning o‘lchovlar nazariyasi va Lebegning abstrakt integral nazariyasi kelgusida ehtimollik tushunchasi bilan bog‘liq bo‘lgan matematik modellarni o‘rganishda konseptual baza bo‘lib hizmat qildi.

4. To‘rtinchi bosqich (XX asr boshi va o‘rtasi).

XIX asr oxiriga kelib ehtimolliklar nazariyasining sof matematika bilan munosabatlari aniq tus oldi. Bu esa ehtimolliklar nazariyasini mustaqil matematik fan sifatida aksiomatik asosda qayta qurish problemalarini yuzaga keltirdi. Bu problemalar mashhur nemis matematigi D.Gilbert (1862—1943) 1900 -yil 8-avgust kuni II jahon matematiklarining Parijda o‘tgan kongressida qilgan dokladida o‘z aksini topdi. Qizig‘i shundaki, bu olamshumul dokladda D.Gilbert ehtimollik nazariyasini fizik fanlar qatoriga qo‘yib, uni sof matematik nuqtayi nazardan asoslash zarurligini uqtirib o‘tdi.

Ehtimolliklar nazariyasining matematik fan sifatida shakllanishining to‘rtinchi bosqichi — uni logika asosida mustaqil fan ko‘rinishini olish davri hisoblanadi.

D.Gilbert ma’ruzadan ko‘p vaqt o‘tmasdan ehtimolliklar nazariyasini to‘plamlar nazariyasi va o‘lchovlar nazariyasi asosida «matematikalashtirish» harakatlari boshlandi. Lekin bu harakatlarning ko‘pchiligini muvafaqqiyatli deb bo‘lmaydi.

XX asrning o'rtalariga kelib, 1933-yilda mashhur matematik A.N.Kolmogorov (1903—1987) tomonidan taklif qilingan askiomalar sistemasi hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasining asosini tashkil etganligini e'tirof etildi. A.N.Kolmogorov taklif qilgan konsepsiya sodda va bir vaqtni o'zida mukammal xarakterga ega. U

$$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$$

ehtimollik fazosi tushunchasiga asoslanadi. Bu yerda Ω — ixtiyoriy to'plam bo'lib, uning elementlari ω lar ($\omega \in \Omega$) elementar hodisalar sifatida qabul qilinadi. $\mathfrak{F}$ esa Ω bilan bog'liq hodisalar σ-algebrasi. $\mathfrak{F}$-sistema σ-algebra tashkil qilish shartlari (aksiomalari) va $(\Omega, \mathfrak{F})$ o'lchovli fazoda $P(\cdot)$ ehtimollik o'lchovi bo'lish shartlari (aksiomalari) birgalikda Kolmogorov aksiomalar sistemasini tashkil qiladi. Natijalarni oldindan aytish mumkin bo'lmagan tajribalar uchun ehtimollik fazosi $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ matematik asos bo'lib xizmat qiladi (ushbu kitobning 1.4-§ ga qarang).

O'zbekistonda ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika fani

Yuqorida keltirilgan ehtimolliklar nazariyasining shakllanishi va rivojlanishi to'rtinchi davrida (XX arsning 30-yillaridan boshlab) O'zbekistonda ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika sohasida butun dunyoga tanilgan ilmiy maktab yaratildi. Bu maktabning asoschilari, shu sohaning yirik namoyondalari akademiklar Vsevolod Ivanovich Romanovskiy (1879-1954), Toshmuhammad Aliyevich Sarimsoqov (1915—1995), Sa'di Hasanovich Sirojiddinov (1920—1988) edilar. Quyida biz bu buyuk allomalar faoliyati haqida qisqa bo'lsa ham ma'lumotlar berishga harakat qilamiz.

V.I.Romanovskiy 1879-yil 5-dekabrida Qozog'istonning Verniy (hozirgi Olma-ota) shahrida tug'ildi. Uning yoshlik yillaridayoq Romanovskiylar oilasi Toshkentga ko'chib kelgan edi. U o'rta maktabni (aniqrog'i o'sha paytdagi real bilim yurtini) bitirgandan so'ng, Sankt-Peterburg Universitetining fizika-matematika fakultetiga o'qishga kiradi. Universitetda unga mashhur rus matematigi Andrey Andreyevich Markov (1856–1921) ustozlik qilgan. 1904- yilda V.I.Romanovskiy universitetni a'lo baholar bilan bitirgandan so'ng, uni professorlik lavozimiga tayyorlash uchun magistraturaga qabul qilindi (A.A.Markov rahbarligida). V.I.Romanovskiyning ilmiy va pedagogik faoliyati Sankt-Peterburg Universitetida privant-dotsentlik lavozimidan boshlangan (1906-y). Keyinchalik u Varshavadagi Rus uUniversitetida, Rostovning Don Universitetida ishlagandan so'ng, 1917-yili Toshkentga qaytib keladi va mahalliy gimnaziyalarda matematika va fizikadan darslar beradi. 1918-yilda Toshkentda bir guruh o'zbek ziyolilarining tashabbusi bilan hozirgi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti ochildi va tez orada V.I.Romanovskiy bu o'quv maskanida faoliyat ko'rsata boshladi.

V.I.Romanovskiy ko'p qirrali olim bo'lgan. Masalan, uning birinchi dissertatsiyasi mexanikada ko'p uchraydigan differensial tenglamalarni integrallash masalalariga bag'ishlangan. Lekin u uchun ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika asosiy mutaxassislik bo'lgan desak, xato qilmaymiz. U o'zining ustozi A.A.Markov tomonidan kiritilgan «tasodifiy miqdorlarni zanjir arqoni» bog'liq bo'lishligi tushunchasini umumlashtirdi va aniqlashtirdi. V.I.Romanovskiy XX asr boshida R.Frobuonis tomonidan yaratilgan manfiy bo'lmagan matritsalar nazariyasini kengaytirib, uni Markov zanjirlariga tadbiq etdi. Bu ishlar hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasida «Romanovskiyning matritsa metodlari» nomi bilan o'z mavqeyiga ega bo'ldi.

V.I.Romanovskiy haqli ravishda «Matematik statistika»ning mustaqil matematik fan sifatida shakllanishiga asos solgan olimlardan biri hisoblanadi. Bu fikrning isbotini bu sohada birinchi bo'lib rus tilida 1938-yilda Moskvada chop etilgan «Математическая статистика» kitobi (monografiya, 803 bet) V.I.Romanovskiy tomonidan yozilganligida ham ko'rish mumkin. Ayniqsa, bu kitob matematik statistika «soxta fan» deb hisoblanib, quvg'in ostiga olingan paytda chop etilganini hisobga olsak, bu olimning g'oyaviy jihatdan mustahkam mavqeni tanlaganligini inkor etib bo'lmaydi. Aytib o'tilganlar qatorida «Markov zanjirlari» bo'yicha yozilgan birinchi monografik asar ham V.I.Romanovskiy qalamiga tegishli ekanligini eslatib o‘tish kerak bo‘ladi (Дискретные цепи Маркова. Москва, 1949, 507 bet).

V.I.Romanovskiy matematik statistika metodlarini bevosita ishlab chiqarishda (texnikada, qishloq xo‘jaligida) qo‘llash masalalariga juda katta e’tibor bergan va bu sohadagi ishlarni tartibga keltirib, 1947-yilda «Применения математической статистики в опытном деле» deb atalgan kitob-tavsiyanomani yozgan.

V.I.Romanovskiy sermahsul ijodiy shaxs bo‘lishi bilan bir qatorda mashhur pedagog ham bo‘lgan. U ko‘p yillar davomida talabalar uchun matematika va mexanikaning turli sohalari bo‘yicha ma’ruzalar o‘qigan, aspirant va yosh olimlarning ilmiy ishlariga rahbarlik qilgan. Mashhur akademik olimlar T.N.Qori-Niyoziy, T.A.Sarimsoqov, S.H.Sirojiddinovlar bu buyuk olimning shogirdlari bo‘lganlar.

Akademik Toshmuhammad Aliyevich Sarimsoqov 1915-yil 7- sentabrida Andijon viloyatining Shahrixon shahrida tug‘ilgan. Bolalik va o‘smirlik yillari Qo‘qon shahrida o‘tgan. T.A.Sarimsoqovning ilmiy faoliyati O‘rta Osiyo Davlat Universitetida (hozirgi Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti) boshlangan. Dastlabki davrlarda u ehtimolliklar nazariyasini matematik analiz masalalaridagi tadbiqlari bilan shug‘ullangan. Masalan, analizda ko‘p uchraydigan maxsus ko‘phadlarning ildizlarini «tarqoq yoki zich» taqsimlanish hollari T.A.Sarimsoqov tomonidan mukammal o‘rganilgan. Keyingi navbatlarda esa ustozi V.I.Romanovskiyning Markov zanjirlarini matritsa usuli bilan o‘rganish metodlarini kengaytirib umumlashtirishni va ularni holatlari cheksiz (sanoqli yoki kontinium) to‘plamni tashkil qilgan tasodifiy Markov jarayonlarini o‘rganishga tadbiqlari haqidagi muammolar T.A.Sarimsoqov uchun asosiy ilmiy mavzu bo‘lgan. Holatlari uzluksiz to‘plam ((a,b) oraliq) bo‘lgan Markov zanjirlari uchun ehtimolliklar nazariyasining asosiy limit teoremalari — markaziy limit teorema va takroriy logarifm qonunlari o‘rinli bo‘lgan muammolari T.A.Sarimsoqov tomonidan ilk bor o‘rganilgan. Bu muammolarni yechish jarayonida XX asrning birinchi yarmida L.Fredgolm yaratgan integral tenglamalar nazariyasini ehtimollik nazariyasi uchun o‘ziga xos ko‘rinishda talqin etish mumkinligi isbotlandi.

Pirovardida esa, bu ilmiy tadqiqotlar holatlari kontinium to'plamlar bo'lgan Markov jarayonlarini o'rganish uchun «integral tenglamalar metodi»ni yuzaga keltirishga olib keldi. Aytib o'tilgan ilmiy natijalar T.A.Sarimsoqovning 1954-yilda Moskvada chop etilgan «Основы теории Марковских процессов» monografiyasida qayd etildi. Bu monografiya va muallifning taniqli ilmiy jurnallaridagi qator materiallari Markov jarayonlarini o'rganish va ularning tadbiq etish sohalarida yangi istiqbolli yo'nalishlar ochilishiga olib keldi.

O'tgan asrning 60-nchi yillaridan boshlab T.A.Sarimsoqov rahbarligida Toshkentda abstrakt fazolarda ehtimolliklar taqsimoti tushunchalari bilan bog'liq bo'lgan yangi matematik obyektlarni o'rganish ishlari boshlandi. Bu yo'nalishda hozirgi zamon funksional analizi uchun muhim bo'lgan «topologik yarim maydonlar» nazariyasi yaratildi. Bu yangi obyektlar uchun o'ziga xos yaqinlashish tushunchalari va ularga mos keladigan integrallash amallari kiritildi. Oldingi ehtimolliklar nazariyasidan farqli ravishda bu ehtimolliklar fazolarida elementar hodisa, tasodifiy miqdor kabi so'zlarga aniq ma'no beradigan fizik tushunchalarni topish imkoniyati yuzaga keldi. Nazariy fizikaning konkret masalalarida uchraydigan jarayonlarning Gilbert fazolari uchun «kvant ehtimolliklar» matematik modellari mukammal o'rganildi. Eslatib o'tilgan tadqiqotlar asosida 1985-yilda T.A.Sarimsoqovning fundamental «Введение в квантовую теорию вероятностей» (Toshkent, «Fan», 307 b.) monografiyasi yaratildi.

O'zbekistonda «Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika» maktabining yuzaga kelishida akademik Sa'di Hasanovich Sirojiddinovning faoliyati beqiyos hisoblanadi. S.H.Sirojiddinov 1920-yil 10 may kuni Qo'qon shahrida tug'ilgan. 1942-yilda O'rta Osiyo Davlat Universiteti (hozirgi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti)ni a'lo baholar bilan bitirgandan so'ng, 1945-yilgacha harbiy injener-sinoptik vazifasida ishlagan. 1947-yilda V.I.Romanovskiy rahbarligida «Многомерные полиномы Эрмита» nomli kandidatlik dissertatsiyasini himoya qilgan. Bu dissertatsiyada Ermit ko'phadlarining matemtik statistikadagi tadbiqlariga bog'liq masalalar yechilgan. 1948-yilda Toshkentda akademiklar A.A.Kolmogorov, V.I.Romanovskiylarning tashabbusi bilan ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha xalqaro anjuman o'tkazilgan. Bu anjuman paytida yosh olim S.H.Sirojiddinov mashhur matematik A.N.Kolmogorov diqqatiga sazovor ilmiy ma'ruza qilgan. Anjuman oxirida A.N.Kolmogorov unga doktorantura bo'yicha ilmiy rahbar bo'lishga rozilik bergan. Shunday qilib, S.H.Sirojiddinov 1949-1952 yillar davomida Moskvadagi matematika bo'yicha dunyoga mashhur ilmiy markaz — V.A.Steklov nomidagi Matematika Institutida akademik A.N.Kolmogorov rahbarligida doktorant bo'lgan. 1953-yilda shu institutning Ilmiy Kengashida «Предельные теоремы для однородных цепей Маркова» mavzusidagi doktorlik dissertatsiyasini himoya qilgan. Bu himoyaning juda muvafaqqiyatli o'tganini mazkur dissertatsiya bo'yicha akademiklar Yu.V.Linnik, B.V.Gnedenko, M.V. Smirnovlar opponentlik vazifasini bajarganliklarida ham ko'rish mumkin. Haqiqatdan ham, bu dissertatsiyaning birinchi bo'lib bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun markaziy limit teoremasidagi qoldiq hadning nolga intilishi tartibi birjinsli Markov zanjirlari uchun ham bir xil bo'lishligi isbot etilgan.

Bundan tashqari, oddiy Markov zanjirlari A.N.Kolmogorov tomonidan isbotlangan ko'p o'lchovli lokal teoremaning qoldiq hadining asimptotik yoyilmasi topildi. Bu natijalarni olish jarayonida S.H.Sirojiddinov stoxastik matritsalarning spektral nazariyasini kashf etdi va uni analitik metod-xarakteristik funksiyalar metodi bilan moslashtirdi.

1953—1957-yillar davomida S.H.Sirojiddinov ustozi A.N.Kolmogorovning tavsiyasi bilan Moskva Davlat Universitetida professorlik lavozimida ishladi. Bu davrda u tayyor sanoat mahsulot sifatini statistik usullar bilan nazorat qilish, diskret taqsimotlarning o'rta qiymatlari uchun «siljimaydigan» statistik baholar topish masalalari bilan shug'ullandi. Ayniqsa, uzluksiz (vaqt bo'yicha) Markov zanjirlari sxemasi bo'yicha bog'liq bo'lgan miqdorlar yig'indilarining taqsimotlari absolut uzluksiz komponentaga ega bo'lishi haqidagi S.H.Sirojiddinov tomonidan isbotlangan teorema mutaxassislarda katta qiziqish uyg'otdi. (Bu teorema 1958-yil Edenburg shahrida bo'lib o'tgan matematiklarning xalqaro kongressida S.H.Sirojiddinovning ma'ruzasida keltirilgan). Moskva

Davlat Universitetida ishlagan paytlarida S.H.Sirojiddinov ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha yosh mutaxassislar tayyorlashga juda katta e'tibor bergan. O'zlarining ilmiy ishlari bilan shuhrat qozongan professorlar S.A.Ayvazyan, M.L.Meshalkinlar uning shogirdlari bo'lganlar.

S.H.Sirojiddinovning Toshkentga qaytib kelgandan keyingi ilmiy va jamoatchilik faoliyati O'zbekiston Fanlar Akademiyasi Matematika instituti, Toshkent Davlat Universiteti (hozirgi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti) bilan bog'liqdir. Shaxsan uning tashabbusi bilan O'zbekistonda ehtimollik nazariyasi va matematik statistikaning eng zamonaviy yo'nalishlari bo'yicha ilmiy-tadqiqot ishlari boshlandi. Bular qatorida, birinchi navbatda, o'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarni qo'shish nazariyasi, tasodifiy jarayonlar (xususan, tarmoqlanuvchi jarayonlar, ommaviy xizmat ko'rsatish sxemalari, statsionar jarayonlarning ekstremal masalalari), statistik baholarning asimptotik xossalari kabi yo'nalishlarni sanab o'tish kerak bo'ladi.

Akademik S.H.Sirojiddinov O'zbekistonda ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha yetuk mutaxassislar tayyorlash sohasida ham jonbozlik ko'rsatgan. Uning bevosita rahbarligida 60 tadan ko'p nomzodlik, 10 tadan ko'p doktorlik dissertatsiyalari himoya qilingan. Bulardan tashqari, ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika bo'yicha mutaxassislarning Xalqaro Bernulli jamiyatining I kongressi Toshkentda (1986-y.) o'tkazilganligi va bu anjumanda S.H.Sirojiddinov tashkiliy qo'mita raisi bo'lganligi avlodlar tarixida o'chmas xotira bo'lib qoladi.

Ilovalar

1-jadval

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$ funksiyaning qiymatlari

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3856	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3696
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3604	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3189	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	1874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2631	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2466	2444
1,0	2420	2396	2372	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2056	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1624	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1466	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1136	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0308	0297	0290
2,3	0289	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0170	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$$ funksiyaning qiymatlari

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0 7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34164	34850	35083	35134	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41416	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1.6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2.8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49890	49893	49896	49900
3.1	49903	49906	49910	49913	49915	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3.4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3.5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3.6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3.8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4.0	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49998	49998	49998	49998

$x=$	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
$\Phi(x)=$	0,499979	0,499986	0,499991	0,499995	0,499997
$x=$	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
$\Phi(x)=$	0,499998	0,4999987	0,4999992	0,4999995	0,4999997

$$P_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$ ning qiymatlari (Puasson taqsimoti)

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0283	0494	0613
4	0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0153
5	0000	0000	0000	0001	0002	0004	0007	0012	0020	0031
k \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0004
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	0613	1805	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150	0076
4	0153	0902	1660	1954	1755	1339	0912	0573	0337	0189
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0001	0034	0216	0595	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8	0000	0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9	0000	0002	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10	0000	0000	0008	0062	0161	0413	0710	0993	1186	1251
11	0600	0000	0000	0019	0082	0077	0452	0722	0970	1137
12	0000	0000	0000	0006	0034	0113	0264	0481	0728	0946
13	0000	0000	0000	0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14	0000	0000	0000	0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. – М.: УРСС, 2003.

2. *Ширяев А.Н.* Вероятность-1,2. – М.: МСНМО, 2004.

3. *Феллер В.* Ввведение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1,2. – М.: Мир, 1984.

4. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: УРСС, 2005.

5. *Севастьянов Б.А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982.

6. *Ивченко Г.И., Медведьев Ю.И.* Математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1984.

7. *Sirojiddinov S.X., Matatov M.M.* Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. – T.: 1972.

8. *Rasulov A.S., Raimova G.M., Sarimsakova X.Q.* Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. – T.: 2005.

9. *Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1999.

10. *Гмурман В.Э.* Теории вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2003.

11. *Гмурман В.Э.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2004.

12. *Венсель Э.С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1999.

13. *Чистяков В.П.*. Курс теории вероятностей. – М.: 2003.

MUNDARIJA

Sh.Q. Farmonov, R.M. Turgunbayev,
L.D. Sharipova, N.T. Parpiyeva

EHTIMOLLIKLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan pedagogika oliy ta'lim muassasalarining «Matematika va informatika» bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

«Tafakkur-Bo'stoni»
Toshkent – 2012

Muharrir *M. Saparov*
Musahhih *G'. Shirinov*
Sahifalovchi *Sh. Rahimqoriyev*

Litsenziya AI № 190, 10.05.2011-y.
Bosishga ruxsat etildi 10.07.2012. Bichimi 60x84 $^1/_{16}$.
Ofset qog'ozi. TimesUz garniturasi. Bosma t. 13,0.
Adadi 500 nusxa. Buyurtma № T-5.

«Tafakkur-Bo'stoni» nashriyoti.
Toshkent sh., Yunusobod, 9-mavze, 13-uy.

«Tafakkur-Bo'stoni» nashriyoti bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent sh., Chilonzor ko'chasi, 1-uy.

ISBN-978-9943-055-21-6
9 789943 055216

«TAFAKKUR-BO'STONI»
NASHRIYOTI